

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS

RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE LAS ECUACIONES DE SHALLOW  
WATER

PROYECTO PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE INGENIERA  
MATEMÁTICA

MARÍA JOSÉ CASTELLANO GUAYASAMÍN  
maria.castellanog@epn.edu.ec

Director: DR. JUAN CARLOS DE LOS REYES BUENO  
juan.delosreyes@epn.edu.ec

QUITO, FEBRERO 2016

## DECLARACIÓN

Yo MARÍA JOSÉ CASTELLANO GUAYASAMÍN , declaro bajo juramento que el trabajo aquí escrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

A través de la presente declaración cedo mis derechos de propiedad intelectual, correspondientes a este trabajo, a la Escuela Politécnica Nacional, según lo establecido por la Ley de Propiedad Intelectual, por su reglamento y por la normatividad institucional vigente.



María José Castellano Guayasamín

## CERTIFICACIÓN

Certifico que el presente trabajo fue desarrollado por MARÍA JOSÉ CASTELLANO GUAYASAMÍN , bajo mi supervisión.



Dr. Juan Carlos De Los Reyes Bueno  
Director del Proyecto

## AGRADECIMIENTOS

A Juan Carlos De los Reyes por la confianza puesta en mi trabajo. A mi familia por el cariño y fortaleza que me brindaron. A Myrian Guanoluiza, Sofía López, Cristian Nuñez, Stefanía Vargas, Elsa Almeida, Mónica Jara por apoyarme en el desarrollo del proyecto y al Centro de Modelización Matemática por la oportunidad de pertenecer a este grupo de trabajo.

Al Instituto Nacional de Hidrología y Meteorología que, dentro de los proyectos *Sistema de Pronóstico del Clima y el Tiempo para todo el territorio ecuatoriano- Modelización numérica y estadística*(PIC-13-INAMHI-002) y *Sistema de Pronóstico del Clima y el Tiempo para todo el territorio ecuatoriano: Modelización numérica y estadística - fase dos: asimilación de datos y operación de los modelos de predicción desarrollados*(PIC-15-INAMHI-001), financió la realización de este proyecto.

## DEDICATORIA

*A Lupita, Franklin y Miguelito.*

*A mi complemento fusión.*

*A mi media naranja.*

*A mi amiga de la vida.*

*A mis ojos en el exterior.*

# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>VIII</b>
<b>Abstract</b>	<b>IX</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Resultados Preliminares</b>	<b>3</b>
2.1. Aproximación Temporal . . . . .	4
2.1.1. Análisis de Métodos a un Paso . . . . .	4
2.2. Aproximación Espacial . . . . .	8
2.2.1. Upwind . . . . .	8
2.2.2. Semi-Lagrangiano . . . . .	10
2.3. Resolución de Problemas No-Lineales . . . . .	13
2.3.1. Iteración de Punto Fijo . . . . .	14
2.3.2. Método de Newton . . . . .	16
<b>3. Leyes de Conservación Hiperbólicas</b>	<b>18</b>
3.1. Leyes de Conservación . . . . .	18
3.2. Problema de Transporte Escalar . . . . .	19
3.2.1. Resolución Numérica . . . . .	19
3.3. Sistema de Leyes de Conservación Hiperbólicas . . . . .	33
3.3.1. Resolución Numérica . . . . .	34
3.4. Ecuación de Burgers . . . . .	44
3.4.1. Resolución Numérica . . . . .	45
<b>4. Ecuaciones de Shallow-Water</b>	<b>54</b>

4.1.	Ecuaciones de Shallow-Water en una dimensión: linealización . . . . .	54
4.2.	Ecuaciones de Shallow-Water no lineales en una dimensión . . . . .	69
4.2.1.	Método de Euler Explícito, aplicando el esquema upwind . . . . .	70
4.2.2.	Método de Euler Semi-Implícito, aplicando el esquema upwind . . . . .	78
4.2.3.	Método de Euler Semi-Implícito, aplicando el esquema semi-lagrangiano . . . . .	84
4.2.4.	Comparaciones . . . . .	92
4.3.	Ecuaciones de Shallow-Water en dos dimensiones . . . . .	104
4.3.1.	Método Euler Semi-Implícito, aplicando el esquema upwind . . . . .	107
4.3.2.	Método Euler Semi-Implícito, aplicando el esquema semi lagrangiano . . . . .	129
4.3.3.	Comparaciones . . . . .	141
<b>5.</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>150</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>152</b>

# Resumen

El estudio de movimiento del oleaje debido a la presencia de terremotos submarinos se considera de gran importancia, ya que las consecuencias registradas después de que ocurra el fenómeno afectan considerablemente a la población de la zona en general. A partir del año 2004 se han registrado alrededor de 15 terremotos submarinos, entre ellos los que causaron mayor impacto fueron: el Tsunami registrado en las costas del Océano Índico provocado por un terremoto submarino de 9,1 grados en la escala de Richter; y el segundo en el año 2015 en las costas de Chile donde tuvieron lugar olas de hasta 4,8 metros. La dinámica de los Tsunamis es una de las aplicaciones de las Ecuaciones de Shallow Water y además, es aplicable al estudio de flujos a través de estructuras, la formación de tormentas, la predicción meteorológica y los flujos planetarios. En este trabajo se estudiarán y resolverán numéricamente las Ecuaciones de Shallow Water en una y dos dimensiones, para ello se presentarán los métodos numéricos Euler explícito, implícito y semi-implícito, también la descripción de los esquemas de discretización upwind y semi-lagrangiano. Se presentarán los resultados numéricos obtenidos y se los comparará para así determinar el método más estable y eficiente para resolver las Ecuaciones de Shallow Water.



# Abstract

The study of wave movement due to undersea earthquakes is considered of great importance. The consequences registered after the phenomenon affect the population of the area considerably. Since 2004 there have been around 15 undersea earthquakes, those that caused most impact were: the Tsunami on the coast of the Indian Ocean caused by an undersea earthquake of 9.1 degrees on the Richter scale; and the second in 2015 which took place on the coast of Chile with waves up to 4.8 meters. Tsunami dynamics is one of the applications of Shallow Water equations and is also applicable to the study of flow through structures, the storms formation, weather forecasting and planetary flows. In this work we will study and numerically solve the equations of Shallow Water in one and two dimensions, with Euler explicit, implicit and semi-implicit numerical methods. Also the description of upwind discretization schemes and semi-Lagrangian be presented . The numerical results are presented and compared them to determine the most stable and efficient to solve the Shallow Water Equations.

# Capítulo 1

## Introducción

El estudio del movimiento del oleaje debido a la presencia de un terremoto submarino es muy importante debido a las consecuencias que surgen después de que ocurra el fenómeno. A lo largo de los últimos años, en el mundo, se han visto diferentes escenarios donde estos terremotos han provocado marejadas e inclusive tsunamis.

Uno de los tsunamis más fuertes registrados tuvo lugar en las costas que bordean el Océano Índico y fue provocado por un terremoto submarino de 9,1 grados en la escala de Richter en la costa del oeste de Sumatra en Indonesia, en diciembre del año 2004. Este fenómeno natural provocó miles de pérdidas humanas y materiales. A partir de este evento han ocurrido alrededor de 15 Tsunamis, el último registrado sucedió en septiembre del 2015 en el que se presenciaron olas de hasta 4,8 metros en las costas de Chile.

La traducción directa de las ecuaciones de Shallow-Water es “aguas superficiales”, es decir, la longitud de las olas del fluido es mucho más grande que la profundidad del mismo. Esta definición permitiría suponer que realizar aproximaciones dentro de los océanos no es posible. Sin embargo, al considerar el caso del Océano Índico, con una profundidad de 3 kilómetros, donde tuvo lugar el Tsumani se han podido registrar olas de alrededor de 100 kilómetros de longitud, razón suficiente para realizar aproximaciones factibles con estas ecuaciones.

Por lo mencionado anteriormente la dinámica de los Tsumanis es una de las aplicaciones de las ecuaciones de Shallow Water y además, es aplicable al estudio de flujos a través de estructuras, la formación de tormentas, la predicción meteorológica y los flujos planetarios.

Considerando la predicción meteorológica en nuestro país, este problema se vuelve complejo debido a la presencia de fuertes variaciones en la velocidad y trayectoria del flujo del viento, así como también del agua, debido a la ubicación geográfica

además de la presencia de valles y montañas que están directamente relacionadas con la formación de tormentas.

Este trabajo se centrará en la resolución de las ecuaciones de Shallow-Water, en una y dos dimensiones, mediante métodos numéricos utilizando diferentes esquemas de discretización. De esta manera se desea encontrar el esquema que resuelva de manera eficiente y estable a las ecuaciones.

Los problemas hiperbólicos han sido estudiados por su dificultad al momento de resolverlos numéricamente, por ejemplo se ha utilizado el esquema upwind con diferencias finitas descrito por Quarteroni, Sacco y Saleri [19] dentro de los métodos Euler explícito, implícito y en este trabajo se extendió a utilizar el método Euler semi-implícito. Sin embargo, el esquema upwind puede utilizar volúmenes finitos, como muestra Leveque [12], para resolver problemas hiperbólicos. En la resolución de problemas de fluidos Banks y Henshaw [1] utilizan el esquema upwind, entre otros, para resolverlos. Este esquema se lo ha utilizado para resolver problemas de leyes de conservación hiperbólicas ([2], [3], [6], [16], [23]), así como también ecuaciones elípticas y ecuaciones de Hamilton-Jacobi ([9], [26]).

Por otro lado Carlini, Falcone y Festa [5] resuelven los problemas hiperbólicos utilizando el esquema de discretización semi-lagrangiano, en este trabajo se resolverán los problemas con este esquema mediante los métodos de Euler utilizados para el esquema upwind. Dentro de la resolución de problemas advectivos Bonaventura [4] desarrolla el esquema semi-lagrangiano para resolver problemas de flujos. Para resolver las Ecuaciones de Shallow Water en una y dos dimensiones el trabajo de Falcone [7] muestra un esquema base que permitirá la resolución de las ecuaciones en el desarrollo del trabajo. El esquema semi-lagrangiano se ha utilizado para resolver, aparte de las Ecuaciones de Shallow Water, modelos atmosféricos y problemas de flujos ([29], [27], [24], [17], [14]); también estos esquemas se han utilizado para resolver problemas advectivos ([25], [21], [14]). Los esquemas mencionados se los explicará a detalle en el desarrollo del trabajo.

# Capítulo 2

## Resultados Preliminares

En el análisis numérico se utiliza el término *discretización* para la transición de un problema continuo a uno que considera sólo un número finito de puntos. En particular, la discretización se usa para resolver numéricamente ecuaciones diferenciales ([8]).

En este trabajo se resolverá un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales. Para ello, se utilizarán métodos usuales como Euler explícito e implícito, donde para la derivada espacial se utilizarán esquemas que permiten resolver problemas advectivos, por ejemplo, el esquema upwind y semi-lagrangiano.

Debido a la naturaleza de las ecuaciones se realizará un estudio a profundidad para determinar la estabilidad de los métodos, dependiendo del paso de discretización temporal y del paso de discretización espacial, considerando la parte advectiva de las mismas.

En las siguientes secciones se presentarán los esquemas de discretización para la derivada espacial y para la derivada temporal considerando el siguiente problema:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.1)$$

Esta descripción corresponde a uno de los problemas de advección más sencillos, donde  $a$  es la velocidad de transporte. Se llama problema de advección, ya que en la ecuación (2.1) el campo escalar conservado que gobierna el movimiento está siendo afectado por un campo de velocidad conocido.

## 2.1. Aproximación Temporal

Se presenta el problema:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t \in I \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \quad (2.2)$$

y se considera el intervalo de tiempo  $I = [0, T]$ , con  $0 < T < \infty$ , dividido en  $\mathcal{N}$  subintervalos con longitud  $h = T/\mathcal{N}$  de la forma  $[t^n, t^{n+1}]$ ; con  $t^0 = 0$  y  $t^{\mathcal{N}} = T$ . La aproximación de  $y(t)$  y  $f(t, y(t))$  en cada tiempo  $t^n$ , se lo denotará como  $u^n$  y  $f^n$  respectivamente.

**DEFINICIÓN 2.1.** (*Quarteroni, 2010,[19]*): A un método numérico tal que aproxime el problema (2.2) se llama método a un paso si para todo  $n \geq 0$ ,  $u^{n+1}$  depende únicamente de  $u^n$ .

Tomando en cuenta el problema (2.2), los métodos a un paso que se utilizarán son de la forma:

### 1. Euler Explícito

$$u^{n+1} = u^n + hf^n. \quad (2.3)$$

### 2. Euler Implícito

$$u^{n+1} = u^n + hf^{n+1}. \quad (2.4)$$

En estos casos se aproxima a  $y'$  mediante diferencias forward (hacia adelante) y backward (hacia atrás), donde  $h$  es el paso de discretización respecto del tiempo.

### 2.1.1. Análisis de Métodos a un Paso

Cualquier método a un paso explícito puede escribirse de la forma:

$$u^{n+1} = u^n + h\Phi(t^n, u^n, f(t^n, u^n); h) \quad 0 \leq n \leq \mathcal{N} - 1, \quad (2.5)$$

donde  $\Phi$  es la función de incremento y  $u^0 = y^0$ . Además considerando  $y^n = y(t^n)$  la expresión (2.5) se puede escribir como:

$$y^{n+1} = y^n + h\Phi(t^n, y^n, f(t^n, y^n); h) + \epsilon^{n+1} \quad 0 \leq n \leq \mathcal{N} - 1, \quad (2.6)$$

donde  $\epsilon^{n+1}$  es el residuo obtenido en el punto  $t^{n+1}$  y es descrito por:

$$\epsilon^{n+1} = h\tau^{n+1}(h). \quad (2.7)$$

De la expresión (2.7) al número  $\tau^{n+1}$  se lo conoce como error local de truncamiento. También se tiene el error global de truncamiento que depende de la solución exacta del problema, este es de la forma:

$$\tau(h) = \max_{0 \leq n \leq N-1} |\tau^{n+1}(h)| \quad (2.8)$$

**DEFINICIÓN 2.2.** (Quarteroni, 2010,[19]): Un método a un paso se dice convergente si:

$$\forall n = 0, \dots, N. \quad |u^n - y^n| \leq C(h), \quad (2.9)$$

donde  $C(h)$  es infinitesimal respecto de  $h$ . En ese caso se dice que es convergente de orden  $p$  si existe  $C > 0$  tal que  $C(h) = Ch^p$ .

### Estabilidad Absoluta en Métodos a un Paso

Consideremos un problema particular de Cauchy:

$$\begin{aligned} y'(t) &= \lambda y(t), \quad t > 0 \\ y(0) &= 1. \end{aligned} \quad (2.10)$$

con  $\lambda \in \mathbb{C}$ , cuya solución es  $y(t) = e^{\lambda t}$ . Nótese que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} |y(t)| = 0$  si  $\text{Re}(\lambda) < 0$ .

**DEFINICIÓN 2.3.** (Quarteroni, 2010,[19]): Un método numérico que aproxime al problema (2.10) es absolutamente estable si:

$$|u^n| \rightarrow 0, \quad \text{si } t^n \rightarrow +\infty, \quad (2.11)$$

donde  $h$  es el paso de discretización del tiempo y  $u^n$  la solución numérica de (2.10) que depende de  $h$  y  $\lambda$ . La región de estabilidad absoluta del método numérico es subconjunto del plano complejo:

$$A = \{z = h\lambda \in \mathbb{C} : \text{si (2.11) se satisface}\},$$

por tanto  $A$  es el conjunto de valores del producto  $h\lambda$  para los cuales el método proporciona soluciones que vayan hacia 0 cuando  $t^n \rightarrow +\infty$ .

A continuación, se presentan los métodos a un paso que se utilizarán en el proyecto y su región de estabilidad absoluta.

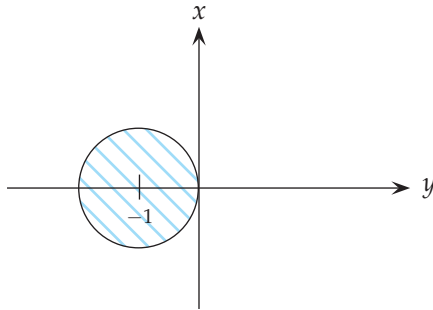
- *Euler Explícito:* Por definición del método, al aplicarlo en (2.10) se obtiene  $u^{n+1} = u^n + h\lambda u^n$ . Para todo  $n \geq 0$  con  $u^0 = 1$ , al resolverlo recursivamente, se tiene:

$$u^n = (1 + h\lambda)^n \quad n \geq 0.$$

Por lo tanto la condición (2.11) se satisface sí y solamente si  $|1 + h\lambda| < 1$ , es decir si  $h\lambda$  cae en el círculo unitario de centro  $(-1, 0)$ . Estas cantidades requieren que:

$$h\lambda \in C^- \text{ y } 0 < h < -\frac{2\operatorname{Re}(\lambda)}{|\lambda|^2},$$

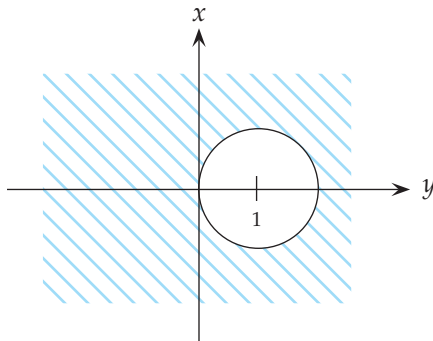
donde  $C^- = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(\lambda) < 0\}$ , como se muestra en la figura



- *Euler Implícito:* Al aplicar el método implícito en el problema (2.10) y resolverlo recursivamente se tiene:

$$u^n = \frac{1}{(1 - h\lambda)^n}, \quad h \geq 0.$$

La propiedad de estabilidad absoluta (2.11) se cumplirá para cualquier valor de  $h\lambda$  que no pertenezca al círculo unidad con centro en  $(1, 0)$ , como se muestra en la figura



Cabe mencionar que todo los métodos implícitos a un paso estudiados son incondicionalmente absolutamente estables, mientras que los esquemas explícitos son condicionalmente absolutamente estables. Aunque no es una regla general, de hecho existen esquemas implícitos inestables o condicionalmente estables, por el contrario no existen esquemas explícitos absolutamente estables.

### Cero-Estabilidad

**DEFINICIÓN 2.4.** (Quarteroni, 2010,[19]): Un método numérico de la forma (2.5) para la aproximación del problema (2.2) es cero-estable si:

$$\text{Existen } h_0 > 0, \quad y C > 0: \quad \forall h \in (0, h_0], \quad |z^{n(h)} - u^{n(h)}| \leq C\epsilon, 0 \leq n \leq \mathcal{N} \quad (2.12)$$

donde  $z^{n(h)}, u^{n(h)}$  son las soluciones de los problemas:

$$\begin{cases} z^{n+1(h)} = z^{n(h)} + h[\Phi(t^n, z^{n(h)}, f(t^n, z^{n(h)}); h) + \delta^{n+1}], \\ z^0 = y^0 + \delta^0, \end{cases} \quad (2.13)$$

$$\begin{cases} u^{n+1(h)} = u^{n(h)} + h\Phi(t^n, u^{n(h)}, f(t^n, u^{n(h)}); h), \\ z^0 = y^0, \end{cases} \quad (2.14)$$

para  $0 \leq n \leq \mathcal{N} - 1$ , asumiendo que  $|\delta_k| \leq \epsilon$  y  $0 \leq \mathcal{N}$ .

La propiedad de cero estabilidad garantiza que un método a un paso sea estable con respecto a perturbaciones en los datos. En particular, esto implica que los errores de redondeo no se propagan en la obtención de la solución final.

**TEOREMA 2.1.** (Quarteroni, 2010,[19]): Consideremos el método a un paso dado por:

$$\begin{cases} u^{n+1} = u^n + h\Phi(t^n, u^n, f^n; h), \\ u^0 = y^0. \end{cases}$$

y supongamos que  $\Phi$  es lipschitz continua respecto a la segunda variable. Además existe una constante  $\Lambda$  independiente de  $h$  y de los nodos  $t^j \in [t_0, t_0 + T]$ ; tal que:

$$\text{Existen } h_0 > 0, \quad y \Lambda > 0, \quad \forall h \in (0, h_0] : \\ |\Phi(t^n, u^{n(h)}, f(t^n, u^{n(h)}), h) - \Phi(t^n, z^{n(h)}, f(t^n, z^{n(h)}), h)| \leq \Lambda |u^{n(h)} - z^{n(h)}|$$

donde  $0 \leq n \leq \mathcal{N}$ . Entonces el método es cero estable.



## 2.2. Aproximación Espacial

Los esquemas de discretización que se estudiarán dentro del trabajo son:

- Upwind,
- Semi-Lagrangiano.

Cabe recalcar que depende directamente de la discretización del término de la derivada espacial si se resolverá un problema implícito o explícito y por lo tanto también se debe tomar en cuenta el análisis de estabilidad dentro de cada uno.

### 2.2.1. Upwind

Los sistemas de leyes de conservación hiperbólicos de ecuaciones diferenciales parciales de primer orden tienen un gran impacto computacional ya que facilitan la simulación de problemas físicos como por ejemplo: dinámica de fluidos, problemas electromagnéticos y en general una variedad de problemas de propagación. El esquema upwind discretiza las ecuaciones diferenciales parciales mediante una diferenciación sesgada en la dirección determinada por el signo de las velocidades.

Considerando del problema:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ u(x, 0) = u_0 \quad x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (2.15)$$

el término a estudiar del problema (2.15) es:

$$a \frac{\partial u}{\partial x},$$

para el cual, el paso de discretización espacial será  $\Delta x$ . El esquema discretización, siguiendo el método Euler explícito e implícito, de este término según *Quarteroni, Sacco, Saleri ([19])*, se define de la siguiente manera:

- *Explícito:*

$$-a \frac{1}{2\Delta x} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + |a| \frac{1}{2\Delta x} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n), \quad (2.16)$$

- *Implícito*

$$a \frac{1}{2\Delta x} (u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}) - |a| \frac{1}{2\Delta x} (u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}), \quad (2.17)$$

Por otro lado, existe una definición análoga de la forma:

- *Explícito:*

$$-a \cdot \frac{(1 + \epsilon)(u_j^n - u_{j-1}^n) - (1 - \epsilon)(u_{j+1}^n - u_j^n)}{2\Delta x}, \quad (2.18)$$

- *Implícito:*

$$a \cdot \frac{(1 + \epsilon)(u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}) + (1 - \epsilon)(u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1})}{2\Delta x}, \quad (2.19)$$

donde  $\epsilon = \text{sign}(a)$ .

Es evidente que las expresiones (2.16)-(2.18) y (2.17)-(2.19) son equivalentes.

El esquema explícito para resolver el problema (2.15) es de la forma:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} f(u_{j+1}^n, u_j^n, u_{j-1}^n),$$

donde  $\Delta t$  es el paso de discretización temporal y  $f(u_{j+1}^n, u_j^n, u_{j-1}^n)$  dependerá de la forma de discretización que se escoja. Se debe tomar en cuenta que, para cualquiera de las definiciones, al resolver el problema (2.15) mediante el esquema explícito el problema no es absolutamente estable (Quarteroni, Sacco, Saleri (2010), [19]).

El problema que se desea resolver es hiperbólico, y se lo resolverá mediante un método numérico por lo que en este caso se dice que el método es cero-estable si para cualquier tiempo  $T$  existen dos constantes  $C_T > 0$  y  $\delta_0 > 0$  tales que:

$$\|u^n\|_{\Delta} \leq C_T \|u^0\|_{\Delta} \quad (2.20)$$

para cualquier  $n$  tal que  $n\Delta t \leq T$  y para algún  $\Delta t, \Delta x$  tales que  $0 < \Delta t \leq \delta_0$  y  $0 < \Delta x \leq \delta_0$ . Donde la norma  $\|\cdot\|_{\Delta}$  es una norma discreta, por ejemplo las que se mencionan a continuación:

$$\|v\|_{\Delta,p} = \left( \Delta x \sum_{j=-\infty}^{\infty} |v_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p = 1, 2. \quad \|v\|_{\Delta,\infty} = \sup_j |v_j|.$$

Para encontrar una condición de estabilidad que sea necesaria y suficiente, en primer lugar se deben introducir ciertas notaciones para los esquemas dentro de la resolución del problema hiperbólico genérico.

Para discretizar el problema hiperbólico (2.1), se toma  $\Delta x$  como paso de discretización espacial,  $\Delta t$  el paso de discretización temporal y para malla de discretización los puntos  $(x_j, t^j)$  son de la forma:

$$x_j = j\Delta x, \quad j = 0, 1, \dots, \mathcal{N}, \quad t^j = j\Delta t, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Cualquier método explícito, para resolver el problema (2.1), se lo puede expresar de la forma:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(h_{j+1/2}^n - h_{j-1/2}^n), \quad (2.21)$$

donde  $h_{j+1/2}^n = h(u_j^n, u_{j+1}^n)$  y  $h_{j-1/2}^n = h(u_{j-1}^n, u_j^n)$  para todo  $j$  y  $h$  son funciones particulares llamadas funciones de flujo numérico.

Para el caso del esquema de discretización upwind las funciones  $h_{j+1/2}$  y  $h_{j-1/2}$ , utilizando la forma (2.16), es:

$$\begin{aligned} h_{j+1/2} &= \frac{1}{2}[a(u_{j+1} + u_j) - |a|(u_{j+1} - u_j)], \\ h_{j-1/2} &= \frac{1}{2}[a(u_j + u_{j-1}) - |a|(u_j - u_{j-1})], \end{aligned}$$

y al usar la forma (2.18), las funciones son:

$$\begin{aligned} h_{j+1/2} &= \frac{1}{2} \cdot a[(1 + \epsilon)u_j + (1 - \epsilon)u_{j+1}], \\ h_{j-1/2} &= \frac{1}{2} \cdot a[(1 + \epsilon)u_{j-1} + (1 - \epsilon)u_j]. \end{aligned}$$

La condición de estabilidad Courant, Friedrichs y Lewy (CFL) da una condición necesaria y suficiente a lo largo del tiempo para cualquier método que pueda expresarse de la forma (2.21), si cumple:

$$|a\lambda| = \left| a \frac{\Delta t}{\Delta x} \right| \leq 1, \quad (2.22)$$

donde  $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$ . Este número es conocido como *condición de estabilidad CFL*.

Si en lugar de resolver el problema (2.1) mediante un método explícito, se realiza con un método implícito se conoce que ellos son incondicionalmente estables, es decir, no es necesario considerar valores particulares para los pasos de discretización temporal y espacial.

## 2.2.2. Semi-Lagrangiano

Este esquema usa una malla regular de discretización igual a la de los métodos de diferencias finitas. Lo especial del método respecto del resto es la estimación de

la variable dependiente que se obtiene al realizar una interpolación con los puntos originales de la malla en cada paso de tiempo, que se puede considerar como una aproximación a la definición de derivada direccional. En este caso la dirección está dada por la velocidad de flujo, se explicará de mejor manera a continuación.

Dado el problema:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} = f(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T),$$

y tomando la notación  $u_j^n = u(x_j, t^n)$  al término  $a(x, t) \frac{\partial}{\partial x}$ , conocido como la derivada direccional, se estima:

$$a(x_j, t^n) \frac{\partial u(x_j, t^n)}{\partial x} \approx - \frac{u^n(x_j - \delta a(x_j, t^n)) - u_j^n}{\delta}$$

donde  $\delta$  es un parámetro positivo suficientemente pequeño y  $u^n$  es la función de interpolación, dentro de la malla de discretización, mostrado por Carlini, Falcone y Festa [5]. Acoplado esta aproximación con la discretización del término con la derivada temporal se tiene:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \frac{u^n(x_j - \delta a(x_j, t^n)) - u_j^n}{\delta} = 0$$

Si se toma  $\delta = \Delta t$ , la expresión anterior se reduce a:

$$u_j^{n+1} = u^n(x_j - \Delta t a(x_j, t^n)). \quad (2.23)$$

El esquema semi-lagrangiano se caracteriza por ser la mezcla entre los esquemas eulerianos y lagrangianos, como menciona Lentine [11]. El esquema euleriano considera la existencia de un observador que mira evolucionar el fenómeno alrededor de él mientras se encuentra en un punto fijo de una geometría. Entretanto el esquema lagrangiano considera el punto de vista de un observador respecto de la evolución del fenómeno alrededor de él mientras viaja con la partícula del fluido.

Es por esto que la idea principal del esquema semi-lagrangiano busca encontrar lo mejor de los dos esquemas (euleriano y lagrangiano), es decir, una resolución regular obtenida con los esquemas eulerianos y la estabilidad a través de pasos de tiempo grandes que poseen los esquemas lagrangianos.

Para el problema (2.23), si la expresión  $x_j - \Delta t a(x_j, t_n)$  se encuentra en la malla de discretización entonces el valor de la interpolación en ese punto será:

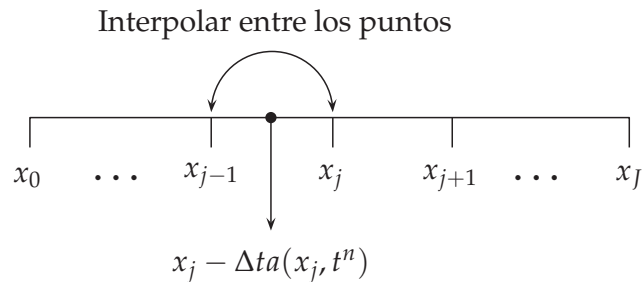
$$u^n(x_j - \Delta t a(x_j, t^n)) = u_k^n$$

donde  $u_k^n$  es un punto dentro de la malla en el paso temporal anterior. Mientras que si la expresión  $x_j - \Delta t a(x_j, t^n)$  no se encuentra dentro de la malla se debe realizar el proceso de interpolación. En particular, dentro de este trabajo se realizará interpolación lineal. Cabe recalcar que el esquema semi-lagrangiano no admite extrapolación, por lo tanto, se pone de manifiesto el problema discretizado (2.23) que por definición lo que se desea es resolverlo mediante interpolación, pero se deben considerar los casos:

- Si  $a(x_j, t^n) \geq 0$ , entonces el esquema a resolver es:

$$u_j^{n+1} = u^n(x_j - \Delta t a(x_j, t^n))$$

donde el punto  $x_j - \Delta t a(x_j, t^n)$  se encuentra entre  $u(x_{j-1}, t^n)$  y  $u(x_j, t^n)$  como se muestra en la siguiente figura:

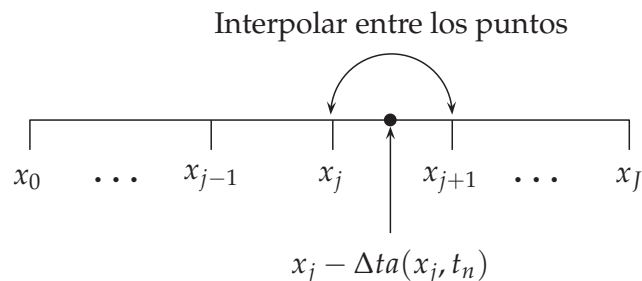


Al tomar el caso, cuando  $j = 0$ , el problema con el valor ficticio  $u(x_{-1}, t^n)$  se resolverá mediante la condición de borde que contenga el problema.

- Si  $a(x_j, t^n) < 0$ , entonces el esquema a resolver es:

$$u_j^{n+1} = u^n(x_j - \Delta t a(x_j, t^n))$$

donde el punto  $x_j - \Delta t a(x_j, t^n)$  se encuentra entre  $u(x_j, t^n)$  y  $u(x_{j+1}, t^n)$  como se muestra en la siguiente figura:



Para este caso, si  $j = J$ , el problema con el valor ficticio  $u(x_{J+1}, t^n)$  se puede resolver nuevamente con la condición de borde.

Los métodos de discretización mostrados en esta sección servirán en adelante para resolver problemas de leyes de conservación hiperbólicas y en particular el sistema de Ecuaciones de Shallow-Water.

## 2.3. Resolución de Problemas No-Lineales

El tema principal de la resolución de problemas no lineales consiste en encontrar un esquema iterativo para hallar la solución del problema. Esta será una solución numérica que, dependiendo de su naturaleza y del método utilizado, convergerá en cierto orden hacia la solución exacta.

**DEFINICIÓN 2.5.** Una sucesión  $\{x_k\}$ ,  $x_k \in \mathbb{R}^n$  converge hacia  $x^*$  con orden  $p \geq 1$ , si existe una constante  $c \geq 0$  tal que

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leq c \|x_k - x^*\|^p$$

En el caso cuando  $p = 1$ , se requiere adicionalmente que  $c < 1$  y se dice que la sucesión converge linealmente. Si  $p = 2$ , se dice que converge cuadráticamente; además la sucesión converge superlinealmente si existe una sucesión de constantes  $c_k$  tales que el límite cuando  $k \rightarrow \infty$  se tiene:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} c_k = 0 \quad , \quad \|x_{k+1} - x^*\| \leq c_k \|x_k - x^*\|.$$

Una definición alternativa para determinar el orden de convergencia de manera que únicamente involucre las iteraciones dice que una sucesión converge con orden  $p$  si se cumple:

$$\|x_{k+1} - x_k\| \leq \|x_k - x_{k-1}\|^p,$$

y para la convergencia superlineal si cumple:

$$c_k \rightarrow 0 \quad \text{si } k \rightarrow \infty \quad \text{y } \|x_{k+1} - x_k\| \leq \|x_k - x_{k-1}\|.$$

Finalmente para estudiar el método de Newton en la resolución de problemas no lineales, se introducirá en primer lugar la definición de iteraciones de punto fijo.

### 2.3.1. Iteración de Punto Fijo

Se considera la ecuación no lineal escalar:

$$f(x) = 0, \quad (2.24)$$

donde la función está definida como  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . La idea de estas iteraciones consiste en transformar el problema (2.24) en:

$$x = \Phi(x), \quad (2.25)$$

conocida como ecuación de punto fijo, y a partir de esta generar una sucesión  $\{x_0, x_1, \dots\}$  de la forma:

$$x_{k+1} = \Phi(x_k), \quad \text{con } k = 0, 1, \dots, \quad (2.26)$$

donde  $x_0$  es un valor inicial dado. Se espera que la sucesión así construida converja a un punto fijo  $x^*$  con  $\Phi(x^*) = x^*$ , el cual corresponde a la solución no lineal  $f(x^*) = 0$ .

**DEFINICIÓN 2.6.** (Quarteroni, 2010,[19]): Sea  $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$  un intervalo y  $\Phi : I \rightarrow \mathbb{R}$  una función. Se dice que  $\Phi$  es contractiva en  $I$  si existe una constante  $0 \leq \theta < 1$  tal que:

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| \leq \theta|x - y| \quad \text{para todo } x, y \in I.$$

La constante de Lipschitz  $\theta$  puede ser calculada fácilmente si  $\Phi$  es continuamente diferenciable.

**LEMA 2.2.** (Quarteroni, 2010,[19]): Si  $\Phi : I \rightarrow \mathbb{R}$  es continuamente diferenciable,  $\Phi \in C^1(I)$  entonces

$$\sup_{x,y \in I} \frac{|\Phi(x) - \Phi(y)|}{|x - y|} = \sup_{z \in I} |\Phi'(z)| < \infty.$$

**TEOREMA 2.3.** (Quarteroni, 2010,[19]): Sea  $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$  un intervalo y  $\Phi : I \rightarrow I$  una función contractiva con la constante de Lipschitz  $\theta < 1$ . Entonces se satisface:

- Existe un único punto fijo  $x^*$  de  $\Phi$ , es decir  $\Phi(x^*) = x^*$ ,
- Para cualquier punto inicial  $x_0 \in I$ , la iteración de punto fijo  $x_{k+1} = \Phi(x_k)$  converge a  $x^*$  de manera que:

$$|x_{k+1} - x_k| \leq \theta |x_k - x_{k-1}| \text{ y } |x^* - x_k| \leq \frac{\theta^k}{1-\theta} |x_1 - x_0|.$$

*Demostración.* Para todo  $x_0 \in I$  se cumple:

$$\begin{aligned} |x_{k+1} - x_k| &= |\Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1})| \\ &\leq \theta |x_k - x_{k-1}|, \end{aligned}$$

y por inducción se tiene

$$|x_{k+1} - x_k| \leq \theta^k |x_1 - x_0|$$

Para demostrar la convergencia veremos que la sucesión generada  $\{x_k\}$  es una sucesión de Cauchy. Para ello consideremos

$$\begin{aligned} |x_{k+m} - x_k| &\leq |x_{k+m} - x_{k+m-1}| + \dots + |x_{k+1} - x_k| \\ &\leq (\theta^{k+m-1} + \theta^{k+m-2} + \dots + \theta^k) |x_1 - x_0| \end{aligned}$$

Si se toma en cuenta que:

$$(\theta^{k+m-1} + \theta^{k+m-2} + \dots + \theta^k) = \theta^k (1 + \theta + \dots + \theta^{m-1}),$$

usando la fórmula para las series geométricas:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \theta^k = \frac{1}{1-\theta},$$

se tiene:

$$|x_{k+m} - x_k| \leq \frac{\theta^k}{1-\theta} |x_1 - x_0|,$$

por lo tanto  $\{x_k\}$  es una sucesión de Cauchy. Debido a que  $\mathbb{R}$  es un espacio métrico completo se tiene que  $\{x_k\}$  es convergente hacia un límite

$$x^* = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$$

Basta demostrar que  $x^*$  es un punto fijo. Para eso se considerará:



$$\begin{aligned}
|x^* - \Phi(x^*)| &= |x^* - x_{k+1} + x_{k+1} - \Phi(x^*)| \\
&= |x^* - x_{k+1} + \Phi(x_k) - \Phi(x^*)| \\
&\leq |x^* - x_{k+1}| + |\Phi(x_k) - \Phi(x^*)| \\
&\leq |x^* - x_{k+1}| + \theta|x_k - x^*|
\end{aligned}$$

Puesto que  $|x^* - x_{k+1}| + \theta|x_k - x^*| \rightarrow 0$  cuando  $k$  tiende al infinito, en este caso se tiene

$$0 \leq |x^* - \Phi(x^*)| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} |x^* - x_{k+1}| + \theta|x_k - x^*| = 0.$$

Por lo tanto,  $x^* = \Phi(x^*)$ . Para demostrar la unicidad se tomarán dos puntos fijos  $x^*, y^*$  donde

$$0 \leq |x^* - y^*| = |\Phi(x^*) - \Phi(y^*)| \leq \theta|x^* - y^*|,$$

dado que  $\theta < 1$ , la desigualdad previa se cumple solo si  $|x^* - y^*| = 0$  lo que demuestra la unicidad.  $\square$

### 2.3.2. Método de Newton

Consideremos la ecuación escalar no lineal  $f(x) = 0$ , para la cual se busca un cero  $x^*$ . Aproximando la función  $f(\cdot)$  por su función tangente  $p(x)$  en el punto inicial  $x_0$ , en lugar de buscar la intersección de  $f(x)$  con el eje  $x$  se busca la intersección de la recta tangente con dicho eje.

La recta tangente está representada por el polinomio  $p(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ . Si se tiene que  $f'(x_0) \neq 0$ , entonces el valor de  $x_1$  se puede escribir como:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

La idea fundamental del método de Newton consiste en repetir esta regla iterativamente:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.27)$$

En la  $k$ -ésima iteración se requiere la evaluación de dos funciones  $f(x^{(k)})$  y  $f'(x^{(k)})$ . El costo computacional de este cálculo es mayor, aunque es compensado con el or-

den cuadrático de convergencia del método. La iteración del método de Newton puede ser implementada como una iteración de punto fijo con la aplicación:

$$\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)},$$

siempre que  $f$  sea diferenciable y  $f'(x)$  sea distinto de cero al menos en una vecindad de  $x^*$ .

El método de Newton se puede extender a un sistema no lineal

$$F(x) = 0 \tag{2.28}$$

donde  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  y es continuamente diferenciable. Al realizar la expansión de Taylor de (2.28) alrededor del punto  $x_0$  se tiene:

$$\begin{aligned} F(x) &= 0 \\ &= F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0) + o(|x - x_0|). \end{aligned}$$

Cuando  $x \rightarrow x_0$  se tiene:

$$\bar{F}(x) \approx F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0)$$

El cero de la función  $\bar{F}(x)$  es precisamente:

$$x_1 = x_0 - F'(x_0)^{-1}F(x_0),$$

siempre que el jacobiano  $F'(x_0)$  sea invertible, la iteración de Newton será:

$$\begin{aligned} F'(x_k)\Delta x_k &= -F(x_k) \\ x_{k+1} &= x_k + \Delta x_k \end{aligned} \tag{2.29}$$

Una de las ventajas principales al usar el método de Newton es su orden de convergencia cuadrática como lo menciona Quarteroni, Sacco y Saleri [19].

# Capítulo 3

## Leyes de Conservación Hiperbólicas

Este capítulo se centra en la resolución de sistemas de leyes de conservación hiperbólicas, desde el problema más simple, como el problema escalar de transporte, para terminar con la resolución de la ecuación de Burgers.

Los problemas presentados son problemas advectivos, es decir, son problemas que describen el movimiento de una función que está siendo influenciada por el campo de velocidad. Generalmente este campo de velocidad es conocido, aunque al momento de resolver problemas advectivos no lineales la resolución numérica tiene ciertas dificultades dependiendo del método que se utilice.

Los problemas se resolverán mediante los métodos Euler explícito y Euler implícito, donde el término de la derivada espacial se lo discretizará con los métodos upwind y semi-lagrangiano.

### 3.1. Leyes de Conservación

Los sistemas de leyes de conservación hiperbólicas son ecuaciones diferenciales parciales dependientes del tiempo y el espacio que generalmente no son lineales.

En particular, cuando se refiere a las leyes de conservación hiperbólicas en una dimensión se tiene la ecuación:

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} f(u(x, t)) = 0, \quad (3.1)$$

donde  $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  es un vector de cantidades “conservadas” como por ejemplo: masa, momento y energía dentro de problemas de dinámica de fluidos y  $f$  es una función de flujo, esta puede ser lineal o no.

La principal suposición sobre la ecuación (3.1) es que conociendo el valor de la

función  $u(x, t)$  en un punto determinado y en un tiempo fijo  $(x, t)$ , se podrá determinar el flujo para cada punto dentro del espacio y tiempo de interés.

Para afirmar que el sistema (3.1) es hiperbólico se debe verificar que la matriz Jacobiana de dimensión  $m \times m$  de la función de flujo cumple que, para todo valor de  $u$ , los valores propios son reales y la matriz es diagonalizable, es decir, que el conjunto completo de  $m$  vectores propios son linealmente independientes. (Ver [13]).

## 3.2. Problema de Transporte Escalar

A este problema se lo considera el más sencillo a resolver en cuanto a leyes conservación hiperbólicas.

Consideremos el siguiente problema hiperbólico:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, & 0 < x < 1, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), & 0 < x < 1 \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 & \text{Condición de Borde de Dirichlet} \end{cases} \quad (3.2)$$

donde  $a$  es un número real positivo y representa el campo de velocidad que en este caso es constante.

La solución analítica representa al movimiento del flujo con velocidad  $a$  y está dada por:

$$u(x, t) = u_0(x - at) \quad t \geq 0.$$

Por lo tanto, si se considera el plano  $xt$  y la ecuación diferencial ordinaria:

$$\begin{cases} \frac{\partial x(t)}{\partial y} = a & t > 0 \\ x(0) = x_0 & \text{donde } 0 \leq x_0 \leq 1, \end{cases} \quad (3.3)$$

a las curvas de la forma  $(x(t), t)$ , tales que satisfagan (3.3), se las conoce como curvas *características* y la solución del problema (3.2) es constante a lo largo de ellas.

### 3.2.1. Resolución Numérica

Para la derivada espacial del problema (3.2) se utilizarán dos esquemas diferentes: Upwind y Semi-Lagrangiano. El objetivo principal del estudio es determinar cuál de los esquemas resuelve el problema de manera eficiente y estable.

## Esquema Upwind

El problema (3.2) será resuelto mediante los métodos Euler explícito e implícito. Al discretizarlo es la de forma:

- Método Euler Explícito.

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} a(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{\Delta t}{2\Delta x} |a|(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \quad (3.4)$$

- Método Euler Implícito

$$u_j^{n+1} + \frac{\Delta t}{2\Delta x} a(u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} |a|(u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}) = u_j^n \quad (3.5)$$

Se debe tomar en cuenta que las condiciones de borde que se están considerando son condiciones homogéneas de Dirichlet y el intervalo de tiempo es  $[0, 1]$ . Por este motivo, para cualquiera de los dos métodos se cumple, para todo  $t$  en el intervalo temporal:

$$u_0^n = u_J^n = 0, \text{ para todo } n = 1, \dots, N, \quad (3.6)$$

donde  $N$  es el número de puntos en los que se divide el intervalo temporal y  $J$  es el número de puntos en los que se divide el intervalo espacial.

Es por esto que en lugar de resolver un sistema de  $J$  ecuaciones, que es la dimensión del vector  $u$ , se resolverá un sistema de  $J - 2$  ecuaciones y finalmente se añadirán las componentes inicial y final obtenidas por las condiciones de borde (3.6).

El sistema a resolver mediante el método de Euler Explícito será:

$$\tilde{u}^{n+1} = \tilde{u}^n - \frac{a\Delta t}{2\Delta x} M_1 \tilde{u}^n + \frac{|a|\Delta t}{2\Delta x} M_2 \tilde{u}^n, \quad (3.7)$$

con

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}_{(J-2) \times (J-2)}$$

y

$$M_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}_{(J-2) \times (J-2)}$$

El problema (3.2) es hiperbólico lineal dado que el valor de  $a$  es independiente de la función  $u$ . Pero en este caso se está procediendo a resolver el problema mediante un método explícito, por lo que se debe considerar la condición de estabilidad de CFL. Se debe tomar en cuenta el siguiente teorema debido al método empleado.

**TEOREMA 3.1.** Si la condición de estabilidad CFL se satisface, los métodos: upwind, Lax-Friedrichs y Lax-Wendroff son fuertemente estables en la norma  $\|\cdot\|_{\Delta,1}$ .

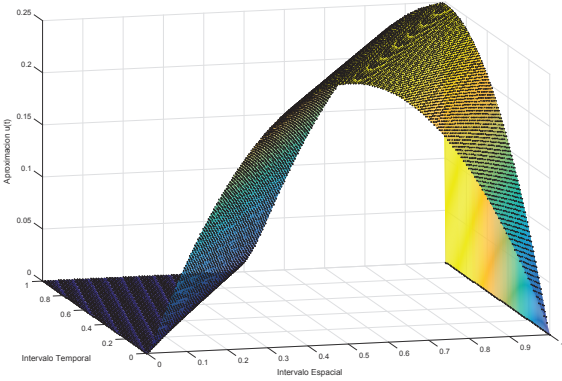
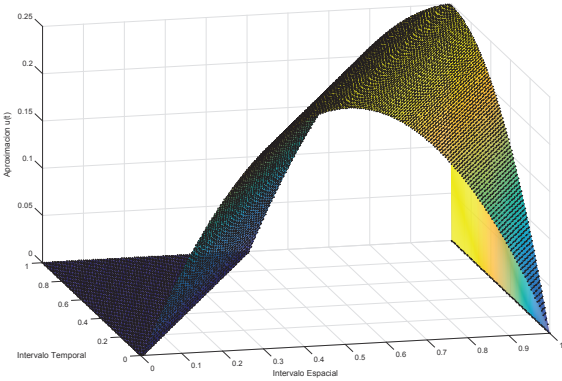
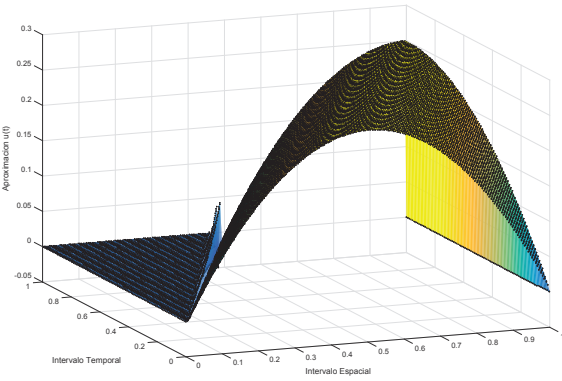
*Demostración.* La demostración de este teorema se lo encontrará en p.353 [19].  $\square$

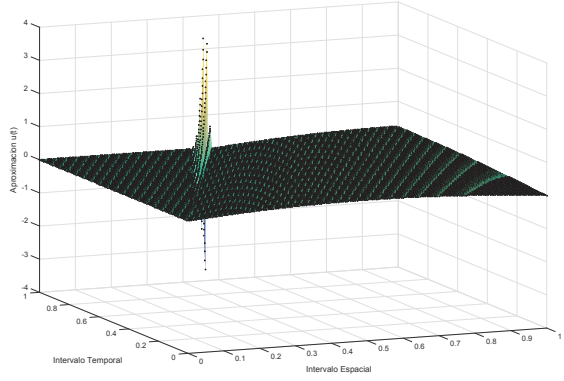
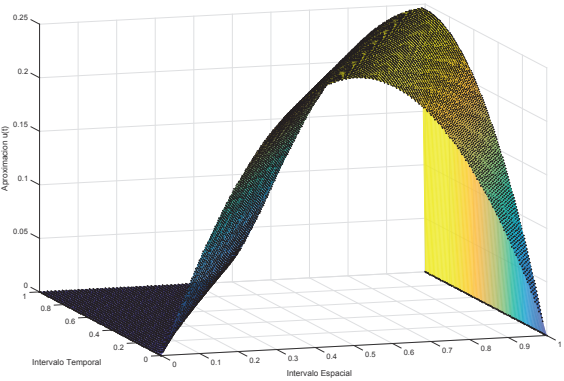
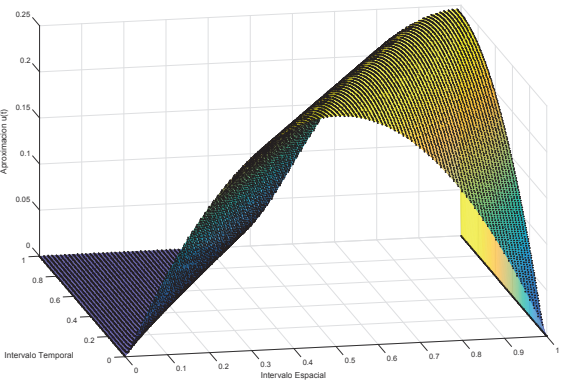
Se realizaron varias pruebas, considerando familias de parámetros para el número de puntos en la discretización espacial y temporal. De esta manera se podrá comprobar el teorema 3.1. El problema será resuelto tomando como condición inicial:

$$u(x, 0) = u_0(x) = x(1 - x),$$

donde  $x$  es un vector que contiene  $J + 1$  componentes cuyos elementos están entre  $[0, 1]$ , la constante será  $a = 0,5$  y  $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$ .

$\Delta t = (1/N)$	$\Delta x = (1/J)$	$a\lambda = a \frac{\Delta t}{\Delta x}$	Evolución de la Aproximación de la solución
0,01	0,01	0,5	

0,01	0,0067	0,75	
0,01	0,005	1	
0,01	0,0049	1,0250	

0,01	0,0048	1,0500	
0,0067	0,01	0,3333	
0,005	0,01	0,2500	

**Cuadro 3.1:** Problema Escalar con el Método de Euler Explícito

Los resultados muestran que mientras el valor de  $a\lambda$  es mayor que 1 el método se vuelve inestable. Esto se debe a que la condición de estabilidad CFL no se cumple y es por esto que se presentan oscilaciones en los gráficos cuando  $a\lambda = 1,0250$  y cuando toma el valor de 1,0500. Se puede ver que los casos de inestabilidad se presentan cuando se toman fijos los valores  $a = 0,5$  y  $\Delta t = 0,01$  y el valor de  $\Delta x$  es más pequeño, en particular se muestra que cuando se escoge  $\Delta x = 0,0049$  se presentan las



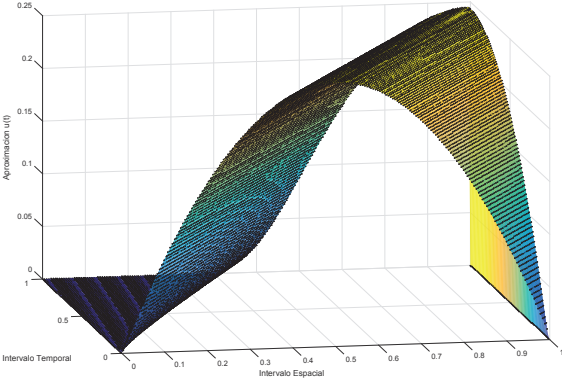
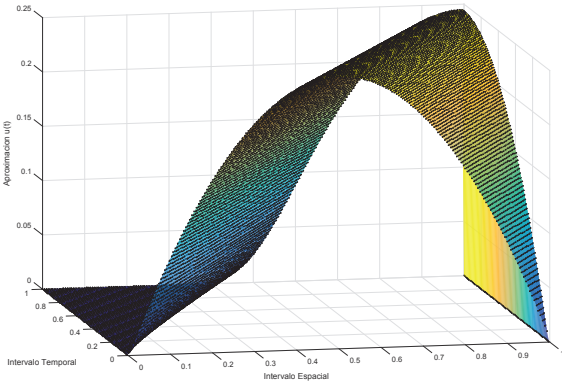
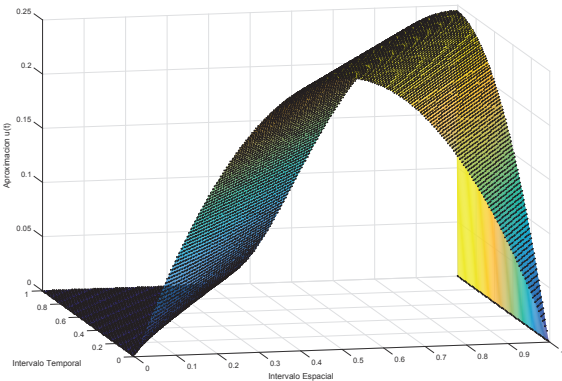
pequeñas oscilaciones mencionadas anteriormente. Por otro lado, se puede ver que si los valores  $a = 0,5$  y  $\Delta x = 0,1$  son fijos y el valor de  $\Delta t$  varia, considerando que es menor que  $\Delta x$ , el método es estable ya que la condición de estabilidad se cumple.

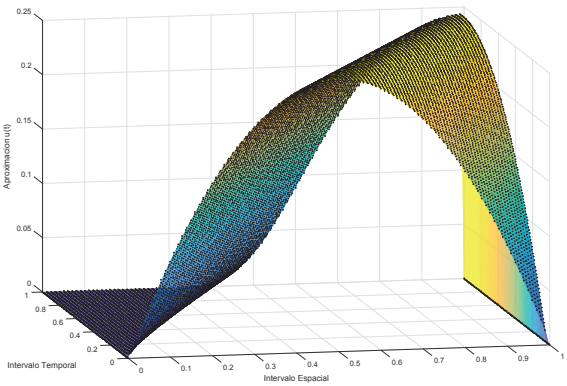
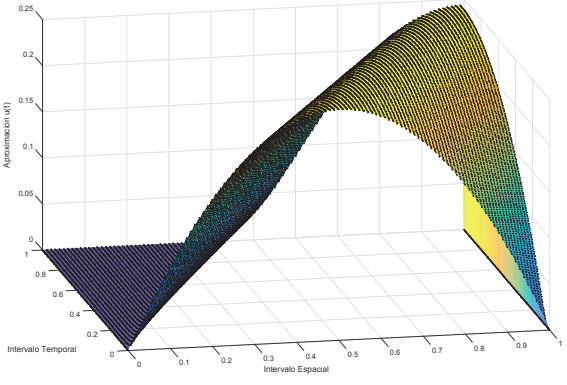
Implementando el método de Euler Implícito, se tiene el siguiente sistema:

$$I_d u^{n+1} + \frac{a\Delta t}{2\Delta x} M_2 u^{n+1} - \frac{|a|\Delta t}{2\Delta x} M_2 u^{n+1} = u^n, \quad (3.8)$$

donde la matriz  $I_d$  tiene dimensión  $(J - 2) \times (J - 2)$  y las matrices  $M_2$  y  $M_3$  son las mismas que las matrices  $M_1$  y  $M_2$ , respectivamente, del método Euler explícito mostrado anteriormente. Implementando el esquema (3.8) y al resolverlo utilizando la misma familia de parámetros y con la misma condición inicial que para el método anterior se presentan los siguientes resultados:

$\Delta t = (1/N)$	$\Delta x = (1/J)$	$a\lambda = a \frac{\Delta t}{\Delta x}$	Evolución de la Aproximación de la solución
0,01	0,01	0,5	
0,01	0,0067	0,75	

0,01	0,005	1	
0,01	0,0049	1,0250	
0,01	0,0048	1,0500	

0,0067	0,01	0,3333	
0,005	0,01	0,2500	

**Cuadro 3.2:** Problema Escalar con el Método de Euler Implícito

En este caso, tomando en cuenta que se está resolviendo el problema con un método implícito se nota que la solución, al simularla con los parámetros anteriores, no es inestable con ninguna combinación de los parámetros. Esto se debe a que el problema se lo está resolviendo con un método absolutamente estable.

### Esquema Semi-Lagrangiano

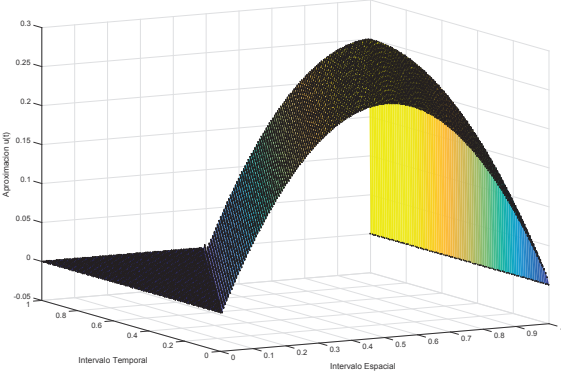
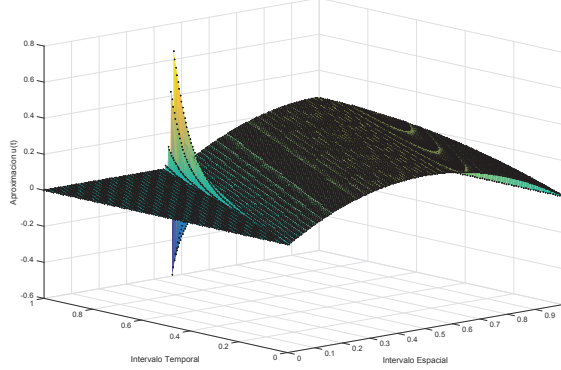
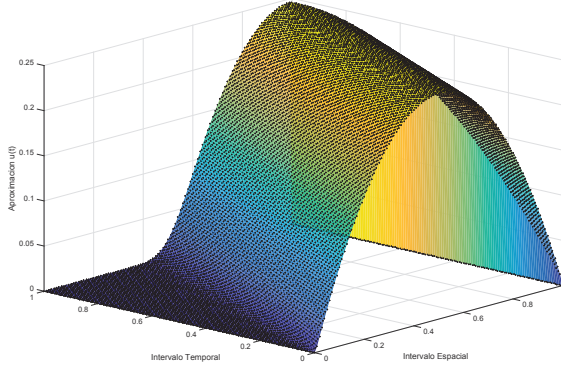
Implementando el problema (3.2) con el esquema semi-lagrangiano, se tiene:

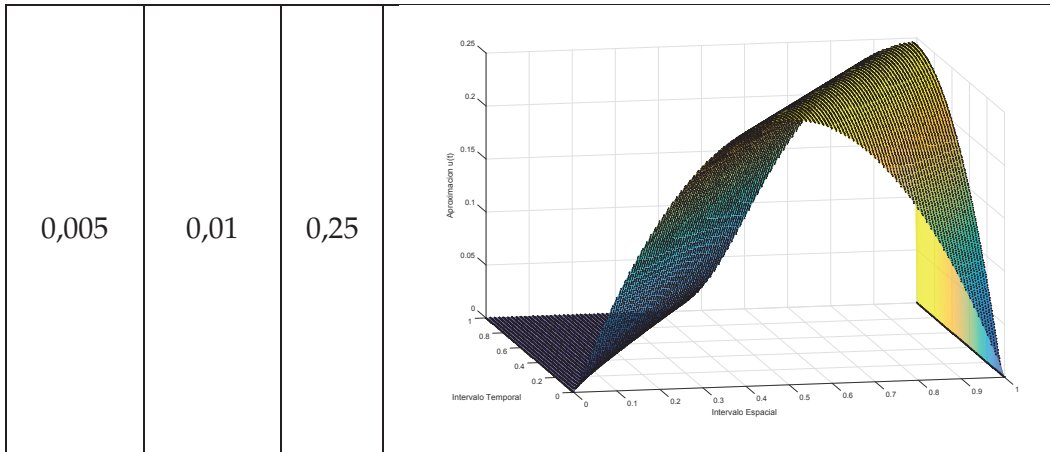
$$u_j^{n+1} = \frac{\Delta t}{\delta} [u^n(x_j - \delta a) - u_j^n] + u_j^n. \quad (3.9)$$

Para la resolución con este esquema la familia de parámetros será diferente, ya que la idea es escoger  $\delta$  lo suficientemente pequeño de manera que el punto  $x_j - \delta a$  se encuentre entre los intervalos:  $[x_{j-1}, x_j]$  y  $[x_j, x_{j+1}]$  dependiendo si el valor  $a$  es positivo o negativo, respectivamente. Se mantendrá la condición inicial y el valor de la constante que se han utilizado con los métodos anteriores.

Para resolver el problema  $u''(x_j - \delta a)$  se utilizará interpolación lineal y el valor de  $a$  es el mismo que se ha considerado anteriormente. Los resultados se muestran a continuación.

$\Delta t =$ (1/N)	$\Delta x =$ (1/J)	$a\lambda =$ $a \frac{\Delta t}{\Delta x}$	Evolución de la Aproximación de la solución
0,01	0,01	0,05	
0,01	0,0067	0,75	
0,01	0,005	1	

0,01	0,00495	1,02	
0,01	0,0048	1,04	
0,0067	0,01	0,33	

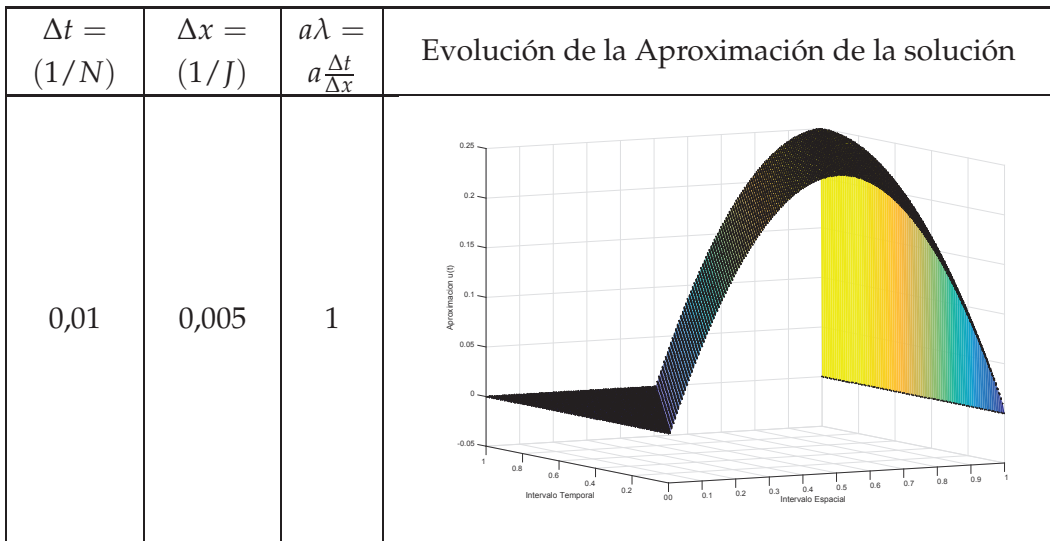


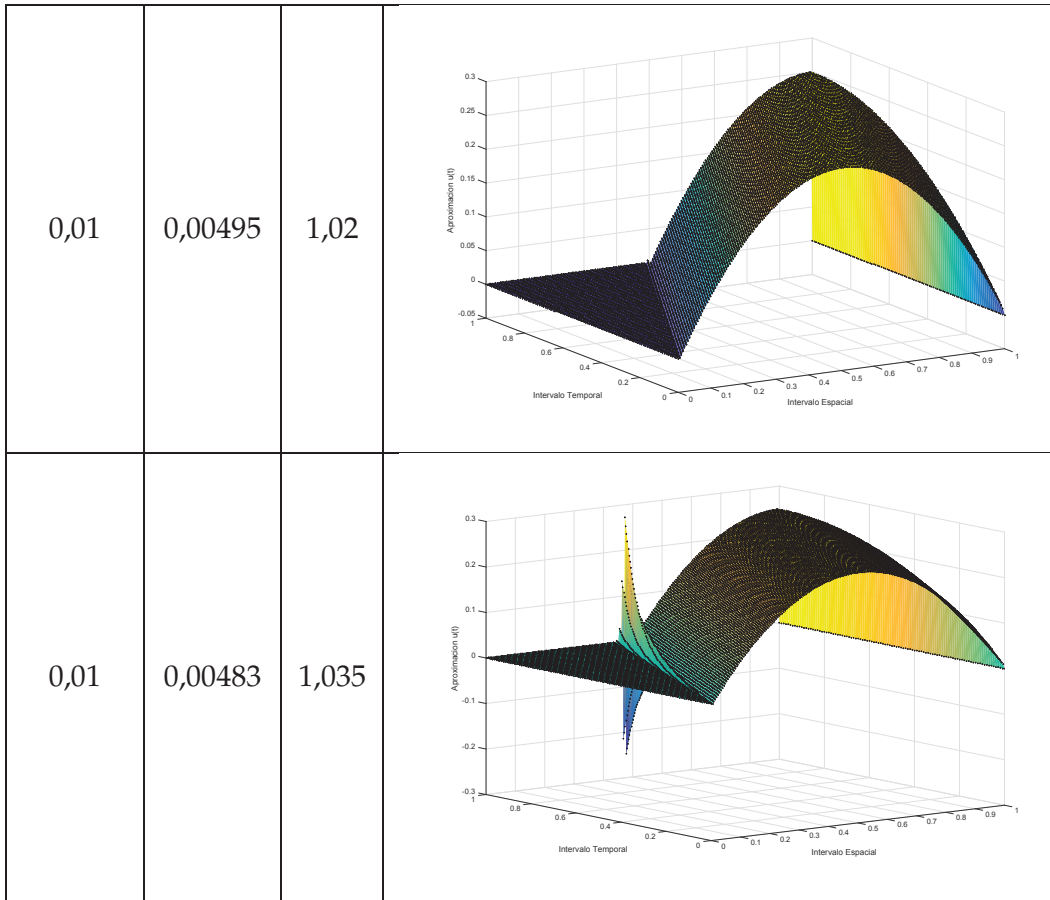
**Cuadro 3.3:** Problema Escalar con el Método Euler Explícito, utilizando método Semi-Lagrangiano

Los resultados mostrados anteriormente consideran  $\delta = \Delta t$ , de igual manera se puede notar que se tiene una pequeña oscilación cuando  $a\lambda = 1,02$ . Y cuando toma el valor de 1,04 se puede ver que el método es inestable. Esto se debe ya que al resolver el problema utilizando el esquema semi-lagrangiano se esta resolviendo un método Euler Explícito por lo que la condición de estabilidad CFL debe cumplirse.

Se resolvió el esquema (3.9) con algunos elementos de la familia de parámetros utilizados anteriormente para  $\Delta t$ ,  $\Delta x$  y  $a$ , sin embargo se consideró  $\delta = \frac{\Delta t}{2}$  y  $\delta = (\Delta t)^2$  y se obtuvieron los siguiente resultados:

Considerando  $\delta = \frac{\Delta t}{2}$





**Cuadro 3.4:** Problema Escalar con el Método Explícito, utilizando método Semi-Lagrangiano

En estos casos se puede ver que a pesar de considerar un valor para  $\delta$  diferente (más grande) el comportamiento es similar, es decir, existen oscilaciones.

Considerando  $\delta = (\Delta t)^2$

$\Delta t =$ (1/N)	$\Delta x =$ (1/J)	$a\lambda =$ $a \frac{\Delta t}{\Delta x}$	Evolución de la Aproximación de la solución
-----------------------	-----------------------	---	---