

DISEÑO DE UN
CORRELACIONADOR ANALOGICO

TESIS PREVIA

A LA

OBTENCION DEL TITULO

DE

INGENIERO EN LA ESPECIALIZACION

DE

ELECTRONICA Y TELECOMUNICACIONES

DE LA

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL

EDISON LEON

QUITO, JULIO DE 1971

Certifico que este
trabajo ha sido
realizado en su
totalidad por el
Sr. Edison León

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'Mario Cevallos', is written over a horizontal line. The signature is fluid and cursive.

Ing. Mario Cevallos

CONSULTOR DE TESIS

INDICE DE MATERIAS

	Introducción	v
CAPITULO I	COMPARACION DE SEÑALES	1
	1.A Minimización del error	2
	1.B Valor medio cuadrático	3
	1.C Función de correlación	6
CAPITULO II	SEÑALES DETERMINISTICAS	8
	2.1 Función correlación cruzada	9
	2.2 Correlación de funciones periódicas	11
	2.2.A Función de autocorrelación	15
	2.2.B Ejemplos de autocorrelación	17
	2.2.C Correlación cruzada de funciones periódicas	22
	2.2.D Conclusiones de los ejemplos	26
	2.2.E Relación entre la convolución y la correlación	27
	2.3 Correlación de funciones aperiódicas	29
	2.3.A Autocorrelación	31
	2.3.B Correlación cruzada	35
	2.3.C Relación entre la convolución y la correlación	36

CAPITULO	III	DISEÑO DEL CORRELACIONADOR ANALOGICO	38
	3.1	Correlacionador analógico	39
	3.2	El multiplicador analógico	40
	3.2.A	El amplificador operacional	40
	3.2.B	El cuadrador	46
	3.2.C	Diseño del cuadrador	50
	3.2.D	Diseño del multiplicador	55
	3.3	El retardador	56
	3.4	El Correlacionador	60
CAPITULO	IV	RESULTADOS EXPERIMENTALES	61
	4.1	El cuadrador	62
	4.2	El multiplicador	65
	4.3	El correlacionador	66
CAPITULO	V	APLICACIONES	68
	5.1	Detección de una señal periódica en presencia de ruido	69
	5.2	Determinación del valor esperado de segundo orden.	71

INDICE DE GRAFICOS

Fig. 1.1	Pulso de radar a) Transmitido	5
	b) Recibido	6
Fig. 2.1	Función $f_1(t) = A \cos(w_1 t + \theta)$	18
Fig. 2.2	Función de autocorrelación $R_{11}(\tau) = \frac{A}{2} \cos w_1 \tau$	18
Fig. 2.3	Onda periódica de pulsos rectangulares	19
Fig. 2.4	Primer pulso rectangular	20
Fig. 2.5	Función de autocorrelación de un pulso rectangular	21
Fig. 2.6	Función de autocorrelación	22
Fig. 2.7	Señal periódica triangular	23
Fig. 2.8	Señal periódica de pulsos rectangulares	23
Fig. 2.9	Correlación cruzada en el intervalo $0 \leq \tau \leq b$	24
Fig. 2.10	Correlación cruzada en el intervalo $-b \leq \tau \leq 0$	25
Fig. 2.11	Función de correlación cruzada entre la señal triangular y la señal de pulsos rectangulares	26
Fig. 3.1	Diagrama de bloques del correlacionador analógico	39

Fig. 3.2	Amplificador operacional	40
Fig. 3.3	Circuito equivalente del amplificador operacional	42
Fig. 3.4	Inversor	43
Fig. 3.5	Multiplicación por una constante	43
Fig. 3.6	Integrador	44
Fig. 3.7	Diferenciador	45
Fig. 3.8	Sumador	45
Fig. 3.9	Cuadrador	46
Fig. 3.10	Circuito cuadrador básico	46
Fig. 3.11	Características de transferencia del circuito cuadrador	48
Fig. 3.12	Circuito de polarización	50
Fig. 3.13	Circuito de polarización con una sola fuente de poder	51
Fig. 3.14	Inversor de fase	53
Fig. 3.15	Cuadrador	55
Fig. 3.16	Diseño del multiplicador analógico	56
Fig. 3.17	Retardador	56
Fig. 3.18	Retardador	58
Fig. 3.19	Retardador	59
Fig. 3.20	Diagrama vectorial del retardador	59
Fig. 3.21	Correlacionador	60
Fig. 4.1	Señal de entrada cosenoidal	63

Fig. 4.2	Señal de salida del cuadrador	63
Fig. 4.3	Señal de entrada triangular	64
Fig. 4.4	Señal de salida del cuadrador	64
Fig. 4.5	Resultado experimental de la multiplicación analógica	65
Fig. 4.6	Señal de entrada al correlacionador	66
Fig. 4.7	Función de autocorrelación experimental	67
Fig. 5.1	Detección de señales con ruido	71

A

MIS

PADRES

MI AGRADECIMIENTO

Al Ingeniero Mario Cevallos, Director de Tesis, por la invaluable ayuda prestada a la realización del presente trabajo.

Al Ingeniero Marco Vaca, al Doctor Kantí Hore y a los miembros del Departamento de Electrónica y Comunicaciones de la Escuela Politécnica Nacional, quienes han colaborado en el desarrollo de esta tesis.

INTRODUCCION

Una de las herramientas más eficaces actualmente en la comparación de señales en comunicaciones y en otros campos tales como la radioastronomía, geofísica, constituye la función de correlación.

En el presente trabajo se dedican dos capítulos al análisis matemático de la función mencionada, tanto en el plano del tiempo como en el plano de frecuencia. Dejando el tercer capítulo para el diseño ^{IV} y experimentación del correlacionador analógico en sus diferentes etapas.

El último capítulo se dedica a las aplicaciones del correlacionador.

CAPITULO I

COMPARACION DE SEÑALES

Las señales pueden compararse básicamente con otras ondas similares. Cuantitativamente se puede comparar las señales, basándose en la cantidad de componentes que la una onda contenga de la otra.

Si se tiene dos ondas: $f_1(t)$ y $f_2(t)$ y se desea aproximar $f_1(t)$ en términos de $f_2(t)$ sobre un cierto intervalo $t_1 < t < t_2$, entonces

$$f_1(t) \cong C_{12} f_2(t) \quad (1.1)$$

Se debe escoger el valor C_{12} de tal manera que se tenga una óptima aproximación, para conseguir esto, hay diferentes criterios[1], algunos de los cuales se exponen a continuación.

1.A MINIMIZACION DEL ERROR

Para utilizar este criterio se definirá la función error:

[1] Los números indicados en esta forma son referencias bibliográficas que se encuentran detalladas al final de la tesis.

Función error $\equiv fe(t) \Rightarrow$

$$fe(t) \equiv f_1(t) - C_{12} f_2(t) \quad (1.2)$$

El error mínimo, en el intervalo $t_1 \leftarrow t \leftarrow t_2$, se tendrá

$$e = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [f_1(t) - C_{12} f_2(t)] dt \quad (1.3)$$

Sin embargo este criterio no puede ser generalizado para funciones que tengan como valor promedio cero en el intervalo de integración; puesto que para estas funciones la ecuación (1.3) es igual a cero.

1.B VALOR MEDIO CUADRATICO

Otro criterio consiste en escoger el mínimo valor medio cuadrático, para este caso

$$e^2 = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} fe^2(t) dt \quad (1.4)$$

$$e^2 = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [f_1(t) - C_{12} f_2(t)]^2 dt \quad (1.5)$$

Se podrá ahora determinar el valor C_{12} para que el error sea mínimo

$$\frac{de^2}{dC_{12}} = 0 \quad (1.6)$$

$$\frac{d}{dC_{12}} \left\{ \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [f_1(t) - C_{12} f_2(t)]^2 dt \right\} = 0 \quad (1.7)$$

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \left\{ \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dC_{12}} f_1^2(t) - 2 \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dC_{12}} C_{12} f_1(t) f_2(t) - \right. \\ \left. + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dC_{12}} C_{12}^2 f_2^2(t) \right\} = 0 \quad \iff \quad (1.8)$$

$$\frac{-2}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f_1(t) f_2(t) + \frac{2C_{12}}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f_2^2(t) = 0 \quad (1.9)$$

$$C_{12} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f_1(t) f_2(t)}{\int_{t_1}^{t_2} f_2^2(t)} \quad (1.10)$$

La magnitud de $\int_{t_1}^{t_2} f_1(t) f_2(t) dt$, puede tomarse como una indicación de similitud de las dos funciones.

Si esta integral desaparece, tal que,

$$\int_{t_1}^{t_2} f_1(t) f_2(t) dt = 0 \quad (1.11)$$

Se puede afirmar que no existe ninguna similitud entre las dos funciones sobre el intervalo

lo $t_1 \leftarrow t \leftarrow t_2$ y se dice que tales seña -
les son ortogonales en ese intervalo especí-
fico.

La integral,

$$\int_{t_1}^{t_2} f_1(t)f_2(t)dt \quad (1.12)$$

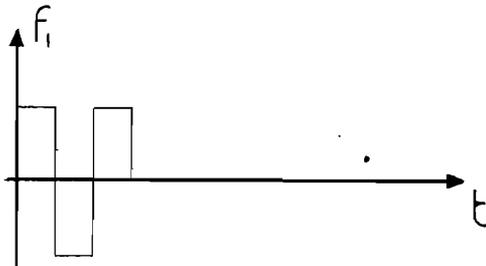
es determinante en la comparación de las se-
ñales $f_1(t)$ y $f_2(t)$ sobre el intervalo
 (t_1, t_2) .

En general, se interesa en comparar las dos
señales sobre un intervalo $(-\infty, \infty)$. En es-
te caso la integral estará dada por,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2(t)dt \quad (1.13)$$

Sin embargo, estos límites dificultan la eva-
luación de la integral.

Esto puede ilustrarse con un ejemplo de un
pulso de radar:



a

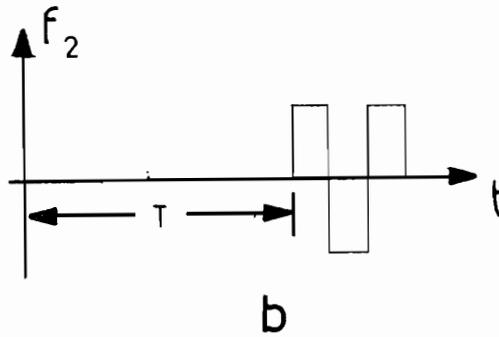


Fig. 1.1 Pulso de radar. a) Transmitido
b) Recibido

Como se observa en la Fig. 1.1 el pulso transmitido y el pulso recibido, se encuentran separados por T segundos.

Estas dos ondas son idénticas excepto que la una con respecto a la otra se encuentra retrazada T segundos. Puesto que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2(t)dt \equiv 0 \text{ porque } f_1(t)f_2(t) \equiv 0 \quad (1.14)$$

Entonces el resultado de la evaluación de la integral indica que las dos ondas no tienen una magnitud de similitud.

1.6 FUNCION DE CORRELACION

Es obvio que el resultado anterior es incorrecto, por lo que se debe buscar alguna manera de relacionar la similitud de dos ondas, para lo cual, se debe efectuar una traslación

de una onda respecto de la otra. En forma matemática la integral modificada será:

$$R_{11}(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(t-\zeta) dt \quad (1.15)$$

donde ζ es un parámetro registrador, que da una traslación en el tiempo de la una onda respecto de la otra y el resultado de la integral es una función de ζ . Esta integral se le conoce con el nombre de función de Correlación. Esta función permite generalizar la comparación de señales para cualquier tipo de función, lo que no sucede con los otros criterios expuestos anteriormente.

CAPITULO II

SEÑALES DETERMINISTICAS

En el presente capítulo se va a tratar con procesos periódicos y aperiódicos, de señales determinísticas.

Entendiéndose por señales determinísticas, aquellas señales cuyos resultados son perfectamente determinados por una ley de causalidad, ya sea, matemática o física.

2.1. FUNCION CORRELACION CRUZADA [2]

Cuando la función correlación, definida en el capítulo anterior ecuación (1.15) se refiere a dos funciones, se tiene $f_1(t), f_2(t)$, se denomina CORRELACION CRUZADA

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2(t-\tau)dt \quad (2.1)$$

La función $f_1(t)$ también puede considerarse como que se encuentra adelantada a $f_2(t)$, tal que la expresión matemática

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-\tau)f_2(t)dt \quad (2.2)$$

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2(t-\tau)dt \quad (2.3)$$

Donde el desplazamiento se refiere a una de las funciones.

La función de correlación cruzada, proporciona la medida de similitud entre la señal $f_1(t)$ y la función desplazada $f_2(t)$. Es evidente que si dos ondas son similares, pero trasladadas la una con respecto de la otra, la función de correlación cruzada indicará la medida de similitud sobre algún intervalo finito.

$$R_{21}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t)f_1(t-\tau)dt \quad (2.4)$$

Tal que

$$R_{12}(\tau) = R_{21}(-\tau) \quad (2.5)$$

Si se realiza un cambio de variable $t' = t + \tau$

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t')f_2(t'-\tau)dt \quad (2.6)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t+\tau)f_2(t)dt \quad (2.7)$$

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t+\tau)f_2(t)dt &= R_{12}(\tau) \leftarrow (2.3) \\ \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t)f_1(t+\tau)dt &= R_{21}(-\tau) \leftarrow (2.4) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$R_{12}(\tau) = R_{21}(-\tau) \quad (2.5)$$

El concepto de comparación de señales puede aplicarse a una señal en sí misma, esto es que $f_1(t)$ se compara con $f_1(t)$ trasladada T segundos. A esta función se le conoce con el nombre de autocorrelación.

Matemáticamente se tendrá:

$$R_{11}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_1(t-\tau)dt \quad (2.8)$$

Aplicando la ecuación (2.5) se tiene para una función de autocorrelación

$$R_{11}(\tau) = R_{11}(-\tau) \quad \Rightarrow \quad (2.9)$$

De la ecuación (2.9) se concluye que la función de autocorrelación es par.

La correlación cruzada para señales de energía finita se define:

$$R_{12}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_1(t)f_2(t-\tau)dt \quad (2.10)$$

La autocorrelación para señales de energía finita se define:

$$R_{11}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_1(t)f_1(t-\tau)dt \quad (2.11)$$

2.2 CORRELACION DE FUNCIONES PERIODICAS

Una señal periódica puede definirse:

$$v(t) \equiv v(t+T) \text{ para cualquier } t \quad (2.12)$$

La constante T es llamada el período de la señal.

Generalizando la definición, tendremos que,

$$v(t) = v(t+nT) \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.13)$$

Si se tiene que $f_1(t)$ y $f_2(t)$ son funciones periódicas, con un período T_1 .

Aplicando la propiedad de la función periódica a estas funciones, se tiene:

$$f_1(t-\zeta) = f_1(t-\zeta - T_1) \quad (2.14)$$

$$f_2(t-\zeta) = f_2(t-\zeta - T_1) \quad (2.15)$$

De las ecuaciones (2.14) y (2.15) se concluye, que cuando se conoce el comportamiento de una señal en un tiempo T , es posible predecir su comportamiento futuro.

Entonces las integrales (2.10) y (2.11) para funciones periódicas, no será necesario integrar sobre un intervalo $T \rightarrow \infty$, sino únicamente sobre un período T_1 ; porque el valor de la integral es el mismo sobre cualquier intervalo T_1 .

Entonces las funciones de autocorrelación y correlación cruzada quedarán de la forma

$$R_{11}(\tau) = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f_1(t) f_1(t-\tau) dt \quad (2.16)$$

$$R_{12}(\tau) = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f_1(t) f_2(t-\tau) dt \quad (2.17)$$

Estas integrales son funciones periódicas, por tanto constituyen un promedio de la función correlación.

Como se puede observar, esta propiedad es muy significativa, la cual es aprovechada para detectar señales periódicas en presencia de ruido usando técnicas de correlación como se verá más tarde en el capítulo V .

Una propiedad de importancia de la correlación para funciones periódicas es su Transformada de Fourier (L)

$$\frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f_1(t) f_2(t-\tau) dt \leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_1(n) F_2(n) e^{-jn\omega\tau} \quad (2.18)$$

(L) La Transformada de Fourier es una herramienta matemática, que permite representar una función arbitraria $f(t)$ por una suma continua de funciones exponenciales de la forma $e^{j\omega t}$.

Para demostrar esto se considerará las series de Fourier de las funciones $f_1(t)$ y $f_2(t)$:

$$f_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_1(n) e^{jn\omega_1 t} \quad (2.19)$$

$$f_2(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_2(n) e^{jn\omega_1 t} \quad (2.20)$$

Asumiendo que ambas funciones tienen la misma frecuencia angular ω_1 .

Los espectros complejos son:

$$F_1(n) = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f_1(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \quad (2.21)$$

$$F_2(n) = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f_2(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \quad (2.22)$$

La serie de Fourier de la $f_2(t+\tau)$, aplicando la propiedad de traslación se tiene que,

$$f(t-\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_2(n) e^{jn\omega_1 t} e^{-jn\omega_1 \tau} \quad (2.23)$$

$$f(t-\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_2(n) e^{jn\omega_1 (t-\tau)} \quad (2.24)$$

Reemplazando en la ecuación (2.3) la serie de Fourier (2.23), se tiene que es igual a,

$$\frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f_1(t) f_2(t-\tau) dt =$$

$$= \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f_1(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_2(n) e^{jn\omega_1(t-\zeta)} dt \quad (2.25)$$

El sumatorio podemos sacarle fuera de la integral por ser una función independiente de t , entonces,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f_1(t) f_2(t-\zeta) dt = \\ & \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_2(n) \bar{e}^{jn\omega_1\zeta} \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f_1(t) e^{jn\omega_1 t} dt \quad (2.26) \end{aligned}$$

La integral al ser comparada con la ecuación (2.21) se deduce que es igual a la conjugada del espectro complejo $F_1(n)$, por consiguiente la ecuación (2.26) será igual a:

$$\frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f_1(t) f_2(t-\zeta) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{F}_1(n) F_2(n) \bar{e}^{jn\omega_1\zeta}$$

2.2.A FUNCION DE AUTOCORRELACION

La función de autocorrelación [3] se la define como:

$$\frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f_1(t) f_1(t-\zeta) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_1(n)|^2 \bar{e}^{jn\omega_1\zeta} \quad (2.27)$$

Cuando $\zeta = 0$ se tiene:

$$\frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f_1^2(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_1(n)|^2 \quad (2.28)$$

Lo que significa que el valor cuadrático medio de la $f_1(t)$ es igual a la suma, sobre todo el rango de las armónicas, de los valores absolutos al cuadrado de los espectros.

Aplicando la ecuación (2.9) se tiene que:

$$R_{11}(\zeta) = R_{11}(-\zeta) = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f_1(t) f_1(t+\zeta) dt \quad (2.29)$$

y con las ecuaciones (2.28) y (2.29), se puede obtener

$$R_{11}(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_1(n)|^2 e^{jnw_1\zeta} \quad (2.30)$$

A la expresión matemática (2.30) se le define como espectro de potencia, siendo éste la Transformada de Fourier de la potencia disipada por un voltaje $f(t)$ aplicado a una resistencia unitaria o por una corriente $f(t)$ que pasa por la misma resistencia.

$$\Phi_{11}(n) = |F_1(n)|^2 \quad (2.31)$$

Sustituyendo la ecuación (2.31) en la ecuación (2.30) se tiene

$$R_{11}(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi_{11}(n) e^{jnw_1\zeta} \quad (2.32)$$

e inversamente

$$\Phi_{11}(n) = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} R_{11}(\tau) e^{-jn\omega_1\tau} d\tau \quad (2.33)$$

A esta forma recíproca se la conoce con el nombre de TEOREMA DE LA AUTOCORRELACION.

2.2.B EJEMPLOS DE AUTOCORRELACION

Determinar la autocorrelación de una función cosenoidal

$$f_1(t) = A \cos(\omega_1 t + \theta) \quad T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} \quad (2.34)$$

Desarrollo.

$$R_{11}(\tau) = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f_1(t) f_1(t-\tau) dt \quad (2.1)$$

$$R_{11}(\tau) = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} A \cos(\omega_1 t + \theta) \cdot$$

$$A \cos(\omega_1(t-\tau) + \theta) dt = \quad (3.35)$$

$$= \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} A^2 \cos(\omega_1 t + \theta) \cos(\omega_1(t-\tau) + \theta) dt$$

$$= \frac{A^2}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} \frac{1}{2} \left\{ \cos(2\omega_1 t - \omega_1 \tau + 2\theta) + \right.$$

$$\left. + \cos \omega_1 \tau \right\} dt =$$

$$= 0 + \frac{A^2}{2} \cos \omega_1 \tau \quad (2.36)$$

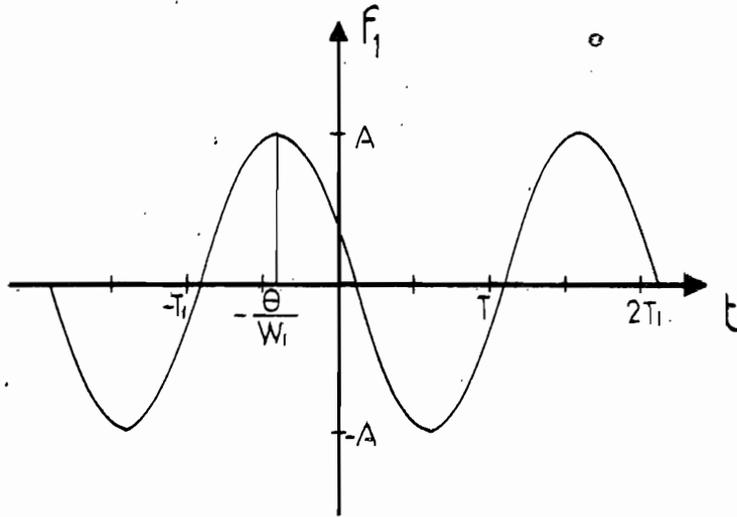


Fig. 2.1 Función $f_1(t) = A \cos(w_1 t + \theta)$

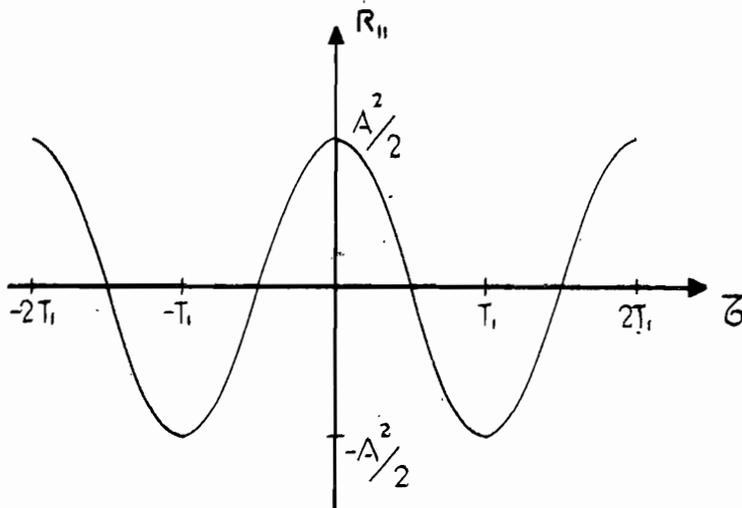


Fig. 2.2 Función de autocorrelación

$$R_{11}(z) = \frac{A^2}{2} \cos w_1 z$$

Determinar la autocorrelación de una onda periódica de pulsos rectangulares $f_1(t)$.

$$T_1 = 2 T_2$$

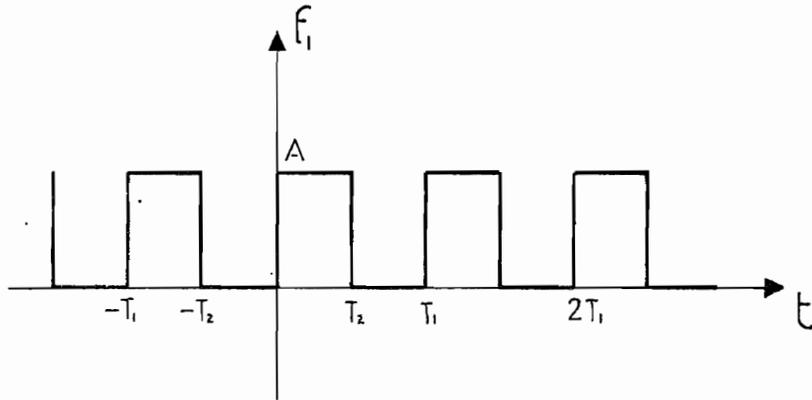


Fig. 2.3 Onda periódica de pulsos rectangulares

Desarrollo.

La función $f_1(t)$ consiste en una onda periódica de pulsos rectangulares. La determinación de la función autocorrelación, se la puede realizar por partes. Para esto definamos la función compuerta.

Función Compuerta $\equiv A G_{T_2}(t)$

$$A G_{T_2}(t) = \begin{cases} A & |t| < T_2/2 \\ 0 & |t| > T_2/2 \end{cases} \quad (2.37)$$

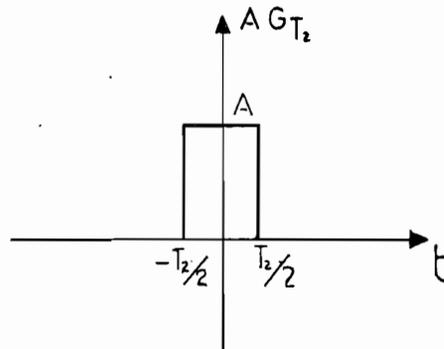


Fig. 2.4 Primer pulso rectangular

El primer pulso rectangular de la función $f_1(t)$ estará dado por

$$A G_{T_2}(t - T_2/2) \quad (2.38)$$

entonces la función de autocorrelación, solamente de este pulso será:

$$\bar{R}_{11}(\tau) = \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} A G_{T_2}(t - T_2/2) A G_{T_2}(t - \tau - T_2/2) dt \quad (2.39)$$

$$\bar{R}_{11}(\tau) = \frac{1}{T_1} \int_{\tau}^{T_1/2} A^2 dt \text{ para } 0 < \tau < T_1 \quad (2.40)$$

$$\bar{R}_{11}(\tau) = \frac{A^2}{T_1} \left[\frac{T_1}{2} - \tau \right] \text{ para } 0 < \tau < T_1/2 \quad (2.41)$$

Como la función de autocorrelación es par se tiene

$$\bar{R}_{11}(\tau) = \frac{A^2}{T_1} \left[\frac{T_1}{2} - |\tau| \right] \text{ para } -T_1/2 < \tau < T_1/2 \quad (2.42)$$

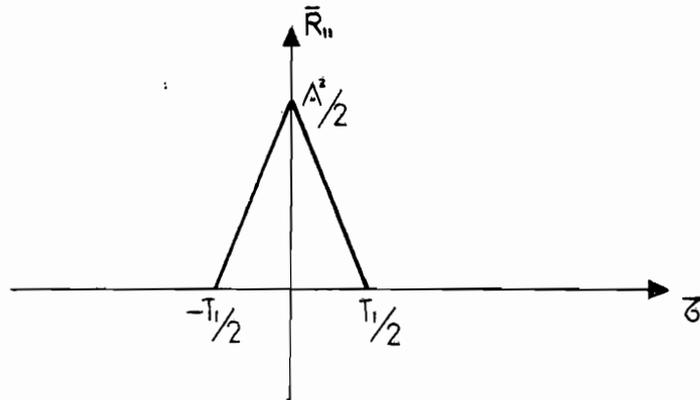


Fig. 2.5 Función de autocorrelación de un pulso rectangular

Pero como la función $f_1(t)$ es una señal periódica de pulsos rectangulares, entonces la función de autocorrelación de $f_1(t)$ será:

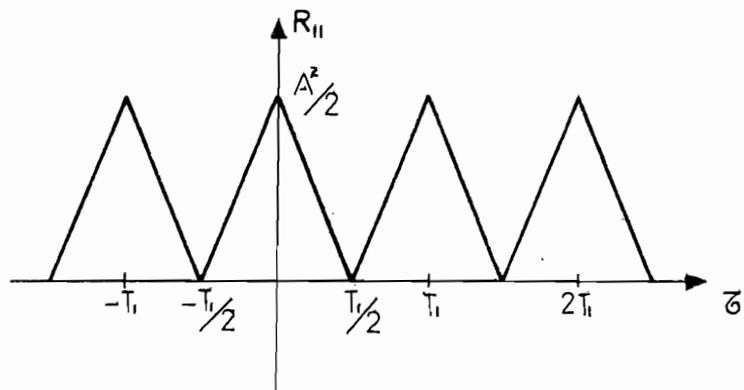


Fig. 2.6 Función de autocorrelación

2.2.C CORRELACION CRUZADA DE FUNCIONES PERIODICAS

La función de correlación para dos funciones periódicas diferentes [4] $f_1(t)$ y $f_2(t)$, de la misma frecuencia fundamental, se define como la función de Correlación Cruzada,

Lo que puede expresarse como:

$$R_{12}(\zeta) = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f_1(t) f(t-\zeta) dt \quad (2.43)$$

de la ecuación (2.18) se tiene que,

$$R_{12}(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{F}_1(n) F_2(n) e^{jn\omega_1\zeta} \quad (2.44)$$

Si definimos:

$$\Phi_{12}(n) = \bar{F}_1(n) F_2(n) \quad (2.45)$$

Sustituyendo la ecuación (2.45) en la expresión (2.44) quedará igual a,

$$R_{12}(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi_{12}(n) e^{jn\omega_1\zeta} \quad (2.46)$$

entonces,

$$\Phi_{12}(n) \in \text{espectro de potencia}$$

Por la ecuación (2.46) y la definición del

espectro de la serie exponencial de Fourier, se tendrá que,

$$\Rightarrow \Phi_{12}(n) = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} R_{12}(\zeta) e^{-jn\omega_1} d\zeta \quad (2.47)$$

Con el objeto de aclarar este concepto se cita un ejemplo.

La correlación cruzada de una señal periódica triangular y una señal periódica de pulsos rectangulares (las dos funciones tienen la misma frecuencia fundamental). $T_1 = 2b$

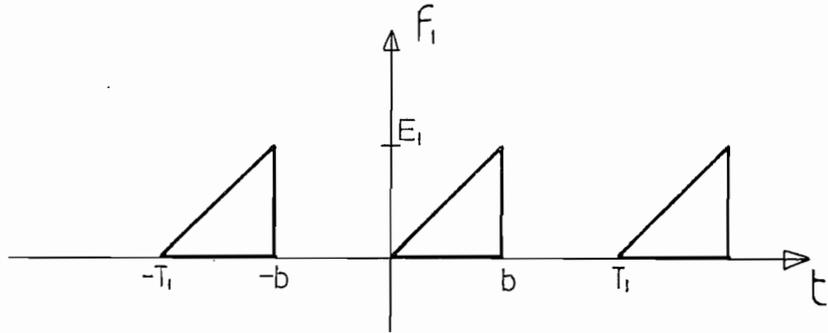


Fig. 2.7 Señal periódica triangular

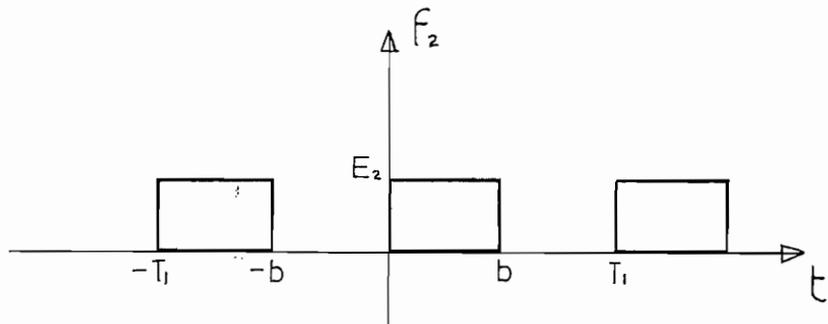


Fig. 2.8 Señal periódica de pulsos rectangulares

La determinación de la función de correlación cruzada $R_{12}(\tau)$, se la puede efectuar tomando un período de cada función, la función triangular permanece fija, mientras que la rectangular se desplaza como se demuestra en la Fig. 2.9

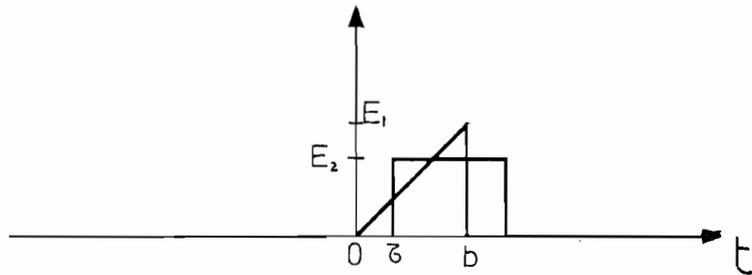


Fig. 2.9 Correlación cruzada en el intervalo $0 \leq \tau \leq b$

La parte de la correlación $R_{12}(\tau)$ en el intervalo de $(0, b)$, es igual a

$$R_{12}(\tau) = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f_1(t) f_2(t-\tau) dt \quad (2.3)$$

$$R_{12}(\tau) = \frac{1}{2b} \int_{\tau}^b E_2 \frac{E_1}{b} t dt \quad 0 \leq \tau \leq b \quad (2.48)$$

$$R_{12}(\tau) = \frac{E_1 E_2}{2b^2} \left. \frac{t^2}{2} \right|_{\tau}^b = \frac{E_1 E_2}{4b^2} (b^2 - \tau^2)$$

$$R_{12}(\tau) = \frac{E_1 E_2}{4b^2} (b^2 - \tau^2) \quad 0 \leq \tau \leq b \quad (2.49)$$

En una forma similar, la correlación cruzada en el intervalo $(-b,0)$, como se demuestra en la Fig. 2.10

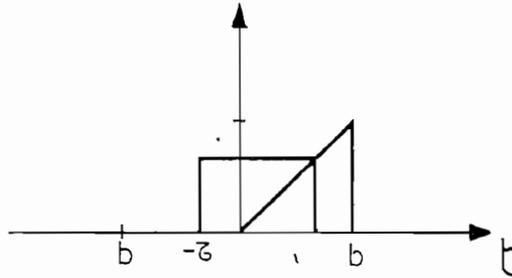


Fig. 2.10 Correlación cruzada en el intervalo $-b \leq \tau \leq 0$

Entonces,

$$R_{12}(\tau) = \frac{1}{2b} \int_0^{b-\tau} \frac{E_2 E_1}{b} t \, dt \quad -b \leq \tau \leq 0 \quad (2.50)$$

$$R_{12}(\tau) = \frac{E_1 E_2}{4b^2} t^2 \Big|_0^{b-\tau}$$

$$R_{12}(\tau) = \frac{E_1 E_2}{4b^2} (b - \tau)^2 \quad -b \leq \tau \leq 0 \quad (2.51)$$

Teniendo determinado un período de la función de correlación cruzada $R_{12}(\tau)$, se tiene suficiente información para completar la construcción de la función periódica de correlación cruzada como se demuestra en la Fig. 2.11



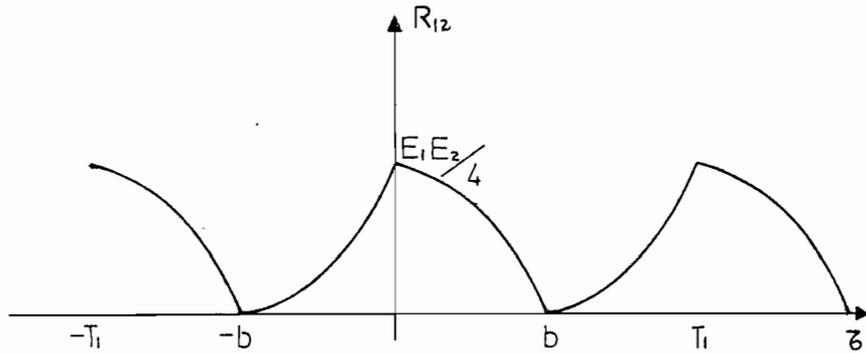


Fig. 2.11 Función de correlación cruzada entre la señal triangular y la señal de pulsos rectangulares

2.2.D CONCLUSIONES DE LOS EJEMPLOS

De los ejemplos citados se puede concluir que si la señal $f(t)$, tiene una componente continua, la función de correlación también tiene la componente continua.

El valor máximo de la función de correlación alcanza para $T = 0, 1, 2, \dots, n$, siendo T el período de la señal $f(t)$.

El área que encierra la función de correlación es igual a la multiplicación del área de la función $f_1(t)$ por el área de la función $f_2(t-\tau)$.

2.2.E RELACION ENTRE LA CONVOLUCION Y LA CORRELACION

La convolución [5] es uno de los más importantes conceptos en el análisis de sistemas lineales.

Considerese el sistema lineal cuya función de transferencia es $h(t)$. Si $r(t)$ es la función respuesta a una función excitación $f(t)$, entonces se tiene

$$r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\zeta)h(t-\zeta)d\zeta \quad (2.52)$$

A la integral expresada en la ecuación (2.52) se le conoce con el nombre de función de Convolución.

Se usará la siguiente notación para la función convolución;

$$\rho_{12} \equiv \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f_1(t)f_2(\zeta-t)dt \quad (2.53)$$

En una derivación paralela a la de la ecuación (2.18), se puede demostrar que

$$\frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f_1(t)f_2(\zeta-t)dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_1(n)F_2(n)e^{jn\omega_1\zeta} \quad (2.54)$$

Si se define:

$$P_{12}(\zeta) \equiv \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f_1(t) f_2(\zeta - t) dt \quad (2.55)$$

$$P_{21}(\zeta) \equiv \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f_2(t) f_1(\zeta - t) dt \quad (2.56)$$

Si en esta ecuación hacemos un cambio de variables tomando t' por t , donde $t' = \zeta - t$ se tendrá que

$$\begin{aligned} P_{12}(\zeta) &= \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f_1(t') f_2(\zeta - t') dt' \\ &= \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f_1(\zeta - t) f_2(\zeta - (\zeta - t)) dt \\ &= \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f_2(t) f_1(\zeta - t) dt \\ &= P_{21}(\zeta) \end{aligned}$$

$$P_{12}(\zeta) = P_{21}(\zeta) \quad (2.57)$$

$$P_{12}(\zeta) \equiv f_1(t) * f_2(t) = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f_1(t) f_2(\zeta - t) dt \quad (2.55)$$

$$P_{12}(\zeta) \equiv f_1(t) * f_2(-t) = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f_1(t) f_2(t - \zeta) dt \quad (2.58)$$

$$= R_{12}(\zeta) \quad (2.59)$$

$$R_{12}(\tau) = f_1(t) * f_2(-t) = P_{12}(\tau) \quad (2.60)$$

Entonces

$$P_{21}(\tau) = f_1(-t) * f_2(t) = R_{21}(\tau) \quad (2.61)$$

$$P_{11}(\tau) = f_1(t) * f_2(-t) = R_{11}(\tau) \quad (2.62)$$

Una situación especial, ocurre cuando la función $f_2(t)$ es par, bajo estas circunstancias, la correlación y convolución son equivalentes.

$$R_{12}(\tau) = P_{12}(\tau) \quad (2.63)$$

$$= P_{21}(\tau) \quad (2.64)$$

2.3 CORRELACION DE FUNCIONES APERIODICAS

La correlación para una función aperiódica

[6] se define:

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(t-\tau) dt \quad (2.65)$$

Siempre y cuando $\int_{-\infty}^{\infty} |f_1(t)|$ y $\int_{-\infty}^{\infty} |f_2(t)|$

existan y sean finitas.

La integral de Fourier para funciones aperiódicas es

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(w) e^{j\omega t} dw \quad (2.66)$$

en la cual

$$F(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (2.67)$$

Para obtener la transformada de Fourier de la función correlación, primero se encontrará la integral de Fourier de,

$$f_2(t-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} F_2(w) e^{j\omega(t-\tau)} dw \quad (2.68)$$

luego reemplazando la ecuación (2.68) en la expresión (2.65)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(t-\tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) dt \int_{-\infty}^{\infty} F_2(w) e^{j\omega(t-\tau)} . dw \quad (2.69)$$

Realizando una inversión en el orden de integración

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(t-\tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} F_2(w) e^{-j\omega\tau} dw \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) \cdot e^{j\omega t} dt \quad (2.69)$$

Aplicando la ecuación (2.67)

$$F_1(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) e^{-j\omega t} dt \quad (2.70)$$

la conjugada del espectro será,

$$\bar{F}_1(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) e^{j\omega t} dt \quad (2.71)$$

la expresión (2.71) es de la misma forma que la integral de la extrema derecha de la ecuación (2.69). Entonces se tendrá

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(t-\tau) dt &= \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \bar{F}_1(\omega) F_2(\omega) e^{-j\omega\tau} d\omega \end{aligned} \quad (2.72)$$

que es la transformada de Fourier de la función correlación.

2.3.A AUTOCORRELACION [7]

Si se tiene la condición $f_1(t) = f_2(t)$ la expresión (2.72) tomará la forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_1(t-\tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi \bar{F}_1(\omega) F_1(\omega) e^{-j\omega\tau} d\omega \quad (2.73)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_1(t-\tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi |F_1(\omega)|^2 e^{-j\omega\tau} d\omega \quad (2.73)$$

Si definimos el espectro de densidad de energía

$$\Phi_{11}(\omega) = 2\pi |F_1(\omega)|^2 \quad (2.74)$$

Sustituyendo la ecuación (2.74) en la expresión (2.73), se tendrá

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_1(t-\tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{11}(w) e^{-jw\tau} dw \quad (2.75)$$

en similitud a las expresiones (2.66) y (2.67), se tiene

$$R_{11}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{11}(w) e^{jw\tau} dw \quad (2.76)$$

$$\Phi_{11}(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{11}(\tau) e^{-jw\tau} d\tau \quad (2.77)$$

A estas relaciones se les conoce con el nombre de TEOREMA DE AUTO CORRELACION para funciones aperiódicas.

Para $\tau=0$, la expresión (2.73) será igual.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi |F_1(w)|^2 dw \quad (2.78)$$

Si $f_1(t)$ representa un voltaje o una corriente y si se asume que la carga es una resistencia de 1Ω , el total de energía [vatios-seg] consumida por la resistencia es claramente expresada en el miembro izquierdo de la ecuación (2.78). Es obvio que la misma cantidad de energía puede obtenerse integrando con respecto a la velocidad angular como se indica en el miembro derecho de la ecuación (2.78).

Algunas propiedades de la función de autocorrelación para funciones aperiódicas, se citan a continuación:

a) El valor de la autocorrelación en el origen es igual a la integral de la función aperiódica cuadrática, matemáticamente se expresa

$$R_{11}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1^2(t) dt \quad (2.79)$$

Esto es el total de energía de $f_1(t)$.

b) La función de autocorrelación $R_{11}(\tau)$, es par para cualquier función aperiódica.

Realizando un cambio de variables.

$$R_{11}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t') f_1(t' - \tau) dt' \quad (2.73)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_1(t + \tau) dt = R_{11}(-\tau) \quad (2.80)$$

$$R_{11}(\tau) = R_{11}(-\tau) \quad (2.81)$$

c) Cualquier señal que se correlaciona con sí misma alcanza el valor máximo de correlación cuando $\tau = 0$.

Ahora para poder demostrar esta propiedad, consideremos la integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} [f_1(t) \pm f_1(t-\zeta)]^2 dt \quad (2.82)$$

Es obvio que el valor de la integral es un valor positivo para $\zeta \neq 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} [f_1(t) \pm f_1(t-\zeta)]^2 dt > 0 \quad (2.83)$$

Resolviendo el binomio al cuadrado se tiene,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1^2(t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} f_1^2(t-\zeta) dt \pm 2 \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_1(t-\zeta) dt > 0 \quad (2.84)$$

Las primeras dos integrales de la ecuación (2.84) tienen el mismo valor y son iguales a $R_{11}(0)$ y la tercera integral es igual a $R_{11}(\zeta)$.

$$2R_{11}(0) \pm 2R_{11}(\zeta) > 0 \quad (2.85)$$

$$R_{11}(0) > \pm |R_{11}(\zeta)| \quad (2.86)$$

por consiguiente

$$R_{11}(0) > R_{11}(\zeta) \quad \text{para } \zeta \neq 0 \quad (2.87)$$

Entonces, el valor máximo de la función de autocorrelación ocurre en el origen. La función de autocorrelación se hace más pequeña mientras más grande es ζ .

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} R_{11}(\zeta) = 0 \quad (2.88)$$

2.3.B CORRELACION CRUZADA

Cuando $f_1(t)$ y $f_2(t)$ son diferentes [2] en la expresion (2.73), se define la función de correlación cruzada $R_{12}(\zeta)$ de $f_1(t)$ y $f_2(t)$ como

$$R_{12}(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(t-\zeta) dt \quad (2.89)$$

Analogamente el espectro de densidad de energía

$$\Phi_{12}(\omega) = 2\pi \bar{F}_1(\omega) F_2(\omega) \quad (2.90)$$

Las relaciones recíprocas de $R_{12}(\zeta)$ y su espectro $\Phi_{12}(\omega)$, se expresan

$$R_{12}(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{12}(\omega) e^{j\omega\zeta} d\omega \quad (2.91)$$

$$\Phi_{12}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{12}(\zeta) e^{-j\omega\zeta} d\zeta \quad (2.92)$$

A estas expresiones se les conoce con el nombre de TEOREMA DE LA CORRELACION CRUZADA para funciones aperiódicas.

Realizando un cambio de variables se puede demostrar

$$R_{12}(-\zeta) = R_{21}(\zeta) \quad (2.93)$$

En el dominio de frecuencia se tendrá:

$$\Phi_{12}(w) = \overline{\Phi_{21}(w)} \quad (2.94)$$

La función de correlación cruzada en general no es par, excepto en casos especiales. Por ejemplo, si ambas funciones $f_1(t)$ y $f_2(t)$ son pares o ambas impares.

La suma de las integrales de las funciones $f_1(t)$ y $f_2(t)$ al cuadrado es mayor a dos veces la magnitud de la función de correlación cruzada para cualquier valor de ζ , inclusive el cero, esto es

$$R_{11}(0) + R_{22}(0) > 2 |R_{12}(\zeta)| \quad (2.95)$$

2.3.C RELACION ENTRE LA CONVOLUCION Y LA CORRELACION

La integral de convolución [2] se define

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(\zeta - t) dt \quad (2.96)$$

cuya transformada de Fourier es

$$2\pi \int_{-\infty}^{\infty} F_1(w) F_2(w) e^{jw\zeta} dw \quad (2.97)$$

entonces

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(\zeta - t) dt &= \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} F_1(w) F_2(w) e^{jw\zeta} dw \quad (2.98) \end{aligned}$$

Se puede representar la convolución simbólicamente por una multiplicación especial

$$P_{12}(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(\zeta - t) dt \equiv f_1(t) * f_2(t) \quad (2.99)$$

$$P_{21}(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t) f_1(\zeta - t) dt \equiv f_2(t) * f_1(t) \quad (2.100)$$

Se pueden realizar algunos cambios de variables a la expresión (2.96) y obtener

$$P_{12}(\zeta) = P_{21}(\zeta) \quad (2.101)$$

Si se tiene

$$\begin{aligned} P_{12}(t) \equiv f_1(t) * f_2(-t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(t - \zeta) dt \\ &= R_{12}(\zeta) \quad (2.102) \end{aligned}$$

$$P_{12}(t) = f_1(t) * f_2(-t) = R_{12}(\zeta)$$

Si $f_2(t)$ es una función par,

$$f_2(t) = f_2(-t)$$

En este caso, que la convolución y la correlación son equivalentes.

CAPITULO III

DISEÑO DEL CORRELACIONADOR ANALOGICO

3.1. CORRELACIONADOR ANALOGICO

El correlacionador analógico, motivo de este diseño, se muestra en forma de diagrama de bloques en la Fig. 3.1, está compuesto por un multiplicador analógico, el cual realiza la multiplicación de la señal $x(t)$ por la señal retrasada $y(t-\tau)$, un retardador que tiene por función retardar la señal $y(t)$, en τ seg. y por último el integrador que realiza la integración del producto de las funciones $x(t)$ por $y(t-\tau)$.

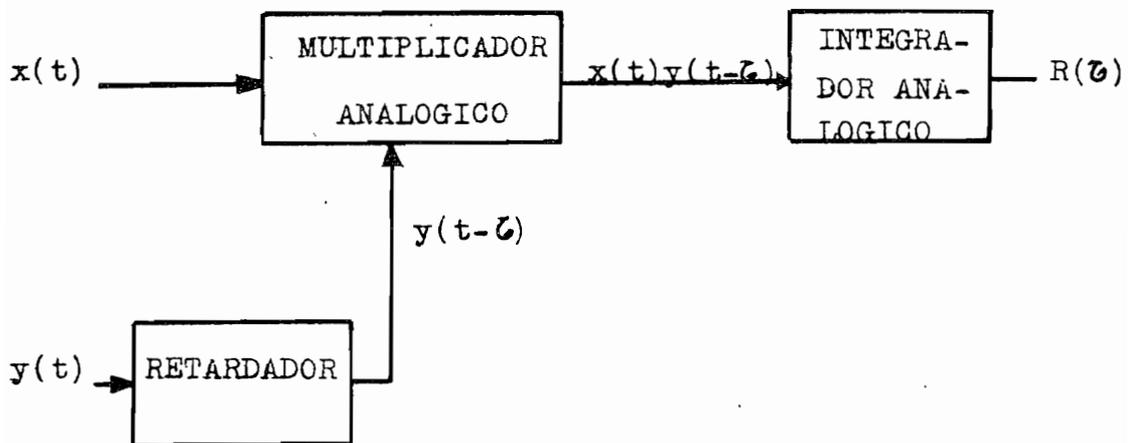


Fig. 3.1 Diagrama de bloques del correlacionador analógico

3.2 EL MULTIPLICADOR ANALOGICO

Para realizar la multiplicación de las señales a correlacionarse, se utilizarán algunas de las propiedades de los amplificadores operacionales; en una combinación especial. Pero antes de llegar a la configuración final, se analizarán los principios básicos del amplificador operacional, ya que este elemento se lo utilizará también en la etapa final del correlacionador analógico.

3.2.A EL AMPLIFICADOR OPERACIONAL

El diagrama esquemático de un amplificador operacional se muestra en la Fig. 3.2

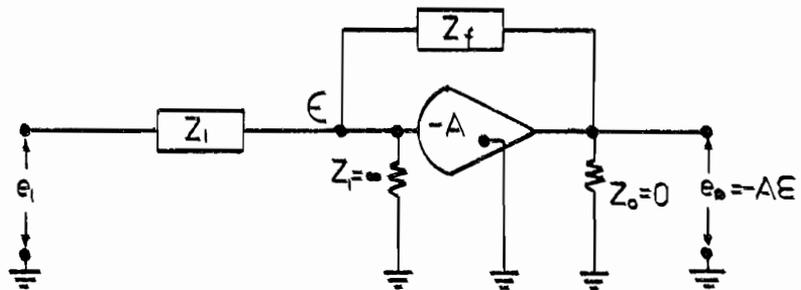


Fig. 3.2 Amplificador operacional

La unidad está compuesta por un amplificador de acoplamiento directo que tiene como características: alta ganancia, impedancia de en-

trada infinita e impedancia de salida cero, en la práctica el orden de magnitud de estas características está en los siguientes rangos

$$A = 10^3 - 10^5$$

$$Z_m = 10^6 - 10^8 \Omega$$

$$Z_o = 10^3 - 10^5 \Omega$$

Valores con los cuales el error de aproximación es despreciable.

Como cada amplificador operacional presenta las características de una sola etapa de amplificación, existe una inversión de fase de la señal de salida respecto de la señal de entrada.

Para determinar algunas de las posibles operaciones que puede realizar el amplificador operacional se calculará la ganancia del circuito total con realimentación, en base al circuito equivalente de la Fig. 3.3 que toma en cuenta las características del mencionado amplificador.

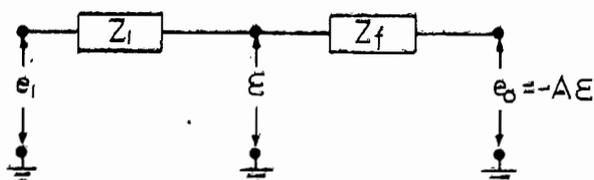


Fig. 3.3 Circuito equivalente

$$e_0 = - A \epsilon \quad (3.1)$$

$$\epsilon = \frac{e_1 Z_f}{Z_1 + Z_f} + \frac{e_0 Z_1}{Z_1 + Z_f} \quad (3.2)$$

Sustituyendo la ecuación (3.1) en la ecuación (3.2), se tiene

$$-\frac{e_0}{A} = \frac{e_1 Z_f}{Z_1 + Z_f} + \frac{e_0 Z_1}{Z_1 + Z_f} \quad (3.3)$$

$$A \text{ rea} = \frac{e_0}{e_1} = \frac{Z_f}{Z_1 [1 - (Z_f/Z_1 - 1)/A]} \quad (3.4)$$

Si A es suficientemente grande la ecuación (3.4) podemos aproximarle

$$\frac{e_0}{e_1} = -\frac{Z_f}{Z_1} \quad (3.5)$$

En la ecuación (3.5) si Z_f y Z_1 son resistencias puras e iguales se tiene

$$\frac{e_0}{e_1} = -1 \iff e_2 = -e_1 \quad (3.6)$$

que corresponde a la operación de inversión cuyo circuito se muestra en la Fig. 3.4

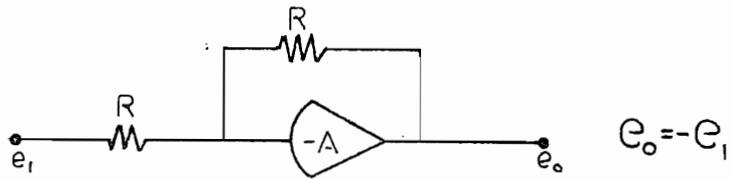


Fig. 3.4 INVERSOR

Si Z_f y Z_1 son resistencias desiguales, se tiene una multiplicación por una constante, específicamente se muestra la Fig. 3.5

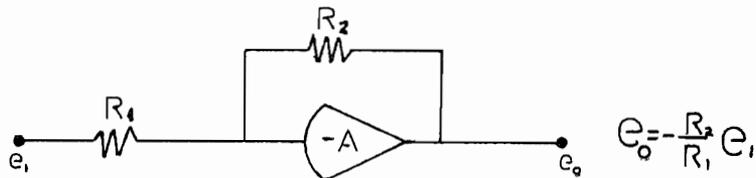


Fig. 3.5 Multiplicación por una constante
 Cuando Z_f es un capacitor y Z_1 una resistencia, en el plano de frecuencia "s", se tiene

$$Z_f = \frac{1}{sC} \tag{3.7}$$

reemplazando en la ecuación (3.5)

$$\frac{e_o}{e_i} = -\frac{Z_f}{Z_1} = -\frac{1/sC}{R} = \frac{-1}{sCR} \tag{3.8}$$

Esta ecuación en el plano de tiempo es

$$e_0 = -\frac{1}{CR} \int e_1 dt \quad (3.9)$$

con lo cual se evidencia la operación de integración que se la representa graficamente en la Fig. 3.6

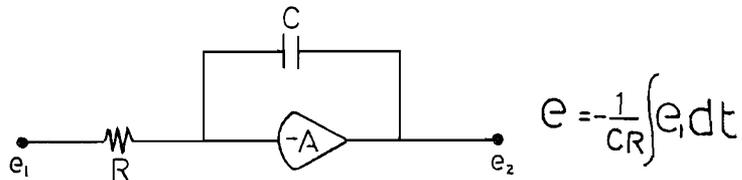


Fig. 3.6 INTEGRADOR

Si la impedancia de realimentación es una resistencia y la impedancia de entrada es una capacidad, en el plano de frecuencia se tiene

$$\frac{e_0}{e_1} = -\frac{R}{1/SC} = -SRC \quad (3.10)$$

en el plano de tiempo es

$$e_0 = -RC \frac{de_1}{dt} \quad (3.11)$$

el circuito del diferenciador se muestra en la Fig. 3.7

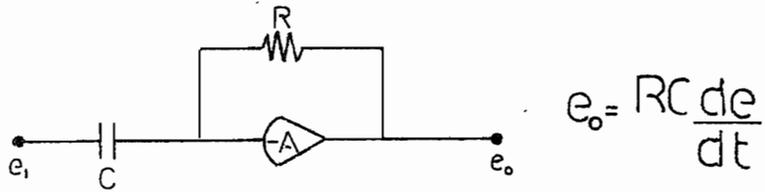


Fig. 3.7 DIFERENCIADOR

Para la conexión que se muestra en la Fig. 3.8. el voltaje de salida del amplificador operacional, viene dado por la expresión

$$V_o = - Z_f (V_1 / Z_1 + V_2 / Z_2 + \dots + V_n / Z_n) \quad (3.12)$$

Si $Z_f = Z_1, Z_2, \dots$ son resistencias puras todas de igual valor se tiene la operación suma, como se muestra en la Fig. 3.8

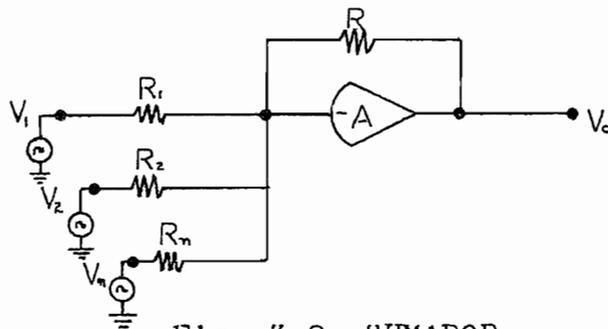


Fig. 3.8 SUMADOR

En forma resumida se ha encontrado las operaciones básicas que pueden realizar por medio de amplificadores operacionales, debiéndose indicar además que hay la posibilidad de realizar estas operaciones en forma combinada.

3.2.B EL CUADRADOR

Para realizar la operación de multiplicación ya no es posible utilizar unicamente amplificadores operacionales, debiéndose incorporar para este caso un circuito análogo especial que se lo conoce como cuadrador, cuya función como su nombre lo indica es elevar a la segunda potencia la señal de entrada, esquemáticamente se muestra en la Fig. 3.9



Fig. 3.9 Cuadrador

Esta operación puede conseguirse aprovechando la aproximación a una ley cuadrática de la corriente de drenaje en pinch-off que ofrece el transistor de efecto de campo FET [8] [9]

Esta corriente esta determinada por la expresión

$$i_{DP} = I_{DSS} \left(\frac{v_{GS}}{V_P} - 1 \right)^2 \quad (3.13)$$

I_{DSS} = corriente de drenaje que fluye cuando los terminales externos de la compuerta y la fuente son cortocircuitados.

i_{DP} = corriente de drenaje en pinch-off

V_P = voltaje de pinch-off, se define como el valor de V_{GS} producida por una fuente externa de voltaje compuerta-fuente

v_{GS} = voltaje de compuerta-fuente

Si se aprovecha de esta circunstancia en un circuito adecuado como el que se indica en la Fig. 3.10, se logra una curva de transferencia de forma parabólica como se puede observar en la Fig. 3.11 en la que la suma de las dos corrientes de drenaje de los FET produce una característica cuadrática.

En el circuito de la Fig. 3.10 el voltaje de la compuerta a la fuente de cada FET es igual a la suma de los voltajes de polariza-

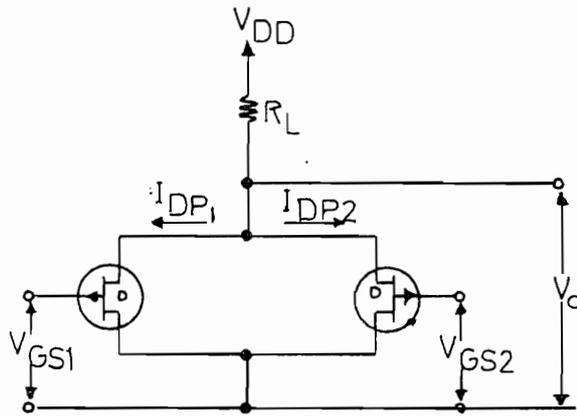


Fig. 3.10 Circuito cuadrador básico

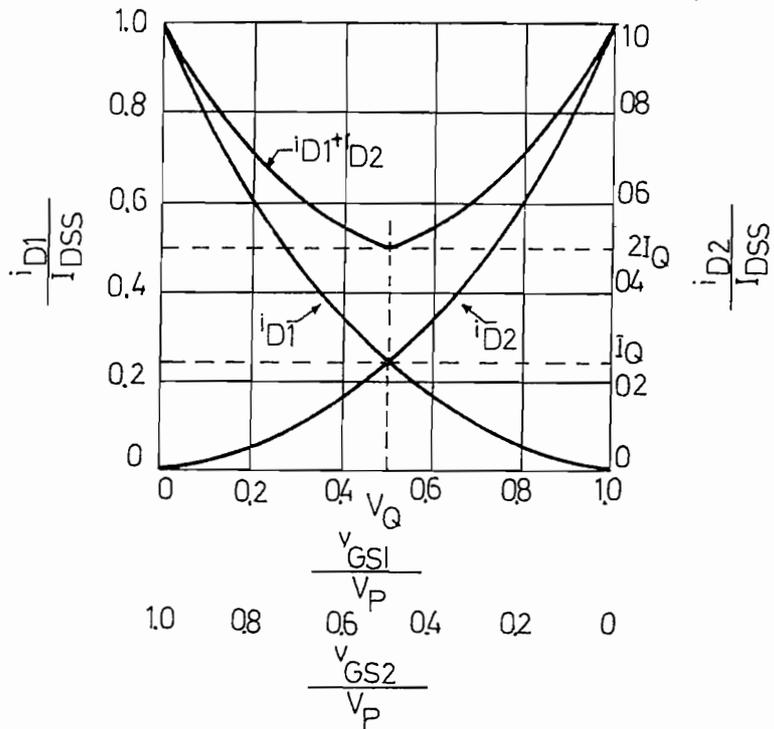


Fig. 3.11 Características de transferencia de circuito cuadrador

ción más un voltaje alterno v_{in} defasado 180° del un elemento respecto del otro o sea

$$v_{GS1} = V_{Q1} + v_{in} \quad (3.14)$$

$$v_{GS2} = V_{Q2} - v_{in} \quad (3.15)$$

La corriente que atraviesa por R_L , es la suma de las dos corrientes de drenaje y si el circuito esta polarizado para obtener un mismo V_P y I_{DSS} , en cada FET, entonces,

$$i_R = i_{DP1} + i_{DP2} \quad (3.16)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.13), (3.14) (3.15) en la ecuación (3.16)

$$\begin{aligned} i_R &= I_{DSS} \left(\frac{V_Q + v_{in}}{V_P} - 1 \right)^2 + \\ & I_{DSS} \left(\frac{V_Q - v_{in}}{V_P} - 1 \right)^2 = \\ &= 2 I_{DSS} \left(\frac{V_Q}{V_P} - 1 \right)^2 + \frac{2 I_{DSS} v_{in}^2}{V_P^2} \quad (3.17) \end{aligned}$$

En esta última expresión el primer término nos representa una componente continua mas una componente alterna en que está incluida la señal de entrada al cuadrado.

Como se desea solamente obtener la componente alterna, la salida puede hacerse a través de un condensador, eliminándose de esta manera la componente continua, entonces el voltaje de salida será

$$v_o = \frac{2I_{DSS}}{V_P^2} v_{in}^2 \quad (3.18)$$

3.2.C DISEÑO DEL CUADRADOR

El circuito para polarizar el FET y el circuito equivalente con una sola fuente de poder se muestran en las figuras Fig. 3.12 y Fig. 3.13 respectivamente

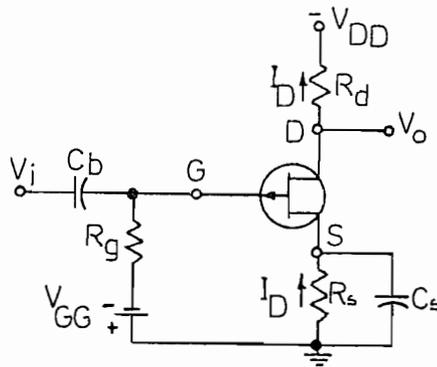


Fig. 3.12 Circuito de polarización

Para el diseño se han escogido dos FET 2N2497, los datos para polarización han sido tomados

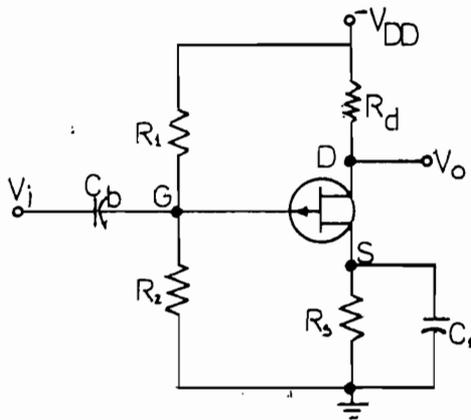


Fig. 3.13 Circuito de polarización con una sola fuente de poder del manual "Semiconductors and Components Texas Instruments 1970".

Para que el FET tenga estabilidad térmica debe satisfacer la línea de carga (Fig.3.12)

$$- V_{GS} = - V_{GG} + I_D R_S \quad (3.18)$$

Se ha escogido un valor $V_{DD} = -20v$, $I_D = -2.5$ mA, $V_{GS} = 1v$, $R_S = 1K\Omega$ y $V_{DS} = -8v$

Reemplazando los valores anteriores en la ecuación (3.18) se puede obtener el valor de

$$V_{GG} = I_D R_S + V_{GS} = - 1.5 v$$

Para el cálculo de C_S se ha tomado

$$\frac{1}{\omega C} = \frac{R_S}{10} \quad (3.19)$$

Para una frecuencia de 10 Hz, se obtiene un valor de capacidad igual a 150 μF .

Para la construcción del aparato se usará un condensador electrolítico de 150 μF con un voltaje DC = 10v

Del circuito de la Fig.3.10:

$$\begin{aligned} R_L &= \frac{V_{DD} - V_{DS} - I_D R_S}{2I_D} \quad (3.20) \\ &= \frac{(-20 + 8 + 2.5)V}{2(-2.5)\text{mA}} = 1.78 \text{ K}\Omega \end{aligned}$$

La corriente por R_L es la suma de las corrientes de drenaje de cada elemento.

Si se asume que R_g debe ser mucho mayor que R_s , entonces $R_g \gg 10R_s$ por consiguiente

$$R_g = 10\text{K}\Omega$$

Del circuito de la Fig.3.13, los valores de R_1 y R_2 están dados por las ecuaciones

$$V_{GG} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_{DD} \quad (3.21)$$

$$R_g = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (3.22)$$

Sustituyendo los valores obtenidos anterior-

mente en las ecuaciones (3.21) y (3.22), se obtienen los siguientes resultados

$$R_1 = 100K\Omega$$

$$R_2 = 10K\Omega$$

Para obtener el defasamiento de 180° en las compuertas de los FET en el circuito de la Fig. 3.10 es necesario introducir una primera etapa que sería un INVERSOR DE FASE, para esta etapa se ha escogido un FET 2N2386 , cuyo circuito se muestra en la Fig. 3.14

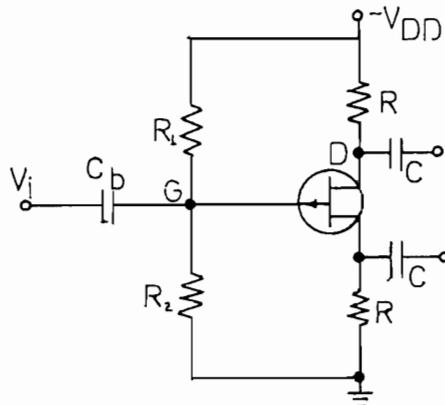


Fig. 3.14 Inversor de fase

La polarización para este transistor de efecto de campo ha sido realizada en forma análoga a la anterior y se obtiene para $I_D = - 2.8 \text{ mA}$

$$V_{DD} = -20 \text{ V}$$

$$V_{GS} = 1 \text{ V}$$

Con estos valores de polarización y asumiendo un valor de $R_s = R_L = 1\text{K}\Omega$

Con estos valores se determina el valor

$V_{DS} = -14.6 \text{ v}$, con este valor y aplicando la ecuación (3.18) se obtiene

$$V_{GG} = 1.8 \text{ v}$$

$$R_g \geq 10R \Rightarrow R_g = 10\text{K}\Omega$$

Con los valores anteriores y resolviendo las ecuaciones (3.21) y (3.22) se obtiene

$$R_1 = 100\text{K}\Omega$$

$$R_2 = 10\text{K}\Omega$$

Con estos valores el inversor de fase se encuentra polarizado.

El circuito total del cuadrador se muestra en la Fig. 3.15

Tanto a la entrada del divisor de fase como a los elementos del cuadrador es necesario introducir un acoplamiento RC para obtener una frecuencia de corte suficientemente baja.

Estos circuitos están compuestos por C_1 , R_1 ,

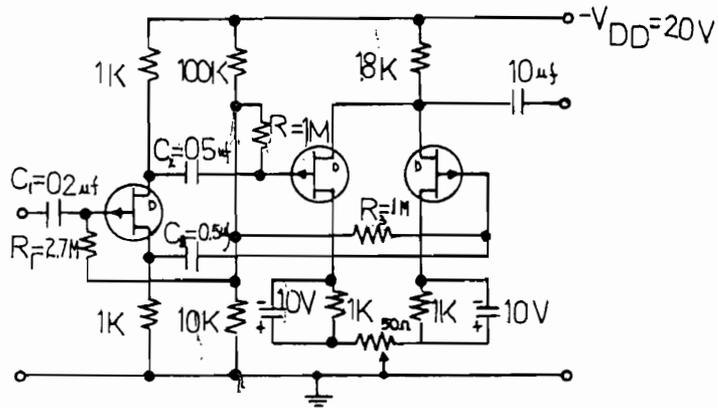


Fig. 3.15 CUADRADOR

C_2 R_2 y C_3 R_3 cuyos valores han sido escogidos para una frecuencia de corte de 5Hz.

3.2.D. DISEÑO DEL MULTIPLICADOR

Aprovechando de las propiedades del amplificador operacional como también las del cuadrador y con una adecuada ecuación matemática se logra la multiplicación de dos funciones.

La ecuación utilizada es

$$XY \equiv 1/4 [(X + Y)^2 - (X - Y)^2] \quad (3.23)$$

En la Fig. 3.16 se muestra el circuito que permite obtener el producto XY electrónicamente.

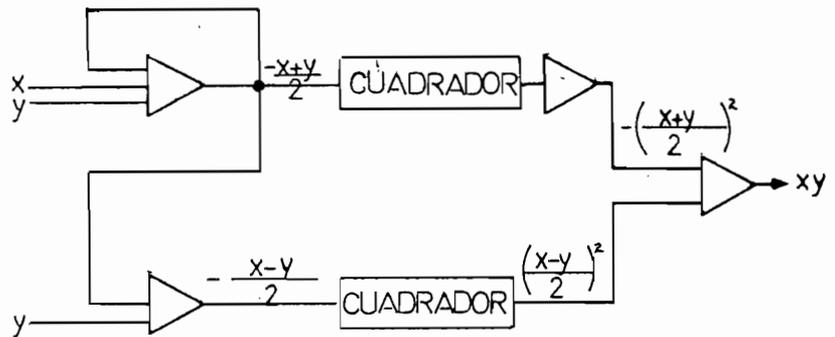


Fig. 3.16 DISEÑO DEL MULTIPLICADOR ANALOGICO

3.3 EL RETARDADOR

El retardador en tiempo desplaza la función $x(t)$ en un cierto intervalo de τ , esquemáticamente podemos representarlo como en la Fig. 3.17



Fig. 3.17 Retardador

Lo anterior matemáticamente se puede expresar en la siguiente forma

$$x(t) = y(t-\tau) \quad (3.24)$$

tomando la transformada de Laplace de la ecuación (3.24)

$$X(s) = e^{-s\tau} Y(s) \quad (3.25)$$

el operador de traslación de Laplace es

$$\frac{X(s)}{Y(s)} = e^{-s\tau} \quad (3.26)$$

Para obtener un desplazamiento óptimo, se debe tener la mejor aproximación de la función $e^{-s\tau}$, esta situación se consigue con la expansión de fracciones parciales de Padé [5]

Considerese la expresión $e^z = \lim_{(\mu+\gamma) \rightarrow \infty} \frac{F_{\mu,\gamma}(z)}{G_{\mu,\gamma}(z)} \quad (3.27)$

$$F_{\mu,\gamma}(z) = 1 + \frac{\gamma z}{\mu + \gamma} + \frac{\gamma(\gamma-1)z^2}{(\mu+\gamma)(\mu+\gamma-1)2!} \quad (3.28)$$

$$G_{\mu,\gamma}(z) = 1 - \frac{\mu z}{(\mu+\gamma)} + \frac{\mu(\mu-1)z^2}{(\mu+\gamma)(\mu+\gamma-1)2!} \quad (3.29)$$

Consideremos una expansión de Padé finita con $\mu = \gamma = 2$

$$\frac{X(s)}{Y(s)} = e^{-s\tau} \cong \frac{1 + \frac{2}{4}(-s\tau) + \frac{2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2} (s^2 \tau^2)}{1 - \frac{2}{4}(-s\tau) + \frac{2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2} (s^2 \tau^2)}$$

$$\frac{X(s)}{Y(s)} \approx \frac{s^2\tau^2 - 6s\tau + 12}{s^2\tau^2 + 6s\tau + 12} \quad (3.30)$$

Efectuando una adecuada transformación a la ecuación (3.30) se puede obtener una ecuación equivalente que facilita el diseño del circuito analógico

$$Y(s) = X(s) + [X(s) + Y(s)] \frac{6}{s\tau} + [X(s) - Y(s)] \frac{12}{s^2\tau^2} \quad (3.31)$$

El circuito que resuelve la ecuación(3.31) se muestra en la Fig. 3.18.

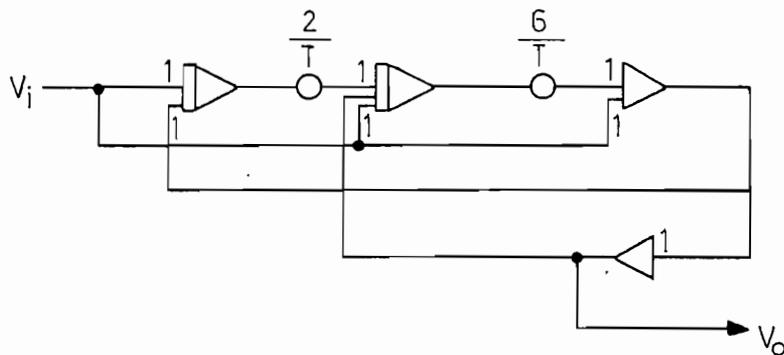


Fig. 3.18 Retardador

El circuito anterior no da una aproximación satisfactoria, lo cual podría mejorarse si

en la expansión de Padé tomaría un mayor número de términos, lo que implicaría la utilización de amplificadores en una cantidad tal que el Laboratorio del Departamento de Electrónica no dispone actualmente.

Por lo dicho anteriormente se ha diseñado un circuito como se muestra en la Fig. 3.19, con elementos pasivos con los que se logra la operación de retardo

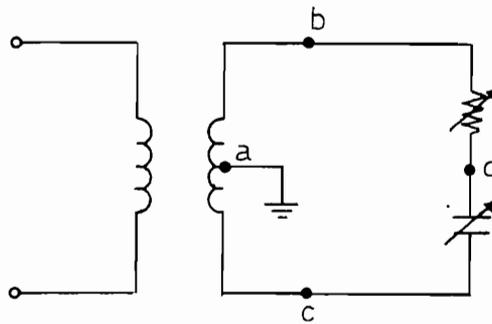


Fig. 3.19 Retardador

En la Fig. 3.20 se muestra el diagrama vectorial del circuito.

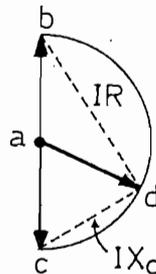


Fig. 3.20 Diagrama vectorial

Con este circuito es posible obtener un defasamiento respecto de $a b$ o de $a c$ de 180° , con la ventaja de que la amplitud de la señal de salida es constante.

3.4 EL CORRELACIONADOR

En la figura se muestra un esquema completo del correlacionador.

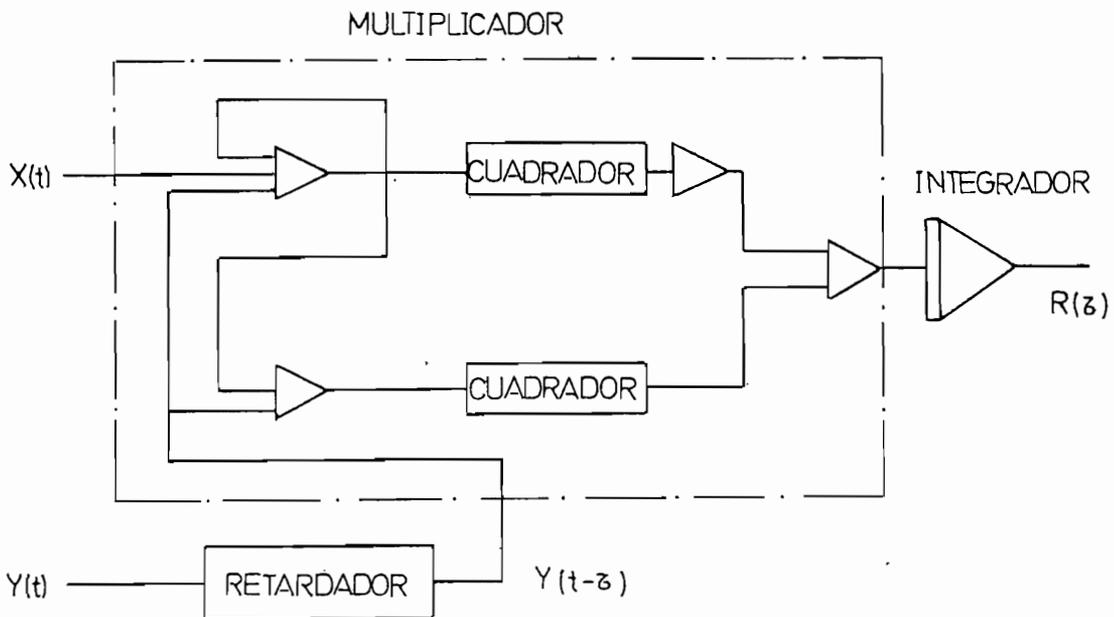


Fig. 3.21 Correlacionador

CAPITULO IV

RESULTADOS EXPERIMENTALES

4.1 EL CUADRADOR

Correspondiendo al diseño del que se habló en el capítulo III, experimentalmente se comprobó que al introducir en el aparato una señal cosenoidal Fig. 4.1, se obtuvo como respuesta una componente continua mas una señal cosenoidal de doble frecuencia Fig. 4.2, que efectivamente corresponde al cuadrado de la señal de entrada, ya que

$$A^2 \cos^2 wt = \frac{1}{2} A^2 - \frac{A^2}{2} \cos 2wt \quad (4.1)$$

También se efectuó la experiencia con una onda triangular Fig. 4.3 y se obtuvo como respuesta parábolas que corresponden a cada segmento lineal de la onda de entrada como se muestra en la Fig. 4.4

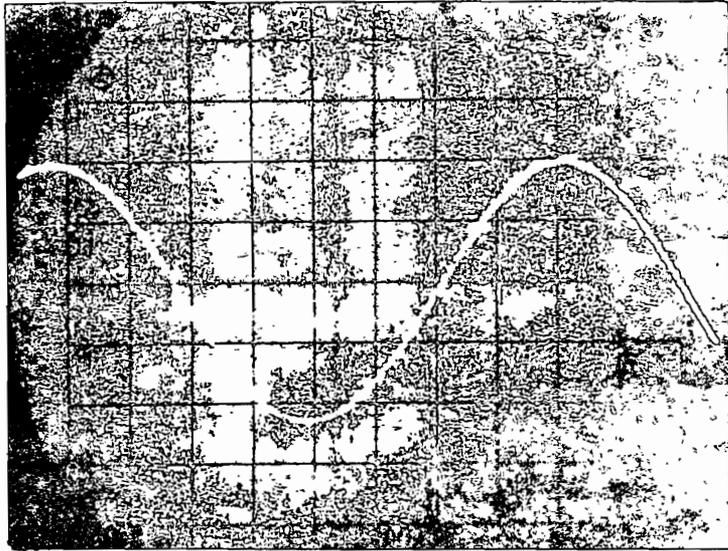


Fig. 4.1 Señal de entrada. Escala vertical
1 vol/cm. Escala horizontal 1 mseg/cm

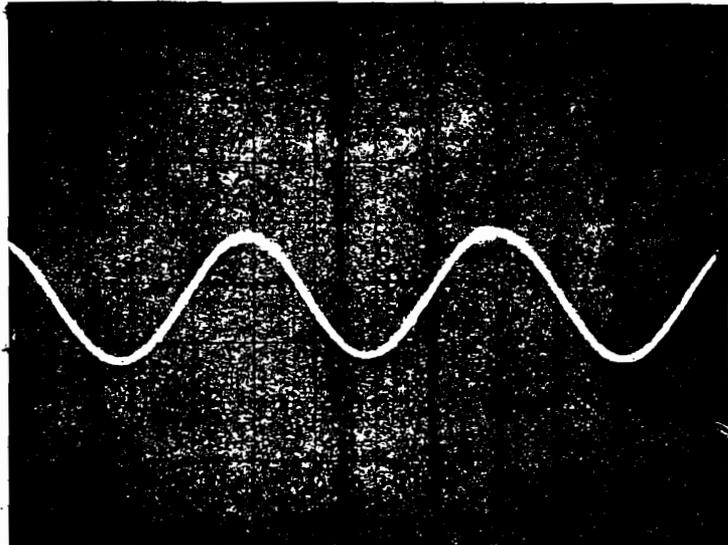


Fig. 4.2 Señal de salida del cuadrador. Escala vertical 1 vol/cm. Escala horizontal 1 mseg/cm.

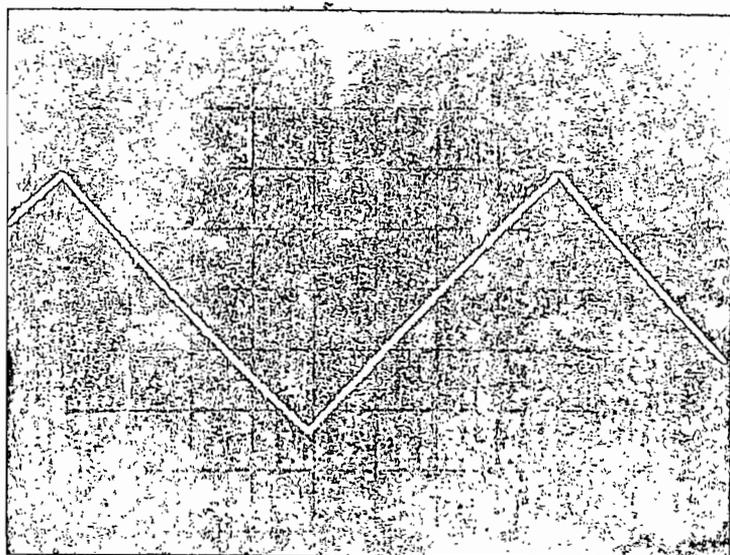


Fig. 4.3 Señal de entrada. Escala vertical
1 vol/cm. Escala horizontal 1 msec/cm

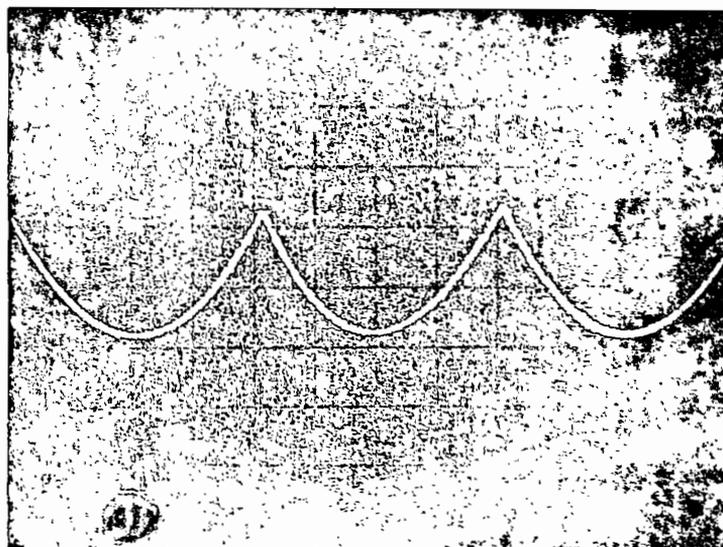


Fig. 4.4 Señal de salida del cuadrador. Escala
vertical 1 vol/cm. Escala hori-
zontal 1 msec/cm.

4.2 EL MULTIPLICADOR

Para probar el funcionamiento de este aparato se efectuó la multiplicación de dos señales cosenoidales de diferente frecuencia

$$x = A \cos w_1 t = 2 \cos 2.1 t \quad (4.2)$$

$$y = A \cos w_2 t = 2 \cos 21 t \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} x \cdot y &= A^2 \cos w_1 t \cos w_2 t & (4.4) \\ &= 4 \cos 2.1 t \cos 21 t \end{aligned}$$

El producto de las dos funciones corresponde a una señal modulada; efectivamente este fenómeno se observa en la Fig. 3.5, que es la señal respuesta del multiplicador.

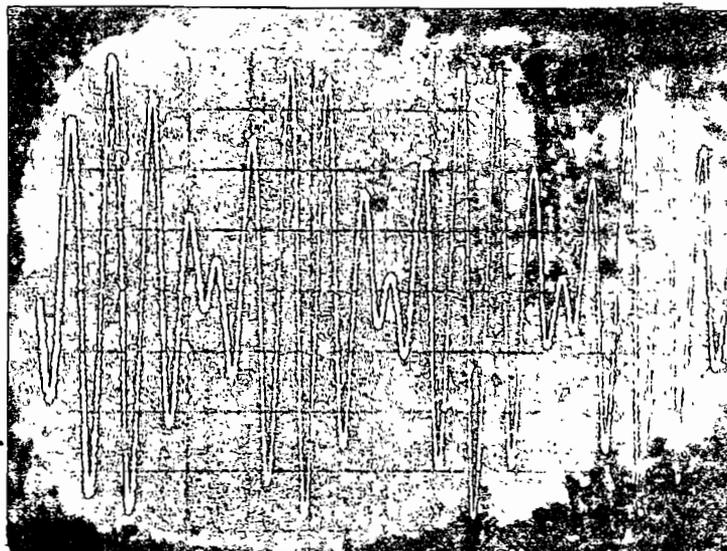


Fig. 4.5 Resultado de la multiplicación analógica. Escala vertical 1 vol/cm.
Escala horizontal 0.5 seg/cm.

4.3 EL CORRELACIONADOR

Para la prueba experimental, se realizó la autocorrelación de una señal cosenoidal Fig. 4.6, para valores discretos de ζ , la respuesta del correlacionador para estos valores se tomó del osciloscopio, con los cuales se graficó la función Fig. 4.7

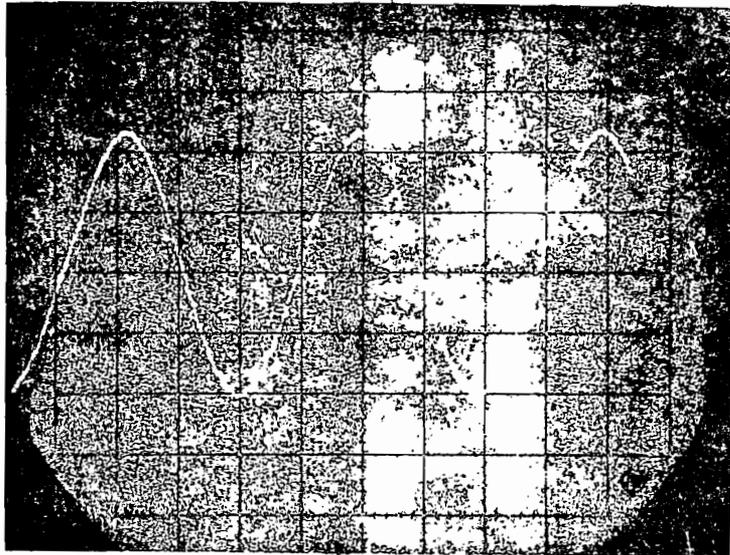


Fig. 4.6 Señal de entrada. Escala vertical
0.5 vol/cm. Escala horizontal
1 mseg/cm.

La autocorrelación efectuada experimentalmente concuerda con el ejemplo calculado en el Capítulo II de la función de autocorrelación

de una señal cosenoidal, en lo que se refiere a la frecuencia fundamental, amplitud y periodicidad, aunque la señal experimental no se encuentra defasada como en el ejemplo; esto no influye en la correlación, porque es independiente del defasamiento.



Fig. 4.7 Función de autocorrelación. Escala vertical 0.5 vol/cm. Escala horizontal 1 mseg/cm.

CAPITULO V

APLICACIONES

5.1. DETECCION DE UNA SEÑAL PERIODICA EN PRESCENCIA DE RUIDO

Dos señales $f_1(t)$ y $f_2(t)$ son no correlacionadas si

$$\begin{aligned} R_{12}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_1(t) f_2(t - \tau) dt = \\ &= \bar{f}_1 \bar{f}_2 \end{aligned} \quad (5.1)$$

donde \bar{f}_1 y \bar{f}_2 representan valores promedios (componentes DC).

Cuando $f_1(t)$ ó $f_2(t)$ tienen un valor promedio igual a cero, la función de correlación es igual a cero.

Si $s(t)$ es una señal periódica y $n(t)$ representa una señal de ruido

$$R_{sn}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) n(t - \tau) dt \quad (5.2)$$

$$R_{sn}(\tau) = 0 = R_{ns}(\tau) \quad (5.3)$$

Ahora se considerará una señal periódica mezclada con ruido [10]. La señal será $[s(t) - n(t)]$. Se denotará por $R_{ff}(\tau)$, $R_{ss}(\tau)$ y $R_{nn}(\tau)$ la función de autocorrelación de $f(t)$, $s(t)$ y $n(t)$ respectivamente.

$$R_{ff}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) f(t - \tau) dt \quad (5.4)$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [S(t) + n(t)] [S(t - \tau) + n(t - \tau)] dt \quad (5.5)$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left[\int_{-T/2}^{T/2} S(t)S(t - \tau) dt + \int_{-T/2}^{T/2} S(t)n(t - \tau) dt + \int_{-T/2}^{T/2} n(t)S(t - \tau) dt + \int_{-T/2}^{T/2} n(t)n(t - \tau) dt \right] \quad (5.6)$$

$$= R_{ss}(\tau) + R_{sn}(\tau) + R_{ns}(\tau) + R_{nn}(\tau) \quad (5.7)$$

Sustituyendo la ecuación (5.3) en la ecuación (5.4) se tiene

$$R_{ff}(\tau) = R_{ss}(\tau) + R_{nn}(\tau) \quad (5.8)$$

Pero como se demostró en el Capítulo II que la señal de autocorrelación de una señal periódica es también una señal periódica con la misma frecuencia y la función de autocorrelación de señales no periódicas para valores grandes de τ , tiende a cero.

Por consiguiente, para valores suficientemente grandes de ζ la función de autocorrelación $R_{ff}(\zeta)$ es esencialmente igual a $R_{ss}(\zeta)$, con lo que se ha logrado separar la señal del ruido. Esto se muestra en la Fig. 5.1

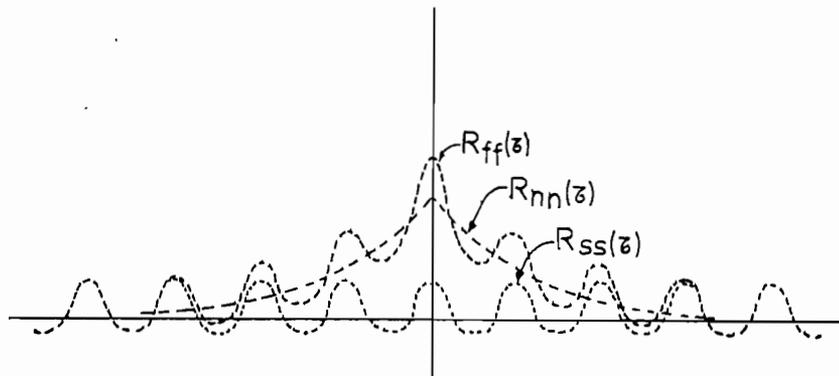


Fig. 5.1 Detección de señales con ruido

En la práctica, es imposible calcular la función de autocorrelación sobre un intervalo infinito, la integral (5.4) es evaluada sobre un intervalo grande pero finito.

En este proceso de integración sobre un intervalo finito se comete un cierto grado de error.

5.2 DETERMINACION DEL VALOR ESPERADO DE SEGUNDO ORDEN

Existen eventos físicos, tales como el rui-

do atmosférico, el lanzamiento de un proyectil, el crecimiento demográfico, los cuales son difíciles de predecir, por ser demasiados complejos o por el poco conocimiento que se tiene de su mecánica, a estos procesos se les denomina aleatorios.

Sin embargo, estos eventos tienen alguna clase de regularidad, o por una distribución de probabilidad.

Ciertos procesos aleatorios, llamados ergódicos [11] que se caracterizan porque cualquier función muestra tiene idéntica información estadística por lo que la función de autocorrelación es un valor esperado de segundo orden, lo que permite determinar la probabilidad de segundo orden conociendo la autocorrelación de una muestra del proceso.

REFERENCIAS

1. B.P. LATHI: Signals, Systems and Communication. John Wiley & Sons, Inc. 1965, pp. 515-518
2. Ibid Ref. 1 pp 519
3. Y.W. LEE: Statistical Theory of Communication John Wiley & Sonc, Inc. 1963, pp. 11-16
4. Ibid Ref. 2 pp. 17-23
5. Ibid Ref. 1 pp. 14
6. Ibid Ref. 2 pp. 33-37
7. Ibid Ref. 2 pp. 37-45
8. LEONCE J. SEVIN , Jr. Field-Effect Transistors. Texas Instruments Electronics Series. 1965 , pp. 80-83
9. JACOB MILLMAN AND CHRISTOS C. HALKIAS: Electronic Devices and Circuits. McGraw-Hill Book Company. 1967, pp. 408-411
10. Ibid Ref. 1 pp. 526-528
11. B.P. LATHI: Random Signals and Communication Theory. International Textbook Company. 1968, pp. 175-179

BIBLIOGRAFIA

SIGNALS , SYSTEMS AND COMMUNICATION

B.P. LATHI

JOHN WILEY & SONS , INC. 1965

STATISTICAL THEORY OF COMMUNICATION

Y.W.LEE

JOHN WILEY & SONS , INC. 1963

ANALOG COMPUTER TECHNIQUES

CLARENCE L. JOHNSON

McGRAW-HILL BOOK COMPANY , INC. 1963

ANALOG COMPUTATION IN ENGINEERING DESIGN

A.E. ROGERS AND T.W. CONNOLLY

McGRAW-HILL BOOK COMPANY , INC 1960

ANALOGUE COMPUTATION VOLUME IV

STANLEY FIFER

McGRAW-HILL BOOK COMPANY. INC 1961

PROCEEDINGS OF THE IEEE Vol 55, No.7,pp.1206

JULY 1967

FIELD-EFFECT TRANSISTORS

LEONCE J. SEVIN , Jr.

TEXAS INSTRUMENTS 1965

ELECTRONIC DEVICES AND CIRCUITS

JACOB MILLMAN AND CHRISTOS C. HALKIAS

McGRAW-HILL BOOK COMPANY , INC. 1967

RANDOM SIGNALS AND COMMUNICATION THEORY

B.P. LATHI

INTERNATIONAL TEXTBOOK COMPANY 1968