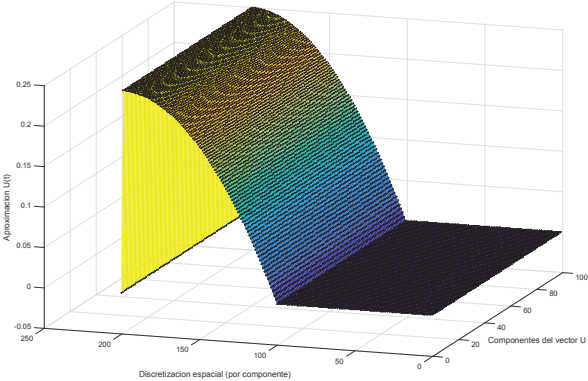
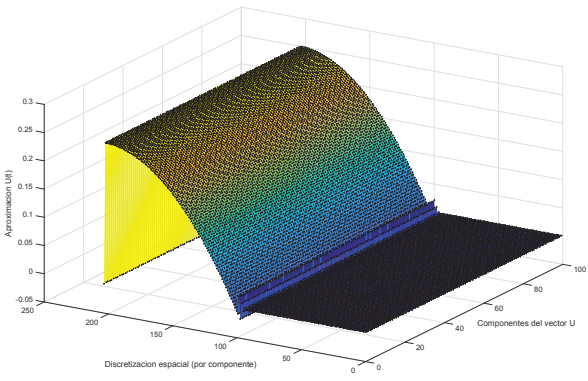
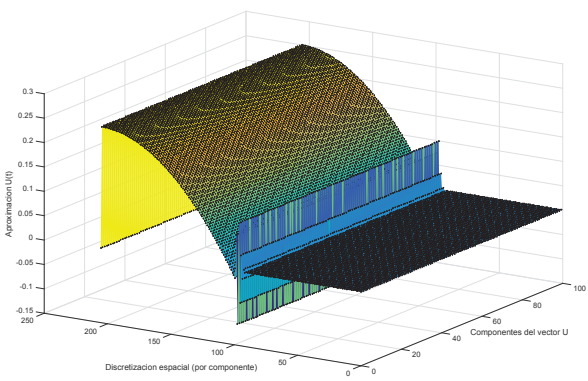
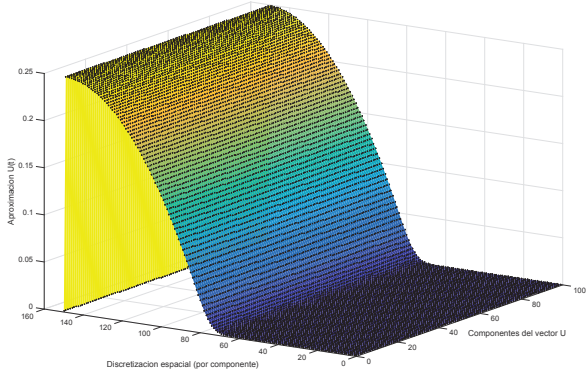
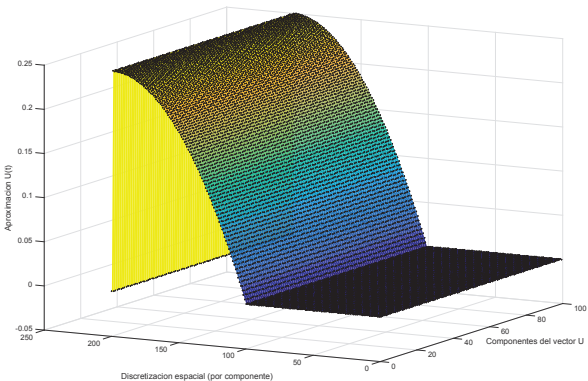
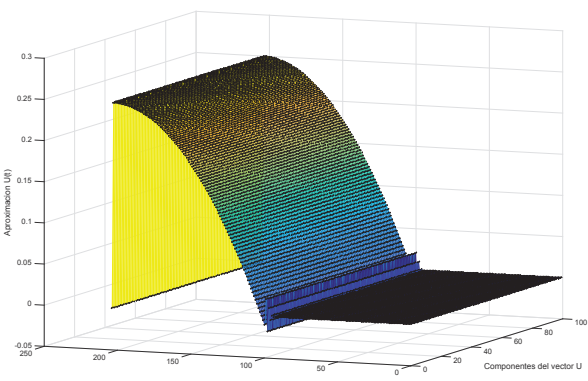


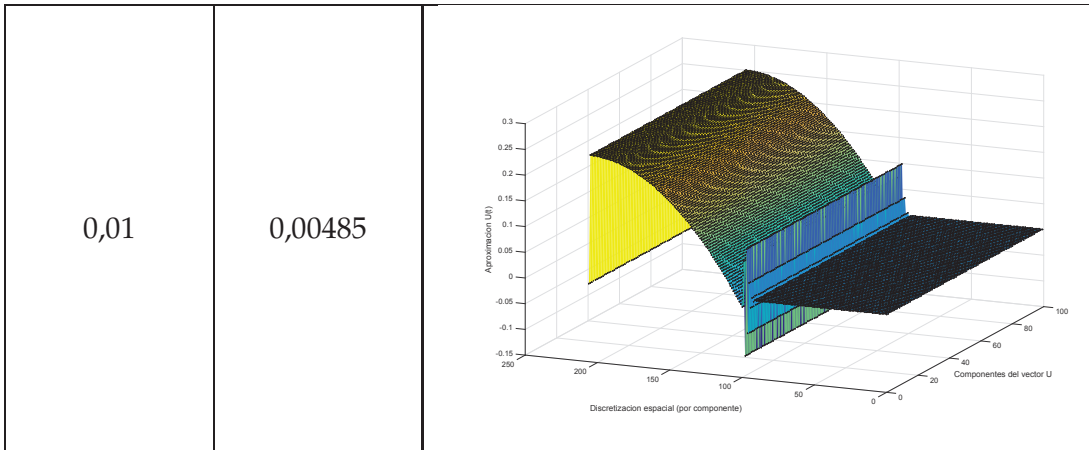
0,01	0,005	
0,01	0,0049	
0,01	0,00485	

**Cuadro 3.9:** Sistema de Leyes de Conservación Hiperbólicas con el Método de Euler Implícito

Finalmente, se tomará  $\delta = (\Delta t)^2$  y los resultados fueron:

$\Delta t$	$\Delta x$	Aproximación de la solución
------------	------------	-----------------------------

<p>0,01</p>	<p>0,0066</p>	
<p>0,01</p>	<p>0,005</p>	
<p>0,01</p>	<p>0,0049</p>	



**Cuadro 3.10:** Sistema de Leyes de Conservación Hiperbólicas con el Método de Euler Implícito

Como se puede ver en las tablas 3.8, 3.9 y 3.10 el método es inestable y esto es debido a que no se cumple la condición de estabilidad CFL.

Por lo tanto en esta sección se nota que resolver el problema (3.10) mediante el método Euler implícito es mejor dado que aunque se escoja el parámetro  $\Delta x$  menor que  $\Delta t$  no se presentan oscilaciones, esto se debe a que el método es absolutamente estable.

### 3.4. Ecuación de Burgers

El principal objetivo de la ecuación de Burgers es estudiar problemas físicos, además de fenómenos convectivos y difusivos como por ejemplo: turbulencia, choque de olas, flujos de tráfico y en general problemas de flujo.

La ecuación de Burgers esta descrita por:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + u(x, t) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = \epsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t). \quad (3.17)$$

donde el término  $\epsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t)$  determina si la ecuación es viscosa o no lo es.

El problema (3.17) es parabólico quasilineal que muestra la evolución en el tiempo de la función  $u(x, t)$  que se ve influenciada por la convección y la disipación. Este problema es usado para modelar el movimiento de fluidos viscosos cuando su viscosidad tiende a cero, donde la función podría desarrollar un shock.

Si en la ecuación (3.17) se omite el término  $uu_x$ , el problema se convierte en la ecuación de calor usual. Ahora, si eliminamos el término  $\epsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t)$  se obtiene el

problema de la ecuación de Burgers no viscosa que es una ecuación hiperbólica que simula las perturbaciones en un fluido no viscoso.

A la ecuación de Burgers no-viscosa se considera como una de las ecuaciones diferenciales parciales convectivas más simples y, al tratarse de un problema hiperbólico, se lo resolverá de manera similar a los problemas anteriores considerando que este problema no es lineal. Por este motivo la solución se la encontrará utilizando el método de Newton.

El problema que se resolverá es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, & 0 < x < L, t > 0 \\ u(x, 0) &= u_0 & 0 < x < L \\ u(0, t) = u(L, t) &= 0 & \text{Condiciones de Borde de Dirichlet} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Para la derivada espacial del problema (3.18) se emplearán los esquemas de discretización Upwind y Semi-Lagrangiano. Los métodos para resolver numéricamente el problema temporal serán Euler explícito e semi-implícito.

### 3.4.1. Resolución Numérica

La condición inicial que se utilizará para resolver el problema (3.18) es:

$$u(x, 0) = u_0(x) = \sin(2\pi x) \quad (3.19)$$

#### Esquema Upwind

El esquema de discretización mediante el método de Euler Explícito para el problema (3.18) es:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - u_j^n \frac{\Delta t}{2\Delta x} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + |u_j^n| \frac{\Delta t}{2\Delta x} (u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n). \quad (3.20)$$

Debido a la condición de borde se tiene que  $j$  tomará valores entre  $1, \dots, J - 1$  ya que para todo  $n = 0, \dots, N$  se tiene que:  $u_0^n = u_J^n = 0$ , donde  $N$  es el número de puntos en los que se dividirá el intervalo temporal. Por lo tanto, el esquema a resolver es:

$$u^{n+1} = u^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} A^n M_1 u^n + \frac{\Delta t}{2\Delta x} |A^n| M_2 u^n, \quad (3.21)$$

donde

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}_{(J-2) \times (J-2)}$$

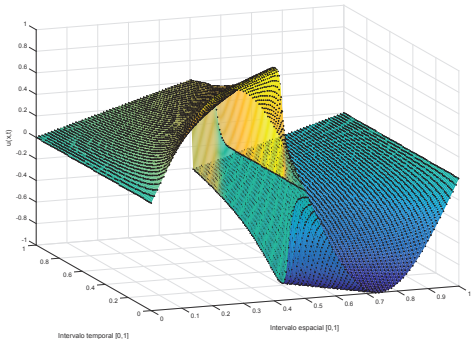
y

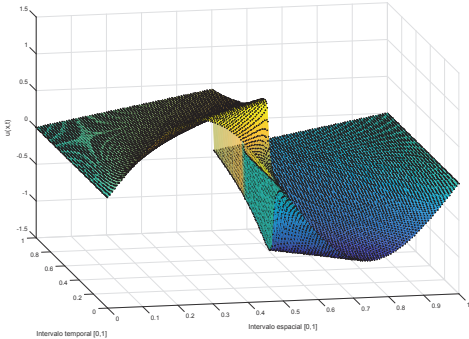
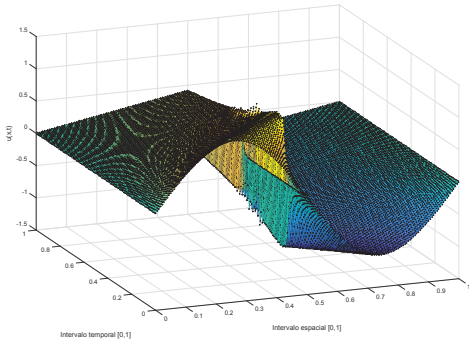
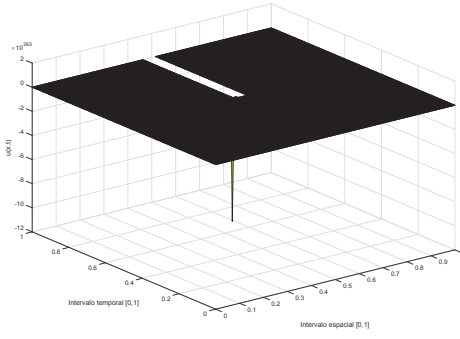
$$M_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}_{(J-2) \times (J-2)}$$

y la matriz

$$A^n = \begin{pmatrix} u_1^n & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & u_2^n & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & u_j^n & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & u_{J-1}^n \end{pmatrix}_{(J-2) \times (J-2)}$$

Los resultados que se muestran a continuación fueron encontrados utilizando la familia de parámetros para las variables  $\Delta t$  y  $\Delta x$  que se tomó para los problemas anteriores:

$\Delta t$	$\Delta x$	Evolución de Aproximación de la solución
0,01	0,01	

0,01	0,0067	
0,01	0,0056	
0,01	0,0053	

**Cuadro 3.11:** Ecuación de Burgers con el Método de Euler Explícito, utilizando el esquema upwind

Cuando se consideran los parámetros  $\Delta t = 0,01$  y  $\Delta x = 0,0056$  el método es inestable ya que se presentan ligeras oscilaciones como se puede observar en el gráfico mostrado junto con los parámetros mencionados. Y a partir de esa selección para el parámetro  $\Delta x$  se tiene que el método no muestra un resultado adecuado, esto se debe a que no se cumple la estabilidad CFL.

El esquema de discretización con el Método de Euler semi-implícito para la ecua-

ción de Burgers será el siguiente:

$$u_j^{n+1} + u_j^n \frac{\Delta t}{2\Delta x} (u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}) - |u_j^n| \frac{\Delta t}{2\Delta x} (u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}) = u_j^n, \quad (3.22)$$

de manera que el sistema a resolver es:

$$I_d u^{n+1} + \frac{\Delta t}{2\Delta x} A^n M_2 u^{n+1} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} |A^n| M_3 u^{n+1} = u^n \quad (3.23)$$

donde  $I_d$  tiene dimensión  $(J-2) \times (J-2)$  y las matrices  $M_2, M_3$  son las matrices del método explícito  $M_1, M_2$  respectivamente. La matriz  $A^n$  es la misma que para el método explícito.

Para resolver el problema (3.23) se utilizará el método de Newton, dado que se trata de un problema no lineal, de la siguiente manera:

$$u^{n+1} = u^n + \delta_u,$$

donde  $\delta_u$  se calcula al resolver el problema lineal

$$W \delta_u = -F(u^n),$$

aquí la función  $F(u^n)$  tiene la forma:

$$F(u) = I_d u + \frac{\Delta t}{2\Delta x} A^n M_2 u - \frac{\Delta t}{2\Delta x} |A^n| M_3 u - u_0,$$

y la matriz  $W$  es:

$$W = [I_d + \frac{\Delta t}{2\Delta x} A^n M_2 - \frac{\Delta t}{2\Delta x} |A^n| M_3],$$

donde  $u_0$  es el valor de la variable  $u$  en la iteración de Newton anterior.

Los resultados se muestran a continuación considerando la misma familia de parámetros que para el método explícito.

$\Delta t$	$\Delta x$	Evolución de Aproximación de la solución
------------	------------	--

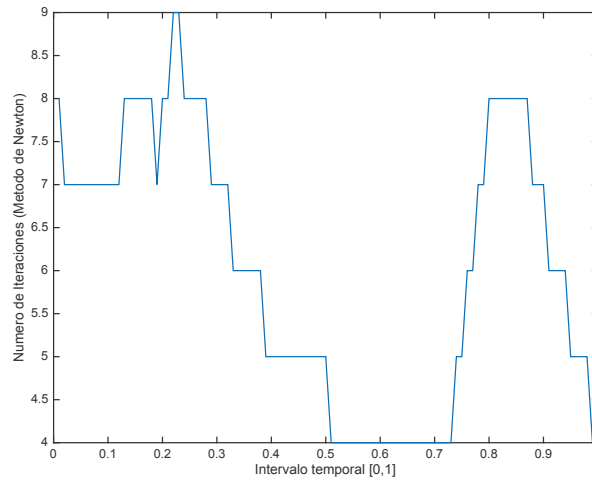
0,01	0,01	
0,01	0,0067	
0,01	0,0056	
0,01	0,0053	

**Cuadro 3.12:** Ecuación de Burgers con el Método de Euler Semi-Implícito, utilizando el esquema upwind



Se puede notar que al resolver numéricamente el problema, el método es estable incluso cuando la condición de estabilidad no se cumple y se debe mencionar que el método de Newton converge cuadráticamente como se explicó en el capítulo anterior.

A continuación se muestra el número de iteraciones que requirió el método de Newton en cada iteración temporal:



**Figura 3.1:** Número de iteraciones del método de Newton en cada iteración temporal

### Esquema Semi-Lagrangiano

El esquema a resolver será el siguiente:

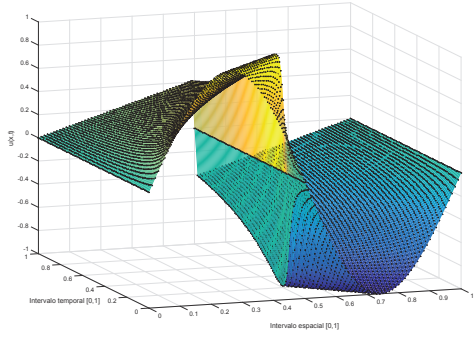
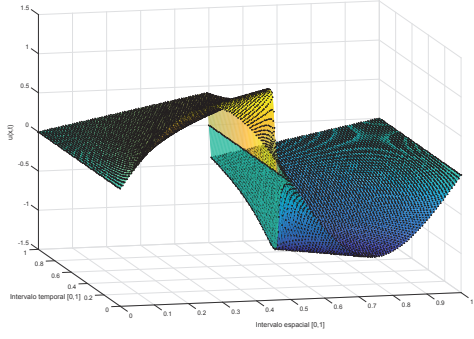
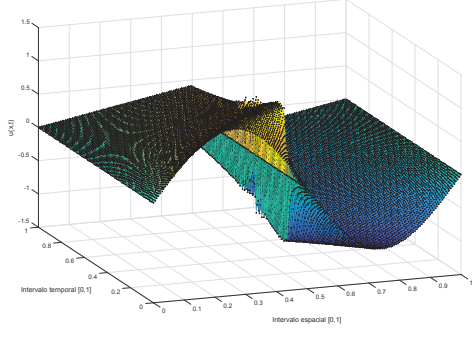
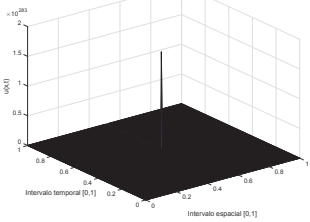
$$u_j^{n+1} = \frac{\Delta t}{\delta} [u^n(x_j - \delta u(x_j, t^n)) - u_j^n] + u_j^n. \quad (3.24)$$

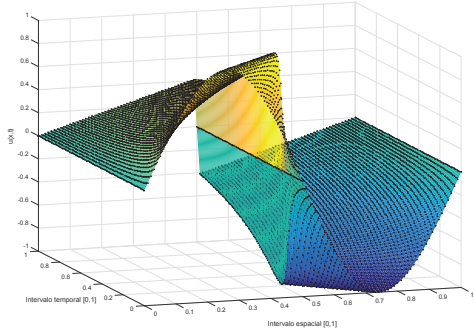
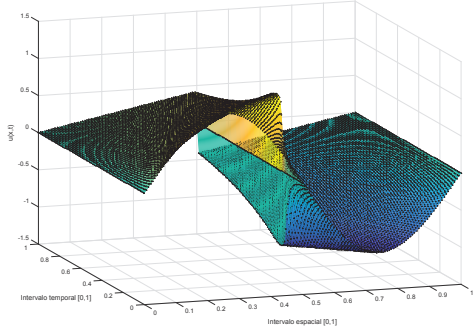
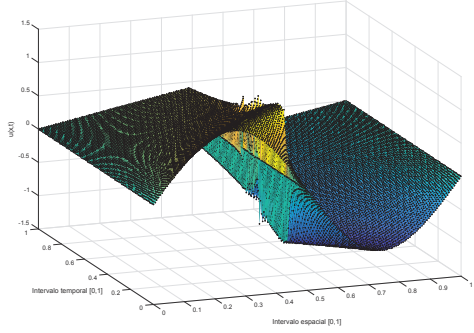
Dentro del esquema (3.24) se presenta un problema ya que se debe considerar el caso cuando el valor de  $u(x_j, t^n)$  sea menor que cero ya que el momento de realizar la interpolación, si no se toma en cuenta esta situación, se intentaría realizar una extrapolación y no se llegará a la solución deseada.

Para solucionar el problema se realizará la interpolación de manera como se la presente en el capítulo anterior, es decir, dependiendo del valor que tome  $u(x_j, t^n)$ , tomando siempre en cuenta la condición de borde.

Se presentarán los resultados considerando  $\delta = \Delta t$  y tomando  $\delta < \Delta t$ .

$\Delta t =$ (1/N)	$\Delta x =$ (1/J)	$\delta$	Evolución de la Aproximación de la solución
-----------------------	-----------------------	----------	---

0,01	0,01	0,01	
0,01	0,0067	0,01	
0,01	0,0056	0,01	
0,01	0,0053	0,01	

0,01	0,01	0,001	
0,01	0,0067	0,001	
0,01	0,0056	0,001	

**Cuadro 3.13:** Ecuación de Burgers con el Método Euler explícito, utilizando el esquema semi-lagrangiano

Se puede observar los resultados considerando dos diferentes valores para el parámetro  $\delta$ , y se nota que cuando se toma  $\Delta x = 0,0056$  el gráfico presenta ligeras oscilaciones, y nuevamente si se considera un valor para este parámetro más pequeño no se obtiene un resultado adecuado. Esto por la condición de estabilidad CFL.

Los resultados mostrados en este capítulo sirven para estudiar el comportamiento de los esquemas numéricos mediante los cuales se resolverán en el siguiente capítulo las ecuaciones de Shallow Water.

Se puede notar que la condición de estabilidad CFL juega un papel importante dentro de los métodos explícitos ya que estos no son absolutamente estables. Por ello considerando los problemas de transporte y el sistema de leyes de conservación hiperbólicas, ya que son problemas lineales, se considera mejor resolverlos mediante el método Euler implícito dado que se está resolviendo solo un sistema lineal en cada iteración numérica. En cambio al considerar el problema de la ecuación de Burgers, este método es más costoso computacionalmente dado que se trata de un problema no lineal y en cada paso de Newton se debe resolver un sistema lineal. Mientras que con el método Euler explícito, ya sea con el esquema upwind o semi-lagrangiano, se tiene la presencia de oscilaciones en los resultados.

Por lo que se seguirá estudiando la resolución mediante estos métodos con los esquemas de discretización mencionados dado que por el momento para elegir un método adecuado se debe considerar el objetivo deseado, si un costo computacional menor o estabilidad absoluta al momento de resolver el problema.

# Capítulo 4

## Ecuaciones de Shallow-Water

Las Ecuaciones de Shallow Water describen el comportamiento del movimiento del agua cuando existe presencia de olas en un dominio determinado, ya que son una versión simplificada de las Ecuaciones de Navier-Stokes. En particular las Ecuaciones de Shallow-Water simplifican el problema de tres dimensiones a un problema de dos dimensiones. Además, modelan la propagación de perturbaciones en el agua y en fluidos compresibles (Ver [28]). En principio, se resolverán las ecuaciones de Shallow-Water en una dimensión para estudiar su comportamiento y determinar qué método las resuelve de mejor manera y así, concluir con la resolución numérica de las Ecuaciones de Shallow Water en dos dimensiones.

Para realizar la comparación entre métodos se utilizarán funciones test de manera que se pueda mostrar cual de los métodos aproxima de mejor manera y más eficientemente a las funciones.

### 4.1. Ecuaciones de Shallow-Water en una dimensión: linealización

Las Ecuaciones de Shallow-Water en una dimensión son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial d}{\partial t} + \frac{\partial dU}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g \frac{\partial (d+H)}{\partial x} + \frac{gU|U|}{C^2 d} &= 0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

con condiciones iniciales:

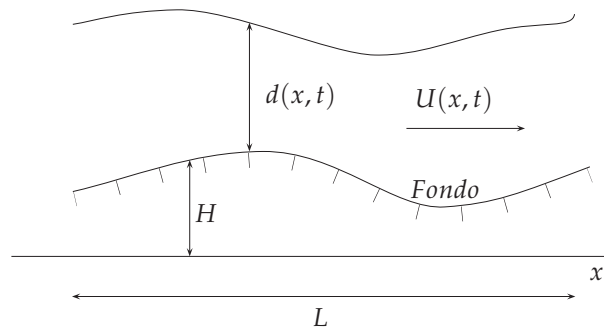
$$d(x, 0) = d_0(x), \quad U(x, 0) = U_0(x), \tag{4.2}$$

las condiciones de borde para la variable  $U$ :

$$U(0, t) = f, \quad U(L, t) = g, \quad (4.3)$$

y condiciones de borde, reflectivas (Ver [28]), para la variable  $d$ :

$$d'(0, t) = d(1, t), \quad d'(1, t) = d(0, t) \quad (4.4)$$



donde:

- $U$  es la velocidad de flujo,
- $d$  es la profundidad del flujo,
- $g$  es la aceleración de la gravedad,
- $H$  es la altura del fondo,
- $C$  es el coeficiente de fricción de Chézy, sirve para el cálculo de la velocidad del agua en canales abiertos.

Dentro del estudio para la resolución numérica de las Ecuaciones de Shallow-Water en una dimensión, se han mencionado diferentes condiciones de borde para las variables  $d$  y  $U$ . Por ejemplo:

- Condiciones de borde reflectivas.

Las condiciones de borde para la variable profundidad, consideran que la velocidad del flujo es igual a la profundidad del mismo en el punto contrario del intervalo espacial a estudio, y son de la forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial d}{\partial x}(0, t) &= d(L, t) \\ \frac{\partial d}{\partial x}(L, t) &= d(0, t) \end{aligned}$$

Las condiciones de borde para la variable velocidad horizontal, consideran que el flujo no traspasa la pared sino que regresa con la misma velocidad pero en sentido contrario, y son de la forma:

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial x}(L, t) &= 0 \\ \frac{\partial U}{\partial x}(0, t) &= 0,\end{aligned}$$

es decir, el fluido se mueve tangencialmente en la pared.

- Se consideran también condiciones de borde de manera que la condición de borde para la variable  $U$  es igual al promedio (considerando el borde) de su punto hacia adelante y su punto hacia atrás. De la siguiente manera, para el borde izquierdo se tiene:

$$\begin{aligned}\frac{U_{-1/2} + U_{1/2}}{2} &= U(0, t), \\ U_{-1/2} + U_{1/2} &= 2U(0, t),\end{aligned}$$

y para el borde derecho:

$$\begin{aligned}\frac{U_{J-1/2} - U_{J+1/2}}{2} &= U(L, t) \\ U_{J-1/2} - U_{J+1/2} &= 2U(L, t),\end{aligned}$$

donde  $L$  es la longitud del dominio a estudiar.

Se empezará estudiando el problema linealizado, del sistema (4.1). Este problema es útil cuando existen perturbaciones pequeñas. Por lo tanto, considerando  $H = cte$ ,  $d = \bar{d} + d$  con  $\bar{d} = cte$ ,  $U = \bar{U} + U$  con  $\bar{U} = cte$  y además tomando como coeficiente de fricción a  $ru$  (Ver [30]), las ecuaciones (4.1) se pueden escribir de la forma:

$$\begin{aligned}\frac{\partial d}{\partial t} + \bar{d} \frac{\partial U}{\partial x} + \bar{U} \frac{\partial d}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial U}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial U}{\partial x} + g \frac{\partial d}{\partial x} + ru &= 0.\end{aligned}\tag{4.5}$$

En este problema se debe considerar la condición de estabilidad CFL mencionada para el sistema de leyes de conservación hiperbólicas mostrada en el capítulo anterior.

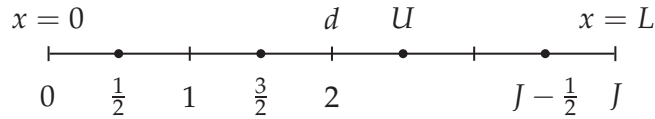
Para reducir la expresión (4.5) en lugar de linealizar el sistema alrededor de la velocidad constante  $\bar{U}$ , si asumimos que  $U$  es lo suficiente pequeña, se podrá omitir los términos que involucren  $UU'$  y  $Ud'$ , por lo que el nuevo sistema a resolver se convertirá en:

$$\begin{aligned}\frac{\partial d}{\partial t} + \bar{d} \frac{\partial U}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial U}{\partial t} + g \frac{\partial d}{\partial x} + ru &= 0\end{aligned}\tag{4.6}$$

y finalmente, si además se omite el valor de la fricción  $ru$ , el sistema resultante obtenido es una aproximación simple del flujo de las ecuaciones de Shallow-Water por lo que el problema lineal que se estudiará será:

$$\begin{aligned}\frac{\partial d}{\partial t} + \bar{d} \frac{\partial U}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial U}{\partial t} + g \frac{\partial d}{\partial x} &= 0.\end{aligned}\tag{4.7}$$

Para resolver (4.7) se utilizará una malla diferenciada para las variables  $d$  y  $U$  como se muestra a continuación:



donde  $\Delta x = cte$  es el tamaño de la malla espacial. La aproximación de la función  $d(x, t)$  en la malla espacial será  $x_j = j\Delta x$  por lo que la variable asociada a la función  $d$  tiene  $J + 1$  componentes. Para el caso de la aproximación de la función  $U(x, t)$  en la malla espacial será  $x_{j+1/2} = (j + \frac{1}{2})\Delta x$ . En este caso la variable asociada a la función  $U$  tiene  $J$  componentes.

Al discretizar el problema (4.7), utilizando para la derivada espacial el esquema upwind y considerando que los valores de  $\bar{d}$  y  $g$  son positivos, el problema discretizado es de la forma:

$$\begin{aligned}\frac{dd_j}{dt} + \bar{d} \frac{U_{j+1/2} - U_{j-1/2}}{\Delta x} &= 0, \quad j = 1, 2, \dots, J - 1, \\ \frac{dU_{j+1/2}}{dt} + g \frac{d_{j+1} - d_j}{\Delta x} &= 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots, J - 1.\end{aligned}\tag{4.8}$$

En el sistema (4.8) a la primera ecuación se la puede expandir hacia los puntos extremos  $j = 0$  y  $j = J$ , lo que provoca la aparición de puntos ficticios para la variable  $U$ . Por ejemplo si  $j = 0$  en el término  $\frac{U_{j+1/2} - U_{j-1/2}}{\Delta x}$  se presentará el punto



$U_{-1/2}$  y cuando  $j = J$  en ese mismo término se presentará el punto  $U_{J+1/2}$ . A estos puntos se los encontrará gracias a las condiciones de borde para la variable  $U$  de la forma:

$$U_{-1/2} = 2U(0, t) - U_{1/2}, \quad U_{J+1/2} = 2U(L, t) - U_{J-1/2} \quad (4.9)$$

Se resolverá el sistema (4.8) utilizando el método de Euler Implícito y el esquema a resolver será:

$$\begin{aligned} d_j^{n+1} + \bar{d} \frac{\Delta t}{\Delta x} (U_{j+1/2}^{n+1} - U_{j-1/2}^{n+1}) &= d_j^n, \\ U_{j+1/2}^{n+1} + g \frac{\Delta t}{\Delta x} (d_{j+1}^{n+1} - d_j^{n+1}) &= U_{j+1/2}^n, \end{aligned} \quad (4.10)$$

donde  $\Delta t$  es el paso de discretización temporal y  $\Delta x$  el paso de discretización espacial.

Debido a la expansión hacia los extremos en la primera ecuación y los valores ficticios mencionados anteriormente, tanto la primera como la última ecuación deben recibir un tratamiento especial justamente en los puntos extremos de la malla espacial. Para encontrar la forma de la primera y última fila de la matriz de discretización se tendrá lo siguiente:

Si  $j = 0$  y para todo  $n \geq 0$  la primera ecuación discretizada, que servirá para determinar la estructura de la primera fila, será:

$$\begin{aligned} d_0^{n+1} + \bar{d} \frac{\Delta t}{\Delta x} (U_{1/2}^{n+1} - U_{-1/2}^{n+1}) &= d_0^n \\ \Leftrightarrow d_0^{n+1} + \bar{d} \frac{\Delta t}{\Delta x} (U_{1/2}^{n+1} - 2U(U, n+1) + U_{1/2}^{n+1}) &= d_0^n \\ \Leftrightarrow d_0^{n+1} + \bar{d} \frac{\Delta t}{\Delta x} 2U_{1/2}^{n+1} &= d_0^n + \bar{d} \frac{\Delta t}{\Delta x} 2U(U, n+1) \end{aligned}$$

y cuando  $j = J$  y para todo  $n \geq 0$  la última ecuación discretizada, que servirá para determinar la estructura de la última fila será:

$$\begin{aligned} d_J^{n+1} + \bar{d} \frac{\Delta t}{\Delta x} (U_{J+1/2}^{n+1} - U_{J-1/2}^{n+1}) &= d_J^n \\ \Leftrightarrow d_J^{n+1} + \bar{d} \frac{\Delta t}{\Delta x} (2U(L, n+1) - U_{J-1/2}^{n+1} - U_{J-1/2}^{n+1}) &= d_J^n \\ \Leftrightarrow d_J^{n+1} + \bar{d} \frac{\Delta t}{\Delta x} (-2U_{J-1/2}^{n+1}) &= d_J^n + \bar{d} \frac{\Delta t}{\Delta x} (-2U(L, n+1)). \end{aligned}$$

Por lo tanto el sistema a resolver será:

$$\begin{aligned} I_d d^{n+1} + \bar{d} \frac{\Delta t}{\Delta x} M_2 U^{n+1} &= d^n + \bar{d} \frac{\Delta t}{\Delta x} v_1 \\ I_U U^{n+1} + g \frac{\Delta t}{\Delta x} M_4 d^{n+1} &= U^n \end{aligned} \quad (4.11)$$

donde  $I_d$  tiene dimensión  $(J + 1) \times (J + 1)$ ,  $I_U$  tiene dimensión  $J \times J$  y las matrices serán:

*Para la primera ecuación*

$$M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \dots & \dots \\ -1 & 1 & \dots & \dots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & -1 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & -2 \end{pmatrix}_{(J+1) \times J}, v_1 = \begin{pmatrix} 2U(0, n + 1) \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ -2U(L, n + 1) \end{pmatrix}.$$

*Para la segunda ecuación*

$$M_4 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & -1 & 1 & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix}_{J \times (J+1)}.$$

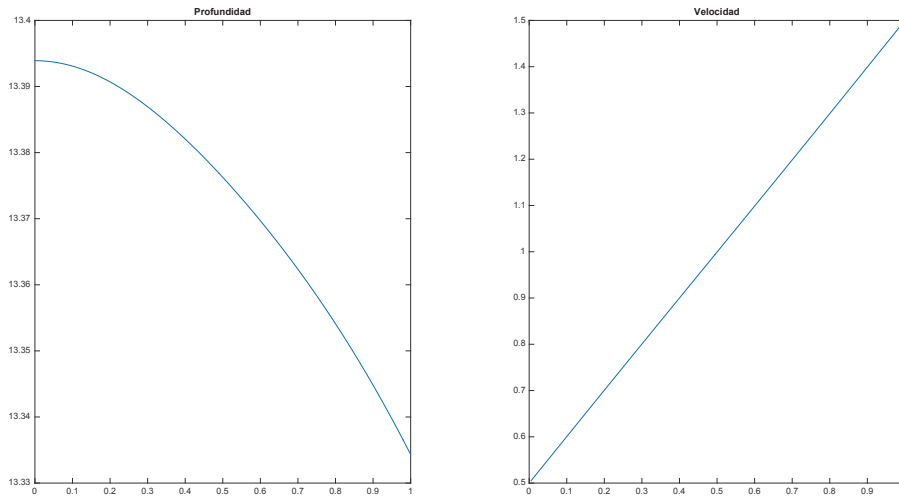
El problema se lo resolvió utilizando los siguientes parámetros:

- Número de puntos para la discretización temporal  $N = 100$ ,
- Número de puntos para la discretización espacial  $J = 100$ ,
- Aceleración de la Gravedad, en norma,  $g = 9$ ,
- Valor de la profundidad promedio  $\bar{d} = 5,5$
- Intervalo de tiempo a estudiar  $[0; 1]$ ,
- Intervalo de espacio a estudiar  $[0; 1]$ ,
- Condición Inicial para  $d$ ,

$$d(x, 0) = \begin{cases} 10, & 0 < x < 0,29 \\ 25, & 0,29 < x < 0,70 \\ 10, & 0,70 < x < 1 \end{cases}$$

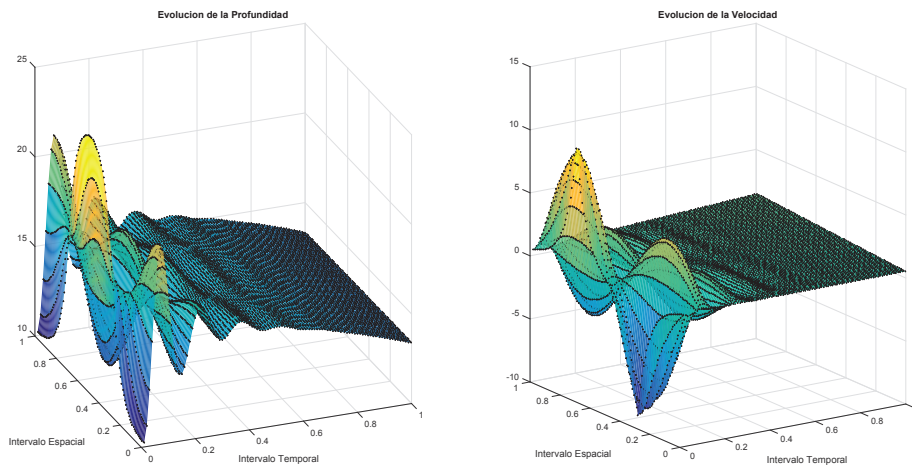
- Condición Inicial para  $U$ ,  $U(x, 0) = 0,5$ ,
- Condiciones de Borde para  $U$ ,  $U(0, t) = 0,5$  y  $U(1, t) = 0,5 + t$ .

La aproximación de la solución en el instante  $T = 1$  segundo se muestra a continuación:



**Figura 4.1:** Resultado de las Ecuaciones de Shallow-Water linealizadas

el gráfico de la evolución de la aproximación es:



**Figura 4.2:** Evolución de la Aproximación de las Ecuaciones de Shallow-Water linealizadas

dado que el problema se lo está resolviendo mediante el método de Euler implícito el método es absolutamente estable por lo que no se presentan oscilaciones, y al tratarse de un problema lineal no es necesario realizar iteraciones de Newton para su resolución.

Las ecuaciones linealizadas de Shallow-Water sirven para simular el movimiento de fluidos que contengan pocas perturbaciones.

A continuación se resolverá el sistema (4.1), es decir el sistema no linealizado, pero se realizarán primero algunas variaciones de este problema. Lo que se busca es conocer la importancia de los términos advectivos dentro de las ecuaciones y también el término de fricción, para finalmente presentar el resultado numérico de las ecuaciones de Shallow-Water.

### Variaciones:

Las variaciones de las Ecuaciones de Shallow-Water se resolverán tomando los parámetros mencionados anteriormente.

Consideremos la primera variación <sup>1</sup>, que considera el término advectivo para la primera ecuación.

$$\begin{aligned}\frac{\partial d}{\partial t} + U\frac{\partial d}{\partial x} + d\frac{\partial U}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial U}{\partial t} + g\frac{\partial d}{\partial x} &= 0\end{aligned}\tag{4.12}$$

El esquema de discretización, utilizando el método de Euler semi-implícito, para la primera ecuación de la primera variación será:

$$d_j^{n+1} + \frac{\Delta t}{\Delta x}[U_{j+1/2}^n(d_{j+1}^{n+1} - d_{j-1}^{n+1}) + d_j^n(U_{j+1/2}^{n+1} - U_{j-1/2}^{n+1})] = d_j^n \tag{4.13}$$

En el esquema (4.13) se pueden presentar los problemas en los valores extremos como sucedió para el caso del problema lineal. A continuación se expondrán dichos casos.

Si  $j = 0$ , para todo  $n \geq 0$ ,

$$\begin{aligned}d_0^{n+1} + \frac{\Delta t}{\Delta x}[U_{1/2}^n(d_1^{n+1} - d_0^{n+1}) + d_0^n(U_{1/2}^{n+1} - U_{-1/2}^{n+1})] &= d_0^n, \\ \Leftrightarrow d_0^{n+1} + \frac{\Delta t}{\Delta x}[U_{1/2}^n(d_1^{n+1}) + d_0^n(U_{1/2}^{n+1} - 2U(0, n+1) + U_{1/2}^{n+1})] &= d_0^n, \\ \Leftrightarrow d_0^{n+1} + \frac{\Delta t}{\Delta x}[U_{1/2}^n(d_1^{n+1}) + d_0^n(2U_{1/2}^{n+1})] &= d_0^n + \frac{\Delta t}{\Delta x}d_0^n 2U(0, n+1).\end{aligned}$$

Cuando  $j = J$ , para todo  $n \geq 0$ ,

---

<sup>1</sup>Se supondrá, para las variaciones, que los valores que acompañan a las derivadas espaciales son positivos

$$\begin{aligned}
& d_J^{n+1} + \frac{\Delta t}{\Delta x} [U_{J+1/2}^n (d_{J+1}^{n+1} - d_J^{n+1}) + d_J^n (U_{J+1/2}^{n+1} - U_{J-1/2}^{n+1})] \\
& \quad = d_J^n, \\
\Leftrightarrow & d_J^{n+1} + \frac{\Delta t}{\Delta x} [(2U(L, n) - U_{J-1/2}^n) (\Delta x d_0^{n+1}) + d_J^n (2U(L, n+1) - U_{J-1/2}^{n+1} \\
& \quad - U_{J-1/2}^{n+1})] = d_J^n, \\
\Leftrightarrow & d_J^{n+1} + \frac{\Delta t}{\Delta x} [(2U(L, n) - U_{J-1/2}^n) (\Delta x d_0^{n+1}) + d_J^n (-2U_{J-1/2}^{n+1})] \\
& \quad = d_J^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} d_J^n 2U(L, n+1).
\end{aligned}$$

El esquema de discretización para la segunda ecuación será:

$$U_{j+1/2}^{n+1} + g \frac{\Delta t}{\Delta x} (d_{j+1}^{n+1} - d_j^{n+1}) = U_{j+1/2}^n. \quad (4.14)$$

El presente esquema no tiene casos especiales ya que para este caso la variable  $j$  toma valores de  $0, \dots, J-1$ . Por lo tanto el sistema a resolver con este esquema es:

$$\begin{aligned}
I_d d^{n+1} + \frac{\Delta t}{\Delta x} v_1 M_2 d^{n+1} + \frac{\Delta t}{\Delta x} v_2 M_3 U^{n+1} &= d^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} v_3, \\
I_U U^{n+1} + g \frac{\Delta t}{\Delta x} M_5 d^{n+1} &= U^n,
\end{aligned} \quad (4.15)$$

donde  $I_d$  tiene dimensión  $(J+1) \times (J+1)$  y  $I_U$  tiene dimensión  $J \times J$  y las demás matrices son:

$$M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & -1 & 1 & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \\ \Delta x & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}_{(J+1) \times (J+1)},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \dots & \dots \\ -1 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -1 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & -2 \end{pmatrix}_{(J+1) \times (J+1)}, \quad M_5 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \dots & \ddots & \ddots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}_{J \times (J+1)},$$

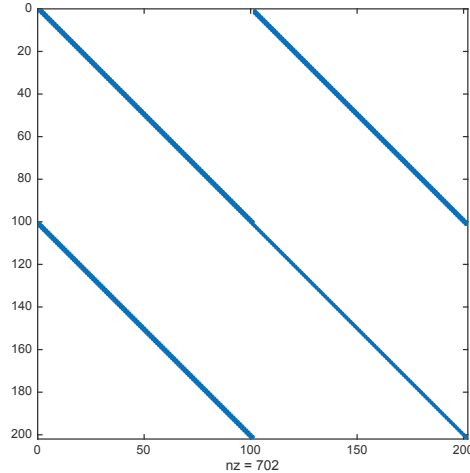
$$v_1 = \begin{pmatrix} U_{1/2}^n & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & U_{3/2}^n & 0 & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \ddots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & U_{J-1/2}^n & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 2U(0,n) - U_{J-1/2}^n \end{pmatrix}_{(J+1) \times (J+1)},$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} d_0^n & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & d_1^n & 0 & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \ddots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & d_{J-1}^n & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & d_J^n \end{pmatrix}_{(J+1) \times (J+1)}, v_3 = \begin{pmatrix} 2d_0^n U(0, n+1) \\ \vdots \\ \vdots \\ -2d_J^n U(L, n+1) \end{pmatrix}.$$

La matriz de discretización que se utilizará para resolver el problema (4.12) es:

$$R = \begin{bmatrix} I_d + \frac{\Delta t}{\Delta x} v_1 M_2 & \frac{\Delta t}{\Delta x} v_2 M_3 \\ g \frac{\Delta t}{\Delta x} M_5 & I_d \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

Esta matriz varía en cada iteración, dado que depende del valor que las variables  $d$  y  $U$  toman en la iteración anterior, pero mantiene la siguiente la estructura:

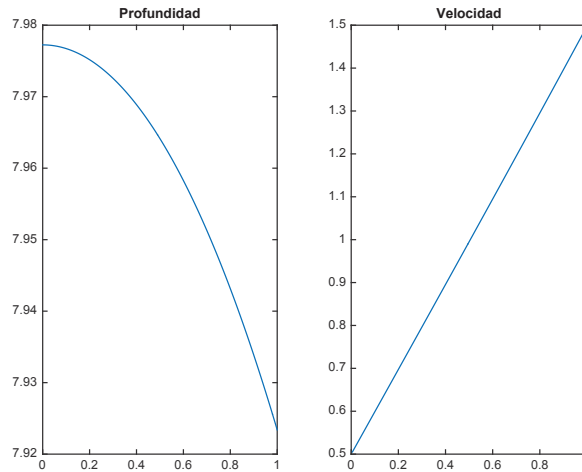


**Figura 4.3:** Estructura de la matriz de discretización  $R$

La matriz  $R$  mostrada anteriormente tiene la estructura de la figura 4.3. Al buscar las propiedades de esta matriz se puede ver que no es definida positiva, ya que

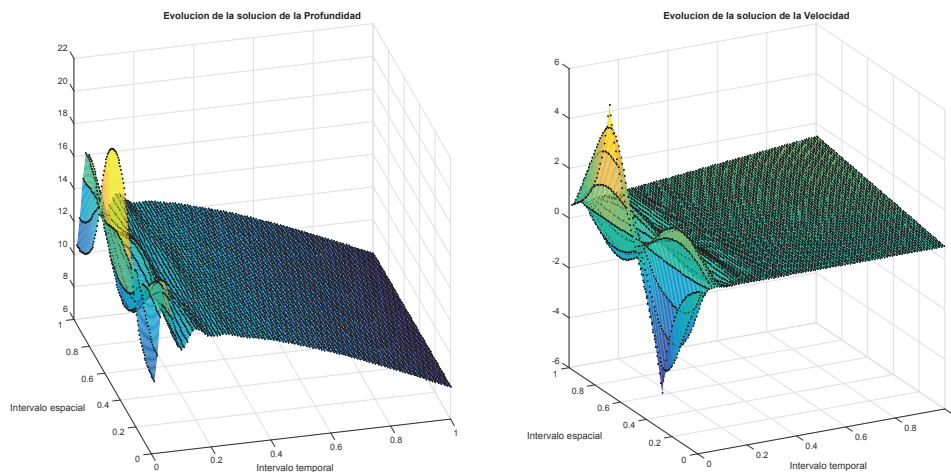
no posee valores propios reales positivos, no es simétrica y no es diagonal dominante, aunque es invertible y es por ese motivo es posible resolver numéricamente el sistema.

El siguiente gráfico muestra el resultado de la primera variación en el instante  $T = 1$ .



**Figura 4.4:** Aproximación de la solución para la Variación 1

A continuación se presenta la evolución de la solución para la variación 1:



**Figura 4.5:** Evolución de la aproximación de la solución para la Variación 1

El comportamiento en la evolución de la aproximación es similar para el caso de la resolución del problema no lineal, aunque se pueden observar ciertos picos dentro de la evolución para la variable de la velocidad.

La segunda variación, que considera el término de fricción, es de la forma:

$$\begin{aligned}\frac{\partial d}{\partial t} + U \frac{\partial d}{\partial x} + d \frac{\partial U}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial U}{\partial t} + g \frac{\partial d}{\partial x} &= -\frac{g|U|U}{C^2 d},\end{aligned}\tag{4.17}$$

donde  $C = 0,7$ . El problema, utilizando el método Euler semi-implícito con el esquema upwind, a resolver es:

$$\begin{aligned}I_d d^{n+1} + \frac{\Delta t}{\Delta x} v_1 M_2 d^{n+1} + \frac{\Delta t}{\Delta x} v_2 M_3 U^{n+1} &= d^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} v_3, \\ I_U U^{n+1} + g \frac{\Delta t}{\Delta x} M_5 d^{n+1} &= U^n - \frac{\Delta t}{C^2} |v_4| v_5 U^n,\end{aligned}\tag{4.18}$$

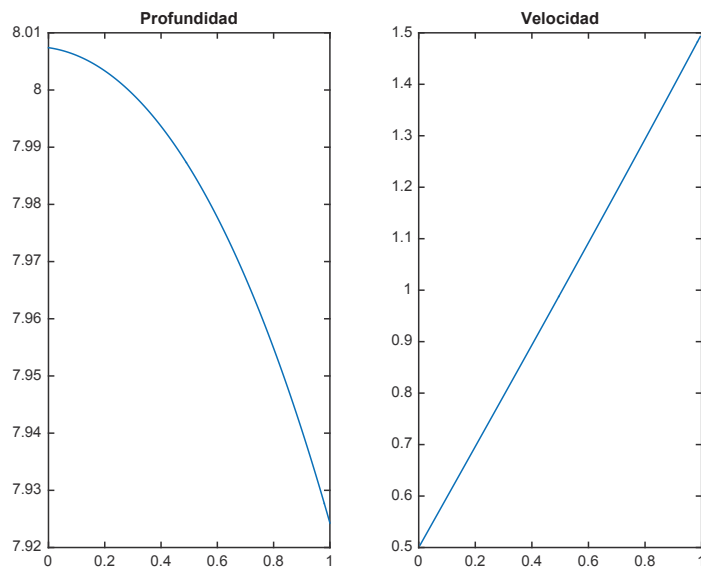
La matriz de discretización tiene la estructura mostrada en la figura (4.3), ya que el cambio realizado en esta variación es incluir el término de fricción pero al lado derecho como dato conocido.

También las matrices de discretización  $I_d$ ,  $M_2$ ,  $M_3$ ,  $I_U$ ,  $M_5$ ,  $v_1$ ,  $v_2$  y  $v_3$  son las mismas para la variación 1 y las matrices  $v_4$  y  $v_5$  son:

$$\begin{aligned}v_4 &= \begin{pmatrix} U_{1/2}^n & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & U_{3/2}^n & 0 & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \ddots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & U_{J-3/2}^n & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & U_{J-1/2}^n \end{pmatrix}_{J \times J}, \\ v_5 &= \begin{pmatrix} 1/d_0^n & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1/d_1^n & 0 & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \ddots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 1/d_{J-2}^n & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1/d_{J-1}^n \end{pmatrix}_{J \times J}.\end{aligned}$$

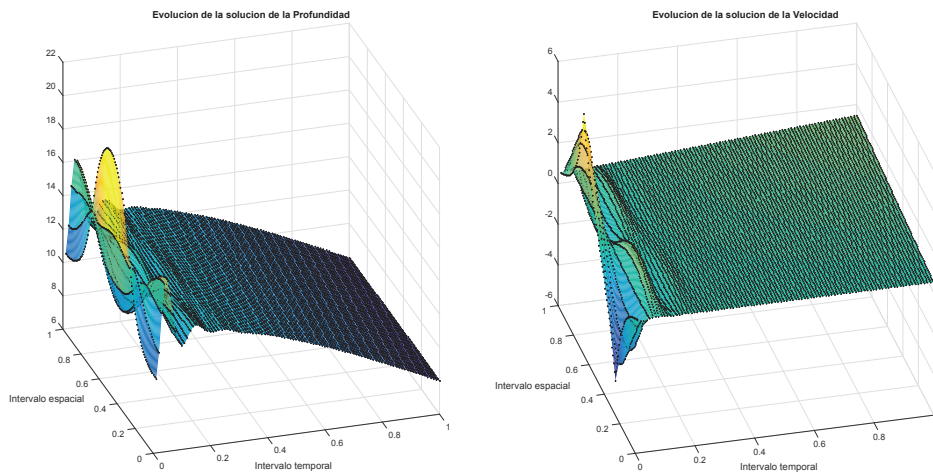
El resultado, en el instante  $T = 1$ , se lo presenta a continuación:





**Figura 4.6:** Aproximación de la solución para la Variación 2

A continuación se presenta la evolución de la aproximación en el intervalo de tiempo:



**Figura 4.7:** Evolución de la aproximación de la solución para la Variación 2

Nuevamente, se puede apreciar que a pesar tener un comportamiento similar que al resolver el problema lineal, se vuelven a presentar ciertos picos para la variable velocidad.

La siguiente, y última variación, será el problema considerando el término ad-