

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL

FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA

SIMULACION DISCRETA

MIGUEL DANILO ARAUJO VILLALVA

TESIS PREVIA A LA OBTENCION DEL TITULO DE  
INGENIERO EN ELECTRONICA Y CONTROL

A MIS PADRES

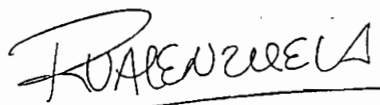
A MIS HERMANOS

A MI ESPOSA

## AGRADECIMIENTO

Al Ing. Ramiro Valenzuela por sus acertados y oportunos consejos en la elaboración de esta tesis, y a todas las personas que de una u otra manera colaboraron con el desarrollo de la misma.

Certifico que el presente trabajo ha sido realizado en su totalidad por el Sr. Miguel Danilo Araujo Villalva.

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'RAMIREZ' or similar, with a horizontal line underneath it.

Ing. Ramiro Valenzuela

Director

# I N D I C E

TEMA	Pág.
CAPITULO I : INTRODUCCION	1
CAPITULO II : SIMULACION DISCRETA UTILIZANDO UN COMPUTADOR DIGITAL	
2.1 Introducción.	6
2.1.1 Muestreo y Simulación.	7
2.1.2 Simulación Digital de Sistemas Análogos.	11
2.1.3 Teorema del Muestreo (Shannon).	14
2.2 Métodos de discretización.	18
2.2.1 Métodos de Integración numérica.	19
2.2.2 Transformada invariante al impulso.	27
2.2.3 Reconstructores (Retenedores-Equivalentes).	28
2.2.4 Correspondencia de Polos y Ceros (Mapeo).	31
2.3 Resolución de Ecuaciones de Diferencias.	53
2.4 Análisis de Sistemas Muestreados.	60
2.4.1 Sistemas Muestreados Multirango Lentos-Rápidos.	63
2.4.2 Sistemas Muestreados Multirango Rápidos-Lentos.	64
2.4.3 Sistemas Multirango con Elementos enteramente Digitales.	66
2.5 Conclusiones.	85
CAPITULO III: SIMULACION DISCRETA UTILIZANDO UN COMPUTADOR HIBRIDO	
3.1 Introducción.	87
3.2 Descripción de la Metodología.	88

3.3	Métodos de discretización.	95
3.3.1	Variación del Período de Muestreo.	105
3.4	Resolución de Ecuaciones de Diferencias.	114
3.4.1	Solución de Ecuaciones de Diferencias	114
3.4.2	Sistemas Discretos en el Espacio de Estado	125
3.5	Análisis de Sistemas Muestreados.	129
3.6	Conclusiones.	135

#### CAPITULO IV : APLICACION A CONTROLADORES DISCRETOS

4.1	Introducción.	139
4.1.1	Metodología para simular Controladores Discretos de plantas continuas (Sistemas Muestreados).	140
4.2	Controladores de Retardo - Adelanto de Fase.	146
4.3	Controlador PID.	158
4.4	Controladores Discretos de una planta real.	168
4.4.1	Control de Velocidad.	172
4.4.2	Control de Posición.	182
4.5	Comparación con un Controlador digital real.	189
4.6	Conclusiones.	198

#### CAPITULO V: CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

5.1	Efectos al variar el período de muestreo.	202
5.2	Conclusiones y Recomendaciones.	204

#### APENDICES.

- A. Características y Funciones Principales del programa C.C.
- B. Propiedades de la Transformada z para Sistemas Multiorden.
- C. Características de los elementos usados en la simulación.

CAPITULO I  
INTRODUCCION

## CAPITULO I : INTRODUCCION

Conocida es la importancia que tiene la simulación como una herramienta necesaria tanto para el análisis como para el diseño de sistemas.

Hay que recalcar que la simulación nos ofrece facilidades para el diseño e implementación de controladores discretos, puesto que estos previamente serán simulados y probados en el computador análogo, haciendo posible observar el efecto que se tendrá al variar distintos parámetros del controlador ya que se tendrá un acceso directo al controlador implementado. Además para nuestro caso un adecuado y óptimo aprovechamiento de los recursos del computador análogo-híbrido nos permitirá suplir de alguna manera la deficiencia que se tenga en cuanto a implementación física del laboratorio y por tanto se estará contribuyendo a una mayor y mejor enseñanza pedagógica.

Existen varios tipos de simulación : continua, discreta e híbrida que utilizan diverso tipo de herramientas orientadas principalmente a la utilización de computadores tanto analógicos como digitales. La mayoría de problemas encontrados en el estudio de sistemas continuos y discretos involucra ecuaciones matemáticas y/o juegos de ecuaciones cuya solución en mucho de los casos es difícil o

practicamente imposible de obtener por los métodos clásicos de resolución de ecuaciones. El sistema de computación Análogo/Híbrido EAI Mini AC permite la simulación de sistemas lineales y no lineales directamente a partir de una función de transferencia en el dominio de Laplace o en el dominio  $Z$  mediante circuitos electrónicos, analógicos, lógicos,



practicamente imposible de obtener por los métodos clásicos de resolución de ecuaciones. El sistema de computación Análogo/Híbrido EAI Mini AC permite la simulación de sistemas lineales y no lineales directamente a partir de una función de transferencia en el dominio de Laplace o en el dominio  $Z$  mediante circuitos electrónicos, analógicos, lógicos, componentes híbridos (interfase analógica-lógica) y controles de operación obteniéndose por tanto una solución rápida de ecuaciones de este tipo. De igual manera un computador digital también nos permite una rápida solución de esta clase de ecuaciones mediante comandos específicos de un programa especializado o a través de métodos seriados (programas que calculan, evalúan o grafican ciertas funciones o parámetros de un sistema).

En la actualidad son utilizados cada vez con mayor frecuencia métodos digitales para modelizar simular o controlar procesos continuos. Por lo tanto es importante analizar todos los aspectos relacionados a la vinculación existente entre un proceso analógico y su similar discreto.

El objetivo de la presente tesis es el de complementar los trabajos de simulación discreta e híbrida hasta ahora realizados en el Area de Control y Sistemas aprovechando para ello el Computador Análogo-Híbrido EAI Mini AC existente en el Laboratorio de Sistemas de Control. Además como una herramienta importantísima que nos ayudará en el estudio,

análisis y comprobación de la simulación digital se usará el paquete de programación: Computer Aided Control System Design (Programa CC) existente en el Area de Control y cuyas principales características se las describe en el apéndice A de esta tesis.

Puesto que como parte práctica de esta tesis se hará el Control Lineal de un Servomecanismo por medio de una acción de control discreta simulada se ha revisado la tesis del Ing. Jorge Bastidas "Estudio teórico-experimental de un servomecanismo de velocidad y posición". De igual manera para realizar la parte práctica y para posteriormente hacer un análisis de diferencias y similitudes entre el control discreto simulado y un controlador digital real se ha revisado y se han utilizado datos de la tesis: "Control Lineal con microprocesador para el servomecanismo MOTOMATIC MCSL 100" de la Ing. Lucía Soto.

En lo que se refiere al contenido mismo de este trabajo en el Capítulo II se hará una descripción de los distintos métodos de discretización, concretamente se analizará 9 métodos, los mismos que serán desarrollados analíticamente. También se estudiarán ciertos conceptos teóricos relacionados con la simulación discreta de sistemas continuos, muestreo, resolución de ecuaciones de diferencias, así como con los sistemas muestreados simples y de multi orden. Todo esto será comprobado por el Programa CC lo cual nos permitirá a la vez

probar la validez de dicho programa. El Programa CC abarca gran parte del estudio de los Sistemas de Control, pero para la presente tesis solo se utilizarán los principales comandos necesarios para el desarrollo de la misma y que serán descritos en detalle en el apéndice A. Todo esto servirá como un soporte para el desarrollo de los capítulos posteriores. Además en este capítulo se aplicarán los diversos métodos de discretización a una planta continua para poder hacer un análisis comparativo entre los mismos, también se verá el efecto que se tiene al variar el período de muestreo ya sea en un sistema de lazo abierto cómo en un sistema de lazo cerrado y se darán criterios para seleccionar el período de muestreo óptimo.

El capítulo III es el más importante de esta tesis, pues se simulará en el computador Análogo-Híbrido plantas o sistemas discretos y muestreados. Se describirá la metodología de la simulación, se simularán sistemas discretos en el Espacio de Estado, se obtendrá la respuesta a una función de entrada determinada, se resolverán ecuaciones de diferencias así como se determinará las restricciones y limitaciones existentes en la simulación. En este capítulo también se simularán los distintos métodos de discretización y en base a los resultados gráficos y numéricos se podrán comparar y verificar con los resultados que se obtengan con el Programa CC.

En el capítulo IV se describen distintos tipos de

controladores discretos que pueden ser simulados en el EAI Mini AC y su correspondiente aplicación a una planta continua tanto real como simulada ; además se describirá una metodología a implementarse. Finalmente como parte práctica a esta tesis se realizará el control de posición y de velocidad del Motomatic. En cuanto a los rangos de velocidad y posición sobre los cuales se efectúa el control se los describirá en detalle en este capítulo, y complementarias se hará un análisis comparativo con un control discreto real.

Por último en el capítulo V se darán criterios sobre el efecto teórico que se tiene al variar el período de muestreo en sistemas discretos y muestreados (Programa CC) , el efecto real que se tiene en la simulación al variar dicho período en el Computador Análogo-Híbrido y finalmente el efecto verdadero que se tiene en una planta continua con un controlador discreto real (Tesis de la Ing. Lucía Soto). También se emitirán criterios que deben tomarse en cuenta para el escogitamiento óptimo del período de muestreo, además de las conclusiones y recomendaciones de este trabajo.

## C A P I T U L O     I I

### SIMULACION DISCRETA UTILIZANDO UN COMPUTADOR DIGITAL

#### 2.1    Introducción.

##### 2.1.1 Muestreo y Simulación.

##### 2.1.2 Simulación Digital de Sistemas Análogos.

##### 2.1.3 Teorema del Muestreo (Shannon).

#### 2.2    Métodos de discretización.

##### 2.2.1 Métodos de Integración numérica.

##### 2.2.2 Transformada invariante al impulso.

##### 2.2.3 Reconstructores (Retenedores-Equivalentes).

##### 2.2.4 Correspondencia de Polos y Ceros (Mapeo).

#### 2.3    Resolución de Ecuaciones de Diferencias.

#### 2.4    Análisis de Sistemas Muestreados.

##### 2.4.1 Sistemas Muestreados Multirango Lentos-Rápidos.

##### 2.4.2 Sistemas Muestreados Multirango Rápidos-Lentos.

##### 2.4.3 Sistemas Multirango con Elementos enteramente Digitales.

#### 2.5    Conclusiones.

## CAPITULO II

SIMULACION DISCRETA UTILIZANDO UN COMPUTADOR DIGITAL

## 2.1. INTRODUCCION.-

El objetivo de este capítulo es realizar la simulación de sistemas discretos y muestreados mediante un computador digital para lo cual se aprovechará de los recursos que nos ofrece el programa C.C., el mismo que además servirá como un sustento teórico para el desarrollo de los siguientes capítulos. En primer lugar se darán ciertos conceptos teóricos de: muestreo, simulación discreta, período de muestreo (Teorema de Shannon) los mismos que servirán de sustento para el desarrollo del resto de numerales. Luego se hará una descripción teórica de los distintos métodos de discretización y su comprobación mediante el programa C.C.; se hará un análisis comparativo de los distintos métodos, el efecto que se tiene al variar el período de muestreo, escogitamiento del período de muestreo, etc.

Posteriormente se estudiará las ecuaciones de diferencias tanto teóricamente como mediante el programa C.C. Finalmente se verán a los sistemas muestreados tanto simples como los de multiorden y de igual manera a los casos anteriores, nos valdremos del programa C.C. para su comprobación.

El programa en mención no sólo que nos servirá para la comprobación de las partes teóricas sino que además nos ayudará en el análisis, diseño y desarrollo mismo de sistemas análogos y discretos, por tanto al comprobarse la validez del programa se convertirá en una importante herramienta para un rápido desarrollo de los capítulos posteriores.

### 2.1.1. Muestreo y Simulación.-

Un muestreador ideal es definido como un switch el cual se cierra y se abre instantáneamente, por un tiempo de duración cero, cada  $T$  segundos. Este muestreador deberá ir seguido por un retenedor. La salida de un muestreador ideal puede ser escrita

como:

$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(nT) \delta(t - nT) = f(t) \delta_T(t) \quad (\text{Ec. 2.1})$$

donde  $f(t)$  es la entrada del muestreador y se asume que empieza a ser muestreada en el instante  $t=0$ . Tomando la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación (2.1) se obtiene: la transformada de Laplace de la salida del muestreador ideal

$$F^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(nT) e^{-nTs} \quad (\text{Ec. 2.2a})$$

Deduciendo  $F^*(s)$  a partir de un modulador de amplitud

de pulsos se puede expresar de la siguiente manera:

$$F^*(s) = 1/T \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(s + jn\omega_s) \quad (\text{Ec. 2.2b})$$

En la figura 2.1 se muestran la entrada y salida típicas de un muestreador ideal.

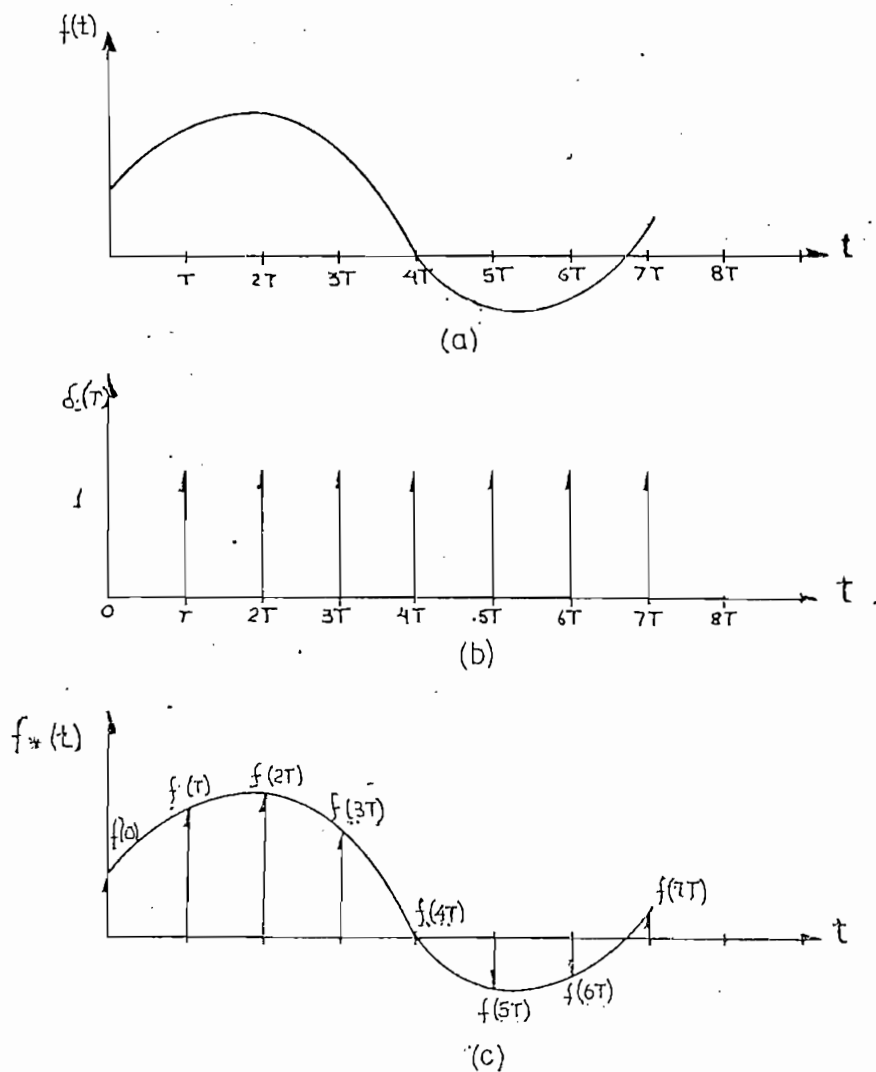


Fig. 2.1 (a) Señal de entrada al muestreador ideal  
 (b) Tren de impulsos unitarios  
 (c) Salida del muestreador ideal

$$f^*(t) = f(t) \delta_T(t)$$



La salida del muestreador ideal es un tren de impulsos con las respectivas intensidades de los impulsos igual a las magnitudes de la señal de entrada en los correspondientes instantes de muestreo. Por tanto una función impulso se define aquella que tiene un ancho de pulso cero y un pulso de amplitud infinita.

De la expresión (2.1)  $f(nT)$  es una secuencia que se forma por muestreo de  $f(t)$  y la definimos igual a:

$$f(nT) = f[n]$$

Si en la expresión (2.2) reemplazamos la exponencial  $e^{sT}$  por  $Z$ , tal como se hace referencia en el procedimiento a seguir para obtenerse la transformada  $Z$  de una función continua descrita mas adelante (métodos de discretización) se obtiene la transformada  $Z$   $F(z)$  de las muestras  $f(nT)$  de  $f(t)$

$$F^*(s = 1/T \ln z) = F(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(nT) z^{-n} \quad (\text{Ec. 2.3})$$

En general se puede decir que cualquier función que tiene transformada de Laplace también tiene una transformada  $z$ .

En la figura 2.2 se puede visualizar y entender de mejor manera la relación y la interpretación de las funciones  $f(t)$ ,  $f^*(t)$  y  $f(nT)$ .  $f(t)$  es la entrada análoga al muestreador ideal y tiene una transformada de Laplace  $F_a(s)$ .  $f^*(t)$  es la salida de un muestreador ideal la cual tiene una transformada de Laplace  $F^*(s)$  y finalmente  $f(nT)$  es una secuencia que se forma de las muestras de  $f(t)$  a la cual le corresponde la

transformada Z  $F(z)$  la misma que es igual a  $F^*(s)$  evaluada en  $s=1/T \ln z$ .

Si  $f(t)$  es una función exponencial de la forma  $f(t) = e^{-\alpha t}$

$$f(t) = e^{-\alpha t} \quad \longrightarrow \quad F_a(s) = \frac{1}{s + \alpha}$$

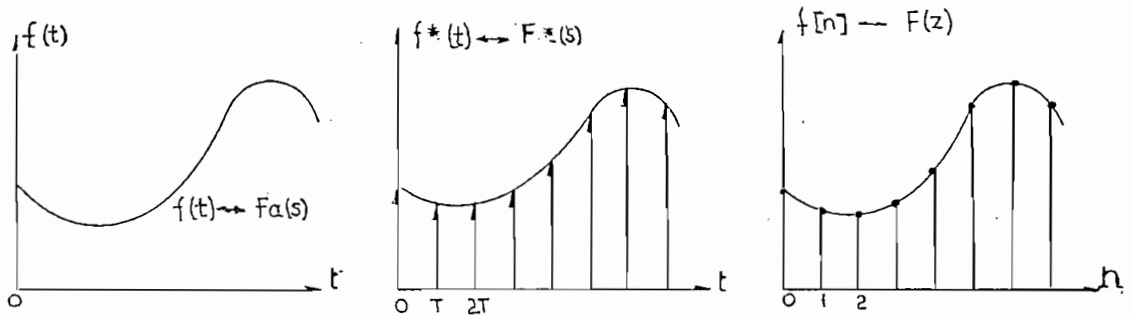


Fig. 2.2 Relación entre las señales  $f(t)$ ,  $f^*(t)$  y  $f(nT)$

por tanto  $f[n] = e^{-\alpha nT} = f(nT)$

De 2.3 se tiene que:

$$F(z) = 1 + e^{-\alpha T} z^{-1} + e^{-2\alpha T} z^{-2} + \dots + e^{-n\alpha T} z^{-n} = \frac{1}{1 - e^{-\alpha T} z^{-1}}$$

Puesto que las muestras de  $e^{-\alpha nT}$  forma una secuencia geométrica de radio  $a = e^{-\alpha T}$  y como la transformada Z de  $a^n$  es igual a  $1/(1 - az^{-1})$  se concluye que si  $f(t)$  es una suma de exponenciales

$$f(t) = \sum_{i=1}^m C_i e^{s_i t} \quad \longleftrightarrow \quad F_a(s) = \sum_{i=1}^m \frac{C_i}{s - s_i}$$

$$f[n] = \sum_{i=1}^m C_i e^{s_i nT} \quad \longleftrightarrow \quad F(z) = \sum_{i=1}^m \frac{C_i}{1 - e^{s_i T} z^{-1}} \quad (\text{Ec. 2.4})$$

donde los exponentes  $s_i$  son los polos de  $F_a(s)$  y las constantes  $C_i$  los coeficientes de la expansión en fracciones

parciales.

### 2.1.2 Simulación Digital de Sistemas Análogos

En la fig. 2.3, se muestra un sistema análogo  $L_a$  y un sistema discreto  $L_d$ . La entrada a  $L_a$  es una señal continua en el tiempo  $x(t)$ , y la entrada a  $L_d$  es una señal discreta  $x[n]$  igual a las muestras de  $x(t)$ .

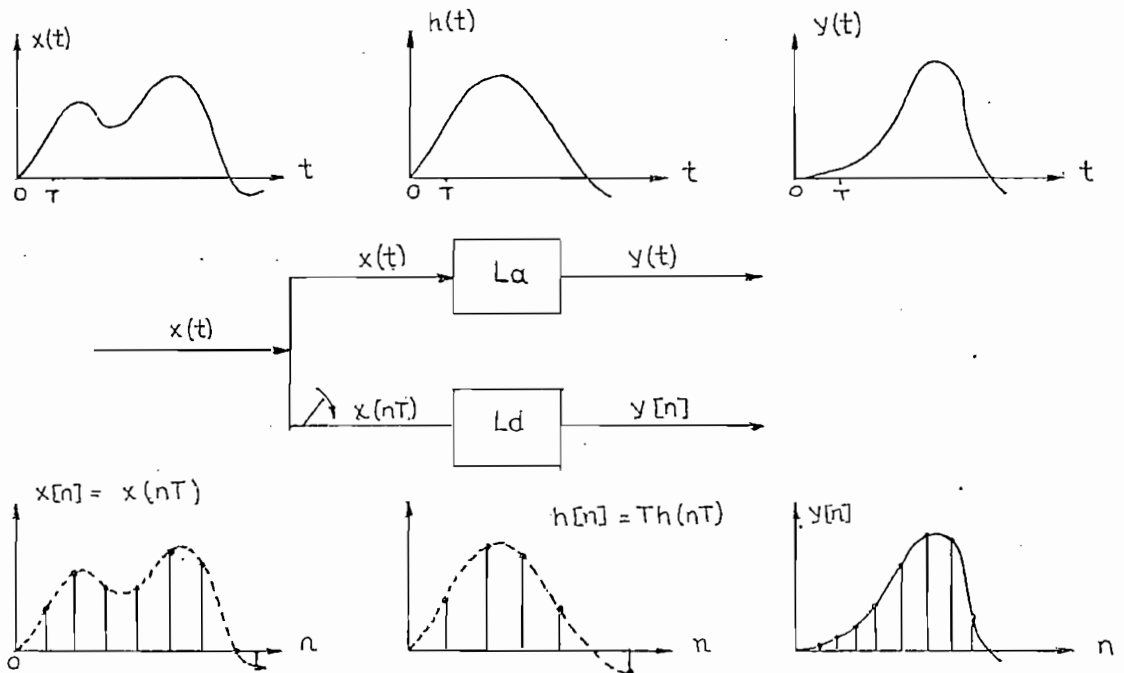


Fig. 2.3 Sistema Análogo  $L_a$  y su simulador discreto  $L_d$

$L_d$  es un simulador de  $L_a$ , si su salida  $y[n]$  es igual a las muestras  $Y(nT)$  de la salida  $y(t)$  de  $L_a$ . El problema de simulación es la determinación del sistema  $L_d$  dado el sistema  $L_a$ . Si denotamos por  $h(t)$  la respuesta impulsiva del sistema análogo  $L_a$  y por  $h[n]$  la respuesta impulsiva del sistema discreto  $L_d$ . Se puede demostrar que si  $h[n]$  es igual a las

muestras de  $Th(t)$ .

$$h[n] = Th(nT) \quad (\text{Ec. 2.5})$$

y si  $T$  es suficientemente pequeño,  $L_d$  es un simulador aproximado de  $L_a$ , esto es

$$Y[n] \approx Y(nT) \quad (\text{Ec. 2.6})$$

Este método de simulación está basado en la aproximación de la respuesta de estado cero de  $Y(t)$  del sistema  $L_a$ :  
La salida  $Y(t)$  de un sistema puede ser escrito como una integral

$$Y(t) = \int_0^{\infty} X(t-\tau) h(\tau) d\tau \quad (\text{Ec. 2.7})$$

Si  $h(t) = 0$  para  $t < 0$ .

Para un tiempo dado  $t$ , la integral 2.7 es el area total bajo la curva

$$W(\tau) = X(t-\tau) h(\tau)$$

donde la variable de integración es  $\tau$ . Es bien conocido que esta área puede ser aproximada por una suma:

$$\int_0^{\infty} W(\tau) d\tau \approx T [W(0) + W(T) + \dots + W(KT) + \dots] \quad (\text{Ec. 2.8})$$

La curva  $w(\tau)$  se aproxima por una función escalera y se mantiene si el intervalo  $T$  es suficientemente pequeño.

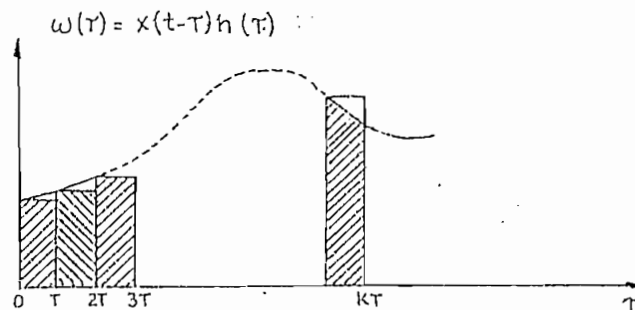


Fig. 2.4 Curva  $W(\tau)$  aproximada por funciones escaleras

$$Y(t) = \int_0^{\infty} X(t-\tau) h(\tau) d\tau \approx \sum_{n=0}^{\infty} T W(nT)$$

Insertando (2.8) en (2.7) se obtiene:

$$Y(t) \approx Y_T(t) \quad (\text{Ec. 2.9})$$

$$Y_T(t) = T [ X(t) h(0) + x(t-T) h(T) + \dots + X(t-KT) h(KT) + \dots ] \quad (\text{Ec. 2.10})$$

Si la entrada  $x(t)$  se aplica en  $t = 0$ , luego  $x(t-KT) = 0$  para  $KT > t$ , por tanto todos los términos en 2.10 son igual a cero para  $K > t/T$ .

Por tanto se tiene que aproximar la integral 2.7 por la sumatoria  $Y_T(t)$  dada por la ecuación 2.10. Se probará más adelante que  $Y_T(t)$  es la salida de un sistema análogo (llamado sistema muestreado).

Haciendo  $t = nT$  en 2.10 se obtiene:

$$Y_T(nT) = \sum_{k=0}^n T h(kT) X(nT - kT) \quad (\text{Ec. 2.11})$$

El sumatorio anterior es la salida  $Y[n]$  de un sistema discreto con entrada  $X(nT)$  y la respuesta impulsiva muestreada  $h[n] = T h(nT)$  de  $h(t)$ . Este sistema es el simulador discreto  $L_d$  del sistema análogo  $L_a$  dado por la Ec. 2.7 y la función del sistema es la sumatoria

$$H(z) = T \sum_{n=0}^{\infty} h(nT) z^{-n} \quad (\text{Ec. 2.12})$$

La aproximación de la integral de convolución (2.7) dada por

la sumatoria (2.10) nos conduce a la aproximación:

$$Y(nT) \approx Y_T(nT) = Y[n]$$

Esta aproximación es válida si la entrada  $x(t)$  y la respuesta impulsiva  $h(t)$  son aproximadamente constantes en cualquier intervalo de longitud  $T$ .

Si la función del sistema  $H_a(s)$  del sistema análogo se expande en fracciones parciales

$$H_a(s) = \sum_{i=1}^m \frac{C_i}{s - S_i}$$

Luego de (2.4) y (2.5) la función del sistema  $H(z)$  del simulador está dada por:

$$H(z) = \sum_{i=1}^m \frac{C_i T}{1 - e^{s_i T} z^{-1}} \quad (\text{Ec. 2.13})$$

Antes de discutir sobre la elección del período de muestreo mencionaremos el teorema del Muestreo de Shannon.

### 2.1.3. Teorema del Muestreo de Shannon.-

Teóricamente no existe un límite superior en la frecuencia de muestreo aunque cualquier muestreador tiene un límite máximo de frecuencia de muestreo dada por su estructura física. Este teorema nos da la mínima frecuencia de muestreo para reconstruir la señal original a partir de una señal muestreada.

Supongamos que la señal de entrada es  $f(t)$  y tiene la

transformada  $F(s)$ . Esta señal tiene el espectro de frecuencias que se ve en la figura 2.5. Esta señal  $f(t)$  no contiene ningún componente de frecuencia por encima de  $\omega_c$  rad/seg.

El teorema de muestreo dice que la frecuencia de muestreo más baja para una posible reconstrucción es  $2\omega_c$ , donde  $\omega_c$  es la frecuencia más alta contenida en  $f(t)$ , es decir Si  $\omega_s = 2\pi/T > 2\omega_c$  donde  $T$  es el período de muestreo, se puede reconstruir plenamente la señal a partir de la señal muestreada  $f^*(t)$ .

En la práctica sin embargo, la estabilidad de sistemas de lazo cerrado, hace que se escoja frecuencias de muestreo mucho más altas que la frecuencia mínima requerida, como se mostrará mas adelante mediante algunos ejemplos.

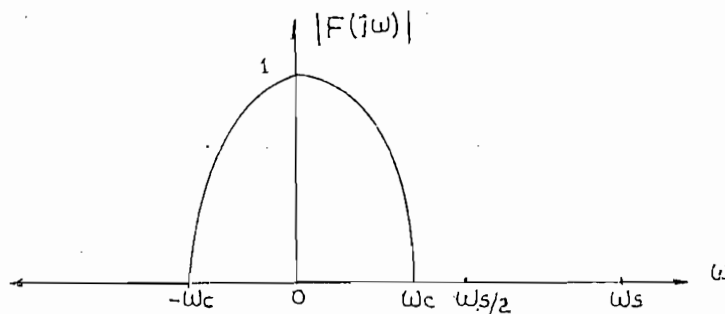


Fig. 2.5 Espectro de frecuencias de la señal continua  $f(t)$ .

La señal muestreada  $f^*(t)$  está dada también por la expresión (2.2b), es decir:

$$F^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(s + jn\omega_s)$$

reemplazando  $s = j\omega$  es esta última ecuación, se tiene el espectro de frecuencias de  $F^*(s)$  del modo siguiente:

$$|F^*(j\omega)| = \frac{1}{T} \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} F[j(\omega + n\omega_s)] \right| \quad (\text{Ec. 2.14})$$

$$= \dots + \frac{1}{T} |F[j(\omega - \omega_s)]| + \frac{1}{T} |F(j\omega)| + \frac{1}{T} |F[j(\omega + \omega_s)]| + \dots$$

En la figura 2.6 se representa el diagrama de  $|F^*(j\omega)|$  en función de  $\omega$  para dos valores de  $T$ . Cada diagrama de  $|F^*(j\omega)|$  en función de  $\omega$ , consiste en  $|F(j\omega)|$  repetido cada  $\omega_s = 2\pi/T$  rad/s. En el espectro de frecuencias se denomina componente primario a la componente  $|F(j\omega)|/T$  y componentes complementarias a las otras componentes  $|F[j(\omega \pm \omega_{sk})]|/T$ .

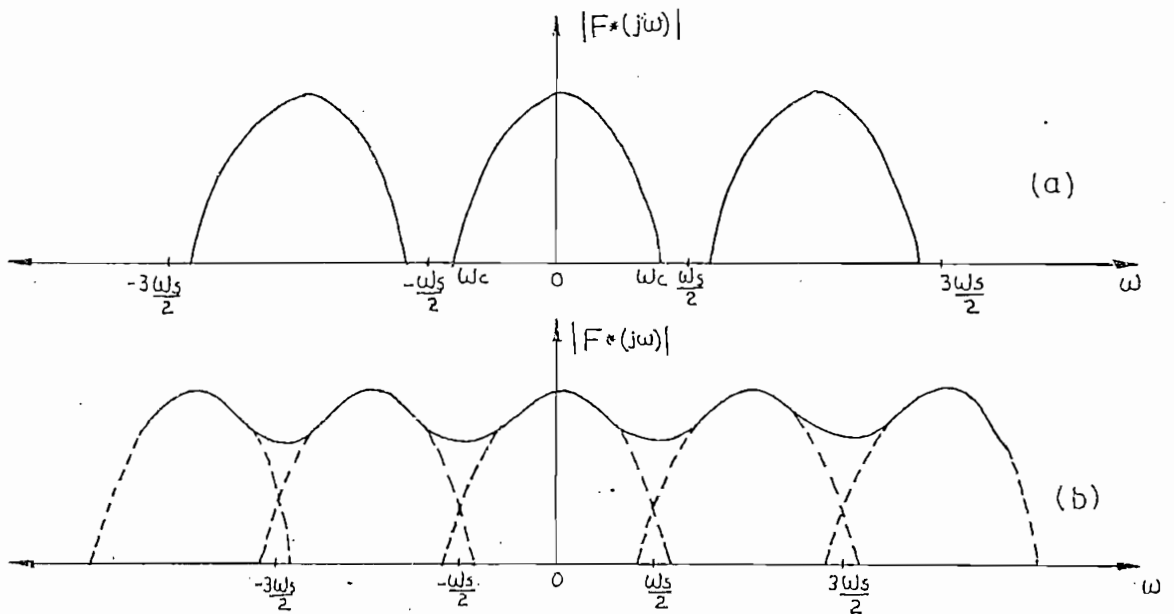


Fig. 2.6 Diagrama de  $|F^*(j\omega)|$  en función de  $\omega$  para dos valores de  $T$ .

Si  $\omega_s > 2\omega_c$  o  $T < (\pi/\omega_c)$  no se superpone ningún par de componentes de  $|F^*(j\omega)|$ . Así se preserva la forma original de  $|F(j\omega)|$  por el proceso de muestreo; (figura 2.6a). Si  $\omega_s <$



$2W_c$  o  $T > (\pi/W_c)$ , no aparece la forma original de  $|F(j\omega)|$  en el diagrama de  $|F^*(j\omega)|$  en función de  $\omega$ ; (figura 2.6b).

Es importante señalar dos propiedades de la salida de un muestreador ideal que se deducen de la expresión 2.2b y que nos ayudará a comprender el gráfico 2.7

- a)  $F(s)$  es una función periódica con período  $jW_c$ .
- b) Si la función  $F(s)$  tiene un polo en  $S = S_1$  luego  $F^*(s)$  tiene polos en  $S = S_1 + jnW_c$  donde  $n$  es un entero que toma valores desde  $-\infty$  hasta  $+\infty$ .

Entonces si  $T < (\pi/W_c)$  se puede reconstruir la señal continua con un filtro pasa-bajo tal que solo pasen señales de frecuencias por debajo de  $W_c$ , así se obtiene el espectro de frecuencias a la salida del filtro, como exactamente  $1/T$  veces  $|F^*(j\omega)|$ , después de haber muestreado la señal.

Puesto que en la mayor parte de sistemas de muestreo de datos se alimenta la señal muestreada a un circuito de retención el cual tiene las características de un filtro pasa-bajo, esto nos permite reducir las componentes de alta frecuencia, alisar la señal muestreada y reproducir a grandes rasgos la señal continua original.

En la figura 2.7 se muestra la característica de un filtro ideal pasa-bajo dado por el retenedor de orden cero  $G_h(s) = (1 - e^{-sT})/s$  para una frecuencia de muestreo

$$\omega_s = 2\pi/T.$$

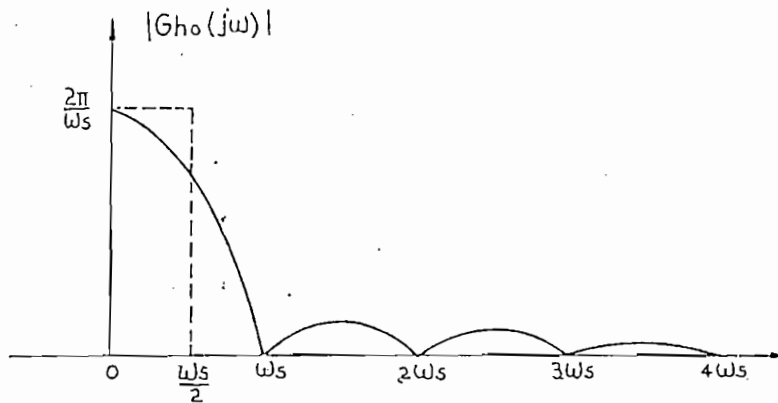


Fig. 2.7 Respuesta en frecuencia de un Retenedor de Orden Cero ideal

A continuación se hará un estudio teórico de los distintos métodos de discretización de una señal analógica.

## 2.2 Métodos de Discretización.-

La modelización discreta de un proceso analógico se limita a sistemas lineales e invariantes en el tiempo. La relación entre las señales de entrada y salida pueden establecerse en el dominio del tiempo ó de la frecuencia.

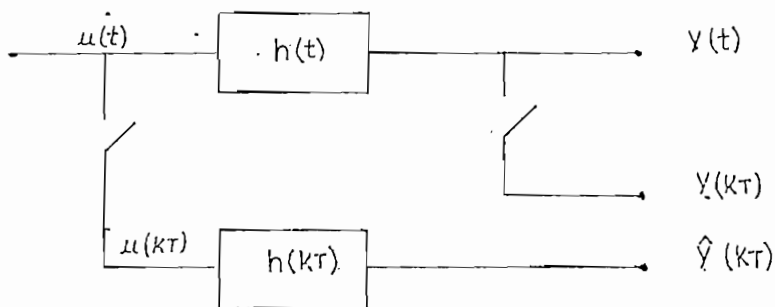


Fig. 2.8 Diagrama en bloques de la planta analógica y su modelo discreto.

Para un sistema lineal e invariante en el tiempo, las señales de entrada y salida para procesos monovariabiles se relacionan a través de una ecuación diferencial del tipo:

$$a_n Y^{(n)} + a_{n-1} Y^{(n-1)} + \dots + Y = b_m u^{(m)} + b_{m-1} u^{(m-1)} + \dots + b_0 u; \quad n \geq 0 \quad (\text{Ec. 2.15})$$

Si  $h(t)$  representa la respuesta impulsional del sistema la salida  $Y(t)$  puede hallarse a través de la integral de convolución

$$Y(t) = u(t) * h(t) \quad (\text{Ec. 2.16})$$

Si se usa la transformada de Laplace se tiene:

$$G(s) = L[h(t)] = Y(s) / U(s) \quad (\text{Ec. 2.17})$$

Para el caso del sistema dado por la ecuación (2.15) y considerando condiciones iniciales nulas, la función de transferencia está dada por

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_m s^m}{1 + a_1 s + \dots + a_n s^n} \quad (\text{Ec. 2.18})$$

Las raíces del numerador y denominador de la ecuación (2.18) representan respectivamente los ceros y polos del sistema analógico.

Dentro de los métodos de discretización se tiene a su vez varias alternativas:

### 2.2.1 Métodos de Integración Numérica.-

Los métodos de integración numérica consisten en aproximar las derivadas de la ecuación (2.15) por diferencias

finitas entre los valores que toma la señal en los instantes de muestreo. La ecuación diferencial (2.15) se transforma en una ecuación de diferencias de la forma:

$$\alpha_n Y(K-n) + \alpha_{n-1} Y(K-[n-1]) + \dots + Y(K) = \beta_m u(K-m) + \beta_{m-1} u(K-[m-1]) + \dots + \beta_0 u(K) \quad (\text{Ec. 2.19})$$

#### Diferencia hacia atrás.-

En esta aproximación se reemplazan las derivadas por la diferencia entre el instante actual y el correspondiente al instante de muestreo previo

$$\frac{d^n Y(KT)}{dt^n} = \left[ \frac{d^{n-1} Y(KT)}{dt^{n-1}} - \frac{d^{n-1} Y(KT-T)}{dt^{n-1}} \right] / T \quad (\text{Ec. 2.20})$$

Dado que en la transformada de Laplace la operación de derivación se transforma en el operador  $S$ , y asumiendo condiciones iniciales nulas como se mencionó anteriormente, se tiene:

$$s^n Y(KT) = \frac{s^{n-1} Y(KT) - s^{n-1} Y(KT - T)}{T}$$

Tomando la transformada  $Z$ ;

$$Z\{f(KT)\} = F(z) \quad \text{y} \quad Z\{f[(K-1)T]\} = z^{-1} F(z)$$

se llega a:

$$s^n Y(z) = \frac{s^{n-1} Y(z) - s^{n-1} z^{-1} Y(z)}{T}$$

resolviendo la última expresión se obtiene:

$$T = \frac{1 - z^{-1}}{s}$$

Por tanto la aproximación (2.20) equivale a reemplazar al operador  $s$  por la siguiente expresión:

$$s = \frac{z - 1}{zT} \quad (\text{Ec. 2.21})$$

Diferencia hacia adelante.-

En esta aproximación se reemplazan las derivadas por la diferencia entre el próximo muestreo y el correspondiente al instante del muestreo actual, o lo que es lo mismo tener la siguiente expresión:

$$\frac{d^n Y(KT - T)}{dt^n} = \left[ \frac{d^{n-1} Y(KT)}{dt^{n-1}} - \frac{d^{n-1} Y(KT-T)}{dt^{n-1}} \right] / T$$

Siguiendo un procedimiento similar al anterior, es decir con la transformada de Laplace y la transformada  $Z$  se deduce que la expresión anterior es equivalente a reemplazar al operador  $S$  por:

$$s = (z - 1)/T \quad (\text{Ec. 2.22})$$

Integración Trapezoidal.-

Este método también ha sido denominado método de Tustin ó transformación bilineal. Es el método de integración numérica de mayor precisión. La función o curva original puede ser aproximada sumando las áreas bajo los polígonos de ancho  $T$  como se verá más adelante en la figura 2.9 (c), puesto que en esta figura si se unen las extremidades consecutivas por líneas rectas se formarán trapecios cuyas áreas se describirán mediante la siguiente expresión:

$$A = \frac{1}{2} [ Y(KT) + Y(KT - T) ] \cdot T \quad (\text{Ec. 2.23})$$

Además de acuerdo a la interpretación geométrica de la integral así como del concepto de integración aproximado (fórmula de los trapecios), se puede establecer las siguientes igualdades:

$$\text{Si} \quad f(t) = \int_{KT-T}^{KT} Y(t) \cdot dt \quad (\text{Ec. 2.24})$$

$$\text{entonces } f'(t) = A$$

derivando ambos lados de la igualdad anterior se tiene:

$$Y(KT) - Y(KT - T) = T/2 [ Y'(KT) + Y'(KT - T) ] \quad (\text{Ec. 2.25})$$

Dado que en la transformada de Laplace la operación de derivación se transforma en el operador  $S$  asumiendo condiciones iniciales nulas y aplicando las transformadas  $Z$  respectivas se llega a obtener lo siguiente:

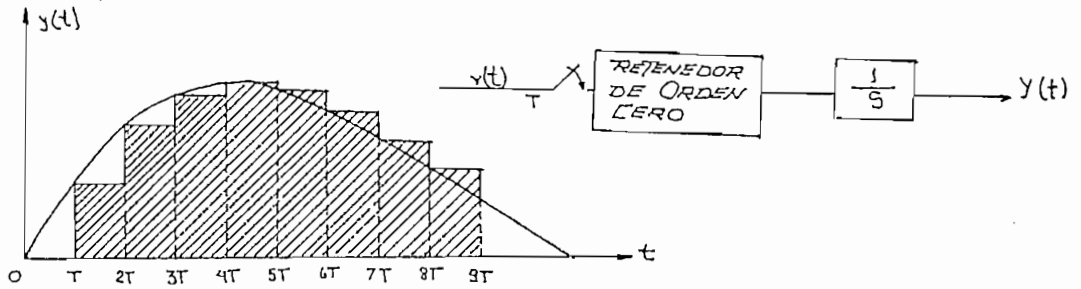
$$Y(z) - z^{-1}Y(z) = T/2 [ sY(z) + sz^{-1}Y(z) ]$$

Por tanto la transformación de la función de transferencia del sistema análogo al muestreado se obtiene mediante el siguiente reemplazo:

$$S = \frac{2}{T} \times \frac{z - 1}{z + 1} \quad (\text{Ec. 2.26})$$

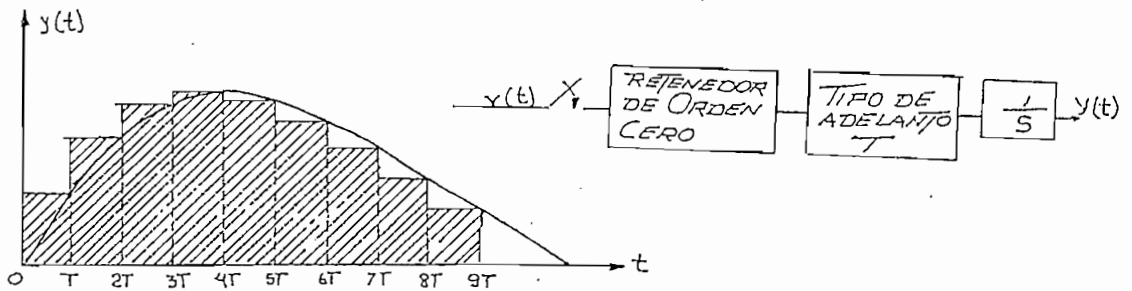
En la figura 2.9 (a), (b) y (c) se muestran los tipos de integración numérica descritos anteriormente, además se dan sus equivalencias resultantes que se obtienen al insertar diferente tipos de muestreadores-retenedores antes de cada integrador. Se define previamente la siguiente relación:

$$Y(s) = \int_0^{\infty} y(t) dt \quad \text{es decir} \quad Y(s)/R(s) = 1/s$$



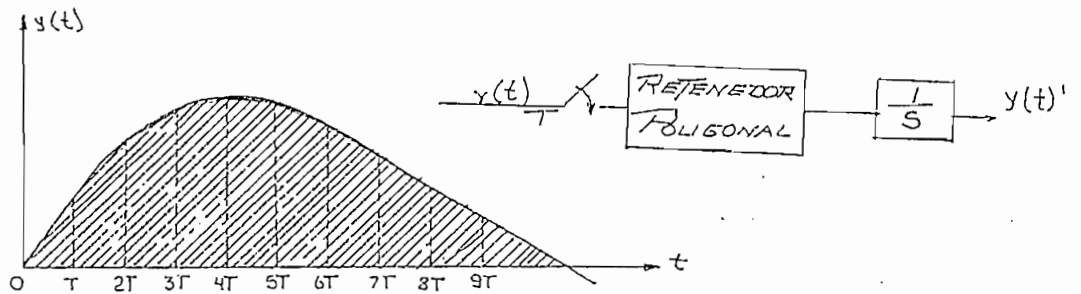
$$\frac{Y(z)}{R(z)} = (1-z^{-1}) Z\left[\frac{1}{s^2}\right] = \frac{T}{z-1}$$

(a) Integración Numérica; rectangular hacia adelante



$$\frac{Y(z)}{R(z)} = z(1-z^{-1}) \cdot Z\left[\frac{1}{s^2}\right] = \frac{Tz}{z-1}$$

(b) Integración Numérica; rectangular hacia atrás



$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{z(1-z^{-1})^2}{T} \cdot Z\left[\frac{1}{s^3}\right] = \frac{T}{2} \frac{z+1}{z-1}$$

(c) Integración Numérica Trapezoidal

Fig. 2.9 Métodos de Integración Numérica

El modelo discreto del sistema simulado deberá ser estable indiferente del método de integración numérica escogido. Aunque en general el efecto sobre estabilidad debido a los varios esquemas de integración numérica dependerá de la función de transferencia del sistema continuo a ser simulado. Por ejemplo si consideramos el sistema de la figura 2.10, para el caso de la integración numérica rectangular

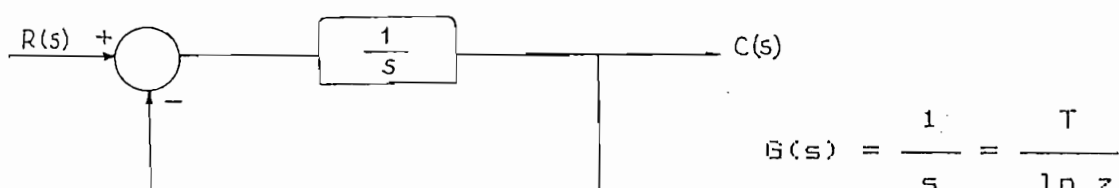


Fig. 2.10 Simple sistema integrador

hacia atrás el modelo del sistema continuo siempre será estable, para todo valor de  $T$ , ya que las raíces de la ecuación características permanecen en el interior del círculo unitario. Para el caso del método rectangular hacia adelante, el sistema será inestable para  $T \geq 2$ , en cambio para el caso de la integración trapezoidal el sistema vuelve a ser estable para todo valor de  $T$  entre 0 e infinito. En general se pueden usar métodos de integración numérica de alto orden aunque estos métodos puede causar serios problemas de estabilidad en los modelos simulados.

#### Prewarped Tustin.-

Es una transformación bilineal la cual da un paso adicional para pasar al eje de frecuencias. Esta transformación



bilineal es aplicada a  $G(xs)$ ; donde

$$\alpha = \frac{W_0 T/2}{\tan (W_0 T/2)}$$

la cual resulta de las siguientes identidades:

$$G(z) \Big|_{z=1} = G(s) \Big|_{s=0}$$

$$G(z) \Big|_{z=e^{jW_0 T}} = G(s) \Big|_{s=jW_0}$$

Por ejemplo si consideramos  $G(s) = s$ , aplicando la transformación bilineal a  $G(xs)$  se tiene:

$$G(z) = G(xs) \Big|_{s = \alpha \frac{z-1}{z+1}}$$

por tanto  $G(s) \Big|_{s=0} = G(z) \Big|_{z=1} = 0$  (de la primera identidad)

De la segunda identidad se tiene que:

$$G(s) \Big|_{s=jW_0} = jW_0 \quad (\text{Ec. 2.27})$$

$$G(z) \Big|_{z=e^{jW_0 T}} = \frac{\alpha^2}{T} \left( \frac{e^{jW_0 T} - 1}{e^{jW_0 T} + 1} \right) \quad (\text{Ec. 2.28})$$

Igualando las expresiones 2.27 y 2.28 y aplicando las identidades:

$$e^{jW_0 T} = \cos W_0 T + j \operatorname{Sen} W_0 T \quad y$$

$$\tan (W_0 T/2) = \frac{\operatorname{Sen} (W_0 T/2)}{\operatorname{Cos} (W_0 T/2)}$$

se llega a determinar que:

$$\alpha = \frac{(W_0 T/2)}{\tan (W_0 T/2)} \quad (\text{Ec. 2.29})$$

Será importante usar este método cuando vayamos a realizar el análisis del sistema a ser simulado en el dominio de la frecuencia, pues este método nos permite tener las

siguientes ventajas:

- a) Forza a la misma ganancia y cambios de fase de la entrada análoga sinusoidal  $U(t) = \text{Cos}(\omega_0 t)$  y de la entrada discreto  $u(n) = \text{Cos}(\omega_0 nT)$
- b) Mantiene la misma frecuencia crítica  $\omega_0$  para ambos sistemas discreto y análogo.
- c) Mantiene la misma fase a la frecuencia de sobrecruce de ambas funciones de transferencia análoga y discreto.

Para entender de mejor manera las anteriores afirmaciones es necesario hacer las siguientes acotaciones:

Para realizar el análisis en el dominio de la frecuencia se debe reemplazar  $S$  en una función de transferencia por la relación:

$$s = \frac{(\omega_0 T/2)}{\tan(\omega_0 T/2)} \cdot \frac{2(z-1)}{T(z+1)} \quad (\text{Ec. 2.30})$$

Con esta relación se podrá mantener la misma fase a la frecuencia de sobrecruce tanto para el sistema discreto como para el análogo, cuando se analice la estabilidad absoluta y relativa del sistema de lazo cerrado mediante el Diagrama de Bode; es decir nos mantiene la misma frecuencia a la cual se obtiene el margen de ganancia y la fase de sobrecruce ( $180^\circ$ ); así mismo se mantiene tanto para el sistema continuo como para el discreto la misma frecuencia crítica  $\omega_0$ , es decir donde el lugar de las raíces interseca el círculo unitario en

el plano  $Z$  y que nos permitirá determinar la estabilidad de sistemas en lazo cerrado mediante el diagrama Polar.

Entonces cuando vayamos a analizar un sistema discreto en el dominio de la frecuencia, para que conserve las mismas características del sistema continuo a ser simulado anotadas anteriormente, se deberá previamente encontrar la frecuencia  $\omega_0$  ya sea crítica ó de sobrecruce según el caso y ésta reemplazarla en la expresión (2.30).

Estos métodos de integración numérica si bien son atractivos por permitir una rápida transformación del modelo continuo al discreto mediante una adecuada sustitución, sin embargo las características de ambas funciones de transferencias no siempre son comparables y, dependiendo de la aproximación utilizada así como del período de muestreo escogido, un sistema análogo estable puede conducir a un modelo discreto inestable ó viceversa.

### 2.2.2 Transformación Invariante al Impulso.- (Transformada $z$ )

Llamada también transformada  $z$  de los muestreos de la transformada inversa de Laplace. El modelo discreto es modelado tal que al aplicar a la entrada análoga del sistema  $G_i(s)$  un impulso de área unitaria aplicado al instante  $t = 0$ , la salida del modelo discreto coincida con las muestras de la salida del sistema analógico.

La transformada  $z$  para el estudio de sistemas discretos puede ser definido como la transformada de Laplace de una señal muestreada  $f^*(t)$  la misma que se obtiene a la salida de un muestreador ideal. La operación de tomar la transformada  $z$  de una función continua  $f(t)$  involucra los siguientes pasos:

- a)  $f(t)$  es muestreada por un muestreador ideal dando  $f^*(t)$
- b) Se toma la transformada de Laplace de  $f^*(t)$ , es decir:

$$F^*(s) = L [ f^*(t) ]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} f(KT) e^{-KTs}$$

- c) Se reemplaza  $e^{Ts}$  por  $Z$  en  $F^*(s)$  llegándose a determinar  $F(z)$

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(KT) z^{-k}$$

Existen tablas de la transformada  $z$  que nos permitirá obtener directamente el modelo discreto

$$G(z) = Z [ G(s) ] \quad (\text{Ec. 2.31})$$

### 2.2.3 Reconstructores (Retenedores - Equivalentes).-

Todos estos métodos están basados en la equivalencia mostrada en la figura 2.11. La secuencia  $u(n)$  es convertida a una señal analógica  $u(t)$  por un aparato retenedor con  $G_h(s)$  como función de transferencia, de otro modo conocido como conversor D/A. La entrada analógica  $u_1(t)$  es la entrada a un sistema analógico  $G_i(s)$  y luego su salida  $Y_i(t)$  es muestreada los mismos instantes como el primer muestreador. Los pasos

análogos intermedios pueden ser eliminados: la entrada discreto  $u(n)$  es transformada a la salida discreto  $Y_j(n)$  por el sistema  $G_j(z)$ .

Utilizando transformada  $z$  podemos hallar una equivalencia entre una planta analógica con reconstructor y un modelo discreto.

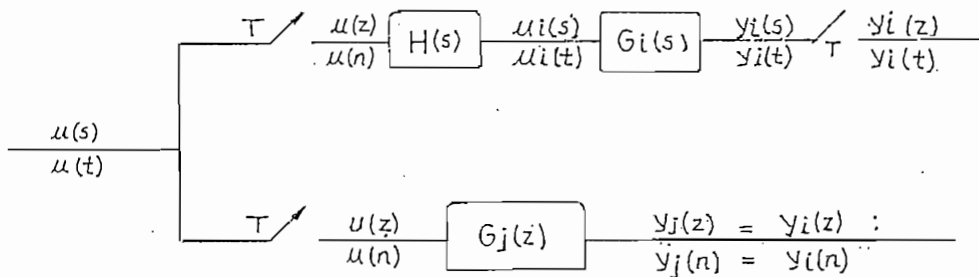


Fig. 2.11 Diagrama en bloques de la planta analógica con reconstructor y de un modelo discreto.

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \mathcal{Z}[G(s) \cdot G_h(s)] \quad (\text{Ec. 2.32})$$

Por lo tanto tendremos tantos modelos discretos como reconstructores y su precisión dependerá del tipo de señal de entrada.

Los reconstructores se utilizan operando en tiempo real y obedecen por tanto al principio de causalidad. Esto significa que el reconstructor no interpola entre puntos discretos de la señal analógica, como los métodos de integración numérica sino que extrapola a partir de las muestras más recientes hacia la próxima por venir.

Si la frecuencia de muestreo es suficientemente elevada (según se vio en el teorema de Shannon) con respecto al espectro de frecuencias de la señal, los diversos reconstructores darán salidas equivalentes y no habrá una diferencia apreciable entre las salidas de los diferentes modelos.

#### Reconstructor de orden Cero.-(Zero - Order - Hold)

Este reconstructor viene definido por la siguiente función:

$$G_{h_0}(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}$$

como sabemos que  $Z = e^{sT}$ , la función anterior puede ser descompuesta así:

$$G_1(z) = 1 - z^{-1} \quad \text{y} \quad G_2(s) = 1/s$$

entonces nos queda que:

$$G(z) = \frac{z - 1}{z} \cdot \mathcal{Z} \left[ \frac{G(s)}{s} \right] \quad \text{Ec. (2.33)}$$

#### Reconstructor de primer Orden.-(First - Order - Hold)

La función de este reconstructor viene definido de la siguiente forma:

$$G_{h_1}(s) = \left( \frac{1 - e^{-sT}}{s} \right) \left( s + \frac{1}{T} \right)$$

de manera similar al caso anterior, es decir haciendo  $z = e^{sT}$  y descomponiendo en dos funciones se obtiene:

$$G_1(z) = \frac{z - 1}{z} \quad G_2(s) = \frac{s + 1/T}{s}$$

Por tanto se tiene que:

$$G(z) = \left( \frac{z - 1}{z} \right) \cdot \mathcal{Z} \left[ \frac{s + 1/T}{s} G(s) \right] \quad (\text{Ec. 2.34})$$

#### Slewer Hold.-

Este reconstructor se define por la siguiente función:

$$G_{h_0}(s) = \left( \frac{1 - e^{-sT}}{s} \right)^2 \frac{1}{T}$$

Haciendo  $z = e^{sT}$  y descomponiendo se tiene:

$$G_1(z) = (1 - z^{-1})^2 \quad \text{y} \quad G_2(s) = \frac{1}{s^2 T}$$

Por tanto:

$$G(z) = \left( \frac{z - 1}{z} \right)^2 \cdot \mathcal{Z} \left( \frac{G(s)}{s^2 T} \right) \quad (\text{Ec. 2.35})$$

#### 2.2.4 Correspondencia de Polos y Ceros.- (Mapeo)

Aunque este método no tiene un sustento teórico preciso, es utilizado por su simplicidad. Conocida la función de transferencia del sistema análogo  $G(s)$ , se modela la función de transferencia discreta  $G(z)$  de modo tal que exista una correspondencia de polos y ceros en ambos planos dados por la transformación

$$z = e^{sT} \quad (\text{Ec. 2.36})$$

Para este método se usan las siguientes reglas:

- a) Polos  $P_0$  de  $G(s)$  se convierten en polos  $e^{P_0 T}$  de  $G(z)$ .
- b) Ceros  $Z_0$  de  $G(s)$  se convierten en ceros  $e^{Z_0 T}$  de  $G(z)$ .

- c) Ceros de  $G(s)$  en el infinito se convierten en ceros de  $G(z)$  en  $z = 1$ .
- d) El factor de ganancia del sistema discreto es seleccionado de modo que ambos sistemas posean igual ganancia a una frecuencia dada. Por ejemplo  $s = 0$

$$G(s)|_{s=0} = G(z)|_{z=1} \quad (\text{Ec. 2.37})$$

La regla (a) para mapeo de polos es una propiedad de un esquema de un retenedor equivalente; ya que de acuerdo a la transformada Z de un retenedor equivalente de cualquier orden nos introduce en el denominador factores de la forma  $[z - e^{-P_0 T}]$ , donde  $P_0$  es el polo de  $G(s)$ .

Ejemplo: si  $G(s) = 1/(5+s)$  y si consideramos un retenedor de orden cero  $G_{h_0}(s)$  entonces:

$$\begin{aligned} G(z) &= Z[G_{h_0}(s)G(s)] = (1 - z^{-1}) \cdot Z\left(\frac{1}{s(5+s)}\right) \\ &= \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{(z - e^{-5T})} \end{aligned}$$

La regla (b) para mapeo de ceros es una aproximación del esquema de un retenedor equivalente si el período de muestreo  $T$  es suficientemente pequeño ya que de acuerdo a la transformada Z para una función de la forma

$$G(s) = \frac{s - Z_0}{s - P_0}$$

nos introduce en el numerador un factor de la forma

$$[z - e^{+Z_0 T} \text{Cos } WT]$$

entonces si  $T$  es suficientemente pequeño  $\text{Cos } WT \rightarrow 1$  por tanto el factor se podría aproximar a  $[z - e^{+Z_0 T}]$ , que corresponde



al esquema de un retenedor equivalente.

La regla (c) nos evita tener más polos discreto que ceros, lo cual introduce un retardo indeseable.

La regla (d) nos permite tener idénticos comportamientos de los sistemas continuos y discretos a bajas frecuencias. Otra razón para usar este método es que la regla (c) es compartida por los métodos de integración trapezoidal y por el método Frewarped Tustin.

Es importante anotar que si en la expresión (2.33) se hace  $G(s) = 1/s$  se obtiene la equivalencia con el método de integración numérica rectangular hacia adelante que se muestra en la figura 2.9 (a).

Si en la misma expresión se inserta el operador  $Z$  (tiempo de adelanto  $T$ ) y se hace  $G(s) = 1/s$  se obtendrá la equivalencia con el método de integración numérica rectangular hacia atrás que se muestra en la figura 2.9 (b)

Finalmente si en la expresión 2.35 se inserta el operador  $Z$  (adelanto igual a  $T$ ) y se hace  $G(s) = 1/s$  entonces se llegará a obtener la equivalencia con el método de integración numérica trapezoidal que se muestra en la figura 2.9 (c).

Si en la función de transferencia obtenida al emplear

el reconstructor de orden cero se reemplaza a la exponencial por su desarrollo en serie limitado a dos términos así:

$$G_{h_0}(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s} = \frac{e^{sT} - 1}{se^{sT}}$$

$$\text{si } e^{sT} = 1 + sT + \frac{(sT)^2}{2!} + \frac{(sT)^3}{3!} + \dots \approx 1 + sT$$

y haciendo  $z = e^{sT}$  se obtiene:

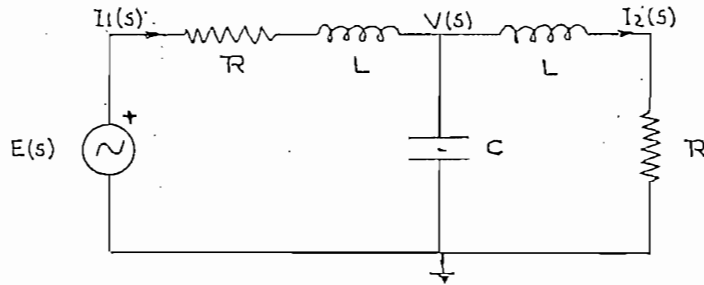
$$z = 1 + sT$$

que corresponde a la expresión utilizada en el método de integración numérica con aproximación rectangular hacia adelante.

Resumiendo se puede manifestar que de alguna manera existirá siempre relación entre los distintos métodos de discretización ya sea que se deduzca de otro ó sea una aproximación de otro ó que un método comparta propiedades con otro.

Para entender de mejor manera, realizar un análisis comparativo y comprobar los distintos métodos de discretización, nos valdremos del siguiente ejercicio de aplicación con la ayuda de algunos comandos del programador C.C. y en especial del comando CONVERT que analiza los diferentes métodos de discretización y que tiene la forma: CONVERT [,Gi, Gj, type, T, Wo]. Todos los comandos utilizados se describen en detalle en el apéndice A.

Ejemplo 2.1.- Se analiza el siguiente circuito:



$$\begin{aligned} R &= 1 \\ L &= 1 \\ C &= 2 \end{aligned}$$

$$G(s) = \frac{I_2(s)}{E(s)}$$

Fig. 2.12 Circuito con 2 mallas

Ecuaciones de Estado:

Se tiene 3 variables de estado: las dos corrientes a través de los inductores  $I_1(s)$  e  $I_2(s)$  y el voltaje del capacitor  $V(s)$ . Las ecuaciones de estado son:

$$(R + Ls) I_1(s) + V(s) = E(s)$$

$$(R + Ls) I_2(s) - V(s) = 0$$

$$I_1(s) - I_2(s) = Cs V(s)$$

Ecuaciones de Red:

$$(R + Ls) I_1(s) + \frac{1}{Cs} [I_1(s) - I_2(s)] = E(s)$$

$$(R + Ls) I_2(s) - \frac{1}{Cs} [I_1(s) - I_2(s)] = 0$$

Resolviendo para  $I_2(s)$  y reemplazando los valores de  $R$ ,  $L$  y  $C$  se obtiene:

$$G(s) = \frac{I_2(s)}{E(s)} = \frac{1/2}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1} \quad (\text{Ec. 2.38})$$

La respuesta a una función paso es:

$$r(t) = 0.5(1 - e^{-t} - 1.15e^{-0.5t} \text{Sen} 0.866t)U(t) \quad (\text{Ec. 2.39})$$

Esta respuesta obtenida al descomponer en fracciones parciales (2.38) y luego al tomar la transformada inversa de Laplace mediante tablas, se la puede obtener directamente mediante el comando `ILT` del programa C.C .

En la figura 2.13 se muestra la respuesta de  $G(s), I_2(s)$  a una entrada paso  $E(s)$ . Esta respuesta gráfica ha sido obtenida mediante el comando `TIME` del programa C.C.

La función  $G(s)$  dada por 2.38 será discretizada por los diferentes métodos de discretización descritos anteriormente. Mediante el comando `ENTER` se ingresa  $G(s)$ .

Si se expresa  $G(s)$  en forma de factores así:

$$G(s) = \frac{0.5}{(s + 1)(s^2 + s + 1)}$$

se obtiene las constantes del sistema así:

$W_n = 1$ ,  $\epsilon = 0.5$  y la constante de tiempo del sistema

$$r = 1/\epsilon W_n = 2$$

El comando `UNITARY` nos permitirá expresar una función  $G(s)$  en forma de factores. A continuación se muestran las funciones que resultan de discretizar  $G(s)$  por los distintos métodos utilizando el comando `CONVERT`:

$$G(s) = \frac{0.5}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}$$

$$G_1(z) = \frac{0.0005}{z^2 - 2.8z^2 + 2.62z - .819}$$

$$G_2(z) = \frac{4.095004E-04z^3}{z^3 - 2.8009z^2 + 2.6208z - .819}$$

$$G_3(z) = \frac{5.65549E-05(z + 1)(z + 1)(z + 1)}{z^3 - 2.80024z^2 + 2.6199z - .8187}$$

$$G_4(z) = \frac{5.669161E-05(z + 1)(z + 1)(z + 1)}{z^3 - 2.8000z^2 + 2.619652z - .8186624}$$

$$G_5(z) = \frac{1.13104E-04(z + 1)(z + 1)}{(z^2 - 1.8953z + .9048)(z - .9048)}$$

$$G_7(z) = \frac{2.33748E-03z(z + .935515)}{(z^2 - 1.8953z + .9048)(z - .9048)}$$

$$G_8(z) = \frac{7.924E-05(z^2 + 3.8039z + .9048)}{(z^2 - 1.8953z + .9048)(z - .9048)}$$

$$G_9(z) = \frac{9.926E-05(z^3 + 4.369z^2 - .2677z - .5435)}{z(z^2 - 1.89z + .9048)(z - .9048)}$$

$$G_{10}(z) = \frac{2.0013E-05(z^3 + 10.566z^2 + 10.15z + .8869)}{z(z^2 - 1.8953z + .9048)(z - .9048)}$$

$$G_{71}(z) = \frac{2.33745E-04z(z + .935515)}{(z^2 - 1.89532z + .9048)(z - .9048)}$$

Respuesta a una función paso de  $U(s) = 12(s)/E(s)$

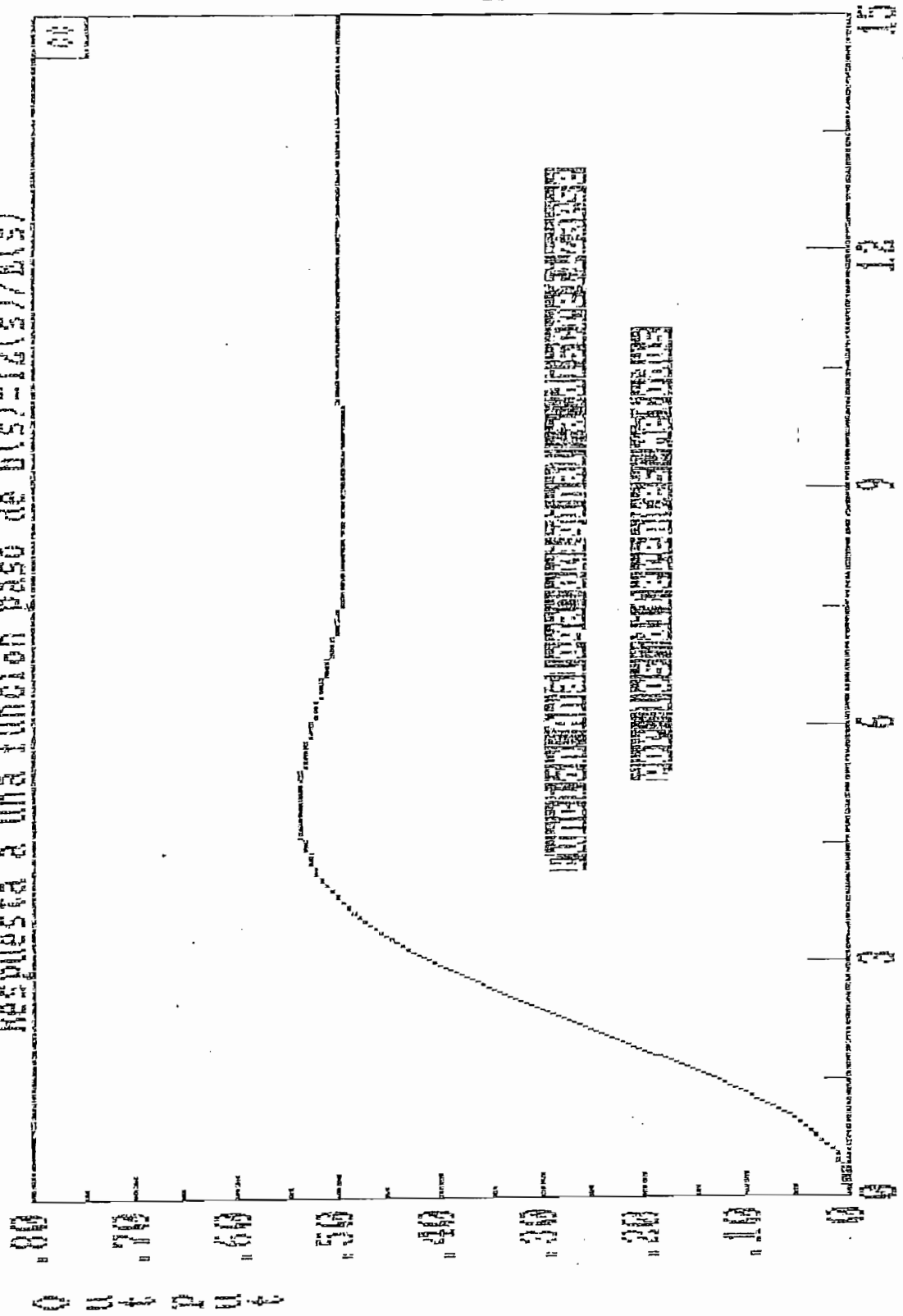


Fig. 2.13 Respuesta a una Función paso de  $G(s)$ .

Time

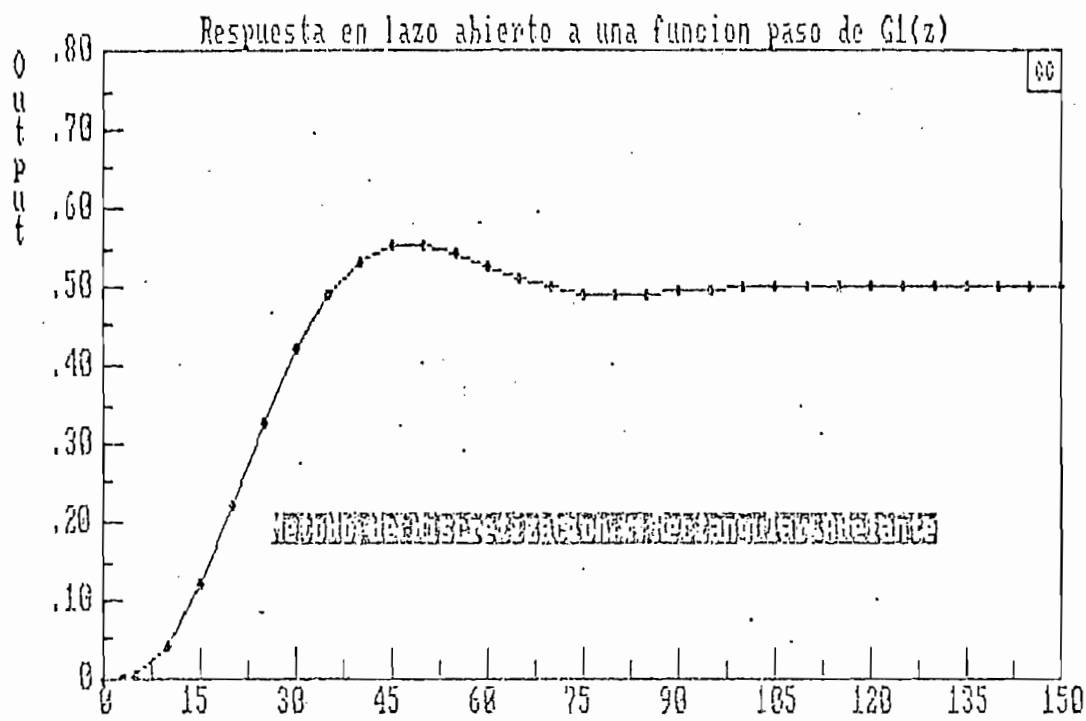


Fig. 2.14 Respuesta a una función paso de  $G_1(z)$ . n, Time=n\*T

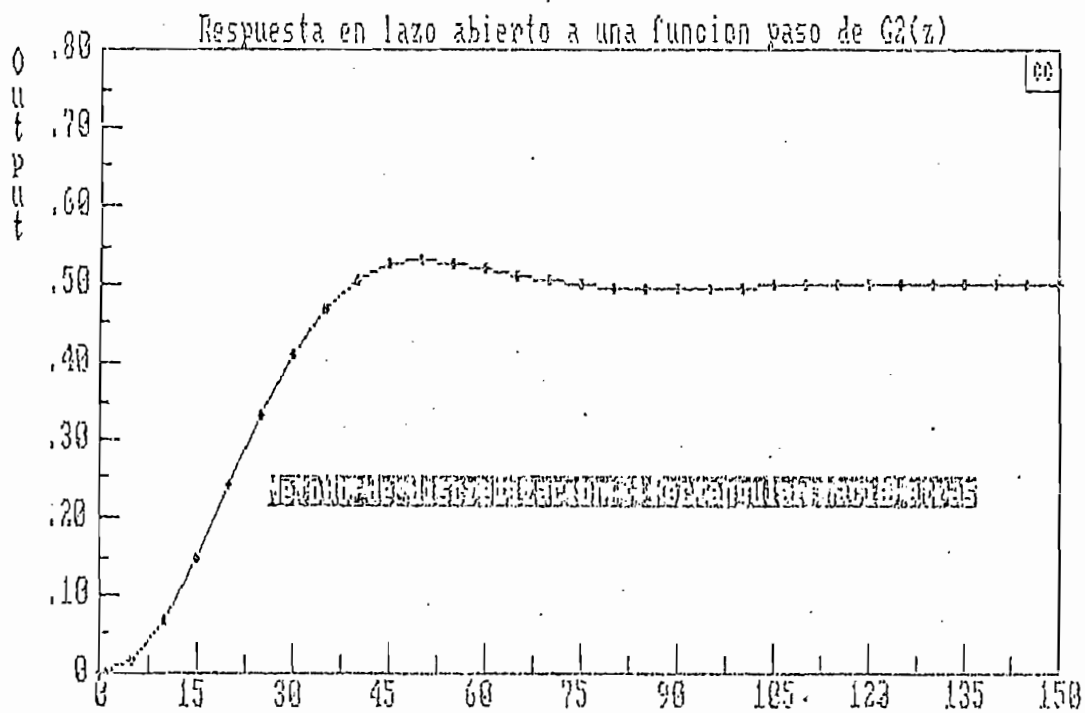


Fig. 2.15 Respuesta a una función paso de  $G_2(z)$ . n, Time=n\*T

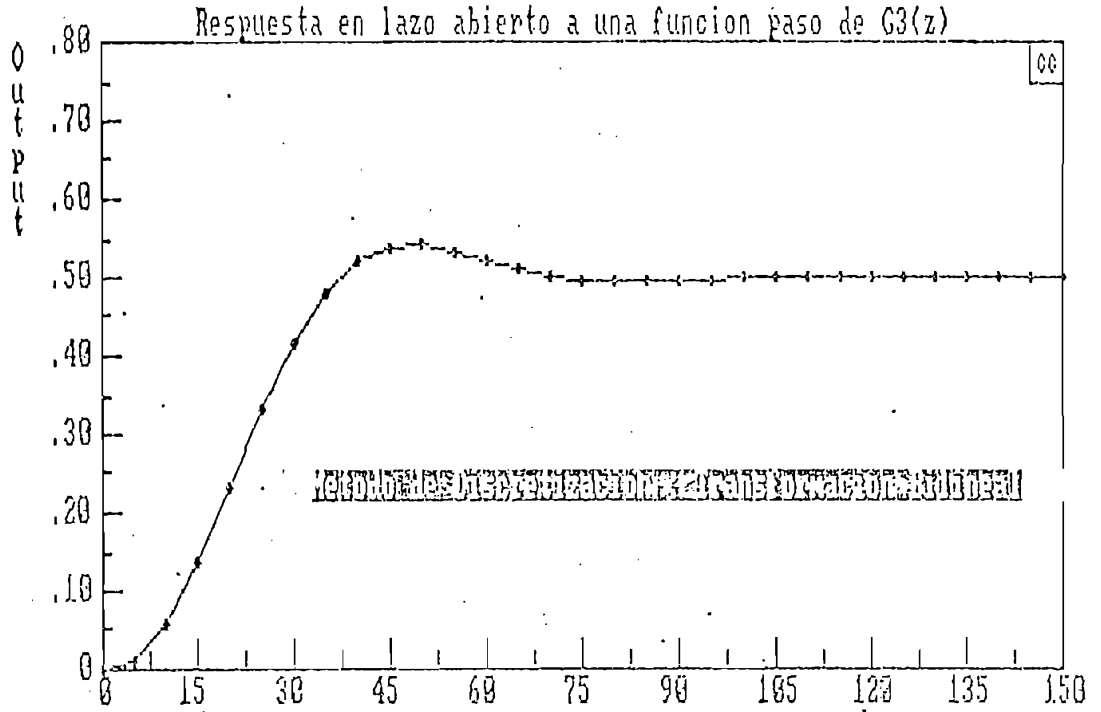


Fig 2.16 Respuesta a una Función paso de  $G3(z)$ . n. Time= $n \cdot T$

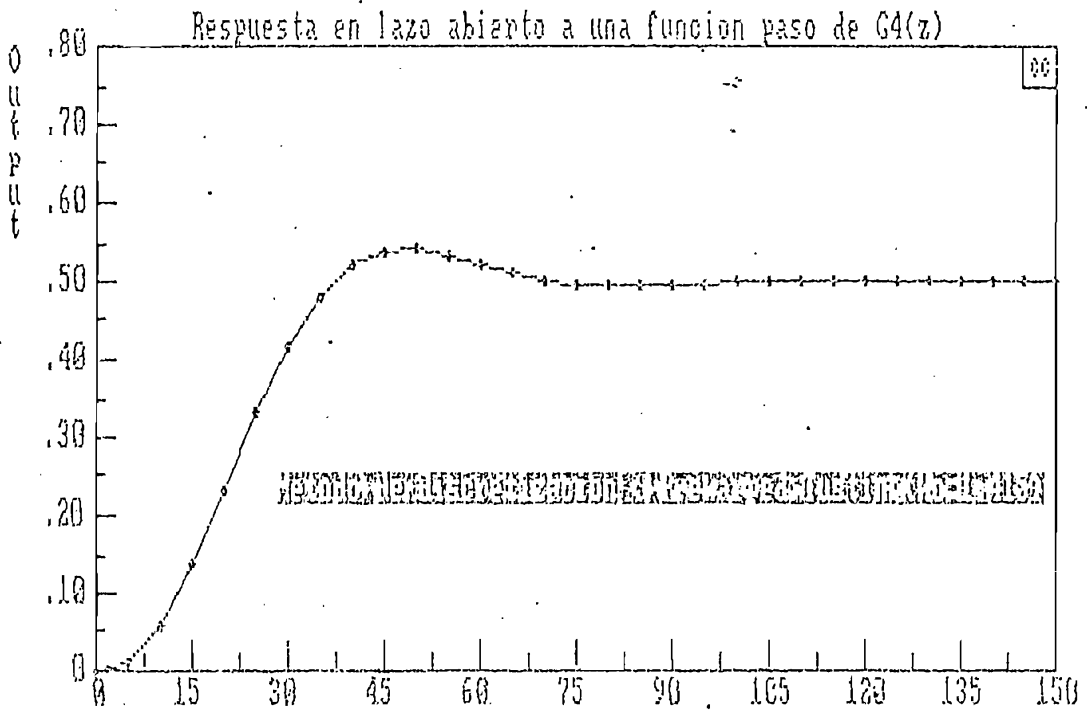


Fig. 2.17 Respuesta a una Función paso de  $G4(z)$ . n. Time= $n \cdot T$



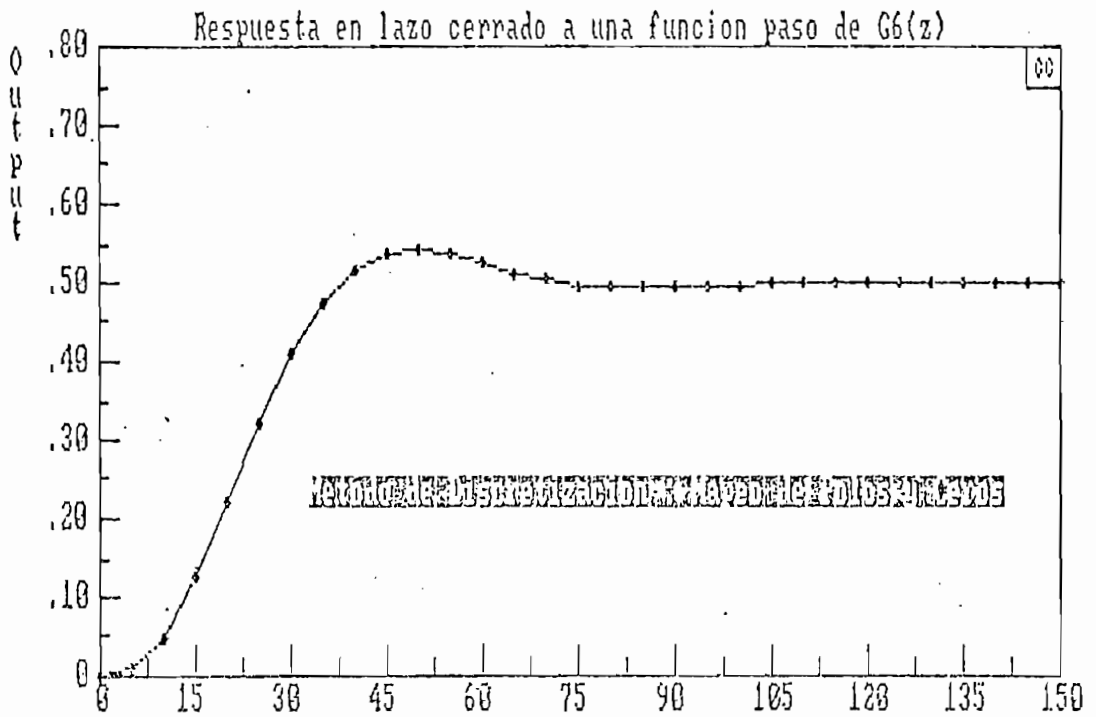


Fig. 2.18 Respuesta a una función paso de  $G6(z)$ .  $n$ , Time= $n \times T$

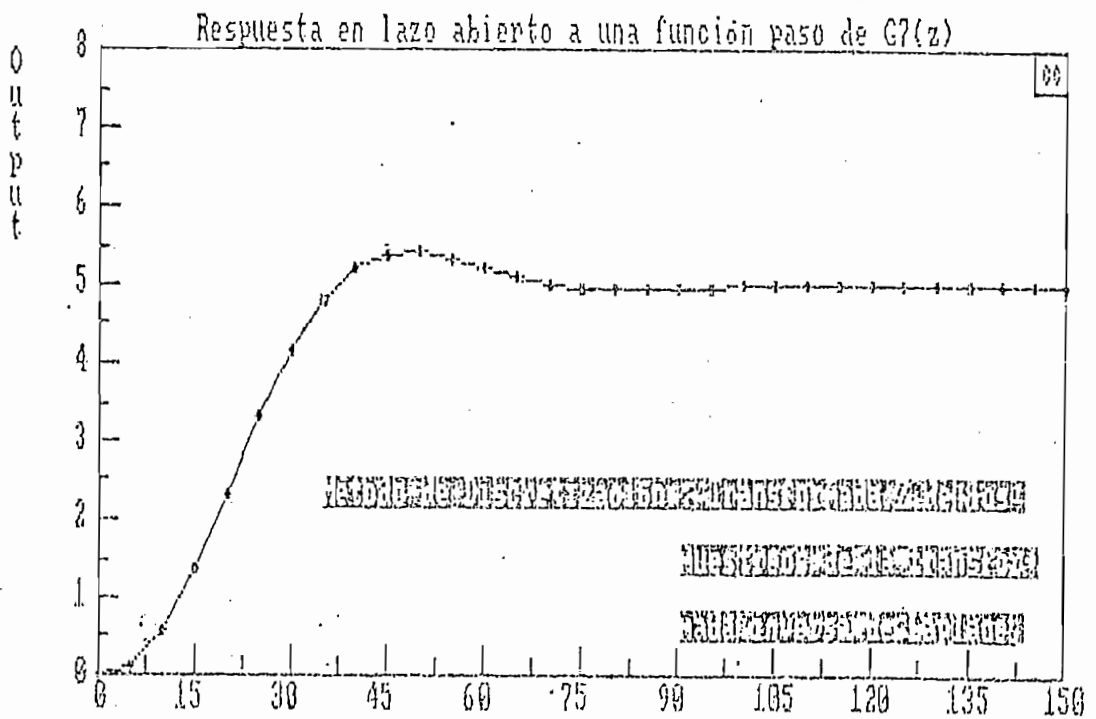


Fig. 2.19 Respuesta a una función paso de  $G7(z)$ .  $n$ , Time= $n \times T$

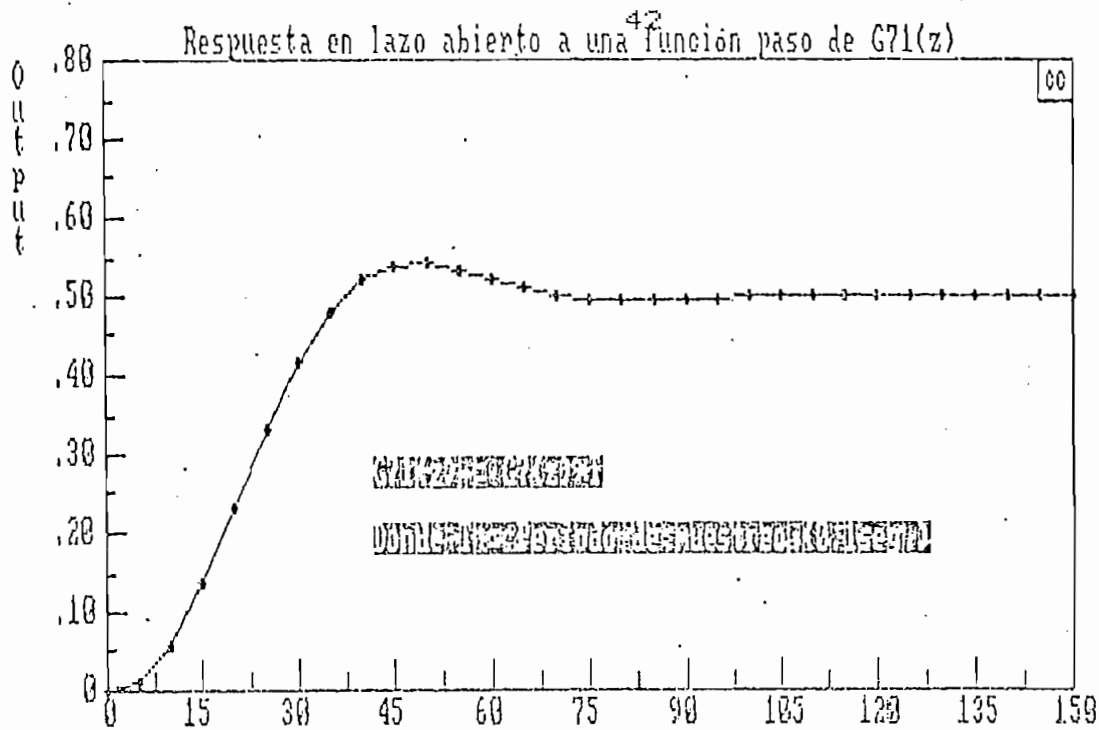


Fig. 2.20 Respuesta a una Función paso de  $G1(z)$ .  $n, \text{Time} = nT$

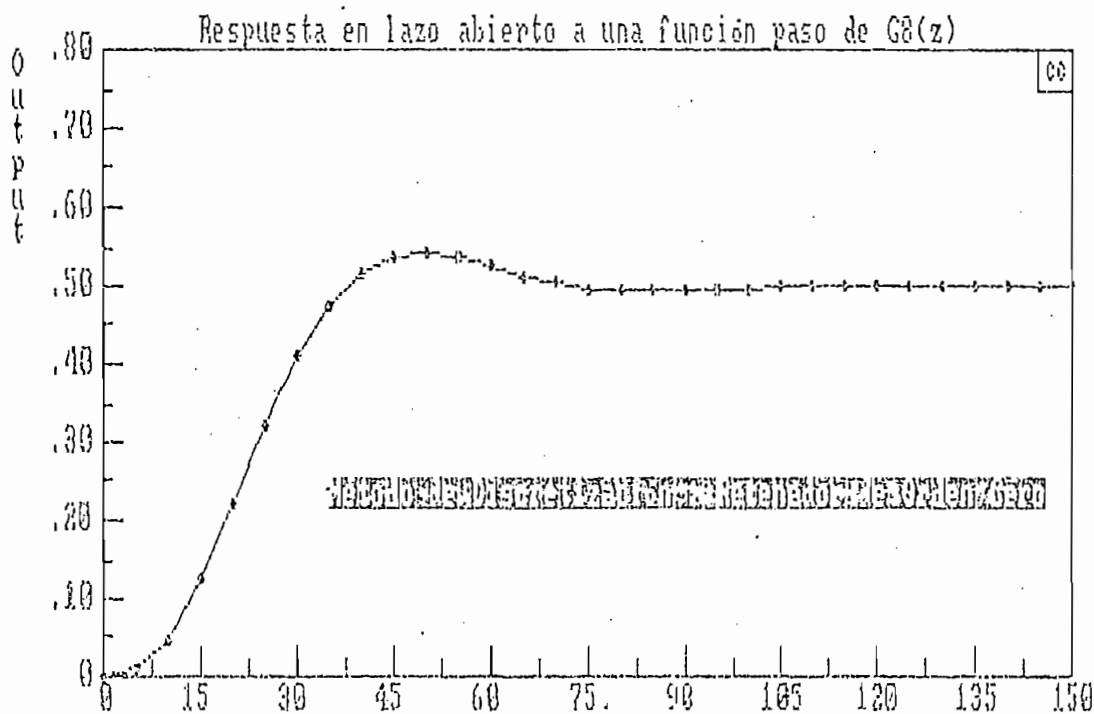


Fig. 2.21 Respuesta a una Función paso de  $G2(z)$ .  $n, \text{Time} = nT$

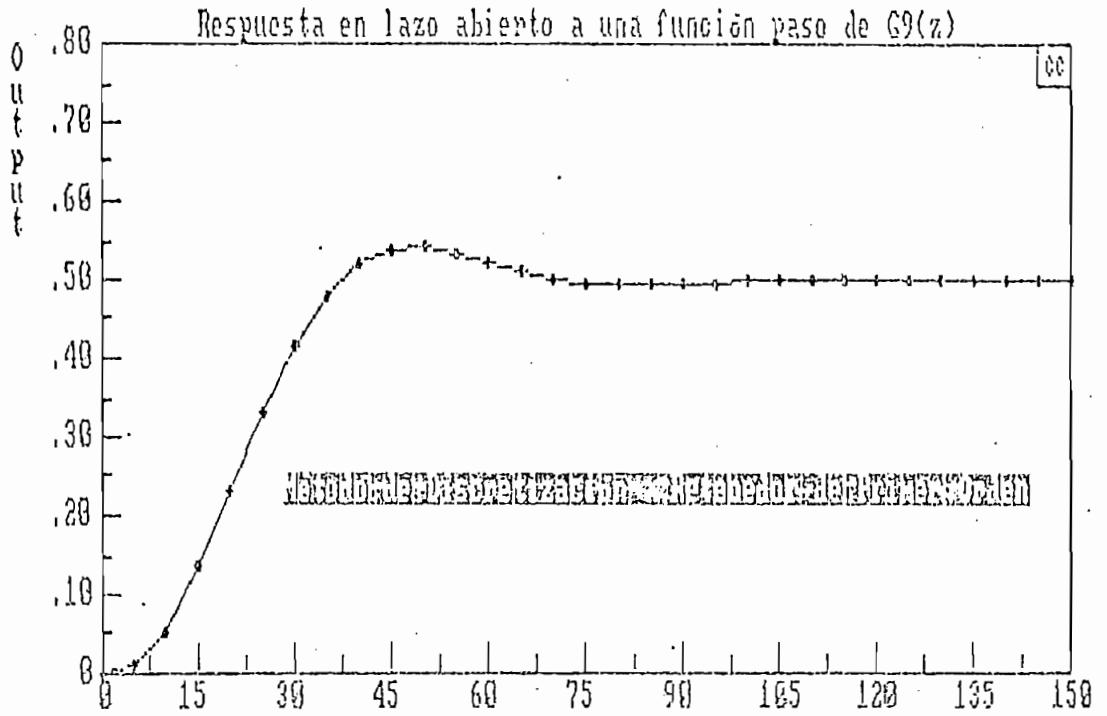


Fig. 2.22 Respuesta a una Función paso de  $G_9(z)$ .  $n, \text{Time} = n \times T$

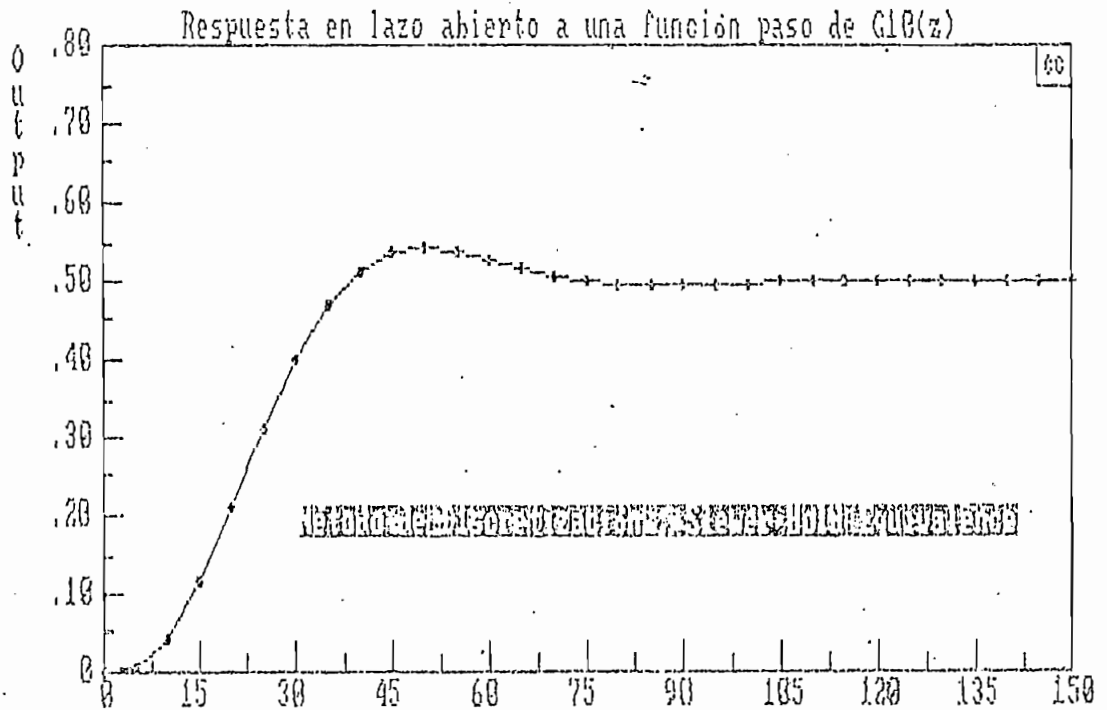


Fig. 2.23 Respuesta a una Función paso de  $G_{10}(z)$ .  $n, \text{Time} = n \times T$

t	n	S(s)	61(z)	62(z)	63(z)	64(z)	65(z)	67(z)	671(z)	68(z)	69(z)	610(z)	YE 61(z)	YE 62(z)	YE63(z)	YE64(z)	YE 66(z)	YE 671(z)	YE 68(z)	YE 69(z)
0.5	5	0.00800	0.00450	0.0170	0.1060	0.0107	0.0080	0.100	0.0100	0.0080	0.0098	0.00650	-43.75	112.50	32.50	33.75	0.00	25.00	0.00	22.50
1.0	10	0.04900	0.04110	0.0580	0.0550	0.0558	0.0490	0.554	0.0550	0.0490	0.0548	0.04300	-16.12	38.78	12.24	13.88	0.00	12.24	0.00	11.84
1.5	15	0.12500	0.11800	0.1480	0.1340	0.1350	0.1250	1.347	0.1340	0.1250	0.1340	0.11500	-5.60	18.40	7.20	8.00	0.00	7.20	0.00	7.20
2.0	20	0.22200	0.22100	0.2410	0.2320	0.2330	0.2220	2.328	0.2328	0.2220	0.2320	0.21200	-0.45	8.56	4.50	4.95	0.00	4.86	0.00	4.50
2.5	25	0.32100	0.32600	0.3320	0.3310	0.3310	0.3210	3.313	0.3313	0.3210	0.3310	0.31200	2.18	3.43	3.11	3.12	0.00	3.21	0.00	3.12
3.0	30	0.40800	0.42230	0.4100	0.4150	0.4160	0.4080	4.160	0.4160	0.4080	0.4160	0.40000	3.50	0.49	1.71	1.96	0.00	1.96	0.00	1.96
3.5	35	0.47300	0.49100	0.4680	0.4780	0.4790	0.4730	4.791	0.4791	0.4730	0.4790	0.46800	3.81	-1.06	1.05	1.27	0.00	1.29	0.00	1.27
4.0	40	0.51500	0.53400	0.5050	0.5180	0.5180	0.5150	5.185	0.5185	0.5150	0.5180	0.51200	3.69	-1.94	0.58	0.58	0.00	0.68	0.00	0.58
4.5	45	0.53500	0.55180	0.5250	0.5370	0.5370	0.5350	5.372	0.5372	0.5350	0.5370	0.53000	2.95	-2.05	0.18	0.19	0.00	0.22	0.00	0.19
5.0	50	0.54000	0.55130	0.5310	0.5400	0.5400	0.5400	5.404	0.5404	0.5400	0.5400	0.54000	2.09	-1.67	0.00	0.00	0.00	0.07	0.00	0.00
5.5	55	0.53400	0.53900	0.5280	0.5340	0.5330	0.5340	5.339	0.5339	0.5340	0.5340	0.53500	0.94	-1.12	0.00	-0.19	0.00	-0.02	0.00	0.00
6.0	60	0.52400	0.52400	0.5210	0.5230	0.5220	0.5240	5.230	0.5230	0.5240	0.5230	0.52500	0.00	-0.57	-0.19	-0.38	0.00	-0.19	0.00	-0.19
6.5	65	0.51200	0.50900	0.5120	0.5100	0.5110	0.5120	5.118	0.5118	0.5120	0.5110	0.51300	-0.59	0.00	-0.19	-0.20	0.00	-0.04	0.00	-0.20
7.0	70	0.50300	0.49700	0.5050	0.5020	0.5020	0.5030	5.025	0.5025	0.5030	0.5020	0.50400	-1.19	0.40	-0.19	-0.20	0.00	-0.10	0.00	-0.20
7.5	75	0.49500	0.49100	0.4991	0.4950	0.4950	0.4950	4.963	0.4963	0.4950	0.4950	0.49700	-1.01	0.62	0.00	0.00	0.00	0.06	0.00	0.00
8.0	80	0.49300	0.48800	0.4950	0.4930	0.4930	0.4930	4.932	0.4932	0.4930	0.4930	0.49300	-1.01	0.61	0.00	0.00	0.00	0.04	0.00	0.00
8.5	85	0.49200	0.48900	0.4950	0.4920	0.4920	0.4920	4.925	0.4925	0.4926	0.4920	0.49200	-0.61	0.61	0.00	0.00	0.00	0.12	0.00	0.00
9.0	90	0.49300	0.49200	0.4950	0.4930	0.4930	0.4930	4.936	0.4936	0.4930	0.4930	0.49300	-0.20	0.41	0.00	0.00	0.00	0.12	0.00	0.00
9.5	95	0.49500	0.49500	0.4950	0.4950	0.4950	0.4950	4.955	0.4955	0.4950	0.4950	0.49500	0.00	0.20	0.00	0.00	0.00	0.10	0.00	0.00
10.0	100	0.49800	0.49800	0.4970	0.4970	0.4970	0.4970	4.974	0.4974	0.4970	0.4970	0.49700	0.00	-0.20	0.00	-0.20	0.00	-0.12	-0.20	-0.20
1.0	110	0.50170	0.50170	0.4990	0.5005	0.5000	0.5003	5.004	0.5004	0.5004	0.5003	0.50030	0.00	-0.54	0.06	-0.34	0.02	-0.26	-0.26	-0.28
2.0	120	0.50190	0.50190	0.5005	0.5011	0.5011	0.5011	5.011	0.5011	0.5011	0.5011	0.50117	0.00	-0.28	0.00	-0.16	0.00	-0.16	-0.16	-0.16
3.0	130	0.50085	0.50085	0.5006	0.5008	0.5008	0.5008	5.008	0.5008	0.5008	0.5008	0.50087	0.00	-0.05	0.00	-0.01	0.00	-0.01	-0.01	-0.01
4.0	140	0.49987	0.49987	0.5003	0.5002	0.5002	0.5002	5.001	0.5001	0.5002	0.5002	0.50025	0.00	0.09	0.00	0.07	0.00	0.05	0.07	0.07
5.0	150	0.49970	0.49970	0.5000	0.4998	0.4998	0.4998	4.998	0.4998	0.4998	0.4998	0.49988	0.00	0.06	0.00	0.02	0.00	0.02	0.02	0.02

Cuadro No 1  
Cuadro de respuestas paso y Errores de los diferentes métodos de discretización.

Para realizar el análisis de los distintos métodos se ha escogido un período igual 0.1 seg., es decir 20 veces menor a la constante de tiempo del sistema y una frecuencia  $\omega_0 = 1.415$  para el método Prewarped Tustin. Sobre la elección del período de muestreo se discutirá más adelante.

En los gráficos anteriores (figuras 2.14 - 2.23) se muestran las respuestas a una función paso de los sistemas discretos que resultan al aplicar los diferentes métodos de discretización estudiados y en el Cuadro No1, se dan valores tanto de la función original como de las distintas funciones obtenidas al discretizar  $G(s)$ , así mismo en este cuadro se muestran los diferentes errores relativos porcentuales que se obtiene en cada 5 muestras ( $n=5$ ). Los valores tanto de la función original,  $G(s)$  como de las distintas funciones  $G_i(z)$  obtenemos utilizando la opción "C" que se tiene en el comando gráfico DTIME descrito posteriormente en el apéndice A.

El error relativo porcentual que se tiene cada 5 muestras en los distintos métodos se lo ha obtenido de la siguiente manera:

$$\epsilon\% = \frac{V_n G_i(z) - V_n G(s)}{V_n G(s)} \times 100\%$$

donde  $n$  = es una muestra determinada (múltiplo de 5)  
 $G_i(z)$  = es la función resultante del distinto método de discretización empleado.

De los gráficos antes mencionados y del Cuadro No1 se deduce que:

- Los métodos 6 y 8 (Mapeo de Polos y Ceros y Retenedor de Orden Cero respectivamente) son los que reproducen casi exactamente a la función análoga original, pues sus errores relativos en todos los casos son ceros a excepción de  $n=100$ .
- Los dos primeros métodos de integración numérica (Rectangular adelante y Rectangular hacia atrás) son los que mayor error relativo introducen en cada una de las muestras tomadas.
- Así mismo en estos dos métodos los signos de los errores relativos para la misma muestra son contrarios, pues mientras en el uno es positivo en el otro es negativo y viceversa. Este resultado es de esperarse del análisis teórico realizado en el capítulo 3.
- El método de integración numérica trapezoidal ( $G_3(z)$ ) nos da un error que puede ser aproximado al promedio de errores de los dos métodos mencionados anteriormente ( $G_1(z)$  y  $G_2(z)$ ).
- Los métodos de Prewarped Tustin  $G_4(z)$  y la función  $G_{71}(z)$  (Transformada Z x T) nos dan errores aproximadamente iguales tanto en magnitud como en signo, y similares errores con los métodos: Reconstructor de primer orden  $G_9(z)$  y Slew Hold  $G_{10}(z)$ , del mismo signo para  $G_9(z)$  y de signo contrario para  $G_{10}(z)$ .
- En todo caso todos los métodos nos reproducen la función original con un error bastante despreciable (menor que el 5%) a partir de  $n=15$  ( $t=1.5$  s), las muestras

anteriores nos dan errores altos debido a que el método de discretización empleado empieza recién a actuar en estas muestras, este error variará con el método utilizado y en concordancia con el período de muestreo escogido.

Empleando los métodos de integración numérica tanto los ceros como los polos del modelo discreto dependen de la aproximación empleada, como se puede deducir de las funciones discretas resultantes  $G_1(z)$ ,  $G_2(z)$ ,  $G_3(z)$  y  $G_4(z)$  presentados en el Cuadro No 1.

De acuerdo a la explicación dada en el numeral 2.1.1 para obtener una respuesta del sistema discreto similar a la analógica a la función obtenida mediante la transformada Z será necesario multiplicarle por el período de muestreo T, como se deduce de la expresión 2.13.

$$G_{\rightarrow 1}(z) = G_{\rightarrow}(z) \cdot T$$

Para ver el efecto que se tiene al variar el período de muestreo en un sistema de lazo abierto, se ha tomado como referencia el método 3 de integración numérica trapezoidal. Para esto a la función  $G(s)$  dada por la expresión (2.39) se la discretiza mediante la expresión :

$$s = \frac{z - 1}{z + 1} \cdot \frac{2}{T}$$

para diferentes períodos de muestreo obteniéndose las siguientes funciones:

$$G_{\alpha}(z) = \frac{5.65 \times 10^{-3} (z + 1) (z + 1) (z + 1)}{z^3 - 2.8z^2 + 2.619z - 0.818} \quad (T = 0.1)$$

$$G_{\alpha}(z) = \frac{4.09 \times 10^{-4} (z + 1) (z + 1) (z + 1)}{z^3 - 2.601z^2 + 2.279z - 0.67} \quad (T = 0.2)$$

$$G_{\alpha}(z) = \frac{2.68 \times 10^{-3} (z + 1) (z + 1) (z + 1)}{z^3 - 2.21z^2 + 1.709z - 0.451} \quad (T = 0.4)$$

$$G_{\alpha}(z) = \frac{1.46 \times 10^{-2} (z + 1) (z + 1) (z + 1)}{z^3 - 1.5z^2 + 0.948z - 0.208} \quad (T = 0.8)$$

Evaluando las expresiones anteriores para cada  $t = 0.8$  s (tiempo dado por el último período de muestreo  $T = 0.8$ ) mediante la opción "C" del comando gráfico DTIME se obtienen las respuestas paso siguientes que se comparan con la respuesta del sistema continuo

t[s]	g(s)	T = 0.1	T = 0.2	T = 0.4	T = 0.8
0.8	0.029	n=8 0.04	n=4 0.038	n=2 0.0512	n=1 0.08
1.6	0.145	n=16 0.134	n=8 0.162	n=4 0.179	n=2 0.21
2.4	0.303	n=24 0.331	n=12 0.32	n=6 0.335	n=3 0.36
3.2	0.437	n=32 0.42	n=16 0.449	n=8 0.46	n=4 0.476
4.0	0.515	n=40 0.518	n=20 0.521	n=10 0.526	n=5 0.537
4.8	0.540	n=48 0.538	n=24 0.541	n=12 0.542	n=6 0.548
5.6	0.532	n=56 0.534	n=28 0.531	n=14 0.531	n=7 0.533
6.4	0.514	n=64 0.510	n=32 0.513	n=16 0.512	n=8 0.511
7.2	0.500	n=72 0.500	n=36 0.499	n=18 0.498	n=9 0.496
8.0	0.493	n=80 0.493	n=40 0.493	n=20 0.492	n=10 0.490
8.8	0.493	n=88 0.492	n=44 0.493	n=22 0.492	n=11 0.491
9.6	0.495	n=96 0.495	n=48 0.495	n=24 0.496	n=12 0.495
1.04	0.498	n=104 0.497	n=52 0.498	n=26 0.497	n=13 0.499
1.12	0.500	n=112 0.500	n=56 0.500	n=28 0.500	n=14 0.501

Cuadro No 2. Valores para distintos períodos T

Como se puede ver del cuadro anterior a menor período de muestreo el modelo discreto más se asemejará al modelo



análogo en cambio conforme aumenta el periodo de muestreo el modelo discreto será menos exacto respecto al modelo análogo.

Expresando en forma de factores las anteriores expresiones  $G_D(z)$  obtenidas para distintos periodos  $T$  de muestreo e igualando a cero para obtener los polos y ceros del sistema se llega a determinar que:

$$\text{Para } T = 0.1 \quad G_D(z) = \frac{0.0000565 (z + 1)^3}{[(z - 0.947)^2 + 0.082^2] (z - 0.904)} \quad \begin{array}{l} z_{1,2,3} = (-1) \\ p_{1,2} = 0.947 \pm j0.083 \quad p_3 = +0.904 \end{array}$$

$$\text{Para } T = 0.26 \quad G_D(z) = \frac{0.0004095 (z + 1)^3}{[(z - 0.8918)^2 + 0.156^2] (z - 0.818)} \quad \begin{array}{l} z_{1,2,3} = (-1) \\ p_{1,2} = 0.892 \pm j0.156 \quad p_3 = 0.818 \end{array}$$

$$\text{Para } T = 0.46 \quad G_D(z) = \frac{0.00268 (z + 1)^3}{[(z - 0.774)^2 + 0.279^2] (z - 0.666)} \quad \begin{array}{l} z_{1,2,3} = (-1) \\ p_{1,2} = 0.774 \pm j0.279 \quad p_3 = 0.666 \end{array}$$

$$\text{Para } T = 0.86 \quad G_D(z) = \frac{0.0146 (z + 1)^3}{[(z - 0.538)^2 + 0.444^2] (z - 0.428)} \quad \begin{array}{l} z_{1,2,3} = (-1) \\ p_{1,2} = 0.538 \pm j0.444 \quad p_3 = 0.428 \end{array}$$

Los resultados anteriores nos demuestran que la posición relativa de las raíces depende de la frecuencia de muestreo empleada.

A mayor frecuencia de muestreo ( $\ll T$ ) las raíces del sistema analógico corresponden a raíces en el plano  $Z$  que se acercan al valor  $Z = 1$ .

Estos resultados fácilmente serán comprobados usando el

comando pzf del programa C.C. que nos permite obtener los polos y ceros de un sistema.

De acuerdo al teorema de Shannon hallando el espectro de frecuencias de la función:

$$G(s) = \frac{0.5}{s^2 + 2s^2 + 2s + 1}$$

se obtiene lo siguiente:

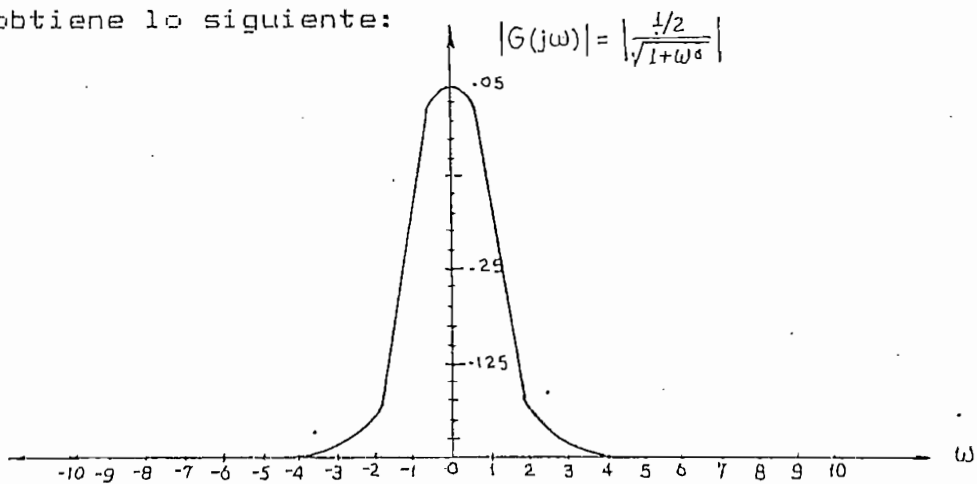


Fig. 2.24 Espectro de Frecuencias de  $G(j\omega)$

Como se puede deducir de la expresión de  $|G(j\omega)|$  y como se puede apreciar de la figura 2.24 no existe una frecuencia  $\omega_c$  propiamente dicha, pero se ve claramente que a medida que aumenta  $\omega$  el módulo de  $G(j\omega)$  tiende a cero rápidamente, entonces podemos asumir como componente de frecuencia más alta ( $\omega_c$ ) contenida en  $G(s)$  un valor de  $\omega$  tal que el valor de  $|G(j\omega)|$  empiece a ser despreciable.

Asumimos como valor de  $\omega_c = 4$  rad/s. (valor que se tiene en el codo de la curva); pues para esta frecuencia se tiene

un valor de  $|G(j\omega)| = 78 \times 10^{-4}$  que equivale a un valor 64 veces menor al máximo valor de 0.5 que se tiene para  $\omega = 0$ . Por tanto el período de muestreo mínimo requerido para poder reconstruir la señal original será:

$$T < \frac{\pi}{\omega_c}$$

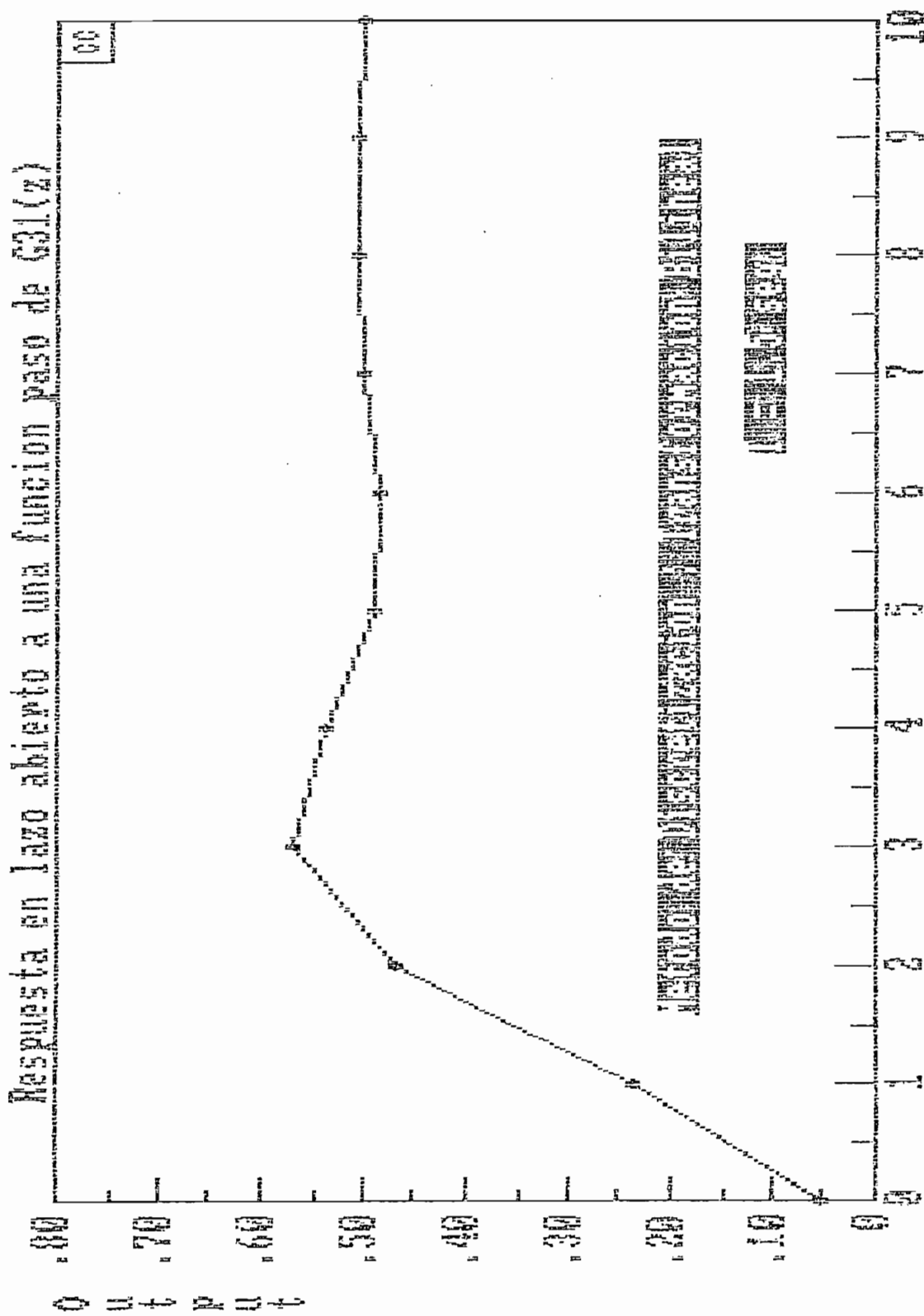
$$T < 0.785 \quad (\text{Ec. 2.40})$$

Entonces puesto que para nuestro ejemplo hemos asumido un período de muestreo  $T = 0.1$  s se puede reconstruir la señal original a partir de la señal muestreada, pues con este período no se perderá información vital de la señal entre los instantes de muestreo.

Para notar el efecto que se tiene al escoger un período de muestreo  $T > \pi/\omega_c$ , se obtiene la función  $G_2(z)$  para un período  $T = 1.5$  s, obteniéndose la siguiente función de transferencia:

$$G_2(z) = \frac{5.21 \times 10^{-2} (z + 1)^2}{z^3 - 0.521z^2 + 0.405z - 0.05019}$$

En la figura 2.25 se muestra la respuesta del sistema  $G_2(z)$  en lazo abierto a una función paso. El período  $T = 1.5$  s corresponde a una frecuencia  $\omega = 2.09$  rad/s que como se puede apreciar en el espectro de frecuencias de  $G(j\omega)$  de la figura 2.24 corresponde a una frecuencia menor que  $\omega_c$  y que por tanto si se desea reconstruir la señal original se perderá información.



n. Tizemal

Fig.2.25 Respuesta del Sistema Discretizado para  $T=1.5$  seg.

Además observando los valores que se tienen al discretizar  $G(s)$  con este período (Cuadro No3) y comparándolas con los valores originales de  $G(s)$  mostrados en el Cuadro No1, nos darán errores más grandes que los calculados en este cuadro así:

t(s)	0	1.5	3	4.5	6	7.5	9	10.5	12
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
i2(t)	0	0.126	0.408	0.535	0.524	0.496	0.493	0.499	0.501
I2[n]	0.05	0.235	0.466	0.56	0.53	0.489	0.483	0.497	0.504
7. €	525	88	14.2	4.4	1.14	-1.4	-2.0	-0.3	0.6

Cuadro No 3 Valores de G3 para T= 1.5 seg.

### 2.3 Resolución de Ecuaciones de Diferencias.-

El análisis de sistemas discretos involucra la solución de un conjunto de ecuaciones recursivas.

Una ecuación recursiva lineal de orden m con coeficientes constantes tiene la forma:

$$y[n] + a_1 y[n-1] + \dots + a_m y[n-m] = b_0 x[n] + \dots + b_m x[n-m] \quad (\text{Ec. 2.41})$$

donde  $x[n]$  es una secuencia conocida, y además se asume que  $x[n] = 0$  para  $n < 0$ . Esta suposición no es restrictiva ya que la respuesta  $y[n]$  es únicamente determinada en términos del estado inicial del sistema y de los valores de la entrada para  $n \geq 0$ . Si  $x[n]$  es aplicada un instante anterior a  $n = 0$  esto se reflejará en el valor del estado inicial.

Los valores de  $y[n]$  para n desde -1 a -m

$$y[-1] = y_{-1} \quad y[-2] = y_{-2} \quad \dots \quad y[-m] = y_{-m} \quad (\text{Ec. 2.42})$$

se llaman condiciones iniciales.

La ecuación 2.41 tiene solución única si sus condiciones iniciales son especificadas. La ecuación recursiva 2.41 describe a un sistema discreto con entrada  $x[n]$  y salida  $y[n]$ .

La respuesta estado cero del sistema es la solución  $y[n] = y_x[n]$  de (2.41) con condiciones iniciales nulas

$$y_x[-1] = y_x[-2] = \dots = y_x[-m] = 0 \quad (\text{Ec. 2.43})$$

La respuesta entrada cero  $y[n] = y_\beta[n]$  es la solución de 2.41 cuando  $x[n] = 0$  por tanto es la solución de la ecuación homogénea:

$$y[n] + a_1 y[n-1] + \dots + a_m y[n-m] = 0 \quad (\text{Ec. 2.44})$$

Para resolver estas ecuaciones usamos la transformada  $z$ . Dada la secuencia  $f[n]$ , se forma el siguiente sumatorio

$$F(z) = f[0] + f[1]z^{-1} + f[2]z^{-2} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} f[n]z^{-n} \quad (\text{Ec. 2.45})$$

A esta función se llama transformada  $z$  unilateral, es decir que  $f[n]$  es una secuencia causal, o lo que es lo mismo  $f[n] = 0$  para  $n < 0$ , esta función existe solamente para los valores de  $z$  para los cuales la serie converge. Este sumatorio contiene solo potencias negativas y converge si  $|z|$  es mayor que alguna constante  $r_0$ .

En otras palabras, la región de existencia de la transformada  $z$  unilateral es la parte exterior del círculo  $|z| > r_0$ , cuyo radio depende de  $f[n]$ .

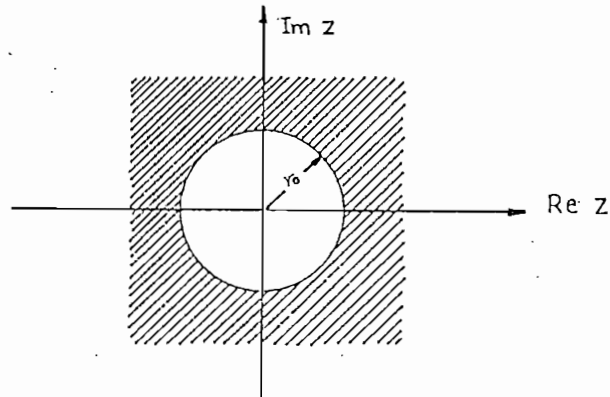


Fig. 2.26 Región de Convergencia

El Problema de la Inversión.-

El problema de la inversión es la determinación de  $f[n]$  de la transformada  $z$  inversa de la función dada  $F(z)$ .

$F(z)$  puede ser expandida como un sumatorio:

$$F(z) = F_1(z) + \dots + F_k(z) \quad (\text{Ec. 2.46})$$

donde  $F_1(z), \dots, F_k(z)$  son funciones con transformadas inversas conocidas  $f_1[n], \dots, f_k[n]$ , luego su inversa  $f[n]$  es la sumatoria

$$f[n] = f_1[n] + \dots + f_k[n] \quad (\text{Ec. 2.47})$$

Teorema del Traslado.-

Se ha mostrado que si  $f[n] \longleftrightarrow F(z)$ , luego

$$f[n-1] \longleftrightarrow z^{-1}F(z) + f[-1]$$

Este resultado es importante en las aplicaciones de la transformada  $z$ .

Dada la secuencia arbitraria  $f[n]$ , se tiene  $f_1[n] = f[n-1]$  obtenida por traslado de  $f[n]$  un período de muestreo a la derecha, la secuencia  $f_z[n] = f[n] \cup [n]$  obtenido por truncamiento de  $f[n]$  para  $n < 0$ , y la secuencia  $f_0[n] = f_2[n-1] = f[n-1] \cup [n-1]$  obtenida por traslado de la

secuencia  $f_2[n]$  un período de muestreo a la derecha. Tomando sus transformadas  $z$  se tiene:

$$f[n] \longleftrightarrow F(z)$$

$$f_1[n] = f[n-1] \longleftrightarrow F_1(z) = z^{-1}F(z) + f[-1]$$

$$f_2[n] = f[n] \cup [n] \longleftrightarrow F(z)$$

$$f_3[n] = f[n-1] \cup [n-1] \longleftrightarrow z^{-1}F(z)$$

De esto se obtiene:

$$f[n-1] \cup [n-1] \longleftrightarrow z^{-1}F(z)$$

Razonando deductivamente se llega a :

$$f[n-m] \longleftrightarrow z^{-m}F(z) + f[-1]z^{-m+1} + \dots + f[-m+1]z^{-1} + f[-m]$$

$$f[n-m] \cup [n-m] \longleftrightarrow z^{-m}F(z) \quad (\text{Ec. 2.48})$$

para cualquier entero  $m > 0$

Para la resolución de ecuaciones de diferencias es necesario seguir los siguientes tres pasos:

1.- Se toma la transformada  $Z$  unilateral a ambos lados de (2.41)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \{Y[n] + \dots + a_m Y[n-m]\} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \{b_0 X[n] + \dots + b_m X[n-m]\} z^{-n} \quad (\text{Ec. 2.49})$$

Usando el teorema del traslado el lado derecho de (2.41) se puede igualar a  $(b_0 + \dots + b_m z^{-m}) X(z)$  y el lado izquierdo puede ser expresado en términos de la transformada  $Y(z)$  de la secuencia  $y[n]$  y de las condiciones iniciales.

2.- Se resuelve algebraicamente la ecuación para  $Y(z)$

3.- Se determina la transformada inversa de  $Y(z)$

### Ecuaciones de Diferencia de Primer Orden.-

Se desea resolver la ecuación



$$y[n] + a_1 y[n-1] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] \quad n \geq 0 \quad (\text{Ec. 2.50})$$

con la condición inicial  $y[-1] = y_{-1}$ , donde  $x[n]$  es una secuencia conocida y  $x[-1] = 0$ .

Tomando la transformada  $z$  a ambos lados

$$Y(z) + a_1 \{z^{-1} Y(z) + y_{-1}\} = b_0 X(z) + b_1 z^{-1} X(z)$$

Resolviendo:

$$Y(z) = \underbrace{\frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}} X(z)}_{\text{respuesta de estado}} + \underbrace{\frac{-a_1 Y_{-1}}{1 + a_1 z^{-1}}}_{\text{respuesta homogénea}}$$

cero

La respuesta homogénea de (2.50) es la inversa de  $Y\beta(z)$

,  $Y\beta[n] = -a_1 y_{-1} z^n = y_{-1} (-a_1)^{n+1}$  donde  $z = -a_1$  es la raíz de la ecuación  $1 + a_1 z^{-1} = 0$ .

$y_x[n]$ , la inversa de  $Y_x[z]$  es la solución de (2.50) con condiciones iniciales nulas.

### Ejemplo 2.2.-

Resolver  $y[n] - 3y[n-1] = 6$  c.i  $y[-1] = 4$

Tomando la transformada  $Z$  a ambos lados

$$Y(z) - 3\{z^{-1} Y(z) + y[-1]\} = \frac{6z}{z-1}$$

$$Y(z) = \frac{18z^2 - 12z}{(z-3)(z-1)} = \frac{21z}{z-3} - \frac{3z}{z-1}$$

Se determina la transformada inversa  $z$  mediante una tabla de propiedades de la transformada  $z$  así:

$$\frac{z}{z-a} \longleftrightarrow a^n \quad \text{entonces} \quad Y[n] = 21 \times 3^n - 3 \times 1^n$$

$$Y[n] = 21 \times 3^n - 3$$

Como se puede ver la región de absoluta convergencia está dada para  $|z| > 3$ .

Ingresando  $Y(z)$  en la función  $G_2(z)$  mediante el comando ENTER y aplicando a esta función el comando IZT así:

IZT,  $G_2$

luego de esto se despliega el siguiente mensaje:

transformada inversa z, integral de línea es  $ABS(z) >$  polos finitos

$$G_2(n) = \begin{cases} -8.881 \cdot 10^{-16} \delta(n) & \text{para } n \geq 0 \\ + \\ -3 + 21 \cdot (3)^n & \\ 0 & \text{para } n < 0 \end{cases}$$

#### Ecuaciones de Diferencias de Segundo Orden.-

Dada la ecuación

$$y[n] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] = 0 \quad (\text{Ec. 2.51})$$

con las condiciones iniciales  $y[-1]=y_{-1}$ ;  $y[-2]=y_{-2}$

Tomando la transformada Z a ambos lados, se obtiene

$$Y(z) + a_1(z^{-1}Y(z)+y_{-1}) + a_2(z^{-2}Y(z)+z^{-1}y_{-1}+y_{-2}) = 0$$

Entonces:

$$Y(z) = \frac{-a_1 y_{-1} - a_2 y_{-2} - a_2 y_{-1} z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

Denotando por  $z_1$  y  $z_2$  las raíces de la ecuación

$$z^2 + a_1 z + a_2 = 0$$

Expandiendo en fracciones parciales:

$$\text{si } z_1 \neq z_2 \text{ luego } Y(z) = \frac{C_1 z}{z - z_1} + \frac{C_2 z}{z - z_2}$$

$$y[n] = C_1 z_1^n + C_2 z_2^n \quad (\text{Ec. 2.52})$$

$$\text{si } z_1 = z_2 \text{ luego } Y(z) = \frac{C_1 z}{z - z_1} + \frac{C_2 z}{(z - z_1)^2}$$

$$y[n] = (C_1 + z_1^{-1} C_2 n) z_1^n \quad (\text{Ec. 2.53})$$

### Ejemplo 2.3.-

Hallar  $y[n]$  tal que  $y[-1]=1$ ,  $y[-2] = 0$  y

$$y[n] - 6y[n-1] + 9y[n-2]=0$$

tomando la transformada  $Y(z)$  de  $y(n)$  está dada por:

$$Y[z] = \frac{6z^2 - 9z}{(z - 3)^2} = \frac{6z}{z - 3} + \frac{9z}{(z - 3)^2}$$

De acuerdo a (2.53) se obtiene que

$$y[n] = (6 + 9 \times 3^{-1} n) 3^n$$

$$y[n] = (6 + 3n) \times 3^n$$

La región de absoluta convergencia está dado por  $|z| > 3$ , de igual manera ingresado  $Y(z)$  en la función  $G_3(z)$  mediante el comando ENTER y aplicando a esta función IZT así :

IZT,  $G_3$  se obtiene :

$$G_3(n) = \begin{cases} 3\delta(n) + (6 + 3n)3^n & \text{para } n \geq 0 \\ 0 & \text{para } n < 0 \end{cases}$$

### Ejemplo 2.4.-

Hallar la respuesta impulso y la respuesta paso del sistema especificado por la ecuación:

$$y[n] - 3/4 y[n-1] + 1/8 y[n-2] = x[n]$$

respuesta impulsiva : Si  $x[n] = \delta[n]$  luego  $X(z) = 1$

$$Y(z) = H(z) = \frac{z^2}{z^2 - 3/4z + 1/8} = \frac{2z}{z - 1/2} - \frac{z}{z - 1/4}$$

De acuerdo a (2.52) se obtiene que:

$$y[n] = 2x(1/2)^n - (1/4)^n \quad \langle \text{----} \rangle G_4(z)$$

$$\text{respuesta paso : Si } x[n] = U[n], \text{ luego } X(z) = \frac{z}{z - 1}$$

$$Y(z) = \frac{z^3}{z^2 - 3/4z + 1/8} = \frac{8z/3}{z - 1} - \frac{2z}{z - 1/2} + \frac{z/3}{z - 1/4}$$

De las propiedades de la transformada z se sabe que:

$$\frac{z}{z - a} \longleftrightarrow a^n$$

aplicando esta propiedad a la expresion Y(z) anterior se obtiene Y[n] de la forma siguiente:

$$Y[n] = \frac{8}{3} - 2 \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n \quad U[n]$$

De igual manera ingresando Y(z) en G<sub>A</sub>(z) y G<sub>B</sub>(z) para el caso de la respuesta impulsiva y paso respectivamente y aplicando a estas funciones el comando IZT se obtiene:

$$G_A(z) = \begin{cases} 2*(.5)^n - 1*(.25)^n & \text{para } n \geq 0 \\ 0 & \text{para } n < 0 \end{cases}$$

$$G_B(z) = \begin{cases} 4.46 \times 10^{-6} \delta(n) + \\ 2.666 + 0.333*(.25)^n - 2*(.5)^n & \text{para } n \geq 0 \\ 0 & \text{para } n < 0 \end{cases}$$

#### 2.4 Análisis de Sistemas Muestreados.-

Un sistema de control de datos muestreados contiene tanto elementos análogos como elementos discretos. Los dos tipos de elementos están acoplados por un sample and hold. A continuación se muestra un sistema de control de datos muestreados en lazo abierto.

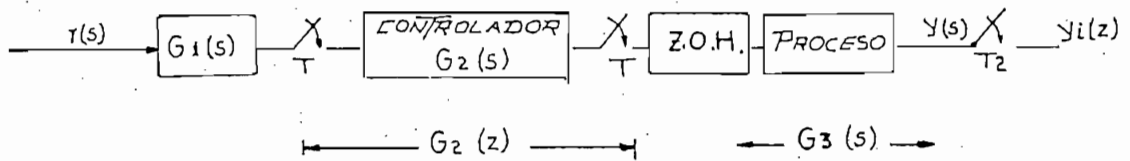


Fig. 2.27 Sistema Muestreado

Simplificando el gráfico anterior se tiene:

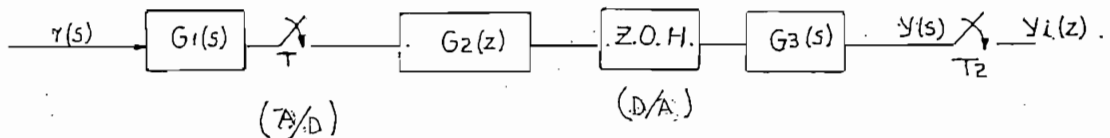
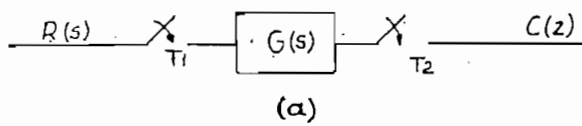


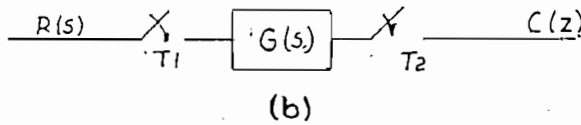
Fig. 2.28 Sistema muestreado con sus equivalencias

Cuando el sistema de datos muestreados contenga varios muestreadores en distintas localizaciones del sistema con diferentes períodos de muestreos se hablará de sistemas discretos de orden múltiple (multiorden). El análisis y diseño de estos sistemas, es complejo, en esta sección se lo hará en base al método de la transformada  $z$ . Primeramente se analizará sistemas de lazo abierto, así en la figura 2.29 se ilustra tres típicos sistemas discretos de lazo abierto.

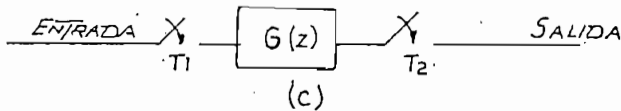
El sistema de la figura 2.29(a) tiene un muestreador de velocidad baja a la entrada y un muestreador más rápido a la salida; a este tipo de sistema se lo denomina sistema discreto multirango lento-rápido.



$$T_1 > T_2$$



$$T_1 < T_2$$



sistema  
digital      enteramente

Fig. 2.29 Sistemas Discretos Multiorden de lazo abierto

En la figura 2.29 (b) se muestra un sistema en el cual el muestreador de la entrada tiene una velocidad más rápida que el muestreador de la salida, a este sistema se lo llama sistema discreto multirango rápido-lento.

Por razones de análisis es conveniente asumir que  $T_1$  y  $T_2$  están relacionados por un número entero, así:  $T_1 = NT_2$  y  $T_1 = T_2/N$  para los casos (a) y (b) respectivamente de la figura 2.29 donde  $N$  es un entero positivo  $> 1$ .

Para el caso en que el sistema discreto es un computador discreto o un controlador y cuya entrada y salida tienen diferentes velocidades de muestreo usamos el diagrama de bloques de la figura 2.29 (c)

En esta parte solamente se mencionará los diferentes

métodos con sus respectivas expresiones para la solución de sistemas multiorden tanto lentos-rápidos como rápidos-lentos. Un estudio más profundo de estos métodos se lo hace en la referencia [1] Digital Control Systems Págs. (139-148)

#### 2.4.1. Sistemas Muestreados Multiorden Lento-Rápido.-

Existen diversos métodos para el estudio analítico de este tipo de sistemas, así:

##### a) Muestreador ficticio

Este método nos permite insertar un muestreador rápido a la entrada como se muestra en la figura 2.30, por tanto el muestreador ficticio muestrea a una velocidad más rápida que el muestreador de la entrada. El efecto neto es cero y haciendo el estudio analítico a partir del concepto de la transformada Z se puede determinar la siguiente relación:

$$G(z)_N = G(z) \left| \begin{array}{l} z = z^{1/N} \\ T = T/N \end{array} \right. \quad (\text{Ec. 2.54})$$

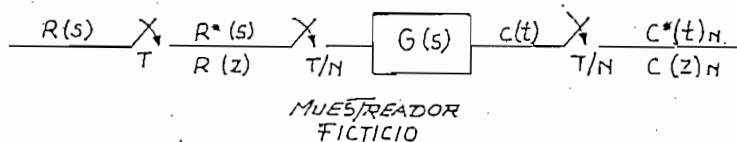


Fig. 2.30 Sistema Multiorden Lento-Rápido

##### b) Descomposición del muestreador

Este método nos permite descomponer el muestreador rápido en N muestreadores lentos con unidades de tiempo de retardo y de adelanto como se muestra en la figura 2.31, este método nos

permite tener todos los muestreadores a la misma velocidad. Aplicando el concepto de la transformada z ordinaria y de la transformada z modificada se tiene la siguiente expresión:

$$C(z)_N = R(z) \sum_{k=0}^{N-1} z^{1-m} G(z, m) \quad (\text{Ec. 2.55})$$

donde  $m = k/N$   $k/N < 1$

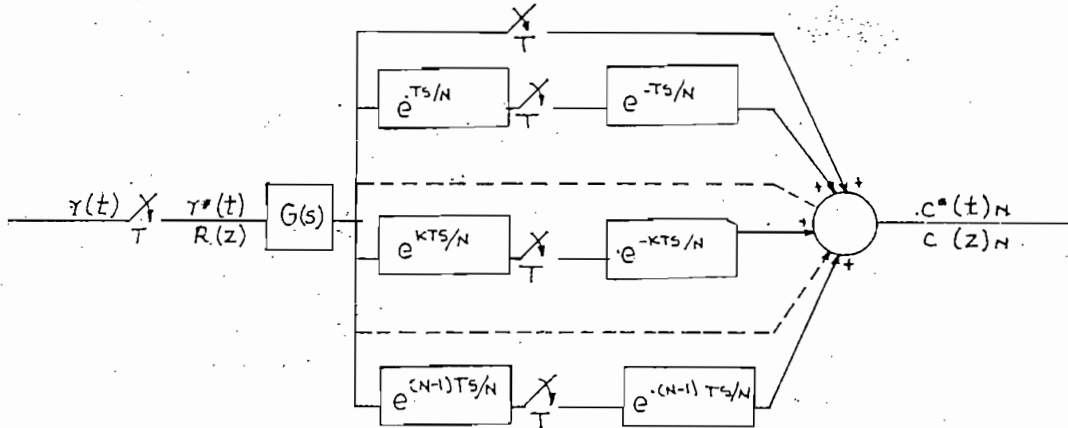


Fig. 2.31 Descomposición de un muestreador de orden  $T/N$

c) Representación en Series infinitas.

d) Señal muestreada a una velocidad rápida en términos de muestreos de velocidad baja.

Estos métodos nos conducen a la siguiente expresión:

$$C(z) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} C \left[ z_N e^{j2\pi m/N} \right]_N \quad (\text{Ec. 2.56})$$

#### 2.4.2. Sistemas Muestreados Multiorden Rápidos-Lentos.-

Al igual que los sistemas anteriores existen diversos métodos para el análisis de estos sistemas así:

a) Muestreador ficticio

Este método nos permite insertar un muestreador rápido con un período  $T/N$  como se muestra en la figura 2.32. La salida del sistema no es afectado por este muestreador y por tanto el



sistema de la figura 2.32 es equivalente al sistema de la figura 2.29(b). La expresión final resultante de este método es la siguiente:

$$C(z) = \sum \text{Residuos de } C(Z_N) \frac{Z_N^{-1}}{1 - Z_N^{-N}Z^{-1}} \quad \text{en los polos de } C(Z_N)Z_N^{-1} \quad (\text{Ec. 2.57})$$

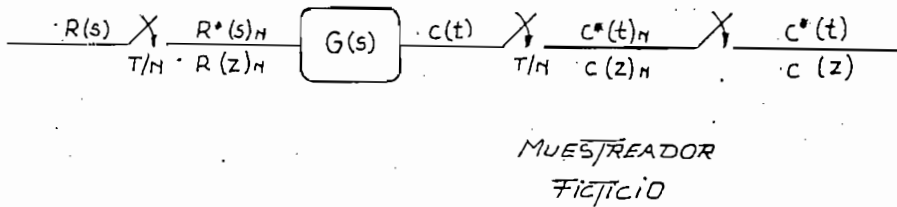


Fig. 2.32 Sistema multiorden Rápido-lento

b) Descomposición del muestreador

Este método nos permite descomponer el muestreador rápido en N muestreadores lentos con unidades de tiempo en adelanto y de retardo, como se muestra en la figura 2.33.

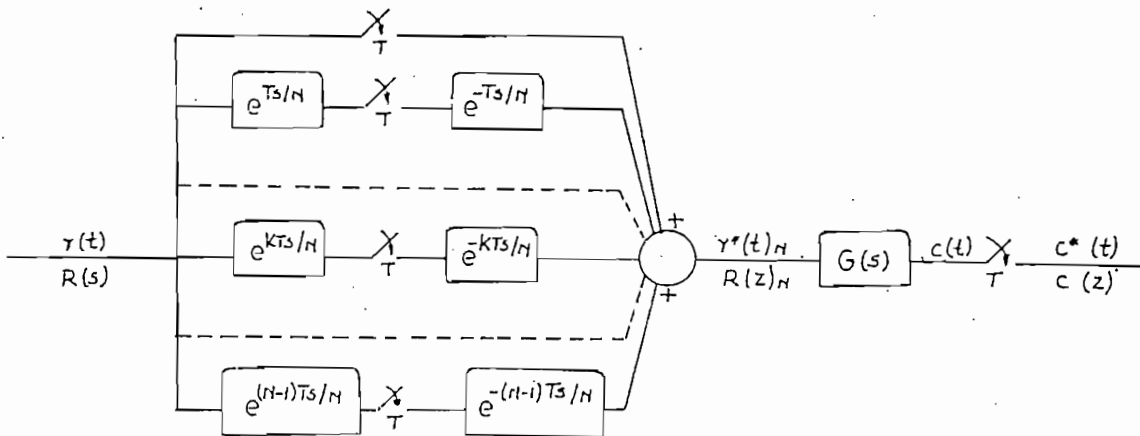


Fig. 2.33 Descomposición de un Muestreador de orden T/N en un Sistema Rápido-Lento

La relación entrada y salida del sistema de la figura 2.33 puede expresarse como:

$$C(z) = R(z) G(z) + \sum_{k=1}^{N-1} z^k R[z, k/N] G[z, 1-k/N] \quad (\text{Ec. 2.58})$$

### c) Representación en Series

Este método corresponde a la siguiente expresión:

$$C(z) = 1/N \sum_{k=0}^{N-1} G[z_N e^{j2\pi k/N}]_N * R[z_N e^{j2\pi k/N}] \quad (\text{Ec. 2.59})$$

### 2.4.3. Sistemas Multiorden con Elementos Enteramente Digitales

Estos sistemas son discretamente codificados y físicamente no involucran muestreos.

En la figura 2.34 (a) y (b) se muestran los diagramas de bloque que representan sistemas multirango enteramente digitales lento-rápido y rápido-lento respectivamente

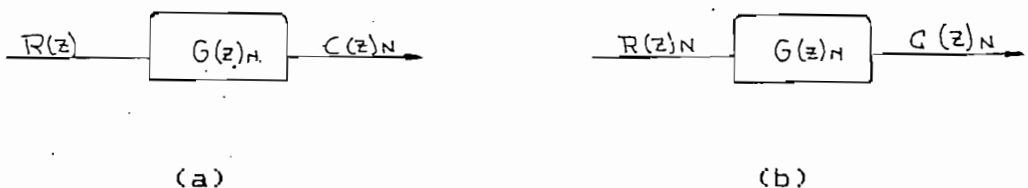


Fig. 2.34 Sistema enteramente digital

Para el caso de la figura 2.34(a) la entrada del sistema consiste de datos discretos que son representados por un tren de pulsos con un período  $T$ . El tren de pulsos de salida tiene un período  $T/N$ . La salida en el dominio  $Z$  puede ser escrita así:

$$C(z)_N = G(z)_N R(z) \quad (\text{Ec. 2.60})$$

Para el caso de la figura 2.34(b) se tiene que:

$$C(z)_N = G(z)_N R(z)_N \quad (\text{Ec. 2.61})$$

En el programa C.C. los comandos EXPAND y SKIP permiten calcular directamente a los sistemas muestreados multirango lento-rápidos y rápidos-lentos respectivamente, además en el apéndice B se dan las principales equivalencias de la transformada  $z$  necesarias para resolver sistemas muestreados multirango tanto de lazo abierto como de lazo cerrado. Estos comandos se describirán en detalle en el apéndice A.

Para un mejor entendimiento de los sistemas muestreados multirango tanto en lazo abierto como en lazo cerrado se darán ejemplos de aplicación.

#### Ejemplo 2.5.-

En el sistema muestreado mostrado en la figura 2.28 se tiene que:  $T_2 = T/N$

$G_{h_0}(s)$  es el retenedor de orden cero (Z O H)

$G_1(s)$  es la transformada de Laplace del prefiltro

$G_2(z)$  es la transformada  $Z$  del controlador discreto y

$G_3(s)$  es la función de la Planta o Proceso.

La salida analógica  $Y(s)$  es obtenida a la salida de un muestreador de período  $T/N$ , resultando en  $G_5(z) = Y_i(z)$ , entonces los muestreos intermedios no serán cero.

La salida  $G_5(z)$  puede ser expresada mediante la siguiente operación:

$$G_5(z) = Z^{T/N} \{G_3(s).G_{h_0}(s).G_2(z).Z^T \{G_1(s).r(s)\}\} \quad (\text{Ec. 2.62})$$

Los superíndices indican el período de muestreo para el cual la transformada  $Z$  y el muestreador están definidos.

Hay que recordar que el retenedor de orden cero está

definido para un periodo de muestreo  $T$ , lo cual significa que la señal discreto es retenida por  $T$  segundos o  $N$  periodos del muestreador  $T/N$ .

El muestreador de orden rápido es descompuesto en muestreadores sincronizados más lentos ( $T$ ) con unidades de tiempo de adelanto y retardo como se mostró en la figura 2.31.

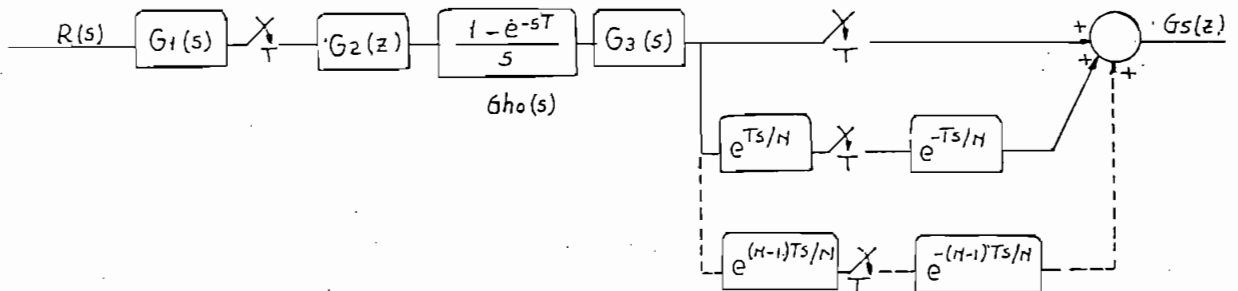


Fig. 2.35 Sistema Resultante para  $T_2 = T/N$

Aplicando la expresión 2.55 se tiene que:

$$G_S(z) = G_2(z) \cdot Z\{G_1(s) \cdot R(s)\} \sum_{k=0}^{N-1} z^{1-k/N} G(z, k/N)$$

Donde  $G(z, k/N)$  es la transformada  $z$  modificada de  $G_3(s) \cdot G_{h_0}(s)$ .

Si consideramos los siguientes parámetros:

$$G_1(s) = \frac{20}{s + 20} \quad ; \quad G_2(z) = \frac{.1 (z + 1)}{z - 0.8} \quad ; \quad R(s) = \frac{1}{s}$$

$$G_3(s) = \frac{10}{s + 10} \quad T = 1, N = 10$$

Se tiene que:

$$\mathcal{Z}\{G_1(s) \cdot R(s)\} = \frac{z(1 - e^{-20})}{(z - 1)(z - e^{-20})} \approx \frac{1}{z - 1}$$

$$G_2(z) \cdot \mathcal{Z}\{G_1(s) \cdot R(s)\} = \frac{.1(z + 1)}{z - 0.8} \cdot \frac{1}{z - 1}$$

$$G(s) = G_3(s) \cdot G_h(s) = \frac{10}{s + 10} \cdot \frac{1 - e^{-s}}{s}$$

$$\mathcal{Z}\{G(s)\} = G(z, m) \quad \text{donde } m = k/N$$

$$\mathcal{Z}\{G(s)\}_{m=k/N} = (1 - z^{-1}) \cdot \mathcal{Z}\left\{\frac{10}{s(s + 10)}\right\}$$

$$G(z, m) = (1 - z^{-1}) \cdot \frac{(1 - e^{-k})z + (e^{-k} - e^{-10})}{(z - 1)(z - e^{-10})}$$

Despreciando el valor  $e^{-10}$  la última expresión se puede aproximar a:

$$G(z, m) = \frac{(1 - e^{-k})z + e^{-k}}{z^2}$$

Finalmente se obtiene  $G_3(z)$  así:

$$G_3(z) = \frac{1}{z - 1} \cdot \frac{.1(z + 1)}{z - 0.8} \sum_{k=0}^9 z^{1-k/10} \frac{(1 - e^{-k})z + e^{-k}}{z^2}$$

$$G_3(z) = \frac{1}{z - 1} \cdot \frac{.1(z + 1)}{z - 0.8} \left[ z \cdot \frac{1}{z^2} + \frac{z^{9/10}(0.63z + 0.367)}{z^2} + \frac{z^{8/10}(0.86z + 0.135)}{z^2} + \dots \right. \\ \left. + \frac{z^{3/10}(0.999z + 3.3 \times 10^{-4})}{z^2} + \frac{z^{1/10}(0.999z + 1.2 \times 10^{-4})}{z^2} \right]$$

$$G_3(z) = \frac{.1(z + 1)}{z^2(z - 1)(z - 0.8)} \left[ z + z^{9/10}(0.63z + 0.367) + z^{8/10}(0.86z + 0.135) + \dots + z^{1/10}(0.999z + 1.2 \times 10^{-4}) \right] \quad (\text{Ec. 2.63})$$

Como se puede ver el procedimiento para calcular  $G_3(z)$

resulta un poco complejo y tedioso especialmente cuando se tiene un valor alto de  $N$ ; todo este largo cálculo se lo puede realizar directamente mediante la ejecución de varios comandos del programa C.C mediante la ejecución de un macro así:

En la expresión 2.62 es necesario descomponer el retenedor de orden cero en sus dos partes, transformada  $Z$  y de Laplace ya que la salida es muestreada a una velocidad más rápida que la velocidad a la cual opera el retenedor.

Entonces de 2.62 y aplicando las equivalencias de sistemas muestreados multirango que se tiene en el apéndice B se obtiene:

$$G_0(z) = z^{T/N} \{G_0(s) \cdot 1/s (1 - z^{-1}) \cdot G_2(z) \cdot z^T \{G_1(s) R(s)\}$$

$$G_0(z) = z^{T/N} \left\{ \frac{G_0(s)}{s} \right\} \cdot z^{T/N} \left[ (1 - z^{-1}) \cdot G_2(z) \right] \cdot z^{T/N} \left\{ z^T \{G_1(s) R(s)\} \right\} \quad (2.64)$$

1ro
2do
3ro
4to

Las operaciones  $Z\{.\}$  1ro y 4to son operaciones que se refieren a la transformada  $Z$  con períodos  $T/N$  y  $T$  respectivamente computadas directamente mediante la operación 7 del comando CONVERT en tanto que las operaciones  $Z\{.\}$  2do y 3ro se refieren a sistemas muestreados multirango Fast-Slow y que pueden ser evaluados mediante el comando EXPAND.

El siguiente marco nos permite computar y graficar  $G_0(z)$ . Desarrollando este comando se obtiene  $G_0(Z)$  así:

$$G_5(z) = \frac{0.632z (0.1z^{10} + 0.1)}{(z^{10} - 2.06 \times 10^{-9})(z - 1)(z - 0.367)(z^{10} - 0.8)}$$

- 1: ECHO, GENSAM, &1, &2 (&1 = T, &2 = N)
- 2: ANALOG & BUILD & G500 = G1/S & G501 = G3/S & QUIT
- 3: CONVERT, G500, G502, 7, &1
- 4: ANALOG & CONVERT, G501, G503, 7, &1/&2
- 5: DIGRAMA, &1 & BUILD & G504 = G2\*(1 - Z<sup>-1</sup>) & QUIT
- 6: MR & EXPAND, G502, G505, &2
- 7: DIGRAMA, &1 & EXPAND, G504, G506, &2 & QUIT
- 8: BUILD & G4 = G506 \* G503 & G5 = G4 \* G505 & QUIT
- 9: DTIME, G5, 4, 0, 150, 10, 15, 0, 1, 5, "Salida Analógica de un Sistema de Datos Muestreados", 1, 0
- 10: D
- 11: 3, 1 & QUIT

Desde la línea 1 hasta la línea 8 el macro computa la salida  $G_5(z)$  de la expresión (2.64). Puesto que en el macro anterior, la expresión final  $G_5(z)$  ya incluye la entrada paso en la línea 9 se obtiene la respuesta de  $G_5(z)$  para una entrada impulso en lazo abierto. Las líneas 10 y 11 nos permite obtener la salida muestreada en los instantes de muestreo pues en la opción D del menú del gráfico al cambiar el literal (3) a 1 nos permite cambiar el gráfico del dominio discreto  $\text{Time} = n.T$  al dominio de tiempo (Time).

Para obtener la salida muestreada con puntos intermedios será necesario cambiar en la misma opción D el literal (4) de 10 a 1.

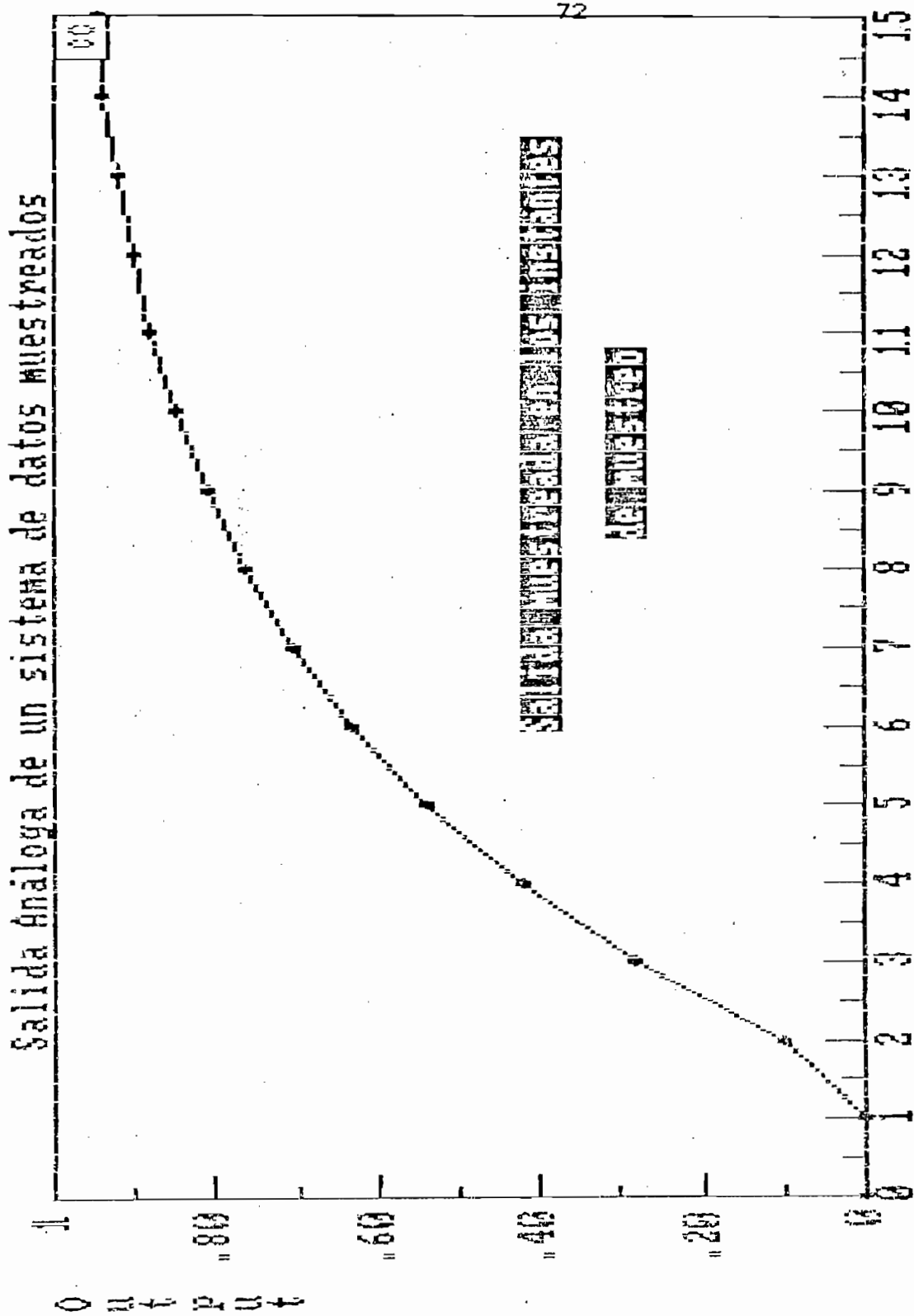


Fig 2.35 Salida muestreada en los instantes de muestreo.

Time



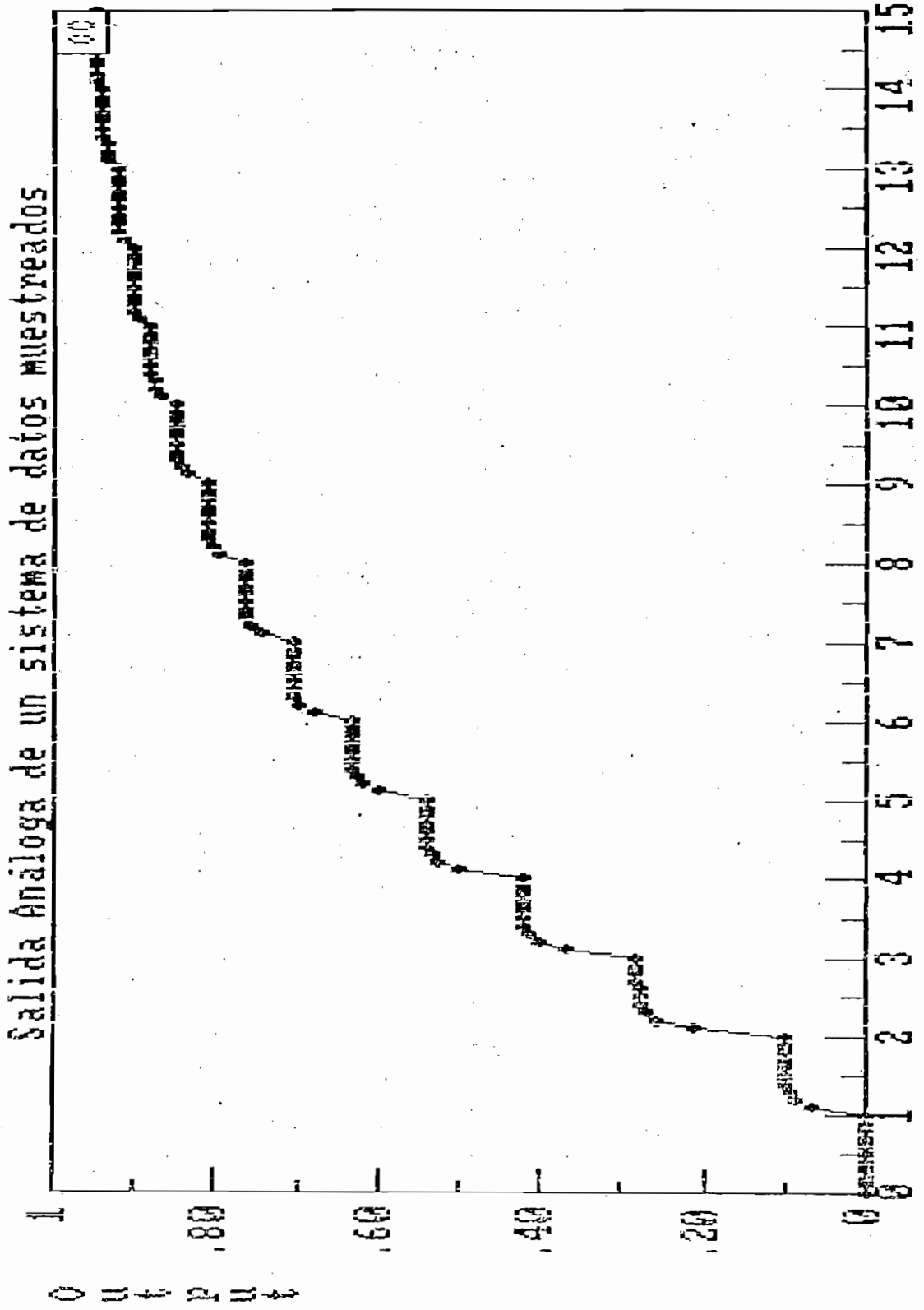


Fig 2.36 Salida Muestreada con Puntos Intermedios

Time

Para ejecutar el comando GENSAM, será necesario salirnos del modo MACRO (previamente grabando el macro: store, gensam) y desde el modo CC> o DIG> ejecutarlo de la siguiente manera:

@ GENSAM, 1, 10

La ejecución de este macro nos darán los resultados que se muestran en las figuras 2.35 y 2.36. A continuación se va a analizar un sistema de datos muestreados de lazo cerrado para lo cual se presentan los siguientes ejemplos:

Ejemplo 2.6.-

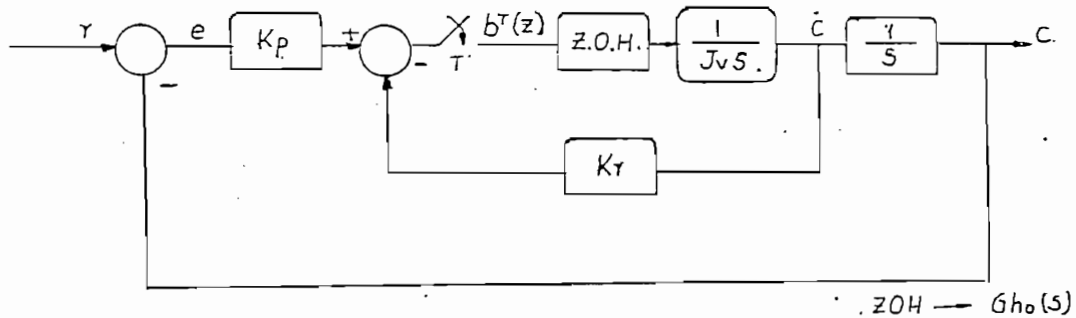


Fig. 2.37 Sistema de un Vehículo Espacial

El gráfico de la figura 2.37 muestra el sistema de Control de un Vehículo espacial. El objetivo de este sistema es controlar la posición del vehículo espacial en una sola dimensión, si el vehículo tiene una estructura rígida, puede ser modelado como una simple masa o inercia, el vehículo está representado por la inercia  $J_v$ , tal que la función de transferencia entre el torque aplicado y la posición de salida es:

$$C(s)/T_m(s) = \frac{1}{Jv s^2}$$

La salida de los sensores de posición y velocidad son procesadas por unidades sample and hold las cuales incluyen operaciones A/D. El período de muestreo es T segundos.

Los parámetros del sistema de control de datos muestreados están dados por:

$K_p$  = ganancia del sensor de posición =  $1.65 \times 10^6$

$K_v$  = ganancia del sensor de velocidad =  $3.17 \times 10^6$

$Jv$  = momento de inercia del vehículo = 41822

La función de transferencia de lazo abierto del sistema de control discreto puede hallarse de la siguiente manera:

$$C(z) = \mathcal{Z}\left\{ \frac{1}{Jv s^2} \cdot Gh_o(s) \right\} b^T(z) \quad (\text{Ec. 2.65})$$

$$b^T(z) = \mathcal{Z}\left\{ K_p e(s) - K_v \frac{1}{Jv s} \cdot Gh_o(s) \right\} \cdot b^T(z)$$

entonces nos queda que:

$$b^T(z) = \frac{K_p E(z)}{1 + \mathcal{Z}\left\{ \frac{K_v}{Jv s} + Gh_o(s) \right\}} \quad (\text{Ec. 2.66})$$

reemplazando 2.66 en 2.65 se obtiene que:

$$\frac{C(z)}{E(z)} = \frac{K_p \mathcal{Z}\{Gh_o(s) \cdot 1/Jv s^2\}}{1 + K_v \mathcal{Z}\{Gh_o(s) \cdot 1/Jv s\}} = G(z)$$

La función de transferencia en lazo cerrado será:

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + G(z)} \quad (\text{Ec. 2.67})$$

La expresión 2.67 es evaluada mediante el macro SPACE

de la siguiente manera así:

1: ECHO, SPACE, &1, &2 (&1 = T, &2 = Gi)

2: ANALOG & BUILD & G500 = G4/S & QUIT

3: CONVERT, G500, G501, 8, &1

4: BUILD & G502 = G501 \* G5 & QUIT

5: ANALOG & CONVERT, G4, G503, 8, &1

6: BUILD & G504 = G503 \* G5 & G505 = 1 + G504 &

G506 = G502/G505 & QUIT

7: BUILD & &2 = G506/(1+G506) & QUIT

Antes de ejecutar este macro es necesario previamente definir G4, G5, G6 y G7 de la siguiente forma:

$$G_4(s) = 1/41822 s$$

$$G_5(s) = 317000$$

$$G_6(s) = 1650000$$

$$\text{y } G_7(s) = 1/s$$

Luego de ejecutar el macro @SPACE, T, Gi será necesario aplicar el siguiente comando DTIME, Gi, 3, 0, 200, 5, 10, 0, 1.5, 3, "Respuesta a una función paso del sistema de Control Digital", 1, 0.

Y luego que se muestre el gráfico, cambiaremos el literal (3) a 1 de la opción D del menú que aparece en pantalla. Se ejecutó el macro con los siguientes valores:

@ SPACE, 0.01, G8 --> gráfico (2.38)

@ SPACE, 0.001, G8 --> gráfico (2.39)

@ SPACE, 0.225, G8 --> gráfico (2.40)

@ SPACE, 0.269, G8 --> gráfico (2.40)

El gráfico 2.40 se obtuvo para el valor de  $T \approx 0.264$  seg, el mismo que nos indica el límite de estabilidad utilizando

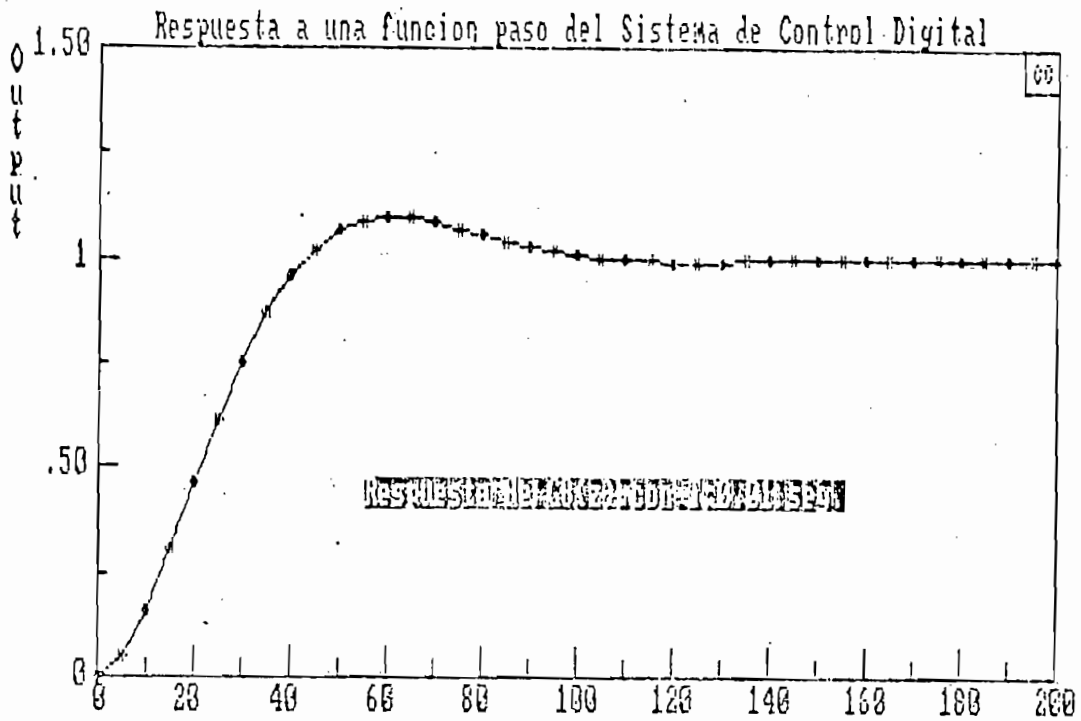


Fig. 2.38 Respuesta del Sistema Digital para  $T=0.01\text{seg.}$   $n. \text{Time}=n \times T$

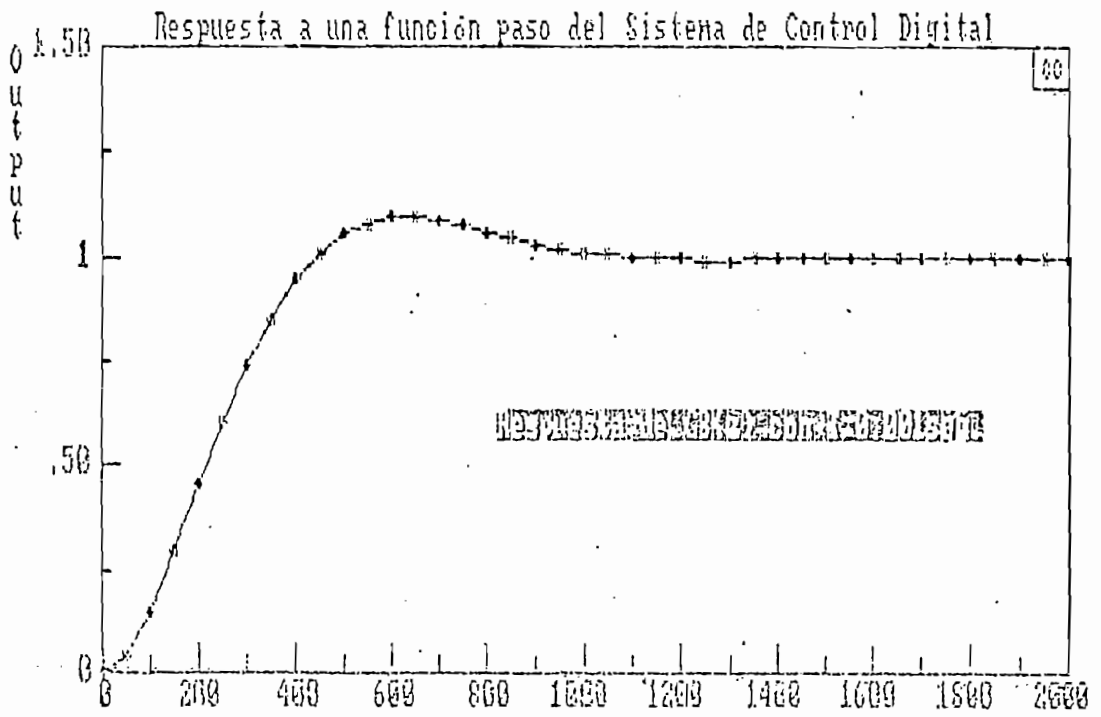


Fig. 2.39 Respuesta del Sistema Digital para  $T=0.001 \text{ seg.}$   $n. \text{Time}=n \times T$

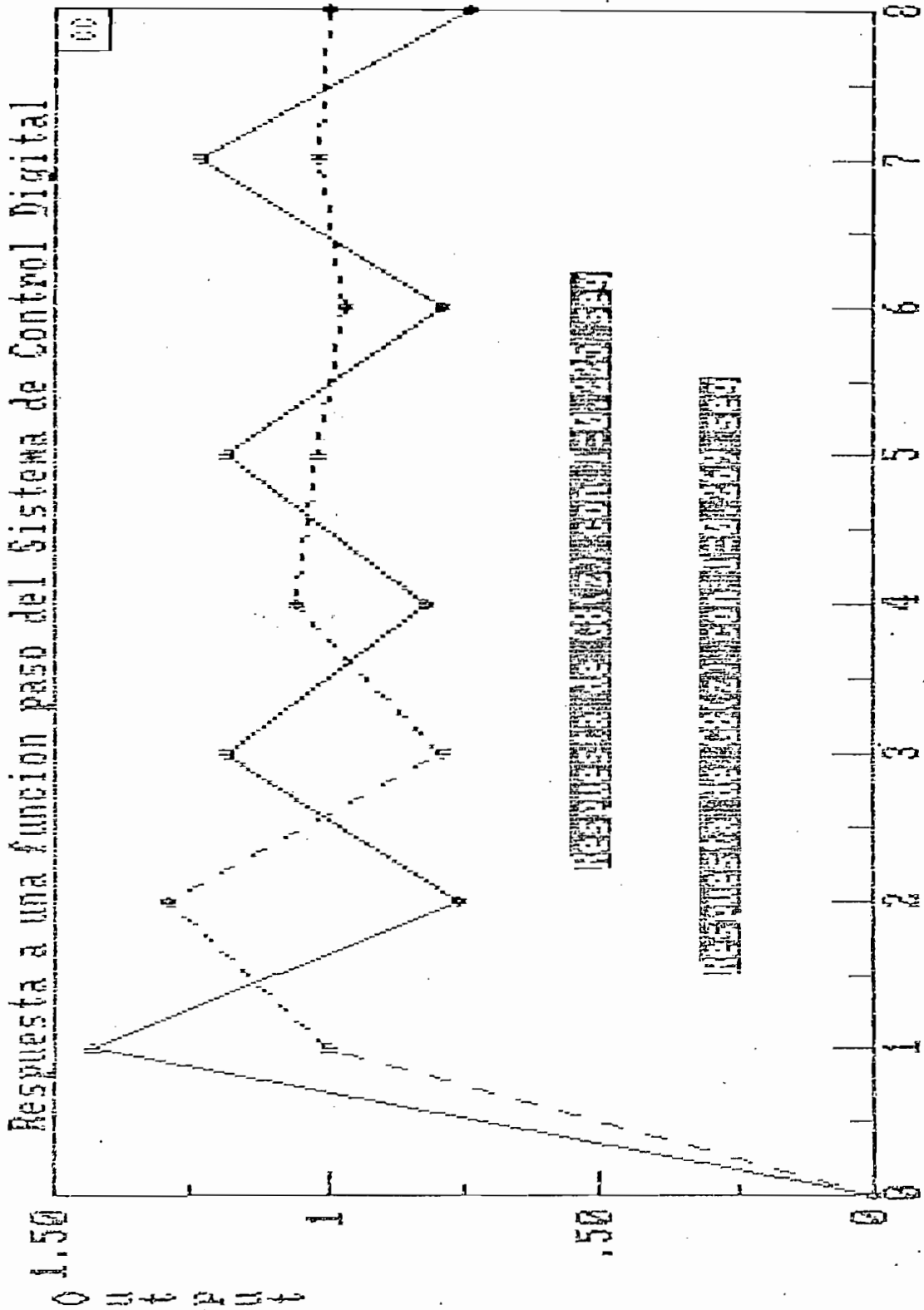


Fig.2.40 Respuesta del Sistema Digital para  $T=0.225$  seg.

y  $T=0.269$  seg.

n, Time=nT

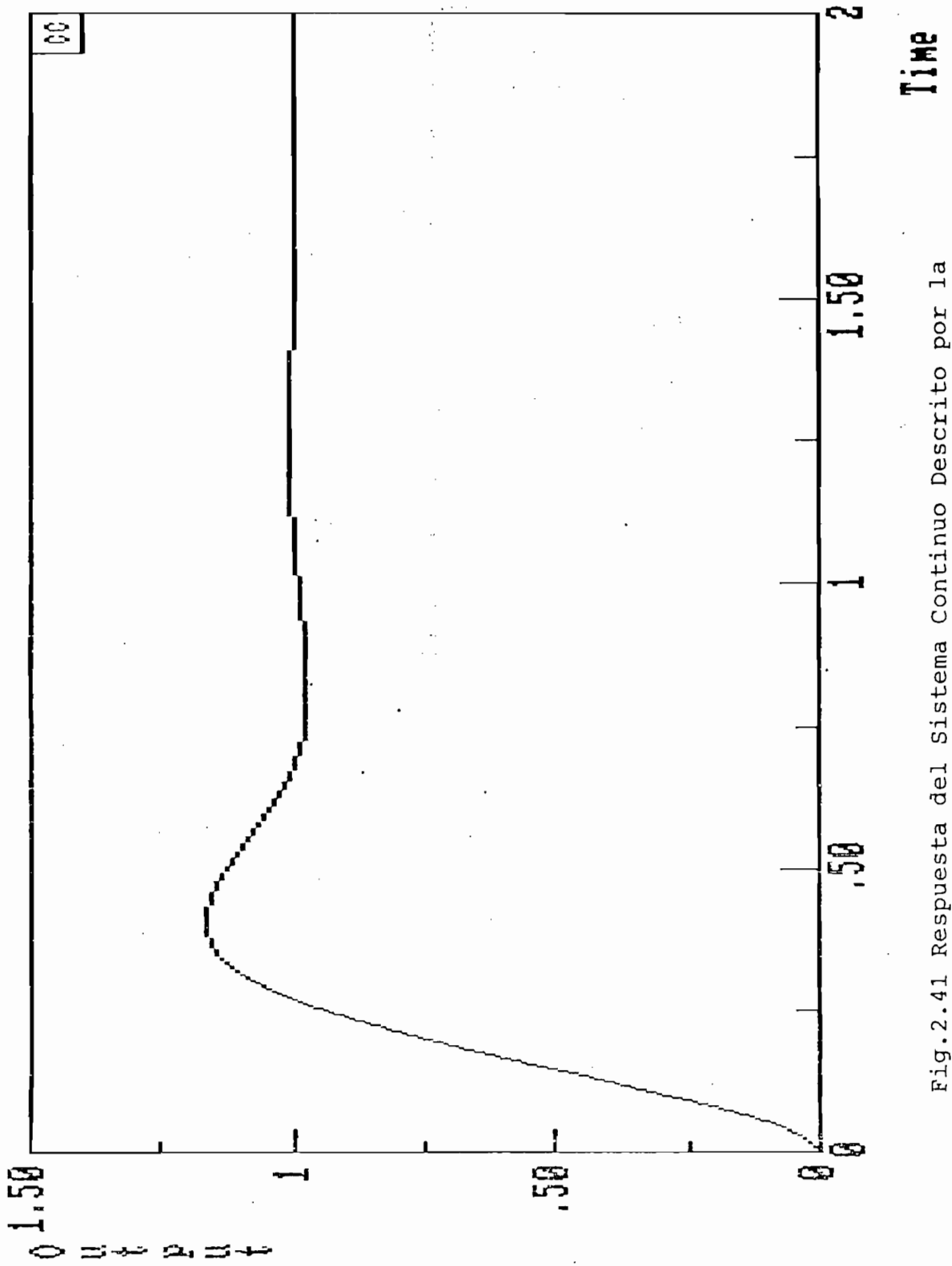


Fig.2.41 Respuesta del Sistema Continuo Descrito por la Ecuación 2.68 a una función paso

el criterio de estabilidad de Jury's que dice:

Si en un sistema de datos continuos la ecuación característica está dada por :

$$F(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$$

donde  $a_0, \dots, a_n$  son coeficientes reales, asumiendo que  $a_n$  es positivo o que puede ser hecho positivo cambiando los signos de todos los coeficientes, se elabora la siguiente tabla:

Fila	$z^0$	$z^1$	$z^2$	....	$z^{n-1}$	$z^n$
1	$a_0$	$a_1$	$a_2$	...	$a_{n-1}$	$a_n$
2	$a_n$	$a_{n-1}$	$a_{n-2}$	...	$a_1$	$a_0$
3	$b_0$	$b_1$	$b_2$	...	$b_{n-1}$	
4	$b_{n-1}$	$b_{n-2}$	$b_{n-3}$	..	$b_0$	
5	..	..	..			
.	.	.	.			
.	.	.	.			
$2n-4$		$p_3$	$p_2$	$p_1$	$p_0$	
$2n-3$		$q_0$	$q_1$	$q_2$		

Los elementos de la  $(2k+2)$ ésima fila consisten de los coeficientes de la  $(2k+1)$ ésima fila escritos en orden inverso. Los elementos de la tabla se definen de la siguiente manera:

$$b_k = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-k} \\ a_n & a_k \end{vmatrix} \quad q_k = \begin{vmatrix} p_0 & p_1 \\ p_3 & p_2 \end{vmatrix}$$

Entonces la condiciones necesarias y suficientes para que  $F(z)$  no tenga raíces fuera o sobre el círculo unitario en el plano  $z$  (Sistema asintóticamente estable) son:

$$F(1) > 0$$

$$> 0 \text{ n par}$$

$$F(-1) < 0 \text{ n'impar} \quad \text{y ademas}$$



$$|a_0| < a_n, |b_0| > |b_{n-1}|, \dots, |q_0| > |q_2|$$

Para poder comparar la respuesta del sistema discreto y la respuesta del sistema continuo así como ver el efecto que tiene variar el período de muestreo en un sistema de lazo cerrado será necesario previamente hallar la respuesta del sistema continuo.

Para los valores de  $K_p$ ,  $J_v$  y  $K_v$  igual a las antes anotados, la función de transferencia de lazo cerrado es:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{39.453}{s^2 + 8.871s + 39.453} \quad (\text{Ec. 2.68})$$

De lo que se desprende que  $\zeta = 0.705$  y  $\omega_n = 6.28$  y por tanto la constante de tiempo del sistema será:

$$\sigma = \frac{1}{\epsilon \omega_n} = 0.225$$

La respuesta a una función paso del sistema continuo se muestra en la figura 2.41

De acuerdo al criterio de estabilidad de Jury's antes mencionado se puede ver que el rango de  $T$  para que el sistema sea estable es  $0 \leq T \leq 0.264$ . Además, de acuerdo al espectro de frecuencias de la función de transferencia dada por 2.68 se puede obtener aproximadamente la mínima frecuencia de muestreo, esto es  $\omega_s > 2\omega_c$  donde  $\omega_c \approx 20$  entonces  $T < 0.157$ . De acuerdo a esto se ha obtenido la respuesta del sistema de las figura 2.38 y 2.39 se puede mencionar que para valores  $T = 0.01$  y  $T = 0.001$  el sistema es estable y las respuestas son similares a la respuesta del sistema análogo descrito por la ecuación 2.68 y que se muestra en la figura 2.41.

Para el caso de  $T = 0.225$  el sistema empieza a perder las características del sistema análogo original ya que existe pérdida de información entre los instantes de muestreo.

Para  $T = 0.269$  a más de existir pérdida de información el sistema se vuelve inestable.

### Ejemplo 2.7.-

En la figura 2.42 (a) se muestra un sistema discreto multirango de lazo cerrado. Descomponiendo el muestreador rápido de acuerdo a la figura 2.31 se obtiene la figura 2.42 (b). Hay que notar que el retenedor de orden cero del muestreador  $T/2$  tiene una función de transferencia distinta que el retenedor de orden cero del muestreador  $T$ .

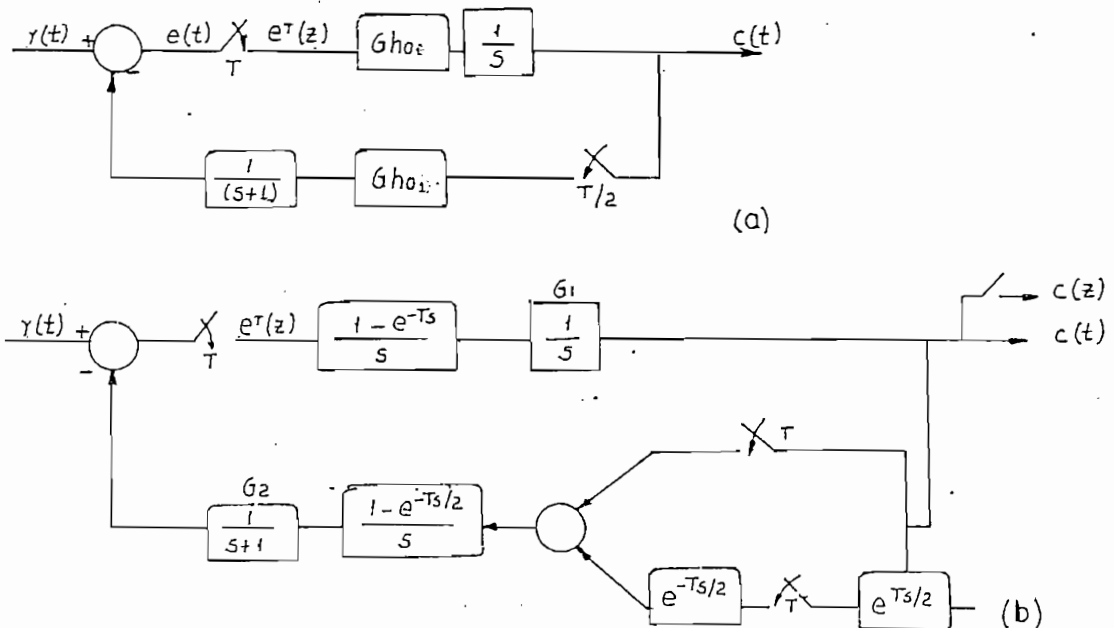


Fig. 2.42 (a) Sistema Multiorden (b) Sistema equivalente descomponiendo el muestreador

De la figura 2.42(b) se deduce que:

$$e^T(z) = Z\{R(s) - G_2(s) G_{ho2}(s) [Z\{G_1(s) G_{ho1}(s) \cdot e^T(z)\} + e^{-T/2} \cdot Z\{e^{T/2} \cdot G_1(s) \cdot G_{ho1}(s) \cdot e^T(z)\}]\}$$

$$e^T(z) = Z\{R(s)\} - Z\{G_2(s) G_{ho2}(s)\} \cdot Z\{G_1(s) G_{ho1}(s)\} \cdot e^T(z) +$$

$$Z\{G_2(s) G_{ho2}(s) e^{-T/2}\} \cdot Z\{e^{T/2} G_1(s) G_{ho1}(s)\} \cdot e^T(z)$$

$$e^T(z) = \frac{Z\{R(s)\}}{1 + Z\{G_2(s) G_{ho2}(s)\} Z\{G_1(s) G_{ho1}(s)\} + Z\{G_2(s) G_{ho2}(s) e^{-T/2}\} \cdot Z\{e^{T/2} G_1(s) G_{ho1}(s)\}} \quad (\text{Ec. 2.69})$$

$$C(z) = Z\{G_1(s) \cdot G_{ho1}(s)\} \cdot e^T(z) \quad (\text{Ec. 2.70})$$

$$\text{Donde } Z\{G_1(s) G_{ho1}(s)\} = (1 - z^{-1}) Z\{1/s^2\} = T / (z-1)$$

$$Z\{G_2(s) G_{ho2}(s)\} = Z\left[\frac{1}{s(s+1)}\right] - Z\left[\frac{e^{-T/2}}{s(s+1)}\right]$$

$$= Z\left[\frac{1}{s(s+1)}\right] - Z_m\left[\frac{1}{s(s+1)}\right]$$

$$= \frac{e^{-T/2} - e^{-T}}{z - e^{-T}}$$

$$Z\{e^{T/2} G_{ho1}(s) G_1(s)\} = (1 - z^{-1}) \cdot Z\left[\frac{e^{T/2}}{s^2}\right]$$

$$= (1 - z^{-1}) \cdot z Z_m\left[\frac{1}{s^2}\right]$$

$$= \frac{T/2 (z + 1)}{z - 1}$$

$$Z\{e^{-T/2} G_{ho2}(s) G_2(s)\} = Z\left[\frac{e^{-T/2}}{s(s+1)}\right] - Z\left[\frac{e^{-T}}{s(s+1)}\right]$$

$$= \frac{1 - e^{-T/2}}{z - e^{-T}}$$

Reemplazando estas expresiones finales en las ecuaciones 2.69 y 2.70, haciendo  $T = 1 \text{ seg.}$  se obtiene:

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{z - 0.367}{z^2 - 1.17z + 0.803} \quad (\text{Ec. 2.71})$$

De la figura 2.42 (a) y aplicando las equivalencias de sistemas muestreados multirango (apéndice B) se obtiene:

$$e^T(z) = Z^{-1} \{ R(s) - G_2(s) G_{h_{01}}(s) \cdot Z^{-T/M} [G_1(s) \cdot G_{h_0}(s) \cdot e^T(z)] \}$$

$$e^T(z) = Z^{-1} \{ R(s) \} - Z^{-1} \{ Z^{-T/M} [G_2(s) \cdot G_{h_{01}}(s)] \cdot Z^{-T/M} [G_1(s) \cdot G_{h_{01}}(s)] \} \cdot e^T(z)$$

$$e^T(z) = \frac{Z^{-1} \{ R(s) \}}{[1 + Z^{-1} \{ Z^{-T/M} [G_2(s) \cdot G_{h_{01}}(s)] \} \cdot Z^{-T/M} [G_1(s) \cdot G_{h_{01}}(s)]]} \quad (\text{Ec. 2.72})$$

$$C^T(z) = Z^{-1} \{ G_1(s) \cdot G_{h_0}(s) \} \cdot e^T(z) \quad (\text{Ec. 2.73})$$

Reemplazando (2.72) en (2.73) se obtiene:

$$\frac{C^T(z)}{R^T(z)} = \frac{Z^{-1} \{ G_1(s) \cdot G_{h_0}(s) \}}{1 + Z^{-1} \{ Z^{-T/M} [G_2(s) \cdot G_{h_{01}}(s)] \} \cdot Z^{-T/M} \{ G_1(s) / s \} \cdot Z^{-T/M} (1 - z^{-1})} \quad (\text{Ec. 2.74})$$

Mediante el siguiente macro se puede computar la ecuación (2.74)

```
ECHO, MULTI, &1, &2 (&1 = T, &2 = N)
BUILD & G31 = G3/S & G21 = 1 - Z^{-1} - 1 & QUIT
ANALOG & CONVERT, G2, G501, 8, &1/&2
ANALOG & CONVERT, G31, G500, 7, &1/&2
DIG, &1 & MR & EXPAND, G21, G4, &2 & QUIT
BUILD & G502 = G500 + G501 * G4 & QUIT
DIG, &1/&2 & MR & SKIP, G502, G504, &2 & QUIT
ANALOG & CONVERT, G1, G508, 8, &1
BUILD & G509 = G508 / (1 + G504) & QUIT
```

Ejecutando este macro se obtiene el siguiente resultado

$$G509(z) = \frac{(z - 0.368)}{[(z - 0.585)^2 + 0.6787^2]}$$

Dicha expresión es igual a la expresión (2.71)

## 2.5 CONCLUSIONES

- Observando los resultados que, para distintos períodos de muestreo, se obtuvieron al discretizar una función (lazo abierto), así como al analizar sistemas muestreados (lazo cerrado) se puede mencionar que para el caso del sistema de lazo cerrado la frecuencia de muestreo debe ser mucho más alta que la frecuencia mínima teórica (Teorema de Shannon), es decir que el escogitamiento del período de muestreo en lazo cerrado es más crítico que en lazo abierto.
- A menor período de muestreo la respuesta del sistema muestreado más se aproximará a la respuesta del sistema continuo. Así mismo se puede manifestar que debido a lo complejo en hallar el espectro de frecuencias y determinar el período de muestreo se puede facilitar este trabajo encontrándose la constante de tiempo del sistema y escogiendo un período de muestreo aproximadamente igual a 10 veces menor la constante de tiempo ( $T \leq \tau/10$ ) para el caso de sistemas en lazo abierto e igual a 20 veces menor la constante de tiempo ( $T \leq \tau/20$ ) para el caso de sistemas en lazo cerrado (realimentación unitaria), cuyos valores caerán dentro del período determinado según el Teorema de Shannon, como se comprobó en los distintos ejemplos analizados.

- Si bien al aplicar el comando EXPAND no se obtiene la misma expresión final, en cambio esta es equivalente a la obtenida por cualquiera de los métodos teóricos y por tanto su resultado será el mismo. Para esto previamente será necesario reemplazar a la variable  $Z'/N$  por otra variable  $Z_1$  en la expresión que se obtiene por algún método teórico; Si se grafican estas dos expresiones se obtendrá el mismo resultado.
  
- En el macro del ejemplo 3 hay que tomar en cuenta que el retenedor de orden cero está definido para  $T$  segundos en cambio que el otro retenedor ubicado en el lazo de realimentación está definido para  $T/N$  segundos y según esto habrá que aplicarse el comando respectivo.
  
- Para el caso de la resolución de ecuaciones de diferencias al aplicar el comando IZT del programa en ocasiones en que el orden del numerador es igual al orden del denominador se introduce un error en el resultado final. Este error es propio del programa CC y se introduce por el método de expansión en fracciones parciales que usa.

## C A P I T U L O   I I I

### SIMULACION DISCRETA UTILIZANDO UN COMPUTADOR HIBRIDO

- 3.1    Introducción.
- 3.2    Descripción de la Metodología.
- 3.3    Métodos de discretización.
  - 3.3.1 Variación del Período de Muestreo.
- 3.4    Resolución de Ecuaciones de Diferencias.
  - 3.4.1 Solución de Ecuaciones de Diferencias.
  - 3.4.2 Sistemas Discretos en el Espacio de Estado.
- 3.5    Análisis de Sistemas Muestreados.
- 3.6    Conclusiones.

## CAPITULO III

### - SIMULACION DISCRETA UTILIZANDO UN COMPUTADOR HIBRIDO. -

3.1 Introducción.- Puesto que todo el análisis teórico tanto de los sistemas continuos y discretos como de los simuladores discretos de sistemas análogos se lo hizo en el capítulo anterior; en el presente se dará la metodología necesaria para simular sistemas discretos, sistemas muestreados, resolver ecuaciones de diferencias y sobre todo simular controladores discretos en el computador análogo híbrido EAI Mini AC, aprovechándose para este propósito de los recursos que nos ofrece el computador mencionado. Para efectos de la simulación discreta será necesario el empleo de elementos que nos permitan tener un retardo de T segundos ( $z^{-1}$ ), esto lo conseguimos mediante la conexión en cascada de dos Track/Store; así mismo será necesario escoger el período de muestreo mediante la utilización del Timer del computador. Puesto que las unidades de retardo  $z^{-1}$  se conectan entre si mediante determinados valores de coeficientes así como también mediante elementos de suma será necesario el empleo de potenciómetros y sumadores. También deberá usarse el Contador Binario necesario para contar el número de eventos (número de muestreo). Además de estos será indispensable el uso de elementos que nos permiten tener una determinada señal de entrada como son los Flip-Flops, control local de integradores etc.

Las características fundamentales de estos elementos



están descritas en el apéndice C de la presente tesis.

### 3.2 Descripción de la Metodología.

Dada la ecuación de diferencias de orden  $m$ :

$$y[n] + a_1y[n-1] + \dots + a_my[n-m] = b_0x[n] + b_1x[n-1] + \dots + b_mx[n-m]$$

donde  $x[n]$  es una secuencia conocida y  $x[n]=0$  para  $n<0$

tomando la transformada  $z$  y considerando las condiciones iniciales nulas se tiene:

$$Y(z)(1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots + a_mz^{-m}) = X(z)(b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \dots + b_mz^{-m})$$

Por tanto la función de transferencia del sistema discreto tendrá la siguiente forma:

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \dots + b_mz^{-m}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots + a_mz^{-m}} = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad (\text{Ec.3.1})$$

El circuito que simula la función de transferencia  $H(z)$  es el siguiente, en el que se incluirán las condiciones iniciales respectivas:

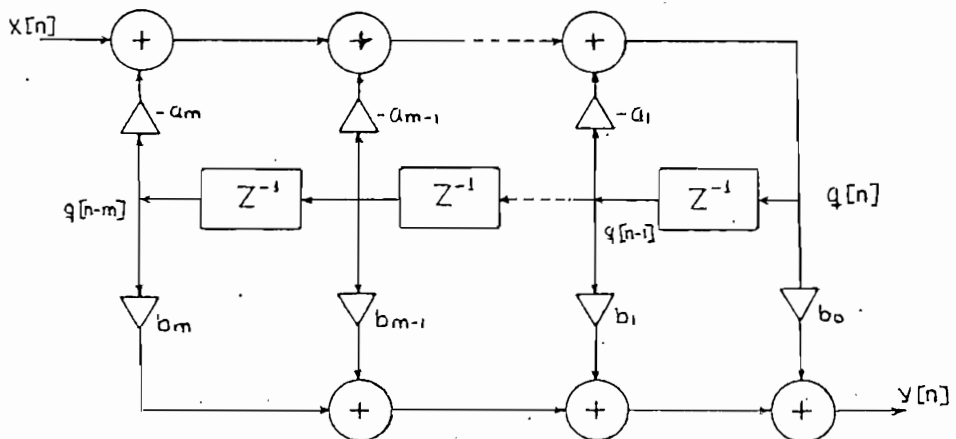
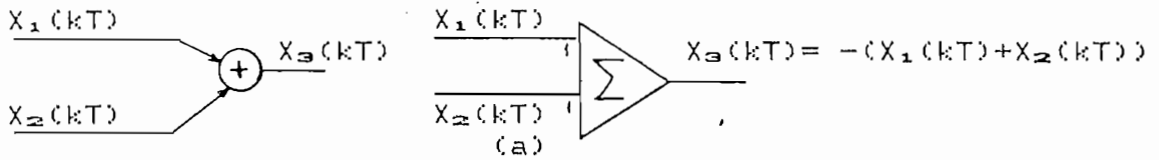


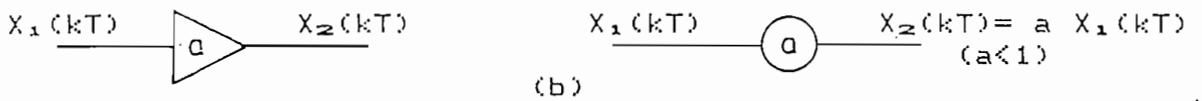
Fig. 3.1 Circuito que permite simular una función de transferencia discreta

donde se tiene las siguientes equivalencias, con elementos del EAI Mini AC :

Sumador:



Multiplicación por una constante:



Unidad de retardo :

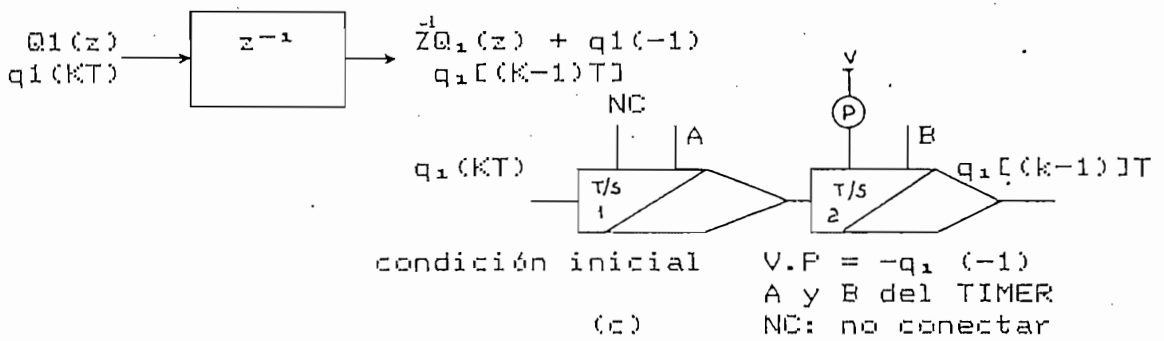


Fig. 3.2 Equivalencias entre elementos de la Fig 3.1 y elementos del EAI Mini AC

Señales de control:

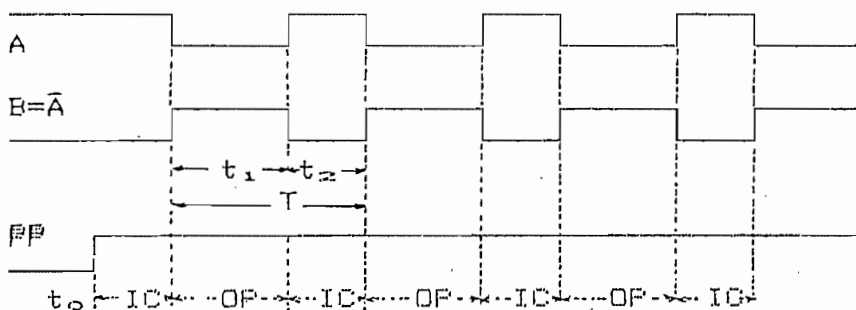


Fig. 3.3 Señales de Control del Timer

Se llegó a la conclusión que para obtener la unidad de retardo deseada ( $z^{-1}$ ) y entonces poder simular sistemas discretos, es necesario tener 2 T/S en cascada controladas lógicamente por las señales del TIMER A conectada a la entrada T del T/S 1 y  $B=\bar{A}$  a la entrada T del T/S 2. Además como se tiene dos unidades en cascada no existe inversión de signo. A continuación se da una mejor explicación acerca del funcionamiento de la unidad de retardo simulada ( $z^{-1}$ ).

De los gráficos anteriores y asumiendo condiciones iniciales nulas, durante  $t_1$  la salida del T/S2 seguirá a su entrada, en tanto que la salida del T/S1 almacenará el valor que tenía su entrada antes de cambiar la señal de control A a OL; durante  $t_2$  en cambio la salida del T/S2 almacenará el último valor que tenía su entrada antes de cambiar la señal de control B a OL, en tanto que la salida de T/S1 seguirá a su entrada. Entonces si nos referimos a una entrada paso, para que dicha entrada se tenga a la salida del T/S2, será necesario un período de operación ( $t_1 + t_2$ ) o lo que es lo mismo durante este período se realiza el retardo deseado que equivale a una iteración.

Del gráfico 3.3 el tiempo  $t_2$  será fijo y dependerá de la selección que se haya hecho en el selector TIMER-SECONDS si:

$$t_2 = 0.7s \quad \text{TIMER-SECONDS en 1 ó 0.1}$$

$$t_2 = 7ms \quad \text{TIMER-SECONDS en 0.01 ó 0.001}$$

$t_1$  en cambio será arbitrario (5ms - 105s) y con un valor dado por la selección del potenciómetro TIMER-X5-X105. En la

simulación de sistemas discretos no es necesario especificar un cierto período de muestreo ya que solo dependerá del suficiente grado de apreciación con que se quieran mostrar los resultados.

Experimentalmente podemos concluir que las posiciones más aconsejables del selector TIMER-SECONDS para un correcto funcionamiento de la simulación son 0.1 y 0.01. En la posición 1 la simulación es muy lenta, en cambio en 0.001 se tienen tiempos muy cortos para las señales de control, provocando oscilaciones y teniendo por tanto un mal funcionamiento por esta consideración, el rango de valores para  $t_i$  será entre 50 ms y 10.5 seg.

Al inicio se deben cargar las condiciones iniciales a la salida de los T/S. Para lo cual conectamos la salida complementada de un interruptor lógico PP, a las entradas lógicas IC de los T/S. Al cambiar de estado, éste PP habilita la acción de las señales de control T. Para mantener este valor inicial a la salida del T/S2 se debe forzar a que la primera acción del T/S2 sea de almacenamiento (STORE), lo que se consigue al conectar la señal B del Timer a la entrada T del T/S2 (Fig.3.3).

Puesto que existe inversión de signo a la salida del T/S2 con la entrada Eic, habrá que tener cuidado con el signo de la referencia de voltaje que se usa para el valor de la

condición inicial. Para entender de mejor manera los pasos de la simulación (numerados mas adelante) será necesario observar las características de cada uno de los elementos usados en la misma y descritos en el apéndice C.

CLR del modo lógico borra todos los Flip - Flop, el contador/temporizador y señales de pulso de reloj, es decir inicializa los elementos lógicos.

Para el conteo del número de muestreos (n) usamos el contador el mismo que requiere un 1L en su entrada de control S para que se habilite, esto se consigue conectando la salida positiva de PP (al presionarlo); además con esto se aplican señales de reloj provenientes de la señal B del Timer a su entrada CI, registrándose un conteo por cada periodo de operación. Para el modo de operación repetitiva (IC y DP) es necesario conectar la salida A del Timer con la entrada lógica IC. Al presionar RUN se habilita el funcionamiento normal de los elementos lógicos.

Todo lo anteriormente mencionado se lo visualizará mejor mediante la figura 3.4

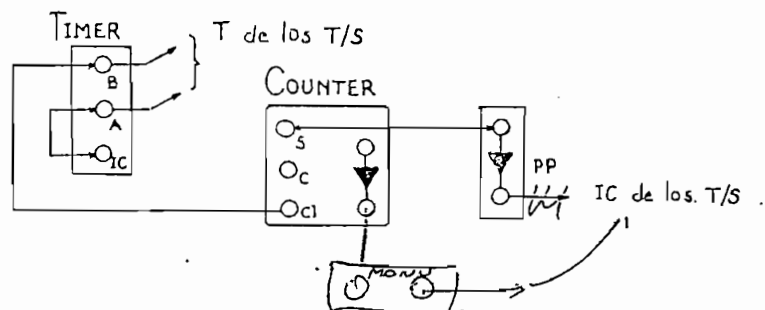


Fig. 3.4 Principales conexiones de control

Debido a que cada computador análogo posee 3 T/S y como se requieren 2 T/S por cada grado de la función de transferencia discreta, para funciones de grado 2 ó 3 será indispensable conectar los dos computadores análogos entre sí, para lo cual es necesario interconectarlos a través de dos cables; el primer cable interfaz nos interconectará los pórticos SLAVE de los computadores, y el segundo cable interfaz nos permitirá conectar los pórticos TRUNK de los computadores.

La interconexión de los pórticos TRUNK permitirá que se interconecten elementos de los dos computadores mediante los TRUNKS de sus paneles, mientras que la interconexión de los pórticos SLAVE permitirá la sincronización de señales de comandos entre los dos computadores y a la vez permitirá que uno de los computadores definidos como MASTER comande las acciones y proceso sobre el computador definido como SLAVE (éste queda definido como tal presionando la tecla SL). Es decir sobre el MASTER se programará el contador, se escogerá el período del Timer, se conectará el modo repetitivo, parar o reiniciar el programa etc.

A continuación se dan los pasos más importantes a seguirse en el proceso de simulación de un sistema digital:

1. Si el problema lo requiere: Conectar los dos computadores entre sí.
2. Seleccionar el modo de operación de cada uno de los elementos análogos o digitales del computador usados en

la simulación.

3. Realizar las conexiones físicas necesarias en el panel del computador tanto de los elementos usados en la simulación, de las señales de control, operación repetitiva etc (Fig. 3.4).
4. Seleccionar en el contador el número de iteraciones que se desee mostrar (para facilidad se sugiere utilizar el número máximo disponible, es decir 127).
5. Seleccionar la escala de tiempo apropiada para la simulación en 0.1 o 0.01 para el selector TIMER-SECONDS y variable para el potenciómetro TIMER-X5-X105 .
6. Ajustar el valor de los potenciómetros utilizados (presionar la tecla SP del panel).
7. Presionar IC del modo análogo.
8. Presionar CLR del modo lógico .
9. Presionar RUN del modo lógico .
10. Presionar PP del panel, con esto se inicia la simulación

Luego de que se hayan realizado secuencialmente los pasos anteriores, a medida que se va mostrando en el contador el número de muestreo, en el display del computador se mostrará el resultado del proceso o señales de interés, una a la vez, escogida usando el selector 1.

Si se desea parar el proceso, para repetirlo o para cambiar el valor de algunos de los potenciómetros, será necesario presionar IC del modo análogo y CLR del modo

lógico, luego si se desea cambiar el valor de potenciómetros se repite desde el paso 6 .

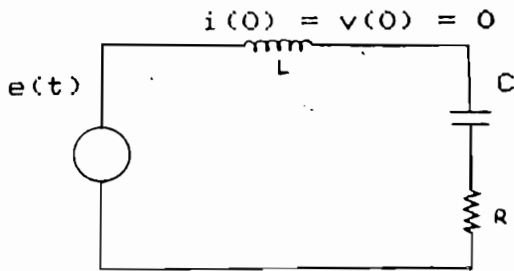
Para el caso en que sea requiera el uso de integradores será necesario realizar las conexiones adecuadas en el control local del o de los integradores respectivos.

### 3.3 Métodos de Discretización.

Para poder simular los diferentes métodos de discretización ya estudiados en el capítulo anterior se ha hecho uso del paquete de programación C.C. para obtener los coeficientes de las funciones de transferencia que resultan al aplicar las distintas opciones de discretización del comando CONVERT. Así mismo, puesto que se determinó en el segundo capítulo que los métodos 9 y 10 de discretización (retenedor de primer orden y Slew hold equivalence) nos introduce un polo adicional en el sistema digital, es decir nos aumenta el orden del sistema, y como se puede simular un sistema máximo de tercer orden conectando los 2 computadores análogos/híbridos disponibles, entonces para poder simular las funciones de los distintos métodos de discretización se ha tomado como referencia un sistema de segundo orden.

Ejemplo 3.1 En el circuito de la Fig. 3.5  $R = 120\Omega$   
 $L = 10 \text{ mH}$ ,  $C = 1\mu\text{F}$  y  $e(t) = 10\text{V}$ . Usando el voltaje del capacitor  $V(t)$  como salida, se desea encontrar los distintos simuladores  $Ld$  y sus respuestas  $Y[n] \approx V(nT)$  para  $T = 20 \mu\text{s}$ .




 $v(t)$ 

$$H_a(S) = \frac{V(S)}{E(S)}$$

$$H_a(S) = \frac{Wr^2}{(s + \alpha)^2 + \beta^2}$$

Fig. 3.5 Circuito RLC

$$Wr = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 10^4 \text{ r/s}, \quad \alpha = \frac{R}{2L} = 6 \times 10^3 \text{ r/s}, \quad \beta = \sqrt{Wr^2 - \alpha^2} = 8 \times 10^3 \text{ r/s}$$

$$H_a(s) = \frac{10^8}{s^2 + 12 \times 10^3 s + 10^8} = \frac{V(s)}{E(s)}$$

En esta parte es importante mencionar que al introducir el valor de estos coeficientes en una función cualquiera  $G(s)$ , el programa D.C. no logra mostrar el valor correcto de  $10^8$  en el monitor (se muestra  $2.5E+07$ ), pero en cambio para el cálculo de discretización el programa almacena y trabaja con el valor correcto de  $10^8$ .

Mediante el comando ENTER se ha ingresado la función  $H_a(s)$  en la función  $G(s)$  y por intermedio de los distintos tipos de discretización del comando CONVERT se han obtenido las funciones discretas  $G_1(z)$ ,  $G_2(z)$ ...  $G_{10}(z)$  (excepto  $G_5(z)$ ). La función  $G_{71}(z)$  se obtiene al multiplicar  $G_7(z) \cdot T$  donde  $T$  es igual al período de muestreo; estas funciones se muestran en el Cuadro 3.1. La función discreta  $G_7(z)$  que se obtiene al emplear la transformada  $Z$  no representa un verdadero simulador por tanto no nos reproducirá la función

original  $G(s)$ , además de que no puede ser simulada debido al alto valor numérico del numerador.

$$G(s) = \frac{2.5E+07}{s^2 + 1200s + 2.5E+07}$$

$$G1(z) = \frac{0.04}{z^2 - 1.76z + 0.8}$$

$$G2(z) = \frac{0.03125z^2}{z^2 - 1.75z + 0.78125}$$

$$G3(z) = \frac{8.84955E-03(z + 1)(z + 1)}{z^2 - 1.742212z + 0.7876106}$$

$$G4(z) = \frac{8.84955E-03(z + 1)(z + 1)}{z^2 - 1.742212z + 0.7876106}$$

$$G6(z) = \frac{1.772188E-02(z + 1)}{z^2 - 1.751184z + 0.7866279}$$

$$G7(z) = \frac{1776.282z}{z^2 - 1.751184z + 0.7866279}$$

$$G8(z) = \frac{1.843102E-02(z + 0.9230493)}{z^2 - 1.751184z + 0.7866279}$$

$$G9(z) = \frac{2.47038E-02(z^2 + 0.8982z + 0.4634)}{z(z^2 - 1.751184z + 0.7866279)}$$

$$G10(z) = \frac{6.2728E-03(z^2 + 3.7634z + 0.88687)}{z(z^2 - 1.751184z + 0.7866279)}$$

$$G71(z) = \frac{3.53256E-02z}{z^2 - 1.751184z + 0.7866279}$$

Cuadro 3.1

Funciones Resultantes al aplicar los distintos métodos de discretización

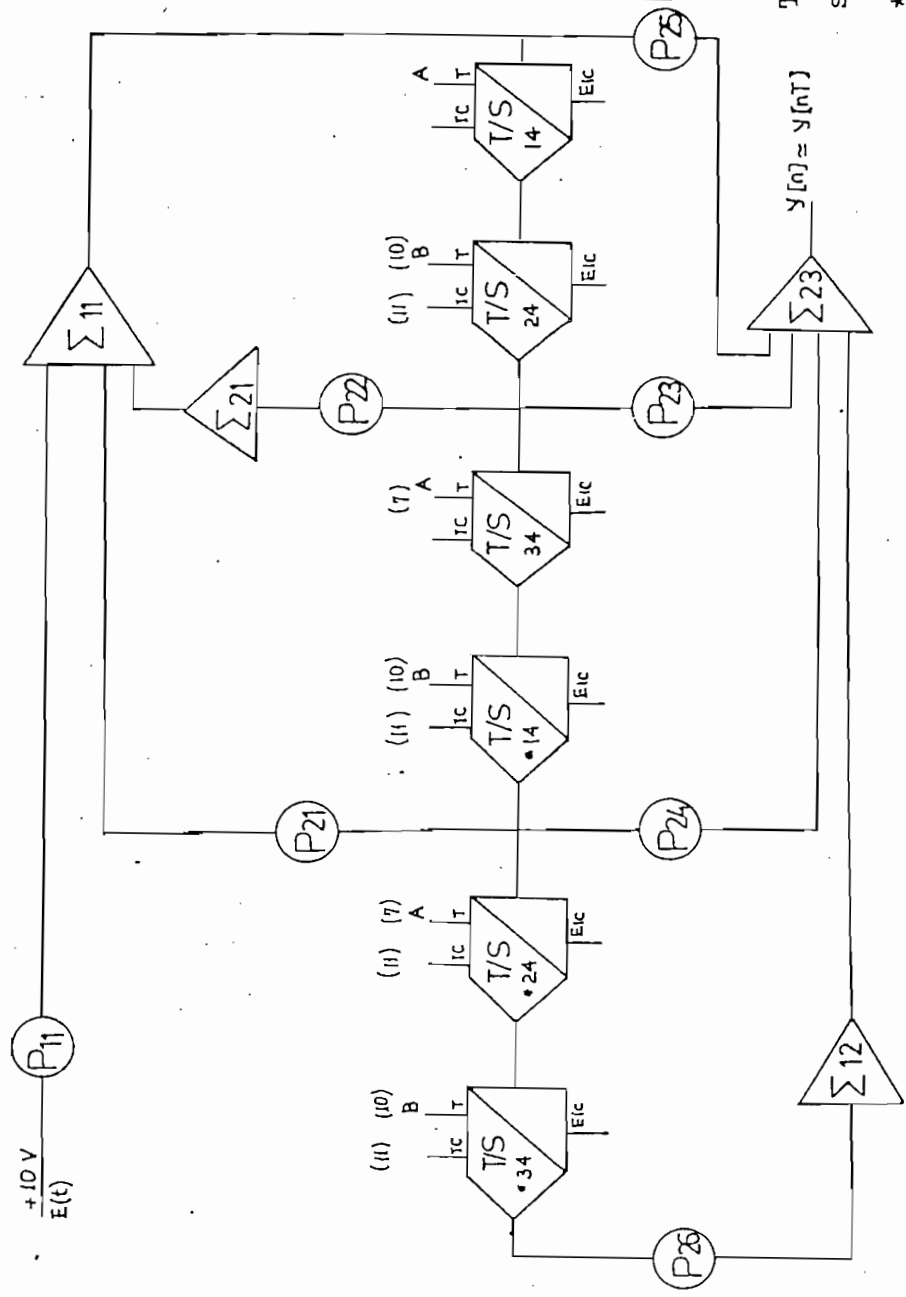
En la Fig.3.6 se muestra el circuito implementado en el computador análogo híbrido EAI mini AC que nos permitirá simular las funciones obtenidas de los distintos métodos de discretización. Los puntos 7, 8, 9, 10, 11 y 12 representan los Trunks usados para conectar señales entre dos computadores. Los T/S \*14, \*24, \*34 corresponden al segundo computador y de estos, los T/S \*24 y \*34 serán usados al igual que el potenciómetro 26 solo para los casos de G9 y G10 (z), pues estos dos métodos introducen un polo adicional en sus respectivas funciones. Como no se tiene ningún valor de condiciones iniciales los respectivos terminales Eic de los T/S no tendrán ninguna conexión, es decir no tendrán valor alguno.

Debido a la posibilidad de poder representar con solo tres cifras el valor de los potenciómetros así como la igualdad al menos en las primeras tres cifras de los valores de los coeficientes de las funciones de los métodos bilineal y Frewarped Tustin (G3 y G4) se ha representado con una sola función a los dos métodos anteriores.

La función de entrada corresponde a una función paso de valor 1V ( $P_{11} = 0.1$ ), pues para un valor superior de  $P_{11}$  se empieza a tener problemas de saturación debido principalmente a la realimentación positiva del  $\Sigma_{21}$ , este problema se tratará más ampliamente en un numeral posterior.

VALORES DE LOS POTENCIOMETROS PARA LAS FUNCIONES

	P21	P23	P24	P22	P25	P26
G <sub>1</sub>	0.8	-	0.04	.176	-	-
G <sub>2</sub>	.787	-	-	.175	.031	-
G <sub>3,4</sub>	.787	.017	.09	.175	.09	-
G <sub>6</sub>	.787	.018	.018	.175	-	-
G <sub>7,1</sub>	.787	.035	-	.175	-	-
G <sub>8</sub>	.786	.018	.017	.175	-	-
G <sub>9</sub>	.786	.024	.022	.175	-	.011
G <sub>10</sub>	.786	.006	.023	.175	-	.005



T/S\*24, T/S\*34 y P26 se usarán solo para G9 y G10

\* Elementos del Computador SLAVE

Fig. 3.6 Circuito implementado en el Computador Analógico/Híbrido para la simulación de las funciones G<sub>1</sub>, G<sub>2</sub>,.....G<sub>10</sub>.

N	t (useg)	$\delta(s)$	$\delta_1(z)$	$\delta_2(z)$	$\delta_3(z)$	$\delta_6(z)$	$\delta_{71}(z)$	$\delta_8(z)$	$\delta_9(z)$	$\delta_{10}(z)$	$e^{\delta_61}$	$e^{\delta_62}$	$e^{\delta_63}$	$e^{\delta_66}$	$e^{\delta_671}$	$e^{\delta_68}$	$e^{\delta_69}$	$e^{\delta_610}$
1	20	0.018	0.00	0.03	0.04	0.02	0.03	0.02	0.02	0.04	-100.00	66.67	122.22	11.11	66.67	11.11	11.11	122.22
2	40	0.067	0.04	0.08	0.10	0.07	0.10	0.07	0.09	0.11	-40.30	19.40	49.25	4.48	49.25	4.48	34.33	64.18
3	60	0.139	0.11	0.15	0.18	0.15	0.18	0.14	0.18	0.18	-20.86	7.91	29.50	7.91	29.50	0.72	29.50	29.50
4	80	0.226	0.20	0.23	0.27	0.24	0.27	0.23	0.28	0.29	-11.50	1.77	19.47	6.19	19.47	1.77	23.89	28.32
5	100	0.322	0.31	0.32	0.36	0.34	0.38	0.32	0.39	0.40	-3.73	-0.62	11.80	5.59	18.01	-0.62	21.12	24.22
6	120	0.421	0.42	0.41	0.46	0.44	0.48	0.42	0.50	0.51	-0.24	-2.61	9.26	4.51	14.01	-0.24	18.76	21.14
7	140	0.520	0.54	0.50	0.56	0.54	0.58	0.52	0.61	0.61	3.85	-3.85	7.69	3.85	11.54	0.00	17.31	17.31
8	160	0.62	0.65	0.59	0.65	0.64	0.67	0.62	0.70	0.71	5.69	-4.07	5.69	4.07	8.94	0.81	13.82	15.45
9	180	0.703	0.75	0.67	0.74	0.73	0.74	0.71	0.80	0.80	6.69	-4.69	5.26	3.84	5.26	1.00	13.80	13.80
10	200	0.783	0.85	0.74	0.81	0.81	0.81	0.79	0.84	0.89	8.56	-5.49	3.45	3.45	3.45	0.89	7.28	13.67
11	220	0.853	0.93	0.81	0.88	0.89	0.88	0.86	0.88	0.96	9.03	-5.04	3.17	4.34	3.17	0.82	3.17	12.54
12	240	0.914	0.99	0.88	0.94	0.95	0.93	0.93	0.94	1.02	8.32	-3.72	2.84	3.94	1.75	1.75	2.84	11.60
13	260	0.965	1.04	0.94	0.99	1.00	0.99	0.98	1.00	1.04	7.77	-2.59	2.59	3.63	2.59	1.55	3.63	7.77
14	280	1.000	1.09	0.99	1.03	1.05	1.03	1.03	1.05	1.08	9.00	-1.00	3.00	5.00	3.00	3.00	5.00	8.00
15	300	1.040	1.11	1.03	1.06	1.08	1.06	1.05	1.09	1.12	6.73	-0.96	1.92	3.85	1.92	0.96	4.81	7.69
16	320	1.060	1.12	1.06	1.09	1.11	1.09	1.09	1.12	1.15	5.66	0.00	2.83	4.72	2.83	2.83	5.66	8.49
17	340	1.080	1.13	1.09	1.11	1.12	1.11	1.11	1.14	1.16	4.63	0.93	2.78	3.70	2.78	2.78	5.56	7.41
18	360	1.090	1.13	1.11	1.12	1.13	1.12	1.12	1.16	1.17	3.67	1.83	2.75	3.67	2.75	2.75	6.42	7.34
19	380	1.090	1.14	1.12	1.13	1.14	1.13	1.13	1.17	1.18	4.59	2.75	3.67	4.59	3.67	3.67	7.34	8.26
20	400	1.100	1.13	1.13	1.14	1.14	1.13	1.14	1.18	1.20	2.73	2.73	3.64	3.64	2.73	3.64	7.27	9.09
21	420	1.090	1.12	1.14	1.14	1.14	1.13	1.14	1.18	1.20	2.75	4.59	4.59	4.59	3.67	4.59	8.26	10.09
22	440	1.090	1.11	1.14	1.14	1.12	1.11	1.13	1.18	1.20	1.83	4.59	4.59	3.67	2.75	3.67	8.26	10.09
23	460	1.080	1.10	1.14	1.14	1.12	1.11	1.12	1.17	1.19	1.85	5.56	5.56	3.70	2.78	3.70	8.33	10.19
24	480	1.070	1.09	1.13	1.13	1.11	1.09	1.11	1.16	1.18	1.87	5.61	5.61	3.74	1.87	3.74	8.41	10.28
25	500	1.060	1.07	1.13	1.13	1.10	1.08	1.10	1.15	1.18	0.94	6.60	6.60	3.77	1.89	3.77	8.49	11.32
26	520	1.050	1.06	1.12	1.12	1.09	1.07	1.09	1.14	1.17	0.95	6.67	6.67	3.81	1.90	3.81	8.57	11.43
27	540	1.040	1.04	1.12	1.12	1.09	1.06	1.08	1.14	1.16	0.00	7.69	7.69	4.81	1.92	3.85	9.62	11.54
28	560	1.030	1.02	1.12	1.11	1.08	1.05	1.07	1.13	1.15	-0.97	8.74	7.77	4.85	1.94	3.88	9.71	11.65
29	580	1.020	1.01	1.11	1.10	1.07	1.04	1.06	1.12	1.14	-0.98	8.82	7.84	4.90	1.96	3.92	9.80	11.76
30	600	1.020	1.00	1.11	1.09	1.06	1.02	1.06	1.11	1.12	-1.96	8.82	6.86	3.92	0.00	3.92	8.82	9.80

Cuadro 3.2 Valores de la Distintas Funciones Discretas

En el Cuadro 3.2 se muestran los valores numéricos que se obtienen en las distintas iteraciones de los métodos de discretización, observando que los valores de  $G71(z)$  son los que más se aproximan a los valores de la función original  $G(s)$  y además que la función  $G8(z)$  nos da valores similares a  $G71(z)$  es decir aproximados a  $G(s)$ . Los métodos 9 y 10 ( $G9(z)$  y  $G10(z)$ ) son los que más error nos introducen, pues como se analizará más adelante mientras mayores elementos se usen en la simulación, mayor será el error que se tendrá debido al offset propio de los elementos.

Los restantes métodos dependiendo de su aproximación matemática propia del método nos reproducirán la señal original con mayor o menor error.

El error relativo porcentual ha sido calculado de la siguiente manera:

$$e\% = \frac{g_i[n] - g(nT)}{g(nT)} \times 100\% \quad \text{donde:}$$

$g(nT)$  es una muestra de la respuesta continua y  $g_i(n)$  es la respuesta que resulta de aplicar un método determinado de discretización en el instante de muestreo  $n$ .

Para los casos de  $G71(z)$  y  $G8(z)$  se tiene un error relativo aproximado de 5% en sus valores, para los métodos  $G1(z)$ ,  $G2(z)$ ,  $G3(z)$ ,  $G4(z)$  se obtiene un error relativo aproximado  $5\% < e\% < 10\%$ , mientras que para los métodos  $G9(z)$  y  $G10(z)$  se tiene un error relativo  $> 10\%$ .

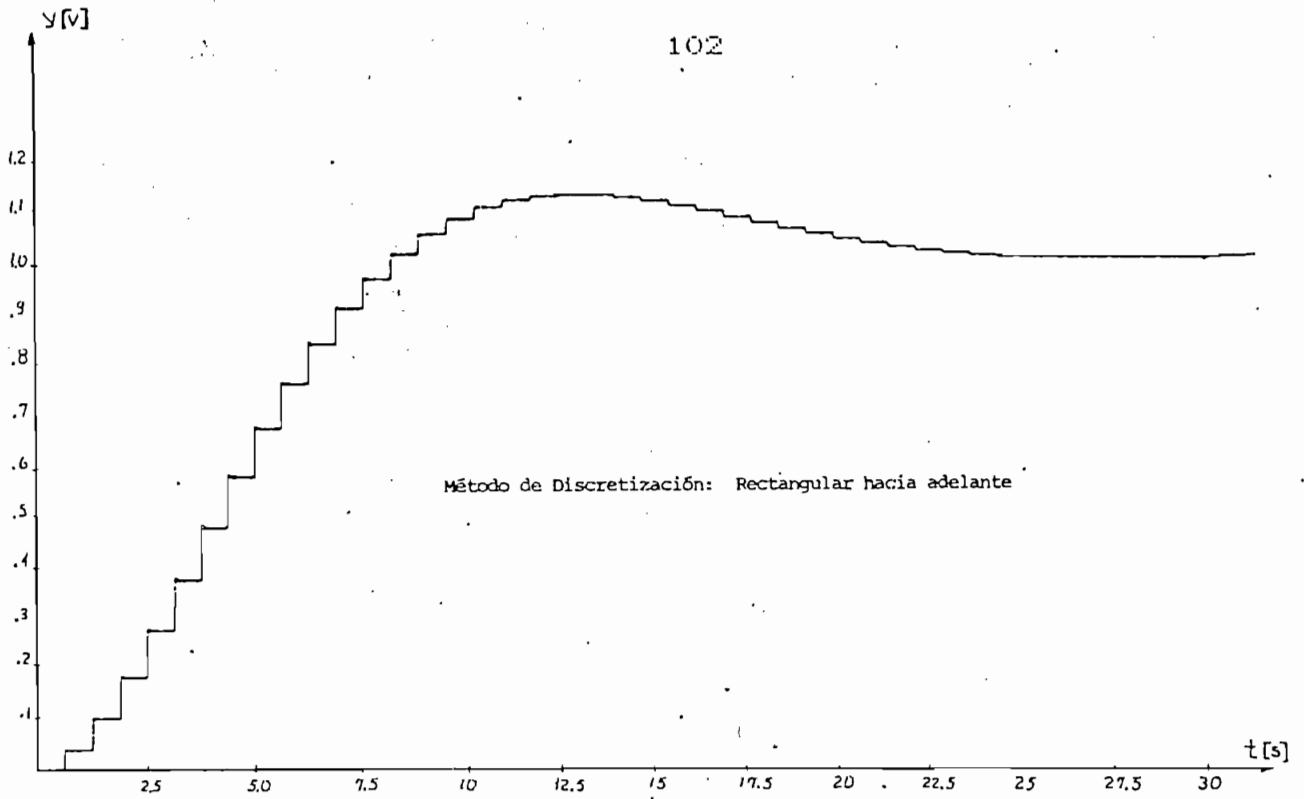


Fig 3.7 Respuesta en lazo abierto a una función paso de  $G_1(z)$

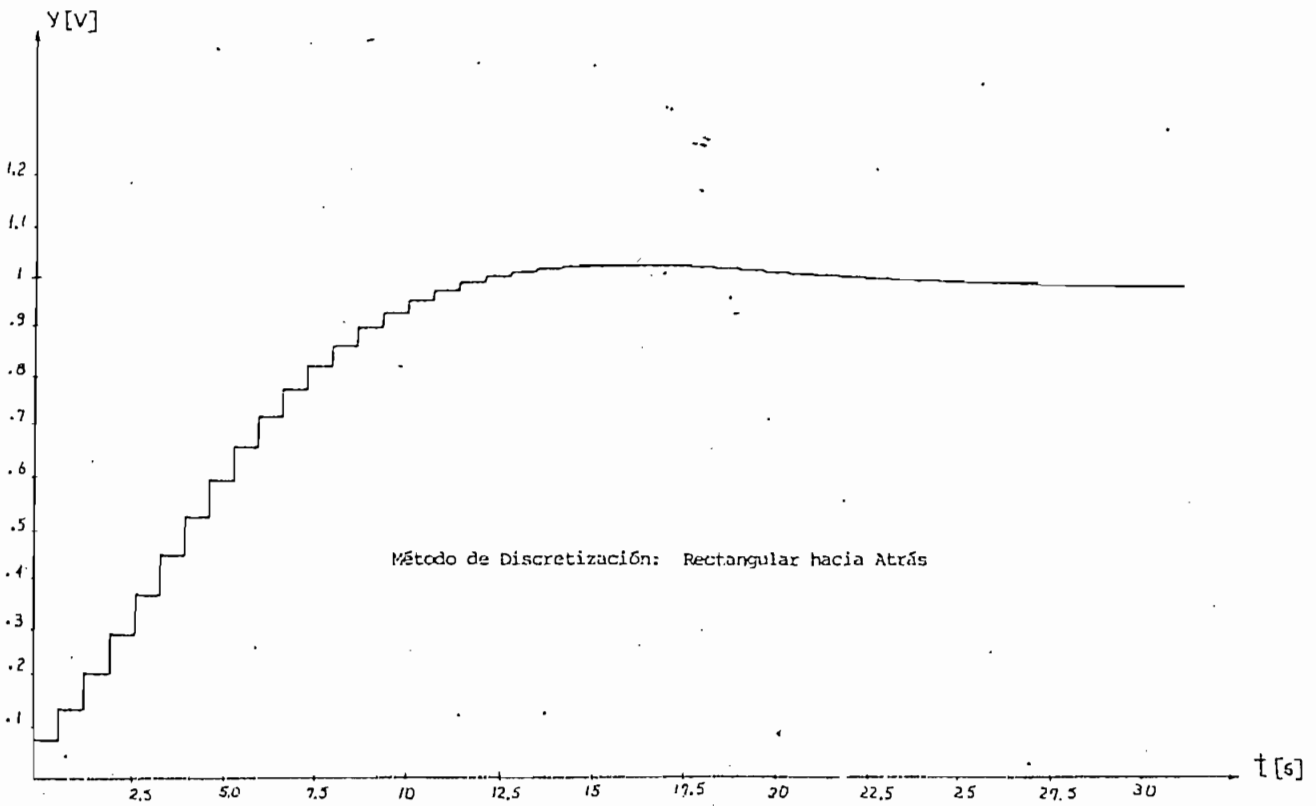


Fig. 3.8 Respuesta en lazo abierto a una función paso de  $G_2(z)$

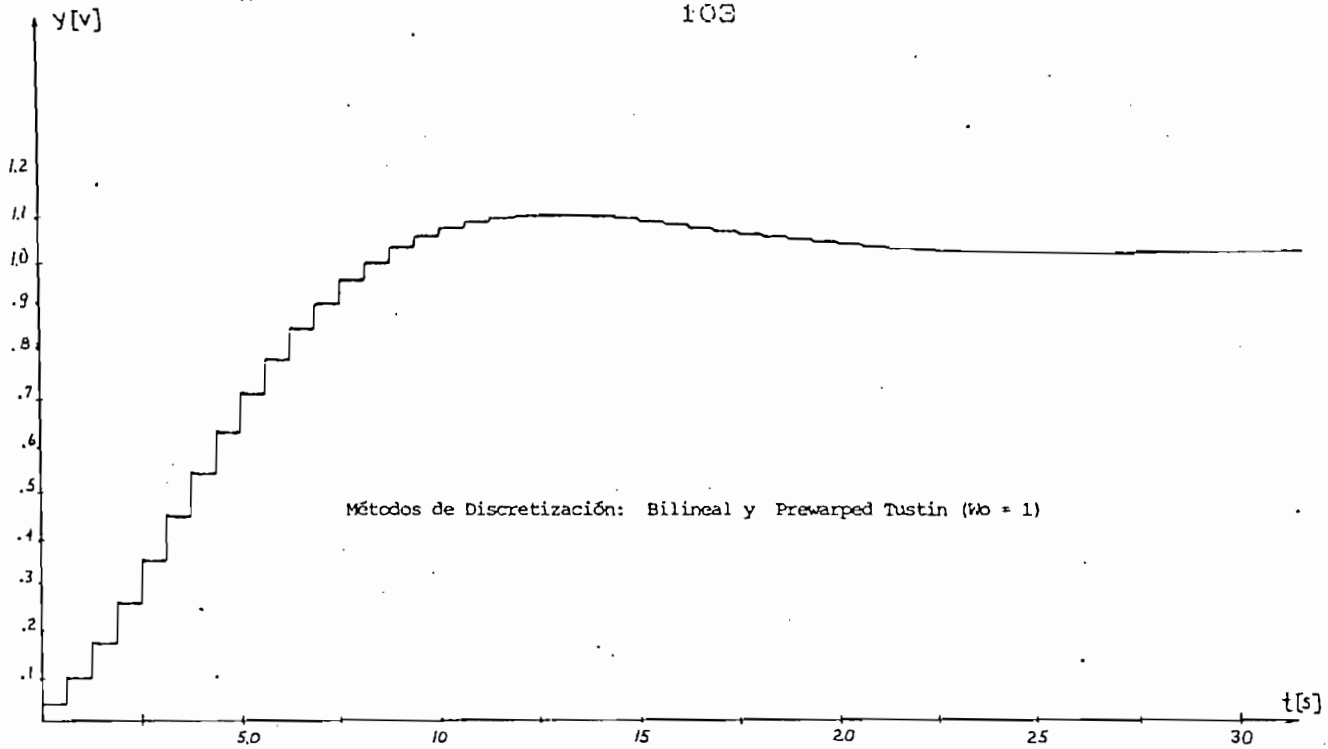


Fig 3.9 Respuesta en lazo abierto a una función paso de  $G_3(z)$  y  $G_4(z)$

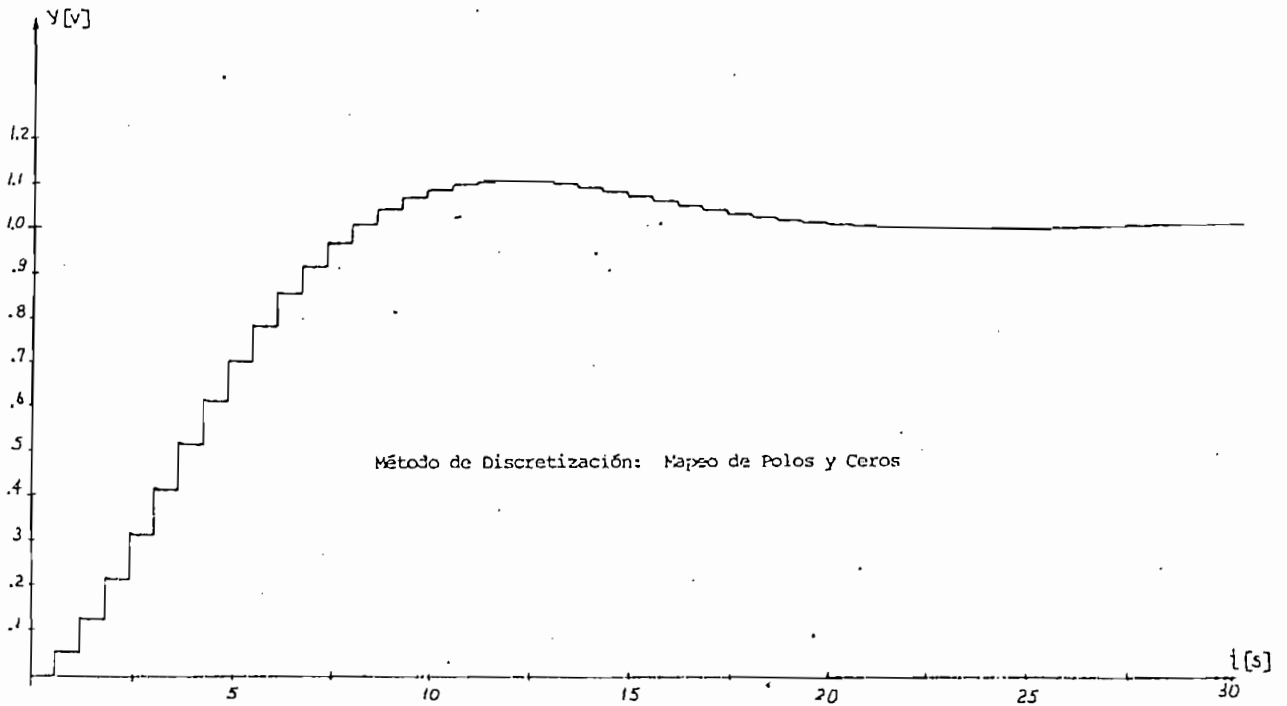


Fig 3.10 Respuesta en lazo abierto a una función paso de  $G_6(z)$



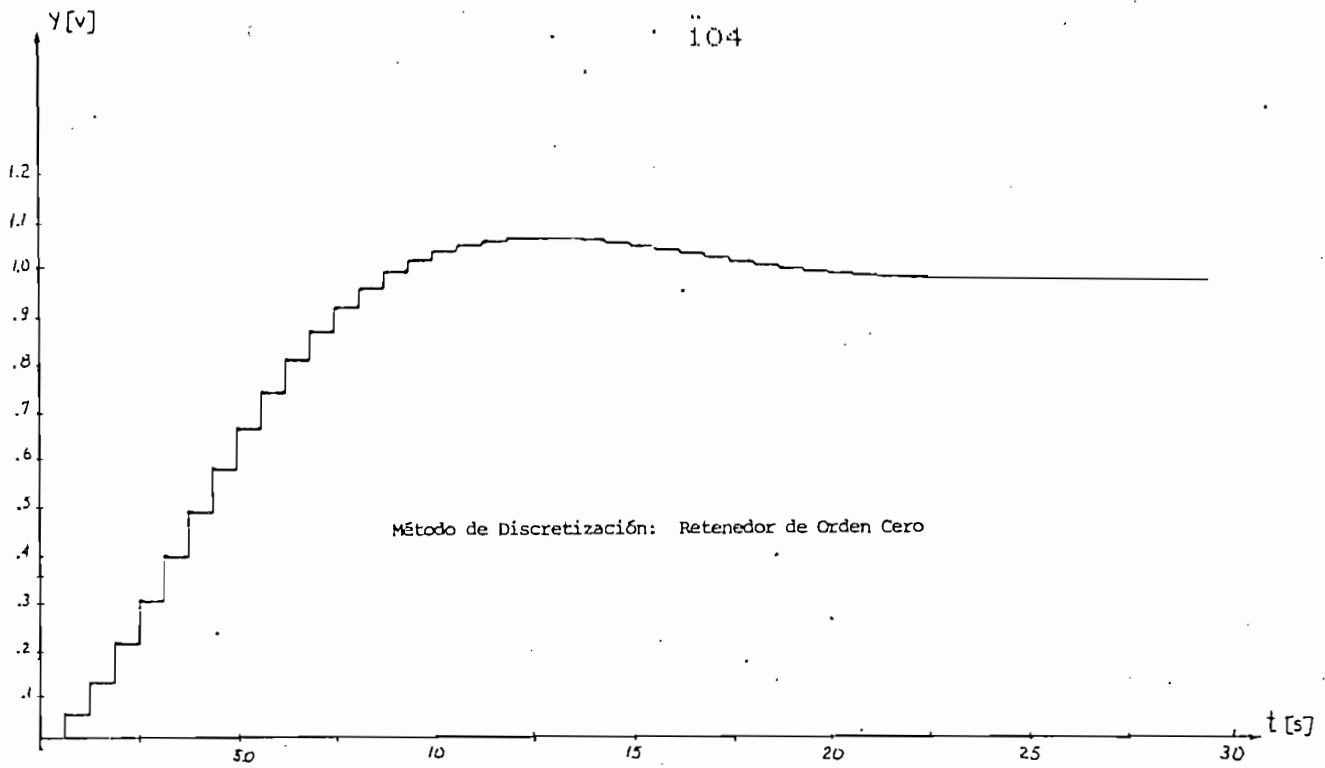


Fig 3.11 Respuesta en lazo abierto a una función paso de GB (z)

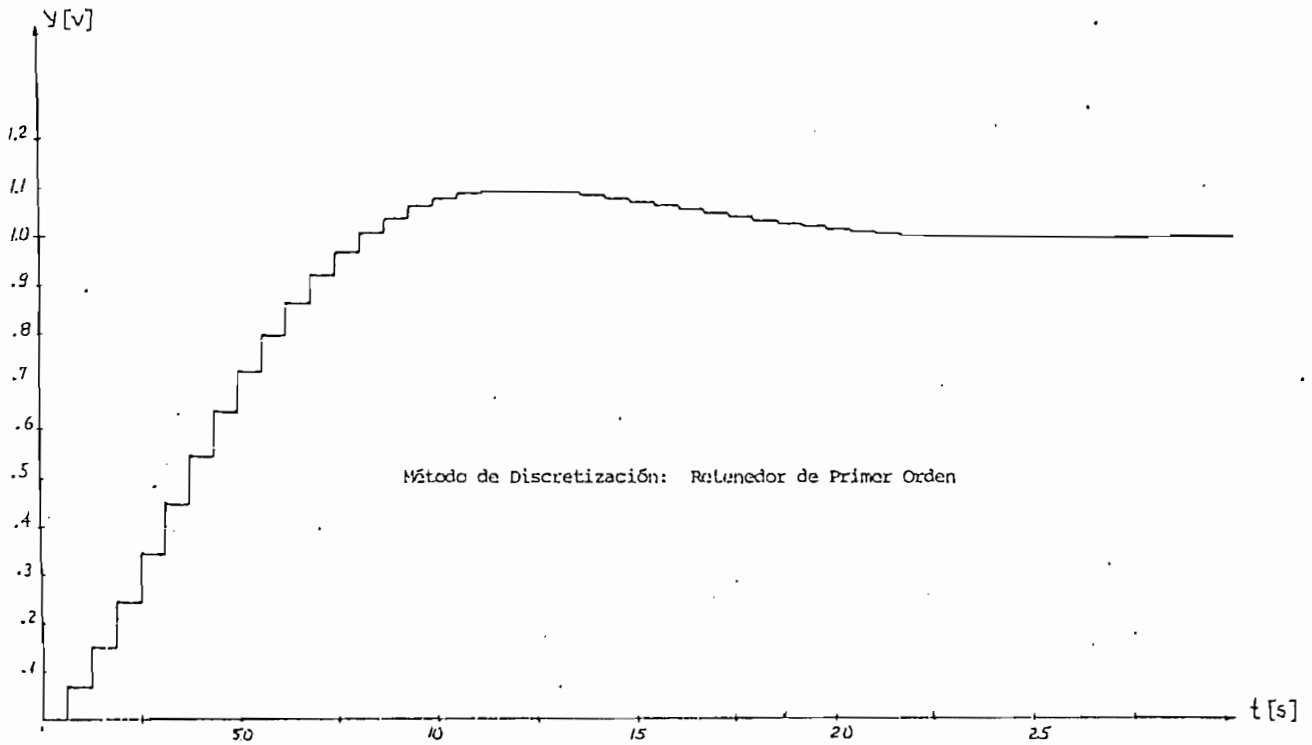


Fig. 3.12 Respuesta en lazo abierto a una función paso de G9 (z)

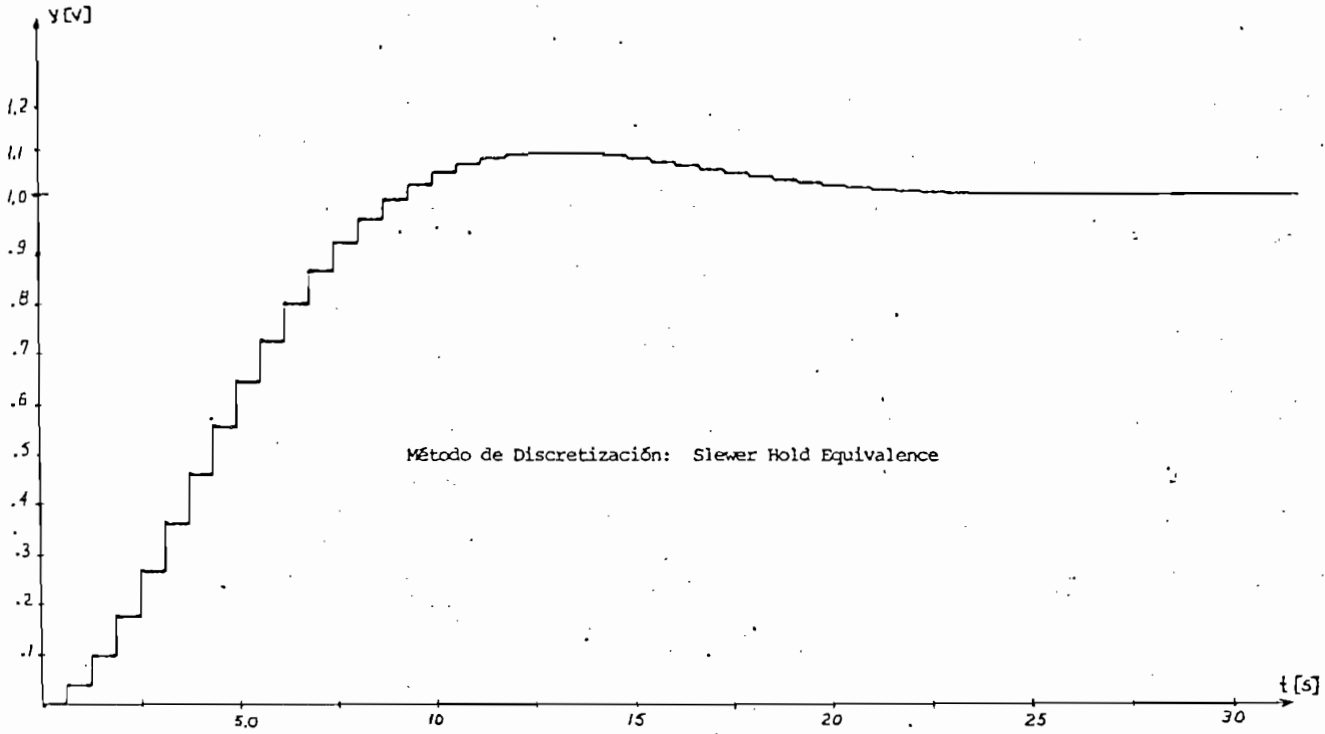


Fig 3.13 Respuesta en lazo abierto a una función paso de  $G_{10}(z)$

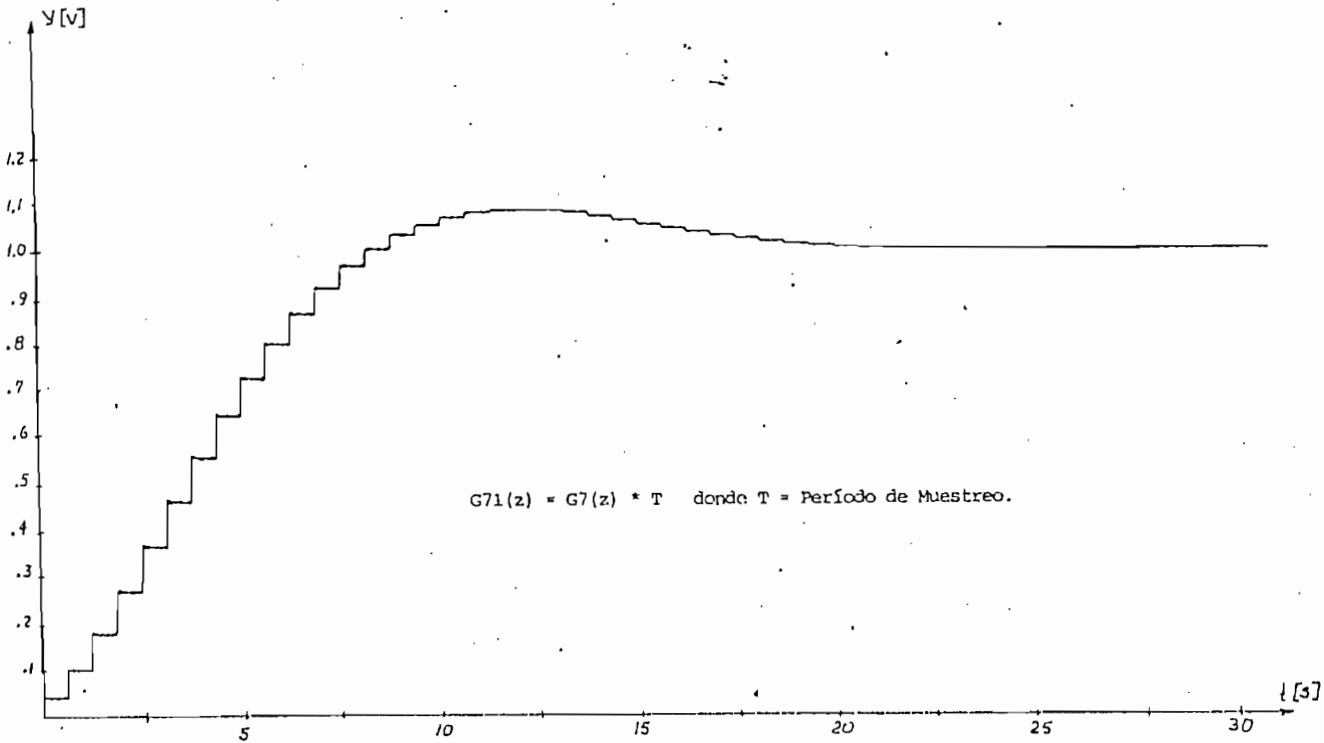


Fig 3.14 Respuesta en lazo abierto a una función paso de  $G_{71}(z)$

En las Fig.3.7 a 3.14 se muestran las respuestas de  $V(t)$  a una entrada paso  $E(s)$  de las distintas funciones discretas obtenidas en el grafizador, para lo cual se han usado las siguientes escalas:  $X = 25m V/div$  y  $Y = .1V/div$ . Puesto que para realizar los gráficos correspondientes es necesario generar un barrido de tiempo para el eje X será indispensable realizar un control local del integrador usado para generar la rampa conectando la salida lógica PP verdadera a su entrada lógica IC.

### 3.3.1. Variación del Período de Muestreo.

Para observar el efecto que se tiene en la simulación al variar el período de muestreo de un sistema discretizado se ha considerado inicialmente el sistema en lazo abierto del ejemplo anterior con  $G(s)$  como función de transferencia y la función  $G_{z1}(z)$  obtenida al discretizar el sistema con un  $T = 20 \text{ useg.}$

Se discretizó la función  $G(S)$  para  $T_1 = 50 \text{ useg.}$  y  $T_2 = 10 \text{ useg.}$ , es decir para un período mayor y menor respectivamente que  $T$  las funciones resultante al discretizar con estos períodos son las siguientes:

$$\begin{array}{ll} \text{Para } T = 20 \times 10^{-6} \text{ s} & G_{z1}(z) = \frac{0.353z}{z^2 - 1.75z + 0.787} \\ T = 50 \times 10^{-6} \text{ s} & G_{z2}(z) = \frac{0.1803z}{z^2 - 1.36z + 0.548} \end{array}$$

$$T = 10 \times 10^{-6} \text{ s}$$

$$G_{73}(z) = \frac{0.0094z}{z^2 - 1.87z + 0.886}$$

En el cuadro 3.3 se muestran los valores de cada una de las iteraciones de las funciones  $G_{71}(z)$ ,  $G_{72}(z)$  y  $G_{73}(z)$ . Así mismo en las Fig. 3.15 y 3.16 se puede observar los resultados gráficos de  $G_{72}(z)$  y  $G_{73}(z)$ .

De las Fig. 3.15 y 3.16 y del Cuadro 3.3 se puede concluir que mientras disminuye el período de muestreo se tiene una mayor precisión ya que la función discreta a ser simulada reproduce a la función análoga de manera más exacta; de igual manera mientras se aumenta el período de muestreo se tiene menos precisión en la simulación.

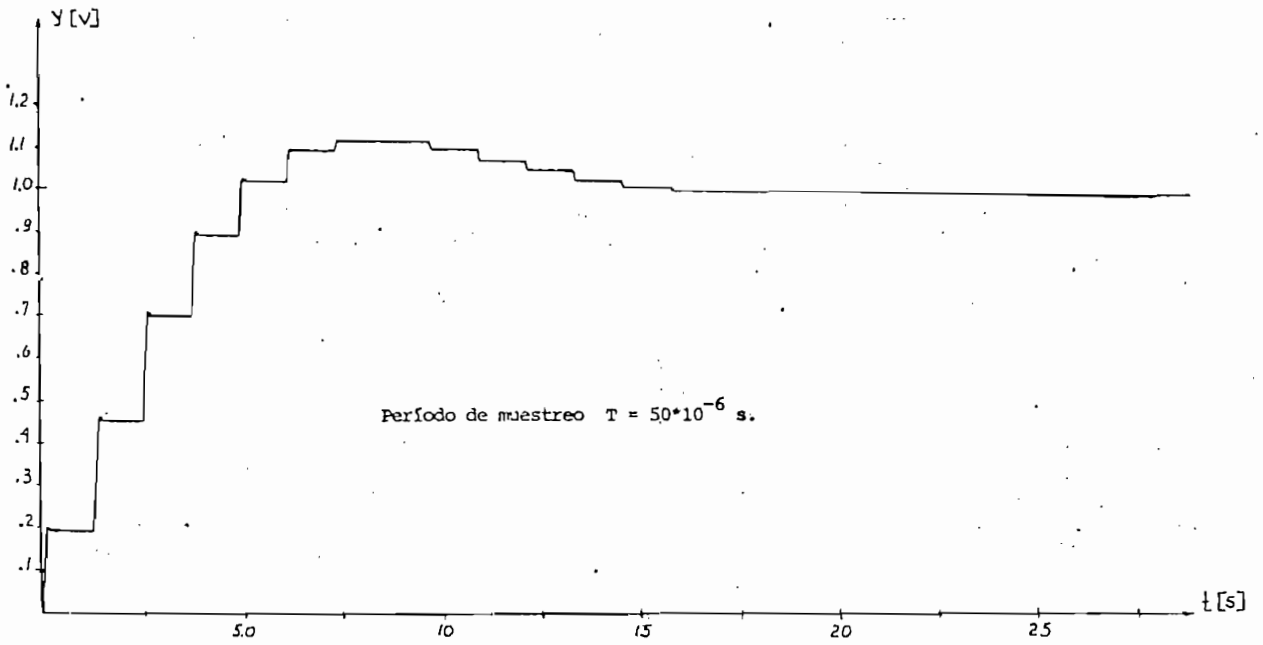
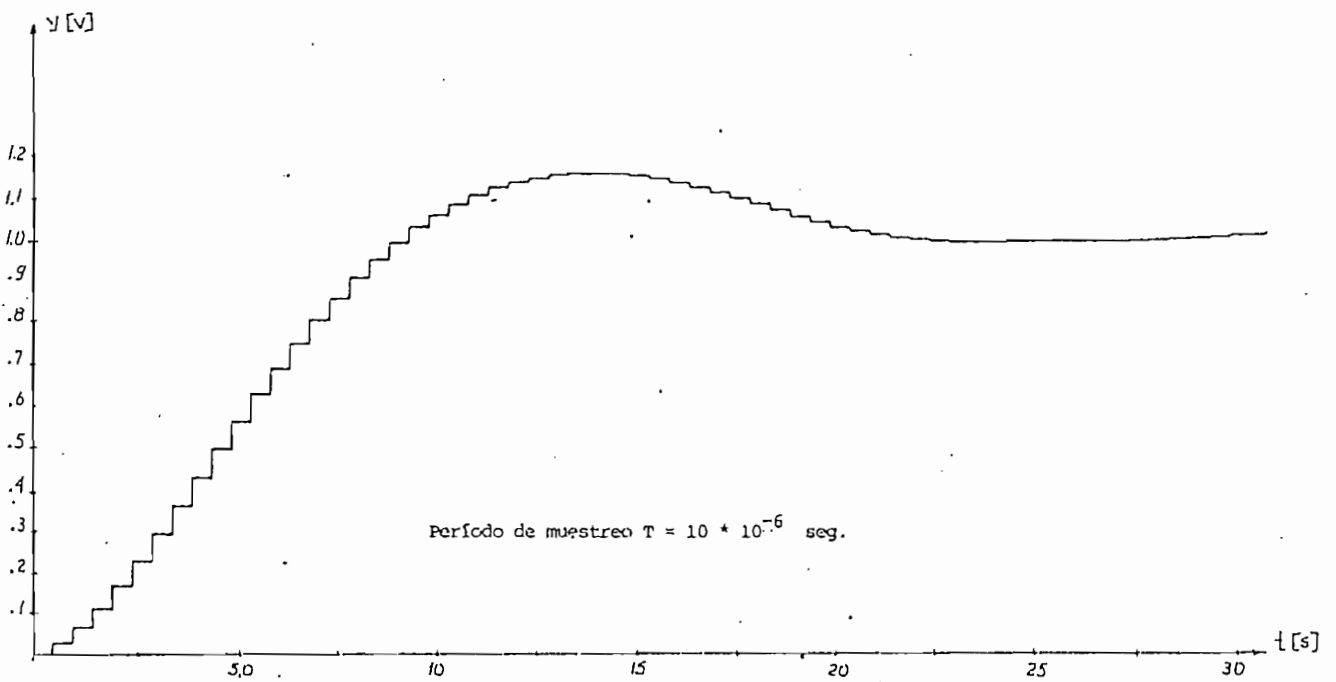
Sin embargo de que existe diferencia de valores al cambiar el período de muestreo se puede manifestar que estas diferencias no son tan marcadas y que estas diferencias se harán notorias cuando se trate de sistema de lazo cerrado (sistemas muestreados) como se verá más adelante.

Un aspecto importante que hay que anotar es que mientras se disminuye el período de muestreo los coeficientes del denominador de la función de transferencia discreta a ser simulada aumentan de valor, lo cual tiene incidencia directa en el problema de la simulación, ya que estos coeficientes representan el valor de las realimentaciones positivas o negativas y que de acuerdo al valor de la función de entrada nos puede llevar a tener problemas de saturación en determinados elementos.

n	t(us)	672(z)	671(z)	673(z)	6(s)	eX671	eX672	eX673
1	10			0.01	0.005			108.33
2	20		0.03	0.03	0.018	66.67		66.67
3	30			0.07	0.040			76.32
4	40		0.10	0.11	0.067	49.25		64.18
5	50	0.18		0.16	0.101		77.69	57.95
6	60		0.18	0.19	0.139	29.50		36.69
7	70			0.21	0.182			15.70
8	80		0.27	0.24	0.226	19.47		6.19
9	90			0.28	0.274			2.34
10	100	0.43	0.38	0.33	0.322	18.01	33.54	2.48
11	110			0.38	0.372			2.15
12	120		0.48	0.45	0.421	14.01		6.89
13	130			0.50	0.471			6.16
14	140		0.58	0.56	0.520	11.54		7.69
15	150	0.67		0.61	0.568		17.96	7.39
16	160		0.67	0.65	0.615	8.94		5.69
17	170			0.69	0.660			4.55
18	180		0.74	0.72	0.703	5.26		2.42
19	190			0.77	0.744			3.49
20	200	0.86	0.81	0.81	0.783	3.45	9.83	3.45
21	210			0.84	0.820			2.44
22	220		0.88	0.87	0.853	3.17		1.99
23	230			0.90	0.885			1.69
24	240		0.93	0.93	0.914	1.75		1.75
25	250	0.98		0.96	0.940		4.26	2.13
26	260		0.99	0.99	0.965	2.59		2.59
27	270			1.01	0.986			2.43
28	280		1.03	1.03	1.000	3.00		3.00
29	290			1.05	1.023			2.64
30	300	1.04	1.06	1.06	1.040	1.92	0.00	1.92
31	310			1.07	1.051			1.81
32	320		1.09	1.07	1.060	2.83		0.94
33	330			1.08	1.071			0.84
34	340		1.11	1.08	1.080	2.78		0.00
35	350	1.06		1.07	1.085		-2.30	-1.38
36	360		1.12	1.07	1.090	2.75		-1.83
37	370			1.06	1.092			-2.93
38	380		1.13	1.06	1.093	3.39		-3.02
39	390			1.05	1.094			-4.02
40	400	1.06	1.13	1.04	1.100	2.73	-3.64	-5.45

Cuadro 3.3

Cuadro de Valores y errores para diferentes valores de T

Fig. 3.15 Respuesta en lazo abierto a una función paso de  $G_{72}(z)$ Fig. 3.16 Respuesta en lazo abierto a una función paso de  $G_{73}(z)$

n	A(Timer)	Suma1	Suma2	T/S 1	T/S 2	T/S 3	T/S 4	Suma3
1	1	-1.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.000
	0	-2.75	1.75	1.00	-1.00	0.00	0.00	0.353
2	1	-2.75	1.75	2.75	-1.00	1.00	0.00	0.353
	0	-5.03	4.81	2.75	-2.75	1.00	-1.00	0.971
3	1	-5.03	4.81	5.03	-2.75	2.75	-1.00	0.971
	0	-7.63	8.79	5.03	-5.03	2.75	-2.75	1.774
4	1	-7.63	8.79	7.63	-5.03	5.03	-2.75	1.774
	0	-10.40	13.35	7.63	-7.63	5.03	-5.03	2.693
5	1	-10.40	13.35	10.40	-7.63	7.63	-5.03	2.693
	0	-13.20	18.20	10.40	-10.40	7.63	-7.63	3.671
6	1	-13.20	18.20	13.20	-10.40	10.40	-7.63	3.671
	0	-15.90	23.10	13.20	-13.20	10.40	-10.40	4.660
7	1	-15.90	23.10	15.90	-13.20	13.20	-10.40	4.660
	0	-18.50	27.83	15.90	-15.90	13.20	-13.20	5.613
8	1	-18.50	27.83	18.50	-15.90	15.90	-13.20	5.613
	0	-20.80	32.38	18.50	-18.50	15.90	-15.90	6.531
9	1	-20.80	32.38	20.80	-18.50	18.50	-15.90	6.531
	0	-22.90	36.40	20.80	-20.80	18.50	-18.50	7.342
10	1	-22.90	36.40	22.90	-20.80	20.80	-18.50	7.342
	0	-24.70	40.08	22.90	-22.90	20.80	-20.80	8.084
11	1	-24.70	40.08	24.70	-22.90	22.90	-20.80	8.084
	0	-26.20	43.23	24.70	-24.70	22.90	-22.90	8.719
12	1	-26.20	43.23	26.20	-24.70	24.70	-22.90	8.719
	0	-27.40	45.85	26.20	-26.20	24.70	-24.70	9.249
13	1	-27.40	45.85	27.40	-26.20	26.20	-24.70	9.249
	0	-28.40	47.95	27.40	-27.40	26.20	-26.20	9.672
14	1	-28.40	47.95	28.40	-27.40	27.40	-26.20	9.672
	0	-29.20	49.70	28.40	-28.40	27.40	-27.40	10.025
15	1	-29.20	49.70	29.20	-28.40	28.40	-27.40	10.025
	0	-29.80	51.10	29.20	-29.20	28.40	-28.40	10.308
16	1	-29.80	51.10	29.80	-29.20	29.20	-28.40	10.308
	0	-30.10	52.15	29.80	-29.80	29.20	-29.20	10.519
17	1	-30.10	52.15	30.10	-29.80	29.80	-29.20	10.519
	0	-30.30	52.68	30.10	-30.10	29.80	-29.80	10.625
18	1	-30.30	52.68	30.30	-30.10	30.10	-29.80	10.625
	0	-30.34	53.03	30.30	-30.30	30.10	-30.10	10.696
19	1	-30.34	53.03	30.34	-30.30	30.30	-30.10	10.696
	0	-30.30	53.10	30.34	-30.34	30.30	-30.30	10.710
20	1	-30.30	53.10	30.30	-30.34	30.34	-30.30	10.710
	0	-30.20	53.03	30.30	-30.30	30.34	-30.34	10.696
21	1	-30.20	53.03	30.20	-30.30	30.30	-30.34	10.696
	0	-30.00	52.85	30.20	-30.20	30.30	-30.30	10.661
22	1	-30.00	52.85	30.00	-30.20	30.20	-30.30	10.661
	0	-29.70	52.50	30.00	-30.00	30.20	-30.20	10.590
23	1	-29.70	52.50	29.70	-30.00	30.00	-30.20	10.590
	0	-29.40	51.98	29.70	-29.70	30.00	-30.00	10.484
24	1	-29.40	52.00	29.40	-29.70	29.70	-30.00	10.484
	0	-29.20	51.50	29.40	-29.40	29.70	-29.70	10.378

Cuadro 3.4 Valores teóricos que toman los operacionales para las distintas iteraciones

Para entender de mejor manera este problema en el Cuadro 3.4. se presentan los valores calculados que asumirían los operacionales usados en la simulación de acuerdo a las entradas de las señales de control. Para esto se tomó como base el circuito de la Fig. 3.6 y la función  $G_{z1}(z)$ , es decir para  $T = 20 \times 10^{-6}$  seg. y una función paso de entrada igual a 1V.

Se debe aclarar que los elementos, del computador trabajan con voltajes de  $\pm 10V \pm 1\%$ , y por tanto con voltajes fuera de este rango, como en este caso, los elementos entran en saturación y la simulación fallará.

Escalamiento en amplitud.- Conviene en esta parte hacer un estudio sobre el escalamiento en amplitud de una función discreta.

En la figura 3.17 (a) la función de transferencia que relaciona la salida  $Y(z)$  con la entrada  $X(z)$  esta dada por la función  $G(z)$ . Si a la entrada  $x[n]$  se la hace pasar previamente por un potenciómetro de valor  $K$  donde  $0 < K < 1$ , entonces para obtener la salida  $y[n]$  será necesario a la salida  $y_1[n]$  multiplicarle por un potenciómetro de valor  $1/K$  como se puede apreciar en el gráfico 3.17 (b).

De la figura 3.17 se obtienen las siguientes relaciones en el dominio  $z$  :

$$\begin{array}{ll} x[n] \longleftrightarrow X(z) & x_1[n] \longleftrightarrow X_1(z) \\ y[n] \longleftrightarrow Y(z) & y_1[n] \longleftrightarrow Y_1(z) \end{array}$$



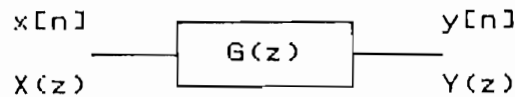
$$\frac{Y(z)}{X(z)} = G(z) \quad (\text{Ec. 3.2})$$

$$Y(z) = 1/K \cdot Y_1(z) \quad (\text{Ec. 3.3})$$

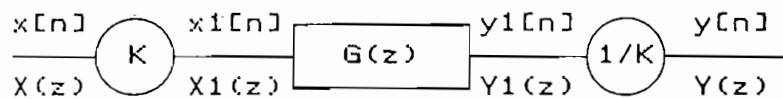
$$X_1(z) = X(z) \cdot K \quad (\text{Ec. 3.4})$$

Reemplazando las ecuaciones 3.3. y 3.4 en 3.2 se tiene que :

$$Y_1(z)/X_1(z) = G(z) \quad (\text{Ec. 3.5})$$



(a)



(b)

Fig. 3.17 (a) Función original  $G(z)$   
(b) Función escalada

Como se ve en el cuadro 3.4, por ejemplo en la iteración N° 4 se tendría saturación en el  $\Sigma 21$  y la simulación fracasaría. Para solucionar en parte este problema de saturación lo que hacemos es escalar en magnitud para lo cual disminuimos el valor del potenciómetro P11 de 0.1 a 0.01 (entrada paso = 0.1V) con lo cual los valores que obtendrían en el cuadro 3.4 estarían multiplicados por 0.1 y por tanto el mayor valor que se obtendría sería en la iteración N°19 (5.31V en el  $\Sigma 21$ ) que al ser menor de 10V evitaría tener saturación en algún elemento de la simulación.

Así mismo para compensar la disminución del valor de P11 en 10 veces se deberá multiplicar por 10 el valor de los potenciómetros de salida, es decir para nuestro caso P23 ( $y[n]=y_1[n].1/K$ ).

Resumiendo podemos decir que para escalar en magnitud se deberá ajustar el valor del potenciómetro de entrada y el valor del potenciómetro de salida a  $P.K$  y  $1/K$  respectivamente donde  $K$  es el factor de escalamiento ( $0 < K < 1$ ) y  $P$  es el valor de la amplitud de la función de entrada.

De otro lado se puede mencionar que al variar el período de muestreo se intentó probar con períodos menores a  $T = 10^{-9}$  segundos pero al obtener la función de transferencia con este período, se tienen valores de coeficientes en el denominador que al ser simulado y realimentados dan problemas de saturación y así mismo el valor del coeficiente del numerador obtenido resultado difícil de ser representado en la simulación debido a que cada vez que se disminuye el período de muestreo su valor disminuye. Sin embargo este último parámetro no es muy influente en la simulación y resulta fácil de ser superado, pues si el valor o valores de los coeficientes del numerador son tan pequeños ( $< 10^{-9}$ ) que no pueden ser representados en los potenciómetros de salida, se multiplicará cada uno de estos valores de coeficientes por  $10^k$  donde  $k$  será un entero tal que el valor final obtenido sea  $\geq 10^{-9}$  de tal manera que ya puede ser representado por un potenciómetro pero teniendo en cuenta que el valor que se tenga en el display tendrá que dividirlo por  $10^k$ .

En cuanto a los valores de los coeficientes del denominador que tendrán que ser representados por potenciómetros que serán realimentados positivamente se ha llegado a

determinar experimentalmente que deberá tener un valor  $\leq 1.88$  para un valor de entrada paso: 1V ( $F_{11} = 0.1$ ) ya que para valores mayores a 1.88 empiezan a haber problemas de saturación.

### 3.4 Resolución de Ecuaciones de Diferencias.

Un sistema discreto puede ser representado usando ecuaciones de diferencias, ya sea como una ecuación de diferencias de orden  $n$  o como  $n$  ecuaciones de diferencias de primer orden en el Espacio de Estado. Este numeral obtiene la respuesta de un sistema discreto utilizando las dos representaciones mencionadas.

#### 3.4.1 Solución de Ecuaciones de Diferencias.-

Debido a que el estudio teórico respectivo de las ecuaciones de diferencias y su equivalencia con la transformada  $Z$  se la realizó en el capítulo anterior, en este capítulo nos limitaremos a la simulación de estos sistemas y su resolución numérica a través de las iteraciones que se van mostrando en el display del computador.

Dada la ecuación de diferencias

$$y[n] + a_1 y[n-1] + \dots + a_n y[n-m] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + \dots + b_m x[n-m] \quad (\text{Ec. 3.6})$$

Donde  $x[n]$  es una secuencia conocida y  $x[n] = 0$  para  $n < 0$ .

Debido a las limitaciones de elementos del computador solo podremos simular y resolver para un orden  $m \leq 3$ ; mediante el mismo esquema dado por la figura 3.1

Considerando que  $q[n] = 0$  para  $n < 0$  a partir de las ecuaciones (3.7) y (3.8) que provienen de la Fig. 3.1 se llega a la ecuación original 3.6.

$$q[n] = -a_1 q[n-1] - a_2 q[n-2] - a_3 q[n-3] + x[n] \quad (\text{Ec. 3.7})$$

$$y[n] = b_0 q[n] + b_1 q[n-1] + b_2 q[n-2] + b_3 q[n-3] \quad (\text{Ec. 3.8})$$

En la ecuación (3.6) si  $a_1 = a_2 = a_3 = 0$  la ecuación es no recursiva y su salida depende exclusivamente de  $x[n]$ ; si  $a_1, a_2$  y  $a_3 \neq 0$  la ecuación es recursiva y su salida dependerá tanto de  $x[n]$ , de  $y[n-m]$  como de las condiciones iniciales  $Y[-m]$  donde  $1 < m < 3$ . En cuanto a las condiciones iniciales hay que mencionar que para el caso en que en la ecuación de diferencias aparezca un término en  $x[n]$  y no en  $x[n-1], x[n-2], \dots$ , en el circuito de la figura 3.1 las variables  $q[n-m]$  pasan a ser variables  $y[n-m]$  y por tanto los coeficientes  $b_i$  desaparecerán, es decir se tiene un sistema que relaciona directamente la entrada  $x[n]$  con la salida  $y[n]$  y por tanto las condiciones iniciales se pondrán directamente en los sitios respectivos. Para el caso en que la entrada dependa de  $x[n], x[n-1], x[n-2], \dots$  etc se tiene el esquema de la figura 3.1 y las condiciones iniciales  $y[-m]$  se relacionarán indirectamente con las condiciones iniciales  $q[-m]$  y que se deducirán de las ecuaciones 3.7 y 3.8.

Hay que anotar que de acuerdo al valor de la función de entrada  $x[n]$  se podrá simular y resolver a la vez estas ecuaciones dependiendo del valor de los coeficientes  $a_1, a_2$  y  $a_3$ . Se recomienda tener coeficientes menores que 2 ya que

experimentalmente se ha llegado a comprobar que para valores mayores a 2 existe problemas de saturación.

A través de un ejemplo se puede visualizar de mejor manera el problema de ecuaciones de diferencias.

Ejemplo 3.2 Resolver la ecuación de segundo orden para una entrada  $x[n]$  paso.

$$y[n] - 0.75 y[n-1] + 0.125 y[n-2] = x[n]$$

$$y[n] = x[n] + 0.75 y[n-1] - 0.125 y[n-2] \quad (\text{Ec.3.9})$$

El circuito a simularse para una entrada paso se muestra en la Fig. 3.18.

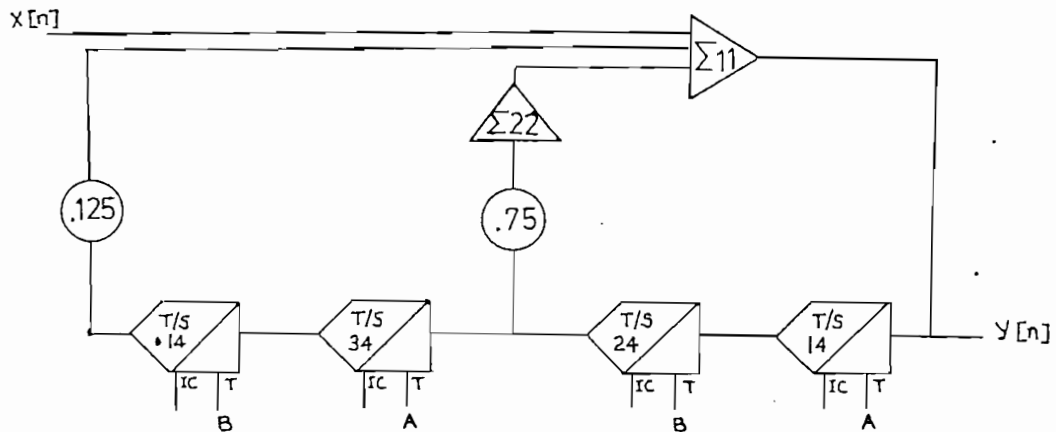


Fig. 3.18 Circuito de Simulación de la Ec. 3.9

En la Fig. 3.19 se muestra la solución gráfica de la ecuación (3.9) además se da la solución numérica de la misma. Para el caso de una entrada impulso, es decir:

$$x[n] = 1 \text{ para } n = 0 \text{ y } x[n] = 0 \text{ para } n \neq 0$$

Se propone el siguiente problema:

Ejemplo 3.3 Se tiene la ecuación no recursiva:

$$h[n] = 2 \delta[n] + 3 \delta[n-1] \quad (\text{Ec. 3.10})$$

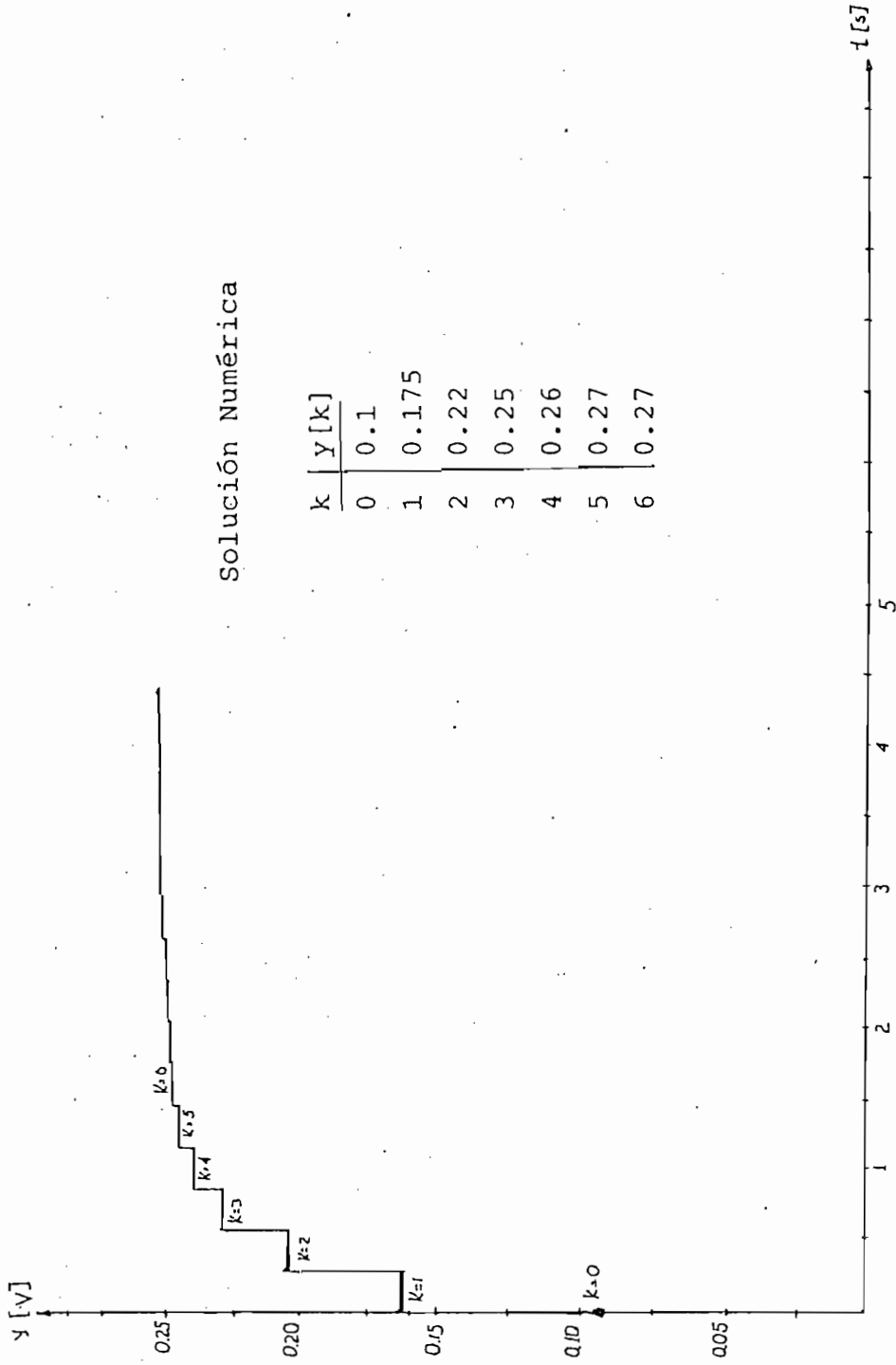
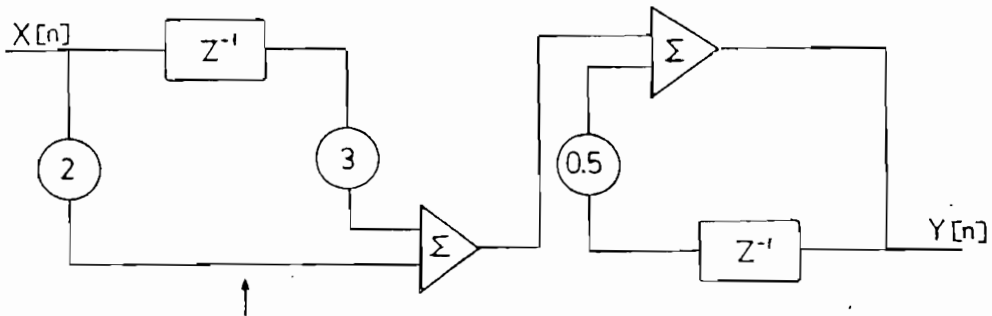


Fig.3.19 Solución Numérica y Gráfica de la Ecuación de Diferencias 3.9 a una entrada  $x[n]$  paso

Y la ecuación recursiva  $h[n] = (\frac{1}{2})^n U[n]$  (Ec. 3.11)

Si se interconectan los dos sistemas en cascada como se muestra en la Fig. 3.20, se obtiene un sistema equivalente recursivo con una entrada impulso  $\delta[n]$  así:

$$y[n] - 0.5 y[n-1] = 2x[n] + 3x[n-1] \quad (\text{Ec. 3.12})$$



$$h[n] = 2\delta[n] + 3\delta[n-1]$$

Fig. 3.20 Circuito Resultante de las Ecuaciones 3.10 y 3.11

El circuito a simularse en el EAI Mini AC y que permite resolver la ecuación de diferencias dada por la expresión (3.12) se muestra en la Fig. 3.21 , 3.23 y 3.24

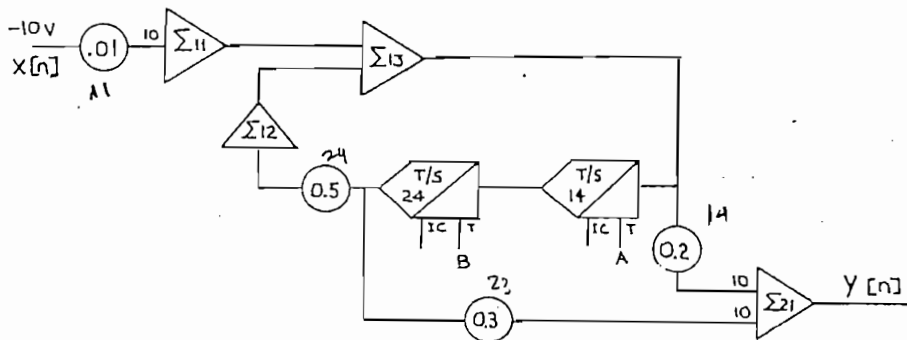


Fig. 3.21 Circuito de Simulación de la Fig. 3.20  
La función impulso de entrada se la ha aproximado a la función escalón (fig.3.22):

$$U[-n+t_2] = \begin{cases} 1 & \text{para } n < t_2 \\ 0 & \text{para } n \geq t_2 \end{cases}$$

donde  $t_2$  está dado por la selección del selector TIMER-

SECONDS ; que determina la duración de la señal lógica A del Timer.

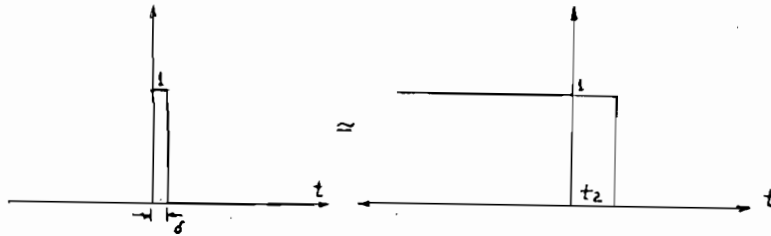


Fig. 3.22 Función impulso discreta equivalente

Para obtener la función  $U[-n+t_2]$  se ha usado el interruptor lógico que internamente está conectado a un sumador/integrador ( $\Sigma/\int$ ). De las cinco entradas disponibles, las de ganancia  $\times 10$  están controladas por este interruptor cuyo control se lo efectúa con señales lógicas.

A	B	( $\Sigma$ )
0	0	0
0	1	- 10 Y
1	0	- 10 X
1	1	- 10(X+Y)

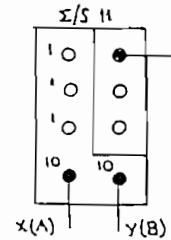
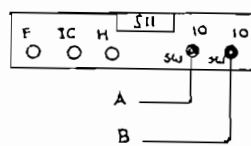


Fig. 3.23 Señales de control de las entradas  $\times 10$  del  $\Sigma/\int$

Para nuestro estudio se ha utilizado la entrada A del  $\Sigma/\int$  11, mientras que la B quedará, libre conjuntamente con el siguiente circuito de control.

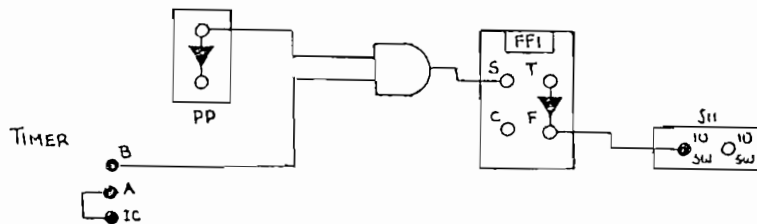


Fig. 3.24 Circuito que permite simular la función impulso discreta



Esta configuración permite obtener  $x[n]$  a la salida del  $\Sigma 11$ ,  $\Sigma 13$  y del T/S 14 solo para el instante  $n = 0$ , luego el interruptor del  $\Sigma 11$  se abre y la señal  $x[n]$  desaparece a partir de  $n = 1$ .

La aproximación de la función impulso es válida ya que el circuito de simulación empieza a funcionar en el instante en que se presiona PP, es decir a partir del instante  $n=0$

Este circuito de control nos permite simular a una función impulso y por tanto nos permite obtener la Respuesta a una función impulso de cualquier función discreta en general.

El resultado numérico y gráfico de la ecuación dada por la expresión 3.12 se muestra en la Fig.3.25. De los valores numéricos observados en el display del computador y la gráfica obtenida en el grafizador se puede concluir que se tiene una gran aproximación con los resultados reales que se obtienen al resolver la Ec. 3.12.

Para el caso de una entrada rampa es decir:

$$x[n] = 0 \text{ para } n < 0 \text{ y } x[n] = 0.01n \text{ para } n \geq 0$$

Se resolverá la siguiente ecuación recursiva:

$$y[n] - 2y[n - 1] = 0.01n \text{ y } y[-1] = 0 \text{ (Ec.3.13)}$$

El circuito a simularse en el EAI Mini AC y que permitirá resolver la ecuación de diferencias dada por la ecuación 3.13, se muestra en la Fig. 3.26. La parte del circuito encerrado por la línea punteada nos permitirá obtener una

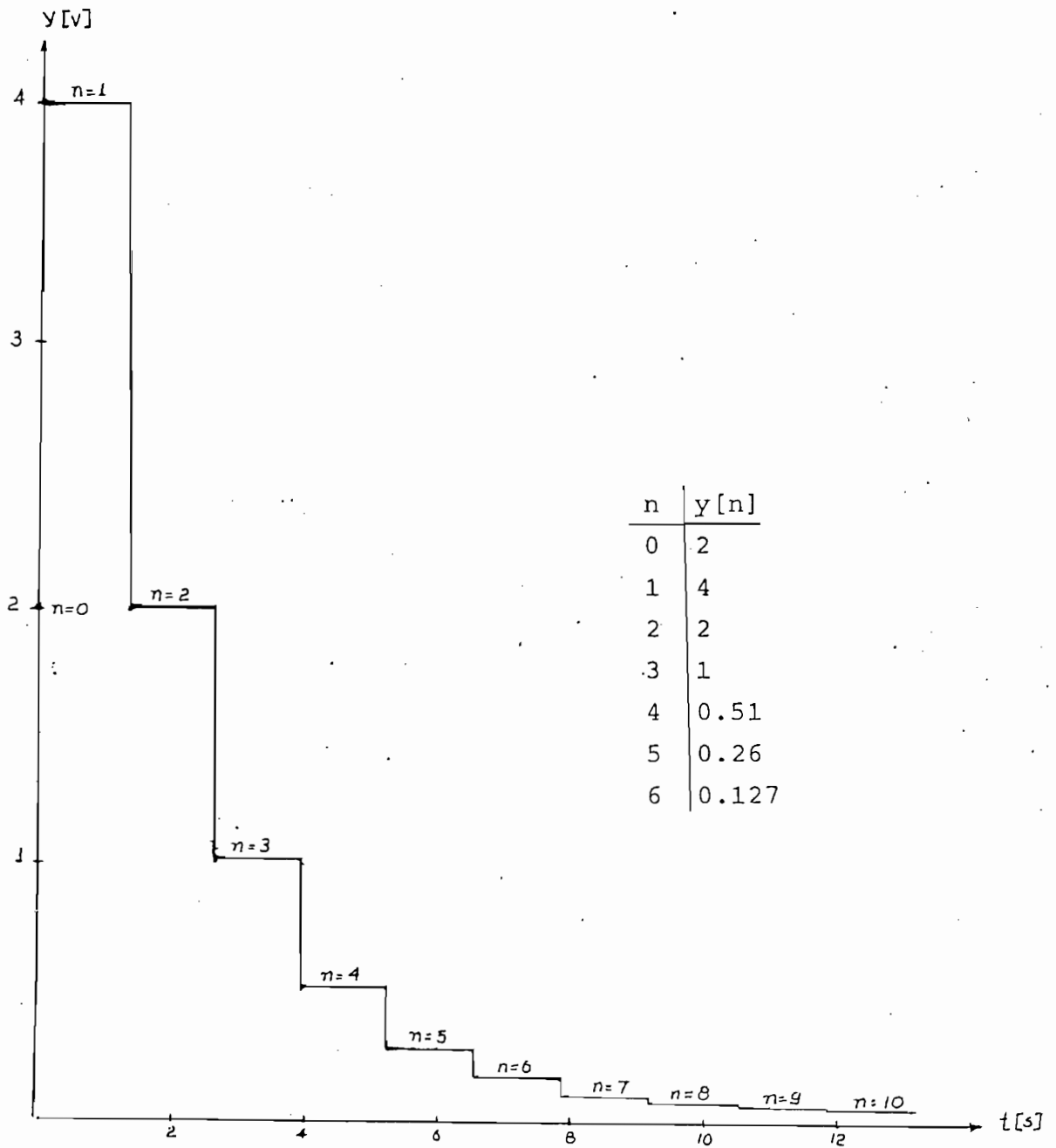


Fig.3.25 Respuesta a una función impulso de la Ecuación de Diferencias 3.12

función rampa muestreada.

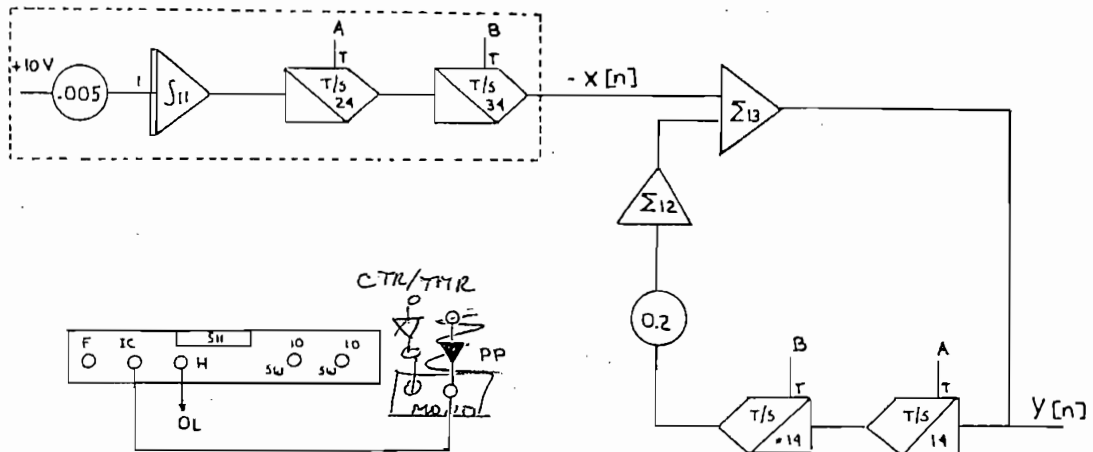


Fig 3.26 Circuito de Simulación de la función rampa discreta

Juega un papel importante en la generación de la función rampa muestreada el valor del potenciómetro 11 y el valor del TIMER de tal manera que para cada período de muestreo a la salida del  $\Sigma/s_{11}$  se vaya obteniendo valores  $.01n, .02n, .03n \dots$  donde  $n$  es el número de muestreo.

Para nuestro ejemplo en particular se tuvo un valor de  $F_{11} = 0.005$  y el período escogido en el TIMER fue de 2 segundos. El valor de  $F_{11}$  nos define el valor de la pendiente de la función rampa en tanto que el valor del TIMER nos da el período  $T$  para los cuales se obtienen los valores  $.01, .02, .03$  etc, para  $x[n] = x(t)|_{t=nT}$ .

En la Fig. 3.27 se muestra la función rampa muestreada que se obtiene a la salida del T/S 34, además en esta figura también se muestra la salida del T/S 24. Lamentablemente resulta un poco difícil el escoger los valores de  $F_{11}$  y del TIMER de tal manera de poder simular exactamente a la función

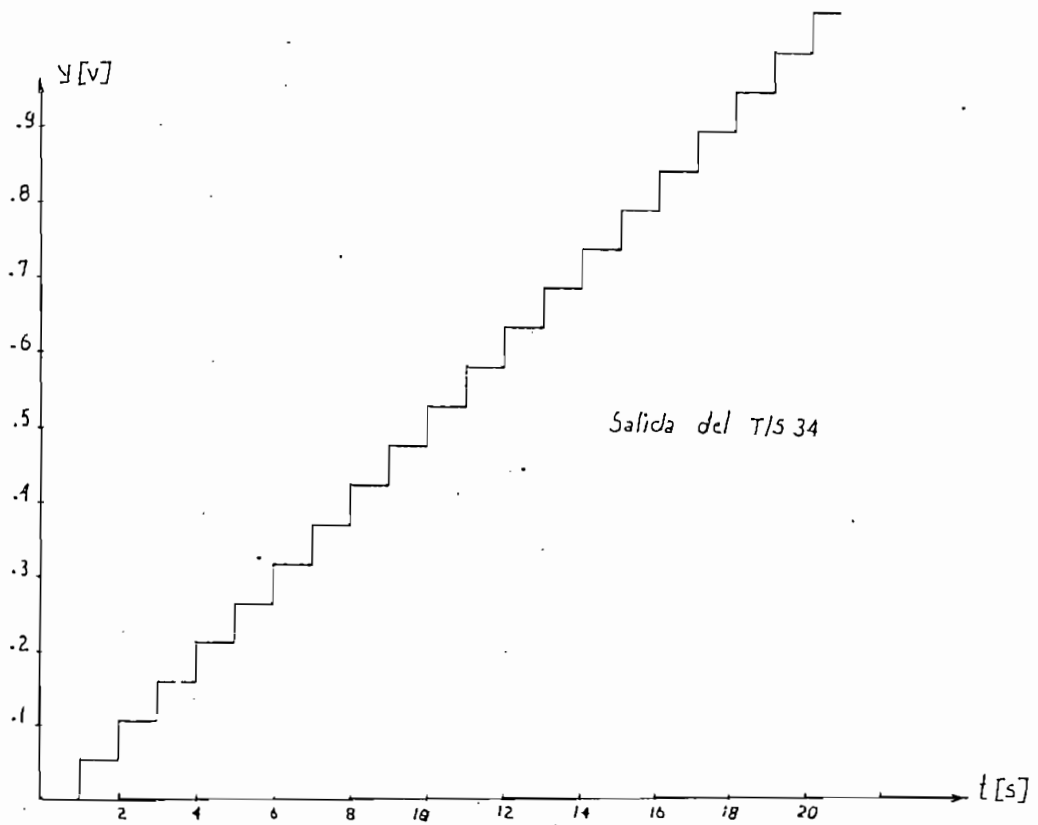
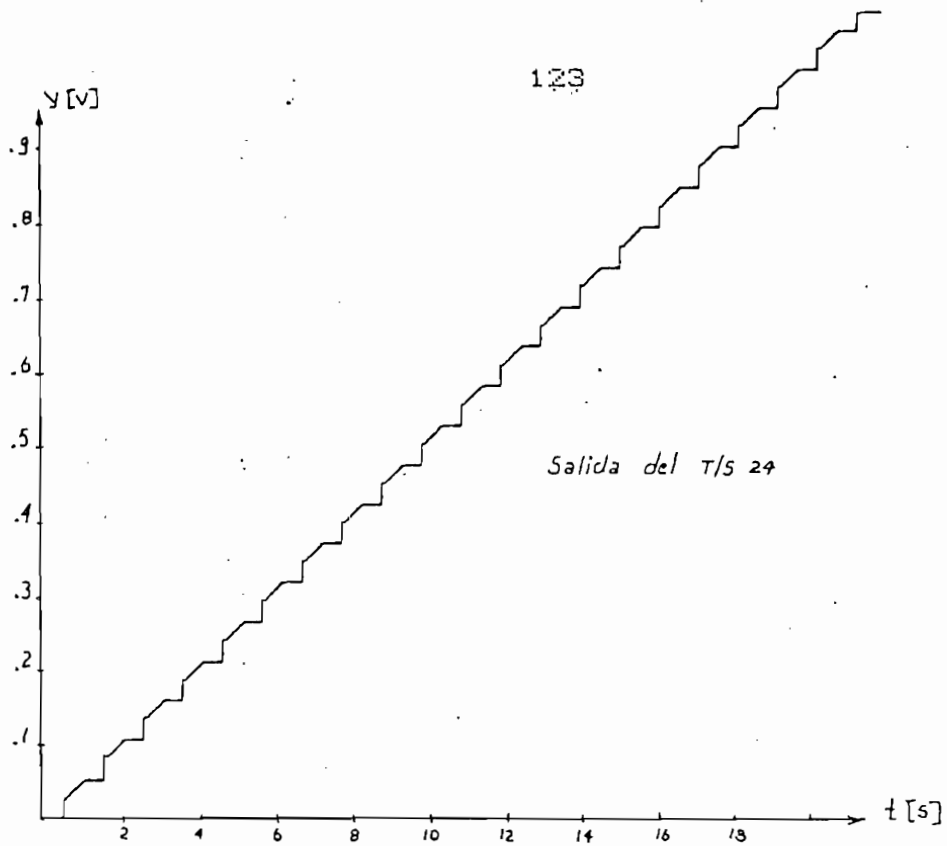


Fig.3.27 Función Rampa Muestreada, Salidas de los T/S 34 y 24

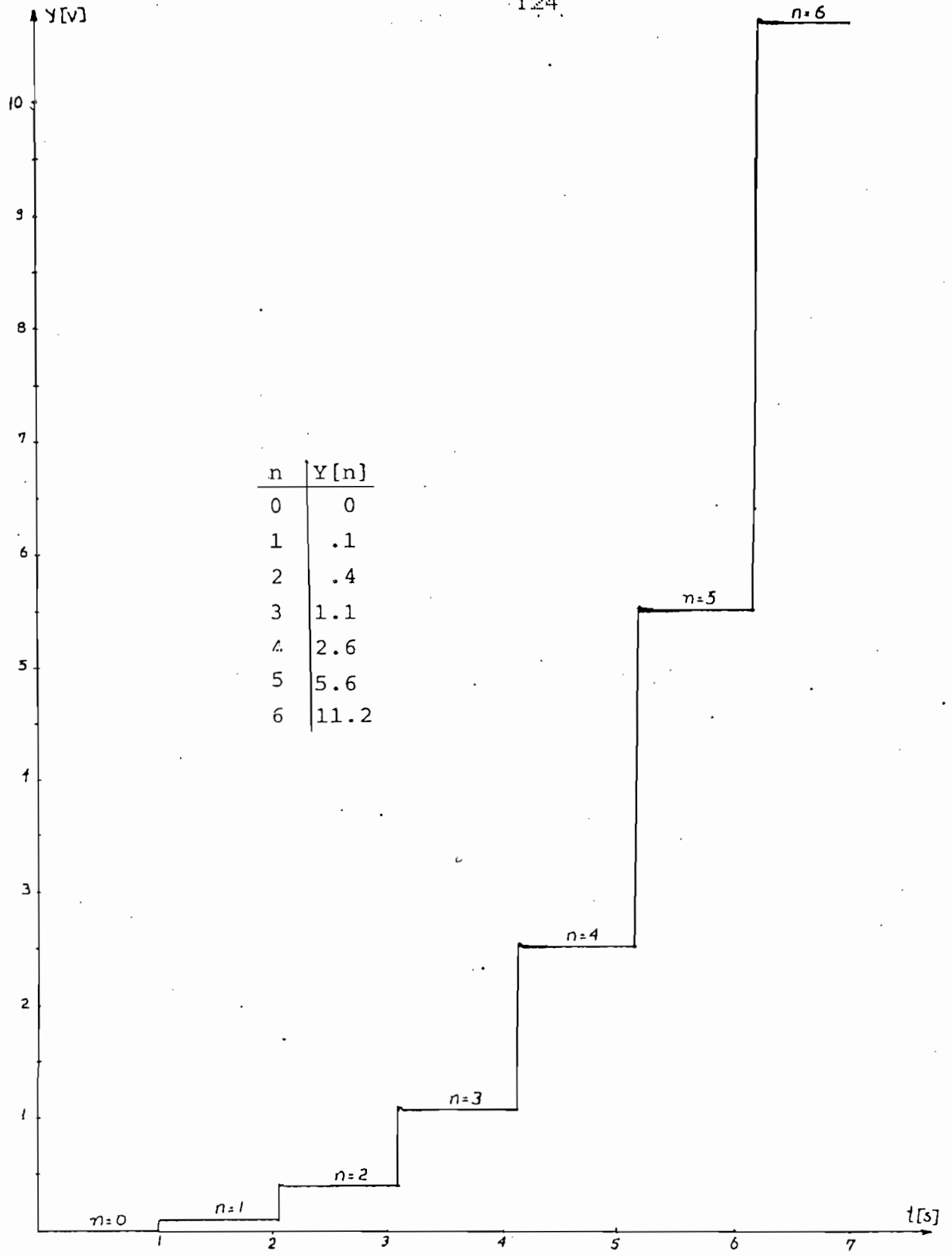


Fig.3.28 Respuesta a una Función Rampa de la Ecuación de Diferencias 3.13

rampa, que debe tener una pendiente pequeña para ser observada.

El circuito encerrado por la línea punteada más el control de  $\Sigma/\delta_{11}$  junto con el escogitamiento del valor de  $P_{11}$  y del TIMER nos permitirá obtener la respuesta a una función rampa de cualquier función discreta en general.

El resultado numérico y gráfico de la Ecuación dada por la expresión 3.13 se muestra en el Fig. 3.28.

De los resultados numéricos y gráficos obtenidos en la Fig. 3.28 se puede concluir que a medida que aumentan el número de iteraciones se va obteniendo mayores errores en los resultados ya que la función misma de entrada rampa muestreada no es muy exacta sinembargo para las primeras iteraciones los resultados son aceptables.

#### 3.4.2 Sistemas Discretos en el Espacio de Estado.

Para la simulación de Sistemas Discretos en el Espacio de Estado, utilizamos las unidades de retardo estudiadas pero conectadas en paralelo; es decir, es decir se utiliza la descomposición en paralelo a la misma que se le ha añadido ciertas condiciones iniciales. Se ha seleccionado la simulación de un sistema discreto con una realimentación de estado como compensador.

Ejemplo 3.4 Se tiene el sistema de la Fig.3.29 el cual tiene un controlador de realimentación de estado cuyo diagrama de bloques se muestra a continuación:

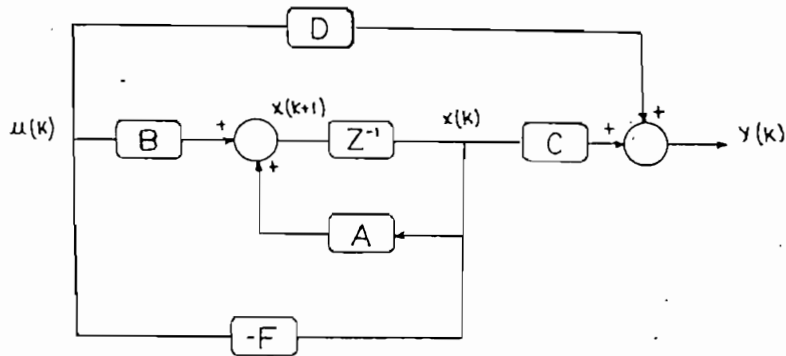


Fig. 3.29 Sistema con Controlador de Realimentación de Estado

Las matrices de coeficientes del proceso son:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.368 & 1.368 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = [0.264 \quad 0.368] \quad D = 0$$

La matriz de ganancias de realimentación es:

$$F = [0.132 \quad 0.368]$$

Considerando las condiciones iniciales  $x_1(0) = 1$  y  $x_2(0) = 0$  y tomando las respectivas ecuaciones de estado así:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (\text{Ec. 3.14})$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k) \quad (\text{Ec. 3.15})$$

se llega a obtener el siguiente diagrama de flujo:

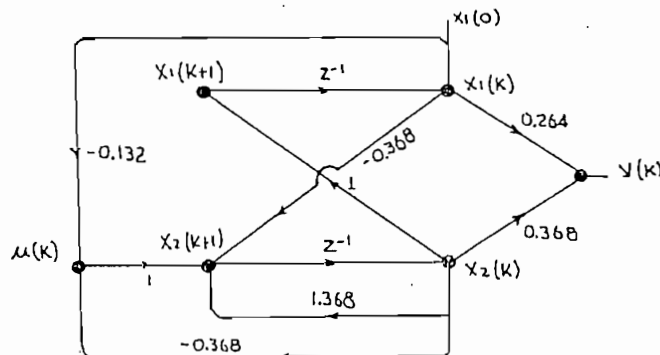


Fig. 3.30 Diagrama de Flujo del Sistema de la Fig. 3.29

El circuito mostrado en la Fig. 3.31 nos permite simular el diagrama de flujo dado por la figura 3.30, y que nos describe las ecuaciones de estado mencionados anteriormente con las respectivas condiciones iniciales.

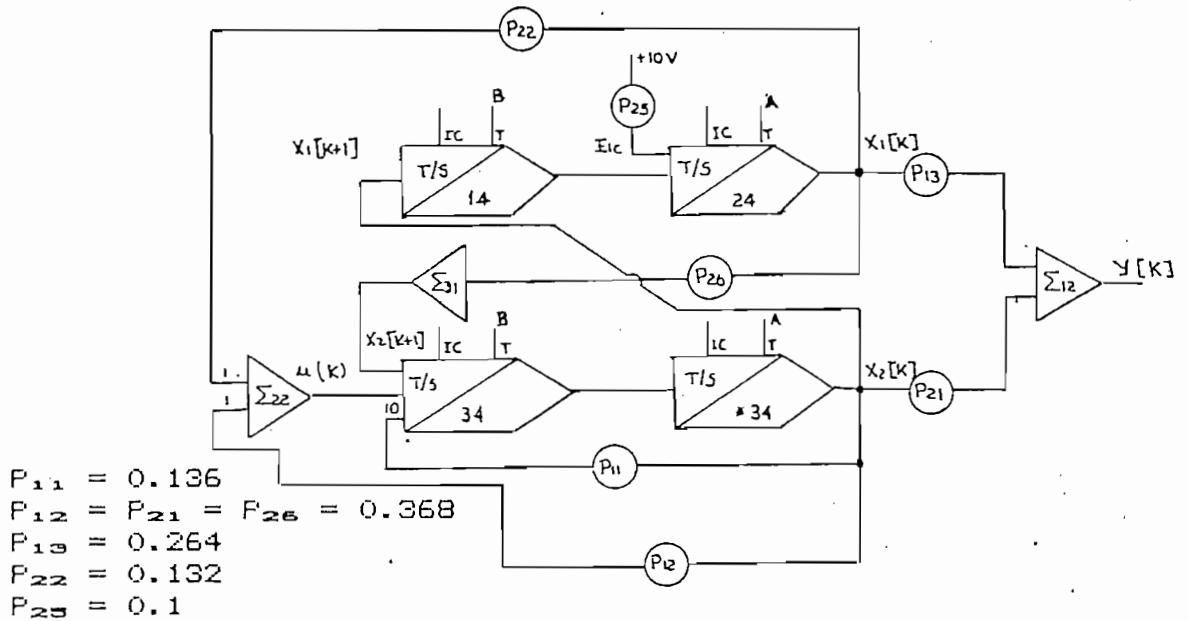


Fig. 3.31 Circuito de Simulación del Sistema dado por la Fig. 3.29

En la Fig.3.32 se muestra la salida  $y(k)$  en función del tiempo y además se presentan los valores de las respuestas del sistema obtenidas como resultado de la simulación y las calculadas usando las ecuaciones de estado y de salida del sistema ; el análisis de estos resultados evidencian la validez de la simulación.



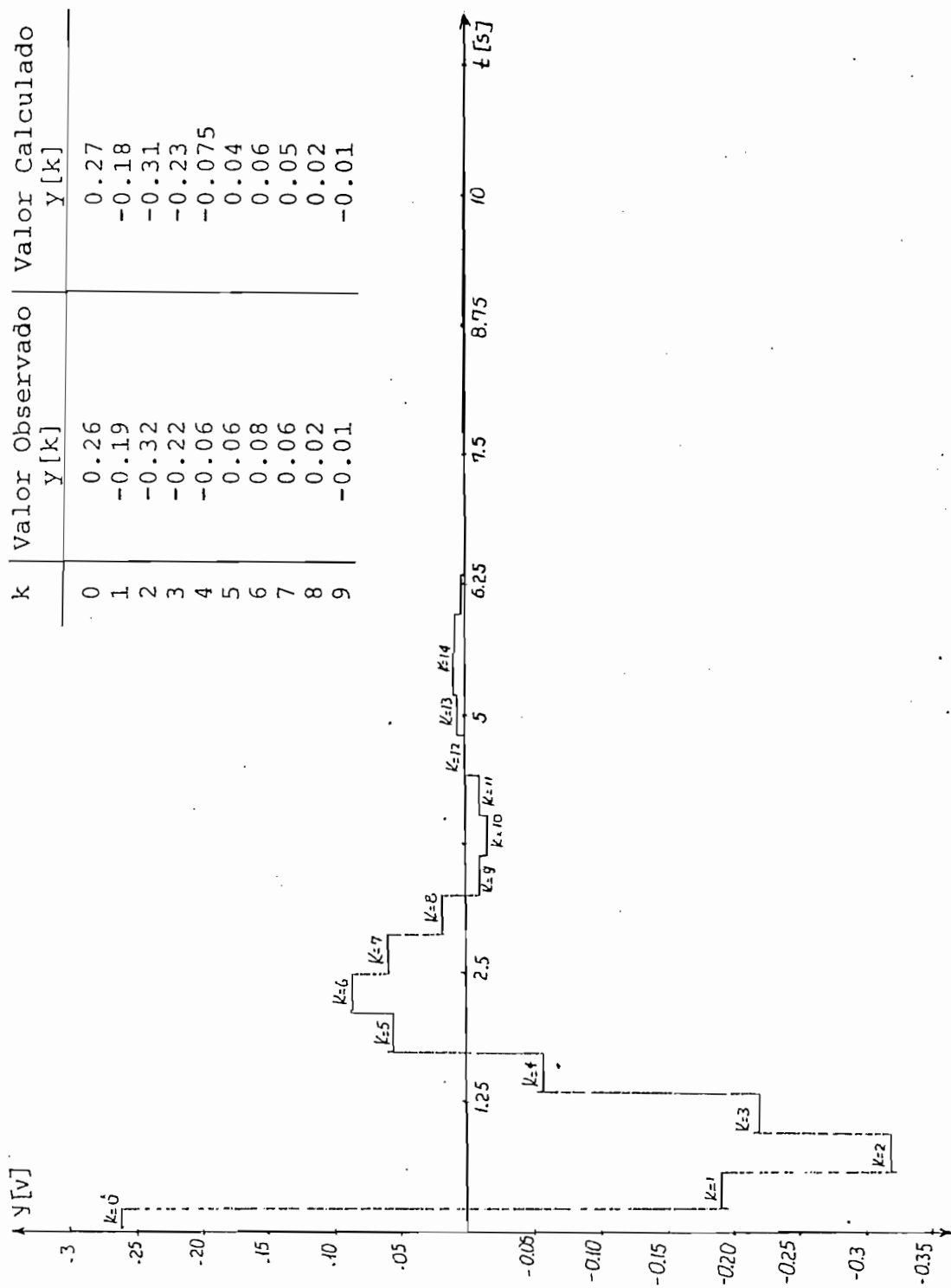
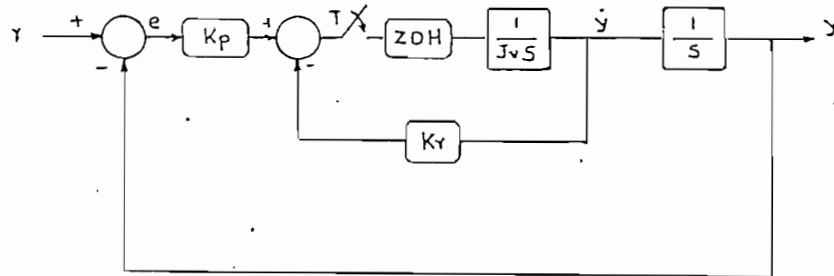


Fig.3.32 Respuesta en el tiempo del sistema discreto de la Fig.3.29

### 3.5 Análisis de Sistemas Muestreados.

El estudio de sistemas muestreados nos permitirá ver la notable incidencia que tiene el período de muestreo escogido en un sistema de lazo cerrado y puesto que para este análisis se ha partido de un ejemplo que fue ya analizado en el capítulo anterior con la ayuda del paquete de programación C.C. Esto nos posibilitará realizar una comparación de resultados entre los dados por un computador digital y por uno análogo - híbrido. Dado el sistema de control digital de un vehículo espacial hallar la salida  $Y$ , para valores distintos de  $T$  para los cuales el sistema es relativamente estable.



$$K_p = 1.65 \times 10^6$$

$$K_r = 3.17 \times 10^4$$

$$J_v = 418222$$

Fig. 3.33 Sistema de un Vehículo Espacial

Para hallar la función de transferencia que nos relacione  $Y(z)/R(z)$  usamos el método B (ZOH) de discretización para sistemas muestreados además de las funciones de multirango a través de macros que nos ofrece el programa C.C.

$$G(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{1.65 \times 10^6 T^2 (z+1)}{83644z^2 + 6.34 \times 10^4 T z + 83644 - 6.34 \times 10^4 T}$$

A
B
C

(Ec. 3.16)

La ecuación característica será:  $Az^2 + Bz + C = 0$  (3.16a)

Las raíces de la ecuación característica deberán permanecer en el interior del círculo  $|z| = 1$  en el plano  $Z$  para que el sistema sea asintóticamente estable. Aplicando la prueba de estabilidad de Jury's a la ecuación característica de la Ec.3.16a se encuentra que el rango de estabilidad de  $T$  es  $0 \leq T < 0.264$ .

La Fig. 3.34 muestra el diagrama de las raíces de la Ec. 3.20 cuando  $T$  varía desde 0 a infinito. El diagrama del lugar de las raíces de la Fig. 3.34 es obtenido asignando un valor de  $T$  y resolviendo (3.16a).

Como se puede apreciar en el gráfico del lugar de las raíces para  $T = 0.264$ , las raíces de la ecuación característica que vienen a ser los polos del sistema en lazo cerrado son  $P_1 \approx -1.0$  y  $P_2 = -0.372$ , es decir estamos en el límite de estabilidad relativa, donde las raíces están dentro del círculo de radio 1 en el plano  $z$ .

Para valores de  $T > 0.264$  las raíces caerán fuera del círculo unitario y el sistema será inestable.

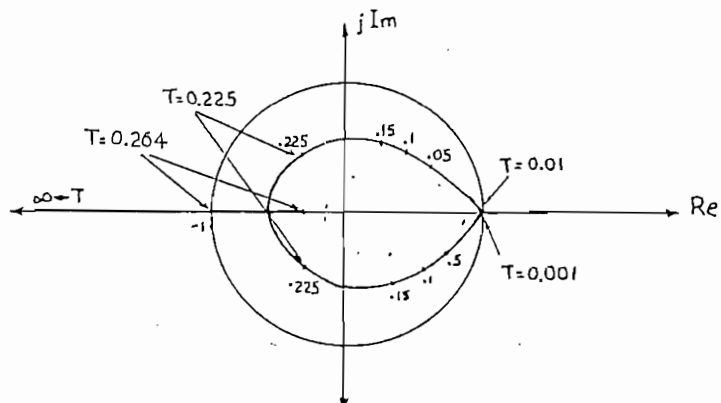


Fig. 3.34 Diagrama del L.G.R. del sistema (Ec. 3.16)

En cambio en el siguiente cuadro se aprecia el efecto que se tiene para 4 distintos valores de T en cuanto a sobreimpulso, valor de  $\epsilon$ , valor de las raíces así:

T	G(z)	$\epsilon$	Polos (Raíces)	Sobre Impulso
0.269	$\frac{1.42(z+1)}{z^2+1.466z+0.388}$	=0	-1.11, -0.34	>100%
0.225	$\frac{0.998(z+1)}{z^2+0.704z+0.293}$	0.26	-0.352±0.411j	50%
0.02	$\frac{0.0078(z+1)}{z^2-1.84z+0.856}$	0.59	+0.97±0.097j	10%
0.01	$\frac{1.97 \times 10^{-3}(z+1)}{z^2-1.92+0.926}$	0.609	+0.96±0.049j	9%

Cuadro 3.5 Valores de  $\epsilon$ , polos, sobreimpulsos para distintos T

Del cuadro anterior para  $T < 0.264$ , se puede afirmar que mientras disminuye el período de muestreo el valor de  $\epsilon$  aumenta, al igual que el valor de sus polos, mientras que el sobre impulso de la función disminuye, es decir al disminuir el período de muestreo T el sistema se vuelve más estable.

Hay que anotar además que si se disminuye a un valor muy pequeño el período de muestreo respecto a la constante de tiempo del sistema, si bien disminuye el sobreimpulso el tiempo de estabilización del sistema aumenta y por tanto el sistema se vuelve lento.

Lo mencionado anteriormente se ha podido comprobar gráficamente mediante los gráficos Fig. 3.35, Fig.3.36 y Fig.3.37 obtenidas al simular en el computador

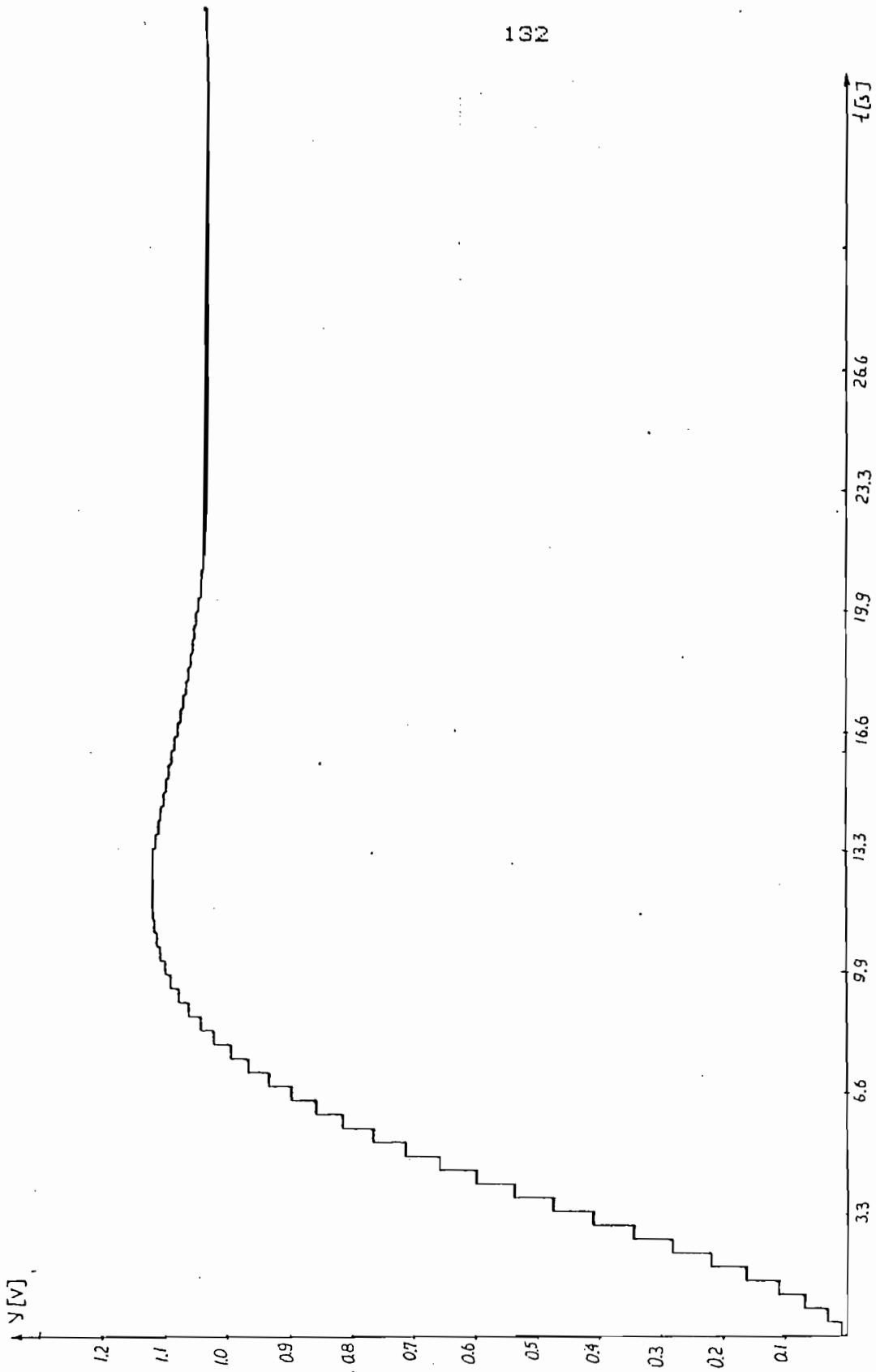


Fig.3.37 Respuesta a una función paso del Sistema de Control de la Fig.3.33. para  $T=0.02$

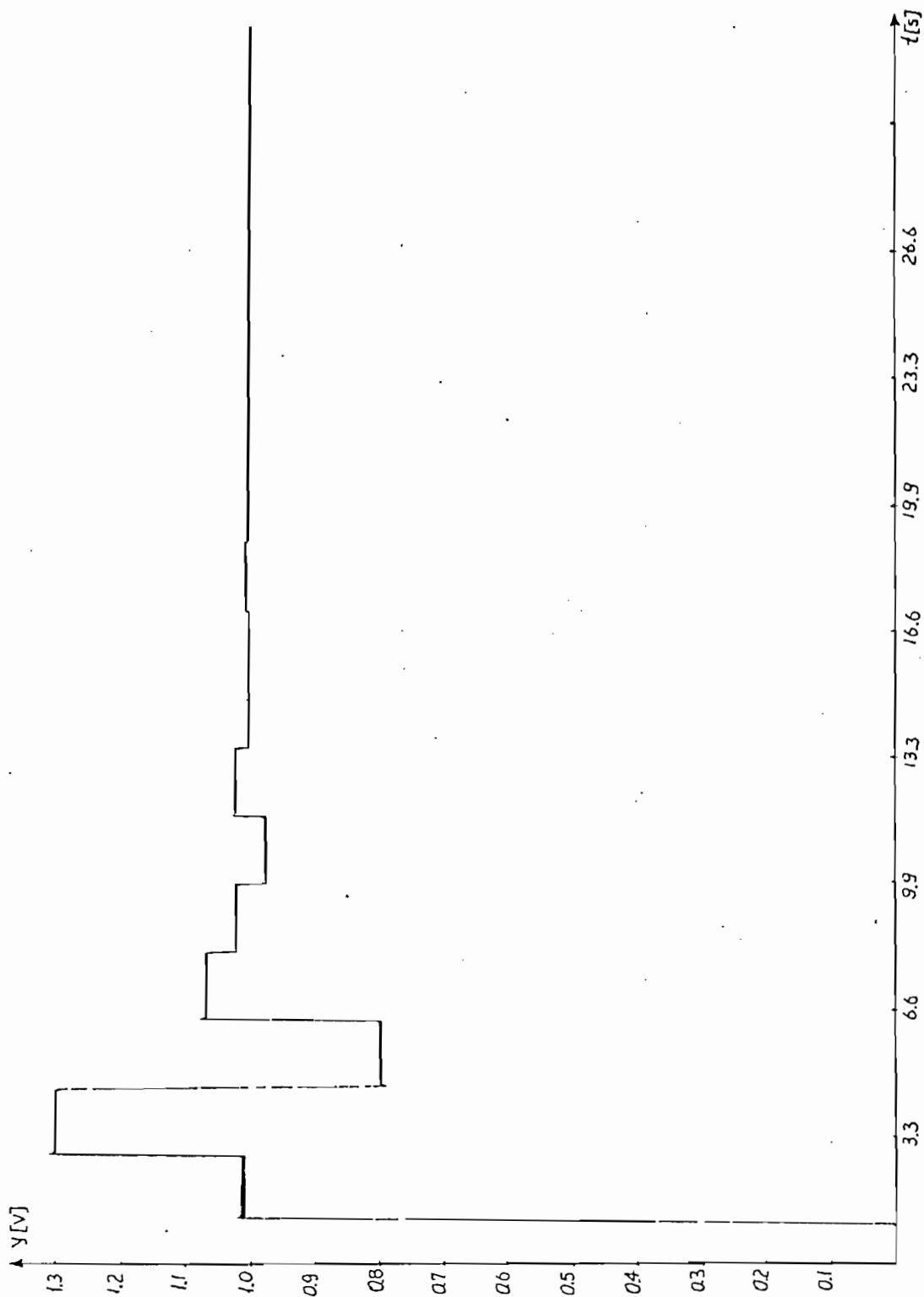


Fig.3.36 Respuesta a una función paso del Sistema de Control Digital de la Fig.3.33 para  $T=0.225$

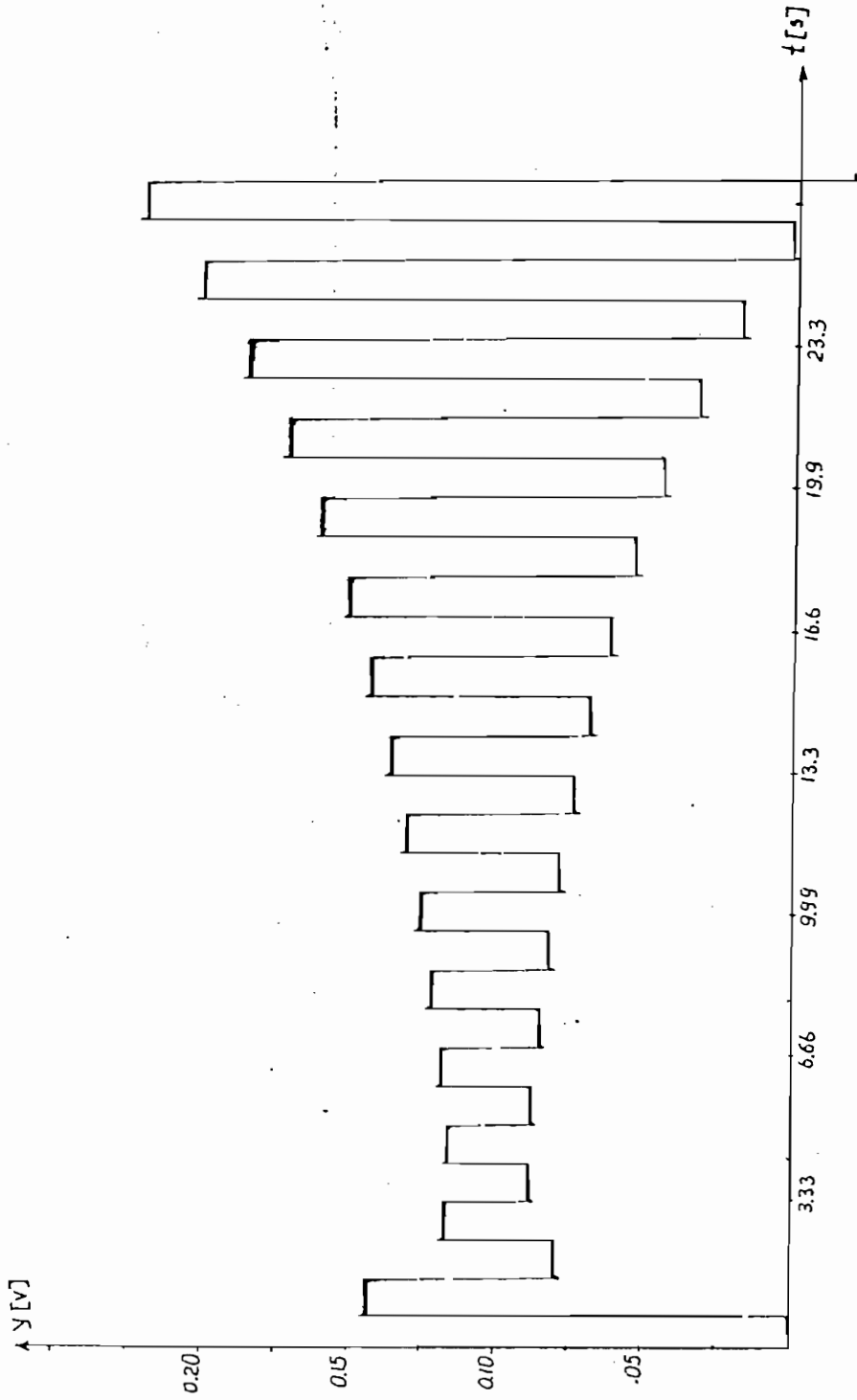


Fig. 3.35 Respuesta a una función paso del sistema de control digital de la Fig.3.33 para  $T=0.269$

analógico/híbrido, las funciones  $G(z)$  que se han obtenido al evaluar la expresión (3.16) para los diferentes valores de  $T$ . Debido a los problemas de saturación que acarrearán los valores cercanos a 2 en los coeficientes del denominador de la función de transferencia, no se pudo simular la función  $G(z)$  que se obtiene para  $T=0.001$  y para  $T=0.01$  y con ello poder ver más notoriamente el efecto que se tiene con el tiempo de estabilización al efectuar una comparación con los resultados obtenidos con el computador digital.

### 3.6 Conclusiones.-

- Debido a las características del computador analógico-híbrido EAI Mini AC solo es posible simular sistemas discretos de hasta tercer orden conectando los dos computadores existentes en el laboratorio.
- Se recomienda escalar en magnitud solo cuando exista problemas de saturación de los elementos usados en la simulación (se recomienda una señal de entrada de 1V. Ya que al trabajar con señales de pequeña amplitud existen problemas de ruido y por tanto de precisión tanto en la simulación como en la graficación.
- Si bien en la discretización de sistemas continuos al tratar de obtener mayor precisión, disminuyendo el período de muestreo se aumenta el valor de los coefi-



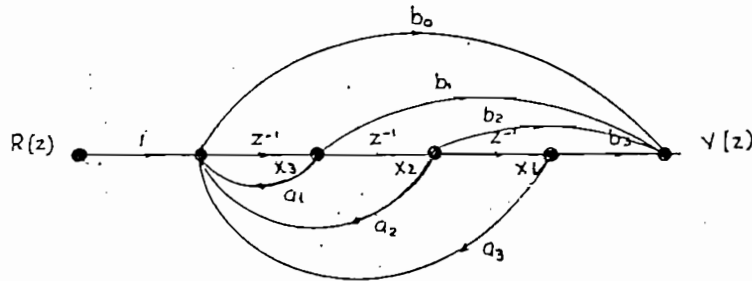
cientes del denominador de la función de transferencia, provocando problemas de saturación en la simulación y obligando a un escalamiento en magnitud de la señal de entrada al mismo tiempo disminuye el valor de los coeficientes del numerador, lo cual hace posible compensar el escalamiento realizado sobre la señal de entrada. Esta aseveración está basada en los resultados que se obtienen al variar el valor de  $T$  en las expresiones que resultan al aplicar tres de los métodos estudiados.

- El valor de la escala del eje del tiempo en los gráficos dependerá tanto del potenciómetro que define el valor de la pendiente de la función rampa generada, como del valor de la escala  $X$  escogida en el grafizador.
- Puesto que los verdaderos sistemas muestreados comprenden el estudio de sistemas continuos y discretos a la vez, lo que se ha hecho en este capítulo es valiéndonos del programa CC expresar todo el sistema en función de la variable  $z$ , simularlo en el Mini AC y ver el efecto que se tiene en el sistema de lazo cerrado al variar el período de muestreo.
- Al igual que en la simulación de sistemas continuos en la de sistemas discretos se puede tener 3 métodos fundamentales de descomposición: directo, en cascada, y en paralelo. Para el caso de sistemas discretos en el espacio de estado es conveniente usar el método paralelo, sin embargo por facilidad y por simplificar el proceso de simulación se ha usado la descomposición

directa. A continuación se dará en forma simplificada los tres métodos de descomposición:

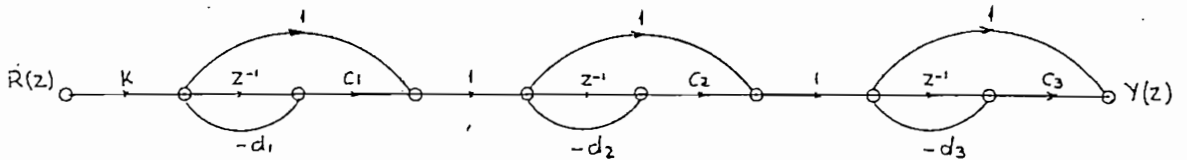
Descomposición Directa:

$$G1(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + b_3z^{-3}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + a_3z^{-3}}$$



Descomposición en Cascada:

$$G2(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = K \cdot \frac{z + c_1}{z + d_1} \cdot \frac{z + c_2}{z + d_2} \cdot \frac{z + c_3}{z + d_3}$$



Descomposición Paralela:

$$G3(z) = \frac{D(z)}{R(z)} = \frac{K_1}{z + p_1} + \frac{K_2}{z + p_2} + \frac{K_3}{z + p_3}$$

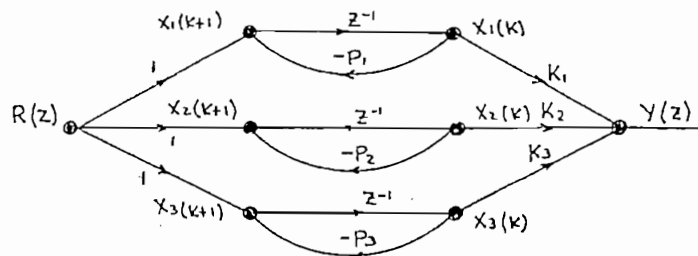


Fig. 3.38 Métodos de Descomposición de una función discreta

- El numeral correspondiente a Soluciones de Ecuaciones de Diferencias nos ha permitido simular funciones de entrada tipo impulso y rampa discreta y por tanto poder hallar la respuesta de sistemas discretos en general para este tipo de entradas. Para el caso de una entrada paso no existe problema ya que al tener una entrada paso unitaria continua se tiene que  $R(t) = R(nT) = 1$  para valores de  $t \geq 0$  y  $n \geq 0$  (entero positivo).  
Para el caso de entrada paso y especialmente rampa hay que tener mucho cuidado con problemas de saturación.
- El escogitamiento del período de muestreo de sistemas discretos depende del espectro de frecuencias de la señal continua (Teorema de Shannon) y para el caso nuestro, de simulación de sistemas discretos en el computador análogo-híbrido, se ha llegado a determinar experimentalmente que para tener un simulador digital cuya salida se aproxime satisfactoriamente a la respuesta del sistema continuo y que a la vez nos evite tener problemas de saturación en la simulación el período de muestreo escogido debe ser aproximadamente diez veces menor la constante de tiempo del sistema ( $T \leq \tau/10$ ). Al tener este período de muestreo además se tiene un número adecuado de iteraciones tanto para ser visualizadas en el display del computador como para ser obtenidas en el grafizador.

## C A P I T U L O I V

### APLICACION A CONTROLADORES DISCRETOS

- 4.1 Introducción.
- 4.1.1 Metodología para simular Controladores Discretos de plantas continuas (Sistemas Muestreados).
- 4.2 Controladores de Retardo - Adelanto de Fase.
- 4.3 Controlador PID.
- 4.4 Controladores Discretos de una planta real.
  - 4.4.1 Control de Velocidad.
  - 4.4.2 Control de Posición.
- 4.5 Comparación con un Controlador digital real.
- 4.6 Conclusiones.

## C A P I T U L O   I V

## APLICACION A CONTROLADORES DISCRETOS

## 4.1   Introducción

En este capítulo se trata de aplicar la simulación de los sistemas discretos a diferentes problemas de compensación de sistemas continuos.

El análisis y diseño de cada uno de los controladores discretos a simularse se lo hará en cada uno de los ejercicios planteados, a partir de conceptos ya conocidos puesto que el estudio teórico correspondiente se lo ha tratado ampliamente en otros libros y tesis.

El control en lazo cerrado tanto de plantas continuas simuladas en el EAI Mini AC, como de plantas reales (MOTOMATIC) por medio de controladores discretos simulados, se ha logrado efectuar gracias a las facilidades y recursos que nos ofrece el computador análogo híbrido EAI Mini AC. El estudio conjunto tanto de sistemas continuos como de sistemas discretos implica el estudio de sistemas muestreados, sistemas que en la realidad se encuentran frecuentemente.

Puesto que es un control en tiempo real en este capítulo se podrá observar la relación directa que debe existir entre la constante de tiempo del sistema y el período de muestreo, dado en este caso por el TIMER del computador. Además se

podrá observar el efecto al variar los diferentes parámetros del controlador, en cuanto a rapidez de respuesta del sistema, tiempo de estabilización, error de posición, error de velocidad, etc. Se podrá comparar la respuesta del sistema compensado con la del sistema original sin compensar.

Se presentan estudios comparativos de los resultados teóricos obtenidos mediante el paquete de programación Cad Control y los resultados prácticos obtenidos en el grafizador. Para la realización de estos sistemas muestreados se han usado características especiales de los elementos del computador análogo/híbrido, las mismas que serán descritas posteriormente.

Se dará pues la metodología necesaria para realizar la simulación de sistemas continuos y discretos en conjunto (sistemas muestreados), además de las limitaciones y restricciones propias del computador EAI Mini AC.

#### 4.1.1 Metodología para simular controladores discretos de plantas continuas (sistemas muestreados).

Un sistema muestreado comprende el estudio conjunto de sistemas continuos y discretos a la vez, este es el caso de un sistema continuo al cual se le aplica cualquier tipo de acción controladora discreta.

En la figura 4.1 se muestra un típico sistema muestreado.

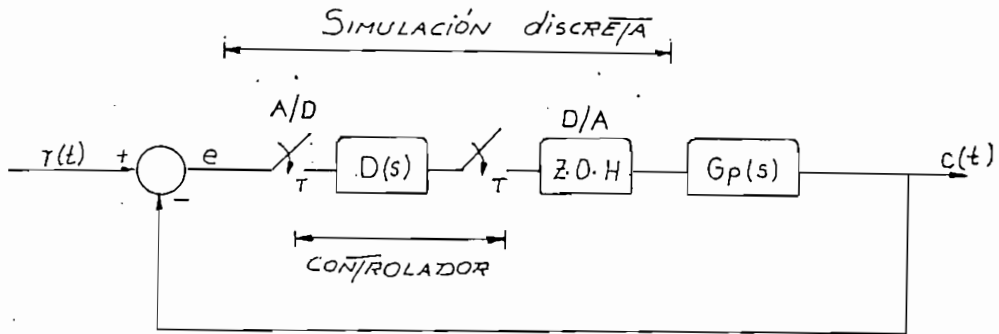


Fig. 4.1 Sistema muestreado de lazo cerrado

En la figura anterior  $G_p(s)$  es la transformada de Laplace del sistema a compensarse. Un retenedor de orden cero ZOH, (conversor D/A) permite la reconversión de un número digital a una tensión analógica proporcional que va a ser aplicada a la planta continua la señal analógica  $e$  (error) es muestreada con un muestreador de período  $T$  (conversor A/D) cuyo propósito es el transformar una tensión analógica de entrada a un número digital proporcional, el mismo que servirá de entrada al controlador digital. Puesto que el control que se va a realizar sobre la planta continua es en lazo cerrado y en tiempo real, es necesario precisar que el período de muestreo que esta en relación directa con la constante de tiempo del sistema, debe estar comprendida aproximadamente entre 12ms y 1,057s que corresponden a los rangos de tiempo que se dispone en el TIMER cuando se le selecciona las escalas 0.01 y 0.001

Debido a la configuración y principio de funcionamiento

de un sistema discreto simulado, éste implícitamente presupone la existencia de un retenedor de orden cero ZOH y de un muestreador de período  $T$ , ya que estos dos elementos vendrían representados en la simulación por el track-store y su control  $T$  que varía de DP a IC cada período dado por el TIMER del computador análogo-híbrido EAI Mini AC. Por tanto en la Fig. 4.1 la parte correspondiente al conversor D/A, el controlador discreto  $D(z)$  y el conversor D/A, vendrá a ser simulado directamente en el computador análogo/híbrido.

Como resulta difícil dar una metodología exacta para la simulación de sistemas muestreados se ha optado por dar una metodología lo más general y aplicable a la mayoría de sistemas muestreados que tengan la estructura dada por la Fig. 4.1 la misma que se puede resumir en los siguientes pasos:

1. Conectar los dos computadores análogos 1 y 2 entre sí. Es necesario conectarlos solamente mediante el cable que une los púrticos de I/O TRUNKS, puesto que ninguno de los dos computadores va a funcionar como maestro ó esclavo.
2. Para la parte de la simulación de la planta continua, se hará un control local de los integradores usados para su funcionamiento, el mismo que se describirá en detalle más adelante.
3. En el TIMER del computador 1 (TIMER1) se calibrará el período de muestreo del sistema ( $T_1$ ) el mismo que



- mediante las salidas (A IC) y B del panel, servirán de entradas a las señales de control T de los trackstore.
4. En el TIMER del computador 2 (TIMER2) se calibrará un período ( $T_2$ ) mayor al período de muestreo del sistema ( $T_1$ ), de tal manera que  $T_2$  permita visualizar la acción del controlador discreto y que no permite tener saturación en los elementos usados en la simulación. Este período deberá ser aproximadamente de 10 a 15 veces la constante de tiempo del sistema. La salida (A IC) a través de los Trunks del panel del computador servirá como entrada para las señales IC tanto del control local de los integradores como de los track-store usados en la simulación.
  5. En el computador 2 se generará el barrido para el eje X del grafizador a través de un integrador cuya constante de integración tendrá un valor pequeño (se sugiere entre 0.001 y 0.010) de tal manera que se pueda escoger la escala adecuada para el eje X y poder grafizar la mayor cantidad de información posible.
  6. Luego de haber escogido la operación de los diversos elementos usados en la simulación así como el valor de los distintos potenciómetros, se procede en primer lugar a inicializar las partes lógicas y análogas del problema para lo cual se presiona el botón CLR del modo lógico y el botón IC del modo análogo en ambos computadores. Para iniciar el problema se presionará simultáneamente en los dos computadores RUN y PP de los modos lógico y

analógico respectivamente. Para finalizar este proceso repetitivo se presionará CLR del modo lógico y los botones IC y STP del modo analógico en los dos computadores.

De acuerdo al cuadro anterior y a los numerales 3 y 4 de la metodología descrita anteriormente se tendrá el siguiente diagrama de tiempos que permitirá entender de mejor manera el funcionamiento del sistema a simularse.

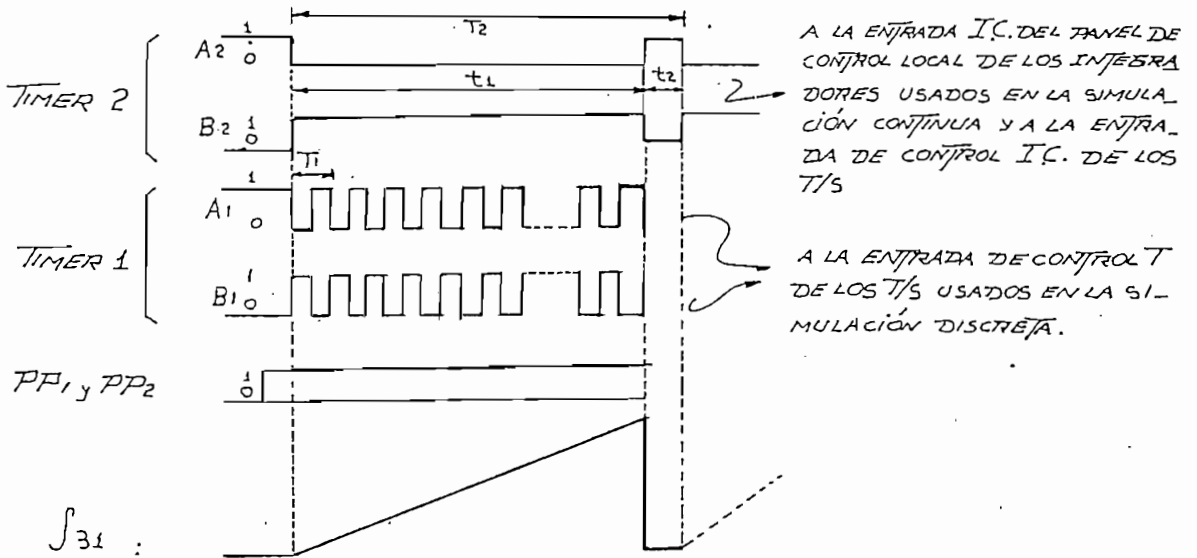


Fig. 4.2 Diagrama de tiempos de los TIMERS PPs y la salida rampa.

Puesto que por definición inicialmente  $A_2=1$  (TIMER 2) entonces los T/S estarán en condiciones iniciales y a la vez los integradores que simulan a la planta continua estarán en condiciones iniciales en el momento de presionar  $PP_1$  y  $PP_2$  a la salida de  $A_2$  del Timer 2 se tendrá un OL y por tanto los integradores estarán en condiciones de operación (OP) y durante este tiempo ( $t_1$ ) las salidas  $A_1$  y  $B_1$  del Timer 1 se aplicarán a la entrada de control  $T$  de los T/S con lo que

empieza a actuar el controlador digital. Así mismo durante este intervalo de tiempo  $t_1$  en el integrador 31 se genera la rampa necesaria para el eje X del grafizador.

Luego durante el intervalo  $t_2$  en la salida  $A_2$  del Timer2 se tendrá un OL, el mismo que hará que se pongan tanto los integradores como los T/S en condiciones iniciales IC. Este proceso se repetirá periódicamente cada  $T_2$  segundos. Durante este intervalo la pluma del grafizador regresará a la posición inicial y entonces en el momento de graficar se deberá tener mucho cuidado de levantar la pluma instantes antes de que la señal  $A_2$  del Timer 2 cambie de OL a 1L, es decir, cambie de OP a IC.

Puesto que se realiza un control en lazo cerrado es necesario que el período  $T_1$  corresponda al período de muestreo real del sistema.

Una imagen permanente de la respuesta no será posible verla en un osciloscopio normal ya que si se disminuye  $T_1$  y  $T_2$  simultáneamente mediante el botón FAST (500 veces más rápida), los T/S operan incorrectamente con esos tiempos de muestreo, y por tanto la simulación falla.

Este procedimiento no necesariamente debe ser repetitivo, pero por problemas de saturación en los elementos usados para la simulación discreta así como para tener un mejor análisis y control del problema se lo ha hecho repetitivo.

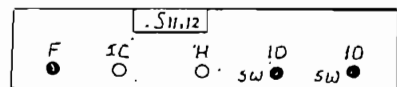
Al hacerlo repetitivo se puede ir viendo como varía la

salida del sistema, si se varía  $T_1$ ,  $T_2$  ó cualquier valor de potenciómetro que represente alguna variable del controlador, así mismo se podrán observar los valores de los parámetros anteriormente indicados que provocarán problemas de saturación de elementos usados en la simulación.

**Control Local de los integradores.**

Siempre que sea necesario los integradores a más de cambiar de condiciones de operación (OP) a condiciones iniciales (IC) de acuerdo al control general de los computadores, pueden tener un control local del funcionamiento mediante señales lógicas aplicadas a las entradas de control IC y H, independiente de las condiciones generales de operación del computador, tal como se muestra a continuación en el siguiente cuadro:

IC	H	MODO
0	0	OP
0	1	H
1	0	IC
1	1	H



Cuadro 4.1 Tabla de Funcionamiento Local de un Integrador.

**4.2 Controladores de Retardo - Adelanto de Fase.**

La función de transferencia de los controladores de primer orden de retardo - adelanto de fase viene dada por la siguiente expresión:

$$G_c(z) = K_c \cdot \frac{z - Z_1}{z - P_1} \quad (\text{Ec. 4.1})$$

Donde  $Z_1$  es un cero real y  $P_1$  es un polo real. Si el controlador digital no afecta al funcionamiento en estado estable del sistema, se hace que:

$$\lim_{Z \rightarrow 1} G_c(z) = 1 \quad (\text{Ec. 4.2})$$

Por tanto  $K_c$  será igual a:  $K_c = (1 - P_1)/(1 - Z_1)$  (Ec. 4.3)

$G_c(z)$  puede clasificarse como un controlador pasa bajo ó un controlador pasa alto, dependiendo de las magnitudes relativas de  $Z_1$  y  $P_1$ . Se tendrá un controlador de retardo de fase, cuando el polo y cero se encuentran en el interior de círculo unitario en el plano  $Z$  siempre que el polo se encuentre localizado a la derecha del cero. Razonando similarmente se puede mencionar que se tendrá un controlador de adelanto de fase cuando el polo y cero se encuentren en el interior del círculo unitario en el plano  $Z$  siempre que el cero se encuentre localizado a la derecha del polo.

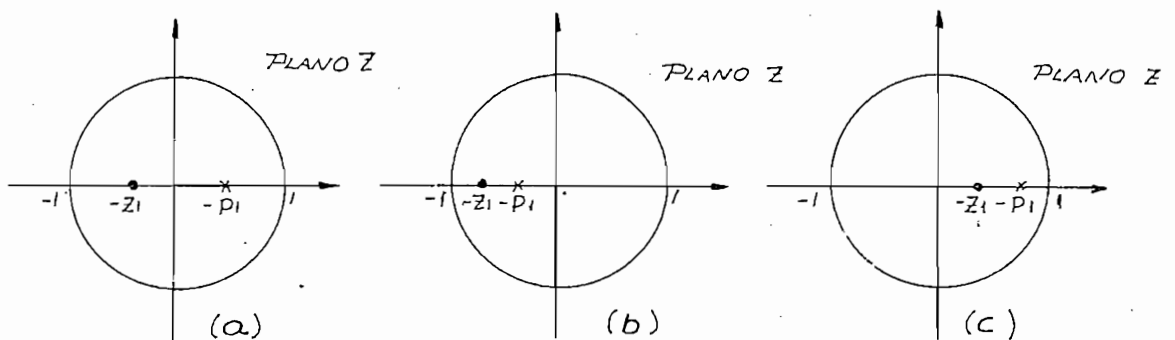


Fig. 4.3 Configuración Polo - Cero de un Controlador de Retardo de fase (Filtro pasa bajo).

Las configuraciones (a) y (b) generalmente no son tan efectivos en estabilizar un sistema como la configuración(c).

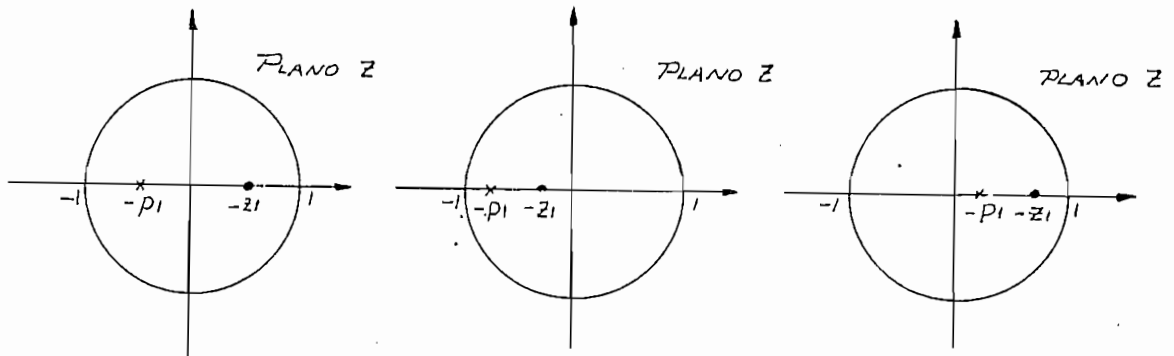


Fig. 4.4 Configuración Polo-Cero de un Controlador de Adelanto de Fase (Filtro pasa alto).

**Ejemplo 4.1** En la Fig. 4.1 se muestra el diagrama de bloques de un sistema de control discreto actuando sobre un proceso o planta continua a controlarse que puede representar una carga inercial pura y está descrita por la función de transferencia:

$$G_p(s) = K/s^2 \quad (\text{Ec. 4.4})$$

La función de transferencia en lazo abierto del sistema sin compensar es:

$$G_{ho} G_p(z) = (1 - z^{-1}) Z\{K/s^2\} \quad (\text{Ec. 4.5})$$

Aplicando el método B del comando CONVERT del programa CC que permite discretizar la expresión dada por la ecuación 4.5 se tiene:

$$G_{ho} G_p(z) = KT^2 (z+1)/[2 \cdot (z-1)^2] \quad (\text{Ec. 4.6})$$

T aparece como un factor de multiplicación en la función de transferencia de lazo abierto. Se puede aplicar el método del lugar de las raíces para estudiar el efecto de variar K y T simultáneamente. En la Fig. 4.5 se muestra el lugar de las

raíces del sistema basado en la configuración polo - cero de la función de transferencia dada por la ecuación 4.6. Del gráfico del lugar de las raíces se deduce que el sistema sin un controlador es inestable para cualquier valor de  $KT^2$ .

Puesto que de acuerdo a la expresión 4.6 se tienen dos polos en  $Z = 1$ , con un controlador de retardo de fase se tiene un polo localizado a la derecha de su cero, y puesto que es deseable colocar el cero cerca de los dos polos  $G_{ho} G_p(z)$  en  $Z = 1$ , simplemente forzaría a tener un polo hacia la derecha de  $Z = 1$  con lo que el sistema seguiría siendo inestable. Por tanto optamos por un controlador de adelanto de fase, cuya función de transferencia viene dada por la ecuación 4.1 donde  $Z_1 > P_1$ .

Para seleccionar los valores de  $P_1$  y  $Z_1$  sería deseable ubicar el cero junto a los dos polos de  $G_{ho} G_p(z)$  en  $Z = 1$ .

En la Fig. 4.5 se muestra el lugar de las raíces del sistema compensado con  $Z_1 = 0,9$  y  $P_1 = 0,5$ . El sistema de lazo cerrado es estable para  $KT^2 < 0.2$ .

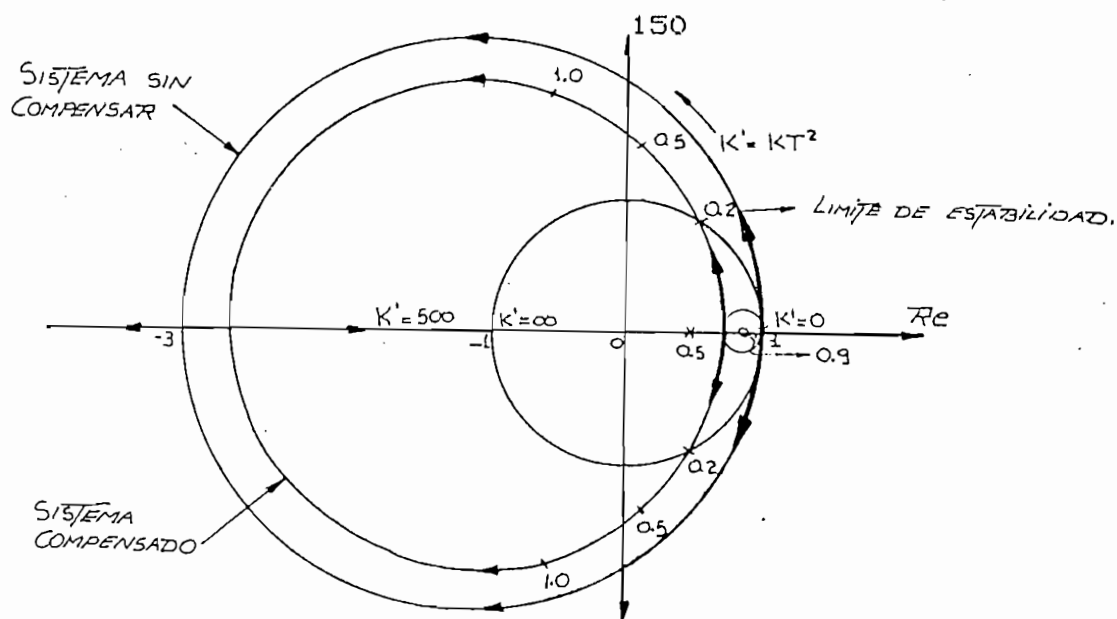
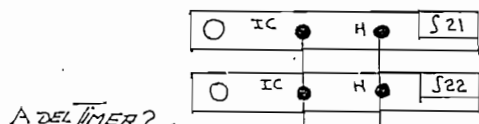
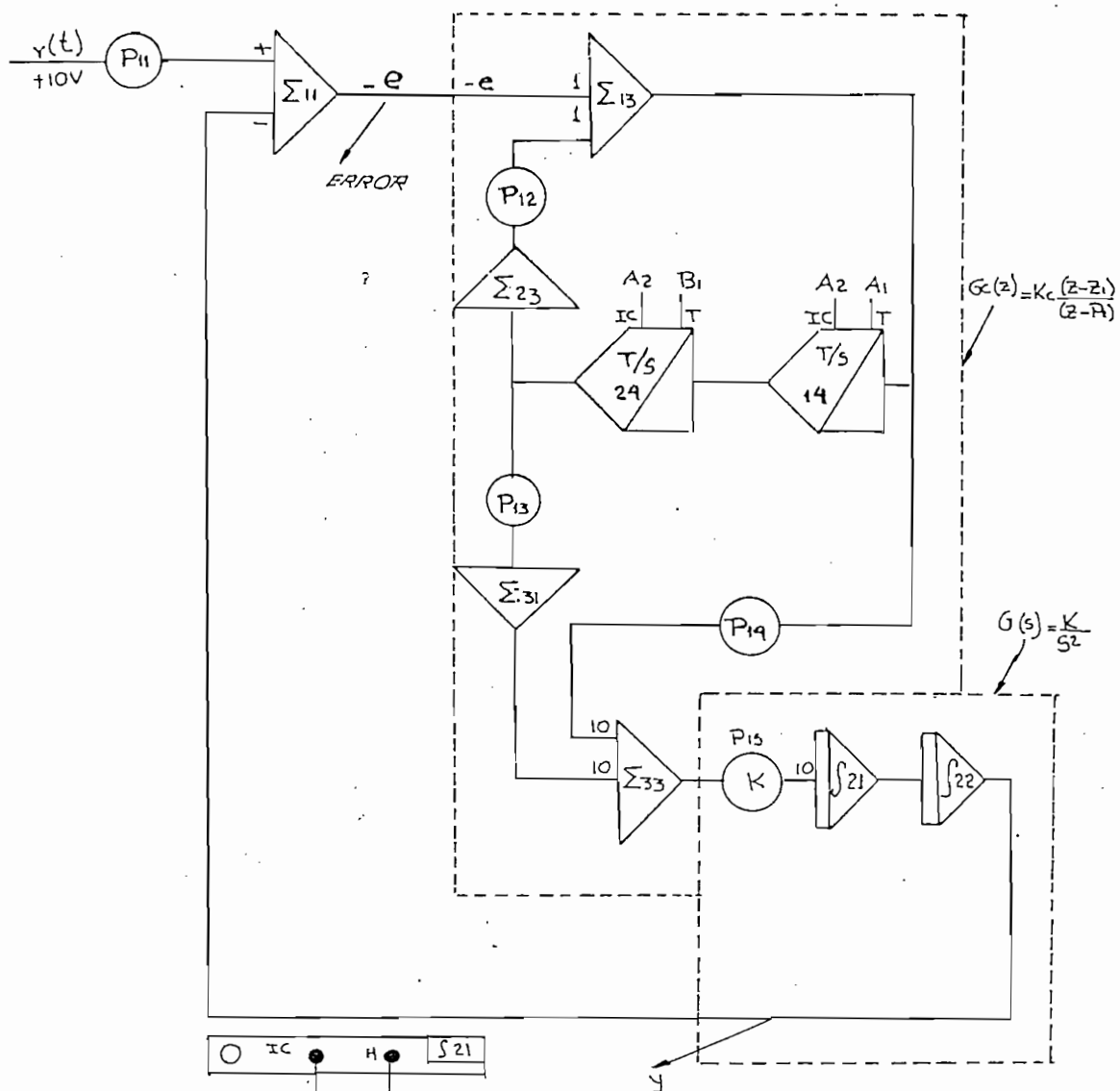


Fig. 4.5 Diagrama del lugar de las raíces del sistema sin compensar y del sistema compensado con  $G_c(z) = 5(z-0.9)/(z-0.5)$ .

Sería ideal si el cero  $Z_1$  se ubica en  $Z = 1$  de tal manera que cancele uno de los polos de  $G_{ho} G_p(z)$ , sin embargo esto correspondería a un valor de  $K_c$  infinito. En este diseño el polo  $P_1$  ha sido ubicado arbitrariamente en 0.5 si  $P_1$  se ubica bastante próximo al cero  $Z_1$ , el controlador de adelanto de fase no sería tan efectivo en mejorar la estabilidad del sistema. El circuito implementado en el computador análogo para simular el sistema de control digital de la Fig. 4.1 se muestra a continuación:

Para todas las pruebas realizadas se ha considerado un período de  $T = 0.1s$  y un valor de  $K = 5$ .





TIMER 2 =  $(43 \times 0.1 + 0.7)$  seg. = 5 seg.   
 $\left\{ \begin{array}{l} A_2 \rightarrow \text{IC de los T/S 14 y 24} \\ B_2 = 4.3\text{s} \end{array} \right.$

TIMER 1 =  $9.3 \times 0.01 \text{seg.} + 7\text{ms.}$  = 0.1 seg   
 $\left\{ \begin{array}{l} A_1 \rightarrow \text{T del T/S 14} \\ B_1 = 93\text{ms} \rightarrow \text{T del T/S 24} \end{array} \right.$

- $P_{11} = 0.100$  (función escalón de entrada.)
- $P_{12} = 0.500$  ( $P_1$ )
- $P_{13} = 0.450$  ( $K_c \cdot Z_1$ )
- $P_{14} = 0.5$  ( $K_c$ )
- $P_{15} = 0.5$  ( $K/10$ )

Fig. 4.6 Circuito implementado para simular el sistema de control digital de la Fig. 4.1

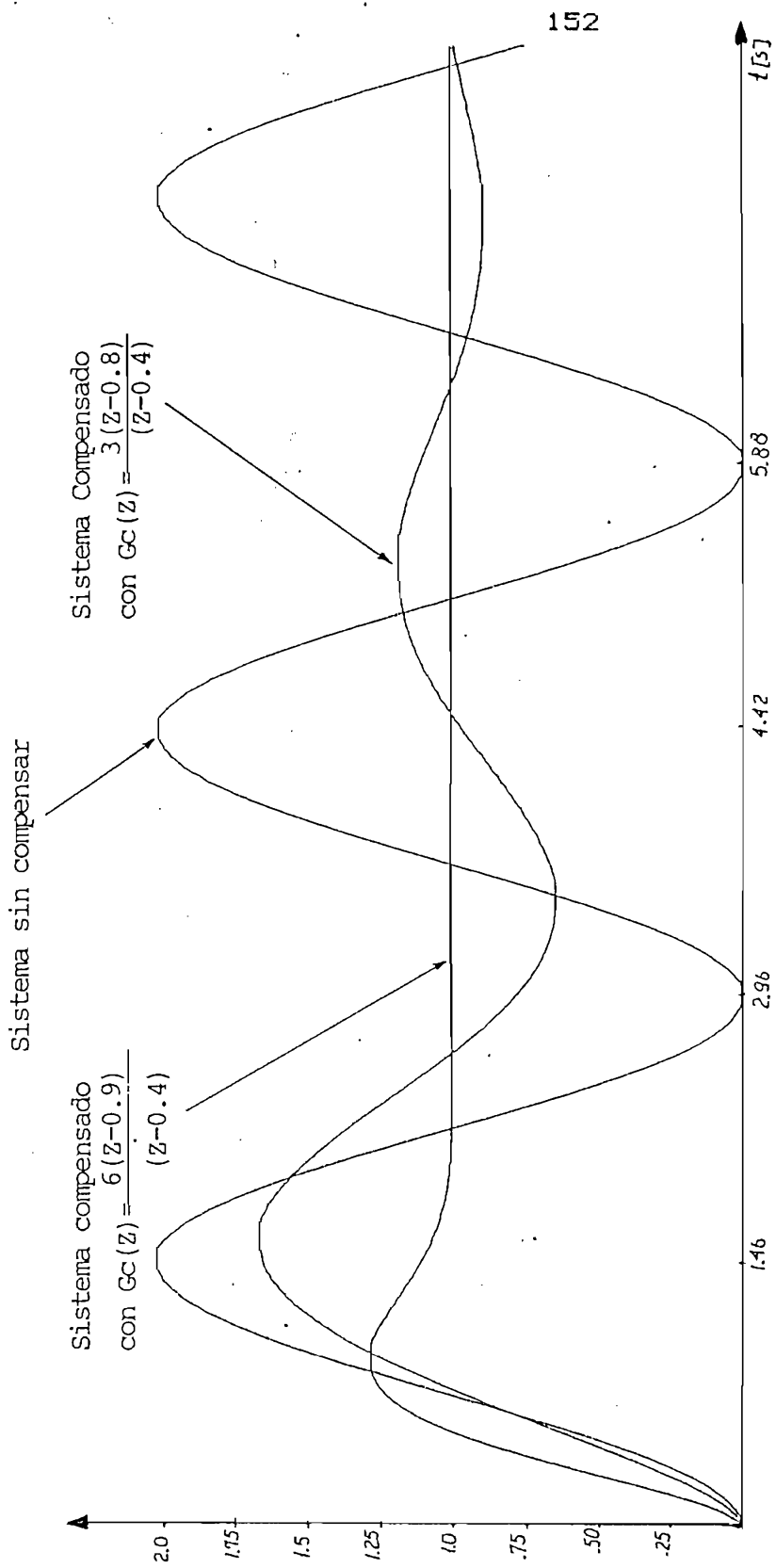


Fig. 47 Respuesta del Sistema de Control Digital de la Fig.4.1 con un controlador de adelanto de fase

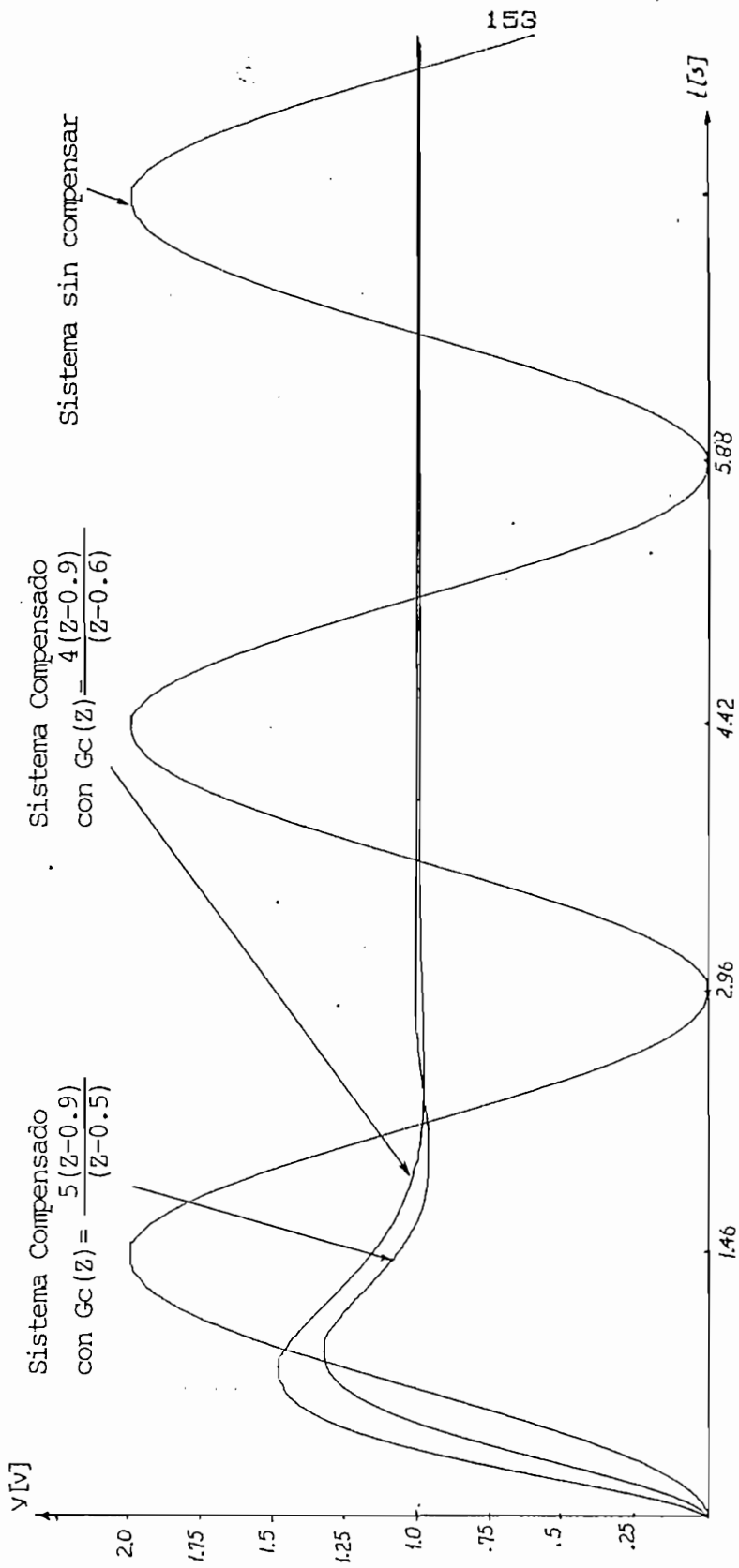
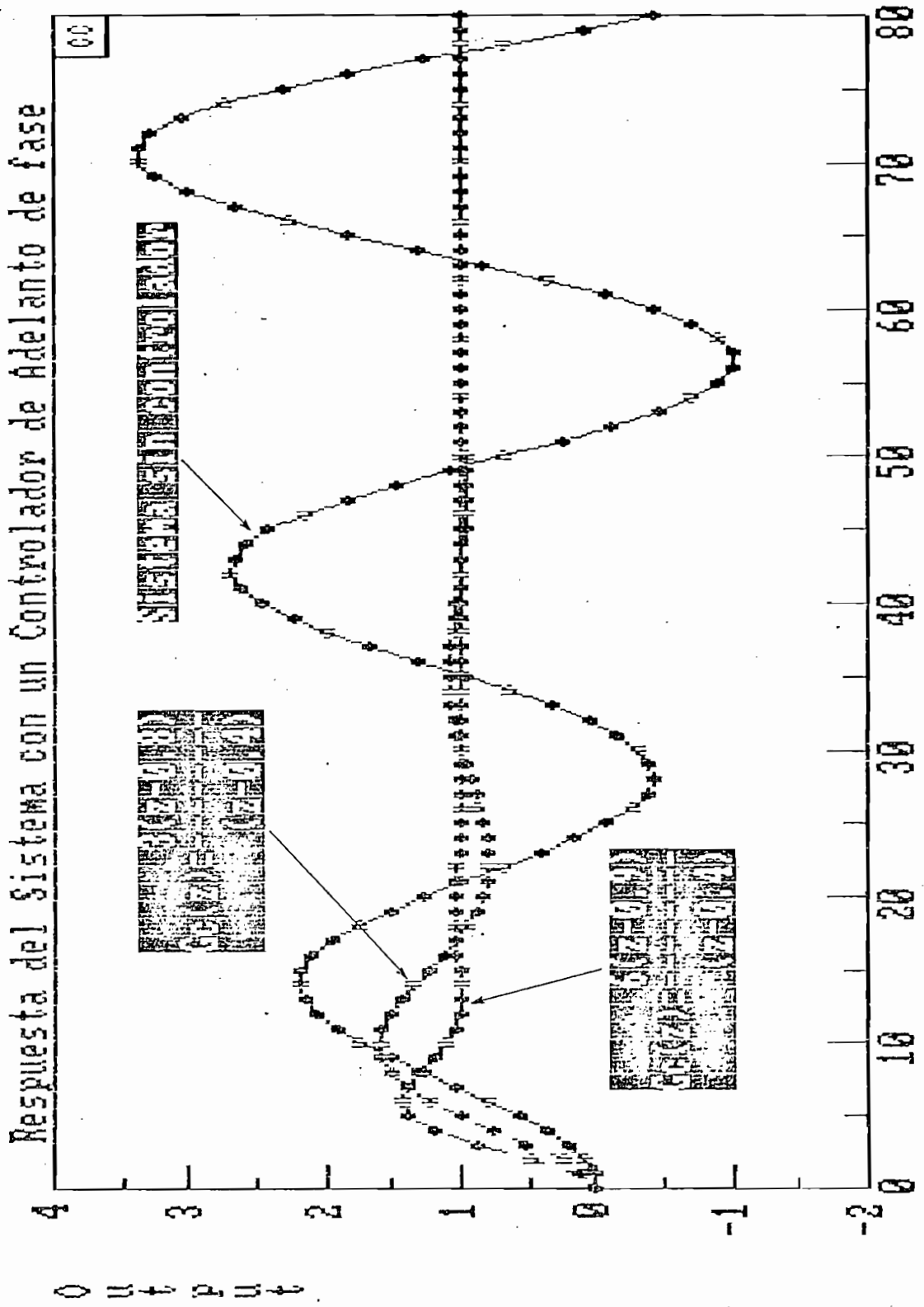


Fig.4.8 Respuesta del Sistema de Control Digital de la Fig.4.1 con un Controlador de Adelanto de fase

En las figuras 4.7 y 4.8 se ha graficado la salida y del sistema vs. tiempo para distintos valores del controlador de adelanto de fase  $G_c(z)$ . Así en la gráfica 4.7 se tiene la salida del sistema sin compensar y la salida del sistema compensado con un controlador  $G_c(z) = 6(z - 0.9)/(z - 0.4)$  y la respuesta del sistema con un controlador  $G_c(z) = 3(z - 0.8)/(z - 0.4)$  ambos para entrada paso unitario. El sistema sin compensar para una entrada paso unitario tendrá la forma  $Y(s) = 5/s \cdot (5+s^2)$ , que corresponde en el dominio del tiempo a la expresión  $Y(t) = 1 - \cos \sqrt{5} t$  cuya forma de onda se puede ver en los gráficos 4.7 y 4.8. En la Fig. 4.8 se muestra la respuesta del sistema sin compensar y del sistema con controladores  $G_c(z) = 4(z - 0.9)/(z - 0.6)$  y  $5(z - 0.9)/(z - 0.5)$ .

Para un mismo valor del cero  $Z_1 = 0.9$  conforme el polo  $P_1$  se acerca al cero, la compensación se hace menos efectiva, puesto que el sobreimpulso aumenta al igual que el tiempo de estabilización ( $P_1 = 0.6$ ). En cambio cuando  $P_1 = 0.4$  la respuesta del sistema mejora. Cuando el cero se aleja de  $Z = 1$  como para el caso de  $Z_1 = 0.8$  la acción del controlador no es muy buena pues, tanto su sobretiro como el tiempo de estabilización aumenta considerablemente comparado con los otros casos.

Todo lo anteriormente mencionado se puede corroborar con los resultados mostrados en las Figuras 4.9 y 4.10 en donde se muestran las respuestas para los mismos valores de  $Z_1$  y  $P_1$ .



n. Timent

Fig.4.9 Respuesta del Sistema Muestreado con diferentes controladores de adelanto de fase

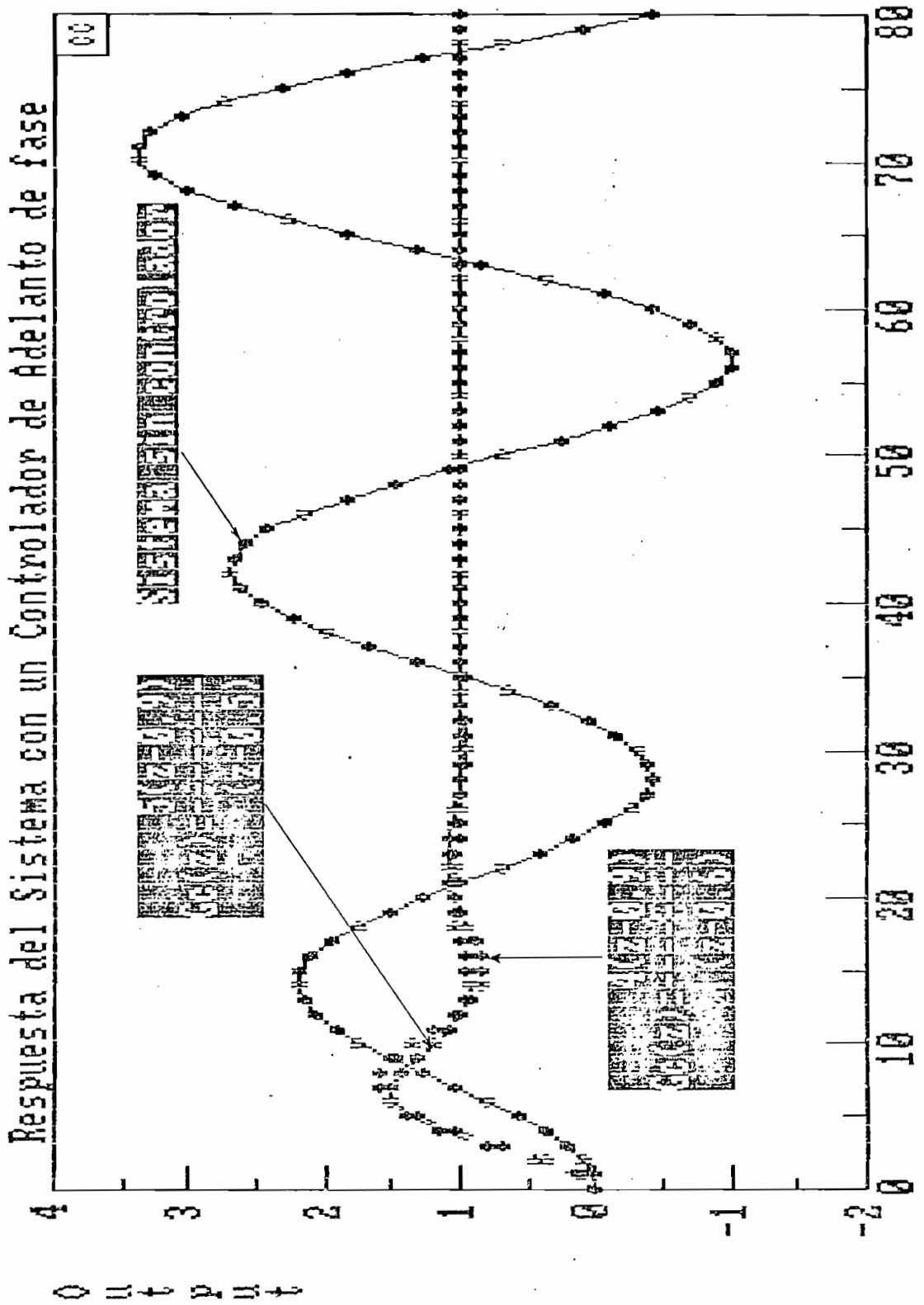
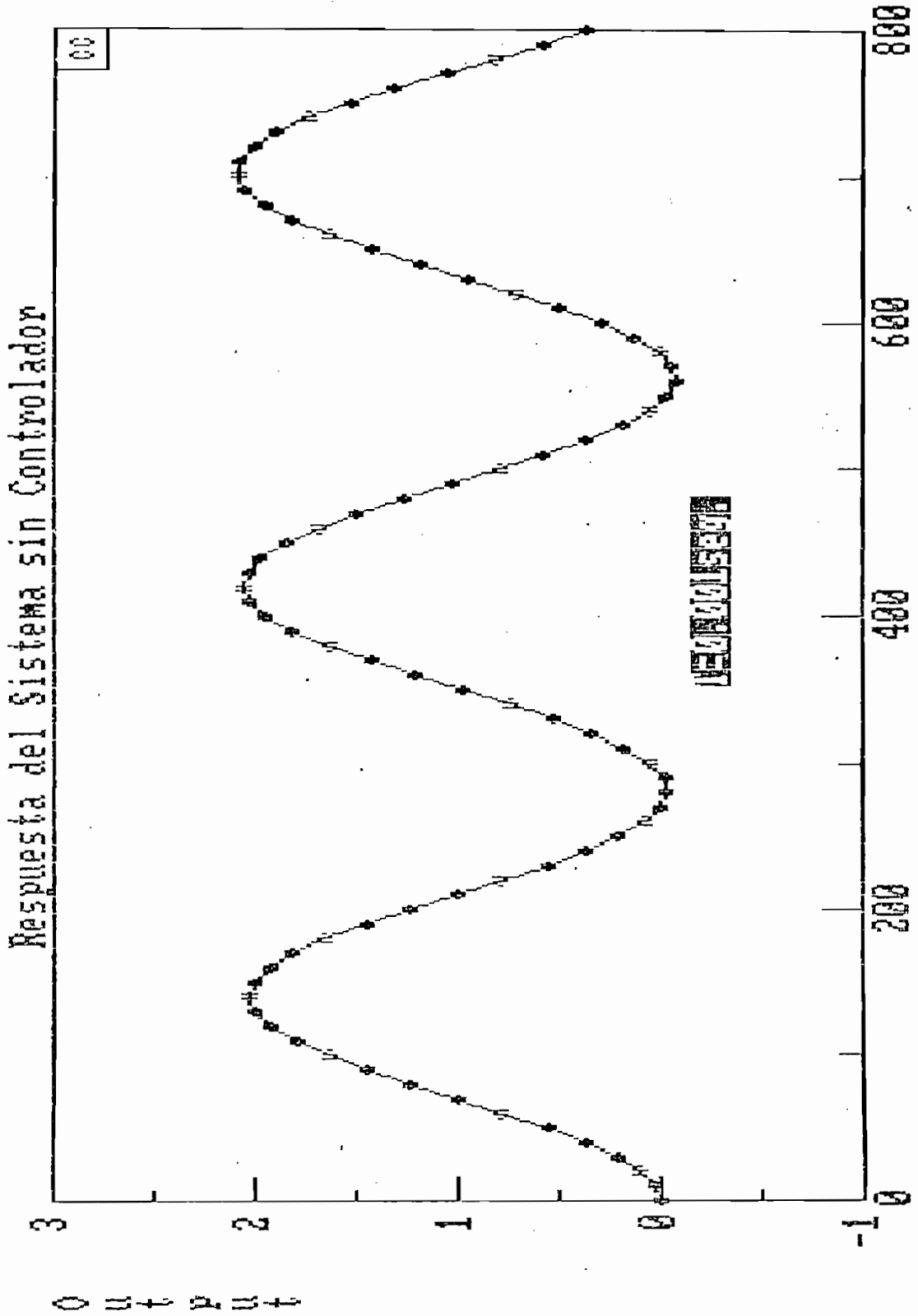


Fig.4.10 Respuesta del Sistema Muestreado con diferentes controladores de adelanto de fase



n. Time=nt

Fig. 4.11 Respuesta del sistema sin Controlador para T=0.001 seg.

de los gráficos analizados anteriormente, obtenidos al simular los controladores respectivos utilizando el programa CC. Hay que aclarar que en las figuras 4.9 y 4.10 el sistema sin controlador difiere del original debido al período de muestreo, pues en la figura 4.11 se ha graficado el sistema sin controlador pero para un período  $T$  mas pequeño obteniéndose una respuesta similar al sistema original.

#### 4.3 Controladores PID.

Este controlador es uno de los más ampliamente usados en el diseño de control de sistemas continuos. El mismo principio del controlador PID continuo puede ser aplicado al control digital. En control discreto, el control proporcional multiplica la señal de control por una constante. La función del control integral es proveer una acción que reduzca el error en estado estable, mientras que el control derivativo da una acción anticipatoria en la respuesta del sistema para reducir el sobreimpulso.

En control Discreto la acción proporcional es implementada por una constante proporcional  $K_p$ . La integral  $K_i/s$  (acción integral) puede ser aproximada por la transformada  $Z$  en la integración poligonal:

$$\frac{K_i T (Z + 1)}{2 (Z - 1)} \quad (\text{Ec. 4.7})$$

La derivada de  $e(t)$  al instante  $T$  puede ser aproximada por la siguiente ecuación:



$$\left. \frac{de(t)}{dt} \right|_{t=T} = \frac{e(KT) - e[(K-1)T]}{T} \quad (\text{Ec. 4.8})$$

Tomando la transformada  $z$  a ambos lados de la ecuación 4.8 se obtiene la función de transferencia del control derivativo:

$$G(z) = K_d(z-1)/Tz \quad (\text{Ec. 4.9})$$

En la ecuación 4.7,  $K_i$  es la constante de control integral y en la ecuación 4.9  $K_d$  es la constante de control derivativo. Así mismo las ecuaciones 4.7 y 4.9 corresponden a los métodos de discretización bilineal y rectangular hacia atrás respectivamente.

El control digital se muestra en diagramas de bloques en la siguiente figura:

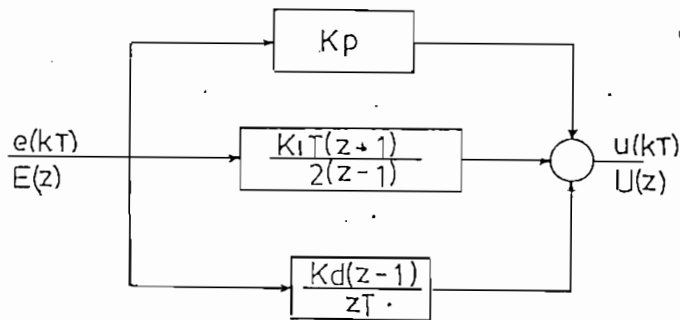


Fig. 4.12 Controlador Digital PID en diagrama de bloques.

El diseño del controlador PID consiste esencialmente en encontrar los valores de  $K_p$ ,  $K_i$ , y  $K_d$  para lo cual existen diversos métodos convencionales.

Usaremos el siguiente ejemplo para ilustrar el efecto y las propiedades del controlador PID.

Ejemplo 4.2 En la Fig. 4.1 que muestra el diagrama de bloques de un sistema de control discreto de una planta o proceso a controlarse que está representado por la función de transferencia:

$$G_p(s) = \frac{10}{(s+1)(s+2)} \quad (\text{Ec. 4.10})$$

La función de transferencia en lazo abierto del sistema sin compensar es:

$$G_{ho} G_p(z) = (1 - z^{-1}) Z \left\{ \frac{10}{s(s+1)(s+2)} \right\} \quad (\text{Ec. 4.11})$$

Para un período  $T = 0.1$  s y aplicando el método 8 de discretización del comando CONVERT del programa CC se obtiene:

$$G_{ho} G_p(z) = \frac{0.0453(z+0.904)}{(z-0.905)(z-0.819)} \quad (\text{Ec. 4.12})$$

Usando el comando BUILD del mismo programa CC, se obtiene la función de transferencia del sistema en lazo cerrado:

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{0.0453(z+0.904)}{z^2 - 1.679z + 0.782} \quad (\text{Ec. 4.13})$$

Las raíces de la ecuación característica son:  $z = 0.84 + j0.278$  y  $z = 0.84 - j0.278$ , por consiguiente el sistema es estable. Sin embargo para una entrada paso el error en estado estable no es cero, esto se debe a que en la función de transferencia de lazo abierto (Ec. 4.12) no se

tiene al menos un polo en  $Z=1$ .

Para una entrada paso unitario el valor de la salida en estado estable se determina mediante la siguiente expresión:

$$\lim_{K \rightarrow \infty} C(KT) = \lim_{z=1} (1-z^{-1}) C(z) \quad (\text{Ec. 4.14})$$

$$= \lim_{z=1} \frac{0.0453 (z + 0.904)}{z^2 - 1.679z + 0.782} = 0.837 \quad (\text{Ec. 4.15})$$

Por tanto el error en estado estable del sistema para una entrada paso unitario es 0.163.

Para eliminar el error en estado estable se introduce un control integral, entonces primero aplicamos un controlador PI ( $K_d = 0$ ). La función de transferencia del sistema con el controlador PI es la siguiente:

$$G_c(z) G_h(z) G_p(z) = K_p + \frac{K_i T}{2} \frac{(z-1)}{(z-1)} \cdot \frac{0.0453(z+0.904)}{(z-0.905)(z-0.819)}$$

Escribiendo de otra forma la expresión anterior se tiene:

$$G_c(z) G_h(z) G_p(z) = \frac{(2K_p + K_i T) \frac{z + \frac{K_i T - 2K_p}{K_i T + 2K_p}}{2(z-1)} \cdot 0.0453(z+0.904)}{(z-0.905)(z-0.819)} \quad (\text{Ec. 4.16})$$

Se diseña el controlador PI de tal manera que su cero cancele uno de los polos del proceso dinámico. Por tanto se hace que:

$$\frac{K_i T - 2K_p}{K_i T + 2K_p} = -0.905$$

$$\text{Por consiguiente: } K_p / K_i = 1.00263 \quad (\text{Ec. 4.17})$$

La ecuación característica del sistema queda:

$$1 + \frac{(2K_p + K_i T)}{2(z-1)} \cdot \frac{0.0453 (z+0.904)}{(z - 0.819)} = 0 \quad (\text{Ec. 4.18})$$

Reemplazando la Ec. 4.17 en la Ec. 4.18 obtenemos:

$$z^2 + z(0.0475 K_p - 1.819) + (0.819 + 0.043 K_p) = 0 \quad (\text{Ec. 4.19})$$

Las raíces de esta ecuación que representan los polos del sistema deben estar dentro del círculo unitario para que el sistema sea estable, es decir:

$$(0.819 + 0.043K_p) < 1 \quad (K_p > 0)$$

$$\text{y} \quad |0.04K_p - 1.819| < 2$$

Puesto que  $K_p$  debe ser positivo, entonces el rango de  $K_p$  para que el sistema sea estable es:

$$K_p < 4.2 \quad (\text{Ec. 4.20})$$

Para un valor de  $K_p = 1$  y  $K_i = 0.997$ , la función de transferencia del controlador digital es:

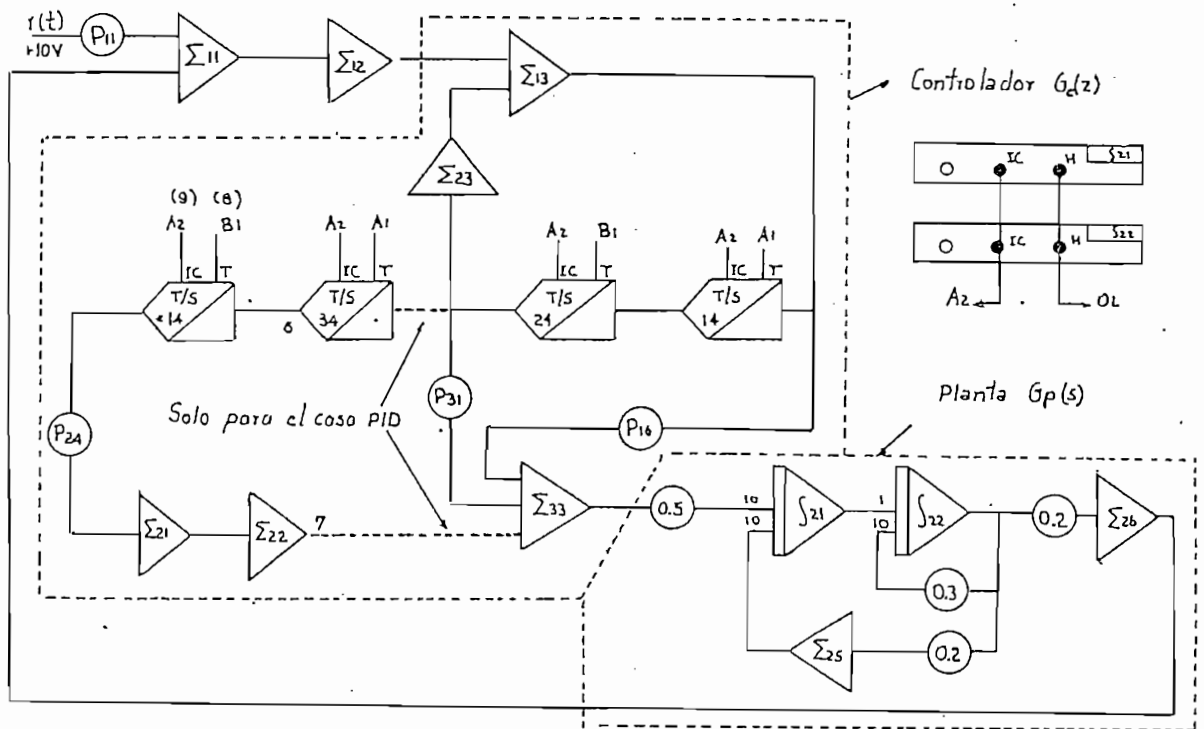
$$D(z) = 1.0499 \cdot (z - 0.905) / (z - 1) \quad (\text{Ec. 4.21})$$

En la Fig. 4.13 se muestra el circuito implementado en el computador análogo/híbrido, el mismo que nos permite simular el sistema de control discreto de una planta descrita por la Ec. 4.10 y cuyas acciones de control tanto PI como PID se las obtiene simplemente variando el valor de los respectivos potenciómetros cuyos valores se muestran en la tabla 4.2.

Las señales con las entradas (\*) indican que se debe conectar la salida del potenciómetro a una entrada  $\times 10$  del siguiente amplificador operacional.

Controlador	Parámetro	P <sub>16</sub>	P <sub>24</sub>	P <sub>31</sub>
PI	K <sub>p</sub> =1 K <sub>r</sub> = 0.997	0.105 *	---	0.95
PI	K <sub>p</sub> =0.5 K <sub>r</sub> = 0.498	0.524	---	0.475
PI	K <sub>p</sub> =0.25 K <sub>r</sub> = 0.249	0.262	---	0.237
PID	K <sub>p</sub> =1.45 K <sub>r</sub> =1 K <sub>d</sub> =0.43	0.585 *	0.43 *	---

Tabla 4.2 Valores de los potenciómetros



$$\text{TIMER 2} = (43 \times 0.1 + 0.7) \text{ s} = 5 \text{ seg.}$$

$$\left. \begin{array}{l} A_2 \rightarrow \text{IC de los T/S 14, 24, 34 y } *14 \\ B_2 = 4.3 \text{ s} \end{array} \right\}$$

$$\text{TIMER 1} = 9.3 \times 0.01 \text{ s} + 7 \text{ ms} = 0.1 \text{ seg.}$$

$$\left. \begin{array}{l} A_1 \rightarrow \text{T de los T/S 14 y 34} \\ B_1 = 93 \text{ ms} \rightarrow \text{T de los T/S 24 y } *14 \end{array} \right\}$$

Fig. 4.12 Circuito implementado para simular el sistema de control digital con sus diferentes controladores.

Los puntos 6,7,8 y 9 representan los trunks a través de los cuales se han interconectado las señales de los dos computadores.

La parte del circuito representado por la línea punteada solo se usará para el caso del controlador PID.

La salida  $Y$  ha sido obtenida para una entrada paso unitario. En las gráficas se muestra la respuesta del sistema sin compensar y la respuesta del sistema compensado con su respectivo controlador.

En la Fig. 4.14 se muestra la respuesta del sistema con el controlador PI simulado, para dos valores distintos de  $K_p$  y  $K_i$  para una entrada paso igual a 1V.

En la Fig. 4.15 se muestra la respuesta del sistema con un controlador PI y con uno PID a una entrada paso unitaria.

La acción integral nos permite obtener un error en estado estable igual a cero como se ve en todos los casos, a medida que se aumenta el valor de  $K_p$  (acción proporcional) en un controlador tipo P-I se aumenta el sobreimpulso y viceversa, pero a la vez que disminuye el sobreimpulso aumenta el tiempo de estabilización como se puede ver para los casos en que  $K_p$  varía entre 0.25, 0.5 y 1.

Para eliminar el error de estado estable debido a una entrada paso y simultáneamente obtener una respuesta

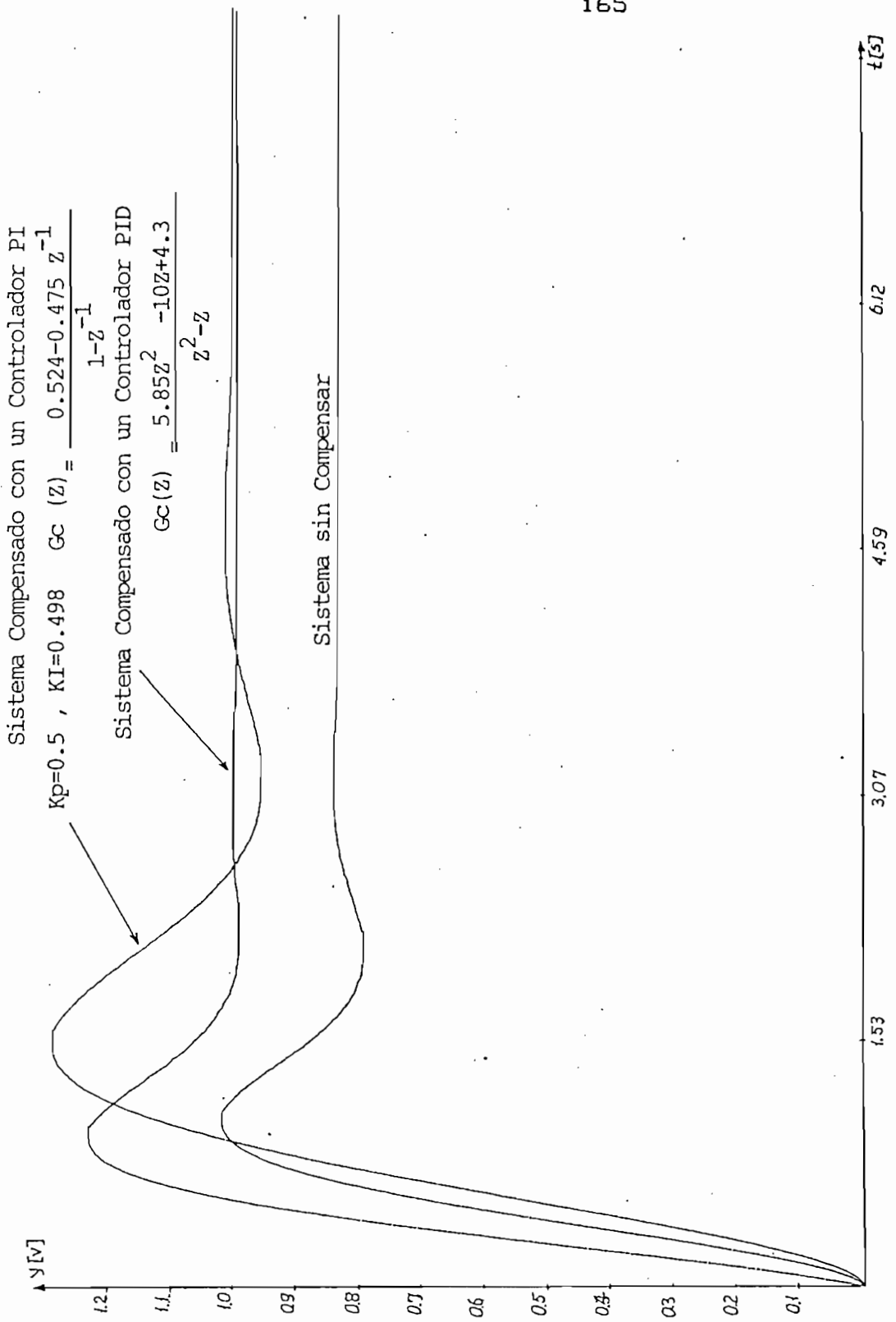


Fig.4.15 Respuesta del Sistema de Control Digital con un controlador PI y PID

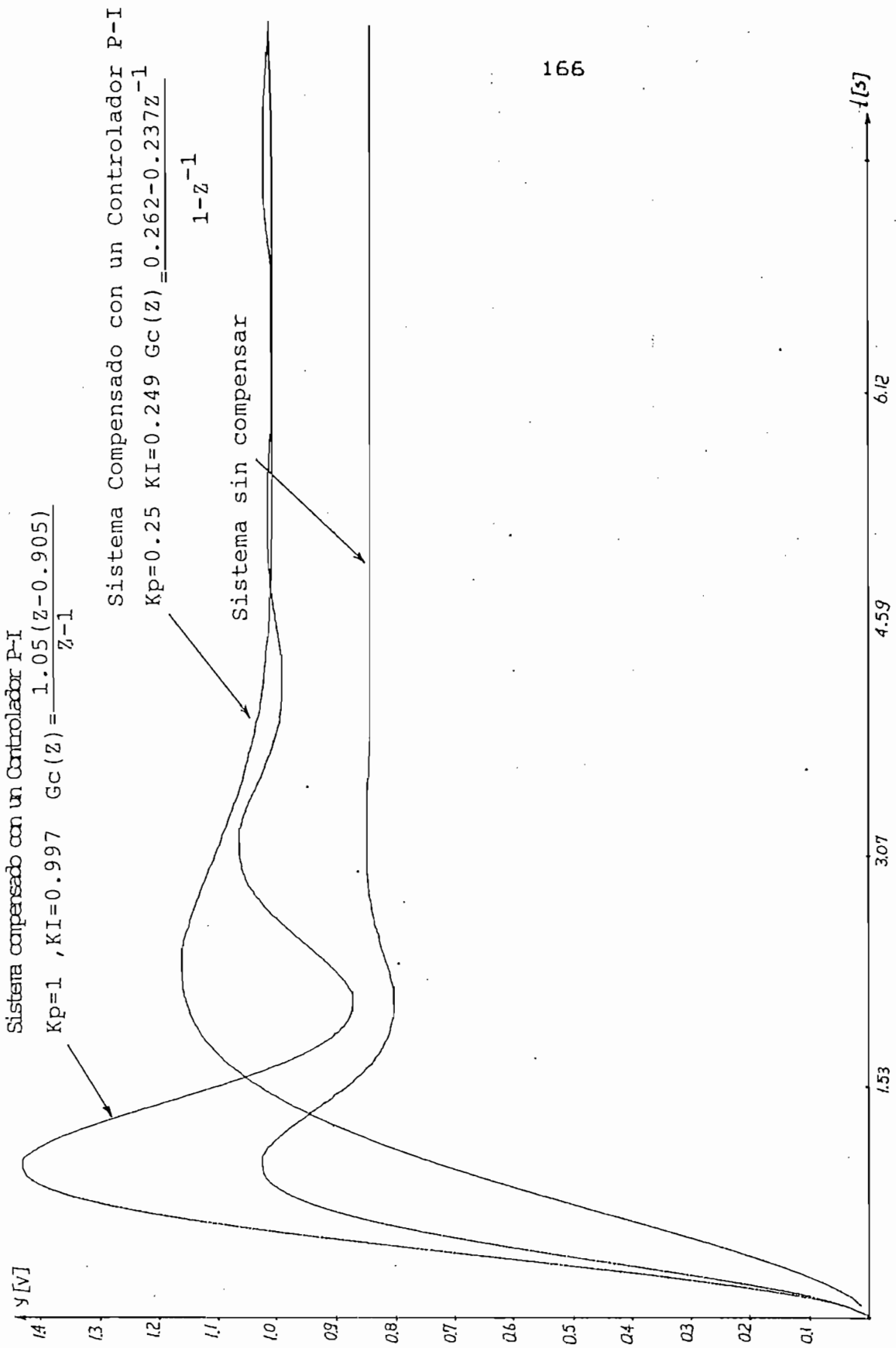


Fig.4.14 Respuesta del Sistema de control Digital con un controlador PI



transitoria aceptable se debe usar un controlador PID. La función de transferencia del controlador digital PID se describe a continuación:

$$G_c(z) = K_p + \frac{K_i T}{2} \frac{(z+1)}{(z-1)} + \frac{K_d(z-1)}{Tz}$$

$$G_c(z) = \frac{(K_i T^2 + 2K_d + 2K_p T) Z^2 + (K_p T^2 - 2K_p T - 4K_d) Z + 2K_d}{2Tz(z-1)} \quad (\text{Ec. 4.22})$$

La función de transferencia de lazo abierto del sistema compensado es:

$$G_c(z)G_hoG_p(z) = \frac{(K_i T^2 + 2K_d + 2K_p T) \cdot Z^2 + (K_p T^2 - 2K_p T - 4K_d) \cdot Z + 2K_d}{2Tz(z-1)}$$

$$= \frac{0.0453(z+0.904)}{(z-0.905)(z-0.819)} \quad (\text{Ec. 4.23})$$

Se quiere que la constante de error de velocidad  $K_v$  sea igual a 5, además los dos ceros del controlador PID deben cancelar los dos polos de la planta controlada, es decir  $z_1 = 0.905$  y  $z_2 = 0.819$ . Estas especificaciones determinan tres ecuaciones linealmente independientes, cuyas soluciones nos darán el valor de los parámetros del controlador PID, así:

$$K_v = 1/T \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) G_c(z) G_ho G_p(z) = 5K_i \quad (\text{Ec. 4.24})$$

$$z^2 + \frac{K_p T^2 - 2K_p T - 4K_d}{2K_p T + K_i T^2 + 2K_d} \cdot z + \frac{2K_d}{2K_p T + K_i T^2 + 2K_d} = (z-0.905)(z-0.819)$$

$$(\text{Ec. 4.25})$$

Resolviendo las Ec. 4.24 y 4.25, (esta última ecuación nos lleva a su vez a obtener dos ecuaciones independientes), obtenemos:

$$K_i = 1 \quad K_p = 1.45 \quad \text{y} \quad K_d = 0.43$$

Como se puede ver en la Fig. 4.15 la adición del control derivativo no solamente que disminuye el sobreimpulso, sino que también reduce el tiempo de subida.

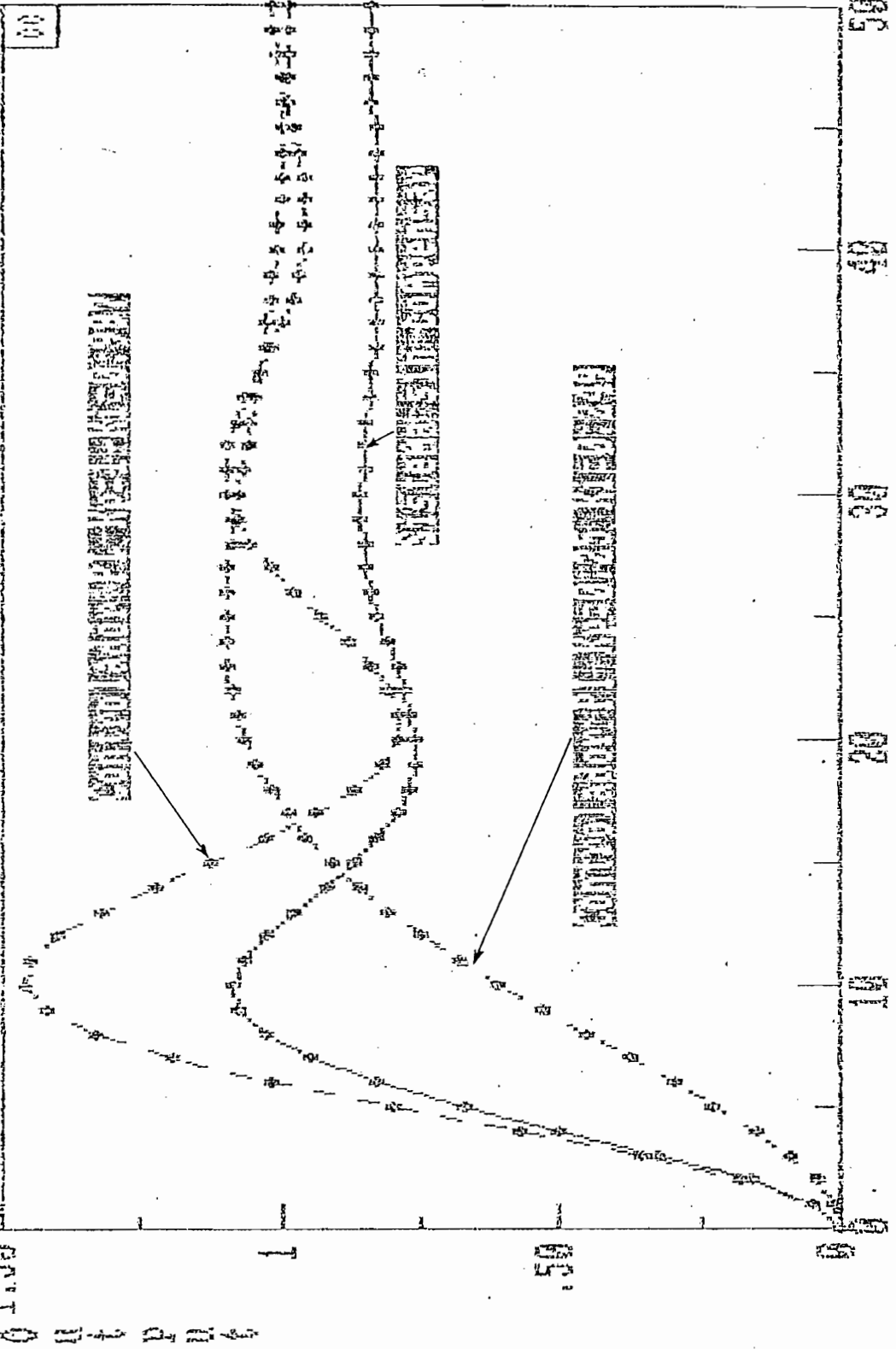
La respuesta óptima del sistema se tiene con un controlador tipo PID, pues con este controlador se logran tener un mínimo sobreimpulso, un menor tiempo de estabilización y una acción anticipatoria a una entrada paso. A pesar de tener pequeños errores en la salida del grafizador, estos resultados son bastantes satisfactorios con los resultados teóricos obtenidos mediante el programa C.C. y que se muestran en las Fig. 4.16 y 4.17.

#### 4.4 Controladores discretos de una planta real.

Como una aplicación práctica de este capítulo referente a controladores discretos se plantea el control digital de velocidad y posición del servomecanismo motomatic MCSL - 1000.

El análisis teórico de la función de transferencia del sistema, respuesta del sistema sin compensar, así como el diseño de los controladores digitales usados tanto para el control de velocidad como para el control de posición han sido explicados ampliamente en otras tesis, por tanto el control digital simulado de posición y velocidad se realizará

Respuesta del sistema continuo simulado con controladores PI discretos



n. TIME-INT

Fig 4.16 Respuesta del sistema de control digital a una función paso unitario

# Respuesta del sistema continuo simulado con Controladores P, I y PID discretos

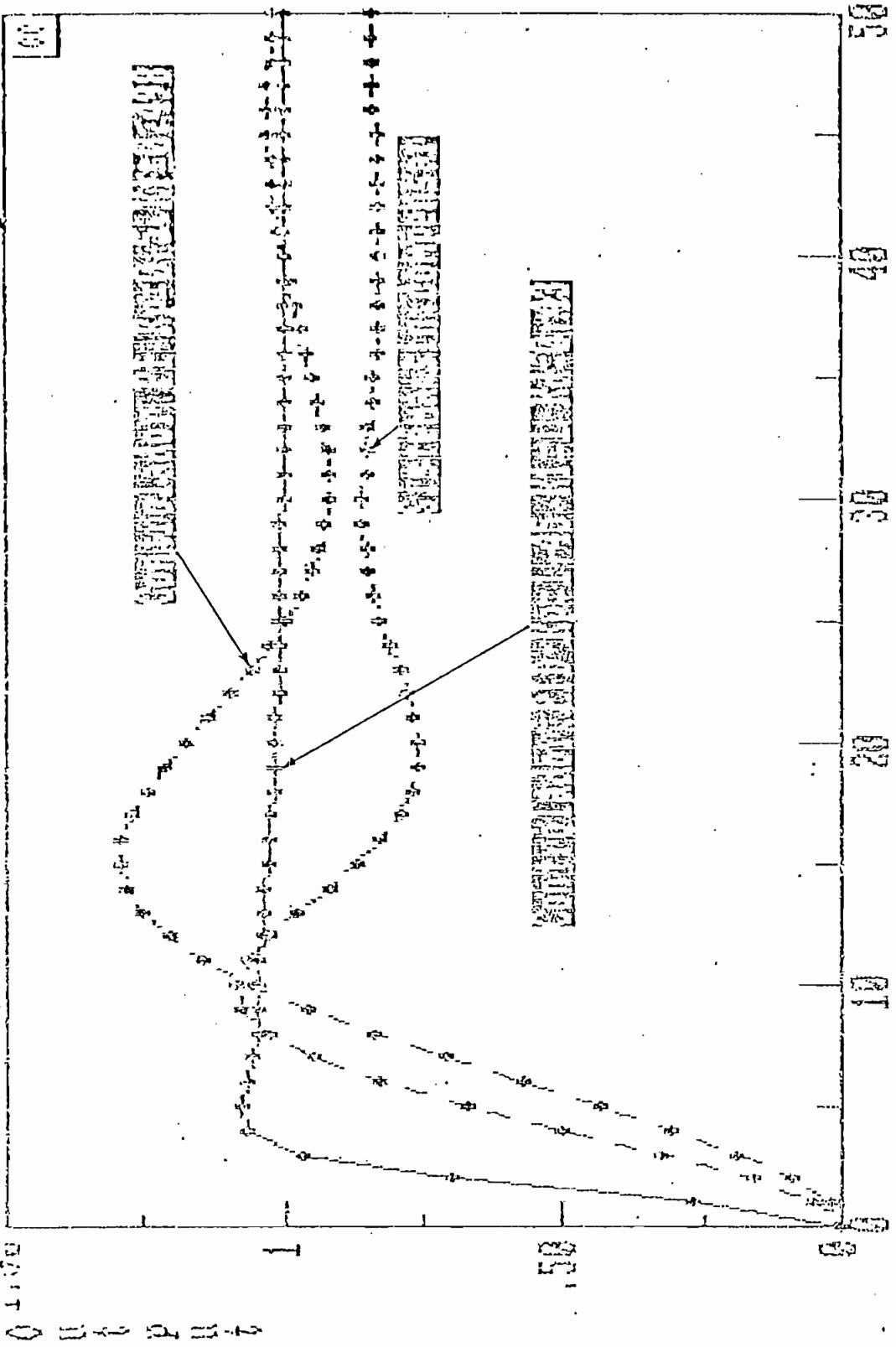


Fig.4.17 Respuesta del Sistema de Control Digital a una función paso unitario

a partir de funciones de transferencia y diseño preestablecidos. Un diagrama de bloques detallado del servomecanismo MCSL-100 se muestra en la Fig. 4.18.

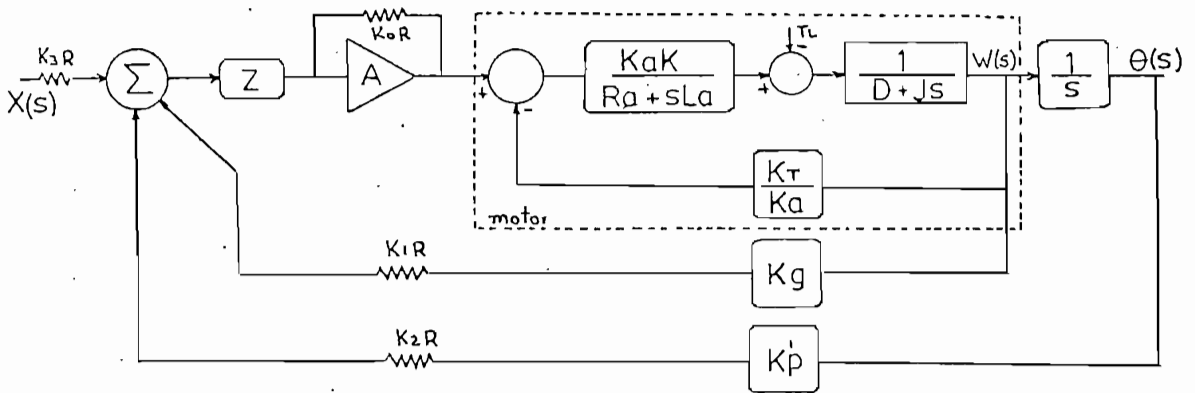


Fig. 4.18 Diagrama detallado del MCSL-100.

Cada una de las constantes con sus valores se describen en la tesis del Ing. Bastidas que trata extensamente sobre el MOTOMATIC [2].

Reemplazando los valores respectivos de los parámetros y haciendo:  $K_0 = 1$ ,  $K_1 = 1$ ,  $K_2 = 1$ ,  $K_3 = 1$ ,  $Z = 0$ , se obtiene la función de transferencia de lazo abierto:

$$G(s) = \frac{K}{(s+1319,19)(s+14,56)}, \text{ para velocidad (Ec. 4.26)}$$

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1319,19)(s+14,56)}, \text{ para posición (Ec. 4.27)}$$

En la mencionada tesis se aplica el criterio de polos dominantes para aproximar la función de transferencia de velocidad de motor por la siguiente función de primer orden:

$$G(s) = 228.46/(s + 3.45) \quad (\text{Ec. 4.28})$$

Las funciones de transferencia de lazo cerrado serán:

$$\frac{W(s)}{X(s)} = \frac{228.46}{s+37.26}, \text{ para velocidad} \quad (\text{Ec. 4.29})$$

$$\frac{\theta(s)}{X(s)} = \frac{228.46}{s^2+3.4595s+171.12}, \text{ para posición} \quad (\text{Ec. 4.30})$$

Las características de funcionamiento del sistema MCSL-100 son las siguientes [3]:

Para control de velocidad:

Tiempo de subida	$t_r = 0.071s$
Tiempo de estabilización	$t_s = t_r$
Sobretiro	$= 0$
Error de posición	$= 9.26\%$

Para control de posición sin tacómetro:

Tiempo de subida	$t_r = 0.15s$
Tiempo de estabilización	$t_s = 1.65s$
Sobretiro	$= 41.79\%$

#### 4.4.1 Control de Velocidad.

De las características de funcionamiento para velocidad si bien el sistema es estable, existe un error de estado estable del 9.3%. Para eliminar este error de estado estable, se usa un controlador P-I.

El período de muestreo escogido para este problema, tiene que ver con el tiempo mínimo requerido para la implementación del programa del micro procesador Z-80 para el control lineal del motomatic realizada por Isabel Soto Aymar como tesis de grado [4] a la vez, con el escogitamiento de

éste período se podrá hacer posteriormente un análisis comparativo.

Siguiendo el procedimiento de diseño de un controlador PI, es decir que el polo del sistema compensado esté dentro del círculo unitario y que el cero del controlador anule un polo del sistema sin compensar, se ha llegado a determinar que para que el sistema sea estable se deben cumplir las siguientes condiciones [5]:

$$K_i = 3.442 K_p \quad \text{y} \quad (\text{Ec. 4.31})$$

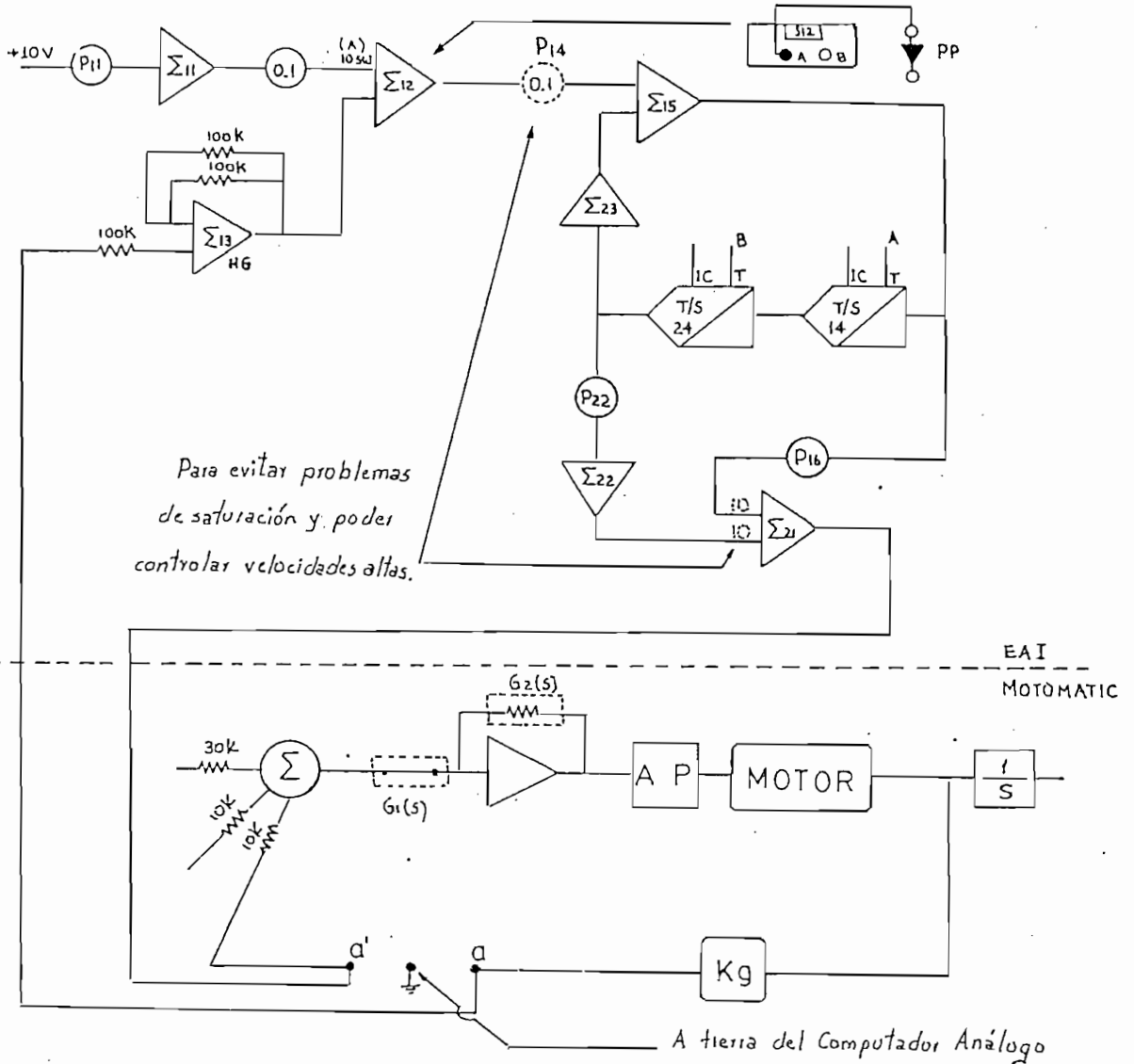
$$K_p < 0.8968 \quad (\text{Ec. 4.32})$$

Puesto que el sobretiro del sistema depende del valor de  $K_p$  se ha llegado a determinar que para tener un sobretiro del 0%  $K_p$ , deberá ser menor que 0.45.

No se ha creído conveniente el análisis de éste sistema con el controlador PID ya que el controlador P-I cumple con las condiciones deseadas.

En la Fig. 4.19, se muestra el circuito implementado en el computador análogo para el control de velocidad del motomático. Una breve descripción del funcionamiento se da a continuación:

Debido al voltaje de operación del EAI ( $\pm 10V$ ), y el voltaje de salida del tacómetro se puede tener un control de velocidad entre 0 y 600 rpm sin tener problemas de saturación, en cambio para ampliar el rango de control entre 0 y 1260 rpm y a la vez evitar saturación en los elementos usados en la simulación, utilizaremos el amplificador de alta ganancia ( $\Sigma/HG 13$ ) con ganancia igual a 0.5.



$$F_{16} = (2K_p + K_I T) / 2 = 0.222 \quad F_{22} = (K_I T - 2K_p) / 2 = 0.177$$

$F_{11}$  = Valor de la función paso de entrada.

$$T = 5.9 \times 0.01 + 7 \text{ ms}$$

$$T = 66 \text{ ms}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A = 7 \text{ ms} \rightarrow T \text{ del T/S } 24 \\ B = 59 \text{ ms} \rightarrow T \text{ del T/S } 14 \end{array} \right.$$

Fig. 4.19 Circuito implementado en el computador análogo para un control digital PI de velocidad del motomatic.



En el computador análogo se dispone de tres amplificadores de alta ganancia  $\Sigma/HS$  13,23,33. La función de alta ganancia consiste en no utilizar la realimentación interna de resistencia en el Amplificador Operacional (Fig. 4.20a). Sus aplicaciones son múltiples, tales como: Funciones no lineales o inversoras y sumadoras de ganancia, especiales, cuya aplicación hemos usado en este caso como se muestra en la Fig. 4.20b.

De ésta manera a la entrada del  $\Sigma 13$  se pueden tener voltajes mayores a 10v en tanto que en su salida se tendrá la mitad del valor de entrada.

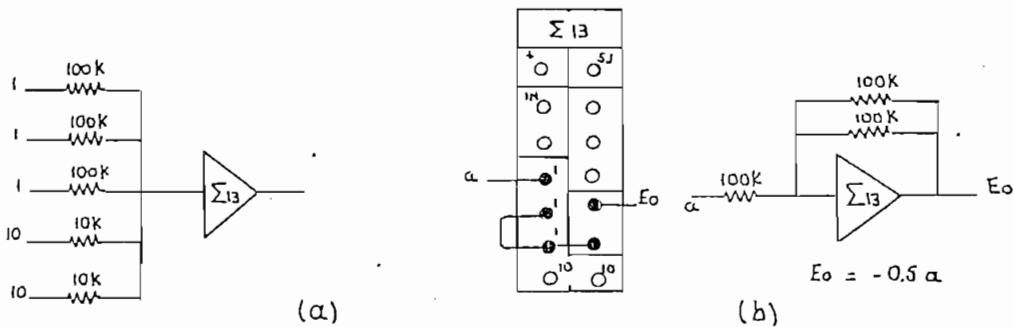


Fig. 4.20 Amplificador de alta ganancia.

Así mismo para compensar éste divisor de tensión de ganancia igual a 0.5 se coloca en la posición superior del amplificador operacional  $G_2(s)$  (del Motomatic) una resistencia de precisión que tenga un valor de 20K ( $K_0=2$ ) y  $G_1(s)=0$  de la manera mostrada en la Fig. 4.18, de ésta forma con la resistencia  $K_1R=10K$  interna del Motomatic se logra obtener un amplificador de ganancia igual a 2.

De acuerdo a esto habrá que hacer notar que el valor verdadero de la función paso de entrada ( $P_{11}$ ) de acuerdo a la

velocidad que se desee controlar deberá ser dividida por 2, por la razón antes mencionada y luego por 10 ya que se usa una referencia de entrada + 10V, es decir el valor del potenciómetro  $P_{11}$  será:

$$P_{11} = (E_g/2 \times 10)$$

A continuación se da una tabla que nos relaciona la velocidad que se desea controlar, el voltaje que nos da el tacómetro y el valor correspondiente del potenciómetro  $P_{11}$

W(rpm)	$E_g(V)$	$P_{11}$
400	6.16	0.308
500	8	0.4
900	14	0.7
1000	15	0.75
1200	18	0.9

Tabla 4.3 Relación entre valores: de velocidad, voltajes del tacómetro y del potenciómetro de entrada.

Usamos la entrada controlada de ganancia  $\times 10$  (10SW) del  $\Sigma 12$  con el control que se muestra en la Fig. 4.19 ya que de ésta manera empieza a actuar la señal de entrada justo en el instante en que también empieza a actuar el control digital ya que al presionar PF aparece un 1L que se aplica a la entrada lógica del control local del  $\Sigma 12$ , con lo que se cierra el interruptor de la entrada  $\times 10$  del  $\Sigma 12$  y permite que pase la señal analógica; caso contrario estaría pasando permanentemente la señal de entrada por la parte del controlador a través del  $\Sigma 15$ , P16 y  $\Sigma 21$ , al sistema del motomatic con lo que no se podría hacer un control efectivo de velocidad.

Es importante señalar que se debe conectar la señal de tierra del Motomatic con la tierra del computador analoga para tener una referencia del voltaje definida. ebido a que a partir de velocidades aproximadas a 800 rpm se empieza a tener problemas de saturación en los elementos del controlador digital simulado se deberá escalar en magnitud en ésta parte del circuito para lo cual se colocará un potenciómetro F14 = 0.1 a la salida del  $\Sigma 12$  (+ error) y a la vez se utilizarán las entradas de ganancia 10 del  $\Sigma 21$  con lo que se logra controlar velocidades de hasta 1.260 rpm sin tener problemas de saturación ni de otra índole.

Luego de que se han realizado las conexiones del interface entre el Motomatic y el EAI , la selección de los elementos, valor de los potenciómetros del controlador simulado así como la selección correcta del período de muestreo se procede en primer lugar a presionar los botones CLR, IC para inicializar las partes lógicas y análogas respectivamente y luego la secuencia RUN del modo lógico y PP del modo analógico con lo que iniciará el funcionamiento del sistema con el controlador PI.

Para detener el funcionamiento se presionará CLR e IC del modo lógico y analógico.

Hay que recordar que el interruptor del motomatic que permite alimentar al motor del Motomatic con un voltaje continuo (función paso) en ningún momento deberá conectarse.

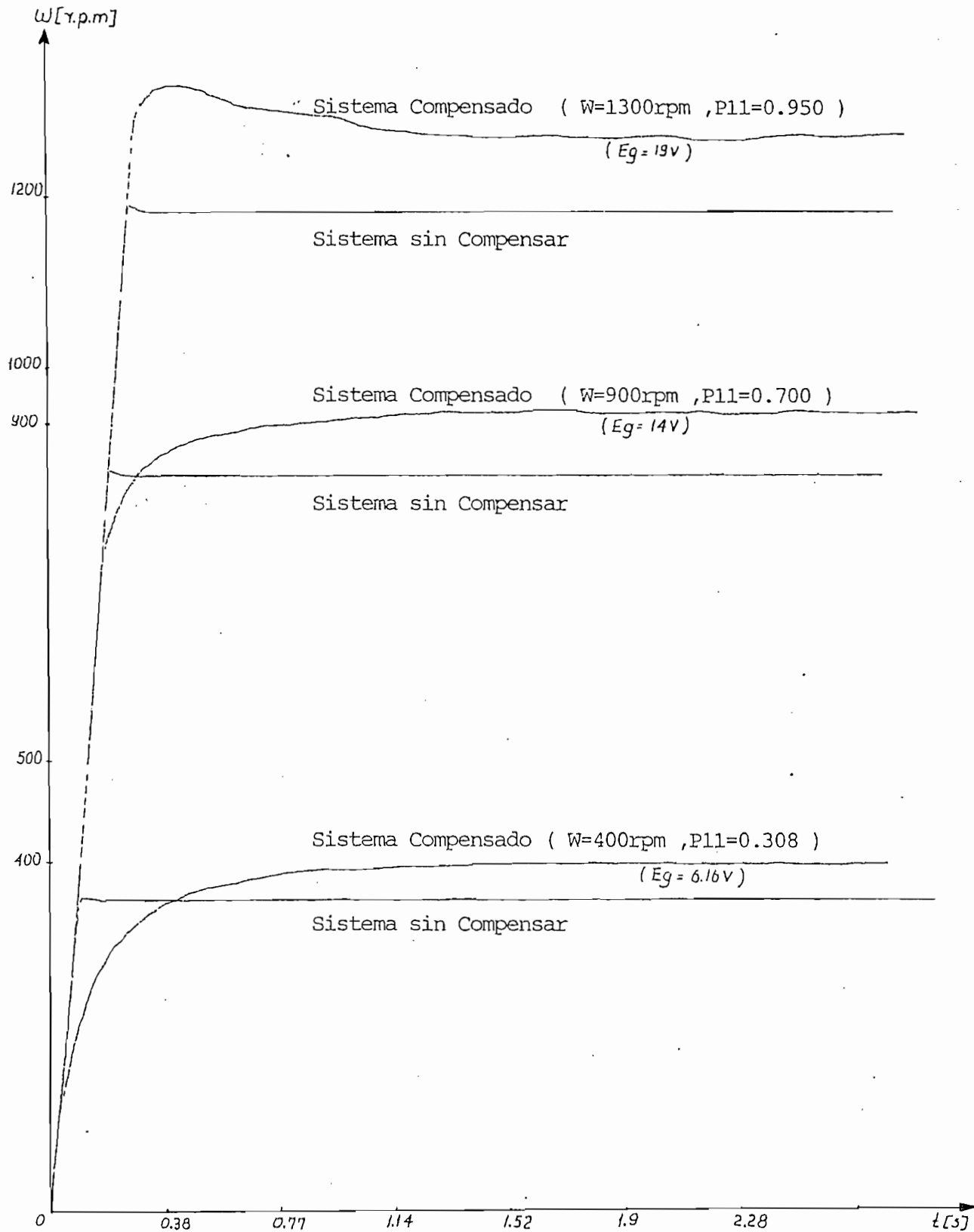


Fig 4.21 Respuesta del Sistema Digital a una función escalón de distintos valores con un Controlador PI  
 $K_p=0.2$   $K_I=0.688$   $T=0.066$

En la Fig. 4.21 se muestra la respuesta de velocidad del sistema sin compensar y del sistema compensado con un controlador PI para distintos valores de entrada.

De la figura 4.21 se puede concluir que para el caso de una entrada  $P_{11}=0.95$  ( $E_g=19V$  y  $W \approx 1260$  rpm) existe un pequeño sobreimpulso, pues a partir de esos rangos de control empiezan a existir problemas de saturación.

Fuesto que nos interesa obtener el error discretizado para usarlo como señal de control de la planta en vez de usar el error continuo, para observar como varía el sistema para diferentes períodos de muestreo en la figura 4.19 se ha hecho la siguiente variante en la parte de la señal del error la misma que se muestra en la figura 4.22

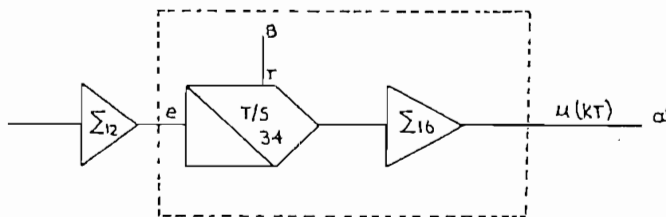


Fig. 4.22 Variante al circuito de la Figura 4.19

Mediante esta variante se puede obtener la respuesta del sistema en lazo cerrado sin controlador para distintos períodos de muestreo como se muestra en la figura 4.23; de ésta figura se puede concluir que para un período  $T=0.066s$  el

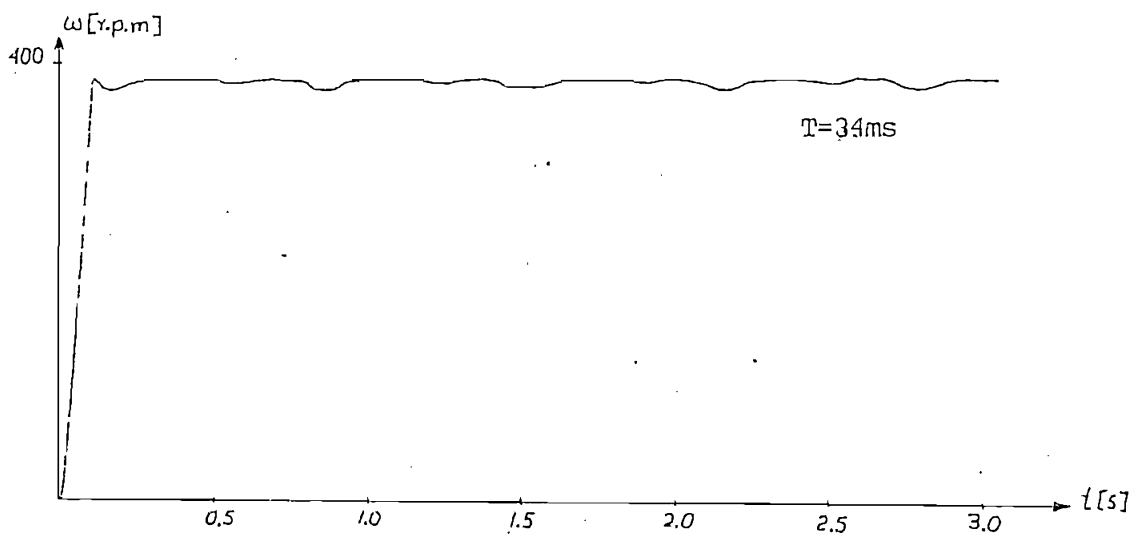
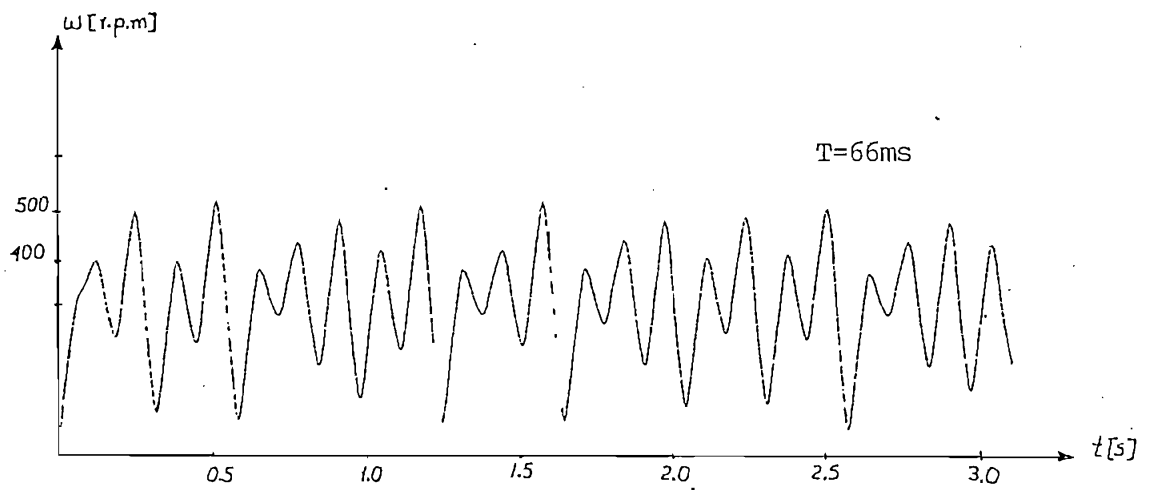
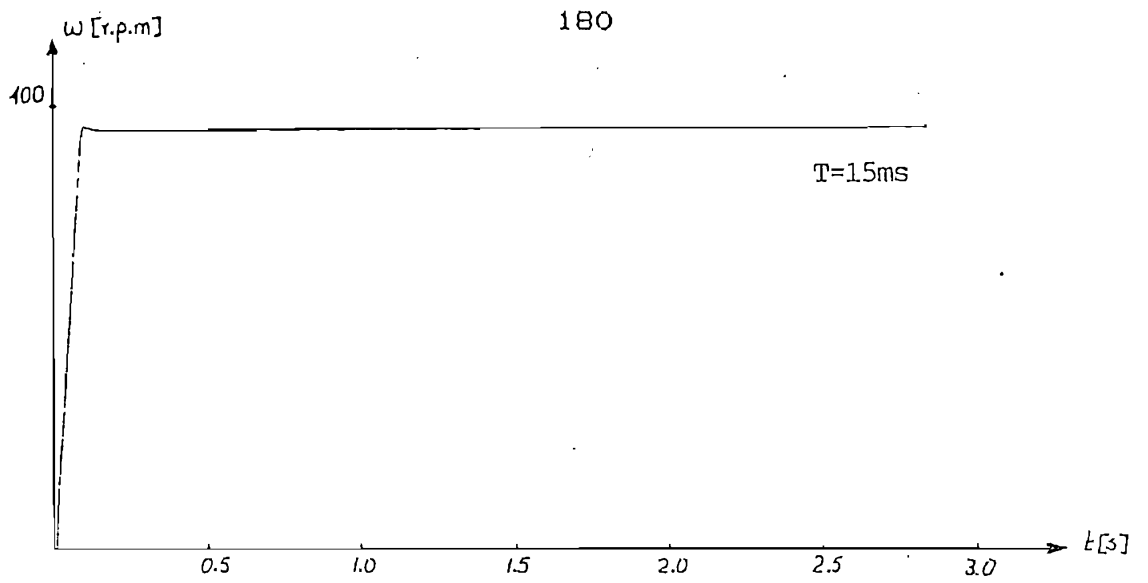
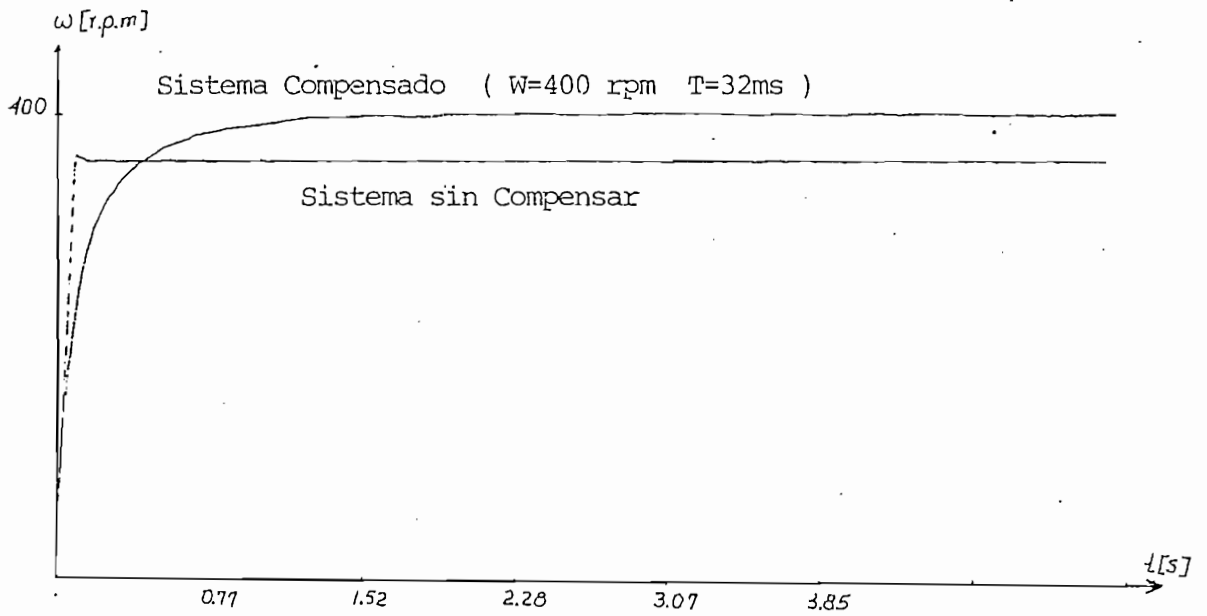
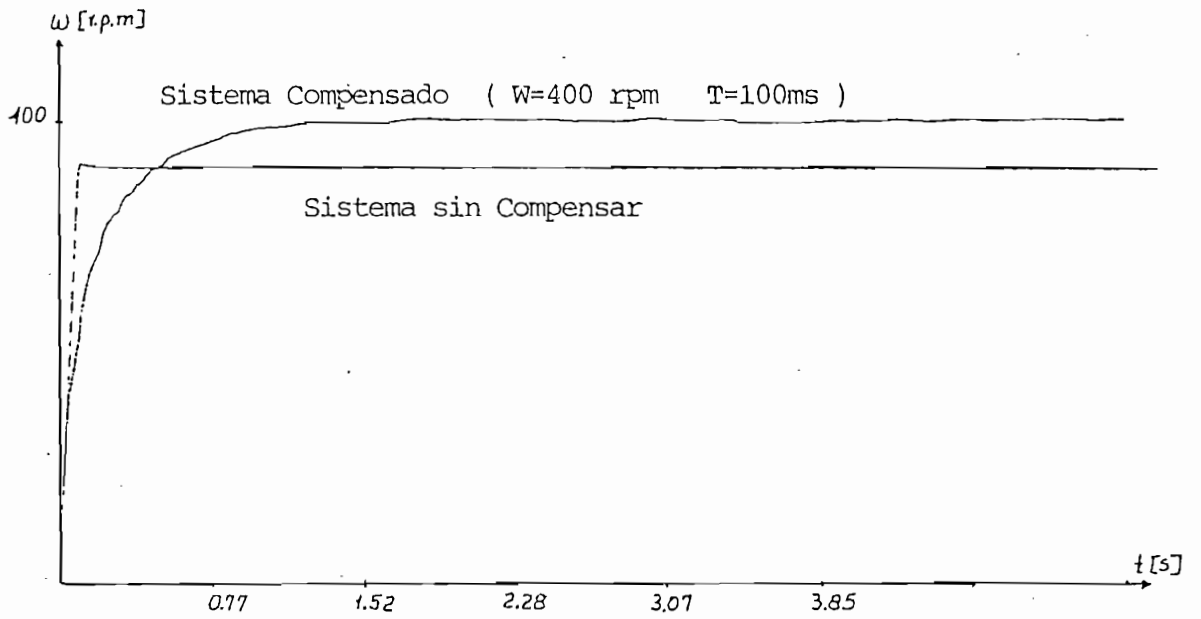


Fig 423 Respuesta del sistema sin compensar a una entrada escalón para diferentes valores de  $T$



4.24 Respuesta del Sistema Digital a una función escalón con un Controlador PI  $K_p=0.2$ ,  $K_I=0.688$  y diferentes valores de  $T$

sistema es inestable para un período  $T=34\text{ms}$  el sistema presenta una pequeña oscilación, en cambio para  $T=15\text{ms}$  el sistema es estable.

Además en la figura 4.24 se obtiene la respuesta del sistema digital con un controlador con iguales valores de  $K_p$  y  $K_i$  pero para diferentes valores de período  $T$ .

En las Fig. 4.25 se han aprovechado los recursos del paquete cad control para graficar las respuestas del control de velocidad para una entrada escalón de valores  $6.16\text{V}$  y  $19\text{V}$  respectivamente; además en la figura 4.26 se ha graficado la respuesta del sistema sin compensar para un período de muestreo  $T = 0.066$  pudiéndose deducir que el sistema es inestable para este período. Estos últimos gráficos concuerdan todas las aseveraciones anteriormente mencionadas.

#### 4.4.2 Control de posición.

De las características de funcionamiento para posición sin tacómetro [3] presentadas en el numeral 4.4, podemos decir que si bien el sistema es estable, existe un sobreimpulso del 42% y un tiempo de estabilización aproximado de  $1.65\text{s}$  todo esto para una relación del reductor de velocidad de  $1/9$ . Se usará un control P-D para mejorar la respuesta transitoria del sistema.

El período de muestreo  $T=0.066$ , se lo ha tomado en base a las consideraciones indicadas en el numeral 4.4.1.



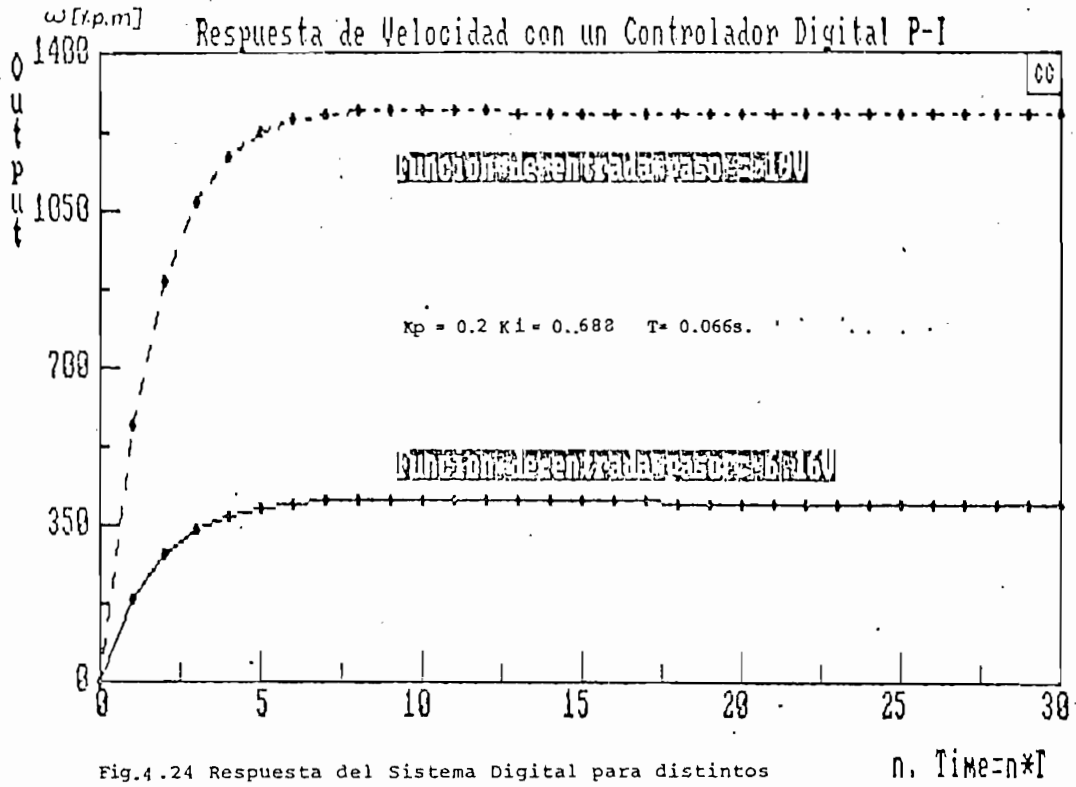


Fig.4.24 Respuesta del Sistema Digital para distintos valores de una función paso.

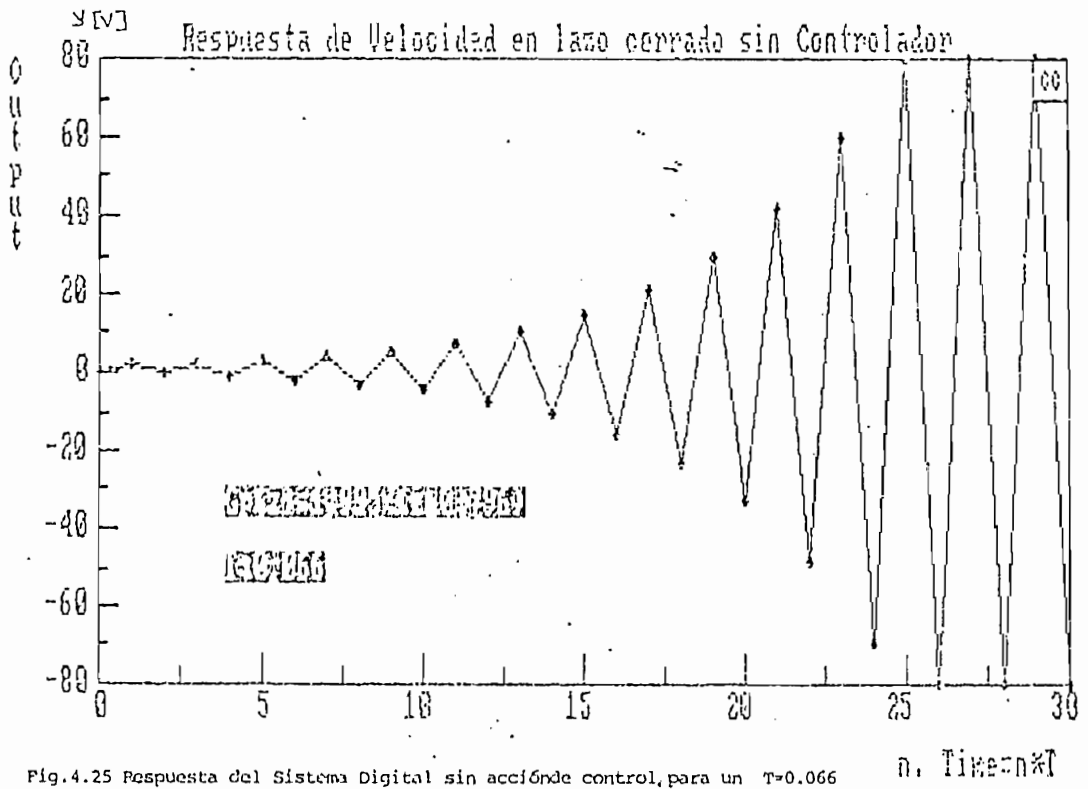


Fig.4.25 Respuesta del Sistema Digital sin acción de control, para un  $T=0.066$

De igual manera siguiendo el procedimiento de diseño de un controlador P-D [6], es decir que el cero del controlador anule un polo del sistema y aplicando el criterio de Routh-Hurwitz modificado sobre la ecuación característica se ha llegado a determinar las siguientes condiciones:

$$K_D = 0.2582 K_p \quad (\text{Ec. 4.33})$$

$$K_p < 0.06929 \quad (\text{Ec. 4.34})$$

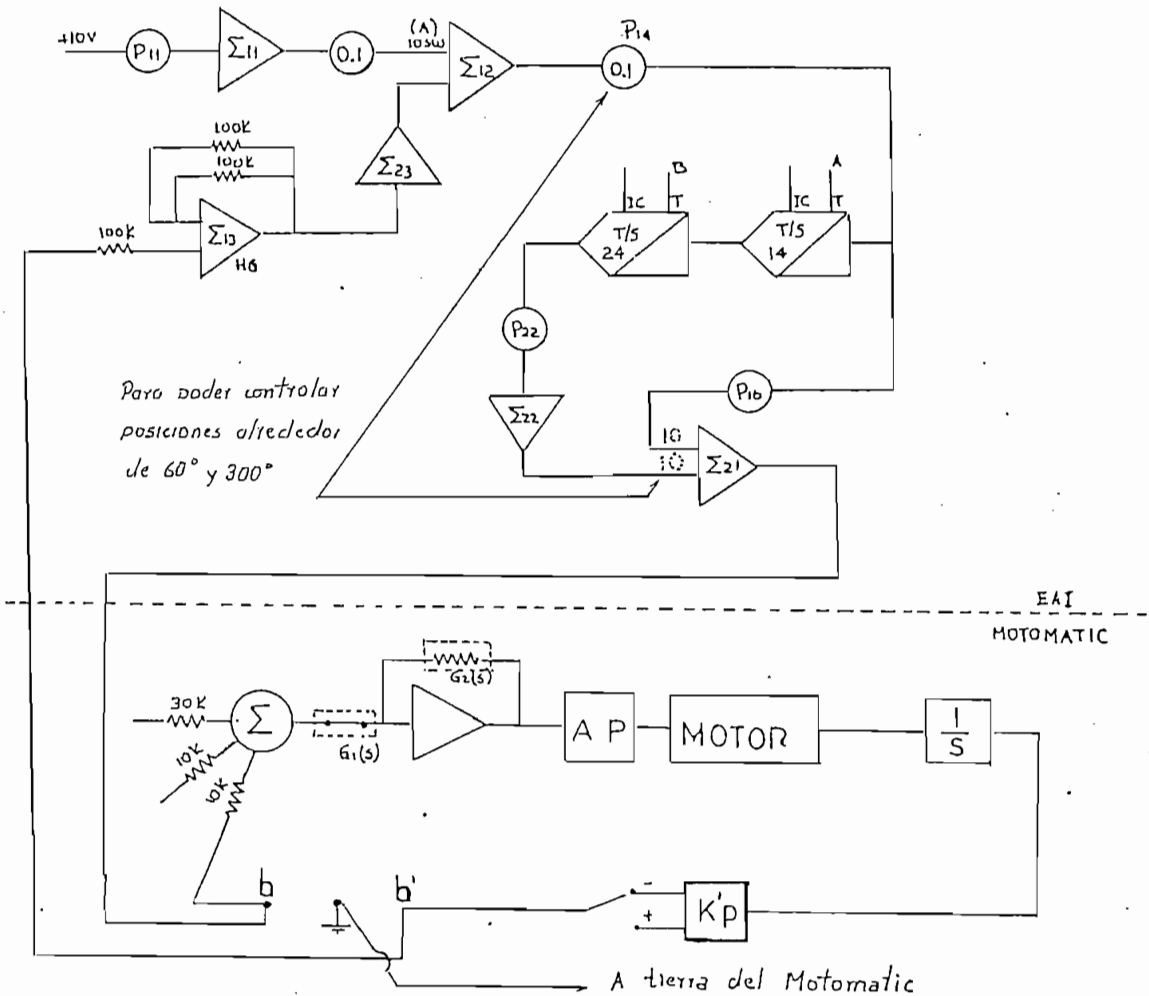
Puesto que el sobretiro depende del valor de  $K_p$ , se ha llegado a determinar que para tener un sobretiro  $< 5\%$  se debe cumplir que:

$$K_p < 0.015 \quad (\text{Ec. 4.35})$$

En la Fig. 4.27 se muestra el circuito implementado en el computador análogo/híbrido para el control de Posición del Motamatic.

El principio de implementación y funcionamiento del circuito es básicamente similar al descrito en el control de velocidad, debiendo anotarse adicionalmente lo siguiente:

- La posición del interruptor del sensor de posición será en la posición negativa (-).



$$P_{16} = (K_p T + K_d) / T = 0.215, \quad P_{22} = K_d / T = 0.065$$

$P_{11}$  = Valor de la función paso de entrada.

$$T = 0.066 \quad \left\{ \begin{array}{l} A = 7ms \rightarrow T \text{ del T/S } 24 \\ T = 7ms + 5.9 \times 0.01 \quad B = 59ms \rightarrow T \text{ del T/S } 14 \end{array} \right.$$

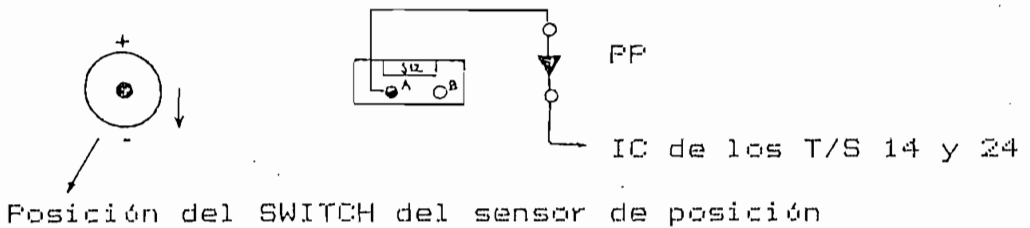


Fig. 4.27 Circuito implementado en el computador analógico para un control P.D. de posición del motomatic.

- Con el interruptor en esta posición podremos realizar un control de posición entre  $60^\circ$  y  $180^\circ$  (valores de entrada negativa  $-V$ ) ó un control de posición entre  $180^\circ$  y  $300^\circ$  (valores de entrada positivos  $+V$ ) solo cambiando la referencia de la fuente.
- La parte de marcha y paro del funcionamiento del sistema es igual al descrito para el control de velocidad.

De acuerdo a los voltajes que nos da el sensor utilizado, su zona muerta y el voltaje de trabajo del EAI  $\pm 10V$ , el control de posición se limitará a un rango entre  $60^\circ < \theta < 300^\circ$ , es decir entre  $\pm 14V$ , ya que para posiciones fuera de este rango empiezan a existir problemas de saturación en los elementos del computador análogo.

Para controlar valores cercanos a  $60^\circ$  y  $300^\circ$  y evitar problemas de saturación a la salida del  $\Sigma 12$  se conectará un potenciómetro de valor 0.1 y a la vez se conectarán las entradas ( $\times 10$ ) del  $\Sigma 21$ , pero esto a su vez causa pequeños errores en la salida final del sistema debido que al trabajar el controlador con señales pequeñas de voltaje existen problemas de ruido así como también problemas de offsets de los T/S que para estos valores de voltaje son ya comparables.

Además hay que anotar que el tipo de control implementado es un control de posición absoluto.

En las Fig. 4.28 se muestra la salida de posición del

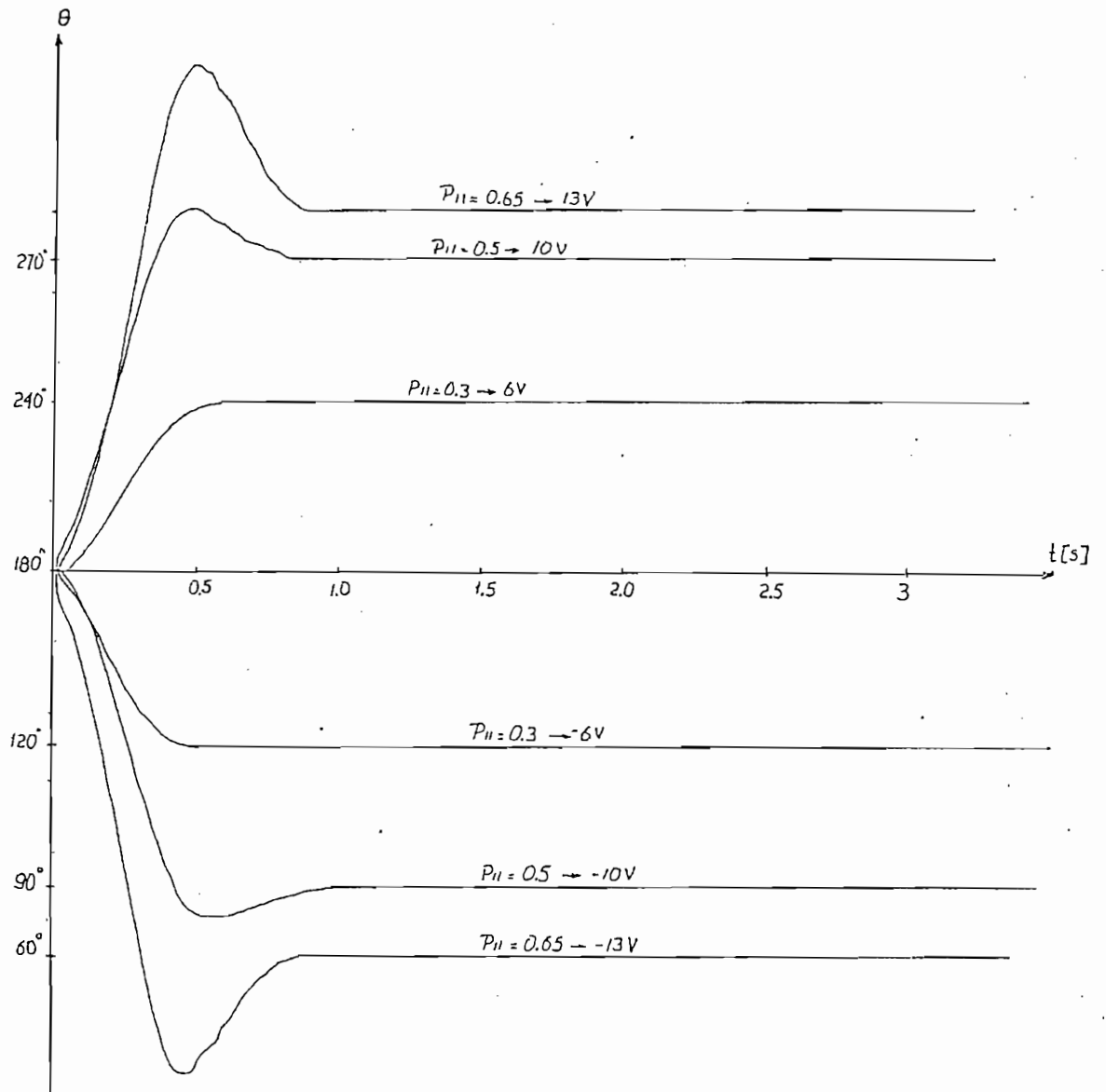


Fig. 4.28 Respuesta de Posición del Motomatic con un Controlador P-D para distintos valores de una función paso de entrada

$$K_d = 0.2585K_p \quad K_p = 0.15 \quad T = 0.066$$

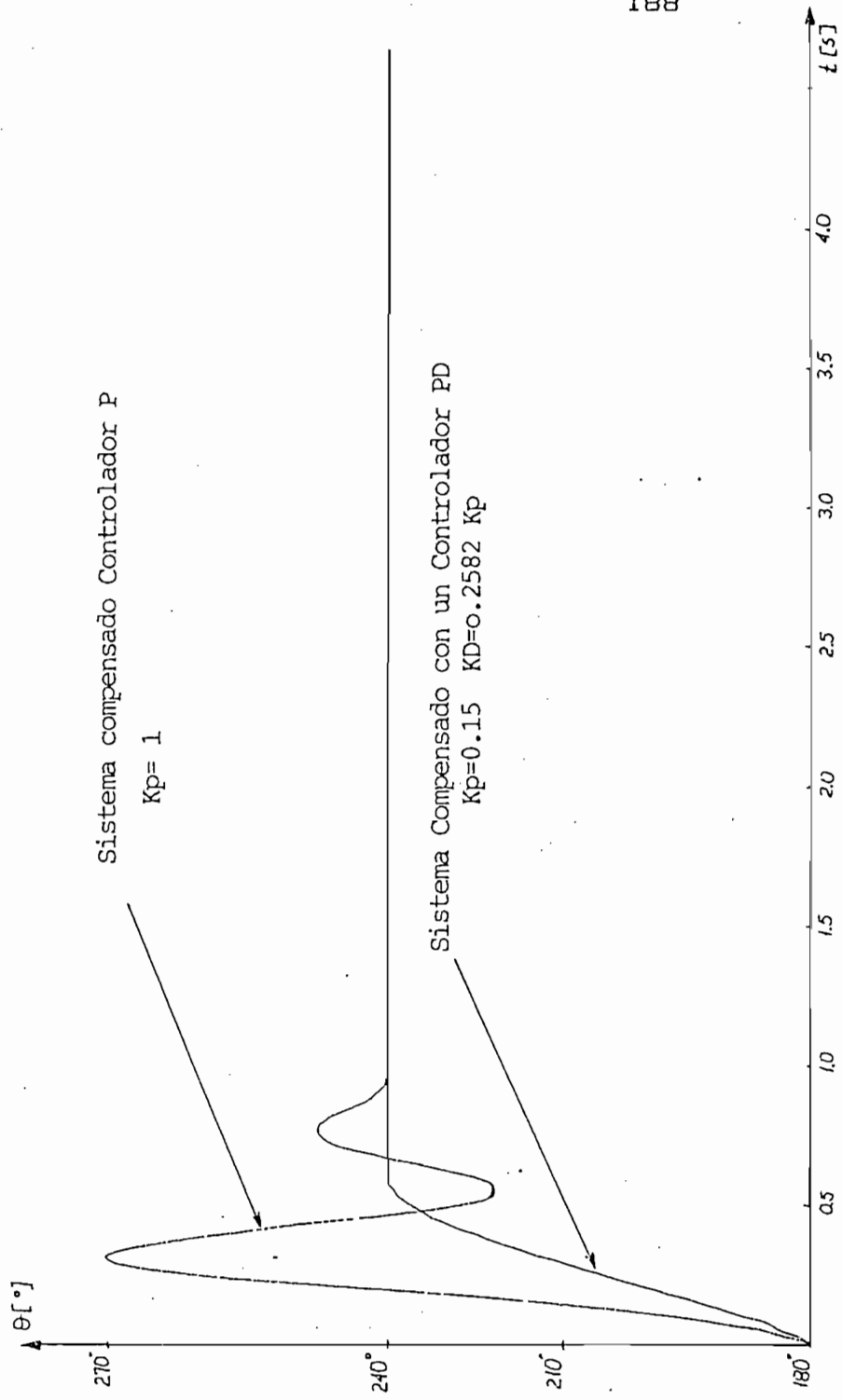


Fig 429 Respuesta del Sistema Compensado y del Sistema sin Compensar para  $T=0.066s$

sistema compensado con un controlador P-D para distintos valores de la función paso de entrada.

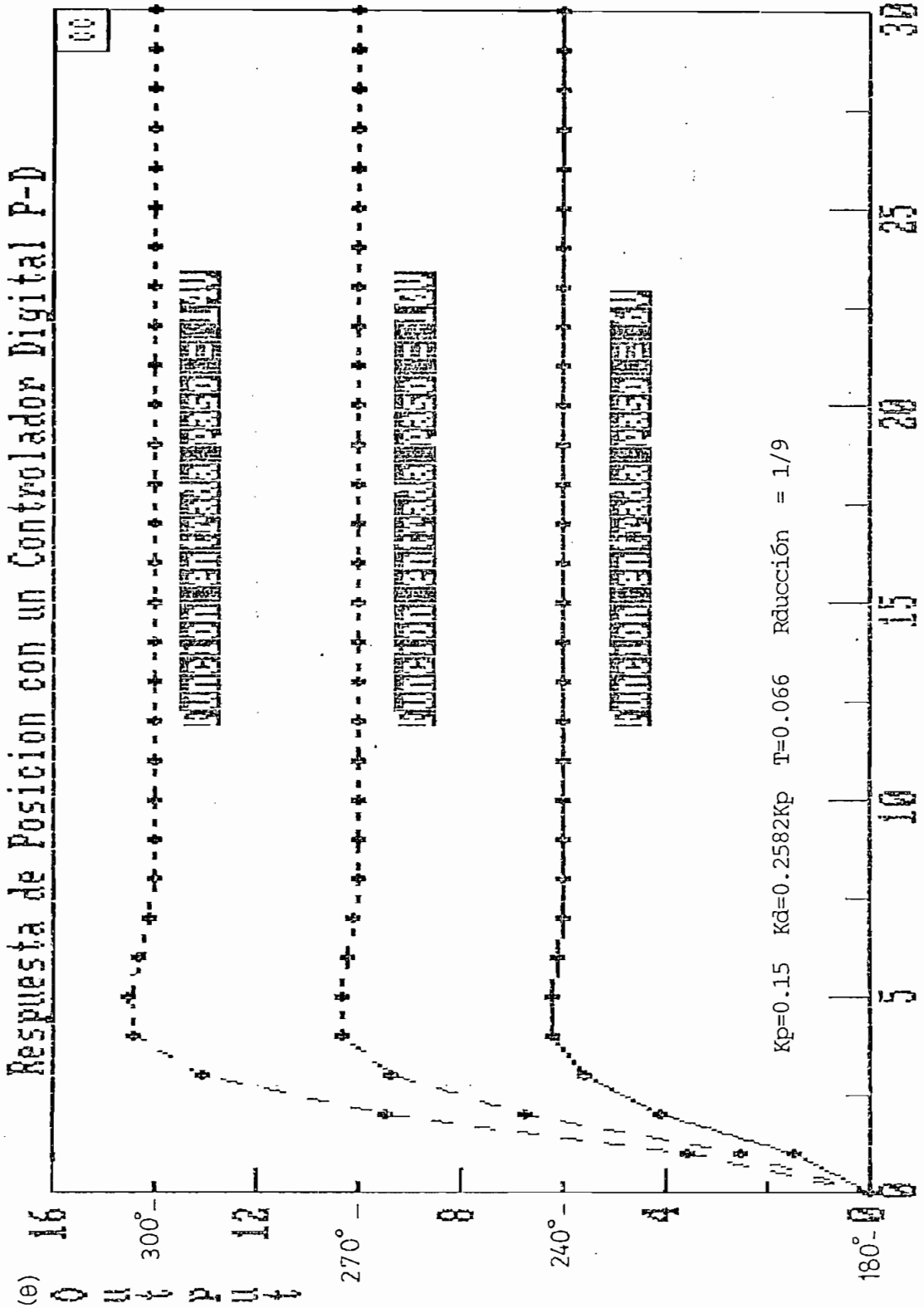
En la Fig. 4.29 se muestra la salida de posición del sistema compensado con un controlador tipo P-D y del sistema sin compensar, aquí se puede ver claramente como disminuye tanto el sobretiro como el tiempo de estabilización con el controlador tipo P-D.

En esta parte hay que aclarar que para obtener el valor de los potenciómetros  $P_{1e}$  y  $P_{2z}$ , el valor de  $K_p$  de la expresión es igual a 0.15 mientras que  $K_d$  será igual a  $K_d = 0.2582 \times 0.111 \times 0.15$  ya que el  $K_p$  efectivo es igual a la relación del reductor  $1/9$  multiplicado por  $K_p = 0.15$ .

Con la ayuda del paquete Cad Control se pueden obtener los gráficos dados por la figura 4.30 que ayudarán a afirmar los resultados obtenidos en las figuras 4.28 y 4.29. Pues comparando las figuras 4.30 y 4.28 se desprende que estas coinciden satisfactoriamente.

#### 4.5 Comparación con un controlador digital real.

Para poder hacer una comparación con un controlador digital real se ha tomado como referencia la tesis de la Ing. Isabel Lucía Soto [4] en la cual se hace el análisis teórico del control digital a emplearse tanto para el control de velocidad como para el de posición, se diseña y se construye el interfase a usarse entre el motomatic y el



n. Time=nt

Fig 430 Respuesta del Sistema Digital para dos valores distintos de una función paso



microprofesor (el microprofesor es un versátil microcomputador de bajo costo, caracterizado por sus sofisticadas características de software y hardware, como CPU utiliza el Z-80) y se elabora además el programa en assembler para usarse con el microprocesador Z-80.

Luego de hacerse el estudio teórico del motomatic tomando como referencia la tesis del Ing. Jorge Bastidas se llega a obtener las funciones de transferencia en el dominio de Laplace tanto en velocidad como en Posición, y se determinan las características de respuestas de los sistemas en lazo cerrado sin ningún tipo de controlador. En base a estas respuestas se hace el análisis teórico del controlador digital óptimo a emplearse que cumpla con determinadas condiciones de respuestas requeridas.

Para el control de velocidad se ha llegado a determinar que el Control Digital Proporcional Integral con las constantes  $K_p = 0.2$  y  $K_i = 0.688$  permitirá obtener la siguiente respuesta teórica para una entrada paso:

Error de Estado Estable  $E_{ss} = 0$

Sobretiro = 0%

$t_r = t_s = 0.13s$

Para el Control de Posición se llega a determinar que el control digital tipo proporcional derivativo con las constantes  $K_p = 0.15$ ,  $K_b = 0.2582K_p$  y con una relación de reducción en el sensor de posición de  $1/9$  permitirá obtener para una

entrada paso las siguientes características en la respuesta del sistema:

Error de Estado Estable  $E_{ss} = 0$

Sobreimpulso  $< 5\%$

$\xi = 0.768$

$t_{m\acute{a}x} = 0.5447$

Para ambos controles el período mínimo de muestreo escogido, depende exclusivamente del tiempo total que le lleva al micro-procesador Z-80 ejecutar el programa en assembler del controlador digital programado.

Para realizar el análisis comparativo de velocidad correspondiente, se ha tomado el mismo tipo de controladores, digitales con los mismos valores de constantes.  $K_p$  y  $K_r$  e igual tiempo de muestreo  $T = 0.066s$  que los empleados en el estudio hecho en la tesis de la Ing. Lucía Soto como se ha mostrado ya en el numeral anterior (4.4).

Refiriéndonos a la mencionada tesis en el capítulo IV, en la Fig. 4.12 y en la presente tesis en la Fig.4.21 se muestran las respuestas del sistema digital con las características antes mencionadas a una función escalón de distintos valores 6.16V, 14V y 19V.

De las respuestas gráficas mencionadas anteriormente podemos mencionar que:

- Para las respuestas obtenidas con el controlador discreto simulado objeto de la presente tesis se tiene un menor voltaje de oscilación en estado estable que para el caso del controlador digital programado en el Z-80, pues el circuito de interfase usado la tesis referida hace que se introduzca un mayor voltaje de oscilación.
- Los tiempos de subida y estabilización son menores para el caso del controlador discreto simulado que para el caso del controlador digital real, pues para el caso simulado no se tiene sobretiro y tiene un tiempo de estabilización aproximadamente igual a 0.4 segundos, pues la respuesta transitoria se asemeja a la respuesta típica de un sistema de primer orden, a una entrada escalón unitario; no así para el caso real donde del resultado gráfico se puede manifestar que existe un sobretiro aproximado del 30% y un tiempo de estabilización aproximado de 1.5 segundos, pues la respuesta transitoria es del tipo subamortiguado correspondiente a un sistema de segundo orden.
- Cuando se aumenta el período de muestreo para el caso del sistema digital real, el sistema tiende a la inestabilidad (como se puede observar en la fig 4.14 de la mencionada tesis), no así para el caso simulado donde el sistema tendrá a la inestabilidad pero para mayores valores de  $T$ , pues como se puede ver en la Fig. 4.24

para  $T = 0.1$  el sistema se mantiene estable.

- Es importante señalar que para el caso de la respuesta del sistema a una función escalón, sin controlador para el caso de la tesis de la Ing. Soto (Fig. 4.7) para un  $T = 0.034$  el sistema es inestable, en cambio para nuestro sistema simulado con la variante dada en la figura 4.22 para ese período nuestro sistema es estable (fig. 4.23).

Todas estas diferencias se deben principalmente al circuito de interfase con el Motomatic pues para el caso del controlador digital real de acuerdo al diagrama de bloques mostrado en la Fig. 4.1 de la tesis de la Ing. Soto, la respuesta de lazo cerrado sin ninguna acción de control depende directamente del período  $T$  de muestreo programado en el MPF-IP y de los conversores D/A y A/D a la entrada y salida respectivamente del Motomatic, pues aunque no se tenga ninguna acción de control será necesario indicarle al MPF-IP que no se desea realizar ningún tipo de acción de control y de todas maneras el MPF-IP deberá calcular el error y aplicarlo al conversor D/A. Además ciertas aproximaciones hechas en el diseño afectarán más al controlador real que al controlador simulado.

Este resultado a su vez se puede confirmar con ayuda del paquete de programación Cad Control a través de los comandos CONVERT, BUILD, y DTIME que para un  $T = 0.066$  el sistema es inestable como se muestra en la Fig. 4.26 pues de acuerdo a

los métodos de discretización estudiados anteriormente para que el sistema discreto simulado nos reproduzca el sistema análogo original el período de muestreo  $T$  deberá ser aproximadamente menor a  $\tau/10$  donde  $\tau$  es la constante de tiempo del sistema ( $\tau \approx 0.29$ ), cosa que no se cumple para nuestro caso.

De manera similar al control de velocidad, para realizar el análisis comparativo para el control de posición, se ha tomado el mismo tipo de controlador digital con los mismos valores óptimos de  $K_p$  y  $K_D$  encontrados en igual tiempo de muestreo  $T = 0.066$  que los obtenidos en el estudio hecho en la tesis de la Ing. Lucía Soto como se ha mostrado en el numeral anterior (4.4).

Refiriéndonos a la tesis de la Ing. Soto en la Fig. 4.18 se muestra la respuesta del sistema digital con un controlador tipo P (reductor =  $1/9$ ,  $K_p = 0.15$   $T = 0.066$ ) a una función escalón, en la Fig. 4.19 se muestra la respuesta del sistema digital con un controlador tipo P-D (reductor =  $1/9$   $K_p = 0.15$   $K_D = 0.2582K_p$ ) a una función escalón para  $T = 0.066$ .

En la presente tesis en la Fig. 4.26 se muestra las respuestas del Motomatic con un controlador tipo P-D discreto simulado (reductor =  $1/9$ ,  $K_p = 0.15$ ,  $K_D = 0.2582K_p$ ) a una función escalón con valores: 6V, 12V y -14V respectivamente y en la Fig. 4.29 se muestra la respuesta del sistema compensado con iguales valores del reductor,  $K_p$  y  $K_D$  y del sistema

sin compensar a un escalón igual a 6V; todos estos gráficos para un periodo  $T = 0.066$ .

De las respuestas obtenidas anteriormente se puede mencionar que:

- Para los casos del controlador P-D, para el caso del controlador discreto simulado mientras aumenta el valor de la función rampa de entrada aumenta el sobreimpulso, para el caso de entradas 6 y 12V no existe sobretiro, para una entrada de -14V existe un sobreimpulso de un 15%, de igual manera el tiempo de estabilización para este caso es igual a 0.5 seg.; en cambio para el caso del controlador digital real se tiene un sobretiro aproximado del 10% y un tiempo de estabilización igual a 1 seg. aproximadamente, por tanto la respuesta con el controlador simulado es más satisfactoria que con el controlador real.
- Para posición, el sistema es mucho más lento que para velocidad y por eso las curvas prácticas del controlador real son bastante parecidas a las curvas teóricas (Fig. 4.30) obtenida mediante el programa C.C.) y más aún las respuestas prácticas obtenidas con el controlador simulado.
- El voltaje de oscilación en estado estable es similar para los dos casos de control (real y simulado).

A su vez los resultados gráficos obtenidos con la ayuda del paquete Cad Control se pueden corroborar con los resultados teóricos gráficos que se obtienen en las tesis LGR de las raíces para sistemas discretos del Ing. Galo Acosta[7], pues tanto para el control de velocidad como para el de posición se dan los resultados gráficos del sistema digital para los casos también analizados en el programa C.C.

Resumiendo se puede mencionar que para el caso del control discreto simulado, tanto para el control de velocidad como para el de posición se obtienen resultados más satisfactorios y más cercanos a los resultados teóricos obtenidos en el análisis y diseño de los controladores digitales respectivos que para el caso del controlador digital real diseñado, programado y constituido en la tesis de la Ing. Lucía Soto.

Todo esto a su vez resulta lógico puesto que para el caso del controlador discreto simulado es menos crítico el período de muestreo escogido que para el caso del controlador digital real, así mismo para el caso simulado no se introducen voltajes de oscilación debido a circuitos de interfase, no se realizan conversiones digitales - análogas ni análogas-digitales necesarias en el caso práctico, pues para el caso simulado la conexión entre el controlador y la planta es directa y sin ningún tipo de interfase o conversión.

Para el caso del controlador discreto simulado la acción de control es mucho más rápida que para el caso del controla-

dor digital real, pues para el caso simulado el control es directo a través de elementos sumadores y T/S que manejan las señales de voltajes provenientes del Motomatic, en tanto que para el caso real el MFF-IP debe calcular tanto el error como la acción de control apropiada según el caso, también será necesario convertir las señales de voltajes provenientes del Motomatic a sus respectivas equivalentes digitales, así como la señal de error digital a su voltaje equivalente análogo a ser aplicado a la entrada del Motomatic. Todo esto implica un mayor tiempo en la acción de control.

En cuanto a los rangos de control de velocidad y posición son similares tanto para el caso real como para el simulado así:

	Velocidad [rpm]	Posición [ ]
Real	0 - 1.200	0° - 320°
Simulado	0 - 1.260	60° - 300°

Estos rangos para el caso real se deben a limitaciones de voltaje en la construcción de la parte análoga, mientras que para el caso simulado se deben a limitaciones de voltaje de saturación en elementos usados en la simulación.

#### 4.6 Conclusiones.

- Este capítulo nos da una clara imagen de la importancia de la simulación de controladores discretos en plantas continuas como soporte en el diseño e implementación.



- Hay que aclarar que para simular controladores discretos de plantas continuas el procedimiento no necesariamente debe ser repetitivo, pero debido a los problemas de saturación que se puedan presentar en los elementos usados en la simulación discreta, así como por tener un mejor análisis y control del problema (ajuste de parámetros del controlador), se lo ha hecho repetitivo.
  
- Tanto para el caso del control de velocidad como para el control de posición del Motomatic, así como para el control discreto de plantas continuas simuladas, los resultados obtenidos son bastante satisfactorios y coinciden básicamente con el tipo de controlador escogido para cada caso.
  
- Para el caso del controlador de posición habrá que tener cuidado que cada vez que se vaya a hacer el control a determinado ángulo, el sensor de posición inicialmente debe darnos 0V (180°) para poder tener un control absoluto de posición, máximo entre  $\pm 14V$ ; pues al momento de inicializar la parte lógica y digital del computador el sensor tiende a regresar a su posición inicial pero debido a la presencia de offsets su salida no nos da 0V, por lo que manualmente moviendo el eje del motor se deberá conseguir este voltaje.

- Es importante mantener la posición negativa del interruptor del sensor de posición, entonces para controlar posiciones mayores o menores a  $180^\circ$  será necesario solamente cambiar la polaridad de la referencia de entrada de positiva a negativa respectivamente.
  
- Para los diferentes tipos de control se recomienda una entrada paso unitaria (1V). Al existir problemas de saturación en el controlador se puede escalar en magnitud (entrada=0.1V). A la vez esto trae consigo problemas de ruido presentes al manejar señales pequeñas en amplitud y por consiguiente problemas de precisión tanto en la simulación como en la graficación, por lo que se sugiere hacer escalamiento en amplitud sólo cuando sea necesario.
  
- Para el caso del control de posición se podría pensar que se debería tener un mayor rango de control, pero esto no es tan cierto puesto que a partir de entradas alrededor de  $\pm 14V$  empiezan a existir problemas con la zona muerta del sensor de posición debido a la magnitud de los sobreimpulsos presentes. Además se pudo observar que algunos offsets de algunos elementos tienen gran incidencia en el problema de saturación, pues al momento de inicializar tanto la parte lógica como la digital del computador análogo/híbrido y observar las salidas de algunos elementos se pudo comprobar que estos tenían

algun voltaje en su salida, por lo que en algunas ocasiones fue necesario apagar y encender nuevamente el equipo para poder operar sin problemas y obtener resultados satisfactorios, especialmente en la simulación de un controlador discreto de plantas simuladas.

## C A P I T U L O V

### CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

- 5.1 Efectos al variar el período de muestreo.
- 5.2 Conclusiones y Recomendaciones.

## C A P I T U L O   V

### CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En este capítulo se dan las experiencias y resultados en el desarrollo de esta tesis.

#### 5.1 Efectos al variar el período de muestreo.-

En esta parte se deben mencionar tres clases de efectos que se tiene al variar el período de muestreo :

a) Al variar el período de muestreo en una planta y al hacer el análisis teórico (Programa CC) se puede deducir que :

-A menor período de muestreo la respuesta del sistema muestreado se aproxima más a la del sistema continuo original.

-Es más crítico el escogitamiento del período de muestreo para sistemas en lazo cerrado que para sistemas en lazo abierto, debiéndose escoger para el primer caso un período mucho menor que el hallado teóricamente.

-A menor  $T$  las raíces (polos) se acercan a  $|z|=1$  y por tanto el sistema tiene mayor estabilidad conforme disminuye  $T$ , en cambio al aumentar  $T$  el sistema tiende a la inestabilidad.

b) Al variar el período de muestreo en sistemas discretos simulados en el computador análogo/híbrido se puede mencionar que:

-Al disminuir  $T$  se empieza a tener problemas de saturación en los elementos usados en la simulación debido al alto valor que empiezan a tomar los coeficientes que realimentan las diferentes señales en la simulación, si para evitar la saturación se aumenta  $T$  esta acción resta precisión en la simulación de sistemas discretos; otra acción que nos permite evitar la saturación es el escalamiento en amplitud pero esto trae consigo problemas de ruido. Por tanto cuando se requiera tener mayor precisión sobre un determinado sistema se deberá considerar varios factores a la vez: saturación, escalamiento en amplitud, ruido etc.

c) Para el caso del período de muestreo en un sistema digital real [4] se puede manifestar que:

-A mayor período de muestreo el sistema tiende a la inestabilidad tanto para velocidad como para posición, pues tanto el sobretiro como el tiempo de estabilización dependen de  $T$  ya que aumentan conforme aumenta  $T$ .

Hay que mencionar además que puesto que para escoger la frecuencia mínima de muestreo mediante el teorema de Shannon implica un trabajo un poco largo y tedioso, más bien se ha tomado como referencia la constante de tiempo del sistema para escoger un período de muestreo adecuado. El período de muestreo para este depende del tiempo de respuesta de los

convertidores y del tiempo que le toma al microprocesador ejecutar el programa de control, y por tanto de la frecuencia de trabajo del microprocesador. Por esta razón es difícil disminuir el período de muestreo y para hacerlo habrá que optimizar los programas y/o utilizar convertidores y microprocesadores más rápidos. Una vez que se determine el período de muestreo adecuado habrá que ver si con este período no se tiene problemas de saturación, caso contrario se deberá pensar en escalar en magnitud.

## 5.2 Conclusiones y Recomendaciones.-

- El programa Cad Control ha sido una herramienta muy útil para el análisis, desarrollo y comprobación de los diversos problemas tratados en esta tesis, sin embargo se presentó ciertos inconvenientes con la transformada inversa  $z$ .

- Debido a los recursos que se dispone en el computador análogo híbrido EAI Mini AC solo es posible simular sistemas discretos de hasta tercer orden.

- Se obtuvieron resultados satisfactorios al utilizar la descomposición directa y la descomposición en paralelo (en el Espacio de Estado), pudiendo las descomposiciones ser fácilmente implementadas. Para la simulación de éste último caso y contemplar ciertas condiciones iniciales, se logró obtener la respuesta total del sistema, lo que puede ser

generalizado para el resto de simulaciones.

- En esta tesis no se ha hecho mucho énfasis en el diseño de los distintos controladores sino que a partir de determinados ejemplos con controladores discretos previamente diseñados de acuerdo a los requerimientos de la planta se ha tratado mas bien de comprobar la validez de los sistemas ó controladores discretos simulados en el EAI Mini AC y realizar las respectivas comparaciones. En la mayoría de los diseños se ha empleado el método del Lugar Geométrico de las Raíces. [7]

- Se recomienda en general que la amplitud de las entradas paso o impulso sea de valor unitario, pues para valores pequeños se tiene problemas de ruido y por tanto de precisión. Para el caso de la entrada rampa por problemas de saturación se debe tener un valor pequeño de la constante de tiempo por lo que para este caso se introduce errores despues de algunas iteraciones.

- Para el caso de controladores discretos simulados aplicados a plantas simuladas o reales se seguiere escoger de un período de muestreo entre 12ms y 10.5seg.

- Habrá que tener en cuenta el tipo de metodología que se deba usar de acuerdo al tipo de simulación o problema que se este tratando.



- Resumiendo, se puede manifestar que en la presente tesis se ha logrado el objetivo inicial con resultados bastante satisfactorios, esto es, aprovechar todos los recursos que nos ofrece el computador análogo/híbrido para poder simular sistemas discretos, resolver ecuaciones de diferencias, resolver sistemas discretos en el Espacio de Estado, para diferentes tipos de señales de entrada con las respectivas condiciones iniciales, etc.

- En general se ha simulado diferentes tipos de controladores como de realimentación de estado, de Adelanto-Retardo de fase, PID pero en general se pueden implementar varios tipos de controladores mas, por lo que se recomienda seguir trabajando en este aspecto.

-Como recomendación general se puede decir que el presente trabajo puede ser usado para el diseño y análisis de controladores y sistemas discretos mediante la elaboración de prácticas de Laboratorio de Control usando el Computador análogo/híbrido EAI Mini AC, lo que constituiría un aporte y sustento a las materias teóricas de la Especialidad y Control

A P E N D I C E S

## APENDICE A

En este apéndice se da una breve descripción de las características del programa CC (Versión 3.0) así como también se describirán algunos de los principales comandos usados en esta tesis.

El programa CC ha sido desarrollado para ser usado en análisis y diseño de Sistemas de Control. Nos permite construir funciones de transferencia de sistemas de simple entrada y simple salida (SISO) ya sea para sistemas análogos como para sistemas digitales. Cualquier tipo de manipulación algebraica puede efectuarse sobre la función de transferencia. Además este paquete nos ofrece facilidades para el diseño de problemas de Control Moderno en los cuales el sistema es modelado por ecuaciones en el espacio de estado. Permite realizar manipulaciones sobre matrices que representan funciones de transferencias de sistemas tipo MIMO (entrada múltiple-salida múltiple). El programa CC permite computar transformadas inversas, polos, ceros, valores y vectores propios, conversiones entre el dominio de Laplace y el dominio Z; crear cualquiera de los diagramas de Control Clásico (Bode, Nyquist, Nichols, Lugar de las Raíces etc.) a más de otras funciones.

El programa CC está estructurado de tal manera que el usuario ingresa un comando en respuestas a prompts. Contiene alrededor de 230 comandos y para el análisis y diseño de

sistemas de control se usa un proceso interactivo lo cual realza la importancia de ser capaz de acceder rápidamente a una amplia variedad de algoritmos. Otra característica del programa CC es la capacidad de crear nuevos comandos.

Hardware.- El Programa CC necesita del siguiente equipo para operar:

- Computador Personal: IBM-PC, IBM-XT, IBM-AT, COMPAQ, o COMPAQ PLUS que usen el uP Intel 8088 (CPU de 16 bits y bus de datos 8 bits)
- Requiere un mínimo de 192 Kbytes de RAM.
- El co-procesador matemático 8087 es opcional, sin embargo su presencia hace que se opere en punto flotante y aumente la rapidez en la ejecución de multiplicaciones y funciones trigonométricas.
- Monitor Color IBM, o monitor de gráficos compatible.
- Tarjeta de Monitor Color IBM o tarjeta de monitor compatible
- Dos Disk Drives o un floppy y disco duro.

Software.- El programa CC está escrito en Basic Avanzado de Microsoft y requiere del siguiente software para operar:

- DOS (Disk Operating System) de Microsoft, versión 2.0 o mas.
- Librería BASRUN.EXE de Microsoft.
- Los módulos CC: CC.EXE, CC1.EXE1, CC2.EXE,.....CC29.EXE

El Programa se inicializa ejecutando el programa raíz CC.EXE con el comando CC. El programa raíz debe conocer la localización en el disco de todos los módulos CC, esta

información está almacenada en el archivo ##SETUP, si este archivo no está presente se crea automáticamente y asume que todos los módulos existen por default en la unidad de disco en la cual fue inicializado el programa.

El archivo ##SETUP contiene punteros a las localidades de cada uno de los módulos CC y por tanto ejecutando este archivo nos permite cambiar la configuración de la localización de los módulos de acuerdo a las conveniencias o equipo del que se disponga para correr el programa CC.

Es importante anotar que antes de iniciar el programa CC, para imprimir gráficos será necesario previamente ejecutar el comando del DOS : GRAPHICS.COM. El programa CC está almacenado en 4 diskettes de 360K c/u, por facilidad si se posee disco duro todos los módulos CC y archivos estarán allí.

Los comandos del programa CC están arreglados de acuerdo a una jerarquía así:

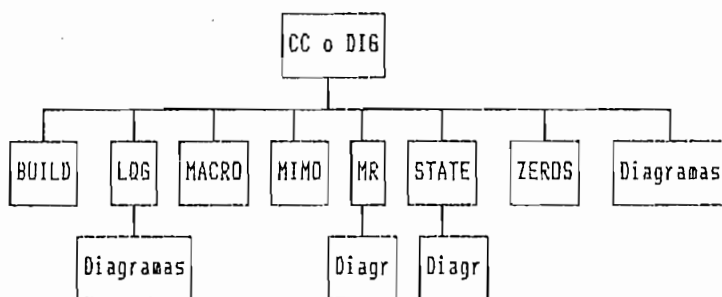


Fig 1 Estructura jerárquica del Programa CC

En los cuadros siguientes se muestran el tamaño y contenido (programas) de cada módulo del Programa CC.

CC(24K): Programa Raíz, Inicialización, comandos CC: Analog,

Digital, Echo, Pause, Cls, Quit, Kill, Files, Nonsense, Hardcopy, Setup.

CC1(16K): Nivel de Comandos de Macros

CC2(48K): Comandos CC: Enter, Display, Lpdisplay, Dpdisplay, Pzf, Tcf, Pfe, Ilt, Izt, Store, Recall, Shorthand, Single, Unitary; algunos de estos comandos son llamados desde los niveles de comandos: BUILD MR, LQG y STATE; Display tambien es llamado por los comandos CC: Convert y Wplane.

CC3(37K): Búsqueda de raíces por el método de Newton-Raphson, expansión en fracciones parciales, Transformada inversa de Laplace, Transformada inversa Z, Criterio de Routh; llamado desde todos los niveles de comandos excepto del nivel MIMO.

CC4(51K): Comandos BUILD excepto aquellos que se encuentran en CC5 y CC6, Comandos STATE:

1Pole, 2Poles, Leadlag, Notch, Padedelay.

CC5(52K): Comandos CC: Convert, Wplane. Comando Chpfe de BUILD.

CC6(47K): Comandos ZERO, comandos CC: Stability, Routh; comandos MR: Skip, Replace, Expand; comandos BUILD y STATE: Butterworth, Bessel, Chebyshev e Itae.

CC7(33K): Comandos MR, CC y LIST; parámetros para comandos CC y MR: Frequency, Bode, Nyquist, Inverse Nyquist, Log Nyquist y Nichols.

CC8(37K): Diagramas de Frecuencia para niveles de comandos CC y MR; opciones: D, E, H, L, P, Q, T, Y, Z.

CC9(40K): Diagramas de Frecuencia para niveles de comandos CC y MR; opciones: A, C, F, M, R; comando Point (CC y MR); Cálculos de frecuencias para CC y MR, comando Frequency.

CC10(43K): Comandos CC: Time, Dtime

CC11(51K): Comandos CC y LOG: Root Locus

CC12(22K): Comandos CC y BUILD: Help

CC13(30K): Comandos CC: Calculator, Clock y Tic-Tac-Toe

CC14(26K): Comandos LOG

CC15(46K): Calculos para comandos LOG.

CC16(36K): Diagrama de Bode para comandos LOG

CC17(40K): Nivel principal de comandos MIMO

CC18(40K): Comandos MIMO: involucra matrices de E/S

CC19(51K): Comandos MIMO: involucra algebra de matrices

CC20(44K): Nivel principal de comandos STATE: Penter, Pch, Pdisplay, Plpdisplay, Pstore, Precall, Dim, Hstore, Call, Balance, Copy, Ccf, Ocf, Dcf, Diagonal, Iden, Echo, Analog, Files, Kill.

CC21(30K): Comandos STATE: Fadeeva, Exponential, Pexponential, Placement.

CC22(20K): Comandos STATE: Hdisplay, Hlpdisplay, Extract.

CC23(43K): Comandos STATE: Add, Subtract, Scale, Multiply, Feedback Transpose, Adjoint, Pack, Unpack, Augment, Select, Ilarity, Residualization, Inverse, Substitute, Epsilon.

CC24(23K): Comandos STATE: Wprime y Convert.

CC25(32K): Calculo de Valores propios y método de Potter, llamado por comandos STATE (CC26).

CC26(31K): Comandos STATE: Eigenvalue, Ricatti, Lqr, Kbf y Lqg.

CC27(34K): Comandos STATE: Simulation, Dsimulation, Input y Plot.

CC28(42K): Comandos STATE: Poles, Zeros, Qz, Controllability,

Observability, Numerator.

CC29(13K): Comando STATE: Help.

Comandos aplicables a los modos CC(ANALOG) y DIG.

-ANALOG.- Nos permite trabajar con sistemas análogos, este modo es el default cuando se inicializa el programa CC.

-BUILD.- Este nivel de comandos es usado para crear y cambiar funciones de transferencias, ellas son algebraicamente combinadas usando manipulación simbólica.

-CLS.- Este comando borra la pantalla.

-CONVERT (CONVERT,  $G_i$ ,  $G_j$ , Type, T,  $W_0$ ).- Discretiza  $G_i$  por uno de los diferentes métodos, cambia automáticamente al modo digital y retorna el resultado en  $G_j(z)$ .

Parámetros:

$G_i(s)$ : función a ser discretizada en el dominio de Laplace

$G_j(z)$ : función discretizada en el dominio Z

type: 1 = Rectangular hacia adelante

2 = Rectangular hacia atrás

3 = Integración trapezoidal

4 = Prewarped Tustin

5 = Cualquier otra técnica de integración

6 = Mapeo de polos y ceros

7 = Transformada Z

8 = Retenedor de orden cero (ZOH)

9 = Retenedor de primer orden

10= Slew - Hold

T: período de muestreo



Wo: frecuencia de corte (solo para el método 4)

-DIGITAL (DIGITAL,T).- Permite trabajar con sistemas digitales y muestreados con un período de muestreo igual a T segundos.

-DISPLAY (DISP,Gi).- Muestra la función Gi en simple precisión.

-DFDISPLAY (DFDIS,Gi).- Muestra la función Gi en doble precisión.

-DTIME (DTIME,Gi,type,time axis,output axis,"title",back,fore).- Este comando permite graficar respuestas en el tiempo de sistemas digitales en lazo abierto y en lazo cerrado.

Parámetros:

Type = 1 (respuesta paso en lazo cerrado)

= 2 (respuesta impulso en lazo cerrado)

= 3 (respuesta paso en lazo abierto)

= 4 (respuesta impulso en lazo abierto)

time axis: 0,muestreo mayor,incremento de muestreo,# de div.(eje)

1,tiempo mayor,incremento de muestreo,# de div.(eje)

output axis: menor,mayor,# de divisiones de eje

title: título centrado en la parte superior del diagrama

background: 0 = líneas(default), 1 = marcas

foreground: 0 = líneas(default), 1 = puntos, 2 = picos.

Luego de que un diagrama ha sido creado se presenta una serie de opciones las cuales pueden usarse para cambiar parámetros del diagrama así:

A: Permite graficar dos o más funciones en el dominio de Laplace ó en el dominio Z.

C: Cursor (nos muestra el valor de la función para cada muestreo.

D: Cambios de opciones de fondo y primer plano(back y foreground).

E: Cambio de límites de los ejes

H: Permite imprimir el gráfico que se muestra en pantalla

L: Permite poner etiquetas o rótulos en el diagrama

F: Una vez hecho los cambios (E) permite volver a graficar

Q: Se sale del comando Dtime

T: Líneas gruesas de fondo

Z: Centra el diagrama cambiando automáticamente los límites de los ejes.

M: Inserta puntos intermedios en un rango específico de frecuencias.

-ENTER (ENTER,  $G_i$ , Numerador, Denominador).- Ingresar la función de transferencia  $G_i(s)$  en el modo análogo o  $G_i(z)$  en el modo digital.

Parámetros:

numerador:# de polinomios, 1er polinomio, 2do polinomio,....

denominador:# de polinomios, 1er polinomio, 2do polinomio,..

polinomio:orden del polinomio, coeficientes desde el orden mas alto hasta el mas bajo.

-ILT (ILT,  $G_i$ , CAUSAL/, ANTI-CAUSAL/, región de convergencia).-

Este comando calcula y muestra la transformada inversa de Laplace. La región de convergencia (r.c) tiene la siguiente forma:

- (1) si no se especifica parámetros se asume una r.c causal
- (2) CAUSAL, la r.c causal se encuentra a la derecha de todos los polos de  $G_i(s)$
- (3) ANTI-CAUSAL, la r.c anti-causal se encuentra a la izquierda de todos los polos de  $G_i(s)$
- (4) número que determina la posición de la línea paralela al eje  $j\omega$ ; la línea integral se asume un número +, una cantidad infinitesimal a la derecha del número ingresado.

-IZT (IZT,  $G_i$ , /CAUSAL/ANTI-CAUSAL/región de convergencia (r.c)).- Computa y muestra la transformada inversa Z (permite resolver ecuaciones de diferencias).

Parámetros:

- (1) si no se especifica parámetros se asume una r.c causal
- (2) CAUSAL, la r.c es una región con un radio interior mas grande que la magnitud de todos los polos de  $G_i(z)$
- (3) ANTI-CAUSAL, la r.c es una región con un radio interior infinitesimal mayor que 0+
- (4) número que determina el radio de la integral de línea circular.

-LPDISPLAY (LPDISPLAY,  $G_i$ , "Message").- Permite imprimir una función de transferencia  $G_i(s)$  o  $G_i(z)$ , numerador y denominador son impresos en forma de factores de polinomios y en simple precisión.

-MACRO.- Se ingresa al nivel de comandos de macros que permiten editar y crear macros. Dentro de este editor de líneas se tienen los siguientes comandos:

ADD, n :ingresa al modo de edición e inserta líneas despues de la línea n.

DELETE,n,m :borra líneas desde la línea n hasta la m

LIST,n,m :lista las líneas desde la n hasta la m

NEW :borra todas las líneas de un macro.

RECALL,filename :permite traer un macro desde la unidad de diskette o desde el disco duro.

REPLACE,n,m,string1;string2 :reemplazo de strings desde la línea n hasta la m

STORE,filename :almacena un macro en un archivo con extensión.MAC

QUIT :permite salir del modo macro y regresa al nivel CC o DIG.

Los macros deberán ser ejecutados desde el nivel de comandos CC, mediante el siguiente comando: @MACRO,&1,&2,.....&n

-MR.- Este nivel de comandos es usado para computar algoritmos de sistemas multiorden de transformadas Z y crear diagramas de frecuencia de funciones de Laplace y en el dominio z. Dentro de este nivel usaremos los siguientes comandos:

-EXPAND (EXPAND,Gi,Gj,N).- Expande la escala de tiempo para una secuencia digital, cambia el período de muestreo de T a T/N.

Parámetros:

Gi(z): función de entrada con período T

Gj(z): función de salida con período T/N

N: Gj(n) tiene N-1 ceros insertados en cada muestreo de Gi(n)

No existe pérdida de información ya que es un proceso de expansión, y en el dominio de la frecuencia se puede expresar

mediante la identidad:  $G_j(z) = G_i(z^N)$

En resumen este comando permite computar sistemas multiorden lentos-rápidos (Slow-Fast).

-SKIP (SKIP,  $G_i, G_j, N$ ).- Implementa un algoritmo de muestreo de salto, pues cambia el período de muestreo desde  $T$  a  $NT$ .

Parámetros:

$G_i(z)$ : función de entrada con período  $T$

$G_j(z)$ : función de salida con período  $NT$

$N$ :  $G_j(n)$  contiene a cada  $n$ -simo muestreo de  $G_i(n)$

Existe pérdida de información, y en el dominio del tiempo se establece la siguiente identidad:

$$G_j(n) = G_i(N * T) \text{ para todo } N$$

En el dominio de la frecuencia la transformada  $z$  está relacionada por la expresión:

$$G_j(z) = 1/N * \sum G_i(e^{2\pi k/n} z^{1/n})$$

Este comando permite computar sistemas multiorden rápidos-lentos (Fast-Slow). Usa el método de expansión en series.

-PFE (PFE,  $G_i$ ).- Computa y muestra la función de transferencia  $G_i(s)$  o  $G_i(z)$  expandida en fracciones parciales.

-PZF (PZF,  $G_i$ ).- Computa los polos y ceros de  $G_i(s)$  o  $G_i(z)$  y luego muestra el resultado como una fracción de ceros sobre polos. Los polos complejos los muestra de tal manera que su parte real e imaginaria son evidentes. Los polos y ceros multiples son agrupados conjuntamente.

-QUIT.- Este comando permite salir del programa CC, luego de esto se presenta un prompt para asegurar si se desea salir.

-RECALL (RECALL,  $G_i$ , filename).- Llama a un archivo que contiene una función de transferencia, asume que está en el

mismo formato escrito en el comando STORE.

-SHORTHAND (SHORTHAND,Gi).- Muestra la función de transferencia  $G_i(s)$  o  $G_i(z)$  en notación en especial. El numerador y el denominador son arreglados en forma de factores polinómicos cada uno de los cuales contiene un cero o polo real o un par de polos o ceros conjugados. Estos factores son mostrados así:

$$(s + a) = (a) \quad ; \quad (s^2 + 2\zeta W_n s + W_n^2) = (\zeta, W_n)$$

-STORE (STORE,Gi).- Crea un archivo y almacena los coeficientes de la función de transferencia  $G_i$ . Se almacena en el disco duro en el archivo \$\$SETUP a menos que se especifique la unidad de drive respectiva.

-SINGLE (SINGLE,Gi).- Muestra la función de transferencia  $G_i(s)$  o  $G_i(z)$  como una fracción de polinomios simples (factores simples).

-TCF (TCF,Gi).- Computa los polos y ceros de  $G_i(s)$  o  $G_i(z)$  y luego muestra el resultado en forma de constantes de tiempo.

-TIME (TIME,Gi,type,auto) o (TIME,Gi,type,r.c,time axis, output axis,"title",back,fore) Diagrama la respuesta de tiempo de  $G_i(s)$

Parámetros:

- type = 1 (respuesta paso en lazo en cerrado)
- = 2 (respuesta impulso en lazo cerrado)
- = 3 (respuesta paso en lazo abierto)
- = 4 (respuesta impulso en lazo abierto)
- = 5 (respuesta impulso en lazo abierto no-causal)

r.c : región de convergencia solo para tipo 5

CAUSAL = r.c causal

ANTI-CAUSAL = r.c anti-causal

NUMERO = localización de la línea integral.

time axis: menor,mayor,# de divisiones,# de puntos.

output axis: menor,mayor,# de divisiones.

background(fondo): 0 = líneas(default) 1 = marcas

foreground(primer plano): 0 = líneas(default) 1 = puntos

Luego de que un diagrama ha sido creado se presenta una serie de opciones las cuales pueden usarse para cambiar los parámetros del diagrama, las mismas que son similares a las opciones descritas en el comando DTIME. Para el caso de TIME la opción M incrementa la escala de tiempo en un 50%.

-UNITARY (UNITARY,  $G_i$ ).- Muestra la función de transferencia  $G_i(s)$  o  $G_i(z)$  en forma unitaria, cada uno de los factores polinómicos es convertido a un polinomio unitario cuyo coeficiente mas alto es 1.

## APENDICE B

En este apéndice se dan las principales identidades necesarias para el análisis de sistemas multi-orden. Cada una de ellas pueden ser demostradas extendiendo las definiciones de los operadores  $Z\{\}$ , prestando atención a como su definición depende de su argumento.

1)  $Z^T\{a(s)\}$  = transformada z de una función  $a(s)$

2)  $Z^T\{b^{NT}(z)\}$  = expand

3)  $Z^{NT}\{b^T(z)\}$  = skip

4)  $Z^T\{b^T(z)\}$  =  $b^T(z)$  muestreador ficticio

5)  $Z^{NT}\{a(s)\}$  =  $Z^{NT}\{Z^T\{a(s)\}\}$  muestreador ficticio

6)  $Z^T\{a(s)b^T(z)\}$  =  $Z^T\{a(s)\}b^T(z)$

7)  $Z^T\{b^{NT}(z)c^{NT}(z)\}$  =  $Z^T\{b^{NT}(z)\}Z^T\{c^{NT}(z)\}$

8)  $Z^T\{a(s)b^{NT}(z)\}$  =  $Z^T\{a(s)\}Z^T\{b^{NT}(z)\}$

9)  $Z^{NT}\{a(s)b^T(z)\}$  =  $Z^{NT}\{Z^T\{a(s)\}b^T(z)\}$

10)  $Z^{NT}\{Z^T\{b^{NT}(z)\}\}$  =  $b^{NT}(z)$

11)  $Z^{NT}\{b^T(z)Z^T\{c^{NT}(z)\}\}$  =  $Z^{NT}\{b^T(z)\}c^{NT}(z)$

Las siguientes ecuaciones usan conceptos del máximo común divisor (m.c.d.) y del mínimo común múltiplo (m.c.m.)

12)  $Z^{NT}\{b^{MT}(z)\}$  =  $Z^{NT}\{Z^{PT}\{b^{MT}(z)\}\}$  donde  $P = \text{mcd}$  o  $\text{mcm}$  (N, M)

13)  $Z^{NT}\{a(s)b^{MT}(z)\}$  =  $Z^{NT}\{Z^{PT}\{a(s)\}Z^{PT}\{b^{MT}(z)\}\}$  donde  
 $P = \text{mcd}(N, M)$

14)  $Z^{T/N}\{b^{T/M}(z)\}$  =  $Z^{T/N}\{Z^{T/P}\{b^{T/M}(z)\}\}$

15)  $Z^{T/N}\{a(s)b^{T/M}(z)\}$  =  $Z^{T/N}\{Z^{T/P}\{a(s)\}Z^{T/P}\{b^{T/M}(z)\}\}$  donde  
 $P = \text{mcd}(n, m)$



Es también importante recordar que las siguientes expresiones no son verdaderas:

$$16) \quad Z^T\{a(s)d(s)\} = Z^T\{a(s)\}Z^T\{d(s)\}$$

$$17) \quad Z^{NT}\{b^T(z)c^T(z)\} = Z^{NT}\{b^T(z)\}Z^{NT}\{c^T(z)\}$$

$$18) \quad Z^T\{a(s)\} = Z^T\{Z^{NT}\{a(s)\}\}$$

$$19) \quad Z^T\{Z^{NT}\{b^T(z)\}\} = b^T(z)$$

$$20) \quad Z^T\{b^{NT}(z)Z^{NT}\{c^T(z)\}\} = Z^T\{b^{NT}(z)c^T(z)\}$$

## APENDICE C

En este apéndice se presentan rápidamente las características de los elementos principales del computador análogo-híbrido EAI Mini AC usados en la simulación de sistemas digitales y muestreados.

Track-Store (T/S).- Este será el elemento de mayor importancia en la simulación. El Track-Store tiene tres modos de operación: Track:T Store:S Condición Inicial:IC. Cuando es seleccionado el modo IC la salida del amplificador es igual al inverso del valor análogo que se tiene a la entrada del terminal  $E_{1c}$ , cuando es seleccionado el modo T el amplificador sigue (track) a la entrada analógica. Al seleccionar el modo S actúa un capacitor el mismo que almacena y mantiene el valor analógico alcanzado hasta antes de haber sido seleccionado este modo. Por tanto puede usarse como un elemento de memoria analógica que muestra una señal analógica continuamente y sobre un comando lógico mantiene un valor simple de esa señal. Hay que aclarar que cuando se conmuta de track a store se produce un retardo de 0.7 useg. que permite conectar las unidades T-S en cascada. Resumiendo el funcionamiento del Track-Store se tiene:

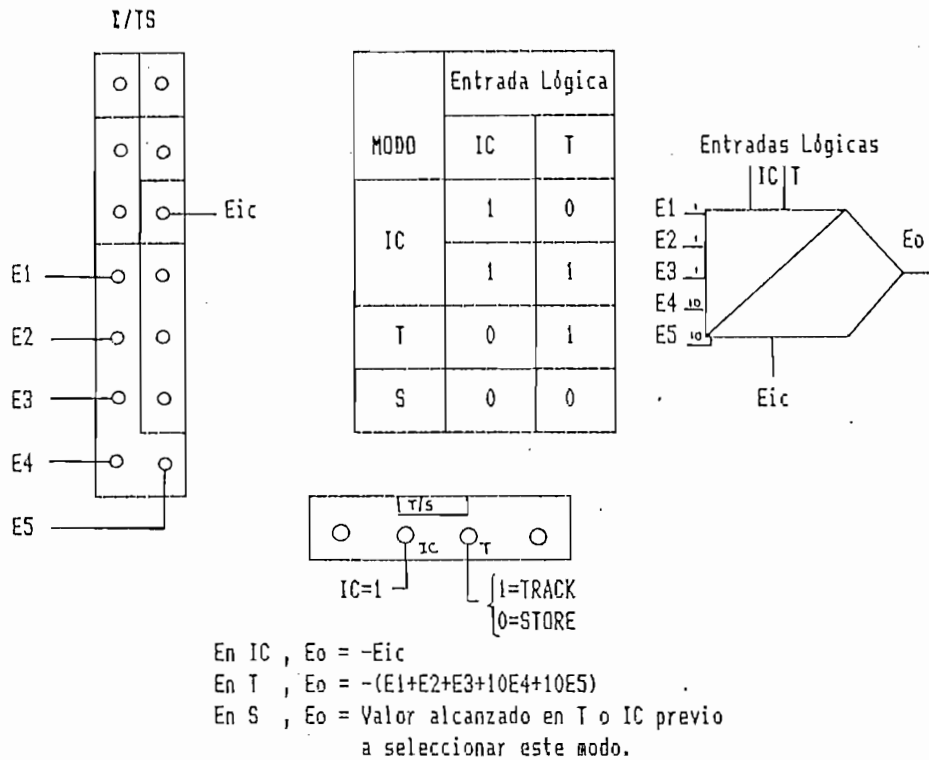


Fig 2. Señales lógicas y modos de funcionamientos de los Track-Store

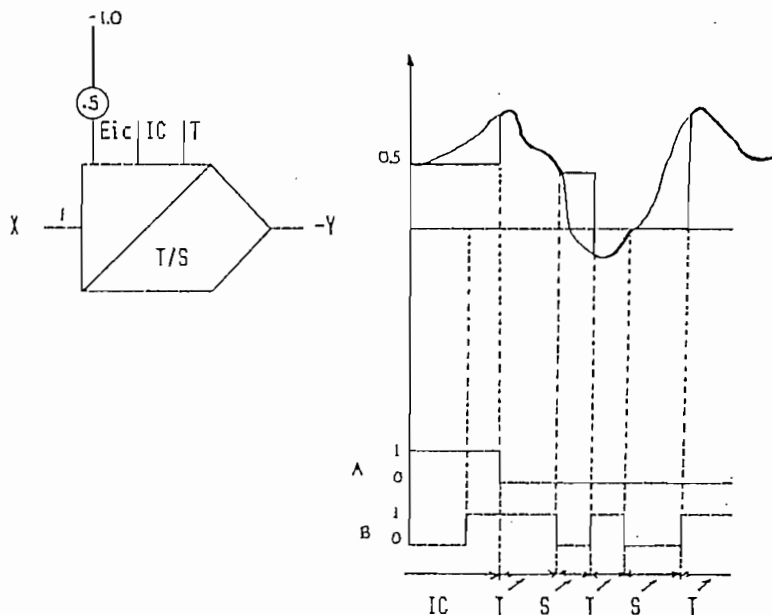


Fig 3. Entrada y Salida en un Track-Store

Contador Binario (CTR/MTR).- Para el número de muestreo se aprovechará del Contador Binario para lo cual previamente seleccionamos un número entero N entre 1 y 127 mediante los interruptores (64,32,16,8,4,2,1) tal que la suma total sea un número menor que el conteo deseado.

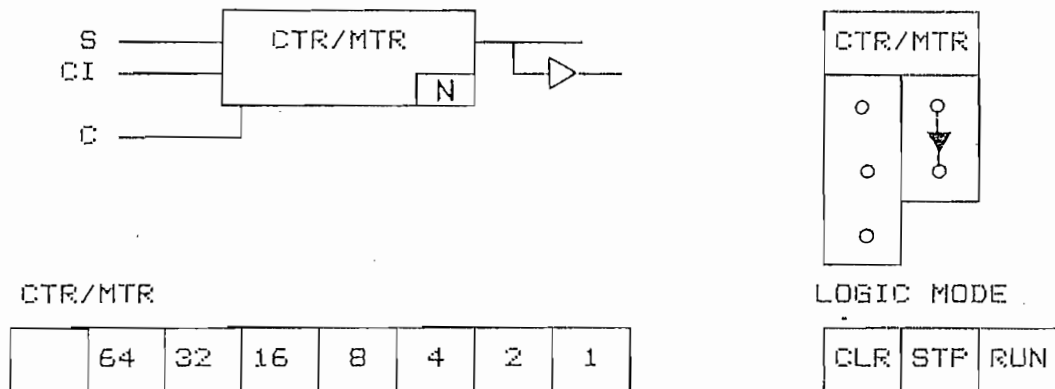


Fig 4. Señales de Control del Contador

Las reglas que se siguen con el contador son:

- El contador debe ser seteado antes de empezar el conteo, esto implica que la entrada lógica S del contador debe ser un 1L de corta duración.
- El contador incrementa cada vez que en la señal lógica CI se tiene un pulso positivo (┌).
- Un alto en el terminal C(Clear) hace que la salida del contador sea 0 en el próximo pulso de reloj, pero no se borran los registros asociados con los interruptores 1,2,4..,64 El botón CLR del panel de modo lógico borra el registro.
- Si C tiene 1L mientras CI es 0L el contador incrementará pero su salida puede no ser válida.

Timer.- Provee señales lógicas A,B y EB las mismas que serán

usadas como entradas de las señales de control de los Track Store. Las señales A y B son intervalos de tiempo complementarios utilizados para controlar los modos de computación.

Existen 2 entradas para el control del Timer . Cuando RUN=1 y PP está presionado, el Timer opera , adopta el estado A antes de pasar al B. Si RUN=0 el Timer se mantiene en el intervalo A. Cuando H=1, el Timer se mantiene en el intervalo B y cuando H=0 el timer completará el intervalo B. Las entradas RUN y H están predefinidas como 1 y 0 respectivamente. A continuación se muestran las diferentes opciones de la escala de tiempo para A y B.

Rate	Timer-Second	IC	OP
SLOW	1 o 0.1	0.7s	.5s - 105s
FAST	0.01 o 0.001	7ms	5ms - 1.05s

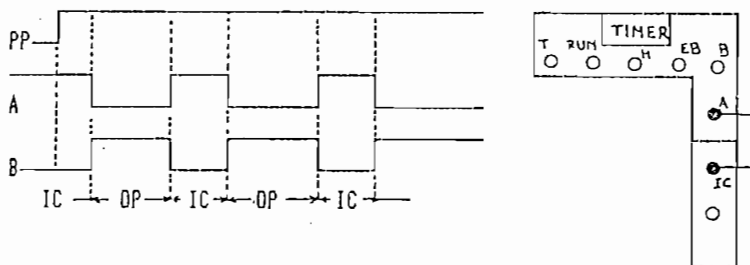


Fig 5. Funcionamiento y rangos del Timer

Flip Flop.- Los Flip - Flop son elementos de memoria. Cuando se tenga un 1 lógico a la entrada S (SET) de un Flip - Flop, la salida TRUE se pondrá en 1L y permanecerá así aún cuando se retire el 1L en la entrada S (se aplique un 0L) El Flip - Flop tiene 5 terminales como se muestra abajo:

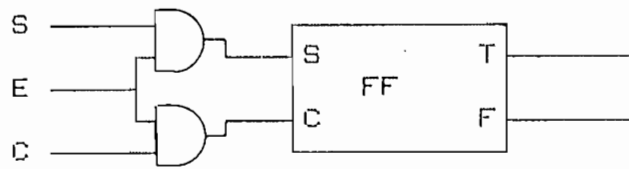


Fig 6. Configuración del Flip Flop

La señal de control E habilita ó deshabilita al Flip - Flop, si  $E = 1$ , las 2 compuertas AND que son parte integral del Flip - Flop pueden responder a las señales S y C.

Si  $E = 0$  pondrá a 0 la salida T del Flip - Flop. Por predefinición  $E = 1$ .

## REFERENCIAS

- [1] . KUD, Benjamín.- Digital Control Systems Págs. 139-148.
- [2] . BASTIDAS, Jorge.- Tesis de Grado 1981.
- [3] . BASTIDAS, Jorge.- Tesis de Grado. Características de Funcionamiento del Motomatic.
- [4] . SOTO, Lucía.- Tesis de Grado 1986.
- [5] . SOTO, Lucía.- Tesis de Grado. Condiciones de  $K_p$  y  $K_i$  para Control de Velocidad.
- [6] . SOTO, Lucía.- Tesis de Grado. Condiciones de  $K_p$  y  $K_d$  para Control de Posición.
- [7] . ACOSTA, Galo.- "Lugar Geométrico de las Raíces para Sistemas Discretos", Tesis de Grado EPN.