

**Escuela Politécnica Nacional  
Ingeniería en Electrónica y Telecomunicaciones  
Ingeniería en Electrónica y Redes de Información**



# **Ingeniería de Tráfico de Telecomunicaciones**

**PROF.ING. HUGO CARRIÓN ROBALINO**

2012

Derechos de Propiedad Intelectual.- Carrión CONSULTOR  
se adhiere a los derechos de propiedad intelectual de acuerdo a la  
World Intellectual Property Organization (WIPO).

Copyright 2001© by Carrión CONSULTOR Todos los derechos reservados  
Cualquier reproducción total o parcial debe contar con su autorización expresa.

## CONTENIDO

---

<b>INFORMACIÓN GENERAL .....</b>	<b>4</b>
ANTECEDENTES .....	4
OBJETIVOS .....	4
PROFESOR .....	4
<b>INTRODUCCION.....</b>	<b>6</b>
<b>REDES DE TELECOMUNICACIONES .....</b>	<b>7</b>
REDES CONMUTADAS .....	7
<b>1. FUNDAMENTOS DE LA INGENIERIA DE TRAFICO TELEFONICO.....</b>	<b>8</b>
1.1 CONCEPTOS FUNDAMENTALES .....	8
1.2 TRÁFICO OFRECIDO, CURSADO Y PERDIDO .....	9
1.3 TRÁFICO TELEFÓNICO.....	11
1.4 CRITERIOS BÁSICOS DE TRÁFICO.....	14
1.5 FORMA EN QUE SE CURSA EL TRÁFICO .....	14
1.6 PROPIEDADES DE LA RED DE CONMUTACIÓN .....	15
1.7 PROPIEDADES ESTADÍSTICAS DEL TRÁFICO OFRECIDO .....	16
1.8 MODELOS DE TRÁFICO TELEFÓNICO .....	19
1.9 CALIDAD DE TRÁFICO .....	20
1.10 UNIDADES DE INTENSIDAD DE TRÁFICO.....	20
<b>2. FUNCIONES.....</b>	<b>22</b>
2.1 FUNCIONES DE FRECUENCIA .....	22
2.2 FUNCIONES DISCRETAS .....	22
2.3 FUNCIONES CONTINUAS .....	23
2.4 FUNCIONES DE DISTRIBUCIÓN.....	23
2.5 VALOR MEDIO O EXPECTACIÓN MATEMÁTICA .....	24
2.6 DESVIACIÓN ESTÁNDAR Y VARIANZA.....	27
<b>3. DISTRIBUCIONES TRAFICO TELEFONICO.....</b>	<b>29</b>
3.1 LEY DE APARICIÓN DE LLAMADAS DE POISSON .....	29
3.2 PROCESO DE DURACIÓN DE LA LLAMADA.....	35
3.3 PROBABILIDAD DE PÉRDIDA - DISTRIBUCIÓN ERLANG B .....	38
3.4 EFICIENCIA DE TRÁFICO.....	42
3.5 CONGESTIÓN DE TIEMPO Y CONGESTIÓN DE LLAMADAS.....	43
3.6 RELACIÓN ENTRE LA DISTRIBUCIÓN ERLANG Y POISSON.....	46
3.7 DEMANDA DE TRÁFICO .....	55
3.8 SISTEMAS DE ACCESIBILIDAD RESTRINGIDA (LIMITADA).....	56
3.9 MODELOS DE ENGSET Y BERNOULLI .....	59
<b>4. SISTEMAS DE ESPERA.....</b>	<b>64</b>
4.1 SISTEMAS DE ESPERA.....	64

<b>5.SISTEMA DE DESBORDE Y ENRUTAMIENTO .....</b>	<b>73</b>
5.1 DESBORDAMIENTO, MÉTODO DEL VALOR DE DISPERSIÓN .....	73
5.2 MÉTODOS DE CALCULO PARA REDES CON ENCAMINAMIENTO ALTERNATIVO:, .....	77
5.3. MÉTODO R.I. WILKINSON O EL MÉTODO DE LA “TEORÍA AZAR EQUIVALENTE ” .....	81
5.4 MÉTODO DE APROXIMACIÓN DEL DR. Y. RAPP .....	82
5.5 DIMENSIONAMIENTO Y OPTIMIZACIÓN DE REDES TELEFÓNICAS CON CONMUTACIÓN DE CIRCUITOS .....	99
5.6 INSTRUCCIONES PARA UTILIZAR LA BIBLIOTECA DE FUNCIONES DE ERLANG “TSS TELETRAF.XLL” .....	106
5.8 CÁLCULO DE R Y V PARA LAS FORMULAS DE WILKINSON. ....	113
5.9 CÁLCULO DE LAS APROXIMACIONES DE RAPP. ....	113
5.10 CÁLCULOS PARA EL MÉTODO DE HAYWARD-FREDERICKS .....	114
DEFINICION DE VARIABLES.....	114
<b>AGNER KRARUP ERLANG (1878 - 1929).....</b>	<b>116</b>

## *Información General*

### **Antecedentes**

El concepto de tráfico en redes de Telecomunicaciones, es de vital importancia al momento de planificar redes, diseñar soluciones y dimensionar equipo. El cálculo del uso de un sistema de Telecomunicaciones, no solamente tiene implicaciones técnicas, sino que tiene también consecuencias en el ámbito económico.

En este curso de Ingeniería de Tráfico, se describe las características del tráfico telefónico, así como también las herramientas que se emplean para caracterizarlo. Una serie de modelos matemáticos, tratan de explicar el comportamiento del uso de los servicios de Telecomunicaciones. Estos modelos estadísticos, se han visto complementados con poderosas herramientas computacionales que ayudan a obtener resultados de una forma más rápida y fiable.

El desarrollo de nuevas tecnologías ha obligado el desarrollo de modelos de tráfico que tratan de predecir el comportamiento bajo nuevas consideraciones. La interpretación de estos modelos, permitirá hacer frente a los nuevos retos que nos presentan las Telecomunicaciones del mañana.

### **Objetivos**

- Conocer los fundamentos del tráfico de telecomunicaciones
- Comprender los modelos matemáticos que explican el tráfico de telecomunicaciones
- Emplear herramientas computacionales relacionadas con la ingeniería de tráfico de telecomunicaciones
- Conocer nuevos modelos de tráfico para el dimensionamiento y planificación de nuevos servicios de Telecomunicaciones.

### **Profesor**

#### **Hugo W. Carrión Robalino**



Ingeniero en Electrónica y Telecomunicaciones graduado en la Escuela Politécnica Nacional. Posee estudios de postgrado, con un título de Ingeniero Industrial y una especialización en Técnicas de Administración de Telecomunicaciones en Alemania. Ha participado a numerosos congresos y seminarios dentro y fuera del país.

Ha participado como conferencista en importantes eventos nacionales e internacionales, sobre regulación y administración de las Telecomunicaciones.

Fue Director Técnico Nacional del IETEL, Asesor Técnico del CONARTEL (Consejo Nacional de Radiodifusión y Televisión), Asesor del CONATEL (Consejo Nacional de Telecomunicaciones, Presidente del CIEEPI (Colegio de

Ingenieros Eléctricos y Electrónicos de Pichincha). Presidente del CIEEE (Colegio de Ingenieros Eléctricos y Electrónicos del Ecuador). Ostenta el grado de Senior Member en el IEEE y es miembro de The New York Academy of Sciences.

Como Consultor de Telecomunicaciones desde 1983 hasta el presente ha participado en los principales proyectos de consultoría en el Ecuador en el ámbito de las Telecomunicaciones.

Es Profesor de la Carreras de Ingeniería Electrónica y Telecomunicaciones y Redes de Información de la Escuela Politécnica Nacional, desde 1974 hasta la presente fecha. Actualmente es profesor del programa de Maestría de Conectividad y Redes de Telecomunicaciones, en dicho centro universitario.

## **“Ingeniería de Tráfico de Telecomunicaciones”**

En Julio del 2001 la Escuela Politécnica Nacional le confiere el Título de PROFESOR de la Escuela Politécnica Nacional.

Ha dictado varios seminarios y conferencias de Telecomunicaciones, Tecnologías de la Información y Regulación. Ha participado en foros nacionales e internacionales y ha publicado varios artículos técnicos.

## ***INTRODUCCION***

El conocimiento del tráfico de telecomunicaciones y su comportamiento es de vital importancia para las administraciones ya que es el tráfico el principal producto de venta al usuario y por ende la fuente principal de ingresos. **El tráfico es, en esencia, tiempo de ocupación que de los equipos de telecomunicaciones realiza el usuario para lograr comunicarse.** El conocimiento que la administración de telecomunicaciones tenga sobre las teorías de tráfico en general y del comportamiento del producido por sus usuarios en particular se traduce en mejores y más baratos diseños de equipos y sistemas, mejor servicio al abonado y la recolección en dinero del resultado de cursar todo o un alto porcentaje del tráfico que se ofrece al sistema. La inversión muerta debido a equipos sobrantes así como, en el caso contrario, de grandes cantidades de llamadas perdidas debido a subdiseños consecuencia a su vez de insuficientes conocimientos de tráfico, ocasionan a la Empresa de Telecomunicaciones una operación ineficiente de los servicios de telecomunicaciones, originando conflictos económicos y el natural deterioro de la imagen administrativa.

El tráfico no lo produce la administración de telecomunicaciones; es atributo del usuario. La Empresa debe proveer los caminos rápidos y económicos para que este tráfico tenga feliz éxito, logrando llamadas efectivas que a su vez se tasan para beneficio de la Empresa. El tráfico que por deficiencias de diseño no se logre cursar produce mal servicio y la utilización inadecuada e inútil de material de telecomunicaciones.

Debido a la complejidad de los modelos matemáticos utilizados en las telecomunicaciones así como a la profundidad con que se suelen tratar las teorías pertinentes, los estudios de tráfico de telecomunicaciones han sido vistos con cierto descuido por las administraciones a pesar de tener conciencia de su importancia.

No es de extrañar entonces el bajo y hasta preocupante porcentaje de ingenieros y técnicos de empresas de telecomunicaciones que cuentan con ideas claras sobre eso que llaman tráfico y que para que se curse debe proveerse toda la maquinaria de Telecomunicaciones. Los expertos en transmisión, por ejemplo, se dedican por entero a las tareas puramente técnicas de la transmisión, sin cuestionar jamás la capacidad del enlace en cuestión. Los números de tráfico son implementados por expertos en las ramas técnicas especializadas sin que en muchos casos se tengan los conocimientos más elementales acerca de las leyes que rigen el comportamiento de tráfico.

La necesidad que de conocimientos generales y básicos sobre tráfico de telecomunicaciones debe de tener los estudiantes de ingeniería y el personal de Telecomunicaciones motiva este documento.

Se utilizan los modelos matemáticos para la resolución de los casos estocásticos más usuales y se da una idea clara, práctica y real de la naturaleza y comportamiento del tráfico de telecomunicaciones.

Las instalaciones telefónicas se planifican de tal forma que, incluso en los períodos de tráfico telefónico más intenso, o sea, en las llamadas horas cargadas, puedan establecerse con gran probabilidad las comunicaciones que deseen los abonados. La cantidad de líneas y equipos de conmutación que deban preverse para atender al tráfico telefónico, se establecerá, por lo tanto, normalmente de forma tal, que durante las horas cargadas sólo un porcentaje pequeño - por lo general, previamente determinado - de las comunicaciones deseadas no pueda ser establecido o no lo pueda ser en el acto, o sea, que se pierde o que debe esperar, por falta de equipos de conmutación.

La solución teórica de tales problemas de cálculos cae dentro del sector de la Ingeniería de tráfico telefónico, como autor de la cual se considera a *A. K. Erlang, el padre de la Teoría de Tráfico Telefónico* Para las tareas prácticas de planeamiento y dimensionado en la planificación y desarrollo de instalaciones telefónicas se necesitan, sin embargo, datos que permitan ver inmediatamente las cantidades de equipos de conmutación y líneas que hay que prever.

## ***Redes de Telecomunicaciones***

Dependiendo de su arquitectura y de los procedimientos empleados para transferir la información las redes de Telecomunicación se clasifican en:

- Redes conmutadas
- Redes de difusión

### **Redes conmutadas**

Consisten en un conjunto de nodos interconectados entre sí, a través de medios de transmisión (cables), formando la mayoría de las veces una topología mallada, donde la información se transfiere encaminándola del nodo de origen al nodo destino mediante conmutación entre nodos intermedios. Una transmisión de este tipo tiene 3 fases:

- Establecimiento de la conexión.
- Transferencia de la información.
- Liberación de la conexión.

Se entiende por conmutación en un nodo, a la conexión física o lógica, de un camino de entrada al nodo con un camino de salida del nodo, con el fin de transferir la información que llegue por el primer camino al segundo. Un ejemplo de redes conmutadas son las redes de área extensa.

Las redes conmutadas se dividen en:

- Conmutación de circuitos.
- Conmutación de paquetes.

### **Conmutación de Circuitos**

Es el procedimiento por el que dos nodos se conectan, permitiendo la utilización de forma exclusiva del circuito físico durante la transmisión. En cada nodo intermedio de la red se cierra un circuito físico entre un cable de entrada y una salida de la red. La red telefónica es un ejemplo de conmutación de circuitos.

### **Conmutación de Paquetes**

Se trata del procedimiento mediante el cual, cuando un nodo quiere enviar información a otro, la divide en paquetes.

- Cada paquete es enviado por el medio con información de cabecera.
- En cada nodo intermedio por el que pasa el paquete se detiene el tiempo necesario para procesarlo.
  - Los paquetes se numeran para poder saber si se ha perdido alguno en el camino.
  - Puede utilizar parte del camino establecido más de una comunicación de forma simultánea.

# 1. FUNDAMENTOS DE LA INGENIERIA DE TRAFICO TELEFONICO

## 1.1 Conceptos Fundamentales

A través de una *red de conmutación* (ver la Fig.1.1) se establecen enlaces entre las *líneas de entrada* y *líneas de salida*. Las líneas de entrada y de salida pueden ser líneas de abonado, líneas de enlace o equipos de conmutación, así como los equipos centralizados necesarios eventualmente para el establecimiento de las comunicaciones.

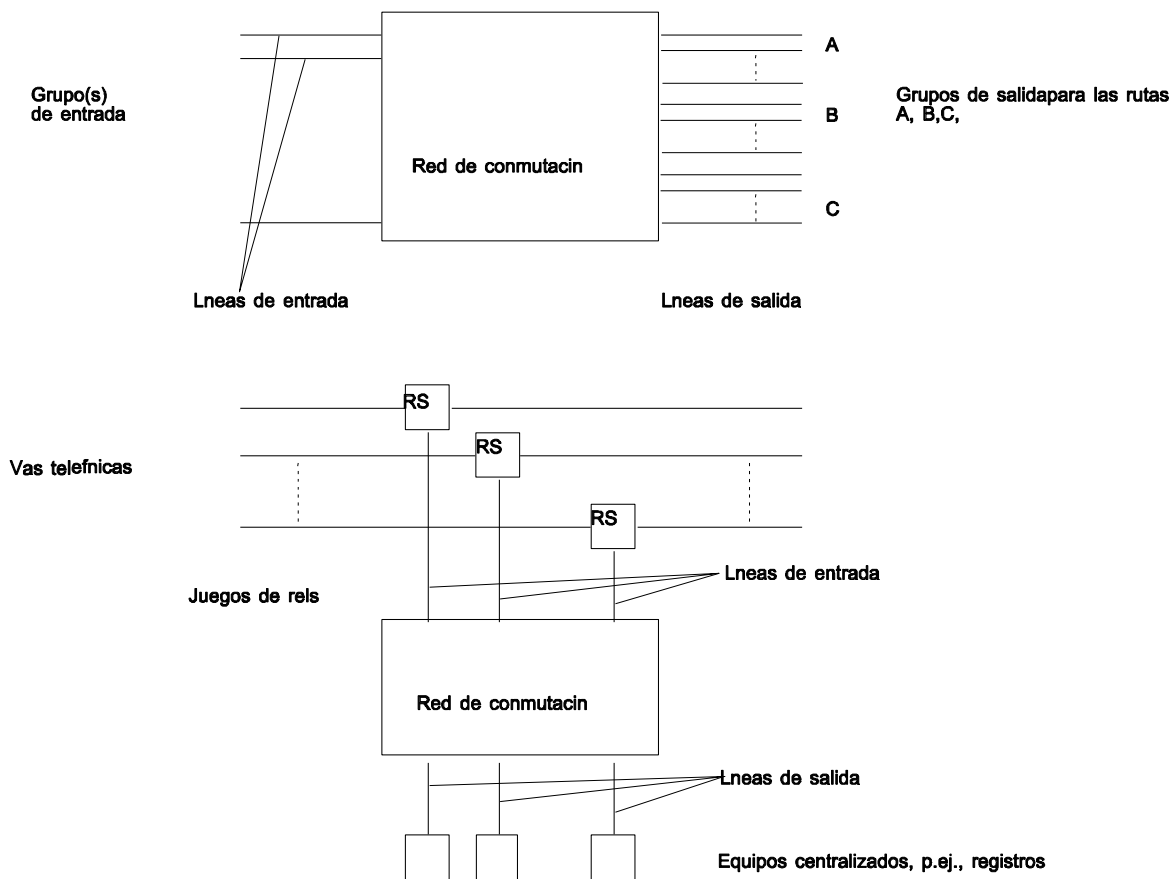


Fig. 1.1: Red de conmutación

El *grupo de entrada*, lo forman las líneas de entrada que *conducen* la demanda de comunicaciones (el tráfico telefónico) a la red de conmutación.

El *grupo de salida*, lo forman las líneas de salida que para una determinada tarea de conmutación (ruta) reciben y *retransmiten* (cursan) conjuntamente la demanda de comunicaciones (el tráfico telefónico).

Una línea de salida está ocupada cuando existe a través de la red de conmutación un enlace entre una línea de entrada y dicha línea de salida.



El tráfico cursado por el grupo de salida se compone, por consiguiente, de las diferentes *ocupaciones* de las líneas de salida, considerándose como ocupación cualquier utilización de un equipo de conmutación o de una línea, independientemente de la causa de la misma y sin importar si realmente se establece una comunicación entre dos abonados telefónicos.

Se llama *tiempo de ocupación*, al lapso durante el cual una línea de salida está ocupada sin interrupción,

El *tiempo medio de ocupación*, es el tiempo durante el cual se emplean por término medio las líneas de salida para una ocupación,

La *intensidad de tráfico* es una magnitud sin dimensión, que se representa siempre en la unidad *Erlang* (abreviada Erl), indicando este valor la cantidad de ocupaciones que en promedio existen simultáneamente. Una sola línea ocupada constantemente equivale, por lo tanto, a un tráfico con la intensidad 1 Erl. Además de la unidad Erlang se utilizan algunas otras.

El concepto de intensidad de tráfico se puede comparar con el de intensidad eléctrica que mide la cantidad de corriente eléctrica, la unidad es el amperio y equivale al paso de un culombio por segundo por una determinada superficie.

El concepto de densidad eléctrica, que es el valor de la intensidad eléctrica que atraviesa la unidad de superficie y que se la designa con la letra J y que se mide en  $A/m^2$ ; se ha trasladado a la teoría de tráfico telefónico como densidad de tráfico y que muchas veces se la confunde con la intensidad de tráfico. Esta densidad de tráfico es igual a la intensidad de tráfico multiplicada por el período de observación.

En relación con el tratamiento del tráfico por un grupo de salida es usual emplear los términos ocupación e intensidad de tráfico en un sentido más amplio. Una *ocupación realizada* es la utilización efectiva de una línea de salida.

**Ocupación ofrecida**, es la solicitud de establecer una comunicación que requiere la ocupación de una línea de salida

**Ocupación perdida** u *ocupación de desbordamiento*, es la demanda de comunicación rechazada (que se pierde o que desborda hacia otro grupo de salida).

La demanda de comunicación no realizada inmediatamente, una *ocupación en espera* u *ocupación demorada*.

## 1.2 Tráfico Ofrecido, Cursado y Perdido

**Carga** es la intensidad del tráfico cursado, y **oferta**, a la intensidad del tráfico ofrecido. La diferencia entre la oferta y la carga es la *intensidad del tráfico rechazado*.

Se designa por *tráfico de desbordamiento* al tráfico rechazado cuando se haya previsto la posibilidad de enviar las ocupaciones rechazadas a otro grupo de líneas (grupo de desbordamiento); si no existe esta posibilidad, se llama *tráfico perdido* al tráfico rechazado.

En el modelo de la teoría del tráfico, de que partimos, se asigna como tiempo medio de ocupación a todas las ocupaciones ofrecidas, o sea, también a las ocupaciones perdidas, el tiempo medio que duren las ocupaciones atendidas por el grupo de salida.

Los conceptos de tráficos ofrecido, cursado y perdido son básicos para el entendimiento de las teorías de tráfico telefónico.

Tráfico ofrecido a un sistema es el que quiere ser cursado por el mismo, y el efecto se cursaría si la probabilidad de pérdida fuese nula.

Es este tráfico ofrecido el que se introduce al usar la fórmula de Erlang para los cálculos.

$$A = c_A t_m \quad \text{Oferta} \quad (1-1)$$

$c_A$       Número de ocupaciones ofrecidas por término medio en la unidad de tiempo al grupo de salida

$t_m$       Tiempo medio de ocupación de las líneas de salida

$$y = c_y t_m \quad \text{Carga.} \quad (1-2)$$

$c_y$       Número de ocupaciones atendidas por el grupo de salida por término medio en la unidad de tiempo

$$R = c_R t_m \quad \text{Intensidad del tráfico rechazado, tráfico perdido, tráfico de desbordamiento} \quad (1-3)$$

$c_R$       Número de ocupaciones rechazadas por término medio en la unidad de tiempo

$$B = c_R / c_A \quad \text{Pérdida; probabilidad de pérdida; desbordamiento; probabilidad de desbordamiento. Grado de servicio} \quad (1-4)$$

$\bar{t}_w = t_w P (>0)$       Tiempo medio de espera de las ocupaciones ofrecidas

$P (>0)$       Probabilidad de espera

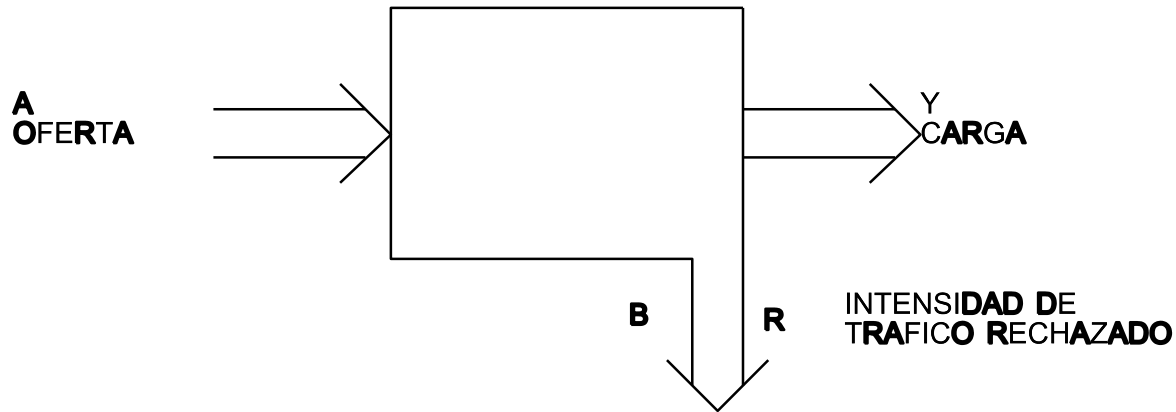
$t_w$       Espera media de las ocupaciones demoradas

$$c_A = c_y + c_R \quad A = y + R \quad (1-5)$$

$$c_y = c_A (1 - B) \quad y = A (1 - B)$$

$$c_R = c_A B \quad R = AB \quad B = A - y / A$$

Debido a la probabilidad de pérdida no todo el tráfico ofrecido se puede cursar, sino que existe un tráfico perdido que es el producto del tráfico ofrecido por la pérdida. En la Figura 1.2 se puede identificar los diferentes conceptos de tráfico:



**Fig. 1.2: Conceptos de tráfico**

Estos conceptos son importantes a la hora de interpretar mediciones de tráfico, pues el único tráfico con que se cuenta es el medido o cursado por el sistema, mientras que las tablas y fórmulas están confeccionadas para el tráfico ofrecido. Se debe recurrir a un método de iteraciones para calcular el verdadero tráfico ofrecido al sistema y su pérdida. En sistemas con pérdidas inferiores a un 4% el tráfico cursado y el ofrecido pueden considerarse iguales para toda interpretación práctica, pero para valores superiores de pérdida, los cálculos deben ser hechos.

Las intensidades de tráfico  $A$ ,  $y$  y  $R$  se obtiene en unidades Erlang (Erl), si se refieren los números de ocupaciones  $c_A$ ,  $c_y$  y  $c_R$  a la misma unidad de tiempo en que se indique  $t_m$ .

### **Ejemplo 1:**

Datos:  $t_m = 100$  s,  
 $c_A = 180$  ocupaciones por hora.

Si, p.ej., el número de ocupaciones ofrecidas se refiere a la unidad s, se tiene:

$$c_A = (180 / 3600) \text{ ocupaciones por segundo}$$

$$c_A = (1 / 20) \text{ ocupaciones por segundo}$$

y por tanto:

$$A = c_A t_m = (1 / 20) \cdot 100 = 5 \text{ Erl.}$$

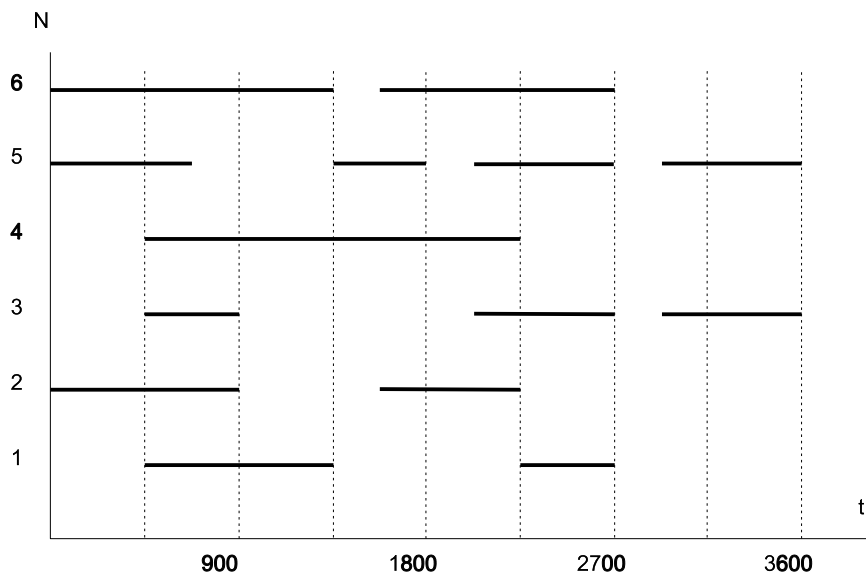
## **1.3 Tráfico Telefónico**

Se define como intensidad de tráfico telefónico al flujo de ocupaciones simultáneas en un grupo de órganos durante un período de tiempo dado.

La intensidad instantánea de tráfico en un grupo de órganos es el número de ellos ocupados en un instante.

La unidad de tráfico es el Erlang que significa la cantidad de horas de ocupación por hora en un grupo de órganos. Si se refiere a un solo órgano el tráfico máximo que se puede obtener es un Erlang, en el caso de que el órgano se encuentre ocupado toda la hora. Esta unidad es muy conveniente pues equivale al porcentaje de ocupación por órgano en un grupo. Si por ejemplo en una hora un grupo de 10 órganos cursa un tráfico de 6 Erlangs, cada órgano presenta una ocupación promedio de un 60% durante la hora medida.

En la Figura 1.3 se observa una ruta de 6 órganos a través de una hora con diversas ocupaciones de sus órganos.



**Fig. 1.3: Ruta de 6 órganos con diversas ocupaciones en una hora**

El primer órgano tiene dos ocupaciones, una de 900 segundos y otra de 450 segundos con un total de 1350 segundos en la hora, o sea 0.375 Erlangs.

Efectuado el mismo análisis para los 6 órganos se tiene la tabla siguiente:

Organo No.	Tiempo de ocupación durante la hora [segundos]	Intensidad de tráfico [Erl]
1	1.350	0.375
2	1.700	0.472
3	1.800	0.500
4	1.800	0.500
5	2.500	0.694
6	2.550	0.708
	-----	-----
	11.700	3.250

TOTAL:

11.700 segundos de ocup./hora.

11.700/3600 horas de ocup./hora  
 O sea, 3.25 Erlangs en los 6 órganos  
 Intensidad media de tráfico de un órgano  $3.25/6 = 0.541$  Erl

La división por 3.600 es para obtener horas de ocupación/hora.

Este tráfico da una idea de la ocupación del grupo durante el período de una hora de observación. Si se quiere obtener el tráfico instantáneo en cualquier punto, basta contar las ocupaciones en ese punto. Por ejemplo en el instante del segundo No. 1000 se obtienen únicamente 3 ocupaciones (órganos 1, 4 y 6) para un tráfico instantáneo en el instante del segundo No. 500 se tienen un tráfico instantáneo de 6 (todos ocupados).

Este tráfico instantáneo por intervalo infinitesimal se puede integrar para todo el período de una hora para lograr así el tráfico total.

$$A = \frac{I}{T} \int_0^T n(t) dt \quad (1-6)$$

Donde:

A = Tráfico Total

n(t) = Número de ocupaciones en el tiempo t

T = período de observación

Otra forma de calcular el tráfico de un grupo de órganos es sumando los tiempos de todas las ocupaciones habidas en el grupo.

$$A = \frac{I}{T} \sum_{i=1}^n t_i \quad (1-7)$$

Donde:

t<sub>i</sub> = Tiempo de duración de la ocupación i

n = número total de ocupaciones en el grupo.

En este caso la sumatoria incluiría 14 ocupaciones como total para el grupo.

Como es lógico, si se obtiene el tiempo promedio de las ocupaciones, la fórmula para encontrar el tráfico se reduce a:

$$A = \frac{I}{T} (n \cdot t_m) \quad (1-8)$$

$$A = \frac{I}{T} X \quad ; \quad X = n \cdot t_m \text{ (ocupaciones-seg)}$$

Donde:

t<sub>m</sub> = tiempo promedio de ocupación

X = densidad de tráfico

### Ejemplo 2.

En un grupo de 25 líneas se cursaron 150 llamadas en media hora, con un promedio de duración de 3 minutos. Calcular el tráfico total y por línea.

Solución:

$$t_m = 3 \text{ minutos} = 180 \text{ segundos}$$

$$T = 1/2 \text{ hora} = 1800 \text{ segundos}$$

$$n = 150$$

$$A_t = 1 (n \times t_m) / T = 1 (150 \times 180) / 1800 = 15 \text{ Erlangs}$$

$$A/\text{línea} = 15/25 = 0.6 \text{ Erlangs}$$

## 1.4 Criterios básicos de tráfico

En la práctica del dimensionado de un grupo de salida se deben observar esencialmente los siguientes criterios:

- a) La forma en que se atiende al tráfico, es decir, si los equipos de conmutación trabajan, p. ej., como sistema de pérdida o como sistema de espera.
- b) Las características de la red de conmutación, es decir, la accesibilidad y la clase de la mezcla.
- c) La clase del tráfico, es decir, las propiedades estadísticas del mismo.
- d) La calidad de tráfico requerida, o sea, el volumen de la pérdida o indicaciones sobre datos de espera.

## 1.5 Forma en que se cursa el tráfico

Según la forma en que se trate la demanda de comunicaciones en un sistema de conmutación al presentarse bloqueos, se distingue entre redes de conmutación que trabajan como sistemas de espera.

Por **bloqueo** se entiende el estado en que es imposible el establecimiento de una nueva comunicación bien por estar ocupadas todas las líneas del grupo de salida o bien porque en la red de conmutación no se puede establecer ninguna vía a una línea libre del correspondiente grupo de salida.

En un **sistema de pérdidas** se rechaza una ocupación ofrecida si la comunicación deseada no se puede establecer inmediatamente, debido a un *bloqueo*, recibiendo el abonado que llama la señal de ocupado.

En cambio, en un **sistema de espera** puede mantenerse (esperar) una ocupación ofrecida que no pueda ser atendida inmediatamente debido a un bloqueo, hasta que se pueda establecer el enlace. Para las esperas que se presentan en estos casos es importante el orden en que se atiendan a las ocupaciones en espera, p. ej., en el orden de su llegada o en orden casual.

Asimismo, hay sistemas mixtos en su forma de atender a las comunicaciones, donde, p. ej., sólo es posible un tiempo de espera restringido o una cantidad restringida de ocupaciones que puedan esperar al mismo tiempo.

En los ***sistemas de pérdidas puros*** desaparecen del sistema sin efecto posterior las ocupaciones ofrecidas para las cuales no se puede establecer ninguna comunicación, y no ejercen ninguna carga sobre el grupo de salida.

En un ***sistema de espera puro*** se atiende a todas las ocupaciones ofrecidas, siempre que la intensidad del tráfico ofrecido (la oferta) sea menor que la cantidad de líneas de salida. Todas las ocupaciones que tengan que esperar esperan en todo caso hasta que puedan ser atendidas; tampoco se presentan pérdidas algunas debidas a la posibilidad restringida de espera.

## 1.6 Propiedades de la red de conmutación

### 1.6.1 Accesibilidad

El rendimiento de un grupo de salida queda determinado esencialmente por la cantidad de líneas de salida del grupo que pueda alcanzarse, o sea, comprobarse en cuanto a su estado de ocupación (libres u ocupadas), desde una línea de entrada a través de la red de conmutación contemplada. Esta cantidad se llama accesibilidad.

Si la accesibilidad es igual en todo momento, o sea, independiente también del estado de ocupación de la red de conmutación, se habla de ***accesibilidad constante***, y si no lo es, de ***accesibilidad variable***.

Cuando la accesibilidad es constante y cuando su valor numérico es igual al número de líneas de salida del grupo de líneas contemplado, se llama ***accesibilidad completa***;

Cuando su valor numérico es inferior a la cantidad de líneas de salida, se llama ***accesibilidad limitada***.

### 1.6.2 Mezcla o Graduaciones

En las redes de conmutación de accesibilidad limitada se concentran las líneas de entrada en subgrupos de entrada. Todas las líneas de un subgrupo de entrada alcanzan siempre las mismas líneas de salida. A fin de que la red de conmutación rinda el máximo posible, se asignan las líneas de salida del grupo a los subgrupos de entrada de forma tal, que puedan ayudarse entre sí ampliamente. El sistema de asignación empleado se designa como mezcla (o interconexión graduada).

Existen varios métodos para realizar las mezclas o graduaciones:

- Conexión múltiple simple
- Escalonamiento
- Transposición
- Deslizamiento

Para que sea factible realizar una mezcla con escalonamiento, transposición y deslizamiento, es necesario que la cantidad de salidas (= cantidad de grupos parciales  $G \times$  accesibilidad  $k$ ) sea más grande que la cantidad de receptores  $N$ . El cociente del "“numero de las líneas de salida de todos los grupos parciales de una mezcla" dividido por "el de líneas receptoras de dicha mezcla" se designa como relación de mezcla  $M$

$$M = \frac{G.k}{N} \tag{1-9}$$

(1-8)

Para esta relación de mezcla existe un límite inferior, que si se sobrepasa no se consigue realizar una mezcla correcta, es decir, que el rendimiento disminuye. Mediante cálculos y mediciones de tráfico se ha obtenido que la relación de mezcla mínima admitida es de aproximadamente 2 : 1. Por tanto, siempre la cantidad de salidas debe ser el doble de la de receptores.

## 1.7 Propiedades estadísticas del tráfico ofrecido

### 1.7.1 Hora Cargada u Hora Pico

Como los abonados, que son las \*fuentes de tráfico, inician generalmente sus pedidos de comunicación casualmente y sin depender unos de otros, sosteniendo conferencias de diferente duración, el número de líneas de salida ocupadas simultáneamente de un grupo de líneas fluctuará permanentemente. No obstante, puede observarse ciertas regularidades periódicas, debidas, p. ej., a las temporadas o las estaciones del año, así como también diferencias entre los distintos días de la semana. Sin embargo, las fluctuaciones más marcadas son las que se presentan en el curso de un día.

Debido a que el tráfico telefónico es producido por abonados que originan llamadas según sus necesidades y gustos, se producen grandes variaciones durante el transcurso de un día y en los diferentes días de la semana. La producción de tráfico por los abonados está íntimamente relacionada con los horarios de trabajo y la intensidad comercial e industrial del sector servido, por lo que se da al tráfico un carácter periódico cuando se consideran períodos largos.

En un día laboral se obtiene a través del día una curva de intensidad de tráfico como la mostrada en la Figura 1.3 a continuación:

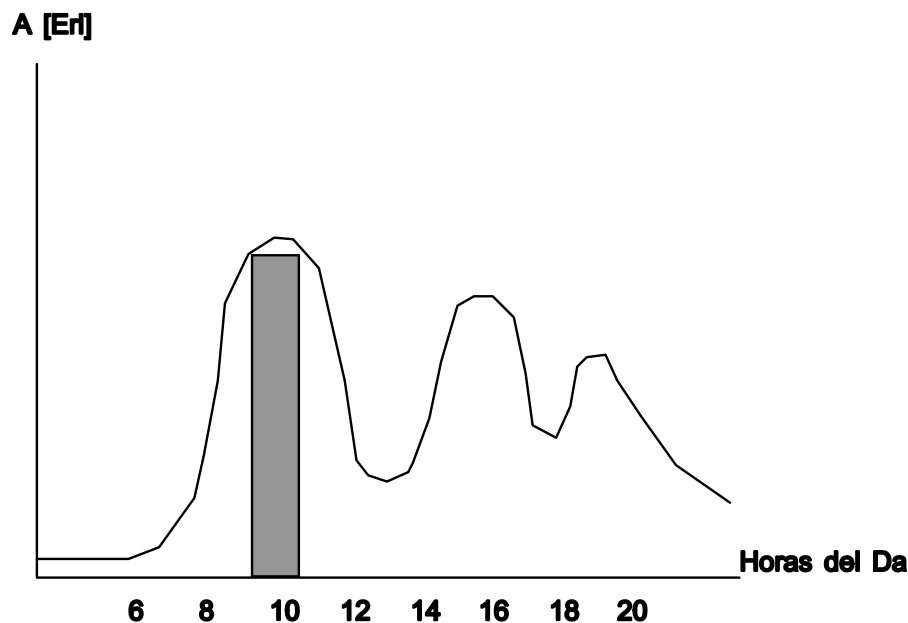


Fig. 1.4: Tráfico Telefónico diario



Se nota que cierto período del día el tráfico alcanza sus valores máximos. Este período que se escoge por conveniencia de una hora se llama "hora pico" o también "hora cargada".

Como las instalaciones se dimensionan siempre de manera que se pueda cursar el tráfico incluso en las horas de mayor aglomeración sin dificultad y a la satisfacción de los abonados, o sea, con la calidad de tráfico prescrita, para todas las tareas de planeamiento y dimensionado se toma como referencia el tráfico telefónico en la hora cargada de un día hábil normal de la temporada de mayor tráfico.

Por *hora cargada* se entienden según una definición del C.C.I.T.T (Comité Consultivo Internacional Telegráfico y Telefónico hoy UIT grupo T) aquellos 60 minutos del día en los que a través de varios días hábiles el promedio de la intensidad de tráfico alcanza su máximo. En la práctica se suele establecer la hora cargada en cuartos de hora completo y consecutivos.

### 1.7.2 Característica del tráfico de la hora pico

Se puede suponer que la intensidad del tráfico se mantiene aproximadamente constante durante las horas cargadas y que la cantidad de ocupaciones simultáneas oscila sólo estadísticamente alrededor de su promedio, que es la intensidad de tráfico. En las investigaciones según la teoría del tráfico, equivale esto a la condición de encontrarse el tráfico en la red de conmutación considerada el << estado del equilibrio estadístico >>.

Todos los estudios de tráfico, así como los dimensionamientos de los equipos se hacen para satisfacer las necesidades de esta hora pico ya que a cualquier otra hora del día se obtienen tráficos inferiores.

En términos generales, si el pico es en la mañana, se pueden definir otros picos secundarios que ocurren en la tarde y en la noche, pero se ha de entender como hora pico, para propósitos de cálculos de tráfico, a la más cargada hora del día.

Existen, además de las variaciones durante el día, fluctuaciones de tráfico de hora pico durante los días de la semana. La hora pico de los días lunes, por ejemplo, es diferente a la de los martes o miércoles. En la Figura 1.4 siguiente se muestra un ejemplo de las variaciones de tráfico máximo durante la semana.

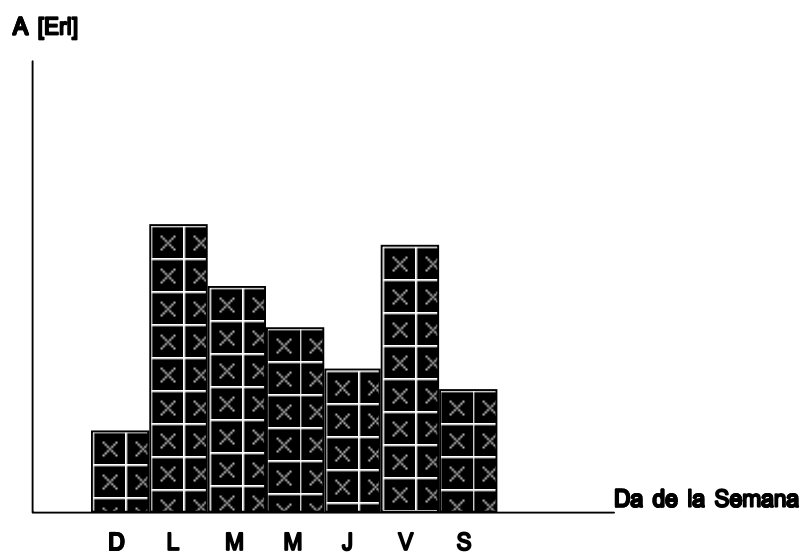


Fig. 1.5: Tráfico telefónico semanal

### 1.7.3 Número de fuentes de tráfico

Las fluctuaciones casuales del número de líneas ocupadas simultáneamente de un grupo de líneas depende entre otras cosas del número de fuentes de tráfico (abonados) que originen el tráfico ofrecido.

Así p.ej., un tráfico de la intensidad 5 Erl tendrá distintas propiedades de fluctuación según sea originado por 10 abonados (fuentes de tráfico) que suelen telefonar mucho o por 100 abonados (fuentes de tráfico) que hablen poco. En el primer caso no se puede ofrecer ninguna ocupación más, cuando ya existan 10 ocupaciones; el tráfico ofrecido puede ser atendido sin bloqueo (es decir, sin pérdidas ni esperas) por 10 líneas de salida. En el segundo caso, cuando ya haya 10 ocupaciones, existen otras 90 fuentes de tráfico libres que pueden ofrecer más ocupaciones, por lo cual son de esperar en este caso pérdidas o esperas si se dispone sólo de 10 líneas de salida.

En la Ingeniería de tráfico telefónico, la mayor parte de los datos para **sistemas de pérdidas** y para **sistemas de espera** se refieren a un tráfico generado por un *número infinito de fuentes de tráfico* y ofrecido por un número infinito de líneas de entrada. En el correspondiente modelo de la teoría del tráfico equivale esto a la suposición de que los intervalos entre la llegada de ocupaciones consecutivas están distribuidos de forma exponencial. Aunque no se cumpla la condición de un número infinito de fuentes de tráfico en la práctica, generalmente el número de fuentes de tráfico o líneas de entrada, en comparación con el número de líneas de salida de un grupo, es tan grande, que se puede partir de las condiciones arriba indicadas sin deteriorar la exactitud significativamente. Los datos de dimensionado calculados bajo estas condiciones dan siempre resultados tendientes a mayor seguridad, es decir, dan una probabilidad de bloqueo algo mayor o una oferta admisible algo menor de lo que correspondería a las condiciones reales.

Sólo cuando el número de fuentes de tráfico no es mucho mayor que la cantidad de líneas del grupo de salida, los valores de las tablas diferirán notablemente de los correspondientes valores de las tablas para un *número finito de fuentes de tráfico*.

### 1.7.4 Distribución de los tiempos de ocupación

Al caracterizar las propiedades estadísticas del tráfico ofrecido se debe tener en cuenta, además, la distribución de los tiempos de ocupación, o sea, la forma de fluctuar los tiempos de ocupación alrededor de su valor medio. Cuando, p. ej., todas las ocupaciones tienen la misma duración  $t_m$ , quedará libre una de las líneas de salida a más tardar después de pasado dicho lapso  $t_m$ , mientras que en caso de ocupaciones de duración muy variada puede pasar mucho más o mucho menos tiempo. El efecto de la distribución de los tiempos de ocupación se debe tener en cuenta, por lo tanto, particularmente en los datos para sistemas de espera, pudiendo despreciarse dicho efecto en los sistemas de pérdidas.

Tienen importancia particular en las tareas prácticas de dimensionado los **tiempos de ocupación distribuidos de forma exponencial**. Esta forma de la distribución es de suponer en todos los casos en que la duración de las ocupaciones queda determinada esencialmente por el comportamiento de los abonados, como p. ej., en el caso de los equipos de conmutación situados en las vías telefónicas. Se basan en la suposición de tiempos de ocupación distribuidos de forma exponencial. Solamente para los sistemas de espera se añaden también datos para *tiempos de ocupación constantes*.

### 1.7.5 Tráfico puramente casual

Un tráfico generado por un número infinito de fuentes de tráfico, en el cual tanto los intervalos entre la llegada de ocupaciones consecutivas como los tiempos de ocupación están distribuidos de forma exponencial, se llama tráfico puramente casual (o tráfico de azar).

### 1.7.6 Tráfico de desbordamiento

Una clase de tráfico que presenta fluctuaciones todavía más grandes que el tráfico generado por un número infinito de fuentes de tráfico con los intervalos entre la llegada de las ocupaciones distribuidos de forma exponencial (p. ej., el tráfico puramente casual), es el llamado tráfico de desbordamiento. Se compone de las ocupaciones rechazadas por uno o varios grupos por falta de líneas de salida. Las ocupaciones de desbordamiento entrantes son muy frecuentes en ciertos lapsos, mientras que en otros momentos, a saber, cuando en la mayoría de los grupos de líneas anteriores existan todavía líneas de salida libres, casi no se ofrecen ocupaciones de desbordamiento.

Para caracterizar al tráfico de desbordamiento sirve, además de la *intensidad de tráfico*, también el *valor de dispersión*, que indica en que medida fluctúa el número de ocupaciones simultáneas alrededor de su valor medio.

Este valor de dispersión se define de tal forma que en caso de tráfico puramente casual sea igual a cero. Con igual calidad e intensidad de tráfico se necesitan, para atender a un tráfico ofrecido cuyo valor de dispersión sea superior a cero, más líneas que para atender a un tráfico ofrecido cuyo valor de dispersión sea igual a cero.

Para dimensionar grupos de líneas, a los que se ofrezca un tráfico de desbordamiento (grupos de desbordamiento). Para la aplicación práctica de este método, se presenta tablas de desbordamiento y diagramas de trabajo.

## 1.8 Modelos de Tráfico Telefónico

Los modelos de tráfico telefónico se basan en los criterios señalados anteriormente: forma de cursar el tráfico, número de fuentes de tráfico, tiempos de ocupación, características de la red de conmutación y orden en que se cursan las ocupaciones. Todos estos criterios han servido para que los diferentes investigadores hayan desarrollado sus distintos modelos y distribuciones que llevan sus respectivos nombres, tales como: Poisson, Erlang B, Erlang C, Engset (Binomial Truncado), Bernoulli, Crommelin-Pollaczek, Molina, Erlang D, Riordan.

La Figura 1.5 ofrece una idea general de los diferentes modelos de tráfico telefónico.

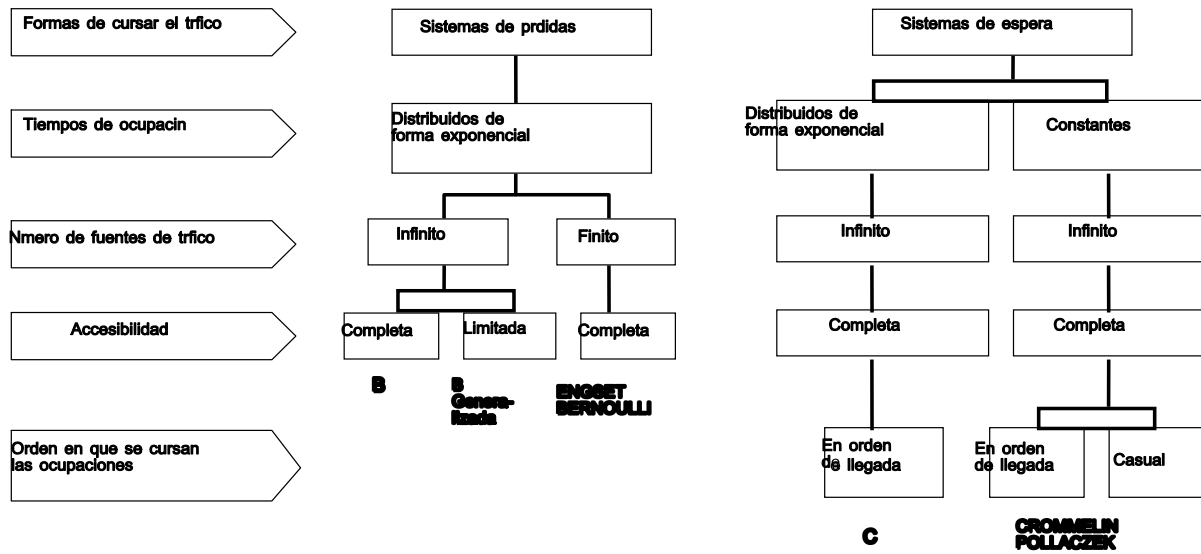


Fig. 1.6: Modelos de tráfico Telefónico

## 1.9 Calidad de Tráfico

La calidad de tráfico (calidad de curso de tráfico) es el grado de servicio con que se atiende al tráfico en lo que depende del cálculo del número de equipos de conmutación y líneas.

En los sistemas de pérdidas, la calidad de tráfico queda caracterizado por la pérdida, que es la probabilidad de rechazarse (perderse) una ocupación ofrecida. Este valor se llama también probabilidad de pérdida. Su valor numérico es igual al porcentaje de ocupaciones ofrecidas que se rechazan.

En los sistemas de espera, los datos que sirven para caracterizar la calidad de tráfico son los siguientes:

La espera media  $t_w$ , que indica el lapso durante el cual las ocupaciones demoradas deben esperar por término medio hasta el establecimiento de la comunicación.

La espera media  $\bar{t}_w$ , que indica el lapso durante el cual las ocupaciones ofrecidas deben esperar por término medio hasta el establecimiento de la comunicación. Al calcular el valor medio se incluyen aquí también las ocupaciones que no esperan, con su espera igual a cero.

La probabilidad  $P(>t)$  de sobrepasar un determinado tiempo  $t$  de espera, que indica la probabilidad de que una ocupación tenga que esperar más de un determinado lapso  $t$  hasta el establecimiento de la comunicación. Su valor numérico es igual al porcentaje de las ocupaciones ofrecidas que tengan que esperar más que el tiempo  $t$  hasta que comiencen a ser atendidas.

La probabilidad de espera,  $P(>0)$  que indica la probabilidad de que una ocupación ofrecida no sea atendida inmediatamente; es el caso límite de la probabilidad  $P(>t)$  para  $t = 0$ . Su valor numérico es igual al porcentaje de las ocupaciones ofrecidas no atendidas inmediatamente.

## 1.10 Unidades de intensidad de tráfico

Erl TU VE	Erlang Traffic Unit Verkehrseinheit	Su valor indica el número de ocupaciones que en promedio existen simultáneamente.
CCS HCS UC	Cent Call Seconds Hundred Call Seconds Unit Call	Su valor indica el número medio de ocupaciones por hora, tomando como base un tiempo medio de ocupación de 100 s.
ARHC EBHC	Appels réduits a l'heure chargée Equated Busy Hour Call	Su valor indica el número medio de ocupaciones por hora, tomando como base un tiempo medio de ocupación de 120 s.

De ello resultan las siguientes relaciones de conversión:

	Erl TU VE	CCS HCS UC	ARHC EBHC	CM
1 Erl = 1 TU = 1 VE =	1	36	30	60
1 CCS = 1 HCS = 1 UC =	1/36	1	5/6	5/3
1 ARHC = 1 EBHC =	1/30	6/5	1	2
1 CM =	1/60	3/5	1/2	1

Otra unidad utilizada es la "comunicación minuto" CM que considera el tráfico de una llamada que dura 60 segundos.

$$CM = 60/3600 = 1/60 \text{ Erl}$$

## 2. FUNCIONES

### 2.1 Funciones de Frecuencia

De acuerdo con los resultados de los eventos en un experimento aleatorio se obtiene una función de frecuencia o probabilidad para ese determinado proceso aleatorio. Esta función se puede representar por una curva o diagrama de frecuencia.

### 2.2 Funciones discretas

Se caracterizan porque la masa probabilística se concreta en puntos discretos determinados. Este es el caso de que se analice una ruta de 10 troncales durante la hora cargada del día y se defina la probabilidad de que se encuentre ocupadas en determinado momento 0, 1, 2, 3, ... 10 troncales.

Correspondiente a los datos siguientes de la Tabla 2-1:

Tabla 2-1

N No. de llamadas	Probabilidad P (N)	Frecuencia $n_i = P(N).60$
0	0.01	0.6
1	0.02	1.2
2	0.04	2.4
3	0.08	4.8
4	0.10	6.0
5	0.15	9.0
6	0.20	12.0
7	0.18	10.8
8	0.15	9.0
9	0.06	3.6
10	0.01	0.6

Un resultado de este experimento puede representarse así Fig.2.1:

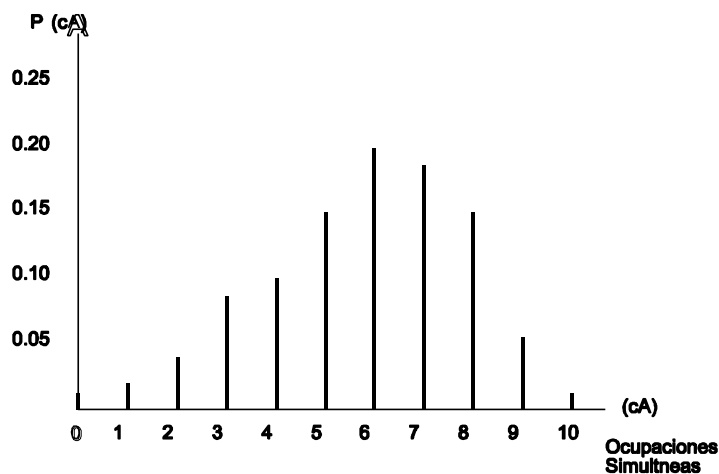


Fig. 2.1 Ejemplo de una función discreta

## 2.3 Funciones continuas

Se caracterizan por tener la masa probabilística distribuida infinitesimalmente dando como resultado una curva continua para representar la función de distribución. Este es el caso de que se analice el tiempo de duración de las llamadas telefónicas en un enlace. Los tiempos de agrupación no se agrupan en unidades como en el caso de la función discreta, sino que puede tomar cualquier valor intermedio entre unidades de tiempo Fig. 2.2

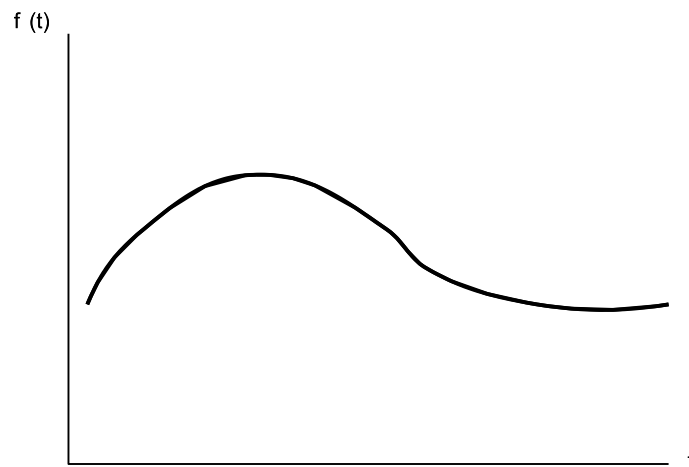


Fig. 2.2 Ejemplo de una función continua

## 2.4 Funciones de distribución

La función de distribución es la sumatoria de la función de frecuencia en el caso de tener una variable discreta, y la integral de la misma en caso de variable continua Fig. 2.3.

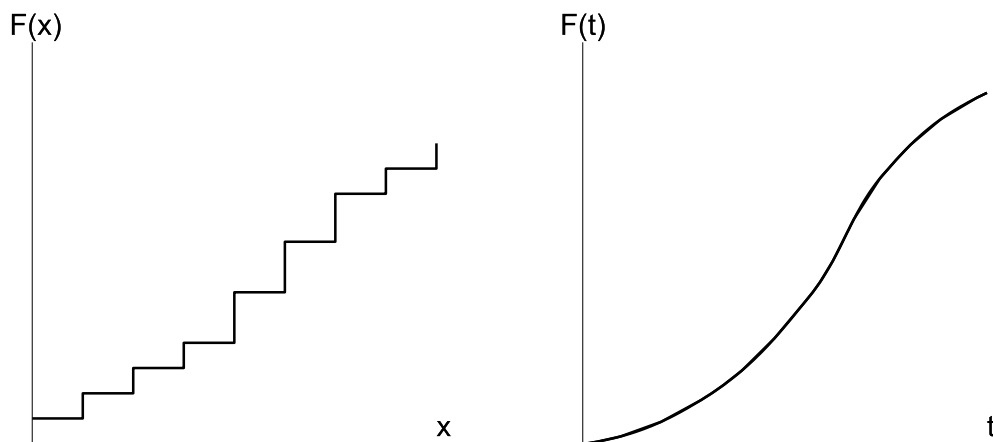


Fig. 2.3 Ejemplos de las funciones de distribución

**2.5 Valor Medio o expectación matemática**

Llamado también el promedio se define en la función de frecuencia discreta como:

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^t x_i P(x_i) \tag{2-1}$$

; P(x<sub>i</sub>) = probabilidad de que x<sub>i</sub> ocurra

Este valor promedio, se conoce en Ingeniería de tráfico telefónico como intensidad de tráfico. Para poder entender mejor esta definición veamos un ejemplo:

En la Tabla 2-2 se muestra el registro de la cantidad de ocupaciones simultaneas medida cada minuto durante una hora. En el lenguaje de la teoría de probabilidad, la densidad de tráfico (cantidad de ocupaciones por el tiempo medio de ocupaciones) es conocida como la variable al azar y representada con la letra X.

**Tabla 2-2  
Registro de la densidad de tráfico en una hora**

Tiempo	X	Tiempo	X
10.0	21	10.30	10
10.1	22	10.31	12
10.2	18	10.32	16
10.3	15	10.33	13
10.4	18	10.34	8
10.5	17	10.35	8
10.6	8	10.36	8
10.7	7	10.37	14
10.8	9	10.38	14
10.9	11	10.39	17
10.10	16	10.40	13
10.11	22	10.41	19
10.12	23	10.42	20
10.13	23	10.43	22
10.14	16	10.44	23
10.15	19	10.45	20
10.16	19	10.46	18
10.17	22	10.47	18
10.18	21	10.48	16
10.19	20	10.49	15
10.20	18	10.50	21
10.21	22	10.51	19
10.22	24	10.52	15
10.23	18	10.53	13
10.24	16	10.54	10
10.25	16	10.55	13
10.26	18	10.56	11
10.27	10	10.57	11
10.28	8	10.58	9
10.29	8	10.59	14
		TOTAL	945



Las 60 muestras de densidad telefónica X puede ser representadas de acuerdo a la frecuencia de ocurrencia de la variable al azar y que se encuentra anotadas en la Tabla 2-3:

**Tabla 2-3**  
**Frecuencia de ocurrencia de la variable al azar**

Frecuencia ni	Valor de X, xi
1	7
6	8
2	9
3	10
3	11
1	12
4	13
3	14
3	15
6	16
2	17
7	18
4	19
3	20
3	21
5	22
3	23
1	24

El valor promedio de X es:

$$X = \frac{7 \times 1 + 8 \times 6 + 9 \times 2 + \dots + 22 \times 5 + 23 \times 3 + 24 \times 1}{1 + 6 + 2 + \dots + 5 + 3 + 1} = \frac{945}{60} = 15.75 \text{ Erl.}$$

La unidad **del valor promedio de la densidad de tráfico X** es la **Intensidad de tráfico** (Erlang) o en otras palabras la intensidad de tráfico es igual a la densidad de tráfico dividido por el período de observación.

$$u = \bar{X} = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^t x_i n_i \tag{2-2}$$

donde:

- T es el número total de la muestra o el período de observación
- t es el número de frecuencias que puede tomar X (18 en el ejemplo).

La frecuencia de distribución de la observación de la hora se muestra en la Figura 2-4:

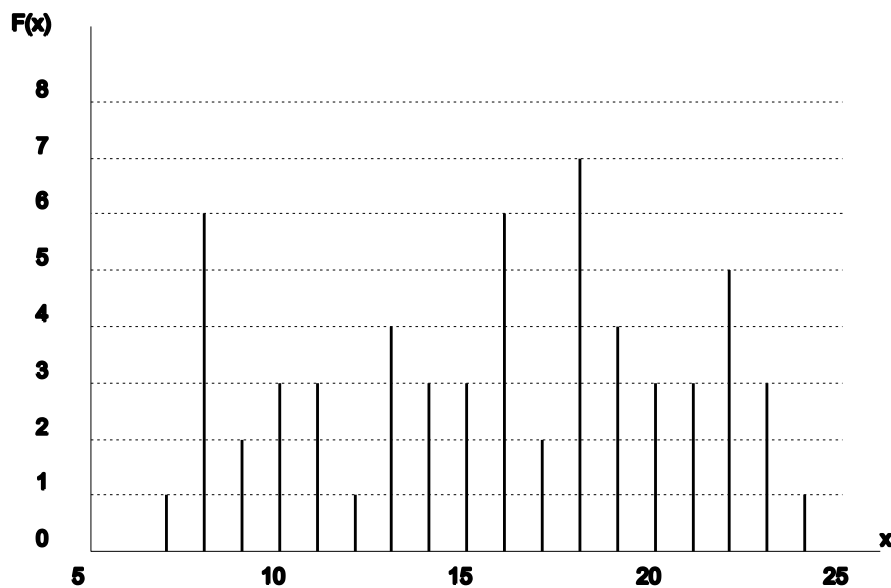


Fig. 2.4 Frecuencia de distribución de una hora

La probabilidad de distribución de un experimento se obtiene de la frecuencia de distribución. Por ejemplo la probabilidad de tener x llamadas en progreso se expresa como P(x) y es igual a la frecuencia f(x) o ni, dividido por T; que es,

$$P(x_i) = \frac{f(x)}{T} \quad (2-3)$$

Por ejemplo, con referencia a la Tabla 2-2, la probabilidad de tener 10 llamadas en progreso está expresado por:

$$P(10) = 3/60 = 0.05$$

Por cada posible evento, estará asociado la probabilidad P(xi)

{xi,P(xi)}, i= 1,2,.....,t son las funciones de probabilidad de la variable al azar X.

El valor medio o expectación matemática de X es expresado por:

$$E(x) = x_1 P(x_1) + x_2 P(x_2) + \dots + x_i P(x_i)$$

o

$$E(x) = \sum_{i=1}^t x_i P(x_i) \quad (2-4)$$

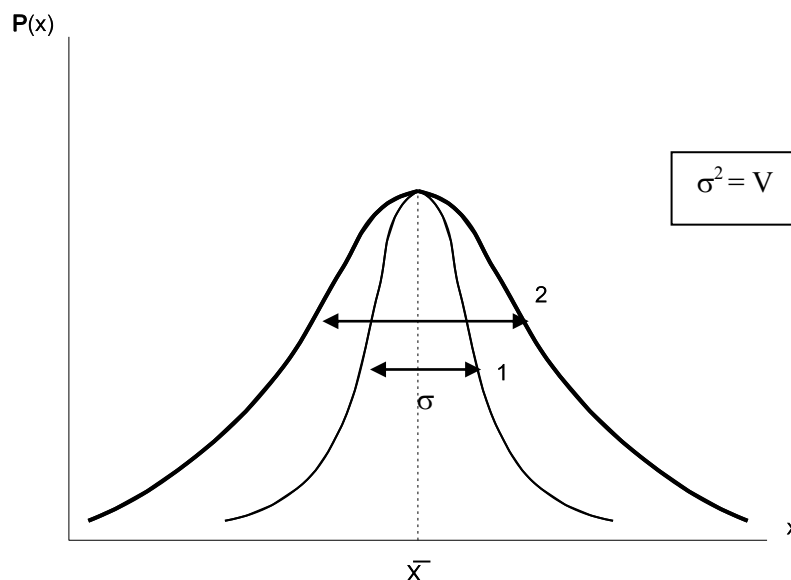
Y en la función continua el valor medio es:

$$u = \bar{X} = \int_{-\infty}^{\infty} x.P(x)dx \quad (2-5)$$

## 2.6 Desviación Estándar y Varianza

El promedio no es suficiente para definir una función de frecuencia. Es necesario además determinar su desviación estándar que brinda un conocimiento sobre la cercanía de los valores de la función al valor promedio.

Entre más pequeña la desviación estándar, más concentrada en torno al valor promedio se encuentran todos los puntos. En las dos figuras de la Figura 2.5 se tiene el mismo valor promedio pero diferente desviación estándar.



**Fig. 2.5 Desviación Estándar**

Un valor generalmente más usado que la desviación estándar es la "**varianza**" o sea el cuadrado de la desviación estándar. Este valor se calcula para las funciones discretas.

$$V = \sum_{i=0}^{\infty} (x_i - \bar{X})^2 . P(x_i) \quad (2-6)$$

$$\sigma^2 = E(x^2) - \mu^2 \quad (2-6a)$$

y para las funciones continuas.

$$V = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{X})^2 f(x) dx \quad (2-7)$$

Los valores de promedio y varianza tienen mucha importancia en los cálculos de tráfico telefónico.

Para caracterizar las fluctuaciones estadísticas del tráfico de desbordamiento se indica además de la intensidad de tráfico también su Valor de Dispersión.

Este valor de dispersión es igual a la varianza menos el valor medio o intensidad de tráfico.

$$D = \sigma^2 - \mu \Rightarrow \sigma^2 = D + \mu \quad (2-8)$$

$$\text{ó } D = V - \bar{X} \quad (2-9)$$

**Los Tráficos independientes entre si estadísticamente** son p. ej., los tráfico de desbordamiento de grupos separados, a los que se ofrezca un tráfico puramente casual.

**Los Tráficos dependientes entre si estadísticamente** son, p.ej., el tráfico ofrecido a un grupo de salida y el tráfico de desbordamiento de dicho grupo.

Particularmente, **los tráfico de desbordamiento** son dependientes entre si cuando sus ocupaciones se hayan ofrecido previamente aunque sea sólo en parte a las mismas líneas de salida.

La distribución Poisson tiene una particular propiedad, que su Varianza es igual a su valor medio.  $V = \mu$  en consecuencia su valor de dispersión es igual a cero. La relación varianza-valor medio es igual a la unidad ( $V/\mu = 1$ )

En un tráfico al azar con Varianza igual a la media es raramente encontrado en la práctica.

### 3. DISTRIBUCIONES TRAFICO TELEFONICO

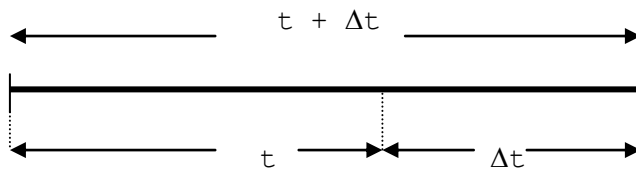
#### 3.1 Ley de aparición de llamadas de Poisson

De acuerdo a las leyes de probabilidades, Poisson desarrolló una ecuación para definir la ley de aparición de llamadas telefónicas a un sistema.

Se define como  $\lambda$  la tasa de aparición de llamadas, o sea las llamadas aparecidas por intervalo de tiempo.

La probabilidad de que aparezca una llamada en el intervalo  $\Delta t$  es proporcional a la amplitud del intervalo para  $\Delta t$  suficientemente pequeño.

$\lambda = C_A =$  tasa de aparición de llamada  
 $P_n(t) =$  probabilidad de que aparezca n llamadas en el tiempo t.  
 $\Delta t =$  Intervalo infinitésimo de tiempo.



La probabilidad de que en el intervalo  $(t + \Delta t)$  aparezca "n" llamadas puede expresarse como la probabilidad de que haya aparecido "r" llamadas en el intervalo de amplitud "t" por la probabilidad de que hayan aparecido  $(n - r)$  llamadas en el intervalo " $\Delta t$ " para  $0 \leq r \leq n$ .

$$P_n(t + \Delta t) = P_n(t) \cdot P_0(\Delta t) + P_{(n-1)}(t) \cdot P_1(\Delta t) + P_{(n-2)}(t) \cdot P_2(\Delta t) + \dots + P_0(t) \cdot P_n(\Delta t)$$

Se tiene que:

$$P_0(\Delta t) = 1 - \lambda \cdot \Delta t \quad ; \quad P_1(\Delta t) = \lambda \cdot \Delta t$$

Debido a que  $\Delta t$  es infinitesimal, la probabilidad de que aparezca en ese lapso más de una llamada es lo suficientemente pequeña como para no considerarse (infinitésimo de orden superior a  $\Delta t$ ).

Luego, los términos de  $P_2(\Delta t)$  a  $P_n(\Delta t)$  son cero.

$$P_n(t + \Delta t) = P_n(t)(1 - \lambda \cdot \Delta t) + \lambda \cdot P_{n-1}(t) \cdot \Delta t$$

$$P_n(t + \Delta t) = P_n(t) - \lambda \cdot P_n(t) \cdot \Delta t + \lambda \cdot P_{n-1}(t) \cdot \Delta t$$

$$\frac{P_n(t + \Delta t) - P_n(t)}{\Delta t} = -\lambda \cdot P_n(t) + \lambda \cdot P_{n-1}(t)$$

$$\frac{d P_n(t)}{dt} = -\lambda \cdot P_n(t) + \lambda \cdot P_{n-1}(t)$$

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} \cdot e^{-\lambda t} \quad (3-1)$$

y esa es la probabilidad de que aparezca “n” llamadas en el tiempo “t”.

Esta ecuación que permite calcular la probabilidad de que aparezca n llamadas en un tiempo t, el término  $C_A \cdot t$  es igual a A, en consecuencia:

$$P_n = \frac{A^n}{n!} \cdot e^{-A} \quad (3-2)$$

La fórmula de Poisson también puede ser expresada como una función de distribución espacio o tiempo.

La función de **distribución de espacio** para un promedio  $c_A$  llamadas por hora y un tiempo medio de ocupación  $t_m$  es expresado por:

$$P(n, c_A \cdot t_m) = e^{-c_A \cdot t_m} \frac{(c_A \cdot t_m)^n}{n!}$$

$$c_A \cdot t_m = A$$

$$P(n, A) = e^{-A} \frac{A^n}{n!}$$

La función de **distribución de tiempo** expresa la probabilidad de encontrar exactamente  $c_A$  llamadas originadas en un intervalo de tiempo arbitrario  $t_m$ , es expresada por:

$$P(n, c_A \cdot t_m) = e^{-c_A \cdot t_m} \frac{(c_A \cdot t_m)^n}{n!}$$

$$c_A \cdot t_m = A$$

$$P(n, A) = e^{-A} \frac{A^n}{n!}$$

**“La función de distribución de Poisson es válida para un infinito número de llamadas por hora y cada una con una infinita corta duración.”**

Como una función de distribución de espacio para un promedio de  $c_A$  llamadas por hora y un tiempo medio de ocupación de  $t_m$  horas, es válida para cualquier distribución de tiempo de ocupación.

Por las series de Taylor:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = e^A = 1 + A + \frac{A^2}{2!} + \dots + \frac{A^n}{n!}$$

$$e^A = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{A^n}{n!} + \sum_{n=N}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \quad (3-3)$$

Debido a que la serie es convergente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A^n}{n!} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} \frac{A^n}{n!} \approx e^A$$

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \approx 0$$

Por lo tanto

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \approx \frac{A^n}{n!}$$

de acuerdo a la ecuación (3-2):

$$P_n = \sum_{n=N}^{\infty} \frac{A^n}{n!} e^{-A} \quad (3-4)$$

si  $n=i$ :

$$P_n = e^{-A} \sum_{i=N}^{\infty} \frac{A^i}{i!} \quad (3-4a)$$

Si a la ecuación (3-3) la multiplicamos por  $e^{-A}$ :

$$1 = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{A^n}{n!} e^{-A} + \sum_{n=N}^{\infty} \frac{A^n}{n!} e^{-A}$$

reemplazando el equivalente de la ecuación (3-4):

$$P_n = 1 - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{A^n}{n!} e^{-A}$$

$$P_n = 1 - \sum_{i=0}^{N-1} \frac{A^i}{i!} e^{-A} \quad (3-5)$$

si  $n=i$ :

Estas fórmulas 3.4 y 3.5 conocidas como distribución Poisson en reconocimiento al matemático Francés S.D. Poisson (1781-1840), también son conocidas como distribución exponencial binomial limitada.

La distribución Poisson puede también ser expresada como un espacio o función de distribución de tiempo. Cuando  $n=0$  la distribución de Poisson se convierte en:

$$P_0(t) = e^{-A} \quad (3-6)$$

y esa es la probabilidad de que no aparezcan llamadas durante el tiempo  $t$ .

Este es otro camino para resolver el intervalo entre dos sucesivas llamadas más largas que  $t$ . El evento que  $T$  es más largo que  $t$ , expresado por el símbolo  $(T > t)$  está dado por:

$$P(T > t) = e^{-A} \quad (3-7)$$

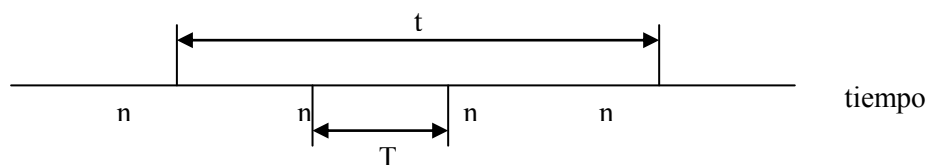


El evento que T es menor o igual que t se expresa con el símbolo ( $T \leq t$ ), la probabilidad es complementaria:  $1 - P(T > t)$

$$P(T \leq t) = 1 - e^{-A} \quad (3-8)$$

La expresión (3-7) muestra que el proceso Poisson, el tiempo transcurrido entre dos llamadas sucesivas es conocida como "tiempo interarribos", está distribuido exponencialmente. En otras palabras el intervalo de tiempo entre dos llamadas sucesivas tiene una distribución al azar.

Este hecho se ilustra gráficamente en la Figura 3.1.



**Fig. 3.1: El diagrama muestra que el intervalo entre dos llamadas sucesivas tiene una duración al azar**

La expresión (3-7) es conocida como distribución exponencial negativa (DEN). El valor medio ( $\bar{X}$ ) y la varianza (V) de la DEN son:

$$\bar{X} = \frac{1}{n}$$

$$V = \frac{1}{\bar{X}^2}$$

n es la tasa de llamadas es el recíproco del valor medio del intervalo entre dos llamadas sucesivas.

### 3.1.1 Programa de computación de la fórmula de Poisson

El siguiente programa de computación puede ser usado para calcular la ecuación (3-5), para determinar la Probabilidad de Poisson. Se requiere como datos el número de troncales y la intensidad de tráfico ofrecido expresado en Erlangs.

```

100 REM Cálculo de la Probabilidad de Poisson
110 INPUT "Ingrese el número de líneas(N) ",N
120 INPUT "Ingrese el tráfico ofrecido en Erlangs (A) ",A
130 LET X=1
140 LET Y=1
150 FOR I=1 TO (N-1)
160 LET X=X*A/I
170 LET Y=X+Y
180 NEXT I
190 LET Q=Y*EXP(-A)
200 PRINT USING "P=#.#####";1-Q
    
```

210 END

**Ejemplo 3:**

Asumiendo que cada abonado de 10.000 líneas originan una llamada por hora, se pregunta con que frecuencia dos llamadas llegan en menos de 0.01 segundo entre ellas.

Solución:

La tasa de aparición de llamadas es:

$$C_A = 10.000 \times 1/3600 = 2.78 \text{ ocupaciones/segundo}$$

$$t = 0.01 \text{ segundos}$$

$$C_A \cdot t = 0.0278 \text{ Erl.}$$

La probabilidad de no llegada de llamadas en un intervalo de 0.01 segundos es:

$$P_0(0.0278) = e^{-0.0278} = 0.973$$

$$1 - 0.973 = 0.027 \Rightarrow 2.7\%$$

Así es que el 2.7% de las llamadas ocurre dentro de los 0.01 segundos de las llegadas previas.

Puesto que la rata de aparición de llamadas  $c_A$  es de 2.78 llamadas/segundo.

Por lo tanto la rata de ocurrencia de los tiempos de interarribos menos que 0.01 segundos es:

$$2.78 \times 0.027 = 0.075 \text{ veces en segundo.}$$

**Ejemplo 4.**

En un sistema la tasa de aparición de llamada es de una llamada cada 10 segundos. Se quiere saber la probabilidad de que en 100 segundos aparezca:

- a) ninguna llamada
- b) 5 llamadas
- c) 10 llamadas
- d) 15 llamadas

$$C_A = (1/10) \text{ ocup/seg}$$

$$t = 100 \text{ seg}$$

$$A = C_A \cdot t = (1/10) \times 100 = 10 \text{ Erl}$$

$$P_n = \frac{A^n}{n!} \cdot e^{-A}$$

$$\text{a) } P_0(100) = e^{-10} = 0.0000454$$

$$\text{b) } P_5(100) = (10^5) \times e^{-10} / 5! = 0.0378$$

$$\text{c) } P_{10}(100) = (10^{10}) \times e^{-10} / 10! = 0.1251$$

$$d) P_{15}(100) = (10^{15}) \times e^{-10} / 15! = 0.0347$$

$$e) P_{20}(100) = (10^{20}) \times e^{-10} / 20! = 0.0018$$

**Ejemplo 5.**

Un nodo conmutador de mensajes que normalmente experimenta 4 arribos por minuto. Se pregunta cuál es la probabilidad que 8 o más arribos ocurran en un intervalo de 30 segundos.

$$C_A = (4/1) \text{ arribos/min}$$

$$C_A = (4/60) \text{ arribos/seg}$$

$$P_{\geq 8}(2) = \sum_{i=8}^{\infty} P_i(2)$$

$$P_{\geq 8}(2) = 1 - \sum_{i=0}^7 P_i(2)$$

o

$$P_8(30) = 1 - \sum_{i=0}^7 \frac{2^i}{i!} e^{-2}$$

$$P_{\geq 8}(2) = 1 - e^{-2} \left( 1 + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \dots + \frac{2^7}{7!} \right)$$

$$P_{\geq 8}(2) = 0.0011$$

La probabilidad de 8 arribos o más es:

$$t = 30 \text{ seg}$$

$$C_A \cdot t = (4/60) \times 30 = 2 \text{ Erl}$$

**3.2 Proceso de duración de la llamada**

Es importante conocer además de la ley de aparición de las llamadas, la ley de duración de las mismas, o sea las probabilidades de que con un tiempo de ocupación promedio las llamadas tengan tiempos de ocupación mayores o menores que intervalos definidos.

La ley exponencial negativa define muy bien la duración de las llamadas.

La probabilidad de que una llamada sea mayor a un intervalo  $t + \Delta t$  se define como  $P(t + \Delta t)$ .

La probabilidad de que la llamada acabe en el intervalo de amplitud  $\Delta t$  es proporcional a la amplitud del intervalo para  $\Delta t$  suficientemente pequeño.

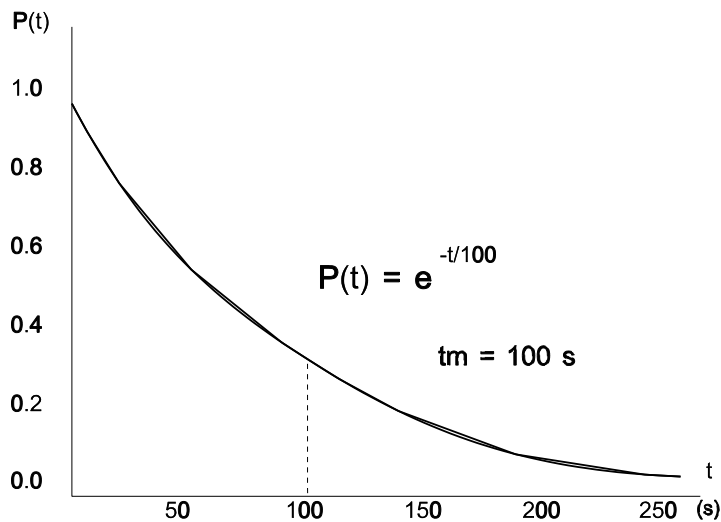
La probabilidad de que la llamada sea mayor al intervalo  $t + \Delta t$  es la probabilidad de que no haya finalizado en el intervalo  $t$  por la probabilidad de que no haya finalizado en el intervalo  $\Delta t$ .

$t_m$  = Tiempo promedio de duración de llamada  
 $P(t)$  = Probabilidad de que la llamada no haya finalizado en el intervalo  $t$ .  
 $1/t_m$  = tasa de desaparición de las llamadas.

$$\begin{aligned}
 P(t + \Delta t) &= P(t) \cdot P(\Delta t) \\
 P(\Delta t) &= 1 - \frac{1}{t_m} \Delta t \\
 P(t + \Delta t) &= P(t) - P(t) \frac{1}{t_m} \Delta t \\
 \frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{\Delta t} &= \frac{dP(t)}{dt} = -\frac{1}{t_m} P(t) \\
 P(t) &= e^{-\frac{t}{t_m}} \tag{3-7}
 \end{aligned}$$

Probabilidad de que una llamada sea mayor que el tiempo  $t$ .

En el Figura 3.2 adjunto se puede observar una curva de esta función para un tiempo de ocupación o duración de llamada de 100 seg.



**Fig. 3.2: Ejemplo de una función exponencial negativa con  $t_m=100$ s**

Los tiempos de ocupación pueden ser clasificados en dos categorías: constantes y variables (distribuidos en forma exponencial). Los tiempos constantes de ocupación se aplican para el caso de ocupaciones y control común de circuitos, como registros, marcadores, etc. que son ocupados solamente durante el tiempo de la conexión. Los tiempos distribuidos en forma exponencial se aplican para las conversaciones de los abonados.

**Ejemplo 6.**

Un grupo troncal tiene los siguientes canales para cursar el tráfico ofrecido en un proceso Poisson con una tasa de 1 llamada por minuto. Si asumimos que el  $t_m = 2$  minutos. ) Qué porcentaje del tráfico total es cursado por los primeros 5 circuitos y qué cantidad de tráfico es cursado por los circuitos restantes?

$$\begin{aligned} C_A &= 1 \text{ llamada/minuto} \\ t_m &= 2 \text{ minutos/llamada} \\ A &= c_A t_m = 2 \text{ Erl} \end{aligned}$$

$$A(2) = e^{-2} \sum_{i=1}^N i \cdot \frac{2^i}{i!}$$

$$A(2) = 1 \cdot P_1(2) + 2 \cdot P_2(2) + 3 \cdot P_3(2) + 4 \cdot P_4(2) + 5 \cdot P_5(2)$$

$$A(2) = 1.89 \text{ Erl}$$

Debido que se trata de un proceso Poisson, la intensidad de tráfico cursado por los  $n$  circuitos es exactamente  $n$  Erlangs.

El tráfico cursado por los primeros  $N=5$  circuitos se puede calcular de acuerdo al proceso de Poisson.

Los circuitos 6...n, cursan el tráfico:

$$2 - 1.89 = 0.11 \text{ Erlangs}$$

1.89 Erl, representa el 94.5% del tráfico, y  
0.11 Erl, representa el 5.5 % del tráfico

Este mismo ejemplo se calcula sobre la base de la probabilidad de pérdida de Poisson

$$N = 5 \quad P_n = e^{-A} \sum_{i=N}^{\infty} \frac{A^i}{i!} \quad P_n = 1 - \sum_{i=0}^{N-1} \frac{A^i}{i!} e^{-A}$$

$$A = 2$$

De las tablas

$$P = 0.055$$

$$R = A \cdot P$$

$$R = 2 \times 0.055$$

$$R = 0.11 \text{ Erl}$$

$$Y = A - R$$

$$Y = 1.89 \text{ Erl}$$

### 3.3 Probabilidad de pérdida - Distribución Erlang B

En el dimensionamiento de los diferentes órganos encargados de las comunicaciones telefónicas es esencial conocer o estimar el tráfico que se ha de manejar para con base en él calcular las cantidades de órganos que debe tener cada tipo de equipo para su buen funcionamiento. Si se subdiseña el equipo se producen congestiones y muchas llamadas fracasan por falta de órganos. Si se sobre-diseña se gastan sumas considerables en forma innecesaria.

Una vez conocido o estimado el tráfico a ser cursado por un grupo de órganos, hay que establecer una relación entre ese tráfico, la cantidad de órganos necesarios para cursarlo y la probabilidad de que una llamada se pierda en las condiciones habidas. Es necesario tomar en cuenta que el tráfico ofrecido a un equipo telefónico no es fijo, sino que tiene una media y una varianza, y es a su vez un experimento aleatorio que sigue la ley de aparición de llamadas de Poisson y la ley exponencial negativa para la duración de las mismas.

Existe con las condiciones mencionadas una función que define la relación entre el tráfico, la cantidad de órganos y la probabilidad de pérdida.

Esta función fue desarrollada por A.K. Erlang basado en tres premisas principales:

1. Número infinito de fuentes de tráfico
2. Aparición de llamadas según la ley de Poisson
3. Duración de llamadas según ley exponencial negativa

A la condición de que el tráfico ofrecido se genera por un número infinito de fuentes de tráfico y que llega a través de un número infinito de líneas de entrada corresponde en el modelo de la teoría de tráfico la suposición de que la probabilidad de que llegue una nueva ocupación es igual para todos los momentos; esto equivale a la suposición de que los intervalos entre cada dos ocupaciones consecutivas están distribuidos de forma exponencial. Se presume, además, que los tiempos de ocupación también están distribuidos de forma exponencial. El tráfico ofrecido es, por lo tanto, un tráfico puramente casual.

Bajo estas condiciones es válida en caso de accesibilidad completa y N líneas de salida para la pérdida **B** la fórmula de Erlang No. 1,  $B = E_{1,N}(A)$ , la que se tomó, por lo tanto, como base para el cálculo de la oferta admisible A.

La forma matemática de la suposición de que la probabilidad para la llegada de una nueva ocupación es igual para todos los momentos  $\tau$ .

Para la probabilidad  $w$  de que precisamente en el intervalo pequeño entre los momentos  $\tau$  y  $\tau + \Delta\tau$  llegue una ocupación, vale con cualquier momento inicial de dicho intervalo:

$$w = C_A \Delta\tau + O(\Delta\tau) \quad (3-11)$$

siendo  $O(\Delta\tau)$  una función de  $\Delta\tau$  que cumple la condición de:

$$\lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{O(\Delta\tau)}{\Delta\tau} = 0$$

Para el caso de intervalos  $\Delta\tau$  lo suficientemente pequeños vale, por lo tanto,

$$w \approx C_A \cdot \Delta \tau \quad (3-11a)$$

La condición anterior tiene la consecuencia de que el número de ocupaciones que lleguen durante un lapso discrecional  $t$  corresponde a una distribución de Poisson con un valor medio  $C_A \cdot t$ .

Para la probabilidad  $P_n(t)$  de que en un lapso  $t$  llegue exactamente  $n$  ocupaciones:

$$P_n(t) = \frac{(C_A \cdot t)^n}{n!} e^{-C_A \cdot t} \quad (3-12)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

Para la probabilidad de tiempos de ocupación distribuidos de forma exponencial, es decir que la llamada no haya finalizado en el intervalo  $t$ , rige la ley exponencial negativa:

$$P(t) = e^{-\frac{t}{t_m}} \quad (3-13)$$

Las consideraciones de que la probabilidad para la llegada de una nueva ocupación es igual para todos los momentos y para que la probabilidad de una ocupación existente perdure a partir de un momento contemplado más tiempo que el lapso  $t$ ; tiene la consecuencia de que el número de ocupaciones simultáneas en estado no perturbado (cuando no se rechacen ocupaciones por falta de líneas de salida) cumpla una distribución de Poisson con el valor medio  $A$ .

Para la probabilidad  $P_n$  de que en un momento contemplado exista exactamente  $n$  ocupaciones simultáneas, rige:

$$P_n = \frac{A^n}{n!} e^{-A} \quad (3-14)$$

$$P_n = \frac{A^n}{n!} e^{-A}$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, \infty$$

Bajo las condiciones anteriormente mencionadas para el tráfico ofrecido, el número de líneas de salida ocupadas simultáneamente cumple, con accesibilidad completa ( $k=N$ ), una distribución de Erlang con el valor medio  $y$ :

$$e^A = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!} = 1 + A + \frac{A^2}{2!} + \dots + \frac{A^i}{i!}$$

Para la probabilidad  $P_n$  de que en un momento contemplado estén ocupadas exactamente  $n$  líneas de salida, (o la probabilidad de encontrar  $n$  llamadas en progreso simultáneamente) está dada por la expresión:

$$P_n = P(n, N, A) = \frac{\frac{A^n}{n!}}{\sum_{i=0}^N \frac{A^i}{i!}} \quad (3-15)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, N$$

Para un número infinito de líneas de salida ( $N \rightarrow \infty$ ) se convierte  $P_n$  en la distribución de Poisson.

$$P_n = \frac{A^n}{n!} \cdot e^{-A}$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, \infty$$

Esta relación resulta específicamente para  $n = N$  se designa  $E_{1,N}(A)$  (fórmula de Erlang No.1):  
La fórmula se escribe así:

$$E_{1,N}(A) = \frac{\frac{A^N}{N!}}{1 + A + \frac{A^2}{2!} + \dots + \frac{A^N}{N!}} \quad (3-16)$$

$$E_{1,N}(A) = \frac{\frac{A^N}{N!}}{\sum_{i=0}^N \frac{A^i}{i!}}$$

Donde:

N = Número de órganos

A = Tráfico ofrecido

$E_{1,N}(A)$  = Probabilidad de pérdida

Esta fórmula indica el porcentaje del tiempo durante el cual las N líneas de salida están ocupadas simultáneamente (razón de congestión de tiempo). La distribución Erlang es una distribución Poisson truncada.

Indica además la probabilidad de que todas las líneas estén ocupadas y por tener un número de fuentes infinitas existe una independencia de la aparición de una llamada respecto al estado del sistema. Por esa razón la congestión de llamada coincide con la congestión en el tiempo.

Debido a que la probabilidad para la llegada de una nueva ocupación es igual para todos los momentos, el valor de la razón de congestión en el tiempo es igual a la **Pérdida B**.



A esta fórmula, también se la conoce como la primera fórmula Erlang o Erlang B y representa la pérdida, Probabilidad de pérdida, Desbordamiento, Probabilidad de Desbordamiento, Grado de Servicio y Probabilidad de congestión.

Debido a que con esta fórmula generalmente no se puede resolver de forma explícita para calcular A, se debe hacer el cálculo de la oferta A admisible de forma iterativa con los valores correspondientes a N y B conocidos.

Para la evaluación numérica está muy adecuada la fórmula de recurrencia:

$$E_{I,N+I}(A) = \frac{A \cdot E_{I,N}(A)}{N + I + A \cdot E_{I,N}(A)} \quad (3-17)$$

Esta relación puede servir también para calcular la pérdida para N+1 líneas, cuando ya se conozca la correspondiente a N líneas.

### 3.3.1 Programa de computación de la fórmula de Erlang

La fórmula de Erlang expuesta como anteriormente, es difícil para trabajar con valores altos para N y A debido a los exponentes y factoriales.

Para cálculos, sobre todo utilizando la computadora, se desarrolla, a partir de la fórmula original, el método recursivo que es la ecuación expuesta a continuación.

$$E_N(A) = \frac{A \cdot E_{N-1}(A)}{N + A \cdot E_{N-1}(A)} \quad (3-18)$$

Comenzando del valor N = 1 se realizan iteraciones hasta lograr en forma rápida (por la computadora) al valor de la probabilidad de pérdida cuando N sea igual al número de órganos.

Conocida esta relación se puede calcular, a partir de un tráfico medido o estimado y de una probabilidad de pérdida establecida, la cantidad de órganos necesarios para cursar el tráfico en las condiciones requeridas.

Los programas por computadora son utilizados a través de varios lenguajes: Fortran, Basic, Qbasic, etc. Se puede también utilizar programas a través de calculadoras por medio de lenguajes de programación propios, por ejemplo Casio FX-8500G, HP 48SX, con lenguaje RPN estructurado, etc.

Uno de los programas que se puede utilizar es el siguiente:

```

100 REM CALCULO DE LA PROBABILIDAD DE PERDIDA ERLANG B
110 INPUT"INGRESE EL NUMERO DE LINEAS (N) " ;N
120 INPUT "INGRESE EL TRAFICO OFRECIDO EN ERLANGS (A) " ;A
130 LET X=1
140 LET Y=1
150 FOR I=1 TO N
160 LET X=X*A/I
170 LET Y=X+Y

```

```
180 NEXT I
190 PRINT USING "B = #.#####" ;X/Y
200 END
```

Los cálculos deben realizarse con el tráfico de hora pico y permitiendo una probabilidad de pérdida que oscile del 3% al 0.5% dependiendo del tipo de órgano.

Realizar diseños sin pérdidas apreciables en el tráfico de hora pico resulta demasiado caro, y el aceptar pérdidas superiores a un 5% produce congestiones serias y el servicio brindado al abonado es deficiente. La probabilidad de pérdida es llamada también "**grado de servicio**".

Existen también tablas donde se pueden encontrar los valores de B para diferentes A y N. Así como también se puede encontrar los valores de A y N conociendo los otros dos valores.

### 3.4 Eficiencia de Tráfico

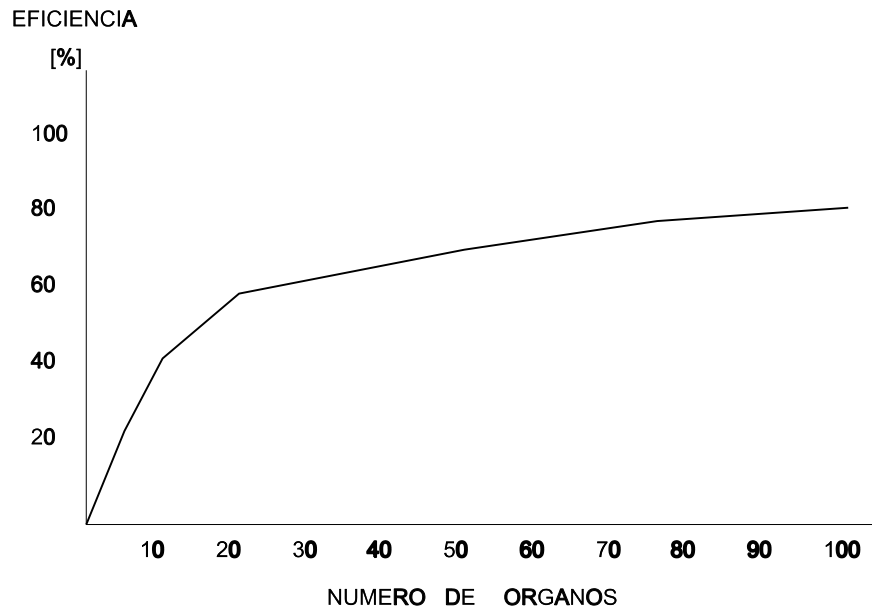
Se llama eficiencia de tráfico a la carga unitaria de tráfico que soporta un grupo de órganos; o sea cuánto tráfico por órgano se cursa para determinado grado de servicio. La carga máxima teórica por órgano es de un Erlang en el entendido que se encuentre ocupado los 60 minutos de la hora; esto, que puede ser posible para un órgano particular no es factible para un grupo de órganos dada la naturaleza probabilística de las ocupaciones.

Para un grado de servicio determinado, la eficiencia aumenta con el tamaño del grupo de órganos. Entre mayor el grupo más tráfico por órgano se puede cursar para una pérdida determinada.

Como ilustración se puede tomar valores para un grado de servicio de 1% a diversos tamaños de grupos de órganos.

Número de órganos	Intensidad de Tráfico	Eficiencia
1	0.01	0.0101
5	1.36	0.272
10	4.46	0.446
20	12.00	0.600
50	37.90	0.758
75	60.70	0.81
100	84.10	0.841

En la Figura 3.3 se puede apreciar la eficiencia



**Fig. 3.3: Eficiencia de tráfico**

Como se observa es importante tratar de mantener rutas grandes pues al ser más eficientes vienen a significar apreciables economías para un sistema telefónico. La parte significativa de la curva está de 1 a 75 órganos ya que la eficiencia se mantiene con muy poco crecimiento para rutas mayores. Además, es de esperar que para eficiencias mayores de 0.8 Erlangs/órgano en un sistema real, existen otras restricciones en los equipos que imposibilitan alcanzar eficiencias mayores.

### 3.5 Congestión de tiempo y Congestión de llamadas

Cuando se ofrecen llamadas a un sistema puede darse el caso de un exceso de demanda frente al número de órganos encargados, teniendo que perderse o esperar algunas llamadas, según se trate de un sistema de pérdida o espera. Una condición de bloqueo o congestión se define como el estado en que se encuentra un sistema al que se ofrecen llamadas en la que es imposible establecer una comunicación en el momento en que ocurre la demanda, debido a falta de órganos.

Se está en condición de bloqueo un sistema cuando todos sus órganos se encuentran cargados. Interesa pues saber la frecuencia con que se da esta situación y se define como  $B_t$ , congestión en el tiempo, como la relación del tiempo de bloqueo con el tiempo total de observación.

$$B_t = \frac{\text{tiempo de bloqueo}}{\text{tiempo total}}$$

Sin embargo, para los abonados esta congestión no tiene importancia pues aunque todos los órganos se encuentran ocupados, mientras no se produzca una nueva solicitud de llamada no habrá ninguna rechazada.

Lo que interesa al abonado es si realiza una solicitud y ésta es rechazada u obligada a esperar. Se define como **B<sub>c</sub>**, **congestión de llamada**, como la relación de intentos fallidos y el número total de llamadas; esta razón es una estimación de la probabilidad de pérdida de llamada en un sistema de pérdida.

Un ejemplo para visualizar la diferencia entre las dos congestiones es si se tienen 5 órganos que pueden ser tomados por 5 fuentes de tráfico. Todo momento en que los 5 órganos estén tomados se tiene **congestión en el tiempo**; sin embargo la congestión de llamada nunca puede ocurrir en este caso debido a que nunca sobra ninguna fuente libre para realizar un intento que no puede ser atendido por alguno de los 5 órganos.

**Ejemplo 7.**

Se tienen entre dos centrales A y B los tráficos siguientes.

De A a B = 5 Erlangs  
De B a A = 6 Erlangs

Utilizando un grado de servicio de 1.0% calcular si es más económico el uso de las rutas unidireccionales o una sola bidireccional.

Costo juntores unidireccionales (set)	= \$ 3400
Costo juntores bidireccionales (set)	= \$ 5000
Costo por kilómetro par del enlace	= \$ 160
Distancia	= 20 Km.

Solución

Costo del par del enlace  
160 x 20 = \$3200

Costo canal unidireccional  
3200 + 3400 = \$6600

Número de canales unidireccionales al 1% de pérdida.

5 Erlangs necesitan	11 canales
6 Erlangs necesitan	13 canales
TOTAL	24 canales

Costo total unidireccional  
24 x 6600 = \$158400

Costo del canal bidireccional  
3200 + 5000 = \$8200

Número de canales bidireccionales al 1% de pérdida  
11 Erlangs necesitan 19 canales

Costo total bidireccional  
19 x 8200 = \$155800

Se concluye que el enlace bidireccional, resulta más económico que el conjunto de unidireccionales a pesar de que la conmutación bidireccional es unitariamente más cara.

**Ejemplo 8.**

A un grupo de órganos se ofrecen 900 llamadas por hora pico con un tiempo de ocupación de 120 segundos. Se permite una pérdida de 0.01. Calcular el número de órganos necesarios.

$$A = 1/T (n \times t_m) = 1/3600 (900 \times 120) = 30 \text{ Erlangs}$$

En la tabla con:

$$B = 0.01$$

$$A = 30 \text{ Erlangs}$$

$$\Rightarrow N = 42 \text{ órganos}$$

Utilizando las dos fórmulas:

$$1. \quad R = A \times B \\ R = 0.3 \text{ Erl.}$$

$$2. \quad A = y + R \\ y = 29.7 \text{ Erl.}$$

Estos conceptos son importantes a la hora de interpretar mediciones de tráfico, pues el único tráfico con que se cuenta es el medido o cursado por el sistema, mientras que las tablas y fórmulas están confeccionadas para el tráfico ofrecido.

En sistemas con pérdidas inferiores a un 4 % el tráfico cursado y el ofrecido pueden considerarse iguales para toda interpretación práctica.

Para valores superiores de pérdida, los cálculos se realizan de la siguiente forma.

Se puede llegar del valor del tráfico cursado al del ofrecido.

Se utiliza un valor inicial de  $A = y$ , se calcula la pérdida y mediante la fórmula se obtiene  $R$ .

Con el valor fijo de  $y$  y el valor logrado de  $R$  se obtiene un nuevo valor de  $A$  que de nuevo se le calcula la pérdida y otra vez se obtiene un nuevo  $R$ . Así se continúa hasta que dos valores consecutivos de  $A$  difieran en menos de un 1% (límite arbitrario que se considera suficientemente bueno).

### 3.6 Relación entre la distribución Erlang y Poisson

Con una distribución de  $A = 15$  Erl y  $N = 20$ .

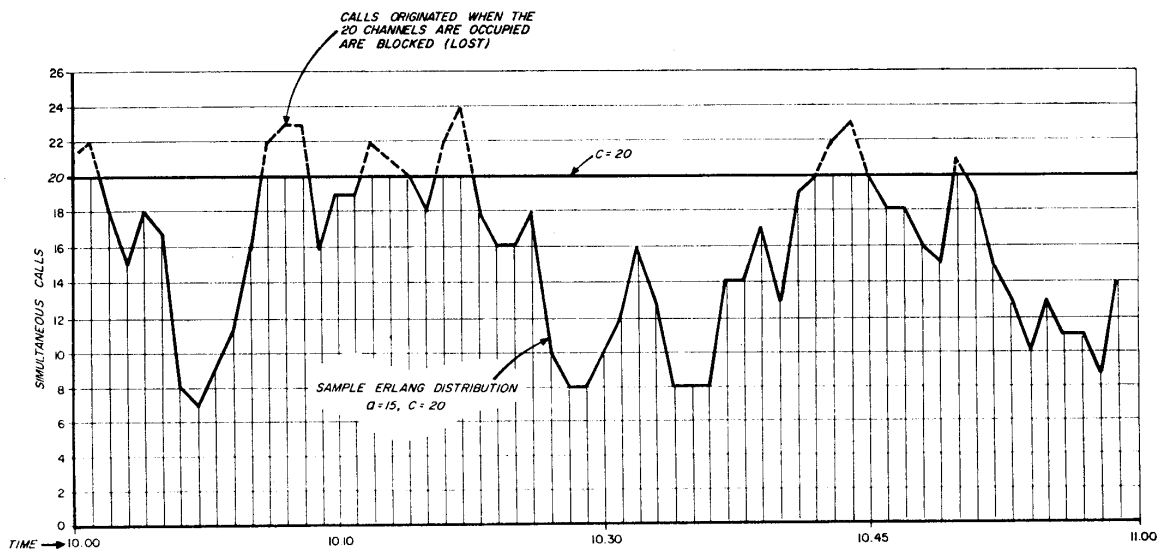
En la distribución de Poisson el número de llamadas en progreso varía de cero a infinito con diferentes probabilidades. Por ejemplo la probabilidad de encontrar 25 llamadas simultáneas es:

$$P_n(t) = e^{-A} \frac{A^n}{n!}$$

$$P_{25}(t) = 0.00497$$

El número máximo de llamadas en progreso no puede exceder de 20 que es el número de canales del sistema.

En la figura 3-4, se muestra una fluctuación Poisson típica en una hora. El número de llamadas en proceso fue un ejemplo en un minuto de intervalos, un ilimitado número de circuitos fueron asumidos. Cuando los circuitos son limitados a 20, entonces las llamadas se originan en ese momento en todos los canales ocupados son perdidas. Estas llamadas no contribuyen al tráfico cursado por los 20 circuitos, todas estas llamadas son consideradas con tiempo de ocupación igual a cero.

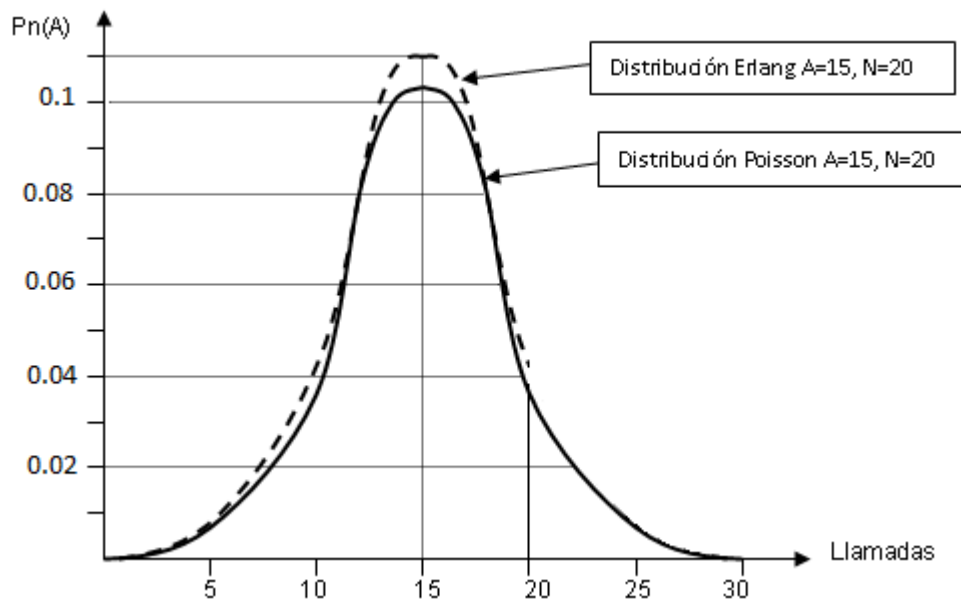


**Fig. 3-4: Ejemplo de una distribución Poisson truncada (Erlang) para  $A = 15$  y  $N = 20$ . Llamadas originadas cuando todos los 20 canales estén ocupados se pierden**

En la figura 3-5 se representa una comparación de la distribución de tráfico donde  $N=20$  y  $A = 15$  Erlangs. En esta figura se puede ver que la probabilidad de tener 21 llamadas o más en este sistema, no puede existir. En otras palabras, el tráfico que deberá llegar en esos instantes, se pierde.

De lo que se concluye claramente que la distribución Erlang es una distribución Poisson truncada, que tiene corte en  $N = 20$ .

$$P(l) = P_{(n,A)} = \frac{A^n}{n!} \frac{1}{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!}}$$



**Fig. 3-5: Comparación de una distribución Poisson y Erlang, para A = 15 Erl y N = 20**

Puesto que la suma de todas las probabilidades debe ser igual a la unidad, la distribución Erlang puede ser obtenida desde la distribución Poisson a través de la siguiente relación.

$$E_{l,n}(A) = \frac{P_{(n)}}{1 - P'_n} = EP(2)$$

Donde  $P_n$  es el término individual de Poisson:

$$P_n = e^{-A} \frac{A^n}{n!} = P_{(n,A)}$$

y  $P'_n$  es el sumatorio de los términos individuales de Poisson, donde  $n = N+1$ , hasta infinito.

$$P'_n = e^{-A} \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{A^i}{i!} = P'(n+1, A) = P(4)$$

La tabla muestra la distribución Poisson y la distribución Erlang, **para A=10 y N=15.**

La suma de los términos de Poisson desde n=1 a n=15 es 0.9512141

La suma de los términos de Poisson desde n = 16 a 30 es 0.0487403

$$P(n) = P^n = \sum_{n=16}^{\infty} P_{(n,10)} = 0.0487403 \quad \text{Por lo tanto}$$

$$1 - P^n = 1 - 0.0487403 = 0.951259$$

Los términos de Erlang pueden ser obtenidos dividiendo los términos individuales de Poisson por 0.951259 para los valores N=15 A=10.

$$E_1(10,15) = (0.03471/0.951259) = 0.036497$$

**Para otro caso cuando A=15 y N=20**

La suma de los términos de Poisson desde n=1 a n=20 es 0.917028

La suma de los términos de Poisson desde n = 21 a 35 es 0.082971

$$P^n = \sum_{n=21}^{\infty} P_{(n,10)} = 0.082971 \quad \text{Por lo tanto}$$

$$1 - P^n = 1 - 0.082971 = 0.917028$$

Los términos de Erlang pueden ser obtenidos dividiendo los términos individuales de Poisson por 0.917028 para los valores A=15 y N=20.

$$E_1(20,15) = (0.041810/0.917028) = 0.045593$$



TABLA  
**Distribución Poisson y Erlang**  
**Para A = 10 y N = 15**

$$P_n = e^{-A} \frac{A^n}{n!} = P_{(n,A)}$$

$$E_{1(N,A)} = \frac{P_{(N,A)}}{1 - P_{(N+1,A)}}$$

n	Distribución Poisson $P_{(n,10)} = P_1(n)$	Distribución Erlang $E(n,15,10) = EP1$
1	0.0004539	0.0004771568
2	0.0026990	0.0028372903
3	0.0075660	0.0079536639
4	0.0189166	0.0198858419
5	0.0378332	0.0397716838
6	0.0630554	0.0662862097
7	0.0900792	0.1183673383
8	0.1125990	0.1315203409
9	0.1251100	0.1315203409
10	0.1251100	0.1195639740
11	0.1137364	0.0996366502
12	0.0947803	0.0766435286
13	0.0729079	0.0766435286
14	0.0520771	0.0547454076
15	0.0347181	0.0364969454
Total 1-15	0.9512141	1.0000000000
16	0.02169879	0.0000000000
17	0.01276399	0.0000000000
18	0.00709110	0.0000000000
19	0.00373210	0.0000000000
20	0.00186600	0.0000000000
21	0.00088860	0.0000000000
22	0.00040390	0.0000000000
23	0.00017560	0.0000000000
24	0.00007317	0.0000000000
25	0.00002926	0.0000000000
26	0.00001125	0.0000000000
27	0.00000410	0.0000000000
28	0.00000140	0.0000000000
29	0.00000050	0.0000000000
30	0.00000010	0.0000000000
Total 16-30	0.0487403	0
Total 1-30	1	1

TABLA  
**Distribución Poisson y Erlang**  
**Para A = 15 y N = 20**

$$P_n = e^{-A} \frac{A^n}{n!} = P_{(n,A)} \qquad E_{1(N,A)} = \frac{P_{(N,A)}}{1 - P'_{(N+1,A)}}$$

n	Distribución Poisson $P_{(n,15)} = P_1(n)$	Distribución Erlang $E(n,20,15)$
1	0.000005	0.000005
2	0.000034	0.000037
3	0.000172	0.000187
4	0.000645	0.000703
5	0.001936	0.002111
6	0.004839	0.005277
7	0.010370	0.011308
8	0.019444	0.021203
9	0.032407	0.035339
10	0.048611	0.053009
11	0.066287	0.072285
12	0.082859	0.090356
13	0.095607	0.104257
14	0.102436	0.111704
15	0.102436	0.111704
16	0.096034	0.104723
17	0.084736	0.092403
18	0.070613	0.077002
19	0.055747	0.060791
20	0.041810	0.045593
Total 1-20	0.917028	1.0000000000
21	0.029865	0.0000000000
22	0.020362	0.0000000000
23	0.013280	0.0000000000
24	0.008300	0.0000000000
25	0.004980	0.0000000000
26	0.002873	0.0000000000
27	0.001596	0.0000000000
28	0.000855	0.0000000000
29	0.000442	0.0000000000
30	0.000221	0.0000000000
31	0.000107	0.0000000000
32	0.000050	0.0000000000
33	0.000023	0.0000000000
34	0.000010	0.0000000000
35	0.000004	0.0000000000
Total 21-35	0.082971	0
Total 1-35	1	1

## ECUACIONES POISSON

Término individual de Poisson

$$P(1) = e^{-A} \frac{A^n}{n!}$$

$$P(1) = P_{(n,A)} = \frac{\frac{A^n}{n!}}{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}}$$

Probabilidad de pérdida Poisson

$$P(2) = e^{-A} \sum_{i=N}^{\infty} \frac{A^i}{i!}$$

Probabilidad de pérdida Poisson

$$P(3) = 1 - e^{-A} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{A^i}{i!}$$

Sumatorio de los términos Poisson, desde  $i = n+1 \dots$

$$P(4) = P'_n = e^{-A} \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{A^i}{i!}$$

Sumatorio de los términos Poisson, desde  $i = 1 \dots n$

$$P(0) = e^{-A} \sum_{i=1}^n \frac{A^i}{i!}$$

$$P(0) = 1 - P(4)$$

$$P(0) = 1 - e^{-A} \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{A^i}{i!}$$

**Primera fórmula de Erlang. Erlang B. Probabilidad de pérdida**

$$E_{1,N(A)} = \frac{\frac{A^N}{N!}}{\sum_{i=0}^N \frac{A^i}{i!}} = B$$

$$\sum_{i=0}^N \frac{A^i}{i!} = 1 + A + \frac{A^2}{2!} + \dots + \frac{A^n}{n!}$$

$$EP1 = E_{1(n,N,A)} \Rightarrow EP1 = \frac{\frac{A^n}{n!}}{\sum_{i=0}^N \frac{A^i}{i!}}$$

$$EP2 = E_{(n,N,A)} = \frac{P(1)}{1 - P(4)}$$

$$EP2 = \frac{e^{-A} \frac{A^n}{n!}}{1 - e^{-A} \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{A^i}{i!}}$$

$$EP2 = \frac{P(1)}{P(0)}$$

$$EP3 = \frac{P(2)}{1 - e^{-A} \left[ 1 - \sum_{i=1}^n \frac{A^i}{i!} \right]}$$

$$EP3 = \frac{\frac{A^n}{n!}}{e^{-A} - \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{A^i}{i!}} \Rightarrow EP3 = \frac{\frac{A^n}{n!}}{\frac{1}{e^{-A}} - \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{A^i}{i!}}$$

$$EP3 = \frac{\sum_{i=n}^{\infty} \frac{A^i}{i!}}{\sum_{i=1}^n \frac{A^i}{i!}}$$

**Ejemplo 9.**

Una ruta consiste de 25 troncales y en la hora pico se tiene los siguientes datos:

llamadas cursadas en la hora pico: 294  
 llamadas rechazadas en la hora pico: 6  
 tiempo que se encuentran ocupadas las troncales: 12

1) Congestión de llamada  $B_c$

$$B_c = \frac{\text{Número de llamadas perdidas}}{\text{Número de llamadas ofrecidas}}$$

$$B_c = 6/(294+6) = 6/300$$

$$B_c = 0.02$$

2) Calcular la congestión de tiempo  $B_t$ , asumiendo que hay un registro cada 6 segundos y hay 12 registros.

$$6 \times 12 = 72 \text{ seg.}$$

$$B_t = (72/3600)$$

$$B_t = 0.02$$

**Ejemplo 10.**

15 Erlangs en un tráfico aleatorio es ofrecido a una ruta permanente de 20 troncales. Calcular: el valor medio, varianza del tráfico cursado, varianza del tráfico rechazado.

$$B = E_1(20,15) = 0.045593$$

$$R = A \cdot B$$

$$R = 15 \times 0.045593$$

$$R = 0.68 \text{ Erl}$$

$$Y = A - R$$

$$Y = 15 - 0.68 = 14.32 \text{ Erl}$$

**Varianza del tráfico rechazado**

$$V_R = R \cdot \left( 1 - R + \frac{A}{N + I + R - A} \right)$$

$$V_R = 0.68 \cdot \left( 1 - 0.68 + \frac{15}{20 + I + 0.68 - 15} \right)$$

$$V_R = 1.74$$

**Relación de Varianza –Tráfico rechazado**

$$\begin{aligned}V_{mR} &= V_R/R \\V_{mR} &= 1.74/0.68 \\V_{mR} &= 2.57\end{aligned}$$

**Tráfico cursado por la última troncal**

$$\begin{aligned}IN &= A [E_{(N-1,A)} - E_{(N,A)}] \\IN &= 15 [E_{(19,15)} - E_{(20,15)}] \\IN &= 15 [0.063695 - 0.045593] \\IN &= 0.27 \text{ Erl}\end{aligned}$$

**Varianza del tráfico cursado**

$$\begin{aligned}V_y &= Y [1-l_c] \\V_y &= 14.32 [1-0.27] \\V_y &= 14.32 \times 0.73 \\V_y &= 10.45\end{aligned}$$

**Relación de Varianza –Tráfico cursado**

$$\begin{aligned}V_{mY} &= V_y/Y \\V_{mY} &= 10.45/14.32 \\V_{mY} &= 0.73\end{aligned}$$

**Tráfico cursado por la última troncal**

$$\begin{aligned}IN &= 1 - V_{mR} \\IN &= 1 - 0.73 = 0.27 \text{ Erl}\end{aligned}$$

**Respuestas**

$R = 0.68 \text{ Erl}$	$V_R = 1.74$	$V_{mR} = 2.57$	mayor que 1, peakedness
$Y = 14.32 \text{ Erl}$	$V_Y = 10.45$	$V_{mY} = 0.73$	menor que 1, smoothness

### 3.7 Demanda de Tráfico

Se llama demanda de tráfico al tráfico que los abonados de un sistema quieren generar según sus hábitos y necesidades. Es objetivo principal de una administración telefónica satisfacer esta demanda mediante un sistema apropiado y bien dimensionado que no permita congestiones considerables.

Como se puede observar, la demanda viene a confundirse, en un sistema no congestionado, con el tráfico ofrecido a los selectores de línea de abonado. Sin embargo, cuando el sistema es impropio para cursar la demanda y existen congestiones considerables, los abonados con frecuencia no logran su comunicación en el primer intento debido a la escasez de órganos necesarios.

Para lograr éxito en su comunicación los abonados realizan varios intentos repetitivos recargando el sistema, sobre todo los órganos de control común, con un intenso tráfico de repetición que viene a gestionar aún más el sistema, pudiéndolo llevar a un estado de bloqueo (gestión en cadena).

En este caso, el tráfico ofrecido a los selectores de línea de abonado se infla debido al tráfico de repetición para alcanzar valores mayores a la demanda de tráfico normal requerida por los usuarios. Es por ello que en sistemas no congestionados el tráfico ofrecido se confunde con la demanda, pero al haber congestión se produce un tráfico de repetición que diferencia los dos parámetros.

El cálculo de este tráfico de repetición no se ha desarrollado matemáticamente pues se carecen e los fundamentos probabilísticos que originan su comportamiento. Sin embargo, se han hecho bastantes ensayos empíricos que, basados en datos experimentales, brindan una aproximación aceptable. Hay que tomar en cuenta que cuando un sistema se encuentra por encima de un 10% de congestión, el comportamiento de los usuarios con relación al servicio telefónico es bastante diverso y difícil de predecir.

Una fórmula empírica que trabaja bien hasta congestiones de un 50% ( $R/A = 0.5$ ) es la siguiente:

$$\frac{A_r}{A} = B(e^{2B(1-B)} - 1) \quad (3-19)$$

Donde:

$A_r$  = Tráfico de repetición

El tráfico ofrecido, desde el punto de vista del usuario es:

$$A = D + A_r \quad (3-20)$$

Donde:

$D$  = Tráfico de demanda

$A_r$  = Tráfico de repetición

#### Ejemplo 11

En una medición de tráfico se obtuvo un valor de 8.35 Erlangs para un grupo de 10 órganos. Calcular el tráfico ofrecido al grupo, el tráfico perdido, el tráfico de repetición y la demanda.

Solución:

Utilizando las fórmulas:  $R = A \times B$

$$A = y + R$$

Se obtienen las iteraciones siguientes comenzando con  $A = y$

Iter.	A	B	R	y	% de Diferencia en valores consecutivos de A
1	8.350	0.1377	1.149	7.200	----
2	9.499	0.1914	1.818	7.687	13.766
3	10.168	0.2223	2.260	7.908	7.035
4	10.610	0.2423	2.571	8.039	4.347
5	10.921	0.2561	2.797	8.124	2.930
6	11.147	0.2660	2.965	8.182	2.070
7	11.315	0.2732	3.092	8.223	1.507
8	11.442	0.2786	3.188	8.254	1.119
9	<u>11.538</u>	<u>0.2827</u>	<u>3.262</u>	8.276	<u>0.844</u>

Luego:

$$A = 11.54 \text{ Erlangs}$$

$$R = 3.26 \text{ Erlangs}$$

$$A_r/A = B (e^{2B(1-B)} - 1)$$

$$A_r/A = 0.283 (e^{0.566(1-0.283)} - 1) = 0.141$$

$$A_r = 1.63 \text{ Erlangs}$$

$$D = A - A_r = 9.91 \text{ Erlangs}$$

### 3.8 Sistemas de Accesibilidad Restringida (Limitada)

Cuando se ofrece tráfico a un grupo de órganos, se define como accesibilidad completa a la característica de las fuentes de tráfico para poder tomar cualquier órgano libre del grupo. O sea que cualquier fuente tiene acceso a cualquier órgano libre. Si por el contrario cada fuente de tráfico tiene acceso a determinado número  $k$  de la totalidad de  $N$  órganos se dice que hay accesibilidad restringida o incompleta.

La accesibilidad incompleta se utiliza cuando la capacidad de salida de las fuentes es inferior al número de órganos. Como ejemplo se puede citar una ruta de 100 órganos y los selectores de grupo por diseño solo pueden tener acceso a 20 salidas. No importa el número de fuentes, cada una estará en condiciones de salir por únicamente 20 de los 100 órganos disponibles. Si estos 20 están ocupados aunque queden órganos libres, se obtiene congestión.

El problema de la determinación de la probabilidad de pérdida a partir de los parámetros de accesibilidad, número de órganos y número de grupos es que se pueden definir múltiples configuraciones, cada una con características diferentes en cuanto a la probabilidad de pérdida. Por esta razón no es posible hablar de probabilidad de pérdida de sistema gradado refiriéndose únicamente a los parámetros expuestos. Plantea el problema de que para determinar el número de órganos necesarios, conocido el tráfico, el número de grupos, accesibilidad y fijado el grado de servicio, es necesario para



cada una de las configuraciones ir probando el número de órganos hasta satisfacer el grado de servicio propuesto.

Este problema se soluciona introduciendo la hipótesis de que la probabilidad de pérdida depende solamente del número de órganos y de la accesibilidad.

Para que esta hipótesis sea válida los métodos de cálculo de la probabilidad de pérdida deben referirse a una configuración de gradación óptima o de otras configuraciones similares a ésta en cuanto a probabilidad de pérdida.

Un mal diseño en la gradación puede invalidar un buen dimensionado.

Para el cálculo de la probabilidad de pérdida se han desarrollado muchos métodos, algunos experimentales y otros mediante modelos teóricos. Un método muy empleado es el de "Palm-Lotze" aplicable a sistemas con elección aleatoria de órganos e igual accesibilidad en todos los grupos.

El problema del cálculo de la probabilidad de pérdida en una interconexión gradada se puede definir como el de determinar la probabilidad de ocupación de un determinado grupo de órganos independientemente de la situación de los restantes y teniendo en cuenta la configuración especial de la interconexión.

La fórmula de Palm permite el cálculo de la probabilidad de ocupación parcial dentro de un conjunto de órganos en accesibilidad completa. Dada esta circunstancia se puede utilizar la fórmula como primera aproximación para el cálculo de la probabilidad de pérdida en una interconexión gradada.

$$B = \frac{E_{1,N}(A_0)}{E_{1,N-k}(A_0)} \quad (3-21)$$

Donde:

B = probabilidad de ocupación de k número de órganos de N órganos

La fórmula de Palm da probabilidades de pérdida mayores que las reales debido que al considerar accesibilidad completa la carga por órgano es mayor que la real. Para tener en cuenta este efecto Lotze introduce una modificación a la aproximación de Palm que se resume como sigue:

"Sea un conjunto de N órganos a los que se ofrece un tráfico A con accesibilidad k. Considérese un conjunto de N órganos con accesibilidad completa y un tráfico ofrecido A<sub>0</sub>. Se postula que la probabilidad de pérdida en la interconexión gradada es igual a la probabilidad de que k de los N órganos estén ocupados en el conjunto de accesibilidad completa siempre y cuando el tráfico cursado de los dos sistemas de N órganos sea el mismo".

En otras palabras el parámetro auxiliar A<sub>0</sub> puede interpretarse como la oferta que con accesibilidad completa origina la misma carga de las N líneas de salida que la oferta A con la accesibilidad k.

Los tráficos cursados por ambos sistemas son:

$$y = A_0 (1 - E_{1,N}(A_0)) \quad \text{para accesibilidad completa}$$

$$y = A (1 - B) \quad \text{para accesibilidad restringida}$$

Igualando los dos tráficos cursados:

$$A(1 - B) = A_0(1 - E_{1,N}(A_0))$$

Donde:  $A_0$  y  $B$  son incógnitas

De acuerdo con el postulado de Lotze y Jacobaeus:

$$B = \frac{E_{1,N}(A_0)}{E_{1,N-k}(A_0)} \quad (3-22)$$

El valor de  $A$  también se representa como  $A_{MPJ(N,k,B)}$  o fórmula modificada de Palm-Jacobaeus.

El punto de partida para el cálculo de la oferta admisible  $A_{MPJ(N,k,B)}$  con accesibilidad limitada

De esta forma se puede determinar  $B$  y  $A_0$ .

Debido a que  $B$  está en función indirecta de  $A_0$ , es necesario realizar cálculos iterativos con las dos fórmulas para lograr los valores deseados. Se comienza con  $A_0 = A$  para determinar el valor de  $B$  que luego se incluye en la primera fórmula para encontrar otro valor de  $A_0$  y volver a buscar  $B$ . Así hasta que los valores consecuentes difieran en menos de 1%.

Con accesibilidad completa ( $k=N$ ) la ecuación anterior es igual a:

$$A_{MPJ(N,k,B)} = A_0 \quad \text{y}$$

$$B = E_{1,N-k}(A_0)$$

es decir se convierte en la fórmula de pérdida de Erlang.

La fórmula MPJ puede considerarse como la fórmula generalizada de la primera fórmula de Erlang para el caso de la accesibilidad limitada.

No se basa en ningún tipo de mezcla determinada.

Existen tablas para encontrar los valores de probabilidades de pérdida para diferentes tráficos ofrecidos, accesibilidades y números de órganos.

La adaptación al rendimiento de las mezclas normales simplificadas determinada por la comparación con los resultados de amplias simulaciones se hace con fórmulas diferentes según sea el número de líneas de salida  $N$  mayor o menor que un valor  $N_{lin}$  (punto de linealización) dependiente de la accesibilidad  $k$ , siendo:

$$N_{lin} = \begin{cases} k^2, & \text{para } k \leq 10 \\ 10k, & \text{para } k > 10 \end{cases} \quad (3-23)$$

para  $N \leq N_{lin}$  se puede calcular la oferta admisible con la fórmula:

$$A(N, k, B) = A_{MPJ(N, k, B)} - 0.3 \left( \frac{N}{k} - 1 \right)^2 \frac{k-2}{60+4k} \frac{1-B}{1+kB^2} \quad (3-24)$$

Para  $N > N_{lin}$  rige la relación lineal:

$$A(N, k, B) = A(N_{lin}, k, B) \frac{N}{N_{lin}} \quad (3-25)$$

La ecuación 3-25 expresa que para valores fijos de la pérdida y de la accesibilidad se mantiene constante la oferta media admisible  $A/N$  por línea de salida para números de líneas de salida  $N > N_{lin}$ .

El sistema de fórmulas compuesto por la ecuaciones 3-22, 3-23, 3-24, 3-25 se llama "**fórmula MPJ adaptada**".

### 3.9 Modelos de Engset y Bernoulli

En el sistema de análisis donde se tienen fuentes ofreciendo tráfico a un grupo de órganos, es importante la relación del número de fuentes  $M$  con el número de órganos  $N$ . Los sistemas estudiados hasta el momento pertenecen al modelo de Erlang donde:

$$M \gg N \quad \text{y} \quad M \rightarrow \infty$$

Para este caso la congestión en el tiempo:

$$E_{I,N}(A) = \frac{\frac{A^N}{N!}}{1 + A + \frac{A^2}{2!} + \dots + \frac{A^N}{N!}} = \frac{\frac{A^N}{N!}}{\sum_{i=0}^N \frac{A^i}{i!}} = B$$

es la probabilidad de que todos los órganos estén ocupados que por ser  $M \rightarrow \infty$  existe una independencia de la aparición de una nueva llamada respecto al estado del sistema. Por esta razón la congestión de llamada coincide con la congestión en el tiempo en el caso del modelo de Erlang.

Si se tienen 100 órganos en un modelo Erlang, existe la misma probabilidad de que teniendo 10 ocupaciones, ocurra la número 11, a que teniendo los 100 órganos ocupados aparezca la llamada 101.

Es por esa razón que en el modelo de Erlang es indiferente hablar de congestión en el tiempo o de llamada.

*El Modelo de Engset* presenta la situación de  $M$  fuentes y  $N$  órganos de tal forma que  $M > N$  pero  $M$  no es infinito. Siendo éste el caso, las probabilidades de que ocurra una nueva llamada depende del número de fuentes libres que existan, ya que se tiene un tráfico ofrecido constante por fuente.

La congestión en el tiempo ocurre primero que la congestión de llamada que necesita de una nueva llamada dado el sistema en congestión en el tiempo o todos los órganos ocupados.

La congestión en el tiempo para un modelo de Engset es:

$$E_{M,N} = \frac{\binom{M}{N} a^N}{\sum_{i=0}^N \binom{M}{i} a^i} \quad (3-26)$$

Donde:

$E_{M,N}(a)$  = Probabilidad de congestión en el tiempo.

$$a = \frac{\frac{A}{M}}{1 - \frac{A}{M}(1 - E)} \quad (3-27)$$

Como se observa al ser "E" y "a" funciones de ambas es necesario realizar interacciones a partir de E = 0, se encuentra un valor para "a" y se calcula "E" y con este valor se vuelve a calcular "a" y así hasta que la aproximación sea buena.

Para valores muy pequeños de E,  $E < 0.04$  la fórmula se reduce a:

$$a = \frac{\frac{A}{M}}{1 - \frac{A}{M}} \quad (3-27a)$$

$$\binom{M}{N} = N \text{ combinaciones de } M$$

N = número de órganos

M = número de fuentes

La congestión de llamada del modelo Engset es:

$$E_{M,N} = \frac{\binom{M-1}{N} a^N}{\sum_{i=0}^N \binom{M-1}{i} a^i} \quad (3-28)$$

Donde:

$E_{M,N}(a)$  = Probabilidad de congestión de llamada

De ambas fórmulas se deriva que:

$$B_{M,N}(a) = E_{M-1,N}(a)$$

Lógicamente  $B < E$

En el modelo de Bernoulli se presenta una situación en que el número de órganos es igual o mayor al número de fuentes.

$$N \geq M$$

En este caso si  $N > M$  no puede existir ninguna congestión ni de llamada ni en el tiempo debido a que siempre habrá órganos disponibles para cualquier llamada que originen las fuentes. Para  $N = M$ , la congestión de llamada sigue siendo nula pues no queda fuentes libres para generar una llamada nueva al estar todos los órganos ocupados.

Sin embargo, en este caso sí puede darse el caso de congestión en el tiempo y es igual a:

$$E_N = \left[ \frac{a}{1+a} \right]^M \quad (3-29)$$

Donde:

$M$  = número de fuentes

$a$  = mismo parámetro que en el caso de Engset

### Ejemplo 12.

A una ruta de 5 órganos se ofrece un tráfico de 2 Erlangs. Calcular las congestiones en el tiempo y de llamada para los modelos de Erlang, Engset y Bernoulli. Utilizar 10 fuentes para el modelo de Engset y 5 fuentes para el de Bernoulli.

a) Erlang:

$$E_5(2) = B_5(2)$$

$$E_N(A) = \frac{\frac{A^N}{N!}}{1 + A + \frac{A^2}{2!} + \dots + \frac{A^N}{N!}}$$

$$E_5(2) = \frac{\frac{2^5}{5!}}{1 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!} + \frac{2^5}{5!}}$$

$$E_5(2) = 0.036697$$

b) Engset:

$$a = \frac{0.2}{1 - 0.2}$$

$$a = \frac{\frac{A}{M}}{1 - \frac{A}{M}}$$

$$M = 10 ; N = 5$$

$$M > N$$

Debido a que las congestiones en el modelo de Engset son menores que en el modelo de Erlang, en este caso se tiene que  $E < 0.04$  y se puede aproximar:

$$a = 0.25$$

De acuerdo a la fórmula (3-23) y utilizando las fórmulas de combinaciones:

$$\binom{M}{N} = \frac{M!}{N!(M-N)!}$$

$$\binom{10}{0} = 1 ; \binom{10}{1} = 10 ; \binom{10}{2} = 45 ; \binom{10}{3} = 120 ; \binom{10}{4} = 210 ; \binom{10}{5} = 252$$

$$E = \frac{(252) (.25)^5}{1 + 10 (.25) + 45 (.25)^2 + 120 (.25)^3 + 210 (.25)^4 + 252 (.25)^5}$$

$$E = 0.026593$$

Para la congestión de llamada se realiza el mismo cálculo pero con (M-1)

Prof. Ing. Hugo Carrión Robalino

$$B_{M,N}(a) = E_{M-1,N}(a)$$

$$B = \frac{(126)(.25)^5}{1 + 9(.25) + 36(.25)^2 + 84(.25)^3 + 126(.25)^4 + 126(.25)^5}$$

$$B = 0.016566$$

c) Bernoulli:

$$M = N = 5$$

$$a = \frac{\frac{A}{M}}{1 - \frac{A}{M}}$$

$$a = \frac{0.4}{1 - 0.4}$$

$$E_N = \left[ \frac{a}{1+a} \right]^M$$

$$E_N = \left[ \frac{0.6667}{1+0.6667} \right]^5$$

$$a = 0.6667$$

$$E_N = 0.010242$$

M	N	Dist.	a	Congestión de tiempo %		Congestión de llamada %	
∞	5	Erlang	0.0	0.03669	3.7	0.036697	3.7
10	5	Engset	0.250	0.02659	2.6	0.016566	1.65
5	5	Bernoulli	0.667	0.01024	1.0	0.0	0

## 4. SISTEMAS DE ESPERA

### 4.1 Sistemas de Espera

Cuando un sistema se encuentra en estado de bloqueo debido a la ocupación de todos sus órganos y se le ofrece una llamada, ésta puede perderse o esperar, según sea la filosofía empleada por el sistema.

En los sistemas de pérdida, la llamada que al llegar encuentra el sistema en estado de bloqueo, se pierde inmediatamente y el abonado está obligado a repetir su intento si desea realizar su conversación.

Sin embargo existen sistemas donde la llamada que encuentra congestión en su aparición no se pierde sino que espera a ser atendida. En la realidad y por razones obvias, este tiempo de espera debe tener un límite razonable que después de cumplirse sin que la llamada se atienda, se pierde el intento. Se tienen pues mezclas de sistemas de pérdida y espera según convenga en el diseño.

Al estudiar el sistema de espera se toman las siguientes suposiciones:

- a.- El proceso de aparición de llamadas sigue la ley de Poisson.
- b.- El proceso de duración de llamadas sigue la ley de exponencial negativa.

Las llamadas que no son atendidas inmediatamente debido a congestión hacen fila para su tratamiento según la disciplina de colas utilizada. Esta disciplina de colas es determinada por el sistema diseñado y puede ser:

#### a.- Primero en llegar, primero atendido

Las llamadas van haciendo cola y el sistema las va procesando, comenzando por la más antigua y en el orden que aparecieron.

#### b.- Sistema aleatorio

Las llamadas en la cola son escogidas al azar por el sistema para su procesamiento.

Para un sistema de espera con un número  $N$  de órganos, Erlang desarrolló las siguientes ecuaciones.

$t_w$  Espera media de las **ocupaciones demoradas**

$P(>t)$  Probabilidad de sobrepasar un determinado tiempo  $t$  de espera; el porcentaje de **ocupaciones ofrecidas** que tengan que esperar más del tiempo  $t$  hasta que comiencen a cursarse.

$P(>0)$  Probabilidad de espera; el porcentaje de **ocupaciones ofrecidas** que no se cursen inmediatamente; caso límite de la probabilidad  $P(>t)$  para  $t=0$ .

Si bien es verdad que los valores de la espera media “ $t_w$ ” y de la probabilidad  $P(>t)$  de sobrepasar un tiempo  $t$  preestablecido para  $t>0$  depende del tiempo medio de ocupación  $t_m$  de las líneas de salida, se



puede eliminar  $t_m$  como factor de cálculo, si todos los tiempos se indican en múltiplos de  $t_m$ ; por ejemplo  $t_w/t_m$  y  $t/t_m$ .

Para la espera media  $\bar{t}_w$  de las ocupaciones ofrecidas rige siempre:

$$\bar{t}_w = t_w \cdot P(> 0) \tag{4-1}$$

#### 4.1.1 Tiempos de ocupación distribuidos de forma exponencial

Los tiempos de ocupación distribuidos en forma exponencial se basa en que el tiempo de las ocupaciones se determine definitivamente por el comportamiento de los abonados, o sea p. ej., en el dimensionado del número de equipos de conmutación existentes en la vía telefónica. También se pueden emplear los datos para tiempos de ocupación distribuidos de forma exponencial cuando los tiempos de ocupación no sean constantes ni estén distribuidos de forma exponencial, porque dan resultados tendientes a mayor seguridad.

para  $A < N$  las fórmulas establecidas por A.K.Erlang son:

$$\frac{t_w}{t_m} = \frac{I}{N - A} \tag{4-2}$$

$$P(> 0) = \frac{\frac{N - A}{N!} \frac{A^N}{N!}}{\sum_{i=0}^{N-1} \frac{A^i}{i!} + \frac{N - A}{N!} \frac{A^N}{N!}} = E_{2,N}(A) \quad \text{Erlang No.2} \tag{4-3}$$

Para  $N=1$  rige  $P(>0)=A$  (4-3a)

Cuando las ocupaciones se cursan en el orden de su llegada

$$P(> t) = P(> 0) e^{-\frac{t}{t_m}(N-A)} = P(> 0) e^{-\frac{t}{t_w}} \tag{4-4}$$

La relación entre la fórmula de Erlang No.1

$$E_{1,N}(A) = \frac{\frac{A^N}{N!}}{\sum_{i=0}^N \frac{A^i}{i!}} \tag{4-5}$$

y la fórmula de Erlang No.2 (4-3) que es la probabilidad de espera es la siguiente:

$$E_{2,N}(A) = \frac{E_{1,N}(A)}{1 - \frac{A}{N}(1 - E_{1,N}(A))} \quad (4-6)$$

El valor de  $E_{1,N}(A)$  se determina por medio de las tablas de desbordamiento mediante la relación:

$$E_{1,N}(A) = \frac{R}{A} \quad (4-7)$$

Por lo tanto:

$$P(> 0) = \frac{RN}{A(N - A + R)} \quad (4-8)$$

Cuando se tiene  $t/t_m$ , se puede calcular  $P(>t)$  mediante la fórmula (4-3).

### Ejemplo 13.

En un sistema de espera de Erlang se tiene un tráfico ofrecido de 3 Erlangs y un total de 6 órganos y con accesibilidad completa. Calcular la probabilidad de espera, y la probabilidad de que las llamadas se pierdan si el sistema bota las llamadas que esperan más de 15 segundos. Utilizar un tiempo promedio de 60 segundos para la duración de las llamadas.

$$\begin{aligned} N &= 6 \\ A &= 3 \\ E_{1,N}(A) &= 0.052157 \text{ (en la tabla de Erlang)} \end{aligned}$$

$$E_{2,N}(A) = \frac{E_{1,N}(A)}{1 - \frac{A}{N}(1 - E_{1,N}(A))} \quad E_{2,N}(A)$$

$$E_{2,6}(3) = \frac{N \cdot E_{1,N}(A)}{N - A + A \cdot E_{1,N}(A)} = \frac{6 \times 0.052157}{6 - 3 + (3 \times 0.052157)}$$

$$E_{2,6}(3) = 0.099143 = P(>0)$$

O sea el 9.91% de las llamadas tienen que esperar.

$$P(>t \text{ seg}) = P(>0) e^{-(t/t_m)(N-A)}$$

$$P(>15 \text{ seg}) = (0.099143) e^{-(15/60)(6-3)} = 0.046832$$

$$P(>15 \text{ seg}) = 0.046832$$

El 4.68% de las llamadas se pierden después de esperar 15 segundos.

A(Erl.)	N	$E_{1,N}(A)$	$E_{2,N}(A)$	P(>5 seg)	P(>10 seg)	P(>15 seg)	P(>20 seg)
2	6	0.012	0.018	0.0129	0.0092	0.0066	
3	6	0.0521	0.099	0.0772	0.0601	0.0468	0.0365
4	6	0.1171	0.2847	0.2401	0.2040	0.1726	
5	6	0.1918	0.5875	0.54	0.4973	0.4575	

**Ejemplo 14.**

Datos: Grupo de N=8 líneas de salida,  
 accesibilidad completa,  
 oferta A= 4.54 Erl.

Los tiempos de ocupación de las líneas de salida están distribuidos de forma exponencial con el tiempo medio de ocupación  $t_m = 120$  s, las ocupaciones ofrecidas se cursan en el orden de su llegada.

Se debe determinar:

- a) La probabilidad de espera.
- b) La espera media  $t_w$  de las ocupaciones demoradas.
- c) La espera media  $\bar{t}_w$  de las ocupaciones ofrecidas.
- d) La probabilidad  $P(>60 \text{ s})$  de que las ocupaciones tengan que esperar mas de  $t=60$  s, hasta que se cursen.

a) De las tablas de Erlang se calcula  $E_{1,N}(A)=0.0498=0.05$

$$E_{2,8}(4.54) = \frac{8 \times 0.05}{8 - 4.54 + (4.54 \times 0.05)}$$

$$E_{2,8}(4.54) = 0.108 = P(>0)$$

O sea el 10.8 % de las llamadas ofrecidas tienen que esperar.

b) La espera media  $t_w$  de las ocupaciones demoradas se determina de la siguiente manera:

$$t_w/t_m = 1/(N-A) = 1/(8 - 4.54) = 0.289$$

con  $t_m = 120$ s  
 $w = 34.68$  s.

c) La espera media  $\bar{t}_w$  de las ocupaciones ofrecidas

$$\bar{t}_w = t_w \cdot P(>0) = 34.7 \times 0.108 = 3.75 \text{ s.}$$

d) La probabilidad  $P(>60 \text{ s})$  de que las ocupaciones ofrecidas tengan que esperar más de 60 s. hasta que se cursen, se puede determinar con la fórmula (4-4)

$$P(>60 \text{ s.}) = 0.108 e^{-60/120(8-4.54)} = 0.01914$$

El 1.91 % de las llamadas ofrecidas se pierden después de esperar 60 segundos.

A(Erl.)	N	$E_{1,N}(A)$	$E_{2,N}(A)$	tw	$\bar{t}_w$	P(>30 s.)	P(>60 s.)
4.54	5	0.2464	0.7804	260.8	203.5	0.6956	0.62
4.54	6	0.1571	0.4337	82.19	35.64	0.3010	0.2090
4.54	7	0.0925	0.2248	48.78	10.96	0.1215	0.0657
4.54	8	0.0498	0.108	34.68	3.75	0.0454	0.01914
4.54	9	0.0245	0.048	26.90	1.29	0.0157	0.00516
4.54	10	0.0110	0.0199	21.97	0.43	0.00508	0.00129

Con N=5 el 78.04 % de las llamadas ofrecidas no se cursan inmediatamente; tienen que esperar.  
 Con N=6 el 43.37 % de las llamadas ofrecidas no se cursan inmediatamente; tienen que esperar.  
 Con N=7 el 22.48 % de las llamadas ofrecidas no se cursan inmediatamente; tienen que esperar.  
 Con N=8 el 10.8 % de las llamadas ofrecidas no se cursan inmediatamente; tienen que esperar.  
 Con N=9 el 4.8 % de las llamadas ofrecidas no se cursan inmediatamente; tienen que esperar.  
 Con N=10 el 1.99 % de las llamadas ofrecidas no se cursan inmediatamente; tienen que esperar.

Con N=5 el 69 % de las llamadas ofrecidas se pierden después de esperar 30 segundos  
 Con N=6 el 30.1 % de las llamadas ofrecidas se pierden después de esperar 30 segundos  
 Con N=7 el 12.15 % de las llamadas ofrecidas se pierden después de esperar 30 segundos  
 Con N=8 el 4.54 % de las llamadas ofrecidas se pierden después de esperar 30 segundos  
 Con N=9 el 1.57 % de las llamadas ofrecidas se pierden después de esperar 30 segundos  
 Con N=10 el 0.50 % de las llamadas ofrecidas se pierden después de esperar 30 segundos

Con N=5 el 62 % de las llamadas ofrecidas se pierden después de esperar 60 segundos  
 Con N=6 el 20.9 % de las llamadas ofrecidas se pierden después de esperar 60 segundos  
 Con N=7 el 6.57 % de las llamadas ofrecidas se pierden después de esperar 60 segundos  
 Con N=8 el 1.91 % de las llamadas ofrecidas se pierden después de esperar 60 segundos  
 Con N=9 el 0.51 % de las llamadas ofrecidas se pierden después de esperar 60 segundos  
 Con N=10 el 0.129 % de las llamadas ofrecidas se pierden después de esperar 60 segundos

Se concluye que:

Existe mayor porcentaje de ocupaciones ofrecidas que no se cursan inmediatamente cuando es menor el número de líneas

Existe mayor porcentaje de pérdidas cuando se tiene menos tiempo de espera

Existe mayor porcentaje de pérdidas cuando se tiene menos líneas de atención

### Ejemplo 15.

Oferta A= 6 Erl,

Accesibilidad completa,

Los tiempos de ocupación de las líneas de salida están distribuidos de forma exponencial, con el tiempo medio de ocupación  $t_m = 30$  s, las ocupaciones se cursan en el orden de su llegada.

A determinar:

Número de líneas de salida, en el que el 1 %, como máximo, de todas las ocupaciones ofrecidas tenga que esperar más de 60 s hasta que se cursen.

Para  $A = 6$  Erl  
 $t/tm = 60/30 = 2$   
 Para  $N = 7$

A ( Erl)	N	$E_{1,N}(A)$	$E_{2,N}(A)$	P(>60 s.)
6	7	0.19	0.6138	
6	8	0.12	0.3569	

Aplicando la formula (4-4)

$$P(> t) = P(> 0) e^{-\frac{t}{tm}(N-A)} = P(> 0) e^{-\frac{t}{tw}}$$

$$P(> 60s) = 0.6138 e^{-2(7-6)} = 0.083$$

$$P(> 60s) = 0.3569 e^{-2(8-6)} = 0.0065$$

Para cumplir la condición de  $P(\geq 60s) \leq 0.01$ , se deben prever  $N = 8$  líneas de salida.

#### 4.1.2 Tiempos de ocupación constantes

En los órganos de control común de una central telefónica se tiene que las llamadas siguen la ley de aparición de Poisson, pero no efectúan su desaparición según la ley exponencial negativa sino que tienen tiempos de ocupación constantes dependiendo de su diseño. En otras palabras, el tiempo de ocupación no depende de los abonados sino que, independientemente de la duración de las llamadas, su trabajo requiere un tiempo determinado y constante.

Las investigaciones teóricas fundamentales se deben sobre todo a A.K. Erlang y C.D Crommelin. Sin embargo, los resultados de estas investigaciones no se pueden representar generalmente en formulas fácilmente manejables. Cuando se refieren a  $N=1$  las fórmulas son las siguientes:

Para  $N=1$  y con  $A < N$

$$\frac{tw}{tm} = \frac{1}{2(1-A)} \tag{4-9}$$

Para  $N=1$  rige  $P(>0)=A$  (4-10)

Se debe advertir que para la probabilidad de espera  $P(>A)$  incluso con número de líneas de salida  $N=1$  se pueden emplear como aproximación los valores referentes a tiempos de ocupación distribuidos de forma exponencial. Los valores de  $P(>0)$  son, con tiempos de ocupación constantes.

Para varios órganos, las ecuaciones se complican tanto que se utilizan aproximaciones para desarrollar tablas y gráficos donde encuentran los valores correspondientes.

#### Ejemplo 16.

Grupo de  $N=1$  línea de salida

Oferta  $A=0.3$  Erl,

Los tiempos de ocupación de la línea de salida son constantes ( $tm = 30$  ms), las ocupaciones demoradas se cursan en orden casual.

A determinar:

- a) La probabilidad de espera.
  - b) La espera media de las ocupaciones demoradas.
  - c) La probabilidad  $P(> 60 \text{ ms})$  de que las ocupaciones ofrecidas tengan que esperar mas de  $t = 60 \text{ ms}$  hasta que se cursen.
- a) Según la formula (4-10) rige con  $N=1$  línea de salida para la probabilidad de espera  $P(>0)=A$ , o sea, en este caso,  $P(>0)=0.3$ , es decir, un 30 % de las ocupaciones ofrecidas debe esperar.
- b) Calculando con la formula (4.9) se obtiene:

$$\frac{tw}{tm} = \frac{I}{2(1-A)} = \frac{I}{2(1-0.3)} = 0.714$$

con  $tm = 30 \text{ ms}$  se tiene  $tw = 21.4 \text{ ms}$

**Ejemplo 17.**

Grupo de  $N= 20$  líneas de salida,  
 Accesibilidad completa  
 Oferta  $A= 18 \text{ Erl}$ ,  
 Tiempos de ocupación constantes de las líneas de salida ( $tm = 30\text{s}$ )

A determinar:

- a) La probabilidad de espera.
  - b) La espera media  $tw$  de las ocupaciones demoradas.
  - c) La espera media  $\bar{tw}$  de las ocupaciones ofrecidas.
- a) Aplicando la formula (4-3), cuando los tiempos de ocupación de las líneas de salida están distribuidos de forma exponencial se obtiene

$$P(> 0) = \frac{\frac{N}{N-A} \frac{A^N}{N!}}{\sum_{i=0}^{N-1} \frac{A^i}{i!} + \frac{N}{N-A} \frac{A^N}{N!}} = 0.55$$

Aplicando la formula (4-8), cuando los tiempos de ocupación son constantes es aproximadamente igual cuando los tiempos de ocupación de las líneas de salida están distribuidos de forma exponencial se obtiene:

$$P(> 0) = \frac{R N}{A(N - A + R)} = 0.52$$

es decir el 55 % o 52 % de las ocupaciones ofrecidas debe esperar

- b) Si se aplica la formula (4-9) y que se refieren a  $N=1$  que no es este caso Se aplica un diagrama específico para  $N$  mayores que 1, dando como resultado:

$$\frac{tw}{tm} = 0.28, \text{ teniendo entonces } tw = 0.28 \cdot 30 \text{ s} = 8.4 \text{ s.}$$

c) Empleando los resultados de a) y b) se obtiene con la formula(4-1):

$$\bar{t_w} = t_w \cdot P(> 0) = 8.4 \cdot 0.52 = 4.4 \text{ s}$$

es decir, la espera media de las ocupaciones ofrecidas es  $\bar{t_w} = 4.4 \text{ s}$ .

### Ejemplo 18.

Grupo de N= 8 líneas de salida,

Accesibilidad completa,

Oferta A = 6.4 Erl,

Tiempos de ocupación constantes de las líneas de salida  $t_m=20 \text{ s}$ , las ocupaciones se cursan en el orden de su llegada.

A determinar:

El porcentaje de las ocupaciones que deben esperar mas de  $t= 30 \text{ s}$  hasta que se cursen, es decir, la probabilidad  $P(> 30 \text{ s})$ .

$$\text{Con } \frac{t}{t_m} = \frac{30}{20} = 1.5$$

Aplicando la formula (4-3) se tiene:  $P(> 0) = 0.4576$

Aplicando la formula (4-4) se tiene:

$$P(> t) = P(> 0) e^{-\frac{t}{t_m}(N-A)} = P(> t) = 0.4576 e^{-\frac{30}{20}(8-6.4)} = 0.04151$$

Es decir el 4.15 % de las ocupaciones ofrecidas deben esperar mas de 30 s. si los **tiempos de ocupación de las líneas de salida están distribuidos de forma exponencial** con el tiempo medio de ocupación de  $t_m=20 \text{ s}$ .

Pero este no es el caso ya que los **tiempos de ocupación son constantes** de las líneas de salida  $t_m=20 \text{ s}$ , las ocupaciones se cursan en el orden de su llegada.

Para estos casos no existen formulas especificas, sino diagramas para diferentes valores de N; tiempos de ocupación constantes; ocupaciones cursadas en el orden de su llegada

$$P(> t) = P(> 30 \text{ s}) = 0.0033$$

es decir, el 0.33% de las ocupaciones ofrecidas deben esperar mas de 30 s.

Se concluye es que cuando los tiempos de ocupación de las líneas de salida están distribuidos de forma exponencial los porcentajes de las ocupaciones ofrecidas deben esperar mas que cuando los **tiempos de ocupación son constantes** de las líneas de salida, con :

tiempos medios de ocupación iguales y

con ocupaciones que se cursen en el orden de su llegada.

Para este ejemplo 4.15 % y 0.33%

### Ejemplo 19.

N=1 línea de salida,

**Tiempos de ocupación constantes** de la línea de salida ( $t_m = 50$  ms),  
Las ocupaciones demoradas **se cursan en orden casual**,

A determinar:

Oferta admisible A, en que el 1 % de las ocupaciones ofrecidas tengan que esperar mas de  $t=25; 50; 100; 150, 200$  ms hasta que comience a cursar,

Con  $t/t_m = 0.5; 1; 2; 3; 4$  se aplicaría la formula (4-4) sí:  
las ocupaciones demoradas **se cursan en el orden de su llegada y los tiempos de ocupación están distribuidos de forma exponencial**

Para el caso de tiempos de ocupación constantes se pueden emplear como aproximación los valores referentes a tiempos de ocupación distribuidos de forma exponencial, estos valores son solo insignificamente inferiores. Esta aproximación es valida para los dos casos al cursar las ocupaciones demoradas:

En el orden de su llegada y

En orden casual

$$P(> t) = P(> 0) e^{-\frac{t}{t_m}(N-A)} \quad \text{Para } N = 1 \text{ rige } P(\geq 0) = A$$

$$0.01 = A e^{-0.5(1-A)} \Rightarrow 0,5A + \ln A = -4,105 \Rightarrow A = 0.02 \text{ Erl}$$

$$0.01 = A e^{-1(1-A)} \Rightarrow A + \ln A = -3.605 \Rightarrow A = 0,14 \text{ Erl}$$

$$0.01 = A e^{-2(1-A)} \Rightarrow 2A + \ln A = -2,605 \Rightarrow A = 0,28 \text{ Erl}$$

$$0.01 = A e^{-3(1-A)} \Rightarrow 3A + \ln A = -1.605 \Rightarrow A = 0,38 \text{ Erl}$$

$$0.01 = A e^{-4(1-A)} \Rightarrow 4A + \ln A = -0,605 \Rightarrow A = 0,47 \text{ Erl}$$



## 5. Sistema de Desborde y Enrutamiento

### 5.1 Desbordamiento, Método del valor de Dispersión

#### 5.5.1 Generalidades

Para caracterizar las fluctuaciones estadísticas del tráfico de desbordamiento además de su intensidad de tráfico también su valor de dispersión.

El desbordamiento parte de que un tráfico puramente casual con una intensidad de tráfico (Oferta)  $A$  se ofrece con accesibilidad completa a un grupo de  $N$  líneas.

Si el tráfico se cursa con la pérdida  $B$ , el tráfico rechazado ( tráfico de desbordamiento) tiene la intensidad de tráfico  $R= AB$  y un valor de dispersión  $D \geq 0$ .

Los datos de desbordamiento se necesitan como bases de trabajo para el método del valor de dispersión, que es un procedimiento para dimensionar los grupos de líneas de desbordamiento en los sistemas de pérdidas de accesibilidad completa.

Para la intensidad  $R$  del Tráfico de desbordamiento se obtiene con la fórmula de Erlang

$$R=AB = A E_{l,N}(A) = \frac{A^{N+1}}{\sum_{i=0}^N \frac{A^i}{i!}} \quad (5-1)$$

Para el valor de dispersión  $D$  del tráfico de desbordamiento rige:

$$D = R \left( \frac{A}{N+1 - A + R} + R \right) \quad (5-2)$$

La intensidad de tráfico y el valor de dispersión están relacionados con la distribución del número de ocupaciones existentes simultáneamente de la forma siguiente:

Con

$$P(n, A) = e^{-A} \frac{A^n}{n!} \quad (\text{para } n = 0, 1, 2 \dots)$$

Probabilidad de que en el tráfico considerado existan simultáneamente  $n$  ocupaciones

$$\mu = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n$$

Numero medio de ocupaciones que existen al mismo tiempo o intensidad de tráfico.

$$\sigma^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n - \mu)^2 P_n$$

( Varianza), Desviación media cuadrada, con respecto al valor medio  $\mu$ , del numero de ocupaciones que existen al mismo tiempo.

Rige:

$$\text{Intensidad de tráfico (p. ej., A o y o R)} = \mu, \quad (5-3)$$

$$\text{Valor de dispersión} \quad D = \sigma^2 - \mu \quad (5-4)$$

$$D = V - \mu \quad (5-4')$$

De estas definiciones se puede deducir de manera formal que al combinar  $v$  tráfico estadísticamente independientes entre si con las intensidades de tráfico  $R_1, R_2, \dots, R_v$  y los valores de dispersión  $D_1, D_2, \dots, D_v$ , rigen para la intensidad de tráfico  $R$  y el valor de dispersión  $D$  del tráfico de suma resultante las siguientes fórmulas:

$$R = \sum_{i=1}^v R_i \quad \text{y} \quad D = \sum_{i=1}^v D_i \quad (5-5)$$

**Los Tráficos independientes entre si estadísticamente** son p. ej., los tráfico de desbordamiento de grupos separados, a los que se ofrezcan un tráfico puramente casual.

**Los Tráficos dependientes entre si estadísticamente** son, p.ej., el tráfico ofrecido a un grupo de salida y el tráfico de desbordamiento de dicho grupo.

Particularmente, **los tráfico de desbordamiento** son dependientes entre si cuando sus ocupaciones se hayan ofrecido previamente aunque sea sólo en parte a las mismas líneas de salida.

**La distribución Poisson tiene una particular propiedad, que su Varianza es igual a su valor medio.**

$$V = \mu$$

en consecuencia su valor de dispersión es igual a cero.

$$D=0$$

La relación varianza-valor medio es igual a la unidad

$$\frac{V}{\mu} = 1 = V_{mR}$$

En un tráfico al azar con Varianza igual a la media es raramente encontrado en la práctica.

### 5.1.2 El dimensionamiento de grupos de desbordamiento según el método del valor de dispersión

Se parte de que a un grupo de líneas de desbordamiento se le ofrece un tráfico de desbordamiento de la intensidad de tráfico  $R_s$  y del valor de dispersión  $D_s$ . Este tráfico ofrecido es normalmente la suma

de varios tráficos parciales (tráficos de desbordamiento de varios grupos, así como, eventualmente, tráfico puramente casual).

El método del valor de dispersión permite determinar el número de líneas de salida  $N_2$  del grupo de desbordamiento de forma tal, que el tráfico perdido no cursado por dicho grupo con accesibilidad completa (tráfico de desbordamiento) tenga la intensidad de tráfico preestablecida  $R_V$ .

Sin embargo, no se pueden indicar:

- Cuando el tráfico ofrecido se compone de tráficos parciales de distintas intensidades de tráfico y valores de dispersión,
- ni los porcentajes de la intensidad  $R_V$  del tráfico perdido distribuidos entre los tráficos perdidos parciales ofrecidos.

La idea fundamental del método del valor de dispersión para dimensionar grupos de desbordamiento consiste en sustituir para el proceso de cálculo al tráfico total ofrecido de forma aproximativa por el tráfico de los mismos valores característicos dados  $R_S$  y  $D_S$  que desborda de un solo grupo con accesibilidad completa y tráfico puramente casual ofrecido.

Para el par de valores dado  $R_S$  y  $D_S$  es conveniente tomar de los diagramas de trabajo el número de líneas de salida  $N_E$  y la oferta  $A_E$  para este grupo equivalente, continuando el cálculo también con valores fraccionarios de  $N_E$ .

La determinación del número de líneas de salida  $N_2$  del grupo de desbordamiento se realiza de la siguiente manera:

- El número (que, por regla general, no será entero) de líneas de salida  $N^* = N_2 + N_E$  de un grupo de salida debe determinarse de forma tal, que la oferta, con accesibilidad completa, desborde un tráfico que tenga la intensidad de tráfico  $R_V$ .
- El número de líneas de salida a determinar es entonces  $N_2 = N^* - N_E$ , redondeándose  $N_2$  hacia arriba para tener un número entero.

El valor de dispersión  $D_V$  del tráfico perdido que se puede leer también en los datos de desbordamiento como resultado adicional no es de interés en este caso.

Sin embargo, dicho valor es de importancia en los casos en que este tráfico de desbordamiento con los valores característicos  $R_V$  y  $D_V$  se sume a otros tráficos y se ofrezca a otro grupo de desbordamiento, cuyo número de líneas de salida también haya que determinar.

Este método puede emplearse repetidas veces por etapas para dimensionar redes de conmutación de desbordamiento múltiple.

El método desarrollado por R. I. Wilkinson bajo la designación “Equivalent Random Theory” para el dimensionado de grupos de desbordamiento se basa en la misma idea fundamental que el método del valor de dispersión y da los mismos resultados.

La única diferencia es que Wilkinson emplea la varianza  $\sigma^2 = D + R$

En lugar del valor de dispersión  $D = \sigma^2 - \mu$

### Ejemplo 20

Entre dos poblaciones se debe cursar en ambas direcciones un tráfico de  $A = 15$  Erl cada una por líneas de salida unidireccionales y bidireccionales. En cada dirección deben preverse, por razones de economía,  $N_1 = 13$  líneas de salida unidireccionales. Se admite una pérdida  $B = 1\%$  para el tráfico en cada dirección. Todos los grupos se operan con accesibilidad completa.

Determinar:

El número  $N_2$  de líneas de salida bidireccionales necesarias.

De las tablas de desbordamiento con  $A = 15$  Erl y  $N = 13$ , para cada dirección de tráfico  $R = 3,95$  Erl y  $D = 4,5$

OFERTA	A	A	OFERTA Equivalente	$A_E$
2 Grupos de tráfico	↓	↓	Grupo equivalente	↓
	$2 \times N_1$ líneas de salida			$N_E$ líneas de salida
	↓	↓		↓
Tráfico de Desbordamiento R;D		R;D		$R_S; D_S$
Suma de Tráfico		$R_S; D_S$		↓
		↓		↓
Grupo de Desbordamiento		$N_2$ líneas de salida		$N_2$ líneas de salida
Tráfico Perdido		↓		↓
		$R_V; D_V$		$R_V; D_V$
Red de conmutación existente			Red de conmutación equivalente	

Al grupo de desbordamiento se le ofrece por consiguiente un tráfico de suma con los valores característicos

$$R_S = 2 \times 3,95 \text{ Erl} = 7,9 \text{ Erl} \text{ y}$$

$$D_S = 2 \times 4,5 = 9,0$$

En el diagrama 1

En el eje vertical se encuentra R

En el eje horizontal se encuentra N

Con los valores de  $R_S = 7,9$  Erl y  $D_S = 9,0$ , en el punto de intercepción cruza la curva de  $A = 23,3$  Erl, correspondiente a  $A_E$ , y en su proyección a N corresponde a  $N_E = 17$

Esto significa que, al grupo de desbordamiento  $N_E = 17$  se le ofrece tráfico total de  $A_E = 23,3$  Erl.

De acuerdo con la pérdida admitida  $B = 1\%$ , puede perderse de la oferta total  $2A = 30$  Erl, un total de  $R_V = B \cdot 2A = 0,01 \cdot 30 \text{ Erl} = 0,3 \text{ Erl}$

El número  $N_2$  de líneas del grupo de desbordamiento deberá dimensionarse de forma tal, que con la oferta  $A_E$  para un grupo de  $N^* = N_E + N_2$  líneas de salida se origine un tráfico de desbordamiento de la intensidad de tráfico  $R_V = 0,3 \text{ Erl}$ .

Para el par de valores  $0,3 \text{ Erl}$  y  $A_E = 23,3$  se toma del diagrama 1

$$N^* = 32,9 \text{ líneas de salida}$$

$$\text{El número de líneas de salida } N_2 = N^* - N_E = 32,9 - 17,0 = 15,9$$

En consecuencia se deben prever **16 líneas de salida bidireccionales**

## 5.2 Métodos de calculo para redes con encaminamiento alternativo:

En un sistema multicentral, Figura 5.1 cuando una llamada de la central A a la central B, no puede cursarse por el enlace AB debido a congestión, se puede diseñar el sistema para que la llamada se reenrute hacia una tercera central C y allí se encamine a su destino B. En este caso la combinación de las rutas AC y CB son el desborde de la ruta AB.

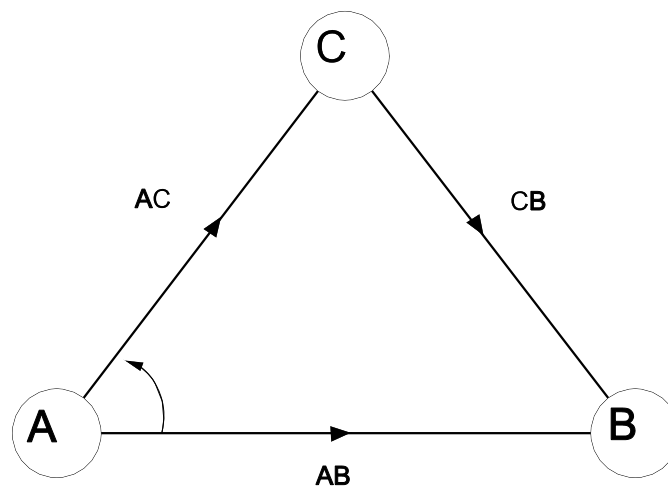
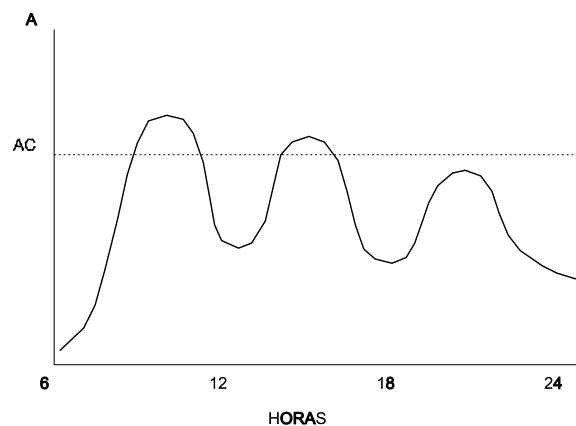


Fig. 5.1: Sistema Multicentral

Todas aquellas llamadas que por congestión no puedan ser cursadas de la central A hacia la central B por la ruta AB tomarán el camino a través de la central C. Esta posibilidad de enrutamiento de desborde trae la ventaja para la ruta directa o de primera intención AB que puede ser diseñada para una probabilidad de pérdida mayor, ya que el tráfico rechazado por congestión no se pierde sino que se reenruta por el enlace de desborde. De esta forma la ruta directa resulta de un costo menor. Sin embargo, el tráfico reenrutado por el enlace de desborde es sumamente irregular pues comprende únicamente los picos de tráfico que no pudieron ser enrutados por el enlace de primera intención.

En la Figura 5.2 se observa el tráfico ofrecido a una ruta directa durante el día. Esta ruta cursa la parte principal del área de tráfico de la curva dejando los picos para la ruta de desborde (encima de la línea de AC).



**Fig. 5.2: Tráfico ofrecido a una ruta directa durante el día**

Como se observa, si el tráfico inicial ofrecido a la ruta primera sigue las leyes de Poisson para la aparición de las llamadas, donde la Varianza es igual al promedio del tráfico, los picos desbordados hacia el enlace de desborde no obedecen a las mismas leyes ni se les puede aplicar las teorías de tráfico convencionales. El tráfico desbordado en términos generales tiene una Varianza de un valor bastante superior a su media por lo que se requieren más órganos para cursar el mismo tráfico de primera intención.

Se deduce entonces que lo que se gana con el sistema de desborde en la ruta de primera intención se pierde al perjudicar con el tráfico desordenado del desborde a la ruta de segunda intención.

Sin embargo, si una central en un sistema multicentral desborda por una sola ruta el tráfico el desborde de varias rutas de primera intención, se pueden obtener beneficios de todos estos enlaces y al mismo tiempo, cubriendo la ruta final o de segunda intención los desbordos de todas las rutas directas, su tráfico puede hacerse lo suficientemente grande como para no ser insuficiente a pesar de ser este tráfico desbordado. Esta es la filosofía del sistema de desborde.

Con este método de diseñar la red de enlaces puede ahorrarse dinero como consecuencia de:

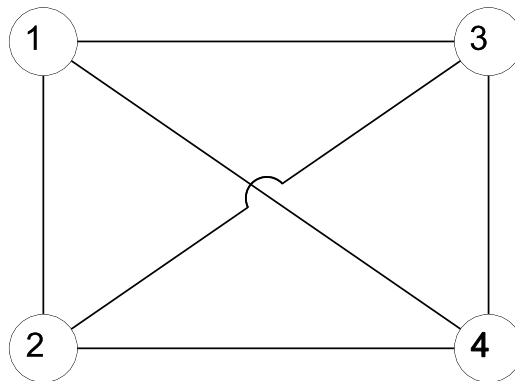
- La ruta directa con frecuencia es mas corta que la alternativa, por lo que los costes de los cables son menores para los circuitos directos.
- Las llamadas encaminadas por la ruta directa puentean la etapa de conmutación tandem, economizando de esta forma equipos de conmutación.
- Los circuitos de la ruta directa pueden operarse con una eficiencia mayor (esto implica también mayor congestión), puesto que se ofrece un camino alternativo.
- Las rutas hacia y desde la etapa de conmutación Tandem ( C ) no solo cursan el tráfico de A a B, sino también paquetes de tráfico desde A a otros destinos y desde otros orígenes a B. Este agrupamiento de los paquetes de tráfico permiten a ruta alternativa ser operada con una eficiencia mayor aunque normalmente este dimensionada para una congestión baja.

- En un sistema compuesto de varias centrales, la comunicación central entre ellas puede ser de los tipos: de malla, de estrella o una combinación optimizada de ambas, utilizando desbordes. Para interconectar “n” centrales se necesitan:

$$\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{n \cdot (n-1)}{2} \text{ enlaces bidireccionales o}$$

$$n(n-1) \text{ enlaces unidireccionales}$$

El sistema de malla provee la comunicación directa de todas las centrales con todas, sin centros de tránsito Tándem como se muestra en la Figura 5.3.

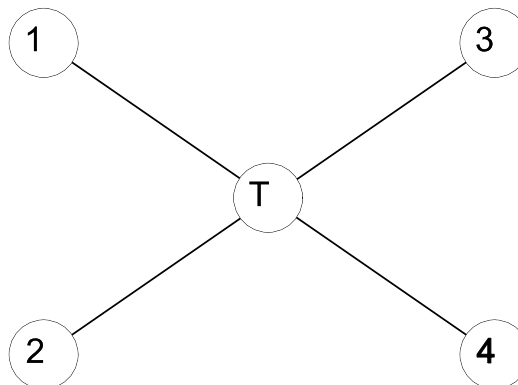


**Fig. 5.3: Sistema tipo malla**

Las centrales 1, 2, 3 y 4 se comunican entre sí sin centros Tandem.

Este sistema obliga a colocar enlaces entre todos los centros aunque estos sean muy pequeños y deficientes.

El sistema de estrella por el contrario, no considera enlaces entre las centrales sino que todas las centrales tienen rutas únicamente con un centro Tándem. De esta forma las rutas son más eficientes y económicas pero existe un nuevo costo: el del centro Tándem Figura 5.4.



**Fig. 5.4: Sistema tipo estrella**

Es conveniente obtener un sistema mezcla de ambos, donde se optimicen las cantidades de circuitos en las rutas de primera intención y se desborde por las rutas Tandem.

Si hay “n” centrales, solo se necesitan “n” enlaces bidireccionales con la central de tránsito, o “2n” enlaces si son unidireccionales. Existe un ahorro de enlaces, pero sin embargo un costo extra de la central de tránsito.

Con estos dos tipos de redes hay ventajas y desventajas, la red malla es mas cara si hay muchas centrales. En la red estrella, el coste de la central de tránsito puede ser a veces considerable, especialmente si hay pocas centrales en la red.

Otro aspecto de la elección de la red entre centrales es el aspecto de confiabilidad, si un enlace se queda fuera de servicio, cuales son las consecuencias para la comunicación entre centrales. Para la red en estrella, el punto sensible es la central de tránsito, puesto que si se queda fuera de servicio todas las comunicaciones entre las centrales son imposibles.

Por razones practicas y de seguridad, la mayoría de las redes intercentrales son una combinación de los dos tipos de red. Se utilizan redes directas entre centrales cuando están justificadas económicamente, y se conmutan en las centrales de tránsito en aquellos casos en los que esta es la mejor solución.

El encaminamiento alternativo tiene las ventajas de:

**Diversidad** : el tráfico puede utilizar rutas distintas para alcanzar su destino, y por lo tanto es posible alcanzar este destino usando una trayectoria diferente si una ruta está bloqueada por congestión o fallo.

**Eficiencia** : el tráfico se ofrece en primer lugar a la ruta directa, de elevada utilización que cursa la carga principal, mientras que el trafico desbordado se ofrece a rutas alternativas. Los pequeños paquetes de tráfico con origen con muchos puntos y destino a otros tantos puntos se combinan en estas rutas, permitiendo de este modo utilizarlas con mas eficiencia.

**Ventajas económicas**. Estas ventajas surgen de la eficiencia del tráfico sobre las rutas directas y alternativas. El encaminamiento directo también economiza equipo de conmutación de tránsito, el cual cuando se anade a una utilización de circuitos conduce a una economía en los requisitos de planta total común.

En cualquier esquema de encaminamiento alternativo, la disposición optima depende de los costes relativos y de la eficiencia de los tráficos cursados en la ruta directa y en la de desbordamiento.

### 5.2.1 Cálculo del numero de circuitos en la ruta de segunda elección

Las rutas de segunda elección cursaran trafico de desbordamiento y por consiguiente requerirán mas circuitos que si se les ofreciese tráfico de primera elección solamente. Por lo tanto tenemos que aplicar un método de cálculo que tenga en cuenta este hecho. Esto significa que pueden aplicarse varios métodos posibles:

- Método de Wilkinson
- Aproximación de Rapp
- Método de Hayward-Fredericks
- Método de O'Dell
- Modificaciones de los métodos anteriores para rutas en sistemas de mallas.

De todos estos métodos, el de Wlkinson y de Hayward-Fredericks se consideran más exactos y adecuados que el de O'Dell.

Las rutas de tránsito cursarán en general tanto tráfico de primera elección como de segunda elección. Se dimensionaran para congestiones bajas  $B_2; B_3$  para permitir de esta forma que el tráfico de tránsito de primera elección alcance su destino en una perdida  $B_2 + B_3$ .



Debido a que solo una parte del tráfico de encaminamiento alternativo se cursa a través de la central de tránsito, la pérdida total para dicho tráfico en general será menor que  $B_2 + B_3$ .

Esto es cierto aunque el tráfico de segunda elección experimente mayor congestión en la misma ruta que el tráfico de primera elección.

**5.3. Método R.I. Wilkinson o el método de la “teoría azar equivalente”**

Para cada ruta de elevada utilización AB, se calculan la media y la varianza del tráfico de desbordamiento.

Para la ruta de segunda elección se suman las medias y las varianzas para todos los tráficos ofrecidos a la ruta.

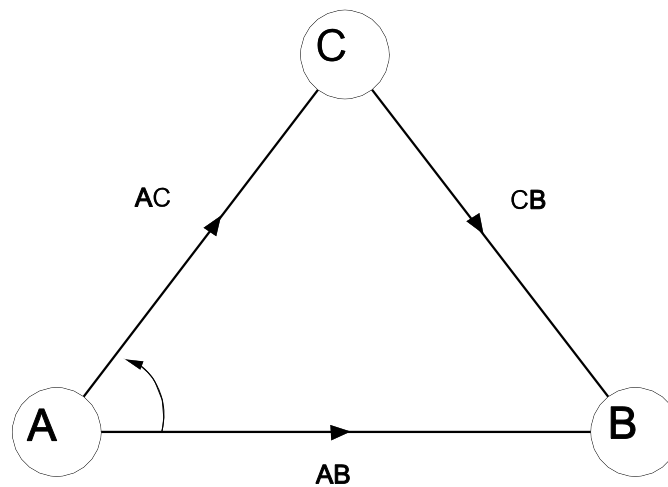


Fig. 5-5

Para las rutas de primera elección con accesibilidad completa  $k=N$ , tenemos para cada ruta:

$$R = AE_{N1}(A) \tag{5-6}$$

Varianza del tráfico rechazado

$$V_R = R \left( 1 - R + \frac{A}{N + I + R - A} \right) \tag{5-7}$$

Para el tráfico de primera elección:

$$R = A$$

Puesto que:

$$B = 1 \text{ para } N = 0$$

Para todos los tráficos se calculan:

$$R = \sum R_i \quad \text{y} \quad (5-8)$$

$$V = \sum V_i \quad (5-9)$$

Los valores de A y N que dan R y V, se consideran como si fueran un grupo equivalente con accesibilidad completa que ofrece el tráfico al grupo de segunda elección; es decir valores  $N^*$  y  $N^*$ .

Si se equipan  $N_2$  circuitos para la ruta de segunda elección, el tráfico perdido se calcula como si fuera de un grupo con accesibilidad completa con  $N^* + N_2$  circuitos y un tráfico A.

El numero  $N_2$  se determina a partir de:

$$\frac{A^* B_{N^*+N_2}(A^*)}{R} \leq B_2 \quad (5-10)$$

El numero de circuitos en la ruta CB se determina de forma análoga.

La intensidad de **tráfico cursado por circuito** en la ruta de segunda elección se calcula de la siguiente forma:

$$A_2 = \frac{(1 - B_2) \sum R_i}{N_2} \quad (5-11)$$

Si se necesita mayor rigor y exactitud puede calcularse el numero de circuitos necesarios sin tener en cuenta el desbordamiento particular  $AE_{N_1}(A)$ .

Si este numero es  $N'_2 (\leq N_2)$  los circuitos marginales adicionales son evidentemente  $N_2 - N'_2$  y la utilización marginal:

$$A_2 = \frac{AE_1(A)}{N_2 - N'_2} \quad (5-12)$$

Solo cuando  $AE_1(A)$  sea una parte considerable del tráfico total en la ruta de segunda elección,  $A_2$ , a partir de 5-12 da una diferencia significativa con la  $A_2$  calculada a partir de 5-11.

Si  $A_2$ , calculada a partir de 5-11 o 5-12 se desvía del valor utilizado para la determinación de  $N_1$ , es preciso volver a calcular  $N_1$  a través de todas las relaciones de encaminamiento alternativo chequeando toda la red.

## 5.4 Método de Aproximación del Dr. Y. Rapp

En general es difícil encontrar los valores numéricos para  $A^*$  y  $N^*$  que satisfacen a R y V.

No obstante Dr. Y. Rapp en 1964 encontró una solución aproximada.

$$A^* = V + 3 \frac{V}{R} \left( \frac{V}{R} - 1 \right) \quad (5-13)$$

$$N^* = \frac{A^* \left( R + \frac{V}{R} \right)}{R + \frac{V}{R} - 1} - R - 1 \quad (5-14)$$

que para muchos casos prácticos es suficiente, y para otros casos es un buen punto de partida para cálculos iterativos que permitan encontrar valores más precisos para  $A^*$  y  $N^*$ .

En general la solución da valores no enteros para  $N^*$ .

El mismo tipo de cálculo se aplica a la otra ruta de segunda elección CA.

A partir de los costos de las rutas tanto directas como alternas, el **Dr. Y. Rapp** desarrolló una fórmula para determinar el número de circuitos en las rutas directas o de primera intención. Las fórmulas de Rapp son las siguientes:

$$Z_{ij} = \frac{X_{ij}}{X_{it} + X_{tj}} \quad (5-15)$$

Donde:

- $X_{ij}$  = Costo del circuito directo entre la central de origen i y la de destino j
- $X_{it}, X_{tj}$  = Costo de los circuitos entre la central de origen i - Tandem y Tandem - central de destino j
- $Z_{ij}$  = Razón de costo entre centrales i y j

El número de circuitos de cada ruta directa se determina en forma indirecta mediante la fórmula:

$$A_{ij} [E(N_{ij}, A_{ij}) - E(N_{ij} + 1, A_{ij})] = Z_{ij} [1 - 0.3(1 - Z_{ij}^2)] \quad (5-16)$$

Se van dando valores a  $N_{ij}$  hasta que la igualdad se cumpla (o adquiera su mínima diferencia).

- $A_{ij}$  = Tráfico de la central i a la j
- $N_{ij}$  = Número de circuitos de la ruta directa.

De esta forma se obtienen todas las cantidades de circuitos para todas las rutas directas.

Para calcular la cantidad de circuitos de las rutas de desborde a Tandem teniendo una sola ruta directa se utiliza, para un tráfico ofrecido y una pérdida dada:

$$B = B(m + N, A) \quad (5-17)$$

Donde:

$m =$  Número de circuitos en la ruta Tandem.

El cálculo del número de circuitos en la ruta Tandem para varias rutas directas no es posible realizarlo utilizando el modelo de Erlang.

Sin embargo, R.I. Wilkinson desarrollo el **método de la “teoría azar equivalente”** que consiste en simular una ruta única de primera intención, definida por un tráfico  $A$  y un número de órganos  $N$  tales que el tráfico y la Varianza desbordados presenten características similares a las del tráfico desbordado por las rutas reales de primera intención. De esta forma, para un tráfico total  $A$  originado en una central hacia otras en el sistema y para una pérdida  $E_o$ , se puede calcular el número  $m$  de la ruta alterna así:

$$A \cdot B_o = A^* \cdot E(N^* + m, A^*) \quad (5-18)$$

Se calcula  $E(N^* + m, A^*)$  y por Erlang se encuentra  $m + N$  y consecuentemente  $m$ .

**Para encontrar los valores de  $A^*$  y  $N^*$  se sigue el proceso siguiente:**

Se calcula a partir de los tráficos y número de órganos de las rutas directas los tráficos desbordados en cada caso y su Varianza correspondiente.

$$R_{ij} = A_{ij} \cdot E(N_{ij}, A_{ij}) \quad (5-19)$$

$$V_{ij} = R_{ij} \left( I - R_{ij} + \frac{A_{ij}}{N_{ij} + I + R_{ij} - A_{ij}} \right) \quad (5-20)$$

Donde:

$R_{ij} =$  Tráfico desbordado en la ruta  $ij$ .

$V_{ij} =$  Varianza de  $R_{ij}$ .

De aquí se obtienen los valores de tráfico y Varianza para cada ruta a Tandem ( $i,t$ ) y de Tandem ( $t,j$ ).

$$R_{it} = \sum_j R_{ij} ; R_{tj} = \sum_i R_{ij} \quad (5-21)$$

$$V_{it} = \sum_j V_{ij} ; V_{tj} = \sum_i V_{ij} \quad (5-22)$$

Una vez obtenidos estos valores es necesario calcular los valores de los tráficos  $A^*$  equivalentes que, con un número  $N^*$  de órganos equivalente, producirían ellos solos, los desbordes  $R$  con Varianza  $V$  calculados. Esta es la solución aproximada considerada por el Dr. Y. Rapp

$$A^* = V + 3 \frac{V}{R} \left( \frac{V}{R} - I \right) \quad (5-23)$$

$$N^{*} = \frac{A^*}{I - \frac{I}{R + \frac{V}{R}}} - R - I \quad (5-24)$$

Para todos los  $i$  y  $j$ .

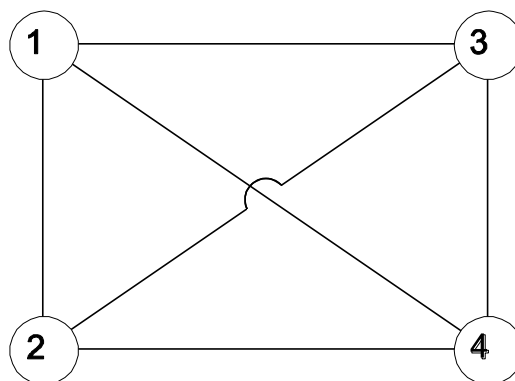
Finalmente, el número de  $m$  se calcula para cada ruta  $i$  y  $j$  de acuerdo a la fórmula:

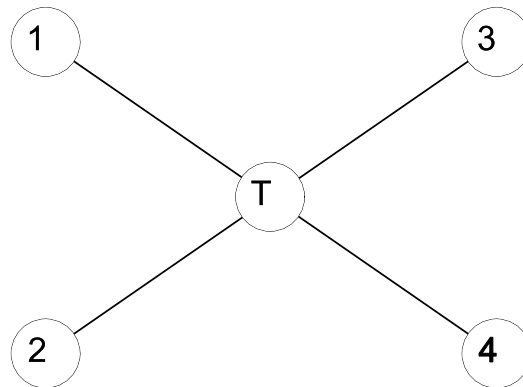
para cada tráfico total originado y terminado.

$$A.E_o = A^* E(N^{*} + m, A^*) \quad (5-25)$$

### Ejemplo 21

Se tiene un sistema de cuatro centrales con la matriz de tráfico y costos de enlaces como sigue:





**TRAFICO EN ERLANG**

		1	2	3	4	$A_{it}$
$A_{ij} =$	1	--	35	60	25	120
	2	30	--	15	5	50
	3	52	17	--	10	79
	4	20	66	12	--	98
	$A_{ij}$	102	118	87	40	347

**COSTOS POR CIRCUITO**

		1	2	3	4	$X_{it}$
$X_{ij} =$	1	--	1.747	1.802	1.416	1.140
	2	1.747	--	2.410	1.969	1.747
	3	1.802	2.410	--	2.078	1.802
	4	1.416	1.969	2.078	--	1.416
	$X_{ij}$	1.140	1.747	1.802	1.416	--

Para una probabilidad de pérdida general para el sistema

$E_0 = 0.01$ , calcular los números de circuitos en todas las rutas directas y Tandem.

**Costos utilizando encaminamiento por la Tandem**

		1	2	3	4
$X_{it} + X_{ij}$	1	2280	2887	2942	2556
	2	2887	3494	3549	3163
	3	2942	3549	3604	3218
	4	556	3163	3218	2832

Utilizando la fórmula (5-15)  $Z_{ij} = \frac{X_{ij}}{X_{it} + X_{ij}}$  se calculan las

**Razones de costos.**

		1	2	3	4
$Z_{ij} =$	1	--	.605	.613	.554
	2	.605	--	.679	.623
	3	.613	.679	--	.646
	4	.554	.623	.646	--

Y luego se calculan las cantidades circuitos en las rutas directas.

Utilizando la fórmula (5-16)  $A_{ij} [E(N_{ij}, A_{ij}) - E(N_{ij} + 1, A_{ij})] = Z_{ij} [1 - 0.3(1 - Z_{ij}^2)]$

**Circuitos en las rutas directas**

		1	2	3	4	Nit
$N_{ij} =$	1	--	37	63	27	127
	2	32	--	14	5	51
	3	54	17	--	10	81
	4	22	69	12	--	103
	N <sub>tj</sub>	108	123	89	42	--

**Para A12:**

A	N	E1NA	N+1	E1N+1A	FORM	Z		
35	33	0,1593	34	0,140880717	0,644587395	0,605	0,489933538	0,154653857
35	34	0,14088	35	0,123484178	0,608878884	0,605	0,489933538	0,118945346
35	35	0,12348	36	0,107185953	0,570437876	0,605	0,489933538	0,080504338
35	36	0,10719	37	0,092058147	0,529473201	0,605	0,489933538	0,039539663
35	37	0,09206	38	0,078162932	0,486332512	0,605	0,489933538	-0,00360103
35	38	0,07816	39	0,065548259	0,441513579	0,605	0,489933538	-0,04841996
35	39	0,06555	40	0,0542436	0,39566307	0,605	0,489933538	-0,09427047
35	40	0,05424	41	0,044256206	0,349558789	0,605	0,489933538	-0,14037475
35	41	0,04426	42	0,035568403	0,304073106	0,605	0,489933538	-0,18586043
35	42	0,03557	43	0,028136446	0,260118466	0,605	0,489933538	-0,22981507

**PARA A13**

A	N	E1NA	N+1	E1N+1A	FORM	Z		
60	59	0,10652	60	0,096266812	0,615267817	0,613	0,498203919	0,117063898
60	60	0,09627	61	0,086498262	0,58611298	0,613	0,498203919	0,087909061
60	61	0,0865	62	0,077242206	0,555363405	0,613	0,498203919	0,057159486
60	62	0,07724	63	0,068523167	0,523142332	0,613	0,498203919	0,024938413
60	63	0,06852	64	0,060362738	0,489625711	0,613	0,498203919	-0,00857821
60	64	0,06036	65	0,052778653	0,455045107	0,613	0,498203919	-0,04315881
60	65	0,05278	66	0,045783857	0,419687761	0,613	0,498203919	-0,07851616
60	66	0,04578	67	0,039385639	0,383893064	0,613	0,498203919	-0,11431085
60	67	0,03939	68	0,033584891	0,348044876	0,613	0,498203919	-0,15015904

**Para A14**

A	N	E1NA	N+1	E1N+1A	FORM	Z		
25	20	0,27989	21	0,249926433	0,749092945	0,554	0,438809439	0,310283506
25	21	0,24993	22	0,221188235	0,71845496	0,554	0,438809439	0,279645521
25	22	0,22119	23	0,193822744	0,684137276	0,554	0,438809439	0,245327837
25	23	0,19382	24	0,167983119	0,645990608	0,554	0,438809439	0,207181169
25	24	0,16798	25	0,143823242	0,603996923	0,554	0,438809439	0,165187484
25	25	0,14382	26	0,12149047	0,558319305	0,554	0,438809439	0,119509865
25	26	0,12149	27	0,101116466	0,509350107	0,554	0,438809439	0,070540668
25	27	0,10112	28	0,08280657	0,457747403	0,554	0,438809439	0,018937963
25	28	0,08281	29	0,066628687	0,404447074	0,554	0,438809439	-0,03436237
25	29	0,06663	30	0,052603172	0,350637869	0,554	0,438809439	-0,08817157
25	30	0,0526	31	0,040695531	0,297691035	0,554	0,438809439	-0,1411184
25	31	0,0407	32	0,030813711	0,247045488	0,554	0,438809439	-0,19176395

**Para A21**



**"Ingeniería de Tráfico de Telecomunicaciones"**

A	N	E1NA	N+1	E1N+1A	FORM	Z		
30	28	0,17419	29	0,152684324	0,64520317	0,605	0,489933538	0,155269633
30	29	0,15268	30	0,13245979	0,606736007	0,605	0,489933538	0,11680247
30	30	0,13246	31	0,113622038	0,565132578	0,605	0,489933538	0,07519904
30	31	0,11362	32	0,09626631	0,520671848	0,605	0,489933538	0,03073831
30	32	0,09627	33	0,080472307	0,473820081	0,605	0,489933538	-0,01611346
30	33	0,08047	34	0,066297523	0,425243528	0,605	0,489933538	-0,06469001
30	34	0,0663	35	0,053770842	0,375800419	0,605	0,489933538	-0,11413312
30	35	0,05377	36	0,042887297	0,326506361	0,605	0,489933538	-0,16342718
30	36	0,04289	37	0,033604924	0,278471194	0,605	0,489933538	-0,21146234

**Para A23:**

A	N	E1NA	N+1	E1N+1A	FORM	Z		
15	9	0,46393	10	0,410340542	0,80383294	0,679	0,569214052	0,234618888
15	10	0,41034	11	0,358791567	0,773234623	0,679	0,569214052	0,204020571
15	11	0,35879	12	0,309625628	0,737489081	0,679	0,569214052	0,168275029
15	12	0,30963	13	0,263221675	0,696059298	0,679	0,569214052	0,126845246
15	13	0,26322	14	0,219982929	0,648581196	0,679	0,569214052	0,079367145
15	14	0,21998	15	0,180316399	0,594997944	0,679	0,569214052	0,025783892
15	15	0,18032	16	0,144602123	0,535714136	0,679	0,569214052	-0,03349992
15	16	0,1446	17	0,113152916	0,471738111	0,679	0,569214052	-0,09747594

A	N	E1NA	N+1	E1N+1A	FORM	Z		
15	17	0,11315	18	0,08616888	0,40476054	0,679	0,569214052	-0,16445351
15	18	0,08617	19	0,063695015	0,33710798	0,679	0,569214052	-0,23210607
15	19	0,0637	20	0,045593216	0,271526986	0,679	0,569214052	-0,29768707
15	20	0,04559	21	0,03153945	0,210806477	0,679	0,569214052	-0,35840757

**Para A24:**

A	N	E1NA	N+1	E1N+1A	FORM	Z		
5	1	0,83333	2	0,675675676	0,788288288	0,622	0,507592554	0,280695734
5	2	0,67568	3	0,529661017	0,730073294	0,622	0,507592554	0,222480739
5	3	0,52966	4	0,398342894	0,656590617	0,622	0,507592554	0,148998063
5	4	0,39834	5	0,284867821	0,567375361	0,622	0,507592554	0,059782807
5	5	0,28487	6	0,191847259	0,465102812	0,622	0,507592554	-0,04248974
5	6	0,19185	7	0,120518635	0,356643119	0,622	0,507592554	-0,15094944
5	7	0,12052	8	0,070047852	0,252353914	0,622	0,507592554	-0,25523864
5	8	0,07005	9	0,037457786	0,162950331	0,622	0,507592554	-0,34464222
5	9	0,03746	10	0,01838457	0,095366078	0,622	0,507592554	-0,41222648
5	10	0,01838	11	0,008287368	0,050486009	0,622	0,507592554	-0,45710655

**Para A31:**

A	N	E1NA	N+1	E1N+1A	FORM	Z		
52	48	0,15336	49	0,139967832	0,696285807	0,613	0,498203919	0,198081888

**“Ingeniería de Tráfico de Telecomunicaciones”**

52	49	0,13997	50	0,12706948	0,670714302	0,613	0,498203919	0,172510383
52	50	0,12707	51	0,114700343	0,64319513	0,613	0,498203919	0,144991211
52	51	0,1147	52	0,102897917	0,613726169	0,613	0,498203919	0,11552225
52	52	0,1029	53	0,091698856	0,58235116	0,613	0,498203919	0,084147241
52	53	0,0917	54	0,081137913	0,549169024	0,613	0,498203919	0,050965105
52	54	0,08114	55	0,071246716	0,514342259	0,613	0,498203919	0,01613834
52	55	0,07125	56	0,062052421	0,47810331	0,613	0,498203919	-0,02010061
52	56	0,06205	57	0,053576313	0,440757642	0,613	0,498203919	-0,05744628
52	57	0,05358	58	0,045832424	0,402682223	0,613	0,498203919	-0,0955217
52	58	0,04583	59	0,038826303	0,364318305	0,613	0,498203919	-0,13388561
52	59	0,03883	60	0,032554037	0,326157842	0,613	0,498203919	-0,17204608
52	60	0,03255	61	0,027001659	0,288723611	0,613	0,498203919	-0,20948031
52	61	0,027	62	0,022145044	0,252543994	0,613	0,498203919	-0,24565992

**Para A17:**

A	N	E1NA	N+1	E1N+1A	FORM	Z		
17	13	0,32781	14	0,284722953	0,732545325	0,679	0,569214052	0,163331273
17	14	0,28472	15	0,243962671	0,692924782	0,679	0,569214052	0,123710731
17	15	0,24396	16	0,205851501	0,647889894	0,679	0,569214052	0,078675842
17	16	0,20585	17	0,17071049	0,597397181	0,679	0,569214052	0,02818313
17	17	0,17071	18	0,138841616	0,541770862	0,679	0,569214052	-0,02744319
17	18	0,13884	19	0,110499696	0,481812648	0,679	0,569214052	-0,0874014
17	19	0,1105	20	0,085860332	0,418869184	0,679	0,569214052	-0,15034487
17	20	0,08586	21	0,064988868	0,354814889	0,679	0,569214052	-0,21439916
17	21	0,06499	22	0,047817347	0,291915854	0,679	0,569214052	-0,2772982
17	22	0,04782	23	0,034136752	0,232570107	0,679	0,569214052	-0,33664395
17	23	0,03414	24	0,023609322	0,178966325	0,679	0,569214052	-0,39024773

**Para A34:**

A	N	E1NA	N+1	E1N+1A	FORM	Z		
10	5	0,56395	6	0,484514904	0,794372732	0,646	0,533075841	0,261296891
10	6	0,48451	7	0,409040783	0,754741207	0,646	0,533075841	0,221665366
10	7	0,40904	8	0,338318433	0,707223501	0,646	0,533075841	0,17414766
10	8	0,33832	9	0,273207944	0,65110489	0,646	0,533075841	0,11802905
10	9	0,27321	10	0,214582343	0,586256007	0,646	0,533075841	0,053180167
10	10	0,21458	11	0,163232333	0,513500099	0,646	0,533075841	-0,01957574
10	11	0,16323	12	0,119739188	0,434931448	0,646	0,533075841	-0,09814439
10	12	0,11974	13	0,084338863	0,354003258	0,646	0,533075841	-0,17907258
10	13	0,08434	14	0,056819143	0,275197193	0,646	0,533075841	-0,25787865
10	14	0,05682	15	0,036496945	0,203221979	0,646	0,533075841	-0,32985386
10	15	0,0365	16	0,022301872	0,141950734	0,646	0,533075841	-0,39112511

**PARA A41:**

A	N	EINA	N+1	EIN+1A	FORM	Z		
20	17	0,25571	18	0,221260343	0,689064824	0,554	0,438809439	0,250255385
20	18	0,22126	19	0,18890791	0,64704867	0,554	0,438809439	0,208239231
20	19	0,18891	20	0,158891962	0,600318967	0,554	0,438809439	0,161509528
20	20	0,15889	21	0,131436031	0,549118607	0,554	0,438809439	0,110309168
20	21	0,13144	22	0,10673395	0,494041633	0,554	0,438809439	0,055232194
20	22	0,10673	23	0,08492963	0,436086387	0,554	0,438809439	-0,00272305
20	23	0,08493	24	0,066096717	0,376658263	0,554	0,438809439	-0,06215118
20	24	0,0661	25	0,050221778	0,317498782	0,554	0,438809439	-0,12131066
20	25	0,05022	26	0,037195207	0,260531427	0,554	0,438809439	-0,17827801
20	26	0,0372	27	0,026813246	0,207639208	0,554	0,438809439	-0,23117023
20	27	0,02681	28	0,018792401	0,16041691	0,554	0,438809439	-0,27839253

**Para A42**

A	N	EINA	N+1	EIN+1A	FORM	Z		
66	61	0,1425	62	0,131710554	0,711864015	0,622	0,507592554	0,20427146
66	62	0,13171	63	0,121251853	0,690274262	0,622	0,507592554	0,182681708
66	63	0,12125	64	0,111143484	0,66715236	0,622	0,507592554	0,159559806
66	64	0,11114	65	0,101409032	0,642473874	0,622	0,507592554	0,13488132
66	65	0,10141	66	0,09207209	0,616238139	0,622	0,507592554	0,108645585
66	66	0,09207	67	0,083155823	0,588473632	0,622	0,507592554	0,080881077
66	67	0,08316	68	0,074682439	0,559243338	0,622	0,507592554	0,051650783
66	68	0,07468	69	0,066672595	0,528649735	0,622	0,507592554	0,021057181
66	69	0,06667	70	0,059144733	0,496838894	0,622	0,507592554	-0,01075366
66	70	0,05914	71	0,052114382	0,46400313	0,622	0,507592554	-0,04358942

**Para A43:**

A	N	EINA	N+1	EIN+1A	FORM	Z		
12	8	0,42266	9	0,360425763	0,746752219	0,646	0,533075841	0,213676379
12	9	0,36043	10	0,30192504	0,702008677	0,646	0,533075841	0,168932836
12	10	0,30193	11	0,247765547	0,649913925	0,646	0,533075841	0,116838084
12	11	0,24777	12	0,198567389	0,590377892	0,646	0,533075841	0,057302051
12	12	0,19857	13	0,154900754	0,523999614	0,646	0,533075841	-0,00907623
12	13	0,1549	14	0,117209877	0,452290533	0,646	0,533075841	-0,08078531
12	14	0,11721	15	0,085729249	0,377767526	0,646	0,533075841	-0,15530832
12	15	0,08573	16	0,060412592	0,303799884	0,646	0,533075841	-0,22927596
12	16	0,06041	17	0,040900034	0,234150697	0,646	0,533075841	-0,29892514

**CIRCUITOS EN LA RUTA DIRECTA Nij**

Nij=	1	2	3	4	Nit
------	---	---	---	---	-----

<b>1</b>		37	63	27	127
<b>2</b>	32		14	5	51
<b>3</b>	54	17		10	81
<b>4</b>	22	69	12		103
<b>N<sub>tj</sub></b>	108	123	89	42	

Para calcular los  $R_{ij}$  y  $V_{ij}$  se utilizan las formulas:

**5-19** 
$$R_{ij} = A_{ij} \cdot E(N_{ij}, A_{ij})$$

**5-20** 
$$V_{ij} = R_{ij} \left( 1 - R_{ij} + \frac{A_{ij}}{N_{ij} + 1 + R_{ij} - A_{ij}} \right)$$

y luego se suman según las fórmulas

**5-21** 
$$R_{it} = \sum_j R_{ij} ; R_{jt} = \sum_i R_{ij} \quad y$$

**5-22,** 
$$V_{it} = \sum_j V_{ij} ; V_{jt} = \sum_i V_{ij}$$

para obtener  $R_{it}$ ,  $R_{jt}$ ,  $V_{it}$  y  $V_{jt}$ .

	<b>A<sub>ij</sub></b>	<b>N<sub>ij</sub></b>	<b>E1(N,A)</b>	<b>R<sub>ij</sub></b>	<b>V<sub>ij</sub></b>
12	35	37	0,0920581	3,2220351	10,965017
13	60	63	0,0685232	4,11139	17,619839
14	25	27	0,1011165	2,5279117	7,5700637
21	30	32	0,0962663	2,8879893	9,2621533
23	15	14	0,2199829	3,2997439	7,4114339
24	5	5	0,2848678	1,4243391	2,3331795
31	52	54	0,0811379	4,2191715	16,808636
32	17	17	0,1707105	2,9020783	7,123367
34	10	10	0,2145823	2,1458234	4,3624473
41	20	22	0,1067339	2,134679	5,8925761
42	66	69	0,0666726	4,4003912	19,60984
43	12	12	0,1985674	2,3828087	5,1576834

### TRAFICO DE DESBORDE

	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>R<sub>it</sub></b>
--	----------	----------	----------	----------	-----------------------

<b>1</b>		3,2220351	4,11139	2,5279117	<b>9,86</b>
<b>2</b>	2,8879893		3,2997439	1,4243391	<b>7,61</b>
<b>3</b>	4,2191715	2,9020783		2,1458234	<b>9,27</b>
<b>4</b>	2,134679	4,4003912	2,3828087		<b>8,92</b>
<b>Rtj</b>	<b>9,24</b>	<b>10,52</b>	<b>9,79</b>	<b>6,10</b>	35,66

**VARIANZA**

	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>Vit</b>
<b>1</b>		10,965017	17,619839	7,5700637	<b>36,15</b>
<b>2</b>	9,2621533		7,4114339	2,3331795	<b>19,01</b>
<b>3</b>	16,808636	7,123367		4,3624473	<b>28,29</b>
<b>4</b>	5,8925761	19,60984	5,1576834		<b>30,66</b>
<b>Vtj</b>	<b>31,96</b>	<b>37,70</b>	<b>30,19</b>	<b>14,27</b>	

Como se observa para cualquier tráfico, por ser de desborde siempre la Varianza es mayor que la media.

Como ilustración, la ruta Tandem - central 3 tiene un tráfico de **9.79 Erl** con una Varianza de **30.19**

Como ilustración, la ruta central 2 -Tandem tiene un tráfico de **7.61 Erl** con una Varianza de **19.01**

Utilizando los ocho valores de R y V (cuatro rutas salientes **it** y cuatro entrantes **tj**) se calculan los correspondientes tráficos equivalentes y números equivalentes de circuitos, utilizando las ecuaciones

5-14  $A^{**} = V + 3 \frac{V}{R} \left( \frac{V}{R} - I \right)$  y

5-15.  $N^{**} = \frac{A^*}{I - \frac{I}{R + \frac{V}{R}}} - R - I$  o  $N^* = \frac{A^* \left( R + \frac{V}{R} \right)}{R + \frac{V}{R} - 1} - R - 1$

$A^*_{it} =$	1	65.48	;	$N^*_{it} =$	1	59.85
	2	30.22			2	24.93
	3	47.10			3	41.00
	4	55.81			4	50.80

$$A^*_{ij} = \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 57.47 & 65.44 & \mathbf{49.45} & 23.67 \end{matrix}$$

$$N^*_{ij} = \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 52.14 & 58.91 & \mathbf{42.81} & 19..75 \end{matrix}$$

Para  $m_{it}$  usamos la fórmula  $E(N^*_{it+m_{it}, A^*_{it}}) = (A_{it}/A^*_{it}) * E_o$ :

	1	2	3	4	Ait
1		35	60	25	<b>120</b>
2	30		15	5	<b>50</b>
3	52	17		10	<b>79</b>
4	20	66	12		<b>98</b>
Atj	<b>102</b>	<b>118</b>	<b>87</b>	<b>40</b>	347

Vit	Rit	A*it	N*it
36.15491952	9.8613	65.48186533	59.84750847
19.00676665	7.6121	30.21988394	24.92539816
28.29444985	9.2671	47.10130725	40.99501763
30.66009996	8.9179	55.80648649	50.80291222

Vtj	Rtj	A*tj	N*tj
31.96336493	9.2418	57.47241927	52.14258847
37.69822477	10.525	65.44342838	58.91214581
30.18895582	9.7939	49.4454946	42.81490857
14.26569047	6.0981	23.66560643	19.74948368

Para  $m_{it}$

A*it	E0	m	N*it	N*it+m	E(N*it+m, A*it)	(Ait/A*it)*E0	resta
65.48186533	0.01	13	59.84750847	72.84750847	0.037502176	0.018325684	0.019176492
65.48186533	0.01	14	59.84750847	73.84750847	0.032183601	0.018325684	0.013857917
65.48186533	0.01	15	59.84750847	74.84750847	0.027385397	0.018325684	0.009059712
65.48186533	0.01	16	59.84750847	75.84750847	0.023096713	0.018325684	0.004771028

**“Ingeniería de Tráfico de Telecomunicaciones”**

65.48186533	0.01	17	59.84750847	76.84750847	0.019300875	0.018325684	0.00097519
65.48186533	0.01	18	59.84750847	77.84750847	0.015975662	0.018325684	-0.00235002
65.48186533	0.01	19	59.84750847	78.84750847	0.013093853	0.018325684	-0.00523183
65.48186533	0.01	20	59.84750847	79.84750847	0.010624002	0.018325684	-0.00770168
65.48186533	0.01	21	59.84750847	80.84750847	0.008531417	0.018325684	-0.00979427
65.48186533	0.01	22	59.84750847	81.84750847	0.006779257	0.018325684	-0.01154643
65.48186533	0.01	23	59.84750847	82.84750847	0.005329697	0.018325684	-0.01299599
65.48186533	0.01	24	59.84750847	83.84750847	0.004145044	0.018325684	-0.01418064

**Para m2t**

A*2t	E0	m	N*it	N*it+m	E(N*it+m,A*it)	(Ait/A*it)*E0	resta
30.21988394	0.01	9	24.92539816	33.9253982	0.070255186	0.016545398	0.053709788
30.21988394	0.01	10	24.92539816	34.9253982	0.057306075	0.016545398	0.040760677
30.21988394	0.01	11	24.92539816	35.9253982	0.045988108	0.016545398	0.029442711
30.21988394	0.01	12	24.92539816	36.9253982	0.036271661	0.016545398	0.019726264
30.21988394	0.01	13	24.92539816	37.9253982	0.028090244	0.016545398	0.011544846
30.21988394	0.01	14	24.92539816	38.9253982	0.0213425	0.016545398	0.004797102
30.21988394	0.01	15	24.92539816	39.9253982	0.015897484	0.016545398	-0.00064791
30.21988394	0.01	16	24.92539816	40.9253982	0.0116027	0.016545398	-0.0049427
30.21988394	0.01	17	24.92539816	41.9253982	0.008293863	0.016545398	-0.00825153
30.21988394	0.01	18	24.92539816	42.9253982	0.005805053	0.016545398	-0.01074034
30.21988394	0.01	19	24.92539816	43.9253982	0.00397788	0.016545398	-0.01256752
30.21988394	0.01	20	24.92539816	44.9253982	0.002668649	0.016545398	-0.01387675

**Para m3t**

A*3t	E0	m	N*it	N*it+m	E(N*it+m,A*it)	(Ait/A*it)*E0	Resta
47.10130725	0.01	12	40.99501763	52.99501763	0.046525156	0.016772358	0.029752798
47.10130725	0.01	13	40.99501763	53.99501763	0.039002235	0.016772358	0.022229877
47.10130725	0.01	14	40.99501763	54.99501763	0.032324286	0.016772358	0.015551928
47.10130725	0.01	15	40.99501763	55.99501763	0.026470469	0.016772358	0.009698111
47.10130725	0.01	16	40.99501763	56.99501763	0.021407192	0.016772358	0.004634834
47.10130725	0.01	17	40.99501763	57.99501763	0.017088981	0.016772358	0.000316623
47.10130725	0.01	18	40.99501763	58.99501763	0.013460104	0.016772358	-0.00331225
47.10130725	0.01	19	40.99501763	59.99501763	0.010456851	0.016772358	-0.00631551
47.10130725	0.01	20	40.99501763	60.99501763	0.008010261	0.016772358	-0.0087621
47.10130725	0.01	21	40.99501763	61.99501763	0.006049058	0.016772358	-0.0107233
47.10130725	0.01	22	40.99501763	62.99501763	0.00450251	0.016772358	-0.01226985

**Para m4t**

**"Ingeniería de Tráfico de Telecomunicaciones"**

<b>A*4t</b>	<b>E0</b>	<b>m</b>	<b>N*it</b>	<b>N*it+m</b>	<b>E(N*it+m,A*it)</b>	<b>(Ait/A*it)*E0</b>	<b>resta</b>
55.80648649	0.01	11	50.80291222	61.8029122	0.045871474	0.017560683	0.028310791
55.80648649	0.01	12	50.80291222	62.8029122	0.039164858	0.017560683	0.021604176
55.80648649	0.01	13	50.80291222	63.8029122	0.03312169	0.017560683	0.015561008
55.80648649	0.01	14	50.80291222	64.8029122	0.02773245	0.017560683	0.010171767
55.80648649	0.01	15	50.80291222	65.8029122	0.022979012	0.017560683	0.005418329
55.80648649	0.01	16	50.80291222	66.8029122	0.018834856	0.017560683	0.001274173
55.80648649	0.01	17	50.80291222	67.8029122	0.015265715	0.017560683	-0.00229497
55.80648649	0.01	19	50.80291222	69.8029122	0.009683546	0.017560683	-0.00787714
55.80648649	0.01	19	50.80291222	69.8029122	0.009683546	0.017560683	-0.00787714
55.80648649	0.01	20	50.80291222	70.8029122	0.007574695	0.017560683	-0.00998599

**PARA mt1**

<b>A*t1</b>	<b>E0</b>	<b>m</b>	<b>N*it</b>	<b>N*it+m</b>	<b>E(N*it+m,A*it)</b>	<b>(Ait/A*it)*E0</b>	<b>resta</b>
57.47241927	0.01	12	52.14258847	64.1425885	0.041350471	0.017747643	0.023602827
57.47241927	0.01	13	52.14258847	65.1425885	0.035197615	0.017747643	0.017449972
57.47241927	0.01	14	52.14258847	66.1425885	0.029676181	0.017747643	0.011928537
57.47241927	0.01	15	52.14258847	67.1425885	0.024772786	0.017747643	0.007025142
57.47241927	0.01	16	52.14258847	68.1425885	0.02046608	0.017747643	0.002718437
57.47241927	0.01	17	52.14258847	69.1425885	0.016727151	0.017747643	-0.00102049
57.47241927	0.01	18	52.14258847	70.1425885	0.013520325	0.017747643	-0.00422732
57.47241927	0.01	19	52.14258847	71.1425885	0.010804344	0.017747643	-0.0069433
57.47241927	0.01	20	52.14258847	72.1425885	0.008533817	0.017747643	-0.00921383
57.47241927	0.01	21	52.14258847	73.1425885	0.006660845	0.017747643	-0.0110868
57.47241927	0.01	22	52.14258847	74.1425885	0.005136695	0.017747643	-0.01261095

**PARA mt2**

<b>A*t2</b>	<b>E0</b>	<b>m</b>	<b>N*Ttj</b>	<b>N*tj+m</b>	<b>E(N*tj+m,A*tj)</b>	<b>(Atj/A*tj)*E0</b>	<b>resta</b>
65.44342838	0.01	13	58.91214581	71.91214581	0.042719575	0.01803084	0.024688735
65.44342838	0.01	14	58.91214581	72.91214581	0.03692768	0.01803084	0.01889684
65.44342838	0.01	15	58.91214581	73.91214581	0.031661357	0.01803084	0.013630516
65.44342838	0.01	16	58.91214581	74.91214581	0.02691498	0.01803084	0.00888414
65.44342838	0.01	17	58.91214581	75.91214581	0.022677064	0.01803084	0.004646224
65.44342838	0.01	18	58.91214581	76.91214581	0.018930308	0.01803084	0.000899468
65.44342838	0.01	19	58.91214581	77.91214581	0.015651901	0.01803084	-0.00237894
65.44342838	0.01	20	58.91214581	78.91214581	0.012814098	0.01803084	-0.00521674



**"Ingeniería de Tráfico de Telecomunicaciones"**

65.44342838	0.01	21	58.91214581	79.91214581	0.01038502	0.01803084	-0.00764582
65.44342838	0.01	22	58.91214581	80.91214581	0.00832965	0.01803084	-0.00970119
65.44342838	0.01	23	58.91214581	81.91214581	0.006610947	0.01803084	-0.01141989
65.44342838	0.01	24	58.91214581	82.91214581	0.005191	0.01803084	-0.01283984

**PARA mt3**

A*t3	E0	m	N*it	N*it+m	E(N*it+m,A*it)	(Ait/A*it)*E0	resta
49.4454946	0.01	13	42.81490857	55.81490857	0.043016723	0.017595132	0.025421591
49.4454946	0.01	14	42.81490857	56.81490857	0.036086098	0.017595132	0.018490966
49.4454946	0.01	15	42.81490857	57.81490857	0.029938219	0.017595132	0.012343087
49.4454946	0.01	16	42.81490857	58.81490857	0.024551013	0.017595132	0.006955881
49.4454946	0.01	17	42.81490857	59.81490857	0.019891176	0.017595132	0.002296044
49.4454946	0.01	18	42.81490857	60.81490857	0.015915088	0.017595132	-0.00168004
49.4454946	0.01	19	42.81490857	61.81490857	0.012570367	0.017595132	-0.00502476
49.4454946	0.01	20	42.81490857	62.81490857	0.009797945	0.017595132	-0.00779719
49.4454946	0.01	21	42.81490857	63.81490857	0.007534497	0.017595132	-0.01006064
49.4454946	0.01	22	42.81490857	64.81490857	0.005715	0.017595132	-0.01188013

**PARA mt4**

A*t4	E0	m	N*it	N*it+m	E(N*it+m,A*it)	(Ait/A*it)*E0	resta
23.66560643	0.01	9	19.74948368	28.74948368	0.051009214	0.016902166	0.034107048
23.66560643	0.01	10	19.74948368	29.74948368	0.038995127	0.016902166	0.022092961
23.66560643	0.01	11	19.74948368	30.74948368	0.029137015	0.016902166	0.01223485
23.66560643	0.01	12	19.74948368	31.74948368	0.021256477	0.016902166	0.004354312
23.66560643	0.01	13	19.74948368	32.74948368	0.015127961	0.016902166	-0.0017742
23.66560643	0.01	14	19.74948368	33.74948368	0.010496498	0.016902166	-0.00640567
23.66560643	0.01	15	19.74948368	34.74948368	0.007097686	0.016902166	-0.00980448
23.66560643	0.01	16	19.74948368	35.74948368	0.004676554	0.016902166	-0.01222561
23.66560643	0.01	17	19.74948368	36.74948368	0.003002508	0.016902166	-0.01389966
23.66560643	0.01	18	19.74948368	37.74948368	0.001878765	0.016902166	-0.0150234
23.66560643	0.01	19	19.74948368	38.74948368	0.001146106	0.016902166	-0.01575606
23.66560643	0.01	20	19.74948368	39.74948368	0.00068189	0.016902166	-0.01622028

	<b>1</b>	<b>17</b>		<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>
<b>mit=</b>	<b>2</b>	<b>15</b>	<b>mtj</b>	<b>17</b>	<b>18</b>	<b>18</b>	<b>13</b>
	<b>3</b>	<b>17</b>					
	<b>4</b>	<b>16</b>					

y esas son las cantidades de circuitos hacia y de Tandem para todas las centrales.

**Circuitos directos, circuitos hacia y de Tandem para todas las centrales**

		1	2	3	4	$m_{it}$
$N_{ij} =$	1	--	37	63	27	17
	2	32	--	14	5	15
	3	54	17	--	10	17
	4	22	69	12	---	16
	$m_{ij}$	17	18	18	13	----

**Costo total del sistema combinado : Red Malla-Estrella**

El costo total del sistema es igual a la suma:

Costo de los circuitos directos:  $N_{ij} \cdot X_{ij}$

Costo de los circuitos Tandem :  $(m_{it} \cdot X_{it}) + (m_{tj} \cdot X_{tj})$

**Costo Circuitos directos**

		1	2	3	4	Total
$N_{ij} \cdot X_{ij} =$	1	--	64639	113526	38232	216397
	2	55904	---	33740	9845	99489
	3	97308	40970	----	20780	159058
	4	31152	135792	24936	---	191880

$N_{ij} \cdot X_{ij} = 666.824$

**Costos Circuitos Tandem**

	1	2	3	4	mit	$X_{it}$	mit $X_{it}$
1					17	1140	19380
2					15	1747	26205
3					17	1802	30634

4					<b>16</b>	<b>1416</b>	<b>22656</b>
mtj	<b>17</b>	<b>18</b>	<b>18</b>	<b>13</b>	---	---	
$X_{tj}$	<b>1140</b>	<b>1747</b>	<b>1802</b>	<b>1416</b>	---	---	---
mtj $X_{tj}$	<b>19380</b>	<b>31446</b>	<b>32436</b>	<b>18408</b>	---	---	

$$(m_{it} \cdot X_{it}) + (m_{tj} \cdot X_{tj}) = 98875 + 101670 = 200545$$

Subtotal circuitos directos	<b>666.824</b>
Subtotal circuitos Tandem	<b>200.545</b>
<b>Costo total</b>	<b>876.986</b>

**Costos Circuitos Tandem , solo Red Estrella**

	1	2	3	4	Nit	$X_{it}$	Nit $X_{it}$
1					<b>127</b>	<b>1140</b>	<b>144780</b>
2					<b>51</b>	<b>1747</b>	<b>89097</b>
3					<b>81</b>	<b>1802</b>	<b>145962</b>
4					<b>103</b>	<b>1416</b>	<b>145848</b>
Ntj	<b>108</b>	<b>123</b>	<b>89</b>	<b>42</b>	---	---	
$X_{tj}$	<b>1140</b>	<b>1747</b>	<b>1802</b>	<b>1416</b>	---	---	---
Ntj $X_{tj}$	<b>123120</b>	<b>214881</b>	<b>160378</b>	<b>59472</b>	---	---	

$$(N_{it} \cdot X_{it}) + (N_{tj} \cdot X_{tj}) = 525687 + 557851 = 1'083.538$$

La combinación optimizada de la red malla y estrella con la instalación de una central Tandem resulta más económica 876.986. La red estrella con la instalación de una central Tandem resulta mas cara 1'083.538. Lo que se concluye, que con una red combinada optimizada, su tráfico puede hacerse lo suficiente grande como para no ser ineficiente a pesar de ser este tráfico desbordado. En la red estrella a pesar de que las rutas son más eficientes y económicas el costo del sistema resulta mas caro, debido a que se utiliza mas circuitos.

<b>5.5 DIMENSIONAMIENTO Y OPTIMIZACIÓN DE REDES TELEFÓNICAS CON CONMUTACIÓN DE CIRCUITOS</b>
--

### 5.5.1 INTRODUCCIÓN

Desde principios de siglo 20 se desarrollaron procedimientos matemáticos que permitieron optimizar el diseño de redes de telecomunicaciones. El concepto fundamental que guió este desarrollo fue fijar un objetivo de calidad (grado de servicio), y obtener la red del menor costo posible que permita alcanzar dicho objetivo.

Con este propósito se desarrollaron modelos matemáticos que resultaron complejos por la magnitud del problema que estaban destinados a resolver, y a continuación, inmediatamente, surgieron herramientas que permitían llevar a la práctica, al menos con una aproximación razonable, la aplicación de estas sofisticadas teorías matemáticas.

En principio estas herramientas fueron tablas y nomogramas que permitían evaluar la fórmula de Erlang o similares. Después se hicieron desarrollos en computadoras grandes y finalmente, el desarrollo tecnológico en la informática, permitió que los problemas de optimización pudieran resolverse en computadoras de escritorio.

En la actualidad el problema puede ser fácilmente manejado con hojas electrónicas de cálculo. En este numeral se presenta el desarrollo realizado con base en el programa Excel de Microsoft.

La implementación es particularmente adecuada porque la hoja de cálculo presenta en una forma muy intuitiva las matrices –un elemento reiterativo en los procesos de optimización–. Los programas convencionales generan listados que son más difíciles de interpretar. Usando el Microsoft Excel el usuario puede prestar más atención a la optimización en sí y a la interpretación de los resultados, que al instrumento matemático que usa para resolver el problema.

Este artículo no entra en el tema, ya ampliamente estudiado, de los algoritmos de optimización, sino, simplemente presenta la hoja electrónica desarrollada y subraya su versatilidad y facilidad de manejo.

### 5.5.2 ANTECEDENTES

#### El problema de la optimización

El problema de la optimización es, básicamente, determinar la red de menor costo posible que permita cursar el tráfico expresado en una matriz de tráfico con una probabilidad de pérdida dada (por ejemplo 1%).

Este problema ha sido estudiado por Erlang, Rapp, Wilkinson, Molina –entre otros– que han sentado las bases matemáticas para su solución. Desde el punto de vista práctico la Unión Internacional de Telecomunicaciones (UIT) trata el asunto en una de sus publicaciones: “PLANIFICACIÓN GENERAL DE LA RED”, Ginebra 1983. En esta publicación le dedica el capítulo X al “Dimensionamiento y Optimización de la Red”. El tema es tratado con gran sentido práctico –sin por ello descuidar la precisión de los conceptos– y con ejemplos que facilitan la comprensión del material. Por este motivo, en el presente numeral, se ha tomado exactamente el mismo ejemplo dado por la UIT y se lo ha alimentado a la hoja de cálculo con el objeto de tener un parámetro de comparación concreta de los cálculos.

#### Los datos

El problema de la optimización –como se mencionó anteriormente– requiere que se establezca el grado de servicio, se proporcione información de tráfico y, se proporcione información de costos.

En la hoja electrónica se introduce la mayoría de los datos en una hoja titulada “RESUMEN”.

El **grado de servicio** se puede fijar tomando como referencia la probabilidad de pérdida del tráfico ofrecido. En la hoja de cálculo diseñada se debe establecer el valor de la probabilidad de pérdida para las rutas finales, puesto que la probabilidad de pérdida para las rutas directas es una consecuencia del procedimiento de optimización económico de las mismas.

El **tráfico** se lo expresa en una matriz en que cada central de conmutación está representada en una fila y una columna y debe reflejar la demanda de tráfico a la hora pico. Se requiere que el tráfico se mida en *erlangs*.

Se requieren **costos unitarios de conmutación** y de **transmisión**. En ambos casos, costos marginales de incremento de un circuito. Los costos de conmutación deben ser tanto de la conmutación local como de la conmutación en la central que hace de tandem. Los costos de la transmisión, en el ejemplo de la UIT, se consideran una función lineal de la distancia, y por lo tanto vienen expresados en unidades monetarias por kilómetro.

Con el objeto de calcular el costo de la transmisión, por lo tanto, se requiere conocer este costo unitario por kilómetro y la matriz de distancias intercentrales. En este caso, las distancias deberán medirse a lo largo de las rutas de los sistemas de transmisión.

Cada uno de los costos mencionados se introducen en la hoja prevista para cada uno de ellos a excepción del costo de transmisión que se lo introduce en la hoja de “RESUMEN”.

UNIÓN INTERNACIONAL DE TELECOMUNICACIONES (UIT)  
 PLANIFICACIÓN GENERAL DE LA RED (Ginebra 1983)  
 CAPÍTULO X. DIMENSIONAMIENTO Y OPTIMIZACIÓN DE LA RED

**1. RESULTADOS** **CIRCUITOS**

<b>PROBABILIDAD DE PÉRDIDA</b>	<b>1.00%</b>
<b>Tráfico Total</b>	<b>1 240 Erlangs</b>
<b>Circuitos Totales</b>	<b>1 880</b>
Circuitos Directos	1 328
Circuitos Finales	552
<b>Costo Total</b>	<b>1 373 530</b>
Costo de los circuitos directos	890 440
Costo de los circuitos finales	483 090

**2. DATOS**

Matriz de tráfico (Erlangs)	<a href="#">Tráfico</a>
Matriz de distancias (Km)	<a href="#">Distancia</a>
Costos de conmutación	<a href="#">Costo Conmutación</a>
Costo de la transmisión por kilómetro	100
OTROS PARÁMETROS	
Probabilidad de pérdida en rutas finales	1.00%
Capacidad modular de la transmisión	1 circuitos
Rendimiento de las rutas finales	0.8

**3. INFORMACIÓN ADICIONAL**  
[tss@uij.satnet.net](mailto:tss@uij.satnet.net)

Hoja de resumen

Hoja para introducir los datos de tráfico

Costo de transmisión

Grado de Servicio

RESUMEN+ / CIRCUITOS / Tráfico+ / Distancia+ / Costo C

Los costos de conmutación se introducen en esta hoja. Tanto costos de conmutación local como de conmutación tandem

### Procedimiento de cálculo

Una vez que la hoja electrónica recibe los datos mencionados puede realizar los procedimientos requeridos para calcular el dimensionamiento óptimo de la red. Estos están detallados en el manual de la UIT que ha sido citado y se resumen brevemente a continuación

Se calculan los costos totales a partir de los costos unitarios que son conocidos. Esto permite obtener, para cada ruta, una relación entre el costo que representa incrementar un circuito en la ruta final, con relación al costo de incrementar un circuito en la ruta directa. Generalmente es más costoso el incremento de un circuito por la central tandem, pero, en cambio, estas rutas aprovechan más eficientemente los recursos por lo que hay un punto óptimo –desde el punto de vista

UNIÓN INTERNACIONAL DE TELECOMUNICACIONES (UIT)  
 PLANIFICACIÓN GENERAL DE LA RED (Ginebra 1983)  
 CAPÍTULO X. DIMENSIONAMIENTO Y OPTIMIZACIÓN DE LA RED

1. RESULTADOS	CIRCUITOS
<b>PROBABILIDAD DE PÉRDIDA</b>	<b>1.00%</b>
<b>Tráfico Total</b>	<b>1 240 Erlangs</b>
<b>Circuitos Totales</b>	<b>1 880</b>
Circuitos Directos	1 328
Circuitos Finales	552
<b>Costo Total</b>	<b>1 373 530</b>
Costo de los circuitos directos	890 440
Costo de los circuitos finales	483 090

Los resultados aparecen en la hoja “RESUMEN”

económico– para repartir el tráfico entre la ruta directa y la final.

Utilizando este criterio de óptimo económico se dimensionan las rutas directas, que, por lo general, son rutas de alto uso, es decir, tienen probabilidades de pérdida bastante altas: 10% o 20%, por ejemplo. El dimensionamiento de las rutas directas considera que éstas cursan un tráfico puramente aleatorio (proceso de Poisson) y usa la fórmula B de Erlang y el factor de costos que se mencionó anteriormente.

El tráfico que no alcanzan a cursar las rutas directas se desborda hacia la ruta final donde se agrupa con el tráfico de desborde proveniente de las otras rutas. El tráfico de desborde no es puramente aleatorio, por lo que se utiliza los estudios teóricos pertinentes para sustituirlo por un *tráfico aleatorio equivalente* que proviene de un hipotético grupo de circuitos para el cual se puede determinar el número de circuitos que lo integran y el tráfico ofrecido al mismo. Gracias a esta ficción se puede aplicar nuevamente la fórmula B de Erlang para establecer el dimensionamiento de las rutas finales.

### 5.5.3 LA HOJA EXCEL

La hoja Excel que se presenta ha sido diseñada para facilitar al máximo su utilización. Incorpora la capacidad de cálculo a través de la fórmula B de Erlang y fórmulas relacionadas. En la misma se pueden apreciar las siguientes *lengüetas* (“tabs” en inglés) de selección:

- ❖ RESUMEN+
- ❖ CIRCUITOS
- ❖ Tráfico+
- ❖ Distancia+
- ❖ Costo Conmutación+
- ❖ Costo Transmisión
- ❖ Costo Ruta Directa
- ❖ Costo Ruta Final
- ❖ Factor Costos
- ❖ Costo Total

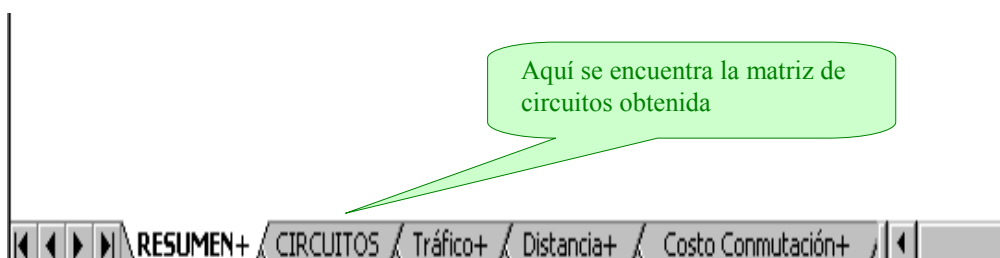
Antes de analizar cada una de estas *lengüetas* se presentan observaciones de índole general. Algunas *lengüetas* tiene como sufijo el signo *más* (“+”) para indicarle al usuario que en la correspondiente página es necesario ingresar datos. En estas hojas los sitios previstos para que el usuario realice cambios tienen tipo de letra de color azul (el resto tiene el texto en negro y las celdas se hallan protegidas para evitarle inconvenientes). Como se dará cuenta el lector, es muy simple e intuitivo ver cuales son los datos requeridos y en donde se los debe alimentar a la hoja de cálculo. Adicionalmente, a todas las matrices se las ha añadido filas y columnas para sumar los valores de la matriz, aunque en algunos casos eso no tiene una significación física, sirven como elementos para controlar las distintas versiones de los cálculos.

#### RESUMEN+.

La hoja de resumen cumple una doble función: por un lado presenta los resultados macro de los cálculos, en tanto que por otro es un punto centralizado para el ingreso de parámetros que no tienen la forma de matriz, puesto que éstos se ingresan en su propia hoja. La hoja tiene hipervínculos hacia los sitios en que se presentan los resultados de detalle (CIRCUITOS) como también hacia los de ingreso de datos (tráfico, distancias, costos). El usuario deberá ubicarse en primer lugar en esta hoja para ingresar sus datos y deberá volver a la misma después de cada fase de ingreso de los mismos.

#### CIRCUITOS.

Es el resultado fundamental del proceso de optimización. Se presenta la matriz de circuitos calculada, tanto para las rutas directas como para las finales. Las centrales, siguiendo el ejemplo de la UIT, se han identificado con las letras E1, E2, ... etc. y la central tandem con T. En este caso la central T está ubicada, físicamente, en el mismo lugar que la E5 por lo que este hecho se ha señalado con negrillas en E5. Podría ser que E5 y T sean una sola central combinada, lo cual no modificaría para nada los resultados.



**Tráfico+.** Debe introducirse la matriz que expresa la demanda del tráfico punto a punto para cada una de las centrales. Deberá tener en cuenta que la red debe cursar el tráfico de la hora pico y dejar, además, un margen de seguridad para cubrir los imprevistos que, eventualmente, hacen que la demanda de tráfico suba más allá de los valores ordinarios. Las filas y columnas correspondientes a la central tandem están en blanco porque no hay tráfico que se origine ni termine en dicha central: sólo hay tráfico de tránsito. El tráfico interno de la central también se ha dejado en blanco, por irrelevante, siguiendo el ejemplo de la UIT.

**Distancia+.** Debe introducirse la matriz de distancias entre cada una de las centrales. En este caso si deben llenarse las distancias correspondientes a la central tandem porque sobre la base de ella se calculan los costos de la transmisión.

**Costo Conmutación+.** Deben introducirse los marginales de la conmutación en forma de matriz. Los datos deben comprender tanto la conmutación local como la tandem.

**Costo Transmisión.** Aquí la hoja Excel presenta los resultados que obtiene para el cálculo de los costos de la transmisión. Simplemente utiliza los datos de las distancias y el costo unitario de la transmisión de la *lengueta* RESUMEN+ para establecer el costo marginal de la transmisión en cada una de las rutas.

**Costo Ruta Directa.** La hoja Excel presenta los resultados que obtiene para los costos marginales de las rutas directas. Estos costos los calcula sumando los costos de la conmutación y de la transmisión para cada una de las rutas.

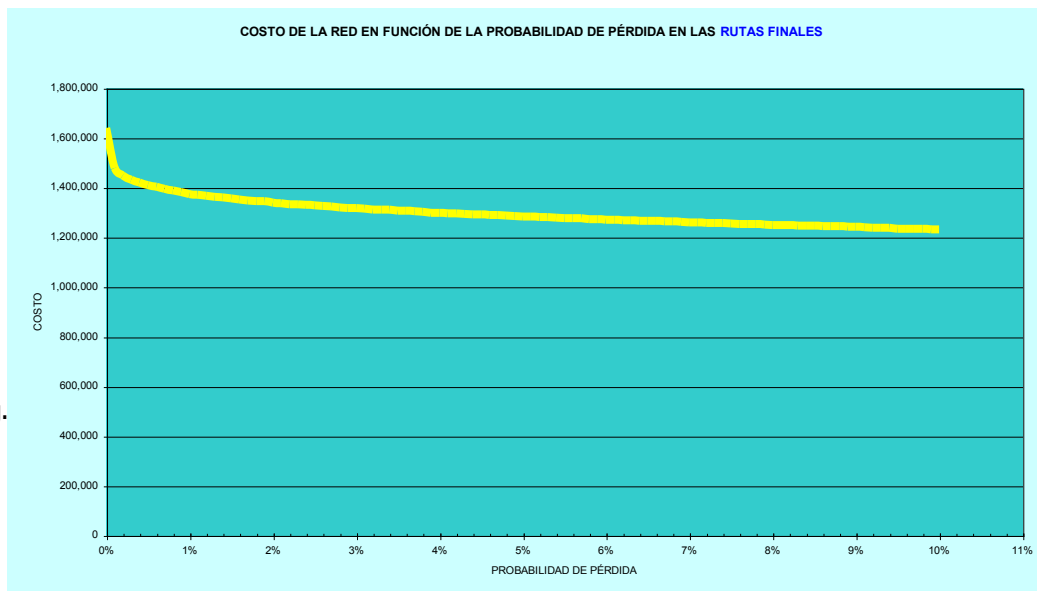
**Costo Ruta Final.** De igual manera, la hoja Excel, calcula los costos marginales para las rutas finales.

**Factor Costos.** Con los elementos anteriores, la hoja Excel, calcula la relación de costos para cada una de las rutas, lo que le permite hacer el dimensionamiento óptimo de las rutas directas.

**Costo Total.** La hoja Excel calcula el costo total de la red que, a su vez, se presenta en valor global en RESUMEN+. El costo total es simplemente el producto del número de circuitos en cada ruta por su costo. Se incluye esta hoja para facilitar análisis económicos.

#### 5.5.4 ANÁLISIS COMPLEMENTARIOS

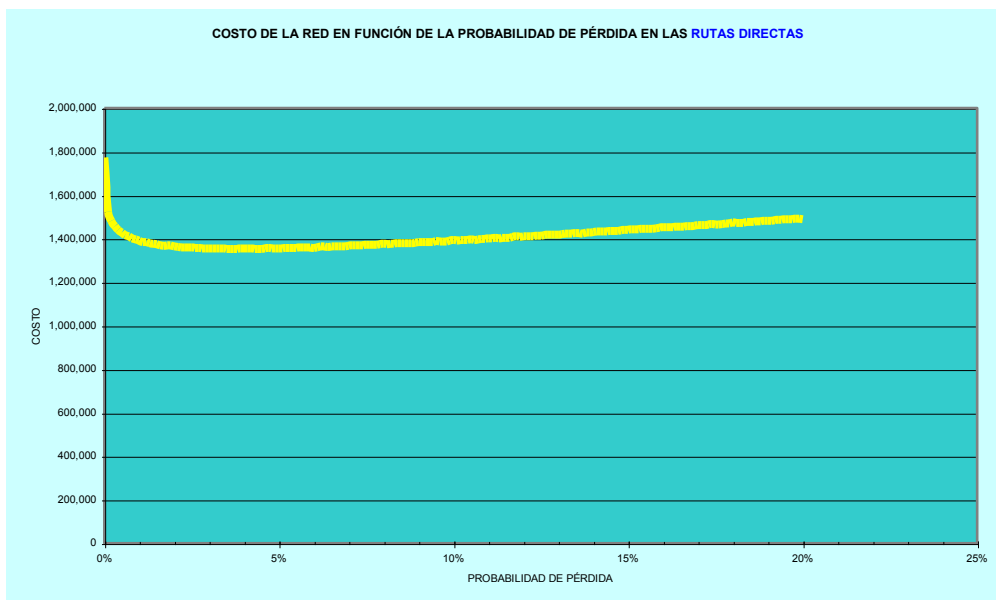
Una vez que se han introducido los datos en la hoja electrónica se pueden realizar algunos análisis interesantes. Por ejemplo, en la figura se puede observar el costo de la red del ejemplo en función de la probabilidad de pérdida de las rutas finales. Se han introducido probabilidades de pérdida que van del 0% al 10% en la celda correspondiente de la hoja RESUMEN y se ha obtenido el costo de la red. Como era de esperarse mientras mayor es la probabilidad de pérdida que se pretende la red es más barata; y, al principio de la curva se puede ver que es sumamente costoso lograr calidades de servicio mejores que 0.5%.





También se puede calcular el costo de incrementar la calidad de servicio. Por ejemplo, la red que brinda el 2% de servicio cuesta 1'339.020 y la que ofrece 1% cuesta 1'373.530, es decir, para incrementar 1% de calidad de servicio se requiere invertir 34.510, o lo que es lo mismo, el 2.58% del valor inicial de la red.

La red de la que hemos venido hablando se ha diseñado con el criterio de mantener una probabilidad de pérdida constante en todas las rutas finales. Para comparación se presenta los resultados de otro diseño, éste basado en fijar una constante para la probabilidad de pérdida de las rutas directas. Esto produce una red que obviamente no es un óptimo desde el punto de vista económico.



En la nueva red se puede observar lo que da base a la teoría de la optimización de redes: la función del costo versus la probabilidad de pérdida tiene un mínimo.

Para probabilidades de pérdida inferiores a las que corresponden al mínimo la red se hace progresivamente más costosa porque la red malla que resulta de los numerosos circuitos directos es cara. Para probabilidades de pérdida superiores a las que corresponden al mínimo también se incrementan los costos, porque, la mayor parte del tráfico tiende a irse por las rutas finales que son más costosas que las rutas directas.

El mínimo, en este ejemplo, corresponde a un costo de 1'351.587 que se produce para una probabilidad de pérdida del 3.7%.

Con esta misma cantidad de dinero (1'351.587) se puede obtener una red con probabilidad de pérdida del 1.6% en las rutas finales si se utiliza la estrategia de optimización explicada en este numeral; esta red

es, por su puesto, de mucho mejor calidad. Esto demuestra que vale la pena el esfuerzo de optimizar las redes: se puede conseguir ahorro de dinero o mejora de calidad de servicio.

### 5.5.5 CONCLUSIONES

En la actualidad es muy fácil optimizar redes en las cuales se presentan tráficos puramente aleatorios. Esto es consecuencia del estudio realizado por muchos científicos a lo largo del presente siglo y de que la expansión que la expansión de la tecnología –tanto en *hardware* como en *software*– ha llegado a casi todos los rincones del mundo presente.

Las herramientas de que se dispone actualmente, no sólo que hacen sumamente fácil el proceso de optimización, sino que, también posibilitan análisis de sensibilidad de la red en relación a costos, calidad de servicio, alternativas de enrutamiento, o, en general, cualquier parámetro del diseño.

La herramienta para optimizar está disponible en forma de una simple hoja de cálculo electrónica y se puede experimentar fácilmente con ella.

## 5.6 INSTRUCCIONES PARA UTILIZAR LA BIBLIOTECA DE FUNCIONES DE ERLANG “TSS Teletraf.xll”

*PROPÓSITO. La biblioteca de funciones de Erlang es un complemento del EXCEL (add-in) que le permite utilizar la función de Erlang B y similares como funciones nativas del EXCEL. Esto resulta muy práctico, entre otras cosas, para realizar cálculos de tráfico telefónico y dimensionamiento óptimo de redes.*

### 5.6.1 ARCHIVOS.

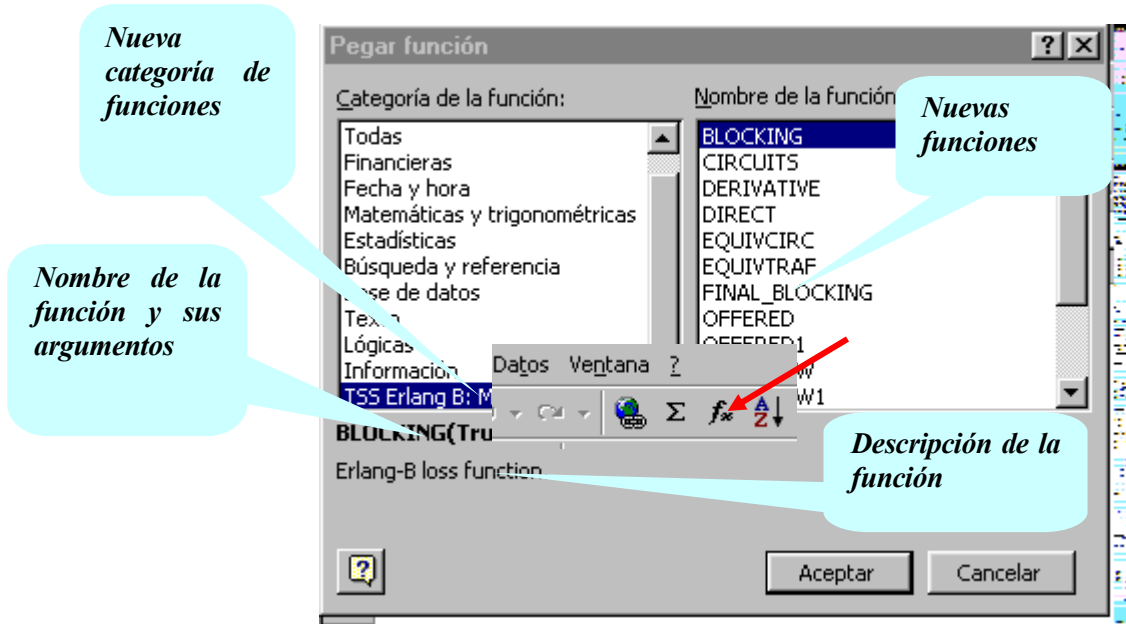
Los siguientes archivos se entregan:

- a. “TSS Teletraf.zip”: contiene todos los archivos entregados en forma comprimida (formato .zip). Haga doble-click en el archivo para descomprimirlo y cópielos al directorio donde desea grabar los archivos descomprimidos.
- b. “TSS Teletraf.xll”: es el complemento del EXCEL (*add-in*) y constituye el archivo fundamental;
- c. 1. Léame.doc: el presente archivo con información general;
- d.
- e. 2. TSS-99-030.doc es un artículo que describe, en general, el dimensionamiento de redes telefónicas y utilizando como ejemplo el archivo que se presenta a continuación;
- f. 3. Ejemplo.xls: un archivo EXCEL con demostración de la utilización de las funciones de Erlang para el dimensionamiento de una red multicentral.

### 5.6.2 INSTALACIÓN.

Se descomprimen los archivos y se los copia el directorio que el usuario considere conveniente. Para utilizar las funciones se hace doble-click en el icono que representa a “TSS Teletraf.xll” lo que inicia el EXCEL con las funciones listas para ser utilizadas. Si se requiere que las funciones siempre estén disponibles al abrir el EXCEL se debe copiar “TSS Teletraf.xll” en el directorio XLSTART.

**UTILIZACIÓN.**



g. S  
i  
s  
e  
h  
a  
i  
n  
i  
c  
i  
a  
d  
o  
e

1 EXCEL haciendo doble-click en el archivo “TSS Teletraf.xll, se añade un libro nuevo haciendo clic en el icono

o seleccionando en el menú: *Archivo->Nuevo->Libro, Aceptar.*

h. Ahora las funciones están listas para ser usadas. Supongamos que seleccionamos la celda A1 y hacemos click en el *Asistente de Funciones*:

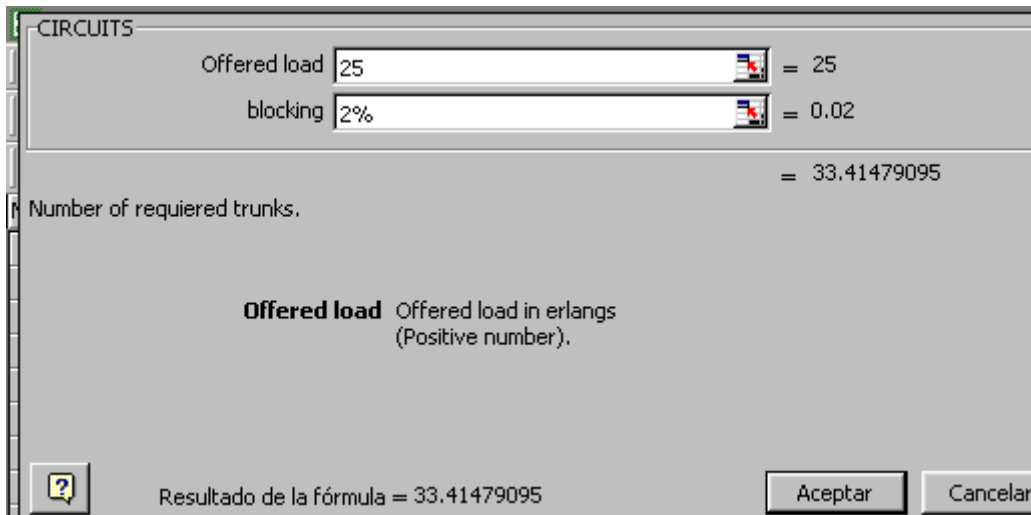
Se despliega el cuadro de diálogo en el se puede notar que se ha añadido una nueva categoría de función (TSS Erlang B: M/M/s (0)), que da acceso a varias funciones: BLOCKING, CIRCUITS, DERIVATIVE, etc.

Para cada una de las funciones el asistente de funciones indica el nombre y los argumentos requeridos

- i.
- j.
- k.
- l.
- m.
- n.
- o.
- p.
- q.
- r.
- s.
- t.
- u.
- v.
- w.
- x.
- y.

z.

Si selecciona alguna función (CIRCUITS, por ejemplo) y se hace click en *Aceptar*, se despliega un cuadro de diálogo que le permite introducir los argumentos



El *Asistente de Funciones* presenta una descripción general de la función y cada uno de sus argumentos. En este ejemplo se quiere saber cuántos circuitos se requieren para cursar un tráfico ofrecido de 25 Erlangs con 2% de probabilidad de pérdida y la respuesta es 33.4 circuitos (el programa permite calcular con números reales de circuitos, no únicamente, con número enteros).

Si se presiona *Aceptar* se encontrará que en la celda *A1* se ha introducido la fórmula “=CIRCUITS(25; 2%)” y el resultado es 33.41 circuitos.

**EJEMPLO DE APLICACIÓN.**

Resolución del problema 21, utilizando el programa de la UIT, para el Dimensionamiento de Redes.

Se tiene un sistema de cuatro centrales con las siguientes matrices de tráfico y costos de enlaces

**TRAFICO OFRECIDO (ERLANGS)**

		1	2	3	4	Ait
Aij=	1	0	35	60	25	120
	2	30	0	15	5	50
	3	52	17	0	10	79
	4	20	66	12	0	98
	Atj	102	118	87	40	

**COSTOS POR CIRCUITO**

		1	2	3	4	Xit
Xij=	1	0	1,747	1,802	1,416	1,140
	2	1,747	0	2,41	1,969	1,747
	3	1,802	2,410	0	2,078	1,802
	4	1,416	1,969	2,078	0	1,416
	Xtj	1,140	1,747	1,802	1,416	0

**RAZONES DE COSTOS**

		1	2	3	4
1	0	1,65254722	1,63263041	1,80508475	
2	1,65254722	0	1,47261411	1,60639919	
3	1,63263041	1,47261411	0	1,54860443	
4	1,80508475	1,60721545	1,54860443	0	

**NUMERO OPTIMO DE LINEAS PRINCIPALES DE UNA RUTA DIRECTA**

Se usa la fórmula TSS Erlang B: M/M/s(0)  
**DIRECT**(Load, Cost\_ratio, Trans\_modulo, Efficiency)  
 Trans\_modulo y Efficiency el programa pone por defecto

		1	2	3	4	Nit
Nij=	1	0	38	63	28	129
	2	32	0	15	5	52
	3	55	17	0	10	82
	4	22	69	13	0	104
	Ntj	109	124	91	43	

**TRAFICO DE DESBORDAMIENTO**

Se usa la fórmula TSS Erlang B: M/M/s(0)  
**OVERFLOW**(Trunks, Load)

		1	2	3	4	Rit
Rij=	1	0,00	2,74	4,11	2,07	8,92
	2	2,89	0,00	2,70	1,42	7,02
	3	3,70	2,90	0,00	2,15	8,75
	4	2,13	4,40	1,86	0,00	8,39
	Rtj	8,73	10,04	8,67	5,64	33,08

**VARIANZA DEL TRAFICO DE DESBORDAMIENTO**

Se usa la fórmula TSS Erlang B: M/M/s(0)  
**VARIANCE**(Trunks, Load)

	1	2	3	4	Vit
Vij= 1	0,00	9,47	17,62	6,31	33,40
2	9,26	0,00	6,34	2,33	17,94
3	14,98	7,12	0,00	4,36	26,47
4	5,89	19,61	4,18	0,00	29,69
Vtj	30,14	36,20	28,14	13,01	0,00

**FACTOR PICO**

Se usa la fórmula TSS Erlang B: M/M/s(0)  
**PEAK**(Trunks, Load)

	1	2	3	4	
1	0,00	3,46	4,29	3,05	3,75
2	3,21	0,00	2,34	1,64	2,56
3	4,04	2,45	0,00	2,03	3,02
4	2,76	4,46	2,25	0,00	3,54
	3,45	3,61	3,24	2,31	

**LINEAS PRINCIPALES EQUIVALENTES**

Se usa la fórmula TSS Erlang B: M/M/s(0)  
**EQUIVCIRC** (Overflow, Peak)

	1	2	3	4	Nit
Nij= 1	0	38	63	28	129
2	32	0	15	5	52
3	55	17	0	10	82
4	22	69	13	0	104
Ntj	109	124	91	43	0

**TRAFICO EQUIVALENTE**

Se usa la fórmula TSS Erlang B: M/M/s(0)  
**EQUIVTRAF**(Overflow,Peak)

	1	2	3	4	Ait
1	0	35	60	25	120
2	30	0	15	5	50
3	52	17	0	10	79
4	20	66	12	0	98
Atj	102	118	87	40	347

**NUMEROS DE ORGANOS EN LA RUTA FINAL**

Se usa la fórmula TSS Erlang B: M/M/s(0)  
**TANDEM**(Overflow,Peak,Blocking)

	1	2	3	4	N*it
1					27
2					20
3					24
4					25
<b>N*tj</b>	26	28	25	17	<b>0</b>

**COSTO TOTAL DEL SISTEMA: REDES INDEPENDIENTES, MALLA Y ESTRELLA**

**Costos Circuitos Directos**

	1	2	3	4	Total
Nij*Xij = 1	0	66,386	113,526	39,648	219,560
2	55,904	0	36,150	9,845	101,899
3	99,110	40,970	0	20,780	160,860
4	31,152	135,792	27,014	0	193,958
				Sub-Total	<b>676,277</b>

**Costos Circuitos solo Tandem**

	1	2	3	4	Nit	Xit	Nit Xit
1					129	1140	147060
2					52	1747	90844
3					82	1802	147764
4					104	1416	147264
<b>Ntj</b>	109	124	91	43			<b>532932</b>
<b>Xtj</b>	1140	1747	1802	1416			
<b>Ntj Xtj</b>	124260	216628	163982	60888			<b>565758</b>

**(Nit\*Xit)+(Ntj\*Xtj)=**

**1.098.690**

**COSTO TOTAL DEL SISTEMA: REDES COMBINADAS, MALLA Y ESTRELLA**

**Costos Circuitos Tandem de Desborde**

	1	2	3	4	Nit	Xit	Nit Xit
1					27	1140	30780
2					20	1747	34940
3					24	1802	43248
4					25	1416	35400
<b>Ntj</b>	26	28	25	17			<b>144368</b>
<b>Xtj</b>	1140	1747	1802	1416			

Ntj Xtj | 29640 48916 45050 24072 147678

(Nit\*Xit)+(Ntj\*Xtj)= 292.046

**Costos Circuitos Directos**

	1	2	3	4	Total
Nij*Xij=	0,000	66,386	113,526	39,648	219,560
	55,904	0,000	36,150	9,845	101,899
	99,110	40,970	0,000	20,780	160,860
	31,152	135,792	27,014	0,000	193,958
				Sub-Total	<b>676,277</b>
					<b>676.277</b>

**Costo Total del Sistema Combinado:Red Malla-Estrella**

**5.7 Método de Hayward-Fredericks**

Este método supone que puede calcularse la congestión para un tráfico definido por R y V a partir de la formula de Erlang para:

$$A' = \frac{R}{V} \quad y \quad N' = \frac{N_2}{R} \quad (5-26)$$

donde la congestión es entonces:

$$E = \frac{A' E_{N'}(A')}{R} \quad (5-27)$$

Si esta dado el valor de E, el numero de circuitos requeridos es:

$$N_2 = N' \frac{V}{R} \quad (5-28)$$

Este método es más simple que el método de Wilkinson, puesto que solo necesita una tabla de Erlang B para encontrar N' y N<sub>2</sub>, o más bien interpolar en una tabla de Erlang B.

Para calcular los circuitos en las rutas de segunda elección se suman las medias y varianzas para todos los tráficos ofrecidos a estas rutas y como se define en ( 5-21 y 5-22), para el trafico total en una ruta de segunda elección.



Para la congestión permitida  $B_2$ ,

$$\frac{A'E_{N'}(A)}{R} \leq B_2 \quad (5-29)$$

$N_2$ , se calcula a partir de:

$$N_2 = N' \frac{V}{R}$$

y la carga por circuito en la ruta de segunda elección es como para el método de Wilkinson:

$$A_2 = \frac{M(1 - B_2)}{N_2} \quad (5-30)$$

o si se precisa mayor exactitud:

$$A_2 = \frac{A'E_{N'}(A')}{N_2 - N'_2} \quad (5-30 a)$$

donde  $N'_2$  es el numero de circuitos necesarios en la ruta de segunda elección si el tráfico particular A no ha desbordado a la ruta.

Si el valor de  $A_2$  dado por ( 5-30) o ( 5-30a) varia considerablemente del valor anterior es preciso un nuevo calculo.

Cálculos similares se realizan para las otras rutas de segunda elección.

La mayoría de los equipos de conmutación permiten la explotación sobre mas de una ruta alternativa. Por lo tanto, es posible disponer de rutas de primera, segunda, tercera, etc. elecciones. Generalmente la ruta de ultima elección es una ruta de baja perdida.

Como ejemplo considero la disposición de la red nacional de larga distancia del Ecuador.

## 5.8 Cálculo de R y V para las formulas de Wilkinson.

$$R = AE_{N_1}(A)$$

$$V_R = R \left( I - R + \frac{A}{N + I + R - A} \right)$$

## 5.9 Cálculo de las aproximaciones de Rapp.

$$A^* = V + 3 \frac{V}{R} \left( \frac{V}{R} - 1 \right)$$

$$N^* = \frac{A^* \left( R + \frac{V}{R} \right)}{R + \frac{V}{R} - 1} - R - 1$$

## 5.10 Cálculos para el método de Hayward-Fredericks

Dados R; V y V/R

Aplicar la formula de Erlang para valores no enteros y

$$A' = \frac{R}{V} \quad N' = \frac{N_2}{V}$$

donde  $N_2$  es el numero actual de circuitos en el grupo

La congestión en la ruta particular se calcula a partir de:

$$E = \frac{A' E_{N'}(A')}{R}$$

## DEFINICION DE VARIABLES

$c_A$	Número de ocupaciones ofrecidas por término medio en la unidad de tiempo al grupo de salida.
$c_y$	Número de ocupaciones atendidas por el grupo de salida por término medio en la unidad de tiempo.
$c_R$	Número de ocupaciones rechazadas por término medio en la unidad de tiempo.
$t_m$	Tiempo medio de ocupación de las líneas de salida.
$t_w$	Espera media de las ocupaciones demoradas.
$\bar{t}_w$	Espera media de las ocupaciones ofrecidas.
$P(>t)$	Probabilidad de sobrepasar un determinado tiempo $t$ de espera.
$P(>0)$	Probabilidad de espera.
A	Oferta (Intensidad de Tráfico Ofrecido)
y	Carga (Intensidad de Tráfico Coursado)
R	Intensidad de Tráfico Rechazado, Tráfico Perdido

$A_r$	Intensidad de Tráfico de Repetición
B	Pérdida, Probabilidad de pérdida, desbordamiento; probabilidad de desbordamiento
X	Densidad de tráfico
D	Demanda de tráfico
k	Accesibilidad
M	Número de fuentes de tráfico
m	Número de circuitos en rutas TANDEM
N	Número de órganos
$A_{ij}$	Tráfico de la central i a la j
$N_{ij}$	Número de circuitos de la ruta directa.
n	Número de llamadas
$P(A)$	Probabilidad del evento A
Q	Tráfico desbordado
t	Tiempo
T	Período
V	Varianza
$X_{ij}$	Costo de circuito entre centrales i y j
$\bar{X}$	Valor medio
$Z_{ij}$	Razón de costos
$A_{ij}$	Tráfico de la central i a la j
$N_{ij}$	Número de circuitos de la ruta directa
$D = \sigma^2 - \mu$	Valor de dispersión
$\mu$	Intensidad de tráfico (p. ej., A o y o R)
$R_{ij}$	Tráfico desbordado en la ruta ij.
$V_{ij}$	Varianza de $R_{ij}$ .

## ***Agner Krarup Erlang (1878 - 1929)***

A.K. Erlang was the first person to study the problem of telephone networks. By studying a village telephone exchange he worked out a formula, now known as Erlang's formula, to calculate the fraction of callers attempting to call someone outside the village that must wait because all of the lines are in use. Although Erlang's model is a simple one, the mathematics underlying today's complex telephone networks is still based on his work.

He was born at Lønborg, in Jutland, Denmark. His father, Hans Nielsen Erlang, was the village schoolmaster and parish clerk. His mother was Magdalene Krarup from an ecclesiastical family and had a well known Danish mathematician, Thomas Fincke, amongst her ancestors. He had a brother, Frederik, who was two years older and two younger sisters, Marie and Ingeborg. Agner spent his early school days with them at his father's schoolhouse. Evenings were often spent reading a book with Frederik, who would read it in the conventional way and Agner would sit on the opposite side and read it upside down. At this time one of his favorite subjects was astronomy and he liked to write poems on astronomical subjects. When he had finished his elementary education at the school he was given further private tuition and succeeded in passing the Præliminæreksamen (an examination held at the University of Copenhagen) with distinction. He was then only 14 years old and had to be given special entrance permission.

Agner returned home where he remained for two years, teaching at his father's school for two years and continuing with his studies. He also learnt French and Latin during this period. By the time he was 16 his father wanted him to go to university but money was scarce. A distant family relation provided free accommodation for him while he prepared for his university entrance examinations at the Frederiksborg Grammar School. He won a scholarship to the University of Copenhagen and completed his studies there in 1901 as an MA with mathematics as the main subject

and astronomy, physics and chemistry as secondary subjects.

Over the next 7 years he taught in various schools. Even though his natural inclination was toward scientific research, he proved to have excellent teaching qualities. He was not highly sociable, he preferred to be an observer, and had a concise style of speech. His friends nicknamed him "The Private Person". He used his summer holidays to travel abroad to France, Sweden, Germany and Great Britain, visiting art galleries and libraries. While teaching, he kept up his studies in mathematics and natural sciences. He was a member of the Danish Mathematicians' Association through which he made contact with other mathematicians including members of the Copenhagen Telephone Company. He went to work for this company in 1908 as scientific collaborator and later as head of its laboratory.

Erlang at once started to work on applying the theory of probabilities to problems of telephone traffic and in 1909 published his first work on it "The Theory of Probabilities and Telephone Conversations"<sup>[1]</sup> proving that telephone calls distributed at random follow Poisson's law of distribution. At the beginning he had no laboratory staff to help him, so he had to carry out all the measurements of stray currents. He was often to be seen in the streets of Copenhagen, accompanied by a workman carrying a ladder, which was used to climb down into manholes. Further publications followed, the most important work was published in 1917 "Solution of some Problems in the Theory of Probabilities of Significance in Automatic Telephone Exchanges"<sup>[2]</sup>. This paper contained formulae for loss and waiting time, which are now well known in the theory of telephone traffic. A comprehensive survey of his works is given in "The life and works of A.K. Erlang"<sup>[3]</sup>.

Because of the growing interest in his work several of his papers were translated into English, French and German. He wrote up his work in a very brief style, sometimes omitting the proofs, which made the work difficult for non-specialists in this field to understand. It is known that a researcher from the Bell Telephone Laboratories in the USA learnt Danish in order to be able to read Erlang's papers in the original language.

His work on the theory of telephone traffic won him international recognition. His

formula for the probability of loss was accepted by the British Post Office as the basis for calculating circuit facilities. He was an associate of the British Institution of Electrical Engineers.

Erlang devoted all his time and energy to his work and studies. He never married and often worked late into the night. He collected a large library of books mainly on mathematics, astronomy and physics, but he was also interested in history, philosophy and poetry. Friends found him to be a good and generous source of information on many topics. He was known to be a charitable man, needy people often came to him at the laboratory for help, which he would usually give them in an unobtrusive way. Erlang worked for the Copenhagen Telephone Company for almost 20 years, and never having had time off for illness, went into hospital for an abdominal operation in January 1929. He died some days later on Sunday, 3rd February 1929.

Interest in his work continued after his death and by 1944 "Erlang" was used in Scandinavian countries to denote the unit of telephone traffic. International recognition followed at the end of World War II<sup>[4]</sup>.

### References

- [1] "The Theory of Probabilities and Telephone Conversations", Nyt Tidsskrift for Matematik B, vol 20, 1909.
- [2] "Solution of some Problems in the Theory of Probabilities of Significance in Automatic Telephone Exchanges", Elektroteknikeren, vol 13, 1917.
- [3] "The life and works of A.K. Erlang", E. Brockmeyer, H.L. Halstrom and Arns Jensen, Copenhagen: The Copenhagen Telephone Company, 1948.
- [4] Proceedings of the C.C.I.F. ("Le comité consultatif international des communications téléphoniques à grande distance"), Montreux, 1946.