

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL
FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA
DEPARTAMENTO DE ELECTRONICA Y CONTROL

"CONTROLADORES PARA SISTEMAS BILINEALES"

POR

WILLIAM HERNAN BOADA

TESIS PREVIA A LA OBTENCION DEL TITULO DE INGENIERO
EN ELECTRONICA Y CONTROL

QUITO, FEBRERO 1989

A MI MADRE, HERMANA Y SOBRINA

RECONOCIMIENTOS

Esta tesis, como cualquier otra, no queda bien representada usando el nombre de un solo autor; antes bien, su contenido refleja contribuciones de otras muchas fuentes y sin lo aportado por cada una de ellas, el proyecto habria sido de menor calidad o habria alcanzado un mayor grado de dificultad.

En primer lugar, quiero expresar mis agradecimientos a todos quienes conforman la Escuela Politècnica Nacional, lugar donde adquiri la gran mayoria de mis conocimientos actuales.

En particular, mi mäs sincero agradecimiento al Ing. MARCO BARRAGAN B. por la acertada direcciòn dada a esta tesis, por su apoyo, por el tiempo dedicado a ella y por la confianza dedicada a mi persona.

Finalmente, quiero dejar constancia de mis agradecimientos al Dr. PO OLOF GUTMAN, profesor del Departamento de Control Automático del Instituto Tecnológico de Lund (Suecia), quien me facilitò una valiosa informaciòn referente al tema tratado en esta tesis.

William Hernán Boada

CERTIFICACION

Certifico que el presente trabajo ha sido realizado en su totalidad por el Sr. WILLIAM HERNAN BOADA bajo mi completa direcci3n.



Ing. Marco Barragan B.

INDICE GENERAL

<u>INTRODUCCION</u>	pag. 01
<u>CAPITULO 1.- "GENERALIDADES"</u>	
1.1.- CONCEPTOS FUNDAMENTALES	pag. 09
1.2.- ¿ POR QUE LOS SISTEMAS BILINEALES ?	pag. 15
1.3.- CONCEPTOS SOBRE ESTABILIDAD	pag. 19
<u>CAPITULO 2.- "DEFINICIONES Y PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA</u>	
2.1.- DEFINICION DEL TIPO DE SISTEMA BILINEAL	pag. 24
2.2.- PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	pag. 26
2.3.- CAMBIO DEL PUNTO DE OPERACION	pag. 28
2.4.- UN CASO DE INESTABILIDAD	pag. 29
<u>CAPITULO 3.- "ESTABILIZACION POR CONTROL REALIMENTADO"</u>	
3.1.- EL TEOREMA BASICO	pag. 32
3.2.- <u>A</u> ES ESTRICTAMENTE ESTABLE	pag. 34
3.3.- <u>A</u> POSEE VALORES PROPIOS SOBRE EL EJE IMAGINARIO	pag. 35
3.4.- <u>A</u> ES ESTRICTAMENTE INESTABLE	pag. 42
3.5.- CASO DE UNA SOLA ENTRADA	pag. 54

CAPITULO 4.- "CONTROLADORES ALTERNATIVOS"

4.1.- APROXIMACION NO-CUADRATICA DE LA FUNCION DE LYAPUNOV	pag. 63
4.2.- CONTROLADORES CONSTANTES	pag. 71
4.3.- METODO DEL PLANO DE FASE, SISTEMA BILINEAL DYADIC	pag. 77
4.4.- APROXIMACION A LA TEORIA DE LIE	pag.102

CAPITULO 5.- "CONTROLADORES ADAPTIVOS Y

MULTIPLICATIVOS INDEPENDIENTES"	pag.104
---------------------------------------	---------

CAPITULO 6.- "UN EJEMPLO DE APLICACION:

 CONTROL DEL NIVEL DE NEUTRONES
 EN UN REACTOR DE FISION NUCLEAR"

6.1.- PRELIMINARES	pag.107
6.2.- CONTROL CUADRATICO	pag.111
6.3.- CONTROL DE DIVISION	pag.114
6.4.- CONTROL BANG-BANG	pag.117
6.5.- CONCLUSIONES	pag.118

CAPITULO 7.-

"SUMARIO, DISCUSION Y CONCLUSIONES"	pag.120
---	---------

<u>APENDICE A.-</u>	pag. 125
<u>APENDICE B.-</u>	pag. 126
<u>APENDICE C.-</u>	pag. 127
<u>APENDICE D.-</u>	pag. 128
<u>REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS.-</u>	pag. 130



I N T R O D U C C I O N

CONTROLADORES PARA SISTEMAS BILINEALES

El arte de controlar los sistemas Lineales está bien desarrollado, pudiendo decirse que está casi completo. Encambio, cuando debemos realizar el control de sistemas no-lineales, debemos basarnos en conocimientos escasos y fragmentarios, a pesar de que existen ciertos métodos de diseño no sistemáticos de control.

Es seguro decir que la teoría de control de los sistemas lineales está muy adelantada en aplicaciones industriales. En la actualidad, con el uso de microcomputadoras, el ingeniero práctico de control puede resolver sus problemas de control no-lineal de varias maneras, por ejemplo: mediante la introducción de no-linealidades, estructuras variables de control, etc.. Pero, en la mayoría de los casos no existe un análisis teórico que sirva de soporte para la implementación de estas secuencias. En consecuencia, la práctica está más adelantada que la teoría.

En procesos industriales, en general, existe una separación entre el CONTROL LOCAL (ejecutado por reguladores lineales) y el CONTROL GLOBAL (por ejemplo, star-ups, amplios cambios en los valores de referencia, y shut-downs), los cuales son ejecutados en un modo ON/OFF por medio de controladores programables. En estos dos modos de operación, algunas veces la operación del uno impide la operación del otro. Entonces, la teoría de control no-lineal podría ser el puente que une dichas separaciones, de tal manera que, las tareas de control Local y Global sean ejecutadas por el mismo controlador.

Con estos puntos en mente, es una necesidad vital extenderse en el conocimiento de los sistemas de control no-lineales.

La presente tesis trata los problemas en el diseño de control para unos pocos sistemas no-lineales, los cuáles son análogos a los sistemas lineales.

Estabilización de un sistema de lazo cerrado y optimización en el dominio del tiempo (time domain sense) son los criterios de diseño.

El teorema da suficientes condiciones para proponer controladores estabilizadores realimentados.

De esta manera, la presente tesis cubre algunos puntos vacíos en el diseño de control para sistemas no-lineales.

Centraremos nuestra atención en el control del siguiente sistema Bilineal.

$$\dot{X} = A.X + \sum_{i=1}^m [(B_{1i}.X + B_{2i}).U_i] \quad (1)$$

Este sistema es de especial interés por las siguientes razones:

- a) Esta es una "simple clase de Sistemas no-lineales", ligeramente un poco más complejos que un sistema Lineal completamente entendido. Conocer cómo controlar esta clase de sistemas, es el paso lógico en el desarrollo de la teoría de control.

- b) Algunos sistemas no-lineales pueden ser aproximados por modelos bilineales. Especialmente, una aproximación bilineal puede ser más aceptable dentro de una región más grande del espacio de estado y alrededor de un punto de operación, que la obtenida con un sistema lineal.
- c) Muchos procesos de control de la vida real pueden ser modelados como sistemas Bilineales. Por ejemplo, el control del nivel de neutrones en un reactor de fisión nuclear [ref. 2]; España [ref. 1], propone un modelo bilineal para un proceso de destilación. Modelos bilineales para sistemas Biológicos pueden ser encontrados en Mohler [ref. 3].

En la actualidad, no existen condiciones necesarias y suficientes para la controlabilidad y estabilización de Sistemas Bilineales. Consecuentemente, no existe una teoría completa para el Control de Procesos Bilineales.

La mayoría de investigaciones realizadas en este campo cubren determinados casos especiales. Algunas de éstas son examinadas en ésta tesis.

El principal esfuerzo de estas investigaciones está orientado a los controladores realimentados. Moylan [ref. 4] y Jacobson [ref. 5] presentan ciertas leyes de control para el caso en que \underline{A} es una matriz estable.

En la presente tesis, estos resultados son extendidos para el caso en que, bajo ciertas condiciones, \underline{A} es inestable.

Nuevos resultados, que cubren casos especiales, son presentados.

El caso en que los controles adaptivo y multiplicativo actúan independientemente es tratado de una manera breve.

En esta tesis se demostrará que una constante lineal más leyes cuadráticas realimentadas obligan a que las trayectorias del sistema (1) caigan dentro de una región arbitraria alrededor del origen, asumiendo la no-intersección del conjunto $X^T \cdot P \cdot (B_1 \cdot X + B_{10}) = 0$, (para alguna matriz simétrica P , definida positiva) sobre una región de interés; y un diferente controlador es dado cuando, $B_i = B_{10} \cdot (C_i)^T$, para algún i .

Las leyes de Control propuestas son aplicadas a un ejemplo de simulación de control de neutrones de un reactor de fisión nuclear.

Puedo sugerir que futuros trabajos deben ser emprendidos con el objeto de cubrir los siguientes tópicos:

- a) El problema de la controlabilidad debe ser resuelto.
- b) Sistemas Bilineales específicos y modelos de procesos de la vida real deben ser estudiados.
- c) Una visión más general de los siguientes sistemas debe ser considerada:

$$\dot{X} = P(X) + \sum_{i=1}^m [B_i \cdot X \cdot U_i + B_{0i} \cdot U_i]$$

donde: $P(X)$ son polinomios homogéneos de grado n .

$U_1=U_1(X)$ es un polinomio de grado $\leq (n-1)$.

Esta clase de sistemas esta limitado (cerrado) a una realimentación de estado, lo cuál no es el caso de los sistemas Bilineales.

La presente tesis está organizada del siguiente modo:

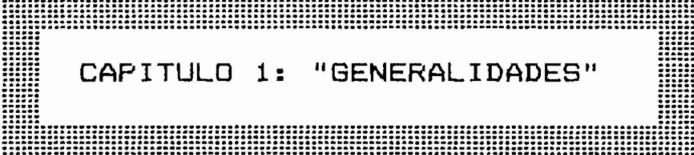
El capítulo-1, de una manera breve enúncia ciertos conceptos básicos vinculados con el estudio de los sistemas Bilineales y también se indica la importancia que tienen dichos sistemas.

El capítulo-2, contiene las definiciones, el planteamiento del problema y una discusión sobre ellos.

El capítulo-3, presenta la "solución cuadrática realimentada de Moylan [ref. 4] y Jacobson [ref. 5]", cuando la matriz \underline{A} es estrictamente estable y se discute algo de cómo trabajaría cuando \underline{A} no es estrictamente estable.

El capítulo-4, está dedicado a otros controladores y sistemas especiales, sobre los cuales un controlador constante y el nuevo "controlador de división" son aplicados. Otros aspectos adicionales son discutidos.

El capítulo-5, trata el caso en que los controladores aditivo y multiplicativo son independientes.



CAPITULO 1: "GENERALIDADES"

En el presente capítulo, de una manera rápida, vamos a enunciar ciertos conceptos básicos que se hallan vinculados al estudio de los Sistemas Bilineales, como también, indicar la importancia que tienen dichos sistemas en el desarrollo de la ingeniería y de la propia vida diaria. Adicionalmente, se recordarán ciertos conceptos relacionados con la estabilidad de sistemas.

1.1.- "CONCEPTOS FUNDAMENTALES"

Por algún tiempo, los Sistemas Lineales, variables o invariantes en el tiempo, fueron estudiados extensamente mediante la descripción de fenómenos físicos, simplificando el análisis y desarrollo de la teoría. Sin embargo, la teoría de los sistemas modernos hizo posible una expansión y dependencia de las investigaciones, haciendo que los límites intrínsecos de los modelos lineales sean más y más evidentes, especialmente en los campos de la Biología, Fisiología, Ecología y Socio-Economía, debido al incremento del número de sistemas científicos a través de todo el mundo.

Consecuentemente, el estudio de los sistemas no-lineales empezó a tener más actividad al vencer las bien conocidas dificultades analíticas que ellas implicaban.

Como es bien sabido, un sistema no-lineal continuo n-dimensional puede ser descrito mediante la siguiente ecuación dinámica:

$$\dot{X} = f(X, U, t) \quad (1.1)$$

donde, para cada t , $X(t) \in \mathbb{R}^n$ es el estado y $U(t) \in \mathbb{R}^m$ es la entrada de control.

Podemos reducir la ecuación (1.1) simplemente asumiendo linealidad de f con respecto al estado o al control.

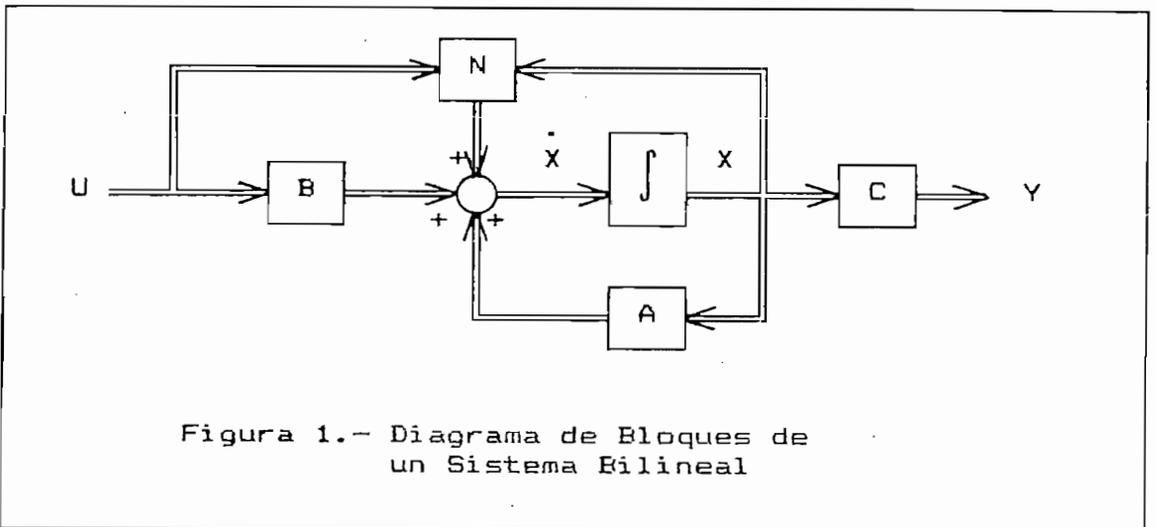
- 3) U_c , el subconjunto de una función continua por partes en U_b .
- 4) U_d , el subconjunto de una función constante por partes en U_c .
- 5) U_e , el subconjunto de una función en U_d con rango en $\{U \in \mathbb{R}^p : |U_i| = 1; i=1, 2, \dots, p\}$ (controles bang-bang).

Adicionalmente, podemos definir una variable de salida $Y \in \mathbb{R}^q$; la cual, por simplicidad podemos considerarla como linealmente dependiente del estado.

$$Y(t) = C(t) \cdot X \tag{1.6}$$

donde: para cada t , $C(t) \in \mathbb{R}^{q \times n}$.

La figura 1. representa el diagrama de bloques del sistema descrito por las ecuaciones (1.4) y (1.6).



La definición (1.4) y (1.6) del Sistema Bilineal puede ser más específica, si introducimos hipótesis adicionales.

Los Sistemas Bilineales pueden ser definidos como "Variables en el Tiempo" o "Invariables en el Tiempo" de acuerdo a que A, B, C, N sean o no dependientes del tiempo t .

Además, podemos llamarlos "Homogéneos en el Estado" si $B=0$, "Homogéneos en la Entrada" si $A=0$, y "Estrictamente Bilineales" si $A=B=0$.

Una clase interesante de Sistemas Bilineales Invariables en el Tiempo y Homogéneos en el Estado se obtienen cuando las matrices A, N_1, N_2, \dots, N_p son semi-simétricas.

En este caso, para algún control U , el estado estará sobre la esfera $\|X(t)\| = \|X(0)\|$. Lo cual, es una característica básica de los Sistemas Físicos en los que la Energía es Conservada.

Finalmente, existe una cierta clase de Sistemas Bilineales directamente relacionados con otra clase de Sistemas Lineales en el Control, llamados "SISTEMAS CUADRATICOS EN EL ESTADO" y descritos por la siguiente ecuación,

$$\dot{X} = A(t).X + B(t).U + N(t).X.U + Q(t).X.X \quad (1.7)$$

Todo Sistema Cuadrático posee una representación como un Sistema Bilineal dentro de un lazo de realimentación Lineal, tal como se indica en la Figura 2. (y reciprocamente).

1.2.- ¿POR QUE LOS SISTEMAS BILINEALES?

Existen varias motivaciones teóricas y prácticas por la que debemos adherirnos al estudio de los Sistemas Bilineales.

La primera de todas, por las diversas maneras de definirlos, puesto que, al presentarse un tipo de no-linealidad en sus ecuaciones dinámicas, su propia estructura realiza las simplificaciones y en algún sentido el cierre de una linealidad. Por otro lado, la estructura no-lineal ofrece varias ventajas sobre el caso Lineal, ya sea desde el punto de vista de Controlabilidad, Optimización y Modelación.

Con respecto a Controlabilidad, nótese que para el Sistema Bilineal (1.4) la evolución del estado de las entradas de control no sólo se añade por medio del término $B(t).U$, sino que además se multiplica por el término $N(t).X.U$; por lo tanto, en un Sistema Bilineal, el control será más efectivo que en un sistema Lineal en donde únicamente existe una acción aditiva.

Vale indicar que un Sistema Lineal con entrada de Amplitud Restringida en general no es controlable; mientras que, en los Sistemas Bilineales la controlabilidad puede ser efectuada por leyes de control aditivas y multiplicativas.

Con respecto a la Optimización, un Sistema de Control Bilineal puede ofrecer mejores ventajas y posibilidades que un Sistema Lineal Simple.

Dentro de algunas áreas, en [ref. 10] un Modelo Bilineal es propuesto para describir el comportamiento de los organos sensoriales. La alta adaptabilidad y sensibilidad de estos organos puede ser explicada por un control automático sobre una curva de respuesta, el cual se halla centrado con la máxima sensibilidad, en el valor medio de los estímulos de entrada.

Suponiendo que los sensores dinámicos pueden ser representados por una ecuación diferencial de primer orden, si X es la señal incremental enviada al sistema nervioso central, debido a un incremento del estímulo U , el sensor dinámico estará descrito por:

$$\dot{X} = a.X + b.U + n.U. |X| \quad (1.8)$$

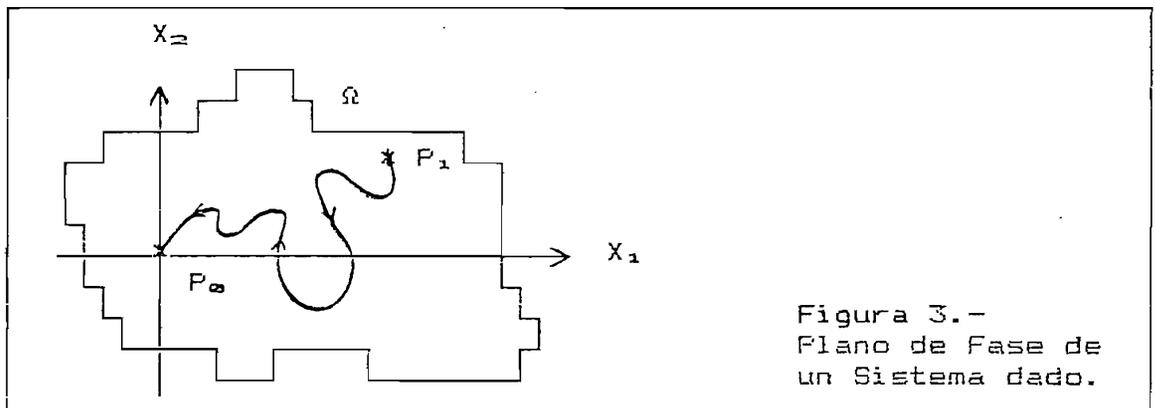
donde: a , b , n son coeficientes adecuados.

Resulta que el sensor tiene un Modelo Bilineal para cada una de las regiones en que $X \geq 0$, ó, $X \leq 0$.

Un importante ejemplo de Modelos Bilineales en el campo de la Ingeniería es el siguiente.

Sea un motor DC, denotado por i_a (corriente de estator) y V_a (voltaje de rotor) como variables de control, y por i_r (corriente de rotor) y ω (velocidad angular) como variables de estado; entonces, el modelo es representado mediante las siguientes ecuaciones diferenciales:

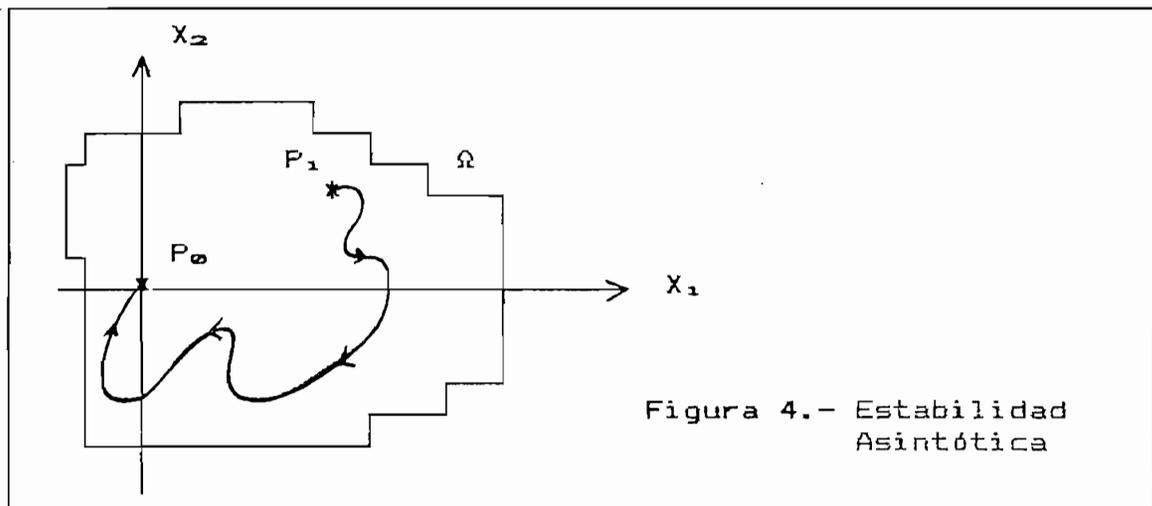
Con estas premisas, podemos abordar el problema. Así, suponiendo que el origen es un punto singular (o, punto de equilibrio) y que Ω es una región cualesquiera alrededor del punto singular, si por medio de una perturbación (de valor muy pequeño) se traslada el punto de equilibrio desde el origen hacia otro punto, situado en el interior de la región Ω , se dice que el Sistema No-Lineal es "Estable en la Región Ω ".



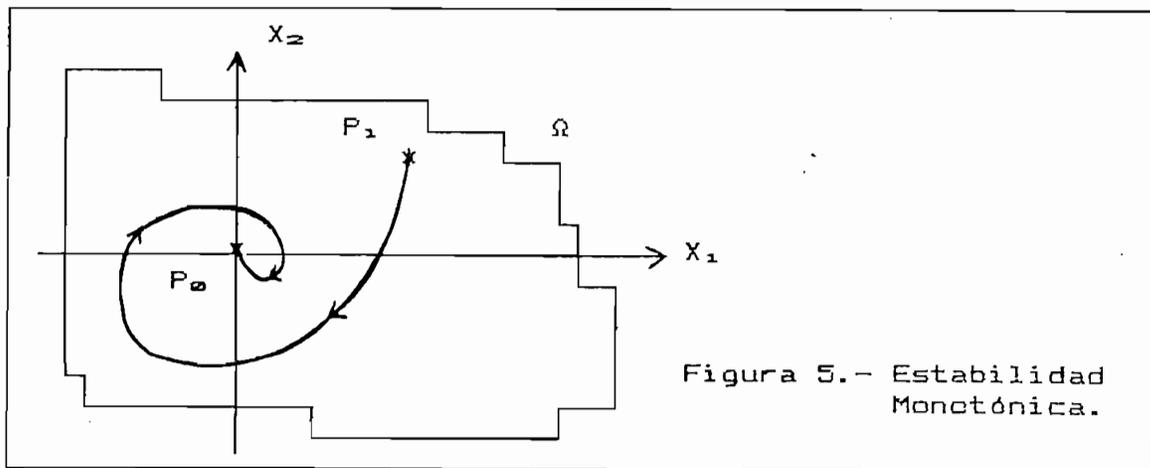
El grado de estabilidad del Sistema depende del valor que tenga la región Ω .

- Cuando Ω es muy pequeño, se estará hablando de "Estabilidad Local".
- Cuando Ω es finito, se estará hablando de "Estabilidad Finita".
- Cuando Ω abarca todo el estado, se hablará de una "Estabilidad Global" o simplemente "Estabilidad".

Se dice que un Sistema es "ASINTOTICAMENTE ESTABLE", para cualquier grado de Estabilidad, cuando el estado no sólo que permanece dentro de la región Ω sino que además tiende a volver al punto de equilibrio original.



Finalmente, se dice que un Sistema es "MONOTONICAMENTE ESTABLE", para cualquier grado de Estabilidad, cuando el estado se mantiene dentro de la región Ω y tiende a volver al punto de equilibrio original, y además, la distancia respecto al punto de equilibrio original siempre disminuye.



Por todas las razones mencionadas en el presente capítulo, la atención de científicos e ingenieros a través de todo el mundo está enfocada, cada vez más, al estudio de los Sistemas Bilineales.

Entonces, una vez entendida la importancia de los Sistemas Bilineales, dentro del desarrollo de la vida misma, se acepto la grave responsabilidad de realizar un trabajo de investigación de esta clase de Sistemas.

La tesis que se muestra en los siguientes capítulos, sugerirá una técnica de diseño de "Controladores Realimentados" que permitirá estabilizar una cierta clase de Sistemas Bilineales Continuos.

2.1.- DEFINICION DEL TIPO DE SISTEMA BILINEAL.

DEFINICION.-

El Sistema Bilineal que se considera en todo el capítulo 5 es el siguiente,

$$\dot{X} = A.X + \sum_{i=1}^m (B_i.X.U_i) + B_0.U \quad (2.1)$$

donde

$$X = [X_1 \ X_2 \ \dots \ X_n]^T \in \mathbb{R}^n$$

$$U = [U_1 \ U_2 \ \dots \ U_m]^T \in \mathbb{R}^m$$

A , B_i son matrices constantes de apropiadas dimensiones.

La ecuación (2.1) puede ser reescrita como:

$$\dot{X} = A.X + G(X).U \quad (2.2)$$

donde

$$G(X) = [B_1.X + b_{10} \ ; \ B_2.X + b_{20} \ ; \ \dots \ ; \ B_m.X + b_{m0}] \quad (2.3)$$

donde, b_{i0} es la i -ésima columna de $B_0 = [b_{10} \ ; \ b_{20} \ ; \ \dots \ ; \ b_{m0}]$

Notese que el Control U , actúa aditiva y multiplicativamente de manera simultánea.

Otra manera de reescribir el Sistema sería por,

$$\dot{X} = A.X + \sum_{i=1}^m (B_i.X + b_{i0}).U_i \quad (2.4)$$

OBSERVACION 2.1:

La ecuación (2.1) puede ser reescrita como

$$\dot{Z} = F \cdot Z + \sum_{i=1}^m (H_i \cdot Z \cdot U_i) \quad (2.5)$$

con

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} \quad ; \quad H_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_{i0} & B_i \end{bmatrix} \quad ; \quad Z = \begin{bmatrix} 1 \\ X \end{bmatrix}$$

Brockett [ref. 12] demostró que la ecuación (2.5) no está en una forma controlable. Esto nos hace pensar que la forma (2.5) no ofrece ventajas cuando tratamos de hallar controles realimentados; por lo tanto, no debe ser usada.

Cuando un Sistema de la forma.

$$\dot{X} = A \cdot X + \sum_{i=1}^m (B_i \cdot X \cdot U_i) \quad (2.6)$$

se lo puede denotar con la ecuación (2.1) con $B_0=0$, y no con la ecuación (2.5).

2.2.- PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.

SUPOSICION:

Consideraremos la clase de entradas que hacen que la solución continua de (2.1) sea única.

PROBLEMA:

Hallar un control de estado realimentado que estabilice el Sistema expresado en la ecuación (2.1).

Este problema es de especial interes porque:

- 1) Un modelo Bilineal de un proceso dado puede cubrir adecuadamente una región mucho mayor del Espacio de Estado que la que se cubriría con un Sistema Lineal, y en consecuencia, soportar perturbaciones más elevadas.
- 2) Dentro de la misma corriente, un cambio del punto de operación debería requerir una descripción del modelo Bilineal (revisar [ref. 01]).
- 3) Trabajos sobre observadores para Sistemas Bilineales están siendo emprendidos, y en consecuencia, salidas realimentadas pueden ser cubiertas por la anterior aproximación. El siguiente observador fue estudiado por Derese [ref. 13].

$$\dot{\hat{X}} = A \cdot \hat{X} + G(\hat{X}) \cdot U + H(Y - C \cdot \hat{X}) \quad (2.7)$$

La estabilidad es una propiedad necesaria de un buen controlador. Sin embargo, el resultado que se presenta a continuación ofrece al diseñador un poco de libertad para seleccionar otras propiedades de interes.

DEFINICION:

Dado el Sistema (2.1) con la condición inicial $x(t_0)=x_0$. Se dice que Ω es una Región Estabilizable (Null), si para cada $x_0 \in \Omega$ y para cada punto w en las cercanías del origen, existe una función localmente limitada $U(t)$ para $t \geq t_0$, y un intervalo de tiempo finito T , tal que la solución de la ecuación 2.1 con $U(t)$ como entrada exista y se cumpla que $X(t) \in W$ para todo $t > (t_0+T)$.

Cuando $\Omega = R^n$ se dice que el Sistema es Estabilizable.

No existen criterios generales para enunciar condiciones necesarias y suficientes para la estabilización, ni tampoco para la contrabilidad.

Condiciones suficientes (y necesarias para el caso de un escalar U) son dadas por Mohler [ref. 02].

Hirschorn [ref. 14] determinó el conjunto permisible para una gran cantidad de Sistemas Bilineales mediante la utilización de la Teoría de Lie.

Hermann [ref. 15] presenta algunos resultados para sistemas no-lineales, que son aplicables para el caso de los Sistemas Bilineales.

La estabilización del Sistema (2.1) en general implica que el Sistema, $\dot{X} = A \cdot X + B_0 \cdot U$, es estabilizable; puesto que, cerca

del origen los términos $\sum_{i=1}^m (B_i \cdot X \cdot U_i)$ con $U_i = 0(X)$ son muy

pequeños en comparación con el término $B_0 \cdot U$. Una excepción se tiene cuando $B_0 = 0$, mientras el Sistema siga siendo estable.

2.3.- CAMBIO DEL PUNTO DE OPERACION.

El anterior concepto de estabilización puede ser aplicado a otros puntos estacionarios del Espacio de Estado.

Dado el Sistema expresado por la ecuación (2.1) y suponiendo que U_0 y X_0 son conocidos, de tal forma que

$$\dot{0} = A.X_0 + \sum_{i=1}^m (B_i.X_0.U_{0i}) + B_0.U_0 \tag{2.8}$$

donde, U_{0i} es el i-ésimo componente de U_0 .

Entonces mediante la introducción de: $\Delta X = X - X_0$

$$\Delta U = U - U_0$$

la ecuación (2.1) puede ser reescrita como,

$$\begin{aligned} \Delta \dot{X} = & \left[A + \sum_{i=1}^m (B_i.U_{0i}) \right] \Delta X + \left[\sum_{i=1}^m (B_i.\Delta X.\Delta U_i) \right] \\ & + \left[\sum_{i=1}^m (B_i.X_0 + b_{i0}).\Delta U_i \right] \end{aligned} \tag{2.9}$$

Podemos observar que (2.9) describe un Sistema Bilineal de la misma estructura que (2.1) alrededor del nuevo punto de operación X_0 . (En sistemas no-lineales más generales, cuando cambia el punto de operación, la estructura del sistema no necesariamente es preservada).

Por supuesto que no todos los puntos del Espacio de Estado son puntos estacionarios. En la práctica, sin embargo, el proposito del Control es, mantener al Sistema en su punto de operación, o llevarlo hacia uno nuevo.

2.4.- UN CASO DE INESTABILIDAD.

Estabilidad alrededor de un punto de operación no implica estabilidad alrededor de otro punto de operación.

EJEMPLO 2.2:

$$\dot{X} = X + X \cdot U + U \quad ; \quad X \in \mathbb{R}^1, \quad U \in \mathbb{R}^1 \quad (2.10)$$

los puntos de equilibrio se tienen cuando $\dot{X} = 0$

$$0 = X_e + X_e \cdot U_e + U_e \quad (2.11)$$

$$0 = (1 + U_e) \cdot X_e + U_e$$

$$X_e = - \left[\frac{U_e}{1 + U_e} \right]$$

Notese que, $X_e \in \{X \mid X < (-1); X \in \mathbb{R}\}$

La ecuación del Sistema alrededor del nuevo punto de operación, empleando la ecuación (2.9) es,

$$\Delta \dot{X} = (1 + U_e) \cdot \Delta X + \Delta X \cdot \Delta U + (X_e + 1) \cdot \Delta U \quad (2.13)$$

Para $X_e = 0$ y $U_e = 0$ (tomados de la ecuación (2.10)), el Sistema no es estabilizable. Reescribiendo la ecuación (2.8),

$$\dot{X} = X + (X+1) \cdot U \quad (2.14)$$

y dejando que la condición inicial sea $X(0) < (-1)$.

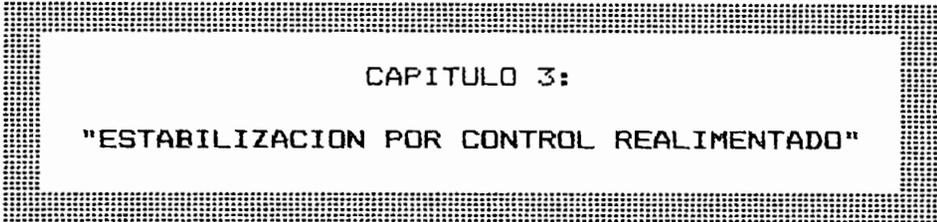
De ahí, $U(t)$ no limitada puede tomar el Estado a través del punto (-1) , porque,

$$\lim_{X \rightarrow -1} \dot{X} = (-1) \quad (2.15)$$

como la acción de control crece por $X = (-1)$

Sin embargo., para $X_e = -2$ y $U_e = -2$ la ecuación (2.13) da,

$$\Delta \dot{X} = - \Delta X + \Delta X \cdot \Delta U - \Delta U \quad (2.16)$$



CAPITULO 3:
"ESTABILIZACION POR CONTROL REALIMENTADO"

En el presente capítulo se presenta la solución cuadrática realimentada para los casos en que la matriz \underline{A} es estrictamente estable, puramente imaginaria y estrictamente inestable. Adicionalmente, se presentará el caso de sistemas de una sola entrada.

3.1.- EL TEOREMA BASICO:

Por conveniencia consideremos la ecuación (2.2)

$$\dot{X} = A.X + G(X).U = A.X + \sum_{i=1}^m (B_i.X + b_{i0}).U_i$$

La siguiente suposición fue adoptada por Moylan [ref.04] y Jacobson [ref.05].

TEOREMA 3.1. (Jacobson).-

Supongase que existe una función radialmente infinita $\bar{\alpha}(X) > 0$, $\bar{\alpha}: R^n \rightarrow R$, la cual es continuamente diferenciable, tal que, $(\nabla_x \bar{\alpha})^T . A . X \leq 0$

Supongamos además que no existe un $X \in R^n$ diferente de cero para el cual $(\nabla_x \bar{\alpha})^T . A . X$, y, $(\nabla_x \bar{\alpha})^T . G(X)$ son ambos cero.

Entonces,

$$U^*(t) = - (1/2) . G^T(X) . \nabla_x \bar{\alpha}(X) \tag{3.1}$$

estabiliza global y asintóticamente la ecuación (2.2).

OBSERVACION 3.2. (Jacobson).-

Bajo las condiciones del teorema 3.1, el control (3.1) minimiza el criterio de performance

$$V\{X(t_0), U(\cdot), t_0, \infty\} = \int_{t_0}^{\infty} \{m[X(t)] + U^T(t) . U(t)\} . dt \tag{3.2}$$

dentro de las funciones de control de estabilización.

Aquí,

$$m(X) = - (\nabla_x \bar{\alpha})^T . A . X + (1/4) . (\nabla_x \bar{\alpha})^T . G . G^T . \nabla_x \bar{\alpha} \tag{3.3}$$

La suposición asegura que, $m(X) > 0$, $X < 0$.

Demostración (Bosquejo):

Considere el sistema de lazo cerrado

$$\dot{X} = A.X + G(X).U^* = A.X - (1/2) \left\{ G(X).G^T(X).\nabla_x \bar{Q}(X) \right\} \quad (3.4)$$

$\bar{Q}(X)$ es una función de Lyapunov para este sistema porque:

1) $\bar{Q}(X) > 0$

2) $\dot{\bar{Q}}(X) = \nabla_x^T \bar{Q}(X) \cdot \left\{ A.X - (1/2) \cdot G(X) \cdot G^T(X) \cdot \nabla_x \bar{Q}(X) \right\}$

$$\dot{\bar{Q}}(X) = \nabla_x^T \bar{Q}(X) \cdot A.X - 2 \cdot \left\{ (1/4) \cdot \nabla_x^T \bar{Q}(X) \cdot G(X) \cdot G^T(X) \cdot \nabla_x \bar{Q}(X) \right\}$$

$$\dot{\bar{Q}}(X) = - \left\{ m(X) + 2 \cdot U^{*T} \cdot U^* \right\} < 0, \quad X \neq 0 \quad (3.5)$$

Moylan [ref.04] asegura que el control óptimo realimentado que minimiza (3.2) está dado por la ecuación 3.1, donde $\bar{Q}(X)$ es una solución positiva definitiva de la ecuación estática no-lineal de Riccati (3.3).

El $\bar{Q}(X)$ asumido en el teorema es la solución.

3.2.- "A" ES ESTRICTAMENTE ESTABLE:

Cuando A es estrictamente estable entonces existe una $P=P^T>0$, para el cual $\bar{Q}(X)=X^T.P.X$ satisface el teorema 3.1 :

$$1) \bar{Q}(X) > 0$$

$$2) \nabla_x \bar{Q}.A.X = 2.X^T.P.A.X = X^T.(P.A + A^T.P).X \quad (3.8)$$

Cuando A es estrictamente estable existirá un $P=P^T>0$ tal que,

$$(P.A + A^T.P) = -Q, \quad Q > 0 \quad (3.9)$$

Entonces,

$$\nabla_x \bar{Q}.A.X = -X^T.Q.X < 0, \quad \forall X < 0 \quad (3.10)$$

3) $\nabla_x \bar{Q}.A.X$, y, $\nabla_x^T \bar{Q}.G(X)$ son diferentes de cero para algún $X < 0$, porque, $(\nabla_x \bar{Q}.A.X) < 0, \quad \forall X < 0$

De esta manera, para el presente caso:

$$U_i^* = - (B_i.X + b_{i0})^T.P.X, \quad i=1,2,\dots,m \quad (3.11)$$

es un control de estabilización.

Es posible seleccionar una adecuada Q de la ecuación (3.9) para obtener un satisfactorio criterio de comportamiento (3.2).

Observación 3.3.-

Trivialmente, cuando A es estrictamente estable, el control $U=0$ estabiliza el sistema.

3.3.- "A" TIENE VALORES PROPIOS SOBRE EL EJE IMAGINARIO:

Cuando A tiene valores propios sobre el eje imaginario algunas veces es posible hallar un $P=P^T > 0$ que produzca que el control (3.11) estabilice el sistema.

Por motivos de simplificación primeramente asumiremos que todos los valores propios de A caen sobre el eje imaginario. En este caso, no existe una $P=P^T > 0$ tal que $(PA+ATP) < 0$. Sin embargo, existe un $P=P^T > 0$ tal que $(PA+ATP) = 0$.

Este caso es tratado en los teoremas 3.4, 3.7 y 3.8

Para otros casos $P=P^T > 0$, $(PA+ATP)$ es indefinida.

Este caso no difiere del caso en que A tiene nodos estrictamente inestables y nosotros debemos recurrir a los resultados endebles de la sección 3.4.

TEOREMA 3.4:

Dado el sistema

$$\dot{X} = A \cdot X + \sum_{i=1}^m (B_i \cdot X + b_{i0}) \cdot U_i \quad (3.12)$$

donde todos los valores propios de A son imaginarios puros.

Si existe una $P=P^T > 0$ tal que $(PA+ATP) = 0$ y no existe un X diferente de cero para el cual,

$$(B_i \cdot X + b_{i0})^T \cdot P \cdot X, \quad i=1,2,\dots,m \quad (3.13)$$

todos son cero,

Entonces, el control

$$U_i^* = - (B_i X + b_{i0})^T \cdot P \cdot X, \quad i=1,2,\dots,m \quad (3.14)$$

estabiliza asintóticamente el sistema dado en (3.12).

Demostración:

Cuando todos los valores propios de A son imaginarios puros existe una $P=P^T > 0$ tal que $(PA+A^TP) = 0$, (ver la ref.16).

Aplicando el teorema 3.1 tenemos que:

Siendo $\tilde{x} = X^T \cdot P \cdot X$ una función candidata de Lyapunov

$$\dot{\tilde{x}} = \underbrace{X^T \cdot (PA+A^TP) \cdot X}_{= 0} - 2 \cdot \sum_{i=1}^m \underbrace{\{(B_i X + b_{i0})^T \cdot P \cdot X\}^2}_{< 0} < 0$$

El teorema 3.4 da unicamente ciertas condiciones que son facilmente verificables.

Para el caso de una sola entrada, por ejemplo, nosotros exigimos que B este definida y que $b=0$ para que las condiciones del teorema 3.4 sean satisfechas.

Observe la sección 3.5, en donde, el caso de una sola entrada es examinado.

Cuando A tiene algunos valores propios estrictamente estables y algunos valores propios puramente imaginarios $P=P^T > 0$ puede ser seleccionada para que $(PA+A^TP) \leq 0$.

Este caso es tratado en el teorema 3.5 y en la observación 3.10.

Para otros casos, debemos basarnos en lo indicado en la sección 3.4.

TEOREMA 3.5:

Dado el Sistema

$$\dot{X} = A.X + \sum_{i=1}^m (B_i X + b_{i0}) . U_i \quad (3.15)$$

donde todos los valores propios de A tienen partes reales negativas.

Si existe una $P=P^T > 0$ tal que $(PA+A^TP) \leq 0$, y tal que,

$$\begin{bmatrix} (B_1.X+b_{10})^T.P.X \\ (B_2.X+b_{20})^T.P.X \\ \vdots \\ (B_m.X+b_{m0})^T.P.X \end{bmatrix} \langle > 0 \text{ para } \{ X | X \langle > 0, X^T(PA+A^TP)X = 0 \} \quad (3.16)$$

Entonces, el control

$$U_i^* = - (B_i.X+b_{i0})^T.P.X, \quad i=1,2,\dots,m \quad (3.17)$$

estabiliza asintóticamente el sistema (3.15).

Demostración:

Sea $\tilde{X}=X^T.P.X$ una función candidata de Lyapunov,

$$\dot{\tilde{X}} = \underbrace{X^T(PA+A^TP)X}_{= 0} - 2 \sum_{i=1}^m \underbrace{\{(B_i X + b_{i0})^T P X\}^2}_{\langle > 0} < 0 \quad (3.18)$$

OBSERVACION 3.6:

Un procedimiento similar al indicado en la observación 3.17 puede ser empleado para determinar una adecuada P.

Aun cuando si $P=P^T>0$ cumple que $(PA+A^TP)\leq 0$ pero las condiciones de (3.16) fallan, el control (3.17) debería todavía estabilizar el sistema. Esto se debe a que las trayectorias del sistema autónomo $\dot{X}=A.X$ cuando $U=0$ deberán "ayudar" a la estabilización.

Casos especiales cuando esto es verdad y cuando A tiene valores propios puramente imaginarios son presentados en el teorema 3.7 y 3.8. El teorema 3.8 es una extensión del caso en que A posee algunos valores propios estrictamente estables y algunos puramente imaginarios dentro de la observación 3.10.

TEOREMA 3.7. (Slemrod - ref.17):

Dado el sistema,

$$\dot{X} = AX + BXU, \quad X \in \mathbb{R}^{2n}, \quad U \in \mathbb{R} \quad (3.19)$$

donde, $A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -J & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -H & 0 \end{bmatrix}$

I , es la matriz unitaria n/n dimensional

H , es una matriz n/n

J , es la matriz n/n diagonalizable con valores propios positivos.

Sea $P=P^T>0$ tal que $(PA+A^TP)=0$, y, $W=\{X \mid (X^T B^T P X)=0\}$

Sea $S=\{X_0 \in W \mid [\exp(A.t).X_0] \in W, t \in (-\infty, +\infty)\}$

Si $S \neq \{0\}$ entonces $U_1^* = -X^T . B^T . P . X$ estabiliza asintóticamente y globalmente el sistema dado.

Slemrod [ref.17] presenta algunos métodos para determinar S .

TEOREMA 3.8. (Brockett - ref.18):

Supongamos que A tiene valores propios puramente imaginarios $\lambda_i(A)$, y que, $\{\lambda_i(A) + \lambda_j(A)\} \neq \lambda_k(A)$, para todo i, j, k . Asumiendo que $[A, b]$ es un par controlable. Entonces, existe una matriz $P=P^T > 0$ tal que $(PA+A^TP)=0$ y $U^* = -(BX+b)^TPX$ hacen que la solución nula de, $\dot{X} = AX + (BX+b)U$ tenga estabilidad asintótica en un gran rango.

Observación 3.9:

Puesto que A tiene entradas reales; A , $n \geq 2$ no es permitido que tenga valores propios iguales a cero si las condiciones del teorema 3.8 son satisfechas.

Observación 3.10:

$$\text{Si, } A = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline 0 & A_2 \end{array} \right]$$

Donde A_1 posee valores propios puramente imaginarios y A_2 es estrictamente estable, entonces el teorema 3.8 ayuda a mantenerla.

Para concluir la presente sección, a continuación se presentan unos pocos ejemplos en los cuales el teorema 3.4 es aplicado.

Ejemplo 3.11.- (Jacobson - ref.05):

Sea el siguiente sistema,

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot X \cdot U_1 + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot X \cdot U_2 \quad (3.20)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{X} = A \cdot X + B_1 \cdot X \cdot U_1 + B_2 \cdot X \cdot U_2 \\ A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

Escogo, $P=P^T=I>0$, y aplico la ecuación (3.17)

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} U_1^* = - [B_1 \cdot X]^T \cdot P \cdot X = - 2 x_1 x_2 \\ U_2^* = - [B_2 \cdot X]^T \cdot P \cdot X = (x_1)^2 - (x_2)^2 \end{array} \right. \quad (3.21)$$

Notese que se satisfacen las condiciones del teorema 3.4, puesto que U_1^* y U_2^* nunca son cero simultáneamente. Por lo tanto, los controles obtenidos estabilizan (3.20).

Ejemplo 3.12.-

En este ejemplo se indica el caso en que el teorema 3.5 y la observación 3.10 son aplicadas.

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot X + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot X \cdot U \quad (3.22)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{X} = A \cdot X + B_1 \cdot X \cdot U_1 \\ A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

Los valores propios de A son: $\lambda_1=0$, $\lambda_2=-1$

Seleccionando, $P=P^T=I>0$, tenemos que,

$$X^T[PA+A^TP]X = -2 \cdot (x_2)^2$$

Por lo tanto, $U_1^* = -[B_1 X + b_{10}]^T P X$,

$$U_1^* = -[B_1 X]^T P X = -(x_1)^2 \quad (3.23)$$

satisface el teorema 3.5, puesto que,

$$U < 0, \text{ cuando, } X^T[PA+A^TP]X = 0, X < 0 \quad (3.24)$$

En consecuencia, el control (3.23) estabiliza asintóticamente el sistema (3.22).

3.4.- "A" ES ESTRICTAMENTE INESTABLE:

En la sección previa se indicó que cuando A es estrictamente estable es siempre posible hallar un control estabilizador realimentado mediante la ecuación (3.11); y que cuando A posee valores propios imaginarios, algunas veces es factible de realizar este requerimiento.

Cuando A tiene algunos valores propios estrictamente inestables existe una función de Lyapunov $\tilde{Q}(X) = X^T \cdot P \cdot X$ que permite obtener una estabilidad asintótica mediante el teorema 3.1. La razón es que existen algunos "X" en la vecindad del origen para el cual $[X^T(PA+ATP)X] > 0$ y aún mas si

$$U^{*T} \cdot U^* = \sum_{i=1}^m \{X^T \cdot P \cdot (B_i X + b_{i0})\}^2 < 0$$

dentro del conjunto

$$\{X | X < 0, X^T(PA+ATP)X \geq 0\},$$

$$\dot{\tilde{Q}} = X^T(PA+ATP)X - (2 \cdot U^{*T} \cdot U^*) > 0$$

para algún "X" de una vecindad muy pequeña alrededor del origen.

A continuación se dan algunos teoremas que tienen que ver con la estabilización para el presente caso.

TEOREMA 3.13:

Dado el siguiente sistema

$$\dot{X} = A.X + \sum_{i=1}^m (B_i.X + b_{i0}).U_i \quad (3.25)$$

donde, las partes reales de los valores propios de A son negativas, cero o positivas.

Si existe una $P=P^T > 0$ tal que,

$$\begin{bmatrix} (B_1.X + b_{10})^T.P.X \\ (B_2.X + b_{20})^T.P.X \\ \vdots \\ (B_m.X + b_{m0})^T.P.X \end{bmatrix} < 0 \text{ para } \{X | X < 0, X^T(PA + A^TP)X \geq 0\} \quad (3.26)$$

Entonces, $\forall \epsilon > 0$, existira un $\alpha > 0$ tal que, el control

$$U_i^* = -\alpha.(B_i.X + b_{i0})^T.P.X, \quad i=1,2,\dots,m \quad (3.27)$$

causa que el estado de (3.25) ingrese en la vecindad ϵ alrededor del origen; es decir, estabiliza al sistema dado en (3.25).

Demostración:

Sea el sistema de lazo cerrado

$$\dot{X} = f(X) = A \cdot X + \sum_{i=1}^m (B_i X + b_{i0}) \cdot U_i, \quad i=1,2,\dots,m \quad (D.1)$$

con la condición inicial $X(0) = X_0$

reemplazando (3.27) en (D.1) tenemos que

$$\dot{X} = A \cdot X - \alpha \cdot \sum_{i=1}^m (B_i X + b_{i0}) \cdot (B_i X + b_{i0})^T \cdot P \cdot X$$

Sea $\mathcal{Q}(X) = X^T \cdot P \cdot X > 0$ la función candidata de Lyapunov.

Entonces, debemos hallar las condiciones necesarias para que se cumpla que $\dot{\mathcal{Q}}(X) < 0$

$$\dot{\mathcal{Q}}(X) = \dot{X}^T \cdot P \cdot X + X^T \cdot P \cdot \dot{X}$$

$$\begin{aligned} \dot{X}^T \cdot P \cdot X &= \{ A \cdot X - \alpha \cdot \sum_{i=1}^m (B_i X + b_{i0}) \cdot (B_i X + b_{i0})^T P X \}^T \cdot P \cdot X \\ &= X^T A^T P X - \alpha \cdot \sum_{i=1}^m [(B_i X + b_{i0})^T P X]^T \cdot (B_i X + b_{i0})^T \cdot P \cdot X \\ &= X^T A^T P X - \alpha \cdot \sum_{i=1}^m X^T P^T \cdot (B_i X + b_{i0}) \cdot (B_i X + b_{i0})^T \cdot P \cdot X \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X^T \cdot P \cdot \dot{X} &= X^T P \cdot \{ A \cdot X - \alpha \cdot \sum_{i=1}^m (B_i X + b_{i0}) \cdot (B_i X + b_{i0})^T \cdot P \cdot X \} \\ &= X^T P A X - \alpha \cdot \sum_{i=1}^m X^T P \cdot (B_i X + b_{i0}) \cdot (B_i X + b_{i0})^T \cdot P \cdot X \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\dot{\mathcal{Q}}(X) = X^T (PA + A^T P) X - \alpha \cdot \sum_{i=1}^m X^T (P^T + P) (B_i X + b_{i0}) (B_i X + b_{i0})^T \cdot P \cdot X$$

puesto que $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz simétrica definida positiva, se demuestra que:

$$P = P^T, \quad (P + P^T) = 2 \cdot P$$

Reemplazando estas dos igualdades en la anterior ecuación de $\dot{\bar{Q}}(X)$, tenemos que:

$$\dot{\bar{Q}}(X) = X^T(PA+A^TP)X - 2 \cdot \alpha \cdot \sum_{i=1}^m X^TP \cdot (B_i X + b_{i0}) \cdot (B_i X + b_{i0})^T \cdot PX$$

Facilmente se puede demostrar que,

$$X^TP \cdot (B_i X + b_{i0}) = (B_i X + b_{i0})^T \cdot PX$$

es decir,

$$\{X^TP(B_i X + b_{i0})\}^2 = \{(B_i X + b_{i0})^T PX\}^2 = X^TP(B_i X + b_{i0})(B_i X + b_{i0})^T PX$$

En consecuencia,

$$\dot{\bar{Q}}(X) = X^T(PA+A^TP)X - 2 \cdot \alpha \cdot \sum_{i=1}^m \{(B_i X + b_{i0})^T PX\}^2, \quad \forall \|X\| > \epsilon \quad (3.28)$$

Si consideramos unicamente aquellas clases de entradas que hacen que la solución de (3.25) sea única, tenemos que: dado un $\epsilon > 0$, existirá un

$\alpha > \text{constante} \cdot (1/\epsilon^2)$

(3.29)

tal que, $\dot{\bar{Q}}(X) < 0$ dentro del conjunto $\{X \mid \|X\| > \epsilon\}$

Observación 3.14:

Notese que el teorema 3.13 indica la estabilización pero NO indica que el sistema resultante sea asintóticamente estable o solamente estable.

Normalmente es imposible garantizar estabilidad asintótica mediante el incremento de α en la ecuación (3.27). Este efecto es demostrado a continuación.

Dado el sistema (3.25) y una P que cumpla con las condiciones del teorema 3.13.

Sea, $B_0 = [b_{10} \ b_{20} \ \dots \ b_{n0}]$

Aun si,

$$\bar{A}(\alpha) = (A - B_0 B_0^T P \alpha) \quad (3.30)$$

es una matriz estabilizable para todo $\alpha \geq N > 0$, la estabilidad asintótica de (3.25) con el control (3.27) para alguna constante $\alpha > N$ no puede ser proveída en general.

Por medio de la teoría de Sistemas Lineales [Egardt, ref.19] es conocido que los valores propios de $\bar{A}(\alpha)$ tienden a $-\infty$ y a los ceros de $B_0^T P (sI - A)^{-1} B_0$ cuando α tiende a ∞ .

(3.31)

Asuma que $\dot{X} = \bar{A}(\alpha) X$ es asintóticamente estable para todo $\alpha > N$.

(3.32)

Aplicando el control (3.27) con una constante $\alpha > N$ sobre el proceso (3.25). El sistema de lazo cerrado llega a ser,

$$\dot{X} = \bar{A}(\alpha) \cdot X + g(X) \cdot \alpha \quad (3.33)$$

con

$$g(X) = - \sum_{i=1}^m \{B_i X X^T B_i^T + B_i X b_{10}^T + b_{10} X^T B_i^T\} \cdot P \cdot X \quad (3.34)$$

Es claro que $\|g(X)\| < (c_2 \cdot \|X\|^2)$ para alguna constante $c_2 > 0$ y para un X suficientemente pequeño.

Debido a la suposición (3.32) para cada $W=W^T > 0$ nosotros podemos hallar una $Q=Q^T$ tal que,

$$Q \cdot \bar{A}(\alpha) + \bar{A}^T(\alpha) \cdot Q = -W < 0 \quad (3.35)$$

Seleccionando una W que genere una Q de acuerdo a (3.35).

Sea, $V=X^T \cdot Q \cdot X$ la función candidata de Lyapunov para (3.33).

Entonces,

$$\dot{V} = - X^T \cdot W \cdot X + 2 \cdot X^T \cdot Q \cdot g(X) \cdot \alpha \quad (3.36)$$

Es claro que existirá un $\epsilon_1 > 0$ tal que $\dot{V} < 0$ cuando

$$X \in S = \{x \mid \|X\| < \epsilon_1\} \quad (3.37)$$

puesto que $W > 0$ y $\|X^T \cdot Q \cdot g(X)\| < (c_3 \cdot \|X\|^3)$ para un $\|X\|$ lo suficientemente pequeño.

Sin embargo, no existe garantía de que las regiones estabilizables definidas por (3.28) y (3.37) cubran todo el espacio de estado. Es decir, ϵ_1 de (3.37) debería ser mucho más pequeño que ϵ de (3.28).

Observando (3.29), es posible decrementar ϵ de (3.28) para incrementar α , observar (3.29). En consecuencia, también se decrementaría ϵ_1 de (3.37), puesto que (3.27) y (3.36) dependen del mismo α .

También debemos atender el incremento de ϵ_1 de (3.37) mediante la selección de $w_1 > w$. Sin embargo, el Q_1 resultante de (3.35) debe ser $Q_1 > Q$, puesto que $\bar{A}(\alpha)$ tiene valores propios finitos para todo α , [ver (3.31)].

En consecuencia, un incremento de ϵ_1 en (3.37) no puede ser garantizado, puesto que depende de w y Q que figuran en (3.36).

LEMMA 3.15, (Yasuda - ref.20):

Dado el sistema (3.25)

Sea

$$B_0 = [b_{10} | b_{20} | \dots | b_{m0}] \quad (3.38)$$

Si $[A, B_0]$ es un par estabilizable, entonces, existirá un control lineal retroalimentado

$$U = -K^T X \quad (3.39)$$

y un $\epsilon > 0$ tal que (3.25) es asintóticamente estable al usar el control (3.39) para todas las condiciones iniciales del conjunto

$$\{ X \mid \|X\| < \epsilon \} \quad (3.40)$$

Demostración:

La prueba es fácilmente ejecutada mediante la aplicación del teorema de Lyapunov-Poincaré [ref.21].

DISEÑO 3.16.:

Dado el sistema (3.25), asuma que existe una $P=P^T>0$ que satisface el teorema 3.13.

Asuma que $[A, B_0]$ es un par estabilizable.

Entonces, la siguiente secuencia de control estabilizará asintóticamente (3.25):

- 1) Seleccione una matriz K que haga que $(A-B_0K^T)$ sea una matriz asintóticamente estable.

Calcule un ϵ , que defina el conjunto $\{X \mid \|X\| < \epsilon\}$ con el cual $U=-K^T.X$ estabiliza asintóticamente (3.25) de acuerdo con el lemma 3.15.

- 2) Seleccione un α tal que el control (3.27) obligue al estado de (3.25) a caer dentro del conjunto $\{X \mid \|X\| < \epsilon\}$.

Esto es posible de acuerdo con lo indicado en el teorema 3.13.

- 3) Inicie la controlabilidad de (3.25) con el control (3.27). Luego que el estado este dentro del conjunto $\{X \mid \|X\| < \epsilon\}$, switchee al control lineal $U=-K^T.X$

Observación 3.17.:

Un criterio suficiente para cumplir con las condiciones del teorema 3.13 es el siguiente procedimiento, el cual puede ser ejecutado numericamente:

Calcule,

$$W = \text{MAXIMO} \quad \text{MINIMO} \quad \sum_{i=1}^m \{(B_i X + b_{i0})^T \cdot P \cdot X\}^2 \quad (3.41)$$

$$P = P^T > 0 \quad X \in D \cap H_p$$

donde: D es la región de interes,

$H_p = \{X | X < 0, X^T (PA + A^T P) X \geq 0\}$ con el criterio de parada $W \geq \delta$, para algun $\delta > 0$.

La restricción $X \in H_p$ tiene una gran cantidad de formas.

H_p es un doble cono, es decir si $X \in H_p$ entonces $(\alpha \cdot X) \in H_p$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Un algoritmo que permite resolver numericamente (3.41) puede ser hallado en Polak [ref.22].

Ejemplo 3.18.-

Este es un caso en el que se aplica el teorema 3.13 puesto que $U^* \langle 0$ para un $X \langle 0$:

$$\begin{cases} \dot{X} = A.X + B_1.X.U_1 + B_2.X.U_2 \\ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (3.42)$$

Escogiendo $P=I$, las condiciones del teorema 3.13 son satisfechas, y U_1, U_2 pueden ser calculadas a partir de (3.27).

Mediante sencillos calculos se demostrará que el sistema definido en (3.42) es forzado a caer en el interior del conjunto $\{X \mid (x_1)^2 + (x_2)^2 < \epsilon^2\}$, para $\alpha > (1/\epsilon^2)$.

$$\implies \begin{cases} U_1^* = -\alpha \cdot (B_1 X)^T \cdot I \cdot X = -2 \cdot \alpha \cdot x_1 \cdot x_2 \\ U_2^* = -\alpha \cdot (B_2 X)^T \cdot I \cdot X = \alpha \cdot [(x_1)^2 - (x_2)^2] \end{cases} \quad (3.43)$$

$$\bar{Q}(X) = X^T \cdot P \cdot X$$

$$\dot{\bar{Q}}(X) = X^T (PA + A^T P) X - 2 \cdot \alpha \cdot \sum_{i=1}^m \{(B_i X + b_{i0})^T \cdot P \cdot X\}^2, \quad \|X\| >$$

$$\dot{\bar{Q}}(X) = 2 \cdot [(x_1)^2 + (x_2)^2] \cdot \{1 - \alpha \cdot [(x_1)^2 + (x_2)^2]\} \quad (3.44)$$

$$\dot{\bar{Q}}(X) < 0 \implies \{1 - \alpha \cdot [(x_1)^2 + (x_2)^2]\} < 0$$

$$\alpha \cdot [(x_1)^2 + (x_2)^2] > 1$$

$$\alpha \cdot r^2 > 1, \quad (r)^2 = (x_1)^2 + (x_2)^2$$

$$\text{Sea, } \alpha > (1/\epsilon^2) \quad (3.45)$$

Notese que el diseño 3.16 no es aplicable para el caso presente, puesto que $B_0=0$.

Ejemplo 3.19.-

Este es otro caso en que el teorema 3.13 es aplicado.

Sea el siguiente sistema:

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{X} &= A \cdot X + (B_1 X + b_{10}) \cdot U_1 + (B_2 X + b_{20}) \cdot U_2 & (3.46) \\ A &= \begin{bmatrix} 1/6 & 1 \\ 0 & 1/6 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}, \quad b_{10} = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad b_{20} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \end{aligned} \right.$$

Notese que, $B_0 = [b_{10} / b_{20}]$

Seleccionando $P=I$ y aplicando el teorema 3.13 tenemos que,

$$\begin{bmatrix} [B_1 X + b_{10}]^T \cdot I \cdot X \\ [B_2 X + b_{20}]^T \cdot I \cdot X \end{bmatrix} \langle \rangle 0 \text{ para } \{X \mid X \langle \rangle 0, X^T (PA + A^T P) X \geq 0\}$$

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 5(x_1) + 2(x_2) - 3 \\ 2(x_1) + (x_2) - 2 \end{bmatrix}^T \cdot X \\ \begin{bmatrix} 4(x_1) + 5(x_2) + 2 \\ 5(x_1) + 4(x_2) - 2 \end{bmatrix}^T \cdot X \end{bmatrix} = 0, \text{ solo para } X=0 \text{ y } X = \begin{bmatrix} -1.0 \\ 4.0 \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

Recordemos que, $X^T (PA + A^T P) X \geq 0$

$$(x_1)^2 + 6(x_1)(x_2) + (x_2)^2 \geq 0$$

$$\text{Notese que, } [X^T (PA + A^T P) X] \Big|_{X^T = [-1 \quad 4]} \approx -7 < 0 \quad (3.48)$$

Entonces, los controles

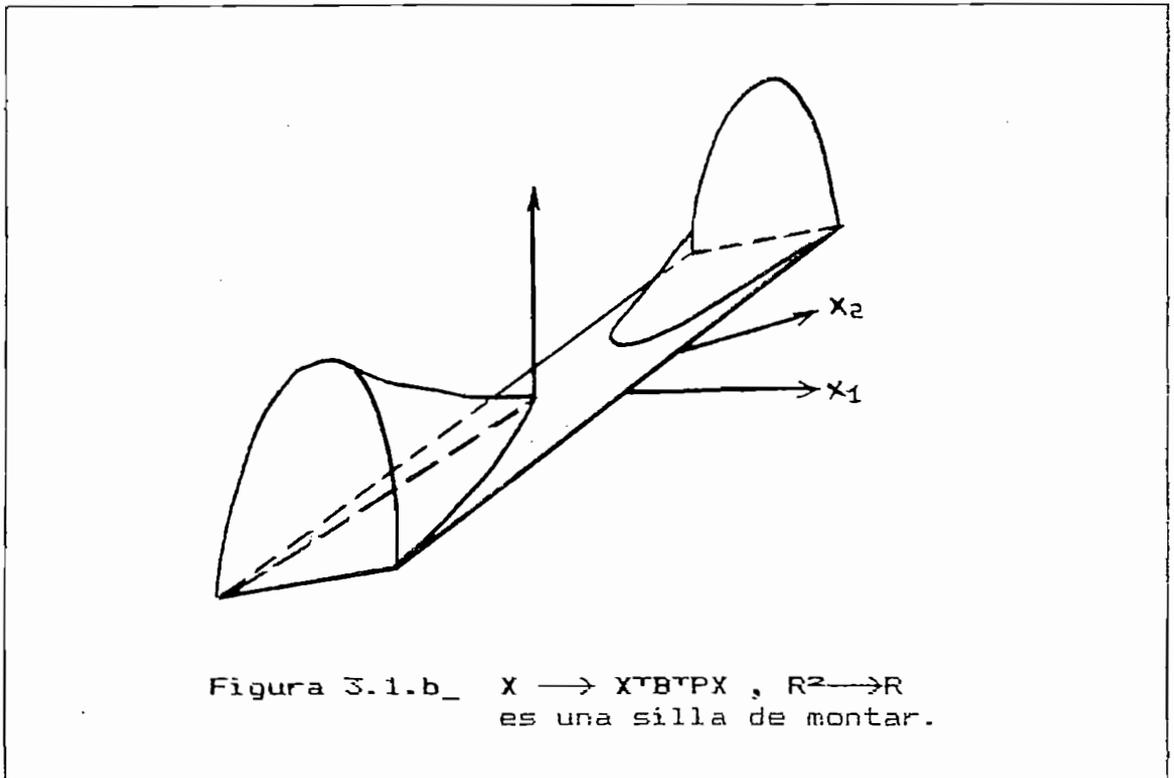
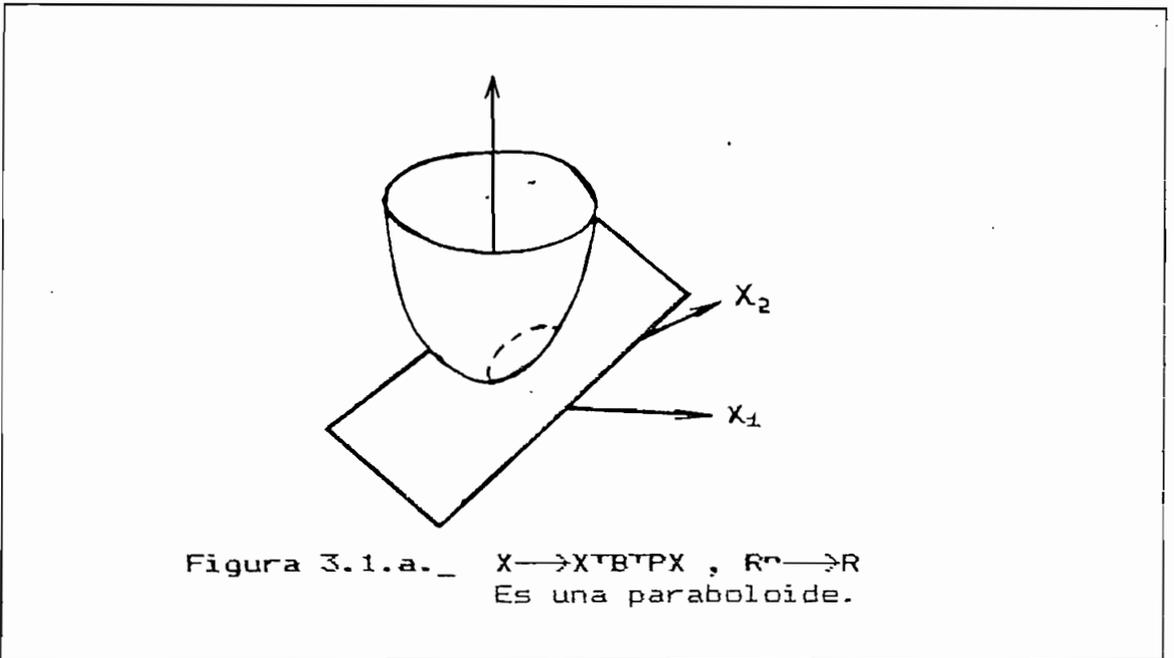
$$U_1 = -\alpha \cdot (B_1 X + b_{10})^T \cdot P \cdot X = -\alpha \cdot \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot X + \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}^T \cdot X \quad (3.49)$$

$$U_2 = -\alpha \cdot (B_2 X + b_{20})^T \cdot P \cdot X = -\alpha \cdot \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \cdot X + \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}^T \cdot X \quad (3.50)$$

obligarán al estado de (3.46) a juntarse al origen, siempre y cuando, un α lo suficientemente grande es seleccionado. Es decir, la estabilización de (3.46) será lograda.

Notese que $[A, B_0]$ es un par estabilizable, en el sentido de la teoría de Sistemas Lineales.

En consecuencia, el diseño 3.16 puede ser aplicado al presente ejemplo.



A partir del teorema 3.13 y aplicando la ecuación (3.27) al caso de una sola entrada, se nota que $U^*=0$ para algun $X \neq 0$, si y solo si, la ecuación (3.52) es satisfecha.

Nosotros percibimos que $U^*=0$ para algun $X \neq 0$, excepto cuando $X^T \cdot B^T \cdot P \cdot X$ es una paraboloides y $b=0$. (3.55)

Lo cual es indicado en la figura 3.2.

Esta figura corresponde al sistema,

$$\dot{X} = AX + BXU \tag{3.56}$$

con una B que satisface la ecuación (3.53.a).

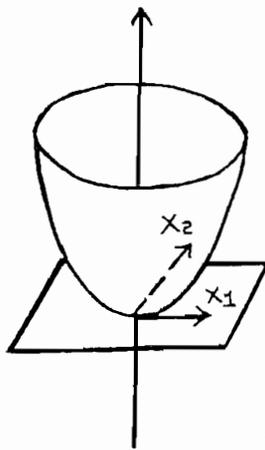


Figura 3.2. $X \rightarrow X^T B^T P X$ es una paraboloides y, $X \rightarrow b^T P X = 0$, puesto que $b=0$

El teorema 3.13 aplicado al caso de una sola entrada sugiere que existe una $P=P^T > 0$ tal que $U^* = -(\alpha \cdot X^T \cdot B^T \cdot P \cdot X)$ estabiliza el sistema (3.56).

Sin embargo, en el presente caso tambien existe un control constante U_c que hace al sistema (3.56) asintoticamente estable.

Ejemplo 3.21:

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot X + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot X \cdot U \quad (3.57)$$

Es estabilizable por,

$$U^* = -(\alpha X^T B^T P X) = -\alpha \cdot X^T \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot X, \quad \alpha > 0 \quad (3.58)$$

Observación 3.22.-

En el caso de que $X^T B^T P X$ sea una paraboloides y $b \neq 0$ existirá un $\alpha > 0$ tal que $U^* = -\alpha \cdot (BX+b)^T \cdot P X$ cause que el estado del sistema (3.51) alcance alguna cercanía o el interior del elipsoide

$$\{Y \mid Y^T B^T P Y = -b^T P Y\} \quad (3.59)$$

Esto es a causa de la función de Lyapunov $\bar{x} = X^T P X$ del sistema (3.51) con el control $U^* = -\alpha \cdot (BX+b)^T P X$,

$$\dot{\bar{x}} = X^T (PA + A^T P) X - 2 \cdot \alpha \cdot (X^T P \cdot (BX+b))^2 < 0 \quad (3.60)$$

Una mínima superficie en la vecindad del elipsoide (3.59) es proveída al seleccionar un α lo suficientemente grande.

El controlador $U^* = -\alpha \cdot (BX+b)^T \cdot P X$ es perfectamente bueno para el caso del elipsoide (3.59).

$$\text{Note que el punto, } X = -B^{-1} \cdot b \quad (3.61)$$

es el punto de control donde alguna acción de control se desvanece, cayendo sobre el elipsoide (3.59).

El efecto de los controladores constantes sobre el sistema es cubierto en el ejemplo 4.19.b.

Considere,

$$\dot{Z} = B.Z \quad (3.65)$$

Sea, $\tilde{x} = Z^T B Z$ la función candidata de Lyapunov

$$\dot{\tilde{x}} = Z^T . (PB + B^T P) . Z = 0$$

En consecuencia, el sistema lineal (3.65) es estable, pero no asintóticamente estable.

Al tratar de estabilizar el sistema (3.62) con el controlador

$$\left\{ \begin{array}{l} U^* = -\alpha . (BX + b)^T . P X \\ (PB + B^T P) = 0 \end{array} \right. \iff U^* = -\alpha . b^T . P . X \quad (3.67)$$

no necesariamente funciona.

La razón es que, $U^* = 0$ dentro del hiperplano perpendicular a $b^T . P$, (revisar la ecuación (3.52)).

Entonces, el teorema 3.13 no necesariamente es aplicable.

Sin embargo, Yasuda [ref.20] indica una manera de estabilizar el sistema (3.62) bajo ciertas suposiciones.

TEOREMA 3.24. - (Yasuda - 1977):

Si $[A, b]$ del sistema (3.62) es un par estabilizable y existe un $P = P^T > 0$ conjuntamente con un vector L que cumple que,

$$\{ P . (A + bL^T) + (A + bL^T)^T . P \} < 0 \text{ , y , } (PB + B^T P) = 0$$

Entonces, el control retroalimentado $U = L^T . X$ estabiliza asintóticamente el sistema.

Demostración:

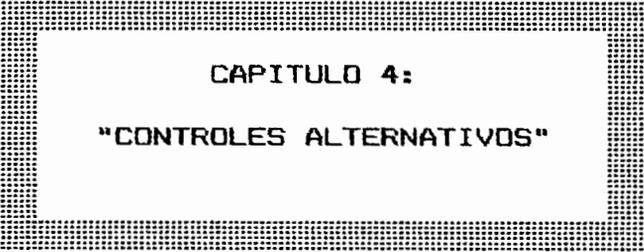
Aplicando el control retroalimentado $U=L^T.X$ a (3.62), y dado el sistema de lazo cerrado,

$$\dot{X} = AX + (BX+b).L^T.X \quad (3.68)$$

Sea, $\mathcal{Q}=X^T.P.X > 0$, la función de Lyapunov

$$\dot{\mathcal{Q}} = 2.X^T.P.(AX + (BX+b)L^T.X) = 2.X^T.P.(A+bL^T).X < 0$$

utilizando las condiciones del teorema.



CAPITULO 4:
"CONTROLES ALTERNATIVOS"

4.1.- APROXIMACION NO-CUADRATICA DE LA FUNCION DE LYAPUNOV.

Como se vio la esencia de las secciones 3.4 y 3.5, como quedó obvio que la acción de control debe ser dependiente del orden del control.

Los controladores presentados anteriormente fallan cuando existe un X tal que $G(X).U^* = 0$.

Nótese que hasta el momento se han usado funciones cuadráticas de Lyapunov $\bar{Q}(X) = X^T.P.X$ para generar el control U^* .

A continuación se indican las diferentes maneras en que el problema ha sido tratado por diferentes autores, particularmente para el caso de una sola entrada.

4.1.1.-

La mejor manera sería resolviendo analíticamente la ecuación no-lineal de Riccati (3.3) para una $\bar{Q}(X)$ dado un $m(X) > 0$.

Esto no es posible de efectuar.

4.1.2.-

La ecuación (2.1) puede ser expandida a la ecuación de Brockett [ref.23 - pag.49], en donde, un nuevo vector de estado es introducido;

$$Z = \begin{bmatrix} X \\ X^{[2]} \\ \cdot \\ \cdot \\ X^{[p]} \end{bmatrix} \triangleq h(x) \quad (4.1)$$

donde los elementos de $X^{[p]}$ son

$$\sqrt{\binom{p}{p_1} \binom{p-p_1}{p_2} \dots \binom{p-p_1-\dots-p_{p-1}}{p_p}} x_1^{p_1} x_2^{p_2} \dots x_n^{p_n}, \quad (4.2)$$

$$\sum_{i=1}^n p_i = p, \quad p_i \geq 0$$

Observar el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.1:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad p=3 \quad (4.3)$$

dados

$$x^{(p)} = [x_1^3, \sqrt{3} x_1^2 x_2, \sqrt{3} x_1^2 x_3, \sqrt{3} x_1 x_2^2, \sqrt{3} x_1 x_3^2, x_2^3, \sqrt{3} x_2^2 x_3, \sqrt{3} x_2 x_3^2, x_3^3] \quad (4.4)$$

Note que al inyectar el mapeo $Z=h(x)$ en la estructura Bilineal, ella se mantiene; mas, es facilmente demostrar que

$$\dot{Z} = \bar{A}.Z + \sum_{i=1}^m \bar{B}_i Z U_i + \bar{B}_0.U \equiv \bar{A}.Z + \bar{G}(Z).U \quad (4.5)$$

es decir, la estructura bilineal es preservada. Ahora, cuando se intenta el diseño a base del teorema 4.1, se obtiene,

$$\bar{Q}(Z) = Z^T \bar{P}.Z, \quad \bar{P} = \bar{P}^T > 0; \quad (4.6)$$

$$U_i^* = -(\bar{B}_i Z + \bar{b}_{i0})^T \bar{P}.Z \quad (4.7)$$

Esta sería una manera factible de construir una función de Lyapunov como una suma de los productos de las potencias de x_1, x_2, \dots, x_n (el grado más bajo de un término es 2).

Ahora el intento de los autores por hallar una $\bar{P} > 0$ que mantenga la acción de control para todo el espacio de estado fue negativo, aún para el caso de ejemplos sencillos.

Sandor [ref.24 y ref.25] emplea el mismo método para construir un regulador no-lineal para los sistemas lineales de la forma $\dot{X} = AX + B_0 U$. Si, en el presente caso, A es inestable, el sistema lineal primeramente puede ser estabilizable por un controlador lineal convencional, de tal forma que el control final sea la suma de un término lineal y uno no-lineal:

$$U(X) = U_{LIN}(X) + U_{NL}(X)$$

Un método análogo; en el cual, primero se estabiliza A por medio de un controlador lineal y luego se aplica el control (4.7) (o el (3.27)) no dio resultados satisfactorios para el caso Bilineal. La razón es que, la inclusión de un término lineal en U incrementa el grado en el lado derecho de X , el cual generalmente desestabiliza el sistema.

Dado el sistema (4.5). Asumiendo que el sistema cumple que $(\bar{A} + \bar{B}_0 K)$ es estrictamente estable.

Dado, $K^T = [K_1^T \dots K_m^T]^T$, y sea $U_i = K_i^T Z + V_i$

El sistema de lazo cerrado sería,

$$\dot{Z} = (\bar{A} + \bar{B}_0 K) Z + \sum_{i=1}^m \bar{B}_i Z K_i^T Z + \sum_{i=1}^m (\bar{B}_i Z + \bar{b}_{i,0}) V_i \quad (4.8)$$

El segundo término del lado derecho a menudo suele desestabilizar el sistema autónomo, excepto cerca de $Z=0$, tal como se indica en el Lemma 3.15.

4.1.3.-

En esta parte se presentará los intentos efectuados para obtener una función de Lyapunov, mediante la construcción de diferentes funciones de Lyapunov para diferentes partes del espacio de estado. Un logro parcial fue obtenido para el caso de una sola entrada.

Proposición 4.2:

Considere el sistema de una sola entrada,

$$\dot{X} = AX + (BX+b)U \quad (4.9)$$

Asuma que $(X^T B X) > 0$, es decir, $(B+B^T) > 0$. Entonces

$$U = \begin{cases} -\alpha \cdot (BX+b)^T \cdot (BX+b) & , \quad b^T X \geq 0 \\ -\alpha \cdot (BX+b)^T \cdot (BX-b) & , \quad b^T X < 0 \end{cases} \quad (4.10)$$

para un $\alpha > 0$ lo suficientemente grande, que force al estado arbitrario a caer cerca o en el interior del "disco" elipsoidal, cuyo limite esta definido por,

$$X^T B^T B X - b^T b = 0 \quad (4.11)$$

Prueba:

Sea \bar{x} la función candidata de Lyapunov

$$\bar{x} = \alpha \cdot (X^T B X + 2 \cdot |b^T X|) \geq 0 \quad (4.12)$$

\bar{x} es continua. Divide el espacio de estado en 3 regiones:

$$S_+ = \{X \mid (b^T X) > 0\} \quad (4.13.a)$$

$$S_0 = \{X \mid (b^T X) = 0\} \quad (4.13.b)$$

$$S_- = \{X \mid (b^T X) < 0\} \quad (4.13.c)$$

$$\text{Dado, } \Psi_+(X) = 2\alpha(BX+b)^T AX - 2\alpha^2[(BX+b)^T(BX+b)]^2 \quad (4.14.a)$$

$$y, \quad \Psi_-(X) = 2\alpha(BX-b)^T AX - 2\alpha^2[X^T B^T B X - b^T b]^2 \quad (4.14.b)$$

Entonces, cuando

$$x \in S_+ : \dot{\bar{x}}(x) = \varphi_+(x) \quad (4.15.a)$$

$$x \in S_- : \dot{\bar{x}}(x) = \varphi_-(x) \quad (4.16.b)$$

$$x \in S_0 : \limsup_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{x}(t+h) - \bar{x}(t)}{h} \leq \max \{ \varphi_+(x), \varphi_-(x) \} \quad (4.16.c)$$

$$\text{Se observa que, } \limsup_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{x}(t+h) - \bar{x}(t)}{h} < 0 \quad (4.17)$$

exterior a la vecindad del elipsoide (4.11). \bar{x} es por esto, una función de Lyapunov exterior a esta vecindad (ver Hahn ref.21). Esta vecindad puede hacerse lo necesariamente pequeña mediante la selección de un α lo suficientemente grande.

Observación 4.3.-

Note que la elipsoide (4.11) no es igual al elipsoide (3.59) para alguna P.

Observación 4.4.-

El origen se halla en el interior del disco elipsoidal (4.11)

Observación 4.5.-

$$x_0 = -(B^{-1} \cdot b) \quad (4.18)$$

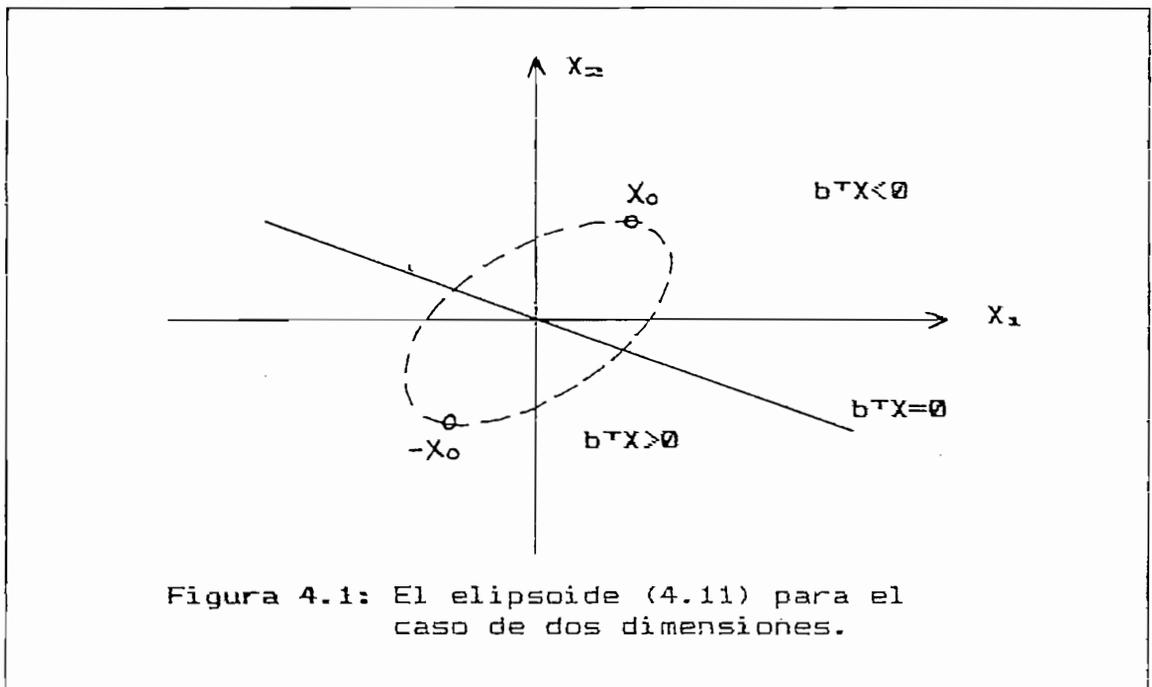
(donde el control desaparece) esta sobre el elipsoide (4.11). x_0 da una medición áspera de cuan lejos del origen (4.11) ha caído.

Observación 4.6.-

El efecto de los controles constantes sobre el sistema (4.9) es comentado en el ejemplo 4.19.b.

Observación 4.7.-

$x_0 \in \{X: (b^T X) \leq 0\}$. Observar la figura 4.1.

Observación 4.8.-

La aplicación de este método depende obviamente de cuan cerca del elipsoide (4.11) se halle el origen, y cuan grande sea la desviación aceptable.

Un ejemplo de segundo orden es descrito en el ejemplo 4.9.

Ejemplo 4.9:

El siguiente sistema,

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot X + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot X \cdot U + \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot U \quad (4.19)$$

satisface las condiciones de la proposición 4.2.

Aplicando el control dado por la ecuación (4.10) con $\alpha=100$:

$$U = \begin{cases} -100 \cdot ([2x_1+x_2-2]^2 + [x_1+3x_2-2]^2) ; & -2 \cdot (x_1+x_2) \geq 0 \\ -100 \cdot ([2x_1+x_2]^2 + [x_1+3x_2]^2 - 8) ; & -2 \cdot (x_1+x_2) < 0 \end{cases} \quad (4.20)$$

Los resultados obtenidos de la simulación del presente sistema pueden observarse en la figura 4.2. (ver Apéndice A).

Notese que,

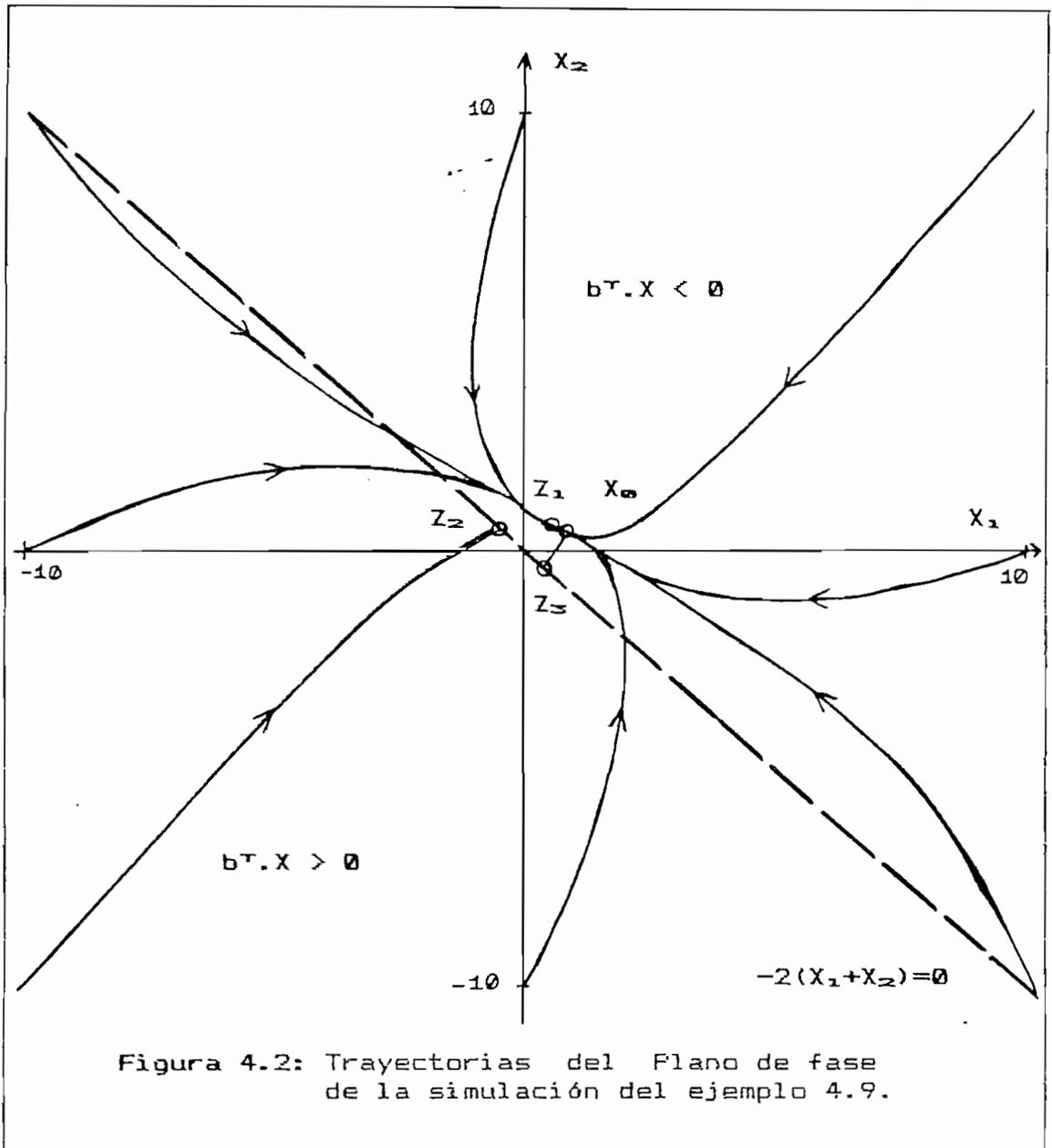
$$b^T \cdot X = -2 \cdot (x_1+x_2) \quad (4.21)$$

y (ver observación 4.5),

$$X_{e0} = \begin{bmatrix} X_{e01} \\ X_{e02} \end{bmatrix} = -B^{-1} \cdot b = - \begin{bmatrix} 0.6 & -0.2 \\ -0.2 & 0.4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.4 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Observación 4.10:

Algunas veces una estabilización local realimentada lineal (ver Lemma 3.15) debería establecer una región de estabilización que incluya los puntos de equilibrio obtenidos por el control (4.1). Tal realimentación lineal no fue encontrada para el ejemplo 4.9.



Condiciones iniciales: $(10,0)$, $(10,10)$, $(0,10)$, $(-10,10)$,
 $(-10,0)$, $(-10,-10)$, $(0,-10)$, $(10,-10)$.

Puntos finales de equilibrio: $z_1 = (0.6, 0.544)$
 $z_2 = (-0.464, 0.464)$
 $z_3 = (0.434, -0.434)$

4.2.- CONTROLES CONSTANTES.

Es aparente que el sistema (2.6) es asintóticamente estabilizable por controles constantes, si y sólo si, existen las constantes $U_{1c}, i=1, 2, \dots, m$ tal que $(A + \sum_{i=1}^m B_i U_{1c})$ es estable. Sin embargo, (2.6) no siempre es estabilizable con controles constantes, observar por un instante el ejemplo 4.16 dado en los párrafos siguientes.

El efecto de aplicar un control constante U_{1c} sobre el sistema (2.4) es que, aun si $(A + B_1 U_{1c})$ es estable, $b_{10} U_{1c}$ localiza una desviación en el sistema de lazo cerrado de tal manera que este no converge para $X=0$. Por lo tanto, otros controles deben ser usados para compensar esta desviación. Condiciones necesarias y suficientes para que un control constante estabilice el sistema (2.4) son dadas en el siguiente teorema.

TEOREMA 4.11:

Considere el sistema (2.4), especificado por,

$$\dot{X} = A \cdot X + \sum_{i=1}^m (B_i X + b_{i0}) \cdot U_i \quad (4.23)$$

$$B_0 = [b_{10} \ b_{20} \ \dots \ b_{m0}]$$

El control constante, $U_c = (U_{1c} \ U_{2c} \ \dots \ U_{mc})^T$ estabiliza asintóticamente (4.23), si y solo si,

$$U_c \in \text{Ker } B_0, \quad y \quad (4.24)$$

$$(A + \sum_{i=1}^m B_i U_{1c}) \text{ es una matriz estrictamente estable} \quad (4.25)$$

Demostración:

Aplicando el control constante U_c sobre (4.23) tenemos que,

$$\dot{X} = (A + \sum_{i=1}^m B_i U_{i,c}) \cdot X + B_0 U_c \quad (4.26)$$

Suficiencia: Asuma que U_c satisface (4.24) y (4.25).

Entonces, (4.26) sería un sistema lineal asintóticamente estable:

$$\dot{X} = \underbrace{(A + \sum_{i=1}^m B_i U_{i,c}) \cdot X}_{\text{estrictamente estable}} + \underbrace{B_0 \cdot U_c}_{=0} \quad (4.27)$$

Necesidad: Una condición necesaria para la estabilización es que el origen sea un punto estacionario del sistema de lazo cerrado, es decir,

$$X = 0 \implies \dot{X} = 0 \text{ para (4.26):} \quad (4.28)$$

$$0 = 0 + B_0 U_c \quad (4.29)$$

los cuales estan dados en (4.26).

Dados (4.24) y (4.26) el sistema lineal sería,

$$\dot{X} = (A + \sum_{i=1}^m B_i U_{i,c}) \cdot X \quad (4.30)$$

Una condición para la estabilización de (4.30) es la condición (4.25).

Observación 4.12:

Naturalmente existe un control, $U=U_c+U_a$ (4.31)

el cual estabiliza el sistema (2.4), donde,

U_c satisface las condiciones (4.24) y (4.25), (4.32)

y U_a tiene la estructura

$U_a = (U_{1a}, U_{2a}, \dots, U_{ma})^T$ (4.33)

$U_{1a} = -(B_1 X + b_{10})^T P X$ (4.34)

investigadas en el capítulo 3.

Observación 4.13:

Las condiciones del teorema 4.11 son restringidas.

En el siguiente teorema un caso de especial interés es tratado. Se presenta una clase de sistemas de una sola entrada, en el cual la estabilización es equivalente a la estabilización con un control constante,

TEOREMA 4.14:

Dado el siguiente sistema,

$$\dot{X} = B \cdot X \cdot U, \quad (4.35)$$

B es una matriz real n/n , $X \in \mathbb{R}^n$, $U \in \mathbb{R}$.

Sea λ_i el i -ésimo valor propio de B .

La estabilización del sistema (4.35) es equivalente a la estabilización con un control constante, si y solo si,

$$\text{signo}(\text{Re } \lambda_i) = \text{signo}(\text{Re } \lambda_k) \langle \rangle 0 \quad \text{para todo } i, k \quad (4.36)$$

Demostración:

Jordanice B, por medio de la transformación (4.35):

$$\dot{Z} = J \cdot Z \cdot U \quad , \quad (4.37)$$

$$J = \bigoplus_{i=1}^m J_{\lambda_i} \quad , \quad J_{\lambda_i} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix} \quad \text{es una matriz } n_i/n_i.$$

$$\text{Sea } Z = \begin{bmatrix} Z_1 \\ \hline Z_2 \\ \vdots \\ \hline Z_m \end{bmatrix} \quad ; \quad y, \quad Z_i = \begin{bmatrix} Z_{i,1} \\ \vdots \\ Z_{i,n_i} \end{bmatrix} \quad i=1,2,\dots,m$$

- a) Asumiendo (4.36). Entonces el control constante $U = -\text{signo}(\text{Re } \lambda_i)$ estabiliza (4.35).
- b) Asumiendo que $\text{Re } \lambda_i = 0$ para algun i . Entonces la estabilización no es posible.
- c) Asumiendo que, $\text{signo}(\text{Re } \lambda_i) = -\text{signo}(\text{Re } \lambda_k) < > 0$, para algun i, k . Entonces la ecuación diferencial para los estados correspondientes a la ultima fila en los Bloques de Jordan

J_i y J_k son

$$\dot{Z}_{j,n_j}(t) = \lambda_j \cdot U(t) \cdot Z_{j,n_j}(t) \quad , \quad (4.38)$$

$j=i$,y, k respectivamente. Esto da

$$Z_{j,n_j}(t) = \exp\left\{ \lambda_j \cdot \int_0^t U(s) ds \right\} \cdot Z_{j,n_j}(0) \quad ; \quad j=i, k \quad (4.39)$$

Entonces,

$$\left| Z_{i,n_i}(t) \right|^{\text{Re } \lambda_k} \cdot \left| Z_{k,n_k}(t) \right|^{\text{Re } \lambda_i} = \text{constante} \quad (4.40)$$

independiente de $U(t)$. La estabilización no es posible.

Ejemplo 4.19.b:

Considere el sistema de una sola entrada de la observación 3.22 y la observación 4.6. Un control constante U_e debe forzar al sistema hacia el punto de equilibrio

$$X_e = (A+BU_e)^{-1}bU_e = - \left[\begin{array}{c} B^{-1}A \\ U_e \end{array} + I \right]^{-1} B^{-1}b \quad (4.43.a)$$

Si $(A+BU_e)$ es una matriz estabilizable. Note que

$$X_e \rightarrow -B^{-1}b, \text{ cuando } |U_e| \rightarrow \infty \quad (4.43.b)$$

$-B^{-1}b$, es el punto en donde todas las acciones de control desaparecen.

Un caso de control constante es adicionalmente comentado en la observación 3.3.

4.3.- METODOS DEL PLANO DE FASE. SISTEMA BILINEAL DIADICO.

Es obvio que existe un control lineal $U=k^T X$ que estabiliza local y asintóticamente el sistema (2.1) dentro de una vecindad lo suficientemente pequeña alrededor del origen, proveyendo un par estabilizable $[A, B_0]$, observar el Lemma 3.15.

Una posible manera para estabilizar el sistema sería el tener la vecindad del origen estabilizable localmente como un "conjunto destino" para otros controladores. Cuando el estado ingrese al "conjunto destino", el controlador lineal debe ser aplicado.

Algunas maneras para generar controles factibles mediante análisis del plano de fase se pueden encontrar en abundante literatura. Si bien es conocido que todos los métodos del plano de fase son embarazosos cuando la dimensión del estado es superior a 2.

Mohler [ref.09] estudió las trayectorias de controles constantes y generó un control bang-bang. Los tiempos de switcheo son precalculados, y en consecuencia este es un método de lazo abierto.

Utkin [ref.26] propone los resultados que deberían ser aplicados a cierta clase de sistemas Bilineales.

El espacio de estado es dividido en varias regiones, y sobre cada región se aplica un control realimentado diferente $U_k(X)$ de tal manera que un modo de "amortiguamiento" es generado sobre el límite entre las regiones.

Mehra [ref.27] analizó las regiones de estabilización de un sistema no-lineal mediante la investigación de la localización y características de los puntos de equilibrio como una función del control constante U .

Es verdad que los 3 métodos anteriores proveen de valiosas ideas y premisas cuando se trata el problema de controlar un Sistema Bilineal específico; sin embargo, estos métodos no pueden ser concebidos como generadores de una teoría general de control retroalimentado.

Existe una clase especial de sistemas Bilineales de interés práctico que es muy adecuado para la "carpintería del plano de fase". Esta clase de sistema se define a continuación.

DEFINICION 4.20:

Un sistema Bilineal (definido por la ecuación (2.4) y repetido a continuación por conveniencia)

$$\dot{X} = AX + \sum_{i=1}^m (B_i X + b_{i0}) \cdot U_i$$

se llama DIADICO DE ORDEN d , si para $i=i_1, \dots, i_d$, $d \in \{1, \dots, m\}$

$$B_i X + b_{i0} = b_{i0} \cdot (c_i^T X + 1) \quad (4.44)$$

El siguiente ejemplo ilustra que el Sistema Bilineal Diádico es una clase muy común de sistemas.

Ejemplo 4.15:

Dado el siguiente sistema,

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} XU_1 + \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} U_1 + \begin{bmatrix} -1.5 & -0.5 \\ 1.0 & -2.5 \end{bmatrix} XU_2 + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} U_2 \quad (4.41)$$

Encontramos que $\text{Ker } B_0$ es lograda por $(1 \ 2)^T$, y que

$$\begin{cases} U_1 = 1 \\ U_2 = 2 \end{cases} \quad (4.42)$$

estabiliza el sistema.

Ejemplo 4.16:

Dado el sistema del ejemplo 3.11 y 3.18 respectivamente.

Aun con $B_0 = R^2$ es posible hallar un control constante U_c que satisfaga el teorema 4.11.

Un control no-constante debe estabilizar estos sistemas.

Ejemplo 4.17:

El sistema del ejemplo 3.12 es estabilizable por algun control constante $U_c \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 4.18:

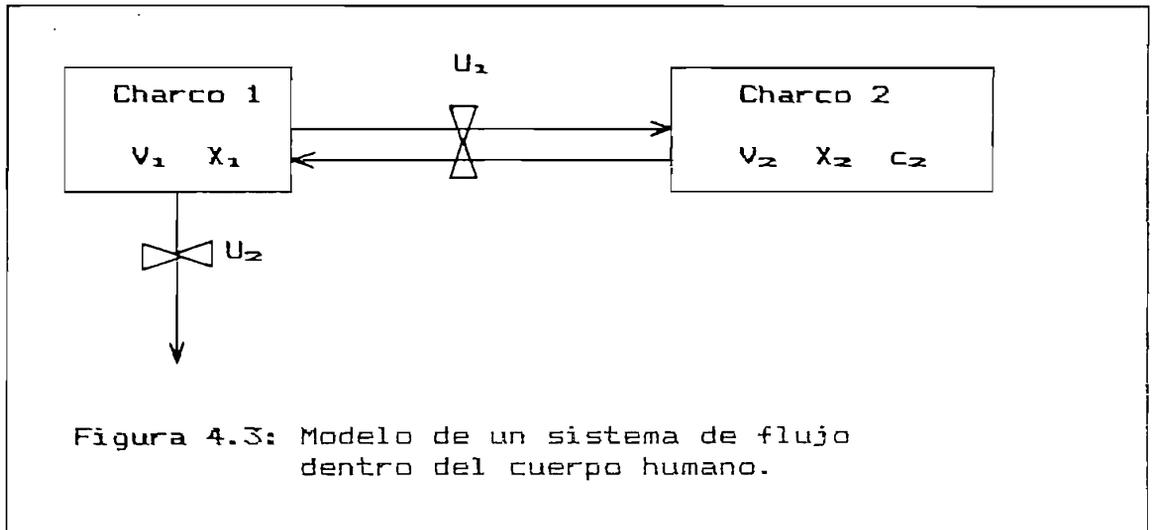
Para el sistema dado en el ejemplo 3.19, $\text{Ker } B_0 = \emptyset$. De esta manera un control no-constante deberá estabilizar (4.23).

Ejemplo 4.19.a:

El ejemplo 3.21 da un caso en donde un control constante, por ejemplo $U_c = -3$, es superior al control $U^* = -X^T B^T P X / \alpha$

Ejemplo 4.21:

Considere el siguiente sistema de flujo el cual modela, por ejemplo, el efecto de las drogas sobre la transferencia de alguna materia viva disuelta en el cuerpo humano:



Las ecuaciones que gobiernan el sistema de flujo son:

$$\begin{cases} V_1 \dot{X}_1 = U_1(X_1 - X_2) + X_1 U_2 & (4.45.a) \\ V_2 \dot{X}_2 = -U_1(X_1 - X_2) + c_2 X_2 & (4.45.b) \end{cases}$$

con las condiciones, $X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, c_2 > 0, U_1 \leq 0, U_2 \leq 0$ (4.46)

donde:

V_1 = volumen del charco 1 (m^3)

V_2 = volumen del charco 2 (m^3)

X_1 = concentración del charco 1 (kg/m^3)

X_2 = concentración del charco 2 (kg/m^3)

c_2 = rango de crecimiento del charco 2 (s^{-1})

U_1 = rango de transferencia entre charco 1 y charco 2 (s^{-1}).

U_2 = rango de transferencia exterior del charco 1 (s^{-1})

Reescribiendo en forma estandarizada las ecuaciones del sistema, se tiene que:

$$\dot{X} = AX + B_1XU_1 + B_2XU_2 \quad (4.47.a)$$

donde,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (c_2/V_2) \end{bmatrix} \quad (4.47.b)$$

$$B_1 = b_1 d_1^T = \begin{bmatrix} (1/V_1) \\ -(1/V_2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1/V_1) & -(1/V_1) \\ -(1/V_2) & (1/V_2) \end{bmatrix} \quad (4.47.c)$$

$$B_2 = b_2 d_2^T = \begin{bmatrix} (1/V_1) \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1/V_1) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.47.d)$$

Notese que B_1 y B_2 están en la forma diádica.

Un punto de equilibrio deseado $X_e = (X_{1e}; X_{2e})^T$ puede ser seleccionado, tal que $X_{2e} > X_{1e} > 0$.

Haciendo igual a cero el lado derecho de (4.45) se obtiene el correspondiente punto de equilibrio $U_e = (U_{1e}, U_{2e})^T$:

$$\left\{ \begin{array}{l} U_{1e} = \frac{c_2 \cdot X_{2e}}{X_{1e} - X_{2e}} \end{array} \right. \quad (4.48)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} U_{2e} = \frac{-c_2 \cdot X_{2e}}{X_{1e}} \end{array} \right. \quad (4.49)$$

El método de la sección 2.3 da el siguiente sistema Bilineal con X_e como el origen del espacio de estado:

$$\Delta \dot{X} = \bar{A} \Delta X + \{b_1 d_1^T \Delta X + b_1 (X_{1e} - X_{2e})\} \Delta U_1 + \{b_2 d_2^T \Delta X + b_2 X_{1e}\} \Delta U_2 \quad (4.50.a)$$

donde,

$$\Delta X = X - X_{\bullet} \quad , \quad \Delta U = U - U_{\bullet} \quad (4.50.b)$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \frac{c_2 \cdot (X_{2\bullet})^2}{V_1 \cdot (X_{1\bullet} - X_{2\bullet}) \cdot X_{1\bullet}} & \frac{-c_2 \cdot X_{2\bullet}}{V_1 \cdot (X_{1\bullet} - X_{2\bullet})} \\ \frac{-c_2 \cdot X_{2\bullet}}{V_2 \cdot (X_{1\bullet} - X_{2\bullet})} & \frac{c_2 \cdot X_{1\bullet}}{V_2 \cdot (X_{1\bullet} - X_{2\bullet})} \end{bmatrix} \quad (4.50.c)$$

Si se define

$$\bar{b}_1 = (X_{1\bullet} - X_{2\bullet}) \cdot b_1 \quad (4.51.a)$$

$$\bar{d}_1 = \frac{d_1}{(X_{1\bullet} - X_{2\bullet})} \quad (4.51.b)$$

$$\bar{b}_2 = X_{1\bullet} \cdot b_2 \quad (4.51.c)$$

$$\bar{d}_2 = \frac{d_2}{X_{1\bullet}} \quad (4.51.d)$$

Entonces, (4.50) puede ser reescrita como:

$$\Delta \dot{X} = \bar{A} \cdot \Delta X + \bar{b}_1 (\bar{d}_1^T \Delta X + 1) \Delta U_1 + \bar{b}_2 (\bar{d}_2^T \Delta X + 1) \Delta U_2 \quad (4.52)$$

Consecuentemente (4.50) es dyadic de orden 2.

Condiciones para estabilización son dadas en el teorema 4.22 y la observación 4.25.

Por motivos de simplificación principalmente, consideraremos los sistemas Bilineales que son diádicos de orden 1.

Un nuevo controlador algorítmico, "el controlador de división", que algunas veces estabiliza sistemas diádico es presentado en el diseño 4.26. Como en todos los métodos del plano de fase, este diseño es difícil de aplicar a los sistemas de orden superior a 2.

Considere el sistema diádico de una sola entrada

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + (BX+b)U, & X \in \mathbb{R}^n, \quad U \in \mathbb{R} \\ (BX+b) = b(c^T X + 1) \end{cases} \quad (4.53)$$

Como en el teorema 2.3,

$$\text{dado } d(X) = c^T X + 1 \quad (4.54)$$

$d(X) = 0$ define un hiperplano $(n-1)$ -dimensional.

Divida el espacio de estado en los siguientes conjuntos:

$$S_+ = \{X \mid d(X) > 0\} \quad (4.55)$$

$$S_0 = \{X \mid d(X) = 0\} \quad (4.56)$$

$$S_- = \{X \mid d(X) < 0\} \quad (4.57)$$

Sea $\varphi(X_0, U(\cdot), t)$ la solución de (4.53) en el instante t cuando $X(0) = X_0$, y, $U(S)$, $S \in [0, t]$ es el control de entrada.

Defina:

$$V = \{X_0 \in S_+ \mid \exists U_V \text{ tal que } \varphi(X_0, U_V, t) \in S_+ \quad \forall t, \text{ y} \\ \varphi(X_0, U_V, t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty\} \quad (4.58)$$

$$Y = \{X_0 \in S_0 \mid \exp(At) \cdot X_0 \in V \text{ para algún } t > 0\} \quad (4.59)$$

$$W = \{X_0 \mid \exists U_W \text{ tal que } \varphi(X_0, U_W, t) \in Y \text{ para algún } t > 0\} \quad (4.60)$$

TEOREMA 4.22:

Una condición necesaria y suficiente para estabilizar el sistema (4.53) es que,

$$1) Y \text{ no es vacía, y} \tag{4.61}$$

$$2) V \cup Y \cup W = R^n \tag{4.62}$$

Demostración:

Note que el origen está en el interior de S_+ y pertenece a V . (Note además que V no es vacía porque el origen reside en V .)

Suficiencia:

Si $x_0 \in V$ el origen debe ser alcanzado.

Si $x_0 \in Y$ las trayectorias deben terminar en V , de donde éstas deben continuar hacia el origen.

Si $x_0 \in W$ las trayectorias deben terminar en Y , etc.

La suficiencia es demostrada, puesto que $V \cup Y \cup W = R^n$.

Necesidad:

1. La acción de control cesa en S_0 . La única manera de pasar de $S_0 \cup S_-$ hacia S_+ es por medio del sistema autónomo $\dot{X} = AX$. Para alcanzar el origen, al menos una de las trayectorias del sistema autónomo emanado de $S_0 \cup S_-$ deben terminar en V . En consecuencia, Y no debe ser vacía.

2. Por definición, una trayectoria emanada del conjunto

$$\left[(V \cup Y \cup W) \right] \tag{4.63}$$

deben quedarse en este conjunto. Consecuentemente, éste no es vacío.

Observación 4.23:

El teorema 4.22 es una extensión del teorema 2.3.

Observación 4.24:

El caso,

$$\dot{X} = AX + BXU, \quad B = bc^T \quad (4.64)$$

puede ser tratado de una manera similar a las anteriores líneas pero mucho más complicado que el teorema 4.22. Esto no será tratado aquí.

Observación 4.25:

La suficiencia del teorema 4.22 es aplicable al caso de múltiple entrada (4.43) si el sistema es Dyadic de orden 1 o más.

El teorema 4.22 es débil. Por lo tanto, el sistema (4.53) debe ser analizado como un conjunto de sistemas lineales cuando se aplican controles adecuados. Entonces, el problema de control es transformado en el de hallar controles que satisfagan el teorema 4.22. Esto conduce a lo siguiente:

DISEÑO 4.26 (EL CONTROLADOR DE DIVISION):

Considere los sistemas (4.53), (4.54).

Defina los conjuntos:

$$S_0^? = \{X \mid -\xi_1 \leq d(X) \leq \xi_2\} \quad (4.65)$$

donde $\xi_1 \geq 0$, $\xi_2 \geq 0$ son parámetros de control, en el sentido de que el diseñador de control puede tomarlos de una gran variedad dependientes del tiempo, del actual estado, etc.

$$S_+^? = S_+ \setminus S_0^? \quad (4.66)$$

$$S_-^? = S_- \setminus S_0^? \quad (4.67)$$

Aplicando

$$U_+ = \frac{K_+^T \cdot X + U_{ref}(X, t)}{d(X)}, \quad X \in S_+^? \quad (4.68)$$

$$U_0 = 0, \quad X \in S_0^? \quad (4.69)$$

$$U_- = \frac{K_-^T \cdot X + U_{ref}(X, t)}{d(X)}, \quad X \in S_-^? \quad (4.70)$$

donde K_+ , $K_- \in R^n$.

El sistema de lazo cerrado ahora llegaría a ser

$$\dot{X} = (A + b \cdot K_+^T)X + b \cdot U_{ref}, \quad X \in S_+^? \quad (4.71)$$

$$\dot{X} = AX, \quad X \in S_0^? \quad (4.72)$$

$$\dot{X} = (A + b \cdot K_-^T)X + b \cdot U_{ref}, \quad X \in S_-^? \quad (4.73)$$

Seleccione, si es posible, K_+ , K_- , U_{ref} , ξ_1 y ξ_2 tal que las condiciones del teorema 4.22 sean satisfechas.

Se puede observar que el problema de controlar (4.53) se ha reducido a combinar las trayectorias adecuadas del espacio de estado representadas por (4.71), (4.72) y (4.73) dentro de una región estable.

U_{\rightarrow} es usado (temporalmente) para cambiar el punto de equilibrio con una orden de cambio, por ejemplo el conjunto Y .

ξ_1 , ξ_2 son usados como controladores (por ejem., como histéresis) dando una orden de abandono de los puntos estacionarios o ciclos límites sobre o alrededor de la frontera de S_0 .

Observación 4.27:

Variaciones del diseño 4.26 pueden ser construidas. Ver por un instante el ejemplo 4.30.

Muchos estudios fueron realizados para tratar de hallar las condiciones necesarias y suficientes de K_{\rightarrow} , K_{\leftarrow} , U_{\rightarrow} , ξ_1 y ξ_2 cuando se aplica el diseño 4.26, que nos permitan construir leyes estabilizadoras de control para un sistema Bilineal Dyadic de una sola entrada general (4.53).

Estos estudios no fueron satisfactorios. Sin embargo, casos de especial interes pueden ser analizados en los ejemplos 4.28 y 4.29.

Ejemplo 4.28:

Consideremos el siguiente sistema Bilineal Dyadico de segundo orden y de una sola entrada,

$$\dot{W} = AW + b(g^T W + 1)U \quad (4.74)$$

Asuma que $[A, b]$ es un par controlable. La teoria standard de Sistemas Lineales permite transformar (4.73) en

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} d(X)U \quad (4.75)$$

donde $d(X) = (g^T T X + 1)$, $W = T X$, y T es una matriz invertible adecuada de orden 2×2 .

La pregunta sería: ¿Bajo que condiciones $V = S_+$?

Por esta razón se centrará la atención a S_+ , la cual puede ser aproximada a S_+ con una selección arbitraria de ϵ_2 lo suficientemente pequeña. Mucho mejor, asumase que ϵ_2 es una constante.

Sea $U = U_+$ dado por la ecuación (4.68). El sistema de lazo cerrado (4.71) debe estar en la forma canónica controlable,

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} -a_1 - K_{1+} & -a_2 - K_{2+} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} U_{ref}, \quad X \in S_+ \quad (4.76)$$

El polinomio característico es,

$$s^2 + (a_1 + K_{1+})s + (a_2 + K_{2+}) \quad (4.77)$$

Asuma valores propios reales y estables,

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 < 0 \quad (4.78)$$

$$(s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \equiv s^2 + (a_1 + K_{1+})s + (a_2 + K_{2+}) \quad (4.79)$$

los cuales dan,

$$\begin{cases} a_1 + K_{1+} = -(\lambda_1 + \lambda_2) & (4.80) \\ a_2 + K_{2+} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 & (4.81) \end{cases}$$

El vector propio rápido e_1 , asociado a λ_1 , = $\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (4.82.a)

El vector propio lento e_2 , asociado a λ_2 , = $\begin{bmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{bmatrix}$ (4.82.b)

e_1 y e_2 pueden ser seleccionados libremente dentro del segundo cuadrante de acuerdo a la suposición (4.78).

Ahora se enuncia que si S_0 es tal que $e_1=e_2$ pueden ser seleccionados paralelamente con S_0 , entonces $V=S_+$.

(4.83)

Esto se obtiene como sigue:

Si K_+ es seleccionado tal que $e_1=e_2$ y $U_{r=0+}=0$ entonces un nodo estable uni-tangente con el origen como equilibrio es obtenido. Ver Aström 1969 [ref.28].

Si los vectores propios $e_1=e_2$ son paralelos a S_0 , todas las trayectorias en los límites de S_0 y S_+ (S_+) apuntan hacia el interior de S_+ (S_+). Esto es facilmente deducible de las propiedades elementales de un nodo estable uni-tangente. Ver la figura 4.4.

Otros análisis fueron efectuados para abordar el caso en que e_1 y e_2 no pueden ser seleccionados paralelamente con S_0 . Para establecer estabilización, los conjuntos Y y Z deben ser determinados. Esto depende de las propiedades del sistema autónomo. Como se denotó antes, el análisis y diseño es seguramente mucho más complejo para cada caso.

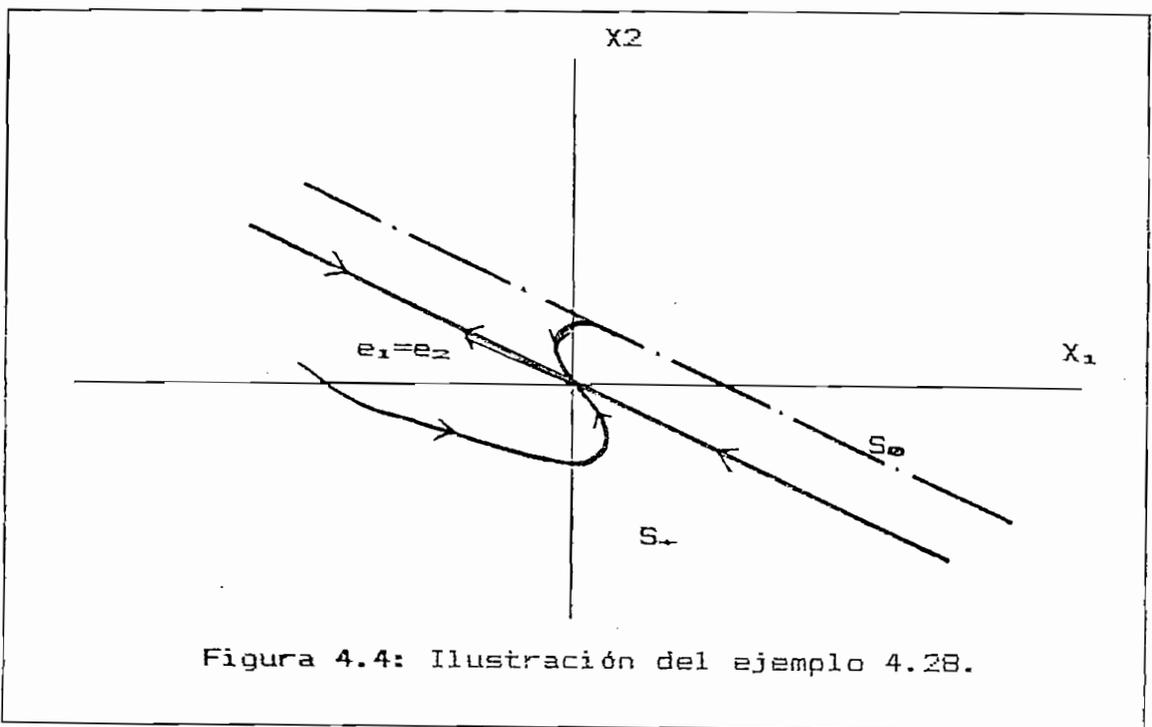


Figura 4.4: Ilustración del ejemplo 4.28.

Ejemplo 4.29:

El análisis del problema 4.28 puede ser efectuado de un modo más general. Considere el siguiente sistema Bilineal Dyadic de una sola entrada:

$$\dot{X} = GX + r(q^T X + 1)U, \quad X \in \mathbb{R}^n \quad (4.84)$$

Como en el ejemplo 4.28 preguntamos: ¿Bajo que condiciones se tiene que $V=S_+$?.

Asumiremos que $X \in S_+$ para todo t, es decir:

$$q^T X + 1 \geq \epsilon \quad (4.85)$$

Mediante la aplicación del control

$$U = \frac{V}{q^T X + 1}, \quad X \in S_+, \quad (4.86)$$

y suponiendo que, $b_1 \triangleq q^T \cdot r <> 0$ (4.87)

se puede transformar (4.84) en

$$\dot{Z} = AZ + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \cdot V, \quad (4.88)$$

$$(b_1 \cdot Z_1 + 1) \geq \epsilon \quad (4.89)$$

Reescrito

$$V = -(a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n}) \cdot Z + \epsilon \quad (4.90)$$

lo cual da

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_1 = s \end{array} \right. \quad (4.91)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \vdots \\ \dot{z}_n \end{bmatrix} = F \cdot \begin{bmatrix} z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} + f z_1 \end{array} \right. \quad (4.92)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1 \geq \frac{\xi - 1}{b_1} \end{array} \right. \quad (4.93)$$

donde, $F = \begin{bmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ (4.94)

$$f = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{31} & \dots & a_{n1} \end{bmatrix}^T \quad (4.95)$$

Controlar el sistema (4.91), (4.92) con s es equivalente a controlar el sistema (4.92) con z_1 . En consecuencia, el problema se reduce a controlar un sistema lineal con los controles restringidos a un intervalo semicompacto.

Lee [ref.29], página 92 trata este problema:

El sistema (4.92) es incontrolable, si y solo si, $[F, f]$ es un par controlable y cada valor propio

$$\lambda_1 \text{ de } F \text{ satisface que } \operatorname{Re}\{\lambda_1(F)\} \leq 0 \quad (4.96)$$

Comparando (4.99), la definición de S_0 [ecuación (4.56)], y (4.78), (4.82), (4.83) se puede observar que (4.104) representa las mismas condiciones sobre S_0 para asegurar que $V=S_0$ como la condición (4.83) del ejemplo 4.28.

En efecto, los resultados de este ejemplo son más fuertes, puesto que aquí la condición fue demostrada como necesaria y suficiente, mientras que en el ejemplo 4.28 únicamente la suficiencia fue demostrada.

La exposición del Controlador de División es concluida por medio de dos ejemplos numéricos.

Se hace notar que, el tratar de hallar un diseño que trabaje no es una tarea tan trivial.

Ejemplo 4.30:

Considerese el siguiente sistema,

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot X + \begin{bmatrix} x_1 - x_2 - 2 \\ x_1 - x_2 - 2 \end{bmatrix} \cdot U \quad (4.105)$$

Es notorio que,

$$\begin{bmatrix} x_1 - x_2 - 2 \\ x_1 - x_2 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot (x_1 - x_2 - 2) = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot \left(-(x_1/2) + (x_2/2) + 1 \right) \quad (4.106)$$

Una comparación con la ecuación (4.52) y (4.53) da,

$$b = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} \quad (4.107)$$

$$c = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} \quad (4.108)$$

Es fácil demostrar que $[A, b]$ es un par controlable.

El siguiente control estratégico es seleccionado:

$$U = \begin{cases} \frac{1}{x_1 - x_2 - 2} \cdot (4x_1 - 9x_2), & |x_1 - x_2 - 2| > 0.001 \\ \frac{1}{0.001 \operatorname{signo}(x_1 - x_2 - 2)} \cdot (4x_1 - 9x_2), & |x_1 - x_2 - 2| \leq 0.001 \end{cases} \quad (4.109)$$

$$(4.110)$$

$$\text{donde, } \operatorname{signo}(X) = \begin{cases} 1, & X \geq 0 \\ -1, & X < 0 \end{cases}$$

Este control es una ligera modificación del control (4.68). (4.69), (4.70). Los resultados obtenidos de una simulación pueden ser observados en las figuras 4.5.a y 4.5.b. (Observar el Apéndice B).

Las figuras indican que $S_0 = \{x | (x_1 - x_2 - 2) = 0\}$ es fácilmente cruzado con el control (4.109), (4.110).

Observando las trayectorias dentro y alrededor de S_0 se indica que K_+ y K_- son seleccionadas de tal manera que las trayectorias dentro de S_+ , S_0 y S_- "convergen". No existen ciclos límites o puntos estacionarios fuera del origen.

El sistema controlado es global y asintóticamente estable (la demostración no es complicada y no será cubierta aquí).

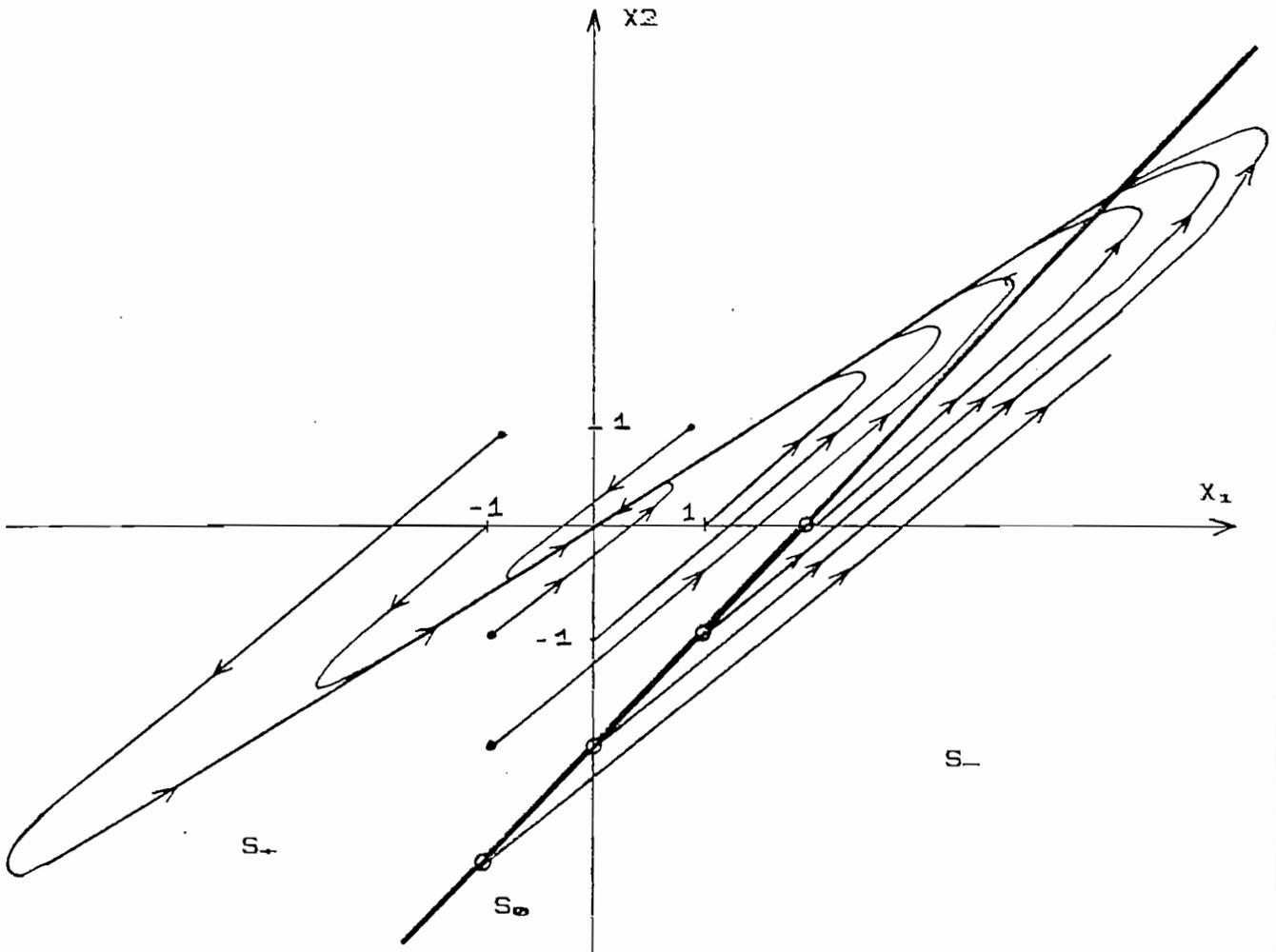


Figura 4.5.a: Trayectorias en el plano de fase de la simulación del ejemplo 4.30

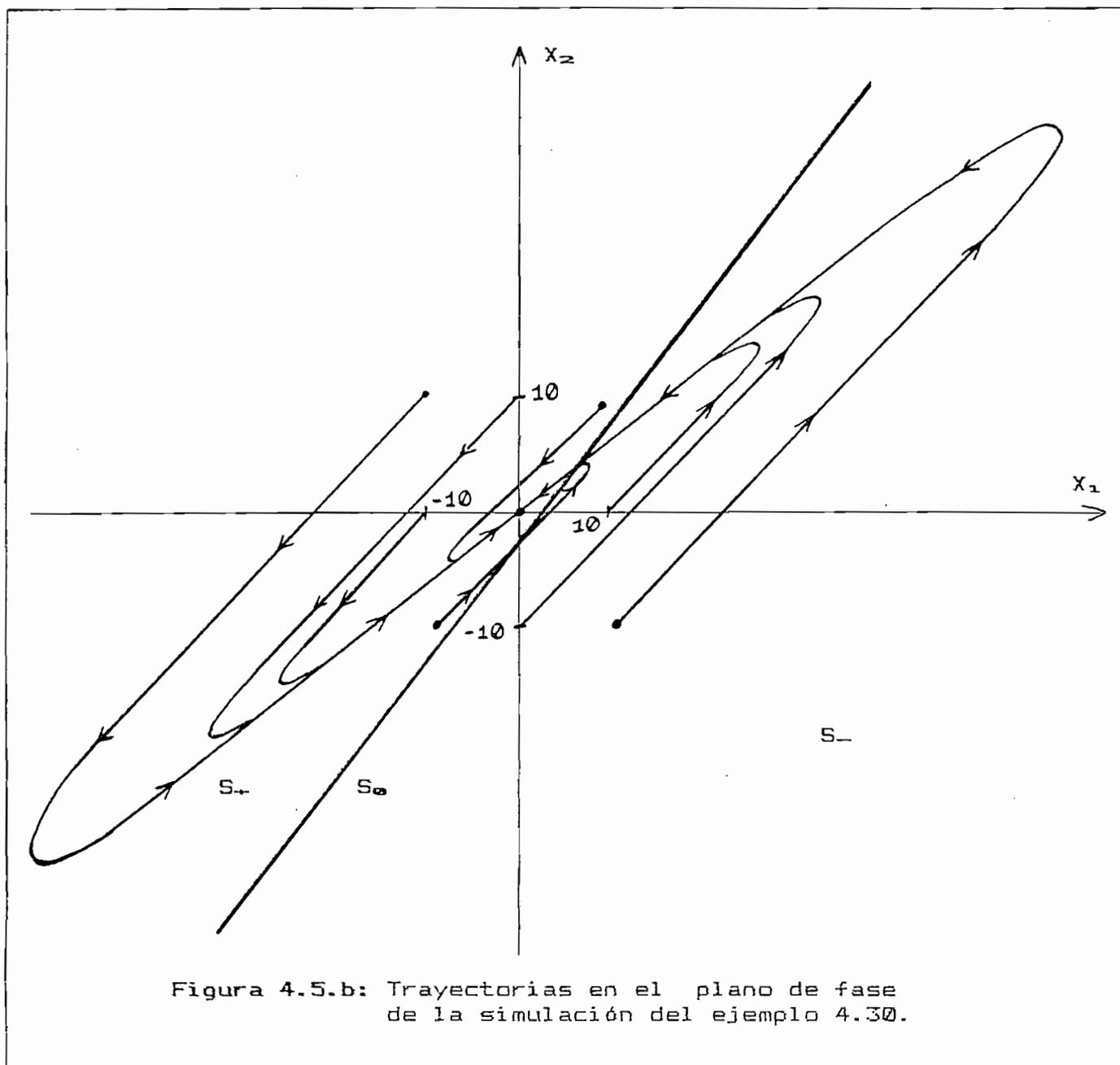


Figura 4.5.b: Trayectorias en el plano de fase de la simulación del ejemplo 4.30.

Ejemplo 4.31:

Sea el siguiente sistema,

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot X + \begin{bmatrix} x_1 - x_2 - 2 \\ x_1 - x_2 - 2 \end{bmatrix} \cdot U \quad (4.111)$$

Es notorio que las ecuaciones (4.106), (4.107), (4.108) anteriores son válidas. Un control del tipo (4.109), (4.110) no trabaja convenientemente, porque un ciclo límite alrededor del punto (1,-1) ocurre.

Para sobrellevar este problema, una histéresis fue introducida, (ver el Diseño 4.26). El espacio de estado fue dividido de acuerdo a la figura 4.6.

Introduzca

$$MU \equiv x_1 - x_2 - 2 \quad (4.112)$$

EPS es la función de histéresis, observar la figura 4.8.

Ahora, el control es construido como sigue:

$$U = \frac{-2 x_2}{x_1 - x_2 - 2} \quad \text{cuando} \quad MU < -0.1 \quad (4.113)$$

$$U = 0 \quad \text{cuando} \quad -0.1 \leq MU \leq 0.05 \quad (4.114)$$

$$U = 0 \quad \text{cuando} \quad 0.05 < MU \leq 0.1 \quad \text{y} \quad EPS < 0 \quad (4.115)$$

$$U = \frac{-2 x_2}{0.1} \quad \text{cuando} \quad 0.05 < MU \leq 0.1 \quad \text{y} \quad EPS > 0 \quad (4.116)$$

$$U = 0 \quad \text{cuando} \quad 0.1 < MU \leq 0.5 \quad \text{y} \quad EPS < 0 \quad (4.117)$$

$$U = \frac{-2 x_2}{x_1 - x_2 - 2} \quad \text{cuando} \quad 0.1 < MU \leq 0.5 \quad \text{y} \quad EPS > 0 \quad (4.118)$$

$$U = \frac{-2 x_2}{x_1 - x_2 - 2} \quad \text{cuando} \quad 0.5 < MU \quad (4.119)$$

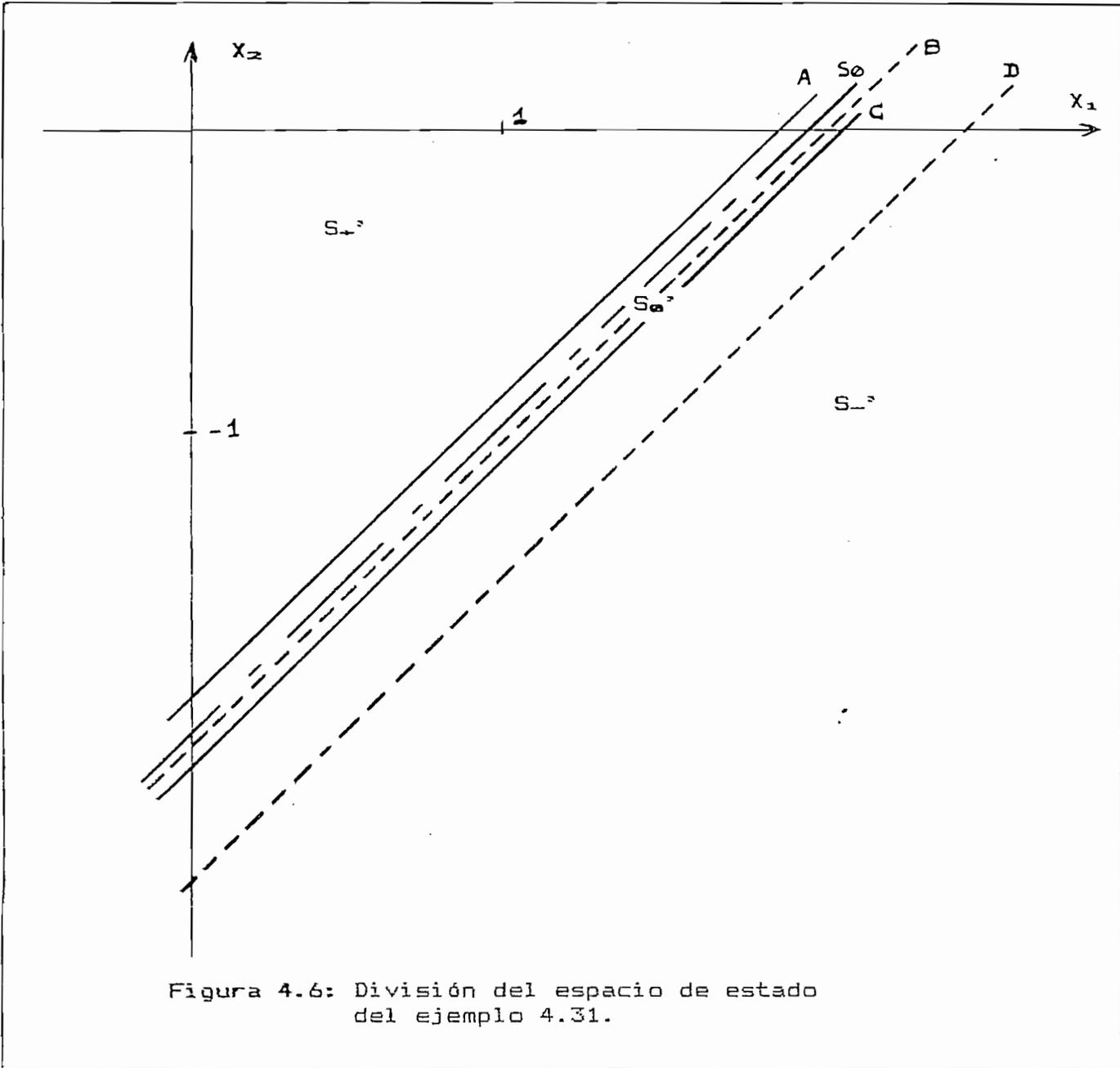


Figura 4.6: División del espacio de estado del ejemplo 4.31.

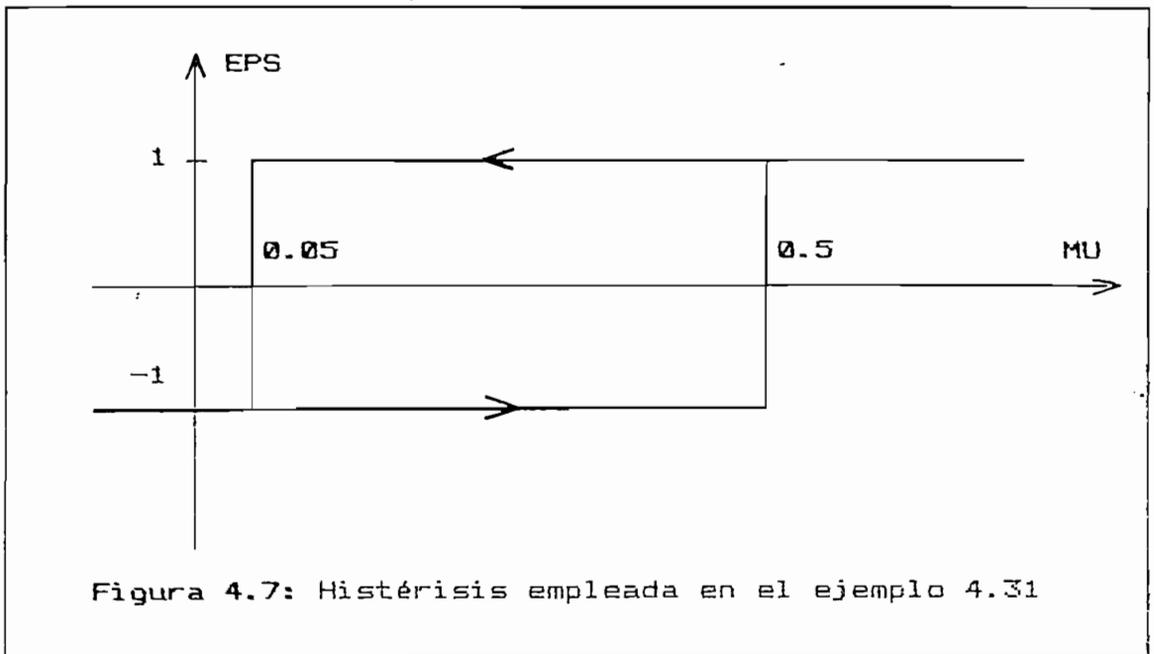
Sea, $MU \equiv x_1 - x_2 - 2$

Las líneas son:

- A : $MU = -0.1$
- S_0 : $MU = 0$
- B : $MU = 0.05$
- C : $MU = 0.1$
- D : $MU = 0.5$

Los conjuntos son:

- $S_+^2 = \{X | MU < -0.1\}$
- $S_-^2 = \{X | MU > 0.5\}$
- $S_0^2 = R^n \setminus \{S_+^2 \cup S_-^2\}$



Algunos de los resultados obtenidos al simular el sistema estudiado son mostrados en las figuras 4.8.a y 4.8.b. (Observar el Apendice C).

Adicionalmente a estas simulaciones, muchas más fueron realizadas. Para todas las condiciones iniciales planteadas, las trayectorias tienden asintóticamente al origen. Sin embargo, ninguna prueba analítica de estabilidad fue realizada.

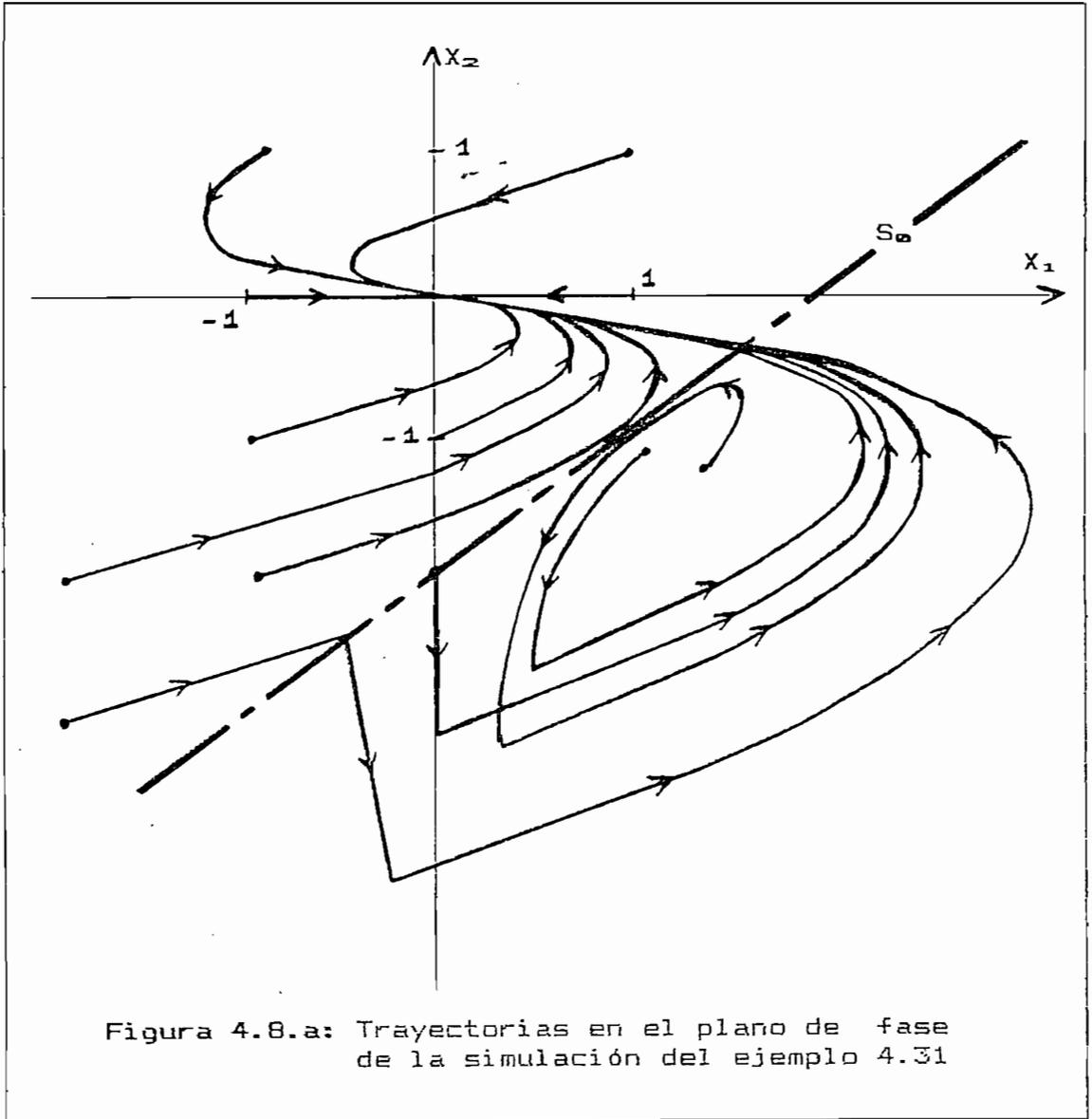


Figura 4.8.a: Trayectorias en el plano de fase de la simulación del ejemplo 4.31

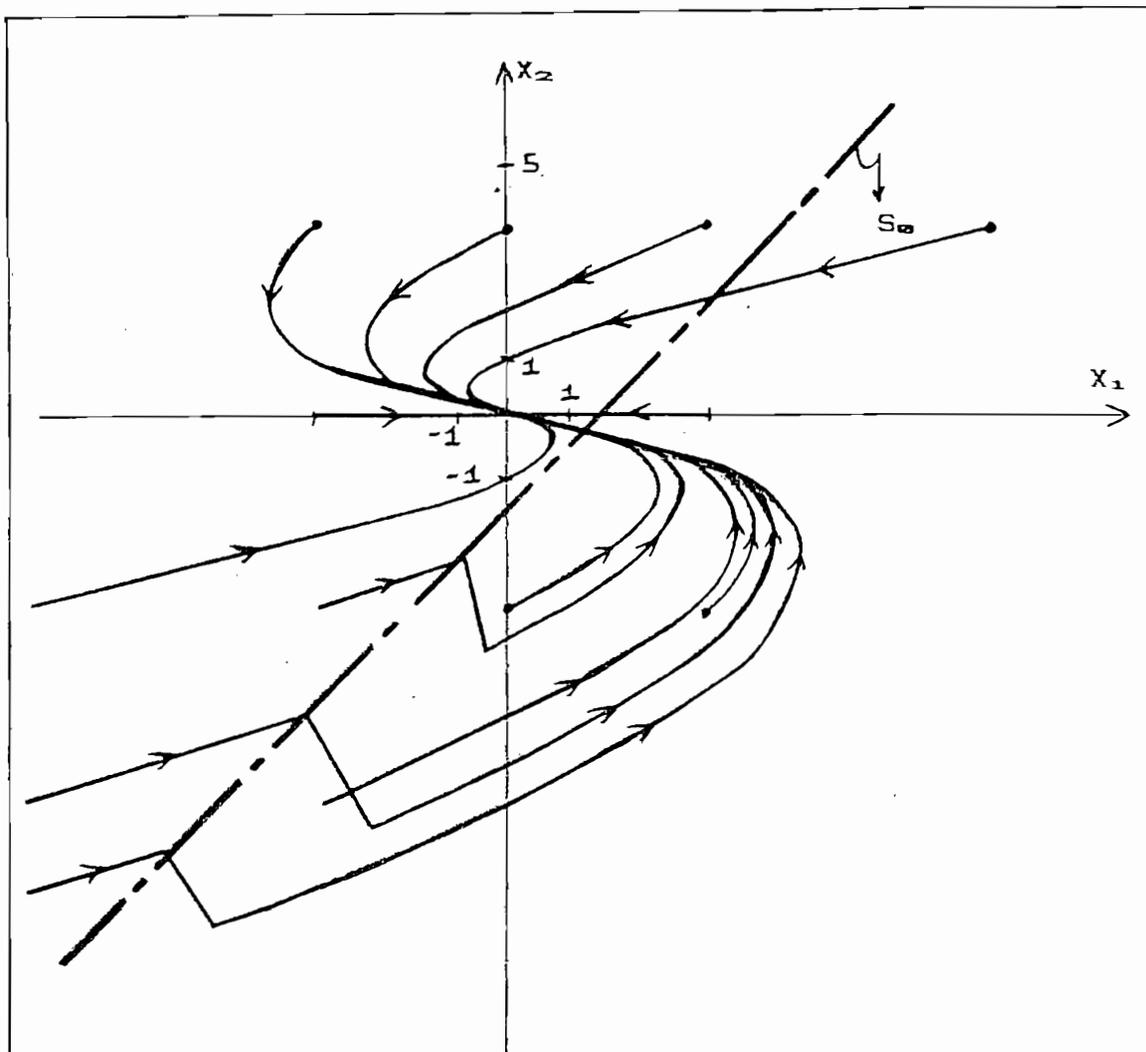


Figura 4.8.b: Trayectorias en el plano de fase de la simulación del ejemplo 4.31

4.4.- INTRODUCCION A LA TEORIA DE LIE.

Muchos autores, por ejemplo Brockett [ref.12 , ref.23] , y Hirschorn [ref.14] han tratado a los Sistemas Bilineales por medio de la Teoría de Lie. Estas aproximaciones no tienen aplicación en las leyes de control retroalimentado.

Baillieul [ref.29] presenta un control óptimo de lazo abierto con un criterio de mínima energía.

CAPITULO 5:
"CONTROLES ADITIVOS Y MULTIPLICATIVOS INDEPENDIENTES"

5.- CONTROLES ADITIVOS Y MULTIPLICATIVOS INDEPENDIENTES:

En esta sección trataremos brevemente el caso en que algunos controles aditivos y multiplicativos son independientes.

Considerese el siguiente sistema:

$$\dot{X} = AX + \sum_{i=1}^m (B_i X + b_i \theta) \cdot U_i + \sum_{j=1}^p (C_j X V_j) + \sum_{k=1}^q (d_k W_k) \quad (5.1)$$

donde,

$X \in \mathbb{R}^n$

$U_i, i=1,2,\dots,m$ son los controles dependientes,

$V_j, j=1,2,\dots,p$ son los controles multiplicativos independientes,

$W_k, k=1,2,\dots,q$ son los controles aditivos independientes, y

A, B_i, C_j, d_k son matrices de las apropiadas dimensiones.

Este tipo de sistemas fue tratado por Mohler [1973-ref.02], Ionescu [1975-ref.30], y Graselli [1979-ref.31]. Graselli tomo en consideración la aditividad desconociendo las perturbaciones, y su solución esta basada en las técnicas de sistemas lineales periódicos.

Un sistema descrito por la ecuación (5.1) en general es fácilmente controlable como uno descrito por (2.1). A continuación se da una sencilla condición de suficiencia para la estabilización:

TEOREMA 5.1: Considerando la ecuación (5.1), defina

$$B_0 = [b_{10} | b_{20} | \dots | b_{m0}] \quad , \quad y \quad , \quad U = \begin{bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_m \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

Si existe un vector $r \in (\text{Ker } B_0)$, y existen los vectores $f_k \in \mathbb{R}^n$, $k \in J_k \subseteq \{1, \dots, q\}$, y las constantes $g_j \in \mathbb{R}$, $j \in J_j \subseteq \{1, \dots, p\}$ tal que la matriz

$$\bar{A} \equiv \left(A + \sum_{i=1}^m B_i r_i + \sum_{j \in J_j} C_j g_j + \sum_{k \in J_k} d_k f_k^T \right) \quad (5.3)$$

es estrictamente estable, entonces el siguiente control estabiliza asintóticamente el sistema.

$$U = r + s$$

$$W_k = f_k^T \cdot X \quad , \quad k \in J_k \quad ,$$

$$V_j = g_j \quad , \quad j \in J_j \quad ; \quad Y_j$$

W_k , $k \in J_k$, V_j , $j \in J_j$, s son todos cero o calculados por el método descrito en la sección 3.2.

Demostración:

Aplicando los controles al sistema de lazo cerrado (5.4),

$$\dot{X} = \bar{A}X + \sum_{i=1}^m (B_i X + b_{i0}) s_i + \sum_{j \in J_j} (C_j X V_j) + \sum_{k \in J_k} (d_k W_k) \quad (5.4)$$

De acuerdo a las condiciones del teorema, la matriz \bar{A} es estrictamente estable, y consecuentemente los controles de la sección 3.2 deben estabilizar asintóticamente el sistema.

CAPITULO 6:

EJEMPLO DE APLICACION: CONTROL DEL NIVEL DE NEUTRONES

EN UN REACTOR DE FISION NUCLEAR

6.1.- PRELIMINARES:

Como un ejemplo realista de control bilineal, se ha seleccionado el problema de controlar el nivel de neutrones en un reactor de fisión nuclear, descrito por Mohler [ref.02, pag. 112-119].

La concentración (población) de neutrones es descrita mediante el siguiente sistema de segundo orden:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{n} = \frac{U - \beta}{L} \cdot n + \lambda \cdot c \\ \dot{c} = \frac{\beta}{L} \cdot n - \lambda \cdot c \end{array} \right. \quad (6.1)$$

con las restricciones de estado, $n > 0$, $c > 0$ (6.2.a)

donde:

n = población de neutrones (6.2.b)

c = población precursora (6.2.c)

U = reactividad (control de entrada) (6.2.d)

Valores típicos de las constantes son:

$L = 10^{-5}$ (6.3.a)

$\beta = 0.0065$ (6.3.b)

$\lambda = 0.4$ (6.3.c)

La siguiente restricción en el control es asumida:

$|U| \leq 10^{-3}$ (6.4)

El objetivo del control es estabilizar (6.1) mediante una adecuada selección del nivel de equilibrio de la población de neutrones, n_0 . Con n_0 seleccionada, el nivel de la población precursora, c_0 , obtenida de (6.1):

$$c_0 = \frac{\beta}{L \cdot \lambda} \cdot n_0 \quad (6.5)$$

Ahora, (n_0, c_0) es tomado como el origen del espacio de estado transformado. Las nuevas variables del espacio de estado serán:

$$\left\{ \begin{array}{l} X_1 = \frac{n - n_0}{n_0} \\ X_2 = \frac{c - c_0}{c_0} \end{array} \right. \quad (6.6)$$

Con la restricción de estado (6.2) transformada en

$$X_1 > -1, \quad X_2 > -1 \quad (6.7)$$

Dentro del nuevo espacio de estado, (6.1) llega a ser:

$$\dot{X} = A \cdot X + b \cdot d(X) \cdot W \quad (6.8)$$

donde,

$$A \hat{=} \begin{bmatrix} -(\beta/L) & (\beta/L) \\ \lambda & -\lambda \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

$$d(X) \hat{=} \{(1/L) \cdot X_1 + (1/L)\} \quad (6.10)$$

$$b \triangleq \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

Notese que U es definida por (6.2.d)

$$\text{Los valores propios de } A \text{ son } 0.0 \text{ y } -[\lambda + (\beta/L)] \quad (6.12)$$

En consecuencia, A tiene valores propios sobre el eje imaginario, y de acuerdo a lo expuesto en la sección 3.3, puede o no existir una $P=P^T > 0$ tal que el control

$$U = -[d(X) \ 0].P.X \quad (6.13)$$

estabilice (6.8).

La posibilidad de la existencia de tal control será investigada en la sección 6.2, en donde se lo denominará "Control Cuadrático".

También podemos observar que la ecuación (6.8) y las restricción del espacio de estado (6.7), revelan que el sistema es Dyadico y satisface las condiciones del teorema 4.22. Comparando con el ejemplo 4.21, la Dyacividad se resiste al cambio del punto de equilibrio. La situación es extremadamente favorable puesto que el espacio de estado permitido (definido por (6.7)) es un subconjunto de S_+ . Entonces, $S_0 = \{X | d(X) = 0\}$ no pertenece al espacio de estado permitido. Mas aún $[A, b]$ es un par controlable.

Usando el ejemplo 4.29 hemos demostrado que el control,

$$U = \frac{K^T \cdot X}{d(X)} \quad (6.14)$$

debe estabilizar asintóticamente el sistema mediante una adecuada selección de K.

El control de División será mostrado en la sección 6.3.

La sección 6.4 contiene una breve descripción del controlador bang-bang de Mohler [ref.02] para resolver el problema de control planteado.

6.2.- CONTROL CUADRATICO.

$$\text{Sea } P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} > 0, \quad p_i \in \mathbb{R}, \quad i=1,2,3 \quad (6.15)$$

Calculando el control cuadrático (6.13),

$$U = - \begin{bmatrix} d(X) & 0 \end{bmatrix} \cdot P \cdot X$$

$$U = - \begin{bmatrix} \{(x_1/L) + (1/L)\} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

$$U = - \frac{(x_1+1)}{L} \cdot [(p_1 \cdot x_1) + (p_2 \cdot x_2)] \quad (6.17)$$

El teorema 3.5 es empleado para fijar las condiciones de P.

La ecuación (3.16) establece que,

$$U = - \frac{(x_1+1)}{L} \cdot [(p_1 \cdot x_1) + (p_2 \cdot x_2)] \text{ debe ser diferente de cero en}$$

$$M = \{X \mid [X^T(PA+ATP)X]=0, \quad X < > 0\} \quad (6.18)$$

Sea $\bar{Q} = X^T P X$ la función de Lyapunov. Se calcula \bar{Q} como una función de P y se selecciona p_1 y p_2 que estabilice el sistema.

Una adecuada selección de P es,

$$\begin{cases} p_1 = 40 \times 10^{-10} \\ p_2 = 20 \times 10^{-10} \\ p_3 > (p_2^2/p_1) \end{cases} \quad (6.19)$$

A continuación se muestran los resultados obtenidos al simular el sistema (6.7), (6.8) mediante los controladores (6.18) y (6.19), (Observar el Apendice D).

Las simulaciones fueron efectuadas con y sin el control restringido (6.4), (ver las figuras 6.1.a y 6.2).

El control sin la restricción $U(t)$ y con la condición inicial (2.1) es mostrado en la figura 6.1.a. En el presente caso, podemos notar que $U(t)$ no cumple lo fijado en (6.4).

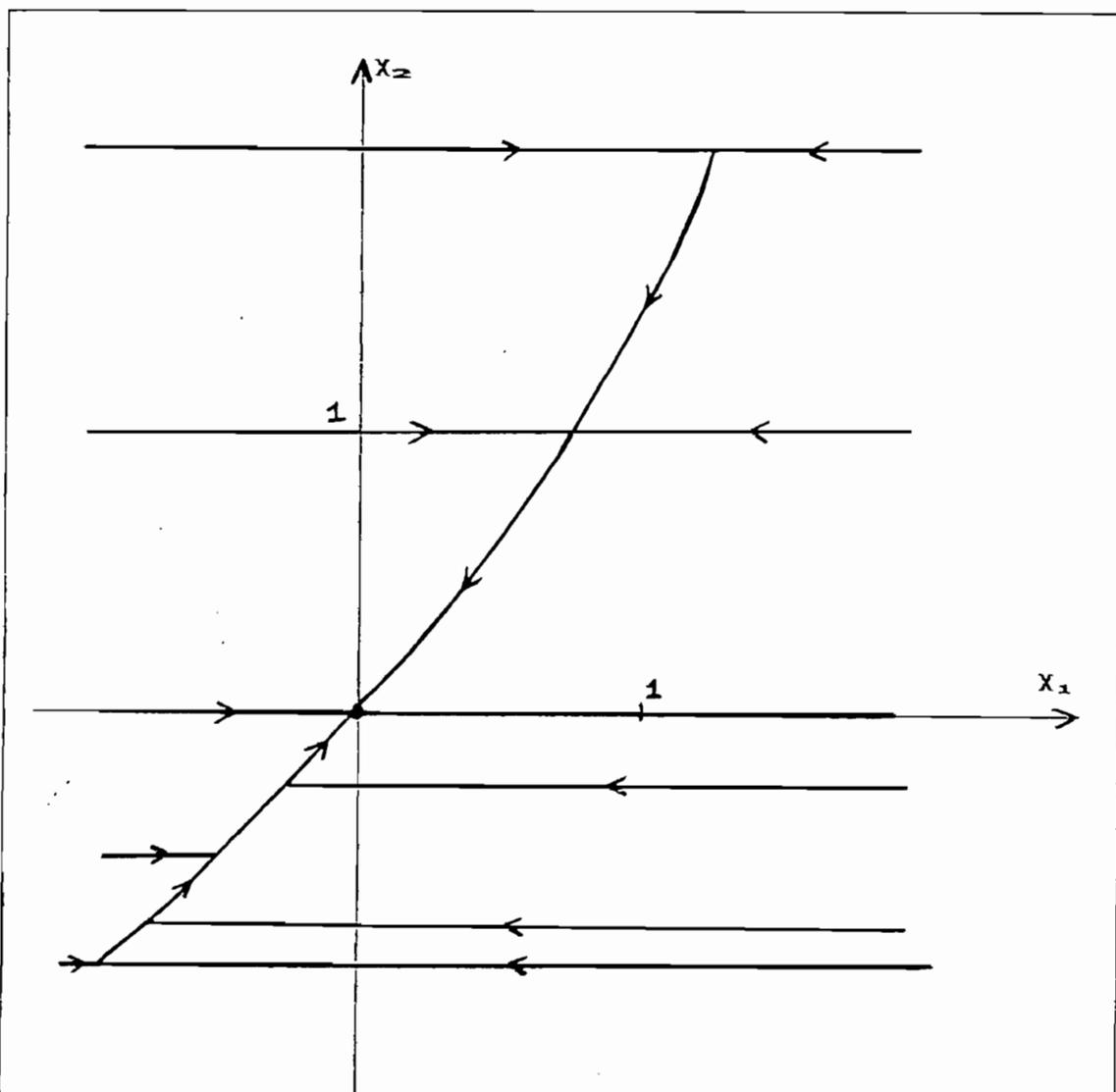


Figura 6.1.a.- Trayectorias en el Plano de Fase de la simulación con el Controlador Cuadrático sin restricción (6.18) y (6.19).

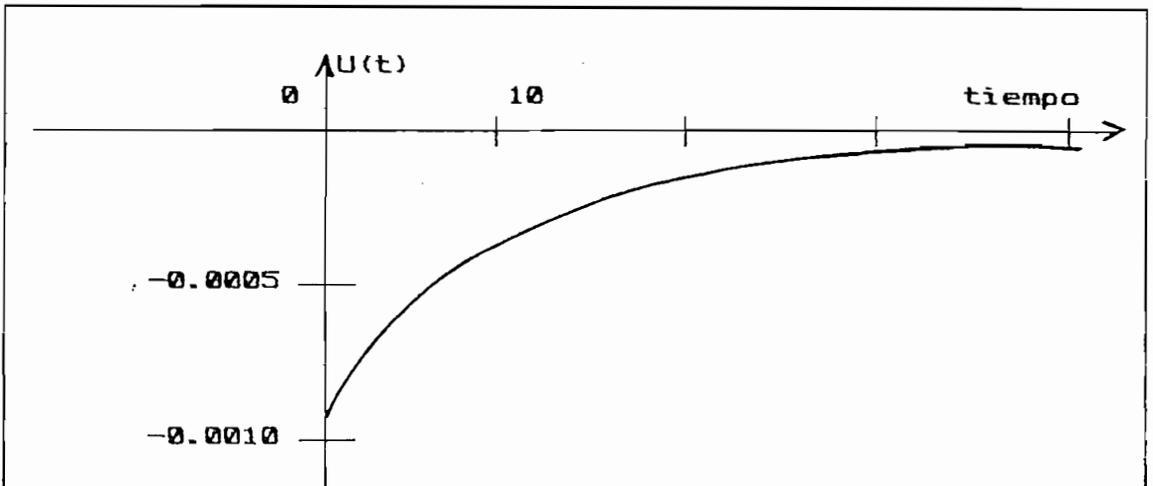


Figura 6.1.b.- Control de entrada $U(t)$ para una simulación con el Controlador Cuadrático sin restricción y con la condición inicial $(2,1)$.

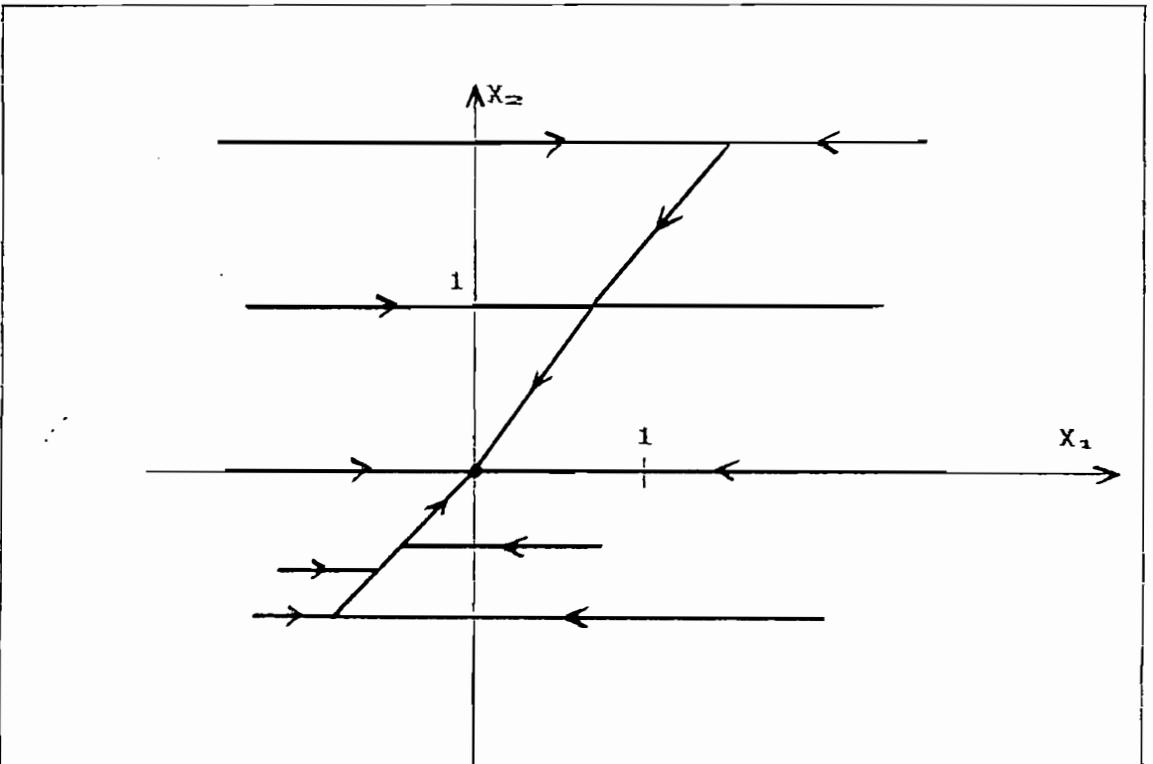


Figura 6.2.- Trayectorias en el Plano de Fase de la simulación con el Controlador Cuadrático (6.18) y (6.19) sujeto a la restricción (6.4).

6.3.- CONTROL DE DIVISION.

Dentro del algoritmo (6.16)

$$U = \frac{K^T \cdot X}{x_1 + 1} \cdot L \quad (6.20)$$

Se selecciona el vector K^T como si el sistema lineal

$$\dot{X} = AX + bU \quad (6.21)$$

es controlado por el controlador lineal

$$U = K^T \cdot X \quad (6.22)$$

La elección puede ser efectuada, por ejemplo, mediante el uso de un Control Lineal Optimo con estado restringido, (observar Martensson [ref.32]). En esta parte, se selecciono un nodo estable uni-tangente:

$$K^T = (648.4, -650.9) \quad (6.23)$$

Mas aún, en el programa de simulación (Observar Apendice D) el valor más pequeño del denominador de (6.20) fue fijado para evitar el overflow numérico.

El control de entrada en la simulación fue entonces:

$$U = \frac{(648.4)x_1 - (650.9)x_2}{\max(x_1 + 1; 0.01)} \cdot 10^{-5} \quad (6.24)$$

Se efectuaron simulaciones sin y con el control restringido (6.4), ver las figuras 6.3.a y 6.4.a.

El control de entrada $U(t)$, con la condición inicial (2,1), con y sin el control restringido (6.4) es mostrado en las figuras 6.3.b y 6.4.b respectivamente.

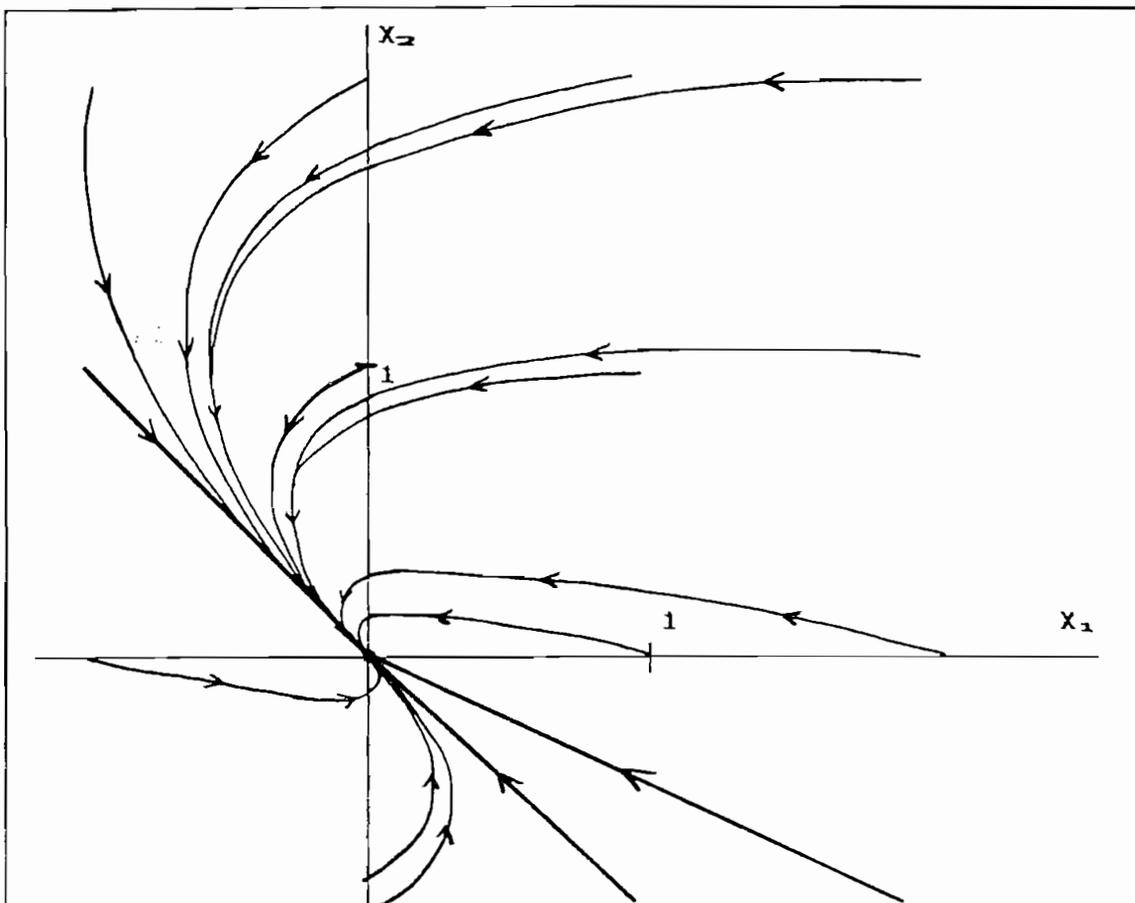


Figura 6.3.a.- Trayectorias en el Plano de Fase de la simulación con el Controlador de División sin restricción (6.24).

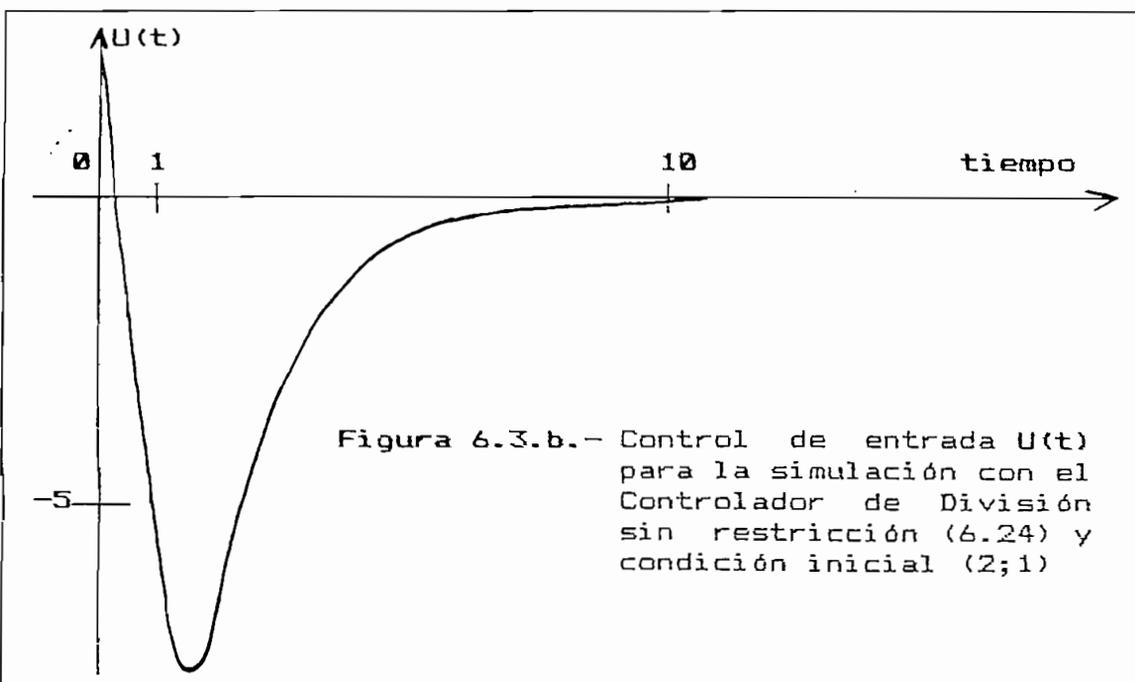
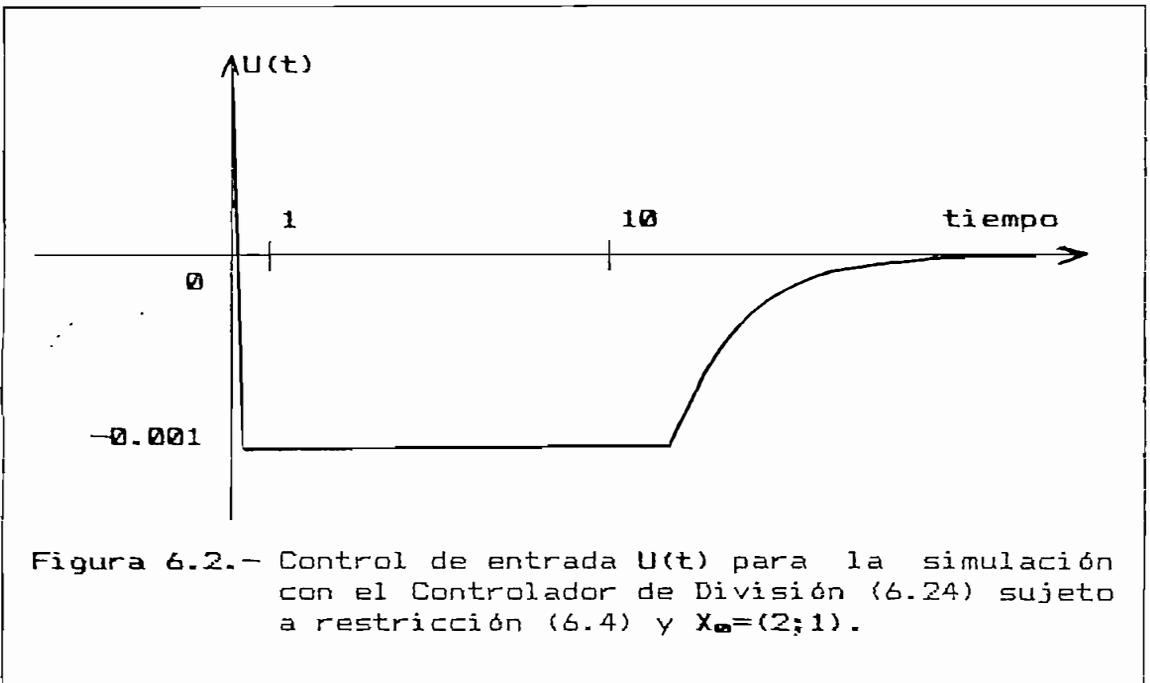
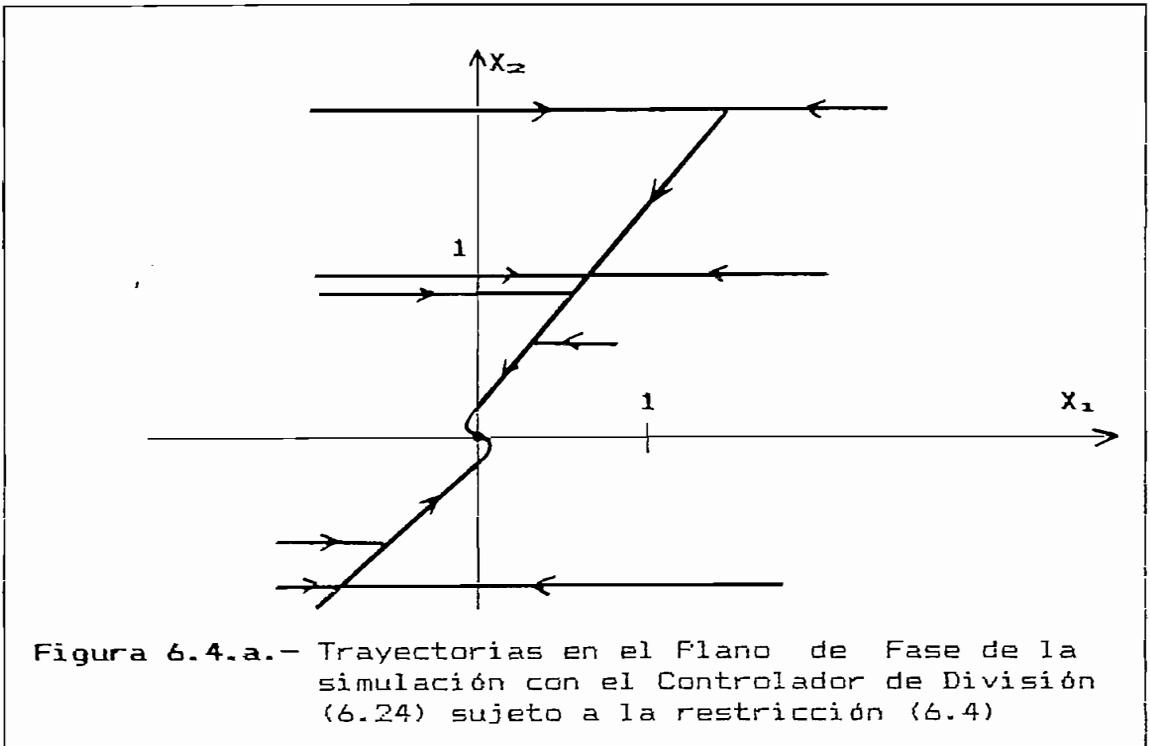


Figura 6.3.b.- Control de entrada $U(t)$ para la simulación con el Controlador de División sin restricción (6.24) y condición inicial (2;1)

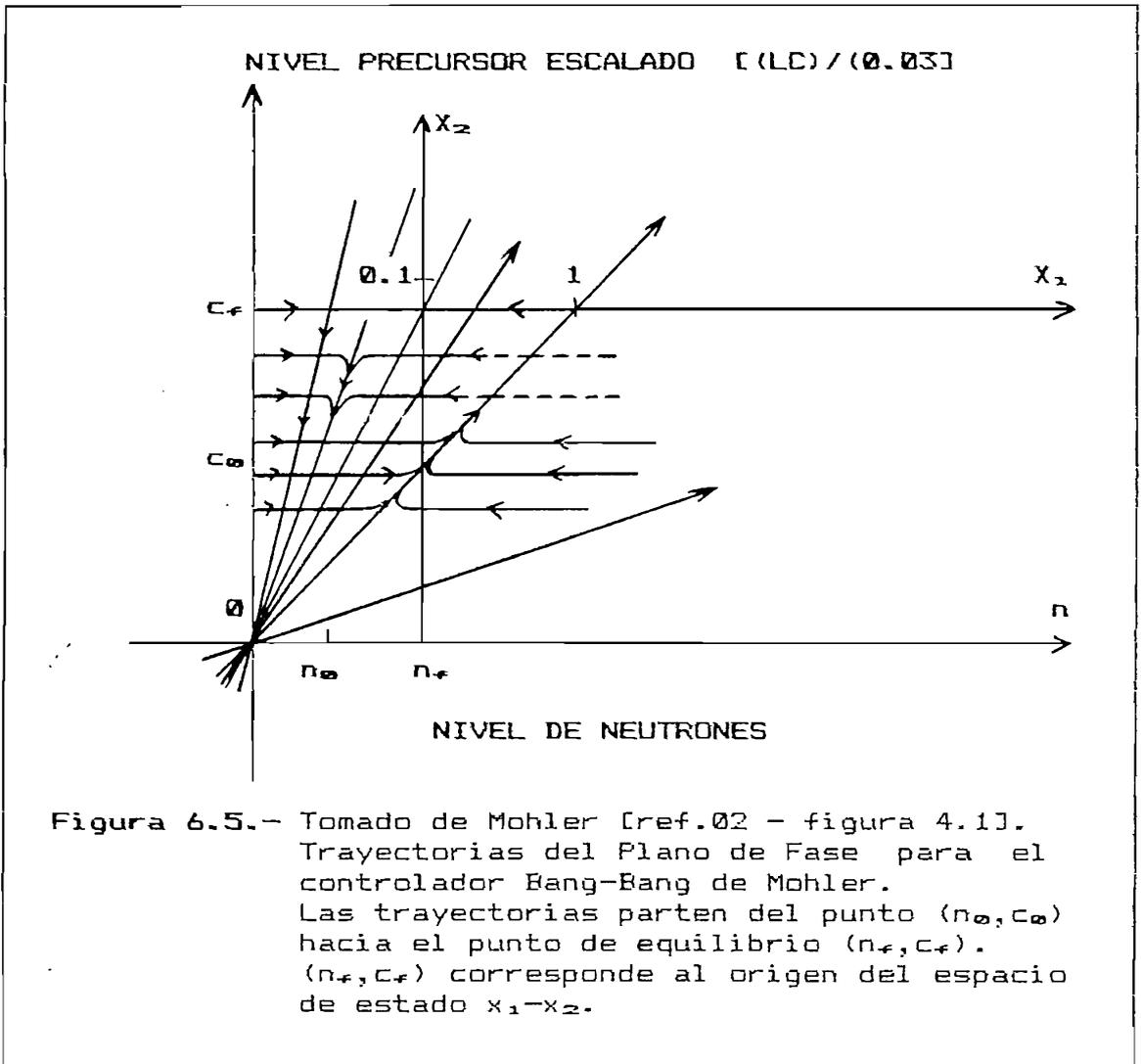


Los Controladores de División se muestran muy atractivos. Puesto que, son fáciles de diseñar, y proveen de un buen control Local y Global con el mismo algoritmo.

6.4.- CONTROL BANG-BANG.

Mohler [ref.02] resuelve el problema de estabilizar la ecuación (6.8) por medio de un controlador Bang-Bang de tiempo óptimo. Ver la figura 6.5.

Este modo de control no es factible cuando el estado se encuentra cerca del origen; en tal situación Mohler sugiere un controlador PI para el control local.



6.5.- CONCLUSIONES.

Cuando se compara el Controlador Cuadrático con el Controlador Restringido, el Controlador de División con el Control Restringido, y el controlador Bang-Bang, se observa que el Controlador de División ofrece mejores ventajas. Puesto que, es más fácil de diseñar que los otros dos.

Diferentes objetivos de Control pueden ser tomados en consideración, incluyendo la optimización del tiempo. El controlador Bang-Bang da un error en el punto final, haciéndose necesaria la compensación mediante el empleo de otro controlador, por ejemplo un Controlador-FI.

El Controlador de División provee de un buen Control Local y un buen Control Global con el mismo algoritmo.

CAPITULO 7:

"SUMARIO, DISCUSIONES Y CONCLUSIONES"

7.- SUMARIO, DISCUSIONES Y CONCLUSIONES.

El problema de hallar un Controlador para el Sistema Bilineal

$$\dot{X} = AX + \sum_{i=1}^m (B_i X + b_{i0}) \cdot U_i \quad (7.1)$$

para el caso en que la matriz A es estable, fue resuelto satisfactoriamente por Jacobson [ref.07]. El uso una función cuadrática de Lyapunov $\bar{Q}=X^T P X$ para generar el control requerido $U_i = -(B_i X + b_{i0})^T P X$, el cual hace al sistema más rápido que el control trivial $U=0$.

El caso en que A es inestable, en general está todavía sin solución. La presente tesis sugiere la literatura adecuada para la solución de casos especiales. Este trabajo contiene nuevas contribuciones para la solución de casos especiales:

- 1) Una extensión de los resultados de Jacobson, sujetas a la condición de que exista una $P=P^T > 0$ tal que $\{X \mid (B_i X + b_{i0})^T P X = 0\} \cap \{X \mid X < 0, X^T (PA + A^T P) X \geq 0\}$ sea vacía (Teorema 3.13).
- 2) Condiciones suficientes para trabajar con Controles Constantes.
- 3) Se define una clase especial de Sistemas Bilineales, el Sistema Bilineal Dyadico, el cual se caracteriza porque $(B_i X + b_{i0}) = b_{i0} (c^T X + 1)$ para algún i (Definición 4.20).

Para estos Sistemas se propone un método de diseño, el cual reduce el problema Bilineal a un problema de concatenación de Sistemas de Control Lineales dentro de tres regiones del Espacio de Estado. Condiciones para la estabilización son dadas en el Teorema 4.22 y el método, el Controlador de División, es presentado en el Diseño 4.26.

La presente tesis contiene numerosos ejemplos.

Préstese especial interes al ejemplo 2.2 (un caso de inestabilidad), los ejemplos 3.18 y 3.19 (aplicaciones del Teorema 3.13), Teorema 4.14 (estabilización equivale a la estabilización con un control constante), el ejemplo 4.21 (sistema Dyadic de la vida real), los ejemplos 4.28 y 4.29 (aplicaciones del Teorema 4.22), el ejemplo 4.31 (aplicación del Diseño 4.26), y el ejemplo del capítulo 6, en donde el problema de controlar el nivel de neutrones de un reactor de fisión nuclear es resuelto de tres diferentes maneras.

La presente Tesis discute varias ideas de como atacar al problema cuando A es inestable.

Una pequeña nota es incluida sobre el caso en que los controles adaptivos y multiplicativos son independientes el uno del otro. Algunos resultados son incluidos.

4) Condiciones suficientes para Controles estabilizadores Constantes y Lineales (Teorema 5.1).

Como se indicó al inicio de esta tesis, es muy poco el conocimiento de cómo controlar (7.1) cuando A es inestable. Una Teoría General debe ser desarrollada. La presente tesis plantea que, la ruta para lograr este objetivo sería:

- 1) El problema de estabilización debe ser resuelto antes de tratar de hallar una ley general de Control Retroalimentado. Esto se debe a que no tendría objeto tratar de determinar Leyes de Control sin determinar si es posible estabilizar el sistema.

- 2) Procesos de la vida real, modelados Bilinealmente, deben ser tratados. Actualmente existe la tendencia a tratar este punto. La confirmación de la Teoría de Sistemas Bilineales únicamente podrá ser probada con la realización de la misma. Si existen algunos procesos bilineales de la vida real que están sujetos a entradas de Control perfectamente determinadas, entonces no debemos malgastar esfuerzo en esta tarea. Los sistemas Bilineales Fisiológicos, reportados por Mohler [ref.33] a menudo no pueden ser controlados perfectamente. Mas aún, existen ciertos sistemas Bilineales, que requieren de un estudio especial para que se pueda fácilmente controlarlos. Un ejemplo de esto fue lo indicado en el capítulo 6.

- 3) Queda por investigarse una clase más general de Sistemas No-Lineales, la cual es cerrada bajo un estado realimentado. Sería satisfactorio poder colocar el Sistema Bilineal dentro de una clase más general con propiedades deseables. Una posible clase sería:

$$X = p(X) + \sum_{i=1}^m (B_i X + b_{i0}) X U_i$$

donde, los elementos de $p(X)$ son polinomios homogéneos de grado n , y $U_i(X)$ es un polinomio de grado $(n-1)$.

Ciertamente, existirán otras clases de sistemas interesantes, que quizá respondan a la ecuación No-Lineal de Riccati dada en (3.3) y resuelta de una manera similar.

El Reporte de Moylan [ref.04] es el posible punto de partida.

Para culminar, se espera que en lo futuro sean emprendidos otros trabajos, similares al presente, que tengan como objetivo principal el estudio de Sistemas Bilineales; puesto que, es el cambio que se esta observando en la Ingeniería de Control.



A P E N D I C E S

APENDICE A: "PROGRAMA NUMUNO"

CONTINUOUS SYSTEM NUMUNO

STATE X1 X2

DER DX1 DX2

B1 = 2*X1 + X2

B2 = X1 + 3*X2

UH1 = -((B1-2)*(B1-2) + (B2-2)*(B2-2)) * K

UH2 = -((B1-2)*(B1+2) + (B2-2)*(B2+2)) * K

UH = IF -2*(X1+X2) > 0 THEN UH1 ELSE UH2

UL = K1*X1 + K2*X2

U = IF LIN > 0.5 THEN UL ELSE UH

DX1 = -X1 + (B1-2)*U

DX2 = X2 + (B2-2)*U

K:100

K1:50

K2:100

LIN:0

END

Refierase al ejemplo 4.9.

APENDICE B: "PROGRAMA NUMDOS"

CONTINUOUS SYSTEM NUMDOS

STATE X1 X2

DER DX1 DX2

D = X1 - X2 - 2

S = IF SIGN(D)<0 THEN -1 ELSE 1

DEN = IF ABS(D)>EPS THEN D ELSE ETA*S

U = (L1*X1 + L2*X2)/DEN

DX1 = X1 + D*U

DX2 = 2*X2 + D*U

EPS:0.001

ETA:0.001

L1:4

L2:-9

END

Refierase al ejemplo 4.30.

APENDICE C: "PROGRAMA NUMTRES"

```

CONTINUOUS SYSTEM NUMTRES
STATE X1 X2
DER DX1 DX2
INPUT EPS
OUTPUT MU
MU = B11*X1 + B12*X2 + B1
DIV = IF ABS(MU)>G THEN MU ELSE G
UH = (K1*X1 + K2*X2)/DIV
U0 = 0
U = IF MU<-G OR EPS>0 THEN UH ELSE U0
DX1 = A11*X1 + A12*X2 + (B11*X1 + B12*X2 + B1)*U
DX2 = A21*X1 + A22*X2 + (B21*X1 + B22*X2 + B2)*U
A11:-1 ; A12:0 ; A21:0 ; A22:1
B11:1 ; B12:-1 ; B21:1 ; B22:-1
B1:-2 ; B2:-2
K1:0
K2:-2
G:0.1
END

```

```

CONTINUOUS SYSTEM HYS
STATE OUT
DER DOUT
INPUT E
OUTPUT R
INITIAL
DU:1
L0:0.05
H1:0.5
C:1
OUTPUT
R=SIGN(OUT)*DU
DYNAMICS
C1 = IF OUT<1 THEN C*(1.5-OUT) ELSE 0
C2 = IF OUT>-1 THEN -C*(1.5+OUT) ELSE 0
DOUT = IF E>H1 OR OUT>0 AND E>L0 THEN C1 ELSE C2
END

```

```

CONNECTING SYSTEM CONI
E[HYS] = MU[NUMTRES]
EPS[NUMTRES] = R[HYS]
END

```

Refierase al ejemplo 4.31.

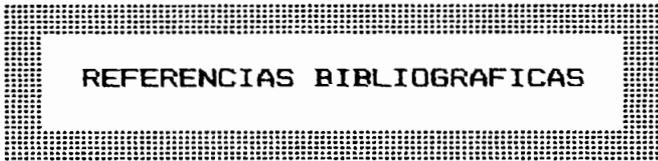
APENDICE D: "PROGRAMA NUMCUATRO"

```

CONTINUOUS SYSTEM NUMCUATRO
STATE X1 X2
DER DX1 DX2
"
D = MAX((X1+1),EPS)
U1 = (K1/(K2*D))*(L1*X1 + L2*X2) "CONTROLADOR DE DIVISION
U2 = -(X1+1)*(P1*X1 + P2*X2)*L "CONTROLADOR CUADRATICO
E = MIN((X1+1),(X2+1))
"
UH = IF DIV>0.5 THEN U1 ELSE U2 "SELECTOR DE CONTROL
U = IF UH<-G THEN -G ELSE IF UH<G THEN UH ELSE G "LIMITADOR
H1 = (-BETA/L)*(X1-X2) + (X1+1)*(U/L)
DX1 = IF X1>-1 THEN H1 ELSE MAX(0,H1)
H2 = LA*(X1-X2)
DX2 = IF X2>-1 THEN H2 ELSE MAX(0,H2)
"
EPS:0.01
K1:1
K2:100000
L1:648.4
L2:-650.9
L:1.0E-5
BETA:0.0065
LA:0.4
P1:40
P2:20
G:0.001 " =1.0E5 CUANDO EL LIMITADOR NO ES DESEADO
DIV:1 " =0 CUANDO EL CONTROL CUADRATICO ES SELECCIONADO
END

```

Refierase al Capitulo 6.



REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS:

- 1.- ESPAÑA, H., I.D. LANDAU.- 1978.- "REDUCED ORDER BILINEAR MODELS FOR DISTILLATION COLUMNS".- AUTOMATICA, VOL.14, PP. 345-355.
- 2.- MOHLER, R.R..- 1973.- "BILINEAR CONTROL PROCESS".- ACADEMIC PRESS.
- 3.- MOHLER, R.R., A. RUBERTI.- 1978.- "RECENTS DEVELOPMENTS IN VARIABLE STRUCTURE SYSTEMS; ECONOMIC AND BIOLOGY".- SPRINGER.
- 4.- MOYLAN, P.J., B.D.O. ANDERSON.- OCTOBER - 1973.- "NON LINEAR REGULATOR THEORY".- IEEE AC.,VOL. AC-18, #5, PP. 460-465.
- 5.- JACOBSON, P.H..- 1977.- "EXTENSIONS OF LINEAR QUADRATIC CONTROL OPTIMIZATION AND MATRIX THEORY".- ACADEMIC PRESS
- 6.- MOHLER, R.R..- JULIO - 1977.- "NATURAL BILINEAR CONTROL PROCESSES".- IEEE TRANS. SYST., CYBERN., VOL. SSC-6, PP. 192-197.
- 7.- MOHLER, R.R..- OCTOBER - 1971.- "A COMMON MODEL IN SOCIO ECONOMICS, ECOLOGY AND PHYSIOLOGY".- PROC. INT. CONF. SYST., MAN, CYBERN.- ANAHEIM, CALIFORNIA.

- 8.- MOHLER, R.R.- APRIL - 1972.- "BILINEAR STRUCTURE AND MAN".- PROC. USA-ITALY SEMINAR VARIABLE STRUCTURE SYSTEMS".- SORRENTO, ITALY.
- 9.- MOHLER, R.R.- 1973.- "BILINEAR CONTROL PROCESSES WITH APPLICATIONS TO ENGINEERING, ECOLOGY AND MEDICINE".- NEW YORK.- ACADEMIC PRESS.
- 10.- E. BIONDI AND R. SCHMID.- APRIL - 1972.- "PROSTHESE AND MATHEMATICALS MODEL OF SENSE ORGANS".- PROC. USA-ITALY, SEMINAR VARIABLE STRUCTURE SYSTEMS.- SORRENTO, ITALY.
- 11.- MOHLER, R.R. AND SHEN C.N.- 1970.- "OPTIMAL CONTROL OF NUCLEAR REACTORS".- NEW YORK.- ACADEMIC PRESS.
- 12.- BROCKETT, R.W.- APRIL 1972.- "ON THE ALGEBRAIC STRUCTURE OF BILINEAR SYSTEMS".- PROC. USA-ITALY SEMINAR VARIABLE STRUCTURE SYSTEMS".- SORRENTO, ITALY.
- 13.- DERESE, I., P. STEVENS, E. NOLDUS.- 1979.- "OBSERVERS FOR BILINEAR SYSTEMS WITH BOUNDED INPUTS".- INT. J. SYST. SCI., VOL.10, #6, PP. 649-668.
- 14.- HIRSCHORN, R.M.- 1974.- "CONTROL OF BILINEAR SYSTEMS IN APPLICATIONS OF LIE GROUP THEORY TO NON LINEAR NETWORK PROBLEMS".- WESTERN PERIODICALS CO., No. HOLLYWOOD, CA.

- 15.- HERMANN, R., A.J. KRENER.- OCTOBER - 1977.- "NON LINEAR CONTROLLABILITY AND OBSERVABILITY".- IEEE AC, VOL. 22, #5, PP. 728-740.
- 16.- LANCASTER, P.- 1969.- "THEORY OF MATRICES".- ACADEMIC PRESS.
- 17.- SLEMROD, M.- JANUARY - 1978.- "STABILIZATION OF BILINEAR CONTROL SYSTEMS".- SIAM J. CONTROL, VOL. 16, #1, PP. 131-141.
- 18.- BROCKETT, R.W., J.R. WOOD.- 1974.- "ELECTRICAL NETWORKS CONTAINING CONTROLLED SWITCHES IN DESOER ET AL: APPLICATIONS OF LIE GROUP THEORY TO NON LINEAR NETWORK PROBLEMS".- WESTERN PERIODICALS Co., NORTH HOLLYWOOD, CA.
- 19.- EGARDT, B., P. MOLANDER.- 1978.- "MULTIVARIABLE ROOT LOCI FOR POSITIVE REAL TRANSFER MATRICES".- INT. J. CONTROL, VOL.2810, #2, PP. 253-259.
- 20.- YASUDA, K., K. HIARI.- 1977.- "STABILIZATION OF SINGLE INPUT BILINEAR SYSTEMS".- MEMOIRS OF THE FACULTY OF ENGINEERING, KOBE UNIVERSITY, #23.- KOBE, JAPAN.
- 21.- HAHN, W.- 1967.- "STABILITY OF MOTION".- SPRINGER.

- 22.- POLAK, E., D.Q. MAYNE.- JUNE - 1979.- "ON THE FINITE SOLUTION OF NONLINEAR INEQUALITIES".- IEEE AC., VOL. AC-24, #3. PP. 443-445.
- 23.- BROCKETT, R.W..- 1973.- "LIE ALGEBRAS AND LIE GROUPS IN CONTROL THEORY IN MAYNE, BROCKETT (EDS.): GEOMETRIC METHODS IN SYSTEMS THEORY".- REIDEL.
- 24.- SANDOR, J., D. WILLIAMSON.- FEBRARY - 1977.- "DESIGN OF NONLINEAR REGULATORS FOR LINEAR PLANTS".- IEEE AC., VOL. AC-22, #1, PP. 47-50.
- 25.- SANDOR, J., D. WILLIAMSON.- OCTOBER 1977.- "NON LINEAR FEEDBACK TO IMPROVE THE TRANSIENTS RESPONSE OF A LINEAR SERVO".- IEEE AC., VOL. AC-22, #5, PP. 863-864.
- 26.- UTKIN, V.I..- APRIL - 1977.- "VARIABLE STRUCTURE SYSTEMS WITH SLIDING MODES".- IEEE AC., VOL. AC-22, #2, PP. 212-222.
- 27.- MEHRA, R.K..- 1979.- "ANALYTIC GLOBAL STABILILITY AND CONTROL ANALYSIS OF AIRCRAFT".- SEMINAR, DEPT. OF AUTOMATIC CONTROL, LUND INSTITUTE OF TECHNOLOGY.- LUND, SWEDEN.
- 28.- ASTRÖM, K.J..- 1969.- "OLINJARA SYSTEM".- SIGMATRYCK.- LUND, SWEDEN.

- 29.- BAILLIEUL, J..- 1977.- "MULTILINEAR OPTIMAL CONTROL: LIE GROUPS: HISTORY, FRONTIERS AND APPLICATIONS, VOLUME 7".- 1976 AMES RESEARCH CENTER (NASA), CONFERENCE ON GEOMETRIC CONTROL THEORY.- MATH. SCI. PRESS, BROOKLINE, MASS. 02146.
- 30.- IONESCU, T., R.V. MONOPOLI.- APRIL - 1975.- " ON THE STABILIZATION OF BILINEAR SYSTEMS VIA HYPERSTABILITY".- IEEE AC., VOL. AC-20, #2, PP. 280-284.
- 31.- GRASSELLI, D.M., A. ISIDORI, F. NICOLO.- MARCH - 1979.- "OUTPUT REGULATION OF A CLASS OF BILINEAR SYSTEMS UNDER CONSTANT DISTURBANCES".- AUTOMATICA, VOL. 15, PP. 189-195.
- 32.- MARTENSSON, K..- 1972.- "NEW APPROACHES TO THE NUMERICAL SOLUTION OF OPTIMAL CONTROL PROBLEMS".- STUDENT LITTERATUR.- LUND, SWEDEN.
- 33.- MOHLER, R.R., W.J. KOLODZIEJ.- JUNE - 1979.- "BILINEAR SYSTEMS IN THEORY AND APPLICATIONS".- IN PROC. 1979 JACC, DENVER, CO., PP. 1-6.



Juan Carlos H. Basso