

vectivo en la segunda ecuación:

$$\begin{aligned}\frac{\partial d}{\partial t} + U \frac{\partial d}{\partial x} + d \frac{\partial U}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g \frac{\partial d}{\partial x} &= 0,\end{aligned}\tag{4.19}$$

donde el sistema a resolver será:

$$\begin{aligned}I_d d^{n+1} + \frac{\Delta t}{\Delta x} v_1 M_2 d^{n+1} + \frac{\Delta t}{\Delta x} v_2 M_3 U^{n+1} &= d^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} v_3, \\ I_U U^{n+1} + \frac{\Delta t}{\Delta x} v_4 M_5 U^{n+1} + g \frac{\Delta t}{\Delta x} M_6 d^{n+1} &= U^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} v_6,\end{aligned}\tag{4.20}$$

y las matrices I_d , M_2 , M_3 , I_U , v_1 , v_2 , v_3 son las mismas que se han mostrado antes y las matrices M_5 , M_6 y v_6 son de la forma:

$$\begin{aligned}M_5 &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & \dots & \dots \\ -1 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \dots \\ 0 & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix}_{J \times J}, \quad M_6 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & -1 & 1 & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix}_{J \times (J+1)}, \\ v_6 &= \begin{pmatrix} 2U^{1/2^n} U(0, n+1) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{J \times 1}.\end{aligned}$$

A pesar de haber realizado una variación dentro de la matriz de discretización (R), esta mantiene la estructura que se mostró en la figura 4.3. El resultado, en el instante $T = 1$, se presenta a continuación:

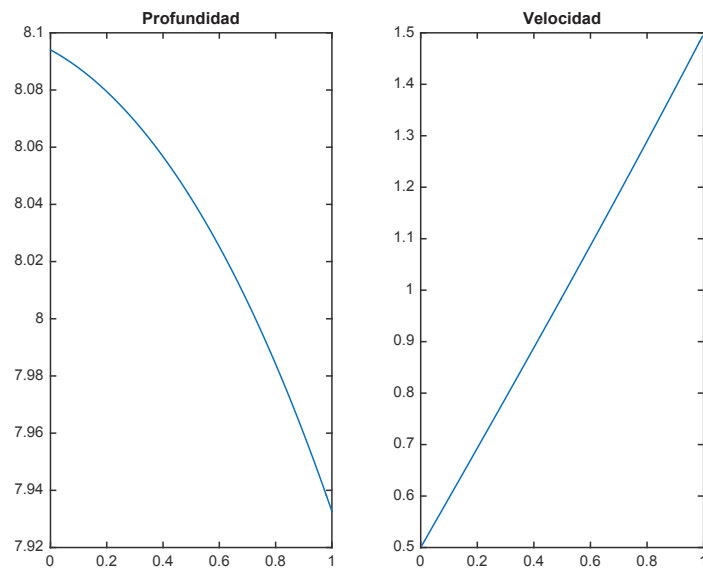


Figura 4.8: Aproximación de la solución para la Variación 3

A continuación se muestra la evolución de la aproximación en el intervalo de tiempo:

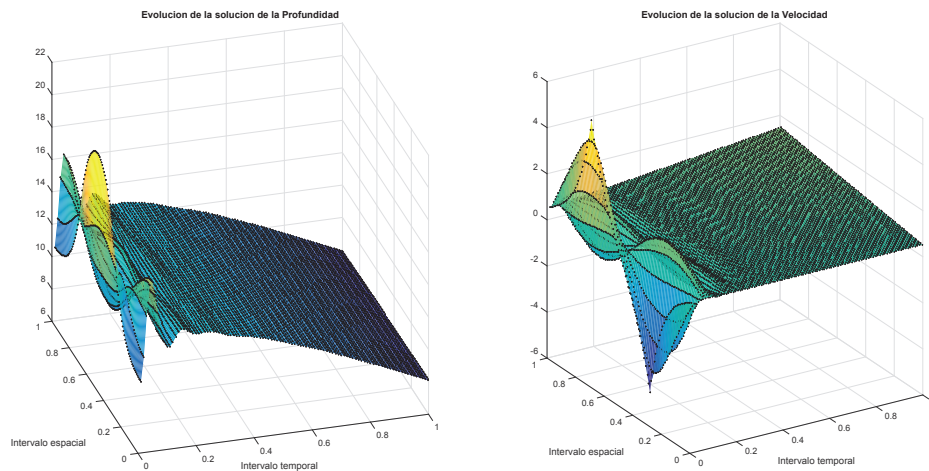


Figura 4.9: Evolución de la aproximación de la solución para la Variación 3

Se puede observar que se tienen ciertos picos para la variable velocidad.

Los resultados, aunque parezcan similares, tienen ciertas diferencias dentro de la evolución para las variables profundidad y velocidad, ya que cuando se resuelve el problema linealizado se presentan ligeras oscilaciones que al resolver mediante

las diferentes variaciones no se presentan. Esto se da debido a que las ecuaciones linealizadas de Shallow-Water resuelven problemas que contengan pequeñas perturbaciones, y la condición inicial para la variable profundidad dada se puede suponer que presenta perturbaciones no tan pequeñas. Por este motivo se pueden observar en los gráficos 4.2, 4.5, 4.7 y 4.9 ligeras diferencias entre ellos.

Al estudiar las diferentes variaciones se buscó conocer la estructura que deben tener las matrices de discretización que acompañan a los términos advectivos.

4.2. Ecuaciones de Shallow-Water no lineales en una dimensión

A continuación se procederá a resolver las Ecuaciones de Shallow Water en una dimensión (4.1) mediante los métodos Euler explícito e semi-implícito utilizando el esquema de discretización upwind para las derivadas espaciales, así como también se resolverá utilizando el esquema de discretización semi-lagrangiano para los términos advectivos del sistema. Es necesario tomar en cuenta que el esquema semi-lagrangiano es conservativo al resolver ecuaciones con términos advectivos, dado que este esquema, a lo largo del tiempo, no conserva masa, energía, ni momento (Ver [20]). Es por este motivo que al resolver el problema lineal no se considera este esquema de discretización.

Se generará una variación al problema original (4.1), donde se supondrá que el valor de la altura del fondo H es igual a cero. Por lo tanto el sistema a resolver es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial d}{\partial t} + \frac{\partial dU}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g \frac{\partial d}{\partial x} + \frac{gU|U|}{C^2 d} &= 0. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Los resultados que se muestran en las siguientes secciones toman como condiciones iniciales:

$$d(x, 0) = 10, \quad U(x, 0) = 0,5$$

y condiciones de borde, considerando que el intervalo espacial es $[0, 1]$, para U :

$$U(0, t) = 0,5, \quad U(1, t) = 0,5 + t$$

4.2.1. Método de Euler Explícito, aplicando el esquema upwind

Para la resolución de las ecuaciones mediante este método se considerarán dos parámetros importantes. El número de segmentos en los que se dividirá al intervalo espacial será $J = 100$, mientras que el número de segmentos en los que se dividirá al intervalo temporal es de $N = 10000$. Los parámetros están tomados de tal manera que el método sea estable, ya que como hemos visto a lo largo del trabajo se ha podido constatar que al resolver numéricamente mediante el método de Euler Explícito, este se vuelve inestable cuando la condición de estabilidad CFL no se cumple.

Considerando la primera ecuación:

$$\frac{\partial d}{\partial t} + U \frac{\partial d}{\partial x} + d \frac{\partial U}{\partial x} = 0,$$

al momento de discretizarla, tomando $j = 0, \dots, J$, se tiene:

$$\begin{aligned} d_j^{n+1} = d_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} U_{j+1/2}^n [(1 + \epsilon)(d_j^n - d_{j-1}^n) + \\ (1 - \epsilon)(d_{j+1}^n - d_j^n)] - \frac{\Delta t}{\Delta x} d_j^n [U_{j+1/2}^n - U_{j-1/2}^n] \end{aligned} \quad (4.22)$$

donde $\epsilon = \text{sign}(U_{j+1/2}^n)$.

Para resolver el problema se utilizarán las condiciones de borde reflectivas para la variable d (profundidad) y para la variable U (velocidad) la condición de borde que considera el promedio entre el punto de adelante y el de atrás cuando se considera la frontera del intervalo espacial.

En este caso hay que considerar los casos cuando $j = 0$ y cuando $j = J$ ya que, se considerarán las condiciones de borde, mencionadas anteriormente, para las variables U y d .

Si $j = 0$, para todo $n \geq 0$,

$$\begin{aligned}
d_0^{n+1} &= d_0^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} U_{1/2}^n [(1 + \epsilon)(d_0^n - d_{-1}^n) + (1 - \epsilon)(d_1^n - d_0^n)] \\
&\quad - \frac{\Delta t}{\Delta x} d_0^n [U_{1/2}^n - U_{-1/2}^n], \\
\Rightarrow d_0^{n+1} &= d_0^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} U_{1/2}^n [(1 + \epsilon)(d_0^n - d_0^n + \Delta x d_J^n) + (1 - \epsilon)(d_1^n - d_0^n)] \\
&\quad - \frac{\Delta t}{\Delta x} d_0^n [U_{1/2}^n - 2U(0, n) + U_{1/2}^n], \\
\Rightarrow d_0^{n+1} &= d_0^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} U_{1/2}^n [(1 + \epsilon)(\Delta x d_J^n) + (1 - \epsilon)(d_1^n - d_0^n)] - \frac{\Delta t}{\Delta x} d_0^n 2U_{1/2}^n \\
&\quad + \frac{\Delta t}{\Delta x} d_0^n 2U(0, n).
\end{aligned}$$

Si $j = J$, para todo $n \geq 0$,

$$\begin{aligned}
d_J^{n+1} &= d_J^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} U_{J+1/2}^n [(1 + \epsilon)(d_J^n - d_{J-1}^n) + (1 - \epsilon)(d_{J+1}^n - d_J^n)] \\
&\quad - \frac{\Delta t}{\Delta x} d_J^n [U_{J+1/2}^n - U_{J-1/2}^n], \\
\Rightarrow d_J^{n+1} &= d_J^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (2U(1, n) - U_{J-1/2}^n) [(1 + \epsilon)(d_J^n - d_{J-1}^n) + (1 - \epsilon) \\
&\quad (\Delta x d_0^n + d_J^n - d_J^n)] - \frac{\Delta t}{\Delta x} d_J^n [2U(1, n) - U_{J-1/2}^n - U_{J-1/2}^n], \\
\Rightarrow d_J^{n+1} &= d_J^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (2U(1, n) - U_{J-1/2}^n) [(1 + \epsilon)(d_J^n - d_{J-1}^n) + (1 - \epsilon)\Delta x d_0^n] \\
&\quad - \frac{\Delta t}{\Delta x} d_J^n (-2U_{J-1/2}^n) - \frac{\Delta t}{\Delta x} d_J^n 2U(1, n),
\end{aligned}$$

donde $\epsilon = \text{sign}(U_{1/2}^n)$ cuando $j = 0$ y $\epsilon = \text{sign}(2U(1, n) - U_{J-1/2}^n)$ si $j = J$.

Considerando la segunda ecuación:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g \frac{\partial d}{\partial x} = -g \frac{|U|U}{C^2 d},$$

al discretizarla, teniendo en cuenta que $j = 0, \dots, J - 1$, se tiene:

$$\begin{aligned}
U_{j+1/2}^{n+1} &= U_{j+1/2}^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} U_{j+1/2}^n [(1 + \epsilon)(U_{j+1/2}^n - U_{j-1/2}^n) + (1 - \epsilon)(U_{j+3/2}^n - U_{j+1/2}^n)] \\
&\quad - g \frac{\Delta t}{\Delta x} (d_{j+1}^n - d_j^n) - \Delta t \frac{g |U_{j+1/2}^n| U_{j+1/2}^n}{C^2 d_j^n}.
\end{aligned} \tag{4.23}$$

donde $\epsilon = \text{sign}(U_{j+1/2}^n)$.

De igual manera se deben estudiar los siguientes casos:

Si $j = 0$, para todo $n \geq 0$,

$$\begin{aligned}
U_{1/2}^{n+1} &= U_{1/2}^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} U_{1/2}^n [(1 + \epsilon)(U_{1/2}^n - U_{-1/2}^n) + (1 - \epsilon)(U_{3/2}^n - U_{1/2}^n)] \\
&\quad - g \frac{\Delta t}{\Delta x} (d_1^n - d_0^n) - \Delta t \frac{g|U_{1/2}^n|U_{1/2}^n}{C^2 d_0^n}, \\
\Rightarrow U_{1/2}^{n+1} &= U_{1/2}^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} U_{1/2}^n [(1 + \epsilon)(U_{1/2}^n - 2U(0, n) + U_{1/2}^n) + (1 - \epsilon) \\
&\quad (U_{3/2}^n - U_{1/2}^n)] - g \frac{\Delta t}{\Delta x} (d_1^n - d_0^n) - \Delta t \frac{g|U_{1/2}^n|U_{1/2}^n}{C^2 d_0^n}, \\
\Rightarrow U_{1/2}^{n+1} &= U_{1/2}^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} U_{1/2}^n [(1 + \epsilon)(2U_{1/2}^n) + (1 - \epsilon)(U_{3/2}^n - U_{1/2}^n)] - \\
&\quad g \frac{\Delta t}{\Delta x} (d_1^n - d_0^n) - \Delta t \frac{g|U_{1/2}^n|U_{1/2}^n}{C^2 d_0^n} + \frac{\Delta t}{2\Delta x} U_{1/2}^n (1 + \epsilon) 2U(0, n).
\end{aligned}$$

Si $j = J - 1$, para todo $n \geq 0$,

$$\begin{aligned}
U_{J-1/2}^{n+1} &= U_{J-1/2}^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} U_{J-1/2}^n [(1 + \epsilon)(U_{J-1/2}^n - U_{J-3/2}^n) + (1 - \epsilon) \\
&\quad (U_{J+1/2}^n - U_{J-1/2}^n)] - g \frac{\Delta t}{\Delta x} (d_J^n - d_{J-1}^n) - \mathcal{T}_J, \\
\Rightarrow U_{J-1/2}^{n+1} &= U_{J-1/2}^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} U_{J-1/2}^n [(1 + \epsilon)(U_{J-1/2}^n - U_{J-3/2}^n) + (1 - \epsilon) \\
&\quad (2U(1, n) - U_{J-1/2}^n - U_{J-1/2}^n)] - g \frac{\Delta t}{\Delta x} (d_J^n - d_{J-1}^n) - \mathcal{T}_J, \\
\Rightarrow U_{J-1/2}^{n+1} &= U_{J-1/2}^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} U_{J-1/2}^n [(1 + \epsilon)(U_{J-1/2}^n - U_{J-3/2}^n) + (1 - \epsilon) \\
&\quad (-2U_{J-1/2}^n)] - g \frac{\Delta t}{\Delta x} (d_J^n - d_{J-1}^n) - \mathcal{T}_J - \frac{\Delta t}{2\Delta x} U_{J-1/2}^n (1 - \epsilon) 2U(1, n),
\end{aligned}$$

con $\mathcal{T}_J = \Delta t \frac{g|U_{J-1/2}^n|U_{J-1/2}^n}{C^2 d_{J-1}^n}$.

El sistema a resolver es de la forma:

$$\begin{aligned}
d^{n+1} &= d^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} v_1 M_2 d^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} v_2 M_3 d^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} v_3 M_4 U^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} v_4, \\
U^{n+1} &= U^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} v_5 M_6 U^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} v_6 M_7 U^n - g \frac{g}{C^2} |v_7| v_8 U^n + \frac{\Delta t}{2\Delta x} v_9
\end{aligned} \tag{4.24}$$

donde:

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & \Delta x \\ -1 & 1 & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \dots \\ 0 & \dots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix}_{(J+1) \times (J+1)},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -1 & 1 & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \ddots & \ddots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & -1 & 1 \\ \Delta x & 0 & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}_{(J+1) \times (J+1)},$$

$$M_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \dots & \dots \\ -1 & 1 & \dots & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \dots \\ 0 & \dots & -1 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & -2 \end{pmatrix}_{(J+1) \times J}, \quad M_6 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \dots & \dots \\ -1 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix}_{J \times J},$$

$$M_7 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & \dots & \dots \\ 0 & -1 & 1 & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -1 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & -2 \end{pmatrix}_{J \times J}, \quad M_8 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -1 & -1 & 0 & \dots \\ 0 & \dots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix}_{J \times (J+1)},$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} U_{1/2}^n(1 + \text{sign}(U_{1/2}^n)) & 0 & \dots & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \dots \\ 0 & \dots & U_{J-1/2}^n(1 + \text{sign}(U_{J-1/2}^n)) & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \kappa \end{pmatrix}_{(J+1) \times (J+1)},$$

donde $\kappa = |2U(1, n) - U_{J-1/2}^n|(1 + \text{sign}(2U(1, n) - U_{J-1/2}^n))$

$$v_2 = \begin{pmatrix} U_{1/2}^n(1 - \text{sign}(U_{1/2}^n)) & 0 & \dots & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \dots \\ 0 & \dots & U_{J-1/2}^n(1 - \text{sign}(U_{J-1/2}^n)) & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \tilde{\kappa} \end{pmatrix}_{(J+1) \times (J+1)},$$

donde $\tilde{\kappa} = |2U(1, n) - U_{J-1/2}^n|(1 - \text{sign}(2U(1, n) - U_{J-1/2}^n))$

$$v_3 = \begin{pmatrix} d_0^n & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & d_1^n & 0 & \dots & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & d_{J-1}^n & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & d_J^n \end{pmatrix}_{(J+1) \times (J+1)}, v_4 = \begin{pmatrix} d_0^n 2U(0, n) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -d_J^n 2U(1, n) \end{pmatrix}_{(J+1) \times 1},$$

$$v_5 = \begin{pmatrix} U_{1/2}^n(1 + \text{sign}(U_{1/2}^n)) & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & U_{J-1/2}^n(1 + \text{sign}(U_{J-1/2}^n)) \end{pmatrix}_{J \times J},$$

$$v_6 = \begin{pmatrix} U_{1/2}^n(1 - \text{sign}(U_{1/2}^n)) & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & U_{J-1/2}^n(1 - \text{sign}(U_{J-1/2}^n)) \end{pmatrix}_{J \times J},$$

$$v_7 = \begin{pmatrix} U_{1/2}^n & 0 & \dots & \dots \\ 0 & U_{3/2}^n & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & U_{J-1/2}^n \end{pmatrix}_{J \times J},$$

$$v_8 = \begin{pmatrix} 1/d_0^n & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 1/d_1^n & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 1/d_{J-1}^n \end{pmatrix}_{J \times J},$$

$$v_9 = \begin{pmatrix} U_{1/2}^n (1 + \text{sign}(U_{1/2}^n)) 2U(0, n) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ U_{J-1/2}^n (1 + \text{sign}(U_{J-1/2}^n)) 2U(1, n) \end{pmatrix}_{(J+1) \times 1} .$$

A continuación se muestra el resultado del problema, en el instante $T = 1$.

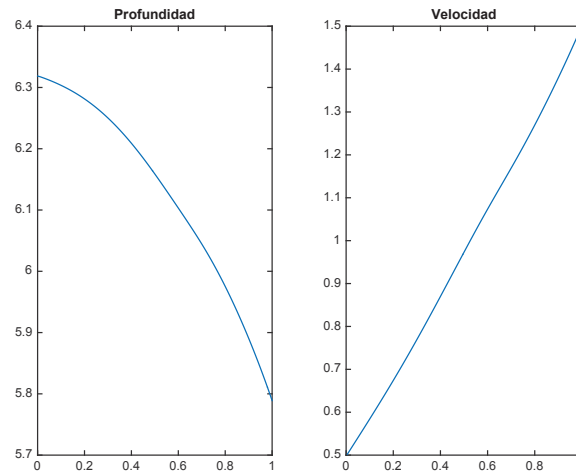


Figura 4.10: Ecuaciones de Shallow-Water resueltas con método Euler Explícito y considerando el esquema upwind

El gráfico presentado a continuación muestra la evolución de la aproximación de la solución en el intervalo de tiempo $[0, 1]$.

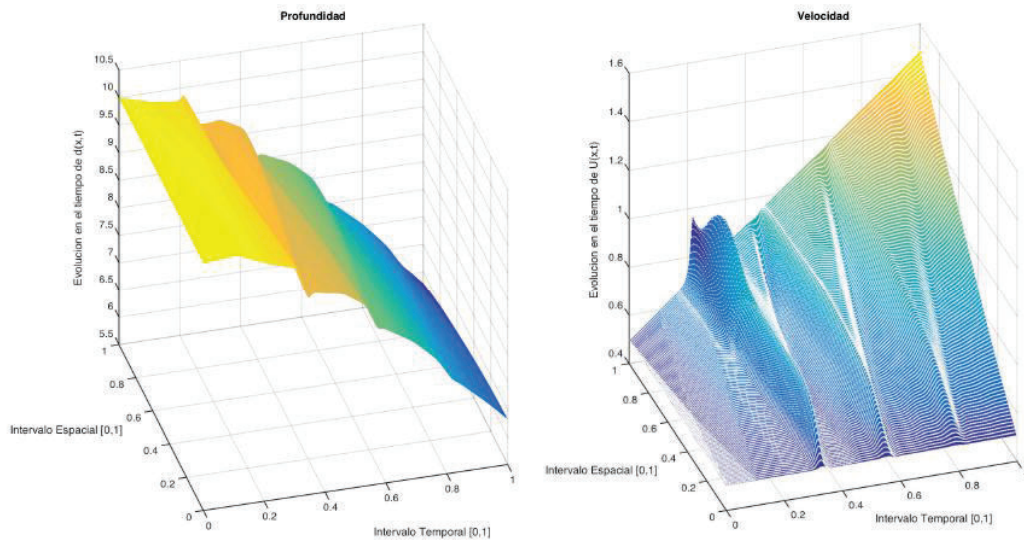


Figura 4.11: Evolución de la aproximación de la solución en el intervalo de tiempo $[0, 1]$ con $\Delta t = 0,001$, $\Delta x = 0,01$

Si se disminuye el valor de $\Delta x = 0,0099$ y el valor de Δt permanece fijo se obtiene el siguiente resultado en el instante $T = 1$:

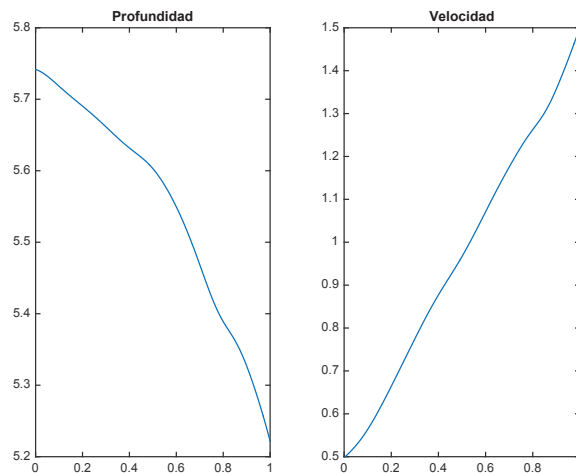


Figura 4.12: Ecuaciones de Shallow-Water resueltas con método Euler Explícito y considerando el esquema upwind

En el gráfico siguiente se muestra la evolución de la aproximación de la solución.

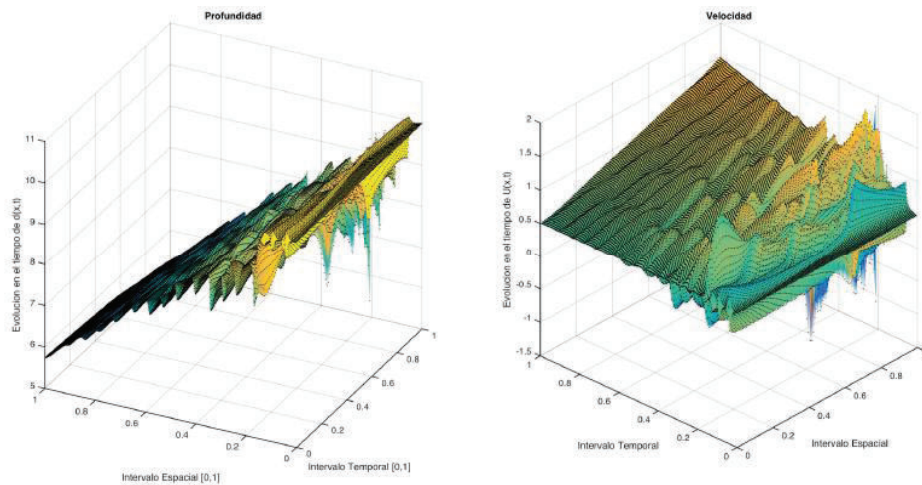


Figura 4.13: Evolución de la aproximación de la solución en el intervalo de tiempo $[0, 1]$ con $\Delta t = 0,001$, $\Delta x = 0,0099$

Finalmente si se toma el valor de $\Delta x = 0,01$, con Δt fijo pero se considera como intervalo temporal $[0, 3]$ no se presenta ningún resultado dado que el método no es absolutamente estable. Esto se puede ver en el siguiente gráfico de evolución de la aproximación considerando estos parámetros.

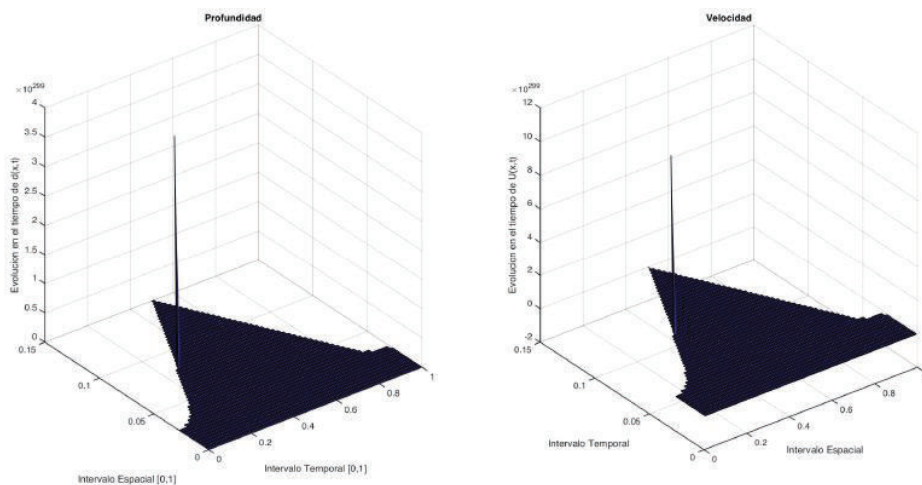


Figura 4.14: Evolución de la aproximación de la solución en el intervalo de tiempo $[0, 3]$ con $\Delta t = 0,001$, $\Delta x = 0,009$

En la figura 4.11 se puede apreciar que el método no es estable, ya que en ciertos instantes de tiempo la aproximación numérica oscila. Al centrar la atención en la figura 4.13 se notan muchas más oscilaciones, dado que el método no es absolutamente estable, sin embargo en el gráfico 4.12 se obtiene una solución similar, aunque

con ciertas oscilaciones, al obtenido en el gráfico 4.10 que considerando $\Delta x = 0,01$. Esto sucede ya que el método no es absolutamente estable.

En la figura 4.14 se toma como longitud del intervalo temporal 3 segundos, para así observar el comportamiento del método si este intervalo crece. Lo que se obtuvo fue una inestabilidad del método a pesar de solucionarlo con parámetros Δt y Δx que entregaban una solución factible.

El método es inestable ya que la condición de estabilidad CFL no se cumple, en este caso se considera la definición para resolver sistemas de leyes de conservación hiperbólicas.

4.2.2. Método de Euler Semi-Implícito, aplicando el esquema upwind

El problema (4.21) será resuelto con una familia de parámetros, donde se encuentran los considerados para la resolución explícita. Ya que este es un método implícito, se debe recordar que es un método absolutamente estable.

Al tomar la primera ecuación del problema (4.21) y discretizarla, tomando $j = 0, \dots, J$, se tiene:

$$d_j^{n+1} + \frac{\Delta t}{2\Delta x} U_{j+1/2}^n [(1 + \epsilon)(d_j^{n+1} - d_{j-1}^{n+1}) + (1 - \epsilon)(d_{j+1}^{n+1} - d_j^{n+1})] \quad (4.25) \\ + \frac{\Delta t}{\Delta x} d_j^n [U_{j+1/2}^{n+1} - U_{j-1/2}^{n+1}] = d_j^n.$$

donde $\epsilon = \text{sign}(U_{j+1/2}^n)$.

Examinando los casos cuando $j = 0$ y cuando $j = J$ se deberán considerar las mismas condiciones de borde utilizadas para el método Euler explícito para las variables U y d .

Si $j = 0$, para todo $n \geq 0$,

$$\begin{aligned}
& d_0^{n+1} + \frac{\Delta t}{2\Delta x} U_{1/2}^n [(1 + \epsilon)(d_0^{n+1} - d_{-1}^{n+1}) + (1 - \epsilon)(d_1^{n+1} - d_0^{n+1})] \\
& \quad + \frac{\Delta t}{\Delta x} d_0^n [U_{1/2}^{n+1} - U_{-1/2}^{n+1}] = d_0^n, \\
\Rightarrow & d_0^{n+1} + \frac{\Delta t}{2\Delta x} U_{1/2}^n [(1 + \epsilon)(d_0^{n+1} - d_0^{n+1} + \Delta x d_J^{n+1}) + (1 - \epsilon)(d_1^{n+1} - d_0^{n+1})] \\
& \quad + \frac{\Delta t}{\Delta x} d_0^n [U_{1/2}^{n+1} - 2U(0, n + 1) + U_{1/2}^{n+1}] = d_0^n, \\
\Rightarrow & d_0^{n+1} + \frac{\Delta t}{2\Delta x} U_{1/2}^n [(1 + \epsilon)(\Delta x d_J^{n+1}) + (1 - \epsilon)(d_1^{n+1} - d_0^{n+1})] + \frac{\Delta t}{\Delta x} d_0^n 2U_{1/2}^{n+1} \\
& \quad = d_0^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} d_0^n 2U(0, n + 1).
\end{aligned}$$

Si $j = J$, para todo $n \geq 0$,

$$\begin{aligned}
& d_J^{n+1} + \frac{\Delta t}{2\Delta x} U_{J+1/2}^n [(1 + \epsilon)(d_J^{n+1} - d_{J-1}^{n+1}) + (1 - \epsilon)(d_{J+1}^{n+1} - d_J^{n+1})] \\
& \quad + \frac{\Delta t}{\Delta x} d_J^n [U_{J+1/2}^{n+1} - U_{J-1/2}^{n+1}] = d_J^n, \\
\Rightarrow & d_J^{n+1} + \frac{\Delta t}{2\Delta x} (2U(1, n) - U_{J-1/2}^n) [(1 + \epsilon)(d_J^{n+1} - d_{J-1}^{n+1}) + (1 - \epsilon) \\
& (\Delta x d_0^{n+1} + d_J^{n+1} - d_J^{n+1})] + \frac{\Delta t}{\Delta x} d_J^n [2U(1, n + 1) - U_{J-1/2}^{n+1} - U_{J-1/2}^{n+1}] = d_J^n, \\
\Rightarrow & d_J^{n+1} + \frac{\Delta t}{2\Delta x} (2U(1, n) - U_{J-1/2}^n) [(1 + \epsilon)(d_J^{n+1} - d_{J-1}^{n+1}) + (1 - \epsilon)\Delta x d_0^{n+1}] \\
& \quad + \frac{\Delta t}{\Delta x} d_J^n (-2U_{J-1/2}^{n+1}) = d_J^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} d_J^n 2U(1, n + 1),
\end{aligned}$$

donde $\epsilon = \text{sign}(U_{1/2}^n)$ cuando $j = 0$ y $\epsilon = \text{sign}(2U(1, n) - U_{J-1/2}^n)$.

Discretizando la segunda ecuación, cuando $j = 0, \dots, J - 1$, se tiene:

$$\begin{aligned}
& U_{j+1/2}^{n+1} + \frac{\Delta t}{2\Delta x} U_{j+1/2}^n [(1 + \epsilon)(U_{j+1/2}^{n+1} - U_{j-1/2}^{n+1}) + (1 - \epsilon) \\
& (U_{j+3/2}^{n+1} - U_{j+1/2}^{n+1})] + g \frac{\Delta t}{\Delta x} (d_{j+1}^{n+1} - d_j^{n+1}) = U_{j+1/2}^n - \Delta t \frac{g |U_{j+1/2}^n| U_{j+1/2}^n}{C^2 d_j^n}.
\end{aligned} \tag{4.26}$$

donde $\epsilon = \text{sign}(U_{j+1/2}^n)$.

En el esquema (4.26) los casos que se deben tener en cuenta, por su tratamiento particular, serán cuando $j = 0$ y $j = J - 1$ debido a que es necesario utilizar las condiciones de borde para las dos variables.

Si $j = 0$, para todo $n \geq 0$,

$$\begin{aligned}
& U_{1/2}^{n+1} + \frac{\Delta t}{2\Delta x} U_{1/2}^n [(1 + \epsilon)(U_{1/2}^{n+1} - U_{-1/2}^{n+1}) + (1 - \epsilon) \\
& (U_{3/2}^{n+1} - U_{1/2}^{n+1})] + g \frac{\Delta t}{\Delta x} (d_1^n - d_0^n) = U_{1/2}^n - \Delta t \frac{g|U_{1/2}^n|U_{1/2}^n}{C^2 d_0^n}, \\
\Rightarrow & U_{1/2}^{n+1} + \frac{\Delta t}{2\Delta x} U_{1/2}^n [(1 + \epsilon)(U_{1/2}^{n+1} - 2U(0, n + 1) + U_{1/2}^{n+1}) + (1 - \epsilon) \\
& (U_{3/2}^{n+1} - U_{1/2}^{n+1})] + g \frac{\Delta t}{\Delta x} (d_1^{n+1} - d_0^{n+1}) = U_{1/2}^n - \Delta t \frac{g|U_{1/2}^n|U_{1/2}^n}{C^2 d_0^n}, \\
\Rightarrow & U_{1/2}^{n+1} + \frac{\Delta t}{2\Delta x} U_{1/2}^n [(1 + \epsilon)(2U_{1/2}^{n+1}) + (1 - \epsilon)(U_{3/2}^{n+1} - U_{1/2}^{n+1})] \\
& + g \frac{\Delta t}{\Delta x} (d_1^{n+1} - d_0^{n+1}) = U_{1/2}^n - \Delta t \frac{g|U_{1/2}^n|U_{1/2}^n}{C^2 d_0^n} + \frac{\Delta t}{2\Delta x} U_{1/2}^n (1 + \epsilon) 2U(0, n).
\end{aligned}$$

Si $j = J - 1$, para todo $n \geq 0$,

$$\begin{aligned}
& U_{J-1/2}^{n+1} + \frac{\Delta t}{2\Delta x} U_{J-1/2}^n [(1 + \epsilon)(U_{J-1/2}^{n+1} - U_{J-3/2}^{n+1}) + (1 - \epsilon) \\
& (U_{J+1/2}^{n+1} - U_{J-1/2}^{n+1})] + g \frac{\Delta t}{\Delta x} (d_J^{n+1} - d_{J-1}^{n+1}) = U_{J-1/2}^n - \mathcal{T}_{J-1}, \\
\Rightarrow & U_{J-1/2}^{n+1} + \frac{\Delta t}{2\Delta x} U_{J-1/2}^n [(1 + \epsilon)(U_{J-1/2}^{n+1} - U_{J-3/2}^{n+1}) + (1 - \epsilon) \\
& (2U(1, n + 1) - U_{J-1/2}^{n+1} - U_{J-1/2}^{n+1})] + g \frac{\Delta t}{\Delta x} (d_J^{n+1} - d_{J-1}^{n+1}) = U_{J-1/2}^n - \mathcal{T}_{J-1}, \\
\Rightarrow & U_{J-1/2}^{n+1} + \frac{\Delta t}{2\Delta x} U_{J-1/2}^n [(1 + \epsilon)(U_{J-1/2}^{n+1} - U_{J-3/2}^{n+1}) + (1 - \epsilon)(-2U_{J-1/2}^{n+1})] \\
& + g \frac{\Delta t}{\Delta x} (d_J^{n+1} - d_{J-1}^{n+1}) = U_{J-1/2}^n - \mathcal{T}_{J-1} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} U_{J-1/2}^n (1 - \epsilon) 2U(1, n),
\end{aligned}$$

$$\text{con } \mathcal{T}_{J-1} = \Delta t \frac{g|U_{J-1/2}^n|U_{J-1/2}^n}{C^2 d_{J-1}^n}$$

El sistema a resolver será:

$$\begin{aligned}
& I_d d^{n+1} + \frac{\Delta t}{2\Delta x} v_1 M_2 d^{n+1} + \frac{\Delta t}{2\Delta x} v_2 M_3 d^{n+1} + \frac{\Delta t}{\Delta x} v_3 M_4 U^{n+1} = \quad (4.27) \\
& \quad \quad \quad d^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} v_4, \\
\Rightarrow & I_U U^{n+1} + \frac{\Delta t}{2\Delta x} v_5 M_6 U^{n+1} + \frac{\Delta t}{2\Delta x} v_6 M_7 U^{n+1} + g \frac{\Delta t}{\Delta x} M_8 d^{n+1} = U^n - \\
& \quad \quad \quad \frac{g\Delta t}{C^2} |v_7| v_8 U^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} v_9,
\end{aligned}$$

donde las matrices $M_2, M_3, M_4, M_6, M_7, M_8, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8$ y v_9 tienen

la misma estructura que se mostró en el método Explícito, mientras que I_d tiene dimensión $(J + 1) \times (J + 1)$ y la matriz I_U tiene dimensión $J \times J$.

Se puede ver que el esquema (4.27) requiere resolver un problema no lineal, por lo tanto se debe utilizar el método de Newton de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} d^{n+1} \\ U^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d^n \\ U^n \end{pmatrix} + \delta_x,$$

donde δ_x se lo calcula al resolver el sistema lineal de la siguiente manera:

$$(W\delta_x = -F(d^n, U^n))$$

y la función $F(d^n, U^n)$ es de la forma:

$$F(d, U) = \begin{cases} I_d d + \frac{\Delta t}{\Delta x} v_1 M_2 d + \frac{\Delta t}{\Delta x} v_2 M_3 U - d_0 - \frac{\Delta t}{\Delta x} v_3 \\ I_U U + \frac{\Delta t}{\Delta x} v_4 M_5 U + g \frac{\Delta t}{\Delta x} M_6 d - U_0 - \frac{\Delta t}{\Delta x} v_6 + \frac{g \Delta t}{C^2} |v_4| v_5 U_0 \end{cases} \quad (4.28)$$

donde U_0 y d_0 es el valor de las variables U y d en la iteración de newton anterior. La matriz W calcula el paso de método y se describe de la forma:

$$W = \begin{bmatrix} I_d + \frac{\Delta t}{\Delta x} v_1 M_2 & \frac{\Delta t}{\Delta x} v_2 M_3 \\ g \frac{\Delta t}{\Delta x} M_6 & I_U + \frac{\Delta t}{\Delta x} v_4 M_5 \end{bmatrix}. \quad (4.29)$$

El resultado, en el instante $T = 1$, mostrado a continuación toma los parámetros del método anterior, es decir, $N = 1000$ y $J = 100$.

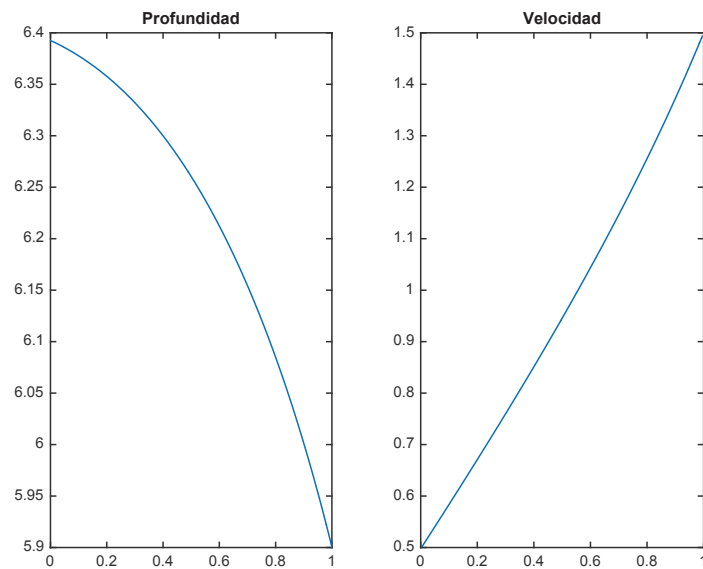


Figura 4.15: Ecuaciones de Shallow-Water resueltas con método Euler Semi-Implicito y considerando el esquema upwind (Tomando $N = 1000$ y $J = 100$)

El gráfico presentado a continuación muestra la evolución de la aproximación de la solución en el intervalo de tiempo $[0, 1]$.

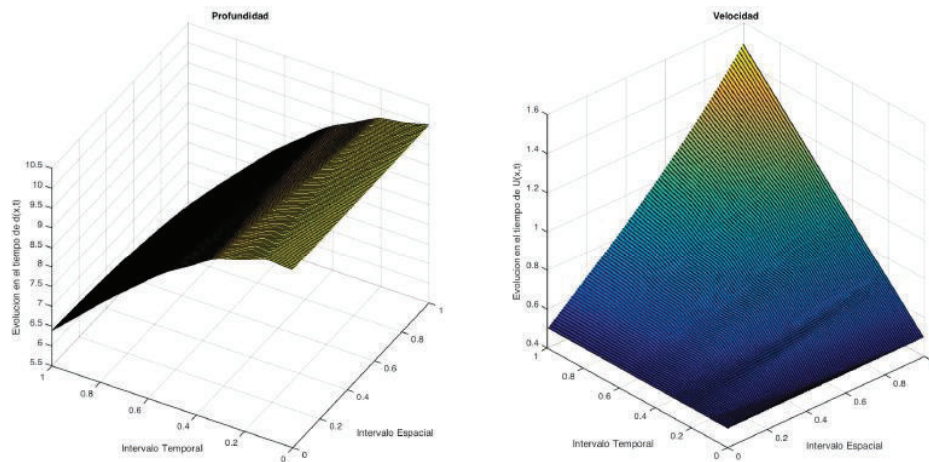


Figura 4.16: Evolución de la aproximación de la solución en el intervalo de tiempo $[0, 1]$ con $\Delta t = 0,001$, $\Delta x = 0,01$

En la figura 4.16 se puede apreciar que el método es estable a lo largo del tiempo, ya que no se presentan oscilaciones.

Considerando otra pareja de parámetros tales que $N = 1000$ y $J = 1000$ el resul-

tado obtenido es:

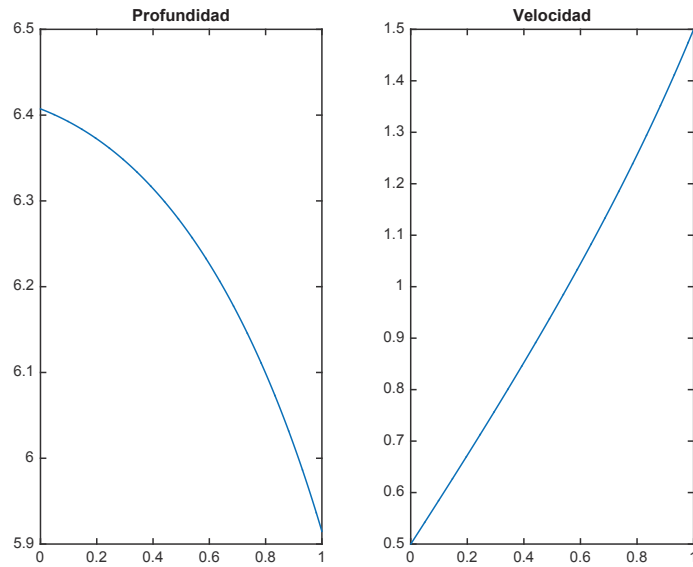


Figura 4.17: Ecuaciones de Shallow-Water resueltas con método Euler Semi-Implicito y considerando el esquema upwind (Tomando $N = 1000$ y $J = 1000$)

A continuación se muestra la evolución de la aproximación en el intervalo de tiempo $[0, 1]$.

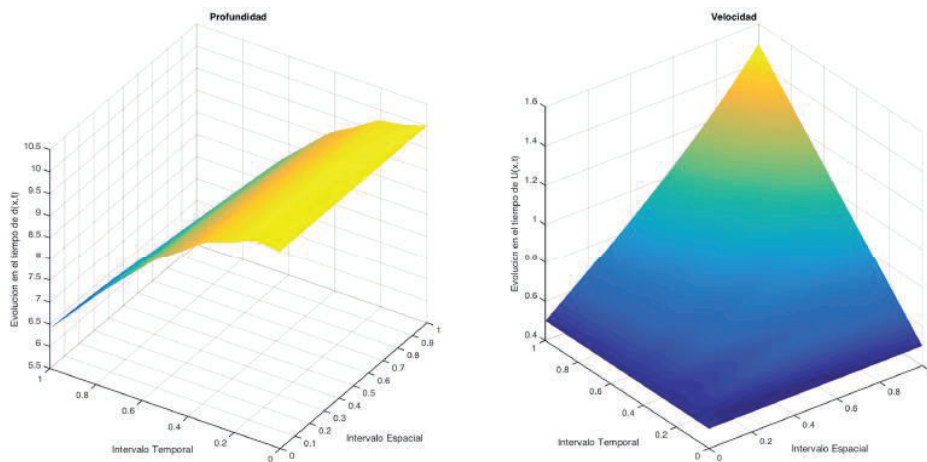


Figura 4.18: Evolución de la aproximación de la solución en el intervalo de tiempo $[0, 1]$ con $\Delta t = 0,001$, $\Delta x = 0,001$

Se puede observar que en la figura 4.18 no se presentan oscilaciones en el intervalo de tiempo.

El gráfico presentado a continuación muestra el número de iteraciones que ejecuta el método de Newton en cada iteración temporal considerando los parámetros $\Delta t = 0,001$ y $\Delta x = 0,001$:

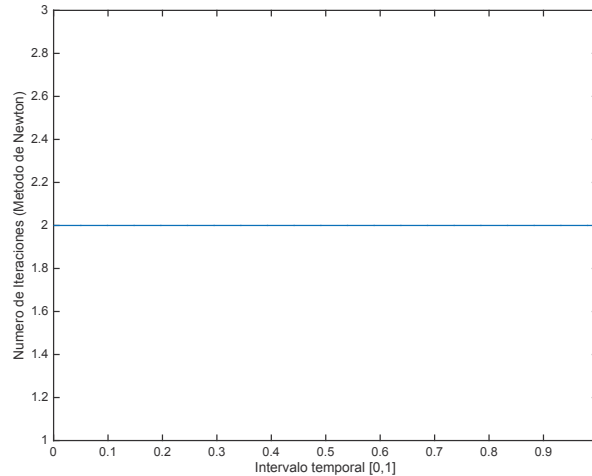


Figura 4.19: Número de iteraciones del método de Newton en cada iteración temporal

Como se puede observar en cada iteración temporal se necesitaron de 2 iteraciones del método de Newton.

A simple vista parece que las variables velocidad y profundidad en los gráficos 4.15 y 4.17 son iguales, sin embargo para realizar la verificación e identificar cual de estos métodos resuelve el sistema de mejor manera se utilizará, en las siguientes secciones, una función test construída analíticamente.

4.2.3. Método de Euler Semi-Implicito, aplicando el esquema semi-lagrangiano

Como se mencionó anteriormente el esquema semi-lagrangiano es conservativo al discretizar términos advectiones. Por ese motivo el término no advectiones se lo discretizará mediante diferencia hacia atrás. Además considerando las variaciones presentadas en la sección anterior, se tendrá que los términos no advectiones discretizados junto con el término de la derivada temporal se resolverá el esquema semi-implicito, mientras que para los términos advectiones se tendrá el esquema explícito.

Haciendo referencia al problema (4.21), al discretizarlo se tiene:

$$\begin{aligned}
d_j^{n+1} + d_j^n \frac{\Delta t}{\Delta x} (U_{j+1/2}^{n+1} - U_{j-1/2}^{n+1}) &= d_j^n \quad (4.30) \\
&+ \frac{\Delta t}{\delta} [d^n(x_j - \delta U_{j+1/2}^n) - d_j^n] \\
\Rightarrow U_{j+1/2}^{n+1} + g \frac{\Delta t}{\Delta x} (d_{j+1}^{n+1} - d_j^{n+1}) &= U_{j+1/2}^n + \frac{\Delta t}{\delta} [U^n(x_{j+1/2} + \delta U_{j+1/2}^n) \\
&- U_{j+1/2}^n] - \frac{g \Delta t}{C^2} \frac{|U_{j+1/2}^n| U_{j+1/2}^n}{d_j^n}.
\end{aligned}$$

Para la primera ecuación del problema (4.21) el contador j toma valores entre 0 y J , por lo tanto debido a la estructura del esquema de discretización se presentan problemas en los valores extremos. Es por ello que, en esos puntos se debe realizar ciertas variaciones al momento de generar las matrices para resolver el problema.

La idea principal para resolver el sistema utilizando el esquema semi-lagrangiano es utilizar una función de interpolación. Para resolver las ecuaciones de Shallow-Water en una dimensión se utilizará la interpolación lineal. Cabe mencionar que se podría utilizar cualquier función de interpolación, sin embargo por facilidad se escogió la interpolación lineal.

Si $j = 0$, para todo $n \geq 0$,

$$\begin{aligned}
d_0^{n+1} + d_0^n \frac{\Delta t}{\Delta x} (U_{1/2}^{n+1} - U_{-1/2}^{n+1}) &= d_0^n + \frac{\Delta t}{\delta} [d^n(x_0 - \Delta t U_{1/2}^n) - d_0^n] \\
\Rightarrow d_0^{n+1} + d_0^n \frac{\Delta t}{\Delta x} (U_{1/2}^{n+1} - 2U(0, n+1) + U_{1/2}^{n+1}) &= d_0^n + \\
&\frac{\Delta t}{\delta} [d^n(x_0 - \delta U_{1/2}^n) - d_0^n] \\
\Rightarrow d_0^{n+1} + d_0^n \frac{\Delta t}{\Delta x} (2U_{1/2}^{n+1}) &= d_0^n + \frac{\Delta t}{\delta} [d^n(x_0 - \Delta t U_{1/2}^n) - d_0^n] \\
&+ d_0^n \frac{\Delta t}{\Delta x} 2U(0, n+1)
\end{aligned}$$

donde la función de interpolación $d^n(\cdot)$, si $U_{1/2}^n > 0$ o $U_{1/2}^n < 0$ interpolará entre los puntos $[(x_{-1}, d_{-1}^n); (x_0, d_0^n)]$ o $[x_0, d_0^n]; (x_1, d_1^n)]$ respectivamente.

En el caso donde $U_{1/2}^n > 0$ uno los puntos entre los cuales se debe interpolar es (x_{-1}, d_{-1}^n) . Para encontrar el valor de d_{-1}^n se utilizará la condición de borde (4.4).

Si $j = J$, para todo $n \geq 0$,

$$\begin{aligned}
d_J^{n+1} + d_J^n \frac{\Delta t}{\Delta x} (U_{J+1/2}^{n+1} - U_{J-1/2}^{n+1}) &= d_J^n + \frac{\Delta t}{\delta} [d^n(x_J - \delta U_{J+1/2}^n) \\
&\quad - d_J^n] \\
\Rightarrow d_J^{n+1} + d_J^n \frac{\Delta t}{\Delta x} (2U(1, n+1) - U_{J-1/2}^{n+1} - U_{J+1/2}^{n+1}) &= d_J^n \\
&\quad + \frac{\Delta t}{\delta} [d^n(x_J - \delta U_{J+1/2}^n) - d_J^n] \\
\Rightarrow d_J^{n+1} + d_J^n \frac{\Delta t}{\Delta x} (-2U_{J-1/2}^{n+1}) &= d_J^n + \frac{\Delta t}{\delta} [d^n(x_J - \Delta t U_{J+1/2}^n) - d_J^n] + \\
&\quad d_J^n \frac{\Delta t}{\Delta x} (-2U(1, n+1)),
\end{aligned}$$

donde la función de interpolación $d^n(\cdot)$, si $U_{J+1/2}^n > 0$ o $U_{J+1/2}^n < 0$ interpolará entre los puntos $[(x_{J-1}, d_{J-1}^n); (x_J, d_J^n)]$ o $[(x_J, d_J^n); (x_{J+1}, d_{J+1}^n)]$ respectivamente.

Ahora al tomar el caso $U_{J+1/2}^n < 0$, uno de los puntos en los que se debe interpolar es (x_{J+1}, d_{J+1}^n) , el valor de d_{J+1}^n se lo encuentra mediante la condición de borde (4.4). Pero el punto $U_{J+1/2}^n$ es el punto ficticio para la variable U y se lo encuentra con la condición de borde (4.3), entonces se tiene que $U_{J+1/2}^n = 2U(1, n) - U_{J-1/2}^n$.

Para la segunda ecuación del problema (4.21) el contador j toma valores entre 0 y $J - 1$. Por lo tanto debido a la estructura del esquema de discretización nuevamente se presentan problemas en los valores extremos. Es por esto que las matrices para resolver el problema presentarán algunas variaciones.

Si $j = 0$, para todo $n \geq 0$,

$$\begin{aligned}
U_{1/2}^{n+1} + g \frac{\Delta t}{\Delta x} (d_1^{n+1} - d_0^{n+1}) &= U_{1/2}^n + \frac{\Delta t}{\delta} [U^n(x_{1/2} + \delta U_{1/2}^n) - U_{1/2}^n] \\
&\quad - \frac{g \Delta t}{C^2} \frac{|U_{1/2}^n| U_{1/2}^n}{d_0^n},
\end{aligned}$$

donde la función de interpolación $U^n(\cdot)$, si $U_{1/2}^n > 0$ o $U_{1/2}^n < 0$ interpolará entre los puntos $[(x_{-1/2}, U_{-1/2}^n); (x_{1/2}, U_{1/2}^n)]$ o $[(x_{1/2}, U_{1/2}^n); (x_{3/2}, U_{3/2}^n)]$, respectivamente. El punto $U_{-1/2}^n$ se lo encontrará con las ecuaciones de borde (4.3), donde su valor es $U_{-1/2}^n = 2U(0, n) - U_{1/2}^n$.

Si $j = J - 1$,

$$U_{J-1/2}^{n+1} + g \frac{\Delta t}{\Delta x} (d_J^{n+1} - d_{J-1}^{n+1}) = U_{J-1/2}^n + \frac{\Delta t}{\delta} [U^n(x_{J-1/2} + \Delta t U_{J-1/2}^n) - U_{J-1/2}^n] - \frac{g \Delta t}{C^2} \frac{|U_{J-1/2}^n| U_{J-1/2}^n}{d_{J-1}^n}.$$

En este caso la función de interpolación $U^n(\cdot)$, si $U_{J-1/2}^n > 0$ o $U_{J-1/2}^n < 0$ interpolará entre los puntos :

- $[(x_{J-3/2}, U_{J-3/2}^n); (x_{J-1/2}, U_{J-1/2}^n)]$ o,
- $[(x_{J-1/2}, U_{J-1/2}^n); (x_{J+1/2}, U_{J+1/2}^n)]$,

respectivamente. El punto $U_{J+1/2}^n$ es igual a $2U(1, n) - U_{J-1/2}^n$, por las condiciones de borde (4.3).

El sistema a resolver es:

$$\begin{aligned} I_d d^{n+1} + \frac{\Delta t}{\Delta x} v_1 M_2 U^{n+1} &= d^n + \frac{\Delta t}{\delta} \mathfrak{I} \mathfrak{N} \mathfrak{I}_1 + v_2 \\ I_U U^{n+1} + \frac{\Delta t}{\Delta x} g M_4 d^{n+1} &= U^n \frac{\Delta t}{\delta} \mathfrak{I} \mathfrak{N} \mathfrak{I}_2 + \frac{g \Delta t}{C^2} v_3 v_4 U^n \end{aligned} \quad (4.31)$$

donde las matrices son de la forma:

$$M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \dots & \dots \\ -1 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & -2 \end{pmatrix}_{(J+1) \times J}, \quad M_4 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots & -1 & 1 & 0 \\ \vdots & 0 & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix}_{J \times J},$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} d_0^n & 0 & \dots & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & d_{J-1}^n & 0 \\ 0 & \dots & \dots & d_J^n \end{pmatrix}_{(J+1) \times (J+1)}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} d_0^n \frac{\Delta t}{\Delta x} 2U(0, n+1) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ d_J^n \frac{\Delta t}{\Delta x} (-2U(1, n+1)) \end{pmatrix}_{(J+1) \times 1},$$

$$v_3 = \begin{pmatrix} U_{1/2}^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & U_{3/2}^n & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \dots & \dots & U_{J-1/2}^n \end{pmatrix}_{J \times J},$$

$$v_4 = \begin{pmatrix} 1/d_0^n & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 1/d_1^n & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1/d_{J-1}^n \end{pmatrix}_{J \times J},$$

$$\mathfrak{M}\mathfrak{T}_1 = \begin{pmatrix} d^n(x_0 - \delta U_{1/2}^n) \\ d^n(x_1 - \delta U_{3/2}^n) \\ \vdots d^n(x_{J-1} - \delta U_{J-1/2}^n) \\ d^n(x_J - \delta U_{J+1/2}^n) \end{pmatrix}_{(J+1) \times 1},$$

$$\mathfrak{M}\mathfrak{T}_2 = \begin{pmatrix} U^n(x_{1/2} + \delta U_{1/2}^n) \\ U^n(x_{3/2} + \delta U_{3/2}^n) \\ \vdots \\ U^n(x_{J-3/2} + \delta U_{J-3/2}^n) \\ U^n(x_{J-1/2} + \delta U_{J-1/2}^n) \end{pmatrix}_{J \times 1}.$$

Además, I_d tiene dimensión $(J + 1) \times (J + 1)$ y I_U tiene dimensión $J \times J$.

El resultado, obtenido en el instante $T = 1$, que se muestra a continuación se obtuvo tomando los parámetros $N = 1000$, $J = 100$ y $\delta = 0,001$:

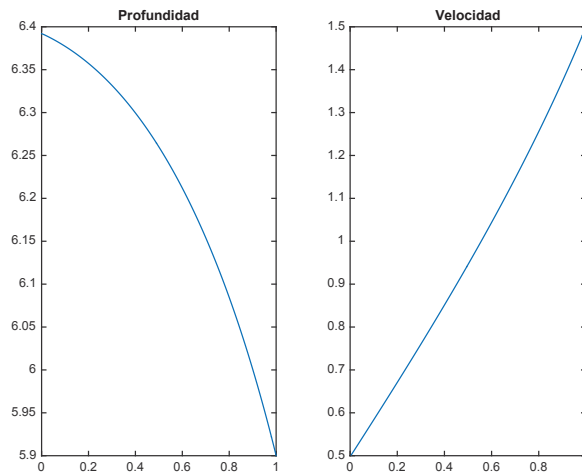


Figura 4.20: Resultado Método Semi-Implícito, utilizando esquema semi-lagrangiano con $\Delta t = 0,001$, $\Delta x = 0,01$ y $\delta = 0,001$

a continuación se presenta la evolución de la solución aproximada a lo largo del intervalo de tiempo $[0, 1]$.

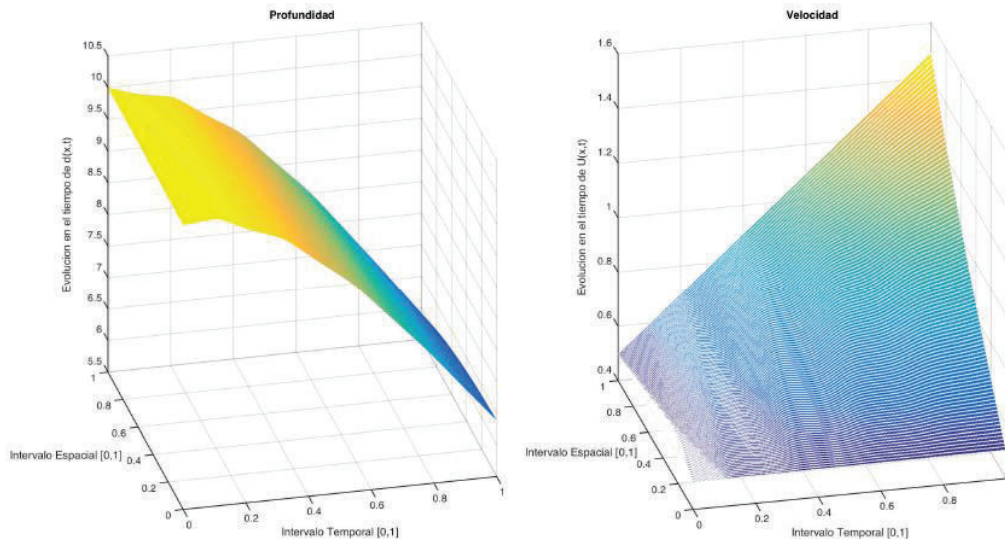


Figura 4.21: Evolución de la aproximación de la solución en el intervalo de tiempo $[0, 1]$ con $\Delta t = 0,001$, $\Delta x = 0,01$ y $\delta = 0,001$

Ahora se resolverá el sistema pero considerando los parámetros $N = 1000$, $J = 1000$ y $\delta = 0,001$, el siguiente resultado es en el instante $T = 1$.

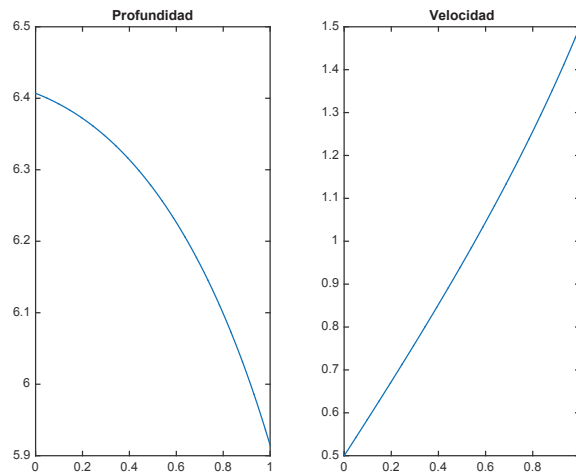


Figura 4.22: Resultado Método Semi-Implícito, utilizando esquema semi-lagrangiano con $\Delta t = 0,001$, $\Delta x = 0,001$ y $\delta = 0,001$

la evolución de la solución a lo largo del intervalo de tiempo $[0,1]$ se presenta a continuación.

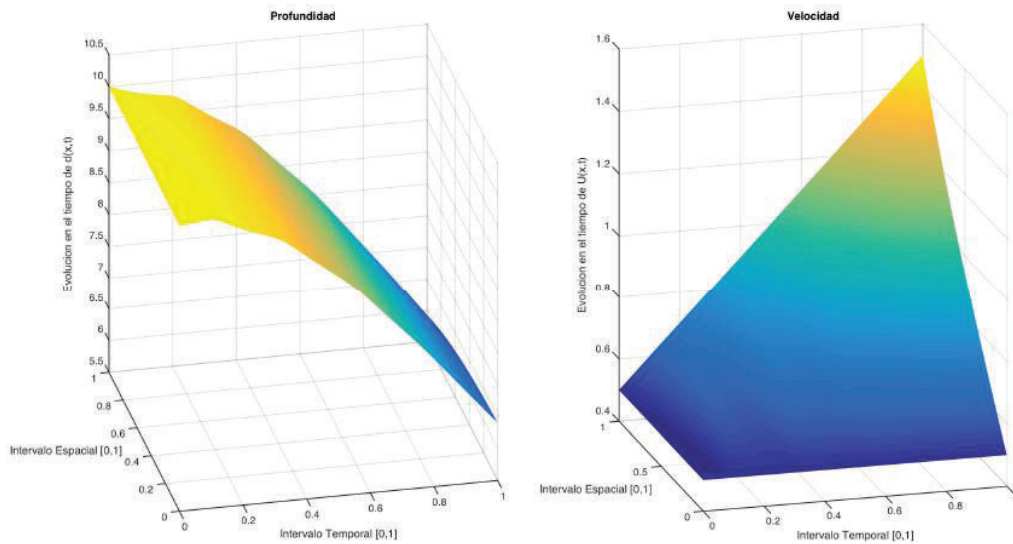


Figura 4.23: Evolución de la aproximación de la solución en el intervalo de tiempo $[0,1]$ con $\Delta t = 0,001$, $\Delta x = 0,001$ y $\delta = 0,001$

Ahora, si se toma un parámetro $\delta = (\Delta t)^2$, con $\Delta t = 0,01$ y $\Delta x = 0,01$. El resultado, en el instante $T = 1$, se muestran a continuación:

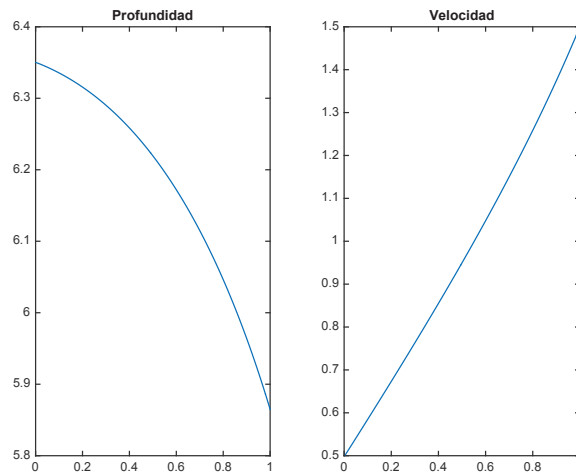


Figura 4.24: Resultado Método Semi-Implícito, utilizando esquema semi-lagrangiano con $\Delta t = 0,01$, $\Delta x = 0,01$ y $\delta = 0,0001$

en la siguiente figura se tiene la evolución de la aproximación en el intervalo de tiempo $[0, 1]$.

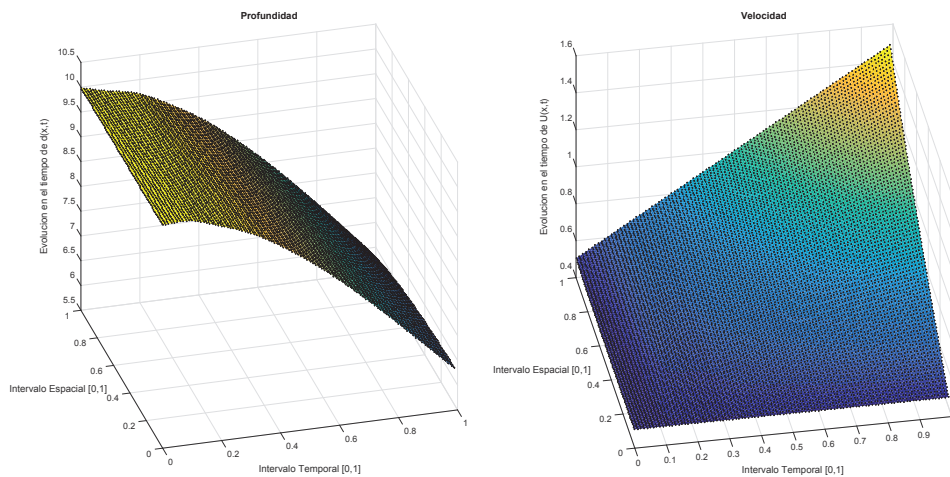


Figura 4.25: Evolución de la aproximación de la solución en el intervalo de tiempo $[0, 1]$ con $\Delta t = 0,01$, $\Delta x = 0,0066$ y $\delta = 0,0001$.

Como se puede ver en las figuras anteriores el método es estable incluso si se considera un Δx más pequeño que el parámetro Δt . Esto sucede ya que el problema se lo está resolviendo mediante un método Euler semi-implícito. Si los términos advectivos discretizados se los quiere resolver de manera explícita se pierde estabilidad absoluta.

El gráfico presentado a continuación muestra el número de iteraciones que ejecuta el método de Newton en cada iteración temporal, considerando los parámetros $\Delta t = 0,001$, $\Delta x = 0,001$ y $\delta = 0,001$:

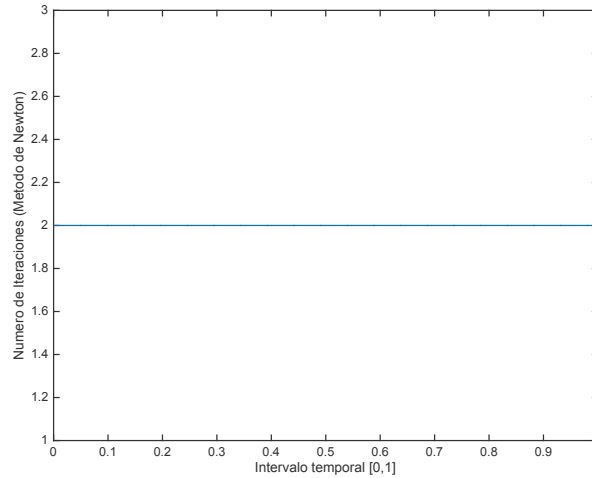


Figura 4.26: Número de iteraciones del método de Newton en cada iteración temporal

Como se puede observar en cada iteración temporal se necesitaron de 2 iteraciones del método de Newton.

A continuación se mostrará ciertas comparaciones que permitirán escoger un método adecuado para la resolución del problema de las Ecuaciones de Shallow-Water en una dimensión.

4.2.4. Comparaciones

Para realizar una comparación entre los métodos: Euler Explícito (utilizando el esquema de discretización upwind para las derivadas espaciales), Euler Semi-Implícito (utilizando el esquema de discretización upwind para las derivadas espaciales) y Euler Implícito (utilizando el esquema de discretización semi-lagrangiano para los términos advectivos); y de esta forma encontrar cual de ellos resuelve numéricamente de mejor manera al problema (4.21), se utilizarán funciones test para las variables $d(x, t)$ y $U(x, t)$.

Se tomará para $d(x, t)$ la siguiente función:

$$d(x, t) = \sin(2\pi x)t + e^t \tag{4.32}$$

con condición inicial

$$d(x, 0) = 1 \quad (4.33)$$

y derivadas parciales:

$$\frac{\partial d}{\partial x}(x, t) = 2\pi t \cos(2\pi x) \quad \frac{\partial d}{\partial t}(x, t) = \sin(2\pi x) + e^t. \quad (4.34)$$

Para la variable U la función

$$U(x, t) = 0,5 + xt \quad (4.35)$$

con condición inicial

$$U(x, 0) = 0,5 \quad (4.36)$$

con condiciones de borde

$$U(0, t) = 0,5 \quad U(1, t) = 0,5 + t \quad (4.37)$$

y sus derivadas parciales

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, t) = t \quad \frac{\partial U}{\partial t}(x, t) = x. \quad (4.38)$$

La función test (4.32) satisface las condiciones de borde (4.4). Utilizando los valores de las derivadas parciales de las funciones, (4.34) y (4.38), se reemplazarán en el problema (4.21) de manera que los lados derechos de las ecuaciones serán las funciones que se presentan a continuación.

El lado derecho para la primera ecuación del problema será:

$$\begin{aligned} \frac{\partial d}{\partial t} + U \frac{\partial d}{\partial x} + d \frac{\partial U}{\partial x} &= f(x, t) \\ f(x, t) &= \sin(2\pi x) + e^t + (0,5 + xt)(2\pi t \cos(2\pi x)) + (\sin(2\pi x)t + e^t)t. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Y el lado derecho para la segunda ecuación del problema será:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g \frac{\partial d}{\partial x} + \frac{gU|U|}{C^2 d} &= y(x, t) \\ y(x, t) &= x + (0,5 + xt)t + g(2\pi t \cos(2\pi x)) + \frac{g|0,5+xt|(0,5+xt)}{C^2(\sin(2\pi x)t+e^t)} \end{aligned} \quad (4.40)$$

Para resolver las ecuaciones con estas funciones test mediante el método de Euler explícito, utilizando el esquema de discretización upwind para las derivadas espaciales, el sistema a resolver cambia de (4.24) a:

$$\begin{aligned}
d^{n+1} &= d^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x}v_1M_2d^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x}v_2M_3d^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}v_3M_4U^n \\
&\quad + \frac{\Delta t}{\Delta x}v_4 + \Delta t f(x_d, n), \\
U^{n+1} &= U^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x}v_5M_6U^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x}v_6M_7U^n - \frac{g\Delta t}{C^2}|v_7|v_8U^n \\
&\quad + \frac{\Delta t}{2\Delta x}v_9 + \Delta t y(x_U, n).
\end{aligned} \tag{4.41}$$

En el caso con el método de Euler semi-implícito, utilizando el esquema de discretización upwind para las derivadas espaciales, el sistema a resolver cambia de (4.27) a:

$$\begin{aligned}
I_d d^{n+1} + \frac{\Delta t}{2\Delta x}v_1M_2d^{n+1} + \frac{\Delta t}{2\Delta x}v_2M_3d^{n+1} + \frac{\Delta t}{\Delta x}v_3M_4U^{n+1} &= \\
&\quad d^n + \frac{\Delta t}{\Delta x}v_4 + \Delta t f(x_d, n+1), \\
I_U U^{n+1} + \frac{\Delta t}{2\Delta x}v_5M_6U^{n+1} + \frac{\Delta t}{2\Delta x}v_6M_7U^{n+1} + g\frac{\Delta t}{\Delta x}M_8d^{n+1} \\
&= U^n - \frac{g\Delta t}{C^2}|v_7|v_8U^n + \frac{\Delta t}{\Delta x}v_9 + \Delta t y(x_U, n+1).
\end{aligned} \tag{4.42}$$

Finalmente para el método Euler semi-implícito utilizando el esquema semi-lagrangiano el problema discretizado cambia de (4.30) a:

$$\begin{aligned}
I_d d^{n+1} + \frac{\Delta t}{\Delta x}v_1M_2U^{n+1} &= d^n + \frac{\Delta t}{\delta}\mathfrak{I}\mathfrak{N}\mathfrak{I}_1 + v_2 + \Delta t f(x_d, n) \\
I_U U^{n+1} + \frac{\Delta t}{\Delta x}gM_4d^{n+1} &= U^n \frac{\Delta t}{\delta}\mathfrak{I}\mathfrak{N}\mathfrak{I}_2 + \frac{g\Delta t}{C^2}v_3v_4U^n + \Delta t y(x_U, n)
\end{aligned} \tag{4.43}$$

El valor absoluto de la diferencia entre la solución exacta y aproximada se mostrará en los gráficos que se presentan a continuación:

- Método Euler Explícito, utilizando esquema upwind

1. Considerando los parámetros $\Delta t = 0,001$ y $\Delta x = 0,01$,

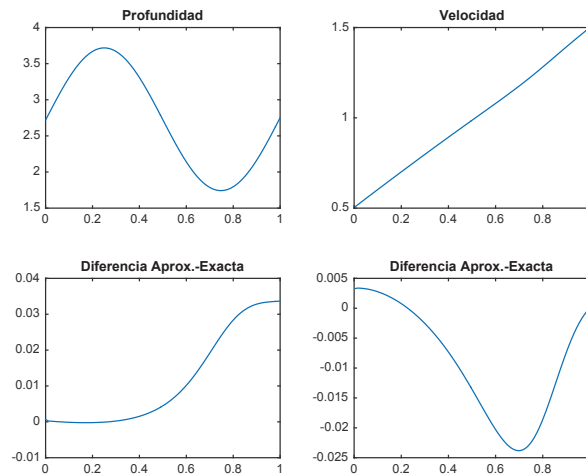


Figura 4.27: Aproximación de la solución y Diferencia entre la solución exacta y solución aproximada

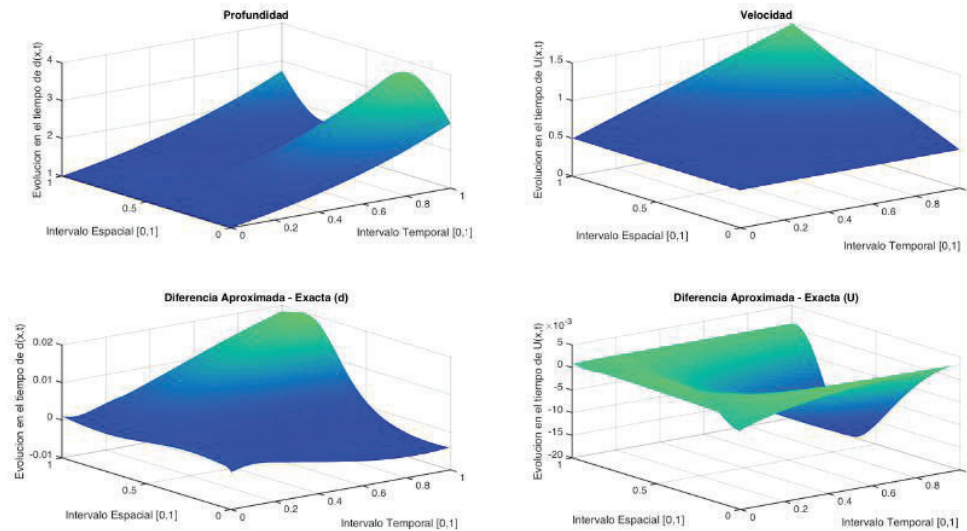


Figura 4.28: Evolución Aproximación de la solución y Evolución diferencia entre la solución exacta y solución aproximada

En la figura 4.28 se tiene que al resolver el problema (4.21) con este método utilizando funciones test es estable en el tiempo, al tomar los parámetros señalados. Además la aproximación de la solución obtenida con el método, como se muestra en la figura 4.27, respecto de la solución exacta no difiere mucho como se nota en la diferenciación de las dos soluciones.

2. Considerando los parámetros $\Delta t = 0,01$ y $\Delta x = 0,01$,

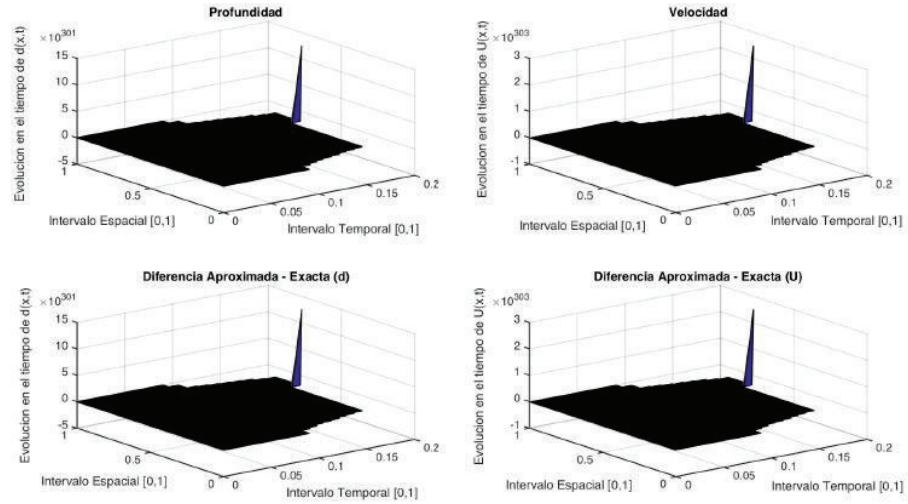


Figura 4.29: Evolución Aproximación de la solución y Evolución diferencia entre la solución exacta y solución aproximada

En la figura anterior, el método no es estable si se consideran los parámetros mencionados. Esto se debe a que al utilizar estos parámetros la condición de estabilidad CFL no se cumple.

- Método Euler Semi-Implicito, utilizando esquema upwind

1. Considerando los parámetros $\Delta t = 0,001$ y $\Delta x = 0,01$,

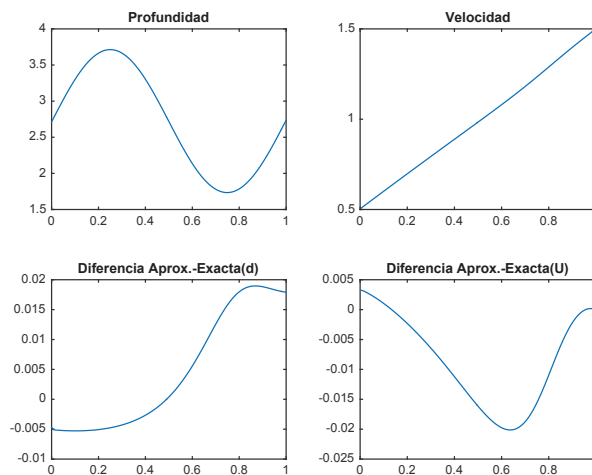


Figura 4.30: Aproximación de la solución y Diferencia entre la solución exacta y solución aproximada

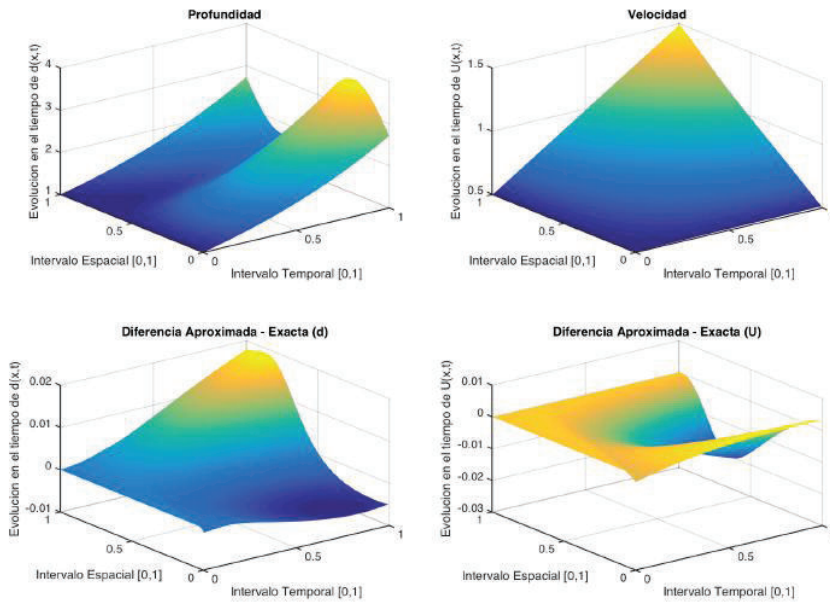


Figura 4.31: Evolución Aproximación de la solución y Evolución diferencia entre la solución exacta y solución aproximada

En la figura 4.31 el método es estable a lo largo del tiempo, y además, en la figura 4.30 se tiene que la aproximación numérica de la solución tiende hacia la solución exacta de las funciones test utilizadas.

2. Considerando los parámetros $\Delta t = 0,01$ y $\Delta x = 0,01$,

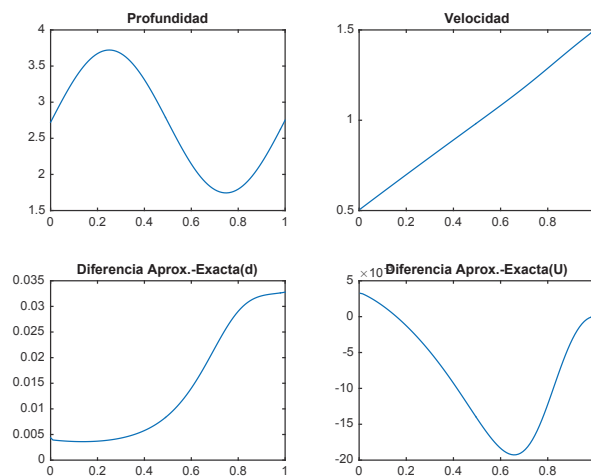


Figura 4.32: Aproximación de la solución y Diferencia entre la solución exacta y solución aproximada

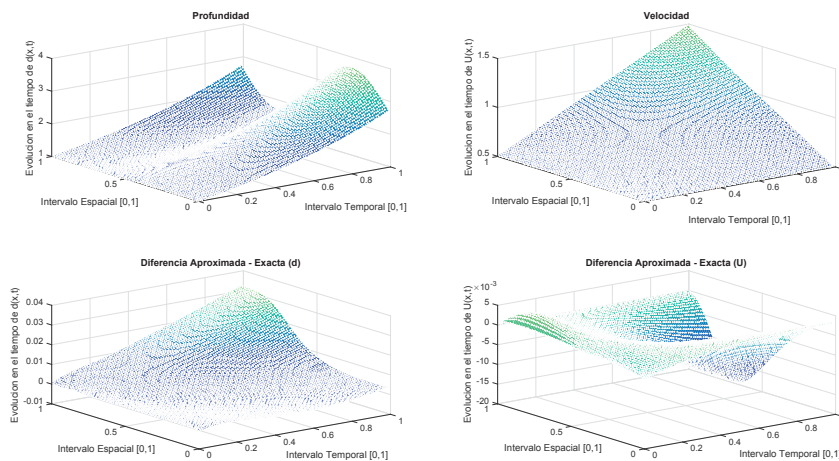


Figura 4.33: Evolución Aproximación de la solución y Evolución diferencia entre la solución exacta y solución aproximada

Al considerar estos parámetros al resolver el problema (4.21), incluso utilizando los parámetros mostrados, el método es estable como se muestra en la figura 4.33 y además la aproximación numérica obtenida respecto de la solución exacta no muestran diferencias significativas.

3. Considerando los parámetros $\Delta t = 0,01$ y $\Delta x = 0,001$,

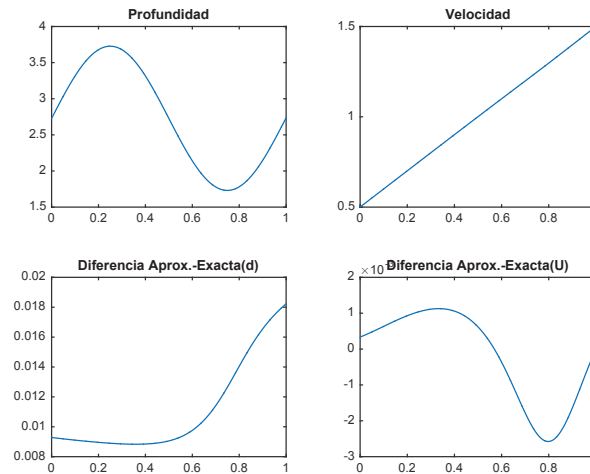


Figura 4.34: Aproximación de la solución y Diferencia entre la solución exacta y solución aproximada

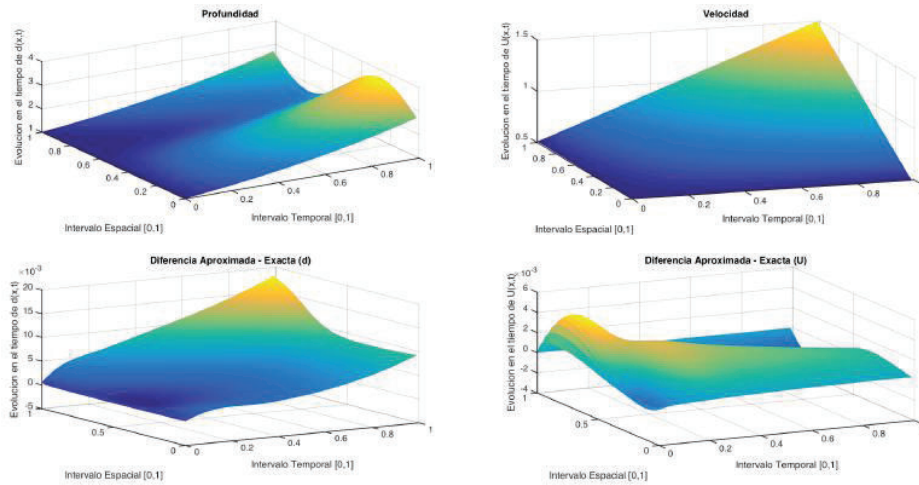


Figura 4.35: Evolución Aproximación de la solución y Evolución diferencia entre la solución exacta y solución aproximada

En la figura 4.35 el método es estable a lo largo del tiempo, y en la figura 4.34 se tiene que la solución obtenida al resolver el problema es mucho más cercana a la solución exacta de la funciones test.

- Método Semi-Implícito, utilizando esquema semi-lagrangiano

1. Considerando los parámetros $\Delta t = 0,001$, $\Delta x = 0,01$ y $\delta = 0,001$,

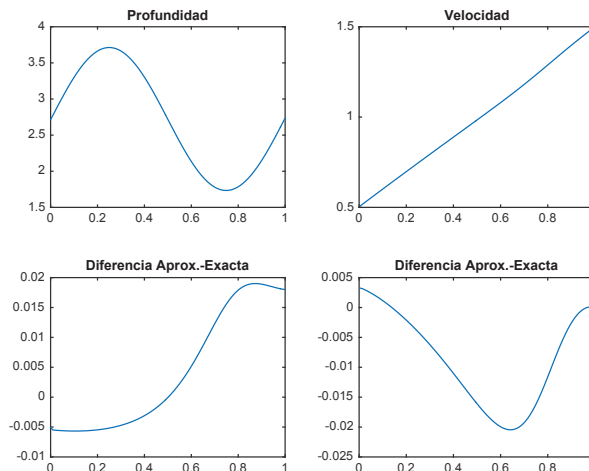


Figura 4.36: Aproximación de la solución y Diferencia entre la solución exacta y solución aproximada

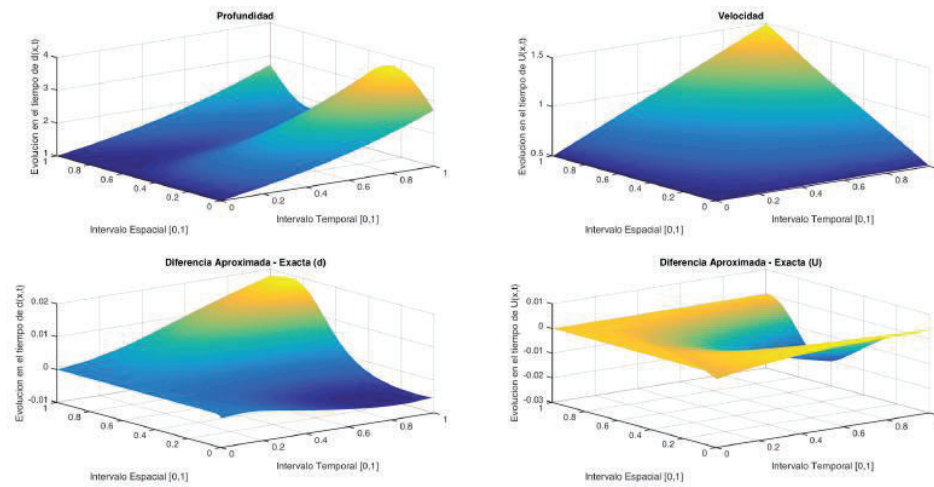


Figura 4.37: Evolución Aproximación de la solución y Evolución diferencia entre la solución exacta y solución aproximada

En la figura 4.36 se tiene que el método es estable dentro del rango de tiempo, además se muestra que tiene una buena aproximación a la solución exacta de las funciones test, como se puede ver en la figura 4.37.

2. Considerando los parámetros $\Delta t = 0,01$, $\Delta x = 0,01$ y $\delta = 0,01$,

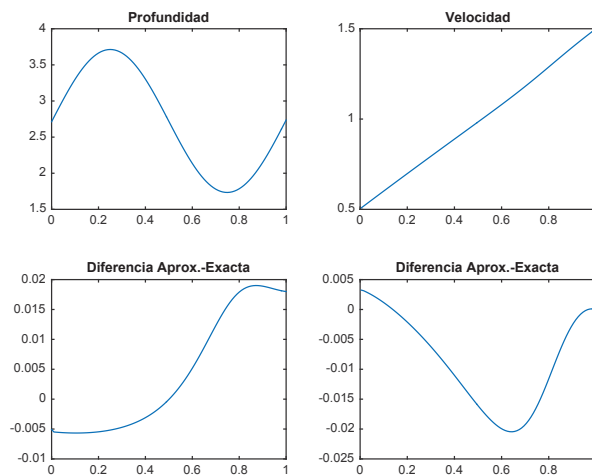


Figura 4.38: Aproximación de la solución y Diferencia entre la solución exacta y solución aproximada

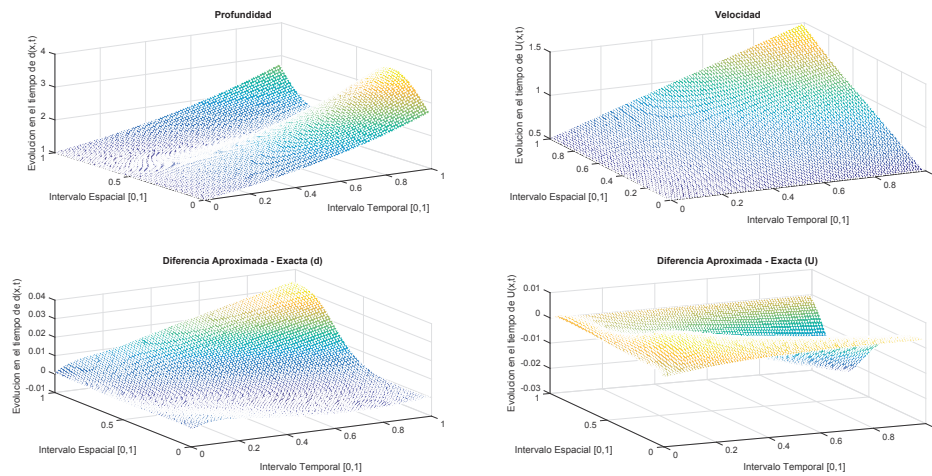


Figura 4.39: Evolución Aproximación de la solución y Evolución diferencia entre la solución exacta y solución aproximada

El método es estable en el rango de tiempo como se puede apreciar en la figura 4.39, además al momento de aproximación la solución numérica a la exacta se muestran diferencias pequeñas.

3. Considerando $\Delta t = 0,01$, $\Delta x = 0,01$ y $\delta = 0,0001$

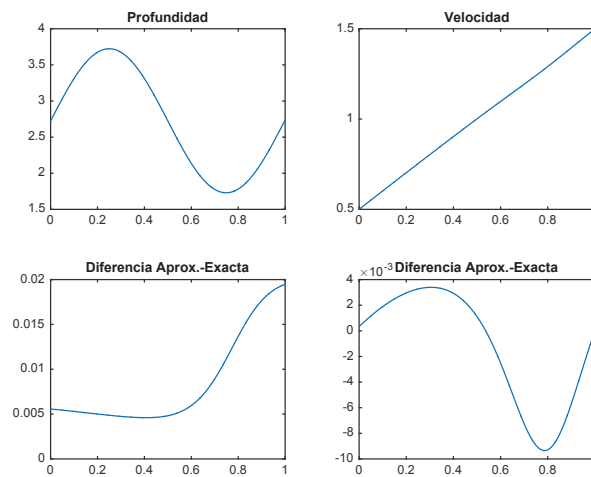


Figura 4.40: Aproximación de la solución y Diferencia entre la solución exacta y solución aproximada

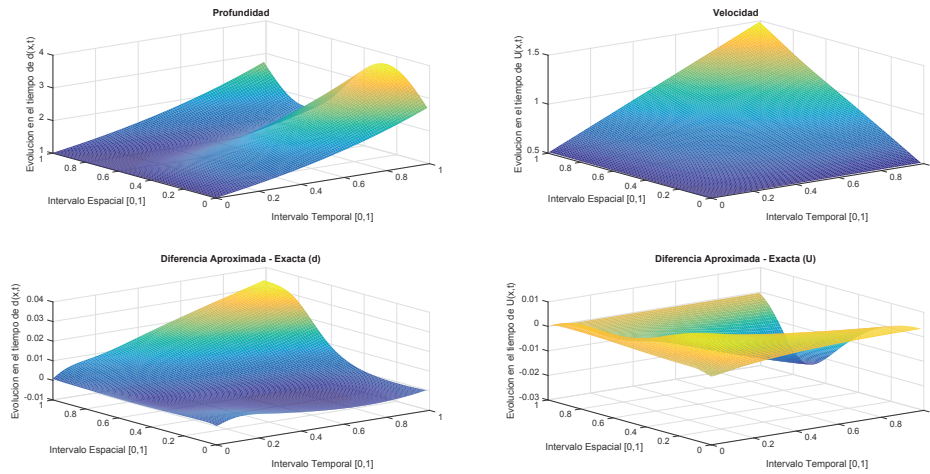


Figura 4.41: Evolución Aproximación de la solución y Evolución diferencia entre la solución exacta y solución aproximada

En la imagen 4.41 se puede observar que el método aproxima de una buena manera a la solución exacta, dado que su error es muy pequeño. Además se puede notar en la figura 4.41 que el método es estable al llegar durante el tiempo de simulación dado que no se presentan oscilaciones.

4. Considerando $\Delta t = 0,01$, $\Delta x = 0,001$ y $\delta = 0,0001$

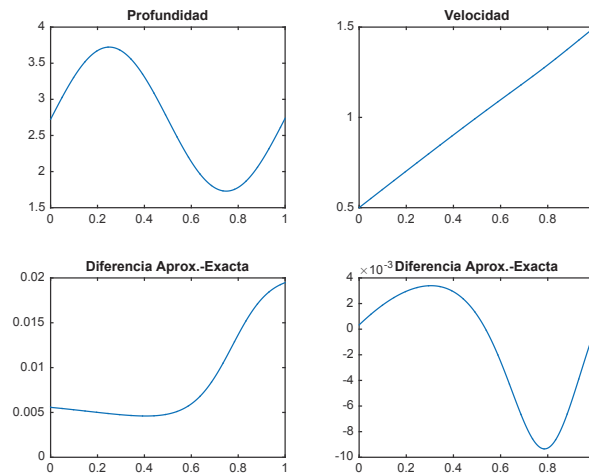


Figura 4.42: Aproximación de la solución y Diferencia entre la solución exacta y solución aproximada

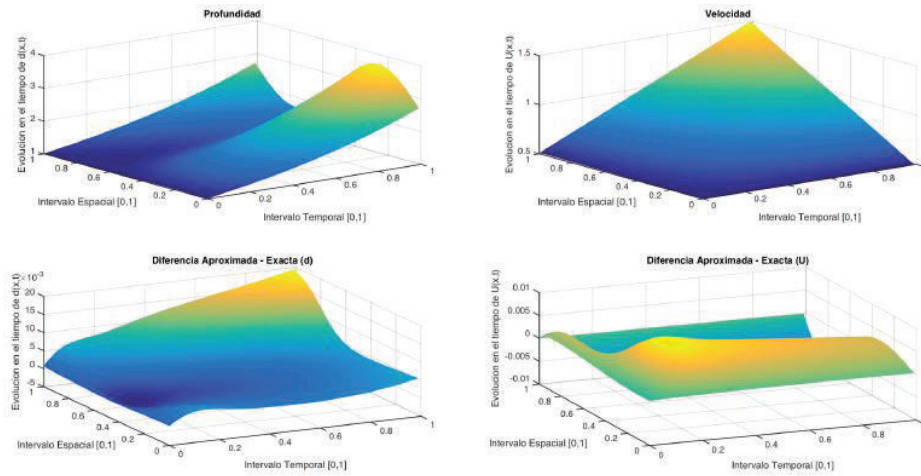


Figura 4.43: Evolución Aproximación de la solución y Evolución diferencia entre la solución exacta y solución aproximada

Como se puede ver en la figura 4.43 el método es estable en el tiempo de simulación y aproxima a la solución exacta como se ve en la figura 4.42.

Cabe mencionar que cuando se resuelve el problema mediante el método Euler explícito, utilizando el esquema upwind, se observó que este era inestable con los parámetros $\Delta t = 0,01$ y $\Delta x = 0,01$. Por lo tanto, las simulaciones con la familia parámetros que se utilizó para los métodos semi-implícitos, utilizando el esquema upwind y semi-lagrangiano, no se utilizan para resolver con el método Euler explícito ya que se mantiene la inestabilidad del mismo y sus resultados presentan indeterminaciones.

Como se puede observar en los gráficos de las comparaciones al resolver el problema mediante el método Euler semi-implícito utilizando el esquema upwind como el esquema semi-lagrangiano aproxima a la solución exacta con un error bajo el 0,002 para la variable profundidad y bajo 0,005 para la variable velocidad.

Sin embargo para resolver la interpolación necesaria en el esquema semi-lagrangiano se lo debe realizar componente a componente, lo que implica un costo computacional directamente relacionado con el tamaño del paso de discretización espacial. Es decir mientras más pequeño sea el paso se debe realizar la interpolación a una cantidad de componentes mayor y por ende el costo computacional aumenta, si además consideramos que se debe realizar iteraciones de Newton para resolver el problema completo utilizar el esquema semi-lagrangiano es bastante costoso.

Por lo mencionado anteriormente, se podría considerar resolver el problema utilizando únicamente el esquema upwind que, si bien es costoso se debe realizar *solo*

el paso de Newton en cada iteración en lugar de resolver la interpolación para cada componente.

El orden de convergencia de los dos métodos es lineal, por lo que para escoger el esquema adecuado con el cual se resuelve de mejor manera las Ecuaciones de Shallow-Water en una dimensión se debe considerar el costo computacional que necesita cada esquema. Por lo tanto se tomará el método Euler semi-implícito utilizando el esquema upwind para resolver las Ecuaciones de Shallow-Water en una dimensión.

4.3. Ecuaciones de Shallow-Water en dos dimensiones

Las Ecuaciones de Shallow Water en dos dimensiones está descritas por el sistema:

$$\begin{aligned} \frac{\partial d}{\partial t} + d \frac{\partial U}{\partial x_1} + U \frac{\partial d}{\partial x_1} + d \frac{\partial V}{\partial x_2} + V \frac{\partial d}{\partial x_2} &= 0 \\ \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x_1} + V \frac{\partial U}{\partial x_2} + g \frac{\partial d}{\partial x_1} &= fV - \frac{gU\sqrt{U^2+V^2}}{C^2d} \\ \frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x_1} + V \frac{\partial V}{\partial x_2} + g \frac{\partial d}{\partial x_2} &= -fU - \frac{gV\sqrt{U^2+V^2}}{C^2d} \end{aligned} \quad (4.44)$$

donde d es la profundidad del fluido respecto del fondo, U es la velocidad horizontal con la que el fluido se mueve, V es la velocidad vertical del fluido, C es el coeficiente de fricción de Chézy y f es el parámetro de Coriolis. Las condiciones iniciales son:

$$d(x_1, x_2, 0) = d_0(x_1, x_2) \quad U(x_1, x_2, 0) = U_0(x_1, x_2) \quad V(x_1, x_2, 0) = V_0(x_1, x_2),$$

las condiciones de borde para las variables d , U y V serán de la forma:

$$d(\Gamma, t) = f \quad U(\Gamma, t) = g \quad V(\Gamma, t) = h.$$

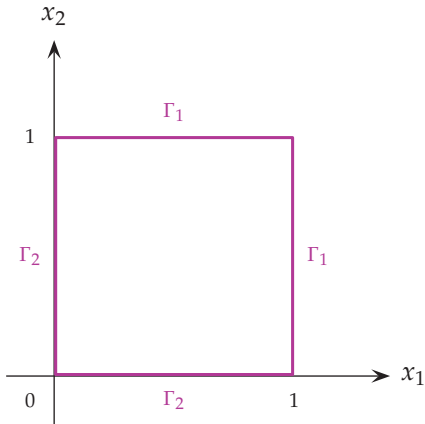
Dentro del estudio para la resolución numérica de las Ecuaciones de Shallow-Water en dos dimensiones se presentaron ciertas condiciones de borde por ejemplo:

- Condiciones de Borde reflectivas

Así como para el caso de las Ecuaciones de Shallow-Water en una dimensión, cuando se consideran dos dimensiones las condiciones son de la forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial d}{\partial \bar{n}}(\Gamma_1, t) &= d(\Gamma_2, t) & \frac{\partial U}{\partial \bar{n}}(\Gamma_1, t) &= 0 & \frac{\partial V}{\partial \bar{n}}(\Gamma_1, t) &= 0 \\ \frac{\partial d}{\partial \bar{n}}(\Gamma_2, t) &= d(\Gamma_1, t) & \frac{\partial U}{\partial \bar{n}}(\Gamma_2, t) &= 0 & \frac{\partial V}{\partial \bar{n}}(\Gamma_2, t) &= 0 \end{aligned} \quad (4.45)$$

donde Γ_1 y Γ_2 son fronteras como se muestran en la siguiente figura:



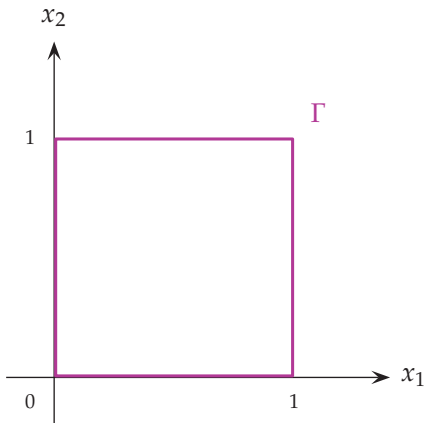
En este caso se considera que el movimiento del fluido se mueve tangencialmente.

- Condiciones de Borde de Neumann

En este caso las condiciones se muestran de la siguiente manera:

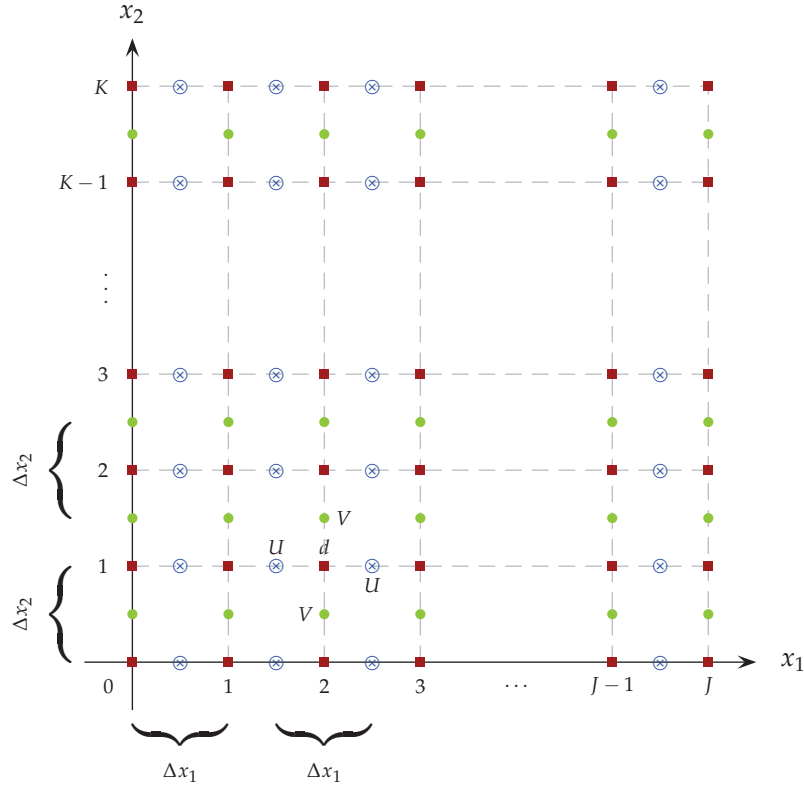
$$\frac{\partial d}{\partial \bar{n}}(\Gamma, t) = 0 \quad \frac{\partial U}{\partial \bar{n}}(\Gamma, t) = 0 \quad \frac{\partial V}{\partial \bar{n}}(\Gamma, t) = 0 \quad (4.46)$$

donde Γ es la frontera del dominio, como se muestra en la siguiente figura:



Para resolver el problema (4.44) se utilizará la malla conocida como Arakawa, ya que al utilizarla se genera una mejor aproximación en la relación de dispersión

generada al momento de resolver las ecuaciones mediante los métodos numéricos que se mostrarán en las subsecciones siguientes, que se muestra a continuación:



donde Δx_1 es el tamaño de la malla espacial para la componente x_1 , Δx_2 es el tamaño de la malla espacial para la componente x_2 . Por lo tanto la aproximación de la función $d(x_1, x_2, t)$ dentro la malla será de la forma $(x_{1j}, x_{2k}) = (j\Delta x_1, k\Delta x_2)$ por lo que la variable asociada a la función de profundidad d tiene $(J + 1) \times (K + 1)$ componentes; en el siguiente caso, la aproximación de la función $U(x_1, x_2, t)$ en la malla espacial será $(x_{1j+1/2}, x_{2k}) = (j + \frac{1}{2}\Delta x_1, k\Delta x_2)$. En este caso la variable asociada a la función velocidad horizontal tiene $J \times (K + 1)$ componentes. Finalmente la aproximación de la función $V(x_1, x_2, t)$ en la malla espacial será $(x_{1j}, x_{2k+1/2}) = (j\Delta x_1, k + \frac{1}{2}\Delta x_2)$. Aquí la variable asociada a la función velocidad vertical tiene $(J + 1) \times K$ componentes.

Para resolver el problema (4.44) se utilizarán para sus derivadas espaciales, los esquema upwind y semi-lagrangiano. Nuevamente, como cuando se resolvió el problema en una dimensión, cabe mencionar que si considera el esquema semi-lagrangiano no todos los términos donde esta presenta la derivada espacial se pueden discretizar con este esquema, sino solamente los términos advectivos.

Los resultados que se mostrarán en las siguientes subsecciones toman como condiciones iniciales:

$$d(x_1, x_2, 0) = 10,$$

$$U(x_1, x_2, 0) = 0,5(\sin(2\pi x) + \cos(2\pi y) - 2\pi x),$$

$$V(x_1, x_2, 0) = 0,5(\cos(2\pi x) + \sin(2\pi y) - 2\pi y).$$

Además, las condiciones de borde que se utilizarán para las tres variables, son las condiciones de borde de Neumann.

4.3.1. Método Euler Semi-Implícito, aplicando el esquema upwind

Dentro de la resolución del problema mediante este método, se debe considerar que, las variables asociadas a las funciones d , U y V tienen $(J + 1) \times (K + 1)$, $J \times (K + 1)$ y $(J + 1) \times K$ componentes respectivamente; es por esto que ,debido a las dimensiones que tomarán las matrices asociadas a los términos donde se presentan derivadas, los parámetros J y K serán igual a 10 cada uno.

Considerando la primera ecuación:

$$\frac{\partial d}{\partial t} + d \frac{\partial U}{\partial x_1} + U \frac{\partial d}{\partial x_1} + d \frac{\partial V}{\partial x_2} + V \frac{\partial d}{\partial x_2} = 0,$$

al discretizarla se tiene:

$$\begin{aligned} d_{j,k}^{n+1} + \frac{\Delta t}{\Delta x_1} d_{j,k}^n (U_{j+1/2,k}^{n+1} - U_{j-1/2,k}^{n+1}) + \frac{\Delta t}{2\Delta x_1} U_{j+1/2,k}^n & \quad (4.47) \\ [(1 + \epsilon)(d_{j,k}^{n+1} - d_{j-1,k}^{n+1}) + (1 - \epsilon)(d_{j+1,k}^{n+1} - d_{j,k}^{n+1})] + \frac{\Delta t}{\Delta x_2} d_{j,k}^n & \\ (V_{j,k+1/2}^{n+1} - V_{j,k-1/2}^{n+1}) + \frac{\Delta t}{2\Delta x_2} V_{j,k+1/2}^n [(1+) (d_{j,k}^{n+1} - d_{j,k-1}^{n+1}) + & \\ (1-) (d_{j,k+1}^{n+1} - d_{j,k}^{n+1})] = d_{j,k}^n, & \end{aligned}$$

donde $\epsilon = \text{sign}(U_{j+1/2,k}^n)$ y $\epsilon = \text{sign}(V_{j,k+1/2}^n)$.

En este caso se deben considerar ciertos casos cuando $k = 0$, $k = k$ $k = K$; es decir cuando k toma el valor inicial, un valor cualquiera entre $]0 : K[$ y el valor final, dentro de cada uno de estos casos cuando $j = 0$ y $j = J$. Esto se debe a que en esos casos se toman en cuenta las condiciones de borde (4.46).

Si $k = 0$ con $j = 0$, para todo $n \geq 0$,

$$\begin{aligned}
& d_{0,0}^{n+1} + \frac{\Delta t}{\Delta x_1} d_{0,0}^n (U_{1/2,0}^{n+1} - U_{-1/2,0}^{n+1}) + \frac{\Delta t}{2\Delta x_1} U_{1/2,0}^n [(1+\epsilon)(d_{0,0}^{n+1} \\
& - d_{-1,0}^{n+1}) + (1-\epsilon)(d_{1,0}^{n+1} - d_{0,0}^{n+1})] + \frac{\Delta t}{\Delta x_2} d_{0,0}^n (V_{0,1/2}^{n+1} - V_{0,-1/2}^{n+1}) \\
& + \frac{\Delta t}{2\Delta x_2} V_{0,1/2}^n [(1+)(d_{0,0}^{n+1} - d_{0,-1}^{n+1}) + (1-)(d_{0,1}^{n+1} - d_{0,0}^{n+1})] = d_{0,0}^n, \\
\Rightarrow & d_{0,0}^{n+1} + \frac{\Delta t}{\Delta x_1} d_{0,0}^n(0) + \frac{\Delta t}{2\Delta x_1} U_{1/2,0}^n [(1+\epsilon)(0) + (1-\epsilon)(d_{1,0}^{n+1} - d_{0,0}^{n+1})] \\
& + \frac{\Delta t}{\Delta x_2} d_{0,0}^n(0) + \frac{\Delta t}{2\Delta x_2} V_{0,1/2}^n [(1+)(0) + (1-)(d_{0,1}^{n+1} - d_{0,0}^{n+1})] = d_{0,0}^n,
\end{aligned}$$

con $j = J$, para todo $n \geq 0$,

$$\begin{aligned}
& d_{J,0}^{n+1} + \frac{\Delta t}{\Delta x_1} d_{J,0}^n (U_{J+1/2,0}^{n+1} - U_{J-1/2,0}^{n+1}) + \frac{\Delta t}{2\Delta x_1} U_{J+1/2,0}^n [(1+\epsilon)(d_{J,0}^{n+1} \\
& - d_{J-1,0}^{n+1}) + (1-\epsilon)(d_{J+1,0}^{n+1} - d_{J,0}^{n+1})] + \frac{\Delta t}{\Delta x_2} d_{J,0}^n (V_{J,1/2}^{n+1} - V_{J,-1/2}^{n+1}) \\
& + \frac{\Delta t}{2\Delta x_2} V_{J,1/2}^n [(1+)(d_{J,0}^{n+1} - d_{J,-1}^{n+1}) + (1-)(d_{J,1}^{n+1} - d_{J,0}^{n+1})] = d_{J,0}^n, \\
\Rightarrow & d_{J,0}^{n+1} + \frac{\Delta t}{\Delta x_1} d_{J,0}^n(0) + \frac{\Delta t}{2\Delta x_1} U_{J-1/2,0}^n [(1+\epsilon)(d_{J,0}^{n+1} - d_{J-1,0}^{n+1}) + (1-\epsilon)(0)] \\
& + \frac{\Delta t}{\Delta x_2} d_{J,0}^n(0) + \frac{\Delta t}{2\Delta x_2} V_{J,1/2}^n [(1+)(0) + (1-)(d_{J,1}^{n+1} - d_{J,0}^{n+1})] = d_{J,0}^n.
\end{aligned}$$

Si $k = k$ con $j = 0$, para todo $n \geq 0$,

$$\begin{aligned}
& d_{0,k}^{n+1} + \frac{\Delta t}{\Delta x_1} d_{0,k}^n (U_{1/2,k}^{n+1} - U_{-1/2,k}^{n+1}) + \frac{\Delta t}{2\Delta x_1} U_{1/2,k}^n [(1+\epsilon)(d_{0,k}^{n+1} \\
& - d_{-1,k}^{n+1}) + (1-\epsilon)(d_{1,k}^{n+1} - d_{0,k}^{n+1})] + \frac{\Delta t}{\Delta x_2} d_{0,k}^n (V_{0,k+1/2}^{n+1} - V_{0,k-1/2}^{n+1}) \\
& + \frac{\Delta t}{2\Delta x_2} V_{0,k+1/2}^n [(1+)(d_{0,k}^{n+1} - d_{0,k-1}^{n+1}) + (1-)(d_{0,k+1}^{n+1} - d_{0,k}^{n+1})] = d_{0,k}^n, \\
\Rightarrow & d_{0,k}^{n+1} + \frac{\Delta t}{\Delta x_1} d_{0,k}^n(0) + \frac{\Delta t}{2\Delta x_1} U_{1/2,k}^n [(1+\epsilon)(0) + (1-\epsilon)(d_{1,k}^{n+1} - d_{0,k}^{n+1})] \\
& + \frac{\Delta t}{\Delta x_2} d_{0,k}^n (V_{0,k+1/2}^{n+1} - V_{0,k-1/2}^{n+1}) + \frac{\Delta t}{2\Delta x_2} V_{0,k+1/2}^n [(1+)(d_{0,k}^{n+1} - d_{0,k-1}^{n+1}) \\
& + (1-)(d_{0,k+1}^{n+1} - d_{0,k}^{n+1})] = d_{0,k}^n,
\end{aligned}$$

con $j = J$, para todo $n \geq 0$,

$$\begin{aligned}
& d_{J,k}^{n+1} + \frac{\Delta t}{\Delta x_1} d_{J,k}^n (U_{J+1/2,k}^{n+1} - U_{J-1/2,k}^{n+1}) + \frac{\Delta t}{2\Delta x_1} U_{J+1/2,k}^n [(1+\epsilon)(d_{J,k}^{n+1} \\
& - d_{J-1,k}^{n+1}) + (1-\epsilon)(d_{J+1,k}^{n+1} - d_{J,k}^{n+1})] + \frac{\Delta t}{\Delta x_2} d_{J,k}^n (V_{J,k+1/2}^{n+1} - V_{J,k-1/2}^{n+1}) \\
& + \frac{\Delta t}{2\Delta x_2} V_{J,k+1/2}^n [(1+)(d_{J,k}^{n+1} - d_{J,k-1}^{n+1}) + (1-)(d_{J,k+1}^{n+1} - d_{J,k}^{n+1})] = d_{J,k}^n, \\
\Rightarrow & d_{J,k}^{n+1} + \frac{\Delta t}{\Delta x_1} d_{J,k}^n(0) + \frac{\Delta t}{2\Delta x_1} U_{J-1/2,k}^n [(1+\epsilon)(d_{J,k}^{n+1} - d_{J-1,k}^{n+1}) + (1-\epsilon)(0)] \\
& + \frac{\Delta t}{\Delta x_2} d_{J,k}^n (V_{J,k+1/2}^{n+1} - V_{J,k-1/2}^{n+1}) + \frac{\Delta t}{2\Delta x_2} V_{J,k+1/2}^n [(1+)(d_{J,k}^{n+1} - d_{J,k-1}^{n+1}) \\
& + (1-)(d_{J,k+1}^{n+1} - d_{J,k}^{n+1})] = d_{J,k}^n.
\end{aligned}$$

Si $k = K$ con $j = 0$, para todo $n \geq 0$,

$$\begin{aligned}
& d_{0,K}^{n+1} + \frac{\Delta t}{\Delta x_1} d_{0,K}^n (U_{1/2,K}^{n+1} - U_{-1/2,K}^{n+1}) + \frac{\Delta t}{2\Delta x_1} U_{1/2,K}^n [(1+\epsilon)(d_{0,K}^{n+1} \\
& - d_{-1,K}^{n+1}) + (1-\epsilon)(d_{1,K}^{n+1} - d_{0,K}^{n+1})] + \frac{\Delta t}{\Delta x_2} d_{0,K}^n (V_{0,K+1/2}^{n+1} - V_{0,K-1/2}^{n+1}) \\
& + \frac{\Delta t}{2\Delta x_2} V_{0,K+1/2}^n [(1+)(d_{0,K}^{n+1} - d_{0,K-1}^{n+1}) + (1-)(d_{0,K+1}^{n+1} - d_{0,K}^{n+1})] = d_{0,K}^n, \\
\Rightarrow & d_{0,K}^{n+1} + \frac{\Delta t}{\Delta x_1} d_{0,K}^n(0) + \frac{\Delta t}{2\Delta x_1} U_{1/2,K}^n [(1+\epsilon)(0) + (1-\epsilon)(d_{1,K}^{n+1} - d_{0,K}^{n+1})] \\
& + \frac{\Delta t}{\Delta x_2} d_{0,K}^n(0) + \frac{\Delta t}{2\Delta x_2} V_{0,K-1/2}^n [(1+)(d_{0,K}^{n+1} - d_{0,K-1}^{n+1}) + (1-)(0)] = d_{0,K}^n,
\end{aligned}$$

con $j = J$, para todo $n \geq 0$,

$$\begin{aligned}
& d_{J,K}^{n+1} + \frac{\Delta t}{\Delta x_1} d_{J,K}^n (U_{J+1/2,K}^{n+1} - U_{J-1/2,K}^{n+1}) + \frac{\Delta t}{2\Delta x_1} U_{J+1/2,K}^n [(1+\epsilon)(d_{J,K}^{n+1} \\
& - d_{J-1,K}^{n+1}) + (1-\epsilon)(d_{J+1,K}^{n+1} - d_{J,K}^{n+1})] + \frac{\Delta t}{\Delta x_2} d_{J,K}^n (V_{J,K+1/2}^{n+1} - V_{J,K-1/2}^{n+1}) \\
& + \frac{\Delta t}{2\Delta x_2} V_{J,K+1/2}^n [(1+)(d_{J,K}^{n+1} - d_{J,K-1}^{n+1}) + (1-)(d_{J,K+1}^{n+1} - d_{J,K}^{n+1})] = d_{J,K}^n, \\
\Rightarrow & d_{J,K}^{n+1} + \frac{\Delta t}{\Delta x_1} d_{J,K}^n(0) + \frac{\Delta t}{2\Delta x_1} U_{J-1/2,K}^n [(1+\epsilon)(d_{J,K}^{n+1} - d_{J-1,K}^{n+1}) + (1-\epsilon)(0)] \\
& + \frac{\Delta t}{\Delta x_2} d_{J,K}^n(0) + \frac{\Delta t}{2\Delta x_2} V_{J,K-1/2}^n [(1+)(d_{J,K}^{n+1} - d_{J,K-1}^{n+1}) + (1-)(0)] = d_{J,K}^n.
\end{aligned}$$

donde $\epsilon = U_{j+1/2,k}^n$ y $= V_{j,k+1/2}$.

Considerando la segunda ecuación:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x_1} + V \frac{\partial U}{\partial x_2} + g \frac{\partial d}{\partial x_1} = fV - \frac{gU\sqrt{U^2 + V^2}}{C^2 d},$$

al discretizarla se tiene:

$$\begin{aligned} & U_{j+1/2,k}^{n+1} + \frac{\Delta t}{2\Delta x_1} U_{j+1/2,k}^n [(1 + \epsilon)(U_{j+1/2,k}^{n+1} - U_{j-1/2,k}^{n+1}) + (1 - \epsilon) \\ & (U_{j+3/2,k}^{n+1} - U_{j+1/2,k}^{n+1})] + \frac{\Delta t}{2\Delta x_2} V_{j,k+1/2}^n [(1+)(U_{j+1/2,k}^{n+1} - U_{j+1/2,k-1}^{n+1}) \\ & + (1-)(U_{j+1/2,k+1}^{n+1} - U_{j+1/2,k}^{n+1})] + g \frac{\Delta t}{\Delta x_1} (d_{j+1,k}^{n+1} - d_{j,k}^{n+1}) \\ & = U_{j+1/2,k}^n + \Delta t f V_{j,k+1/2}^n - \frac{g\Delta t \sqrt{(U_{j+1/2,k}^n)^2 + V_{j,k+1/2}^2}}{C^2 d_{j,k}^n} U_{j+1/2,k}^n. \end{aligned} \quad (4.48)$$

donde $\epsilon = \text{sign}(U_{j+1/2,k}^n)$ y $\epsilon = \text{sign}(V_{j,k+1/2}^n)$.

Se deben considerar los casos cuando $k = 0$, $k = k$ y $k = K$; es decir cuando k toma el valor inicial, un valor cualquiera entre $]0 : K[$ y el valor final, y en cada uno de estos se debe verificar los casos cuando $j = 0$ y $j = J - 1$. Esto es, como se mencionó anteriormente, debido a la presencia de condiciones de borde cuando los parámetros k y j toman los valores mencionados.

Si $k = 0$ con $j = 0$, para todo $n \geq 0$,

$$\begin{aligned} & U_{1/2,0}^{n+1} + \frac{\Delta t}{2\Delta x_1} U_{1/2,0}^n [(1 + \epsilon)(U_{1/2,0}^{n+1} - U_{-1/2,0}^{n+1}) + (1 - \epsilon)(U_{3/2,0}^{n+1} \\ & - U_{1/2,0}^{n+1})] + \frac{\Delta t}{2\Delta x_2} V_{0,1/2}^n [(1+)(U_{1/2,0}^{n+1} - U_{1/2,-1}^{n+1}) + (1-)(U_{1/2,1}^{n+1} \\ & - U_{1/2,0}^{n+1})] + g \frac{\Delta t}{\Delta x_1} (d_{1,0}^{n+1} - d_{0,0}^{n+1}) = U_{1/2,0}^n + \Delta t f V_{0,1/2}^n \\ & - \frac{g\Delta t \sqrt{(U_{1/2,0}^n)^2 + (V_{0,1/2})^2}}{C^2 d_{0,0}^n} U_{1/2,0}^n, \\ \Rightarrow & U_{1/2,0}^{n+1} + \frac{\Delta t}{2\Delta x_1} U_{1/2,0}^n [(1 + \epsilon)(0) + (1 - \epsilon)(U_{3/2,0}^{n+1} - U_{1/2,0}^{n+1})] \\ & + \frac{\Delta t}{2\Delta x_2} V_{0,1/2}^n [(1+)(0) + (1-)(U_{1/2,1}^{n+1} - U_{1/2,0}^{n+1})] \\ & + g \frac{\Delta t}{\Delta x_1} (d_{1,0}^{n+1} - d_{0,0}^{n+1}) = U_{1/2,0}^n + \Delta t f V_{0,1/2}^n \\ & - \frac{g\Delta t \sqrt{(U_{1/2,0}^n)^2 + V_{0,1/2}^2}}{C^2 d_{0,0}^n} U_{1/2,0}^n, \end{aligned}$$

con $j = J - 1$, para todo $n \geq 0$,

$$\begin{aligned}
& U_{J-1/2,0}^{n+1} + \frac{\Delta t}{2\Delta x_1} U_{J-1/2,0}^n [(1 + \epsilon)(U_{J-1/2,0}^{n+1} - U_{J-3/2,0}^{n+1}) + (1 - \epsilon) \\
& (U_{J+1/2,0}^{n+1} - U_{J-1/2,0}^{n+1})] + \frac{\Delta t}{2\Delta x_2} V_{J-1,1/2}^n [(1+)(U_{J-1/2,0}^{n+1} - U_{J-1/2,-1}^{n+1}) \\
& + (1-)(U_{J-1/2,1}^{n+1} - U_{J-1/2,0}^{n+1})] + g \frac{\Delta t}{\Delta x_1} (d_{J,0}^{n+1} - d_{J-1,0}^{n+1}) = U_{J-1/2,0}^n + \\
& \Delta t f V_{J-1,1/2}^n - \frac{g \Delta t \sqrt{(U_{J-1/2,0}^n)^2 + V_{J-1,1/2}^2}}{C^2 d_{J-1,0}^n} U_{J-1/2,0}^n, \\
\Rightarrow & U_{J-1/2,0}^{n+1} + \frac{\Delta t}{2\Delta x_1} U_{J-1/2,0}^n [(1 + \epsilon)(U_{J-1/2,0}^{n+1} - U_{J-3/2,0}^{n+1}) + (1 - \epsilon)(0)] \\
& + \frac{\Delta t}{2\Delta x_2} V_{J-1,1/2}^n [(1+)(0) + (1-)(U_{J-1/2,1}^{n+1} - U_{J-1/2,0}^{n+1})] \\
& + g \frac{\Delta t}{\Delta x_1} (d_{J,0}^{n+1} - d_{J-1,0}^{n+1}) = U_{J-1/2,0}^n + \Delta t f V_{J-1,1/2}^n \\
& - \frac{g \Delta t \sqrt{(U_{J-1/2,0}^n)^2 + V_{J-1,1/2}^2}}{C^2 d_{J-1,0}^n} U_{J-1/2,0}^n.
\end{aligned}$$

Si $k = k$ con $j = 0$, para todo $n \geq 0$,

$$\begin{aligned}
& U_{1/2,k}^{n+1} + \frac{\Delta t}{2\Delta x_1} U_{1/2,k}^n [(1 + \epsilon)(U_{1/2,k}^{n+1} - U_{-1/2,k}^{n+1}) + (1 - \epsilon)(U_{3/2,k}^{n+1} \\
& - U_{1/2,k}^{n+1})] + \frac{\Delta t}{2\Delta x_2} V_{0,k+1/2}^n [(1+)(U_{1/2,k}^{n+1} - U_{1/2,k-1}^{n+1}) + (1- \\
& (U_{1/2,k+1}^{n+1} - U_{1/2,k}^{n+1}))] + g \frac{\Delta t}{\Delta x_1} (d_{1,k}^{n+1} - d_{0,k}^{n+1}) = U_{1/2,k}^n + \Delta t f V_{0,k+1/2}^n \\
& - \frac{g \Delta t \sqrt{(U_{1/2,k}^n)^2 + V_{0,k+1/2}^2}}{C^2 d_{0,k}^n} U_{1/2,k}^n, \\
\Rightarrow & U_{1/2,k}^{n+1} + \frac{\Delta t}{2\Delta x_1} U_{1/2,k}^n [(1 + \epsilon)(0) + (1 - \epsilon)(U_{3/2,k}^{n+1} - U_{1/2,k}^{n+1})] \\
& + \frac{\Delta t}{2\Delta x_2} V_{0,k+1/2}^n [(1+)(U_{1/2,k}^{n+1} - U_{1/2,k-1}^{n+1}) + (1-)(U_{1/2,k+1}^{n+1} \\
& - U_{1/2,k}^{n+1})] + g \frac{\Delta t}{\Delta x_1} (d_{1,k}^{n+1} - d_{0,k}^{n+1}) = U_{1/2,k}^n + \Delta t f V_{0,k+1/2}^n \\
& - \frac{g \Delta t \sqrt{(U_{1/2,k}^n)^2 + V_{0,k+1/2}^2}}{C^2 d_{0,k}^n} U_{1/2,k}^n,
\end{aligned}$$

con $j = J - 1$, para todo $n \geq 0$,

$$\begin{aligned}
& U_{J-1/2,k}^{n+1} + \frac{\Delta t}{2\Delta x_1} U_{J-1/2,k}^n [(1 + \epsilon)(U_{J-1/2,k}^{n+1} - U_{J-3/2,k}^{n+1}) + (1 - \epsilon) \\
& (U_{J+1/2,k}^{n+1} - U_{J-1/2,k}^{n+1})] + \frac{\Delta t}{2\Delta x_2} V_{J-1,k+1/2}^n [(1 + \epsilon')(U_{J-1/2,k}^{n+1} - U_{J-1/2,k-1}^{n+1}) \\
& + (1 - \epsilon')(U_{J-1/2,k+1}^{n+1} - U_{J-1/2,k}^{n+1})] + g \frac{\Delta t}{\Delta x_1} (d_{J,k}^{n+1} - d_{J-1,k}^{n+1}) = U_{J-1/2,k}^n \\
& + \Delta t f V_{J-1,k+1/2}^n - \frac{g \Delta t \sqrt{(U_{J-1/2,k}^n)^2 + V_{J-1,k+1/2}^2}}{C^2 d_{J-1,k}^n} U_{J-1/2,k}^n, \\
\Rightarrow & U_{J-1/2,k}^{n+1} + \frac{\Delta t}{2\Delta x_1} U_{J-1/2,k}^n [(1 + \epsilon)(U_{J-1/2,k}^{n+1} - U_{J-3/2,k}^{n+1}) + (1 - \epsilon)(0)] \\
& + \frac{\Delta t}{2\Delta x_2} V_{J-1,k+1/2}^n [(1+)(U_{J-1/2,k}^{n+1} - U_{J-1/2,k-1}^{n+1}) + (1-)(U_{J-1/2,k+1}^{n+1} \\
& - U_{J-1/2,k}^{n+1})] + g \frac{\Delta t}{\Delta x_1} (d_{J,k}^{n+1} - d_{J-1,k}^{n+1}) = U_{J-1/2,k}^n + \Delta t f V_{J-1,k+1/2}^n \\
& - \frac{g \Delta t \sqrt{(U_{J-1/2,k}^n)^2 + V_{J-1,k+1/2}^2}}{C^2 d_{J-1,k}^n} U_{J-1/2,k}^n.
\end{aligned}$$

Si $k = K$ con $j = 0$, para todo $n \geq 0$,

$$\begin{aligned}
& U_{1/2,K}^{n+1} + \frac{\Delta t}{2\Delta x_1} U_{1/2,K}^n [(1 + \epsilon)(U_{1/2,K}^{n+1} - U_{-1/2,K}^{n+1}) + (1 - \epsilon)(U_{3/2,K}^{n+1} \\
& - U_{1/2,K}^{n+1})] + \frac{\Delta t}{2\Delta x_2} V_{0,K+1/2}^n [(1+)(U_{1/2,K}^{n+1} - U_{1/2,K-1}^{n+1}) + (1-)(\\
& (U_{1/2,K+1}^{n+1} - U_{1/2,K}^{n+1}))] + g \frac{\Delta t}{\Delta x_1} (d_{1,K}^{n+1} - d_{0,K}^{n+1}) = U_{1/2,K}^n + \Delta t f V_{0,K+1/2}^n \\
& - \frac{g \Delta t \sqrt{(U_{1/2,K}^n)^2 + V_{0,K+1/2}^2}}{C^2 d_{0,K}^n} U_{1/2,K}^n, \\
\Rightarrow & U_{1/2,K}^{n+1} + \frac{\Delta t}{2\Delta x_1} U_{1/2,K}^n [(1 + \epsilon)(0) + (1 - \epsilon)(U_{3/2,K}^{n+1} - U_{1/2,K}^{n+1})] \\
& + \frac{\Delta t}{2\Delta x_2} V_{0,K-1/2}^n [(1+)(U_{1/2,K}^{n+1} - U_{1/2,K-1}^{n+1}) + (1-)(0)] \\
& + g \frac{\Delta t}{\Delta x_1} (d_{1,K}^{n+1} - d_{0,K}^{n+1}) = U_{1/2,K}^n + \Delta t f V_{0,K-1/2}^n \\
& - \frac{g \Delta t \sqrt{(U_{1/2,K}^n)^2 + V_{0,K-1/2}^2}}{C^2 d_{0,K}^n} U_{1/2,K}^n,
\end{aligned}$$

con $j = J - 1$, para todo $n \geq 0$,

$$\begin{aligned}
& U_{J-1/2,K}^{n+1} + \frac{\Delta t}{2\Delta x_1} U_{J-1/2,K}^n [(1+\epsilon)(U_{J-1/2,K}^{n+1} - U_{J-3/2,K}^{n+1}) + (1-\epsilon) \\
& (U_{J+1/2,K}^{n+1} - U_{J-1/2,K}^{n+1})] + \frac{\Delta t}{2\Delta x_2} V_{J-1,K+1/2}^n [(1+)(U_{J-1/2,K}^{n+1} - U_{J-1/2,K-1}^{n+1}) \\
& + (1-)(U_{J-1/2,K+1}^{n+1} - U_{J-1/2,K}^{n+1})] + g \frac{\Delta t}{\Delta x_1} (d_{J,K}^{n+1} - d_{J-1,K}^{n+1}) = U_{J-1/2,K}^n \\
& + \Delta t f V_{J-1,K+1/2}^n - \frac{g\Delta t \sqrt{(U_{J-1/2,K}^n)^2 + V_{J-1,K+1/2}^2}}{C^2 d_{J-1,K}^n} U_{J-1/2,K}^n, \\
\Rightarrow & U_{J-1/2,K}^{n+1} + \frac{\Delta t}{2\Delta x_1} U_{J-1/2,K}^n [(1+\epsilon)(U_{J-1/2,K}^{n+1} - U_{J-3/2,K}^{n+1}) + (1-\epsilon)(0)] \\
& + \frac{\Delta t}{2\Delta x_2} V_{J-1,K-1/2}^n [(1+)(U_{J-1/2,K}^{n+1} - U_{J-1/2,K-1}^{n+1}) + (1-)(0)] \\
& + g \frac{\Delta t}{\Delta x_1} (d_{J,K}^{n+1} - d_{J-1,K}^{n+1}) = U_{J-1/2,K}^n + \Delta t f V_{J-1,K-1/2}^n \\
& - \frac{g\Delta t \sqrt{(U_{J-1/2,K}^n)^2 + V_{J-1,K-1/2}^2}}{C^2 d_{J-1,K}^n} U_{J-1/2,K}^n.
\end{aligned}$$

donde $\epsilon = U_{j+1/2,k}^n$ y $V_{j,k+1/2}$.

Considerando la tercera ecuación:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x_1} + V \frac{\partial V}{\partial x_2} + g \frac{\partial d}{\partial x_2} = -fU - \frac{V\sqrt{U^2 + V^2}}{C^2 d},$$

al discretizarla se tiene:

$$\begin{aligned}
V_{j,k+1/2}^{n+1} + \frac{\Delta t}{2\Delta x_1} U_{j+1/2,k}^n [(1+\epsilon)(V_{j,k+1/2}^{n+1} - V_{j-1,k+1/2}^{n+1}) + (1-\epsilon) \\
(V_{j+1,k+1/2}^{n+1} - V_{j,k+1/2}^{n+1})] + \frac{\Delta t}{2\Delta x_2} V_{j,k+1/2}^n [(1+)(V_{j,k+1/2}^{n+1} - V_{j,k-1/2}^{n+1}) \\
+ (1-)(V_{j,k+3/2}^{n+1} - V_{j,k+1/2}^{n+1})] + g \frac{\Delta t}{\Delta x_2} (d_{j,k+1}^{n+1} - d_{j,k}^{n+1}) = V_{j,k+1/2}^n \\
- \Delta t f U_{j+1/2,k}^n - \frac{g\Delta t \sqrt{(U_{j+1/2,k}^n)^2 + (V_{j,k+1/2}^n)^2}}{C^2 d_{j,k}^n} V_{j,k+1/2}^n.
\end{aligned} \quad (4.49)$$

donde $\epsilon = \text{sign}(U_{j+1/2,k}^n) = \text{sign}(V_{j,k+1/2}^n)$.

Nuevamente se debe considerar los casos cuando $k = 0$, $k = k$ y $k = K - 1$; es decir cuando k toma el valor inicial, un valor cualquiera entre $]0 : K[$ y el valor final, dentro de estos se debe estudiar los casos $j = 0$, $j = J$.

Si $k = 0$ con $j = 0$, para todo $n \geq 0$,

$$\begin{aligned}
& V_{0,1/2}^{n+1} + \frac{\Delta t}{2\Delta x_1} U_{1/2,0}^n [(1 + \epsilon)(V_{0,1/2}^{n+1} - V_{-1,1/2}^{n+1}) + (1 - \epsilon) \\
& (V_{1,1/2}^{n+1} - V_{0,1/2}^{n+1})] + \frac{\Delta t}{2\Delta x_2} V_{0,1/2}^n [(1+)(V_{0,1/2}^{n+1} - V_{0,-1/2}^{n+1}) \\
& + (1-)(V_{0,3/2}^{n+1} - V_{0,1/2}^{n+1})] + g \frac{\Delta t}{\Delta x_2} (d_{0,1}^{n+1} - d_{0,0}^{n+1}) = V_{0,1/2}^n \\
& - \Delta t f U_{1/2,0}^n - \frac{g \Delta t \sqrt{(U_{1/2,0}^n)^2 + (V_{0,1/2}^n)^2}}{C^2 d_{0,0}^n} V_{0,1/2}^n, \\
& \Rightarrow V_{0,1/2}^{n+1} + \frac{\Delta t}{2\Delta x_1} U_{1/2,0}^n [(1 + \epsilon)(0) + (1 - \epsilon) \\
& (V_{1,1/2}^{n+1} - V_{0,1/2}^{n+1})] + \frac{\Delta t}{2\Delta x_2} V_{0,1/2}^n [(1+)(0) + (1- \\
& (V_{0,3/2}^{n+1} - V_{0,1/2}^{n+1})] + g \frac{\Delta t}{\Delta x_2} (d_{0,1}^{n+1} - d_{0,0}^{n+1}) = V_{0,1/2}^n - \Delta t f \\
& U_{1/2,0}^n - \frac{g \Delta t \sqrt{(U_{1/2,0}^n)^2 + (V_{0,1/2}^n)^2}}{C^2 d_{0,0}^n} V_{0,1/2}^n,
\end{aligned}$$

con $j = J$, para todo $n \geq 0$,

$$\begin{aligned}
& V_{J,1/2}^{n+1} + \frac{\Delta t}{2\Delta x_1} U_{J+1/2,0}^n [(1 + \epsilon)(V_{J,1/2}^{n+1} - V_{J-1,1/2}^{n+1}) + (1 - \epsilon) \\
& (V_{J+1,1/2}^{n+1} - V_{J,1/2}^{n+1})] + \frac{\Delta t}{2\Delta x_2} V_{J,1/2}^n [(1+)(V_{J,1/2}^{n+1} - V_{J,-1/2}^{n+1}) \\
& + (1-)(V_{J,3/2}^{n+1} - V_{J,1/2}^{n+1})] + g \frac{\Delta t}{\Delta x_2} (d_{J,1}^{n+1} - d_{J,0}^{n+1}) = V_{J,1/2}^n \\
& - \Delta t f U_{J+1/2,0}^n - \frac{g \Delta t \sqrt{(U_{J+1/2,0}^n)^2 + (V_{J,1/2}^n)^2}}{C^2 d_{J,0}^n} V_{J,1/2}^n, \\
& \Rightarrow V_{J,1/2}^{n+1} + \frac{\Delta t}{2\Delta x_1} U_{J-1/2,0}^n [(1 + \epsilon)(V_{J,1/2}^{n+1} - V_{J-1,1/2}^{n+1}) + (1 - \epsilon)(0)] \\
& + \frac{\Delta t}{2\Delta x_2} V_{J,1/2}^n [(1+)(0) + (1-)(V_{J,3/2}^{n+1} - V_{J,1/2}^{n+1})] \\
& + g \frac{\Delta t}{\Delta x_2} (d_{J,1}^{n+1} - d_{J,0}^{n+1}) = V_{J,1/2}^n - \Delta t f U_{J-1/2,0}^n \\
& - \frac{g \Delta t \sqrt{(U_{J-1/2,0}^n)^2 + (V_{J,1/2}^n)^2}}{C^2 d_{J,0}^n} V_{J,1/2}^n.
\end{aligned}$$

Si $k = k$ con $j = 0$, para todo $n \geq 0$,

$$\begin{aligned}
& V_{0,k+1/2}^{n+1} + \frac{\Delta t}{2\Delta x_1} U_{1/2,k}^n [(1+\epsilon)(V_{0,k+1/2}^{n+1} - V_{-1,k+1/2}^{n+1}) + (1-\epsilon) \\
& (V_{1,k+1/2}^{n+1} - V_{0,k+1/2}^{n+1})] + \frac{\Delta t}{2\Delta x_2} V_{0,k+1/2}^n [(1+)(V_{0,k+1/2}^{n+1} - V_{0,k-1/2}^{n+1}) \\
& + (1-)(V_{0,k+3/2}^{n+1} - V_{0,k+1/2}^{n+1})] + g \frac{\Delta t}{\Delta x_2} (d_{0,k+1}^{n+1} - d_{0,k}^{n+1}) = V_{0,k+1/2}^n \\
& - \Delta t f U_{1/2,k}^n - \frac{g \Delta t \sqrt{(U_{1/2,k}^n)^2 + (V_{0,k+1/2}^n)^2}}{C^2 d_{0,k}^n} V_{0,k+1/2}^n, \\
\Rightarrow & V_{0,k+1/2}^{n+1} + \frac{\Delta t}{2\Delta x_1} U_{1/2,k}^n [(1+\epsilon)(0) + (1-\epsilon)(V_{1,k+1/2}^{n+1} - V_{0,k+1/2}^{n+1})] \\
& + \frac{\Delta t}{2\Delta x_2} V_{0,k+1/2}^n [(1+)(V_{0,k+1/2}^{n+1} - V_{0,k-1/2}^{n+1}) + (1- \\
& (V_{0,k+3/2}^{n+1} - V_{0,k+1/2}^{n+1}))] + g \frac{\Delta t}{\Delta x_2} (d_{0,k+1}^{n+1} - d_{0,k}^{n+1}) = V_{0,k+1/2}^n - \Delta t f U_{1/2,k}^n \\
& - \frac{g \Delta t \sqrt{(U_{1/2,k}^n)^2 + (V_{0,k+1/2}^n)^2}}{C^2 d_{0,k}^n} V_{0,k+1/2}^n,
\end{aligned}$$

con $j = J$, para todo $n \geq 0$,

$$\begin{aligned}
& V_{J,k+1/2}^{n+1} + \frac{\Delta t}{2\Delta x_1} U_{J+1/2,k}^n [(1+\epsilon)(V_{J,k+1/2}^{n+1} - V_{J-1,k+1/2}^{n+1}) + (1-\epsilon) \\
& (V_{J+1,k+1/2}^{n+1} - V_{J,k+1/2}^{n+1})] + \frac{\Delta t}{2\Delta x_2} V_{J,k+1/2}^n [(1+)(V_{J,k+1/2}^{n+1} - V_{J,k-1/2}^{n+1}) \\
& + (1-)(V_{J,k+3/2}^{n+1} - V_{J,k+1/2}^{n+1})] + g \frac{\Delta t}{\Delta x_2} (d_{J,k+1}^{n+1} - d_{J,k}^{n+1}) = V_{J,k+1/2}^n \\
& - \Delta t f U_{J+1/2,k}^n - \frac{g \Delta t \sqrt{(U_{J+1/2,k}^n)^2 + (V_{J,k+1/2}^n)^2}}{C^2 d_{J,k}^n} V_{J,k+1/2}^n, \\
\Rightarrow & V_{J,k+1/2}^{n+1} + \frac{\Delta t}{2\Delta x_1} U_{J-1/2,k}^n [(1+\epsilon)(V_{J,k+1/2}^{n+1} - V_{J-1,k+1/2}^{n+1}) + (1-\epsilon)(0)] \\
& + \frac{\Delta t}{2\Delta x_2} V_{J,k+1/2}^n [(1+)(V_{J,k+1/2}^{n+1} - V_{J,k-1/2}^{n+1}) + (1- \\
& (V_{J,k+3/2}^{n+1} - V_{J,k+1/2}^{n+1}))] + g \frac{\Delta t}{\Delta x_2} (d_{J,k+1}^{n+1} - d_{J,k}^{n+1}) = V_{J,k+1/2}^n \\
& - \Delta t f U_{J-1/2,k}^n - \frac{g \Delta t \sqrt{(U_{J-1/2,k}^n)^2 + (V_{J,k+1/2}^n)^2}}{C^2 d_{J,k}^n} V_{J,k+1/2}^n.
\end{aligned}$$

Si $k = K - 1$ con $j = 0$, para todo $n \geq 0$,

$$\begin{aligned}
& V_{0,K-1/2}^{n+1} + \frac{\Delta t}{2\Delta x_1} U_{1/2,K-1}^n [(1+\epsilon)(V_{0,K-1/2}^{n+1} - V_{-1,K-1/2}^{n+1}) \\
& + (1-\epsilon)(V_{1,K-1/2}^{n+1} - V_{0,K-1/2}^{n+1})] + \frac{\Delta t}{2\Delta x_2} V_{0,K-1/2}^n [(1+)(V_{0,K-1/2}^{n+1} \\
& - V_{0,K-3/2}^{n+1}) + (1-)(V_{0,K+1/2}^{n+1} - V_{0,K-1/2}^{n+1})] + g \frac{\Delta t}{\Delta x_2} (d_{0,K}^{n+1} - d_{0,K-1}^{n+1}) \\
& = V_{0,K-1/2}^n - \Delta t f U_{1/2,K-1}^n - \frac{g\Delta t \sqrt{(U_{1/2,K-1}^n)^2 + (V_{0,K-1/2}^n)^2}}{C^2 d_{0,K-1}^n} V_{0,K-1/2}^n, \\
& \Rightarrow V_{0,K-1/2}^{n+1} + \frac{\Delta t}{2\Delta x_1} U_{1/2,K-1}^n [(1+\epsilon)(0) + (1-\epsilon)(V_{1,K-1/2}^{n+1} \\
& - V_{0,K-1/2}^{n+1})] + \frac{\Delta t}{2\Delta x_2} V_{0,K-1/2}^n [(1+)(V_{0,K-1/2}^{n+1} - V_{0,K-3/2}^{n+1}) \\
& + (1-)(0)] + g \frac{\Delta t}{\Delta x_2} (d_{0,K}^{n+1} - d_{0,K-1}^{n+1}) = V_{0,K-1/2}^n - \Delta t f U_{1/2,K-1}^n \\
& \quad - \frac{g\Delta t \sqrt{(U_{1/2,K-1}^n)^2 + (V_{0,K-1/2}^n)^2}}{C^2 d_{0,K-1}^n} V_{0,K-1/2}^n.
\end{aligned}$$

con $j = J$, para todo $n \geq 0$,

$$\begin{aligned}
& V_{J,K-1/2}^{n+1} + \frac{\Delta t}{2\Delta x_1} U_{J+1/2,K-1}^n [(1+\epsilon)(V_{J,K-1/2}^{n+1} - V_{J-1,K-1/2}^{n+1}) \\
& + (1-\epsilon)(V_{J+1,K-1/2}^{n+1} - V_{J,K-1/2}^{n+1})] + \frac{\Delta t}{2\Delta x_2} V_{J,K-1/2}^n [(1+)(V_{J,K-1/2}^{n+1} \\
& - V_{J,K-3/2}^{n+1}) + (1-)(V_{J,K+1/2}^{n+1} - V_{J,K-1/2}^{n+1})] + g \frac{\Delta t}{\Delta x_2} (d_{J,K}^{n+1} - d_{J,K-1}^{n+1}) \\
& = V_{J,K-1/2}^n - \Delta t f U_{J+1/2,K-1}^n - \frac{g\Delta t \sqrt{(U_{J+1/2,K-1}^n)^2 + (V_{J,K-1/2}^n)^2}}{C^2 d_{J,K-1}^n} V_{J,K-1/2}^n, \\
& \Rightarrow V_{J,K-1/2}^{n+1} + \frac{\Delta t}{2\Delta x_1} U_{J-1/2,K-1}^n [(1+\epsilon)(V_{J,K-1/2}^{n+1} - V_{J-1,K-1/2}^{n+1}) \\
& + (1-\epsilon)(0)] + \frac{\Delta t}{2\Delta x_2} V_{J,K-1/2}^n [(1+)(V_{J,K-1/2}^{n+1} - V_{J,K-3/2}^{n+1}) \\
& + (1-)(0)] + g \frac{\Delta t}{\Delta x_2} (d_{J,K}^{n+1} - d_{J,K-1}^{n+1}) = V_{J,K-1/2}^n \\
& \quad - \Delta t f U_{J-1/2,K-1}^n - \frac{g\Delta t \sqrt{(U_{J-1/2,K-1}^n)^2 + (V_{J,K-1/2}^n)^2}}{C^2 d_{J,K-1}^n} V_{J,K-1/2}^n.
\end{aligned}$$

donde $\epsilon = U_{j+1/2,k}^n$ y $\epsilon' = V_{j,k+1/2}$.

Por lo que el sistema a resolver es de la forma:

$$\begin{aligned}
& I_d d^{n+1} + \frac{\Delta t}{\Delta x_1} v_1 M_2 U^{n+1} + \frac{\Delta t}{1\Delta x_1} v_2 (1 + \epsilon) M_3 d^{n+1} + \frac{\Delta t}{2\Delta x_1} v_2 (1 - \epsilon) M_4 d^{n+1} \quad (4.50) \\
& + \frac{\Delta t}{\Delta x_2} v_1 M_5 V^{n+1} + \frac{\Delta t}{2\Delta x_2} v_3 (1 + \epsilon) M_6 d^{n+1} + \frac{\Delta t}{2\Delta x_2} v_3 (1 - \epsilon) M_7 d^{n+1} = d^n, \\
& \Rightarrow I_U U^{n+1} + \frac{\Delta t}{2\Delta x_1} v_4 (1 + \epsilon) M_9 U^{n+1} + \frac{\Delta t}{2\Delta x_1} v_4 (1 - \epsilon) M_{10} U^{n+1} \\
& + \frac{\Delta t}{2\Delta x_2} v_5 (1 + \epsilon) M_{11} U^{n+1} + \frac{\Delta t}{2\Delta x_2} v_5 (1 - \epsilon) M_{12} U^{n+1} \\
& + g \frac{\Delta t}{\Delta x_1} M_{13} d^{n+1} = U^n + \Delta t f v_6 - \frac{g\Delta t}{C^2} \Delta t v_7 \cdot v_8, \\
& \Rightarrow I_V V^{n+1} + \frac{\Delta t}{2\Delta x_1} v_9 (1 + \epsilon) M_{15} V^{n+1} + \frac{\Delta t}{2\Delta x_1} v_9 (1 - \epsilon) M_{16} V^{n+1} \\
& + \frac{\Delta t}{2\Delta x_2} v_{10} (1 + \epsilon) M_{17} V^{n+1} + \frac{\Delta t}{\Delta x_2} v_{10} (1 - \epsilon) M_{18} V^{n+1} \\
& + g \frac{\Delta t}{\Delta x_2} M_{19} d^{n+1} = V^n - \Delta t f v_1 - \frac{g\Delta t}{C^2} v_{12} \cdot v_{13},
\end{aligned}$$

donde la matriz I_d tiene dimensión $(J + 1) \cdot (K + 1) \times (J + 1) \cdot (k + 1)$, la matriz I_U tiene dimensión $(K + 1) \cdot J \times J \cdot (K + 1)$, la matriz I_V tiene dimensión $(J + 1) \cdot K \times (J + 1) \cdot K$ y las matrices $M_2, M_3, M_4, M_5, M_6, M_7, M_9, M_{10}, M_{11}, M_{12}, M_{13}, M_{15}, M_{16}, M_{17}, M_{18}$ y M_{19} son de la forma:

Para la primera ecuación:

$$M_2 = \begin{pmatrix} m_2 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & m_2 & \ddots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \dots & m_2 \end{pmatrix}_{(J+1) \cdot (K+1) \times J \cdot (K+1)},$$

donde

$$m_2 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \dots & -1 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}_{(J+1) \times J},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} m_3 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & m_3 & \ddots & \mathbf{0} \\ \dots & \ddots & \ddots & \dots \\ \mathbf{0} & \dots & \dots & m_3 \end{pmatrix}_{(J+1) \cdot (K+1) \times (J+1) \cdot (K+1)},$$

donde

$$m_3 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix}_{(J+1) \times (J+1)},$$

$$M_4 = \begin{pmatrix} m_4 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & m_4 & \ddots & \mathbf{0} \\ \dots & \ddots & \ddots & \dots \\ \mathbf{0} & \dots & \dots & m_4 \end{pmatrix}_{(J+1) \cdot (K+1) \times (J+1) \cdot (K+1)},$$

donde

$$m_4 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \ddots & -1 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(J+1) \times (J+1)},$$

$$M_5 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ m_5 & m_5' & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \ddots & m_5 & m_5' \\ \mathbf{0} & \dots & \dots & \mathbf{0} \end{pmatrix}_{(J+1) \cdot (K+1) \times (J+1) \cdot K},$$

donde

$$m_5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & -1 \end{pmatrix}_{(J+1) \times (J+1)}, \quad m_5' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}_{(J+1) \times (J+1)},$$

$$M_6 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ m_6 & m_6' & \mathbf{0} & \ddots \\ \mathbf{0} & \ddots & \ddots & \ddots \\ \mathbf{0} & \dots & m_6 & m_6' \end{pmatrix}_{(J+1) \cdot (K+1) \times (J+1) \cdot (K+1)},$$

$$M_7 = \begin{pmatrix} m_7 & m_7' & \mathbf{0} & \dots \\ \mathbf{0} & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \ddots & m_7 & m_7' \\ \mathbf{0} & \dots & \dots & \mathbf{0} \end{pmatrix}_{(J+1) \cdot (K+1) \times (J+1) \cdot (K+1)},$$

donde $m_5 = m_6 = m_7$ y $m_5' = m_6' = m_7'$. Y los vectores diagonalizados v_1 , v_2 y v_3 son de la forma:

$$v_1 = \begin{pmatrix} d_{:,0}^n & \mathbf{0} & \dots & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & d_{:,k}^n & \ddots & \ddots \\ \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dots & \dots & \mathbf{0} & d_{:,K}^n \end{pmatrix}_{(J+1) \cdot (K+1) \times (J+1) \cdot (K+1)},$$

donde:

$$d_{:,k}^n = \begin{pmatrix} d_{0,k}^n & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & d_{j,k}^n & \ddots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & d_{J,k}^n \end{pmatrix}_{(J+1) \times (J+1)},$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} U_{:,0}^n & \mathbf{0} & \dots & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & U_{:,1}^n & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & U_{:,K}^n & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \dots & \mathbf{0} & U_{:,K}^n \end{pmatrix}_{(J+1) \cdot (K+1) \times (J+1) \cdot (K+1)},$$

donde:

$$U_{j+1/2,k}^n = \begin{pmatrix} U_{1/2,k}^n & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & U_{3/2,k}^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & U_{j-1/2,k}^n & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & U_{j-1/2,k}^n \end{pmatrix}_{(j+1) \times (j+1)},$$

$$v_3 = \begin{pmatrix} V_{:,1/2} & \mathbf{0} & \dots & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} & \dots & \vdots \\ \mathbf{0} & \ddots & \ddots & \mathbf{0} & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & V_{:,j-1/2}^n & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \dots & \mathbf{0} & V_{:,j-1/2}^n \end{pmatrix}_{(j+1) \cdot (K+1) \times (j+1) \cdot (K+1)},$$

donde:

$$V_{:,k+1/2} = \begin{pmatrix} V_{0,1/2}^n & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & V_{1,1/2}^n & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & V_{j-1,k+1/2}^n & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & V_{j,k+1/2}^n \end{pmatrix}_{(j+1) \times (j+1)}.$$

Para la ecuacion 2:

$$M_9 = \begin{pmatrix} m_9 & \mathbf{0} & \dots & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & m_9 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} & m_9 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dots & \dots & \mathbf{0} & m_9 \end{pmatrix}_{(K+1) \cdot J \times (K+1) \cdot J},$$

donde:

$$m_9 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix}_{J \times J},$$

$$M_{10} = \begin{pmatrix} m_{10} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & m_{10} & \ddots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \dots & m_{10} \end{pmatrix}_{(K+1) \cdot J \times (K+1) \cdot J},$$

donde:

$$m_{10} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \ddots & -1 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}_{J \times J},$$

$$M_{11} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \dots & \dots & \dots & \mathbf{0} \\ m_{11} & m_{11}' & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & m_{11} & m_{11}' & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \dots & m_{11} & m_{11}' \end{pmatrix}_{(K+1) \cdot J \times (K+1) \cdot J},$$

donde

$$m_{11} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix}_{J \times J}, \quad m_{11}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{J \times J},$$

$$M_{12} = \begin{pmatrix} m_{12} & m_{12}' & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & m_{12} & m_{12}' & \ddots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & m_{12} & m_{12}' \\ \mathbf{0} & \dots & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}_{(K+1) \cdot J \times (K+1) \cdot J},$$

donde $m_{11} = m_{12}$ y $m_{11}' = m_{12}'$,

$$M_{13} = \begin{pmatrix} m_{13} & \mathbf{0} & \dots & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & m_{13} & \ddots & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & m_{13} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dots & \dots & \mathbf{0} & m_{13} \end{pmatrix}_{(K+1) \cdot J \times (K+1) \cdot (J+1)},$$

donde

$$m_{13} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}_{J \times (J+1)}.$$

Los vectores v_4, v_5, v_6, v_7 y v_8 son de la forma:

$$v_4 = \begin{pmatrix} U_{:,0}^n & \mathbf{0} & \dots & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & U_{:,1}^n & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & U_{:,J-1}^n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dots & \dots & \mathbf{0} & U_{:,J}^n \end{pmatrix}_{(K+1) \cdot J \times (K+1) \cdot J},$$

donde

$$U_{:,k} = \begin{pmatrix} U_{1/2,k}^n & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & U_{3/2,k}^n & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & U_{J-3/2,k}^n & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & U_{J-1/2,k}^n \end{pmatrix}_{J \times J},$$

$$v_5 = \begin{pmatrix} V_{:,1/2}^n & \mathbf{0} & \dots & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & V_{:,3/2}^n & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & V_{:,J-1/2}^n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dots & \dots & \dots & V_{:,J-1/2}^n \end{pmatrix}_{(K+1) \cdot J \times (K+1) \cdot J},$$

donde:

$$V_{:,k+1/2} = \begin{pmatrix} V_{0,k+1/2}^n & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & V_{1,k+1/2}^n & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & V_{J-2,k+1/2} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & V_{J-1,k+1/2}^n \end{pmatrix}_{J \times J},$$

$$v_6 = \begin{pmatrix} V_{0,1/2}^n \\ \vdots \\ V_{J-1,1/2}^n \\ \vdots \\ V_{0,J-1/2}^n \\ \vdots \\ V_{J-1,J-1/2}^n \\ V_{0,J-1/2}^n \\ \vdots \\ V_{J-1,J-1/2}^n \end{pmatrix}_{J \times (K+1)}, v_7 = \sqrt{U^{n^2} + v_6^2},$$

$$v_8 = \begin{pmatrix} 1/d_{:,0}^n & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1/d_{:,1}^n & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1/d_{:,J-1}^n & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1/d_{:,J}^n \end{pmatrix}_{(K+1) \cdot J \times (K+1) \cdot J},$$

donde:

$$1/d_{:,k}^n = \begin{pmatrix} 1/d_{0,k}^n & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1/d_{1,k}^n & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1/d_{J-2,k}^n & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1/d_{J-1,k}^n \end{pmatrix}_{(K+1) \cdot J \times (K+1) \cdot J}.$$

Finalmente, para la tercera ecuación:

$$M_{15} = \begin{pmatrix} m_{15} & \mathbf{0} & \dots & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & m_{15} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & m_{15} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dots & \dots & \mathbf{0} & m_{15} \end{pmatrix}_{(J+1) \cdot K \times (J+1) \cdot K},$$

donde

$$m_{15} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}_{K \times K},$$

$$M_{16} = \begin{pmatrix} m_{16} & \mathbf{0} & \dots & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & m_{16} & 0 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & m_{16} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dots & \dots & \mathbf{0} & m_{16} \end{pmatrix}_{(J+1) \cdot K \times (J+1) \cdot K},$$

donde:

$$m_{16} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}_{K \times K},$$

$$M_{17} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \dots & \mathbf{0} \\ m_{17} & m_{17}' & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \dots & m_{17} & m_{17}' \end{pmatrix}_{(J+1) \cdot K \times (J+1) \cdot K},$$

donde:

$$m_{17} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & -1 \end{pmatrix}_{(J+1) \cdot K \times (J+1) \cdot K}, m_{17}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}_{(J+1) \cdot K \times (J+1) \cdot K},$$

$$M_{18} = \begin{pmatrix} m_{18} & m_{18}' & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \dots & m_{18} & m_{18}' \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \dots & \mathbf{0} \end{pmatrix}_{(J+1) \cdot K \times (J+1) \cdot K},$$

$$M_{19} = \begin{pmatrix} m_{19} & m_{19}' & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & m_{19} & m_{19}' & \ddots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & m_{19} & m_{19}' \end{pmatrix}_{(J+1) \cdot K \times (J+1) \cdot (K+1)},$$

donde se tiene $m_{17} = m_{18} = m_{19}$ y $m_{17}' = m_{18}' = m_{19}'$. Y en el caso de los vectores $v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}$ y v_{13} son de la forma:

$$v_9 = \begin{pmatrix} U_{:,0}^n & \mathbf{0} & \dots & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & U_{:,1}^n & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & U_{:,J-2}^n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dots & \dots & \mathbf{0} & U_{:,J-1}^n \end{pmatrix}_{(J+1) \cdot K \times (J+1) \cdot K},$$

donde:

$$U_{:,k}^n = \begin{pmatrix} U_{1/2,k}^n & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & U_{3/2,k}^n & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & U_{J-1/2,k}^n & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & U_{J-1/2,k}^n \end{pmatrix}_{(J+1) \times (J+1)},$$

$$v_{10} = \begin{pmatrix} V_{:,1/2}^n & \mathbf{0} & \dots & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & V_{:,3/2}^n & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & V_{:,J-3/2}^n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dots & \dots & \mathbf{0} & V_{:,J-1/2}^n \end{pmatrix}_{(J+1) \cdot K \times (J+1) \cdot K},$$

donde:

$$V_{:,k+1/2}^n = \begin{pmatrix} V_{0,k+1/2}^n & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & V_{1,k+1/2}^n & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & V_{J-1,k+1/2}^n & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & V_{J,k+1/2}^n \end{pmatrix}_{(J+1) \times (J+1)},$$

$$v_{11} = \begin{pmatrix} U_{1/2,0}^n \\ \vdots \\ U_{J-1/2,0}^n \\ U_{J-1/2,0}^n \\ \vdots \\ U_{1/2,k}^n \\ \vdots \\ U_{J-1/2,k}^n \\ U_{J-1/2,k}^n \\ \vdots \\ U_{1/2,J-1}^n \\ \vdots \\ U_{J-1/2,J-1}^n \\ U_{J-1/2,J-1}^n \end{pmatrix}_{(J+1) \times K}, \quad v_{12} = \sqrt{v_{11}^2 + V^n^2},$$

$$v_{13} = \begin{pmatrix} 1/d_{:,0}^n & \mathbf{0} & \dots & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1/d_{:,1}^n & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & 1/d_{:,J-2}^n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dots & \dots & \mathbf{0} & 1/d_{:,J-1}^n \end{pmatrix}_{(J+1) \cdot K \times (J+1) \cdot K}.$$

Se tomarán los parámetros $N = 100$, $J = 50$ y $K = 50$; por lo que por definición se tiene que:

- $\Delta t = 0,01$,
- $\Delta x_1 = 0,02$ y
- $\Delta x_2 = 0,02$.

Los resultados que se muestran a continuación:

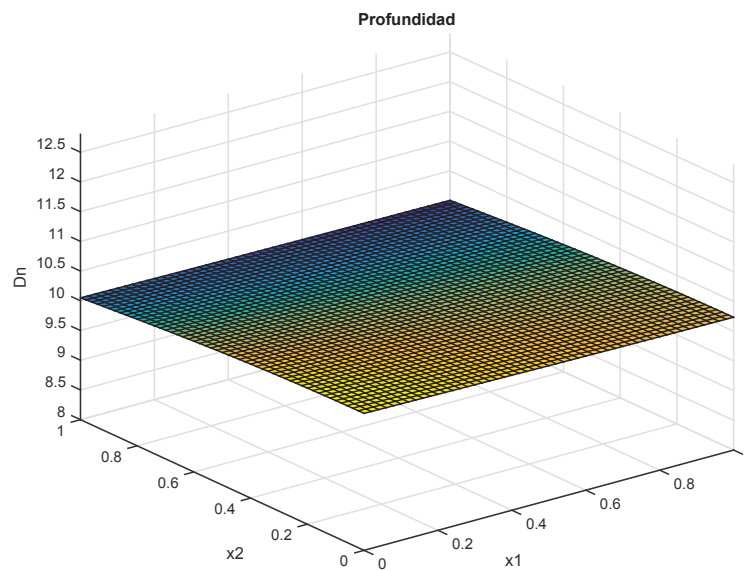


Figura 4.44: Aproximación de la solución para la función Profundidad considerando $\Delta x_1 = 0,02$ y $\Delta x_2 = 0,02$

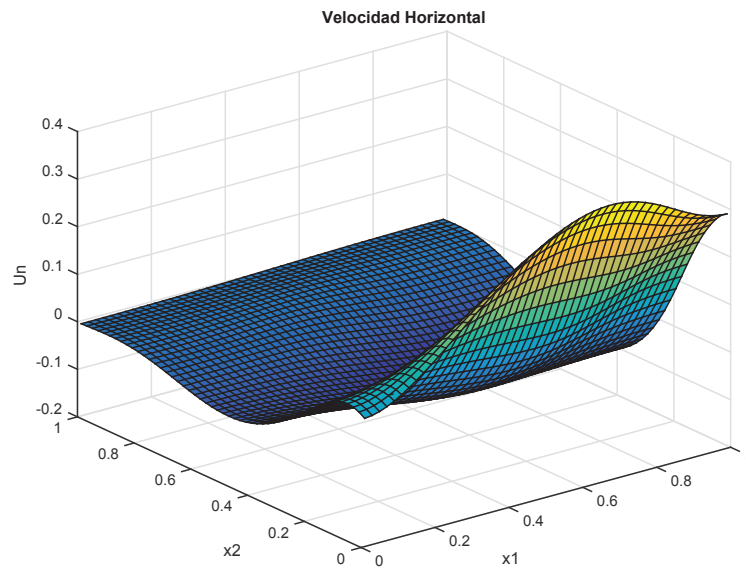


Figura 4.45: Aproximación de la solución para la función Velocidad Horizontal considerando $\Delta x_1 = 0,02$ y $\Delta x_2 = 0,02$

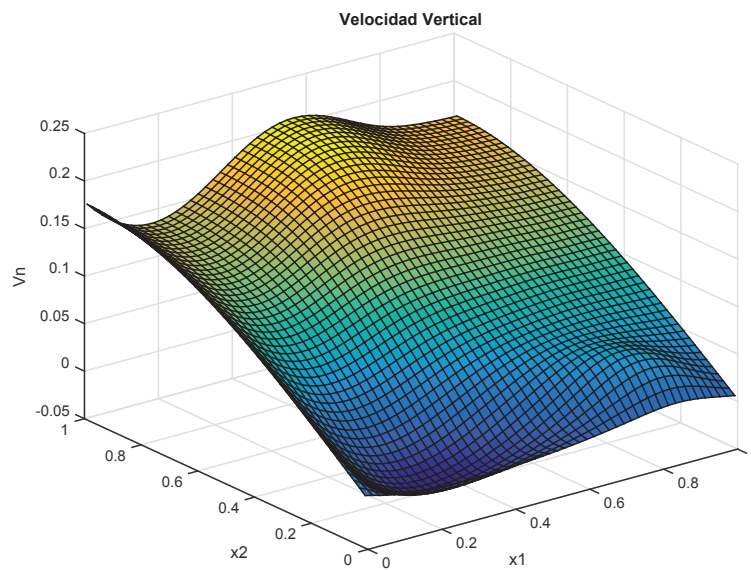


Figura 4.46: Aproximación de la solución para la función Velocidad Vertical considerando $\Delta x_1 = 0,02$ y $\Delta x_2 = 0,02$

Se debe tomar en cuenta que la selección de parámetros para Δx_1 y Δx_2 es el mostrado dado que si se tomara un valor más pequeño las dimensiones de las matrices sería muy grande.

A continuación, el siguiente gráfico muestra el número de iteraciones que ejecuta el método de Newton en cada iteración temporal con los parámetros $\Delta t = 0,01$, $\Delta x_1 = 0,02$ y $\Delta x_2 = 0,02$:

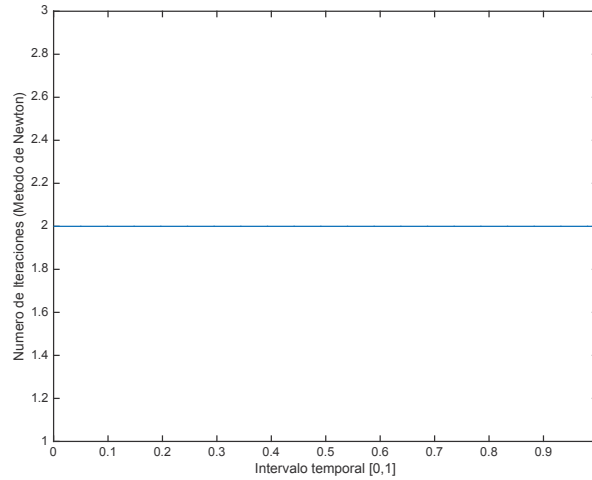


Figura 4.47: Número de iteraciones del método de Newton en cada iteración temporal

Se puede observar que en cada iteración temporal se necesitaron de 2 iteraciones del método de Newton.

4.3.2. Método Euler Semi-Implícito, aplicando el esquema semi-lagrangiano

Así como en el caso de las ecuaciones de Shallow-Water en una dimensión, para el tratamiento de las ecuaciones en dos dimensiones el esquema semi-lagrangiano es conservativo al discretizar términos advectivos. Por este motivo, nuevamente, se utilizará el esquema upwind para los términos no advectivos.

Haciendo referencia a la primera ecuación del sistema (4.44), al discretizarla se tiene:

$$\begin{aligned}
 d_{j,k}^{n+1} + \frac{\Delta t}{\Delta x_1} d_{j,k}^n (U_{j+1/2,k}^{n+1} - U_{j-1/2,k}^{n+1}) + \frac{\Delta t}{\Delta x_2} (V_{j,k+1/2}^{n+1} - V_{j,k-1/2}^{n+1}) \\
 = d_{j,k}^n + \frac{\Delta t}{\delta} [d^n(x_{j,k}^1 - \delta U_{j+1/2,k}^n, x_{j,k}^2 - \delta V_{j,k+1/2}^n) - d_{j,k}^n],
 \end{aligned}
 \tag{4.51}$$

donde $d^n(\cdot, \cdot)$ es la función de interpolación, que en este caso se considerará la inter-

polación bilineal, debido a la forma en la que se considera la malla de discretización (Arakawa) y la ubicación de las variables permite que la aproximación mediante esta función de interpolación sea buena, de esta manera se espera obtener una mejor aproximación de la solución.

En el esquema (4.51), se deben considerar los casos cuando $k = 0, k = k, k = K$; es decir cuando k toma el valor inicial, un valor cualquiera entre $]0 : K[$ y el valor final, dentro de estos cuando $j = 0$ y $j = J$.

Si $K = 0$ con $j = 0$, para $n \geq 0$,

$$\begin{aligned} d_{0,0}^{n+1} &+ \frac{\Delta t}{\Delta x_1} d_{0,0}^n (U_{1/2,0}^{n+1} - U_{-1/2,0}^{n+1}) + \frac{\Delta t}{\Delta x_2} (V_{0,1/2}^{n+1} - V_{0,-1/2}^{n+1}) \\ &= d_{0,0}^n + \frac{\Delta t}{\delta} [d^n(x_{0,0}^1 - \delta U_{1/2,0}^n, x_{0,0}^2 - \delta V_{0,1/2}^n) - d_{0,0}^n], \\ &\Rightarrow d_{0,0}^{n+1} + \frac{\Delta t}{\Delta x_1} d_{0,0}^n(0) + \frac{\Delta t}{\Delta x_2}(0) = d_{0,0}^n \\ &+ \frac{\Delta t}{\delta} [d^n(x_{0,0}^1 - \delta U_{1/2,0}^n, x_{0,0}^2 - \delta V_{0,1/2}^n) - d_{0,0}^n], \end{aligned}$$

con $j = J$, para $n \geq 0$,

$$\begin{aligned} d_{J,0}^{n+1} &+ \frac{\Delta t}{\Delta x_1} d_{J,0}^n (U_{J+1/2,0}^{n+1} - U_{J-1/2,0}^{n+1}) + \frac{\Delta t}{\Delta x_2} (V_{J,1/2}^{n+1} - V_{J,-1/2}^{n+1}) \\ &= d_{J,0}^n + \frac{\Delta t}{\delta} [d^n(x_{J,0}^1 - \delta U_{J+1/2,0}^n, x_{J,0}^2 - \delta V_{J,1/2}^n) - d_{J,0}^n], \\ &\Rightarrow d_{J,0}^{n+1} + \frac{\Delta t}{\Delta x_1} d_{J,0}^n(0) + \frac{\Delta t}{\Delta x_2}(0) = d_{J,0}^n \\ &+ \frac{\Delta t}{\delta} [d^n(x_{J,0}^1 - \delta U_{J-1/2,0}^n, x_{J,0}^2 - \delta V_{J,1/2}^n) - d_{J,0}^n]. \end{aligned}$$

Si $K = k$ con $j = 0$, para $n \geq 0$,

$$\begin{aligned} d_{0,k}^{n+1} &+ \frac{\Delta t}{\Delta x_1} d_{0,k}^n (U_{1/2,k}^{n+1} - U_{-1/2,k}^{n+1}) + \frac{\Delta t}{\Delta x_2} (V_{0,k+1/2}^{n+1} - V_{0,k-1/2}^{n+1}) \\ &= d_{0,k}^n + \frac{\Delta t}{\delta} [d^n(x_{0,k}^1 - \delta U_{1/2,k}^n, x_{0,k}^2 - \delta V_{0,k+1/2}^n) - d_{0,k}^n], \\ &\Rightarrow d_{0,k}^{n+1} + \frac{\Delta t}{\Delta x_1} d_{0,k}^n(0) + \frac{\Delta t}{\Delta x_2} (V_{0,k+1/2}^{n+1} - V_{0,k-1/2}^{n+1}) \\ &= d_{0,k}^n + \frac{\Delta t}{\delta} [d^n(x_{0,k}^1 - \delta U_{1/2,k}^n, x_{0,k}^2 - \delta V_{0,k+1/2}^n) - d_{0,k}^n], \end{aligned}$$

con $j = J$, para $n \geq 0$,

$$\begin{aligned}
d_{J,k}^{n+1} &+ \frac{\Delta t}{\Delta x_1} d_{J,k}^n (U_{J+1/2,k}^{n+1} - U_{J-1/2,k}^{n+1}) + \frac{\Delta t}{\Delta x_2} (V_{J,k+1/2}^{n+1} - V_{J,k-1/2}^{n+1}) \\
&= d_{J,k}^n + \frac{\Delta t}{\delta} [d^n(x_{J,k}^1 - \delta U_{J+1/2,k}^n, x_{J,k}^2 - \delta V_{J,k+1/2}^n) - d_{J,k}^n], \\
&\Rightarrow d_{J,k}^{n+1} + \frac{\Delta t}{\Delta x_1} d_{J,k}^n(0) + \frac{\Delta t}{\Delta x_2} (V_{J,k+1/2}^{n+1} - V_{J,k-1/2}^{n+1}) \\
&= d_{J,k}^n + \frac{\Delta t}{\delta} [d^n(x_{J,k}^1 - \delta U_{J-1/2,k}^n, x_{J,k}^2 - \delta V_{J,k+1/2}^n) - d_{J,k}^n].
\end{aligned}$$

Si $K = K$ con $j = 0$, para $n \geq 0$,

$$\begin{aligned}
d_{0,K}^{n+1} &+ \frac{\Delta t}{\Delta x_1} d_{0,K}^n (U_{1/2,K}^{n+1} - U_{-1/2,K}^{n+1}) + \frac{\Delta t}{\Delta x_2} (V_{0,K+1/2}^{n+1} - V_{0,K-1/2}^{n+1}) \\
&= d_{0,K}^n + \frac{\Delta t}{\delta} [d^n(x_{0,K}^1 - \delta U_{1/2,K}^n, x_{0,K}^2 - \delta V_{0,K+1/2}^n) - d_{0,K}^n], \\
&\Rightarrow d_{0,K}^{n+1} + \frac{\Delta t}{\Delta x_1} d_{0,K}^n(0) + \frac{\Delta t}{\Delta x_2} (0) \\
&= d_{0,K}^n + \frac{\Delta t}{\delta} [d^n(x_{0,K}^1 - \delta U_{1/2,K}^n, x_{0,K}^2 - \delta V_{0,K-1/2}^n) - d_{0,K}^n],
\end{aligned}$$

con $j = J$, para $n \geq 0$,

$$\begin{aligned}
d_{J,K}^{n+1} &+ \frac{\Delta t}{\Delta x_1} d_{J,K}^n (U_{J+1/2,K}^{n+1} - U_{J-1/2,K}^{n+1}) + \frac{\Delta t}{\Delta x_2} (V_{J,K+1/2}^{n+1} - V_{J,K-1/2}^{n+1}) \\
&= d_{J,K}^n + \frac{\Delta t}{\delta} [d^n(x_{J,K}^1 - \delta U_{J+1/2,K}^n, x_{J,K}^2 - \delta V_{J,K+1/2}^n) - d_{J,K}^n], \\
&\Rightarrow d_{J,K}^{n+1} + \frac{\Delta t}{\Delta x_1} d_{J,K}^n(0) + \frac{\Delta t}{\Delta x_2} (0) \\
&= d_{J,K}^n + \frac{\Delta t}{\delta} [d^n(x_{J,K}^1 - \delta U_{J-1/2,K}^n, x_{J,K}^2 - \delta V_{J,K-1/2}^n) - d_{J,K}^n],
\end{aligned}$$

Al discretizar la segunda ecuacion del problema (4.44), se tiene:

$$\begin{aligned}
& U_{j+1/2,k}^{n+1} + g \frac{\Delta t}{\Delta x_1} (d_{j+1,k}^{n+1} - d_{j,k}^{n+1}) = U_{j+1/2,k}^n + \quad (4.52) \\
& \frac{\Delta t}{\delta} [U^n(x_{j+1/2,k}^1 - \delta U_{j+1/2,k}^n, x_{j+1/2,k}^2 - \delta V_{j,k+1/2}^n) - U_{j+1/2,k}^n] \\
& + \Delta t f V_{j,k+1/2}^n - \frac{g \Delta t \sqrt{(U_{j+1/2,k}^n)^2 + (V_{j,k+1/2}^n)^2}}{C^2 d_{j,k}^n} U_{j+1/2,k}^n,
\end{aligned}$$

donde $U^n(\cdot, \cdot)$ es la función de interpolación. Y como se mencionó anteriormente se utilizará la función de interpolación bilineal.

Para el esquema (4.52), se deben considerar los casos cuando $k = 0, k = k, k = K$ y dentro de estos, se estudiará cuando $j = 0, j = J - 1$.

Si $k = 0$ con $j = 0$, para $n \geq 0$,

$$\begin{aligned}
& U_{1/2,0}^{n+1} + g \frac{\Delta t}{\Delta x_1} (d_{1,0}^{n+1} - d_{0,0}^{n+1}) = U_{1/2,0}^n + \\
& \frac{\Delta t}{\delta} [U^n(x_{1/2,0}^1 - \delta U_{1/2,0}^n, x_{1/2,0}^2 - \delta V_{0,1/2}^n) - U_{1/2,0}^n] \\
& + \Delta t f V_{0,1/2}^n - \frac{g \Delta t \sqrt{(U_{1/2,0}^n)^2 + (V_{0,1/2}^n)^2}}{C^2 d_{0,0}^n} U_{1/2,0}^n,
\end{aligned}$$

con $j = J - 1$, para $n \geq 0$,

$$\begin{aligned}
& U_{J-1/2,0}^{n+1} + g \frac{\Delta t}{\Delta x_1} (d_{J,0}^{n+1} - d_{J-1,0}^{n+1}) = U_{J-1/2,0}^n + \\
& \frac{\Delta t}{\delta} [U^n(x_{J-1/2,0}^1 - \delta U_{J-1/2,0}^n, x_{J-1/2,0}^2 - \delta V_{J-1,1/2}^n) - U_{J-1/2,0}^n] \\
& + \Delta t f V_{J-1,1/2}^n - \frac{g \Delta t \sqrt{(U_{J-1/2,0}^n)^2 + (V_{J-1,1/2}^n)^2}}{C^2 d_{J-1,0}^n} U_{J-1/2,0}^n.
\end{aligned}$$

Si $k = k$ con $j = 0$, para $n \geq 0$,

$$\begin{aligned}
& U_{1/2,k}^{n+1} + g \frac{\Delta t}{\Delta x_1} (d_{1,k}^{n+1} - d_{0,k}^{n+1}) = U_{1/2,k}^n + \\
& \frac{\Delta t}{\delta} [U^n(x_{1/2,k}^1 - \delta U_{1/2,k}^n, x_{1/2,k}^2 - \delta V_{0,k+1/2}^n) - U_{1/2,k}^n] \\
& + \Delta t f V_{0,k+1/2}^n - \frac{g \Delta t \sqrt{(U_{1/2,k}^n)^2 + (V_{0,k+1/2}^n)^2}}{C^2 d_{0,k}^n} U_{1/2,k}^n,
\end{aligned}$$

con $j = J - 1$, para $n \geq 0$,

$$\begin{aligned}
& U_{J-1/2,k}^{n+1} + g \frac{\Delta t}{\Delta x_1} (d_{J,k}^{n+1} - d_{J-1,k}^{n+1}) = U_{J-1/2,k}^n + \\
& \frac{\Delta t}{\delta} [U^n(x_{J-1/2,k}^1 - \delta U_{J-1/2,k}^n, x_{J-1/2,k}^2 - \delta V_{J-1,k+1/2}^n) - U_{J-1/2,k}^n] \\
& + \Delta t f V_{J-1,k+1/2}^n - \frac{g \Delta t \sqrt{(U_{J-1/2,k}^n)^2 + (V_{J-1,k+1/2}^n)^2}}{C^2 d_{J-1,k}^n} U_{J-1/2,k}^n.
\end{aligned}$$

Si $k = K$ con $j = 0$, para $n \geq 0$,

$$\begin{aligned}
& U_{1/2,K}^{n+1} + g \frac{\Delta t}{\Delta x_1} (d_{1,K}^{n+1} - d_{0,K}^{n+1}) = U_{1/2,K}^n + \\
& \frac{\Delta t}{\delta} [U^n(x_{1/2,K}^1 - \delta U_{1/2,K}^n, x_{1/2,K}^2 - \delta V_{0,K+1/2}^n) - U_{1/2,K}^n] \\
& + \Delta t f V_{0,K+1/2}^n - \frac{g \Delta t \sqrt{(U_{1/2,K}^n)^2 + (V_{0,K+1/2}^n)^2}}{C^2 d_{0,K}^n} U_{1/2,K}^n, \\
& \Rightarrow U_{1/2,K}^{n+1} + g \frac{\Delta t}{\Delta x_1} (d_{1,K}^{n+1} - d_{0,K}^{n+1}) = U_{1/2,K}^n + \\
& \frac{\Delta t}{\delta} [U^n(x_{1/2,K}^1 - \delta U_{1/2,K}^n, x_{1/2,K}^2 - \delta V_{0,K-1/2}^n) - U_{1/2,K}^n] \\
& + \Delta t f V_{0,K-1/2}^n - \frac{g \Delta t \sqrt{(U_{1/2,K}^n)^2 + (V_{0,K-1/2}^n)^2}}{C^2 d_{0,K}^n} U_{1/2,K}^n,
\end{aligned}$$

con $j = J - 1$, para $n \geq 0$,

$$\begin{aligned}
& U_{J-1/2,K}^{n+1} + g \frac{\Delta t}{\Delta x_1} (d_{J,K}^{n+1} - d_{J-1,K}^{n+1}) = U_{J-1/2,K}^n + \\
& \frac{\Delta t}{\delta} [U^n(x_{J-1/2,K}^1 - \delta U_{J-1/2,K}^n, x_{J-1/2,K}^2 - \delta V_{J-1,K+1/2}^n) - U_{J-1/2,K}^n] \\
& + \Delta t f V_{J-1,K+1/2}^n - \frac{g \Delta t \sqrt{(U_{J-1/2,K}^n)^2 + (V_{J-1,K+1/2}^n)^2}}{C^2 d_{J-1,K}^n} U_{J-1/2,K}^n, \\
& \Rightarrow U_{J-1/2,K}^{n+1} + g \frac{\Delta t}{\Delta x_1} (d_{J,K}^{n+1} - d_{J-1,K}^{n+1}) = U_{J-1/2,K}^n + \\
& \frac{\Delta t}{\delta} [U^n(x_{J-1/2,K}^1 - \delta U_{J-1/2,K}^n, x_{J-1/2,K}^2 - \delta V_{J-1,K-1/2}^n) - U_{J-1/2,K}^n] \\
& + \Delta t f V_{J-1,K-1/2}^n - \frac{g \Delta t \sqrt{(U_{J-1/2,K}^n)^2 + (V_{J-1,K-1/2}^n)^2}}{C^2 d_{J-1,K}^n} U_{J-1/2,K}^n.
\end{aligned}$$

Finalmente, al discretizar la tercera ecuación del sistema (4.44) se tiene:

$$\begin{aligned}
& V_{j,k+1/2}^{n+1} + g \frac{\Delta t}{\Delta x_2} (d_{j,k+1}^{n+1} - d_{j,k}^{n+1}) = V_{j,k+1/2}^n \quad (4.53) \\
& + \frac{\Delta t}{\delta} [V^n(x_{j,k+1/2}^1 - \delta U_{j+1/2,k}^n, x_{j,k+1/2}^2 - \delta V_{j,k+1/2}^n) - V_{j,k+1/2}^n] \\
& - \Delta t f U_{j+1/2,k}^n - \frac{g \Delta t \sqrt{(U_{j+1/2,k}^n)^2 + (V_{j,k+1/2}^n)^2}}{C^2 d_{j,k}^n} V_{j,k+1/2}^n,
\end{aligned}$$

donde $V^n(\cdot, \cdot)$ es la función de interpolación. En el esquema (4.53) se deben considerar los casos $k = 0, k = k, k = K - 1$; es decir cuando k toma el valor inicial, un valor cualquiera entre $]0 : K[$ y el valor final, dentro de estos se debe estudiar los casos con $j = 0$ y $j = J$.

Si $k = 0$ con $j = 0$, para $n \geq 0$,

$$\begin{aligned}
& V_{0,1/2}^{n+1} + g \frac{\Delta t}{\Delta x_2} (d_{0,1}^{n+1} - d_{0,0}^{n+1}) = V_{0,1/2}^n \\
& + \frac{\Delta t}{\delta} [V^n(x_{0,1/2}^1 - \delta U_{1/2,0}^n, x_{0,1/2}^2 - \delta V_{0,1/2}^n) - V_{0,1/2}^n] \\
& - \Delta t f U_{1/2,0}^n - \frac{g \Delta t \sqrt{(U_{1/2,0}^n)^2 + (V_{0,1/2}^n)^2}}{C^2 d_{0,0}^n} V_{0,1/2}^n,
\end{aligned}$$

con $j = J$, para $n \geq 0$,

$$\begin{aligned}
& V_{J,1/2}^{n+1} + g \frac{\Delta t}{\Delta x_2} (d_{J,1}^{n+1} - d_{J,0}^{n+1}) = V_{J,1/2}^n \\
& + \frac{\Delta t}{\delta} [V^n(x_{J,1/2}^1 - \delta U_{J+1/2,0}^n, x_{J,1/2}^2 - \delta V_{J,1/2}^n) - V_{J,1/2}^n] \\
& - \Delta t f U_{J+1/2,0}^n - \frac{g \Delta t \sqrt{(U_{J+1/2,0}^n)^2 + (V_{J,1/2}^n)^2}}{C^2 d_{J,0}^n} V_{J,1/2}^n, \\
& \Rightarrow V_{J,1/2}^{n+1} + g \frac{\Delta t}{\Delta x_2} (d_{J,1}^{n+1} - d_{J,0}^{n+1}) = V_{J,1/2}^n \\
& + \frac{\Delta t}{\delta} [V^n(x_{J,1/2}^1 - \delta U_{J-1/2,0}^n, x_{J,1/2}^2 - \delta V_{J,1/2}^n) - V_{J,1/2}^n] \\
& - \Delta t f U_{J-1/2,0}^n - \frac{g \Delta t \sqrt{(U_{J-1/2,0}^n)^2 + (V_{J,1/2}^n)^2}}{C^2 d_{J,0}^n} V_{J,1/2}^n.
\end{aligned}$$

Si $k = k$ con $j = 0$, para $n \geq 0$,

$$\begin{aligned}
& V_{0,k+1/2}^{n+1} + g \frac{\Delta t}{\Delta x_2} (d_{0,k+1}^{n+1} - d_{0,k}^{n+1}) = V_{0,k+1/2}^n \\
& + \frac{\Delta t}{\delta} [V^n(x_{0,k+1/2}^1 - \delta U_{1/2,k}^n, x_{0,k+1/2}^2 - \delta V_{0,k+1/2}^n) - V_{0,k+1/2}^n] \\
& - \Delta t f U_{1/2,k}^n - \frac{g \Delta t \sqrt{(U_{1/2,k}^n)^2 + (V_{0,k+1/2}^n)^2}}{C^2 d_{0,k}^n} V_{0,k+1/2}^n,
\end{aligned}$$

con $j = J$, para $n \geq 0$,

$$\begin{aligned}
& V_{J,k+1/2}^{n+1} + g \frac{\Delta t}{\Delta x_2} (d_{J,k+1}^{n+1} - d_{J,k}^{n+1}) = V_{J,k+1/2}^n \\
& + \frac{\Delta t}{\delta} [V^n(x_{J,k+1/2}^1 - \delta U_{J+1/2,k}^n, x_{J,k+1/2}^2 - \delta V_{J,k+1/2}^n) - V_{J,k+1/2}^n] \\
& - \Delta t f U_{J+1/2,k}^n - \frac{g \Delta t \sqrt{(U_{J+1/2,k}^n)^2 + (V_{J,k+1/2}^n)^2}}{C^2 d_{J,k}^n} V_{J,k+1/2}^n, \\
& \Rightarrow V_{J,k+1/2}^{n+1} + g \frac{\Delta t}{\Delta x_2} (d_{J,k+1}^{n+1} - d_{J,k}^{n+1}) = V_{J,k+1/2}^n \\
& + \frac{\Delta t}{\delta} [V^n(x_{J,k+1/2}^1 - \delta U_{J-1/2,k}^n, x_{J,k+1/2}^2 - \delta V_{J,k+1/2}^n) - V_{J,k+1/2}^n] \\
& - \Delta t f U_{J-1/2,k}^n - \frac{g \Delta t \sqrt{(U_{J-1/2,k}^n)^2 + (V_{J,k+1/2}^n)^2}}{C^2 d_{J,k}^n} V_{J,k+1/2}^n.
\end{aligned}$$

Si $k = K - 1$ con $j = 0$, para $n \geq 0$,

$$\begin{aligned}
& V_{0,K-1/2}^{n+1} + g \frac{\Delta t}{\Delta x_2} (d_{0,K}^{n+1} - d_{0,K-1}^{n+1}) = V_{0,K-1/2}^n \\
& + \frac{\Delta t}{\delta} [V^n (x_{0,K-1/2}^1 - \delta U_{1/2,K-1}^n, x_{0,K-1/2}^2 - \delta V_{0,K-1/2}^n) - V_{0,K-1/2}^n] \\
& - \Delta t f U_{1/2,K-1}^n - \frac{g \Delta t \sqrt{(U_{1/2,K-1}^n)^2 + (V_{0,K-1/2}^n)^2}}{C^2 d_{0,K-1}^n} V_{0,K-1/2}^n,
\end{aligned}$$

con $j = J$, para $n \geq 0$,

$$\begin{aligned}
& V_{J,K-1/2}^{n+1} + g \frac{\Delta t}{\Delta x_2} (d_{J,K}^{n+1} - d_{J,K-1}^{n+1}) = V_{J,K-1/2}^n \\
& + \frac{\Delta t}{\delta} [V^n (x_{J,K-1/2}^1 - \delta U_{J+1/2,K-1}^n, x_{J,K-1/2}^2 - \delta V_{J,K-1/2}^n) - V_{J,K-1/2}^n] \\
& - \Delta t f U_{J+1/2,K-1}^n - \frac{g \Delta t \sqrt{(U_{J+1/2,K-1}^n)^2 + (V_{J,K-1/2}^n)^2}}{C^2 d_{J,K-1}^n} V_{J,K-1/2}^n, \\
& \Rightarrow V_{J,K-1/2}^{n+1} + g \frac{\Delta t}{\Delta x_2} (d_{J,K}^{n+1} - d_{J,K-1}^{n+1}) = V_{J,K-1/2}^n \\
& + \frac{\Delta t}{\delta} [V^n (x_{J,K-1/2}^1 - \delta U_{J-1/2,K-1}^n, x_{J,K-1/2}^2 - \delta V_{J,K-1/2}^n) - V_{J,K-1/2}^n] \\
& - \Delta t f U_{J-1/2,K-1}^n - \frac{g \Delta t \sqrt{(U_{J-1/2,K-1}^n)^2 + (V_{J,K-1/2}^n)^2}}{C^2 d_{J,K-1}^n} V_{J,K-1/2}^n.
\end{aligned}$$

El sistema a resolver es de la forma:

$$\begin{aligned}
I_d d^{n+1} + \frac{\Delta t}{\Delta x_1} v_1 M_2 U^{n+1} + \frac{\Delta t}{\Delta x_2} v_1 M_5 V^{n+1} &= d^n + \frac{\Delta t}{\delta} [\mathfrak{J} \mathfrak{N} \mathfrak{T}_1 - d^n] & (4.54) \\
\Rightarrow I_U U^{n+1} + g \frac{\Delta t}{\Delta x_1} M_{13} d^{n+1} &= U^n + \frac{\Delta t}{\delta} [\mathfrak{J} \mathfrak{N} \mathfrak{T}_2 - U^n] \\
&+ \Delta t f v_6 - \frac{g \Delta t}{C^2} v_7 v_8 U^n \\
\Rightarrow I_V V^{n+1} + g \frac{\Delta t}{\Delta x_2} M_{19} d^{n+1} &= V^n + \frac{\Delta t}{\delta} [\mathfrak{J} \mathfrak{N} \mathfrak{T}_3 - V^n] \\
&+ \Delta t f v_{11} - \frac{g \Delta t}{C^2} v_{12} v_{13} V^n
\end{aligned}$$

con

$$\mathfrak{N}\mathfrak{T}_1 = \left(\begin{array}{c} d^n(x_{0,0}^1 - \delta U_{1/2,0}^n, x_{0,0}^2 - \delta V_{0,1/2}^n) \\ \vdots \\ d^n(x_{J-1,0}^1 - \delta U_{J-1/2,0}^n, x_{J-1,0}^2 - \delta V_{J-1,1/2}^n) \\ d^n(x_{J,0}^1 - \delta U_{J-1/2,0}^n, x_{J,0}^2 - \delta V_{J,1/2}^n) \\ \vdots \\ d^n(x_{0,k}^1 - \delta U_{1/2,k}^n, x_{0,k}^2 - \delta V_{0,k+1/2}^n) \\ \vdots \\ d^n(x_{J-1,k}^1 - \delta U_{J-1/2,k}^n, x_{J-1,k}^2 - \delta V_{J-1,k+1/2}^n) \\ d^n(x_{J,k}^1 - \delta U_{J-1/2,k}^n, x_{J,k}^2 - \delta V_{J,k+1/2}^n) \\ \vdots \\ d^n(x_{0,K}^1 - \delta U_{1/2,K}^n, x_{0,K}^2 - \delta V_{0,K-1/2}^n) \\ \vdots \\ d^n(x_{J-1,K}^1 - \delta U_{J-1/2,K}^n, x_{J-1,K}^2 - \delta V_{J-1,K-1/2}^n) \\ d^n(x_{J,K}^1 - \delta U_{J-1/2,K}^n, x_{J,K}^2 - \delta V_{J,K-1/2}^n) \end{array} \right)_{(J+1) \cdot (K+1) \times 1}$$

$$\mathfrak{N}\mathfrak{T}_2 = \left(\begin{array}{c} U^n(x_{1/2,0}^1 - \delta U_{1/2,0}^n, x_{1/2,0}^2 - \delta V_{0,1/2}^n) \\ \vdots \\ U^n(x_{J-1/2,0}^1 - \delta U_{J-1/2,0}^n, x_{J-1/2,0}^2 - \delta V_{J-1,1/2}^n) \\ \vdots \\ U^n(x_{1/2,k}^1 - \delta U_{1/2,k}^n, x_{1/2,k}^2 - \delta V_{0,k+1/2}^n) \\ \vdots \\ U^n(x_{J-1/2,k}^1 - \delta U_{J-1/2,k}^n, x_{J-1/2,k}^2 - \delta V_{J-1,k+1/2}^n) \\ \vdots \\ U^n(x_{1/2,K-1}^1 - \delta U_{1/2,K-1}^n, x_{1/2,K-1}^2 - \delta V_{0,K-1/2}^n) \\ \vdots \\ U^n(x_{J-1/2,K-1}^1 - \delta U_{J-1/2,K-1}^n, x_{J-1/2,K-1}^2 - \delta V_{J-1,K-1/2}^n) \\ \vdots \\ U^n(x_{1/2,K}^1 - \delta U_{1/2,K}^n, x_{1/2,K}^2 - \delta V_{0,K-1/2}^n) \\ \vdots \\ U^n(x_{J-1/2,K}^1 - \delta U_{J-1/2,K}^n, x_{J-1/2,K}^2 - \delta V_{J-1,K-1/2}^n) \end{array} \right)_{(K+1) \cdot J \times 1}$$

$$\mathfrak{NS}_3 = \begin{pmatrix} V^n(x_{0,1/2}^1 - \delta U_{1/2,0}^n, x_{0,1/2}^2 - \delta V_{0,1/2}^n) \\ \vdots \\ V^n(x_{J-1,1/2}^1 - \delta U_{J-1/2,0}^n, x_{J-1,1/2}^2 - \delta V_{J-1,1/2}^n) \\ V^n(x_{J,1/2}^1 - \delta U_{J-1/2,0}^n, x_{J,1/2}^2 - \delta V_{J,1/2}^n) \\ \vdots \\ V^n(x_{0,k+1/2}^1 - \delta U_{1/2,k}^n, x_{0,k+1/2}^2 - \delta V_{0,k+1/2}^n) \\ \vdots \\ V^n(x_{J-1,k+1/2}^1 - \delta U_{J-1/2,k}^n, x_{J-1,k+1/2}^2 - \delta V_{J-1,k+1/2}^n) \\ V^n(x_{J,k+1/2}^1 - \delta U_{J-1/2,k}^n, x_{J,k+1/2}^2 - \delta V_{J,k+1/2}^n) \\ \vdots \\ V^n(x_{0,K-1/2}^1 - \delta U_{1/2,K-1}^n, x_{0,K-1/2}^2 - \delta V_{0,K-1/2}^n) \\ \vdots \\ V^n(x_{J-1,K-1/2}^1 - \delta U_{J-1/2,K-1}^n, x_{J-1,K-1/2}^2 - \delta V_{J-1,K-1/2}^n) \\ V^n(x_{J,K-1/2}^1 - \delta U_{J-1/2,K-1}^n, x_{J,K-1/2}^2 - \delta V_{J,K-1/2}^n) \end{pmatrix}_{J \cdot (K+1) \times 1}$$

Alternativamente, en lugar de utilizar la interpolación bilineal se utiliza interpolación cuadrática que provee una corrección de segundo orden a la interpolación lineal usual (Ver [11]), también se utiliza la interpolación cúbica.

El sistema (4.54), se trata de un sistema no lineal por lo que se utilizará el método de Newton, de manera que se resolverá iterativamente un sistema lineal de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} d^{n+1} \\ U^{n+1} \\ V^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d^n \\ U^n \\ V^n \end{pmatrix} + \delta_x,$$

donde δ_x se obtiene al resolver el sistema:

$$W\delta_x = -F(d^n, U^n, V^n)$$

donde la función $F(d^n, U^n, V^n)$ es de la forma:

$$F(d, U, V) = \begin{cases} F_1(d, U, V) \\ F_2(d, U, V) \\ F_3(d, U, V) \end{cases} \quad (4.55)$$

con

$$\begin{aligned}
F_1(d, U, V) &= I_d d + \frac{\Delta t}{\Delta x_1} v_1 M_2 U + \frac{\Delta t}{\Delta x_2} v_1 M_5 V - d_0 \\
&\quad - \frac{\Delta t}{\delta} [\mathfrak{N}\mathfrak{N}\mathfrak{T}_1 - d_0] \\
F_2(d, U, V) &= I_U U + g \frac{\Delta t}{\Delta x_1} M_{13} d - U_0 - \frac{\Delta t}{\delta} [\mathfrak{N}\mathfrak{N}\mathfrak{T}_2 - U_0] \\
&\quad + \Delta t f v_6 - \frac{g \Delta t}{C^2} v_7 v_8 U_0 \\
F_3(d, U, V) &= I_V V + g \frac{\Delta t}{\Delta x_2} M_{19} d - V_0 + \frac{\Delta t}{\delta} [\mathfrak{N}\mathfrak{N}\mathfrak{T}_3 - V_0] \\
&\quad + \Delta t f v_{11} - \frac{g \Delta t}{C^2} v_{12} v_{13} V_0
\end{aligned}$$

donde d_0 , U_0 y V_0 son los valores de las variables d , U y V en la iteración de Newton anterior. La matriz W calcula el paso del método y se describe de la forma:

$$W = \begin{bmatrix} I_d & \frac{\Delta t}{\Delta x_1} v_1 M_2 & \frac{\Delta t}{\Delta x_2} v_1 M_5 \\ g \frac{\Delta t}{\Delta x_1} M_{13} & I_U & \mathbf{0} \\ g \frac{\Delta t}{\Delta x_2} M_{19} & \mathbf{0} & I_V \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

A continuación para resolver el problema se considerarán los parámetros $N = 100$, $J = 25$ y $K = 25$, los resultados se muestran a continuación:

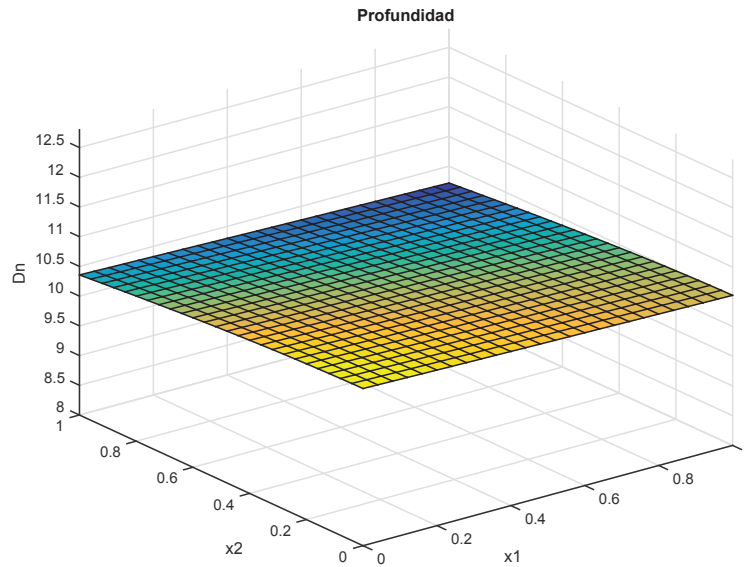


Figura 4.48: Aproximación de la solución para la función Profundidad considerando $\Delta x_1 = 0,04$ y $\Delta x_2 = 0,04$

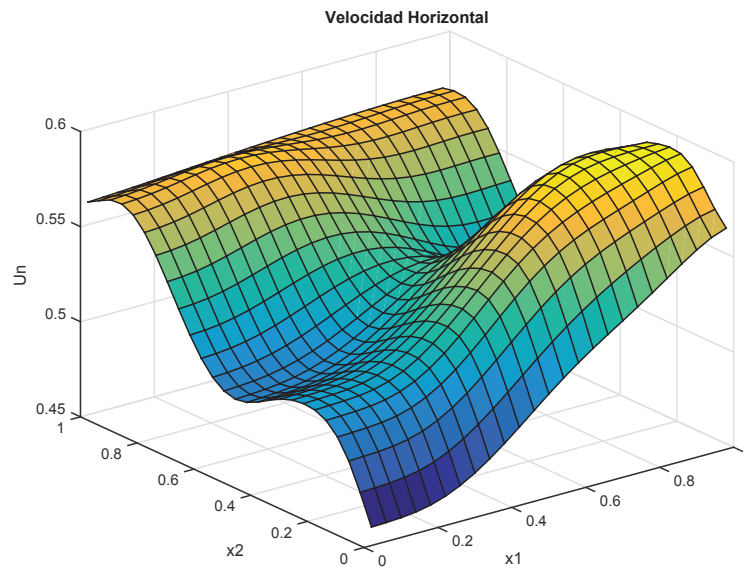


Figura 4.49: Aproximación de la solución para la función Velocidad Horizontal considerando $\Delta x_1 = 0,04$ y $\Delta x_2 = 0,04$

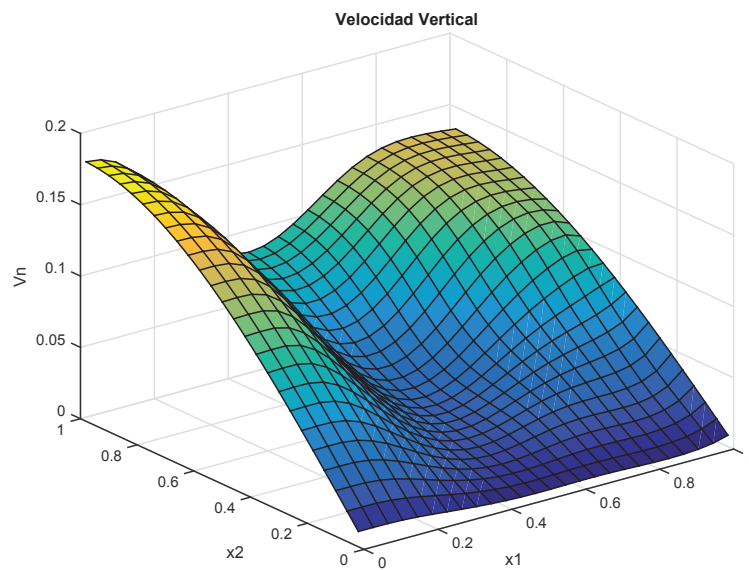


Figura 4.50: Aproximación de la solución para la función Velocidad Vertical considerando $\Delta x_1 = 0,04$ y $\Delta x_2 = 0,04$

Como podemos ver las aproximaciones no contienen oscilaciones, pero para saber cuál de los dos métodos resuelve de mejor manera el problema (4.44) en la siguiente sección se realizarán comparaciones considerando funciones test que deben

ser aproximadas por el método.

El gráfico mostrado a continuación muestra el número de iteraciones que el método de Newton utilizó en cada iteración temporal, con los parámetros $\Delta t = 0,01$, $\Delta x_1 = 0,04$, $\Delta x_2 = 0,04$ y $\delta = 0,01$:

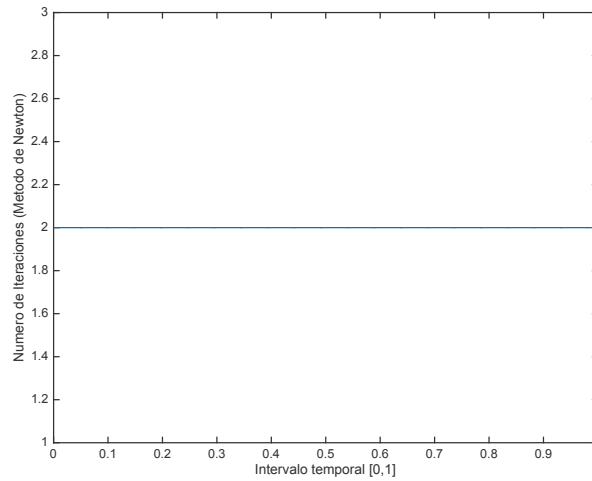


Figura 4.51: Número de iteraciones que el método de Newton utilizó en cada iteración temporal

Se puede observar que el método de Newton utilizó 2 iteraciones en cada una de las iteraciones temporales.

4.3.3. Comparaciones

Para realizar la comparación entre los métodos: Euler Semi-Implícito utilizando el esquema upwind y el Euler Semi-Implícito utilizando el esquema semi-lagrangiano, se utilizarán funciones test y de esta manera encontrar cual de los métodos aproxima de mejor manera a la solución exacta.

Para la función profundidad $d(x_1, x_2, t)$ se tiene:

$$d(x_1, x_2, t) = \sin(2\pi x_1) + \cos(2\pi x_2) - 2\pi x_1 + 10e^t, \quad (4.57)$$

con condición inicial:

$$d(x_1, x_2, 0) = \sin(2\pi x_1) + \cos(2\pi x_2) - 2\pi x_1 + 10,$$

y sus derivadas parciales:

$$\frac{\partial d}{\partial x_1} = 2\pi \cos(2\pi x_1) - 2\pi, \quad \frac{\partial d}{\partial x_2} = -2\pi \sin(2\pi x_2), \quad \frac{\partial d}{\partial t} = 10e^t.$$

Para la función velocidad horizontal $U(x_1, x_2, t)$ se tiene:

$$U(x_1, x_2, t) = e^{0,5t} \cos(\pi x_1), \quad (4.58)$$

con condición inicial:

$$U(x_1, x_2, 0) = \cos(\pi x_1),$$

y sus derivadas parciales:

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = -\pi e^{0,5t} \sin(\pi x_1), \quad \frac{\partial U}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial t} = 0,5e^{0,5t} \cos(\pi x_1).$$

Para la función velocidad vertical $V(x_1, x_2, t)$ se tiene:

$$V(x_1, x_2, t) = e^{0,5t} \cos(\pi x_2), \quad (4.59)$$

con condición inicial:

$$V(x_1, x_2, 0) = \cos(\pi x_2),$$

y sus derivadas parciales:

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial x_2} = -\pi e^{0,5t} \sin(\pi x_2), \quad \frac{\partial V}{\partial t} = 0,5e^{0,5t} \cos(\pi x_2).$$

Las funciones (4.57), (4.58), (4.59) satisfacen las condiciones de borde de Neumann, por lo que se pueden usar como funciones test para resolver el problema (4.44). Al reemplazar los valores de las derivadas parciales en el problema (4.44), los lados derechos del sistema tendrán serán funciones que se mostrarán a continuación.

El lado derecho de la primera ecuación será:

$$\begin{aligned}
f(x_1, x_2, t) = & 10e^t + (\sin(2\pi x_1) + \cos(2\pi x_2) - 2\pi x_1 + 10e^t) \cdot (-\pi e^{0,5t} \sin(\pi x_1)) \\
& + (\sin(2\pi x_1) + \cos(2\pi x_2) - 2\pi x_1 + 10e^t) \cdot (-\pi e^{0,5t} \sin(\pi x_2)) \\
& + (e^{0,5t} \cos(\pi x_1)) \cdot (2\pi \cos(2\pi x_1) - 2\pi) + \\
& (e^{0,5t} \cos(\pi x_2)) \cdot (-2\pi \sin(2\pi x_2)).
\end{aligned}$$

El lado derecho de la segunda ecuación será:

$$\begin{aligned}
y(x_1, x_2, t) = & 0,5e^{0,5t} \cos(\pi x_1) + (0,5e^{0,5t} \cos(\pi x_1)) \cdot (-\pi e^{0,5t} \sin(\pi x_1)) + \\
& g(2\pi \cos(2\pi x_1) - 2\pi) - f \cdot e^{0,5t} \cos(\pi x_2) \\
& + \frac{g}{C^2} \frac{\sqrt{(U(x_1, x_2, t))^2 + (V(x_1, x_2, t))^2}}{d(x_1, x_2, t)} (e^{0,5t} \cos(\pi x_1)).
\end{aligned}$$

El lado derecho de la tercera ecuación será:

$$\begin{aligned}
w(x_1, x_2, t) = & 0,5e^{0,5t} \cos(\pi x_2) + (e^{0,5t} \cos(\pi x_2)) \cdot (-\pi e^{0,5t} \sin(\pi x_2)) \\
& + g(-2\pi \sin(2\pi x_2)) + f \cdot e^{0,5t} \cos(\pi x_1) + \\
& \frac{g}{C^2} \sqrt{(U(x_1, x_2, t))^2 + V(x_1, x_2, t)^2} d(x_1, x_2, t) (e^{0,5t} \cos(\pi x_2)).
\end{aligned}$$

Para resolver las ecuaciones con estas funciones test mediante el método de Euler Semi-Implícito, utilizando el esquema de discretización upwind para las derivadas espaciales, el sistema a resolver cambia de (4.50) a:

$$\begin{aligned}
I_d d^{n+1} + \frac{\Delta t}{\Delta x_1} v_1 M_2 U^{n+1} + \frac{\Delta t}{1\Delta x_1} v_2 (1 + \epsilon) M_3 d^{n+1} + \frac{\Delta t}{2\Delta x_1} v_2 (1 - \epsilon) M_4 d^{n+1} & \quad (4.60) \\
+ \frac{\Delta t}{\Delta x_2} v_1 M_5 V^{n+1} + \frac{\Delta t}{2\Delta x_2} v_3 (1 + \epsilon) M_6 d^{n+1} + \frac{\Delta t}{2\Delta x_2} v_3 (1 - \epsilon) M_7 d^{n+1} = d^n \\
+ \Delta t f(x_d, x_d, n + 1), \\
I_U U^{n+1} + \frac{\Delta t}{2\Delta x_1} v_4 (1 + \epsilon) M_9 U^{n+1} + \frac{\Delta t}{2\Delta x_1} v_4 (1 - \epsilon) M_{10} U^{n+1} \\
+ \frac{\Delta t}{2\Delta x_2} v_5 (1 + \epsilon) M_{11} U^{n+1} + \frac{\Delta t}{2\Delta x_2} v_5 (1 - \epsilon) M_{12} U^{n+1} \\
+ g \frac{\Delta t}{\Delta x_1} M_{13} d^{n+1} = U^n + \Delta t f v_6 - \frac{g\Delta t}{C^2} \Delta t v_7 \cdot v_8 + \Delta t y(x_U, x_U, n + 1), \\
I_V V^{n+1} + \frac{\Delta t}{2\Delta x_1} v_9 (1 + \epsilon) M_{15} V^{n+1} + \frac{\Delta t}{2\Delta x_1} v_9 (1 - \epsilon) M_{16} V^{n+1} \\
+ \frac{\Delta t}{2\Delta x_2} v_{10} (1 + \epsilon) M_{17} V^{n+1} + \frac{\Delta t}{\Delta x_2} v_{10} (1 - \epsilon) M_{18} V^{n+1} \\
+ g \frac{\Delta t}{\Delta x_2} M_{19} d^{n+1} = V^n - \Delta t f v_{11} - \frac{g\Delta t}{C^2} v_{12} \cdot v_{13} + \Delta t w(x_V, x_V, n + 1).
\end{aligned}$$

Para resolver las ecuaciones con estas funciones test mediante el método de Euler Semi-Implícito, utilizando el esquema de discretización semi-lagrangiano para las derivadas espaciales, el sistema a resolver cambia de (4.54) a:

$$\begin{aligned}
I_d d^{n+1} + \frac{\Delta t}{\Delta x_1} v_1 M_2 U^{n+1} + \frac{\Delta t}{\Delta x_2} v_1 M_5 V^{n+1} = d^n & \quad (4.61) \\
+ \frac{\Delta t}{\delta} [\mathfrak{N}\mathfrak{I}\mathfrak{T}_1 - d^n] + \Delta t f(x_d, x_d, n + 1) \\
I_U U^{n+1} + g \frac{\Delta t}{\Delta x_1} M_{13} d^{n+1} = U^n + \frac{\Delta t}{\delta} [\mathfrak{N}\mathfrak{I}\mathfrak{T}_2 - U^n] \\
+ \Delta t f v_6 - \frac{g\Delta t}{C^2} v_7 v_8 U^n + \Delta t y(x_U, x_U, n + 1) \\
I_V V^{n+1} + g \frac{\Delta t}{\Delta x_2} M_{19} d^{n+1} = V^n + \frac{\Delta t}{\delta} [\mathfrak{N}\mathfrak{I}\mathfrak{T}_3 - V^n] \\
+ \Delta t f v_{11} - \frac{g\Delta t}{C^2} v_{12} v_{13} V^n + \Delta t w(x_V, x_V, n + 1).
\end{aligned}$$

Los resultados, en el instante $T = 1$, se muestran a continuación:

- Método Euler Semi-Implícito, utilizando el esquema upwind

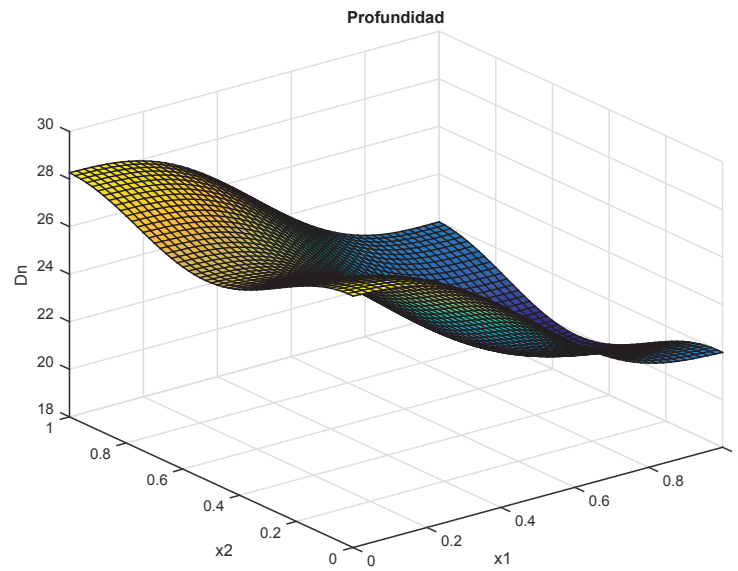


Figura 4.52: Aproximación numérica de la profundidad considerando $\Delta t = 0,01$, $\Delta x_1 = 0,02$ y $\Delta x_2 = 0,02$

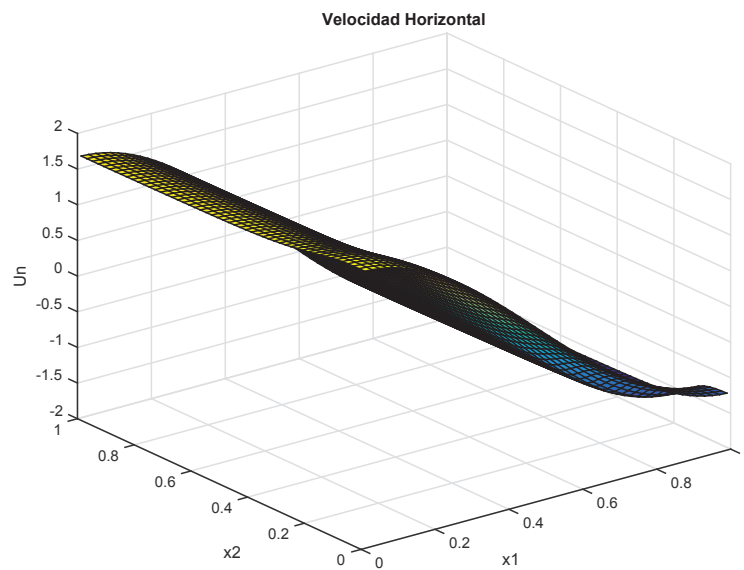


Figura 4.53: Aproximación numérica de la velocidad horizontal considerando $\Delta t = 0,01$, $\Delta x_1 = 0,02$ y $\Delta x_2 = 0,02$

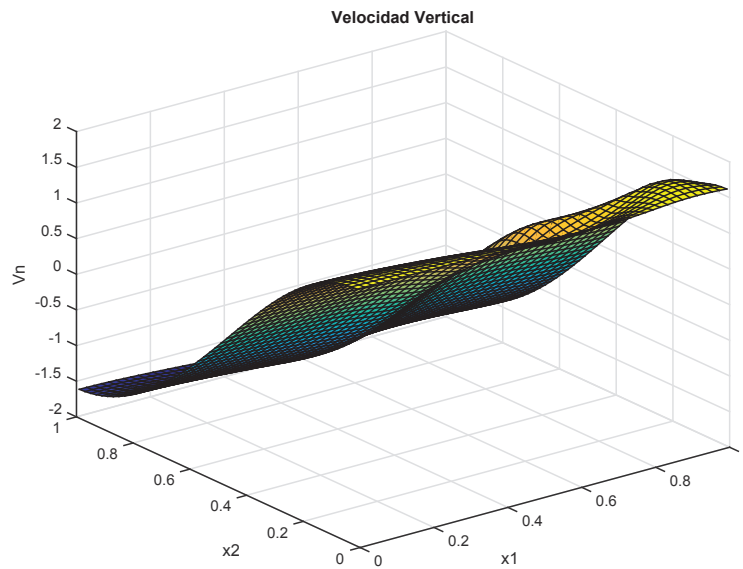


Figura 4.54: Aproximación numérica de la velocidad vertical considerando $\Delta t = 0,01$, $\Delta x_1 = 0,02$ y $\Delta x_2 = 0,02$

Se calculará el error de estimación, con una familia de parámetros, utilizando la siguiente norma:

$$\|y(x_1, x_2, t) - z(x_1, x_2, t)\|_{L^2, Q} = \int_0^T \int_{\Omega} |y(x_1, x_2, t) - z(x_1, x_2, t)|^2$$

donde $y(x_1, x_2, t)$ es la solución aproximada numéricamente en el tiempo t y $z(x_1, x_2, t)$ es la función test en el tiempo t . Para resolver numéricamente la integral sobre el dominio se utilizará el método de constante a trozos, y para la integral sobre el intervalo de tiempo el método del trapecio.

Para la variable d el error de estimación es:

$\Delta x \setminus \Delta t$	0,005	0,0066	0,01	0,02	0,01
0,0066	0,0767	0,0886	0,1061	0,1160	0,1227
0,01	0,0924	0,0934	0,1157	0,1304	0,1409
0,02	0,0950	0,0947	0,1180	0,1334	0,1447
0,1	0,0959	0,00952	0,1187	0,1345	0,146

Para la variable U el error de estimación es:

$\Delta x \setminus \Delta t$	0,005	0,0066	0,01	0,02	0,01
0,0066	0,0174	0,0173	0,0171	0,0168	0,0180
0,01	0,0219	0,0218	0,0215	0,0212	0,0228
0,02	0,0226	0,0224	0,0221	0,0218	0,0235
0,1	0,0228	0,0226	0,0223	0,0220	0,0237

Para la variable V el error de estimación es:

$\Delta x \setminus \Delta t$	0,005	0,0066	0,01	0,02	0,01
0,0066	0,0546	0,0831	0,0947	0,1008	0,1047
0,01	0,0613	0,0873	0,1010	0,1089	0,1144
0,02	0,0626	0,0883	0,1023	0,1105	0,1163
0,1	0,0630	0,0866	0,1027	0,1111	0,1169

Como se puede observar en las tablas anteriores mientras menor sea el paso de discretización temporal y espacial el error es menor, es decir el método estima de mejor manera la solución exacta del problema test.

- Método Euler Semi-Implícito, utilizando el esquema semi-lagrangiano.

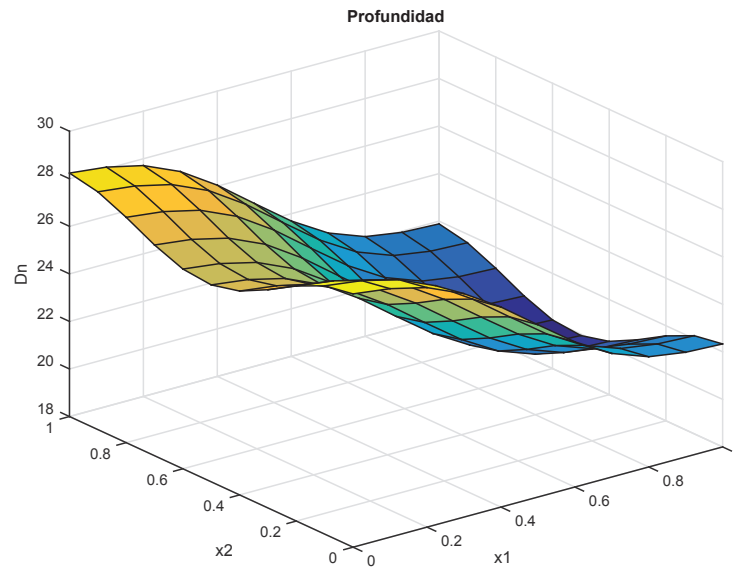


Figura 4.55: Aproximación numérica de la profundidad considerando $\Delta t = 0,0066$, $\Delta x_1 = 0,1$, $\Delta x_2 = 0,1$ y $\delta = 0,02$.

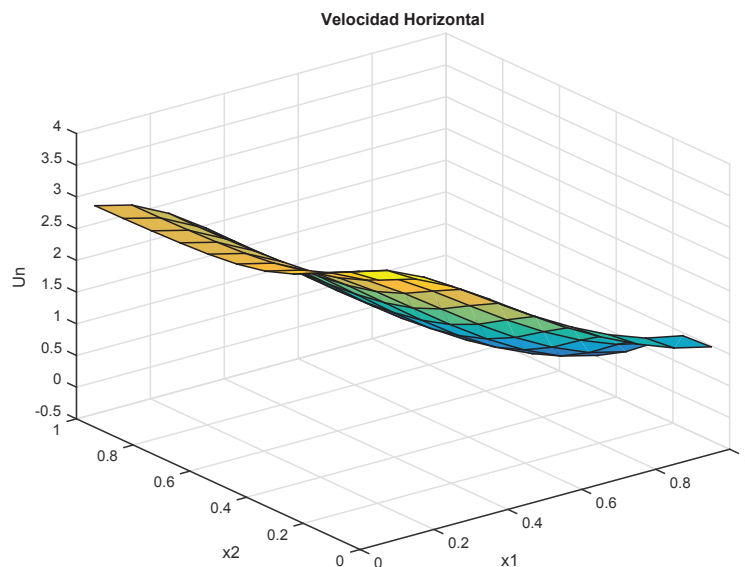


Figura 4.56: Aproximación numérica de la velocidad horizontal considerando $\Delta t = 0,0066$, $\Delta x_1 = 0,1$, $\Delta x_2 = 0,1$ y $\delta = 0,02$.

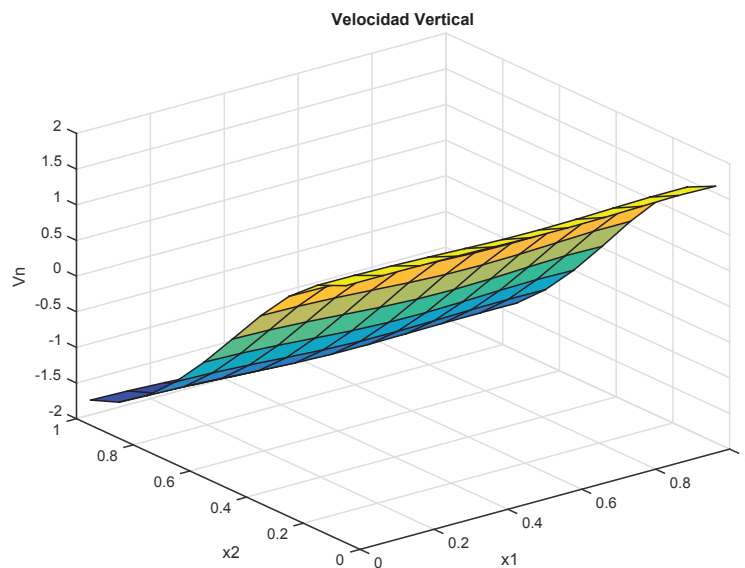


Figura 4.57: Aproximación numérica de la velocidad vertical considerando $\Delta t = 0,0066$, $\Delta x_1 = 0,1$, $\Delta x_2 = 0,1$ y $\delta = 0,02$.

Se calculará la estimación de error, tomando una familia de parámetros, utilizando la norma $\| \cdot \|_{L^2, Q}$ mostrada anteriormente. Se debe tomar en cuenta que el valor en todos los experimentos de δ es 0,01.

Para la variable d el error de estimación es:

$\Delta x \setminus \Delta t$	0,005	0,0066	0,01
0,08	$2,4795 \times 10^{-4}$	$3,0084 \times 10^{-4}$	$4,083 \times 10^{-4}$
0,1	$3,4045 \times 10^{-4}$	$4,2646 \times 10^{-4}$	$5,9829 \times 10^{-4}$
0,2	$9,4868 \times 10^{-4}$	0,0013	0,0020

Para la variable U el error de estimación es:

$\Delta x \setminus \Delta t$	0,005	0,0066	0,01
0,08	0,0092	0,0122	0,0185
0,1	0,0109	0,0146	0,0219
0,2	0,0204	0,0275	0,0419

Para la variable V el error de estimación es:

$\Delta x \setminus \Delta t$	0,005	0,0066	0,01
0,08	0,0030	0,0041	0,0063
0,1	0,0029	0,0042	0,0061
0,2	0,0033	0,0044	0,0066

De igual manera se puede observa que mientras menor sea el paso de discretización temporal y espacial la estimación del error será menor.

Se utilizó diferentes valores para el parámetro δ pero si se consideraba un valor muy pequeño respecto de Δt , por la estructura del sistema a resolver el problema se volvía inconsistente.

En los experimentos realizados se pudo observar que mientras se resolvía el problema con la función test, se presentaban ciertas oscilaciones que tomando un parámetro δ mayor que Δt pero menor que Δx_1 y Δx_2 estas se corregían de manera que se obtenían mejores resultados.

Acorde a lo expuesto anteriormente, se puede asegurar que al resolver el problema utilizando el esquema semi-lagrangiano para los términos advectivos estima de mejor manera la solución del problema test generado analíticamente. Por lo tanto se podría decir que, conviene utilizar el método Euler semi-implícito con el esquema semi-lagrangiano para resolver las Ecuaciones de Shallow-Water en dos dimensiones.

Sin embargo el costo computacional que se necesita para resolver las interpolaciones del esquema semi-lagrangiano permitiría disponer del método Euler semi-implícito con el esquema upwind, aunque tiene una estimación de error mayor que al considerar este error utilizando el esquema semi-lagrangiano, ya que su costo es menor.

Capítulo 5

Conclusiones

El objetivo principal de este trabajo consistió en resolver numéricamente las ecuaciones de Shallow Water (aguas superficiales) mediante los esquemas de discretización upwind y semi-lagrangiano, para el tratamiento de los términos advectivos, y comparar su eficiencia computacional.

Los esquemas upwind consisten en elegir el esquema de diferencias de primer orden, dependiendo de la dirección de la velocidad del fluido. Por el contrario, los esquemas semilagrangianos se basan en una aproximación de la derivada direccional del término de advección.

Una primera dificultad en el desarrollo del trabajo estuvo relacionada con la estabilidad absoluta del método de Euler explícito, tanto con el esquema upwind como con el semi - lagrangiano. Para obtener estabilidad de este esquema se debe verificar la condición CFL (Courant, Friedrichs y Lewy), lo cual resulta muy restrictivo en la práctica. Para emplear el método de Euler explícito se debe escoger a-priori pasos de discretización temporal y espacial de manera que se satisfaga dicha condición. Por el contrario, utilizando el método Euler semi-implícito, con los esquemas upwind y semi-lagrangiano, se obtuvieron buenos resultados de aproximación y de estabilidad.

Para resolver las ecuaciones de Shallow Water mediante el esquema semi-lagrangiano, se debe realizar una interpolación componente a componente, ya que dependiendo del signo que tenga la variable que acompaña al término de advección se debe realizar interpolación hacia adelante o hacia atrás, además se debe resolver un método implícito mediante el paso de Newton en cada iteración lo que implica un costo computacional mayor.

Si bien ambos esquemas tienen (teóricamente) orden de convergencia lineal, al estimar la solución utilizando el esquema semi-lagrangiano se obtiene un error sustancialmente menor. Esto hace conjeturar que la constante que acompaña al orden

de error es menor que al utilizar el esquema upwind, en particular para las ecuaciones bajo estudio.

En síntesis, para elegir el esquema que resuelva de mejor manera las ecuaciones de Shallow-Water se debe tomar en cuenta: si se desea un costo computacional menor con el esquema upwind, ya que se debe resolver “solo” el paso de Newton en cada iteración, o si se desea obtener una estimación del error menor con el esquema semi-lagrangiano, que debe interpolar componente a componente y resolver el paso de Newton en cada iteración.

Finalmente, cabe destacar que las ecuaciones de Shallow-Water tienen múltiples aplicaciones como: predicción de Tsunamis, el estudio de flujos a través de estructuras, la formación de tormentas, la predicción meteorológica y los flujos planetarios.

Bibliografía

- [1] Jeffrey W Banks y William D Henshaw. Upwind schemes for the wave equation in second-order form. *Journal of Computational Physics*, 231(17):5854–5889, 2012.
- [2] Alfredo Bermudez y Ma Elena Vazquez. Upwind methods for hyperbolic conservation laws with source terms. *Computers & Fluids*, 23(8):1049–1071, 1994.
- [3] Franca Bianco, Gabriella Puppo, y Giovanni Russo. High-order central schemes for hyperbolic systems of conservation laws. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 21(1):294–322, 1999.
- [4] Luca Bonaventura. An introduction to semi-lagrangian methods for geophysical scale flows. *Lecture Notes, ERCOFTAC Leonhard Euler Lectures, SAM-ETH Zurich*, 2004.
- [5] Elisabetta Carlini, Maurizio Falcone, y Adriano Festa. A brief survey on semi-lagrangian schemes for image processing. In *Innovations for Shape Analysis*, págs. 191–218. Springer, 2013.
- [6] Phillip Colella. Multidimensional upwind methods for hyperbolic conservation laws. *Journal of Computational Physics*, 87(1):171–200, 1990.
- [7] Maurizio Falcone y Roberto Ferretti. *Semi-Lagrangian approximation schemes for linear and Hamilton-Jacobi equations*, volume 133. SIAM, 2014.
- [8] Michael Griebel, Thomas Dornseifer, y Tilman Neunhoffer. *Numerical simulation in fluid dynamics: a practical introduction*, volume 3. SIAM, 1997.
- [9] W Hackbush. Elliptic differential equations. *Theory and Numerical Treatment*, 1992.
- [10] Andreas Hohmann y Peter Deuffhard. *Numerical analysis in modern scientific computing: an introduction*, volume 43. Springer Science & Business Media, 2012.
- [11] Michael Lentine, Jón Tómas Grétarsson, y Ronald Fedkiw. An unconditionally stable fully conservative semi-lagrangian method. *Journal of computational physics*, 230(8):2857–2879, 2011.

- [12] Randall J LeVeque. *Finite volume methods for hyperbolic problems*, volume 31. Cambridge university press, 2002.
- [13] Randall J LeVeque y Randall J Le Veque. *Numerical methods for conservation laws*, volume 132. Springer, 1992.
- [14] Shian-Jiann Lin y Richard B Rood. Multidimensional flux-form semi-lagrangian transport schemes. *Monthly Weather Review*, 124(9):2046–2070, 1996.
- [15] Vinh Q Nguyen. A numerical study of burgers’ equation with robin boundary conditions. 2001.
- [16] Stanley Osher y Fred Solomon. Upwind difference schemes for hyperbolic systems of conservation laws. *Mathematics of computation*, 38(158):339–374, 1982.
- [17] Jing-Mei Qiu y Chi-Wang Shu. Conservative high order semi-lagrangian finite difference weno methods for advection in incompressible flow. *Journal of Computational Physics*, 230(4):863–889, 2011.
- [18] Alfio Quarteroni. *Numerical models for differential problems*, volume 2. Springer Science & Business Media, 2010.
- [19] Alfio Quarteroni, Riccardo Sacco, y Fausto Saleri. *Numerical mathematics*, volume 37. Springer Science & Business Media, 2010.
- [20] Miodrag Rančić. An efficient, conservative, monotonic remapping for semi-lagrangian transport algorithms. *Monthly weather review*, 123(4):1213–1217, 1995.
- [21] Philip J Rasch y David L Williamson. On shape-preserving interpolation and semi-lagrangian transport. *SIAM journal on scientific and statistical computing*, 11(4):656–687, 1990.
- [22] Luciano Rezzolla. Numerical methods for the solution of partial differential equations. *Lecture Notes for the COMPSTAR School on Computational Astrophysics*, págs. 8–13, 2011.
- [23] PL Roe. Upwind differencing schemes for hyperbolic conservation laws with source terms. In *Nonlinear hyperbolic problems*, págs. 41–51. Springer, 1987.
- [24] G Rosatti, L Bonaventura, A Deponti, y G Garegnani. An accurate and efficient semi-implicit method for section-averaged free-surface flow modelling. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 65(4):448–473, 2011.
- [25] JS Sawyer. A semi-lagrangian method of solving the vorticity advection equation. *Tellus*, 15(4):336–342, 1963.

- [26] James A Sethian y Alexander Vladimirsky. Ordered upwind methods for static hamilton–jacobi equations: Theory and algorithms. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 41(1):325–363, 2003.
- [27] Andrew Staniforth y Jean Côté. Semi-lagrangian integration schemes for atmospheric models-a review. *Monthly weather review*, 119(9):2206–2223, 1991.
- [28] Nils Thuerey y Peter Hess. Shallow water equation. *Real time physics: class notes*, págs. 67–82, 2008.
- [29] Giovanni Tumolo, Luca Bonaventura, y Marco Restelli. A semi-implicit, semi-lagrangian, p-adaptive discontinuous galerkin method for the shallow water equations. *Journal of Computational Physics*, 232(1):46–67, 2013.
- [30] Pieter Wesseling. *Principles of computational fluid dynamics*, volume 29. Springer Science & Business Media, 2009.