

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS

APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE CÓPULAS EN MODELOS DE RIESGO DE CRÉDITO: DETERMINACIÓN Y ANÁLISIS DEL VALOR EN RIESGO Y PÉRDIDA ESPERADA EN LA COLA

TESIS DE GRADO PREVIO A LA OBTENCIÓN DE MAGÍSTER EN RIESGO FINANCIERO

FELIPE ALEXANDER ANDRADE CÓNDOR

alexander_inm@hotmail.com

Director: Dr. Hólger Aníbal Capa Santos

holger.capa@epn.edu.ec

2014

DECLARACIÓN

Yo, Felipe Alexander Andrade Condor declaro bajo juramento que el trabajo aquí descrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentada para ningún grado o calificación profesional; y, que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

La Escuela Politécnica Nacional puede hacer uso de los derechos correspondientes a este trabajo, según lo establecido por la Ley de Propiedad Intelectual, por su Reglamento y por la normatividad institucional vigente.

FELIPE ALEXANDER ANDRADE CÓNDOR

CERTIFICACIÓN

Certifico que el presente trabajo fue desarrollado por Felipe Alexander Andrade Cóndor, bajo mi supervisión.

Dr. Hólger Aníbal Capa Santos
DIRECTOR

AGRADECIMIENTOS

Mi profunda gratitud y estima:

Al Dr. Holger Capa por su acertada y gentil dirección, por valioso apoyo y contribución en el desarrollo de esta disertación.

A la Escuela Politécnica Nacional por darme la oportunidad de realizar mi formación de cuarto nivel en tan prestigiosa institución.

A la institución financiera que acogió mi propuesta de investigación y facilitó la información para la elaboración este documento.

DEDICATORIA

Al Señor mi Dios hacedor de maravillas y todo poderoso, quién con su respaldo levantó mi espíritu, me colmó de bendiciones y me enseñó que no existen imposibles...

A mi esposa, mi compañera y amiga, mi felicidad y fortaleza, paradigma de esfuerzo y amor...

A mi madre amada, quien con su ejemplo me enseñó el significado del amor, la disciplina y responsabilidad...

A mi colegio, la institución que instruyó mi intelecto y educó mi corazón...

Felipe Alexander Andrade Cóndor

ÍNDICE DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN		1
1	PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA	4
1.1	CONCEPTOS PRELIMINARES	4
1.1.1	Administración de Riesgos	4
1.1.2	Riesgo de Crédito	5
1.2	MEDIDAS DE RIESGO	6
1.2.1	Valor en Riesgo –VaR–	6
1.2.2	Pérdida Esperada en la Cola (<i>Expected Shortfall</i>) -ES-	11
1.3	PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	13
2	CÓPULAS Y DEPENDENCIA	15
2.1	CÓPULAS	15
2.2	TEOREMA DE SKLAR	16
2.3	FAMILIAS DE CÓPULAS	16
2.3.1	Cópulas Elípticas	17
2.3.2	Cópulas de Arquímedes	18
2.4	ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS	19
2.5	SIMULACIÓN DE CÓPULAS	21
2.5.1	Simulación cópula Gaussiana	21
2.5.2	Simulación cópula t de <i>Student</i>	21
2.5.3	Simulación cópulas de Arquímedes	22

3	MEDIDAS DE RIESGO DE CRÉDITO.....	24
3.1	DEFINICIÓN DEL INCUMPLIMIENTO	24
3.2	TASA DE INCUMPLIMIENTO.....	25
3.3	DEFINICIÓN DE GRUPOS HOMOGÉNEOS	25
3.4	PÉRDIDA ESPERADA	26
3.5	CREDIT VAR	27
3.6	PÉRDIDA ESPERADA EN LA COLA –ES-.....	27
4	APLICACIÓN A UN PORTAFOLIO DE CRÉDITO DE CONSUMO	29
4.1	DEFINICIONES GENERALES.....	29
4.2	SEGMENTACIÓN DEL PORTAFOLIO	30
4.3	ANÁLISIS DESCRIPTIVO DE LA CARTERA	32
4.3.1	Distribución del incumplimiento	32
4.3.2	Monto concedido, plazo y tasa	33
4.3.3	Tasa de incumplimiento	33
4.4	AJUSTE DE DISTRIBUCIONES MARGINALES	36
4.4.1	Estimación y selección de Distribuciones Univariadas.....	36
4.4.2	Parámetros de las Distribuciones Marginales	38
4.5	AJUSTE DE CÓPULAS	42
4.5.1	Estimación de la correlación de rango y parámetros de las cópulas	43
4.5.2	Bondad de Ajuste de las cópulas	45

4.5.3	Prueba de Uniformidad de las Distribuciones Marginales de la Cópula	46
4.5.4	Prueba de Bondad de Ajuste.....	47
4.6	APLICACIÓN DEL TEOREMA DE SKLAR.....	49
4.6.1	Modelo de Distribuciones Multivariadas de Cópulas –mvdc-	49
4.6.2	Prueba de Dependencia Multivariada	60
4.7	INDICADORES DE RIESGO DE CADA GRUPO	62
4.8	INDICADORES DE RIESGO DEL PORTAFOLIO	65
4.9	RESULTADOS EMPÍRICOS VS. APLICACIÓN TEORÍA DE CÓPULAS	68
5	CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.....	72
	REFERENCIAS.....	77
	ANEXOS	81

LISTA DE FIGURAS

FIGURA No. 1. SEGMENTACIÓN DEL PORTAFOLIO MEDIANTE TÉCNICA CHAID	30
FIGURA No. 2. GRÁFICOS DE GANANCIAS E ÍNDICE DE LA SEGMENTACIÓN DEL PORTAFOLIO MEDIANTE TÉCNICA CHAID	31
FIGURA No. 3. DISTRIBUCIÓN DE LOS CRÉDITOS POR GRUPOS DEFINIDOS CON LA TÉCNICA CHAID	32
FIGURA No. 4. PORCENTAJE DE CRÉDITOS NO INCUMPLIDOS E INCUMPLIDOS POR GRUPOS DEFINIDOS CON LA TÉCNICA CHAID	32
FIGURA No. 5. EVOLUCIÓN TASA DE INCUMPLIMIENTO TI POR GRUPOS DEFINIDOS CON LA TÉCNICA CHAID	35
FIGURA No. 6. HISTOGRAMA Y DENSIDAD DE LAS DISTRIBUCIONES UNIVARIADAS AJUSTADAS DE TI Y EAD POR GRUPO AJUSTADAS POR MÁXIMA VEROSIMILITUD	40
FIGURA No. 7. ESCENARIOS OBTENIDOS CON MVDC Y DENSIDAD DE LAS DISTRIBUCIONES MARGINALES GRUPO 1	49
FIGURA No. 8. GRÁFICOS DE CONTORNO MVDC GRUPO 1	50
FIGURA No. 9. PERSPECTIVA DE LA SUPERFICIE MVDC GRUPO 1	50
FIGURA No. 10. ESCENARIOS OBTENIDOS CON MVDC Y DENSIDAD DE LAS DISTRIBUCIONES MARGINALES GRUPO 2	51
FIGURA No. 11. GRÁFICOS DE CONTORNO MVDC GRUPO 2	51
FIGURA No. 12. PERSPECTIVA DE LA SUPERFICIE MVDC GRUPO 2	51
FIGURA No. 13. ESCENARIOS OBTENIDOS CON MVDC Y DENSIDAD DE LAS DISTRIBUCIONES MARGINALES GRUPO 3	52
FIGURA No. 14. GRÁFICOS DE CONTORNO MVDC GRUPO 3	52
FIGURA No. 15. PERSPECTIVA DE LA SUPERFICIE MVDC GRUPO 3	53
FIGURA No. 16. ESCENARIOS OBTENIDOS CON MVDC Y DENSIDAD DE LAS DISTRIBUCIONES MARGINALES GRUPO 4	53
FIGURA No. 17. GRÁFICOS DE CONTORNO MVDC GRUPO 4	54
FIGURA No. 18. PERSPECTIVA DE LA SUPERFICIE MVDC GRUPO 4	54
FIGURA No. 19. ESCENARIOS OBTENIDOS CON MVDC Y DENSIDAD DE LAS DISTRIBUCIONES MARGINALES GRUPO 5	55
FIGURA No. 20. GRÁFICOS DE CONTORNO MVDC GRUPO 5	55
FIGURA No. 21. PERSPECTIVA DE LA SUPERFICIE MVDC GRUPO 5	56

FIGURA No. 22. ESCENARIOS OBTENIDOS CON MVDC Y DENSIDAD DE LAS DISTRIBUCIONES MARGINALES GRUPO 6	56
FIGURA No. 23. GRÁFICOS DE CONTORNO MVDC GRUPO 6	57
FIGURA No. 24. PERSPECTIVA DE LA SUPERFICIE MVDC GRUPO 6	57
FIGURA No. 25. ESCENARIOS OBTENIDOS CON MVDC Y DENSIDAD DE LAS DISTRIBUCIONES MARGINALES GRUPO 7	58
FIGURA No. 26. GRÁFICOS DE CONTORNO MVDC GRUPO 7	58
FIGURA No. 27. PERSPECTIVA DE LA SUPERFICIE MVDC GRUPO 7	59
FIGURA No. 28. ESCENARIOS OBTENIDOS CON MVDC Y DENSIDAD DE LAS DISTRIBUCIONES MARGINALES GRUPO 8	59
FIGURA No. 29. GRÁFICOS DE CONTORNO MVDC GRUPO 8	60
FIGURA No. 30. PERSPECTIVA DE LA SUPERFICIE MVDC GRUPO 8	60
FIGURA No. 31. DENSIDAD DE LAS PÉRDIDAS ESTIMADAS, <i>CREDIT VAR</i> Y <i>EXPECTED SHORTFALL</i> POR GRUPO (MILES DE USD)	64
FIGURA No. 32. DENSIDAD PÉRDIDAS ESTIMADAS, <i>CREDIT VAR</i> Y <i>EXPECTED SHORTFALL</i> (MILES DE USD.)	67

LISTA DE TABLAS

TABLA No. 1. MONTO, TASA Y PLAZO PROMEDIO DEL PORTAFOLIO POR GRUPOS DEFINIDOS CON LA TÉCNICA CHAID	33
TABLA No. 2. TASA DE INCUMPLIMIENTO Y SALDO PROMEDIO POR GRUPOS DEFINIDOS CON LA TÉCNICA CHAID.....	34
TABLA No. 3. ESTADÍSTICOS DE BONDAD DE AJUSTE Y CRITERIOS DE INFORMACIÓN PARA DISTRIBUCIONES UNIVARIADAS DE TI Y EAD POR GRUPO.....	37
TABLA No. 4. PARÁMETROS DE LAS DISTRIBUCIONES MARGINALES AJUSTADAS DE LAS DISTRIBUCIONES UNIVARIADAS TI Y EAD POR GRUPO	39
TABLA No. 5. CORRELACIÓN DE RANGO DE SPEARMAN Y PARÁMETROS DE CÓPULAS POR GRUPO Y CLASE DE CÓPULA.....	44
TABLA No. 6. INDICADORES DE AJUSTE DE CÓPULAS POR GRUPO Y CLASE DE CÓPULA...	45
TABLA No. 7. TEST DE ANDERSON DARLING DE LAS DISTRIBUCIONES MARGINALES DE LAS CÓPULAS POR GRUPO Y CLASE DE CÓPULA.....	47
TABLA No. 8. PRUEBA BONDAD DE AJUSTE POR GRUPO	48

TABLA No. 9. PRUEBA DE DEPENDENCIA MULTIVARIADA POR GRUPO Y MVDC	61
TABLA No. 10. INDICADORES DE RIESGO MVDC POR GRUPO EN USD.....	63
TABLA No. 11. INDICADORES DE RIESGO PORTAFOLIO DE CRÉDITO DE CONSUMO EN USD.	65
TABLA No. 12. INDICADORES DE RIESGO EMPÍRICOS Vs. MVDC POR GRUPOS EN USD.	70

LISTA DE ANEXOS

ANEXO A PRUEBAS DE AJUSTE DISTRIBUCIONES UNIVARIADAS TI Y EAD .	81
ANEXO B PERSPECTIVA CÓPULAS AJUSTADAS	84
ANEXO C PERSPECTIVA MVDC AJUSTADOS	88
ANEXO D INDICADORES DE RIESGO MVDC	92

RESUMEN

El presente trabajo consiste en una aplicación de la teoría de cópulas a un portafolio de crédito en una institución financiera. Gracias a la aplicación de esta teoría se pudo conocer la estructura de dependencia del portafolio para estimar Indicadores de Riesgo.

La aplicación de la teoría de cópulas se realizó en cuatro pasos. Primero se estimaron las distribuciones marginales a partir, de las distribuciones univariadas de la Tasa de Incumplimiento TI y del monto de exposición EAD en base a la información histórica. Posteriormente con esta misma información se construyeron las cópulas. Con estos dos insumos se aplicó el Teorema de Sklar por medio de la construcción de Modelos de Distribuciones Multivariadas de Cópulas mvdc y la generación de escenarios. Por último, con estos escenarios se estimó la pérdida total de la cartera, la Máxima Pérdida, el *Credit VaR* y la Pérdida Esperada en la cola o *Expected Shortfall ES*.

Los resultados indican que, al 99,5% de confianza el portafolio en análisis puede presentar una Pérdida Máxima de 21.423.543,99 USD en un período de 30 días. En condiciones normales de mercado, en el lapso de un mes al mismo nivel de confianza, la máxima pérdida que puede presentar el portafolio es 18.649.516,91 USD (*Credit VaR*). De modificarse algún factor y empeorarse las condiciones de mercado, una vez superada la máxima pérdida, la pérdida esperada luego del *Credit VaR*, es decir, el *Expected Shortfall* puede alcanzar un valor de 21.487.961,16 USD al 99,50% de confianza.

Al comparar los resultados de los indicadores de riesgo obtenidos con la aplicación del Teorema de Sklar, con respecto a los resultados obtenidos sin aplicar ninguna metodología (resultados empíricos); es decir, sin considerar la estructura de dependencia que existe dentro del portafolio, los indicadores de riesgo empíricos subestiman los resultados y eventos extremos. Esto pone en evidencia la pertinencia y necesidad de aplicar la metodología propuesta en el presente trabajo.

Palabras clave:

Riesgo de Crédito, Indicadores de Riesgo, Cópulas, Modelos de Distribución Multivariada de Cópulas, *Credit VaR*, *Expected Shortfall*.

ABSTRACT

This work is an application of the theory of copulas to a portfolio of credit with a financial institution. Thanks to the application of this theory could know the dependence structure of the portfolio to estimate risk indicators.

The application of the theory of copulas was performed in four steps. First the marginal distributions were estimated from the univariate distributions of TI Default Rate and the amount of exposure EAD based on historical information. Later with this same information copulas were built. With these two inputs Sklar's theorem was applied by means of the construction of models of Multivariate Distributions and Copulas mvdc and scenario generation. Finally, with these scenarios the total loss of the portfolio, the Maximum Loss, Credit VaR and Expected Shortfall ES were estimated.

The results indicate that using 99.5% confidence level the portfolio can present a Maximum Loss of \$ 21,423,543.99 over a period of 30 days. Under normal market conditions, within the same confidence level in one month period, the maximum loss that can present the portfolio is \$ 18,649,516.91 (Credit VaR). Modifying some factors and market conditions worsen, once the maximum loss was overcome, the expected loss after the Credit VaR, ie. the Expected Shortfall can reach a value of \$ 21,487,961.16 at 99.50% confidence.

Comparing the results of the risk indicators obtained by applying Theorem Sklar, regarding the results obtained without applying any methodology, ie, without considering the dependence structure that exists within the portfolio, indicators of empirical risk underestimate results and extreme events. This highlights the relevance and necessity of applying the methodology proposed in this paper.

Keywords:

Credit Risk, Risk Indicators, copulas, Multivariate Distribution Models of copulas, Credit VaR, Expected Shortfall.

INTRODUCCIÓN

Las pérdidas ocasionadas por el riesgo de crédito, entendiendo a éste como el deterioro de calidad crediticia de la contraparte o la pérdida potencial que se obtiene por motivos del incumplimiento en una transacción financiera (Cerezo, Bielsa, & Ramón, 2011), constituye uno de los temas más importantes de análisis dentro de las instituciones financieras, más aún cuando el estudio poco acertado puede ocasionar pérdidas en el valor patrimonial de la compañía, y potenciales problemas en la liquidez y solvencia.

En este sentido, además del análisis con modelos tradicionales como son el Merton (1974), *CreditMetrics* (1977) o *CreditPortfolioMaganer* de KMV, y de las estructuras que se elaboran y reportan al organismo regulador ecuatoriano, es necesario proponer constantemente la aplicación de nuevos desarrollos teóricos que flexibilicen varios de los supuestos de los modelos tradicionales, profundizando el análisis en escenarios dinámicos mucho más apegados a la realidad económica y financiera. Más aún cuando estos métodos ya han sido aplicados con resultados acertados en países de la región, demostrando así su validez y pertinencia.

Bajo esta consideración, se debe tomar en cuenta que dentro de un portafolio existe una gran cantidad de factores de riesgo que interactúan constantemente entre sí. Así, para administrar un factor de riesgo se pueden identificar comportamientos marginales a través de técnicas univariadas; sin embargo, puede darse el caso de que dicho factor esté influenciado por el comportamiento de otros factores de riesgo (Melo & Becerra, 2008). Bajo esta perspectiva, los métodos que modelan la dependencia entre los factores de riesgo proporcionan valiosa información para la administración del portafolio.

De esta manera, en los modelos convencionales de asignación de portafolios como el *CAMP*, *Capital Asset Pricing Model*, *APT*, entre otros,

se ha utilizado como medida de dependencia al Coeficiente de Correlación de *Pearson*. Sin embargo, dicho coeficiente presenta algunas desventajas, como el resumir en un solo número la relación de dependencia de los factores de riesgo; posee, además limitaciones cuando el grado de asociación no es lineal; es adecuado únicamente para el caso normal multivariado y, por último, es invariante solo ante transformaciones afines positivas (Embrechts, Mcneil, & Straumann, 1999).

Frente a este panorama se propone el cálculo de la cópula como una medida que refleja la estructura de dependencia de los factores de riesgo (Bouyé et al., 2000 y Embrechts et al., 2002). El cálculo de cópulas, además de permitir el estudio de la estructura de dependencia de los factores de riesgo en el portafolio, brinda la facilidad de estimar indicadores como el Valor en Riesgo –VaR- o la Pérdida Esperada en la cola –ES-, dicho indicadores permiten la evaluación, administración y mitigación del riesgo de crédito en una institución financiera.

En este sentido, el objetivo principal de este documento es calcular y analizar la estructura de dependencia de la cartera de crédito de una institución financiera, mediante la aplicación de la teoría de cópulas como una herramienta para fortalecer la administración y mitigación del riesgo de crédito.

Así, el documento se encuentra organizado de la siguiente manera. En los dos primeros capítulos se presentan algunos conceptos de la administración e indicadores de riesgo financiero, y se esboza teoría de cópulas, sus métodos de estimación y simulación. En el tercer capítulo se define al evento de incumplimiento o *default* y se describen las medidas de riesgo de crédito. Posteriormente, en el cuarto capítulo se procede con la aplicación de la teoría de cópulas a un portafolio de crédito de consumo. Finalmente, se presentan las conclusiones y recomendación del trabajo, así como también algunos anexos con el detalle de los resultados.

Dentro del cuarto apartado, se presenta los resultados de la técnica Detección de Interacción Automática Ji – Cuadrada (CHAID) con la cual se pudo identificar ocho grupos homogéneos en el portafolio. Con estos grupos se

procedió a realizar un análisis descriptivo del monto concedido, plazo y tasa de las operaciones de crédito, tasa de incumplimiento y monto de exposición. Así también, a fin de definir las distribuciones marginales para la construcción de las cópulas, se realizó el análisis univariado de las distribuciones de la tasa de incumplimiento TI y monto de exposición EAD, para luego por medio del método de los momentos construir las cópulas que reflejen la relación de dependencia de la cartera. Una vez seleccionadas las distribuciones univariadas y cópula que mejor se ajusta a la TI y al EAD, se construyeron Modelos de Distribuciones Multivariadas de Cópulas, mvdc, con los cuales se realizaron simulaciones; seguidamente se estimaron y analizaron los Indicadores de Riesgo Pérdida Esperada, *Credit VaR*, Máxima Pérdida y *Expected Shortfall -ES-*, comparando también los resultados obtenidos con los mdvc con los resultados empíricos.

CAPÍTULO 1

PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

1.1 CONCEPTOS PRELIMINARES

1.1.1 Administración de Riesgos

De acuerdo a las definiciones de la Superintendencia de Bancos y Seguros del Ecuador –SBS- señaladas en el Libro I, Título X, Capítulo I “De la Gestión Integral y Control de Riesgos” de la Ley General de Instituciones del Sistema Financiero, se entiende como riesgo a “[...] la posibilidad de que se produzca un hecho generador de pérdidas que afecten el valor económico de las instituciones” (República del Ecuador, 2004). Según esta misma Ley, la administración de riesgo es:

[...] el proceso mediante el cual las instituciones del sistema financiero identifican, miden, controlan / mitigan y monitorean los riesgos inherentes al negocio, con el objeto de definir el perfil de riesgo, el grado de exposición que la institución está dispuesta a asumir en el desarrollo del negocio y los mecanismos de cobertura, para proteger los recursos propios y de terceros que se encuentran bajo su control y administración (República del Ecuador, 2001).

En este sentido, la administración de riesgo se enfoca a garantizar el capital económico de las Instituciones Financieras –IFI- manteniendo niveles adecuados de liquidez y solvencia. Para ello en la República del Ecuador la SBS como organismo regulador bajo la normativa vigente brinda a las IFI la posibilidad de desarrollar sus propias metodologías y herramientas de medición de riesgo de acuerdo a su perfil de riesgo.

Una adecuada administración integral de riesgo que contemple el nivel de complejidad y tamaño de la institución, conforme al Libro I, Título X, Capítulo I de la Ley General de Instituciones del Sistema Financiero debe incluir por lo menos:

- Una estrategia de negocio considerando criterios de aceptación de riesgos en función del mercado objetivo determinado y de las características de los productos diseñados.
- Políticas para la administración integral de riesgos y definición de límites de exposición para cada tipo de riesgo.
- Procedimientos para identificar, medir, controlar / mitigar y monitorear los distintos tipos de riesgo.

1.1.2 Riesgo de Crédito

“Riesgo de Crédito, también conocido como riesgo de incumplimiento, abarca los casos en que una segunda parte no puede pagar los términos previamente acordados...” (Sheppard, 2009). Las IFI se encuentran expuestas al riesgo de crédito por cuanto son intermediarios financieros.

En el Libro I, Título X, Capítulo I de la Ley General de Instituciones del Sistema Financiero, la SBS define al riesgo de crédito como *“... la posibilidad de pérdida debido al incumplimiento del prestatario o la contraparte en operaciones directas, indirectas o de derivados que conlleva el no pago, el pago parcial o la falta de oportunidad en el pago de las obligaciones pactadas”* (República del Ecuador, 2004).

El riesgo de crédito principalmente se asocia al riesgo de incumplimiento que se define como:

[...] el riesgo de que un emisor de deuda (obligado) es incapaz de cumplir sus obligaciones financieras. Cuando un deudor incumple sus obligaciones, una empresa generalmente incurre en una pérdida igual a la cantidad adeudada por el deudor menos una cantidad de recuperación [...] (Choudhry, 2006).

Para la SBS el incumplimiento *“es no efectuar el pago pactado dentro del período predeterminado; o, efectuarlo con posterioridad a la fecha en que estaba programado, o, en distintas condiciones a las pactadas en el contrato”* (República del Ecuador, 2001).

El riesgo de incumplimiento reviste mayor importancia dentro de las carteras de crédito, en la medida que la dispersión de las pérdidas dependen

críticamente de la correlación entre los eventos de incumplimiento o *default* (Chang & Chi Chen, 2010).

1.2 MEDIDAS DE RIESGO

1.2.1 Valor en Riesgo –VaR-

Como medida de riesgo el Valor en Riesgo VaR se define como “la máxima pérdida que puede ocurrir con X% de confianza durante un período de tenencia de t días” (Choudhry, 2006). Formalmente, el VaR se puede definir como el α -ésimo percentil de la distribución futura de las pérdidas y ganancias. De esta manera, si F_R , es la distribución de las futuras pérdidas y ganancias, entonces según Melo y Becerra (2008) el VaR al nivel de significancia α se encuentra definido por:

$$VaR_{\alpha} = \text{inf}\{r | F_R(r) \geq \alpha\}$$

En esencia el VaR se puede estimar a través de cuatro pasos (Choudhry, 2006):

1. Determinar el horizonte de tiempo en el que se desea estimar la pérdida potencial.
2. Seleccionar el grado de certeza o nivel de confianza requerido para aplicar la estimación del VaR; generalmente al 95% o 99% de confianza.
3. Crear una distribución de probabilidad de los posibles retornos para el instrumento o cartera en cuestión.
4. Calcular la estimación del VaR, esto es, la observación de la cantidad de pérdida asociada con esa área debajo de la curva en el valor crítico (intervalo de confianza) que está estadísticamente asociado con la probabilidad elegida para la estimación del paso 2.

Considerando estos elementos, en la práctica el VaR viene a ser la mayor pérdida probable de riesgo (expresado en unidades monetarias) de que un activo

o cartera sufrirán durante un intervalo de tiempo y con un nivel de confianza (Sheppard, 2009).

1.2.1.1 *Métodos de Estimación*

Método de Correlación

También conocido como Varianza – Covarianza, Paramétrico o Método Analítico. Asume normalidad en la distribución de los retornos de los factores de riesgo, las correlaciones entre los factores de riesgo son constantes y el delta (o sensibilidad del precio en un factor de riesgo) de cada portafolio es también constante. Para utilizar la covarianza dentro del cálculo del VaR se considera previamente tres factores: las correlaciones entre los activos del portafolio, el período de tiempo, y la volatilidad de la variación de precios (Jorion, 2007).

Método de Simulación Histórica

Es el método más simple y evita algunos inconvenientes del método de Correlación. En este método el modelo calcula las pérdidas potenciales utilizando los rendimientos históricos reales en los factores de riesgo y por lo tanto refleja la distribución no normal¹ de los rendimientos de dichos factores. Esto significa que los eventos raros y los accidentes pueden ser incluidos en los resultados. A medida que los rendimientos de los factores de riesgo utilizados para la revalorización de la cartera son los últimos movimientos reales, las correlaciones en el cálculo también son correlaciones pasadas reales. Ellos capturan la naturaleza dinámica de la correlación, así como los escenarios cuando las relaciones de correlación habituales descomponen (Jorion, 2007).

Método de simulación Monte Carlo

La simulación Monte Carlo es un método más flexible. Al igual que con la simulación histórica, la simulación Monte Carlo permite al gestor de riesgos usar

¹ En particular este método no asumen normalidad en la distribución de los rendimientos, ni correlación constante.

distribuciones históricas reales como retornos de los factor de riesgo en lugar de asumir rendimientos normales. Un gran número de simulaciones generadas aleatoriamente se ejecuta hacia delante en el tiempo utilizando la volatilidad y estimaciones de correlación elegidas por el gestor de riesgos. Cada simulación será diferente, pero en total las simulaciones se agregarán a los parámetros estadísticos elegidos (es decir, distribuciones históricas, estimaciones de la volatilidad de correlación). Este método es más realista que los dos modelos anteriores y, por lo tanto, es más probable estimar VaR con mayor precisión (Jorion, 2007).

Modelos Series Temporales: ARIMA, ARCH y GARCH

La estimación de un modelo para una variable endógena de rendimiento en una cartera, se realiza en términos de un modelo de regresión en el que el conjunto de variables explicativas estarán constituidas tanto por variables exógenas, como por valores retardados de la variable endógena. En este sentido, para la estimación de los modelos de regresión se pueden utilizar diversas técnicas, como los Mínimos Cuadrados Ordinarios o técnicas de análisis de series temporales con modelos Autoregresivos Integrados de Medidas Móviles ARIMA, siendo estos los más habituales dentro de estudio de las series financieras (Cabedo & Moya, 2000).

Para la estimación de los modelos ARCH la primera fase será la estimación de los modelos ARIMA para el rendimiento de la cartera. Una vez identificado el modelo de regresión en base al cual se podrán realizar las predicciones respecto al valor medio de la variable endógena (rendimiento de la cartera) condicionadas a la información disponible, el siguiente paso lo constituye la identificación de un esquema ARCH en el comportamiento de los residuos del proceso (Cabedo & Moya, 2000).

Los modelos ARCH, o modelos Autoregresivos con Heterocedasticidad condicional, fueron introducidos por Engle (1982), con el objetivo de estimar la varianza de la inflación. La idea básica aquí es que los retornos r_t sean no correlacionados serialmente, más la volatilidad (varianza condicional) dependa de los retornos pasados por medio de una función cuadrática... (Mejía, 2009).

El modelo GARCH no es más que una generalización del modelo ARCH sugerida por Bollerslev (1986, 1987, 1988). En este sentido, un modelo GARCH puede ser usado para describir la volatilidad con menos parámetros que los modelos ARCH (Mejía, 2009).

En la medida en que proporcionan un modelo que describe el comportamiento de la varianza, los modelos ARCH constituyen una alternativa más, susceptible de ser utilizada dentro del enfoque de varianzas-covarianzas para el cálculo del Valor en Riesgo. Concretamente, dentro de un enfoque global, en el que se considera el efecto conjunto de la totalidad de los factores de riesgo sobre el rendimiento de la cartera, los modelos de heterocedasticidad condicional autoregresiva podrán ser empleados para obtener previsiones sobre la varianza del rendimiento futuro de la cartera (Cabedo & Moya, 2000).

Teoría de Valores Extremos

La Teoría de Valores Extremos o EVT por sus siglas en inglés, se desarrolla a partir de la publicación de E. J. Gumbel (1958) denominada “Estadísticos de extremos”. El resultado fundamental del desarrollo de esta teoría es la definición del Teorema de Tipos Extremos. El principal aporte del Teorema de Tipos Extremos es facilitar una especificación funcional aproximada con la cual:

[...] estudiar la distribución del máximo de un número lo suficientemente alto de rendimientos haciendo innecesario conocer, al menos en principio, la distribución completa de la variable aleatoria original [...]

Intuitivamente parece claro, el máximo es un suceso que, por definición, pertenece a la cola derecha de la distribución y, por tanto, la distribución asintótica del máximo debería estar estrechamente relacionada con la distribución de la variable aleatoria original cuando nos situamos en su cola. [...] si estimamos el índice de cola de la distribución asintótica del máximo tendremos absolutamente determinada la parte derecha [...] y, por tanto, podremos utilizarla, bajo ciertas condiciones, para realizar una aproximación a la cola de la distribución de la variable aleatoria original, que era el objetivo buscado (Gallego et al. 2000).

Para estimar el Índice de Cola de un tipo extremo habitualmente se utiliza la estimación de Dominio Máximo de Atracción o MDA. Autores como Pickands (1975), Hill (1975), De Haan y Resnick (1980), Smith (1987), Decker et al. (1989), Leabetter (1991) y Kratz y Resnick (1995), han trabajado en diferentes estimadores del Índice de Cola.

Si las variables son rendimientos de los factores de riesgo y disponiendo de una estimación del Índice de Cola, es posible calcular los cuantiles extremos de la distribución de dichos factores, para posteriormente relacionar mediante un modelo los rendimientos los factores con el valor de la cartera para calcular el VaR (Gallego & Martínez, 2000).

Cabe destacar que en este documento no se estimarán indicadores de riesgo basados en la Teoría de Valores Extremos, por cuanto dichas estimaciones se encuentran fuera de los objetivos y alcances de la presenta disertación.

1.2.1.2 Limitaciones del VaR

Al ser una medida de riesgo, el VaR debe cumplir con algunas propiedades². Sin embargo, el VaR es fuertemente criticado por no cumplir con la propiedad o axioma de Subaditividad. Dicho incumplimiento implica la violación del supuesto de diversificación de la cartera, principio necesario para determinar los requerimientos de capital exigidos en la supervisión bancaria (Acerbi & Tasche, 2001), por cuanto el riesgo de una cartera puede ser más grande que la

² De manera general, una medida de riesgo ρ , debe cumplir con cuatro propiedades deseables para ser coherente (Acerbi & Tasche, 2001):

1. Subaditividad: $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$ La propiedad se refiere a la diversificación del riesgo del portafolio.
2. Monotonicidad: Si $X \leq Y \implies \rho(X) \leq \rho(Y)$ Si la pérdida del portafolio o el activo X es menor que Y, su riesgo no puede ser mayor.
3. Homogeneidad: $\lambda \geq 0 \implies \rho(\lambda X) \leq \lambda \rho(X)$. Efecto del riesgo cuando no hay diversificación.
4. Invarianza Traslacional: $\rho(X + a) = \rho(X) - a, a \in \mathbb{R}$. El riesgo disminuye al agregar una cantidad libre de riesgo.

Si alguna medida de riesgo no cumple con alguna de las propiedades, se obtendrán resultados paradójicos dando medidas no confiables (Mora, 2010).

suma de los riesgos independientes de sus componentes (Acerbi & Tasche, 2002).

A decir de Albanese (1997) y Artzner et al. (1999) una de las razones para que el VaR no sea subaditivo es la alta asimetría que presenta en las distribuciones de pérdidas.

Sin embargo, Embrechts et al. (1999), señala que el VaR cumple con la propiedad de subaditividad cuando se utilizan distribuciones elípticas. Formalmente:

Teorema

Suponga X_1, \dots, X_n tiene una distribución elíptica³ y considere un conjunto de portafolios lineales $\mathcal{P} = \{Z = \sum_{i=1}^n \lambda_i X_i \mid \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1\}$.

VaR es una medida coherente de riesgo en el sentido de Artzner et al. [1997]. Es monotónica, homogénea positiva, invariante traslacional y lo más importante cumple con la propiedad de la subaditividad.

$VaR_\alpha(Z_1 + Z_2) \leq VaR_\alpha(Z_1) + VaR_\alpha(Z_2), Z_1, Z_2 \in \mathcal{P}, \alpha > 0,5$, independientemente del nivel de probabilidad α usado en la definición del VaR... (Embrechts et al., 1999)

1.2.2 Pérdida Esperada en la Cola (*Expected Shortfall*) -ES-

La Pérdida Esperada en la cola o *Expected Shortfall*, surge como una propuesta de solución frente a las deficiencias de medidas de riesgos que no son coherentes (Acerbi & Tasche, 2002) como el VaR en un mundo no elíptico. En esta misma línea se han realizado varias medidas de riesgo como

³ Si X es un vector aleatorio n -dimensional y, para algún $\mu \in \mathbb{R}^n$ y Σ una matriz simétrica de dimensión $n \times n$ y definida no negativa, la función característica $\varphi_{X-\mu}(t)$ de $X - \mu$ es una función de la forma cuadrática $t' \Sigma t$, esto es:

$$\varphi_{X-\mu}(t) = \phi\left(t' \Sigma t\right)$$

entonces decimos que X tiene una distribución elíptica con parámetros μ , Σ y ϕ y se denota $X \sim E_n(\mu, \Sigma, \phi)$

el *Worst Conditional Expectation* –WCE- y la *Tail Expectation* –TCE- (Artzner, Delbaen, Eber & Heath, 1999).

Sin embargo, para el desarrollo del presente trabajo se considera la *Expected Shortfall* por ser una medida coherente de riesgo fácil de calcular y estimar (Acerbi & Tasche, 2002)⁴.

Expected Shortfall -ES- también conocida como *Tail VaR* combina aspectos de la metodología VaR con más información acerca de la distribución de los rendimientos en la cola y se define como “... el valor de la pérdida esperada de una cartera dado un exceso en el VaR...” (Sheppard, 2009) o como el promedio de las pérdidas superiores al VaR_α (Melo & Becerra, 2008). Formalmente:

$$ES_s = E(r|r \geq VaR_\alpha)$$

El VaR responde a la pregunta qué tan malas pueden ser las pérdidas y ES responde a la pregunta cuánto es la pérdida esperada cuando las cosas van mal (Hull, 2007).

Por definición la medida de riesgo ES es generalmente mayor que el VaR; esto conllevaría a un requerimiento de capital mayor pero eso es consistente con lo esperado en el nuevo acuerdo de Basilea III (Mora, 2010).

⁴ “Aunque WCE es una medida coherente de riesgo es solo útil cuando hay una base teórica bien establecida, pues se requiere del conocimiento de todo el espectro de probabilidad. Mientras que el TCE en algunas ocasiones no es una medida coherente de riesgo” (Mora, 2010)

1.3 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En los últimos siete años, las políticas macroeconómicas del gobierno ecuatoriano han incrementado significativamente la liquidez en la economía. La política fiscal expansiva del gobierno central ha provocado un incremento en la demanda agregada y ha movilizó importantes recursos económicos que se canalizan mediante el sistema financiero nacional. Solo para diciembre del año 2013, el monto de los depósitos a la vista del sistema financiero se incrementó en 47,27% con respecto al monto registrado en diciembre del 2010 (SBS, 2013).

La liquidez en la economía se canaliza por medio de la intermediación financiera, principalmente de la banca pública y privada. Según estadísticas del Banco Central del Ecuador, de diciembre del 2010 al 2013 la cartera de crédito de los bancos privados se incrementó en 52,94%.

Bajo este contexto y con la experiencia de la crisis financiera del año 2000, el desarrollo de métodos más exactos para la medición de los riesgos financieros que genere condiciones favorables para la estabilidad y salud financiera, es una de las principales preocupaciones para el sector público y privado.

En particular, la medición, administración y mitigación del riesgo de crédito reviste especial atención dentro del riesgo financiero, especialmente para los entes reguladores, debido al alto impacto potencial macro y microeconómico.

En esta línea las medias más utilizadas para la cuantificación del riesgo es el Valor en Riesgo –VaR- y una más específica es la Pérdida Esperada en la cola –ES-. El VaR se define como la máxima pérdida potencial en el valor de un portafolio de instrumentos financieros con una probabilidad dada sobre un determinado período (Jadhav & Ramanathan, 2009). Mientras que la ES se define como el promedio de las pérdidas superiores al VaR (Melo & Becerra, 2008). Sin embargo, el VaR no posee una metodología única de cálculo, más aún cuando se consideran las iteraciones existentes entre los diferentes factores de riesgo al interior del portafolio (Melo & Becerra, 2008).

Para ello, es necesario analizar la clase de dependencia existente entre los activos del portafolio. En este sentido se analiza la cópula como una estructura flexible que permite caracterizar diferentes tipos de dependencia (Melo & Becerra, 2008). En términos de Frey y McNeil [2001] las cópulas son simplemente las funciones de distribución conjuntas de vectores aleatorios con distribuciones estándar marginales uniformes; su valor en términos estadísticos es proporcionar una forma de entender cómo las distribuciones marginales de los riesgos individuales se unen entre sí para formar distribuciones conjuntas de los grupos de riesgo; es decir, proporcionan una forma de entender la idea de la dependencia estadística (McNeil, Frey, & Nyfeler, 2001).

Bajo este contexto las cópulas ofrecen un soporte teórico para el desarrollo de modelos de medición de riesgo. En particular, para el desarrollo del presente trabajo se pretende realizar una aplicación práctica de la teoría de cópulas para determinar el VaR del portafolio de crédito y la Pérdida esperada en la cola, partiendo de los trabajos realizados por Romano (2000), Clemente y Romano (2004), Hernández y Ramírez (2009), y en especial de Li (2000).

CAPÍTULO 2

CÓPULAS Y DEPENDENCIA

Como se expuso anteriormente, para el desarrollo del presente trabajo se utilizará la teoría de cópulas. Para ello, a continuación se presenta una descripción general de las funciones de cópula, conceptos de dependencia, familias de cópula, métodos de estimación y simulación, considerando los trabajos de especialmente de Alexander McNeil (2001, 2005).

Dentro del propósito del presente estudio, las cópulas expresan la dependencia de un cuantil a escala, el cual resulta útil para comprender la dependencia de los resultados extremos que, para los fines pertinentes de riesgo financiero vienen a ser el Valor en Riesgo –VaR-.

2.1 CÓPULAS

Definición. Una cópula d – dimensional es una función de distribución multivariada $C: [0,1]^d \rightarrow [0,1]$ donde sus distribuciones marginales (individuales) son uniformes estándar $U_i \sim U(0,1)$ $i = 1, 2, \dots, d$.

Si una función C satisface las siguientes propiedades, entonces C es una cópula:

- i) $C(u_1, \dots, u_d)$ es crecientes en cada componente u_i .
- ii) $C(1, \dots, 1, u_i, 1, \dots, 1) = u_i$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, d\}, u_i \in [0, 1]$.
- iii) Para todo $(a_1, \dots, a_d), (b_1, \dots, b_d) \in [0, 1]^d$ con $a_i \leq b_i$ se tiene que:

$$\sum_{i_1=1}^2 \dots \sum_{i_d=1}^2 (-1)^{i_1+\dots+i_d} C(u_{1i_1}, \dots, u_{di_d}) \geq 0$$

donde $u_{j1} = a_j$ y $u_{j2} = b_j$ para $j \in \{1, 2, \dots, d\}$.

2.2 TEOREMA DE SKLAR

Sklar (1959) reveló que se puede comprender la estructura de dependencia de un vector aleatorio mediante la cópula, por cuanto toda función de distribución multivariada de variables aleatorias continuas posee una cópula asociada, y, la función de distribución multivariada puede ser construida a partir de la cópula y sus funciones de distribución marginales. Formalmente.

Teorema de Sklar. *Sea $F(r_1, \dots, r_d)$ la función de distribución conjunta de las variables aleatorias R_1, \dots, R_d con funciones de distribución marginales $F_1(r_1), \dots, F_d(r_d)$. Existe una función $C: [0,1]^d \rightarrow [0,1]$ tal que para todo r_1, \dots, r_d :*

$$F(r_1, \dots, r_d) = C(F_1(r_1), \dots, F_d(r_d)) \quad (1.1)$$

Si las funciones marginales son continuas, entonces C es única; de otra forma, C se encuentra definida únicamente en el $Ran(F_1) \times \dots \times Ran(F_d)$ donde $Ran(F_i)$ se refiere al rango de la función F_i . De la misma manera, si C es una cópula y $F_1(r_1), \dots, F_d(r_d)$ son funciones de distribución univariadas, entonces $F(r_1, \dots, r_d)$ definida en (1.1) es una función de distribución conjunta con distribuciones marginales $F_1(r_1), \dots, F_d(r_d)$.

A partir de estos conceptos, a manera introductora se puede definir la cópula de independencia, para d variables aleatorias como:

$$C^I(u_1, \dots, u_d) = \prod_{j=1}^d u_j$$

2.3 FAMILIAS DE CÓPULAS

Las cópulas pueden ser agrupadas de acuerdo a sus límites, por su forma funcional o por sus características particulares.

Las cópulas límite o cópulas “fundamentales” se encuentran asociadas con casos extremos de dependencia como la comonotonicidad, contramonotonicidad e independencia:

- Comonotonicidad, es la dependencia perfecta positiva entre variables aleatorias, la cópula asociada al límite superior de Fréchet posee este tipo de dependencia.

$$C^u(u_1, \dots, u_d) = \min\{u_1, \dots, u_d\}$$

- Contramonotonicidad, es la dependencia perfecta negativa entre variables aleatorias. En este caso este tipo de cópula se asocia con el límite inferior de Fréchet.

$$C^l(u_1, \dots, u_d) = \max\{u_1 + \dots + u_d - 1, 0\}$$

Sin embargo, de acuerdo a las demostraciones de McNail (McNeil, Frey, & Embrechts, 2005) esta cópula únicamente es válida para $d = 2$.

Las cópulas por su forma funcional se agrupan en cópulas explícitas e implícitas, las primeras poseen una forma funcional cerrada, mientras que, las segundas son derivadas de funciones de distribución multivariadas conocidas no necesariamente cerradas.

Por sus características particulares, se puede distinguir cuatro “familias” de cópulas: Elípticas, de Arquímedes, de Valor Extremo y Arquimax.

2.3.1 Cópulas Elípticas

Cópulas elípticas. *Son aquellas que se encuentran asociadas a variables aleatorias cuya función de distribución multivariada es de la forma $f(x;x)$, por lo que las curvas de nivel de variables aleatorias que tenga este tipo de cópulas forman elipses* (Boyé, Nikeghbali, Durrleman, Riboulet, & Roncalli, 2000). En esta familia las dos cópulas más importantes son la Normal o Gaussiana y la cópula t de Student.

Formalmente la cópula Gaussiana con matriz de correlación P se expresa como:

$$C_P^{Ga}(u) = \Phi_P(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_d))$$

$$= \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \dots \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_d)} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}} |P|^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2} x \cdot P^{-1} x\right) d_{x_1} \dots d_{x_d}$$

donde Φ_P es la función de distribución normal multivariada con matriz de correlaciones $P \in \mathbb{R}^{d \times d}$ y Φ^{-1} es la función de distribución inversa de la distribución normal estándar (Cherubini et al. 2004).

En la misma línea, la cópula t de *Student* con matriz de correlación $P \in \mathbb{R}^{d \times d}$ y $\nu > 0$ grados de libertad viene de la forma:

$$C_{\nu, P}^t(u) = t_{\nu, P}(t_{\nu}^{-1}(u_1), \dots, t_{\nu}^{-1}(u_d))$$

$$= \int_{-\infty}^{t_{\nu}^{-1}(u_1)} \dots \int_{-\infty}^{t_{\nu}^{-1}(u_d)} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+d}{2}\right) |P|^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) (\nu\pi)^{\frac{d}{2}}} \left(1 + \frac{1}{\nu} x \cdot P^{-1} x\right)^{-\frac{\nu+d}{2}} d_{x_1} \dots d_{x_d}$$

donde $t_{\nu, P}$ es la función de distribución t de *Student* multivariada con matriz de correlaciones P y ν grados de libertad y t_{ν}^{-1} es la función de distribución inversa asociada a la distribución t univariada con ν grados de libertad (Cherubini et al. 2004).

2.3.2 Cópulas de Arquímedes

Cópulas de Arquímedes. Una cópula C es una cópula de Arquímedes si se puede representar de la forma:

$$C(u_1, u_2) = \phi^{[-1]}(\phi(u_1) + \phi(u_2))$$

donde ϕ se conoce como el "generador" de la cópula C y $\phi^{[-1]}$ es la pseudo inversa de ϕ definida como:

$$\phi^{[-1]}(s) = \begin{cases} \phi^{-1}(s), & \text{si } 0 \leq s \leq \phi(0) \\ 0, & \text{si } \phi(0) \leq s \leq +\infty \end{cases}$$

Una descripción de las cópulas de Arquímedes más relevantes se presentan a continuación.

Cópula de Clayton. Conocida también como la cópula Cook-Johnson o Kimeldorf-Sampson, con el generador $\phi(t) = \frac{1}{\theta}(t^{-\theta} - 1)$ con $\theta > 0$. Formalmente:

$$C^{CL}(u_1, \dots, u_d) = (u_1^{-\theta} + \dots + u_d^{-\theta} - d + 1)^{\frac{1}{\theta}}$$

Cópula de Gumbel. También conocida como cópula de Gumbel-Hougaard, su generador se define por $\phi(t) = (-\log(t))^\theta$ con $\theta > 1$. Así, toma la siguiente forma:

$$C^{Gu}(u_1, \dots, u_d) = \exp\left(-(\tilde{u}_1^\theta + \dots + \tilde{u}_d^\theta)^{\frac{1}{\theta}}\right)$$

donde $\tilde{u}_1 \equiv -\log u_1$.

Cópula de Frank. Generador $\phi(t) = -\log\left(\frac{\exp(-\theta t)-1}{\exp(-\theta)-1}\right)$ con $\theta > 0$. La cópula asociada con éste generador es:

$$C^{Fr}(u_1, \dots, u_d) = -\frac{1}{\theta} \log \left[1 + \frac{\prod_{i=1}^d (e^{-\theta u_i} - 1)}{(e^{-\theta} - 1)^{d-1}} \right]$$

2.4 ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS

Uno de los principales usos de las cópulas es la simulación de variables aleatorias con diferentes estructuras de dependencia en la modelación de riesgos (Melo & Becerra, 2008). Para ello, dependiendo de la familia de cópulas existen algoritmos de simulación. Sin embargo, previo a ello es necesario estimar las cópulas; para ello, existen tres métodos; la estimación paramétrica, el método de los momentos, y el método de máxima verosimilitud.

Método de verosimilitud. Sea $r = [R_1, \dots, R_d]'$ un vector aleatorio conformado por d variables aleatorias continuas con distribuciones marginales

F_1, \dots, F_d con función de distribución conjunta F y cópula C . Si se tiene una muestra de n realizaciones de i.i.d. del vector aleatorio $R: r_1, \dots, r_n$, es posible obtener una estimación de los parámetros de la cópula a través de la maximización de su función log-verosimilitud, la cual está definida como:

$$\ell(\theta|r_1, \dots, r_n) = \sum_{t=1}^n \log c(F_1(r_{1t}), \dots, F_d(r_{dt}))$$

$$\ell(\theta|u_1, \dots, u_n) = \sum_{t=1}^n \log c(u_{1t}, \dots, u_{dt})$$

Donde θ es el vector de parámetros de la cópula C , $u_{it} = F_i(r_{it})$ y $u_t = [u_{1t}, \dots, u_{dt}]'$. A partir de esto se puede expresar la función de densidad del vector R como:

$$c(u_1, \dots, u_d) = \frac{f(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_d^{-1}(u_d))}{f_1(F_1^{-1}(u_1)) \dots f_d(F_d^{-1}(u_d))}$$

donde f corresponde a la función de densidad conjunta de R y f_1, \dots, f_d son las funciones de densidad marginales (McNeil et al., 2005).

Método de momentos. También conocido como estimación a través de correlaciones de rango. A diferencia del resto de metodologías, ésta no necesita información acerca de las distribuciones marginales de los datos. La metodología se basa en la estimación de la relación existente entre dos medidas no paramétricas, como son los coeficientes de correlación de Spearman (ρ_S) o el τ de Kendal (ρ_τ) y las cópulas.

Partiendo del trabajo de (McNeil et al., 2005) se pueden encontrar definiciones para las estimaciones de los coeficientes antes mencionados.

Así para calcular el coeficiente de Spearman $\rho_S(X_i, X_j)$ se puede utilizar la siguiente fórmula:

$$\rho_S(X_i, X_j) = \frac{12}{n(n^2 - 1)} \sum_{t=1}^n \left(\text{rank}(X_{t,i}) - \frac{1}{2}(n + 1) \right) \left(\text{rank}(X_{t,j}) - \frac{1}{2}(n + 1) \right)$$

Donde $\text{rank}(X_{t,i})$ es el rango de $X_{t,i}$, en $X_{1,i}, \dots, X_{n,i}$; es decir, su posición en la muestra ordenada.

Mientras que, para calcular el coeficiente de Kendal $\rho_\tau(X_i, X_j)$ se usa:

$$\rho_\tau(X_i, X_j) = \binom{n}{2}^{-1} \sum_{1 \leq t \leq s \leq n} \text{signo}((X_{t,i} - X_{s,i})(X_{t,j} - X_{s,j}))$$

Con estas estimaciones se puede formar un sistema de ecuaciones dada la relación de los coeficientes con la función cópula. Tomando en cuenta que las integrales dependen de los parámetros de la cópula, se pueden obtener los estimadores de los mismos en los casos en los cuales el sistema de ecuaciones se encuentre identificado.

2.5 SIMULACIÓN DE CÓPULAS

2.5.1 Simulación cópula Gaussiana

Para simular variables aleatorias a partir de la cópula normal multivariada C_P^{Ga} se aplica el siguiente algoritmo (Cherubini et al., 2004):

- i. Encontrar la descomposición de Cholesky A de P .
- ii. Simular d variables aleatorias normales estándar independientes entre ellas, $Z_i = (z_{1i}, \dots, z_{di})^t \sim N(0, I_d)$.
- iii. Calcular $x_i = A z_i$
- iv. Generar el vector $u_i = [u_{1i}, \dots, u_{di}]$ con $u_{ji} = \Phi(x_{ji})$ con $i = 1, \dots, n$ $j = 1, \dots, d$ donde Φ es la función de distribución normal estándar univariada.

2.5.2 Simulación cópula t de Student

Toda variable aleatoria t con v grados de libertad se puede ver como el cociente:

$$T = \sqrt{v} \frac{Z}{\sqrt{J}}$$

donde Z es una variable aleatoria normal estándar y J es una variable Ji cuadrado con v grados de libertad. Así, la simulación dependerá de la generación de variables normales multivariadas:

- i. Encontrar la descomposición de Cholesky A de P .
- ii. Simular d variables aleatorias normales estándar independientes entre ellas.
- iii. Calcular $x_i = A z_i$
- iv. Generar una variable aleatoria s_i , la cual sigue una distribución Ji cuadrado con v grados de libertad, independiente de z_i .
- v. Calcular $y_i = \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{s_i}} x_i$
- vi. Generar el vector $u_i = [u_{1i}, \dots, u_{di}]$ con $u_{ji} = t_v(y_{ji})$ con $i = 1, \dots, n$ $j = 1, \dots, d$ donde t_v corresponde a la función de distribución t con v grados de libertad.

2.5.3 Simulación cópulas de Arquímedes

Cópula de Clayton. Para simular variables aleatorias uniformes que sigan este tipo de familia de cópulas, se siguen los siguientes pasos (Cherubini et al., 2004):

- i. Simular d variables aleatorias independientes que sigan una distribución $U(0,1)$, w_{i1}, \dots, w_{id} y definir $u_{i1} = w_{i1}$, con $i = 1, \dots, n$.
- ii. Definir $w_{i2} \equiv C_{2|1}(u_{i1}, u_{i2})$ con $w_{i2} = \left(\frac{u_1^\theta + u_2^\theta - 1}{u_1^\theta} \right)^{-1/\theta-1}$.
- iii. Para $k = 3, \dots, d$, la variable aleatoria u_{ik} definida como:

$$u_{ik} = \left((u_{i1}^{-\theta} + \dots + u_{i(k-1)}^{-\theta} - k + 2) \left(w_{ik}^{\frac{\theta}{(\theta(1-k)-1)}} - 1 \right) + 1 \right)^{-1/\theta}$$

donde el vector $u_i = [u_{i1}, \dots, u_{id}]$ sigue una cópula Clayton d dimensional con parámetro $\theta, i = 1, \dots, n$.

Cópula de Frank. Para generar variables aleatorias uniformes que sigan esta cópula, se utiliza el siguiente algoritmo:

- i. Simular d variables aleatorias independientes que sigan una distribución $U(0,1)$, w_{i1}, \dots, w_{id} y definir $u_{i1} = w_{i1}$, con $i = 1, \dots, n$.
- ii. Definir $w_{i2} \equiv C_{2|1}(u_{i1}, u_{i2})$ con $w_{i2} = e^{-\theta u_1} \frac{e^{-\theta u_2 - 1}}{e^{-\theta - 1} + (e^{-\theta u_1 - 1})(e^{-\theta u_2 - 1})}$.
- iii. Definir $w_{i3} \equiv C_{3|1,2}(u_{i1}, u_{i2}, u_{i3})$ con
- iv. $w_{i3} = \frac{(e^{-\theta} - 1)[(e^{-\theta} - 1) + (e^{-\theta u_{i1}} - 1)(e^{-\theta u_{i2}} - 1)]^2 (e^{-\theta u_{i3}} - 1)}{[(e^{-\theta} - 1)^2 + (e^{-\theta u_{i1}} - 1)(e^{-\theta u_{i2}} - 1)(e^{-\theta u_{i3}} - 1)]^2}$.

Cópula de Gumbel. Para generar variables aleatorias uniformes que sigan una cópula de Gumbel, se utiliza el siguiente procedimiento:

- i. Generar n réplicas de una variable aleatoria v_i que siga una distribución estable⁵ positiva con parámetros $(\frac{1}{\theta}, 1, \gamma, 0)$, donde $\gamma = (\cos(\pi/(2\theta)))^\theta$ y $\theta > 1$.
- ii. El vector $u_i = [\phi^{-1}(-\log(w_{i1})/v_i), \dots, \phi^{-1}(-\log(w_{id})/v_i)]$, donde $\phi^{-1}(t) = \exp(-t^{\frac{1}{\theta}})$ es la función inversa del generador de la cópula Gumbel y w_{i1}, \dots, w_{id} son variables aleatorias uniformes (0,1) independientes.
- iii. El vector $u_i = [u_{i1}, \dots, u_{id}]$ sigue una cópula de Gumbel d dimensional con parámetro θ , $i = 1, \dots, n$.

⁵ La variable aleatoria X tiene una α distribución estable, escrita como $X \sim \text{St}(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, si su función característica es:

$$\phi(t) = E \exp(itX) = \begin{cases} \exp(-\gamma^\alpha |t|^\alpha (1 - i\beta \text{sign}(t) \tan(\pi/2) \alpha) + i\delta t), & \alpha \neq 1, \\ \exp(-\gamma |t| (1 + i\beta \text{sign}(t) (2/\pi) \ln|t|) + i\delta t), & \alpha = 1, \end{cases}$$

Donde $\alpha \in (0, 2]$, $\beta \in [-1, 1]$, $\gamma > 0$ y $\delta \in \mathbb{R}$. Nótese que hay varias parametrizaciones alternativas de las distribuciones estables, en este caso se usa la parametrización de Nolan (2005).

CAPÍTULO 3

MEDIDAS DE RIESGO DE CRÉDITO

Para el desarrollo del presente trabajo se partirá de la metodología basada en una aproximación a la propuesta de Li [2000] adoptada dentro de la metodología utilizada por J.P. Morgan para la medición de riesgo y esbozada por Becerra y Melo [2009]. Adicionalmente se considera las definiciones y premisas de los trabajos de Romano [2000], Clemente y Romano [2004], y Hernández y Ramírez [2009]. A fin de contar con una aproximación más extensa de familias de cópulas se tomarán en cuenta también los trabajos que consideran eventos de riesgo extremos (Mashal & Zeevi, 2002).

3.1 DEFINICIÓN DEL INCUMPLIMIENTO

Para estimar las medidas de riesgo en un portafolio de crédito, primero se debe definir el incumplimiento o *default* Y_i . Suponiendo un portafolio que contiene n activos riesgosos, el incumplimiento para cada una de las contrapartes o créditos i se define como (Romano, 2002):

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{si para el crédito } i \ d > d_d \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Donde:

d = Días de mora del crédito i .

d_d = Número de días de mora máximo que puede tener un crédito para no ser considerado como un crédito *default* o incumplido.

Luego considerando que la pérdida esperada del portafolio se encuentra condicionada a la distribución multivariada del incumplimiento de los créditos, se puede ajustar mediante la evolución histórica de la tasa de incumplimiento del portafolio.

3.2 TASA DE INCUMPLIMIENTO

La tasa de incumplimiento en un determinado momento se puede estimar por medio de la siguiente expresión (Hernandez & Ramirez Sánchez, 2009):

$$TI_t = \frac{m_t}{M_t}$$

Donde:

TI_t = Tasa de incumplimiento en la ventana anual o tiempo t .

m_t = Corresponde al número de créditos incumplidos en el momento t .

$$m_t = \sum_{i=1}^n Y_{it}$$

M_t = Número total de créditos del portafolio en el momento t .

3.3 DEFINICIÓN DE GRUPOS HOMOGÉNEOS

En virtud de que, no es posible realizar un análisis de dependencia entre créditos incumplidos de manera individual, por cuanto no se originan en el mismo momento del tiempo, calcular la matriz de correlación necesaria para determinar el grado de dependencia resulta complicado para una gran cantidad de créditos; surge entonces la necesidad de construir grupos homogéneos dentro del portafolio para mejorar el análisis.

Bajo esta consideración, para la identificación y homogenización de los grupos del portafolio se utiliza la técnica Detección de Interacción Automática *Ji* – Cuadrada (CHAID), la cual mediante árboles de decisión segmenta e identifica divisiones óptimas cuando las variables son continuas, nominales e incluso categóricas. El CHAID se utiliza comúnmente para el análisis del riesgo financiero, fundamentalmente por su notable flexibilidad para identificar divisiones óptimas (Biggs et al., 1991) y la posibilidad de definir una categoría objetivo como el incumplimiento.

Este método se valida a través de los gráficos acumulados de las Ganancias e Índice. Las Ganancias indican el número de casos en que cada nodo terminal en la categoría objetivo; mientras que, el Índice indica la razón del porcentaje de respuestas para la categoría objetivo en comparación con el porcentaje de respuestas de toda la muestra (PASW Statistics, 2012).

3.4 PÉRDIDA ESPERADA

Con todos estos antecedentes es posible determinar g grupos homogéneos y estimar la pérdida del portafolio en un determinado escenario por medio de la siguiente expresión (Hernandez & Ramirez Sánchez, 2009):

$$L_{gj} = TI_{gj} * EAD_{gj} * LGD \quad (1)$$

Donde:

$g = 1, 2, 3, \dots, G$ grupos.

L_{gj} = Pérdida esperada del grupo g en el escenario j .

TI_{gj} = Tasa de incumplimiento del grupo g en el escenario j .

EAD_{gj} = Monto de exposición o saldo del grupo g en el escenario j .

LGD = Pérdida por el incumplimiento de los créditos que se supone no estocástica. Cuantifica la porción de pérdida que el portafolio sufre en el caso de incumplimiento.

En el caso simple, se tienen s escenarios en los que es posible que las contrapartes incumplan o no incumplan sus obligaciones crediticias. Para cada uno de los escenarios, la pérdida que presentaría el portafolio está definida por (Clemente & Romano, 2004):

$$L_j = \sum_{g=1}^G L_{gj} \quad (2)$$

Donde $g = 1, \dots, G, j = 1, \dots, s$ y $\omega_i = [\omega_1, \dots, \omega_n]'$ es el vector de posiciones del portafolio. En el momento T , la pérdida esperada total del portafolio para el escenario j será:

$$(3)$$

$$EL(\omega) = \frac{1}{s} \sum_{j=1}^s L_j(\omega)$$

$EL(\omega)$ corresponde a la pérdida promedio que se puede presentar en el portafolio.

3.5 CREDIT VAR

También conocido como Pérdida Inesperada, a diferencia del VaR clásico que corresponde al α -ésimo cuantil de la distribución de pérdidas del portafolio, en este modelo, el VaR asociado al riesgo de crédito, $CreditVaR_\alpha$ está definido por (Clemente & Romano, 2004):

$$CreditVaR_\alpha = ML_\alpha(\omega) - EL(\omega) \quad (4)$$

Donde α es un nivel de confianza dado y $ML_\alpha(\omega)$ es el α -ésimo cuantil de la distribución de L_j . $ML_\alpha(\omega)$ es la máxima pérdida del portafolio a un nivel de probabilidad α .

3.6 PÉRDIDA ESPERADA EN LA COLA –ES-

La pérdida esperada en la cola ES por sus siglas en inglés (*Expected Shortfall*), es una medida de riesgo extremo y se refiere a la pérdida esperada luego de que, se supera las pérdidas mayores a la máxima pérdida del portafolio a un nivel de probabilidad α . ES_s se define como (Clemente & Romano, 2004):

$$ES_s(\omega) = ML_\alpha(\omega) + \frac{1}{(1-\alpha)s} \sum_{j=1}^s [L_j(\omega) - ML_\alpha(\omega)] I_{\{L_j(\omega) - ML_\alpha(\omega) > 0\}} \quad (5)$$

Conforme a la metodología de David Li, la distribución de pérdidas de un portafolio invertido en instrumentos de crédito puede ser obtenida a través de técnicas de Monte Carlo, donde se simulan posibles “eventos crediticios” como son: bancarrota, no pago, incumplimiento de la obligación, aceleración de la obligación, moratoria, y reestructuración (Li, 2000).

Para el desarrollo de ésta investigación se estimarán varias cópulas de las familias elípticas y de Arquímedes. Luego de este conjunto se seleccionará el resultado que mejor se ajuste a los datos utilizando los criterios de Log verosimilitud, de información (como el *Akaike* –AIC, Bayesiano –BIC-, *Hannan* y *Quinn* –HD-, entre otros).

Posteriormente, utilizando el Teorema de Sklar y los algoritmos de simulación de las cópulas, se estimará la pérdida esperada del portafolio, el $CreditVaR_\alpha$ y el ES_α como medidas de riesgo de crédito más precisas y flexibles en la administración de la cartera.

CAPÍTULO 4

APLICACIÓN A UN PORTAFOLIO DE CRÉDITO DE CONSUMO

4.1 DEFINICIONES GENERALES

Para la aplicación de la teoría de cópulas y la estimación de los Indicadores de Riesgo, se dispone de un portafolio de créditos de consumo para el período enero 2008 a junio 2013⁶.

Una buena práctica en el análisis del riesgo de crédito es observar una operación de crédito al menos en seis meses, a fin de observar su comportamiento y determinar si en dicho período incumplió o no algún pago. Con este fin se consideraron las operaciones cuya fecha de otorgamiento del crédito sea igual o inferior al 31 de diciembre 2012, esto permite observar el comportamiento de los créditos seis meses; es decir, hasta junio del 2013.

Se definen como créditos incumplidos o *default*, a los créditos cuyos días de mora sean superiores a 15 días⁷ en al menos un mes. Es decir:

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{si para el crédito } i \text{ } d > d_d \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Donde:

d = Días de mora del crédito i .

⁶ Por sigilo bancario y confidencialidad de la información, no es posible revelar el nombre de la institución financiera a la cual pertenece el portafolio de crédito. Sin embargo, es necesario destacar que esto no afecta las estimaciones y resultados del presente trabajo.

⁷Libro I.- Normas Generales para la aplicación de La Ley General de Instituciones del Sistema Financiero Título IX.- De los activos y de los límites de crédito bancos y seguros (República del Ecuador, 2011)

$d_d = 15$ días.

4.2 SEGMENTACIÓN DEL PORTAFOLIO

Tomando como variable dependiente el incumplimiento Y_i y como variables independientes los montos, plazos, tasas de interés y el estado civil de cada una de las operaciones de crédito del portafolio, utilizando la Razón de Verosimilitud y como categoría objetivo el *default* $Y_i = 1$, el CHAID arrojó ocho grupos homogéneos, tal y como se demuestra en los nodos terminales del árbol de decisión que se muestra a continuación⁸:

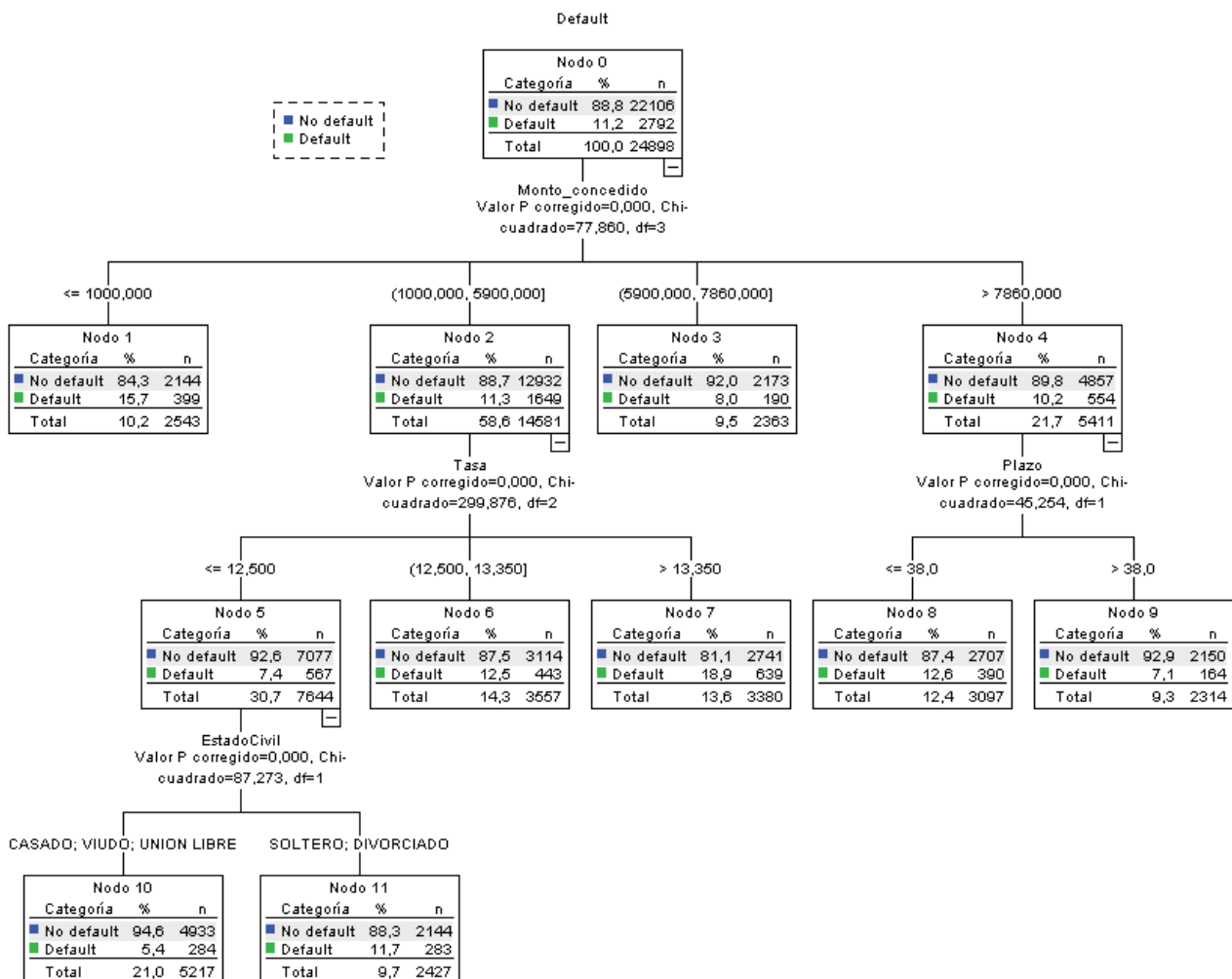


Figura No. 1. Segmentación del portafolio mediante técnica CHAID

⁸ El CHAID se construyó con la ayuda del software estadístico SPSS 21.

La segmentación CHAID posee una estimación de riesgo del 0,112, lo cual indica que la categoría pronosticada por el modelo es incorrecta en el 11,2% de los casos. En otras palabras, el modelo clasifica de forma correcta al 88,8% de las operaciones.

Para confirmar la fiabilidad del modelo se realizaron los gráficos acumulados de las Ganancias e Índice. Con respecto al primero, se puede observar un incremento acelerado de la línea de referencia hasta el 70% y luego un incremento menos rápido hasta alcanzar el 100%, esto evidencia un buen ajuste en la segmentación. Así también, en el gráfico del Índice se demuestran resultados favorables, por cuanto, los valores iniciales son superiores al 100% y posteriormente descienden repentinamente hasta llegar al percentil 100.

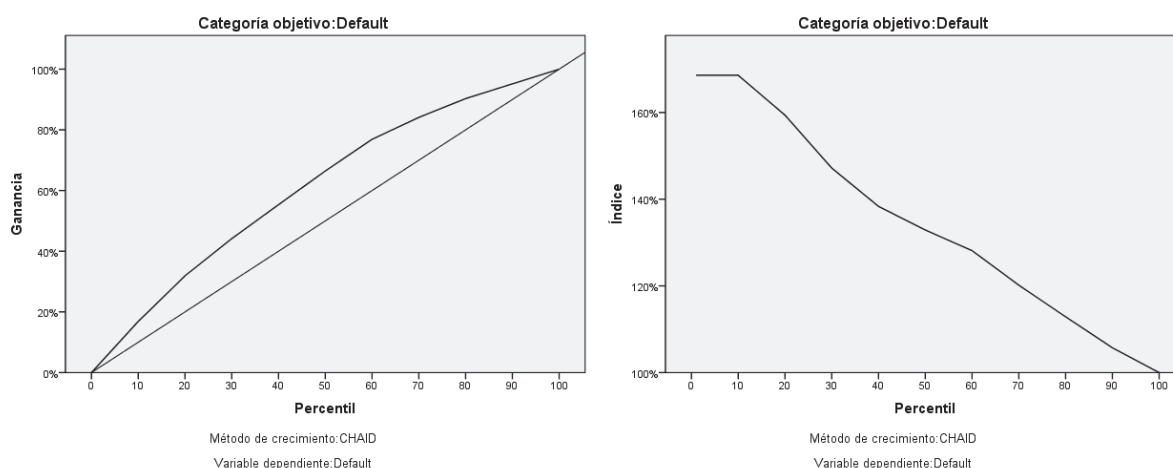


Figura No. 2. Gráficos de Ganancias e Índice de la segmentación del portafolio mediante técnica CHAID

4.3 ANÁLISIS DESCRIPTIVO DE LA CARTERA

4.3.1 Distribución del incumplimiento

A enero del 2008 el portafolio se compuso de 2.724 créditos, mientras que, para junio del 2013 el número de créditos ascendió a 6.267.

Con la técnica CHAID, como se mencionó anteriormente, se identificaron ocho grupos. En el siguiente gráfico se muestra la distribución de los créditos, de acuerdo a su grupo de pertenencia, destacándose el grupo ocho que posee la mayor cantidad de operaciones del portafolio (21,0%).

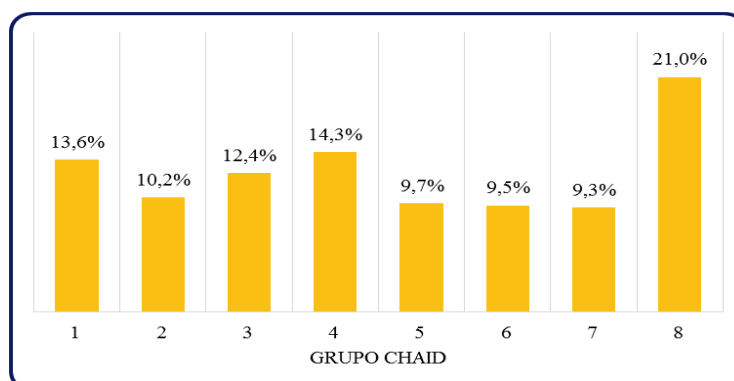


Figura No. 3. Distribución de los créditos por grupos definidos con la técnica CHAID

En promedio el 11,51% de los créditos de cada grupo son incumplidos. El grupo cuatro posee el mayor porcentaje de operaciones *default* (18,9%) y el grupo siete el menor porcentaje (5,4%). A nivel de portafolio el 11,2% de los créditos son incumplidos.

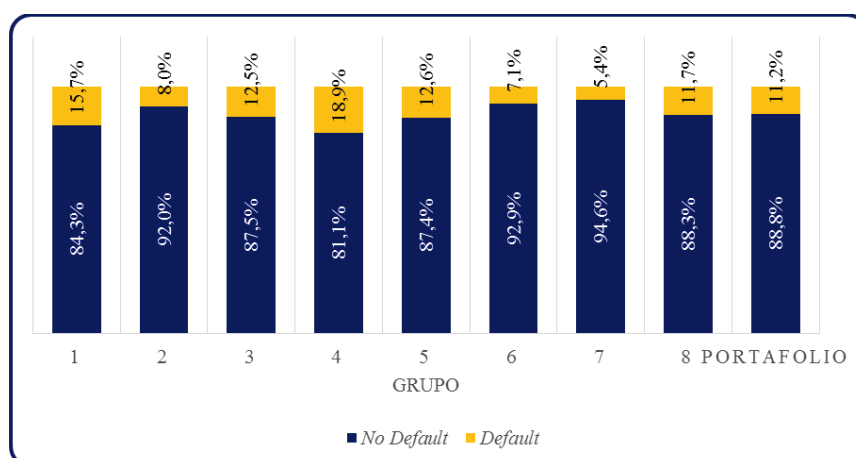


Figura No. 4. Porcentaje de créditos no incumplidos e incumplidos por grupos definidos con la técnica CHAID

4.3.2 Monto concedido, plazo y tasa

En términos globales en el portafolio el monto promedio concedido fue de aproximadamente USD. 5.000 con una tasa y plazo promedio de 13,3% y 26,2 meses respectivamente. Observando estas mismas variables entre los grupos definidos se pueden distinguir notables diferencias, por ejemplo, no existe una relación de riesgo entre el plazo y la tasa, lo cual evidencia debilidades en la administración del riesgo financiero, por cuanto, no se está cumpliendo la premisa de “a mayor plazo, mayor será el riesgo, y por tanto mayor será la tasa”. Tal es el caso del grupo seis que posee el mayor plazo promedio (41,7 meses) y uno de los valores más bajos de tasa de interés; otro ejemplo es grupo cuatro que posee la mayor tasa de interés (16,1%) y uno de los valores más bajos del plazo promedio.

Tabla No. 1. Monto, tasa y plazo promedio del portafolio por grupos definidos con la técnica CHAID

Grupo	Promedio		
	Monto concedido (USD.)	Tasa interés (%)	Plazo (Meses)
1	836	14,0	10,6
2	6.486	12,9	32,9
3	3.000	12,9	22,4
4	3.138	16,1	21,0
5	10.016	13,1	34,7
6	12.578	12,5	41,7
7	3.385	12,4	25,2
8	3.271	12,4	25,2
Portafolio	4.998	13,3	26,2

4.3.3 Tasa de incumplimiento

En el período de análisis enero 2008 – junio 2013, la tasa de incumplimiento de la cartera registra un valor medio de 9,9% con un saldo promedio o monto de exposición de 23.370.844 USD. La mayor tasa de incumplimiento promedio entre los grupos definidos con la técnica CHAID se presenta en el grupo seis con un valor de 24,0% y la menor en el grupo uno con un valor de 7,9%.

Por otro lado, el mayor monto de exposición EAD medio se encuentra en el grupo cinco con un valor de 6.805.427 USD. Si se compara el valor más alto del

EAD con el mínimo y a estos con el resto de valores de los grupos, al igual que con la TI dichos valores presentan considerables distancias.

Todo esto refleja importantes falencias en la concesión de créditos del portafolio, por cuanto, los mayores montos de exposición presentan los mayores porcentajes de incumplimiento y por tanto la mayor cantidad de pérdidas potenciales de la cartera.

Tabla No. 2. Tasa de incumplimiento y saldo promedio por grupos definidos con la técnica CHAID

Grupo	Promedio	
	Tasa de incumplimiento (%)	Saldo disponible (USD.)
1	7,9	187.163
2	8,5	3.007.435
3	10,4	1.874.276
4	11,3	1.252.027
5	12,3	6.805.427
6	24,0	5.766.093
7	6,5	3.103.417
8	12,8	1.375.008
Portafolio	9,9	23.370.844

Al analizar la evolución de la tasa de incumplimiento en cada grupo, claramente se puede apreciar una tendencia decreciente, con excepción de los grupos tres y cuatro, los cuales muestran al final del período de análisis un repunte que, en el caso particular del grupo tres se mantiene hasta el final del período.

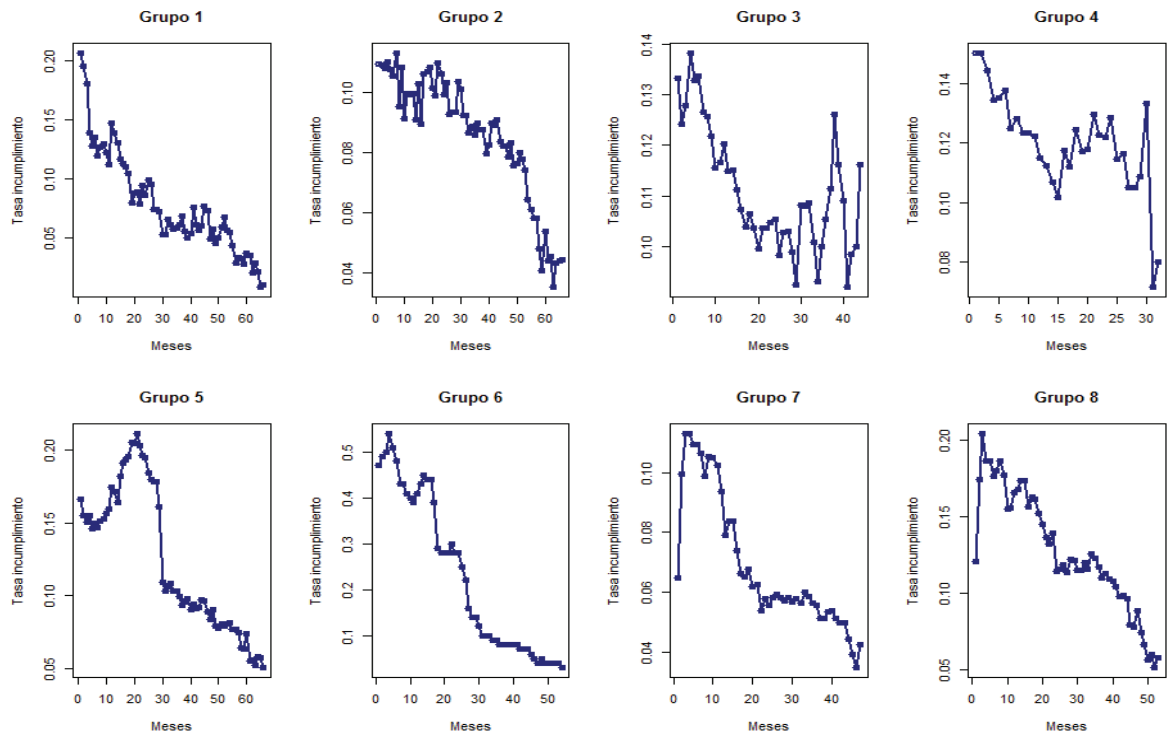


Figura No. 5. Evolución tasa de incumplimiento TI por grupos definidos con la técnica CHAID

4.4 AJUSTE DE DISTRIBUCIONES MARGINALES

Para obtener las distribuciones marginales a partir de las distribuciones univariadas de la tasa de incumplimiento (TI) y monto de exposición (EAD) por grupo, se utilizó la información histórica de dichas variables.

Para ello, se ajustaron varias distribuciones a través del método de máxima verosimilitud mediante el paquete “*fitdistrplus*” del software libre R⁹. Posteriormente con el objeto de poder seleccionar el mejor resultado se estimó la bondad de ajuste de cada distribución por medio de los estadísticos *Kolmogorov-Smirnov* (KS), *Cramer-von Mises* (CV), *Anderson-Darling* (AD), complementariamente se calcularon los criterios de información de *Aikake* (AIC) y *Bayesiano* (BIC).

4.4.1 Estimación y selección de Distribuciones Univariadas

En general, para seleccionar la mejor distribución a la que se ajustan a los datos tanto de TI, como de EAD, se consideraron los valores más bajos de los estadísticos de ajuste y criterios de información. En otras palabras, en la distribución seleccionada para el grupo en cuestión, coinciden los menores valores de KS, CV, AD y de AIC y BIC.

Para determinar el mejor ajuste de la distribución del TI y EAD del grupo tres y EAD del grupo siete, se priorizaron los resultados del estadístico CV y los criterios de información por cuanto, en estos casos particulares la distribución Triangular se ajusta mejor gráficamente a los datos. Nótese que, en estos casos los criterios AIC, BIC y el estadístico CV resultaron ser los más bajos de las distribuciones propuestas, mientras que, los estadísticos de ajuste no son necesariamente los más bajos.

⁹ R es un lenguaje y entorno para computación y gráficos estadísticos. Es un proyecto GNU, que es similar al lenguaje S y el medio ambiente que se ha desarrollado en los Laboratorios Bell (antes AT & T, ahora Lucent Technologies) por John Chambers y colegas. R puede ser considerado como una implementación diferente de S. R proporciona una amplia variedad de estadística (modelos lineales y no lineales, pruebas estadísticas clásicas, análisis de series temporales, clasificación, agrupamiento, ...) y las técnicas gráficas, son altamente extensibles. (<http://www.r-project.org/>).

Partiendo de las distribuciones de probabilidad que la *International Cost Estimating and Analysis Association* sugiere para el análisis de riesgo (Braxton & Manning, 2011), se consideró un conjunto de catorce distribuciones de probabilidad¹⁰, En la siguiente tabla se presenta por grupo y variable, los tres mejores ajustes de las distribuciones univariadas de la tasa de incumplimiento TI y monto de exposición EAD estimadas, a través del paquete “*fitdistrplus*”; las filas resaltadas representan a la distribución seleccionada.

Tabla No. 3. Estadísticos de bondad de ajuste y criterios de información para distribuciones univariadas de TI y EAD por grupo

Grupo	Variable	Distribución	Estadísticos de ajuste			Criterios de información	
			<i>Kolmogorov-Smirnov</i>	<i>Cramer-von Mises</i>	<i>Anderson-Darling</i>	<i>Akaike</i>	<i>Bayesian</i>
G1	Tasa de Incumplimiento -TI-	Beta	0,0797	NA	0,3616	-236,1158	-231,7364
		Gumbel	0,0766	0,0586	0,3313	-235,8595	-231,4802
		Triangular	0,0704	0,0654	Inf	Inf	Inf
	Exposición al Default -EAD-	Normal	0,0979	0,1146	0,7681	745,3314	749,7107
		Logística	0,0990	0,1083	0,7403	747,1740	751,5533
		Triangular	0,0771	0,0749	Inf	Inf	Inf
G2	Tasa de Incumplimiento -TI-	Logística	0,1130	0,1700	1,7658	-320,1675	-315,7882
		Weibull	0,1067	NA	1,8765	-327,8325	-323,4532
		Triangular	0,0966	0,0966	Inf	Inf	Inf
	Exposición al Default -EAD-	Log Normal	0,0966	0,1195	0,8529	1.140,6039	1.144,9832
		Weibull	0,0986	NA	1,0088	1.139,7658	1.144,1451
		Triangular	0,0673	0,0425	0,3666	1.132,6854	1.139,2544
G3	Tasa de Incumplimiento -TI-	Logística	0,1056	0,1101	0,7759	-259,1552	-255,5869
		Gumbel	0,0695	0,0466	0,3369	-265,0945	-261,5261
		Triangular	0,0716	0,0398	0,3656	-267,2243	-261,8717
	Exposición al Default -EAD-	Normal	0,1170	0,1693	1,0847	794,5188	798,0871
		Triangular	0,1324	0,0694	0,6268	793,6106	798,96
		Logística	0,1147	0,1634	1,0862	799,1378	802,7061
G4	Tasa de Incumplimiento -TI-	Logística	0,0750	0,0245	0,2426	-169,1288	-166,1974
		Cauchy	0,0869	NA	0,3279	-163,7466	-160,8152
		Triangular	0,0739	0,0239	Inf	Inf	Inf
	Exposición al Default -EAD-	Log Normal	0,1494	0,2279	1,4108	576,2821	579,2135
		Weibull	0,1374	NA	1,0506	567,6716	570,6030
		Gumbel	0,1479	0,2309	1,5269	587,3441	590,2755

¹⁰ Las distribuciones de probabilidad utilizadas en el análisis fueron la de Cauchy, Ji cuadrado, Exponencial, F, Gamma, Gumbel, Log Normal, Logística, Normal, t de *Student*, Triangular, Uniforme, y Weibull.

Grupo	Variable	Distribución	Estadísticos de ajuste			Criterios de información	
			<i>Kolmogorov-Smirnov</i>	<i>Cramer-von Mises</i>	<i>Anderson-Darling</i>	<i>Akaike</i>	<i>Bayesian</i>
G5	Tasa de Incumplimiento -TI-	Gamma	0,1536	0,3405	1,8334	-212,1832	-207,8039
		Beta	0,1486	NA	1,8539	-212,5239	-208,1446
		Triangular	0,1123	0,1572	0,9833	-220,7524	-214,1834
	Exposición al Default -EAD-	Logística	0,1312	0,2382	1,6768	1.174,9596	1.179,3389
		Weibull	0,1415	NA	1,7282	1.166,2539	1.170,6332
		Triangular	0,0789	0,0620	0,6328	1.150,1429	1.156,7118
G6	Tasa de Incumplimiento -TI-	Gamma	0,1705	0,3723	2,2201	-53,5086	-49,5306
		Exponencial	0,1540	0,2790	2,0191	-50,3899	-48,4010
		Triangular	0,1457	0,2465	1,7446	-48,1729	-42,2060
	Exposición al Default -EAD-	Log Normal	0,1944	0,4503	2,6754	1.060,4733	1.064,4512
		Logística	0,2213	0,6710	4,2908	1.125,0704	1.129,0484
		Weibull	0,2170	0,4657	2,8119	1.063,2167	1.067,1947
G7	Tasa de Incumplimiento -TI-	Logística	0,1675	0,3993	2,6300	-219,2782	-215,5779
		Gumbel	0,1606	0,2911	1,6896	-231,3020	-227,6017
		Triangular	0,1315	0,2788	Inf	Inf	Inf
	Exposición al Default -EAD-	Normal	0,1830	0,4996	3,0810	846,3559	850,0562
		Logística	0,1751	0,4305	2,8412	851,3143	855,0146
		Triangular	0,1821	0,2605	1,8748	833,9092	839,4597
G8	Tasa de Incumplimiento -TI-	Gamma	0,1027	0,1180	0,8147	-188,4414	-184,5009
		Beta	0,0976	NA	0,7616	-189,2719	-185,3314
		Triangular	0,0972	0,0826	0,5704	-193,0155	-187,1046
	Exposición al Default -EAD-	Logística	0,1318	0,2478	1,8219	878,2301	882,1707
		Gumbel	0,1378	0,3536	2,2178	879,5786	883,5192
		Triangular	0,0972	0,0978	0,8991	859,8613	865,7722

4.4.2 Parámetros de las Distribuciones Marginales

A continuación se presentan los parámetros de las distribuciones marginales generadas a partir de las mejores distribuciones de probabilidad ajustadas para las variables TI y EAD de cada grupo:

Tabla No. 4. Parámetros de las Distribuciones Marginales ajustadas de las Distribuciones Univariadas TI y EAD por grupo

Grupo	Tasa incumplimiento TI	Monto exposición EAD
G1	Triangular (a, b, c) Triangular (0,0018; 0,0497; 0,1791)	Triangular (a, b, c) Triangular (78,2730; 132,661; 398,7994)
G2	Triangular (a, b, c) Triangular (0,0360; 0,1101; 0,1142)	Triangular (a, b, c) Triangular (695,4113; 1282,2317; 7110,8612)
G3	Triangular (a, b, c) Triangular (0,0902; 0,0999; 0,1425)	Triangular (a, b, c) Triangular (-3166,359; 4548,734; 6823,962)
G4	Triangular (a, b, c) Triangular (0,0897; 0,1199; 0,1534)	Weibull (λ, k) Weibull (0,7753; 2293,2659)
G5	Triangular (a, b, c) Triangular (0,0466; 0,0536; 0,2747)	Triangular (a, b, c) Triangular (2344,1960; 8842,3423; 9374,2409)
G6	Triangular (a, b, c) Triangular (-0,0797; 0,0286; 0,7370)	Log normal ($\mu; \sigma^2$) Log normal (8,0032; 1,4333)
G7	Triangular (a, b, c) Triangular (0,0352; 0,0455; 0,1229)	Triangular (a, b, c) Triangular (-1747,9259; 6048,4703; 7151,1344)
G8	Triangular (a, b, c) Triangular (0,0404; 0,1157; 0,2302)	Triangular (a, b, c) Triangular (-959,1331; 2906,0652; 3127,5108)

En la mayoría de los grupos la distribución de probabilidad Triangular fue la que mejor se ajustó a los datos. La distribución Triangular ofrece una gran flexibilidad en su forma, junto con la naturaleza intuitiva de la definición de sus parámetros y rapidez de uso; es por tanto, muy popular entre los analistas de riesgo (EpiX Analytics LLC, 2013). Adicionalmente se puede destacar que:

“La distribución triangular se usa usualmente como una aproximación de otras distribuciones, como la normal, o ante la ausencia de información más completa. Dado que depende de tres parámetros simples y puede tomar una variedad de formas, es muy flexible para modelizar una amplia variedad de supuestos” (Fiorito, 2006).

En este sentido, tomando en cuenta el comportamiento distribución de la TI y el EAD, dicha distribución es muy útil y práctica para el desarrollo del presente análisis.

A continuación se muestran los histogramas y gráficos de la densidad de las mejores distribuciones de probabilidad de cada variable y grupo (Ver Figura No. 6)

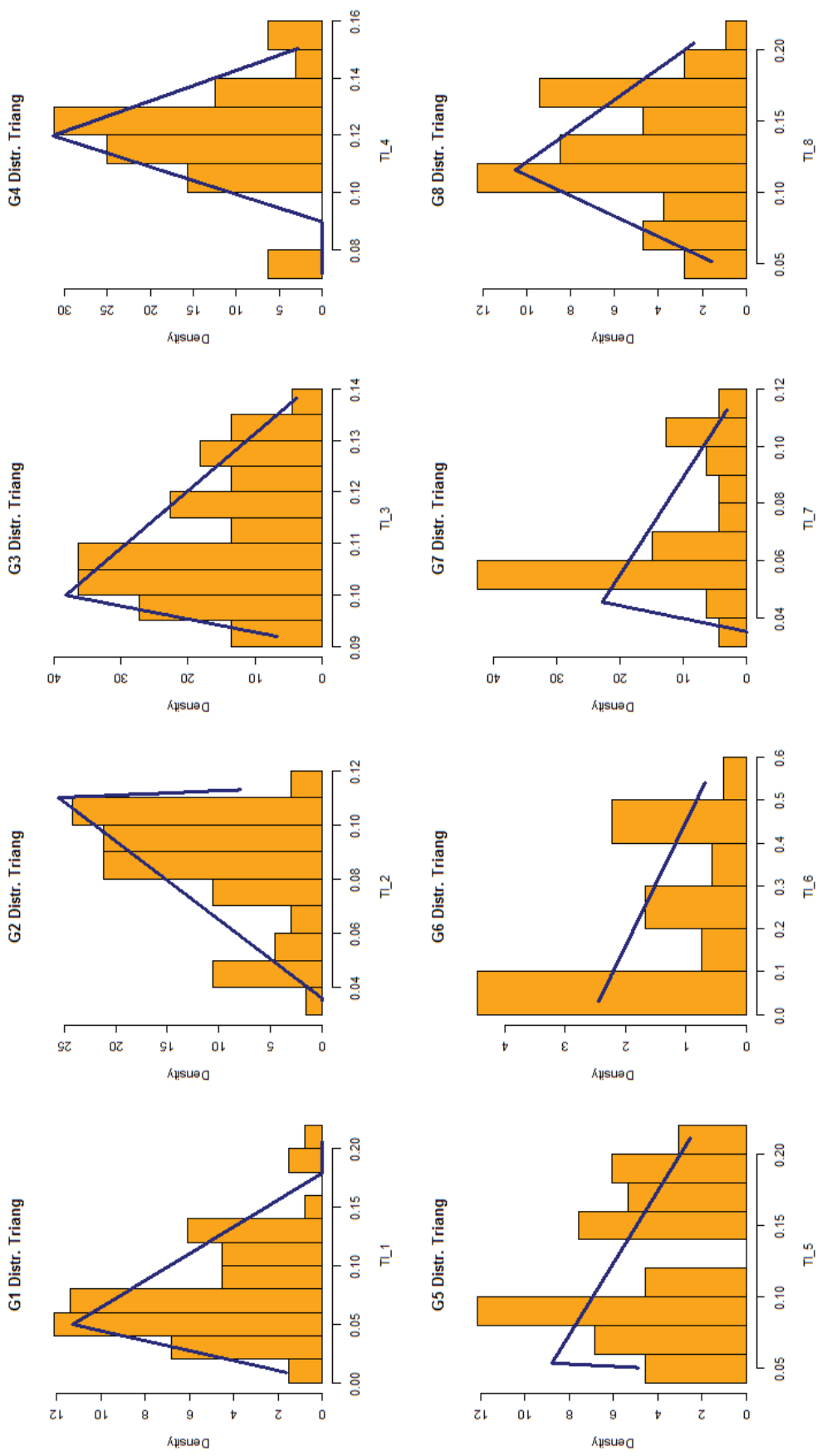


Figura No. 6. Histograma y densidad de las distribuciones univariadas ajustadas de TI y EAD por grupo ajustadas por máxima verosimilitud

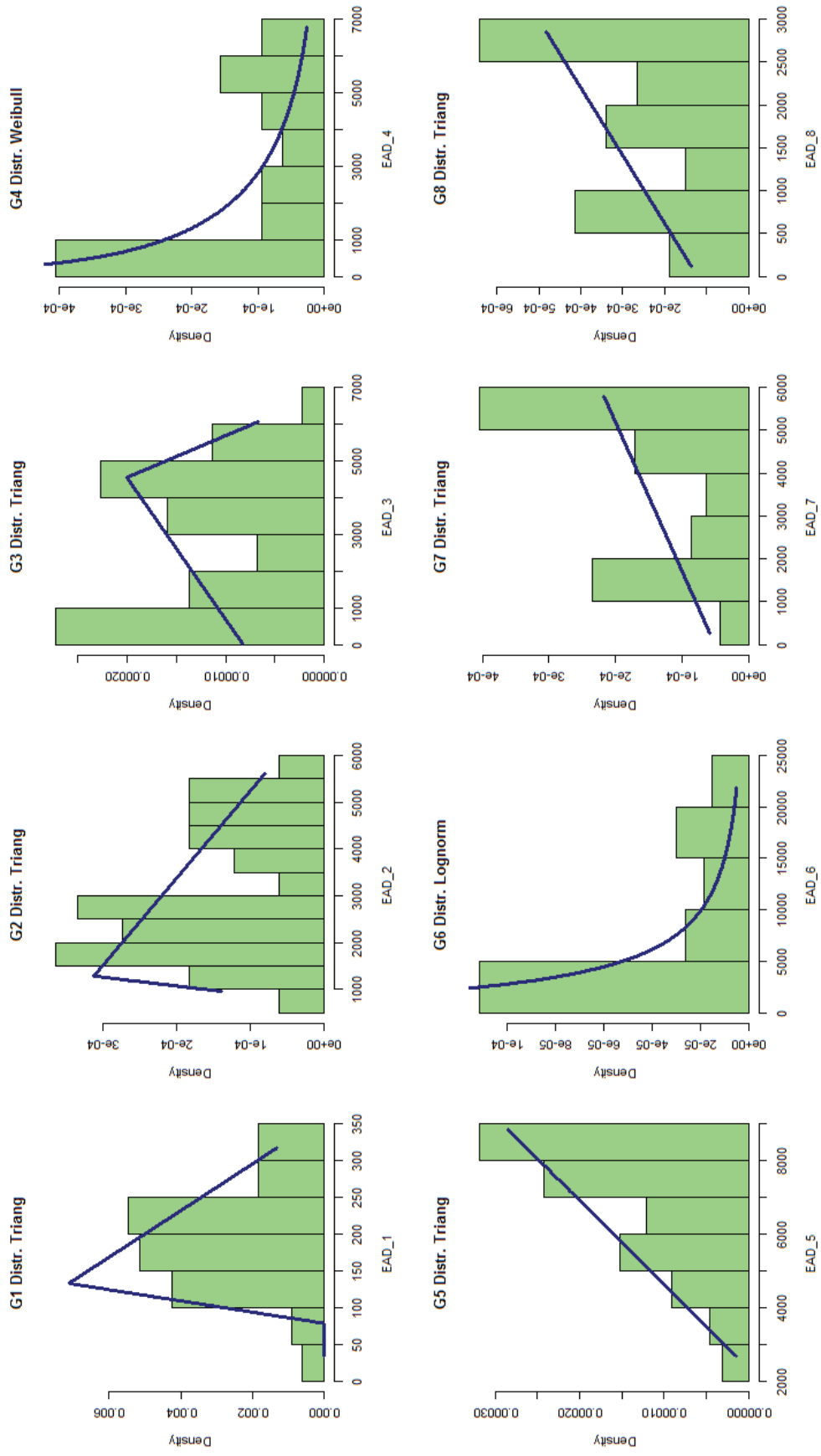


Figura No. 6.. Histograma y densidad de las distribuciones univariadas ajustadas de TI y EAD por grupo ajustadas por máxima verosimilitud (Continuación)

4.5 AJUSTE DE CÓPULAS

Como se mencionó en apartados anteriores las cópulas permiten determinar de manera más acertada y precisa la estructura de dependencia que existe en un portafolio de crédito. Para el desarrollo del presente trabajo se consideró a la tasa de incumplimiento y al monto de exposición como los factores de riesgo más representativos del portafolio, a partir de los cuales se aplicó la teoría de cópulas a cada grupo del portafolio en análisis.

Para la construcción de las cópulas se utilizó el método de los momentos, los cuales a través de las correlaciones de rango permiten estimar el o los parámetros de las cópulas. Todas estas estimaciones se realizaron en R con los paquetes *Stats*, *MASS*, *copula* y *ADGofTest*.

Con el objeto de obtener el mejor ajuste con las cópulas, siguiendo las recomendaciones de varios investigadores como Romano (2004), Hernández y Ramírez (2009), Moreno (2012), entre otros; en esta sección, se utilizan tanto las estructuras más simples, como la gaussiana, como otras familias de cópulas más complejas que incorporan efectos conjuntos de dependencia extrema (Hernandez & Ramirez Sánchez, 2009).

Considerando que la principal idea de aplicar la Teoría de Cópulas en la administración de riesgo es modelar el incumplimiento o *default*, y estimar las pérdidas (Boyé et al., 2000) tomando en cuenta la posibilidad la presencia de eventos extremos, las estimaciones se realizaron con varias clases de cópulas.

Así por ejemplo, Klugman y Parsa (2000) utilizaron la cópula de Frank para el ajuste de una distribución de pérdidas bivariada. Otros autores como Romano (2002) sugieren analizar las cópulas elípticas que son comúnmente utilizada para la estimación de pérdidas en un portafolio, destacando la importancia de la cópula *t* de *Student* al tener sus colas pesadas y por tanto mayor capacidad de estimar valores extremos (Mashal & Zeevi, 2002). En esta misma línea, McNeil (2005) destaca la importancia de la cópula de Gumbel que genera distribuciones con mayor dependencia en las colas.

A manera de resumen:

“La cópula Gaussiana da mayor énfasis a la dependencia en el centro de la distribución y, aunque es ampliamente utilizada en la práctica, puede no detectar la posible dependencia en las colas y no recoge asimetrías. La cópula Frank es una cópula simétrica y, como ya se mencionó, asigna probabilidad de ocurrencia cero a los eventos dentro de las colas. Finalmente, se encuentra la cópula Clayton. Esta asigna mayor probabilidad a los eventos ocurridos en la cola izquierda de la distribución, lo que la hace adecuada para describir la dependencia negativa” (Plascencia, 2012)

Con todo este antecedente, en esta sección se presentan las estimaciones y ajustes realizados con las cópulas Normal, t de *Student*, Clayton, Frank y Gumbel.

4.5.1 Estimación de la correlación de rango y parámetros de las cópulas

El primer paso para la construcción de la cópula es determinar la correlación de rango entre la tasa de incumplimiento TI y el monto de exposición EAD que, en este caso se calculó mediante el método de *Spearman* con la información histórica disponible. Una vez conocida la correlación entre estas dos variables se procedió a estimar el parámetro Rho por clase de cópula (Ver Tabla No. 5).

Con este parámetro se estimaron las cópulas Normal, t *Student*, de Frank, de Clayton y Gumbel para cada grupo del portafolio.

Los resultados de la correlación de *Spearman* reflejan una relación positiva entre la TI y el EAD en los grupos uno, tres y cuatro, y una correlación negativa en el resto de grupos. La correlación negativa evidencia resultados alentadores en cuanto a la administración de riesgo, por cuanto, mientras más alta sea la TI, menor será el EAD (dependiendo del grado de correlación).

Tabla No. 5. Correlación de rango de Spearman y parámetros de cópulas por grupo y clase de cópula¹¹

Grupo	Correlación rango de Spearman	Cópula	Parámetro estimado - Rho-
G1	0,8720	Normal	0,8818
		<i>t Student</i>	0,8818
		Frank	4,6169
		Clayton	10,5648
		Gumbel	3,2746
G2	-0,9015	Normal	-0,9094
		<i>t Student</i>	-0,9094
		Frank	5,6283
		Clayton	12,3725
		Gumbel	3,7639
G3	0,1071	Normal	0,1121
		<i>t Student</i>	0,1121
		Frank	0,1543
		Clayton	0,6464
		Gumbel	1,0787
G4	0,6235	Normal	0,6414
		<i>t Student</i>	0,6414
		Frank	1,6304
		Clayton	4,7454
		Gumbel	1,8182
G5	-0,3773	Normal	-0,3926
		<i>t Student</i>	-0,3926
		Frank	0,6961
		Clayton	2,4375
		Gumbel	1,3497
G6	-0,9766	Normal	-0,9787
		<i>t Student</i>	-0,9787
		Frank	14,2217
		Clayton	27,4586
		Gumbel	7,8583
G7	-0,8408	Normal	-0,8523
		<i>t Student</i>	-0,8523
		Frank	3,8799
		Clayton	9,2041
		Gumbel	2,9230
G8	-0,7767	Normal	-0,7911
		<i>t Student</i>	-0,7911
		Frank	2,8751
		Clayton	7,3105
		Gumbel	2,4288

¹¹ Para la cópula *t* de *Student* se consideran 4 grados de libertad, que es el mejor valor que arroja la función *iRho* del paquete *copula*.

4.5.2 Bondad de Ajuste de las cópulas

Con el propósito de conocer el grado de ajuste de las cópulas se realizaron 1.000 simulaciones con cada clase de cópula; a través del método de máxima verosimilitud se obtuvo el Log de máxima verosimilitud y los criterios de información de *Akaike* (AIC), *Bayesiano* (BIC) y *Hannan y Quinn* (HQ).

Observando el valor más alto de Log de máxima verosimilitud y los valores más bajos de los criterios AIC, BIC y HQ, se seleccionó la clase de cópula que mejor se ajusta a los datos. El mejor ajuste en cada grupo se obtuvo con la cópula de Clayton, esto con excepción del grupo cinco, en cuyo caso el mejor ajuste se consiguió con la cópula de Gumbel.

Con respecto al grupo tres la cópula seleccionada fue la de Clayton por cuanto, como se verá más adelante, la prueba de Dependencia Multivariada únicamente presenta valores significativos para dicha cópula.

Tabla No. 6. Indicadores de ajuste de cópulas por grupo y clase de cópula

Grupo	Cópula	Log-Likelihood -logLik-	Akaike's An Information Criterio - AIC-	Schwarz's Bayesian criterion - BIC-	Hannan y Quinn -HQ-
G1	Normal	745,2224	-1.488,4449	-1.483,5371	-1.476,6293
	t Student	788,5106	-1.573,0212	-1.563,2057	-1.549,3901
	Clayton	912,8611	-1.823,7223	-1.818,8145	-1.811,9067
	Frank	664,1597	-1.326,3194	-1.321,4116	-1.314,5039
	Gumbel	816,7800	-1.631,5599	-1.626,6522	-1.619,7444
G2	Normal	884,4873	-1.766,9746	-1.762,0669	-1.755,1591
	t Student	892,1763	-1.780,3526	-1.770,5371	-1.756,7216
	Clayton	1.039,1782	-2.076,3564	-2.071,4486	-2.064,5409
	Frank	760,8082	-1.519,6163	-1.514,7086	-1.507,8008
	Gumbel	977,4568	-1.952,9135	-1.948,0058	-1.941,0980
G3	Normal	5,5249	-9,0498	-4,1420	2,7657
	t Student	41,0612	-78,1223	-68,3068	-54,4913
	Clayton	8,8515	-15,7029	-10,7952	-3,8874
	Frank	2,7517	-3,5035	1,4043	8,3120
	Gumbel	12,2256	-22,4513	-17,5435	-10,6358
G4	Normal	260,3530	-518,7060	-513,7983	-506,8905
	t Student	292,7394	-581,4789	-571,6633	-557,8478
	Clayton	330,9584	-659,9169	-655,0091	-648,1014
	Frank	224,8814	-447,7628	-442,8550	-435,9473
	Gumbel	329,6128	-657,2255	-652,3177	-645,4100
G5	Normal	86,7562	-171,5124	-166,6047	-159,6969
	t Student	116,2058	-228,4117	-218,5962	-204,7807

Grupo	Cópula	Log-Likelihood -logLik-	Akaike's An Information Criterio - AIC-	Schwarz's Bayesian criterion - BIC-	Hannan y Quinn -HQ-
	Clayton	111,1678	-220,3357	-215,4279	-208,5201
	Frank	65,1759	-128,3518	-123,4440	-116,5363
	Gumbel	116,4544	-230,9088	-226,0010	-219,0932
G6	Normal	1.591,3857	-3.180,7715	-3.175,8637	-3.168,9559
	t Student	1.595,4448	-3.186,8895	-3.177,0740	-3.163,2585
	Clayton	1.780,1692	-3.558,3384	-3.553,4306	-3.546,5229
	Frank	1.407,3823	-2.812,7647	-2.807,8569	-2.800,9492
	Gumbel	1.692,2452	-3.382,4905	-3.377,5827	-3.370,6750
G7	Normal	654,9713	-1.307,9427	-1.303,0349	-1.296,1272
	t Student	665,7588	-1.327,5175	-1.317,7020	-1.303,8865
	Clayton	782,7438	-1.563,4876	-1.558,5798	-1.551,6721
	Frank	559,9110	-1.117,8220	-1.112,9143	-1.106,0065
	Gumbel	741,4125	-1.480,8249	-1.475,9172	-1.469,0094
G8	Normal	497,9012	-993,8024	-988,8947	-981,9869
	t Student	511,9639	-1.019,9278	-1.010,1123	-996,2968
	Clayton	599,1116	-1.196,2232	-1.191,3154	-1.184,4076
	Frank	423,5108	-845,0216	-840,1138	-833,2061
	Gumbel	574,4625	-1.146,9250	-1.142,0173	-1.135,1095

4.5.3 Prueba de Uniformidad de las Distribuciones Marginales de la Cópula

Otra manera de comprobar el ajuste y el cumplimiento de las propiedades teóricas de las cópulas es verificar la uniformidad de las distribuciones marginales, a través del test de Anderson Darling, cuya $H_0: X \sim Uniforme(0,1)$. Si el p valor es inferior a 0,05 se rechaza la H_0 .

Para aplicar esta prueba se utilizaron las simulaciones realizadas¹² a partir de las cópulas Clayton con excepción del grupo cinco, en cuyo caso se consideró la cópula de Gumbel.

¹² Considerando que los parámetros de las cópulas se estimaron a través de la correlación de rango de Spearman entre TI y EAD, las cópulas son de dimensión dos. De ahí que poseen dos distribuciones marginales.

Tabla No. 7. Test de Anderson Darling de las Distribuciones Marginales de las cópulas por grupo y clase de cópula

Grupo	Cópula	Distribución Marginal	Anderson-Darling GoF Test	p-valor
G1	Clayton	TI	0,6437	0,6076
		EAD	0,3924	0,8562
G2	Clayton	TI	0,209	0,9877
		EAD	0,9642	0,3766
G3	Clayton	TI	0,209	0,9877
		EAD	1,1818	0,2746
G4	Clayton	TI	0,209	0,9877
		EAD	0,653	0,5993
G5	Gumbel	TI	1,1399	0,2915
		EAD	0,6948	0,5632
G6	Clayton	TI	0,209	0,9877
		EAD	0,653	0,5993
G7	Clayton	TI	0,209	0,9877
		EAD	0,757	0,5131
G8	Clayton	TI	0,209	0,9877
		EAD	0,5207	0,7258

Como se puede apreciar en la Tabla No. 7, en todos los casos no se rechaza la H_0 , es decir, de acuerdo al *test* de *Anderson Darling* las distribuciones generadas a partir de las cópulas seleccionadas demuestran ser uniformes, por tanto cumplen de la principal propiedad de las cópulas y evidencian un buen ajuste.

4.5.4 Prueba de Bondad de Ajuste

La prueba de bondad de ajuste o *Goodness-of-fit test* se basa en un proceso empírico comparando la cópula empírica con una estimación paramétrica de la cópula derivada bajo una determinada hipótesis nula. Para obtener los p-valoros aproximados se utiliza un *bootstrap* paramétrico (Genest, C., Rémillard, B., and Beaudoin, 2009); si el p valor es inferior a 0,05 se rechaza la H_0 .

Para el propósito de nuestro análisis las hipótesis nulas H_0 son:

H_0	C=Cópula
G1	Clayton
G2	Clayton
G3	Clayton

Ho	C=Cópula
G4	Clayton
G5	Gumbel
G6	Clayton
G7	Clayton
G8	Clayton

En la Tabla No. 8 se puede observar que los p valores de la prueba de bondad de ajuste en cada grupo son superiores a 0,05, en tal virtud no se rechaza la H_0 , es decir, la cópulas seleccionadas son las correctas.

Tabla No. 8. Prueba Bondad de Ajuste por grupo

Grupo	Cópula	<i>Cramer-von Mises statistic</i>	p valor
G1	Clayton	0,0197	0,2672
G2	Clayton	0,0209	0,2063
G3	Clayton	0,0136	0,8676
G4	Clayton	0,0162	0,6269
G5	Gumbel	0,0248	0,2073
G6	Clayton	0,0099	0,5440
G7	Clayton	0,0189	0,3382
G8	Clayton	0,0191	2,4090

4.6 APLICACIÓN DEL TEOREMA DE SKLAR

Una vez que se han determinado las distribuciones univariadas que mejor se ajustan al comportamiento histórico de TI y EAD, conociendo las distribuciones marginales y los parámetros de las cópulas estimadas por medio del método de los momentos, se puede aplicar el Teorema de Sklar; es decir, se pueden construir distribuciones multivariadas partiendo de la estructura de dependencia de las cópulas. Todo esto con la ayuda del paquete *copula* de R.

En las siguiente páginas se muestran los resultados de la aplicación del Teorema de Sklar o Modelo de Distribuciones Multivariadas de Cópulas (mvdc) para cada grupo considerando $n=150$ escenarios¹³.

4.6.1 Modelo de Distribuciones Multivariadas de Cópulas –mvdc–

4.6.1.1 Grupo 1

Para el caso del grupo uno, el modelo mvdc se construyó con una cópula de Clayton de parámetro 10,5648, y distribuciones marginales *Triangular* (0,0018; 0,0497; 0,1791) para TI y *Triangular* (78,2730; 132,661; 398,7994) para EAD. En la siguiente figura se presentan los escenarios obtenidos con la cópula y sus distribuciones marginales.

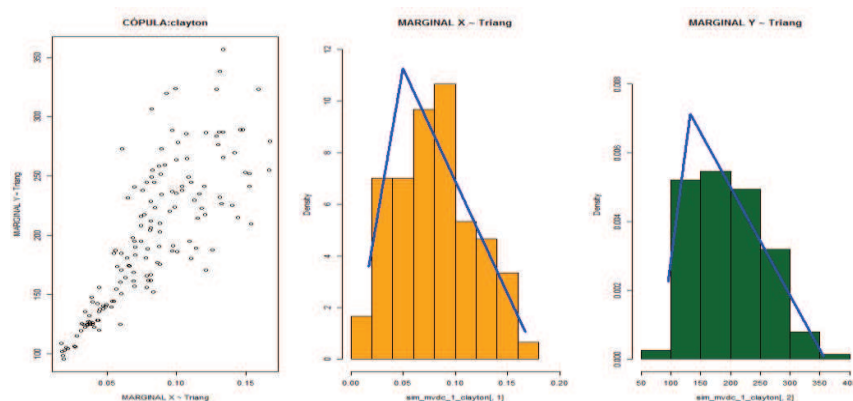


Figura No. 7. Escenarios obtenidos con mvdc y densidad de las distribuciones marginales Grupo 1

¹³ El número de escenarios se estableció considerando la cantidad de observaciones de la muestra disponible.

En las Figura No. 8 y 9 se muestran los gráficos de contorno y perspectiva de la superficie del mvdc.

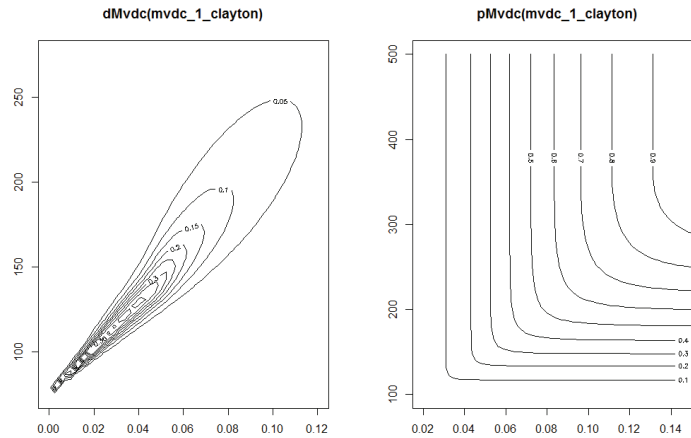


Figura No. 8. Gráficos de contorno mvdc Grupo 1

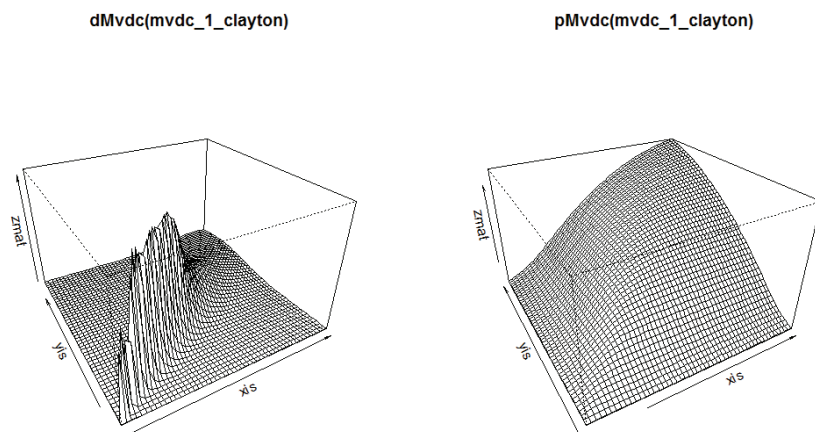


Figura No. 9. Perspectiva de la superficie mvdc Grupo 1

4.6.1.2 Grupo 2

El mvdc del grupo dos se construyó con una cópula de Clayton de parámetro 12,3725, y distribuciones marginales de TI *Triangular* (0,0360; 0,1101; 0,1142) y distribuciones marginales EAD *Triangular* (695,4113; 1282,2317; 7110,8612). En la siguiente figura se presentan los escenarios obtenidos con la cópula y las distribuciones marginales.

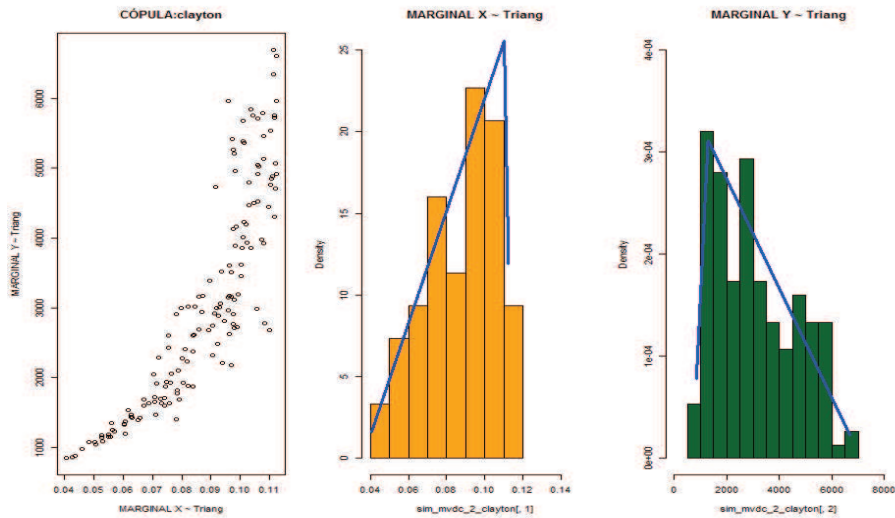


Figura No. 10. Escenarios obtenidos con mvdc y densidad de las distribuciones marginales Grupo 2

En las figuras que se presentan a continuación se puede apreciar los gráficos de contorno y perspectiva de la superficie del mvdc.

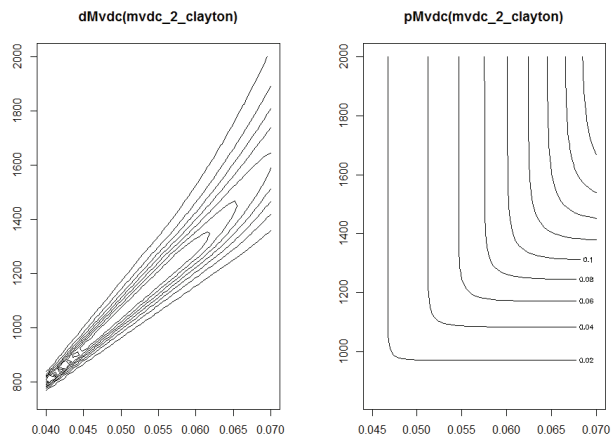


Figura No. 11. Gráficos de contorno mvdc Grupo 2

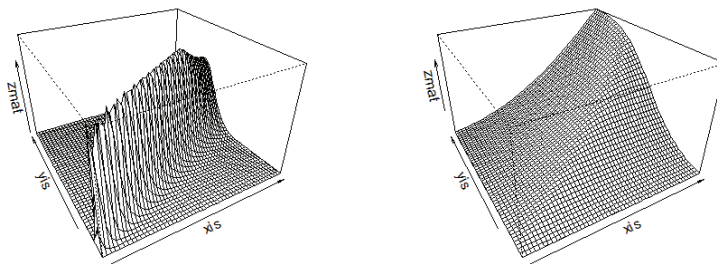


Figura No. 12. Perspectiva de la superficie mvdc Grupo 2

4.6.1.3 Grupo 3

En el grupo tres el mvdc se estructuró con una cópula de Clayton de parámetro 0,6464, y distribuciones marginales *Triangular* (0,0902; 0,0999; 0,1425) y *Triangular* (-3166,359; 4548,734; 6823,962) para TI y EAD, respectivamente. A continuación se muestran los gráficos de los escenarios obtenidos con la cópula y las distribuciones marginales.

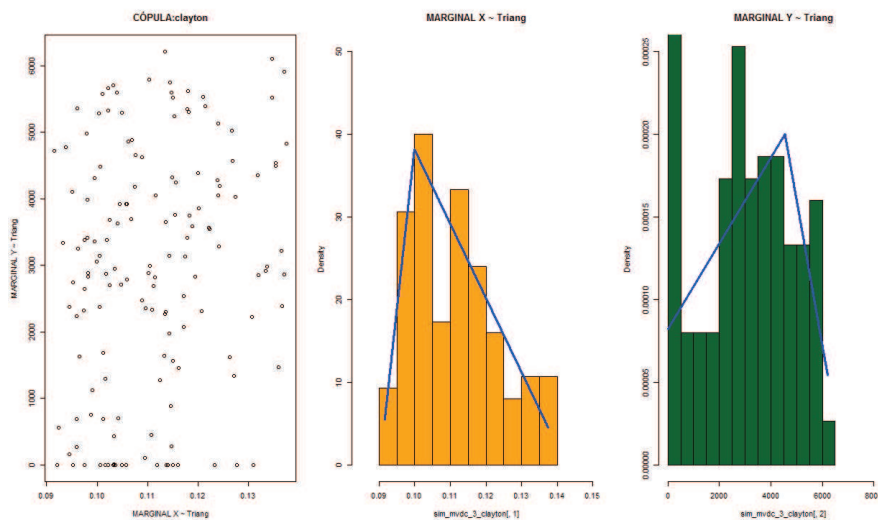


Figura No. 13. Escenarios obtenidos con mvdc y densidad de las distribuciones marginales Grupo 3

En las figuras que se presentan a continuación se pueden apreciar los gráficos de contorno y perspectiva de la superficie del mvdc.

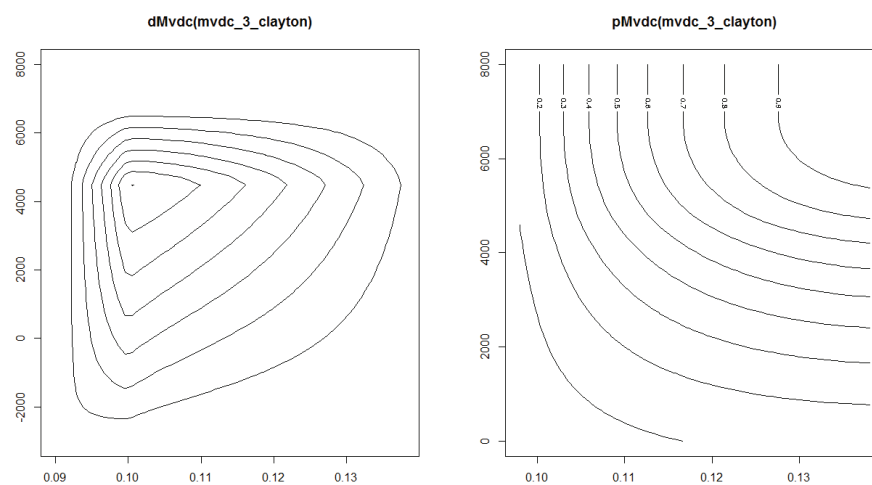


Figura No. 14. Gráficos de contorno mvdc Grupo 3

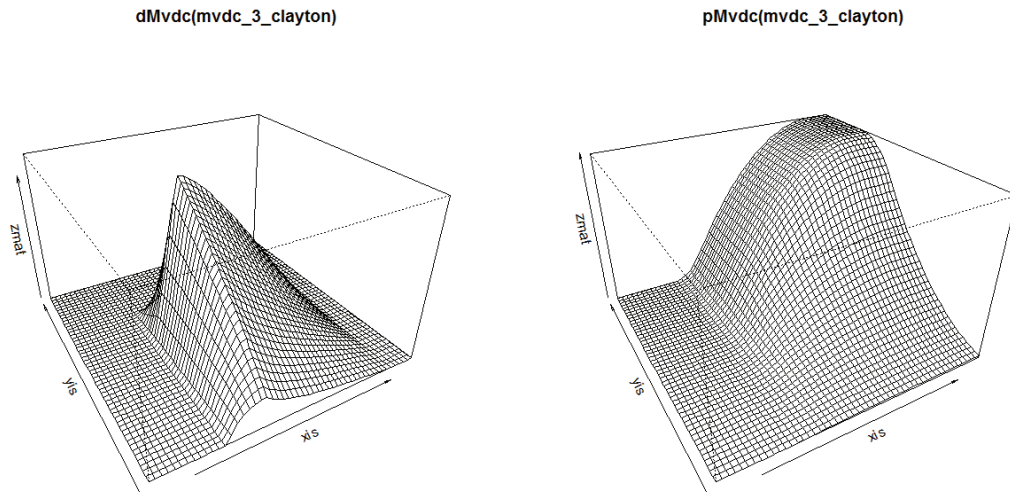


Figura No. 15. Perspectiva de la superficie mvdc Grupo 3

4.6.1.4 Grupo 4

En este grupo el mvdc se construyó con una cópula de Clayton de parámetro 4,7454, y distribuciones marginales *Triangular* (0,0897; 0,1199; 0,1534) para TI y *Weibull* (0,7753; 2293,2659) para EAD.

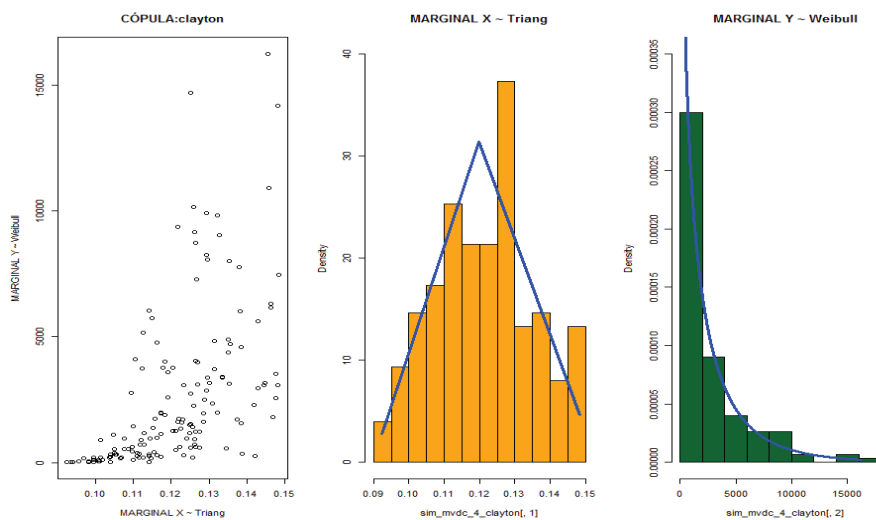


Figura No. 16. Escenarios obtenidos con mvdc y densidad de las distribuciones marginales Grupo 4

A continuación se muestran los gráficos de contorno y perspectiva de la superficie del mvdc.

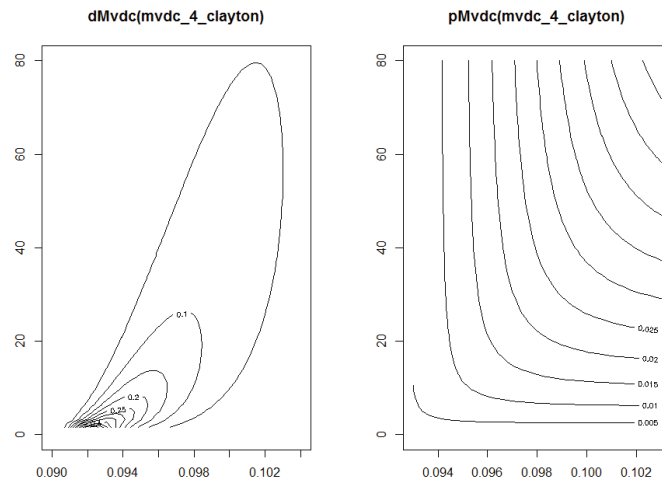


Figura No. 17. Gráficos de contorno mvdc Grupo 4

dMvdc(mvdc_4_clayton)

pMvdc(mvdc_4_clayton)

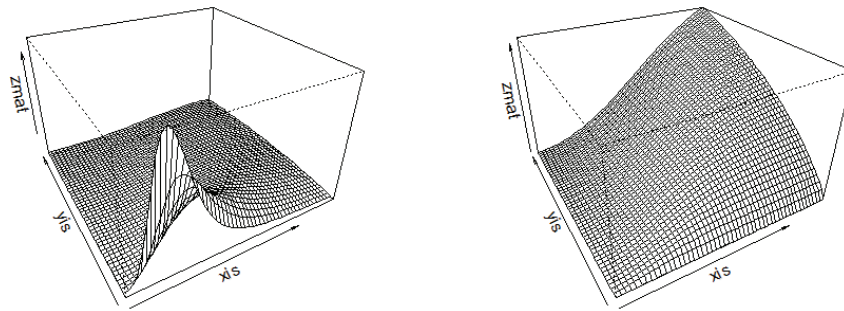


Figura No. 18. Perspectiva de la superficie mvdc Grupo 4

4.6.1.5 Grupo 5

El mvdc del grupo cinco se construyó con una cópula de Gumbel de parámetro 1,3497, y distribuciones marginales de TI *Triangular* (0,0466; 0,0536; 0,2747) y EAD *Triangular* (2344,1960; 8842,3423; 9374,2409). En la siguiente figura se presentan los escenarios obtenidos con la cópula y las distribuciones marginales.

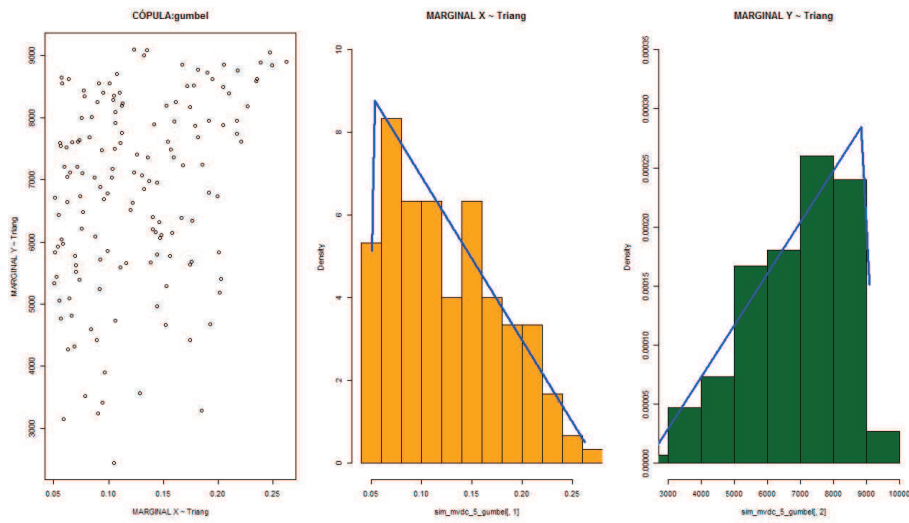


Figura No. 19. Escenarios obtenidos con mvdc y densidad de las distribuciones marginales Grupo 5

En las figuras que se presentan a continuación se pueden apreciar los gráficos de contorno y perspectiva de la superficie del mvdc.

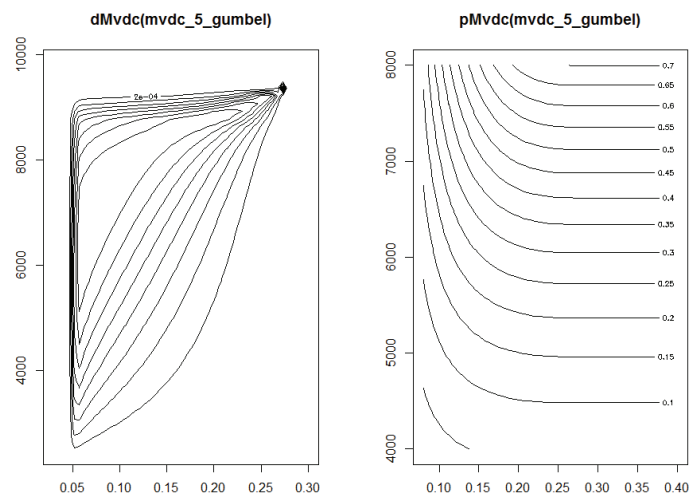


Figura No. 20. Gráficos de contorno mvdc Grupo 5

dMvdc(mvdc_5_gumbel)

pMvdc(mvdc_5_gumbel)

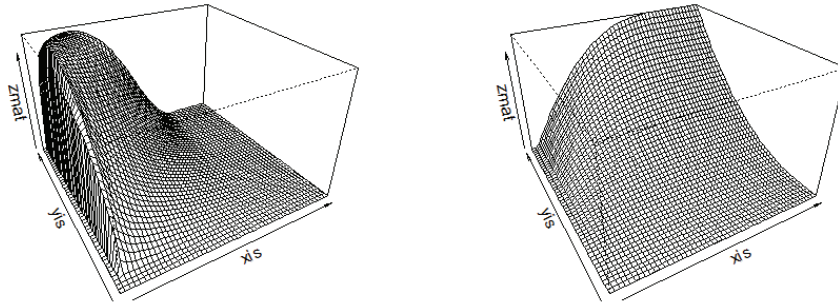


Figura No. 21. Perspectiva de la superficie mvdc Grupo 5

4.6.1.6 Grupo 6

En el grupo seis mvdc se estructuró con una cópula de Clayton de parámetro 27,4586, y distribuciones marginales *Triangular* $(-0,0797; 0,0286; 0,7370)$ y *Log normal* $(8,0032; 1,4333)$ para TI y EAD, respectivamente. A continuación se muestran los gráficos de los escenarios obtenidos con la cópula y sus distribuciones marginales.

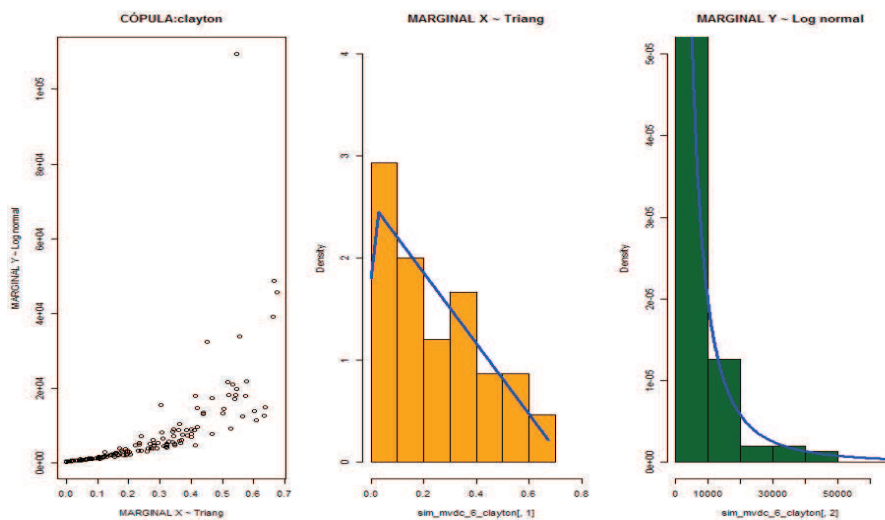


Figura No. 22. Escenarios obtenidos con mvdc y densidad de las distribuciones marginales Grupo 6

En las figuras que se presentan a continuación se pueden apreciar los gráficos de contorno y perspectiva de la superficie del mvdc.

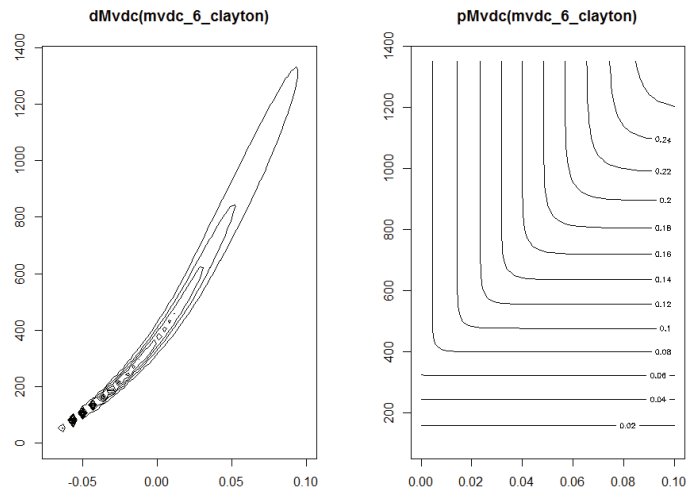


Figura No. 23. Gráficos de contorno mvdc Grupo 6

dMvdc(mvdc_6_clayton)

pMvdc(mvdc_6_clayton)

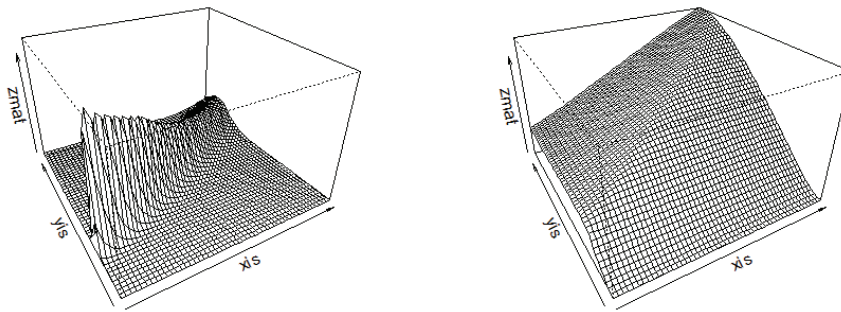


Figura No. 24. Perspectiva de la superficie mvdc Grupo 6

4.6.1.7 Grupo 7

En este grupo el mvdc se construyó con una cópula de Clayton de parámetro 9,2041, y distribuciones marginales *Triangular* (0,0352; 0,0455; 0,1229) para TI *Triangular* (-1747,9259; 6048,4703; 7151,1344) para EAD.

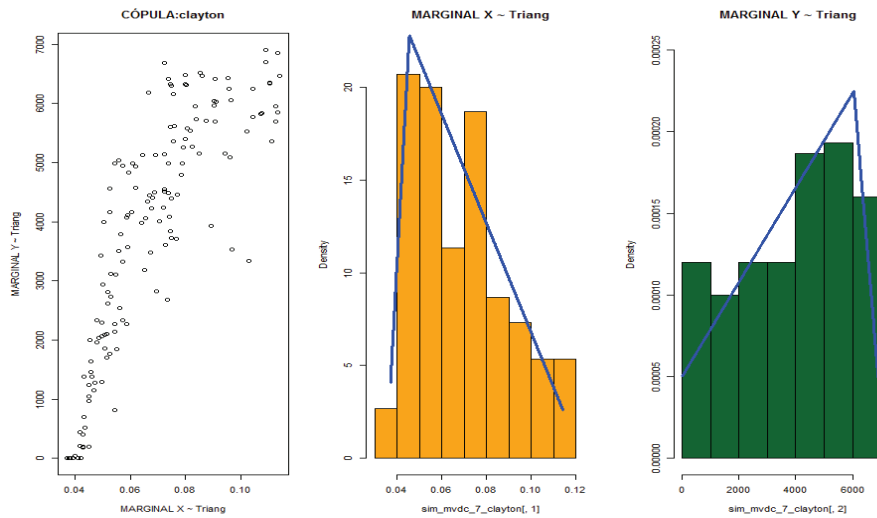


Figura No. 25. Escenarios obtenidos con mvdc y densidad de las distribuciones marginales Grupo 7

A continuación se muestran los gráficos de contorno y perspectiva de la superficie del mvdc.

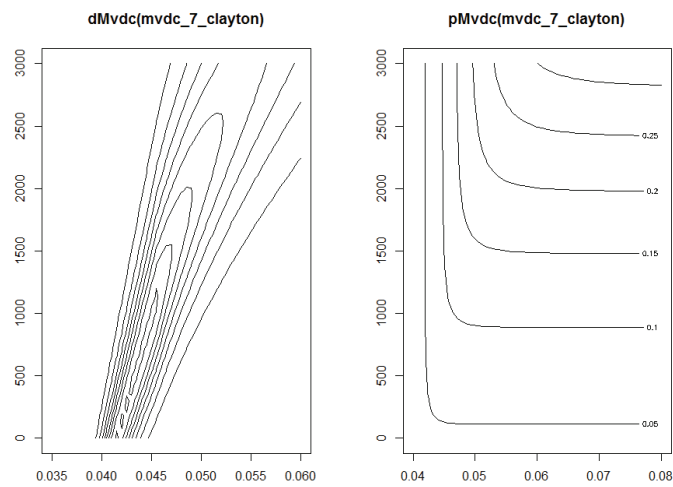


Figura No. 26. Gráficos de contorno mvdc Grupo 7

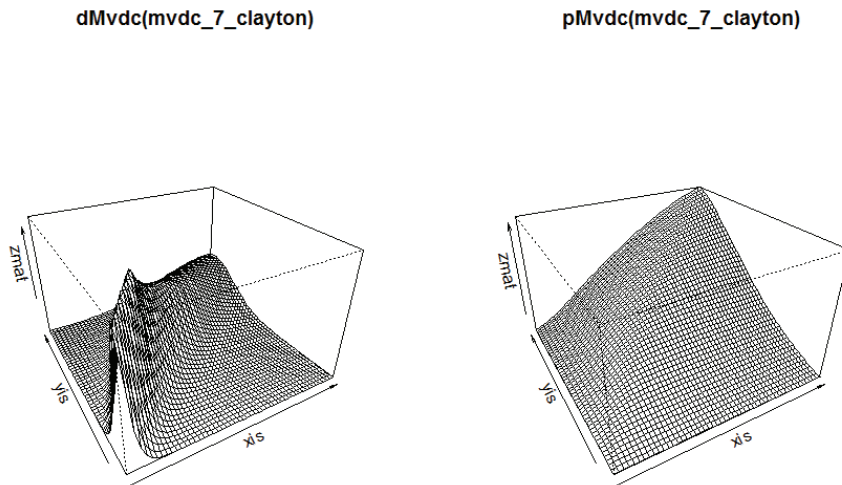


Figura No. 27. Perspectiva de la superficie mvdc Grupo 7

4.6.1.8 Grupo 8

El mvdc del grupo ocho se construyó con una cópula de Clayton de parámetro 7,3105, y distribuciones marginales *Triangular* (0,0404; 0,1157; 0,2302) para TI y *Triangular* (−959,1331; 2906,0652; 3127,5108) para EAD.

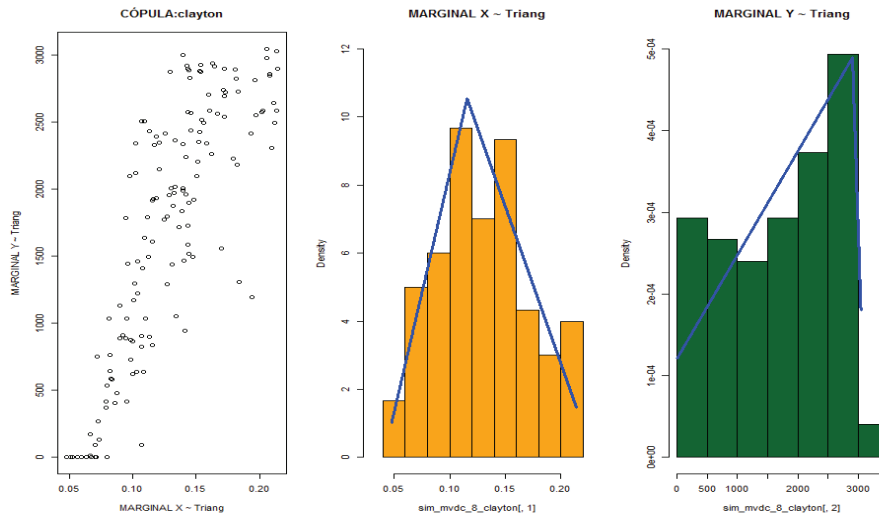


Figura No. 28. Escenarios obtenidos con mvdc y densidad de las distribuciones marginales Grupo 8

A continuación se muestran los gráficos de contorno y perspectiva de la superficie del mvdc.

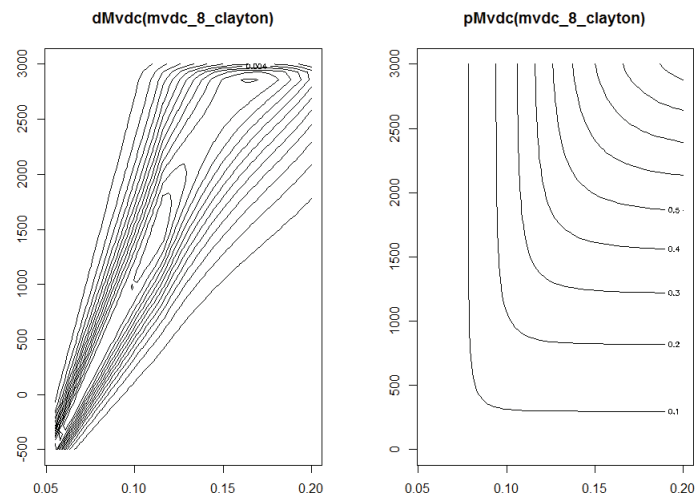


Figura No. 29. Gráficos de contorno mvdc Grupo 8

dMvdc(mvdc_8_clayton) pMvdc(mvdc_8_clayton)

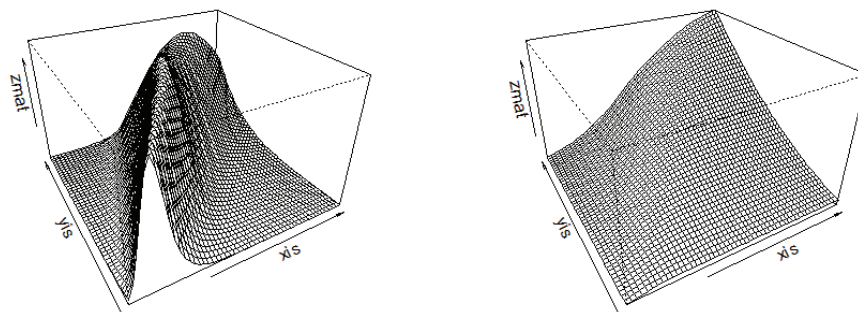


Figura No. 30. Perspectiva de la superficie mvdc Grupo 8

4.6.2 Prueba de Dependencia Multivariada

Propuesto por Christian Genest y Bruno Rémillard (2006), la prueba de dependencia multivariada permite medir el grado de ajuste de los modelos de distribuciones multivariadas de cópulas mvdc. Esta prueba utiliza un proceso basado en la cópula empírica para medir el grado de relación entre las distribuciones marginales de las simulaciones o escenarios generados a partir de los mvdc. Así $H_0: (X, Y) \sim C(u, v) = uv$; es decir, existe dependencia entre las distribuciones marginales. La prueba se realiza con el Estadístico *Global Cramer-von Mises*; si el p valor de dicho estadístico es inferior a 0,05 se rechaza la H_0 .

Tabla No. 9. Prueba de Dependencia Multivariada por grupo y mvdc

Grupo	Cópula	<i>Global Cramer-von Mises statistic</i>	p-valor
G1	Clayton	1,1703	0,0005
G2	Clayton	1,3783	0,0005
G3	Clayton	0,0628	0,0385
G4	Clayton	0,7795	0,0005
G5	Gumbel	0,1447	0,0015
G6	Clayton	1,5898	0,0005
G7	Clayton	1,2415	0,0005
G8	Clayton	1,0958	0,0005

Como se puede notar en la tabla anterior, todos los p valores estimados son inferiores a 0,05, lo cual revela la dependencia de los mvdc para cada grupo¹⁴ y por tanto buen ajuste de los modelos.

Cabe destacar que, esta prueba se realizó para todas las clases de cópulas del grupo tres, considerando las distribuciones univariadas que mejor se ajustaban a la TI y EAD. Los resultados demostraron que únicamente con la cópula de Clayton se obtiene un p valor inferior al 0.05, razón por la cual se seleccionó esta cópula como la de mejor ajuste para todas las estimaciones.

¹⁴ A continuación los resultados prueba de Dependencia Multivariada de todas cópulas del grupo tres:

Grupo	Cópula	<i>Global Cramer-von Mises statistic</i>	p-valor
G3	Normal	0,0356	0,2033
	t Student	0,0304	0,2802
	Clayton	0,0628	0,0385
	Frank	0,0195	0,6508
	Gumbel	0,0210	0,5839

4.7 INDICADORES DE RIESGO DE CADA GRUPO

Utilizando las simulaciones de las distribuciones marginales obtenidas mediante los Modelos de Distribuciones Multivariadas de Cópulas (mvdc) que representan los escenarios de la tasa de incumplimiento y monto de exposición, se estimaron la Pérdida Esperada, Máxima Pérdida, *Credit VaR* y Pérdida Esperada en la cola ES en cada grupo del portafolio de crédito en el período de un mes¹⁵. Todo esto con las expresiones y metodología de cálculo definida en el capítulo tres.

En la Tabla No. 10 se muestran los resultados de los Indicadores de Riesgo estimados al 95,00; 99,00; 99,50 y 99,90% de confianza. Nótese que a mayor nivel de confianza, mayores son los valores de los Indicadores de Riesgo.

Así también se puede distinguir que el mayor monto de Pérdidas Esperadas, *Credit VaR* y ES, se obtienen en los grupos cuatro, cinco y en particular en el seis, lo cual muestra que grupos y pérdidas estimadas tendrán mayor influencia para la estimación de los resultados agregados del portafolio.

A fin ejemplificar la interpretación de los resultados en el lapso de un mes, se tomó como referencia el grupo uno. En este grupo, la Pérdida Esperada se estimó en un valor de 8.850 USD. Al 99,00% de confianza la Máxima Pérdida que se puede presentar en el portafolio ascendió a 25.422 USD. En condiciones normales de mercado en un período de 30 días, la máxima pérdida que puede sufrir este grupo en 30 días al 99,00% de confianza es 16.572 USD (*Credit VaR*), si las condiciones cambian y empeoran la máxima pérdida esperada luego de superar la máxima pérdida (*Expected Shortfall*) es 25.424 USD.

¹⁵ Para ello, la porción de pérdida que sufre el portafolio en el caso de incumplimiento LGD, se fijó en un valor de 0,5 en base al promedio histórico de recuperación de la cartera y promedio de cobertura de las garantías de cada crédito.

Tabla No. 10. Indicadores de Riesgo mvdc por grupo en USD.

mvdc	Indicador de Riesgo	Nivel de confianza			
		95,00%	99,00%	99,50%	99,90%
G1	Pérdida Esperada	8.849,97			
	Max. Pérdida	20.099,09	23.558,01	24.274,45	25.422,38
	Credit VaR	11.249,12	14.708,04	15.424,48	16.572,41
	Expected Shorfall	20.230,11	23.574,02	24.284,07	25.424,30
G2	Pérdida Esperada	145.688,85			
	Max. Pérdida	303.990,34	361.738,71	370.744,59	371.956,91
	Credit VaR	158.301,49	216.049,86	225.055,75	226.268,06
	Expected Shorfall	305.774,87	361.866,71	370.754,75	371.958,93
G3	Pérdida Esperada	166.068,98			
	Max. Pérdida	328.196,74	388.624,39	406.693,97	410.103,36
	Credit VaR	162.127,76	222.555,41	240.624,99	244.034,38
	Expected Shorfall	329.884,87	388.886,63	406.722,53	410.109,04
G4	Pérdida Esperada	173.250,15			
	Max. Pérdida	589.337,69	984.152,39	1.082.595,66	1.162.426,96
	Credit VaR	416.087,54	810.902,24	909.345,51	989.176,81
	Expected Shorfall	601.663,58	985.920,20	1.083.264,26	1.162.560,14
G5	Pérdida Esperada	441.198,34			
	Max. Pérdida	920.236,51	1.109.993,64	1.130.259,62	1.159.131,49
	Credit VaR	479.038,17	668.795,30	689.061,28	717.933,15
	Expected Shorfall	927.180,27	1.110.426,42	1.130.501,43	1.159.179,66
G6	Pérdida Esperada	1.564.346,24			
	Max. Pérdida	5.598.402,79	15.799.284,08	19.683.298,66	27.856.520,66
	Credit VaR	4.034.056,55	14.234.937,84	18.118.952,43	26.292.174,42
	Expected Shorfall	6.006.694,85	15.896.843,84	19.751.751,11	27.870.156,33
G7	Pérdida Esperada	148.467,74			
	Max. Pérdida	329.242,07	373.407,98	380.115,79	387.042,59
	Credit VaR	180.774,34	224.940,25	231.648,05	238.574,85
	Expected Shorfall	330.895,09	373.536,67	380.173,80	387.054,14
G8	Pérdida Esperada	126.156,81			
	Max. Pérdida	276.216,11	311.880,37	315.459,02	321.175,18
	Credit VaR	150.059,30	185.723,57	189.302,21	195.018,38
	Expected Shorfall	277.560,43	311.960,22	315.506,89	321.184,72

En la Figura No. 31 se presenta la distribución de pérdidas estimadas en cada grupo con su respectivo *Credit VaR* y *Expected Shortfall* ES al 99,50%. En esta figura se puede apreciar que en general existe una distancia considerable entre los Indicadores de Riesgo mencionados, lo cual refleja un importante grado de vulnerabilidad y riesgo en cada grupo, en especial en el grupo tres donde el ES supera en 69,03% el valor del *Credit VaR*,

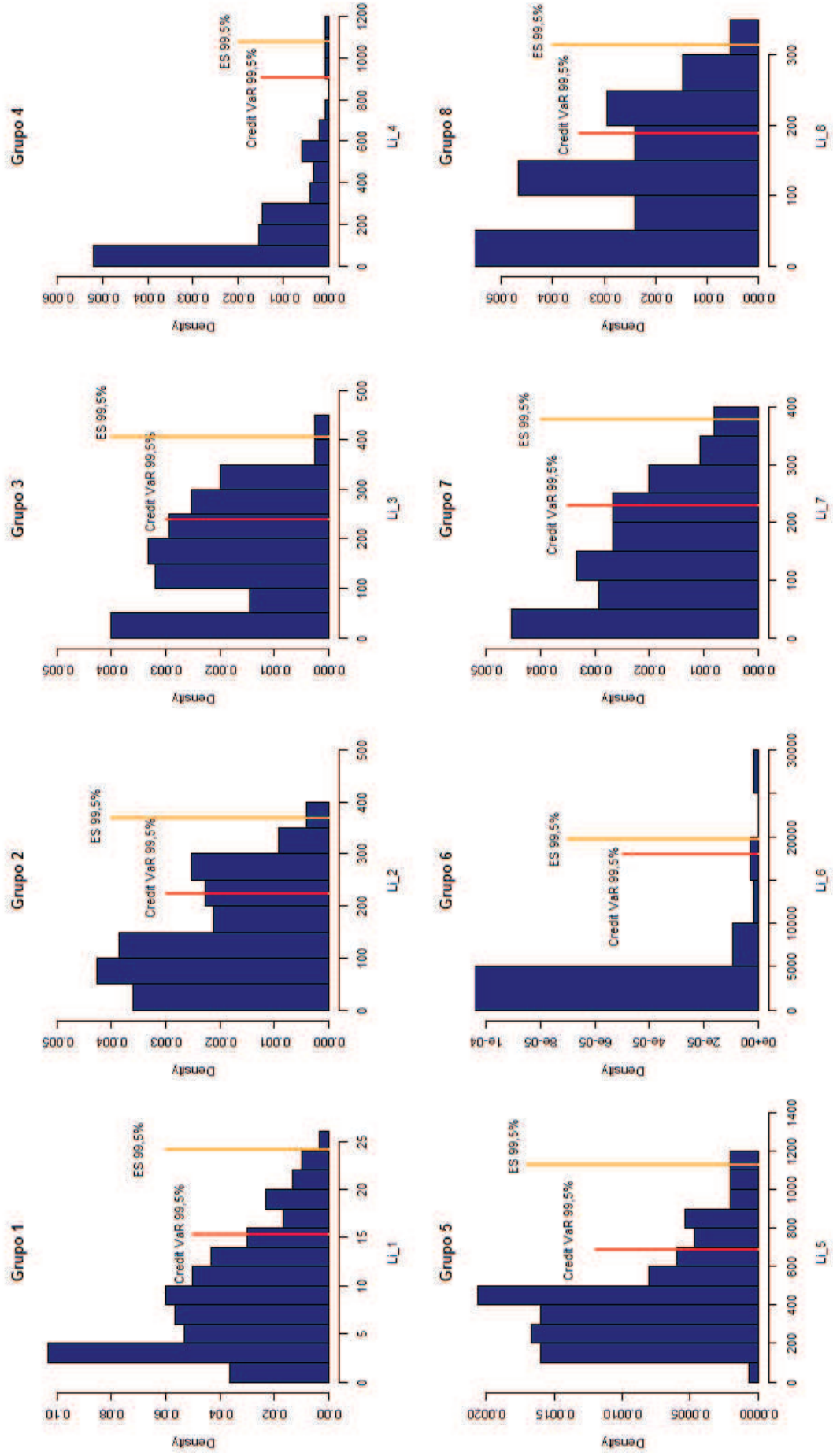


Figura No. 31. Densidad de las Pérdidas Estimadas, Credit VaR y Expected Shortfall por grupo (miles de USD)

4.8 INDICADORES DE RIESGO DEL PORTAFOLIO

Para estimar los Indicadores de Riesgo de todo el portafolio de crédito de consumo, se realizó la sumatoria del valor de las pérdidas de cada grupo en cada escenario obtenido con los mvdc, tal y como se expuso en el capítulo tres. De esta manera, se obtuvo una distribución de pérdidas única para todo el portafolio, a partir de la cual se obtuvieron los siguientes resultados:

Tabla No. 11. Indicadores de Riesgo portafolio de crédito de consumo en USD.

Indicador de riesgo	Nivel de confianza			
	95,00%	99,00%	99,50%	99,90%
Pérdida esperada	2.774.027,07			
Max. Pérdida	7.104.996,18	17.053.811,40	21.423.543,99	29.114.954,23
Credit VaR	4.330.969,11	14.279.784,33	18.649.516,91	26.340.927,16
Expected Shortfall	7.493.558,50	17.155.245,34	21.487.961,16	29.127.786,08

Los resultados arrojan una Pérdida Esperada del portafolio de 2.774.027,07 USD. Con respecto a la Pérdida Esperada, observando los valores del resto de los Indicadores de Riesgo, claramente se puede distinguir que todos los valores son superiores en todos los niveles de confianza. Esto se traduce en un factor importante a considerar al momento de realizar políticas para administrar el riesgo de crédito, pues se debe recordar que la Pérdida Esperada es el principal indicador sobre el cual los organismos de control ejercen supervisión financiera y es el principal referente para el cálculo de las provisiones para créditos incobrables. En un escenario negativo la subestimación de la Pérdida Esperada puede conllevar a pérdidas que afecten no solo la rentabilidad de la cartera, sino que también comprometan la solidez de la institución financiera, debido a la necesidad de liquidez que obligaría a la búsqueda de Fuentes Alternativas de Liquidez o en el peor de los casos a la venta de los activos financieros.

En particular, al 95% de confianza la diferencia entre la Pérdida Esperada y la Pérdida Esperada en la Cola o *Expected Shortfall* del portafolio registra un valor de 18.713.934,08 USD que, es justamente el monto potencial de pérdidas que actualmente no se está considerando en el análisis para la administración y

mitigación del riesgo, puesto que la normativa legal de la SBS del Ecuador no exige el cálculo de los Indicadores de Riesgo expuestos en este documento y mucho menos su análisis.

Al 99,5% de confianza el portafolio puede presentar una Pérdida Máxima de 21.423.543,99 USD. En condiciones normales de mercado, en el lapso de un mes al mismo nivel de confianza, la máxima pérdida que puede presentar el portafolio o Pérdida Inesperada es 18.649.516,91 USD (*Credit VaR*). De modificarse algún factor y empeorarse las condiciones de mercado, una vez superada la máxima pérdida, la pérdida esperada luego del *Credit VaR* puede alcanzar un valor de 21.487.961,16 USD al 99,50% de confianza, es decir, las pérdidas podrían incrementarse hasta un 15,22% en relación al valor del *Credit VaR*.

Representando gráficamente los resultados del *Credit VaR* y *Expected Shortfall* al 99,50% de confianza, se puede observar de mejor manera las distancias que existen entre los Indicadores de Riesgo. Adicionalmente se puede conocer la función de densidad de las pérdidas estimadas que básicamente concentran hasta un monto aproximado de 8.000.000 USD. el 96,00% del comportamiento de la cartera. El gráfico muestra como dada la estructura de dependencia existente en los grupos cuatro, cinco y en especial en el grupo seis¹⁶ de la segmentación CHAID se producen valores extremos de pérdida, lo cual a nivel agregado del portafolio se traduce también en valores extremos e Indicadores de Riesgo muy por encima de la Pérdida Esperada evidenciando debilidades y falencias en las políticas de administración del riesgo de crédito. (Ver Figura No. 32)

¹⁶ Es importante destacar que, los valores extremos de los grupos cinco y seis tienen una participación importante sobre los resultados agregados del portafolio, por cuanto, poseen los mayores montos concedidos y por tanto los mayores montos de exposición en el período de análisis.

Los resultados además de alertas en cuanto a la estimación de pérdidas del portafolio, muestran los factores principales donde la institución financiera debería intervenir para mitigar y reducir el riesgo del portafolio. De manera específica, conociendo los resultados que pueden tener en el portafolio agregado, la institución financiera debería prestar atención a los Indicadores de Riesgo de cada grupo definido con la técnica CHAID, para así poder desarrollar y enfocar políticas, medidas y mejoras específicas en los procesos de colocación y recuperación de las operaciones de crédito analizándolas conforme a los grupos y metodología esbozada en este trabajo.

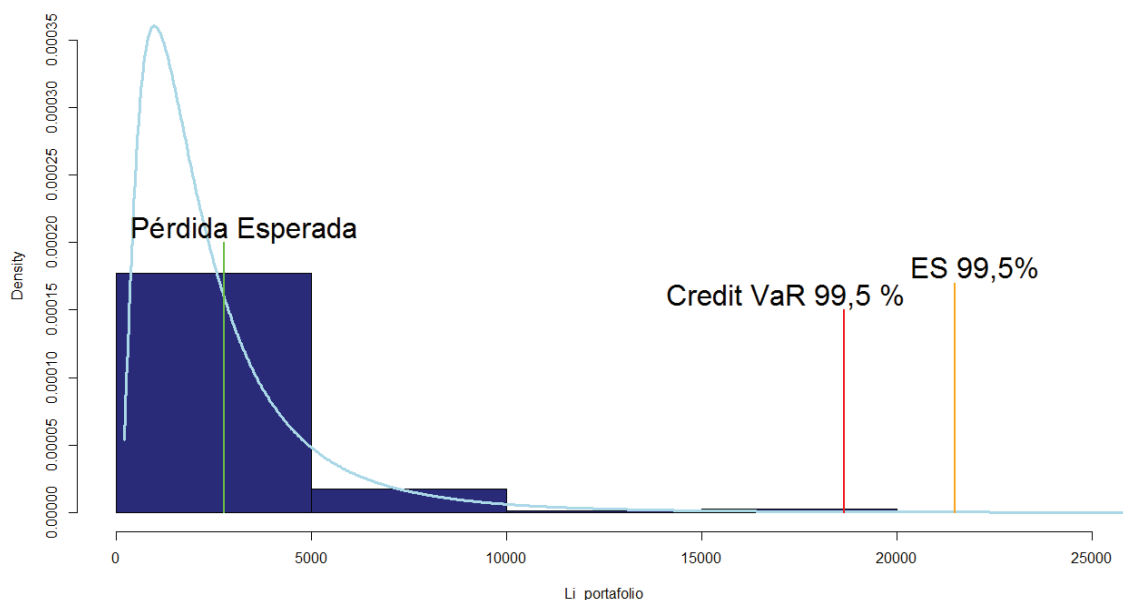


Figura No. 32. Densidad Pérdidas Estimadas, *Credit VaR* y *Expected Shortfall* (miles de USD.)

4.9 RESULTADOS EMPÍRICOS VS. APLICACIÓN TEORÍA DE CÓPULAS

Actualmente para calcular los indicadores de riesgo de un portafolio de crédito, la mayoría de las instituciones financieras en el Ecuador no consideran la estructura ni clase de dependencia que podrían presentar diversos factores de riesgo dentro de la cartera. En este sentido, el cálculo de la pérdida esperada por ejemplo no se realiza considerando métodos de riesgo de crédito avanzados, sino únicamente la fórmula de la normativa de la SBS¹⁷. Con estos antecedentes, a los resultados de los indicadores de riesgo estimados sin considerar la relación ni estructura de dependencia o independencia entre los distintos factores de riesgo del portafolio se los denomina Resultados Empíricos.

Con el propósito de comparar los resultados obtenidos con la aplicación de la teoría de cópulas a través de los Modelos de Distribuciones Multivariadas de Cópulas (mvdc), en relación a los resultados empíricos del portafolio de crédito, se estimó la Pérdida Esperada y la Máxima Pérdida al 95,00; 99,00; 99,50 y 99,90% de confianza, conociendo a priori que deben presentarse resultados diferentes por los métodos de estimación.

En todos los casos, el valor de la Pérdida Esperada empírica es menor a la pérdida del mvdc. Es decir, sin considerar la estructura de dependencia que existe dentro de cada uno de los grupos del portafolio, los valores empíricos subestiman la Pérdida Esperada, lo cual se traduce en menores montos de provisión en el portafolio necesario para mitigar el riesgo. Por otra parte, considerando un escenario donde se presenten eventos de riesgo consecutivos y debido a la subestimación de la Pérdida Esperada empírica, la institución financiera se vería obligada a buscar liquidez, recurriendo para ello a Fuentes Alternativas de

¹⁷ Es decir, la fórmula señalada en el Libro I . - Normas Generales para la aplicación de La Ley General de Instituciones del Sistema Financiero Título X . - De la gestión y administración de riesgos.

Liquidez como préstamos con la Banca Central, préstamos del resto del Sistema Financiero o la venta de los activos financieros.

Por otra parte, en todos los grupos y en todos los niveles de confianza los Indicadores de Riesgo de los mvdc son superiores a los valores empíricos. Esta situación demuestra dos puntos importantes al considerar la teoría de cópulas en la estimación, el primero que gracias a los mdvc es posible conocer los resultados extremos que efectivamente puede presentar el portafolio y segundo que, los resultados empíricos no recogen los eventos extremos de forma adecuada, con lo cual queda demostrado la pertinencia y necesidad de aplicar la metodología propuesta en este documento.

Tabla No. 12. Indicadores de Riesgo empiricos Vs. Mvdc por grupos en USD.

Grupo	Indicador de Riesgo	Resultados Empiricos						Resultados mvdc						Tasa de Variación (Nivel de confianza 99,50%)	
		Nivel de confianza						Nivel de confianza							
		95,00%	99,00%	99,50%	99,90%	95,00%	99,00%	95,00%	99,00%	99,50%	99,90%				
	Pérdida Esperada		8.470,28								8.849,97				0,04
G1	Max. Pérdida	19.785,25	21.855,88	22.604,27	23.202,99	20.099,09	23.558,01	24.274,45	25.422,38						0,07
	Credit VaR	11.314,97	13.385,60	14.134,00	14.732,71	11.249,12	14.708,04	15.424,48	16.572,41						0,09
	Expected Shorfall	25.788,50	23.367,78	23.356,43	23.352,81	20.230,11	23.574,02	24.284,07	25.424,30						0,04
	Pérdida Esperada		115.934,56				145.688,85								0,26
G2	Max. Pérdida	177.762,10	184.043,31	184.087,23	184.122,36	303.990,34	361.738,71	370.744,59	371.956,91						1,01
	Credit VaR	61.827,54	68.108,75	68.152,67	68.187,80	158.301,49	216.049,86	225.055,75	226.268,06						2,30
	Expected Shorfall	197.397,70	184.132,04	184.131,37	184.131,16	305.774,87	361.866,71	370.754,75	371.958,93						1,01
	Pérdida Esperada		157.273,91				166.068,98								0,06
G3	Max. Pérdida	293.732,80	314.640,62	314.750,03	314.837,56	328.196,74	388.624,39	406.693,97	410.103,36						0,29
	Credit VaR	136.458,89	157.366,70	157.476,12	157.563,65	162.127,76	222.555,41	240.624,99	244.034,38						0,53
	Expected Shorfall	338.456,93	314.861,65	314.859,99	314.859,46	329.884,87	388.886,63	406.722,53	410.109,04						0,29
	Pérdida Esperada		166.468,65				173.250,15								0,04
G4	Max. Pérdida	409.990,30	454.354,12	460.825,31	466.002,27	589.337,69	984.152,39	1.082.595,66	1.162.426,96						1,35
	Credit VaR	243.521,65	287.885,47	294.356,66	299.533,62	416.087,54	810.902,24	909.345,51	989.176,81						2,09
	Expected Shorfall	486.687,97	467.427,24	467.329,02	467.297,80	601.663,58	985.920,20	1.083.264,26	1.162.560,14						1,32
	Pérdida Esperada		402.241,07				441.198,34								0,10
G5	Max. Pérdida	673.018,46	684.346,39	684.861,16	685.272,96	920.236,51	1.109.993,64	1.130.259,62	1.159.131,49						0,65
	Credit VaR	270.777,39	282.105,32	282.620,08	283.031,89	479.038,17	668.796,30	689.061,28	717.933,15						1,44
	Expected Shorfall	710.515,20	685.386,32	685.378,50	685.376,02	927.180,27	1.110.426,42	1.130.501,43	1.159.179,66						0,65
	Pérdida Esperada		275.720,46				1.564.346,24								4,67
G6	Max. Pérdida	558.043,50	600.524,75	614.019,88	624.815,98	5.598.402,79	15.799.284,08	19.683.298,66	27.856.520,66						31,06
	Credit VaR	282.323,04	324.804,29	338.299,41	349.095,51	4.034.056,55	14.234.937,84	18.118.952,43	26.292.174,42						52,56
	Expected Shorfall	669.311,39	627.787,63	627.582,81	627.517,70	6.006.694,85	15.896.843,84	19.751.751,11	27.870.156,33						30,47
	Pérdida Esperada		113.855,06				148.467,74								0,30
G7	Max. Pérdida	161.826,29	171.855,91	172.854,84	173.653,99	329.242,07	373.407,98	380.115,79	387.042,59						1,20
	Credit VaR	47.971,23	58.000,86	58.999,79	59.798,93	180.774,34	224.940,25	231.648,05	238.574,85						2,93
	Expected Shorfall	183.318,75	173.873,95	173.858,79	173.853,97	330.895,09	373.536,67	380.173,80	387.054,14						1,19
	Pérdida Esperada		96.336,64				126.156,81								0,31
G8	Max. Pérdida	153.027,85	162.616,45	162.769,97	162.892,78	276.216,11	311.880,37	315.459,02	321.175,18						0,94
	Credit VaR	56.691,20	66.279,80	66.433,32	66.556,14	150.059,30	185.723,57	189.302,21	195.018,38						1,85
	Expected Shorfall	173.762,40	162.926,59	162.924,26	162.923,52	277.560,43	311.960,22	315.506,89	321.184,72						0,94

En particular, al no poder predecir los eventos extremos la medición del riesgo, resulta no ser la correcta, pues, se subestima las pérdidas potenciales y por tanto aumenta el nivel del riesgo al cual está expuesta la institución financiera. Así por ejemplo, si se considera los resultados de la Máxima Pérdida del grupo seis al 99,9% de confianza, los valores empíricos muestran un valor de 624.815 USD., resultado que es superado ampliamente por los resultados del mvdc con un valor de 27.856.520 USD. que no solo considera un evento extremo sino que además incorpora la estructura y relación de dependencia entre la tasa de incumplimiento y monto de exposición EAD del grupo específico de la cartera.

A nivel agregado la Pérdida Esperada empírica alcanza un valor de 1,108,797 USD., mientras que, la del mvdc es 150% superior pues registra un valor de 2,774,027.07 USD. Claramente se puede distinguir que la diferencia entre las estimaciones supera el millón y medio de USD., monto que evidentemente es significativo sobre todo para el cálculo de provisiones y generación de políticas, medidas y procesos para la mitigación y administración del riesgo.

En definitiva, la aplicación de los Modelo de Distribuciones Multivariadas de Cópulas (mvdc) al considerar la estructura de dependencia del portafolio de crédito estima Indicadores de Riesgo y Pérdidas mucho más acertadas y precisas acorde al nivel y administración de riesgo vigente en la institución financiera.

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En el desarrollo del presente trabajo se aplicó la teoría de cópulas para conocer la estructura de dependencia del portafolio de crédito de una institución financiera, conociendo dicha estructura se pudo estimar Indicadores de Riesgo que permitieron evidenciar falencias en la administración de riesgo de la cartera.

La aplicación de la teoría de cópulas y el cálculo de las medidas de riesgo se realizó con las operaciones de crédito de un portafolio de consumo en ventana de tiempo comprendida entre enero 2008 a junio 2013. Al final del periodo se disponía de 6,267 clientes en la cartera.

Se definieron como operaciones incumplidas o *default* a todas aquellas que registraban más de 15 días de retraso o mora en al menos seis meses de comportamiento de crédito el límite de los días de mora se fijó en base a lo establecido en el Libro I.- Normas Generales para la aplicación de La Ley General de Instituciones del Sistema Financiero Título IX.- De los activos y de los límites de crédito bancos y seguros.

Gracias a la técnica Detección de Interacción Automática Ji – Cuadrada (CHAID) utilizando como variables independientes los montos, plazos, tasas de interés y el estado civil de las operaciones de crédito, y como variable dependiente el incumplimiento o *default*, se segmentaron e identificaron ocho grupos homogéneos en el portafolio, a partir de los cuales se realizó el análisis. El CHAID clasificó de forma correcta al 88.9% de los clientes.

Realizando un análisis descriptivo del portafolio se pudo identificar algunas debilidades en la administración del riesgo:

- El plazo no está necesariamente relacionado con la tasa del crédito, esta divergencia se manifiesta tanto en valores altos de plazos y bajas tasas de interés, como en altas tasas de interés y bajos plazos.

- Los mayores montos de exposición presentan los mayores porcentajes de incumplimiento y por tanto la mayor cantidad de pérdidas potenciales de la cartera.

La teoría de cópulas se aplicó de la siguiente manera. Primero, se estimó los marginales de las distribuciones univariadas de la tasa de incumplimiento TI y del monto de exposición EAD en base a la información histórica de dichas variables; luego se construyó las cópulas, y por último con estos dos insumos se aplicó el Teorema de Sklar por medio de la construcción de Modelos de Distribuciones Multivariadas de Cópulas mvdc y la generación de escenarios.

Las distribuciones marginales generadas a partir de las distribuciones univariadas de la TI y el EAD, se ajustaron mediante el método de máxima verosimilitud, previamente se seleccionó la mejor distribución de ajuste de un conjunto de distribuciones entre las cuales se encontraban la Normal, Log Normal, Gamma, Beta, Weibull, Triangular, Logística, Cauchy, etc. Para la selección se consideró los estadísticos de ajuste *Kolmogorov-Smirnov* (KS), *Cramer-von Mises* (CV), *Anderson-Darling* (AD), y los criterios de información de *Aikake* (AIC) y *Bayesiano* (BIC).

En la mayoría de los casos la distribución Triangular es la que mejor se ajusta a los datos de TI y EAD en cada grupo del portafolio. En casos particulares como el EAD de los grupos cuatro y seis, las distribuciones seleccionadas por su grado de ajuste a los datos fueron la distribución de Weibull y Log normal, respectivamente.

Por otra parte, las cópulas se construyeron por medio del método de los momentos. En cada grupo se construyeron cinco cópulas (Normal, t *Student*, Frank, Clayton y Gumbel). La cópula que mejor se ajustó a los datos se seleccionó considerando el *Log-Likelihood*, y los criterios de información. En siete de ocho grupos del portafolio, la cópula seleccionada fue la Clayton, y en el restante la cópula seleccionada fue la de Gumbel.

Utilizando los escenarios simulados de los Modelos de Distribuciones Multivariadas de Cópulas (mvdc) se estimó la Pérdida Esperada en cada grupo del portafolio, luego se realizó la sumatoria dichas pérdidas para obtener la pérdida total de la cartera, la Máxima Pérdida, el *Credit VaR* y la Pérdida Esperada en la cola o *Expected Shortfall ES*.

Comparando la Pérdida Esperada del portafolio con los resultados de los Indicadores de Riesgo al 99,50% de confianza se puede apreciar una importante debilidad en cuanto a la administración del riesgo, por cuanto todos los Indicadores de Riesgo son superiores a la Pérdida Esperada estimada.

Al 99,5% de confianza el portafolio en análisis puede presentar una Pérdida Máxima de 21.423.543,99 USD. En condiciones normales de mercado, en el lapso de un mes al mismo nivel de confianza, la máxima pérdida que puede presentar el portafolio es 18.649.516,91 USD (*Credit VaR*). De modificarse algún factor y empeorarse las condiciones de mercado, una vez superada la máxima pérdida, la pérdida esperada luego del *Credit VaR (Expected Shortfall)* puede alcanzar un valor de 21.487.961,16 USD al 99,50% de confianza. Sin embargo, es importante destacar que, al 99,5% de confianza se evidencia la presencia de resultados extremos, tal y como se muestra en la figura de la Densidad de las Pérdidas Estimadas; en la práctica, para fines de provisión se podría considerar los resultados al 95% de confianza por cuanto, a ese nivel se concentra la mayor parte de la distribución de las pérdidas.

Al no considerar la estructura de dependencia dentro del portafolio, los valores empíricos subestiman la Pérdida Esperada y los eventos de pérdida extrema concentrados en el comportamiento de los grupos de la cartera definidos con la técnica CHAID. La subestimación de la Pérdida Esperada afecta directamente en los montos de provisión que, justamente mitigan y de cierta forma reducen el riesgo. Al contrario la subestimación de estos indicadores podrían ocasionar a la institución financiera mayores pérdidas, por cuanto, el monto que no se ha provisionado o considerado dentro de la Pérdida Estimada puede estar en nuevas colocaciones e inversiones que, de presentarse condiciones

desfavorables en el mercado podrían demandar liquidez, para lo cual en el mejor de los casos la institución debería vender sus activos financieros por debajo de su valor real y con menor rentabilidad.

Gracias a la aplicación de la teoría de cópulas y los modelos mvdc se pudo captar los escenarios extremos, tanto en los grupos internos del portafolio definidos con la técnica CHAID, como con el portafolio agregado. Todo esto permitió conocer no solo los Indicadores de Riesgo de la cartera, sino también el nivel de riesgo que posee la institución financiera. Cabe destacar que, al no poder predecir los eventos extremos la medición del riesgo no es precisa, pues, se subestima las pérdidas potenciales y por tanto aumenta el nivel del riesgo al cual está expuesta la institución financiera.

Además de alertas en cuanto a la estimación de pérdidas del portafolio, los resultados obtenidos en este trabajo muestran los principales factores donde la institución financiera debería intervenir para reducir y mitigar el riesgo de crédito del portafolio. En particular, apoyándose en los Indicadores de Riesgo del portafolio agregado, la institución financiera debería desarrollar y enfocar políticas, medidas y mejoras específicas en los procesos de colocación y recuperación de las operaciones de crédito.

En resumen, la aplicación de la Teoría de Cópulas y el Teorema de Sklar que considera la estructura de dependencia de la tasas de incumplimiento y monto de exposición del portafolio, arroja estimaciones de Pérdidas e Indicadores de Riesgo más precisas y acertadas acorde al perfil de riesgo y administración vigente en la institución financiera.

Para futuros trabajos se recomienda analizar todos los segmentos de crédito del portafolio de la institución financiera (corporativo, consumo, hipotecario, etc.), a fin de conocer la participación de cada segmento y analizar la contribución de los mismos a los Indicadores de Riesgo para la mitigación del mismo. Para ello, es indispensable contar con la información socioeconómica, financiera y el comportamiento de las operaciones de crédito en al menos tres años.

En el presente documento se analizaron los resultados de cópulas bivariadas construidas a partir de la tasa de incumplimiento y monto de exposición; sin embargo, a fin de fortalecer el análisis en futuros trabajos se podrían construir cópulas multivariadas considerando variables como por ejemplo la severidad de la pérdida que, en este documento se supone no estocástica. Para la construcción de cópulas multivariadas, es necesario guardar discreción en relación al número de variables incluidas en el modelo, por cuanto pueden afectar su robustez y resultados. Así también, a fin de profundizar el análisis en eventos extremos se podría ampliar la metodología de cálculo estimando los indicadores de riesgo a partir de la Teoría de Valores Extremos.

Por otra parte, es importante incorporar en las instituciones financieras este tipo de metodologías de análisis para evidenciar y poder corregir debilidades en el portafolio, en este caso reflejadas a través de la estructura de dependencia al interior de los portafolios de crédito. En este sentido, la SBS como ente regulador debería considerar incluir en la normativa ecuatoriana la estimación y análisis de riesgo este tipo de metodologías.

Por último, para otros trabajos se podría considerar incluir en el análisis el criterio de probabilidad de ocurrencia de los resultados de los indicadores de riesgo estimados para cada nivel de confianza, esto una vez implementados los métodos de medición de riesgo de crédito avanzados, por cuanto, es necesario contar con información histórica para calcular la frecuencia u ocurrencia de los resultados del *Credit VaR*, *ES* y Pérdida Esperada estimadas en este caso con la Teoría de Cópulas.

Para la aplicación de la teoría de cópulas se utilizó el *software* libre R que posee su propio lenguaje y entorno para programación, procesamiento y visualización de resultados. El *software* es muy versátil y puede ser fácilmente implementado por su bajo costo, políticas de uso y derechos de autor tanto en el sector financiero privado, como en el público, en este último especialmente a raíz del Decreto No. 1014 emitido el 10 de abril de 2008 por el gobierno ecuatoriano que esencialmente dispone a las Entidades de la Administración Pública Central la utilización de *software* libre en las tecnologías de la información.

REFERENCIAS

1. Acerbi, C., & Tasche, D. (2001). *Expected Shortfall: a natural coherent alternative to Value at Risk* (pp. 1–9).
2. Acerbi, C., & Tasche, D. (2002). On the coherence of Expected Shortfall, 1–19.
3. Boyé, E., Nikeghbali, A., Durrleman, Riboulet, G., & Roncalli, T. (2000). Copulas for Finance - A Reading Guide and Some Applications. *Discussion Paper*. Retrieved from <http://ssrn.com/paper=1032533>
4. Braxton, P., & Manning, T. (2011). Probability Distributions for Risk Analysis. In *SCEA/ISPA Joint International Conference*. International Cost Estimating and Analysis Association. Retrieved from http://www.washingtoniceaa.com/2012_2013.html
5. Cabedo, D., & Moya, I. (2000). *Valor en Riesgo y recursos propios en las entidades bancarias*. Castelló de la Plana: Universitat Jaume I. Retrieved from <http://books.google.com.ec/books?id=6vBAG4kro5kC&pg=PA132&lpg=PA132&dq=Valor+en+riesgo+arima&source=bl&ots=zBBwfygO1y&sig=lqomvryOfC7o9nmh4CPmfnJsf0o&hl=es&sa=X&ei=PEACU7HJBYflsATCjLICw&ved=0CDUQ6AEwAQ#v=onepage&q=Valor+en+riesgo+arima&f=false>
6. Cerezo, E. C., Bielsa, M., & Ramón, M. (2011). Medición del riesgo de crédito mediante modelos estructurales: Una aplicación al mercado colombiano, *24(42)*, 73–100.
7. Chang, J., & Chi Chen, A. (2010). Copula , Correlated Defaults and Credit VaR. *Department of Quantitative Finance, National Tsig Hua University*, *101(700)*.

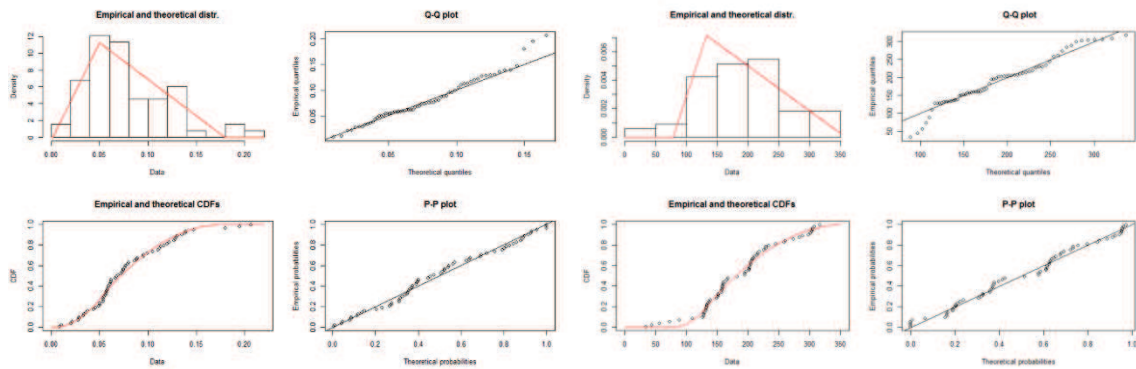
8. Cherubini, U., E, L., & Vecchiato. (2004). *Copula Methods in Finance*. Wiley.
9. Choudhry, M. (2006). *An Introduction Value-At-Risk* (pp. 120–121). West Sussex PO19 8SQ, England: John Wiley & Sons Ltd.
10. Clemente, A. Di, & Romano, C. (2004). Measuring and Optimizing Portfolio Credit Risk: A Copula-based Approach. *Economic Notes*, 33(3), 325–357. doi:10.1111/j.0391-5026.2004.00135.x
11. Embrechts, P., Mcneil, & Straumann. (1999). Correlation: Pitfalls and Alternatives. *ETH Zurich*, (Discussion paper).
12. EpiX Analytics LLC. (2013). Continuous Distribution. ModelAssist®. Retrieved from http://www.epixanalytics.com/modelassist/AtRisk/Model_Assist.htm#Distributions/Continuous_distributions/Triang.htm
13. Fiorito, F. (2006). *La Simulación como una herramienta para el manejo de la incertidumbre* (pp. 1–8).
14. Gallego, J. A., & Martínez, J. A. D. L. (2000). Una aplicación de la Teoría de Valores Extremos al cálculo del Valor en Riesgo. *Anales de Economía Aplicada. XIV Reunión ASEPELT*, (Universidad de Murcia). Retrieved from <http://www.asepelt.org/ficheros/File/Anales/2000-Oviedo/Trabajos/PDF/271.pdf>
15. Genest, C., Rémillard, B., and Beaudoin, D. (2009). *Goodness-of-fit tests for copulas: A review and a power study* (pp. 199–214). *Mathematics and Economics* 44.

16. Hernandez, A. D., & Ramirez Sánchez, J. C. (2009). Una metodología basada en cópulas y valores extremos para estimar el capital económico requerido de un portafolio de créditos al menudeo. *Revista de Análisis Económico*, 24(2), 95–132.
17. Jadhav, D., & Ramanathan, T. V. (2009). Parametric and non-parametric estimation of value-at-risk. *The Journal of Risk Model Validation*, 3(1), 51–71.
18. Jorion, P. (2007). *Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk* (Third.). United States of America: McGraw-Hill.
19. Li, D. X. (2000). *On Default Correlation : A Copula Function Approach This draft : April 2000 First draft : September 1999 On Default Correlation : A Copula Function Approach. The RiskMetrics Group* (Vol. Working Pa, p. 31).
20. Mashal, R., & Zeevi, A. (2002). Beyond Correlation : Extreme Co-movements Between Financial Assets. *Columbia Business School*.
21. McNeil, A. J., Frey, R., & Nyfeler, M. A. (2001). Copulas and credit models. *Investment Oce RTC*, (UBS Zurich), 1–8.
22. McNeil, A. J., Frey, R., & Embrechts, P. (2005). *Quantitative Risk Management*. (S. S. Duffie Darrell, Ed.) (p. 554). New Jersey: Princeton University Press.
23. Mejía, K. (2009). Congreso Científico Internacional de Economía y Finanzas. In *Métodos de Estimación VaR* (pp. 1–15). Quito - Ecuador: Facultad de Ciencias - Escuela Politécnica Nacional.

24. Melo, L. F., & Becerra, O. (2008). Medias de Riesgo Financiero usando cópulas: Teoría y aplicaciones, *No. 489(489)*, 96.
25. Mora, A. (2010). Una propuesta de CreditMetrics y Expected Shortfall para medición de Riesgo de Crédito. *Revista Civillizar de Empresa Y Economía*.
26. PASW Statistics. (2012). SPSS Decision Trees 17.0. IMB.
27. Plascencia, T. (2012). *Valor en Riesgo utilizando cópulas financieras: aplicación al tipo de cambio mexicano (2002-2011)* (Vol. 7, pp. 57–68).
28. República del Ecuador. (2001). Ley General de Instituciones del Sistema Financiero. REGISTRO OFICIAL No. 250.
29. República del Ecuador. (2004). Libro I . - Normas Generales para la aplicación de La Ley General de Instituciones del Sistema Financiero Título X . - De la gestión y administración de riesgos. REGISTRO OFICIAL No. 250.
30. República del Ecuador. (2011). Libro I . - Normas Generales para la aplicación de La Ley General de Instituciones del Sistema Financiero Título IX . - De los activos y de los límites de crédito bancos y seguros. REGISTRO OFICIAL No. 250.
31. Romano, C. (2002). Applying Copula function to Risk Management.
32. Sheppard, K. (2009). Value-at-Risk , Expected Shortfall and Density Forecasting. *UNIVERSITY OF OXFORD*, 10. Retrieved from <http://www.kevinsheppard.com/>

ANEXOS

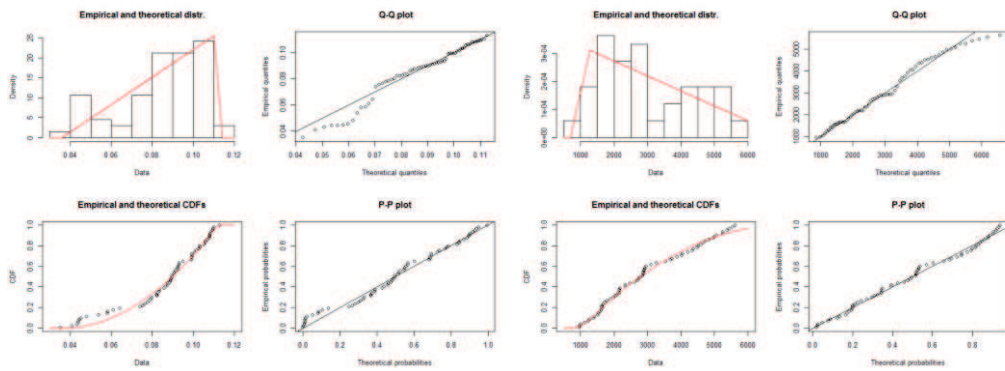
ANEXO A PRUEBAS DE AJUSTE DISTRIBUCIONES UNIVARIADAS TI Y EAD



Tasa de incumplimiento

Monto de exposición

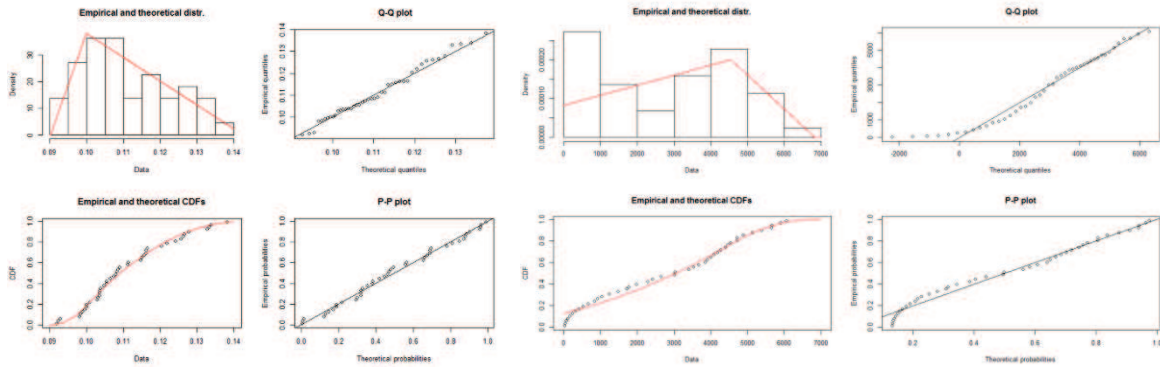
Figura a. Pruebas de ajuste Grupo 1



Tasa de incumplimiento

Monto de exposición

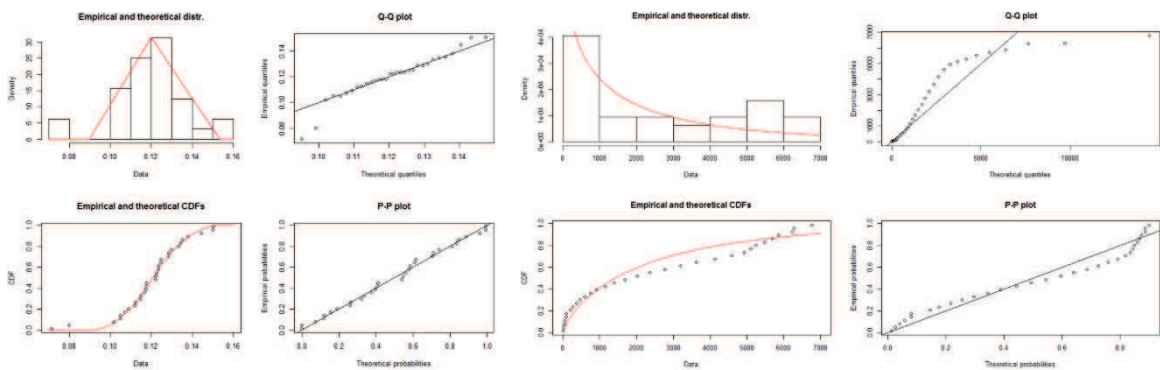
Figura b. Pruebas de ajuste Grupo 2



Tasa de incumplimiento

Monto de exposición

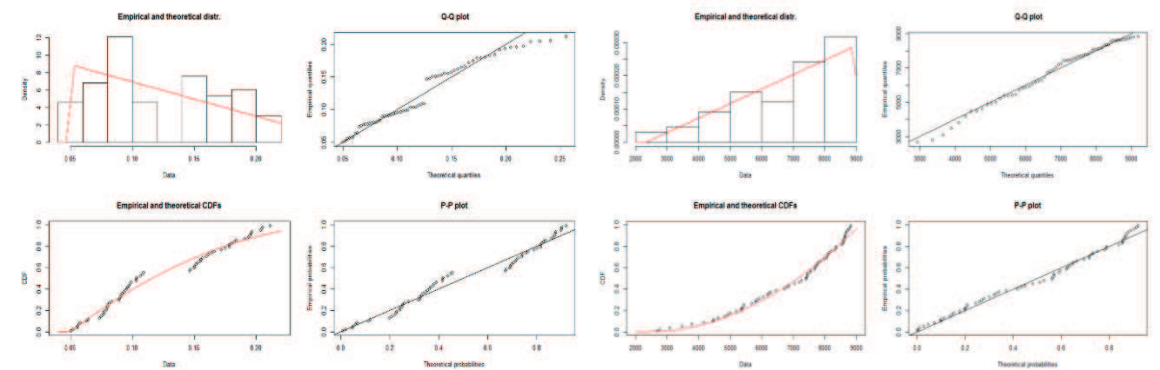
Figura c. Pruebas de ajuste Grupo 3



Tasa de incumplimiento

Monto de exposición

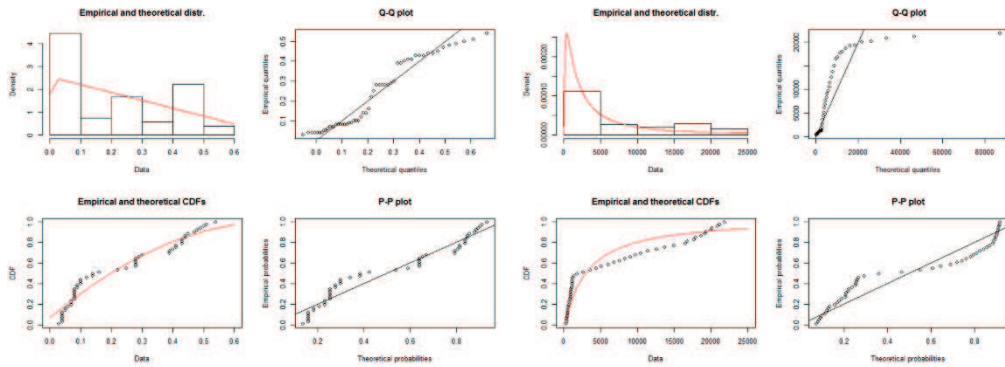
Figura d. Pruebas de ajuste Grupo 4



Tasa de incumplimiento

Monto de exposición

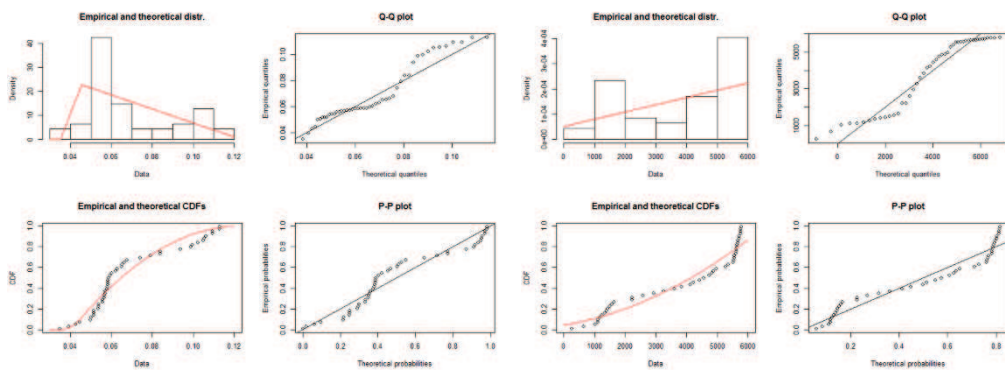
Figura e. Pruebas de ajuste Grupo 5



Tasa de incumplimiento

Monto de exposición

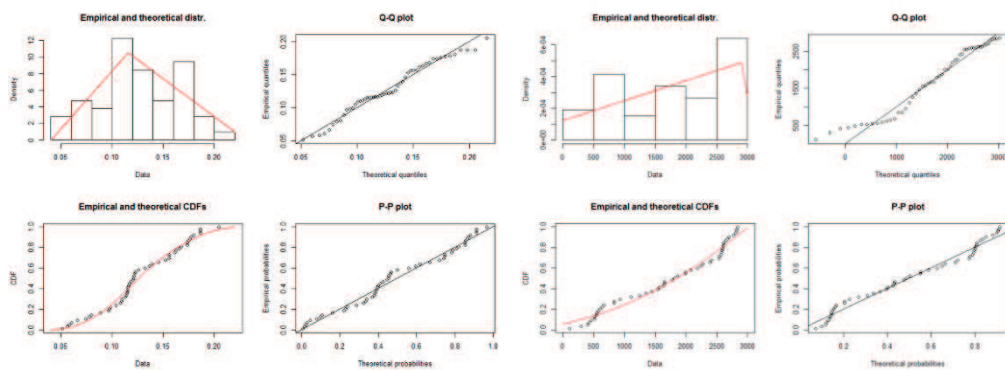
Figura f. Pruebas de ajuste Monto de exposición Grupo 6



Tasa de incumplimiento

Monto de exposición

Figura g. Pruebas de ajuste Grupo 7



Tasa de incumplimiento

Monto de exposición

Figura h. Pruebas de ajuste Grupo 8

ANEXO B Perspectiva CÓPULAS AJUSTADAS

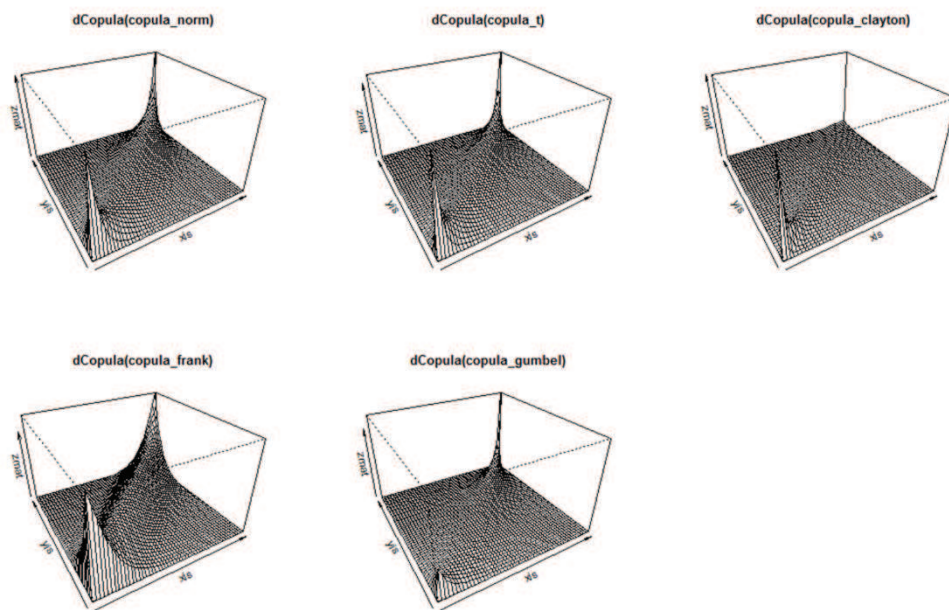


Figura i. Perspectiva de la superficie cópulas ajustadas Grupo 1

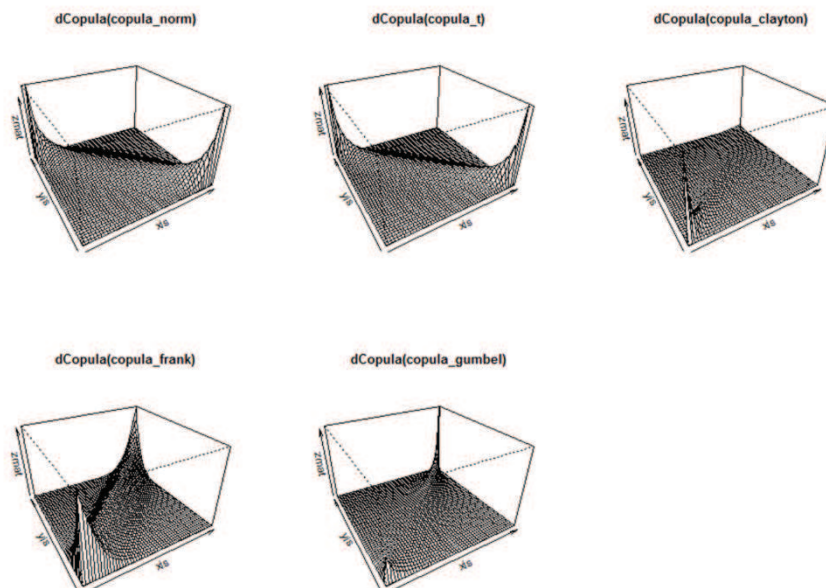


Figura j. Perspectiva de la superficie cópulas ajustadas Grupo 2

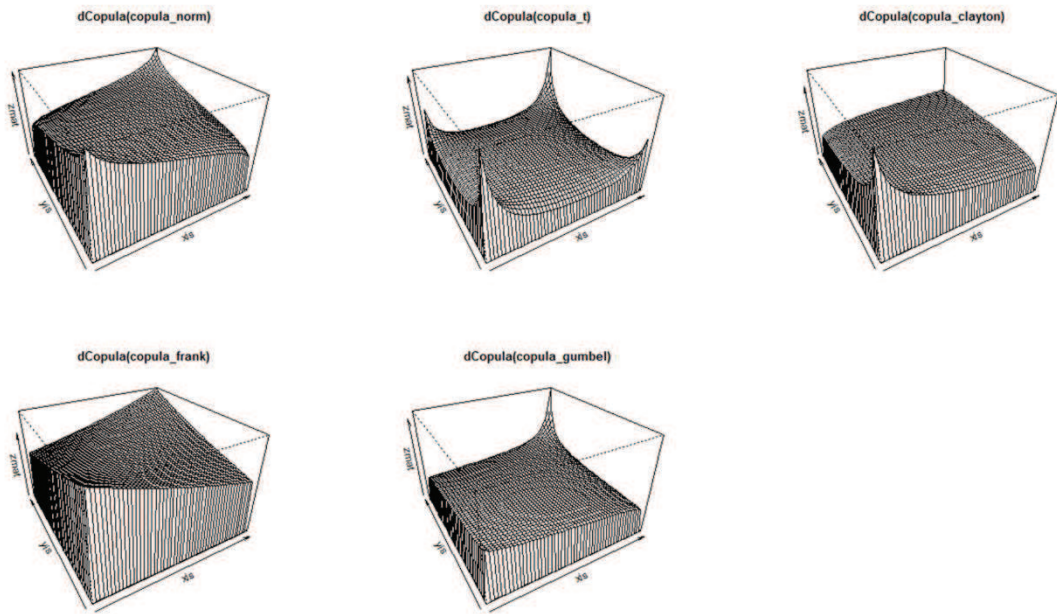


Figura k. Perspectiva de la superficie cópulas ajustadas Grupo 3

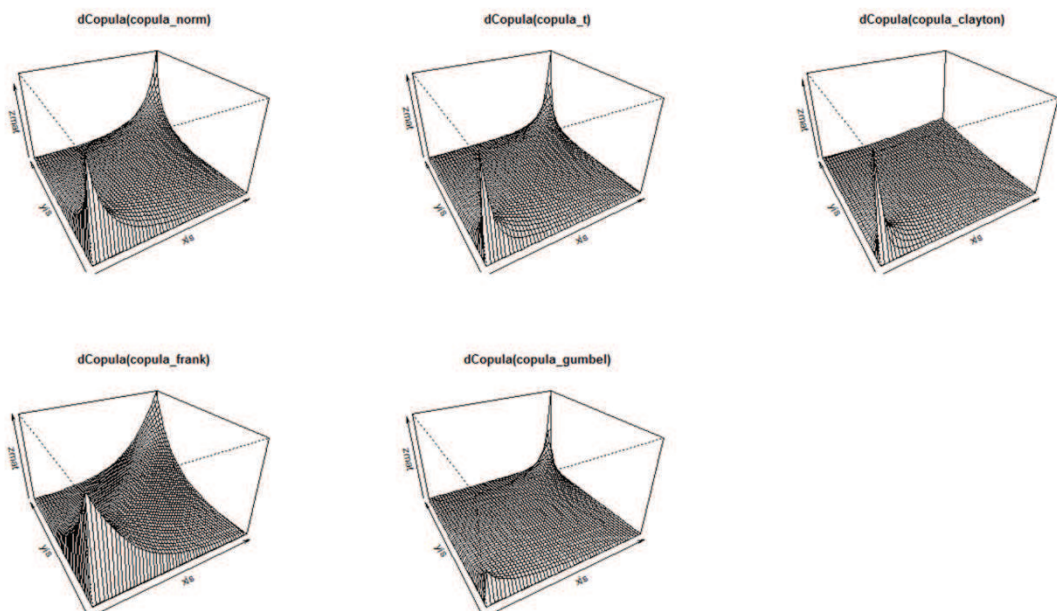


Figura l. Perspectiva de la superficie cópulas ajustadas Grupo 4

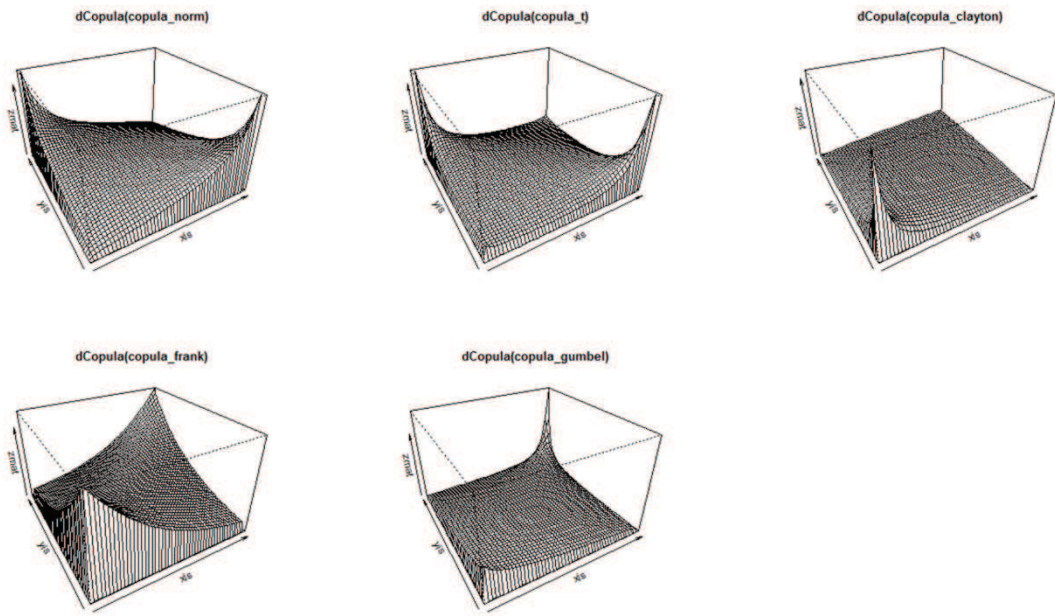


Figura m. Perspectiva de la superficie cópulas ajustadas Grupo 5

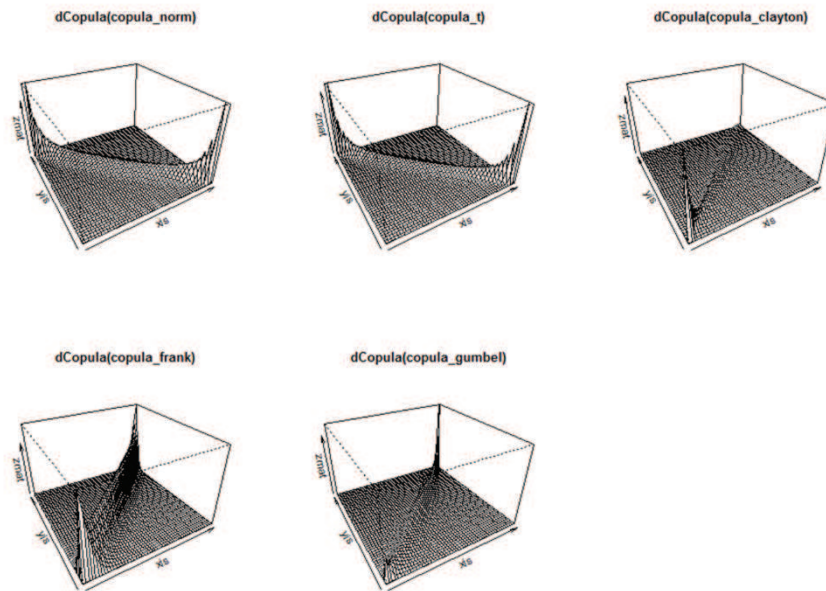


Figura n. Perspectiva de la superficie cópulas ajustadas Grupo 6

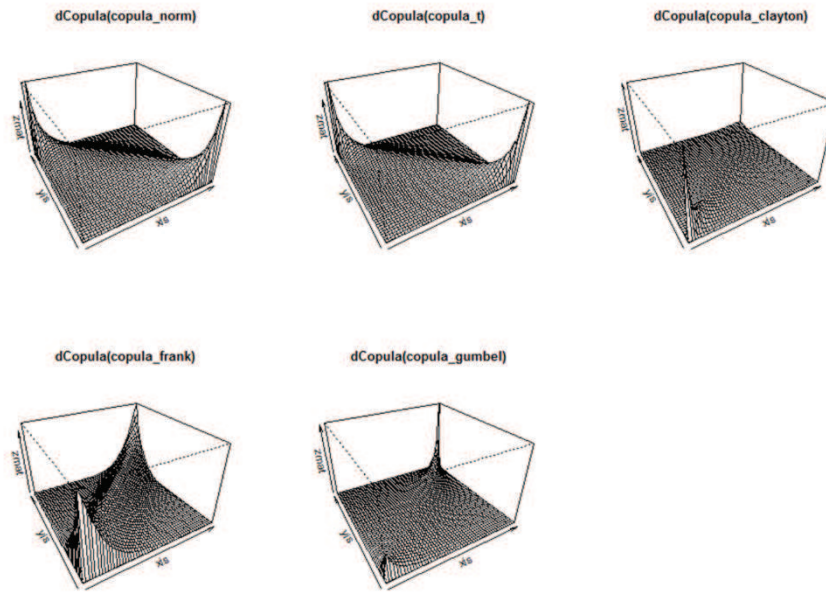


Figura o. Perspectiva de la superficie cópulas ajustadas Grupo 7

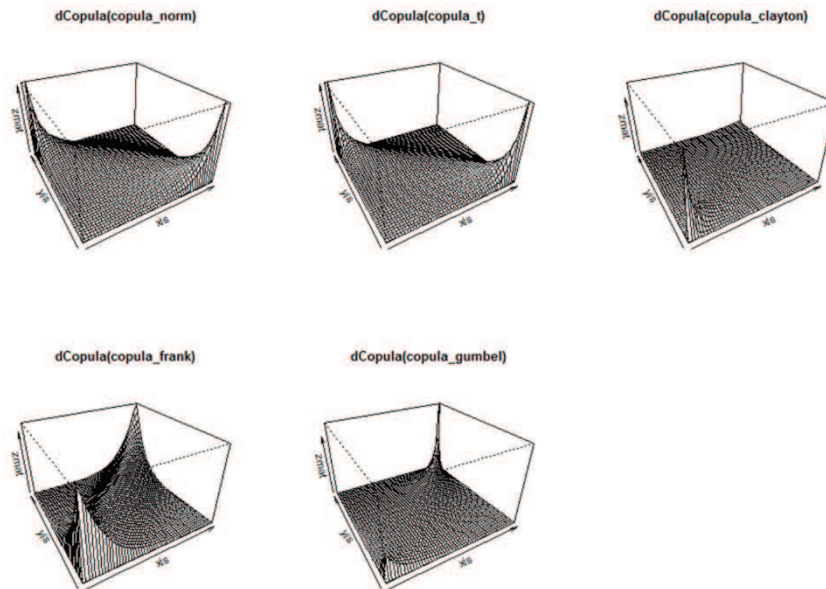


Figura p. Perspectiva de la superficie cópulas ajustadas Grupo 8

ANEXO C Perspectiva mvdc ajustados

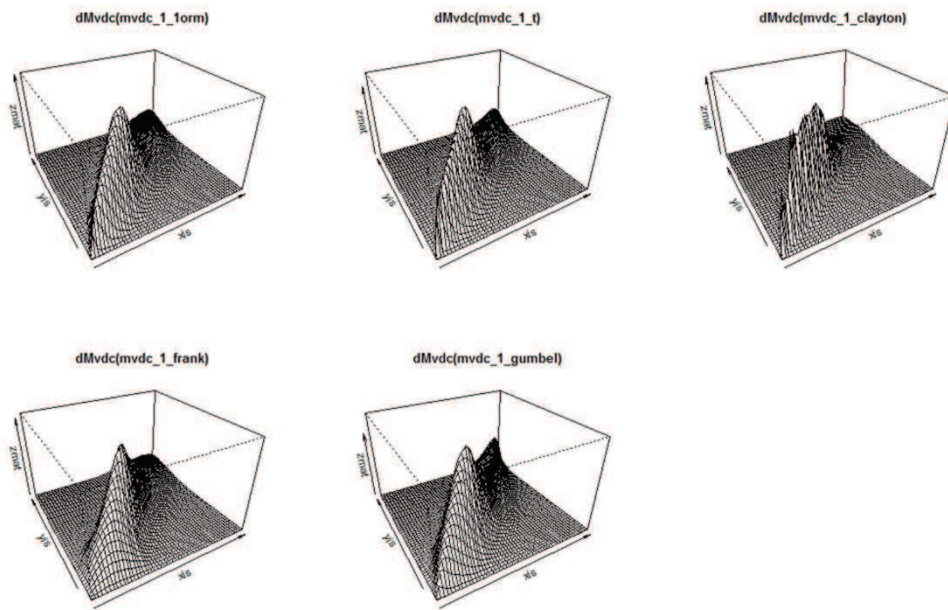


Figura q. Perspectiva de la superficie mvdc ajustado Grupo 1

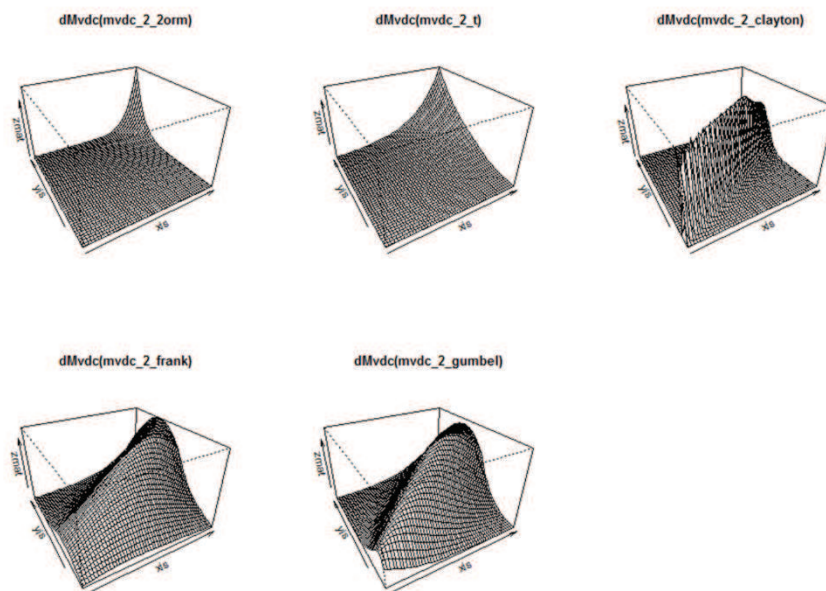


Figura r. Perspectiva de la superficie mvdc ajustado Grupo 2

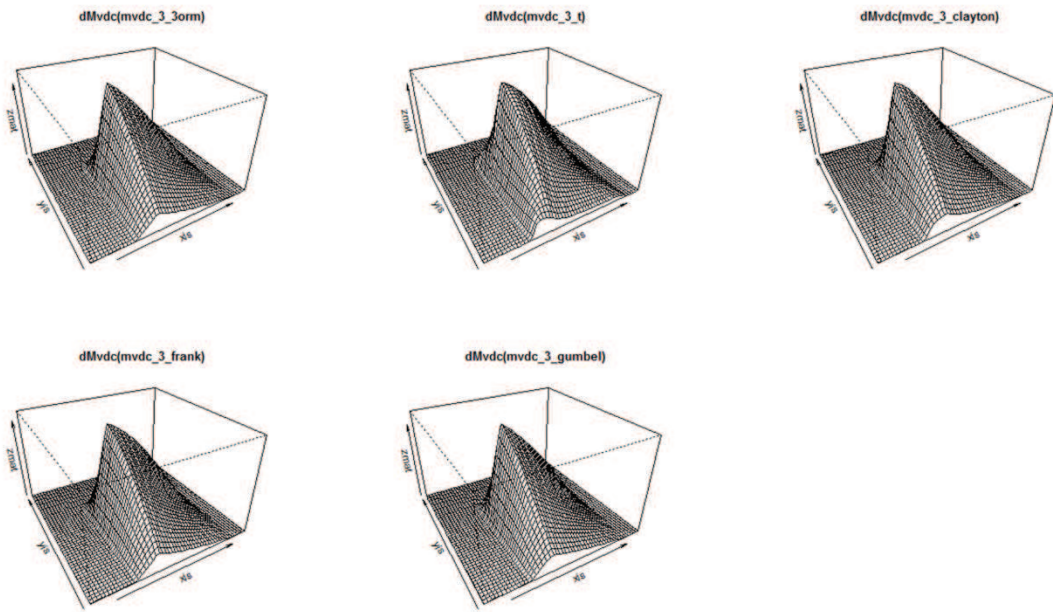


Figura s. Perspectiva de la superficie mvdc ajustado Grupo 3

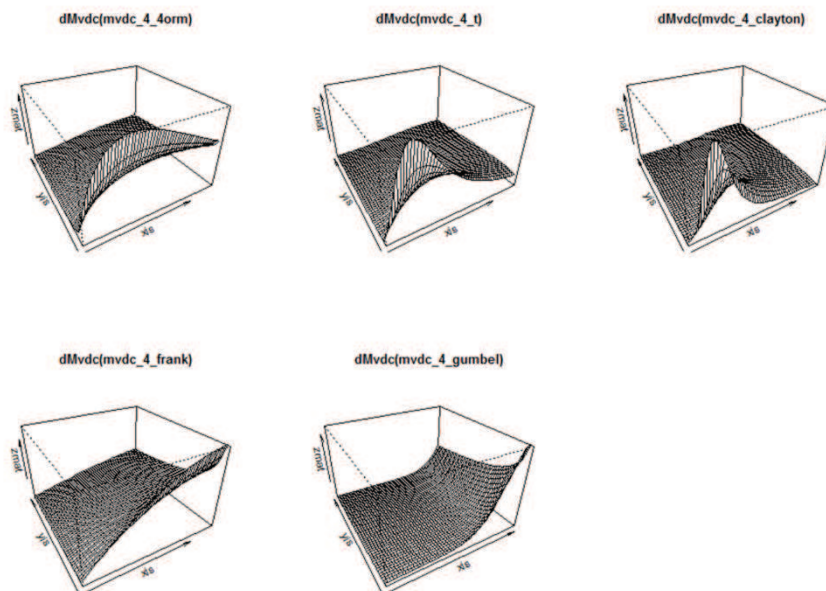


Figura t. Perspectiva de la superficie mvdc ajustado Grupo 4

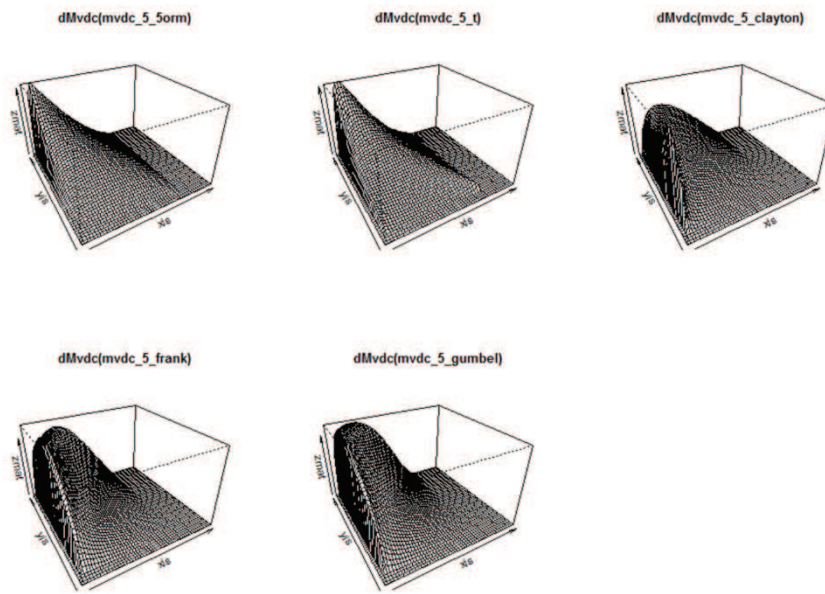


Figura u. Perspectiva de la superficie mvdc ajustado Grupo 5

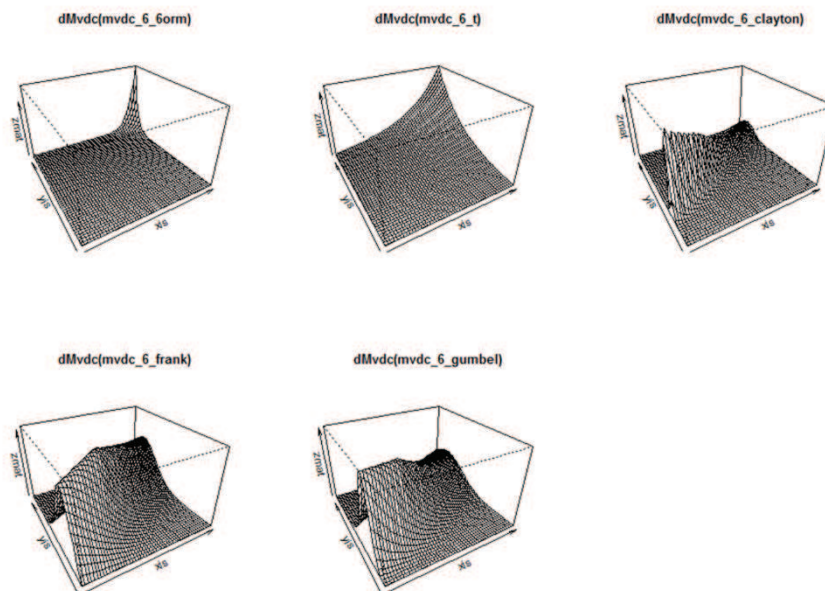


Figura v. Perspectiva de la superficie mvdc ajustado Grupo 6

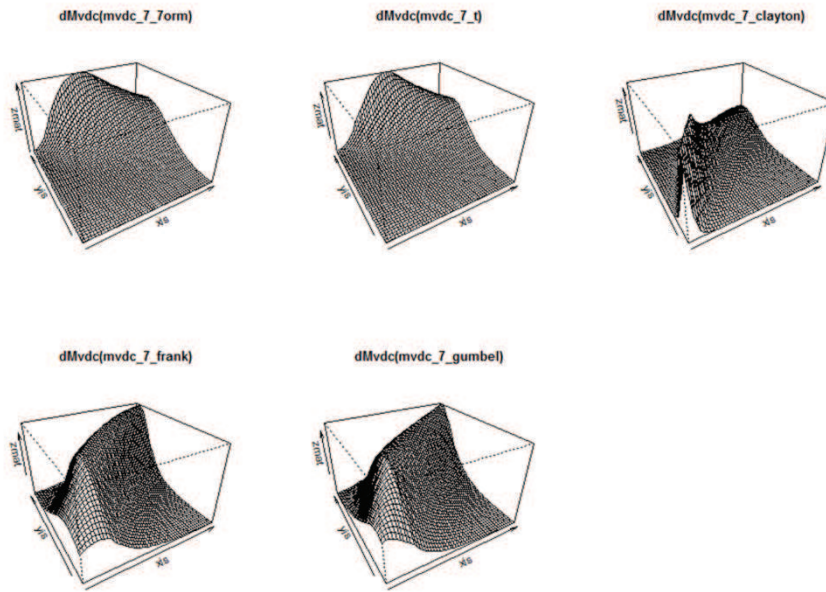


Figura w. Perspectiva de la superficie mvdc ajustado Grupo 7

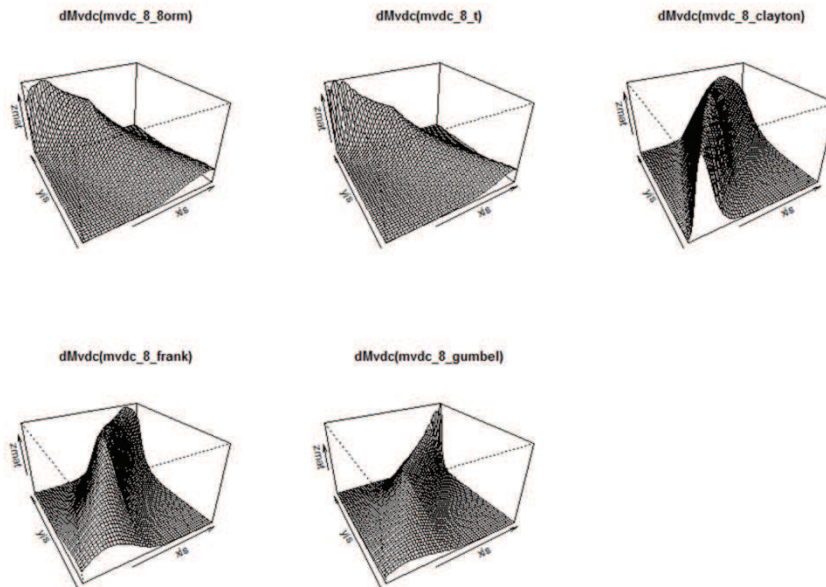


Figura x. Perspectiva de la superficie mvdc ajustado Grupo 8

ANEXO D INDICADORES DE RIESGO mvdc

Tabla a. Indicadores de Riesgo mvdc

Grupo	MVDC	Indicador de Riesgo	Nivel de confianza			
			95.00%	99.00%	99.50%	99.90%
G1	Cópula Normal	Pérdida Esperada	8,496.26			
		Max. Pérdida	19,913.82	26,783.32	26,818.70	26,848.79
		Credit VaR	11,417.56	18,287.06	18,322.44	18,352.52
		Expected Shortfall	20,169.61	26,783.97	26,818.96	26,848.84
	Cópula t Student	Pérdida Esperada	7,903.62			
		Max. Pérdida	19,099.57	27,005.67	28,637.31	29,553.56
		Credit VaR	11,195.95	19,102.04	20,733.69	21,649.93
		Expected Shortfall	19,339.55	27,032.71	28,644.99	29,555.08
	Cópula Clayton	Pérdida Esperada	8,849.97			
		Max. Pérdida	20,099.09	23,558.01	24,274.45	25,422.38
		Credit VaR	11,249.12	14,708.04	15,424.48	16,572.41
		Expected Shortfall	20,230.11	23,574.02	24,284.07	25,424.30
	Cópula Frank	Pérdida Esperada	8,767.27			
		Max. Pérdida	21,904.44	24,423.24	24,866.53	25,180.73
		Credit VaR	13,137.18	15,655.97	16,099.26	16,413.46
		Expected Shortfall	22,007.36	24,430.94	24,869.16	25,181.26
	Cópula Gumbel	Pérdida Esperada	8,501.05			
		Max. Pérdida	20,600.54	25,195.30	26,397.93	27,519.44
		Credit VaR	12,099.49	16,694.24	17,896.87	19,018.38
		Expected Shortfall	20,761.83	25,217.70	26,407.32	27,521.31
G2	Cópula Normal	Pérdida Esperada	118,249.95			
		Max. Pérdida	175,074.80	186,669.60	191,556.23	201,155.45
		Credit VaR	56,824.84	68,419.65	73,306.28	82,905.50
		Expected Shortfall	175,616.59	186,788.56	191,636.63	201,171.47
	Cópula t Student	Pérdida Esperada	118,174.14			
		Max. Pérdida	172,725.43	199,432.59	218,316.93	218,466.47
		Credit VaR	54,551.29	81,258.44	100,142.79	100,292.32
		Expected Shortfall	173,507.49	199,687.75	218,318.18	218,466.72
	Cópula Clayton	Pérdida Esperada	145,688.85			
		Max. Pérdida	303,990.34	361,738.71	370,744.59	371,956.91
		Credit VaR	158,301.49	216,049.86	225,055.75	226,268.06
		Expected Shortfall	305,774.87	361,866.71	370,754.75	371,958.93
	Cópula Frank	Pérdida Esperada	142,498.49			
		Max. Pérdida	308,831.49	351,686.74	364,868.41	373,906.60
		Credit VaR	166,333.00	209,188.25	222,369.92	231,408.11
		Expected Shortfall	310,251.59	351,914.31	364,944.11	373,921.68
	Cópula Gumbel	Pérdida Esperada	137,986.88			
		Max. Pérdida	298,550.97	361,542.72	368,169.30	374,046.80
		Credit VaR	160,564.09	223,555.84	230,182.42	236,059.92
		Expected Shortfall	300,758.92	361,664.51	368,218.53	374,056.60
G3	Cópula Normal	Pérdida Esperada	159,420.91			
		Max. Pérdida	330,814.77	371,307.16	375,979.97	376,068.88
		Credit VaR	171,393.86	211,886.25	216,559.06	216,647.97
		Expected Shortfall	332,238.73	371,370.59	375,980.72	376,069.03
	Cópula t Student	Pérdida Esperada	159,761.13			
		Max. Pérdida	337,015.43	379,275.33	396,997.69	410,306.55
		Credit VaR	177,254.30	219,514.20	237,236.56	250,545.42
		Expected Shortfall	338,537.41	379,587.69	397,109.16	410,328.76
	Cópula Clayton	Pérdida Esperada	166,068.98			
		Max. Pérdida	328,196.74	388,624.39	406,693.97	410,103.36
		Credit VaR	162,127.76	222,555.41	240,624.99	244,034.38

Grupo	MVDC	Indicador de Riesgo	Nivel de confianza				
			95.00%	99.00%	99.50%	99.90%	
G4	Cópula Frank	<i>Expected Shorfall</i>	329,884.87	388,886.63	406,722.53	410,109.04	
		Pérdida Esperada	155,748.76				
		Max. Pérdida	312,736.37	378,609.09	403,368.51	415,485.11	
		<i>Credit VaR</i>	156,987.61	222,860.34	247,619.75	259,736.35	
	Cópula Gumbel	<i>Expected Shorfall</i>	315,110.30	379,009.64	403,469.99	415,505.33	
		Pérdida Esperada	153,495.44				
		Max. Pérdida	313,082.46	337,840.03	339,641.29	343,519.56	
		<i>Credit VaR</i>	159,587.02	184,344.59	186,145.85	190,024.12	
	G5	Cópula Normal	<i>Expected Shorfall</i>	313,999.16	337,885.76	339,673.77	343,526.03
			Pérdida Esperada	172,210.36			
			Max. Pérdida	683,116.95	865,049.46	913,712.41	956,342.19
			<i>Credit VaR</i>	510,906.59	692,839.10	741,502.04	784,131.83
		Cópula t Student	<i>Expected Shorfall</i>	689,942.76	865,940.87	914,069.44	956,413.31
			Pérdida Esperada	181,399.09			
			Max. Pérdida	698,665.53	1,039,812.83	1,096,840.13	1,135,497.55
			<i>Credit VaR</i>	517,266.44	858,413.73	915,441.04	954,098.45
Cópula Clayton		<i>Expected Shorfall</i>	710,854.44	1,040,794.89	1,097,163.90	1,135,562.04	
		Pérdida Esperada	173,250.15				
		Max. Pérdida	589,337.69	984,152.39	1,082,595.66	1,162,426.96	
		<i>Credit VaR</i>	416,087.54	810,902.24	909,345.51	989,176.81	
Cópula Frank		<i>Expected Shorfall</i>	601,663.58	985,920.20	1,083,264.26	1,162,560.14	
		Pérdida Esperada	162,603.88				
		Max. Pérdida	519,377.15	1,063,222.07	1,359,420.06	1,531,930.31	
		<i>Credit VaR</i>	356,773.27	900,618.19	1,196,816.18	1,369,326.43	
Cópula Gumbel	<i>Expected Shorfall</i>	539,770.76	1,068,166.35	1,360,864.87	1,532,218.11		
	Pérdida Esperada	159,299.12					
	Max. Pérdida	628,244.06	1,031,736.35	1,152,976.14	1,266,183.51		
	<i>Credit VaR</i>	468,944.94	872,437.23	993,677.02	1,106,884.39		
G6	Cópula Normal	<i>Expected Shorfall</i>	641,960.62	1,033,995.96	1,153,924.27	1,266,372.37	
		Pérdida Esperada	420,299.37				
		Max. Pérdida	731,321.50	961,321.33	963,251.41	964,952.95	
		<i>Credit VaR</i>	311,022.13	541,021.95	542,952.04	544,653.58	
	Cópula t Student	<i>Expected Shorfall</i>	738,711.21	961,356.74	963,265.66	964,955.78	
		Pérdida Esperada	417,223.90				
		Max. Pérdida	768,185.72	963,074.39	986,042.21	993,667.59	
		<i>Credit VaR</i>	350,961.82	545,850.49	568,818.31	576,443.69	
	Cópula Clayton	<i>Expected Shorfall</i>	775,019.32	963,425.94	986,106.07	993,680.32	
		Pérdida Esperada	455,628.02				
		Max. Pérdida	941,661.08	1,084,430.23	1,096,879.06	1,121,981.66	
		<i>Credit VaR</i>	486,033.06	628,802.21	641,251.04	666,353.64	
	Cópula Frank	<i>Expected Shorfall</i>	947,061.95	1,084,736.86	1,097,089.30	1,122,023.54	
		Pérdida Esperada	446,631.62				
		Max. Pérdida	934,763.57	1,047,666.62	1,055,132.46	1,062,233.60	
		<i>Credit VaR</i>	488,131.95	601,035.00	608,500.84	615,601.97	
Cópula Gumbel	<i>Expected Shorfall</i>	938,796.22	1,047,806.48	1,055,191.94	1,062,245.44		
	Pérdida Esperada	441,198.34					
	Max. Pérdida	920,236.51	1,109,993.64	1,130,259.62	1,159,131.49		
	<i>Credit VaR</i>	479,038.17	668,795.30	689,061.28	717,933.15		
G6	Cópula Normal	<i>Expected Shorfall</i>	927,180.27	1,110,426.42	1,130,501.43	1,159,179.66	
		Pérdida Esperada	217,750.65				
		Max. Pérdida	388,782.46	487,578.87	518,034.03	568,197.41	
		<i>Credit VaR</i>	171,031.80	269,828.22	300,283.37	350,446.76	
	Cópula t Student	<i>Expected Shorfall</i>	392,427.24	488,266.76	518,454.15	568,281.10	
		Pérdida Esperada	208,099.44				
		Max. Pérdida	394,006.30	575,119.66	670,706.23	728,059.01	
		<i>Credit VaR</i>	185,906.86	367,020.22	462,606.80	519,959.57	

Grupo	MVDC	Indicador de Riesgo	Nivel de confianza				
			95.00%	99.00%	99.50%	99.90%	
G7	Cópula Clayton	<i>Expected Shorfall</i>	400,903.42	576,724.55	671,186.58	728,154.69	
		Pérdida Esperada	1,564,346.24				
		Max. Pérdida	5,598,402.79	15,799,284.08	19,683,298.66	27,856,520.66	
		<i>Credit VaR</i>	4,034,056.55	14,234,937.84	18,118,952.43	26,292,174.42	
	Cópula Frank	<i>Expected Shorfall</i>	6,006,694.85	15,896,843.84	19,751,751.11	27,870,156.33	
		Pérdida Esperada	2,087,669.96				
		Max. Pérdida	9,893,226.05	21,249,000.36	29,019,675.20	46,750,575.79	
		<i>Credit VaR</i>	7,805,556.09	19,161,330.41	26,932,005.25	44,662,905.83	
	Cópula Gumbel	<i>Expected Shorfall</i>	10,473,120.07	21,451,820.35	29,168,175.21	46,780,156.87	
		Pérdida Esperada	1,612,492.67				
		Max. Pérdida	7,147,315.53	22,344,080.87	28,209,828.04	35,557,633.32	
		<i>Credit VaR</i>	5,534,822.86	20,731,588.21	26,597,335.37	33,945,140.65	
	G8	Cópula Normal	<i>Expected Shorfall</i>	7,705,752.76	22,463,760.84	28,271,367.45	35,569,891.92
			Pérdida Esperada	112,929.80			
			Max. Pérdida	181,093.06	200,957.75	205,243.14	211,062.89
			<i>Credit VaR</i>	68,163.26	88,027.95	92,313.34	98,133.09
Cópula t Student		<i>Expected Shorfall</i>	181,835.83	201,047.69	205,291.88	211,072.60	
		Pérdida Esperada	113,456.47				
		Max. Pérdida	185,082.21	205,372.91	223,163.29	248,457.03	
		<i>Credit VaR</i>	71,625.75	91,916.44	109,706.83	135,000.56	
Cópula Clayton		<i>Expected Shorfall</i>	186,167.18	205,752.54	223,375.13	248,499.23	
		Pérdida Esperada	148,467.74				
		Max. Pérdida	329,242.07	373,407.98	380,115.79	387,042.59	
		<i>Credit VaR</i>	180,774.34	224,940.25	231,648.05	238,574.85	
Cópula Frank		<i>Expected Shorfall</i>	330,895.09	373,536.67	380,173.80	387,054.14	
		Pérdida Esperada	147,008.53				
		Max. Pérdida	333,001.74	361,654.76	363,547.93	365,873.44	
		<i>Credit VaR</i>	185,993.21	214,646.23	216,539.40	218,864.90	
Cópula Gumbel	<i>Expected Shorfall</i>	334,039.61	361,693.14	363,567.41	365,877.32		
	Pérdida Esperada	142,899.39					
	Max. Pérdida	319,418.20	394,555.21	402,862.27	404,026.66		
	<i>Credit VaR</i>	176,518.81	251,655.82	259,962.88	261,127.27		
G8	Cópula Normal	<i>Expected Shorfall</i>	321,932.23	394,673.53	402,872.02	404,028.60	
		Pérdida Esperada	94,925.39				
		Max. Pérdida	165,593.58	186,934.76	191,347.42	196,492.08	
		<i>Credit VaR</i>	70,668.19	92,009.37	96,422.04	101,566.69	
	Cópula t Student	<i>Expected Shorfall</i>	166,431.06	187,022.67	191,390.51	196,500.66	
		Pérdida Esperada	94,780.13				
		Max. Pérdida	173,693.01	191,350.48	207,104.04	231,118.83	
		<i>Credit VaR</i>	78,912.88	96,570.35	112,323.91	136,338.70	
	Cópula Clayton	<i>Expected Shorfall</i>	174,636.38	191,695.60	207,305.17	231,158.89	
		Pérdida Esperada	126,156.81				
		Max. Pérdida	276,216.11	311,880.37	315,459.02	321,175.18	
		<i>Credit VaR</i>	150,059.30	185,723.57	189,302.21	195,018.38	
	Cópula Frank	<i>Expected Shorfall</i>	277,560.43	311,960.22	315,506.89	321,184.72	
		Pérdida Esperada	124,228.72				
		Max. Pérdida	279,226.18	304,919.71	306,027.46	307,192.36	
		<i>Credit VaR</i>	154,997.46	180,690.99	181,798.74	182,963.64	
Cópula Gumbel	<i>Expected Shorfall</i>	280,154.12	304,941.08	306,037.22	307,194.30		
	Pérdida Esperada	121,528.51					
	Max. Pérdida	275,513.92	327,993.90	334,164.69	334,712.36		
	<i>Credit VaR</i>	153,985.41	206,465.39	212,636.18	213,183.85		
		<i>Expected Shorfall</i>	277,190.80	328,080.04	334,169.28	334,713.27	