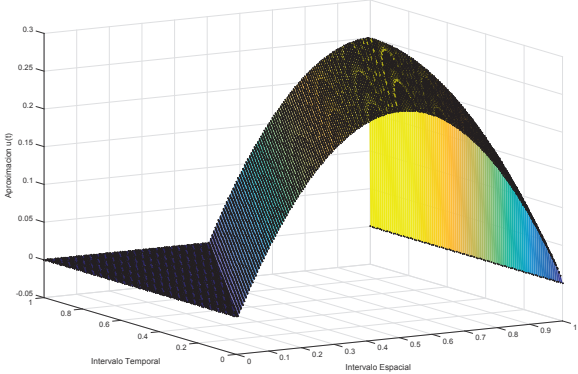
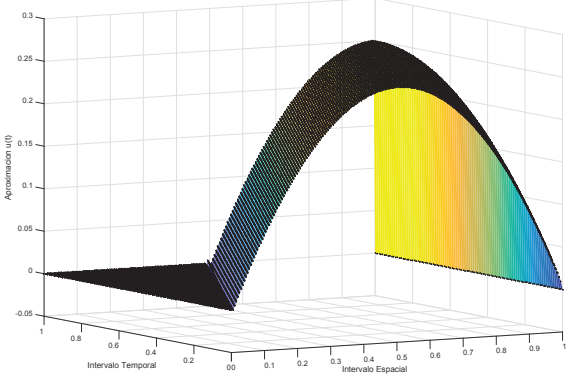
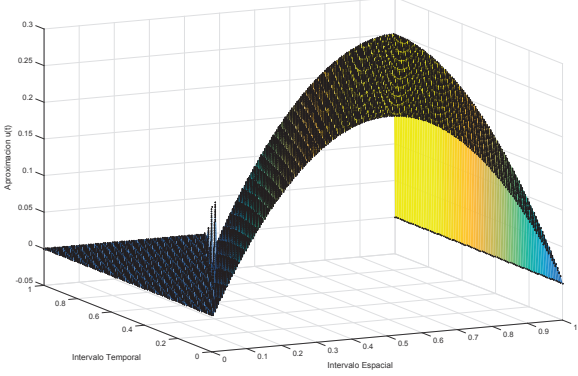
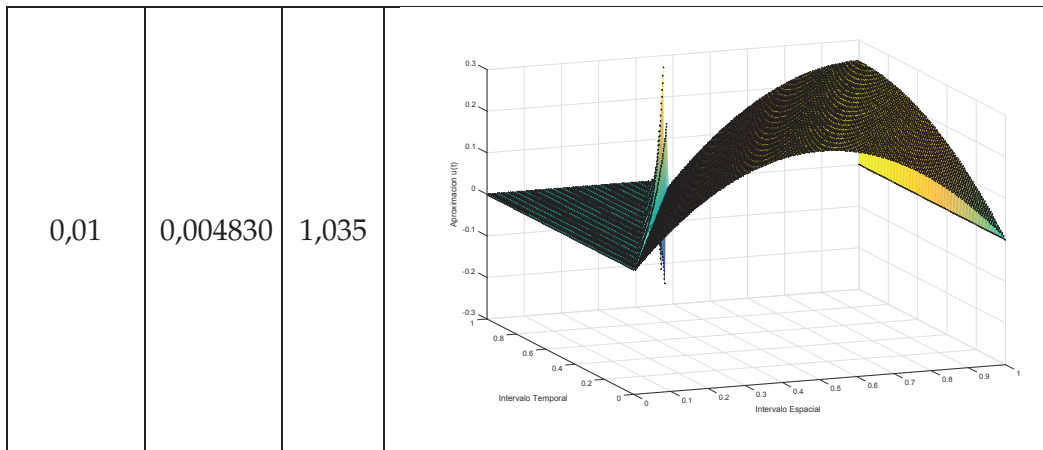


0,01	0,005	1	 <p>A 3D surface plot showing a smooth wave function $u(t)$ over a spatial interval of 0 to 1 and a temporal interval of 0 to 1. The vertical axis represents the function value, ranging from -0.05 to 0.3. The surface is a smooth, bell-shaped curve that starts at 0 at $t=0$, reaches a peak of approximately 0.28 at $t \approx 0.4$, and returns to 0 at $t=1$. The surface is colored with a gradient from dark blue at the base to yellow at the peak.</p>
0,01	0,00495	1,02	 <p>A 3D surface plot showing a smooth wave function $u(t)$ over a spatial interval of 0 to 1 and a temporal interval of 0 to 1. The vertical axis represents the function value, ranging from -0.05 to 0.3. The surface is a smooth, bell-shaped curve that starts at 0 at $t=0$, reaches a peak of approximately 0.28 at $t \approx 0.4$, and returns to 0 at $t=1$. The surface is colored with a gradient from dark blue at the base to yellow at the peak.</p>
0,01	0,004878	1,025	 <p>A 3D surface plot showing a smooth wave function $u(t)$ over a spatial interval of 0 to 1 and a temporal interval of 0 to 1. The vertical axis represents the function value, ranging from -0.05 to 0.3. The surface is a smooth, bell-shaped curve that starts at 0 at $t=0$, reaches a peak of approximately 0.28 at $t \approx 0.4$, and returns to 0 at $t=1$. The surface is colored with a gradient from dark blue at the base to yellow at the peak.</p>



Cuadro 3.5: Problema Escalar con el Método Euler Explícito, utilizando método Semi-Lagrangiano

La selección de los parámetros Δt y Δx se la tomó considerando los puntos dentro de la malla de discretización. Por ejemplo en la tabla 3.1 los primeros cinco resultados mostrados toman el valor de Δt fijo, con 100 puntos para la discretización temporal. Mientras que el valor de Δx varía, tomando primero 100 puntos para la discretización espacial y aumentando de 50 en 50 puntos (mostrando sus resultados) hasta llegar a 200 puntos, es decir hasta que el valor de $a \frac{\Delta t}{\Delta x} = 1$ (cota para la condición de estabilidad CFL). Después, para este parámetro el valor de los puntos para la discretización espacial aumentan de 2 en 2 puntos para así observar la inestabilidad del método.

En los siguientes dos resultados varía el valor del parámetro Δx , mientras que el valor de Δt varía de la misma manera que se realizó anteriormente considerando Δx . Sin embargo, en estos casos la condición de estabilidad CFL no alcanza su cota superior por lo que el método no será inestable.

Al comparar los resultados mostrados en las tablas 3.3, 3.4 y 3.5 se puede ver que a pesar de seleccionar un diferentes valores para el parámetro δ se tienen oscilaciones cuando la condición de estabilidad CFL no se cumple.

Al comparar los resultados presentados en 3.1, 3.2, 3.3, 3.4 y 3.5 se puede notar que al resolver el problema mediante el método Euler explícito, utilizando el esquema upwind y el semi-lagrangiano, se presentan oscilaciones si el paso de discretización espacial es menor que el paso del discretización temporal. En cambio al resolver el problema mediante el método Euler Implícito no se presentan estas oscilaciones a pesar de considerar la misma familia de parámetros que para el Euler explícito.

3.3. Sistema de Leyes de Conservación Hiperbólicas

Consideremos el sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + A \frac{\partial u}{\partial x} = 0, & 0 < x < 1, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & 0 < x < 1 \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 & \text{Condición de Borde de Dirichlet} \end{cases} \quad (3.10)$$

donde $u : \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^p$, A es una matriz $p \times p$ dada y u_0 es la condición inicial dada.

El sistema se dice hiperbólico si la matriz A es diagonalizable y sus valores propios son reales, en tal caso la matriz A se puede expresar como:

$$A = T\Lambda T^{-1}, \text{ donde } \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p),$$

donde λ_i , con $i = 1, \dots, p$ son los valores propios de A mientras que $T = [\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^p]$ es la matriz cuyas columnas son los vectores propios de A .

Para encontrar la solución exacta del problema, se reducirá analíticamente al problema mediante una transformación que permitirá reescribir a (3.10) de la forma:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad (3.11)$$

donde $w = T^{-1}u$ son las variables características. Así se obtiene un sistema de p ecuaciones de la forma

$$\frac{\partial w_k}{\partial t} + \lambda_k \frac{\partial w_k}{\partial x} = 0, \text{ donde } k = 1, \dots, p.$$

Se puede ver que este conjunto de ecuaciones son análogas a (3.3) y dado que λ_k es constante las curvas características son líneas de la forma $x(t) = x_0 + \lambda_k t$.

Las soluciones serán $w_k(x, t) = \Psi(x - \lambda_k t)$, donde Ψ_k es la función determinada por las condiciones iniciales. Para el problema presentado tenemos que $\Psi_k = w_k(x, 0)$ por lo que la solución $u = T\omega$ tendrá la forma:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^p w_k(x - \lambda_k t, 0) \omega^k.$$

3.3.1. Resolución Numérica

Debido al costo computacional que conlleva el cálculo de los valores y vectores propios, se resolverá numéricamente el sistema (3.10). Se busca encontrar la solución de una manera eficiente y estable. De igual manera la derivada espacial del problema será discretizada mediante los esquemas upwind y semi-lagrangiano.

Esquema Upwind

Resolviendo el problema (3.10) mediante el Método de Euler Explícito se tiene el siguiente esquema de discretización:

$$\bar{u}_j^{n+1} = \bar{u}_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} A_{j,:} (u_{j+1}^{-n} - u_{j-1}^{-n}) + \frac{\Delta t}{2\Delta x} |A_{j,:}| (u_{j+1}^{-n} - 2\bar{u}_j^n + u_{j-1}^{-n}) \quad (3.12)$$

donde $j = 0, \dots, J$ y J es el número de puntos en los que se dividirá el intervalo espacial; además la matriz $A_{j,:}$ es

$$A_{j,:} = \left(A_{j,1} \quad A_{j,2} \quad \dots \quad \dots \quad A_{j,p-1} \quad A_{j,p} \right)_{1 \times p}$$

donde p es el número de componentes del vector \bar{u} y $|A_{j,:}|$ es el valor absoluto de las componentes de la matriz $A_{j,:}$.

El sistema a resolver es:

$$\bar{u}^{n+1} = \bar{u}^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \tilde{A} M_1 \bar{u}^n + \frac{\Delta t}{2\Delta x} |\tilde{A}| M_2 \bar{u}^n \quad (3.13)$$

donde

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -\mathbf{I} & 0 & \mathbf{I} & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -\mathbf{I} & 0 & \mathbf{I} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -\mathbf{I} & 0 \end{pmatrix}_{(J-1) \cdot p \times (J-1) \cdot p},$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} -2\mathbf{I} & \mathbf{I} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \mathbf{I} & -2\mathbf{I} & \mathbf{I} & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \mathbf{I} & -2\mathbf{I} & \mathbf{I} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \mathbf{I} & -2\mathbf{I} \end{pmatrix}_{(J-1) \cdot p \times (J-1) \cdot p}$$

y

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{1,:} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & A_{2,:} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & A_{J-2,:} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & A_{J-1,:} \end{pmatrix}_{(J-1) \cdot p \times (J-1) \cdot p}$$

donde la matriz \mathbf{I} tiene dimensión $p \times p$.

Hay que considerar que el resultado obtenido para el sistema depende directamente del valor que tome la matriz de constantes A . Ya que dependiendo del valor que tenga esta matriz el método será estable o no, debido a la condición de estabilidad CFL. En el caso del sistema hiperbólico esta condición de estabilidad es de la forma:

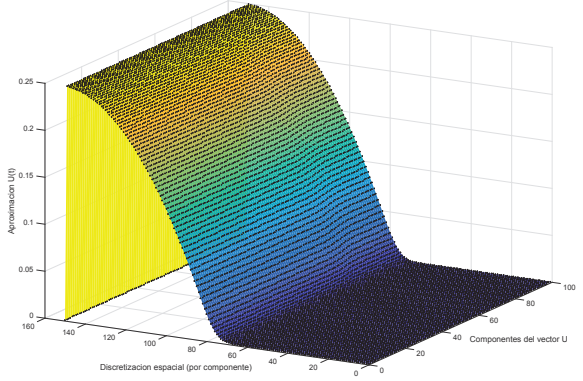
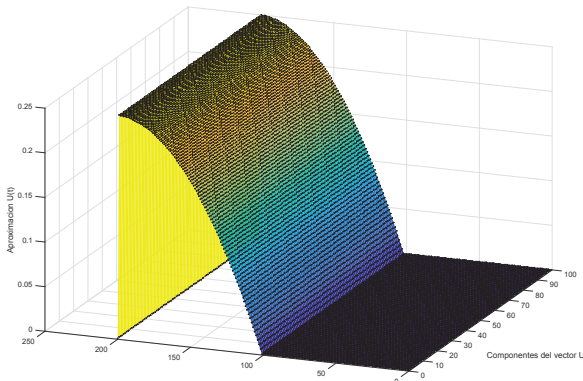
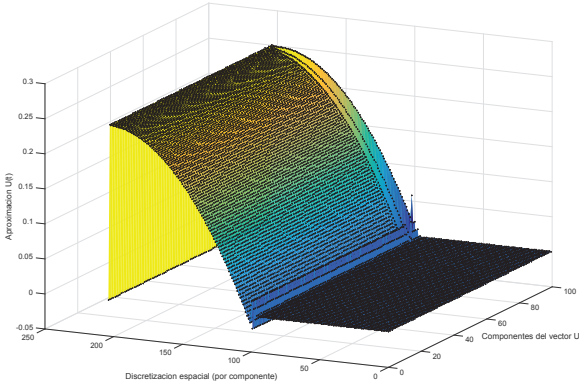
$$\left| \lambda_k \frac{\Delta t}{\Delta x} \right| \leq 1 \quad k = 1, \dots, p. \quad (\text{CFL})$$

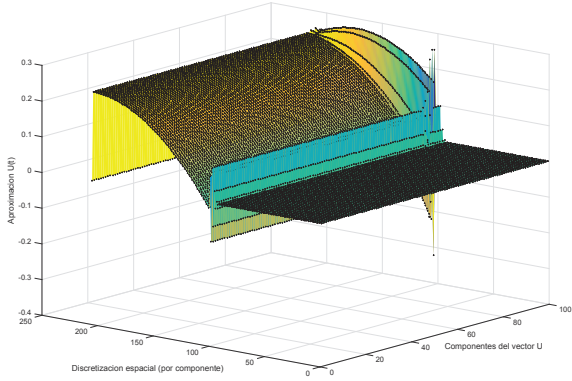
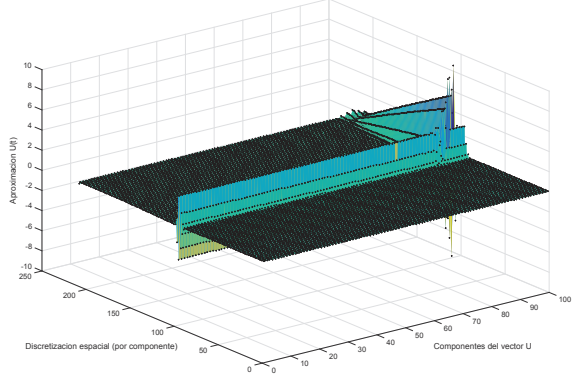
donde λ_k para $k = 1, \dots, p$ son los valores propios de la matriz A .

Por lo tanto se escogerá una matriz constante con el valor de 0,5, tomando los siguientes parámetros: $\Delta t = 0,01$ y Δx igual a 0,0066, 0,005, 0,0049, 0,00485 y 0,00476. Esta familia de parámetros es similar a la familia considerada para resolver numéricamente el problema de transporte escalar.

Los resultados se muestran a continuación.

Δt	Δx	Aproximación de la solución
------------	------------	-----------------------------

0,01	0,0066	 <p>A 3D surface plot showing the approximation $U(t)$ on the vertical axis (ranging from 0 to 0.25). The horizontal axes are 'Discretización espacial (por componente)' (ranging from 0 to 160) and 'Componentes del vector U' (ranging from 0 to 100). The surface is colored with a gradient from yellow (high values) to dark blue/black (low values), showing a smooth, curved surface that decreases as the spatial discretization and vector components increase.</p>
0,01	0,005	 <p>A 3D surface plot showing the approximation $U(t)$ on the vertical axis (ranging from 0 to 0.25). The horizontal axes are 'Discretización espacial (por componente)' (ranging from 0 to 250) and 'Componentes del vector U' (ranging from 0 to 100). The surface is colored with a gradient from yellow (high values) to dark blue/black (low values), showing a smooth, curved surface that decreases as the spatial discretization and vector components increase.</p>
0,01	0,0049	 <p>A 3D surface plot showing the approximation $U(t)$ on the vertical axis (ranging from -0.05 to 0.3). The horizontal axes are 'Discretización espacial (por componente)' (ranging from 0 to 250) and 'Componentes del vector U' (ranging from 0 to 100). The surface is colored with a gradient from yellow (high values) to dark blue/black (low values), showing a smooth, curved surface that decreases as the spatial discretization and vector components increase.</p>

0,01	0,00485	
0,01	0,00476	

Cuadro 3.6: Sistema de Leyes de Conservación Hiperbólicas con el Método de Euler Explícito

Como se puede observar ya que el método utilizado es Euler explícito, al resolver el sistema (3.13) se muestran oscilacion desde que se toma $\Delta x = 0,005$. Nuevamente esto se debe a que para resolver el problema utilizando el método de Euler explícito se debe cumplir las condición de estabilidad CFL.

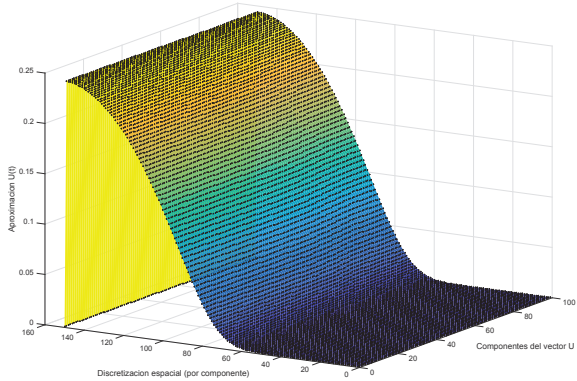
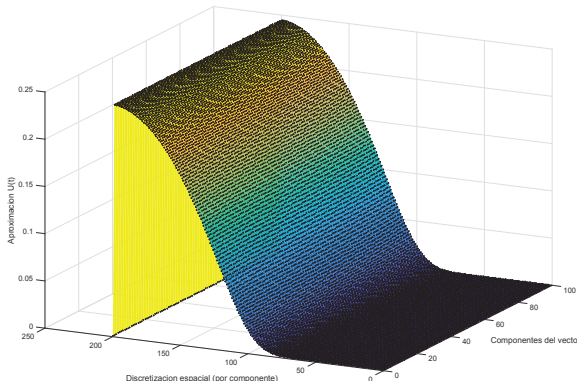
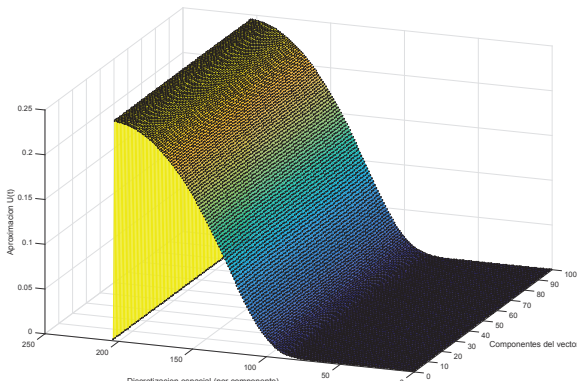
Al resolver el problema (3.10) con el Método de Euler Implícito se tendrá el siguiente esquema de discretización:

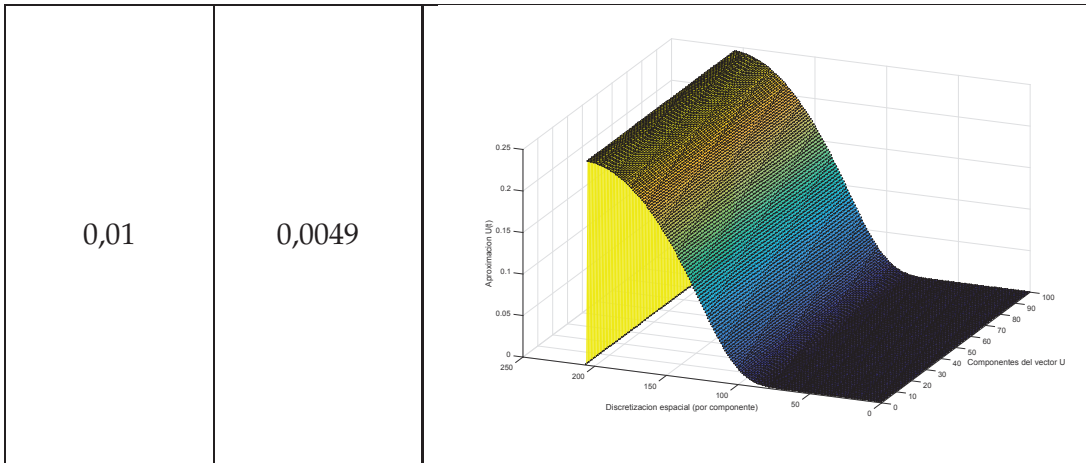
$$\begin{aligned} \bar{u}_j^{n+1} + \frac{\Delta t}{2\Delta x} A_{j,:} (u_{j+1}^{-n+1} - u_{j-1}^{-n+1}) - \\ \frac{\Delta t}{2\Delta x} |A_{j,:}| (u_{j+1}^{-n+1} - 2\bar{u}_j^{n+1} + u_{j-1}^{-n+1}) = \bar{u}_j^n, \end{aligned} \quad (3.14)$$

el sistema a resolver es de la forma:

$$I_d \bar{u}^{n+1} + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \tilde{A} M_2 \bar{u}^{n+1} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} [\tilde{A} | M_3 \bar{u}^{n+1} = \bar{u}^n, \quad (3.15)$$

donde las matrices \tilde{A} , M_1 y M_2 son las mismas que para el método explícito. Los resultados se muestran a continuación:

Δt	Δx	Aproximación de la solución
0,01	0,0066	
0,01	0,005	
0,01	0,00495	



Cuadro 3.7: Sistema de Leyes de Conservación Hiperbólicas con el Método de Euler Implícito

En los resultados mostrados se puede ver que al utilizar el método de Euler Implícito, este permanece estable aunque no se cumpla la condición de estabilidad CFL.

Esquema Semi-Lagrangiano

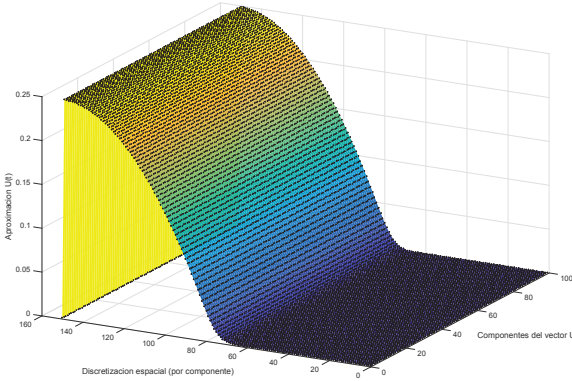
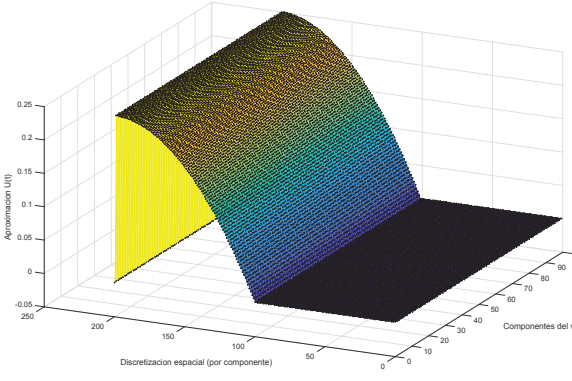
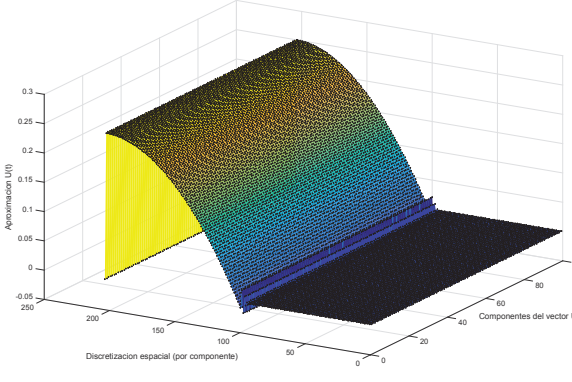
Al resolver el problema (3.10) mediante el método Euler Explícito se tiene el siguiente esquema de discretización:

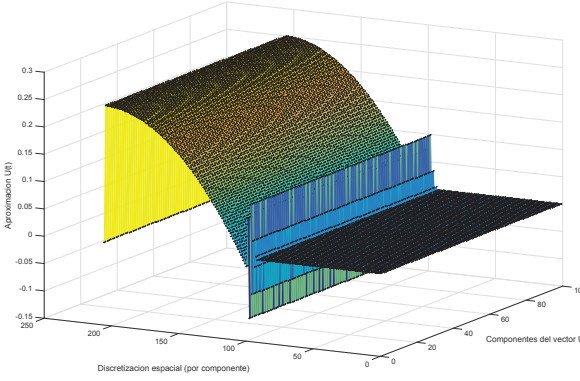
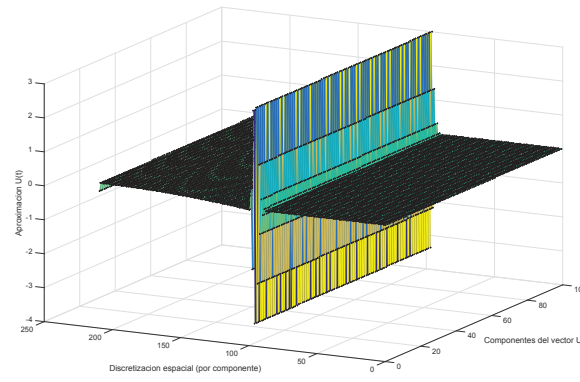
$$\bar{u}_j^{n+1} = \bar{u}_j^n + \frac{\Delta t}{\delta} [\bar{u}^n(x_j - \delta A_{j,:}) - \bar{u}_j^n]. \quad (3.16)$$

donde $\bar{u}^n(x_j - \delta A(j, :))$ es la función de interpolación y la matriz $A_{j,:}$ es la misma que se ha mostrado en los métodos anteriores. Para la resolución numérica se empleará la interpolación lineal.

Los resultados se muestran a continuación son considerando $\delta = \Delta t$.

Δt	Δx	Aproximación de la solución
------------	------------	-----------------------------

0,01	0,0066	
0,01	0,005	
0,01	0,0049	

0,01	0,00485	
0,01	0,00476	

Cuadro 3.8: Sistema de Leyes de Conservación Hiperbólicas con el Método de Euler Implícito

Ahora se considerará $\delta = \frac{\Delta t}{2}$ y se obtuvieron los siguiente resultados:

Δt	Δx	Aproximación de la solución
0,01	0,0066	