ESCUELA POLITECNICA NACIONAL

«Facultad de Ingeniería Eléctrica»

TESIS DE GRADO

"REPRESENTACION DE SISTEMAS MULTIVARIABLES"

Tesis previa a la obtención del Título de Ingeniero en Electrónica y Control

Víctor Gonzalo Proaño Rosero

Quito - Julio - 1.985

Certifico que el presente

trabajo ha sido realizado

en su totalidad por el Sr.

Víctor Proaño Rosero.

Ing. Patricio Burbano
Director de Tesis

A MI MADRE

A MI PADRE

Y A MIS HERMANOS

AGRADECIMIENTO

Mi agradecimiento a las personas que me han ayudado en mi vida estudiantil, agradezco a los profesores de la ESCUELA POLITECNICA NACIONAL por todo aquello que he aprendido.

Mi agradecimiento al Ing. Patricio Burbano por su acertada conducción en esta tesis, por el esfuerzo y tiempo que me ha ofrecido.

INDICE

PROLOGO

El análisis de sistemas multivariables ha sido poco estudiado debido a la complejidad que presenta, por ello la presente tesis intenta contribuir como una herramienta para su estudio, y se dedica, al campo de los sistemas multivariables lineales e invariantes en el tiempo.

En el capítulo I se explica las forma más comunes de representación de modelos de sistemas lineales y que son:

- Descripción en el espacio de estado
- Descripción mediante matriz función de transferencia
- Representación mediante la matriz del sistema.

En el capítulo II se realiza un estudio de los conceptos de controlabilidad a manera de puntos y controlabilidad funcional así como también se expone el concepto de observabilidad. En este capítulo se realizan programas para la obtención de las formas canónicas controlable y observable y se introducen en forma matemática los conceptos de indices de controlabilidad y observabilidad de un sistema multivariable.

En el capítulo III se dan las bases para obtener la Realización Mínima a partir de una función de transferencia dada. En este capítulo además se describe el algoritmo de Fadeev para la reconstrucción de $\underline{G}(s)$ a partir de la descripción en el espacio de estado. También, contiene el desarrollo de los programas de Realización Mínima y Reconstrucción.

En el capítulo IV se presentan los resultados obtenidos y se demuestra la versatilidad de los programas desarrollados.

En los apéndices se explica el uso de los programas y se indican los listados de los mismos.

C A P I T U L O   P R I M E R O

INTRODUCCION

1.1 Introducción

1.2 Descripción en el Espacio de Estado

1.3 Descripción mediante Matriz Función de Transferencia

1.4 Representación mediante la Matriz del Sistema

1.1 INTRODUCCION.-

El objetivo del presente capítulo es el desarrollar modelos de sistemas con propósito de ejercer acción de control. Los sistemas aquí tratados son lineales e invariantes en el tiempo. Siendo los sistemas reales inherentemente no lineales, éstos pueden ser modelados por un conjunto de ecuaciones diferenciales y algebraicas lineales siguiendo un proceso de linealización alrededor del punto de operación y en consecuencia los modelos que estudiaremos en el presente trabajo también pueden ser extendidos para sistemas no lineales. Algunos conceptos de éste y otros capítulos pueden ser extendidos a sistemas variables en el tiempo, sin embargo en esta tesis nos dedicaremos solamente al análisis y aplicaciones de los mencionados conceptos para sistemas invariantes en tiempo.

En este capítulo se estudiarán tres tipos de modelos que son ampliamente usados en el análisis y diseño de control multivariable. Estos son:

- Descripción en el espacio de estado
- Descripción mediante matriz función de transferencia
- Representación mediante la matriz del sistema

1.2 DESCRIPCION EN EL ESPACIO DE ESTADO

Cualquier sistema de ecuaciones lineales de orden arbitrario que relacione las variables del sistema $v_i(t)$, sus derivadas $[dv_i(t)/dt]$, las salidas del sistema $y_j(t)$ y las entradas $u_l(t)$ puede ser reducido mediante la introducción de un juego de n variables adicionales $x_i(t)$ llamadas variables de estado, a un sistema equivalente de ecuaciones diferenciales de primer orden llamadas ecuaciones de estado, junto con varias ecuaciones algebraicas denominadas ecuaciones de salida, las cuales escritas en forma matricial se expresan como:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A}\ \underline{x}(t) + \underline{B}\ \underline{u}(t) \quad \text{Ecuación de estado} \quad (1\text{-}1)$$

$$\underline{y}(t) = \underline{C}\ \underline{x}(t) + \underline{D}\ \underline{u}(t) \quad \text{Ecuación de salida} \quad (1\text{-}2)$$

donde $\underline{x}(t)$ es un vector nx1 de variables de estado, $\underline{u}(t)$ es un vector mx1 de funciones de entrada, y $\underline{y}(t)$ es un vector kx1 de salidas. Las matrices $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$, $\underline{D}$, tienen coeficientes constantes y son de dimensión nxn, nxm, kxn y kxm, respectivamente para sistemas lineales.

La descripción de espacio de estado del sistema provee un cuadro completo de la estructura del sistema como se observa en la fig.1.1 que muestra como todas las variables internas $x_i(t)$ $[i=1,n]$ interactúan con otras; como las entradas $u_l(t)[l=1,m]$ afectan a los estados del sistema $x_i(t)$, y como las salidas

$y_j(t)[j=1,k]$ son obtenidas de varias combinaciones de las variables de estado $x_i(t)$ y de las entradas $u_l(t)$. Esta forma de descripción se denomina descripción interna.

Los valores propios (o polos) del sistema están dados por las raíces de $\det(s\,\underline{I} - \underline{A}) = 0$.

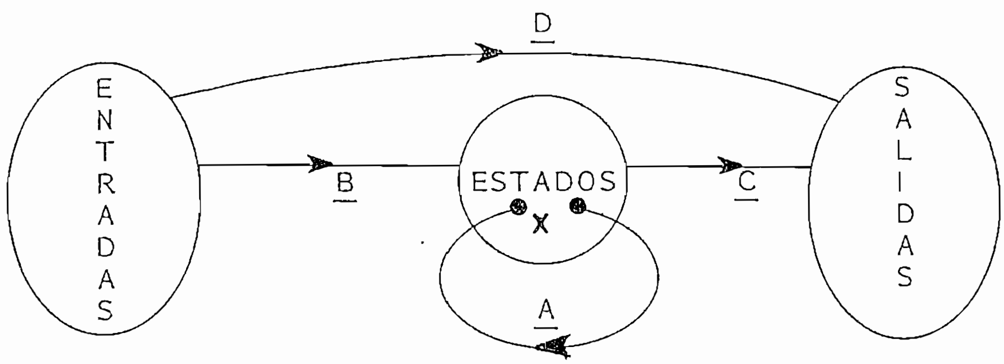

FIG. 1.1. Descripción en el espacio de estado

Ejemplo 1:

Considérese el circuito de la figura 1.2. Se desea obtener la descripción en el espacio de estado tomando como entradas los voltajes e_a y e_b y como salidas las corrientes i_1 e i_2 que circulan por L_1 y L_2 respectivamente y el voltaje e_1 que aparece sobre el capacitor C.

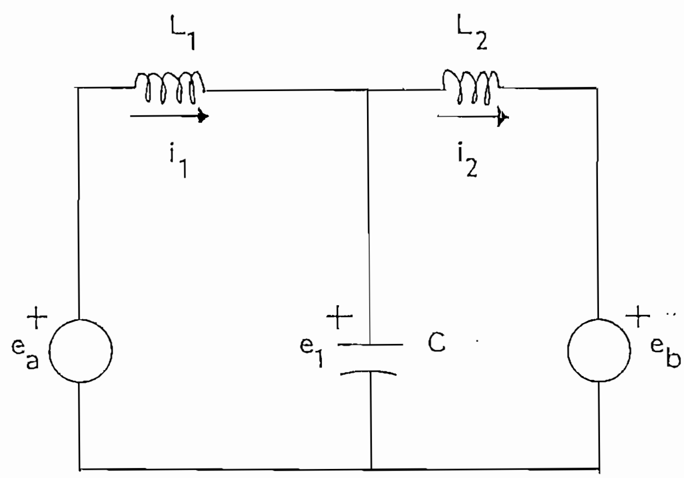

FIG. 1.2. Sistema eléctrico simple.

Si se asignan como variables de estado :

$$x_1 = e_1$$
$$x_2 = i_1$$
$$x_3 = i_2$$

Expresando los voltajes en las bobinas y la corriente en el capacitor en función de las variables de estado y aplicando las leyes de Kirchhoff se tiene:

$$x_2 = C\,\dot{x}_1 + x_3$$
$$0 = -e_a + L_1\,\dot{x}_2 + x_1$$
$$0 = L_2\,\dot{x}_3 + e_b - x_1$$

De aquí, la descripción en variables de estado será:

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{C}x_2 - \frac{x_3}{C}$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{L_1} x_1 + \frac{1}{L_1} e_a$$

$$\dot{x}_3 = -\frac{1}{L_2} x_1 - \frac{1}{L_2} e_b$$

Las salidas están dadas por:

$$y_1 = e_1 = x_1$$
$$y_2 = i_1 = x_2$$
$$y_3 = i_2 = x_3$$

Expresando en forma matricial tenemos:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} & \frac{-1}{C} \\ \frac{-1}{L_1} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{L_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ea \\ eb \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

En esta última descripción, se identifican claramente las matrices $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$, $\underline{D}$.

Ejemplo 2:

Hallar la descripción en el espacio de estado para el sistema mecánico de la fig. 1.3. Considerar como salida los desplazamientos en las masas M_1 y M_2 .

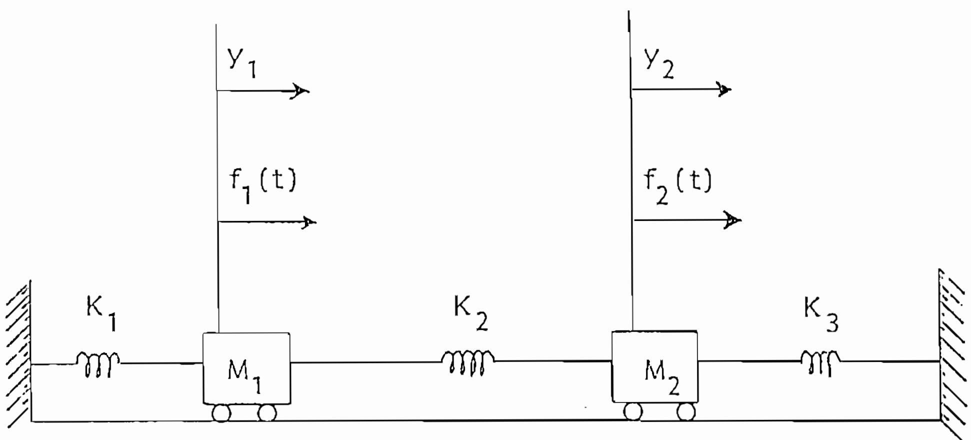

FIG. 1.3. Sistema mecánico

Las ecuaciones que describen el movimiento de las masas M_1 y M_2 son:

$$M_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} + K_1 y_1 = f_1 + K_2 (y_2 - y_1)$$

$$M_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} + K_2 (y_2 - y_1) + K_3 y_2 = f_2$$

Asignando como variables de estado a los desplazamientos de las 2 masas, es decir:

$$x_1 = y_1$$
$$x_2 = y_2$$

Es necesario introducir nuevas variables de estado, puesto que las ecuaciones diferenciales que definen los desplazamientos son de segundo orden.

$$x_3 = \dot{x}_1 = \dot{y}_1$$
$$x_4 = \dot{x}_2 = \dot{y}_2$$

Las ecuaciones en el espacio de estado serán:

$$\dot{x}_1 = x_3$$
$$\dot{x}_2 = x_4$$

$$\dot{x}_3 = -\frac{K_2+K_1}{M_1} x_1 + \frac{K_2}{M_1} x_2 + f_1$$

$$\dot{x}_4 = \frac{K_2}{M_2} x_1 - \frac{K_2+K_1}{M_2} x_2 + f_2$$

Expresando en forma matricial tenemos:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{K_2+K_1}{M_1} & \frac{K_2}{M_1} & 0 & 0 \\ \frac{+K_2}{M_2} & -\frac{K_2+K_1}{M_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

1.3 DESCRIPCION MEDIANTE MATRIZ FUNCION DE TRANSFERENCIA

La matriz función de transferencia del sistema $\underline{G}(s)$, relaciona la transformada de Laplace del vector de salidas $\underline{y}(s)$, con la transformada de Laplace del vector de entradas $\underline{u}(s)$, tomando condiciones iniciales nulas; mediante la relación:

$$\underline{y}(s) = \underline{G}(s)\ \underline{u}(s)$$

Para un modelo lineal de orden arbitrario, los elementos $g_{ij}(s)$ de la matriz $\underline{G}(s)$ son relaciones de polinomios en s que representan la función de transferencia vista entre la salida y_i y la entrada u_j. Puesto que esta forma de descripción provee poca información real acerca de la estructura interna del sistema, se la conoce como descripción externa.

Si la descripción del sistema es conocida en la forma de espacio de estado (ecuaciones 1.1. y 1.2.), entonces aplicando la transformada de Laplace a estas ecuaciones, con condiciones iniciales iguales a cero, se obtiene:

$$(s\underline{I} - \underline{A})\ \underline{x}(s) = \underline{B}\ \underline{u}(s)$$

$$\underline{y}(s) = \underline{C}\ \underline{x}(s) + \underline{D}\ \underline{u}(s)$$

De aquí, la descripción equivalente mediante la matriz función de transferencia se obtiene eliminando $\underline{x}(s)$:

$$\underline{y}(s) = \underline{G}(s)\ \underline{u}(s) = [\ \underline{C}\ (s\underline{I} - \underline{A})^{-1}\underline{B} + \underline{D}\ ]\ \underline{u}(s)$$

luego $$\underline{G}(s) = [\ \underline{C}\ (s\underline{I} - \underline{A}\ )^{-1}\underline{B} + \underline{D}\ ] \qquad (1\text{-}3)$$

Si se asume que no se producen simplificaciones en $\underline{C}\ (\ s\underline{I} - \underline{A}\ )^{-1}\ \underline{B}$, entonces los polos de $\underline{G}(s)$ son las raíces de $\det(s\underline{I} - \underline{A}) = 0$.

Se define aqui la matriz $\underline{G}(s)$ como "estrictamente propia" si $\underline{G}(s) \rightarrow 0$ cuando $s \rightarrow \infty$, y se llama "propia" si $G(s) \rightarrow$ matriz constante cuando $s \rightarrow \infty$

En todo sistema físico la matriz función de transferencia $\underline{G}(s)$ es "propia" esto significa que el grado del polinomio del numerador debe ser menor o igual que el grado del polinomio del denominador.

Ejemplo 3:

Encontrar la matriz función de transferencia del sistema eléctrico de la fig. 1.4. Considerar como única salida, la corriente que circula por la resistencia R.

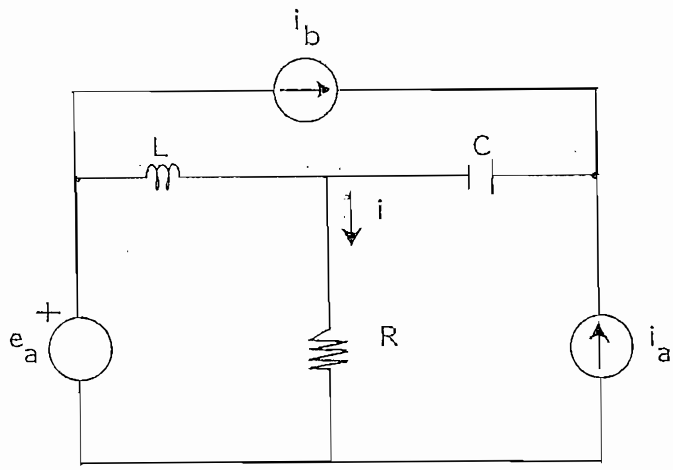

FIG. 1.4. Sistema eléctrico simple.

Asignamos como variables de estado la corriente en la bobina L y el voltaje del condensador C.

En base a esto, las ecuaciones que resultan son:

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{C}i_a - \frac{1}{C}i_b$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{R}{L}x_2 + \frac{1}{L}e_a - \frac{R}{L}i_a - \frac{R}{L}i_b$$

donde x_1 = voltaje sobre el capacitor C

x_2 = corriente que circula por la bobina L

La ecuación de salida es:

$$i = y = x_2 - C\dot{x}_1 = x_2 + i_a + i_b$$

Las ecuaciones matriciales son:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{C} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_a \\ i_a \\ i_b \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_a \\ i_a \\ i_b \end{bmatrix}$$

De acuerdo con la ecuación (1-3) se tiene

$$\underline{G}(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s+\frac{R}{L} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{C} & \frac{-1}{C} \\ \frac{1}{L} & \frac{-R}{L} & \frac{-R}{L} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{G}(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{sL + R} & 1 - \dfrac{R}{sL + R} & 1 - \dfrac{R}{sL + R} \end{bmatrix}$$

$$\underline{G}(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{sL + R} & \dfrac{sL}{sL + R} & \dfrac{sL}{sL + R} \end{bmatrix}$$

Adicionalmente la relación entre $\underline{G}(s)$ y una representación correspondiente en el espacio de estado, no es en general única, puesto que:

$$\underline{G}(s) = \underline{C}\ (\ s\underline{I} - \underline{A}\ )^{-1}\ \underline{B} + \underline{D}$$

donde $\underline{C}$ es una matriz kxn, $\underline{A}$ es una matriz nxn, $\underline{B}$ es una matriz nxm, y $\underline{D}$ es una matriz kxm y $\underline{G}(s)$ puede ser generada de una familia infinita de sistemas $S = [\ \underline{A},\ \underline{B},\ \underline{C},\ \underline{D}\ ]$. Entre todas aquellas representaciones de espacio de estado existe una que tiene el mínimo orden.

En efecto, dada la descripción de un sistema en el espacio de estado, a menudo es ventajoso para propósitos de análisis y diseño, considerar una representación alternativa del modelo del sistema. En el caso más simple, se puede obtener un nuevo modelo mediante un cambio de base en el espacio de estado de la forma
$\underline{x} = \underline{H}\ \underline{x}_1$, donde $\underline{H}$ es una matriz no singular.

De esta forma, el sistema de ecuaciones:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\ \underline{x} + \underline{B}\ \underline{u}$$
$$\underline{y} = \underline{C}\ \underline{x}$$

se transforma en:

$$\dot{\underline{x}}_1 = \underline{A}_1 \underline{x}_1 + \underline{B}_1 \underline{u}$$

$$\underline{y} = \underline{C}_1 \underline{x}_1$$

donde

$$\underline{A}_1 = \underline{H}^{-1} \underline{A}\, \underline{H}$$

$$\underline{B}_1 = \underline{H}^{-1} \underline{B}$$

$$\underline{C}_1 = \underline{C}\, \underline{H}$$

A esta transformación se le conoce como transformación de semejanza si cumple que el vector de estado ha sido redefinido pero el sistema mantiene los mismos polos; es decir, los valores propios de $\underline{A}$ y de $\underline{A}_1 = \underline{H}^{-1} \underline{A}\, \underline{H}$ son los mismos.

1.4 REPRESENTACION MEDIANTE LA MATRIZ SISTEMA

Si después de la linealización de las ecuaciones del sistema, se tiene un juego de ecuaciones diferenciales lineales (de orden arbitrario) mezclado con ecuaciones algebraicas, entonces después de tomar la transformada de Laplace con condiciones iniciales nulas, se obtiene en la forma matriz-vector:

$$\begin{aligned} \underline{T}(s)\ \underline{\xi} &= \underline{U}(s)\ \underline{u} \\ \underline{y} &= \underline{V}(s)\ \underline{\xi} + \underline{W}(s)\ \underline{u} \end{aligned}$$

donde $\underline{\xi}$, $\underline{u}$, $\underline{y}$, son vectores de las transformadas de Laplace de las variables del sistema , de las entradas y de las salidas respectivamente, y $\underline{T}$, $\underline{U}$, $\underline{V}$, $\underline{W}$ son matrices polinomiales de dimensiones rxr, rxm, kxr, kxm respectivamente. Las variables del sistema ξ_i no son necesariamente los estados del mismo.

Este sistema de ecuaciones puede igualmente ser escrito como:

$$\begin{bmatrix} \underline{T}(s) & \underline{U}(s) \\ -\underline{V}(s) & \underline{W}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\xi} \\ -\underline{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\underline{y} \end{bmatrix} \qquad (1\text{-}4)$$

y la matriz del sistema en la forma polinomial de Rosenbrock está definida como:

$$\underline{P}(s) = \begin{bmatrix} \underline{T}(s) & \underline{U}(s) \\ -\underline{V}(s) & \underline{W}(s) \end{bmatrix} \qquad (1\text{-}5)$$

La matriz $\underline{P}(s)$ contiene toda la información acerca del sistema, necesaria para própositos de análisis. Sin embargo, es importante notar que en la formulación de la matriz $\underline{P}(s)$, la dimensión r de la matriz $\underline{T}(s)$ debe ser ajustada de tal forma que $r \geqslant$ grado del det[$\underline{T}(s)$] . También, en esta forma de descripción los polos del sistema son las raíces del det[$\underline{T}(s)$] = 0

La descripción mediante la matriz del sistema de Rosenbrock puede igualmente ser usada si la descripción del sistema es conocida en la forma del espacio de estado. En este caso especial, la "matriz del sistema en la forma de espacio de estado" está definida como:

$$\underline{P}(s) = \begin{bmatrix} s\underline{I} - \underline{A} & \underline{B} \\ - \underline{C} & \underline{D} \end{bmatrix} \qquad (1\text{-}6)$$

En donde las variables ξ para este caso coinciden con las variables de estado x.

Si la descripción mediante matriz del sistema es conocida, entonces la descripción mediante matriz función de transferencia puede ser obtenida como:

$$\underline{G}(s) = \underline{V}(s)\ \underline{T}^{-1}(s)\ \underline{U}(s) + \underline{W}(s)$$

que para el caso especial de que $\underline{P}(s)$ esté en la forma de espacio de estado llega a convertirse en la ecuación previamente citada (1-3).

En efecto:

Si tiene que:

$$\underline{T}(s)\ \underline{\xi} = \underline{U}(s)\ \underline{u}(s)$$

$$\underline{y}(s) = \underline{V}(s)\ \underline{\xi} + \underline{W}(s)\ \underline{u}(s)$$

Eliminando las variables ξ se tiene:

$$\underline{\xi}(s) = \underline{T}(s)^{-1}\ \underline{U}(s)\ \underline{u}(s) \quad \text{y entonces}$$

$$\underline{y}(s) = \underline{V}(s)\ \underline{T}^{-1}(s)\ \underline{U}(s)\ \underline{u}(s) + \underline{W}(s)\ \underline{u}(s)$$

$$= [\ \underline{V}(s)\ \underline{T}^{-1}(s)\ \underline{U}(s) + \underline{W}(s)\ ]\ \underline{u}(s) = \underline{G}(s)\ \underline{u}(s)$$

Ejemplo 4:

Encontrar la representación mediante la matriz del sistema de:

$$\dot{x}_1 + \ddot{x}_2 = -x_1$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 + u$$

$$y = x_1$$

Aplicando la transformada de Laplace (con condiciones iniciales nulas) el sistema de ecuaciones, tenemos [haciendo $\xi_1 = X_1(s)$, $\xi_2 = X_2(s)$]

$$(s+1)\,\xi_1 + s^2\,\xi_2 = 0$$
$$(s+1)\,\xi_2 = u(s)$$
$$y(s) = \xi_1$$

Escribiendo en la forma de matriz-vector se obtiene:

$$\left[\begin{array}{cc|c} s+1 & s^2 & 0 \\ 0 & s+1 & 1 \\ \hline -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \hline -u \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ -y \end{array}\right]$$

Se identifica claramente a la matriz del sistema como:

$$\underline{P}(s) = \begin{bmatrix} \underline{T}(s) & \underline{U}(s) \\ -\underline{V}(s) & \underline{W}(s) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} s+1 & s^2 & 0 \\ 0 & s+1 & 1 \\ \hline -1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

La dimensión r de $\underline{T}(s)$ es: $r = 2$

Por tanto, se cumple la condición $r \geqslant n$ pues:

$\det(\underline{T}(s)) = (s+1)^2 = s^2 + 2s+1$; en consecuencia $n=2$

por lo cual no es necesario ajustar la dimensión de $\underline{T}(s)$.

Para una representación mediante la matriz del sistema de Rosenbrock en el espacio de estado, una trasformación de semejanza puede ser definida mediante:

$$\begin{bmatrix} \underline{H}^{-1} & 0 \\ 0 & \underline{I}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s\underline{I} - \underline{A} & \underline{B} \\ -\underline{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{H} & 0 \\ 0 & \underline{I}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s\underline{I} - \underline{A}_1 & \underline{B}_1 \\ -\underline{C}_1 & 0 \end{bmatrix}$$

donde

$$\underline{A}_1 = \underline{H}^{-1} \underline{A}\, \underline{H}$$

$$\underline{B}_1 = \underline{H}^{-1} \underline{B}$$

$$\underline{C}_1 = \underline{C}\, \underline{H}$$

Kalman ha demostrado que si $P(s)$ y $P_1(s)$ son dos matrices de sistema de mínimo orden en la forma de espacio de estado entonces $P(s)$ y $P_1(s)$ generan la misma matriz función de transferencia $\underline{G}(s)$ si y solo sí aquellos son sistemas semejantes.

Para considerar el caso más general de sistemas descritos mediante una matriz de sistema en la forma polinomial, necesitamos examinar la transformación definida por Rosenbrock como "equivalencia estricta de sistemas". Puesto que $\underline{G}(s)$ está dada por:

$$\underline{G}(s) = \underline{V}(s)\ \underline{T}^{-1}(s)\ \underline{U}(s) + \underline{W}(s);$$ donde

$$P(s) = \begin{bmatrix} T & U \\ -V & W \end{bmatrix}$$

puede provenir de más de una matriz de sistema de mínimo orden P(s). Se debe establecer primero lo que significa un sistema de mínimo orden.

Si el máximo común divisor a la izquierda [$\underline{M}(s)$] de $\underline{T}(s)$ y $\underline{U}(s)$ es unimodular; es decir det[$\underline{M}(s)$] = constante diferente de cero, independiente de s; con lo cual $\underline{T}(s)$ y $\underline{U}(s)$ son relativamente primos a la izquierda; y si además el máximo común divisor a la derecha [$\underline{N}(s)$] de $\underline{V}(s)$, $\underline{T}(s)$ es unimodular; con lo cual $\underline{V}(s)$ y $\underline{T}(s)$ son relativamente primos a la derecha; entonces el sistema S = ($\underline{T}$, $\underline{U}$, $\underline{V}$, $\underline{W}$) se conoce como sistema de mínimo orden.

La transformación de equivalencia estricta de sistemas se aplica a la representación de matriz de sistema que no tiene necesariamente el mínimo orden y es definida mediante:

$$\begin{bmatrix} \underline{M}(s) & 0 \\ \underline{X}(s) & \underline{I}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{T}(s) & \underline{U}(s) \\ -\underline{V}(s) & \underline{W}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{N}(s) & \underline{Y}(s) \\ 0 & \underline{I}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{T}_1(s) & \underline{U}_1(s) \\ -\underline{V}_1(s) & \underline{W}_1(s) \end{bmatrix}$$

$$\text{donde } \underline{P}_1(s) = \begin{bmatrix} \underline{M}(s) & 0 \\ \underline{X}(s) & \underline{I}_K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{T}(s) & \underline{U}(s) \\ -\underline{V}(s) & \underline{W}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{N}(s) & \underline{Y}(s) \\ 0 & \underline{I}_m \end{bmatrix}$$

a) $P(s)$ y $P_1(s)$ no son necesariamente de mínimo orden

b) $r \geqslant n$, $r_1 \geqslant n_1$,; n y n_1 son el orden de P y P_1 respectivamente

c) M,N,X,Y son matrices polinomiales

d) M,N son unimodulares, es decir, sus determinantes son distintos de cero e independientes de s.

Luego de este tipo de transformación es importante notar aquellas propiedades del sistema que se conservan. Bajo una "equivalencia estricta de sistemas", la dimensión r de las matrices T,U,V, el orden n del sistema y la matriz función de transferencia $\underline{G}$ permanecen invariantes.

Rosenbrock ha probado posteriormente que si $\underline{P}(s)$ y $P_1(s)$ son matrices de sistema de dimensiones (r+k)x(r+m) que tienen el mínimo orden, entonces $\underline{P}(s)$ y $P_1(s)$ generan el mismo $\underline{G}(s)$ si y solo si aquellos son sistemas estrictamente equivalentes. También si $\underline{P}(s)$ y $P_1(s)$ son matrices de sistema de mínimo orden en la forma de espacio de estado, entonces aquellos son sistemas similares si y solo sí son sistemas estrictamente equivalentes.

Las operaciones permitidas bajo una equivalencia estricta de sistemas pueden ser generadas por las siguientes operaciones elementales:

i) Multiplicar cualquiera de las primeras r filas de $\underline{P}(s)$ por una constante diferente de cero,

ii) Sumar un múltiplo, de un polinomio de cualquiera de la primeras r columnas de $\underline{P}(s)$ a cualquier otra fila;

iii) Entre las primeras r filas se puede intercambiar 2 filas cualquiera;

iv) Cualquiera de las operaciones mencionadas con respecto a las primeras r columnas de P(s)

Un resultado final pero muy usado es señalar que cualquier matriz de sistema $\underline{P}(s)$ que da origen a una función de transferencia $\underline{G}(s)$ estrictamente propia es estrictamente equivalente a:

$$\underline{P}_1(s) = \left[\begin{array}{cc|c} \underline{I}_{r-n} & 0 & 0 \\ 0 & s\underline{I} - \underline{A}_1 & \underline{B}_1 \\ \hline 0 & -\underline{C}_1 & 0 \end{array}\right]$$

Es consecuencia de esto, la necesidad de que $r \geqslant n$ en la definición de la matriz sistema. De esta manera, dada una representación mediante la matriz de sistema en la forma polinomial correspondiente a una $\underline{G}(s)$ estrictamente propia, existe un procedimiento sistemático (desarrollado por Rosenbrock) para generar la representación equivalente de espacio de estado.

C A P I T U L O   S E G U N D O

FORMAS CANONICAS

2.1 INTRODUCCION

Antes de aplicar cualquier técnica de síntesis o diseño para ejercer acción de control en un sistema dado, es necesario conocer algunas propiedades del sistema mencionado. Existen dos propiedades que son de vital importancia y que son la controlabilidad y la observabilidad.

Existen varios tipos de definiciones de controlabilidad y observabilidad, sin embargo, en el presente capítulo se considerarán únicamente los siguientes puntos:

- Controlabilidad de estado a manera de puntos (point wise ps) debida a Kalman,
- Controlabilidad funcional (f), debida a Rosenbrock
- Observabilidad

Algunos significados físicos o implicaciones de estas propiedades pueden a menudo ser apreciadas rápidamente transformando un sistema desde su descripción original a una forma canónica.

Es muy útil, entonces, en controlabilidad y observabilidad, la representación de un sistema mediante un diagrama de flujo; pero éste debe ser tal que permita distinguir cada variable de estado y sus relaciones estrictamente necesarias con las demás variables, así como también con las entradas y salidas; es por eso, que se desarrollan en la presente tesis las formas canónicas:

- Forma de Jordan
- Forma controlable
- Forma observable

Las formas canónicas controlable y observable surgen a partir de una demostración de Kalman en el sentido de que un sistema general S = [$\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$] puede ser descompuesto en cuatro partes, cada una de las cuales caracterizada por las propiedades de controlabilidad y observabilidad del sistema, y que aparecen por medio de una adecuada transformación.

Esta descomposición se muestra esquemáticamente en la figura 2-1

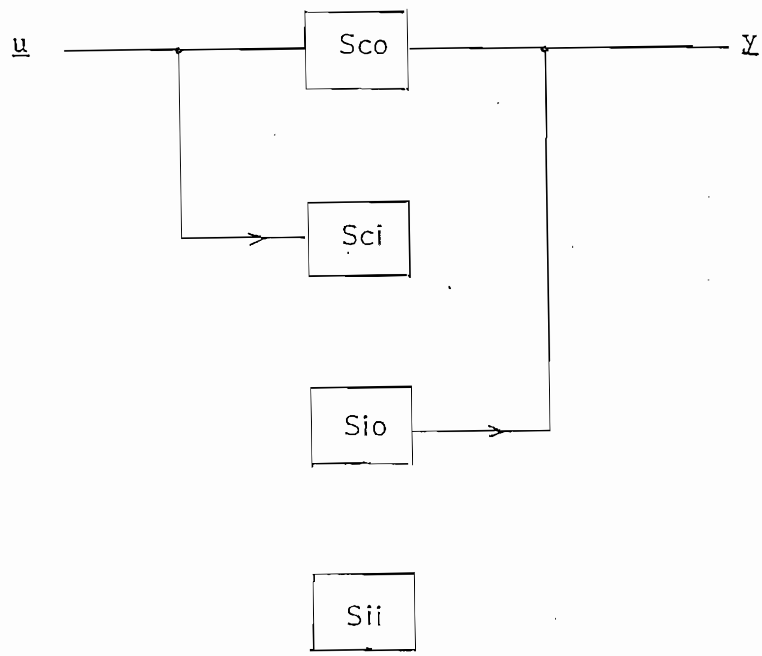

FIG. 2.1 Descomposición Kalman de un sistema

donde Sco representa la parte del sistema que es controlable y observable, Sio la parte del sistema que es incontrolable pero si es observable, Sci la parte del sistema que es controlable pero no es observable y Sii representa la parte del sistema que no es controlable ni observable.

2.2 CONTROLABILIDAD

Analicemos primero la controlabilidad de estado a manera de puntos (p.s).

Para examinar la controlabilidad de un sistema, contestaremos la pregunta:
¿Se puede controlar el estado completo del sistema mediante una entrada particular u_i ?

En sistemas de simple estructura no es necesario formalizar el concepto de controlabilidad puesto que puede obtenerse por simple inspección. Por ejemplo, la entrada u_2 en la figura 2.2. no puede alcanzar el primer modo $\exp(p_1 t)$; entonces el sistema se dice que es incontrolable por u_2.

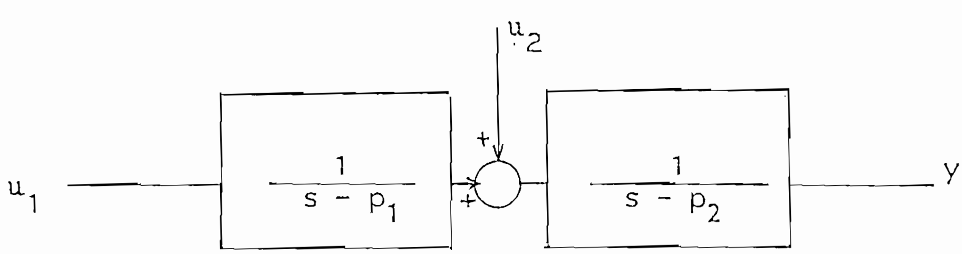

FIG. 2.2. Sistema de 2do. orden

Para sistemas complejos, sin embargo, no siempre es obvio el que una entrada pueda controlar completamente el estado del sistema; por tanto es conveniente introducir el concepto de controlabilidad.

Se dice que un sistema descrito por las ecuaciones de espacio de estado (1-1) y (1-2) es controlable en la forma de estado, si dados dos estados $\underline{x}_0 = \underline{x}(0)$ y $\underline{x}_1 = \underline{x}(t_1)$, existe un tiempo $t_1 > 0$ y un control $\underline{u}(t)$ definido en el intervalo $(0,t_1)$ que transfiere el vector de estado desde $\underline{x}_0$ a $\underline{x}_1$. Si esta condición no se satisface, entonces el sistema es incontrolable, y no es posible conducir el vector de estado, desde una condición inicial arbitraria $\underline{x}(0)$ a otra condición $\underline{x}(t_1)$ también arbitraria.

Resolviendo la ecuación (1-1), con la condición inicial del vector $x(0)$, y substituyendo en (1-2), se obtiene:

$$\underline{y}(t) = \underline{C}\ \exp(\underline{A}t)\ \underline{x}(0) + \int_0^t \underline{C}\ \exp[\underline{A}(t-\tau)]\ \underline{B}\ \underline{u}(\tau)d\tau + \underline{D}\ \underline{u}(t) \quad (2\text{-}1)$$

colocando $\underline{x}(t) = 0$, entonces para algún t=0, se obtiene

$$\underline{x}(0) = -\int_0^t \exp\ (-\ \underline{A}\tau)\ \underline{B}\ \underline{u}(\tau)\ d\tau$$

El sistema de ecuaciones que resulta, puede ser resuelto para $\underline{u}(\tau)$ para cualquier $\underline{x}(0)$ dado si y solo si las filas de la matriz $\exp(-\ \underline{A}\tau)\ \underline{B}$ son linealmente independientes. Puesto que la matriz exponencial puede ser expandida en términos de $\underline{I}, \underline{A}, \underline{A}^2, \ldots, \underline{A}^n$ por el teorema de Caley-Hamilton, una condición necesaria y suficiente de controlabilidad es que el rango de $\underline{P} = n$, donde $\underline{P}$ es la matriz:

$$\underline{P} = (\underline{B}, \underline{A}\,\underline{B}, \underline{A}^2\,\underline{B}, \ldots, \underline{A}^{n-1}\,\underline{B})$$

El sistema (1-1) y (1-2), se dice que es completamente controlable si y solo si la matriz $\underline{P}$ tiene rango n. El defecto en el rango de P indica el número de modos del sistema que no pueden ser alterados por las entradas u. Sin embargo, no indica cuales son esos modos.

Ejemplo 2.1: Considérese el sistema descrito por la ecuación de estado.

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \underline{u}$$

La matriz de controlabilidad para este sistema es:

$$\underline{P} = \left[\underline{B} \;\middle|\; \underline{A}\,\underline{B} \right]$$

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 8 & -1 \end{bmatrix}$$

tiene rango 2=n; por tanto el sistema es completamente controlable.

El significado del término de estado a manera de puntos en la definición de controlabilidad pueder se explicado con un ejemplo de Rosenbrock.

Supóngase que un sistema descrito por las ecuaciones lineales (1-1) y (1-2) con $\underline{D} = 0$, tiene sus salidas $\underline{y}$ muestreadas a los instantes t=0, T, 2T,... y también que sus entradas $\underline{u}$ son restringidas a ser constantes sobre cada intervalo $KT \leq t \leq (K+1)T$; es decir un sistema de datos muestreado con un retenedor de orden cero.

Entonces tal sistema puede ser descrito por:

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{A}_1 \underline{x}_k + \underline{B}_1 \underline{u}_k$$
$$\underline{y}_k = \underline{C} \underline{x}_k$$

donde $\underline{A}_1 = e^{\underline{A}T}$

$$\underline{B}_1 = [\int_0^T e^{\underline{A}(T-\tau)} \underline{B} d\tau]$$

Suponiendo que $\underline{A}$ y $\underline{B}$ en la ecuación (1-1) están dados por:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad \underline{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Entonces $\underline{A}_1$ y $\underline{B}_1$ son determinados como:

$$\underline{A}_1 = \begin{bmatrix} e^{-T} & 0 \\ e^{-T}-e^{-2T} & e^{-2T} \end{bmatrix}$$

y $$\underline{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 - e^{-T} \\ 1/2(1 - e^{-T})^2 \end{bmatrix}$$

Supóngase, además que $\underline{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$;

encontrar la secuencia de entrada u_0, u_1, tal que :

$$\underline{x}(2T) = \underline{A}_1(\underline{A}_1 \underline{x}(0) + \underline{B}_1 \underline{u}_0) + \underline{B}_1 \underline{u}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Por cálculo directo, tenemos que la secuencia de entrada

$$u_0 = \frac{2(1+ e^{-2T})}{(1- e^{-T})e^{-T}} , \qquad u_1 = \frac{-2(1+e^{-2T})}{1- e^{-T}}$$

produce:

$$\underline{x}(T)= \begin{bmatrix} \dfrac{2(1+ e^{-2T})}{e^{-T}} \\ \\ \dfrac{1 - e^{-T}+ e^{-2T}}{e^{-T}} \end{bmatrix}$$

y

$$\underline{x}(2T)= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ahora, a medida que $T \rightarrow 0$, encontramos que

$$\underline{x}(T) \rightarrow \begin{bmatrix} 4 \\ \\ 1 \end{bmatrix} \quad y \quad \underline{x}(2T) = \begin{bmatrix} 0 \\ \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ahora, considérese que el vector de estado ha sido traído desde $\underline{x}(0) = x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ en $t = 0$ hasta $\underline{x}_1 = \underline{x}(2T) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, que es posible puesto que el sistema es controlable (p.s).

Entonces, aplicando la secuencia de control previamente desarrollada sobre intervalos consecutivos, podemos asegurar que:

$$\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{para } t = 2T,\ 4T,\ 6T, \ldots\ldots$$

T puede ser tan pequeño, como se desee. Pero en t=3T, 5T,... tenemos:

$$\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} 4 \\ \\ 1 \end{bmatrix}$$

También, aunque el elemento $x_2(t)$ del vector de estado x(t) es igual a 1 en t= 2T,3T,4T,.....$x_1(t)$ no permanece igual a 0 para todos los valores intermedios de t. Este hecho explica el término "a manera de puntos" en la descripción de controlabilidad (p.s)

Se dice que un sistema es funcionalmente controlable, o controlable(f), si dado un vector cualquiera apropiado $\underline{y}$ de funciones de salida definido para $t>0$, existe un vector $\underline{u}$ de entradas definido para $t>0$, que genera el vector de salida $\underline{y}$ a partir de las condiciones iniciales $\underline{x}(0) = 0$. Aquí, un vector apropiado $\underline{y}$ se considera un vector lo suficientemente plano para ser generado sin funciones impulso $\underline{u}$, y que tiene transformada de Laplace.

En términos de la descripción del sistema dado por la ecuación (1-3) existe una prueba simple para controlabilidad (f).

Un sistema que tenga k=m es controlable(f) si y solo si su matriz función de transferencia G(s) no es singular, es decir:

$$\left| G(s) \right| \neq 0$$

Este es un requisito para diseño de regulador, o diseño de sistema servo-tracking.

Si $k > m$, entonces el sistema no es funcionalmente controlable. Si $m > k$, entonces el sistema es funcionalmente controlable si y solo si existe un menor de G(s) kxk que no sea cero.

La controlabilidad (f) no implica controlabilidad (p.s) y vice-versa. En efecto sea el sistema definido por:

$$G(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+1} & \dfrac{2}{s+3} \\[2ex] \dfrac{1}{s+1} & \dfrac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

entonces $\left| G(s) \right| = \dfrac{1}{(s+1)^2} - \dfrac{2}{(s+1)(s+3)} = \dfrac{-(s-1)}{(s+1)^2 \; (s+3)} \neq 0$

Por lo tanto el sistema es controlable (f). Sin embargo, la realización de espacio de estado de cuarto orden:

$$\underline{\dot{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \underline{u}$$

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}$$

Cuyo análisis se muestra en el ejemplo 3 del capítulo de resultados, y que da origen a $\underline{G}(s)$, no es controlable a manera de puntos.

Veamos otro ejemplo:

Sea el sistema descrito por las ecuaciones en el espacio de estado.

$$\underline{\dot{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \underline{u}$$

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \underline{x}.$$

El sistema es completamente controlable en la forma de estado a manera de puntos lo cual se demostró al formar la matriz de controlabilidad.

La función de transferencia para este sistema es:

$$\underline{G}(s) = \underline{C}\ (s\ \underline{I} - \underline{A})^{-1}\ \underline{B}$$

$$\underline{G}(s) = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{s+2} & -\dfrac{1}{s+2} \\ \\ \dfrac{2}{s+2} & \dfrac{2}{s+2} \end{bmatrix}$$

det $\underline{G}(s) = 0$; por tanto el sistema no es controlable (f).

2.3 OBSERVABILIDAD

La observabilidad de un sistema se determina analizando la posibilidad de observar el estado completo de un sistema anotando una salida particular y_i.

Para sistemas simples, la observabilidad puede determinarse por inspección. Por ejemplo, en la fig. 2.3 es obvio que el segundo modo $\exp(p_2 t)$ no aparecerá en la salida y_1; entonces el sistema será inobservable por y_1 .

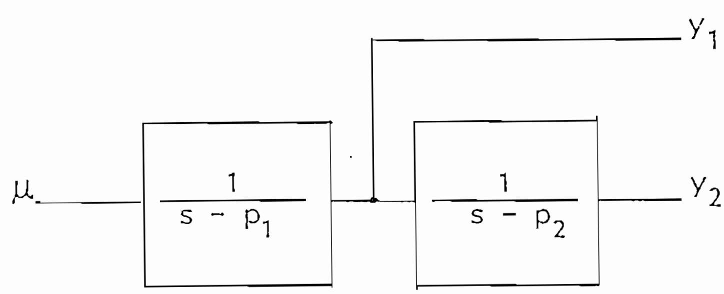

FIG. 2.3 Sistema de 2do. orden

Para sistemas más complejos, es necesario formalizar el concepto de observabilidad. El sistema descrito por las ecuaciones (1-1) y (1-2) se dice que es observable si existe un tiempo $t_1 > 0$ tal que dados los vectores $\underline{u}$ y $\underline{y}$ sobre el intervalo $(0, t_1)$ es posible deducir el vector de estado inicial $\underline{x}(0)$.

De (2-1), $\underline{x}(0)$ puede ser determinado dados los vectores $\underline{y}(t)$ y $\underline{u}(t)$ sobre un intervalo, si y solo si, las columnas de la matriz $\underline{C}$ exp ($\underline{A}$ t) son linealmente independientes. Por esta razón, una condición necesaria y suficiente para que el sistema sea observable es que el rango de $\underline{Q} = n$, donde $\underline{Q}$ es la matriz:

$$\underline{Q} \quad = \quad [\ \underline{C}^t,\ \underline{A}^t\ \underline{C}^t,\ (\underline{A}^t)^2\underline{C}^t, \ldots\ldots (\underline{A}^t)^{n-1}\ \underline{C}^t]$$

Si $\underline{Q}$ tiene rango n entonces el sistema es completamente observable, si $\underline{Q}$ no tiene rango n, entonces algunos de los estados del sistema son inobservables y no tienen influencia en las salidas del sistema.

El defecto en el rango de Q también indica el número de estados inobservables pero no los indentifica.

En efecto; considerar el sistema descrito por las ecuaciones.

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \underline{u}$$

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \underline{x}$$

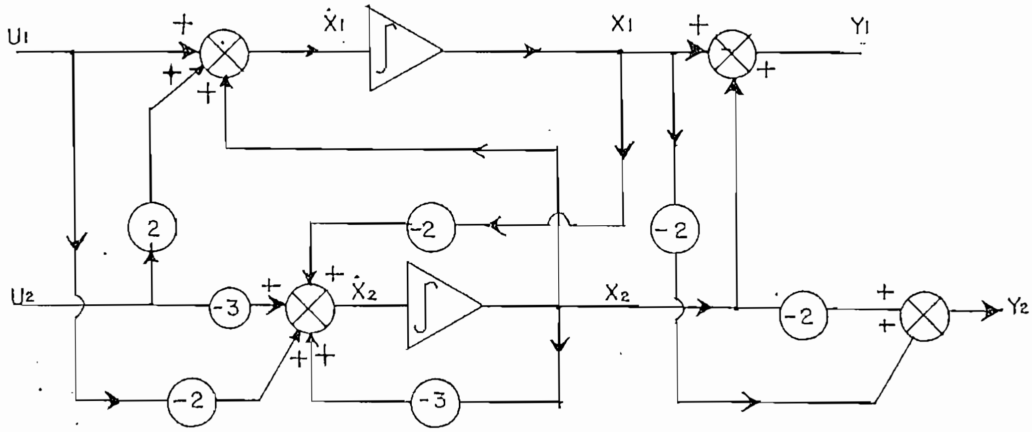

FIG. 2.4 Diagrama de flujo de un sistema de 2do. orden con 2 entradas y 2 salidas.

La matriz de observabilidad Q para este sistema es:

$$\underline{Q} = [\,\underline{C}^t, (\underline{A}^t)\,\underline{C}^t\,]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El sistema no es completamente observable puesto que el rango de Q = 1 = n; es decir, existe un estado inobservable.

Sí un sistema descrito por las ecuaciones (1-1) y (1-2) tiene cualquiera de los modos (o estados) incontrolable o inobservable entonces cuando se evalúa la matriz función de transferencia

$\underline{G}(s)$ correspondiente, los valóres propios (o polos) asociados con estos estados desaparecerán.

En el último ejemplo desarrollado, los polos del sistema están dados por:

$$\det\left[s\underline{I} - \underline{A} \right] = 0$$

$$\det\begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix} = 0$$

$$s = -1$$

$$s = -2$$

Al formar la matriz función de transferencia $\underline{G}(s)$, como ya se calculó anteriormente al analizar la controlabilidad (f) es:

$$\underline{G}(s) = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{s+2} & -\dfrac{1}{s+2} \\ \dfrac{2}{s+2} & \dfrac{2}{s+2} \end{bmatrix}$$

El polo del sistema en s=-1 no aparece en $\underline{G}(s)$

En un ejemplo analicemos controlabilidad a manera de puntos, observabilidad y controlabilidad funcional. Considérese el sistema multivariable descrito por:

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \underline{u}$$

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \underline{x}$$

Para este sistema, la matriz de controlabilidad

$\underline{P} = [\ \underline{B},\ \underline{A}\ \underline{B}]$ es:

$$\underline{P} = \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 2 & -3 & -4 \\ -3 & -4 & 9 & 10 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

De aquí resulta que, $\underline{P}$ tiene rango 2 = n y el sistema dado es controlable (p.s).

Formando la matriz de observabilidad:

$$\underline{Q} = [\ \underline{C}^t\ ;\ \underline{A}^t\underline{C}^t]$$

$$\underline{Q} = \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & -2 & -3 & 6 \\ 1 & -2 & -3 & 6 \end{array}\right]$$

Se puede ver que $\underline{Q}$ tiene rango = 1 = n y el sistema dado no es observable.

Si consideramos la matriz función de transferencia correspondiente para este ejemplo, tenemos:

$$\underline{G}(s) = \underline{C}\ (\ s\underline{I} - \underline{A}\ )^{-1}\underline{B}$$

entonces, puesto que:

$$(s\underline{I} - \underline{A})^{-1} = \begin{bmatrix} s+4 & 1 \\ -3 & s \end{bmatrix} \times \frac{1}{det}$$

donde: $det = \left| s\underline{I} - \underline{A} \right| = (s+1)(s+3)$

$$\underline{G}(s) = \begin{bmatrix} -\frac{2}{s+3} & -\frac{2}{s+3} \\ \frac{4}{s+3} & \frac{4}{s+3} \end{bmatrix}$$

Entonces, el sistema no es funcionalmente controlable. La cancelación del polo y cero $s = -1$ es debido a que el sistema no es observable.

2.6 FORMA DE JORDAN

Volviendo a escribir las ecuaciones (1-1) y (1-2)

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{u}$$
$$\underline{y} = \underline{C}\,\underline{x} + \underline{D}\,\underline{u}$$

Si todos los valores propios de A son distintos y si además $\underline{v}_i$ es el vector propio de $\underline{A}$ correspondiente al valor λ_i (i = 1,n), entonces

$$\underline{A}\,\underline{v}_i = \lambda_i\,\underline{v}_i$$

Si aplicamos la transformación $\underline{x} = \underline{T}\,\underline{z}$, donde $\underline{T}$ es la matriz de vectores propios $\underline{v}_i$(i = 1,n), se tiene la siguiente representación del sistema.

$$\underline{z} = \underline{T}^{-1}\,\underline{A}\,\underline{T}\,\underline{z} + \underline{T}^{-1}\,\underline{B}\,\underline{u}$$
$$\underline{y} = \underline{C}\,\underline{T}\,\underline{z} + \underline{D}\,\underline{u}$$

donde:

$\underline{T}^{-1}\,\underline{A}\,\underline{T} = \underline{J}$ forma canónica de Jordan.

La controlabilidad y observabilidad en esta nueva base, conocida como forma canónica de Jordan, puede ser determinada por inspección.

Por ejemplo, si

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \quad y \quad \underline{T}^{-1} \ \underline{B} = \begin{bmatrix} * & * \\ 0 & 0 \\ * & * \end{bmatrix}$$

$$y \quad \underline{C} \ \underline{T} = \begin{bmatrix} 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix}$$

donde * representa un elemento diferente de cero; podemos decir que el modo del sistema correspondiente a λ_1 es inobservable (debido a que la columna 1 de la matriz de salida $\underline{C}$ $\underline{T}$ es cero) y que el modo correspondiente a λ_2 es incontrolable (debido a que la fila 2 de la matriz de entrada $\underline{T}^{-1}$ $\underline{B}$ es cero).

A manera de ejemplo analicemos el sistema descrito.

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \underline{u}$$

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \underline{x}$$

Se desea encontrar la forma de Jordan y realizar el análisis de controlabilidad y observabilidad.

Los valores propios resultan de:

$$\det(\lambda \underline{I} - \underline{A}) \doteq 0$$

$$\lambda_1 = -2$$

$$\lambda_2 = -1$$

La matriz de transformación se forma con los vectores propios:

$$\underline{T} = [\,\underline{v}_1\,,\,\underline{v}_2\,]$$

donde: $\underline{v}_1$ es el vector propio asociado a λ_1

$\underline{v}_2$ es el vector propio asociado a λ_2

de donde:

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{5}/5 \\ -\sqrt{2}/2 & -2\sqrt{5}/5 \end{bmatrix} \quad \underline{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{5} & -\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

El sistema transformado es:

$$\underline{\dot{z}} = \underline{J}\,\underline{z} + \underline{\tilde{B}}\,\underline{u}$$

$$\underline{y} = \underline{\tilde{C}}\,\underline{u}$$

donde

$$\underline{J} = \underline{T}\,\underline{A}\,\underline{T}^{-1}$$

$$\underline{\tilde{B}} = \underline{T}^{-1}\,\underline{B}$$

$$\underline{\tilde{C}} = \underline{C}\,\underline{T}$$

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\tilde{B}} = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{5} & \sqrt{5} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\tilde{C}} = \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{5}/5 \\ 0 & 2\sqrt{5}/5 \end{bmatrix}$$

El diagrama de flujo del sistema en la forma canónica de Jordan se muestra en la fig. 2.5.

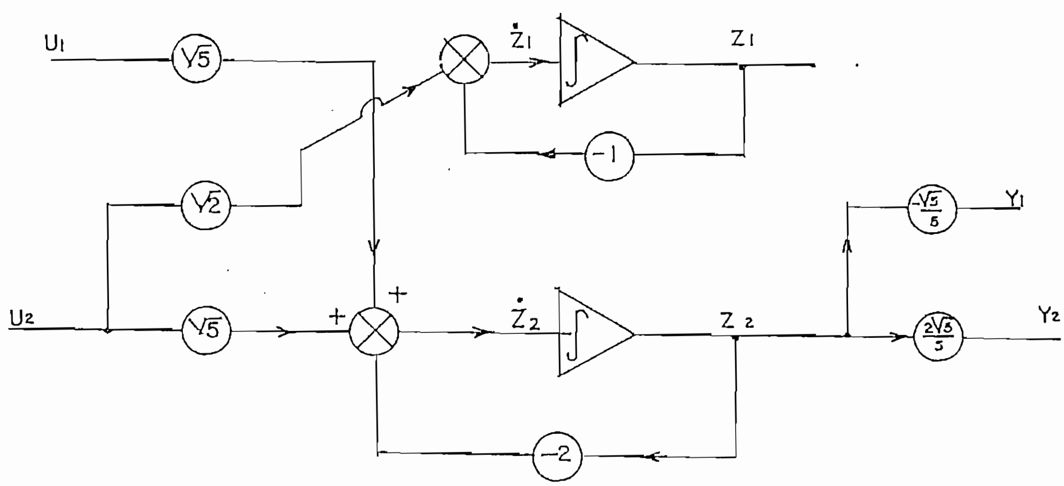

FIG. 2.5 Diagrama de flujo de un sistema de 2do. orden en la forma canónica de Jordan.

Se observa claramente que el estado z_1, cuyo valor propio correspondiente es λ_1 es inobservable debido a que la columna 1 de $\underline{C}$ es cero. También se observa que el sistema es completamente controlable.

Si la matriz $\underline{A}$ tiene valores propios repetidos; el análisis puede aplicarse a un bloque de Jordan general y de ahí extender los resultados a todo el sistema, ya que éste va a estar representado por varios bloques de Jordan. El análisis detallado de este aspecto fue motivo de otra tesis (referencia bibliográfica # 5),por lo cual no se presentan más detalles.

2.5 FORMA CONTROLABLE

Conocida junto a la forma observable como formas canónicas de Luenberger, la forma controlable surge de la descripción de sistemas en la forma de espacio de estado y se emplea a menudo en el desarrollo de ciertas técnicas de análisis.

Si un sistema [$\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$] es controlable, entonces la matriz $\underline{P} = [\ \underline{B}, \underline{A}\underline{B}, \underline{A}^2\ \underline{B}\ \ldots\ \underline{A}^{n-1}\ \underline{B}]$ (matriz de controlabilidad) tiene rango n. La obtención de la forma controlable se basa en una transformación de similaridad a través de una matriz T no singular y que se forma a partir de $\underline{P}$ como sigue:

a) Inspeccionar las columnas de $\underline{P}$ desde la izquierda a la derecha y retener solamente esos vectores que son linealmente independientes de aquellos previamente seleccionados.

b) Arreglar los n vectores linealmente independientes seleccionados de ese modo, y formar una nueva matriz $\underline{\Gamma}$, donde

$$\underline{\Gamma} = [\ \underline{b_1}\ , \underline{A}\underline{b_1}\ , \ldots \underline{A}^{u_1-1}\underline{b_1}\ , \underline{b_2}, \underline{A}\underline{b_2}, \ldots, \underline{A}^{u_2-1}\ \underline{b_2} \ldots \underline{A}^{u_m-1}\ \underline{b_m}]$$

Los enteros $u_1, \ldots, u_m$ son conocidos como los índices de controlabilidad del sistema, y $\sum_{i=1}^{m} u_i = n$.

El parámetro : $\nu_c = \max_i u_i;\ i = 1, m$

es a menudo conocido como el índice de controlabilidad del sistema

c) Sea $\underline{\Gamma}^{-1}$ descrito en términos de sus filas como

$$\underline{\Gamma}^{-1} = \begin{bmatrix} \gamma_1^t \\ \vdots \\ \gamma_n^t \end{bmatrix}$$

y además, sea γ_{ki}^t la $k_i$ésima fila de $\underline{\Gamma}^{-1}$ donde:

$$k_i = \sum_{j=1}^{i} u_j; \quad i=1,m$$

d) Usando los vectores γ_{ki}^t la matriz de transformación $\underline{T}$ que se necesita esta formada por:

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} \gamma_{k_1}^t \\ \gamma_{k_1}^t \underline{A} \\ \vdots \\ \gamma_{k_1}^t \underline{A}^{u_1-1} \\ \gamma_{k_2}^t \\ \vdots \\ \gamma_{k_m}^t \underline{A}^{u_m-1} \end{bmatrix}$$

e) La forma estándar controlable del sistema [$\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$] es entonces:

$$\tilde{\underline{A}} = \underline{T}\ \underline{A}\ \underline{T}^{-1}$$
$$\tilde{\underline{B}} = \underline{T}\ \underline{B}$$
$$\tilde{\underline{C}} = \underline{C}\ \underline{T}^{-1}$$

donde $\underline{A}$ puede ser expresada en la forma particionada por:

$$\tilde{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \tilde{\underline{A}}_{11} & \cdots & \tilde{\underline{A}}_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \tilde{\underline{A}}_{m1} & \cdots & \tilde{\underline{A}}_{mm} \end{bmatrix}$$

y los bloques diagonales $\tilde{\underline{A}}_{ii}$ están en la forma companion

$$\tilde{\underline{A}}_{ii} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ x & x & x & \cdots & x \end{bmatrix}$$

para i=1,m, con dimensiones $u_i \times u_i$. Las x representan elementos diferentes de cero. Los bloques fuera de la diagonal $\tilde{\underline{A}}_{ij}$, $i \neq j$, tienen la forma

$$\underline{\tilde{A}}_{ij} = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \hline x \quad x \; \ldots . \; x \end{array}\right]$$

Con dimensiones $u_i \times u_j$; $i,j = 1,m$; $i \neq j$

La matriz $\underline{\tilde{B}}$ tiene la forma particionada:

$$\underline{\tilde{B}} = \begin{bmatrix} \underline{\tilde{B}}_1 \\ \vdots \\ \underline{\tilde{B}}_m \end{bmatrix}$$

donde
$$\underline{\tilde{B}}_i = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \hline 0 \ldots 0 \; 1 \ldots x \ldots x \end{array}\right]$$
$$\uparrow$$
columna i

$\underline{\tilde{B}}_i$ tiene dimensiones $u_i \times m$

La matriz $\underline{C}$ no tiene forma especial bajo esta transformación.

Considerar el sistema de tercer orden con 2 entradas y 3 salidas descrito por las ecuaciones de espacio de estado.

$$\underline{\dot{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \underline{u}$$

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}$$

La matriz de controlabilidad $\underline{P} = [\; \underline{B} \mid \underline{A}\,\underline{B} \mid \underline{A}^2\,\underline{B}]$ es:

$$P = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 9 \\ -2 & 0 & 0 & 9 & 22 & -18 \\ 0 & 3 & 6 & -6 & -12 & 15 \end{array}\right]$$

El rango es 3=n por tanto el sistema es controlable. Inspeccionando las columnas desde la izquierda hacia la derecha y reteniendo únicamente aquellos vectores que sean linealmente independientes se obtiene la matriz:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Arreglando las columnas de esta matriz de tal manera de que tenga la forma [$\underline{b}_1$, $\underline{A}\ \underline{b}_1$,.... $\underline{A}^{u_1-1}\ \underline{b}_1$, $\underline{b}_2$, $\underline{A}\ \underline{b}_2$,..., $\underline{A}^{u_2-1}\ \underline{b}_2$,..., $\underline{A}^{u_m-1}\ \underline{b}_m$] tenemos:

$$\underline{\Gamma} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

donde

$$\underline{b}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \ ; \ \underline{A}\ \underline{b}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} \ ; \ \underline{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Por tanto $u_1 = 2$ y $u_2 = 1$ y se cumple que

$$\sum_{i=1}^{m} u_i = n$$

El índice de controlabilidad del sistema es:

$$\nu_c = \max_i u_i = 2$$

La matriz Γ^{-1} es:

$$\Gamma^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

donde si representamos la fila i por γ_i^t tenemos:

$$\gamma_1^t = [\ 0 \quad -1/2 \quad 0\ ]$$

$$\gamma_2^t = [-1/2 \quad 0 \quad 0\ ]$$

$$\gamma_3^t = [\ 1 \quad 0 \quad 1/3]$$

Los coeficientes k_i se obtienen a partir de:

$$k_i = \sum_{j=1}^{i} u_j \qquad i=1,m$$

es decir, en este ejemplo:

$$k_1 = u_1 = 2$$

$$k_2 = u_1 + u_2 = 3$$

La matriz de transformación $\underline{T}$ estará formada de las siguientes filas:

$$\underline{\gamma}^{t}_{k_1} = \underline{\gamma}^{t}_{2} = [\ -1/2 \quad 0 \quad 0\ ]$$

$$\underline{\gamma}^{t}_{k_1}\ \underline{A} = \underline{\gamma}^{t}_{2}\ \underline{A} = [\ 0 \quad -1/2 \quad 0\ ] \quad y,$$

$$\underline{\gamma}^{t}_{k_2} = \underline{\gamma}^{t}_{3} = [\ 1 \quad 0 \quad 1/3]$$

Por tanto:

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} \quad y,$$

$$\underline{T}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 6 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

De aquí resulta:

$$\underline{\tilde{A}} = \underline{T}\ \underline{A}\ \underline{T}^{-1} = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ -11 & 0 & -9/2 \\ \hline -4 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$$\underline{\tilde{B}} = \underline{T}\ \underline{B} = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underline{\tilde{C}} = \underline{C}\ \underline{T}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 6 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

2.4 FORMA OBSERVABLE

De manera dual a la forma controlable, se puede generar una transformación similar a partir de la matriz de observabilidad $\underline{Q}$ de un sistema [$\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$] que es observable, donde

$$\underline{Q} = [\ \underline{C}^t,\ \underline{A}^t\ \underline{C}^t,(\ \underline{A}^t)^2\ \underline{C}^t\ \ldots\ (\ \underline{A}^t)^{n-1}\ \underline{C}^t]$$

Los parámetros correspondientes ($u_1, \ldots, u_K$) se llaman índices de observabilidad y también se cumple que:

$$\sum_{i=1}^{K} u_i = n$$

El parámetro

$$\nu_0 = \max_i \ u_i \ ; \ i=1,K$$

se lo conoce como el índice de observabilidad del sistema.

El procedimiento para determinar la transformación $\underline{T}$ requerida, a partir de las columnas de $\underline{Q}$ es como sigue:

- Inspeccionar las columnas de $\underline{Q}$ desde la izquierda hacia la derecha y retener solamente aquellos vectores que son linealmente independientes de aquellos previamente seleccionados.

- Arreglar los n vectores linealmente independientes que se seleccionaron para formar una nueva matriz $\underline{\Gamma}$ donde:

$$\underline{\Gamma} = [\, \underline{c}_1^t \,,\, \underline{A}_1^t \underline{c}_1^t \,, \ldots, (\underline{A}^t)^{u_1 - 1} \underline{c}_1^t, \underline{c}_2^t, \underline{A}^t \underline{c}_2^t, \ldots, (\underline{A}^t)^{u_k - 1} \underline{c}_k^t]$$

\- Sea $\underline{\Gamma}^{-1}$ descrita en términos de sus filas como:

$$\underline{\Gamma}^{-1} = \begin{bmatrix} \gamma_1^t \\ \vdots \\ \gamma_n^t \end{bmatrix}$$

y sea $\gamma_{k_i}^t$ la k_i-ésima fila de $\underline{\Gamma}^{-1}$ donde:

$$k_i = \sum_{j=1}^{i} u_j \;; \quad i=1,k$$

\- Usando los vectores $\gamma_{k_i}^t$ se forma la matriz de transformación

$\underline{T}$ requerida de la siguiente manera:

$$\underline{T} = [\, \gamma_{k_1} \,,\, \underline{A}\gamma_{k_1} \,, \ldots, \underline{A}^{u_1 - 1} \gamma_{k_1}, \gamma_{k_2} \,,\, \underline{A}\gamma_{k_2} \,, \ldots, \underline{A}^{u_k - 1} \gamma_{k_k} \,]$$

\- La forma observable para el sistema [$\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$] es:

$$\tilde{\underline{A}} = \underline{T}^{-1} \underline{A}\, \underline{T}$$

$$\tilde{\underline{B}} = \underline{T}^{-1} \underline{B}$$

$$\tilde{\underline{C}} = \underline{C}\, \underline{T}$$

donde:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & \cdots & \underline{A}_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ \underline{A}_{k1} & \cdots & \underline{A}_{kk} \end{bmatrix}$$

y los bloques diagonales $\underline{A}_{ii}$ están en la forma companion

$$\underline{A}_{ii} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & x \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & x \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & x \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & x \end{bmatrix}$$

Los bloques fuera de la diagonal $\underline{A}_{ij}$, $i=j$, tienen entradas cero, excepto quizás en la última columna, es decir estos bloques tendrán la forma:

$$\underline{A}_{ij} = \left[\begin{array}{c|c} & x \\ 0 & x \\ & x \\ & x \end{array} \right]$$

La matriz de salida $\underline{C}$ es:

$$\underline{C} = [\ \underline{C}_1\ ,\ \underline{C}_2\ ,\ \ldots,\ \underline{C}_k]$$

donde los bloques C_i de dimensión kxu_i tienen la forma:

$$\underline{C}_i = [\,0 \mid \varepsilon_i\,]$$

con

$$\varepsilon_j = \begin{cases} 0 & \text{para } j < i \\ 1 & \text{para } j = i \\ x & \text{para } j > i \end{cases}$$

Es decir, los elementos debajo de la entrada unitaria en la última columna $\underline{C}_i$ no son por lo general iguales a cero.

La matriz $\underline{B}$ no tiene forma especial bajo esta transformación.

Como se ha mencionado previamente, las formas estándar consideradas son a menudo muy usadas en el diseño, tanto más pues proveen información estructural acerca de los sistemas.

2.7 ESTRUCTURA DE LA BIBLIOTECA DE PROGRAMAS

Antes de empezar el desarrollo de los programas que constituyen la parte principal de la presente tesis, es necesario realizar una breve descripción de la estructura general de la biblioteca de programas, los cuales sirven de apoyo a la parte descriptiva y analítica de éste trabajo.

El equipo de computación utilizado para el desarrollo y comprobación de los diferentes algoritmos de cálculo y manejo de datos es "9845B-SYSTEM" de la firma HP; el mismo que está diseñado para trabajar con el lenguaje de alto nivel "BASIC", además de una serie de instrucciones propias de este sistema computacional que en su mayoría sirven para manejar los periféricos disponibles de los cuales se usarán: la unidad de cinta, el impresor, la pantalla y el teclado.

La unidad de este sistema tiene un área de memoria real utilizable de 56 Kbytes (de 8 bits). Con el fin de aprovechar en mejor forma el área de memoria disponible para procesar y analizar sistemas multivariables de órdenes relativamente altos se hace necesario que, solamente el programa que se está ejecutando esté presente en la memoria real (además de un corto programa de control permanente en ella), los demás deben estar almacenados en la unidad de cinta hasta que su uso sea requerido por el proceso establecido de antemano. El momento que un programa termine de ejecutarse éste deberá ser borrado de la memoria real y en su lugar deberá cargarse el programa siguiente a ser corrido. Este proceso de reemplazar un programa por otro es el fundamental objetivo del uso de un programa controlador llamado programa maestro.

La estructura general de la biblioteca de programas se muestra en la figura 2.6.

La biblioteca de programas ha sido elaborada de manera tal que permita la comunicación entre el computador y el usuario en una manera conversacional.

Además se debe tomar en cuenta el hecho de que el sistema computacional utilizado requiere que la nomenclatura de las variables a usarse sea consistente para todos los programas en que estas variables aparezcan.

A continuación se presentan las características más importantes del programa maestro y del programa de ingreso de datos (ver figuras 2.7, 2.8). En los programas descritos se delinearán las características fundamentales del programa correspondiente entre las que anotamos las siguientes: en primer término la lista de variables utilizadas con su respectivo significado y un diagrama de flujo razonablemente sintetizado. En caso de que el lector requiera información adicional refiérase al APENDICE en el que se encuentran los listados de cada uno de los

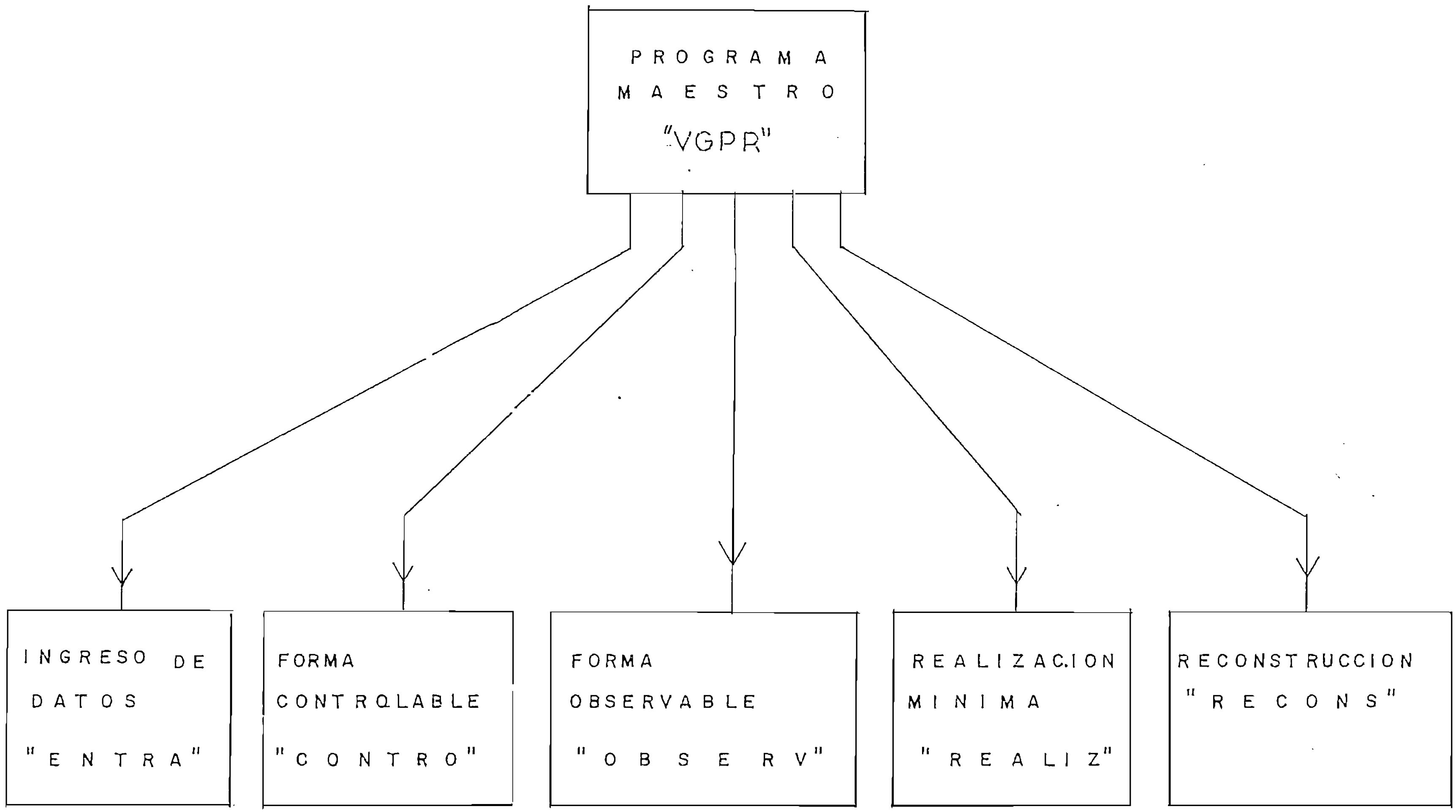

Figura 2-6.- ESTRUCTURA DE LA BIBLIOTECA DE PROGRAMAS

programas tratados en este trabajo.

PROGRAMA MAESTRO: VGPR

Constituye el control de ejecución, reemplazo y borrado de programas que permite que el conjunto de éstos se corra siguiendo la lógica predefinida.

Su ejecución involucra:

1.- Verificar si está o no en memoria el programa requerido.

2.- Si se encuentra en memoria dar paso a su ejecución

3.- Si no se encuentra en memoria entonces:

a) limpiar la memoria

b) cargar el programa deseado

c) ejecutarlo

El programa maestro contiene el índice de programas a disposición del usuario y se mostrará en la pantalla cada vez que éste lo desee, los nombres de las variables utilizadas y su contenido (en valores numéricos o literales) son:

NOMBRE	CONTENIDO
01	Número del programa que se desea ejecutar
02	Número del programa presente en memoria
U1	Variable que indica si los datos han sido ingresados.
03	Variable que indica si los datos ingresados corresponden a la matriz $\underline{G}(s)$ (03=2) o a las matrices $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$, $\underline{D}$, (03=1) de representación en el espacio de estado.
X$	Nombre del programa en memoria

El diagrama de flujo para el programa maestro se muestra en la figura 2.7

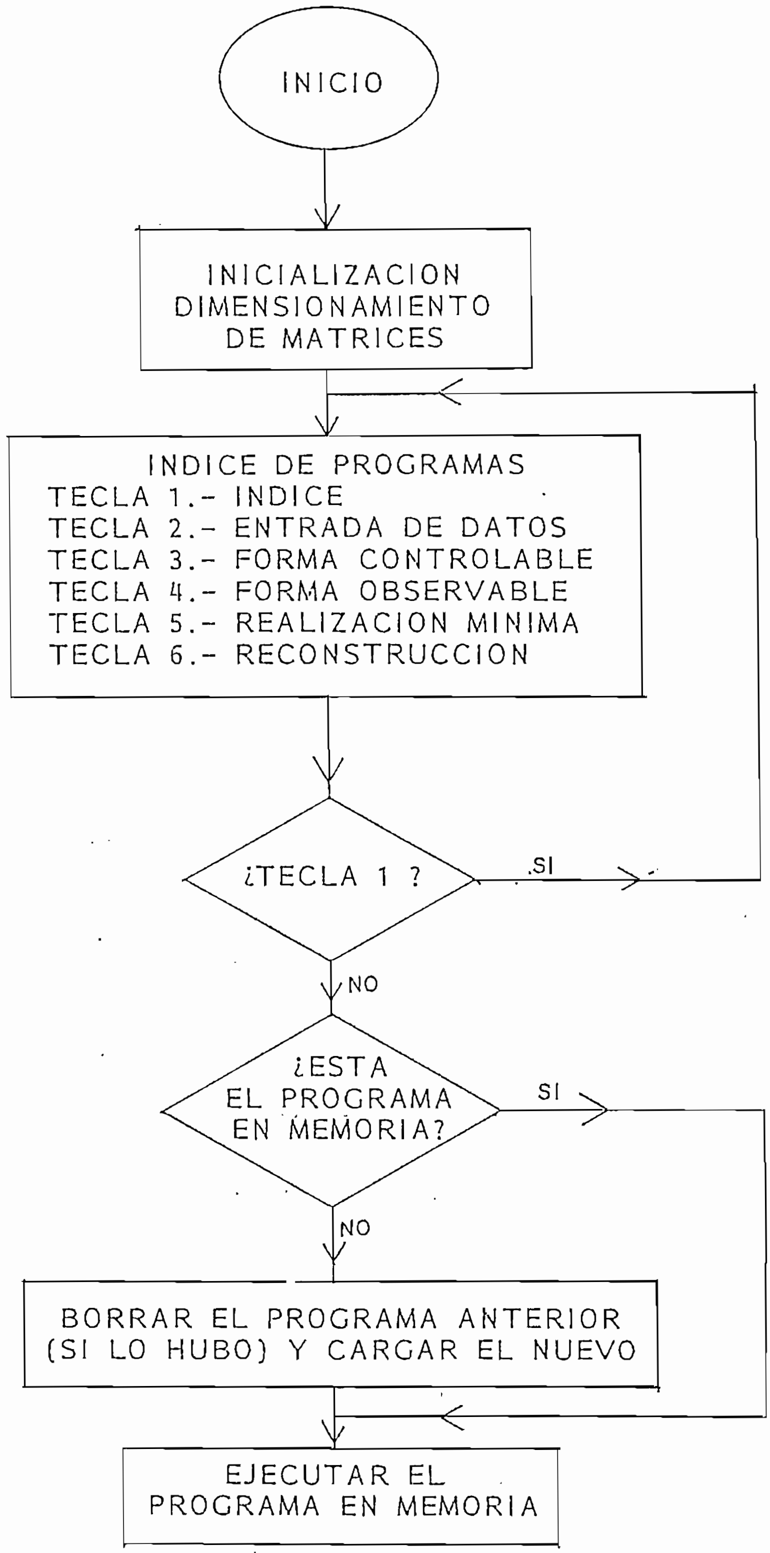

FIG. 2.7 Diagrama de Flujo del Programa Maestro (VGPR)

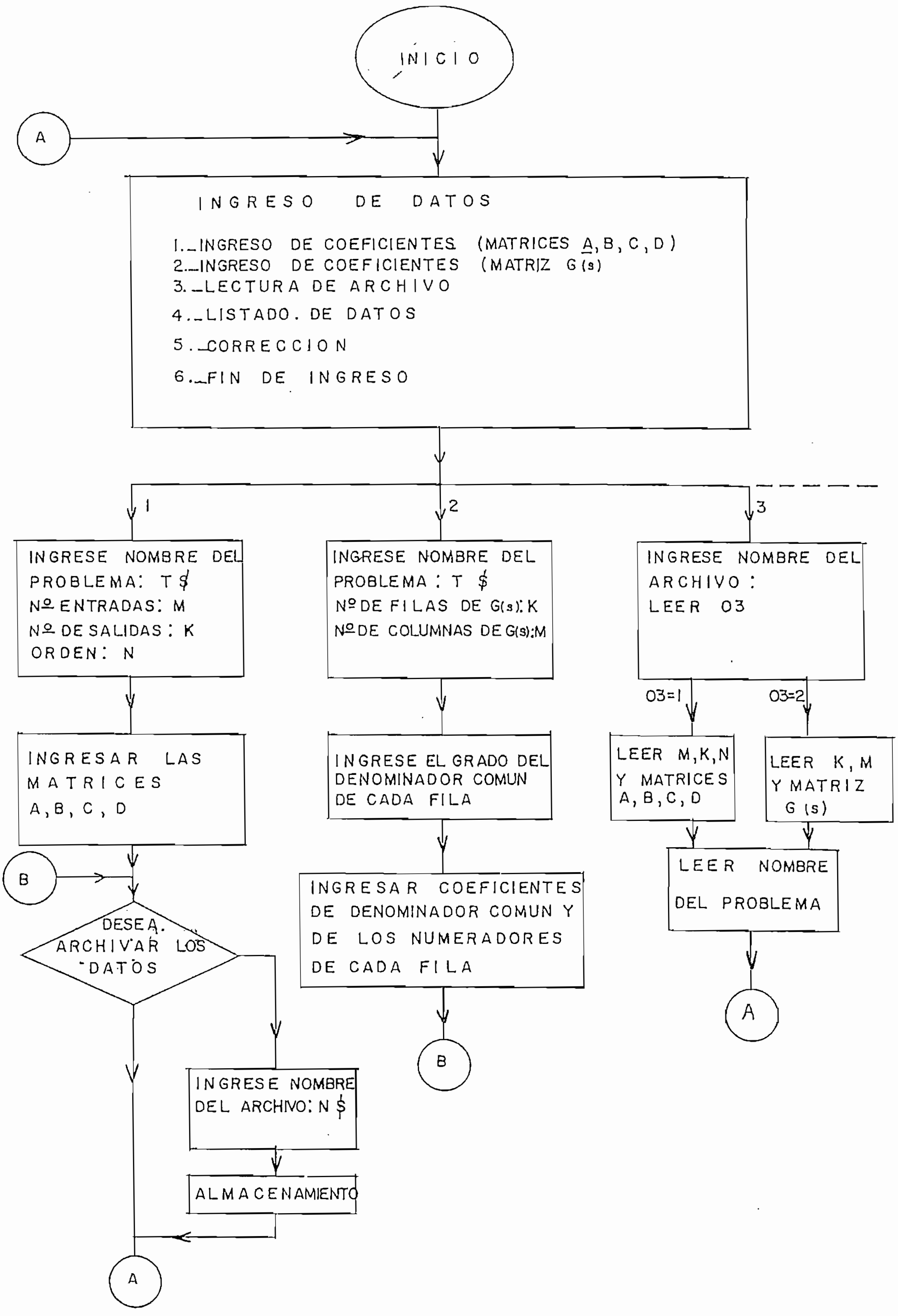

Figura 2.8. DIAGRAMA DE FLUJO DEL PROGRAMA: INGRESO DE DATOS

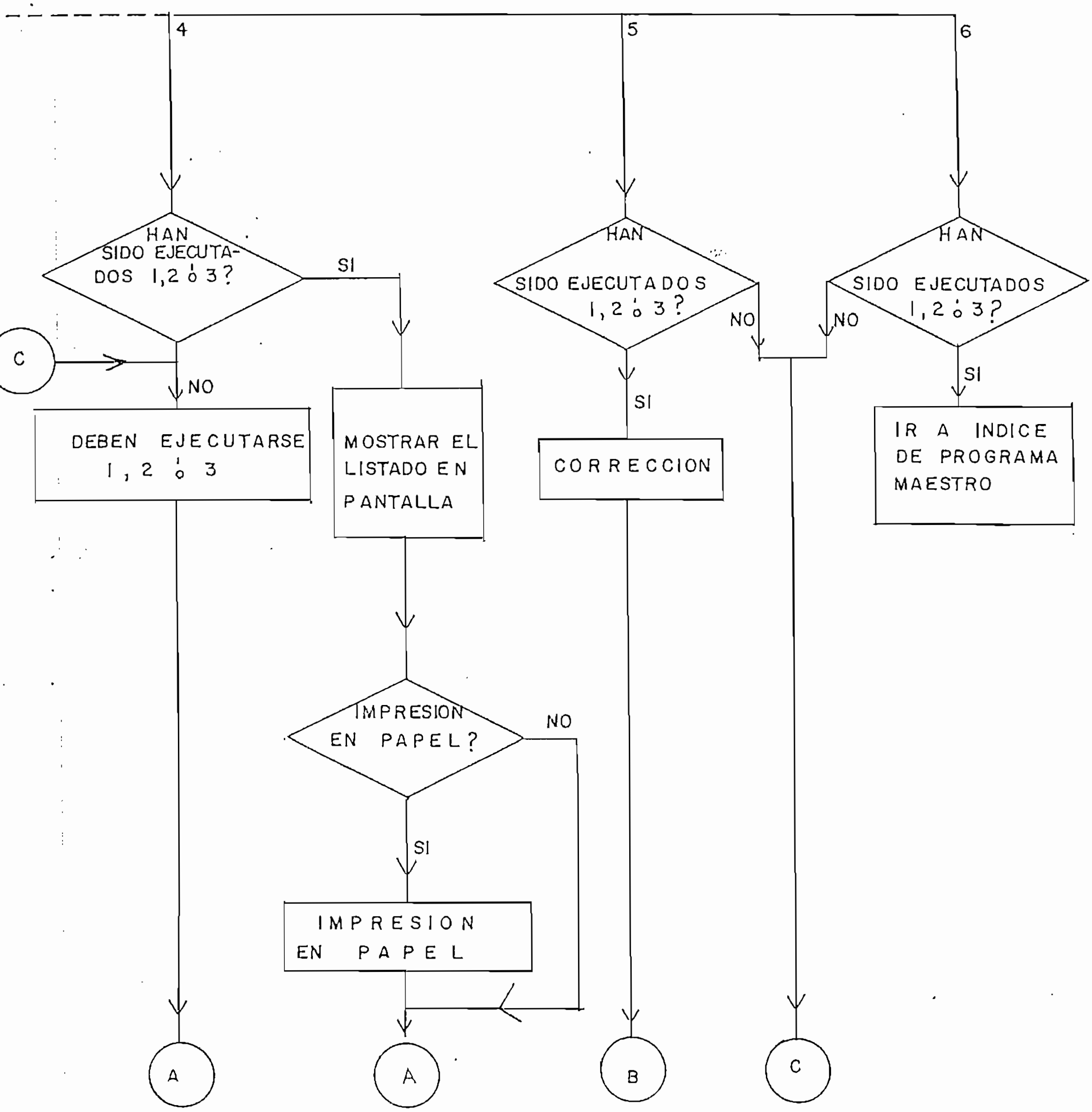

Figura 2.8. DIAGRAMA DE FLUJO DEL PROGRAMA: INGRESO DE DATOS

PROGRAMA DE INGRESO DE DATOS: "ENTRA"

Este permite el ingreso básico de los datos que requiere el conjunto de programas para su normal funcionamiento. Tiene este programa algunas opciones que lo hacen versátil en cuanto al ingreso de datos iniciales y estas opciones son:

1.- Ingreso de coeficientes de las matrices $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$, $\underline{D}$ por teclado
2.- Ingreso de los coeficientes de la matriz $\underline{G}(s)$ por teclado
3.- Lectura de datos de archivo
4.- Listado de datos
5.- Corrección de datos
6.- Fin de ingreso.

Observar que las tres últimas opciones no podrán ser ejecutadas sin haberlo sido alguna de las tres primeras.

La figura 2.8 muestra el diagrama de flujo correspondiente.

Los nombres de las variables utilizadas y su contenido son las siguientes:

NOMBRE	CONTENIDO
N	Orden del Sistema
M	Número de entradas o número de filas de $\underline{G}(s)$

K	Número de salidas o número de columnas de $\underline{G}(s)$
A	Matriz de orden NxN
B	Matriz de orden NxM
C	Matriz de orden KxN
D	Matriz de orden KxM
K1	Número de opción deseada
T$	Nombre del Problema
U1	Variable que indica si los datos han sido ingresados
03	Variable que indica si los datos ingresados corresponden a las matrices $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$, $\underline{D}$ de la representación en el espacio de estado o a la matriz $\underline{G}(s)$
Y$	Variable auxiliar que sirve para el título que se describe en la pantalla.
R	Vector cuya componente I almacena el grado del denominador común de la fila I de G(s).
G1	Matriz que almacena los coeficientes de la matriz G(s). Cada fila I de G(s) se convierte en R(I) filas en G1. G1 tiene dimensiones $(\sum R(I), M+1)$. Las columnas de G(s) se corresponden con las primeras M columnas de G1. La última columna de G1 guarda los coeficientes de los denominadores comunes de cada fila.
Y	Vector cuya componente I indica la fila donde empezará a escribirse la fila I de G(s) en G1.
K2	Número de filas de G1 $= [\sum R(I)]$
K3	Número de columnas de G1 = M+1

N$ Nombre del archivo de almacenamiento.

El ingreso de datos de la matriz G(s) función de transferencia, requiere de trabajo previo por parte del operador; puesto que deberá obtener el denominador común de cada fila y en base a éste obtener los numeradores correspondientes a esa fila.

2.8 PROGRAMA DE LA FORMA CONTROLABLE

El algoritmo implementado para obtener la forma controlable de un sistema descrito en el espacio de estado se basa esencialmente en lo descrito en la teoría de formas canónicas del numeral 2.5. La lista de las principales variables utilizadas y su respectiva descripción es la siguiente:

NOMBRE	CONTENIDO
N1	Número de columnas de la matriz de controlabilidad
C1(*)	Matriz de controlabilidad, matriz Gamma y Gamma inversa.
C2(*)	Matriz auxiliar para el cálculo de la matriz de controlabilidad. Almacena productos $\underline{A} \times \underline{B}$, $\underline{A}^2 \times \underline{B}$, etc, luego se utiliza como auxiliar para determinar independencia lineal de columnas y por último se utiliza para calcular la matriz de transformación.
L1(*)	Vector que guarda los índices de controlabilidad.
L3	Cuenta las columnas linealmente independientes
L4	Indica el grupo de M columnas en el que se encuentra el proceso, para identificar la columna de $\underline{B}$ de las cual es resultado cada columna de la matriz de controlabilidad.
C4(*)	Almacena los vectores linealmente independientes

que constituyen la BASE para probar independencia lineal de las siguientes columnas.

C3(*)	Almacena las N columnas linealmente independientes.
T	Matriz de transformación
A1(*)	Matriz $\underline{A}$ en la forma controlable
B1(*)	Matriz $\underline{B}$ en la forma controlable
C1(*)	Matriz $\underline{C}$ en la forma controlable
D1(*)	Matriz $\underline{D}$ en la forma controlable
P6	Indica si existe o no forma controlable P6=1 (si existe) P6=2 (no existe)
E	Valor que indica la precisión de los cálculos.

La figura 2.9 muestra el diagrama de flujo del programa para obtener la forma controlable.

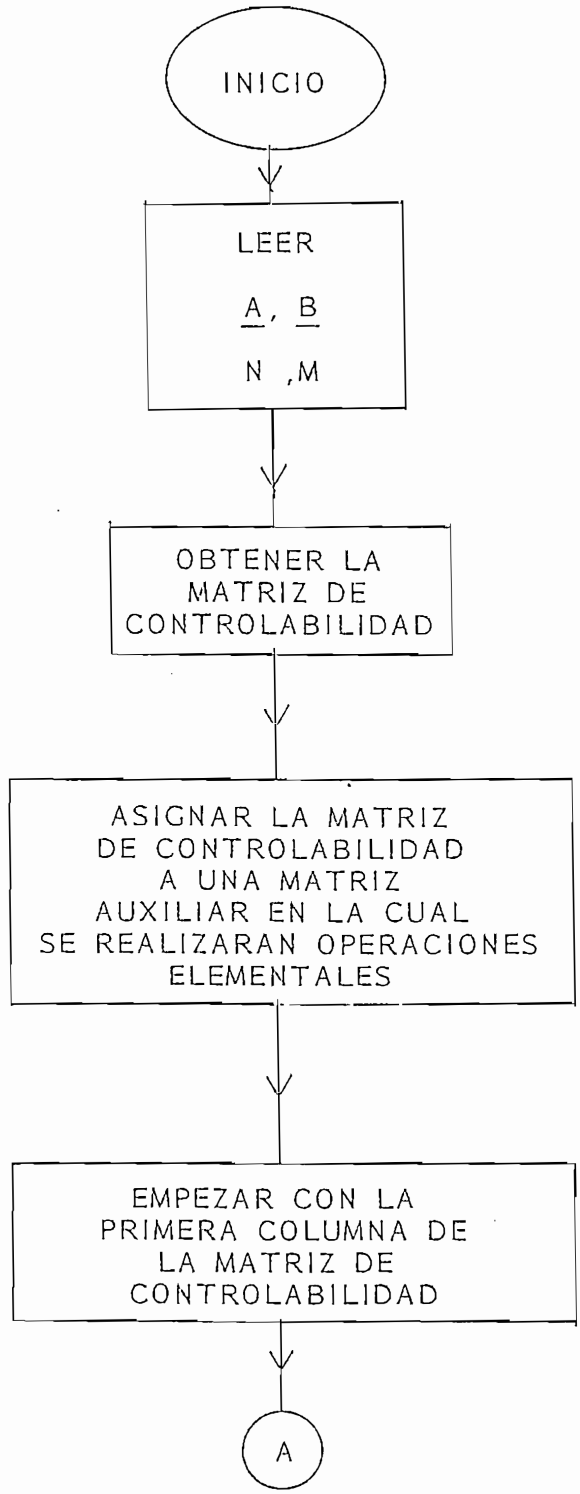

FIG: 2.9 Diagrama de Flujo de la Forma Controlable

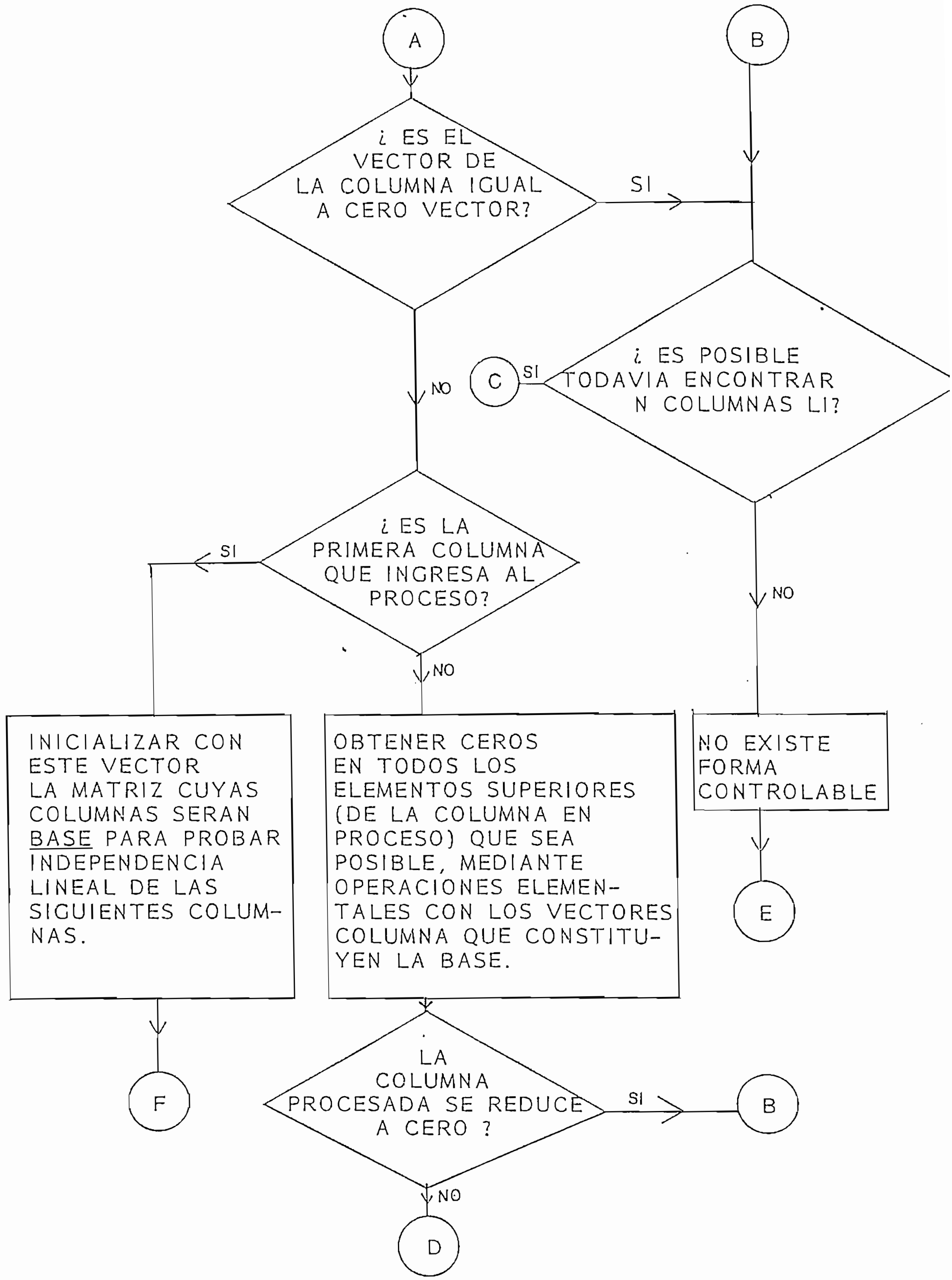

FIG. 2.9 Diagrama de Flujo de la Forma Controlable

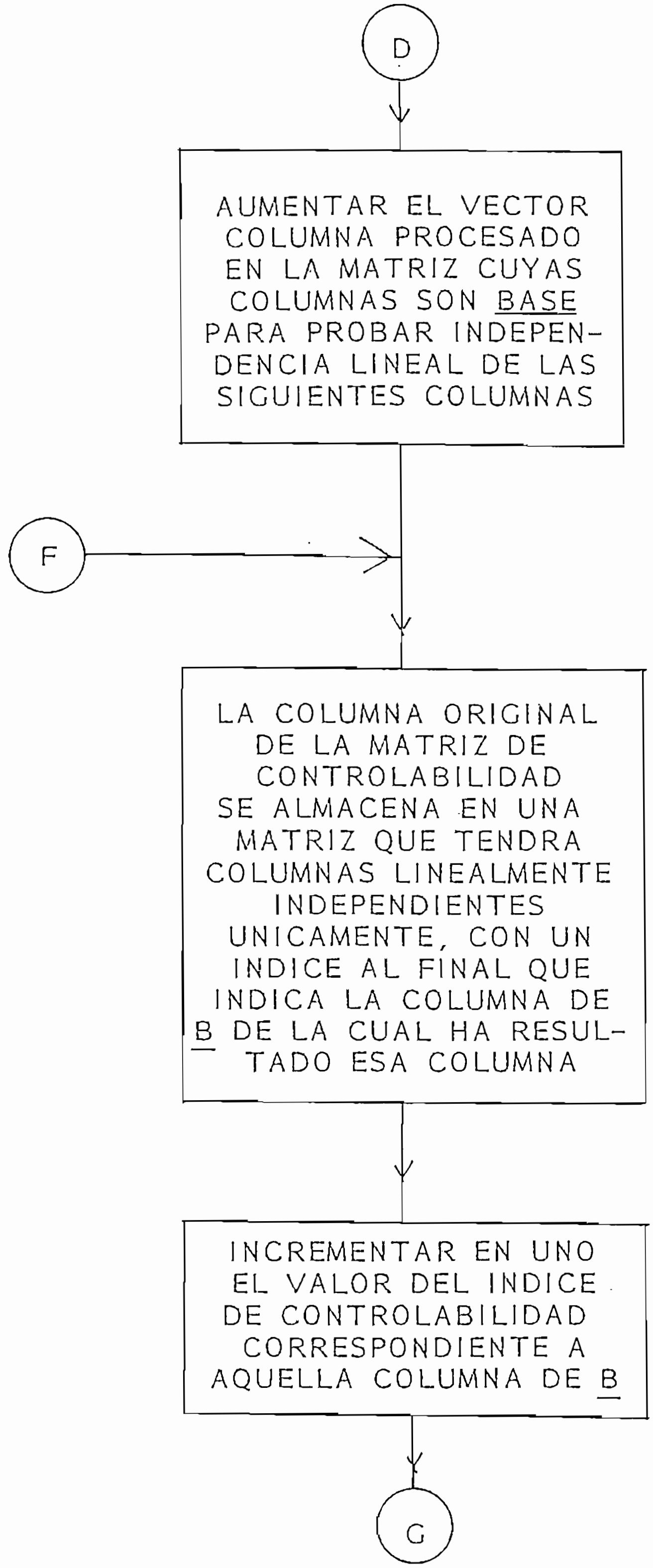

FIG: 2.9 Diagrama de Flujo de la Forma Controlable

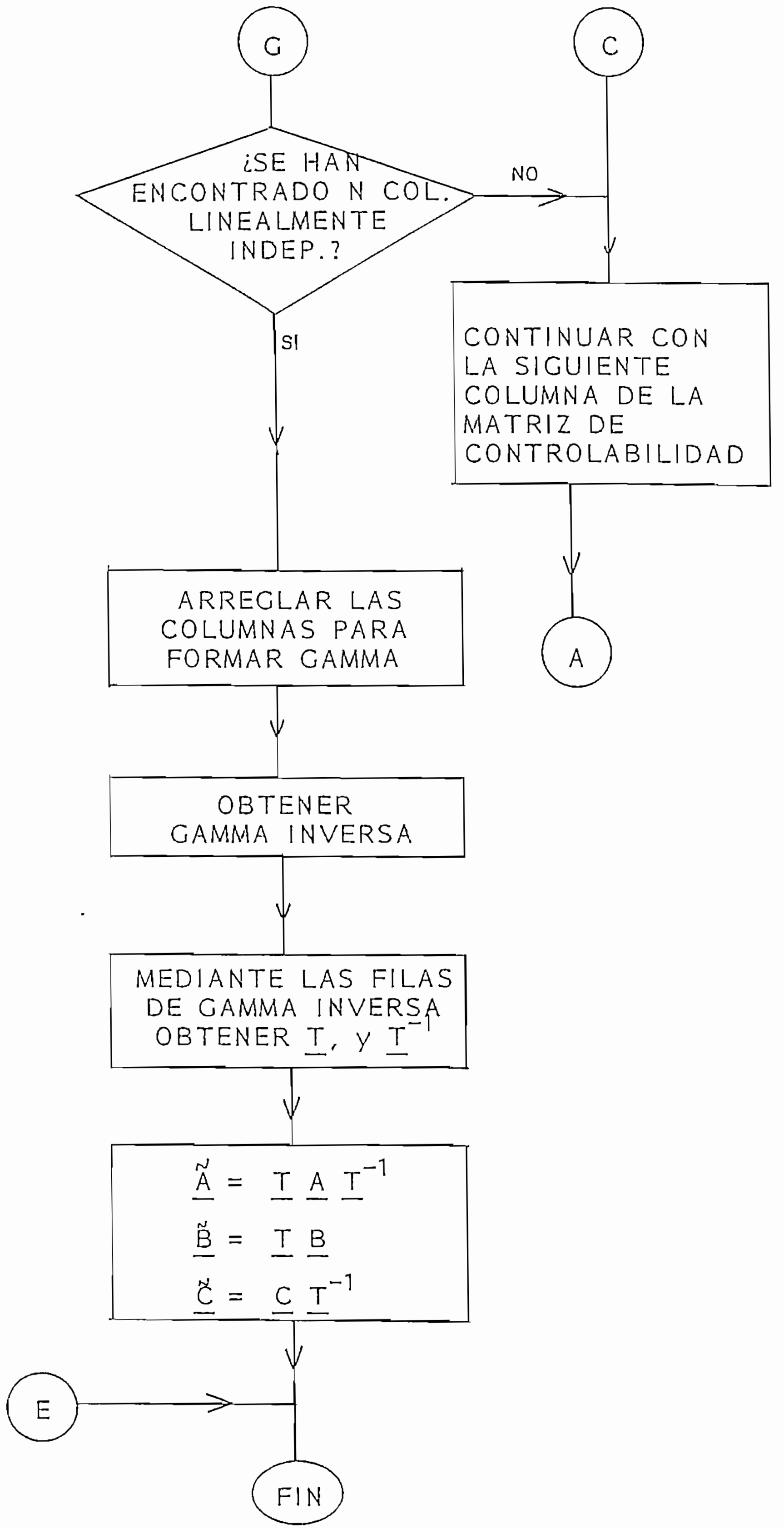

FIG: 2.9 Diagrama de Flujo de la Forma Controlable

2.9 PROGRAMA DE LA FORMA OBSERVABLE

Al igual que en la forma controlable el algoritmo se basa en la teoria de obtención de formas canónicas del numeral 2.6 como se muestra en el diagrama de flujo de la figura 2.10

La descripción de las principales variables utilizadas es la siguiente:

NOMBRE	CONTENIDO
N1	Número de columnas de la matriz de observabilidad
C1(*)	Matriz de observabilidad, matriz Gamma y luego Gamma inversa
C2(*)	Matriz auxiliar para el cálculo de la matriz de observabilidad y en el cálculo de columnas linealmente independientes.
L1(*)	Almacena los indices de observabilidad
L3	Cuenta las columnas linealmente independientes
L4	Indica el grupo de K columnas en el que se encuentra el proceso.
C4(*)	Almacena los vectores linealmente independientes que constituyen la BASE para probar independencia lineal de las siguientes columnas
C3(*)	Almacena las N columnas linealmente independientes.
T	Matriz de transformación

A1(*)	Matriz $\underline{A}$ en la forma observable
B1(*)	Matriz $\underline{B}$ en la forma observable
C1(*)	Matriz $\underline{C}$ en la forma observable
D1(*)	Matriz $\underline{D}$ en la forma observable
P6	Indica si existe o no forma observable
E	Valor que indica la precisión de los cálculos

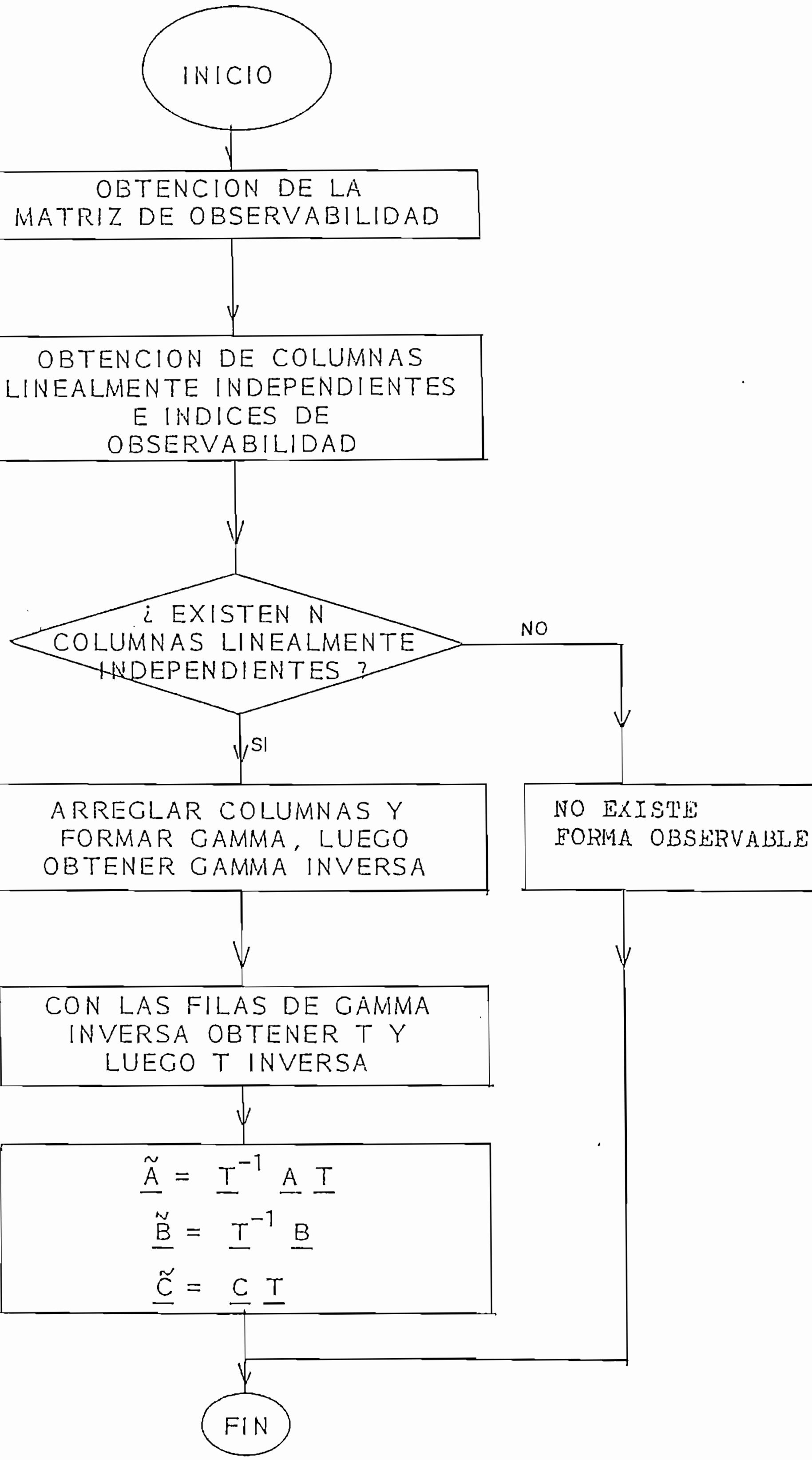

FIG: 2.10 Programa de la Forma Observable

CAPITULO TERCERO

REALIZACION Y RECONSTRUCCION

3.1 INTRODUCCION

Si se tiene un sistema multivariable descrito por una matriz función de transferencia estrictamente propia G(s); es decir $G(s) \rightarrow 0$ cuando $s \rightarrow \infty$ tal que

$$\underline{y}(s) = \underline{G}(s)\ \underline{u}(s)$$

donde $\underline{y}(s)$ es un vector k de transformadas de Laplace de las salidas del sistema, y $\underline{u}(s)$ es un vector m de transformadas de Laplace de las entradas del mismo; entonces este sistema puede ser descrito por las ecuaciones de espacio de estado de la siguiente forma.

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= \underline{A}\ \underline{x} + \underline{B}\ \underline{u} \\ \underline{y} &= \underline{C}\ \underline{x} \end{aligned}$$

Para que esto sea verdad debe cumplirse que:

$$\underline{G}(s) = \underline{C}\ (\ s\underline{I} - \underline{A}\ )^{-1}\ \underline{B}$$

donde $\underline{C}$, $\underline{A}$, $\underline{B}$ son matrices kxn, nxn y nxm respectivamente. Se dice que la realización es mínima si la matriz $\underline{A}$ es de orden mínimo.

El significado del concepto de realización mínima es que la solución es escencialmente única.

Una realización mínima es completamente controlable y completamente observable, y con ella se obtiene el mínimo número de integradores o ecuaciones diferenciales requerido para realizar una simulación análoga o digital del sistema.

Los métodos que se utilizan para la obtención de realizaciones mínimas consisten escencialmente en determinar una realización no mínima $\underline{N}$ que es controlable u observable pero no necesariamente ambos. Se determina luego la parte observable o controlable de $\underline{N}$, respectivamente, y esta toma el nombre de $\underline{R}$ que es precisamente la matriz de realización mínima.

N. Munro ha desarrollado un procedimiento computacional y se ha mostrado que es una aproximación más simple y eficiente a este problema.

Para la verificación de resultados se desarrolla el tema de Reconstrucción que consiste en la obtención de la matriz $\underline{G}(s)$ a partir de las matrices en el espacio de estado, mediante la fórmula:

$$\underline{G}(s) = \underline{C}\ (s\ \underline{I} - \underline{A}\ )^{-1}\ \underline{B}$$

Se desarrolla un algoritmo para la obtención de $(\ s\underline{I} - \underline{A})^{-1}$ que es el problema principal en el cálculo de $\underline{G}(s)$.

3.2 REALIZACION MINIMA

Dada una matriz función de transferencia $\underline{G}(s)$ de dimensiones kxm, que es propia, entonces $\underline{G}(s)$ en general está expresada como:

$$\underline{G}(s) = \underline{G}p(s) + \underline{D}$$

donde $\underline{D}$ es una matriz constante y $\underline{G}p(s)$ es estrictamente propia, es decir, $\underline{G}p(s) \rightarrow 0$ cuando $s \rightarrow \infty$.

Sea $d_i(s)$ el mínimo denominador común de la fila i de $\underline{G}p(s)$, y expresando $\underline{G}p(s)$ en términos de sus filas como:

$$\underline{G}p(s) = \begin{bmatrix} h_{1j}(s) \ / \ d_1(s) \\ h_{2j}(s) \ / \ d_2(s) \\ \\ h_{kj}(s) \ / \ d_k(s) \end{bmatrix}$$

para j=1,....,m

Se escriben los términos $d_i(s)$ y $h_{ij}(s)$ como:

$$d_i(s) = s^{r_i} + a^{i}_{r_i-1} \ s^{r_i-1} + \ldots + a^{i}_{0}$$

$$h_{ij}(s) = h^{ij}_{r_i-1} \ s^{r_i-1} + h^{ij}_{r_i-2} \ s^{r_i-2} + \ldots + h^{ij}_{0}$$

Entonces, una matriz de sistema en la forma de espacio de estado que surge de $\underline{G}(s)$ es:

$$P(s) = \left[\begin{array}{ccccc|c} sI_{r_1} - A_1 & 0 & \cdots & 0 & & B_1 \\ 0 & sI_{r_2} - A_2 & \cdots & 0 & & B_2 \\ & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & sI_{r_k} - A_k & & B_k \\ \hline -C_1 & -C_2 & \cdots & -C_k & & D \end{array}\right]$$

En donde los $\underline{A}_i$ son matrices companion

$$\underline{A}_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0^i \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1^i \\ & & & & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & -a_{r_i-2}^i \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{r_i-1}^i \end{bmatrix}$$

$$\underline{B}_i = \begin{bmatrix} h_0^{i1} & h_0^{i2} & \cdots & h_0^{ik} \\ h_1^{i1} & h_1^{i2} & \cdots & h_1^{ik} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{r_i-1}^{i1} & h_{r_i-1}^{i2} & \cdots & h_{r_i-1}^{ik} \end{bmatrix}$$

$$\underline{C}_i = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & \cdots & 0 & \\ \vdots & & \vdots & e_i \\ 0 & \cdots & 0 & \end{array}\right]$$

donde e_i es la iésima columna de $\underline{I}_k$

La matriz del sistema $\underline{P}(s)$ que ha sido obtenida describe una realización observable $\underline{N}$ del sistema descrito por $\underline{G}(s)$.

A manera de ejemplo considérese la matriz función de transferencia G(s) estrictamente propia dada por:

$$\underline{G}(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{(s+1)^2} & \dfrac{1}{(s+1)(s+2)} \\ & \\ \dfrac{1}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{s+3}{(s+2)^2} \end{bmatrix}$$

Una vez obtenido el denominador común en cada fila, la matriz función de transferencia que resulta es:

$$\underline{G}(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{s+2}{(s+1)^2(s+2)} & \dfrac{s+1}{(s+1)^2(s+2)} \\ & \\ \dfrac{s+2}{(s+1)(s+2)^2} & \dfrac{(s+3)(s+1)}{(s+1)(s+2)^2} \end{bmatrix}$$

En esta matriz pueden identificarse los coeficientes de $d_i(s)$, $h_{ij}(s)$.

$$d_1(s) = (s+1)^2(s+2) = s^3 + 4s^2 + 5s + 2$$

$$d_2(s) = (s+1)(s+2)^2 = s^3 + 5s^2 + 8s + 4$$

$$h_{11}(s) = s+2$$

$$h_{12}(s) = s+1$$

$$h_{21}(s) = s+2$$

$$h_{22}(s) = s^2 + 4s + 3$$

A partir de esto pueden identificarse los parámetros:

$$r_1 = 3$$

$$r_2 = 3$$

La matriz del sistema que surge de G(s) es:

$$\underline{P}(s) = \left[\begin{array}{cc|c} s\underline{I}_3 - \underline{A}_1 & 0 & \underline{B}_1 \\ 0 & s\underline{I}_3 - \underline{A}_2 & \underline{B}_2 \\ \hline -\underline{C}_1 & -\underline{C}_2 & 0 \end{array}\right]$$

donde

$$\underline{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \quad ; \quad \underline{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

Luego de asignar los valores correspondientes, P(s) será:

$$\underline{P}(s) = \left[\begin{array}{ccc|ccc|cc} s & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & s & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & s+4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & s & 0 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & s & 8 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & s+5 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Cuando la matriz $\underline{P}(s)$, está dada en la forma de espacio de estado:

$$\underline{P}(s) = \left[\begin{array}{c|c} s\underline{I}_n - \underline{A} & \underline{B} \\ \hline -\underline{C} & \underline{D} \end{array}\right]$$

la aplicación del algoritmo descrito por Rosenbrock que se detalla en el numeral 3.3 reduce $\underline{P}(s)$ a:

$$\underline{P}_1(s) = \left[\begin{array}{cc|c} s\underline{I}_\alpha - \underline{A}_{11} & 0_{\alpha,n-\alpha} & 0_{\alpha,k} \\ -\underline{A}_{21} & s\underline{I}_{n-\alpha} - \underline{A}_{22} & \underline{B}_2 \\ \hline -\underline{C}_1 & -\underline{C}_2 & \underline{D} \end{array}\right]$$

lo cual se logra generando tantas filas como sea posible en $s\underline{I}_n - \underline{A}$, $\underline{B}$ que tengan como su último elemento una constante diferente de cero y que posean solamente elementos iguales a cero antes de estos elementos en la misma columna.

Puesto que $\underline{P}_1(s)$ es sistema similar a $\underline{P}(s)$, éste surge de la misma función de transferencia que $\underline{P}(s)$; es decir:

$$\underline{G}(s) = \underline{C}_2 (s\underline{I}_{n-\alpha} - \underline{A}_{22})^{-1} \underline{B}_2 + \underline{D}$$

De esta manera, quitando las filas y columnas de $\underline{P}_1(s)$ correspondientes a la dimensión de $\underline{A}$; es decir, filas 1 a α y columnas 1 a α ; se obtiene

$$\underline{P}_2(s) = \left[\begin{array}{c|c} s\underline{I}_{n-\alpha} - \underline{A}_{22} & \underline{B}_2 \\ \hline - \underline{C}_2 & \underline{D} \end{array} \right]$$

que realiza la misma matriz función de transferencia $\underline{G}(s)$ que $\underline{P}(s)$.

Si el procedimiento descrito anteriormente se lleva en un computador digital, entonces, puesto que $s\underline{I}_n$ y $\underline{D}$ no son alterados por el algoritmo, se puede usar una representación más simple llamada:

$$\underline{N} = \left[\begin{array}{c|c} \underline{A} & \underline{B} \\ \hline \underline{C} & 0 \end{array}\right]$$

donde $\underline{N}$ es la realización observable no-mínima. El bloque $\underline{A}$ representa las matrices companion $\underline{A}_i$, el bloque $\underline{B}$ representa las matrices $\underline{B}_i$, y el bloque $\underline{C}$ representa las matrices $\underline{C}_i$.

La matriz reducida obtenida después de la aplicación del algoritmo es $\underline{R}$, la realización mínima requerida.

3.3 PROGRAMA DE REALIZACION MINIMA

El corazón del programa radica en el algoritmo para la obtención de la forma controlable a partir de la matriz $\underline{N}$ que describe un sistema que es completamente observable pero no necesariamente completamente controlable, la cual se obtiene mediante operaciones elementales de filas y columnas y asi se llega a la realización mínima deseada.

En la matriz $\underline{N}$ que ha sido ensamblada a partir de $\underline{G}(s)$ se identifican las matrices $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$,

$$\underline{N} = \left[\begin{array}{c|c} \underline{A} & \underline{B} \\ \hline \underline{C} & \underline{0} \end{array}\right]$$

El algoritmo empieza tomando como elemento pivote el último elemento de la última columna en la matriz $[\ \underline{A} \mid \underline{B}]$. A partir de este se realizan las siguientes operaciones:

i) Obtener ceros sobre el elemento pivote mediante operaciones elementales (multiplicar una fila por una constante y sumar a otra fila).

ii) Cada vez que se realice una operación elemental en las filas deberá hacerse la operación inversa con las columnas.
Ejemplo: FILA 2 = FILA 2 - 5 * FILA 3
COL 3 = COL 3 + 5 * COL 2 (OPERACION INVERSA)

iii) Debido a que [$\underline{A} \mid \underline{B}$] no es una matriz cuadrada, el proceso deberá terminar cuando el índice de las filas sea igual al número de filas n.

iv) En el caso que el pivote sea cero, se busca en los elementos sobre el pivote aquel que sea mayor y se realiza un intercambio de filas entre la fila del elemento mayor y la fila del elemento pivote. Seguidamente se debe realizar la operación inversa en las columnas (intercambiar columnas).

Ejemplo: FILA 4 = FILA DEL PIVOTE

FILA 2 = FILA DEL ELEMENTO MAYOR

FILA 4 $\longleftrightarrow$ FILA 2 ($\longleftrightarrow$ = INTERCAMBIAR CON)

COL 4 $\longleftrightarrow$ COL 2

v) Si cualquier fila linealmente dependiente es determinada durante este proceso, entonces el elemento pivote y todos los elementos sobre éste en la misma columna serán cero. En este caso deberá incrementarse el índice de la columna pero no el índice de la fila. Este último modo de operación se adoptará cuando sea necesario hasta que los índices difieran en el número de columnas de $\underline{B}$ en cuyo caso el algoritmo terminará.

vi) La diferencia entre el número de filas de [$\underline{A} \mid \underline{B}$] y el valor del índice de la fila indicará el número de filas y columnas que deben ser removidas en la descripción final de $\underline{N}$ para formar la matriz de realización mínima requerida.

Las variables utilizadas en el programa de realización mínima y su descripción es la siguiente:

NOMBRE	CONTENIDO
N1(*)	Matriz de realización no mínima observable para empezar cálculo de Realización Mínima.
Y(*)	Matriz que almacena la fila de N1 donde empiezan los elementos de cada fila de $\underline{G}(s)$ Ej. Y(2) =3 significa que los elementos de la fila 2 de G(s) empiezan en la fila 3 de N1.
K2	Número de filas de la matriz [$\underline{A} \mid \underline{B}$] que ha sido obtenido como el sumatorio de los grados de los denominadores comunes de cada fila.
K	Número de filas de $\underline{G}(s)$
M	Número de columnas de $\underline{G}(s)$
I3	Indice de filas
J3	Indice de columnas
Z	Número de columnas linealmente dependientes detectadas en el proceso.
M1	Auxiliar para determinar el elemento mayor
R	Auxiliar para almacenar la fila del elemento mayor
X	Auxiliar para intercambio de filas y columnas
O4	Auxiliar para almacenamiento en archivo de resultados

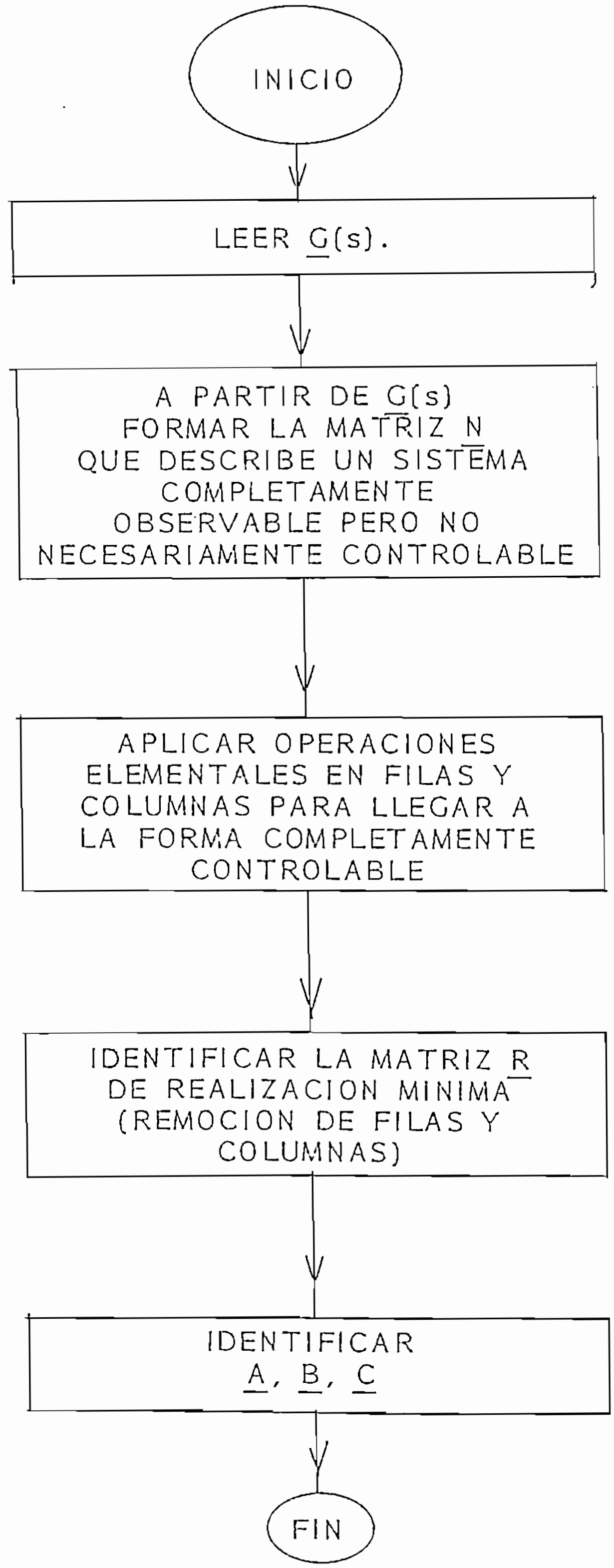

FIG: 3.1 Programa de Realización Mínima

Para el ejemplo dado en el numeral 3.2 la representación $\underline{N}$ estará dada por:

$$\underline{N} = \left[\begin{array}{ccc:ccc:cc} 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -8 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5 & 0 & 1 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Aplicando operaciones elementales en filas y columnas se obtiene

$$N = \left[\begin{array}{cc:cccc|cc} 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

La partición muestra las filas y columnas que deben ser removidas para llegar a la realización mínima donde:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y $$\underline{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.4 RECONSTRUCCION

La reconstrucción consiste en determinar la matriz función de transferencia correspondiente a una descripción en el espacio de estado mediante la utilización de la ecuación 1.3.

$$\underline{G}(s) = \underline{C} (s\underline{I} - \underline{A})^{-1} \underline{B} + \underline{D}$$

El problema principal para calcular la matriz función de transferencia estriba en la inversión de la matriz:

$$(s\underline{I} - \underline{A})$$

puesto que es una matriz cuyos elementos de la diagonal son función de la variable compleja s, por lo que requiere de un tratamiento especial.

Un algoritmo que se usa mucho para realizar el cómputo de la matriz inversa mencionada fue obtenido por Fadeev.

Este algoritmo calcula los coeficientes de la matriz adjunta de $(s\underline{I} - \underline{A})$ que se expresa como:

$$\text{adj } (s\underline{I} - \underline{A}) = R_0 s^{n-1} + R_1 s^{n-2} + \ldots + R_{n-2} s + R_{n-1}$$

donde $R_0 = I$

y simultáneamente calcula los coeficientes del polinomio característico:

$$b(s) = \det (s\underline{I} - \underline{A}) = s^n + b_1 s^{n-1} + \ldots + b_{n-1} s + b_n$$

donde $b_0 = 1$.

Este algoritmo se basa en el hecho de que la traza de la adjunta de ($s\underline{I}$ - $\underline{A}$) es igual a la derivada del polinomio característico b(s), es decir:

$$tr\ [\ adj\ (\ s\underline{I} - \underline{A}\ )] = \underline{b}'(s)$$

$$tr\ [\ \underline{R}_k\ ] = (\ n-k)\ b_k$$

Los coeficientes matriciales $\underline{R}_k$ y los coeficientes escalares b_k están dados en forma recursiva mediante

$$b_k = -\frac{1}{k}\ tr\ [\ \underline{A}\ \underline{R}_{k-1}\ ]\ ;\ k = 1,\ n$$

$$\underline{R}_k = \underline{A}\ \underline{R}_{k-1} + b_K\ \underline{I}\ ;\ k = 1,\ n$$

Es interesante notar que $\underline{R}_n = 0$, lo cual puede usarse como un chequeo computacional de la precisión del método, aunque este algoritmo es usualmente considerado como satisfactorio numéricamente.

Para el ejemplo descrito en el numeral 3.2 y cuya realización mínima fue obtenida en el numeral 3.3 tenemos:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \underline{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Aplicando el algoritmo de reconstrucción cuyo diagrama de flujo se muestra en la fig. 3.2 se obtiene:

$$\underline{G}(s) = \frac{1}{s^4 + 6s^3 + 13s^2 + 12s + 4} \begin{bmatrix} s^2 + 4s + 4 & s^2 + 3s + 2 \\ s^2 + 3s + 2 & s^3 + 5s + 7s + 3 \end{bmatrix}$$

de aqui

$$\underline{G}(s) = \frac{1}{(s+1)^2\,(s+2)^2} \begin{bmatrix} (s+2)^2 & (s+2)(s+1) \\ (s+2)(s+1) & (s+1)^2(s+3) \end{bmatrix}$$

Realizadas las simplificaciones:

$$\underline{G}(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{(s+1)^2} & \dfrac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \dfrac{1}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{s+3}{(s+2)^2} \end{bmatrix}$$

que es precisamente la misma función de transferencia de la que habíamos partido en el numeral 3.2

3.5 PROGRAMA DE RECONSTRUCCION

El programa de reconstrucción se basa en lo descrito en el numeral 3.4 y se ha implementado de tal forma que se obtenga solo la parte estrictamente propia de la matriz $\underline{G}(s)$. Para obtener la función de transferencia total bastará con sumar dos matrices puesto que:

$$\underline{G}(s) = \underline{G}_p(s) + \underline{D}$$

donde $\underline{G}_p(s) = \underline{C}(\,s\underline{I} - \underline{A})^{-1}\,\underline{B}$ es la matriz obtenida en este programa.

El diagrama de flujo del programa de Reconstrucción se muestra en la figura 3.2. La lista de variables utilizadas y su descripción es la siguiente:

NOMBRE	CONTENIDO
C1(*)	Almacena todos los coeficientes de los polinomios de $\underline{G}(s)$ en M grupos de N columnas.
C2(*)	Almacena los valores actualizados de $\underline{R}_k$
C3(*)	Auxiliar en el cálculo de $\underline{C}*(\,s\underline{I} - \underline{A})^{-1}*\,\underline{B}$
C4(*)	Almacena los coeficientes de un grado determinado de los polinomios numeradores de $(\,s\underline{I} - \underline{A})^{-1}$
V2(*)	Vector que almacena los coeficientes del polinomio característico.
G1(*)	Matriz que almacena $\underline{G}(s)$ de tal forma que puede ingresarse como dato al programa de Realización Mínima.

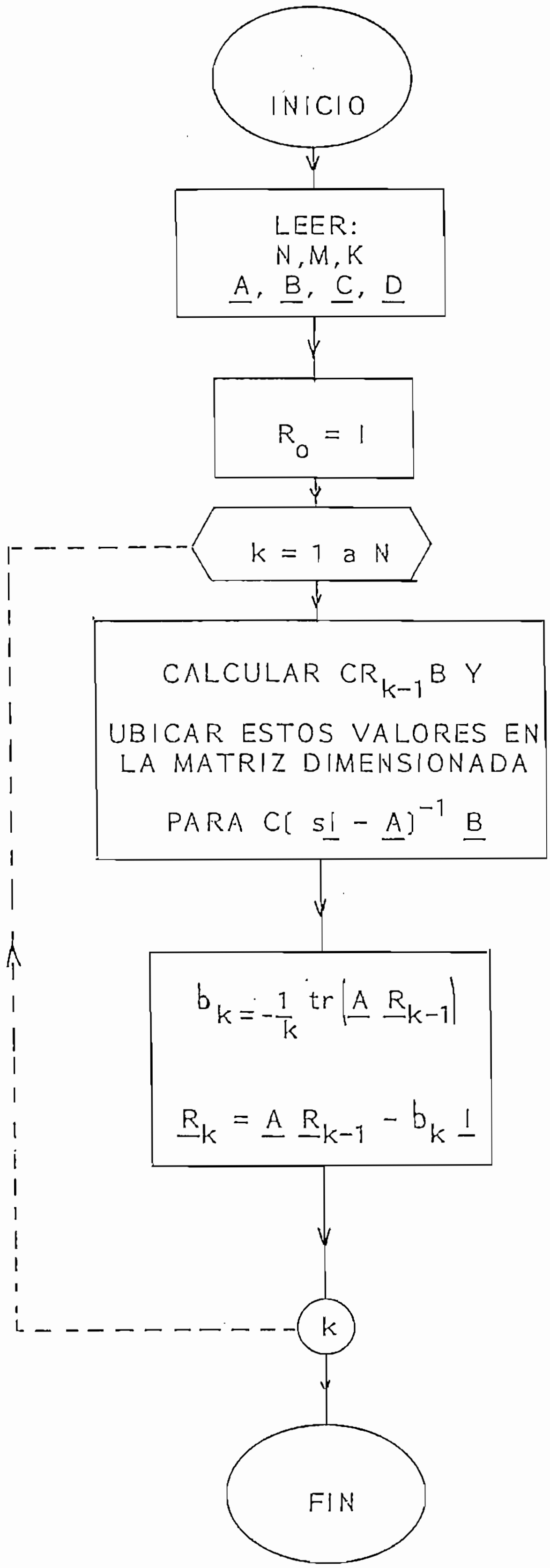

FIG. 3.2 Programa de Reconstrucción

C A P I T U L O   C U A R T O

RESULTADOS Y CONCLUSIONES

4.1 RESULTADOS

Con el objeto de ilustrar y probar la eficiencia de los programas desarrollados para la obtención de formas controlables, formas observables y Realización Mínima, en este numeral se presentan algunos ejemplos para el efecto.

Ejemplo 1: (ver pags. 118,119,120,121,122,123)

Corresponde a un sistema de quinto orden, con 3 entradas y 2 salidas y cuyas ecuaciones en el espacio de estado son:

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{u}$$

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}$$

Se desea obtener las formas canónicas de Luemberger (forma controlable y observable) y determinar los índices de controlabilidad y observabilidad. Además, se desea verificar en los resultados, las formas particionadas expuestas en la teoría.

En los resultados obtenidos se puede observar la forma particionada de las matrices $\underline{A}$ y $\underline{B}$; así:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} & \underline{A}_{13} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} & \underline{A}_{23} \\ \underline{A}_{31} & \underline{A}_{32} & \underline{A}_{33} \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5.064 & -0.6 \end{bmatrix} ; \quad \underline{A}_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1.390 & 1.440 \end{bmatrix} \quad \underline{A}_{33} = \begin{bmatrix} -0.840 \end{bmatrix}$$

Estas matrices están en la forma companion con dimensiones $u_i \times u_i$ en donde u_i = i-ésimo índice de controlabilidad; además

$$A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2.776 & 1.400 \end{bmatrix} ; \quad A_{13} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.568 \end{bmatrix} ;$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2.546 & -2.16 \end{bmatrix} ; \quad A_{23} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.267 \end{bmatrix}$$

$$A_{31} = \begin{bmatrix} -0.68 & 0 \end{bmatrix} ; \quad A_{32} = \begin{bmatrix} 0.12 & 0 \end{bmatrix}$$

tienen la forma $A_{ij} = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \hline x \text{ ---- } x \end{array}\right]$ con dimensiones $u_i * u_j$

u_j = j-ésimo índice de controlabilidad

La matriz $\underline{B}$ obtenida también tiene la forma especificada

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} \underline{B}_1 \\ \underline{B}_2 \\ \underline{B}_3 \end{bmatrix}$$

donde las dimensiones de $\underline{B}_i$ son $u_i \times m$

donde: u_i = i-ésimo índice de controlabilidad

m = número de entradas del sistema

entonces:

$$\underline{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -0.8 \end{bmatrix}$$

$$\underline{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0.8 \end{bmatrix}$$

$$\underline{B}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

que tienenla forma

$$B_i = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \hline 0 \ \ldots 1 . x . . x \\ \uparrow \end{array}\right]$$

columna i

Además, se puede ver claramente la forma particionada de las matrices $\underline{A}$ y $\underline{C}$ en los resultados de la forma observable; así:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{bmatrix}$$

donde cada bloque diagonal $\underline{A}_{ii}$ tiene dimensiones $u_i \times u_i$ (u_i = i-ésimo índice de observabilidad del sistema).

Luego:

$$\underline{A}_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -37.204 \\ 1 & 0 & -2.280 \\ 0 & 1 & -1.529 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 4.941 \\ 1 & 1.529 \end{bmatrix}$$

Las matrices diagonales tienen la forma companion.

Las matrices fuera de la diagonal tienen la forma

$$A_{ij} = \left[\begin{array}{c|c} & \times \\ & \times \\ 0 & . \\ & \times \\ & \times \end{array}\right] \text{ con dimensiones } u_i \times u_j$$

(u_j = j-ésimo índice de observabilidad)

Así tenemos que para nuestro ejemplo, las matrices $\underline{A}_{12}$ y $\underline{A}_{21}$ son:

$$\underline{A}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 67.765 \\ 0 & 42.118 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ; \qquad A_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2.713 \\ 0 & 0 & 0.621 \end{bmatrix} ;$$

con la forma especificada.

La matiz $\underline{C}$ obtenida también es particionada.

$\underline{C} = [\ \underline{C}_1 \quad \underline{C}_2\ ]$ donde cada bloque C_i

tendrá dimensiones $k \times u_i$ donde:

k = número de salidas

u_i = i-ésimo índice de observabilidad

cada bloque $\underline{C}_i$ deberá tener la forma:

$$\underline{C}_i = [0 \ \vdots \ \varepsilon_i]$$

con

$$\varepsilon_j = \begin{cases} 0 & \text{para } j < i \\ 1 & \text{para } j = i \\ x & \text{para } j > i \end{cases}$$

j = índice de la fila i = índice de la partición

En el ejemplo:

$$\underline{C}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3.82 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \longleftarrow j = i \ (1 = 1) \\ \longleftarrow j > i \ (2 > 1) \end{array}$$

$$\underline{C}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{lll} \longleftarrow & j < i \ ; & (1 < 2) \\ \longleftarrow & j = i \ ; & (2 = 2) \end{array}$$

Ejemplo 2.- (ver pags. 124,125,126,127,128,129)

Corresponde a un sistema de tercer orden con 2 entradas y 2 salidas para el cual se desea obtener las formas controlable y observable y determinar la matriz de transformación T; además se desea obtener la matriz función de transferencia para realizar posteriormente (ver ejemplo 6) el programa de Realización Mínima.

El sistema está descrito mediante las ecuaciones:

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & -3 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \underline{u}$$

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}$$

El sistema descrito por las ecuaciones dadas es completamente controlable y observable; por lo tanto, la función de transferencia $\underline{G}(s)$ no puede reconstruirse a partir de un sistema de menor orden como se demuestra posteriormente en el ejemplo 6.

Ejemplo 3.- (ver pags. 130,131,132,133,134)

Considérese el sistema de cuarto orden con 2 entradas y 2 salidas descrito por las ecuaciones:

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \underline{u}$$

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}$$

Se desea obtener las formas controlable y observable con sus respectivos índices de controlabilidad y observabilidad; también se desea la matriz función de transferencia para realizar posteriormente (ver ejemplo 7) el programa de Realización Mínima

De los resultados se desprende que existe al menos un estado que no es controlable. Esto significa que la función de transferencia que se obtiene puede reconstruirse a partir de un sistema de menor orden; lo cual será demostrado en el ejemplo 7.

Ejemplo 4.- (ver pags. 135,136,137,138,139,140,141,142)

Dada la descripción de un sistema mediante la matriz función de transferencia.

$$\underline{G}(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{(s+1)^2} & \dfrac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \\ \dfrac{1}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{s+3}{(s+2)^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{s+2}{s^3+4s^2+5s+2} & \dfrac{s+1}{s^3+4s^2+5s+2} \\ \\ \dfrac{s+2}{s^3+5s^2+8s+4} & \dfrac{s^2+4s+3}{s^3+5s^2+8s+4} \end{bmatrix}$$

Se desea obtener la descripción en el espacio de estado que tenga el mínimo orden y sea completamente controlable y observable; lo cual se desea demostrar, obteniendo las formas controlable y observable, además se desea comprobar que la reconstrucción del sistema con las matrices $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$, $\underline{D}$ que resultan, culmina en la función de transferencia original.

Para este ejemplo, la matriz N que es completamente observable pero no necesariamente controlable, sobre la cual se aplica el algoritmo para remover filas y columnas es:

$$N = \left(\begin{array}{ccc:ccc|cc}
0 & 0 & -2 & & & & 2 & 1 \\
1 & 0 & -5 & & 0 & & 1 & 1 \\
0 & 1 & -4 & & & & 0 & 0 \\
\hdashline
 & & & 0 & 0 & -4 & 2 & 3 \\
 & 0 & & 1 & 0 & -8 & 1 & 4 \\
 & & & 0 & 1 & -5 & 0 & 1 \\
\hline
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{array}\right)$$

La matriz N final es:

$$N = \left(\begin{array}{cc:cccc|cc}
0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hdashline
0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\
 & & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\
\hline
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & & \\
 & & & & & & & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & &
\end{array}\right)$$

Donde se identifica que el número de filas y columnas removidas es 2; también las matrices $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$, $\underline{D}$ resultantes son:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En los resultados, se observa además que el sistema descrito por las matrices de espacio estado $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$, $\underline{D}$ obtenidas, es completamente controlable y observable. Además, el programa de reconstrucción determina que:

$$\underline{G}(s) = \frac{1}{s^4+6s^3+13s^2+12s+4} \begin{bmatrix} s^2+4s+4 & s^2+3s+2 \\ s^2+3s+2 & s^3+5s^2+7s+3 \end{bmatrix}$$

de donde:

$$\underline{G}(s) = \frac{1}{(s+1)^2\ (s+2)^2} \begin{bmatrix} (s+2)^2 & (s+1)(s+2) \\ (s+1)(s+2) & (s+1)^2(s+3) \end{bmatrix}$$

$$\underline{G}(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{(s+1)^2} & \dfrac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \dfrac{1}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{s+3}{(s+2)^2} \end{bmatrix}$$

que es precisamente la matriz función de transferencia original por tanto se concluye que los resultados del programa de Realización Mínima son correctos.

Ejemplo 5.- (ver pags. 143,144,145,146,147)

Corresponde a una matriz función de transferencia de dimensiones 3x4, la cual es tomada como ejemplo para comprobar los resultados obtenidos por N.Munro (referencia bibliográfica # 6) en el programa de Realización Mínima.

$$
\underline{G}(s)=\begin{bmatrix}
\dfrac{3(s+3)(s+5)}{(s+1)(s+2)(s+4)} & \dfrac{6(s+1)}{(s+2)(s+4)} & \dfrac{2s+7}{(s+3)(s+4)} & \dfrac{2s+5}{(s+2)(s+3)} \\[2ex]
\dfrac{2}{(s+3)(s+5)} & \dfrac{1}{(s+3)} & \dfrac{2(s+5)}{(s+1)(s+2)(s+3)} & \dfrac{8(s+2)}{(s+1)(s+3)(s+5)} \\[2ex]
\dfrac{2(s^2+7s+18)}{(s+1)(s+3)(s+5)} & \dfrac{-2s}{(s+1)(s+3)} & \dfrac{1}{(s+3)} & \dfrac{2(5s+17)(s+2)}{(s+1)(s+3)(s+5)}
\end{bmatrix}
$$

La matriz N que describe un sistema completamente observable pero no necesariamente completamente controlable es:

$$
N = \left[\begin{array}{cccc|cccc|ccc|cccc}
0 & 0 & 0 & -24 & & & & & & & & 135 & 18 & 14 & 20 \\
1 & 0 & 0 & -50 & & & 0 & & & 0 & & 117 & 42 & 25 & 33 \\
0 & 1 & 0 & -35 & & & & & & & & 33 & 30 & 13 & 15 \\
0 & 0 & 1 & -10 & & & & & & & & 3 & 6 & 2 & 2 \\
\hline
 & & & & 0 & 0 & 0 & -30 & & & & 4 & 10 & 50 & 32 \\
 & 0 & & & 1 & 0 & 0 & -61 & & 0 & & 6 & 17 & 20 & 32 \\
 & & & & 0 & 1 & 0 & -41 & & & & 2 & 8 & 2 & 8 \\
 & & & & 0 & 0 & 1 & -11 & & & & 0 & 1 & 0 & 0 \\
\hline
 & & & & & & & & 0 & 0 & -15 & 36 & 0 & 5 & 68 \\
 & 0 & & & & 0 & & & 1 & 0 & -23 & 14 & -10 & 6 & 54 \\
 & & & & & & & & 0 & 1 & -9 & 2 & -2 & 1 & 10 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & & 0 & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & & &
\end{array}\right]
$$

La matriz N original que describe el sistema tiene dimensiones 14x15. Luego del algoritmo de operaciones elementales en filas y columnas se obtiene que pueden removerse dos filas y dos columnas y se llega a la descripción final en el espacio de estado que se muestra como resultado.

Los resultados obtenidos fueron verificados como en el ejemplo 4 mediante los programas de la forma controlable, forma observable y reconstrucción.

Ejemplo 6.- (ver pags. 148,149,150,151,152,153)

Dada la descripción del sistema del ejemplo 2 mediante matriz función de transferencia, se desea obtener la Realización Mínima para realizar comparaciones de las descripciones en el espacio de estado.

La matriz función de transferencia para el ejemplo 2 (ver resultados de ejemplo 2) . es:

$$\underline{G}(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{-s^2-2s+24}{s^3-s^2-25s+52} & \dfrac{3s^2+12s-96}{s^3-s^2-25s+52} \\ \\ \dfrac{6s^2+20s-71}{s^3-s^2-25s+52} & \dfrac{3s^2-3s+54}{s^3-s^2-25s+52} \end{bmatrix}$$

La cual se obtiene de:

$$\underline{G}(s) = \underline{C}(\ s\underline{I} - \underline{A}\ )^{-1}\underline{B} + \underline{D}$$

Debido a que el sistema descrito por las ecuaciones en el espacio de estado en el ejemplo 2 es completamente controlable y completamente observable, resulta que aquella descripción tiene el mismo orden que la descripción obtenida mediante el programa de Realización Mínima.

Se han desarrollado también las formas canónicas (controlable y observable) a partir de los resultados de Realización Mínima. Si se comparan estas formas canónicas con las obtenidas para el ejemplo 2 se observa que son las mismas con lo cual se prueba que las formas canónicas son únicas.

Ejemplo 7.- (ver pags. 154,155,156,157,158,159)

Dada la descripción del sistema del ejemplo 3 mediante matriz función de transferencia, se desea obtener la Realización Mínima para realizar comparaciones de las descripciones en el espacio de estado.

La matriz función de transferencia para el ejemplo 3 es (ver resultados de ejemplo 3).

$$\underline{G}(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{s^3+5s^2+7s+3}{s^4+6s^3+12s^2+10s+3} & \dfrac{2s^3+6s^2+6s+2}{s^4+6s^3+12s^5+10s+3} \\ \\ \dfrac{s^3+5s^2+7s+3}{s^4+6s^3+12s^2+10s+3} & \dfrac{s^3+5s^2+7s+3}{s^4+6s^3+12s^2+10s+3} \end{bmatrix}$$

Se concluye que la descripción mediante matriz función de transferencia obtenida en el ejemplo 3 (sistema de cuarto orden), puede ser reconstruida a partir de un sistema de menor orden, el cual es completamente controlable y observable.

Ejemplo 8.- (ver pags. 160,161,162,163,164,165,166)

Considérese el sistema físico masa-resorte de la figura 4.1.

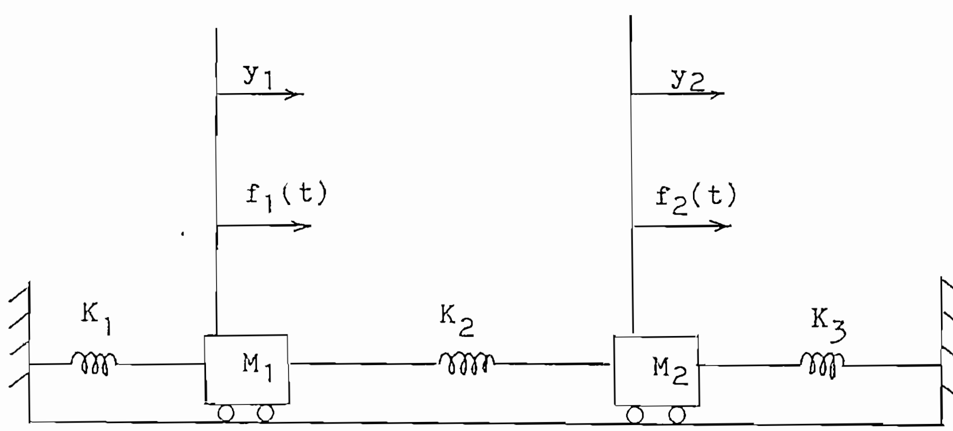

FIG: 4.1. Sistema fisico masa-resorte

Cuya descripción en el espacio de estado (obtenida en el capítulo 1) en forma matricial es:

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\dfrac{K_2+K_1}{M_1} & \dfrac{K_2}{M_1} & 0 & 0 \\ \dfrac{K_2}{M_2} & -\dfrac{K_2+K_1}{M_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{u}$$

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}$$

Si además: $K_1 = 10$; $K_2 = 5$; $M_1 = 1$; $M_2 = 1$, determinar la forma controlable y la forma observable con sus índices respectivos de controlabilidad y observabilidad.

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL   FECHA: 16 DE JULIO DE 1985

FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA

DEPARTAMENTO DE ELECTRONICA Y CONTROL

TESIS DE GRADO DE VICTOR G. PROANO R.-- 1985

==

*** DATOS DEL PROBLEMA ***

NOMBRE : EJE1

DE ENTRADAS = 3

DE SALIDAS = 2

ORDEN DEL SISTEMA= 5

MATRIZ **A**

FILA 1
1.000 -1.000 0.000 2.000 1.000

FILA 2
0.000 -1.000 1.000 0.000 -1.000

FILA 3
0.000 0.000 0.000 0.000 1.000

FILA 4
0.000 0.000 0.000 -2.000 0.000

FILA 5
0.000 0.000 0.000 0.000 2.010

MATRIZ **B**

FILA 1
3.000 2.000 -1.000

FILA 2
1.000 0.000 2.000

FILA 3
0.000 1.000 0.000

FILA 4
-1.000 1.000 0.000

FILA 5
-1.000 0.000 1.010

MATRIZ **C**

FILA 1

2.000	0.000	4.000	0.000	7.000

FILA 2

0.000	1.000	0.000	3.000	0.000

MATRIZ **D**

FILA 1

0.000	0.000	0.000

FILA 2

0.000	0.000	0.000

****** PRESENTACION DE RESULTADOS DE LA FORMA CONTROLABLE******

MATRIZ **T**

FILA 1

0.200	0.000	-.800	0.400	0.200

FILA 2

1.200	-.200	0.000	-.400	-.200

FILA 3

0.520	-.200	-1.480	0.440	0.920

FILA 4

0.520	-.320	-.200	0.160	1.080

FILA 5

-.040	0.400	-.040	0.120	0.160

MATRIZ **T INVERSA**

FILA 1

0.200	0.000	-.800	0.400	0.200

FILA 2

1.200	-.200	0.000	-.400	-.200

FILA 3

1.520	-.200	-1.480	0.440	0.920

FILA 4

1.520	-.320	-.200	0.160	1.080

FILA 5

-.040	0.400	-.040	0.120	0.160

***** FORMA CONTROLABLE *****

MATRIZ **A**

FILA 1

0.000	1.000	-.000	0.000	-.000

FILA 2

5.064	-.600	-2.776	1.400	-.568

FILA 3

0.000	0.000	0.000	1.000	0.000

FILA 4

-2.546	-2.160	1.390	1.440	0.267

FILA 5

-.680	-.000	0.120	-.000	-.040

MATRIZ **B**

FILA 1

-.000	-.000	0.000

FILA 2

1.000	-.000	-.800

FILA 3

-.000	-.000	0.000

FILA 4

-.000	1.000	-.080

FILA 5

0.000	-.000	1.000

MATRIZ **C**

FILA 1

-3.320	-1.000	-2.120	8.000	4.840

FILA 2

11,280	-2,000	-6,520	3,000	0,640

MATRIZ **D**

FILA 1

0,000	0,000	0,000

FILA 2

0,000	0,000	0,000

*** INDICES DE CONTROLABILIDAD ***

---

1 ,-	2
2 ,-	2
3 ,-	1

*** EL INDICE DE CONTROLABILIDAD DEL SISTEMA ES: 2 ***

*** PRESENTACION DE RESULTADOS DE LA FORMA OBSERVABLE ***

MATRIZ **T**

FILA 1

0,478	0,132	0,765	-8,162	-5,029

FILA 2

0,199	-,397	0,412	-1,544	4,088

FILA 3

-,213	-,015	-,029	3,103	0,559

FILA 4

-,066	0,132	-,265	0,515	-1,029

FILA 5

-,015	-,029	-,059	0,559	1,118

MATRIZ **T INVERSA**

FILA 1

0.478	0.132	0.765	-8.162	-5.029

FILA 2

0.199	-.397	0.412	-1.544	4.088

FILA 3

-.213	-.015	-.029	3.103	0.559

FILA 4

-.066	0.132	-.265	0.515	-1.029

FILA 5

-.015	-.029	-.059	0.559	1.118

***** FORMA OBSERVABLE *****

MATRIZ **A**

FILA 1

0.000	-.000	-37.204	0.000	67.765

FILA 2

1.000	0.000	-2.280	0.000	42.118

FILA 3

-.000	1.000	-1.529	0.000	0.000

FILA 4

-.000	-.000	-2.713	0.000	4.941

FILA 5

-.000	0.000	0.621	1.000	1.529

MATRIZ **B**

FILA 1

33.471	-226.706	-89.941

FILA 2

-21.529	20.235	21.647

```
FILA 3
 -1.000     8.000     5.000

FILA 4
  2.618   -16.176    -6.735

FILA 5
 -2.382     6.059     3.912


      MATRIZ **C**
      ------------


FILA 1
   -.000     0.000     1.000     0.000     -.000

FILA 2
   0.000     0.000     -.382     0.000     1.000


      MATRIZ **D**
      ------------


FILA 1
   0.000     0.000     0.000

FILA 2
   0.000     0.000     0.000

-----------------------------------------------------------------------------------
         *** INDICES DE OBSERVABILIDAD ***
-----------------------------------------------------------------------------------


         1 .-             3

         2 .-             2


*** EL INDICE DE OBSERVABILIDAD DEL SISTEMA ES :  3   ***
```

===

*** DATOS DEL PROBLEMA ***

NOMBRE : EJE2   # DE ENTRADAS = 2

\# DE SALIDAS = 2

ORDEN DEL SISTEMA= 3

MATRIZ **A**

FILA 1
2.000 -1.000 3.000

FILA 2
0.000 2.000 2.000

FILA 3
3.000 4.000 -3.000

MATRIZ **B**

FILA 1
2.000 -1.000

FILA 2
3.000 -4.000

FILA 3
2.000 5.000

MATRIZ **C**

FILA 1
1.000 -1.000 0.000

FILA 2
2.000 0.000 1.000

MATRIZ **D**

FILA 1
0.000 0.000

FILA 2
0.000 0.000

****** PRESENTACION DE RESULTADOS DE LA FORMA CONTROLABLE******

***** FORMA CONTROLABLE *****

MATRIZ **A**

FILA 1
0.000 1.000 0.010

FILA 2
-186.529 -14.053 -310.488

FILA 3
9.211 -.000 15.053

MATRIZ **B**

FILA 1
0.000 0.000

FILA 2
1.000 -28.263

FILA 3
0.000 1.000

MATRIZ **C**

FILA 1
-17.053 -1.000 -25.263

FILA 2
110.316 6.000 172.579

MATRIZ **D**

FILA 1
0.000 0.000

FILA 2
0.000 0.000

*** INDICES DE CONTROLABILIDAD ***

---

1 .- 2

2 .- 1

*** EL INDICE DE CONTROLABILIDAD DEL SISTEMA ES: 2 ***

*** PRESENTACION DE RESULTADOS DE LA FORMA OBSERVABLE ***

***** FORMA OBSERVABLE *****

MATRIZ **A**

FILA 1
-.000 13.000 -.010

FILA 2
1.000 -3.000 -.000

FILA 3
1.000 -3.000 4.000

MATRIZ **B**

FILA 1
-6.000 24.000

FILA 2
-1.000 3.000

FILA 3
5.000 6.000

MATRIZ **C**

FILA 1
0.000 1.000 0.000

FILA 2
0.000 -1.000 1.000

MATRIZ **D**

FILA 1
0.000 0.000

FILA 2
0.000 0.000

*** INDICES DE OBSERVABILIDAD ***

---

1 .- 2

2 .- 1

*** EL INDICE DE OBSERVABILIDAD DEL SISTEMA ES : 2 ***

*** RECONSTRUCCION DEL PROBLEMA ---EJE2--- ***

NUMERO DE FILAS DE G(s)= 2

NUMERO DE COLUMNAS DE G(s)= 2

*** MATRIZ G(s) ***

FILA 1 ORDEN 3

DENOMINADOR COMUN :

GRADO 0 = 52

GRADO 1 = -25

GRADO 2 = -1

GRADO 3 = 1

*** NUMERADORES ***

COLUMNA 1 *** N(1 , 1) ***

GRADO 0 = 24

GRADO 1 = -2

GRADO 2 = -1

COLUMNA 2 *** N(1 , 2) ***

GRADO 0 = -96

GRADO 1 = 12

GRADO 2 = 3

FILA 2 ORDEN 3

DENOMINADOR COMUN :

GRADO 0 = 52

GRADO 1 = -25

GRADO 2 = -1

GRADO 3 = 1

*** NUMERADORES ***
==================

COLUMNA 1 *** N(2 , 1) ***

GRADO 0 = -71

GRADO 1 = 20

GRADO 2 = 6

COLUMNA 2 *** N(2 , 2) ***

GRADO 0 = -54

GRADO 1 = -3

GRADO 2 = 3

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL FECHA: 17 DE JULIO DE 1985

FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA

DEPARTAMENTO DE ELECTRONICA Y CONTROL

TESIS DE GRADO DE VICTOR G. PROANO R.-- 1985

==

*** DATOS DEL PROBLEMA ***

NOMBRE : EJE3

DE ENTRADAS = 2

DE SALIDAS = 2

ORDEN DEL SISTEMA= 4

MATRIZ **A**

FILA 1
0.000 -3.000 0.000 0.000

FILA 2
1.000 -4.000 0.000 0.000

FILA 3
0.000 0.000 0.000 -1.000

FILA 4
0.000 0.000 1.000 -2.000

MATRIZ **B**

FILA 1
3.000 2.000

FILA 2
1.000 2.000

FILA 3
1.000 1.000

FILA 4
1.000 1.000

MATRIZ **C**

FILA 1
0,000 1,000 0,000 0,000

FILA 2
0,000 0,000 0,000 1,000

MATRIZ **D**

FILA 1
0,000 0,000

FILA 2
0,000 0,000

****** PRESENTACION DE RESULTADOS DE LA FORMA CONTROLABLE******

EL SISTEMA *** EJF3 *** NO TIENE FORMA CONTROLABLE

*** PRESENTACION DE RESULTADOS DE LA FORMA OBSERVABLE ***

***** FORMA OBSERVABLE *****

MATRIZ **A**

FILA 1
0,000 -3,000 0,000 0,000

FILA 2
1.000 -4.000 0.000 0.000

FILA 3
0.000 0.000 0.000 -1.000

FILA 4
0.000 0.000 1.000 -2.000

MATRIZ **B**

FILA 1
3.000 2.000

FILA 2
1.000 2.000

FILA 3
1.000 1.000

FILA 4
1.000 1.001

MATRIZ **C**

FILA 1
0.000 1.000 0.000 0.000

FILA 2
0.000 0.000 0.000 1.000

MATRIZ **D**

FILA 1
0.000 0.000

FILA 2
0.000 0.000

*** INDICES DE OBSERVABILIDAD ***

1 .- 2

2 .- 2

*** EL INDICE DE OBSERVABILIDAD DEL SISTEMA ES : 2 ***

*** RECONSTRUCCION DEL PROBLEMA ---EJE3--- ***

NUMERO DE FILAS DE G(s)= 2

NUMERO DE COLUMNAS DE G(s)= 2

*** MATRIZ G(s) ***

FILA 1 ORDEN 4

DENOMINADOR COMUN :

GRADO 0 = 3

GRADO 1 = 10

GRADO 2 = 12

GRADO 3 = 6

GRADO 4 = 1

*** NUMERADORES ***

COLUMNA 1 *** N(1 , 1) ***

GRADO 0 = 3

GRADO 1 = 7

GRADO 2 = 5

GRADO 3 = 1

COLUMNA 2 *** N(1 , 2) ***

GRADO 0 = 2

GRADO 1 = 6

GRADO 2 = 6

GRADO 3 = 2

FILA 2 ORDEN 4

DENOMINADOR COMUN :

GRADO 0 = 3

GRADO 1 = 10

GRADO 2 = 12

GRADO 3 = 6

GRADO 4 = 1

*** NUMERADORES ***

COLUMNA 1 *** N(2 , 1) ***

GRADO 0 = 3

GRADO 1 = 7

GRADO 2 = 5

GRADO 3 = 1

COLUMNA 2 *** N(2 , 2) ***

GRADO 0 = 3

GRADO 1 = 7

GRADO 2 = 5

GRADO 3 = 1

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL FECHA: 17 DE JULIO DE 1985

FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA

DEPARTAMENTO DE ELECTRONICA Y CONTROL

TESIS DE GRADO DE VICTOR G. PROANO R.-- 1985

==

*** DATOS DEL PROBLEMA ***

NOMBRE : EJE4 NUMERO DE FILAS DE G(s)= 2

NUMERO DE COLUMNAS DE G(s)= 2

*** MATRIZ G(s) ***

FILA 1 ORDEN 3

DENOMINADOR COMUN :

GRADO 0 = 2

GRADO 1 = 5

GRADO 2 = 4

GRADO 3 = 1

*** NUMERADORES ***

COLUMNA 1 *** N(1 , 1) ***

GRADO 0 = 2

GRADO 1 = 1

GRADO 2 = 0

COLUMNA 2 *** N(1 , 2) ***

GRADO 0 = 1

GRADO 1 = 1

GRADO 2 = 0

FILA 2 ORDEN 3

DENOMINADOR COMUN :

GRADO 0 = 4

GRADO 1 = 8

GRADO 2 = 5

GRADO 3 = 1

*** NUMERADORES ***

COLUMNA 1 *** N(2 , 1) ***

GRADO 0 = 2

GRADO 1 = 1

GRADO 2 = 0

COLUMNA 2 *** N(2 , 2) ***

GRADO 0 = 3

GRADO 1 = 4

GRADO 2 = 1

*** PRESENTACION DE RESULTADOS DE LA REALIZACION MINIMA ***

MATRIZ **A**

FILA 1
-1.000 1.000 0.000 0.000

FILA 2
1.000 -2.000 1.000 1.000

```
FILA  3
   0,000    1,000    -2,000    -1,000

FILA  4
   0,000    0,000     1,000    -1,000

      MATRIZ **B**
     --------------

FILA  1
   0,000    0,000

FILA  2
   0,000    0,000

FILA  3
   1,000    0,000

FILA  4
   0,000    1,001

      MATRIZ **C**
     --------------

FILA  1
   1,000    1,000     0,000     0,000

FILA  2
   0,000    0,000     0,000     1,000

      MATRIZ **D**
     --------------

FILA  1
   0,000    0,000

FILA  2
   0,000    0,000

------------------------------------------------------------------------------------------

****** PRESENTACION DE RESULTADOS DE LA FORMA CONTROLABLE******

------------------------------------------------------------------------------------------

    ***** FORMA CONTROLABLE *****

------------------------------------------------------------------------------------------

      MATRIZ **A**
     --------------

FILA  1
   0,000    1,000     0,000     0,000
```

FILA 2

1.000	0.000	1.000	-.000

FILA 3

-2.000	-5.000	-4.000	-1.000

FILA 4

0.000	0.000	0.000	-2.000

MATRIZ **B**

FILA 1

0.000	0.000

FILA 2

0.000	0.000

FILA 3

1.000	1.000

FILA 4

0.000	1.000

MATRIZ **C**

FILA 1

2.000	1.000	0.000	0.000

FILA 2

1.000	1.000	0.000	1.000

MATRIZ **D**

FILA 1

0.000	0.000

FILA 2

0.000	0.001

*** INDICES DE CONTROLABILIDAD ***

---

1 .- 3

2 .- 1

*** EL INDICE DE CONTROLABILIDAD DEL SISTEMA ES: 3 ***

*** PRESENTACION DE RESULTADOS DE LA FORMA OBSERVABLE ***

***** FORMA OBSERVABLE *****

MATRIZ **A**

FILA 1

0.000	-.000	-2.000	-.000

FILA 2

1.000	-.000	-5.000	-.000

FILA 3

0.000	1.000	-4.000	-.000

FILA 4

-.000	0.000	-1.000	-2.000

MATRIZ **B**

FILA 1

2.000	1.000

FILA 2

1.000	1.000

FILA 3

0.000	0.000

FILA 4

-.000	1.000

MATRIZ **C**

FILA 1

0.000	-.000	1.000	0.000

FILA 2

0.000	-.000	1.000	1.000

MATRIZ **D**

FILA 1
0.000 0.000

FILA 2
0.000 0.001

*** INDICES DE OBSERVABILIDAD ***

1 .- 3

2 .- 1

*** EL INDICE DE OBSERVABILIDAD DEL SISTEMA ES : 3 ***

*** RECONSTRUCCION DEL PROBLEMA ---EJE4--- ***

NUMERO DE FILAS DE G(s)= 2

NUMERO DE COLUMNAS DE G(s)= 2

*** MATRIZ G(s) ***

FILA 1 ORDEN 4

DENOMINADOR COMUN :

GRADO 0 = 4

GRADO 1 = 12

GRADO 2 = 13

GRADO 3 = 6

GRADO 4 = 1

```
*** NUMERADORES ***
===================

COLUMNA 1   *** N( 1 , 1 ) ***
------------------------------

GRADO  0          =  4

GRADO  1          =  4

GRADO  2          =  1

GRADO  3          =  0

COLUMNA  2   *** N( 1 , 2 ) ***
------------------------------

GRADO  0          =  2

GRADO  1          =  3

GRADO  2          =  1

GRADO  3          =  0

FILA   2  ORDEN    4
------------------

DENOMINADOR COMUN :

GRADO  0          =  4

GRADO  1          =  12

GRADO  2          =  13

GRADO  3          =  6

GRADO  4          = 1

*** NUMERADORES ***
===================

COLUMNA  1   *** N( 2 , 1 ) ***
------------------------------

GRADO  0          =  2

GRADO  1          =  3

GRADO  2          =  1

GRADO  3          =  0
```

COLUMNA 2 *** N(2 , 2) ***

GRADO 0	=	3
GRADO 1	=	7
GRADO 2	=	5
GRADO 3	=	1

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL FECHA: 17 DE JULIO DE 1985

FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA

DEPARTAMENTO DE ELECTRONICA Y CONTROL

TESIS DE GRADO DE VICTOR G. PROANO R.-- 1985

==

*** DATOS DEL PROBLEMA ***

NOMBRE : EJES NUMERO DE FILAS DE G(s)= 3

NUMERO DE COLUMNAS DE G(s)= 4

*** MATRIZ G(s) ***

FILA 1 ORDEN 4

DENOMINADOR COMUN :

GRADO 0 = 24

GRADO 1 = 50

GRADO 2 = 35

GRADO 3 = 10

GRADO 4 = 1

*** NUMERADORES ***

COLUMNA 1 *** N(1 , 1) ***

GRADO 0 = 135

GRADO 1 = 117

GRADO 2 = 33

GRADO 3 = 3

COLUMNA 2 *** N(1 , 2) ***

GRADO 0 = 18

GRADO 1 = 42

GRADO 2 = 30

GRADO 3 = 6

COLUMNA 3 *** N(1 , 3) ***

GRADO 0 = 14

GRADO 1 = 25

GRADO 2 = 13

GRADO 3 = 2

COLUMNA 4 *** N(1 , 4) ***

GRADO 0 = 20

GRADO 1 = 33

GRADO 2 = 15

GRADO 3 = 2

FILA 2 ORDEN 4

DENOMINADOR COMUN :

GRADO 0 = 30

GRADO 1 = 61

GRADO 2 = 41

GRADO 3 = 11

GRADO 4 = 1

*** NUMERADORES ***

COLUMNA 1 *** N(2 , 1) ***

GRADO 0 = 4

GRADO 1 = 6

GRADO 2 = 2

GRADO 3 = 0

COLUMNA 2 *** N(2 , 2) ***

GRADO 0 = 10

GRADO 1 = 17

GRADO 2 = 8

GRADO 3 = 1

COLUMNA 3 *** N(2 , 3) ***

GRADO 0 = 50

GRADO 1 = 20

GRADO 2 = 2

GRADO 3 = 0

COLUMNA 4 *** N(2 , 4) ***

GRADO 0 = 32

GRADO 1 = 32

GRADO 2 = 8

GRADO 3 = 0

FILA 3 ORDEN 3

DENOMINADOR COMUN :

GRADO 0 = 15

GRADO 1 = 23

GRADO 2 = 9

GRADO 3 = 1

*** NUMERADORES ***

COLUMNA 1 *** N(3 , 1) ***

GRADO 0 = 36

GRADO 1 = 14

GRADO 2 = 2

COLUMNA 2 *** N(3 , 2) ***

GRADO 0 = 0

GRADO 1 = -10

GRADO 2 = -2

COLUMNA 3 *** N(3 , 3) ***

GRADO 0 = 5

GRADO 1 = 6

GRADO 2 = 1

COLUMNA 4 *** N(3 , 4) ***

GRADO 0 = 68

GRADO 1 = 54

GRADO 2 = 10

*** PRESENTACION DE RESULTADOS DE LA REALIZACION MINIMA ***

MATRIZ **A**

FILA 1

-1.672	-.187	-.005	0.250	-.243	0.000	0.000	-.000	0.000

FILA 2

1.415	-3.855	-.015	0.326	-.441	-3.777	0.000	0.000	0.000

FILA 3

-9.000	-55.321	-1.473	-38.939	-16.212	-311.469	-13.397	0.000	0.000

FILA 4

1.000	0.000	0.000	-5.500	-13.250	-33.500	2.063	-40.000	0.000

FILA 5

0.000	0.000	0.000	1.000	-.500	5.000	-1.875	16.000	-5.600

FILA 6

1.000	0.000	0.000	0.000	1.000	0.000	-.375	4.000	-.400

FILA 7

0,000	0,000	0,000	0,000	0.000	0,000	3,000	-32,000	19,200

FILA 8

1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	1,000	-8,400	3,240

FILA 9

0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	1,000	-3,600

MATRIZ **B**

FILA 1	0,000	0,000	0,000	0,000
FILA 2	1,000	0,000	0,000	0.000
FILA 3	0,000	0,000	0,000	0,000
FILA 4	0.000	0,000	0,000	0,000
FILA 5	0,000	0,000	0,000	0,000
FILA 6	-2,000	0,000	0,000	0,000
FILA 7	32,000	16,000	0,000	0,000
FILA 8	3,200	0,800	0,600	0,000
FILA 9	2,000	-2,000	1,000	10,000

MATRIZ **C**

FILA 1

0,000	1,000	0,046	1,003	2,018	7,500	0,250	3,000	0,200

FILA 2

0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	1,000	0,063	0,000	0,000

FILA 3

0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	1,000

MATRIZ **D**

FILA 1	0,000	0,000	0,000	0,000
FILA 2	1,000	0,000	0,000	0,000
FILA 3	0,000	0.000	0,000	0,000

*** DATOS DEL PROBLEMA ***

NOMBRE : EJE6

NUMERO DE FILAS DE G(s)= 2

NUMERO DE COLUMNAS DE G(s)= 2

*** MATRIZ G(s) ***

FILA 1 ORDEN 3

DENOMINADOR COMUN :

GRADO 0 = 52

GRADO 1 = -25

GRADO 2 = -1

GRADO 3 = 1

*** NUMERADORES ***

COLUMNA 1 *** N(1 , 1) ***

GRADO 0 = 24

GRADO 1 = -2

GRADO 2 = -1

COLUMNA 2 *** N(1 , 2) ***

GRADO 0 = -96

GRADO 1 = 12

GRADO 2 = 3

DENOMINADOR COMUN :

GRADO 0 = 52

GRADO 1 = -25

GRADO 2 = -1

GRADO 3 = 1

*** NUMERADORES ***

COLUMNA 1 *** N(2 , 1) ***

GRADO 0 = -71

GRADO 1 = 20

GRADO 2 = 6

COLUMNA 2 *** N(2 , 2) ***

GRADO 0 = -54

GRADO 1 = -3

GRADO 2 = 3

*** PRESENTACION DE RESULTADOS DE LA REALIZACION MINIMA ***

MATRIZ **A**

FILA 1
-1.423 14.552 -61.962

FILA 2
1.000 2.423 7.000

FILA 3
0.000 1.000 0.000

MATRIZ **B**

FILA 1
-.000 0.000

FILA 2
26.000 0.001

FILA 3
6.000 3.000

MATRIZ **C**

FILA 1
-.111 -.269 1.000

FILA 2
0.000 0.000 1.000

MATRIZ **D**

FILA 1
0.000 0.000

FILA 2
0.000 0.000

****** PRESENTACION DE RESULTADOS DE LA FORMA CONTROLABLE******

***** FORMA CONTROLABLE *****

MATRIZ **A**

FILA 1
0.000 1.000 0.000

FILA 2
-186.529 -14.053 -310.488

FILA 3
9.211 -.000 15.053

MATRIZ **B**

FILA 1
-,000 0,000

FILA 2
1,000 -28,263

FILA 3
0,000 1,001

MATRIZ **C**

FILA 1
-17,053 -1,000 -25,263

FILA 2
110.316 6,000 172,579

MATRIZ **D**

FILA 1
0,000 0,000

FILA 2
0,000 0,001

*** INDICES DE CONTROLARILIDAD ***

1 .- 2

2 .- 1

*** EL INDICE DE CONTROLABILIDAD DEL SISTEMA ES: 2 ***

*** PRESENTACION DE RESULTADOS DE LA FORMA OBSERVABLE ***

K**** FORMA OBSERVABLE *****

MATRIZ **A**

FILA 1
0.000 13.000 -.000

FILA 2
1.000 -3.000 -.000

FILA 3
0.000 -3.000 4.000

MATRIZ **B**

FILA 1
-6.000 24.000

FILA 2
-1.000 3.000

FILA 3
5.000 6.001

MATRIZ **C**

FILA 1
0.000 1.000 -.000

FILA 2
0.000 -1.000 1.000

MATRIZ **D**

FILA 1
0.000 0.000

FILA 2
0.000 0.000

*** INDICES DE OBSERVABILIDAD ***

---

1 .- 2

2 .- 1

*** EL INDICE DE OBSERVABILIDAD DEL SISTEMA ES : 2 ***

*** DATOS DEL PROBLEMA ***

NOMBRE : EJE7

NUMERO DE FILAS DE G(s)= 2

NUMERO DE COLUMNAS DE G(s)= 2

*** MATRIZ G(s) ***

FILA 1 ORDEN 4

DENOMINADOR COMUN :

GRADO 0 = 3

GRADO 1 = 11

GRADO 2 = 12

GRADO 3 = 6

GRADO 4 = 1

*** NUMERADORES ***

COLUMNA 1 *** N(1 , 1) ***

GRADO 0 = 3

GRADO 1 = 7

GRADO 2 = 5

GRADO 3 = 1

COLUMNA 2 *** N(1 , 2) ***

GRADO 0 = 2

GRADO 2 = 6

GRADO 3 = 2

FILA 2 ORDEN 4

DENOMINADOR COMUN :

GRADO 0 = 3

GRADO 1 = 10

GRADO 2 = 12

GRADO 3 = 6

GRADO 4 = 1

*** NUMERADORES ***
===================

COLUMNA 1 *** N(2 , 1) ***

GRADO 0 = 3

GRADO 1 = 7

GRADO 2 = 5

GRADO 3 = 1

COLUMNA 2 *** N(2 , 2) ***

GRADO 0 = 3

GRADO 1 = 7

GRADO 2 = 5

GRADO 3 = 1

*** PRESENTACION DE RESULTADOS DE LA REALIZACION MINIMA ***

MATRIZ **A**

FILA 1
-7.000 16.000 -16.000

FILA 2
-1.500 3.000 -4.000

FILA 3
1.000 0.000 -1.000

MATRIZ **B**

FILA 1
0.000 0.000

FILA 2
1.000 0.001

FILA 3
1.000 1.000

MATRIZ **C**

FILA 1
0.500 -1.000 2.000

FILA 2
0.000 0.000 1.001

MATRIZ **D**

FILA 1
0.000 0.000

FILA 2
1.000 0.001

****** PRESENTACION DE RESULTADOS DE LA FORMA CONTROLABLE******

***** FORMA CONTROLABLE *****

MATRIZ **A**

FILA 1
-1.000 0.000 0.000

FILA 2
0.000 0.000 1.000

FILA 3
0.000 -3.000 -4.000

MATRIZ **B**

FILA 1
1.000 0.000

FILA 2
0.000 0.000

FILA 3
0.000 1.000

MATRIZ **C**

FILA 1
1.000 2.000 2.000

FILA 2
1.000 3.000 1.000

MATRIZ **D**

FILA 1
0.000 0.000

FILA 2
0.000 0.000

*** INDICES DE CONTROLABILIDAD ***

1 .- 1

2 .- 2

*** EL INDICE DE CONTROLABILIDAD DEL SISTEMA ES: 2 ***

*** PRESENTACION DE RESULTADOS DE LA FORMA OBSERVABLE ***

***** FORMA OBSERVABLE *****

MATRIZ **A**

FILA 1
0.000 -3.000 0.000

FILA 2
1.000 -4.000 0.000

FILA 3
-.000 0.000 -1.000

MATRIZ **B**

FILA 1
3.000 2.000

FILA 2
1.000 2.001

FILA 3
1.000 1.001

MATRIZ **C**

FILA 1
-.000 1.000 0.000

FILA 2
  0.000   0.000   1.000

MATRIZ **D**

FILA 1
  0.000   0.000

FILA 2
  0.000   0.000

*** INDICES DE OBSERVABILIDAD ***

---

1 .-   2

2 .-   1

*** EL INDICE DE OBSERVABILIDAD DEL SISTEMA ES : 2 ***

FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA

DEPARTAMENTO DE ELECTRONICA Y CONTROL

TESIS DE GRADO DE VICTOR G. PROANO R.-- 1985

===

*** DATOS DEL PROBLEMA ***

NOMBRE : EJE8

\# DE ENTRADAS = 2

\# DE SALIDAS = 2

ORDEN DEL SISTEMA= 4

MATRIZ **A**

FILA 1
0.000 0.000 1.000 0.000

FILA 2
0.000 0.000 0.000 1.000

FILA 3
-15.000 5.000 0.000 0.000

FILA 4
5.000 -15.000 0.000 0.000

MATRIZ **B**

FILA 1
0.000 0.000

FILA 2
0.000 0.000

FILA 3
1.000 0.000

FILA 4
0.000 1.000

MATRIZ **C**

FILA 1
1.000 0.000 0.000 0.000

FILA 2
0.000 1.000 0.000 0.000

MATRIZ **D**

FILA 1

0.000	0.000

FILA 2

0.000	0.000

****** PRESENTACION DE RESULTADOS DE LA FORMA CONTROLABLE******

***** FORMA CONTROLABLE *****

MATRIZ **A**

FILA 1

0.000	1.000	0.000	0.000

FILA 2

-15.000	0.000	5.000	0.000

FILA 3

0.000	0.000	0.000	1.000

FILA 4

5.000	0.000	-15.000	0.000

MATRIZ **B**

FILA 1

0.000	0.000

FILA 2

1.000	0.001

FILA 3

1.000	0.001

FILA 4

0.000	1.000

MATRIZ **C**

FILA 1

1.000	0.000	0.000	0.000

FILA 2

1.000	0.000	1.000	0.000

MATRIZ **D**

FILA 1

0.000	0.000

FILA 2

0.000	0.000

*** INDICES DE CONTROLABILIDAD ***

---

1 .- 2

2 .- 2

*** EL INDICE DE CONTROLABILIDAD DEL SISTEMA ES: 2 ***

*** PRESENTACION DE RESULTADOS DE LA FORMA OBSERVABLE ***

***** FORMA OBSERVABLE *****

MATRIZ **A**

```
FILA 1
   0.000   -15.000     0.000     5.000

FILA 2
   1.000     0.000     0.000     0.000

FILA 3
   0.000     5.000     0.000   -15.000

FILA 4
   0.000     0.000     1.000     0.000
```

MATRIZ **B**

```
FILA 1
   1.000     0.000

FILA 2
   0.000     0.000

FILA 3
   0.000     1.000

FILA 4
   0.000     0.000
```

MATRIZ **C**

```
FILA 1
   0.000     1.000     0.000     0.000

FILA 2
   0.000     0.000     0.000     1.000
```

MATRIZ **D**

FILA 1
0.000 0.000

FILA 2
0.000 0.000

*** INDICES DE OBSERVABILIDAD ***

1 .- 2

2 .- 2

*** EL INDICE DE OBSERVABILIDAD DEL SISTEMA ES : 2 ***

*** RECONSTRUCCION DEL PROBLEMA ---EJE8--- ***

NUMERO DE FILAS DE G(s)= 2

NUMERO DE COLUMNAS DE G(s)= 2

*** MATRIZ G(s) ***

FILA 1 ORDEN 4

DENOMINADOR COMUN :

GRADO 0 = 200

GRADO 1 = 0

GRADO 2 = 30

GRADO 3 = 0

GRADO 4 = 1

*** NUMERADORES ***

COLUMNA 1 *** N(1 , 1) ***

GRADO 0 = 15

GRADO 1 = 0

GRADO 2 = 1

GRADO 3 = 0

COLUMNA 2 *** N(1 , 2) ***

GRADO 0 = 5

GRADO 1 = 0

GRADO 2 = 0

GRADO 3 = 1

[illegible]

DENOMINADOR COMUN :

GRADO 0 = 200

GRADO 1 = 0

GRADO 2 = 30

GRADO 3 = 0

GRADO 4 = 1

*** NUMERADORES ***

COLUMNA 1 *** N(2 , 1) ***

GRADO 0 = 5

GRADO 1 = 0

GRADO 2 = 0

GRADO 3 = 0

COLUMNA 2 *** N(2 , 2) ***

GRADO 0 = 15

GRADO 1 = 0

GRADO 2 = 1

GRADO 3 = 0

4.2 CONCLUSIONES

- Dado un sistema físico real se puede modelarlo por un juego de ecuaciones diferenciales y algebraicas que luego de ser linealizadas cerca de cierto punto de operación pueden ser descritas mediante tres tipos principales de representación que son muy usados en el estudio de sistemas de control multivariable: descripción en el espacio de estado, descripción mediante matriz función de transferencia, representación mediante la matriz del sistema.

- Si se tiene la descripción de un sistema en el espacio de estado, existen 2 propiedades que son de fundamental importancia en el estudio de este sistema y que son la controlabilidad y observabilidad y que pueden ser analizadas en forma fácil mediante el cálculo del rango de las matrices de controlabilidad y observabilidad.

- Si el sistema es completamente controlable (observable) existe un procedimiento sistemático para calcular una matriz de transformación T con la cual se puede obtener la forma canónica controlable (observable) que es muy usada en ciertas técnicas de análisis y diseño de controladores (observadores).

- Dado un sistema descrito por su función de transferencia $\underline{G}(s)$ existen muchas descripciones en el espacio de estado que reconstruyen esa matriz, pero existe una única descripción llamada Realización Mínima que a más de reconstruir $\underline{G}(s)$ tiene el mínimo orden y es completamente controlable y observable.

- Mediante la obtención de la Realización Mínima se obtiene una descripción ideal para la simulación análoga o digital del sistema pues posee el mínimo número de integradores o ecuaciones diferenciales.

- Dado un sistema descrito en el espacio de estado, la reconstrucción consiste en la obtención de la matriz función de transferencia a partir de la fórmula.

$$\underline{G}(s) = \underline{C}\ (s\underline{I} - \underline{A})^{-1}\ \underline{B} + \underline{D}$$

- El problema principal que se encontró en el equipo de computación es el tiempo de acceso de los programas, que constituye en todos los ejemplos realizados la mayor parte del tiempo total necesario para obtener los resultados.

- El tiempo de ejecución de los programas (determinado después del ingreso de datos y que se haya cargado el programa en mención) es pequeño y en el peor de los casos es de 1 minuto.

- Con la memoria disponible de este computador (56 Kbytes) es posible trabajar con matrices en el espacio de estado cuyas dimensiones sean hasta 10x10 y con funciones de transferencia de dimensiones hasta 4x4 con denominadores de hasta orden 4 como máximo (o alguna matriz que ocupe el mismo espacio de memoria). En computadores grandes, se podrá trabajar con matrices mucho más extensas considerando únicamente la cantidad de memoria disponible.

- En esta tesis se ha realizado un análisis de las relaciones entre las principales formas de representación de un sistema multivariable y se han elaborado programas en los cuales se puede pasar de una forma de descripción a otra, y también obtener las formas canónicas del sistema.

- El campo de los sistemas multivariables es amplio y los métodos de análisis son muchos. El presente estudio es una contribución y una herramienta más para el desarrollo de aquellos métodos de análisis.

A P E N D I C E S

Apéndice A: MANUAL DE USO DE LOS PROGRAMAS

Asumiendo que el computador HP-9845B se encuentre apagado, las siguientes instrucciones deben seguirse para emplear los programas realizados en esta tesis.

Encender el computador y cuando el sistema responda con "9845B READY" introducir el cassete.

Enseguida puede llamarse a la memoria el programa maestro con la instrucción:

GET "VGPR" y presionar la tecla EXECUTE

Cuando el computador está ingresando el programa, se enciende una señal en el extremo inferior derecho de la pantalla, que cuando ha terminado de ingresarse el programa desaparece, entonces el computador aceptará la tecla:

RUN

Luego, en pantalla aparecerá el índice de programas.

El ingreso de los programas se realiza mediante teclas ubicadas en la parte superior derecha y que están numeradas como K_0, $K_1, \ldots, K_{15}$.

Al inicio deberá aplástarse la tecla 2 (K2) para realizar el ingreso de datos que permite introducir las matrices de la representación en el espacio de estado, ó de la matriz función de transferencia, ya sea desde el teclado ó por medio de la lectura de un archivo que contenga esta información. Los archivos pueden ser creados con los datos ingresados o también como resultado de alguno de los programas desarrollados.

Debido a que la capacidad de memoria del computador es reducida, es necesario seguir una secuencia de pasos (que se indican en la pantalla) una vez terminado un programa y se desea ingresar nuevos datos. A pesar de esto, la utilización de los programas es ampliamente versátil pues se puede hacer muchas variaciones con un solo ingreso de datos.

Asi por ejemplo, si se ingresa $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$, $\underline{D}$ puede obtenerse forma controlable luego puede obtenerse forma observable y reconstrucción. Desde el programa de reconstrucción puede pasarse directamente al programa de Realización Mínima, y de los resultados del mismo, nuevamente pueden obtenerse forma controlable y observable (para comprobar que las formas canónicas son únicas).

Si se ingresa $\underline{G}(s)$ puede obtenerse Realización Mínima y luego forma controlable y observable. Para comprobar resultados puede utilizarse Reconstrucción.

Si en algún momento se presenta algún problema, entonces se debe hacer lo siguiente:

- Teclear SCRATCH y presionar EXECUTE
- Cargar el programa maestro con GET "VGPR" y presionar EXECUTE
- Aplastar RUN

APENDICE B: LISTADOS

```
1      REM REPRESENTACION DE SISTEMAS MULTIVARIABLES
3      GOTO 100
4      O1=0
5      REM
6      GOTO 100
7      REM
8      O1=1
9      REM
10     GOTO 1000
11     REM
12     O1=2
13     REM
14     GOTO 1000
15     REM
16     O1=3
17     REM
18     GOTO 1000
20     O1=4
21     GOTO 1000
24     O1=5
25     GOTO 1000
60     REM *** DIMENSIONAMIENTO DE LAS MATRICES UTILIZADAS EN LOS PROGRAMAS ***
61     OPTION BASE 1
70     DIM N1(15,15),A2(11,11),A3(11,11)
71     DIM L2(10),L4(10)
72     DIM C1(10,100),A1(11,11),C2(11,100),L1(11),C3(12,11),C4(11,11)
73     DIM V(1,10)
74     DIM T(11,11),T1(11,11),B1(10,10)
75     DIM V1(1,10),V2(11),V3(11)
76     DIM R(10),Y(20),G1(15,15)
77     DIM A(11,11),B(10,11),C(10,11),D(10,10),R1(11),I1(11),X$[100],F$[50]
100    REM PROGRAMA:    TESIS/VPROANTO
110    REM
120    DIM Y$[100]
220    REM INDICE
221    ON KEY #1 GOTO 4
222    ON KEY #2 GOTO 8
223    ON KEY #3 GOTO 12
224    ON KEY #4 GOTO 16
225    ON KEY #5 GOTO 20
226    ON KEY #6 GOTO 24
230    PRINT PAGE;" REPRESENTACION DE SISTEMAS MULTIVARIABLES"
240    PRINT LIN(4);"              TECLA 1(K1).- INDICE DE PROGRAMAS"
250    PRINT LIN(1);"              TECLA 2(K2).- INGRESO, VERIFICACION Y CORRECCION DE DATOS"
260    PRINT LIN(1);"              TECLA 3(K3).- FORMA CONTROLABLE"
270    PRINT LIN(1);"              TECLA 4(K4).- FORMA OBSERVABLE"
280    PRINT LIN(1);"              TECLA 5(K5).- REALIZACION MINIMA"
281    PRINT LIN(1);"              TECLA 6(K6).- RECONSTRUCCION"
290    PRINT LIN(3);"      ESCOJA TECLA "
291    GOTO 291
293    END
600 IF U1=2 THEN 630
610  PRINT PAGE;LIN(6);" ****** DEBE INGRESAR LOS DATOS O LEERLOS DE UN ARCHIVO ******"
612  PRINT LIN(2);"                ( APLASTE CONT PARA CONTINUAR )"
614  PAUSE
620  GOTO 121
```

```
630  IF O3=1 THEN 909
640  PRINT PAGE;LIN(5);TAB(10);"***** PARA OBTENCION DE LA FORMA CONTROLABLE U OBSERVABLE ******"
642  PRINT LIN(3);TAB(10);"****** O RECONSTRUCCION DEBE INGRESAR LAS MATRICES A,B,C,D ******";LIN(4);TAB(15);"( A
CONT PARA CONTINUAR )"
643  PAUSE
645  GOTO 120
650  IF U1=2 THEN 680
660  GOTO 610
680  IF O3=2 THEN 909
690  PRINT LIN(3);"*** PARA REALIZACION MINIMA DEBE INGRESAR G(S) ***"
692  PRINT LIN(4);TAB(10);" ( APLASTE CONT PARA CONTINUAR )"
693  PAUSE
694  GOTO 120
800   REM *** LINEA 800- SELECCION DE PROGRAMAS ***
810   PRINT PAGE
820   DATA "ENTRA","CONTRO","OBSERV","REALIZ","RECONS"
830   REM
840   REM
850   REM
860   REM
870   RESTORE 820
880   FOR J=1 TO O1
890   READ X$
900   NEXT J
901   ON O1 GOTO 909,600,600,650,600
902   GOTO 901
909   PRINT LIN(8);" SE ESTA CARGANDO EL PROGRAMA:  "&X$
910   LINK X$,1000
920   REM
930   REM
940   GOTO 1000
1000  REM *** LINEA 1000 --- CARGA DE PROGRAMA SELECCIONADO ***
```

```
1000  REM PROGRAMA REPRES/ENTRADA
1010  02=1
1020  IF 01()02 THEN 800
1030  REM INGRESO DE LAS MATRICES DE LAS ECUACIONES DE ESTADO O MATRIZ
1040  REM FUNCION DE TRANSFERENCIA
1050  REM DEFINICION DE VARIABLES
1060  REM    A=MATRIZ N*N
1070  REM    B=MATRIZ N*M
1080  REM    C=MATRIZ K*N
1090  REM    D=MATRIZ K*M
1100  REM    G(s)= MATRIZ FUNCION DE TRANSFERENCIA
1110  REM
1120  REM
1130  Y$=" **** INGRESO,VERIFICACION , CORRECCION DE DATOS ****"
1140  PRINT PAGE
1150  IMAGE @3X,100A
1160  PRINT USING 1150;Y$
1170  PRINT RPT$("-",80)
1180  PRINT LIN(1);"            1.- INGRESO DE COEFICIENTES (MATRICES A,B,C,D)"
1190  PRINT LIN(1);"            2.- INGRESO DE COEFICIENTES (MATRIZ G(s))"
1200  PRINT LIN(1);"            3.- LECTURA DE ARCHIVO"
1210  PRINT LIN(1);"            4.- LISTADO DE DATOS INGRESADOS"
1220  PRINT LIN(1);"            5.- CORRECCION"
1230  PRINT LIN(1);"            6.- VOLVER AL INDICE DE PROGRAMAS"
1240  PRINT LIN(2);"                     ( ESCOJA OPCION)"
1250  INPUT K1
1260  IF (K1(1) OR (K1)6) THEN GOTO 1340
1270  ON K1 GOTO 1290,2040,3300,5430,3850,5400
1280  GOTO 1240
1290  PRINT PAGE;" NOMBRE DEL PROBLEMA:";
1300  INPUT T$
1310  PRINT T$
1320  IF LEN(T$))1 THEN 1340
1330  T$=""
1340  PRINT LIN(1);" INGRESE LAS SIGUIENTES CARACTERISTICAS DEL SISTEMA: "
1350  PRINT LIN(1);" ORDEN N= ";
1360  INPUT N
1370  PRINT N
1380  PRINT LIN(1);"NUMERO DE ENTRADAS M= ";
1390  INPUT M
1400  PRINT M
1410  PRINT LIN(1);"NUMERO DE SALIDAS  K= ";
1420  INPUT K
1430  PRINT K
1440  REM
1450  REM INGRESO DE A,B,C,D EN ESTE ORDEN Y POR FILAS
1460  REDIM A(N,N),B(N,M),C(K,N),D(K,M)
1470  RESTORE 1500
1480  FOR L=1 TO 4
1490  READ A$
1500  DATA "A","B","C","D"
1510  PRINT PAGE;"INGRESE LOS COEFICIENTES DE LA MATRIZ "&CHR$(34)&A$&CHR$(34)&"POR FILAS"
1520  ON L GOTO 1530,1630,1730,1830
1530  FOR I=1 TO N
1540  PRINT LIN(1);"FILA: ";I
1550  FOR J=1 TO N
1560  PRINT LIN(1);"A(";I;",";J;")=";
1570  INPUT A(I,J)
```

```
1580  PRINT A(I,J)
1590  NEXT J
1600  NEXT I
1610  PRINT
1620  GOTO 1910
1630  FOR I=1 TO N
1640  PRINT LIN(1);"FILA: ";I
1650  FOR J=1 TO M
1660  PRINT LIN(1);"B(";I;",";J;")=";
1670  INPUT B(I,J)
1680  PRINT B(I,J)
1690  NEXT J
1700  NEXT I
1710  PRINT
1720  GOTO 1910
1730  FOR I=1 TO K
1740  PRINT LIN(1);"FILA: ";I
1750  FOR J=1 TO N
1760  PRINT LIN(1);"C(";I;",";J;")=";
1770  INPUT C(I,J)
1780  PRINT C(I,J)
1790  NEXT J
1800  NEXT I
1810  PRINT
1820  GOTO 1910
1830  FOR I=1 TO K
1840  PRINT LIN(1);"FILA: ";I
1850  FOR J=1 TO M
1860  PRINT LIN(1);"D(";I;",";J;")=";
1870  INPUT D(I,J)
1880  PRINT D(I,J)
1890  NEXT J
1900  NEXT I
1910  NEXT L
1920  U1=2
1930  O3=1
1940  Y$="DATOS ESTAN INGRESADOS"
1950  Y$=Y$&"***"&T$&"***, MATRICES A,B,C,D"
1960  PRINT LIN(3);"    *** FIN DE DATOS ***"
1970  PRINT LIN(3);" DESEA ALMACENAR LOS DATOS EN UN ARCHIVO (SI/NO)?"
1980  INPUT D$
1990  REM
2000  IF D$<>"SI" THEN 2020
2010  GOSUB 3010
2020  GOTO 1150
2030  END
2040  REM *** INGRESO DE COEFICIENTES DE LA MATRIZ G(s) FUNCION DE TRANSFERENCIA***
2050  REM
2060  PRINT PAGE;" NOMBRE DEL PROBLEMA:  ";
2070  INPUT T$
2080  PRINT T$
2090  IF LEN(T$)<>1 THEN 2110
2100  T$=""
2110  PRINT " ";RPT$("-",LEN(T$)+21)
2120  PRINT LIN(1);" INGRESE LAS SIGUIENTES CARACTERISTICAS DE LA FUNCION DE TRANSFERENCIA"
2130  REM
2140  PRINT LIN(2);" NUMERO DE FILAS DE G(s)   = ";
```

```
2150 INPUT K
2160 PRINT K
2170 PRINT LIN(1);" NUMERO DE COLUMNAS DE G(s)= ";
2180 INPUT M
2190 PRINT M
2200 REM
2210 K1=K+1
2220 REM *** R(*) ALMACENA EL GRADO DEL DENOMINADOR DE CADA FILA ***
2230 REM *** Y(*) ALMACENA LA FILA DONDE EMPEZARA A ESCRIBIRSE EL DENOMINADOR
2240 REM DE CADA FILA ***
2250 REDIM Y(K1),R(K)
2260 MAT Y=ZER
2270 REM *** ALMACENAMIENTO DEL GRADO DEL POLINOMIO DENOMINADOR COMUN
2280 REM DE CADA FILA ***
2290 PRINT PAGE;LIN(3);"GRADO DEL POLINOMIO DENOMINADOR COMUN DE CADA FILA"
2300 Y(1)=1
2310 FOR I=1 TO K
2320 PRINT LIN(1);" FILA ";I;" = ";
2330 INPUT R(I)
2340 PRINT R(I)
2350 Y(I+1)=Y(I)+R(I)
2360 NEXT I
2370 REM *** INGRESO DE LOS COEFICIENTES DEL POLINOMIO DENOMINADOR
2380 REM DE CADA FILA ***
2390 K2=Y(K+1)-1
2400 K3=M+1
2410 REM
2420 REDIM G1(K2,K3)
2430 REM *** G1(*) MATRIZ QUE ALMACENA LOS COEFICIENTES DE LOS NUMERADORES
2440 REM Y DENOMINADOR COMUN DE CADA FILA ***
2450 REM *** CADA FILA I DE G(s) ORIGINAL SE TRANSFORMA EN R(I)
2460 REM FILAS EN LA MATRIZ G1(*). LA ULTIMA COLUMNA DE G1(*) ALMACENA
2470 REM LOS COEFICIENTES DEL  DENOMINADOR COMUN DE CADA FILA ***
2480 REM *** LAS M COLUMNAS DE LA MATRIZ G(s) ORIGINAL SE CORRESPONEN CON
2490 REM LAS PRIMERAS M COLUMNAS DE G1(*). LA ULTIMA COLUMNA DE G1(*) ALMACENA
2500 REM LOS COEFICIENTES DEL DENOMINADOR COMUN DE CADA FILA ***
2510 REM
2520 PRINT LIN(1)
2530 FOR I=1 TO K
2540 PRINT PAGE
2550 PRINT LIN(2);" DENOMINADOR COMUN DE LA FILA ***";I;"*** INGRESE COEFICIENTES :"
2560 PRINT " ";RPT$("-",60)
2570 K4=Y(I)
2580 K5=Y(I+1)-1
2590 FOR L=K4 TO K5
2600 K6=L-K4
2610 REM
2620 PRINT LIN(1);" GRADO ";K6;"      = ";
2630 INPUT G1(L,M+1)
2640 PRINT G1(L,M+1)
2650 NEXT L
2660 PRINT LIN(1);" GRADO ";R(I);"   =1"
2670 REM
2680 REM
2690 REM
2700 REM *** INGRESO DE LOS NUMERADORES DE CADA FILA ***
2710 PRINT PAGE;LIN(2);"                    *** NUMERADORES ***"
```

```
2720 PRINT RPT$("-",80)
2730 FOR J=1 TO M
2740 PRINT LIN(1);"NUMERADOR DE LA COLUMNA ";J;"*** N(";J;",";J;") ***"
2750 PRINT RPT$("-",80)
2760 FOR L=K4 TO K5
2770 K6=L-K4
2780 REM
2790 PRINT LIN(1);" GRADO ";K6;"        = ";
2800 INPUT G1(L,J)
2810 PRINT G1(L,J)
2820 REM
2830 REM REM
2840 REM
2850 REM
2860 NEXT L
2870 NEXT J
2880 NEXT I
2890 U1=2
2900 O3=2
2910 Y$=" DATOS ESTAN INGRESADOS. PROBLEMA: *** "&T$&" ***"
2920 Y$=Y$&". MATRIZ FUNCION DE TRANSFERENCIA G(s)."
2930 PRINT LIN(3);"          *** FIN DE DATOS *** "
2940 PRINT PAGE;LIN(3);" DESEA ALMACENAR LOS DATOS EN UN ARCHIVO?(SI/NO)"
2950 INPUT D$
2960 REM
2970 IF D$<>"SI" THEN 2990
2980 GOSUB 3010
2990 GOTO 1150
3000 END
3010 REM SUBRUTINA PARA ALMACENAMIENTO EN ARCHIVO
3020 PRINT PAGE;"INGRESE NOMBRE DEL ARCHIVO : ";
3030 INPUT N$
3040 PRINT N$
3050 ASSIGN #1 TO N$,X
3060 IF X=1 THEN 3120
3070 PRINT LIN(1);"YA EXISTE DICHO ARCHIVO. DESEA DESTRUIRLO? (SI O NO )"
3080 INPUT D$
3090 IF D$="SI" THEN 3110
3100 GOTO 3020
3110 PURGE N$
3120 PRINT PAGE;LIN(5);" *** ESTOY CREANDO EL ARCHIVO --- "&N$&" --- ***"
3130 CREATE N$,200,16
3140 ASSIGN #1 TO N$
3150 ON O3 GOTO 3160,3200
3160 PRINT #1;O3,N,M,K
3170 PRINT #1;A(*),B(*),C(*),D(*)
3180 PRINT #1;T$
3190 GOTO 3230
3200 PRINT #1;O3,K,M
3210 PRINT #1;R(*),Y(*),G1(*)
3220 PRINT #1;T$
3230 ASSIGN #1 TO *
3240 Y$="DATOS ESTAN ALMACENADOS EN ARCHIVO :"&N$
3250 ON O3 GOTO 3260,3280
3260 Y$=Y$&" ,MATRICES A,B,C,D"
3270 GOTO 3290
3280 Y$=Y$&" ,MATRIZ G(s)"
```

```
3290 RETURN
3300 REM **** SUBPROGRAMA DE LECTURA DE DATOS DE ARCHIVO ****
3310 PRINT PAGE;TAB(10);"EXISTEN LOS SIGUIENTES ARCHIVOS"
3320 PRINT LIN(2);
3330 CAT "EJE:T15",1
3340 PRINT LIN(5);"PARA REVISAR LOS ARCHIVOS QUE EXISTEN PUEDE UTILIZAR LAS TECLAS *** "&CHR$(224)&" ***"
3350 PRINT LIN(1);"Y *** "&CHR$(247)&" *** QUE DESPLAZAN LO PRESENTADO, HACIA ARRIBA Y ABAJO"
3360 PRINT LIN(2);"        APLASTE *** CONT *** PARA CONTINUAR"
3370 PAUSE
3380 PRINT PAGE;LIN(8);"         NOMBRE DEL ARCHIVO QUE DESEA LEER :  ";
3390 INPUT N$
3400 PRINT N$
3410 ASSIGN #1 TO N$,X
3420 IF X=1 THEN 3790
3430 ASSIGN #1 TO N$,X
3440 PRINT PAGE;LIN(10);"   **** SE ESTAN LEYENDO DATOS DEL ARCHIVO: "&N$;" ****"
3450 READ #1;O13
3460 O3=O13
3470 ON O3 GOTO 3480,3570
3480 READ #1;N1,M1,K1
3490 N=N1
3500 M=M1
3510 K=K1
3520 REDIM A(N,N),B(N,M),C(K,N),D(K,M)
3530 READ #1;A(*),B(*),C(*),D(*)
3540 READ #1;T1$
3550 T$=T1$
3560 GOTO 3710
3570 READ #1;K1,M1
3580 K=K1
3590 M=M1
3600 REM
3610 K1=K+1
3620 REDIM R(K),Y(K1)
3630 READ #1;R(*),Y(*)
3640 K2=Y(K+1)-1
3650 K3=M+1
3660 REM
3670 REDIM G1(K2,K3)
3680 READ #1;G1(*)
3690 READ #1;T1$
3700 T$=T1$
3710 ASSIGN * TO #1
3720 U1=2
3730 Y$="DATOS ESTAN LEIDOS DE ARCHIVO: ***"&N$&"***"
3740 ON O3 GOTO 3750,3770
3750 Y$=Y$&". MATRICES A,B,C,D."
3760 GOTO 3780
3770 Y$=Y$&". MATRIZ G(s)."
3780 GOTO 1150
3790 PRINT LIN(2);"           *** NO EXISTE DICHO ARCHIVO ***"
3800 PRINT LIN(2);"          DESEA LEER OTRO ARCHIVO? (SI/NO)"
3810 INPUT D$
3820 IF D$<>"SI" THEN 1150
3830 PRINT PAGE
3840 GOTO 3380
3850 REM *** SUBPROGRAMA DE CORRECCION"
```

```
3860  IF U=2 THEN 3880
3870  GOTO 5450
3880  REM *** INDICE DE CORRECCIONES ***
3890  PRINT PAGE;"                  *** INDICE DE CORRECCIONES ***"
3900  PRINT LIN(1);"                  1.- CORRECCION DEL NOMBRE DEL PROBLEMA"
3910  PRINT LIN(1);"                  2.- CORRECCION DE ELEMENTOS"
3920  PRINT LIN(1);"                  3.- NO SE DESEA MAS CORRECCIONES"
3930  PRINT LIN(2);"                  *** ESCOJA OPCION ***"
3940  INPUT L1
3950  IF (L1<1) OR (L1>3) THEN 3890
3960  ON L1 GOTO 3980,4070,4470
3970  GOTO 3930
3980  PRINT PAGE;"       NOMBRE ACTUAL ES:  ";
3990  PRINT T$
4000  PRINT LIN(1);"     INGRESE NOMBRE CORRECTO :  "
4010  INPUT T$
4020  PRINT T$
4030  IF T$<>"" THEN 4050
4040  T$=""
4050  REM
4060  GOTO 3880
4070  REM *** CORRECCION DE ELEMENTOS ***
4080  ON O3 GOTO 4090,4810
4090  REM *** CORRECCION DE MATRICES A,B,C,D ***
4100  PRINT PAGE;"       CORRECCION DE MATRICES A,B,C,D"
4110  PRINT LIN(2);"MATRIZ QUE DESEA CORREGIR(A,B,C,D); (FIN PARA TERMINAR)";
4120  INPUT A$
4130  IF A$="A" THEN 4190
4140  IF A$="B" THEN 4260
4150  IF A$="C" THEN 4330
4160  IF A$="D" THEN 4401
4170  IF A$="FIN" THEN 3890
4180  GOTO 4110
4190  REDIM A1(N,N)
4200  MAT A1=A
4210  N2=N
4220  N3=N
4230  GOSUB 4490
4240  A(I,J)=A1(I,J)
4250  GOTO 4090
4260  REDIM A1(N,M)
4270  MAT A1=B
4280  N2=N
4290  N3=M
4300  GOSUB 4490
4310  B(I,J)=A1(I,J)
4320  GOTO 4090
4330  REDIM A1(K,N)
4340  MAT A1=C
4350  N2=K
4360  N3=N
4370  GOSUB 4490
4380  C(I,J)=A1(I,J)
4390  GOTO 4090
4400  REDIM A1(K,M)
4410  MAT A1=D
4420  N2=K
```

```
4430  N3=N
4440  GOSUB 4490
4450  D(I,J)=A1(I,J)
4460  GOTO 4090
4470  REM *** VERIFICAR SI SE DESEA ARCHIVAR ***
4480  GOTO 2940
4490  REM *** SUBRUTINA PARA CORRECCION DE MATRICES A,B,C,D ***
4500  PRINT PAGE;TAB(20);"*** CORRECCION DE MATRIZ  ";A$;" ***"
4510  PRINT LIN(2);TAB(20);"EL ELEMENTO A CORREGIR ESTA EN LA FILA : ";
4520  INPUT I
4530  PRINT I
4540  PRINT LIN(1);TAB(20);"Y EN LA COLUMNA : ";
4550  INPUT J
4560  PRINT J
4570  IF (I<1) OR (J<1) THEN 4500
4580  IF (I>N2) OR (J>N3) THEN 4600
4590  GOTO 4640
4600  PRINT LIN(2);TAB(20);"LA MATRIZ   **";A$;"**  TIENE DIMENSIONES ";N2;"x";N3
4610  PRINT LIN(2);TAB(20);"( APLASTE ** CONT ** PARA CONTINUAR )"
4620  PAUSE
4630  GOTO 4500
4640  PRINT LIN(1);TAB(20);"EL VALOR ACTUAL ES : ";A1(I,J)
4650  PRINT LIN(1);TAB(20);"INGRESE EL VALOR CORRECTO:  ";
4660  INPUT X
4670  PRINT X
4680  IMAGE #, 5D.2D,2X
4690  PRINT LIN(1);TAB(20);A$;"(";I;",";J;")= ";A1(I,J);" --->";X
4700  A1(I,J)=X
4710  PRINT LIN(1);TAB(20);"*** IMPRESION DE LA NUEVA MATRIZ:  ";A$;" ***"
4720  FOR I1=1 TO N2
4730  PRINT LIN(2);"FILA    ";I1;LIN(1)
4740  FOR J1=1 TO N3
4750  PRINT USING 4680;A1(I1,J1)
4760  NEXT J1
4770  NEXT I1
4780  PRINT LIN(4);"                     ( APLASTE ** CONT ** PARA CONTINUAR )"
4790  PAUSE
4800  RETURN
4810  REM *** CORRECCION DE LA MATRIZ G(s) ***
4820  PRINT PAGE;"            *** CORRECCION DE G(s) ***"
4830  PRINT LIN(1);"               1.- CORRECCION DE NUMERADORES "
4840  PRINT LIN(1);"               2.- CORRECCION DE DENOMINADORES"
4850  PRINT LIN(1);"               3.- NO SE DESEA MAS CORRECCIONES "
4860  PRINT LIN(2);"               *** ESCOJA OPCION ***"
4870  INPUT L2
4880  ON L2 GOTO 4900,5140,5340
4890  GOTO 4860
4900  REM *** CORRECCION DE NUMERADORES ***
4910  PRINT LIN(1);"             EL NUMERADOR QUE SE DESEA CORREGIR ESTA EN "
4920  PRINT LIN(1);"             FILA : ";
4930  INPUT I
4940  PRINT I
4950  PRINT LIN(2);"             Y EN LA COLUMNA: ";
4960  INPUT J
4970  PRINT J
4980  PRINT PAGE;"             LOS COEFICIENTES ACTUALES SON; N(";I;",";J;") : "
4990  K4=Y(I)
```

```
5000  K5=Y(I+1)-1
5010  FOR L=K4 TO K5
5020  PRINT LIN(1);"                    GRADO    ";L-K4;" =  ";G1(L,J)
5030  NEXT L
5040  PRINT LIN(1);"                     EL GRADO DEL TERMINO CUYO COEFICIENTE SE DESEA CAMBIAR"
5050  PRINT "                             ES: ( 100 PARA TERMINAR )";
5060  INPUT L
5070  IF L=100 THEN 4810
5080  PRINT L
5090  PRINT LIN(1);"                     EL COEFICIENTE ACTUAL ES:  ";G1(L+K4,J)
5100  PRINT LIN(1);"                      INGRESE COEFICIENTE CORRECTO: ";
5110  INPUT G1(L+K4,J)
5120  PRINT G1(L+K4,J)
5130  GOTO 4980
5140  REM *** CORRECCION DE DENOMINADORES ***
5150  PRINT LIN(1);"                 EL DENOMINADOR QUE SE DESEA CORREGIR ESTA EN LA FILA: ";
5160  INPUT I
5170  PRINT I
5180  PRINT PAGE;"                 LOS COEFICIENTES ACTUALES SON; D(";J;");"
5190  K4=Y(I)
5200  K5=Y(I+1)-1
5210  FOR L=K4 TO K5
5220  PRINT LIN(1);"                  GRADO(";L-K4;") = ";G1(L,M+1)
5230  NEXT L
5240  PRINT LIN(1);"                   EL GRADO DEL TERMINO CUYO COEFICIENTE SE DESEA CAMBIAR "
5250  PRINT "                           ES: (100 PARA TERMINAR )"
5260  INPUT L
5270  IF L=100 THEN 4810
5280  PRINT L
5290  PRINT LIN(1);"                       EL COEFICIENTE ACTUAL ES:  ";G1(L+K4,M+1)
5300  PRINT LIN(1);"                        INGRESE COEFICIENTE CORRECTO:  ";
5310  INPUT G1(L+K4,M+1)
5320  PRINT G1(L+K4,M+1)
5330  GOTO 5180
5340  REM *** NO SE DESEA MAS CORRECCIONES ***
5350  Y$=Y$&"     "
5360  Y$=Y$&"DATOS HAN SIDO MODIFICADOS"
5370  REM *** FIN DE CORRECCIONES ***
5380  REM *** VERIFICAR SI SE DESEA ARCHIVAR ***
5390  GOTO 2940
5400  REM *** VOLVER AL INDICE DE PROGRAMAS ***
5410  IF U1=2 THEN 220
5420  GOTO 5450
5430  REM  **** SUBPROGRAMA PARA EL LISTADO DE DATOS ****
5440  IF U1=2 THEN 5490
5450  PRINT PAGE;LIN(5);"**** DEBE INGRESAR LOS DATOS O LEERLOS DE UN ARCHIVO **** "
5460  PRINT LIN(8);"          ( APLASTE **CONT** PARA CONTINUAR )"
5470  PAUSE
5480  GOTO 1160
5490  REM *** VERIFICAR SI SE DESEA IMPRESION EN PAPEL ***
5500  GOTO 6100
5510  PRINT PAGE;LIN(1);"ESCUELA POLITECNICA NACIONAL";TAB(81);"FECHA: ";
5520  INPUT "FECHA:",F$
5530  PRINT F$
5540  PRINT LIN(1);"FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA"
5550  PRINT LIN(1);"DEPARTAMENTO DE ELECTRONICA Y CONTROL"
5560  PRINT LIN(1);"TESIS DE GRADO DE VICTOR G. PROANO R.-- 1985"
```

```
5570  PRINT LIN(1);RPT$("=",W)
5580  ON O3 GOTO 5590,6240
5590  PRINT LIN(1);TAB(30);" *** DATOS DEL PROBLEMA *** "
5600  PRINT LIN(1);RPT$("-",W)
5610  PRINT LIN(1);"NOMBRE : ";T$;TAB(60);"# DE ENTRADAS =";M
5620  PRINT LIN(1);TAB(60);"# DE SALIDAS  =";K
5630  PRINT LIN(1);TAB(60);"ORDEN DEL SISTEMA=";N
5640  PRINT LIN(1);RPT$("-",W)
5650  PRINT LIN(1);"        MATRIZ **A** "
5660  PRINT "       ";RPT$("-",14);
5670  IMAGE #,4DZ.3D,X
5680  FOR I=1 TO N
5690  PRINT LIN(2);" FILA ";I
5700  FOR J=1 TO N
5710  PRINT USING 5670;A(I,J)
5720  NEXT J
5730  NEXT I
5740  INPUT "*** APLASTE ***CONT*** PARA CONTINUAR ***",C$
5750  PRINT LIN(2);"        MATRIZ **B** "
5760  PRINT "       ";RPT$("-",14)
5770  FOR I=1 TO N
5780  PRINT LIN(2);" FILA ";I
5790  FOR J=1 TO M
5800  PRINT USING 5670;B(I,J)
5810  NEXT J
5820  NEXT I
5830  INPUT "*** APLASTE ***CONT*** PARA CONTINUAR ***",C$
5840  PRINT LIN(2);"        MATRIZ **C** "
5850  PRINT "       ";RPT$("-",14)
5860  FOR I=1 TO K
5870  PRINT LIN(2);" FILA ";I
5880  FOR J=1 TO N
5890  PRINT USING 5670;C(I,J)
5900  NEXT J
5910  NEXT I
5920  INPUT "*** APLASTE ***CONT*** PARA CONTINUAR ***",C$
5930  PRINT LIN(2);"        MATRIZ **D** "
5940  PRINT "       ";RPT$("-",14)
5950  FOR I=1 TO K
5960  PRINT LIN(2);" FILA ";I
5970  FOR J=1 TO M
5980  PRINT USING 5670;D(I,J)
5990  NEXT J
6000  NEXT I
6010  INPUT "*** APLASTE ***CONT*** PARA CONTINUAR ***",C$
6020  PRINTER IS 16
6030  PRINT LIN(5);"           FIN DE PRESENTACION "
6040  IF D$="SI" THEN 6090
6050  PRINT LIN(5);"PARA REVISAR LOS DATOS PUEDE UTILIZAR LAS TECLAS *** "&CHR$(224)&" ***"
6060  PRINT LIN(1);"Y *** "&CHR$(247)&" *** QUE DESPLAZAN LO PRESENTADO, HACIA ARRIBA Y ABAJO"
6070  PRINT LIN(2);"        APLASTE *** CONT *** PARA CONTINUAR"
6080  PAUSE
6090  GOTO 1160
6100  PRINT PAGE;LIN(5);" *** DESEA IMPRESION EN PAPEL (SI/NO) ?***"
6110  INPUT D$
6120  IF D$<>"SI" THEN 6140
6130  GOTO 6160
```

```
6140  W=80
6150  GOTO 5510
6160  PRINT PAGE;LIN(5);"      *** ALISTE EL IMPRESOR ***"
6170  PRINT LIN(3);"       ( APLASTE ** CONT ** PARA CONTINUAR )"
6180  W=110
6190  PAUSE
6200  PRINT PAGE
6210  PRINTER IS 7,1,WIDTH(118)
6220  GOTO 5510
6230  PRINT LIN(1);RPT$("-",W)
6240  PRINT LIN(1);TAB(20);"*** DATOS DEL PROBLEMA ***"
6250  PRINT LIN(1);RPT$("-",W)
6260  PRINT LIN(1);"NOMBRE : "&T$;
6270  PRINT TAB(40);"NUMERO DE FILAS DE G(s)=    ";K
6280  PRINT LIN(1);TAB(40);"NUMERO DE COLUMNAS DE G(s)= ";M
6290  PRINT LIN(1);RPT$("-",W)
6300  PRINT LIN(2);TAB(20);"*** MATRIZ G(s) ***",LIN(1)
6310  FOR I=1 TO K
6320  PRINT LIN(1);TAB(10);"FILA  ";I;" ORDEN   ";R(I)
6330  PRINT TAB(10);RPT$("-",18)
6340  PRINT LIN(2);TAB(10);"DENOMINADOR COMUN :"
6350  K4=Y(I)
6360  K5=Y(I+1)-1
6370  FOR L=K4 TO K5
6380  K6=L-K4
6390  PRINT LIN(1);TAB(20);"GRADO ";K6;"          = ";DROUND(G1(L,M+1),4)
6400  NEXT L
6410  PRINT LIN(1);TAB(20);"GRADO ";R(I);"         = 1"
6420  PAUSE
6430  PRINT LIN(3);TAB(20);"*** NUMERADORES *** "
6440  PRINT TAB(20);RPT$("=",20)
6450  FOR J=1 TO M
6460  PRINT LIN(1);TAB(20);"COLUMNA ";J;"  *** N(";I;",";J;") ***"
6470  PRINT TAB(20);RPT$("-",30)
6480  FOR L=K4 TO K5
6490  K6=L-K4
6500  PRINT LIN(1);TAB(20);"GRADO ";K6;"          = ";DROUND(G1(L,J),4)
6510  NEXT L
6520  PAUSE
6530  NEXT J
6540  NEXT I
6550  PRINTER IS 16
6560  PRINT LIN(5);"             FIN DE PRESENTACION "
6570  IF D$="SI" THEN 6090
6580  PRINT LIN(5);"PARA REVISAR LOS DATOS PUEDE UTILIZAR LAS TECLAS *** "&CHR$(224)&" ***"
6590  PRINT LIN(1);"Y *** "&CHR$(247)&" *** QUE DESPLAZAN LO PRESENTADO, HACIA ARRIBA Y ABAJO"
6600  PRINT LIN(2);"     APLASTE *** CONT *** PARA CONTINUAR "
6610  PAUSE
6620  GOTO 1160
6630  END
```

```
1000 REM OBTENCION DE LA FORMA CONTROLABLE
1010 O2=2
1020 IF O1<>O2 THEN 800
1030 PRINT PAGE;LIN(5);"      *** ESTOY REALIZANDO LOS CALCULOS CORRESPONDIENTES A ***"
1040 PRINT LIN(2);"            *** LA OBTENCION DE LA FORMA CONTROLABLE ***"
1050 N1=N*M
1060 REDIM C1(N,N1),C2(N,M)
1070 REM EN C2 SE ALMACENA B LUEGO (A)B LUEGO (A)^2*B HASTA LLEGAR
1080 REDIM A1(N,N)
1090 REM A (A)^(N-1)*B
1100 L=-1
1110 MAT C2=B
1120 GOSUB 1300
1130 IF N=1 THEN 1270
1140 REM AQUI SE GENERA LA MATRIZ IDENTIDAD A1
1150 MAT A1=ZER
1160 FOR J=1 TO N
1170 A1(J,J)=1
1180 NEXT J
1190 REM EMPIEZA EL CALCULO DE (A)*B ; (A)^2*B ; (A)^(N-1)*B
1200 L=L+1
1210 MAT A2=A1*A
1220 MAT A1=A2
1230 MAT C2=A1*B
1240 GOSUB 1300
1250 IF L=N-2 THEN 1270
1260 GOTO 1200
1270 REM DELETE C2,A1,L,L1,L2
1280 REM EN C1 SE TIENE LA MATRIZ DE CONTROLABILIDAD
1290 GOTO 1410
1300 REM SUBRUTINA 1340.- SIRVE PARA GUARDAR LAS MATRICES QUE SE OBTIENEN
1310 REM EN C2 EN M COLUMNAS CONSECUTIVAS DE C1. ESTE PROCESO SE REALIZA CADA
1320 REM VEZ QUE C2 TIENE UN NUEVO VALOR
1330 L1=(L+1)*M+1
1340 L2=(L+2)*M
1350 FOR J=L1 TO L2
1360 FOR I=1 TO N
1370 C1(I,J)=C2(I,J-L1+1)
1380 NEXT I
1390 NEXT J
1400 RETURN
1410 REM DETERMINACION DE LAS N PRIMERAS COLUMNAS LINEALMENTE INDEPENDIENTES DE C1 Y OBTENCION DE LOS
1420 REM LOS INDICES DE CONTROLABILIDAD
1430 REM L1 GUARDA LOS INDICES DE CONTROLABILIDAD
1440 REM  *** SE DETERMINA LAS N PRIMERAS COLUMNAS LINEALMENTE INDEPENDIENTES Y LOS INDICES DE CONTROLABILIDAD
1450 REM C2 SIRVE PARA REALIZAR TRANSFORMACIONES DE SIMILARIDAD EN LA MATRIZ
1460 REM  DE CONTROLABILIDAD
1470 REDIM L1(M),C2(N,N1)
1480 N2=N+1
1490 MAT L1=ZER
1500 REDIM C3(N2,N),C4(N,N)
1510 REM C3 GUARDA LAS COLUMNAS LINEALMENTE INDEPENDIETNES, EN LA ULTIMA FILA SE ALMACENA EL VAL
1520 REM SE ALMACENA EL VALOR DE LA COLUMNA B CON LA CULA SE HA MULTIPLICADO
1530 REM
1540 L2=0
1550 L3=1
1560 L4=1
1570 MAT C2=C1
```

```
1580 MAT C4=ZER
1590 MAT C3=ZER
1600 REM
1610 REM
1620 REM
1630 REM
1640 J=1
1650 IF J=L4*M+1 THEN 1670
1660 GOTO 1680
1670 L4=L4+1
1680 REM SE DETERMINA SI LOS VECTORES DE LA COLUMNA J ES LD DE LOS
1690 REM ANTERIORES
1700 GOSUB 2120
1710 IF S=0 THEN 2320
1720 REM
1730 IF L3=1 THEN 1830
1740 REM
1750 FOR I1=1 TO L3-1
1760 F=-C2(I1,J)/C4(I1,I1)
1770 FOR I=I1 TO N
1780 C2(I,J)=C4(I,I1)*F+C2(I,J)
1790 NEXT I
1800 NEXT I1
1810 GOSUB 2120
1820 IF S=0 THEN 2320
1830 REM
1840 REM
1850 REM
1860 L5=1
1870 FOR I=L3 TO N
1880 IF ABS(C2(I,J))>ABS(L5) THEN 1900
1890 GOTO 1920
1900 L5=C2(I,J)
1910 R=I
1920 NEXT I
1930 IF R=L3 THEN 2070
1940 REM
1950 REM
1960 FOR J1=1 TO N1
1970 V=C2(R,J1)
1980 C2(R,J1)=C2(L3,J1)
1990 C2(L3,J1)=V
2000 NEXT J1
2010 REM
2020 FOR J1=1 TO L3-1
2030 V=C4(R,J1)
2040 C4(R,J1)=C4(L3,J1)
2050 C4(L3,J1)=V
2060 NEXT J1
2070 REM
2080 FOR I=1 TO N
2090 C4(I,L3)=C2(I,J)
2100 NEXT I
2110 GOTO 2221
2120 REM SE COMPARA CON 0 VECTOR
2130 S=0
2140 E=1E-5
```

```
2150  FOR I=1 TO N
2160  S=S+C2(I,J)^2
2170  NEXT I
2180  IF S<E THEN 2200
2190  GOTO 2210
2200  S=0
2210  RETURN
2220  REM
2230  FOR I=1 TO N
2240  C3(I,L3)=C1(I,J)
2250  NEXT I
2260  C3(N2,L3)=J-(L4-1)*M
2270  L1(J-(L4-1)*M)=L1(J-(L4-1)*M)+1
2280  IF L3=N THEN 2380
2290  L3=L3+1
2300  J=J+1
2310  GOTO 1650
2320  REM  EL VECTOR ES LD
2330  L2=L2+1
2340  IF L2>N*(M-1) THEN 2360
2350  GOTO 2300
2360  P6=2
2370  GOTO 3890
2380  REM EN C3 SE TIENE LAS N COLUMNAS LINEALMENTE INDEPENDIENTES
2390  REM EN L1 SE TIENE LOS INDICES DE CONTROLABILIDAD"
2400  GOTO 2410
2410  REM ARREGLO DE LAS COLUMNAS PARA FORMAR GAMA
2420  REM  *** SE FORMA GAMA ***
2430  REDIM C1(N,N),L4(M),L2(M+1)
2440  L2(1)=0
2450  FOR J=1 TO M
2460  L2(J+1)=L1(J)
2470  NEXT J
2480  MAT L4=ZER
2490  FOR J=1 TO N
2500  L5=C3(N+1,J)
2510  L3=1
2520  FOR I=1 TO L5
2530  L3=L3+L2(I)
2540  NEXT I
2550  L3=L3+L4(L5)
2560  FOR I=1 TO N
2570  C1(I,L3)=C3(I,J)
2580  NEXT I
2590  L4(L5)=L4(L5)+1
2600  NEXT J
2610  REM EN C1 SE TIENE GAMMA
2620  REM EN L1 LOS INDICES DE CONTROLABILIDAD
2630  REM PRINT "PAUSA PARA DETERMINAR GAMMA"
2640  REM MAT PRINT C1
2650  REM PAUSE
2660  REM OBTENCION DE LA INVERSA DE GAMMA
2670  REM *** SE DETERMINA LA INVERSA DE GAMMA ***"
2680  REDIM C2(N,N)
2690  MAT C2=INV(C1)
2700  REDIM C1(N,N+1)
2710  FOR I=1 TO N
```

```
2720 FOR J=1 TO N
2730 C1(I,J)=C2(I,J)
2740 NEXT J
2750 C1(I,N+1)=I
2760 NEXT I
2770 REM C1 TIENE LA INVERSA DE GAMMA, EN LA ULTIMA COLUMNA SE GUARDA EL INDICE
2780 REM DE LA FILA
2790 REM *** SE CALCULA LA MATRIZ T A PARTIR DE LA INVERSA DE GAMMA ***
2800 REDIM L2(M),V(1,N),V1(1,N)
2810 MAT L2=ZER
2820 L2(1)=L1(1)
2830 IF M=1 THEN 2870
2840 FOR I=2 TO M
2850 L2(I)=L2(I-1)+L1(I)
2860 NEXT I
2870 J=1
2880 FOR I=1 TO M
2890 L3=L2(I)
2900 REM
2910 IF L1(I)=0 THEN 3020
2920 FOR J1=1 TO N
2930 V(1,J1)=C1(L3,J1)
2940 NEXT J1
2950 GOSUB 3060
2960 IF L1(I)=1 THEN 3020
2970 FOR I1=1 TO L1(I)-1
2980 MAT V1=V*A
2990 MAT V=V1
3000 GOSUB 3060
3010 NEXT I1
3020 NEXT I
3030 REM EN C2 SE TIENE LA MATRIZ T, EN L1 LOS INDICES DE CONTROLABILIDAD"
3040 REM PRINT "MATRIZ DE TRANSFORMACION T "
3050 GOTO 3120
3060 REM LLENA LA FILA ESCOJIDA
3070 FOR J1=1 TO N
3080 C2(J,J1)=V(1,J1)
3090 NEXT J1
3100 J=J+1
3110 RETURN
3120 REM ETAPA FINAL DE LA TRANSFORMACION
3130 MAT T=C2
3140 MAT T1=INV(T)
3150 MAT A2=T*A
3160 MAT A1=A2*T1
3170 MAT B1=T*B
3180 MAT C1=C*T1
3190 U0=2
3200 P6=1
3210 GOTO 3890
3220 REM **** SUBPROGRAMA PARA EL LISTADO DE DATOS ****
3230 PRINT LIN(2);RPT$("-",W)
3240 PRINT LIN(1);"****** PRESENTACION DE RESULTADOS DE LA FORMA CONTROLABLE******"
3250 PRINT LIN(1);RPT$("-",W)
3260 ON P6 GOTO 3270,4010
3270 INPUT " DESEA CONOCER LA MATRIZ DE TRANSFORMACION Y SU INVERSA (SI/NO)?",D$
3280 IF D$<>"SI" THEN 3480
```

```
3290 PRINT LIN(2);"          MATRIZ **T**"
3300 PRINT "       ";RPT$("-",14)
3310 FOR I=1 TO N
3320 PRINT LIN(2);" FILA ";I
3330 FOR J=1 TO N
3340 PRINT USING 3520;T(I,J)
3350 NEXT J
3360 PAUSE
3370 NEXT I
3380 PRINT LIN(2);"          MATRIZ **T INVERSA**"
3390 PRINT "       ";RPT$("-",22)
3400 FOR I=1 TO N
3410 PRINT LIN(2);" FILA ";I
3420 FOR J=1 TO N
3430 PRINT USING 3520;T(I,J)
3440 NEXT J
3450 PAUSE
3460 NEXT I
3470 PRINT LIN(3);RPT$("-",W)
3480 PRINT LIN(1);"      ***** FORMA CONTROLABLE *****    "
3490 PRINT LIN(1);RPT$("-",W)
3500 PRINT LIN(2);"          MATRIZ **A** "
3510 PRINT "       ";RPT$("-",14)
3520 IMAGE #,4DZ.3D,X
3530 FOR I=1 TO N
3540 PRINT LIN(2);" FILA ";I
3550 FOR J=1 TO N
3560 PRINT USING 3520;A1(I,J)
3570 NEXT J
3580 PAUSE
3590 NEXT I
3600 PRINT LIN(3);"          MATRIZ **B** "
3610 PRINT "       ";RPT$("-",14)
3620 FOR I=1 TO N
3630 PRINT LIN(2);" FILA ";I
3640 FOR J=1 TO M
3650 PRINT USING 3520;B1(I,J)
3660 NEXT J
3670 PAUSE
3680 NEXT I
3690 PRINT LIN(3);"          MATRIZ **C** "
3700 PRINT "       ";RPT$("-",14)
3710 FOR I=1 TO K
3720 PRINT LIN(2);" FILA ";I
3730 FOR J=1 TO N
3740 PRINT USING 3520;C1(I,J)
3750 NEXT J
3760 PAUSE
3770 NEXT I
3780 PRINT LIN(3);"          MATRIZ **D** "
3790 PRINT "       ";RPT$("-",14)
3800 FOR I=1 TO K
3810 PRINT LIN(2);" FILA ";I
3820 FOR J=1 TO M
3830 PRINT USING 3520;D1(I,J)
3840 NEXT J
3850 PAUSE
```

```
3860  NEXT I
3870  GOTO 4050
3880  PRINTER IS 16
3890  PRINT PAGE;LIN(5);"       *** DESEA IMPRESION EN PAPEL (SI/NO) ?***"
3900  INPUT D$
3910  IF D$<>"SI" THEN 3930
3920  GOTO 3950
3930  W=80
3940  GOTO 3220
3950  PRINT PAGE;LIN(8);"           *** AJSTE EL IMPRESOR ***"
3960  PRINT LIN(3);"       ( APLASTE ** CONT ** PARA CONTINUAR )"
3970  W=110
3980  PAUSE
3990  PRINTER IS 7,1,WIDTH(110)
4000   GOTO 3220
4010 PRINT LIN(5);"EL SISTEMA *** "&N$&" *** NO TIENE FORMA CONTROLABLE"
4020  PAUSE
4030  PRINTER IS 16
4040  GOTO 4180
4050  PRINT LIN(2);RPT$("-",W)
4060  PRINT TAB(10);"*** INDICES DE CONTROLABILIDAD ***'
4070  PRINT RPT$("-",W)
4080  PRINT LIN(1)
4090  M2=0
4100  FOR I=1 TO K
4110  PRINT LIN(1);TAB(10);I;".-              ";L1(I)
4120  IF L1(I)>M2 THEN 4140
4130  GOTO 4150
4140  M2=L1(I)
4150  NEXT I
4160  PRINT LIN(2);"*** EL INDICE DE CONTROLABILIDAD DEL SISTEMA ES: ";M2;" ***"
4170  PRINTER IS 16
4180  PRINT LIN(5);"            FIN DE PRESENTACION "
4190  PRINT LIN(2);"       APLASTE *** CONT *** PARA CONTINUAR'
4200  PAUSE
4210  REM REGRESO A PROGRAMA MAESTRO
4220  ON KEY #7 GOTO 4270
4230  PRINT PAGE;LIN(5);TAB(20);"APLASTE TECLA 4(K4) SI DESEA FORMA OBSERVABLE"
4240  PRINT LIN(5);TAB(20);"APLASTE TECLA 6(K6) SI DESEA RECONSTRUCCION"
4250  PRINT LIN(5);TAB(20);"APLASTE TECLA 7(K7) SI DESEA INGRESAR NUEVOS DATOS"
4260  GOTO 4260
4270  PRINT PAGE;LIN(3);TAB(20);"SI DESEA EMPEZAR CON OTROS DATOS DEBE HACER LO SIGUIENTE:"
4300  PRINT LIN(2);TAB(25);"1.- APLASTAR SCRATCH (K15)Y LUEGO EXECUTE"
4310  PRINT LIN(2);TAB(25);"2.- TECLEAR GET"&CHR$(34)&"VGPR"&CHR$(34)&"Y APLASTAR EXECUTE"
4320  PRINT LIN(2);TAB(25);"3.- APLASTAR RUN"
4330  PAUSE
4340  GOTO 4330
4350  END
```

```
1000 REM *** OBTENCION DE LA FORMA OBSERVABLE ***
1010 O2=3
1020 IF O1<>O2 THEN 800
1030 PRINT PAGE;LIN(5);" *** ESTOY REALIZANDO LOS CALCULOS CORRESPONDIENTES ***"
1040 PRINT LIN(3);" *** A LA OBTENCION DE LA FORMA OBSERVABLE ***"
1050 MAT B1=B
1060 K1=M
1070 M=K
1080 MAT B=TRN(C)
1090 MAT A1=TRN(A)
1100 MAT A3=A1
1110 N1=N*M
1120 REDIM C1(N,N1),C2(N,M)
1130 REM EN C2 SE ALMACENA Ct LUEGO (At)Ct LUEGO (AT)^2*Ct HASTA LLEGAR
1140 REM A (At)^(N-1)*Ct
1150 L=-1
1160 MAT C2=B
1170 GOSUB 1340
1180 IF N=1 THEN 1300
1190 REM AQUI SE GENERA LA MATRIZ IDENTIDAD A1
1200 MAT A1=ZER
1210 FOR J=1 TO N
1220 A1(J,J)=1
1230 NEXT J
1240 REM EMPIEZA EL CALCULO DE (At)*Ct ; (At)^2*Ct ; (At)^(N-1)*Ct
1250 L=L+1
1260 MAT A2=A1*A3
1270 MAT A1=A2
1280 MAT C2=A1*B
1290 GOSUB 1340
1300 IF L=N-2 THEN 1320
1310 GOTO 1250
1320 REM EN C1 SE TIENE LA MATRIZ DE OBSERVABILIDAD
1330 GOTO 1450
1340 REM SUBRUTINA 1360.- SIRVE PARA GUARDAR LAS MATRICES QUE SE OBTIENEN
1350 REM EN C2 EN M COLUMNAS CONSECUTIVAS DE C1. ESTE PROCESO SE REALIZA CADA
1360 REM VEZ QUE C2 TIENE UN NUEVO VALOR
1370 L1=(L+1)*M+1
1380 L2=(L+2)*M
1390 FOR J=L1 TO L2
1400 FOR I=1 TO N
1410 C1(I,J)=C2(I,J-L1+1)
1420 NEXT I
1430 NEXT J
1440 RETURN
1450 REM DETERMINACION DE LAS N PRIMERAS COLUMNAS LINEALMENTE INDEPENDIENTES DE C1 Y OBTENCION DE LOS
1460 REM LOS INDICES DE OBSERVABILIDAD
1470 REM L1 GUARDA LOS INDICES DE OBSERVABILIDAD
1480 REM C2 SIRVE PARA REALIZAR TRANSFORMACIONES DE SIMILARIDAD EN LA MATRIZ
1490 REM  DE OBSERVABILIDAD
1500 REDIM L1(M),C2(N,N1)
1510 N2=N+1
1520 MAT L1=ZER
1530 REDIM C3(N2,N),C4(N,N)
1540 REM C3 GUARDA LAS COLUMNAS LINEALMENTE INDEPENDIENTES, EN LA ULTIMA FILA
1550 REM SE ALMACENA EL VALOR DE LA COLUMNA B CON LA CUAL SE HA MULTIPLICADO
1560 REM
1570 L2=0
```

```
1580  L3=1
1590  L4=1
1600  MAT C2=C1
1610  MAT C4=ZER
1620  MAT C3=ZER
1630  REM
1640  REM
1650  J=1
1660  IF J=L4*M+1 THEN 1680
1670  GOTO 1690
1680  L4=L4+1
1690  REM SE DETERMINA SI LOS VECTORES DE LA COLUMNA J SON LD DE LOS
1700  REM ANTERIORES
1710  GOSUB 2130
1720  IF S=0 THEN 2330
1730  REM
1740  IF L3=1 THEN 1840
1750  REM
1760  FOR I1=1 TO L3-1
1770  F=-C2(I1,J)/C4(I1,I1)
1780  FOR I=I1 TO N
1790  C2(I,J)=C4(I,I1)*F+C2(I,J)
1800  NEXT I
1810  NEXT I1
1820  GOSUB 2130
1830  IF S=0 THEN 2330
1840  REM
1850  REM
1860  REM
1870  L5=0
1880  FOR I=L3 TO N
1890  IF ABS(C2(I,J))>ABS(L5) THEN 1910
1900  GOTO 1930
1910  L5=C2(I,J)
1920  R=I
1930  NEXT I
1940  IF R=L3 THEN 2080
1950  REM
1960  REM
1970  FOR J1=1 TO N1
1980  V=C2(R,J1)
1990  C2(R,J1)=C2(L3,J1)
2000  C2(L3,J1)=V
2010  NEXT J1
2020  REM
2030  FOR J1=1 TO L3-1
2040  V=C4(R,J1)
2050  C4(R,J1)=C4(L3,J1)
2060  C4(L3,J1)=V
2070  NEXT J1
2080  REM
2090  FOR I=1 TO N
2100  C4(I,L3)=C2(I,J)
2110  NEXT I
2120  GOTO 2231
2130  REM SE COMPARA CON 0 VECTOR
2140  S=0
```

```
2150  E=1E-5
2160  FOR I=1 TO N
2170  S=S+C2(I,J)^2
2180  NEXT I
2190  IF S<E THEN 2210
2200  GOTO 2220
2210  S=0
2220  RETURN
2230  REM
2240  FOR I=1 TO N
2250  C3(I,L3)=C1(I,J)
2260  NEXT I
2270  C3(N2,L3)=J-(L4-1)*M
2280  L1(J-(L4-1)*M)=L1(J-(L4-1)*M)+1
2290  IF L3=N THEN 2400
2300  L3=L3+1
2310  J=J+1
2320  GOTO 1660
2330  REM  EL VECTOR ES LD
2340  L2=L2+1
2350 IF L2>N*(M-1) THEN 2370
2360  GOTO 2310
2370  REM "NO HAY FORMA OBSERVABLE"
2380  P6=2
2390 GOTO 3880
2400  REM EN C3 SE TIENE LAS N COLUMNAS LINEALMENTE INDEPENDIENTES
2410  REM EN L1 SE TIENE LOS INDICES DE OBSERVABILIDAD
2420  GOTO 2430
2430  REM ARREGLO DE LAS COLUMNAS PARA FORMAR GAMMA
2440  REDIM C1(N,N),L4(M),L2(M+1)
2450  L2(1)=0
2460  FOR J=1 TO M
2470  L2(J+1)=L1(J)
2480  NEXT J
2490  MAT L4=ZER
2500  FOR J=1 TO N
2510  L5=C3(N+1,J)
2520  L3=1
2530  FOR I=1 TO L5
2540  L3=L3+L2(I)
2550  NEXT I
2560  L3=L3+L4(L5)
2570  FOR I=1 TO N
2580  C1(I,L3)=C3(I,J)
2590  NEXT I
2600  L4(L5)=L4(L5)+1
2610  NEXT J
2620  REM EN C1 SE TIENE GAMMA
2630  REM EN L1 LOS INDICES DE OBSERVABILIDAD
2640  REM OBTENCION DE LA INVERSA DE GAMMA
2650  REDIM C2(N,N)
2660  MAT C2=INV(C1)
2670  REDIM C1(N,N+1)
2680  FOR I=1 TO N
2690  FOR J=1 TO N
2700  C1(I,J)=C2(I,J)
2710  NEXT J
```

```
2720 C1(J,N+1)=I
2730 NEXT I
2740 REM C1 TIENE LA INVERSA DE GAMMA. EN LA ULTIMA COLUMNA SE GUARDA EL INDICE
2750 REM DE LA FILA
2760 REDIM L2(M),V2(N)
2770 MAT L2=ZER
2780 L2(1)=L1(1)
2790 IF M=1 THEN 2830
2800 FOR I=2 TO M
2810 L2(I)=L2(I-1)+L1(I)
2820 NEXT I
2830 J=1
2840 FOR I=1 TO M
2850 L3=L2(I)
2860 REM
2870 IF L1(I)=0 THEN 2990
2880 FOR J1=1 TO N
2890 V2(J1)=C1(L3,J1)
2900 NEXT J1
2910 GOSUB 3020
2920 IF L1(I)=1 THEN 2990
2930 FOR I1=1 TO L1(I)-1
2940 REDIM V3(N)
2950 MAT V3=A*V2
2960 MAT V2=V3
2970 GOSUB 3020
2980 NEXT I1
2990 NEXT I
3000 REM EN C2 SE TIENE LA MATRIZ T, EN L1 LOS INDICES DE OBSERVABILIDAD.
3010 GOTO 3080
3020 REM LLENA LA FILA ESCOJIDA
3030 FOR J1=1 TO N
3040 C2(J1,J)=V2(J1)
3050 NEXT J1
3060 J=J+1
3070 RETURN
3080 REM ETAPA FINAL DE LA TRANSFORMACION
3090 MAT D=B1
3100 MAT T=C2
3110 MAT T1=INV(T)
3120 MAT A2=T1*A
3130 MAT A1=A2*T
3140 MAT B1=T1*B
3150 MAT C1=C*T
3160 REM FIN DE CALCULO
3170 M=K1
3180 U0=2
3190 P6=1
3200 GOTO 3880
3210 REM **** SUBPROGRAMA PARA EL LISTADO DE DATOS ****
3220 PRINT LIN(2);RPT$("-",W)
3230 PRINT LIN(1);"*** PRESENTACION DE RESULTADOS DE LA FORMA OBSERVABLE ***"
3240 PRINT LIN(1);RPT$("-",W)
3250 ON P6 GOTO 3260,4000
3260 INPUT " DESEA CONOCER LA MATRIZ DE TRANSFORMACION Y SU INVERSA (SI/NO)?",D$
3270 IF D$<>"SI" THEN 3470
3280 PRINT LIN(2);"        MATRIZ **T**"
```

```
3290  PRINT "        ";RPT$("-",14)
3300  FOR I=1 TO N
3310  PRINT LIN(2);" FILA ";I
3320  FOR J=1 TO N
3330  PRINT USING 3510;T(I,J)
3340  NEXT J
3350  PAUSE
3360  NEXT I
3370  PRINT LIN(2);"        MATRIZ **T INVERSA**"
3380  PRINT "        ";RPT$("-",22)
3390  FOR I=1 TO N
3400  PRINT LIN(2);" FILA ";I
3410  FOR J=1 TO N
3420  PRINT USING 3510;T(I,J)
3430  NEXT J
3440  PAUSE
3450  NEXT I
3460  PRINT LIN(3);RPT$("-",W)
3470  PRINT LIN(1);"      ***** FORMA OBSERVABLE *****    "
3480  PRINT LIN(1);RPT$("-",W)
3490  PRINT LIN(2);"        MATRIZ **A** "
3500  PRINT "        ";RPT$("-",14)
3510  IMAGE #,4DZ.3D,X
3520  FOR I=1 TO N
3530  PRINT LIN(2);" FILA ";I
3540  FOR J=1 TO N
3550  PRINT USING 3510;A1(I,J)
3560  NEXT J
3570  PAUSE
3580  NEXT I
3590  PRINT LIN(3);"        MATRIZ **B** "
3600  PRINT "        ";RPT$("-",14)
3610  FOR I=1 TO N
3620  PRINT LIN(2);" FILA ";I
3630  FOR J=1 TO M
3640  PRINT USING 3510;B1(I,J)
3650  NEXT J
3660  PAUSE
3670  NEXT I
3680  PRINT LIN(3);"        MATRIZ **C** "
3690  PRINT "        ";RPT$("-",14)
3700  FOR I=1 TO K
3710  PRINT LIN(2);" FILA ";I
3720  FOR J=1 TO N
3730  PRINT USING 3510;C1(I,J)
3740  NEXT J
3750  PAUSE
3760  NEXT I
3770  PRINT LIN(3);"        MATRIZ **D** "
3780  PRINT "        ";RPT$("-",14)
3790  FOR I=1 TO K
3800  PRINT LIN(2);" FILA ";I
3810  FOR J=1 TO M
3820  PRINT USING 3510;D1(I,J)
3830  NEXT J
3840  PAUSE
3850  NEXT I
```

```
3860  GOTO 4040
3870  PRINTER IS 16
3880  PRINT PAGE;LIN(5);"       *** DESEA IMPRESION EN PAPEL (SI/NO) ?***"
3890  INPUT D$
3900  IF D$<>"SI" THEN 3920
3910  GOTO 3940
3920  W=80
3930  GOTO 3210
3940  PRINT PAGE;LIN(8);"            *** ALISTE EL IMPRESOR ***"
3950  PRINT LIN(3);"       ( APLASTE ** CONT ** PARA CONTINUAR )"
3960  W=110
3970  PAUSE
3980  PRINTER IS 7,1,WIDTH(110)
3990  GOTO 3210
4000 PRINT LIN(5);"EL SISTEMA *** "&N$&" *** NO TIENE FORMA OBSERVABLE"
4010  PAUSE
4020  PRINTER IS 16
4030  GOTO 4210
4040  PRINT LIN(2);RPT$("-",W)
4050  PRINT TAB(10);"*** INDICES DE OBSERVABILIDAD ***"
4060  PRINT RPT$("-",W)
4070  PRINT LIN(1)
4080  REM *** OBTENCION DEL MAXIMO INDICE DE OBSERVABILIDAD ***
4090  M2=0
4100  FOR I=1 TO K
4110  PRINT LIN(1);TAB(10);I;".-              ";L1(I)
4120  IF L1(I)>M2 THEN 4140
4130  GOTO 4150
4140  M2=L1(I)
4150  NEXT I
4160  PRINT LIN(4);"*** EL INDICE DE OBSERVABILIDAD DEL SISTEMA ES : ";M2;" ***"
4170  PRINTER IS 16
4180  PRINT LIN(5);"           FIN DE PRESENTACION "
4190  PRINT LIN(2);"       APLASTE *** CONT *** PARA CONTINUAR"
4200  PAUSE
4210  REM REGRESO A PROGRAMA MAESTRO
4220  ON KEY #7 GOTO 4270
4230  PRINT PAGE;LIN(5);TAB(20);"APLASTE TECLA 3(K3) SI DESEA FORMA CONTROLABLE"
4240  PRINT LIN(5);TAB(20);"APLASTE TECLA 6(K6) SI DESEA RECONSTRUCCION"
4250  PRINT LIN(5);TAB(20);"APLASTE TECLA 7(K7) SI DESEA INGRESAR NUEVOS DATOS"
4260  GOTO 4260
4270  PRINT PAGE;LIN(3);TAB(20);"SI DESEA EMPEZAR CON OTROS DATOS DEBE HACER LO SIGUIENTE:"
4300  PRINT LIN(2);TAB(25);"1.- APLASTAR SCRATCH (K15)Y LUEGO EXECUTE"
4310  PRINT LIN(2);TAB(25);"2.- CARGAR EL PROGRAMA MAESTRO CON GET"&CHR$(34)&"VGPR"&CHR$(34)
4320  PRINT LIN(2);TAB(25);"3.- APLASTAR RUN"
4330  PAUSE
4340  GOTO 4330
4350  END
```

```
1000  REM *** PROGRAMA PARA REALIZACION MINIMA ***
1010  O2=4
1020  IF O1<>O2 THEN 800
1030  REM LA MATRIZ G(s) HA SIDO LEIDA. G(s) ESTA ALMZACENADA EN G1(*) DE DIMEN-
1040  REM SIONES (K2,M+1) DONDE:
1050  REM K2= SUMATORIO DE LOS GRADOS DE LOS DENOMINADORES COMUNES DE CADA FILA
1060  REM M= NUMERO DE COLUMNAS DE G(s)
1070  REM N1(*) ES UNA MATRIZ QUE REPRESENTA A UN SISTEMA QUE ES COMPLETAMENTE
1080  REM OBSERVABLE,PERO NO NECESARIAMENTE COMPLETAMENTE CONTROLABLE
1090  K2=Y(K+1)-1
1100  REDIM N1(K2+K,K2+M)
1110  MAT N1=ZER
1120  FOR I=1 TO K
1130  FOR I1=Y(I) TO Y(I+1)-2
1140  N1(I1+1,I1)=1
1150  NEXT I1
1160  NEXT I
1170  FOR I1=1 TO K2
1180  FOR J1=1 TO M
1190  N1(I1,K2+J1)=G1(I1,J1)
1200  NEXT J1
1210  NEXT I1
1220  FOR I=1 TO K
1230  FOR I1=Y(I) TO Y(I+1)-1
1240  N1(I1,Y(I+1)-1)=-G1(I1,M+1)
1250  NEXT I1
1260  NEXT I
1270  REM PROGRAMA PARA CARGAR LAS MATRICES C1 EN LA FORMA COMPANION
1280  FOR I=K2+1 TO K2+K
1290  N1(I,Y(I+1-K2)-1)=1
1300  REM PRINT "N1(";I;",";Y(I+1-K2)-1;")=";N1(I,Y(I+1-K2)-1)
1310  NEXT I
1320  PRINT PAGE;LIN(10);"****** ESTOY REALIZANDO OPERACIONES ELEMENTALES EN FILAS ***"
1330  PRINT LIN(5);"****** Y COLUMNAS PARA OBTENER LA FORMA CONTROLABLE DE N1(*) ***"
1340  PRINT LIN(5);"                   ( NO APLASTAR NINGUNA TECLA )"
1350  REM PROGRAMA DE OPERACIONES ELEMENTALES EN FILAS Y COLUMNAS
1360  I3=1
1370  J3=1
1380  I=K2
1390  J=K2+M
1400  E=1E-5
1410  Z=0
1420  REM Z REPRESENTA EL NUMERO DE COLUMNAS LINEALMENTE INDEPENDIENTES
1430  REM ENCONTRADAS
1440  GOSUB 1460
1450  GOTO 1510
1460  REM SUBRUTINA PARA IGUALAR A CERO
1470  IF ABS(N1(I,J))<E THEN 1490
1480  GOTO 1500
1490  N1(I,J)=0
1500  RETURN
1510  IF N1(I,J)=0 THEN 1720
1520  REM  ALGORITMO PARA REDUCIR A CERO TODOS LOS ELEMENTOS UBICADOS SOBRE EL PIVOTE
1530  FOR I1=1 TO I-1
1540  F=-N1(I-I1,J)/N1(I,J)
1550  IF F=0 THEN 1570
1560  GOTO 1580
1570  GOTO 1650
```

```
1580 FOR J1=1 TO K2+M
1590 N1(I-I1,J1)=N1(I-I1,J1)+F*N1(I,J1)
1600 NEXT J1
1610 REM DEBE REALIZARSE LA OPERACION INVERSA
1620 FOR I2=1 TO K2+K
1630 N1(I2,I)=-F*N1(I2,I-I1)+N1(I2,I)
1640 NEXT I2
1650 REM
1660 NEXT I1
1670 I=I-1
1680 J=J-1
1690 GOSUB 1460
1700 IF N1(I,J)=0 THEN 1721
1710 GOTO 2000
1720 M1=0
1730 REM M1= ELEMENTO MAYOR
1740 REM R = FILA DEL ELEMENTO MAYOR
1750 FOR I1=1 TO I
1760 IF ABS(N1(I1,J))>M1 THEN 1780
1770 GOTO 1800
1780 M1=ABS(N1(I1,J))
1790 R=I1
1800 NEXT I1
1810 IF M1<E THEN 1950
1820 FOR J1=1 TO J
1830 X=N1(I,J1)
1840 N1(I,J1)=N1(R,J1)
1850 N1(R,J1)=X
1860 NEXT J1
1870 FOR I1=1 TO K2+K
1880 X=N1(I1,I)
1890 N1(I1,I)=N1(I1,R)
1900 N1(I1,R)=X
1910 NEXT I1
1920 REM EMPIEZA LA OBTENCION DE CEROS EN LA COLUMNA DEL NUEVO PIVOTE
1930 X=1
1940 GOTO 2010
1950 REM SE HA ENCONTRADO OTRA FILA LINEALMENTE DEPENDIENTE
1960 J3=J3+1
1970 IF (J3=M+I3) OR (J=1) THEN 2040
1980 J=J-1
1990 GOTO 1690
2000 IF I=1 THEN 2040
2010 I3=I3+1
2020 J3=J3+1
2030 GOTO 1520
2040 REM SE HA TERMINADO EL PROCEDIMIENTO DE OPERACIONES EN FILAS Y COLUMNAS.
2050 REM  EMPIEZA EL ENSAMBLAJE DE LAS MATRICES A,B,C
2060 Z=K2-J3
2070 PRINT PAGE;"PRESENTACION DE RESULTADOS";LIN(3)
2080 PRINT " EL NUMERO DE FILAS REMOVIDAS  ES  :";Z;LIN(3);"APLASTE CONT PARA CONTINUAR"
2090 PAUSE
2100 REDIM A(K2-Z,K2-Z),B(K2-Z,M),C(K,K2-Z),D(K,M)
2110 REM  ENSAMBLAJE DE LA MATRIZ A
2120 FOR I=Z+1 TO K2
2130 FOR J=Z+1 TO K2
2140 A(I-Z,J-Z)=N1(I,J)
```

```
2150  NEXT J
2160  NEXT I
2170  REM ENSAMBLAJE DE LA MATRIZ B
2180  FOR I=Z+1 TO K2
2190  FOR J=K2+1 TO K2+M
2200  B(I-Z,J-K2)=N1(I,J)
2210  NEXT J
2220  NEXT I
2230  REM ENSAMBLAJE DE LA MATRIZ C
2240  FOR I=K2+1 TO K2+K
2250  FOR J=Z+1 TO K2
2260  C(I-K2,J-Z)=N1(I,J)
2270  NEXT J
2280  NEXT I
2290  PRINT PAGE;LIN(6);"*** FIN DEL PROGRAMA Y VERIFICAR SI SE DESEA ALMACENAR ***"
2300  PRINT LIN(3);" *** LOS RESULTADOS O IMPRIMIRLOS ***"
2310  PRINT LIN(4);"APLASTE CONT PARA CONTINUAR"
2320  PAUSE
2330  PRINT PAGE;LIN(10);"****** DESEA ALMACENAR LOS RESULTADOS EN UN ARCHIVO (SI/NO)?******"
2340  INPUT D$
2350  O4=1
2360  N=K2-Z
2370  MAT D=ZER
2380  IF D$<>"SI" THEN 2401
2390  GOSUB 2420
2400  REM REGRESO A INDICE DE PROGRAMAS
2410  GOTO 2630
2420  REM SUBRUTINA PARA ALMACENAMIENTO EN ARCHIVO
2430  PRINT PAGE;"INGRESE NOMBRE DEL ARCHIVO : ";
2440  INPUT N2$
2450  PRINT N2$
2460  ASSIGN #1 TO N2$,X
2470  IF X=1 THEN 2530
2480  PRINT LIN(1);"YA EXISTE DICHO ARCHIVO, DESEA DESTRUIRLO? (SI O NO )"
2490  INPUT D$
2500  IF D$="SI" THEN 2520
2510  GOTO 2430
2520  PURGE N2$
2530  CREATE N2$,200,8
2540  ASSIGN #1 TO N2$
2550  GOTO 2560
2560  PRINT #1;O4,N,M,K
2570  PRINT #1;A(*),B(*),C(*),D(*)
2580  PRINT #1;T3$
2590  Y$="RESULTADOS ESTAN ALMACENADOS EN ARCHIVO :"&N2$
2600  GOTO 2610
2610  Y$=Y$&" ,MATRICES A,B,C,D"
2620  RETURN
2630  GOTO 3130
2640 PRINT LIN(1);RPT$("-",W)
2650 PRINT LIN(2);TAB(10);"*** PRESENTACION DE RESULTADOS DE LA REALIZACION MINIMA *** "
2660 PRINT LIN(1);RPT$("-",W)
2670  PRINT LIN(2);"        MATRIZ **A** "
2680  PRINT "        ";RPT$("-",14);
2690  IMAGE #,4DZ.3D,X
2700  FOR I=1 TO N
2710  PRINT LIN(2);" FILA ";I
```

```
2720  FOR J=1 TO N
2730  PRINT USING 2690;A(I,J)
2740  NEXT J
2760  NEXT I
2780  PRINT LIN(2);"        MATRIZ **B** "
2790  PRINT "        ";RPT$("-",14)
2800  FOR I=1 TO N
2810  PRINT LIN(2);" FILA ";I
2820  FOR J=1 TO M
2830  PRINT USING 2690;B(I,J)
2840  NEXT J
2860  NEXT I
2880  PRINT LIN(2);"        MATRIZ **C** "
2890  PRINT "        ";RPT$("-",14)
2900  FOR I=1 TO K
2910  PRINT LIN(2);" FILA ";I
2920  FOR J=1 TO N
2930  PRINT USING 2690;C(I,J)
2940  NEXT J
2950  PAUSE
2960  NEXT I
2980  PRINT LIN(2);"        MATRIZ **D** "
2990  PRINT "        ";RPT$("-",14)
3000  FOR I=1 TO K
3010  PRINT LIN(2);" FILA ";I
3020  FOR J=1 TO M
3030  PRINT USING 2690;D(I,J)
3040  NEXT J
3050  PAUSE
3060  NEXT I
3070  PRINTER IS 16
3080  PRINT LIN(5);"              FIN DE PRESENTACION "
3090  PRINT LIN(2);"        APLASTE *** CONT *** PARA CONTINUAR"
3100  PAUSE
3110  O3=1
3120  GOTO 3260
3130  PRINT PAGE;LIN(4);" *** DESEA IMPRESION EN PAPEL (SI/NO) ?***"
3140  INPUT D$
3150  IF D$<>"SI" THEN 3180
3160  W=110
3170  GOTO 3200
3180  W=80
3190  GOTO 2640
3200  PRINT "              *** ALISTE EL IMPRESOR ***"
3210  PRINT LIN(3);"        ( APLASTE ** CONT ** PARA CONTINUAR )"
3220  PAUSE
3230  PRINTER IS 7,1,WIDTH(110)
3240  GOTO 2640
3250  END
3260  PRINT PAGE;LIN(3);TAB(25);"USTED TIENE LAS SIGUIENTES OPCIONES"
3270  ON KEY #7 GOTO 3330
3280  PRINT LIN(1);"              TECLA 3(K3).- FORMA CONTROLABLE DE LOS RESULTADOS"
```

```
3290  PRINT LIN(1);"            TECLA 4(K4).- FORMA OBSERVABLE DE LOS RESULTADOS"
3300  PRINT LIN(1);"            TECLA 6(K6).- RECONSTRUCCION CON LOS RESULTADOS"
3310  PRINT LIN(1);"            TECLA 7(K7).- INGRESO DE NUEVOS DATOS"
3320  GOTO 3320
3330  PRINT PAGE;LIN(3);TAB(10);"PARA INGRESAR NUEVOS DATOS HACER LO SIGUIENTE:"
3360  PRINT LIN(2);TAB(20);"1.- APLASTAR SCRATCH (K15) Y LUEGO EXECUTE"
3370  PRINT LIN(2);TAB(20);"2.- TECLEAR GET"&CHR$(34)&"VGPR"&CHR$(34)&" Y APLASTAR EXECUTE"
3380  PRINT LIN(2);TAB(20);"3.- APLASTAR RUN"
3390  PAUSE
3400  GOTO 3390
3410  END
```

```
1000  REM RECONSTRUCCION
1010  O2=5
1020  IF O1<>O2 THEN 800
1030  PRINT PAGE;LIN(5);"******* ESTOY REALIZANDO LOS CALCULOS CORRESPONDIENTES ******"
1040  PRINT LIN(3);"   ******* AL PROGRAMA DE RECONSTRUCCION ******"
1050  REDIM C1(K,N*M),C2(N,N),C3(N,N),C4(N,N),A1(N,N),V2(N)
1060  MAT C1=ZER
1070  MAT C2=IDN(N,N)
1080  FOR K1=1 TO N
1090  MAT C3=C*C2
1100  MAT C4=C3*M
1110  FOR J=1 TO M
1120  FOR I=1 TO K
1130  J1=N*(J-1)+K1
1140  C1(I,J1)=C4(I,J)
1150  NEXT I
1160  NEXT J
1170  REM PRINT "MATRIZ C4"
1180  REM MAT PRINT C4
1190  REM PRINT "MATRIZ C1"
1200  REM MAT PRINT C1
1210  REM PAUSE
1220  MAT A1=A*C2
1230  T1=0
1240  FOR J=1 TO N
1250  T1=T1+A1(J,J)
1260  NEXT J
1270  V2(K1)=-(1/K1)*T1
1280  MAT A2=IDN(N,N)
1290  MAT A3=(V2(K1))*A2
1300  MAT C2=A1+A3
1310  NEXT K1
1320  REM J BARRE LOS GRUPOS DE N COLUMNAS, CADA GRUPO DE N COLUMNAS
1330  REM SE ALMACENA EN UNA COLUMNA DE G1
1340  REM CADA COLUMNA TIENE I FILAS CADA UNA DE LAS CUALES ES
1350  REM UN POLINOMIO EN s DE GRADO N-1
1360  FOR J=1 TO M
1370  REM I BARRE LAS FILAS DE C1 QUE REPRESENTARA UN GRUPO DE N
1380  REM FILAS EN LA MATRIZ G1
1390  REDIM G1(K*N,M+1)
1400  REM EN LA COLUMNA M+1 DE G1 SE ALMACENARA LOS COEFICIENTES
1410  REM DEL DENOMINADOR COMUN DE CADA FILA( QUE ES EL MISMO PARA TODAS
1420  REM LAS FILAS)
1430  FOR I=1 TO K
1440  FOR K1=N TO 1 STEP -1
1450  G1(N-K1+1+(I-1)*N,J)=C1(I,(J-1)*N+K1)
1460  NEXT K1
1470  NEXT I
1480  NEXT J
1490  REM EMPIEZA EL ALMACENAMIENTO DE LOS DENOMINADORES
1500  REM I BARRE LAS FILAS DE C1 QUE SE CONVIERTEN EN N FILAS
1510  REM EN LA MATRIZ G1
1520  REM Y(I) REPRESENTA LA FILA DONDE EMPIEZA A ALMACENARSE EN
1530  REM G1 LA FILA I DE C1
1540  REM R(I) REPRESENTA EL GRADO DEL DENOMINADOR DE CADA FILA
1550  REM QUE PARA ESTE CASO ES SIEMPRE N
1560  REDIM Y(K+1),R(K)
1570  Y(1)=1
```

```
1580  FOR I=1 TO K
1590  R(I)=N
1600  Y(I+1)=Y(I)+R(I)
1610  REM EMPIEZA ESCRITURA EN G1
1620  FOR J=Y(I) TO Y(I+1)-1
1630  FOR K1=N TO 1 STEP -1
1640  G1(N-K1+1+(I-1)*N,M+1)=V2(K1)
1650  NEXT K1
1660  NEXT J
1670  NEXT I
1680  O3=2
1690  GOTO 2140
1700  REM VERIFICAR SI SE DESEA ALMACENAR LA FUNCION DE TRANSFERENCIA EN UN ARCHIVO
1710  PRINT PAGE;LIN(5);"DESEA ALMACENAR LOS RESULTADOS EN UN ARCHIVO?;(SI/NO)";
1720  INPUT D$
1730  PRINT D$
1740  IF D$<>"SI" THEN 1760
1750  GOTO 1880
1760  REM REGRESO A INDICE
1770  ON KEY #7 GOTO 1810
1780  PRINT PAGE;LIN(3);TAB(20);"APLASTE TECLA 5(K5) SI DESEA REALIZACION MINIMA"
1790  PRINT LIN(2);TAB(20);"SI DESEA INGRESAR OTROS DATOS APLASTAR TECLA 7(K7)"
1800  GOTO 1800
1810  PRINT PAGE;LIN(2);TAB(20);"SI DESEA INGRESAR OTROS DATOS HACER LO SIGUIENTE:"
1840  PRINT LIN(1);TAB(25);"1.- APLASTAR SCRATCH(K15)  Y LUEGO EXECUTE"
1850  PRINT LIN(1);TAB(25);"2.- TECLEAR GET"&CHR$(34)&"VGPR"&CHR$(34)&"Y APLASTAR EXECUTE"
1860  PRINT LIN(1);TAB(25);"3.- APLASTAR RUN"
1870  END
1880  REM SUBRUTINA PARA ALMACENAMIENTO EN ARCHIVO
1890  PRINT PAGE;"INGRESE NOMBRE DE ARCHIVO : ";
1900  INPUT N1$
1910  PRINT N1$
1920  ASSIGN #1 TO N1$,X
1930  IF X=1 THEN 2000
1940  PRINT LIN(1);TAB(10);"YA EXISTE DICHO ARCHIVO"
1950  PRINT LIN(1);TAB(10);"DESEA DESTRUIRLO(SI/NO)?: "
1960  INPUT D$
1970  IF D$="SI" THEN 1990
1980  GOTO 1890
1990  PURGE N1$
2000  PRINT PAGE;LIN(7);TAB(10);" *** ESTOY CREANDO EL ARCHIVO ---"&N1$&" ---***"
2010  T2$=N1$
2020  CREATE N1$,200,16
2030  ASSIGN #1 TO N1$
2040  PRINT #1;O3,K,M
2050  PRINT #1;R(*),Y(*),G1(*)
2060  PRINT #1;T2$
2070  ASSIGN #1 TO N1$
2080  PRINT PAGE;LIN(5);TAB(10);"LA FUNCION DE TRANSFERENCIA QUE SE OBTUVO"
2090  PRINT LIN(1);TAB(10);"COMO RESULTADO DE LA RECONSTRUCCION DE:";N$
2100  PRINT LIN(1);TAB(10);"HA SIDO ALMACENADA EN EL ARCHIVO :";N1$
2110  PRINT LIN(4);TAB(5);"APLASTE CONT PARA CONTINUAR"
2120  PAUSE
2130  GOTO 1760
2140  REM *** VERIFICAR SI SE DESEA IMPRESION EN PAPEL ***
```

```
2150  PRINT PAGE;LIN(5);" *** DESEA IMPRESION EN PAPEL (SI/NO) ?***"
2160  INPUT D$
2170  IF D$<>"SI" THEN 2190
2180  GOTO 2210
2190  W=80
2200  GOTO 2270
2210  PRINT PAGE;LIN(5);"       *** AJUSTE EL IMPRESOR ***"
2220  PRINT LIN(3);"        ( APLASTE ** CONT ** PARA CONTINUAR )"
2230  W=130
2240  PAUSE
2250  PRINT PAGE
2260  PRINTER IS 7,1,WIDTH(118)
2270  PRINT LIN(1);RPT$("-",W)
2280  PRINT LIN(1);TAB(20);"*** RECONSTRUCCION DEL PROBLEMA ---";N$;"---  ***"
2290  PRINT LIN(1);RPT$("-",W)
2300  PRINT TAB(40);"NUMERO DE FILAS DE G(s)=    ";K
2310  PRINT LIN(1);TAB(40);"NUMERO DE COLUMNAS DE G(s)= ";M
2320  PRINT LIN(1);RPT$("-",W)
2330  PRINT LIN(2);TAB(20);"*** MATRIZ G(s) ***",LIN(1)
2340  FOR I=1 TO K
2350  PRINT LIN(1);TAB(10);"FILA  ";I;" ORDEN   ";R(I)
2360  PRINT TAB(10);RPT$("-",18)
2370  PRINT LIN(2);TAB(10);"DENOMINADOR COMUN :"
2380  K4=Y(I)
2390  K5=Y(I+1)-1
2400  FOR L=K4 TO K5
2410  K6=L-K4
2420  PRINT LIN(1);TAB(20);"GRADO ";K6;"         = ";DROUND(G1(L,M+1),4)
2430  NEXT L
2440  PRINT LIN(1);TAB(20);"GRADO ";R(I);"         = 1"
2450  PAUSE
2460  PRINT LIN(3);TAB(20);"*** NUMERADORES *** "
2470  PRINT TAB(20);RPT$("=",20)
2480  FOR J=1 TO M
2490  PRINT LIN(1);TAB(20);"COLUMNA ";J;"  *** N(";I;",";J;") ***"
2500  PRINT TAB(20);RPT$("-",30)
2510  FOR L=K4 TO K5
2520  K6=L-K4
2530  PRINT LIN(1);TAB(20);"GRADO ";K6;"         = ";DROUND(G1(L,J),4)
2540  NEXT L
2550  PAUSE
2560  NEXT J
2570  NEXT I
2580  PRINTER IS 16
2590  GOTO 1700
2600  PRINT LIN(5);"           FIN DE PRESENTACION "
2610  IF D$="SI" THEN 1760
2620  PRINT LIN(5);"PARA REVISAR LOS RESULTADOS PUEDE UTILIZAR LAS TECLAS *** "&CHR$(224)&" ***"
2630  PRINT LIN(1);"Y *** "&CHR$(247)&" *** QUE DESPLAZAN LO PRESENTADO, HACIA ARRIBA Y ABAJO"
2640  PRINT LIN(2);"     APLASTE *** CONT *** PARA CONTINUAR "
2650  PAUSE
2660  GOTO 1760
2670  END
```

BIBLIOGRAFIA

1. Munro, N. — Multivariable Systems Theory and Design Pergamon Press England 1982

2. Wiberg, Donald — Espacio de estado y sistemas lineales. Mc Graw Hill Colombia 1973

3. Takahashi, Yasundo — Control and Dynamic Systems, Addison Wesley. Publishing Company, USA Inc. 1970

4. Layton J.M. — Multivariable Control Theory, Peter Peregrinus, Londo 1976

5. Garcia, Cristóbal — Bases para el análisis de sistemas de control en el espacio de estado, EPN Quito, Julio 1981

6. Munro, N. — Minimal Realisation of transfer-Fuction Matrices using the system Matrix. Proc. IEE, Vol.118, # 9, September 1971