ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

ESCUELA DE CIENCIAS

RELACIONES ENTRE EL REPLICADOR DINÁMICO Y LA MECÁNICA CUÁNTICA, Y SUS IMPLICACIONES EN ECONOMÍA TEÓRICA

PROYECTO PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE FÍSICO

ESTEBAN JAVIER GUEVARA HIDALGO

DIRECTOR: EDY AYALA, PhD

Quito, Junio 2006

DECLARACIÓN

Declaro bajo juramento que el trabajo aquí escrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

La Escuela Politécnica Nacional, puede hacer uso de los derechos correspondientes a este trabajo, según lo establecido por la Ley de Propiedad Intelectual, por su reglamento y por la normatividad institucional vigente.

Esteban Guevara Hidalgo

CERTIFICACIÓN

Certifico que el presente trabajo fue desarrollado por el señor **Esteban Guevara Hidalgo** bajo mi supervisión.

Edy Ayala, PhD
DIRECTOR DE PROYECTO

AGRADECIMIENTO

Agradezco a la vida por llevarme por senderos insospechados. Por dejarme amarla. Por el placer de haber vencido los obstáculos que me fueron puestos.

A todos aquellos que nunca creyeron en mí. Por darme un motivo para que yo crea en mi. A los que creyeron en mi solo al final.

A mis padres y hermanos, y a mis amigos que también son mis hermanos, por creer en mí aunque sea en silencio, por acompañarme y tenerme una fe impagable con palabras.

A mis maestros, por encontrarse en todas partes y por darme lo mejor de ellos.

A la mujer que inspiró en mí los sentimientos más nobles y puros.

A mis hermanos mayores que me acompañan y cuidan, que me sirven a la mesa frente a mis adversarios, y que con aceites perfuman mi cabeza y rellenan mi copa.

A mi amigo lobo, a la kitty, al guagüito, al negrito, al tommy, a las plantas, insectos, paisajes y playas, mis hermanos menores y mis amigos más fieles. Por mostrarme a mi mismo sensible y enseñarme a aprender y a valorar la esencia de los más simples e indefensos.

A la Física por darme paz, y por mostrarme la verdadera belleza que hay en las cosas más grandes y en las más chiquitas.

Y gracias a esa fuerza extraña que tomó mi mano durante esa semana mágica en que nació esta teoría. He pasado un año tratando de entender lo que hiciste en mi y por mi. Por haberme elegido y por todo lo que a partir de ti he recibido, mil gracias.

Esteban Guevara Hidalgo
06 / 2006

A la mujer que me enseñó con su ejemplo
a luchar todos los días,
y a pesar de ser derrotado,
a luchar el día siguiente con más fuerza,
mi madre.

“ Lo esencial es invisible a los ojos.
Las cosas importantes no se ven bien
sino con el corazón ”.

ANTOINE DE SAINT-EXUPERY

RELACIONES ENTRE EL REPLICADOR DINÁMICO Y LA MECÁNICA CUÁNTICA, Y SUS IMPLICACIONES EN ECONOMÍA TEÓRICA

Esteban Guevara Hidalgo

Departamento de Física, Escuela Politécnica Nacional, Quito, Ecuador

RESUMEN

Se proponen ciertas relaciones de cuantización las cuales nos permitirían describir y solucionar problemas originados por comportamientos conflictivos o cooperativos entre los miembros de un sistema desde el punto de vista de interacciones mecánico cuánticas. El análogo cuántico del replicador dinámico es la ecuación de evolución de estados mezclados de la mecánica cuántica estadística. Un sistema y sus miembros cooperarán y re arreglarán sus estados para mejorar su condición actual. Ellos lucharán para alcanzar el mejor estado posible para cada uno de ellos el cual es también el mejor estado posible para todo el sistema. Esto nos permitiría proponer un nuevo equilibrio según el cual el sistema es estable solo si se maximiza el bienestar del colectivo sobre el bienestar del individuo. Si se maximiza el bienestar del individuo sobre el del colectivo el sistema se vuelve inestable y eventualmente colapsa.

Contents

Chapter 1

Sustento Teórico

1.1 Fundamentos de la Mecánica Cuántica

1.1.1 Kets, Bras, y Operadores

Espacio Ket

Un estado físico en Mecánica Cuántica [1, 2, 3, 4] es representado por un vector de estado en un espacio vectorial complejo. Este vector, que se postula que contiene *toda la información acerca del sistema*, lo podemos llamar *ket* y denotarlo por $|\alpha\rangle$.

Dos kets $|\alpha\rangle$ y $|\beta\rangle$ pueden ser sumados

$$|\alpha\rangle + |\beta\rangle = |\gamma\rangle \tag{1.1}$$

y el resultado de la suma $|\gamma\rangle$ es también otro ket. Si se multiplica $|\alpha\rangle$ por un número complejo c, el producto resultante $c\,|\alpha\rangle$ es otro ket, donde c al ser un número puede ser ubicado a la derecha o a la izquierda del ket.

$$c\,|\alpha\rangle = |\alpha\rangle\,c \tag{1.2}$$

En el caso particular de que c sea cero, el ket resultante se dice que es *nulo*. Los kets $|\alpha\rangle$ y $c\,|\alpha\rangle$, con $c \neq 0$, representan el mismo estado físico. En otras palabras, solo la "dirección" en el espacio vectorial es de importancia.

Un *observable* es representado por un operador actuando en un espacio de Hilbert, generalmente a este se lo representa actuando sobre el ket por la izquierda:

$$A \cdot (|\alpha\rangle) = A\,|\alpha\rangle \tag{1.3}$$

Es importante tener en cuenta que $A\,|\alpha\rangle$ no significa A veces $|\alpha\rangle$.

Los *eigenkets* o *vectores propios* del operador A, denotados por:

$$|\alpha'\rangle\,, |\alpha''\rangle\,, |\alpha'''\rangle \ldots \tag{1.4}$$

satisfacen la ecuación:

$$A\,|\alpha'\rangle = \alpha'\,|\alpha'\rangle \tag{1.5}$$

donde $\alpha', \alpha'', \alpha'''$... son solo números. Aplicar el operador A en uno de sus eigenkets produce el mismo eigenket multiplicado por un número. El conjunto de números $\{\alpha', \alpha'', \alpha'''...\}$, mas compactamente denotado por $\{\alpha'\}$ se llama conjunto de *eigenvalores* o *valores propios* del operador A.

Espacio Bra

El *espacio Bra* es el espacio vectorial "dual" al espacio ket. Para cada ket $|\alpha\rangle$ existe un bra, denotado por $\langle\alpha|$ en este espacio dual o bra. Existe *correspondencia uno a uno* entre el espacio ket y el espacio bra.

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle &\longleftrightarrow \langle\alpha| \\ |\alpha'\rangle\,, |\alpha''\rangle\,, |\alpha'''\rangle \ldots &\longleftrightarrow \langle\alpha'|\,, \langle\alpha''|\,, \langle\alpha'''| \ldots \\ |\alpha\rangle + |\beta\rangle &\longleftrightarrow \langle\alpha| + \langle\beta| \\ c_\alpha\,|\alpha\rangle + c_\beta\,|\beta\rangle &\longleftrightarrow c_\alpha^*\,\langle\alpha| + c_\beta^*\,\langle\beta| \end{aligned} \tag{1.6}$$

Es importante notar que el bra dual de $c_\alpha\,|\alpha\rangle$ se postula que sea $c_\alpha^*\,\langle\alpha|$ y no $c_\alpha\,\langle\alpha|$.

Producto Interno y Externo

Definimos el *producto interno* de un ket $|\alpha\rangle$ y bra $\langle\beta|$ como:

$$\langle\beta\,|\alpha\rangle = (\langle\beta|) \cdot (|\alpha\rangle) \tag{1.7}$$

En general, este producto es un número complejo.

Se postulan dos propiedades importantes de los productos internos:

1. $\langle\beta\,|\alpha\rangle$ y $\langle\alpha\,|\beta\rangle^*$ son complejas conjugadas el uno del otro

$$\langle\beta\,|\alpha\rangle = \langle\alpha\,|\beta\rangle^* \tag{1.8}$$

2. El producto interno de un ket $|\alpha\rangle$ y su bra $\langle\alpha|$ es mayor o igual a cero $\langle\alpha\,|\alpha\rangle \geq 0$

Dos kets $|\alpha\rangle$ y $|\beta\rangle$ son *ortogonales* si

$$\langle\alpha\,|\beta\rangle = 0 \tag{1.9}$$

Se puede *normalizar* un ket $|\hat{\alpha}\rangle$

$$|\hat{\alpha}\rangle = (\frac{1}{\sqrt{\langle\alpha\,|\alpha\rangle}})\ |\alpha\rangle \tag{1.10}$$

de manera que satisfaga con :

$$\langle\hat{\alpha}\,|\hat{\alpha}\rangle = 1 \tag{1.11}$$

Definimos el *producto externo* de $|\beta\rangle$ y $\langle\alpha|$ como:

$$|\beta\rangle\,\langle\alpha| = (|\beta\rangle)\cdot(\langle\alpha|) \tag{1.12}$$

el cual es un operador y no solo un número como es el caso del producto interno.

Operadores

Un operador actúa sobre un *ket* por la izquierda

$$X\cdot(|\alpha\rangle) = X\,|\alpha\rangle \tag{1.13}$$

y el producto resultante también es un ket.

Los operadores X y Y se dicen que son *iguales*

$$X = Y \tag{1.14}$$

si

$$X\,|\alpha\rangle = Y\,|\alpha\rangle \tag{1.15}$$

El operador X se le llama *nulo*, si para todo ket $|\alpha\rangle$, tenemos que

$$X\,|\alpha\rangle = 0 \tag{1.16}$$

Los operadores pueden ser sumados y gozan de propiedades commutativas y asociativas:

$$X + Y = Y + X \tag{1.17}$$

$$X + (Y + Z) = (X + Y) + Z \tag{1.18}$$

Los operadores son *lineales*, es decir:

$$X(\ c_\alpha\,|\alpha\rangle + c_\beta\,|\beta\rangle) = \ c_\alpha X\,|\alpha\rangle + c_\beta X\,|\beta\rangle \tag{1.19}$$

Un operador actúa sobre un *bra* por la derecha

$$(\langle\alpha|)\cdot X = \langle\alpha|\,X \tag{1.20}$$

y el producto resultante también es un bra.

El ket $X\,|\alpha\rangle$ y el bra $\langle\alpha|\,X$ en general no son duales el uno con respecto al otro. Se define a $X^\dagger$ como:

$$X\,|\alpha\rangle \longleftrightarrow \langle\alpha|\,X^\dagger \tag{1.21}$$

El operador $X^\dagger$ se llama *Hermitiano* de X si

$$X = X^\dagger \tag{1.22}$$

La multiplicación de operadores no es commutativa

$$XY \neq YX \tag{1.23}$$

pero sí asociativa:

$$X(YZ) = (XY)Z = XYZ \tag{1.24}$$

también

$$XY\,|\alpha\rangle \longleftrightarrow \langle\alpha|\,Y^\dagger X^\dagger \tag{1.25}$$

teniendo en cuenta que

$$(XY)^\dagger = Y^\dagger X^\dagger \tag{1.26}$$

El Axioma asociativo

Para ilustrar el poder de este axioma, consideremos un producto externo actuando sobre un ket:

$$(|\beta\rangle\langle\alpha|)\cdot|\gamma\rangle \tag{1.27}$$

y gracias al axioma, se le puede reescribir como:

$$|\beta\rangle\cdot(\langle\alpha|\gamma\rangle) \tag{1.28}$$

donde $\langle\alpha|\gamma\rangle$ es solo un número. Esto puede ser visto como el operador $|\beta\rangle\langle\alpha|$ actuando sobre $|\gamma\rangle$ o el número $\langle\alpha|\gamma\rangle$ multiplicando al ket $|\beta\rangle$. El operador $|\beta\rangle\langle\alpha|$ rota a $|\gamma\rangle$ en la dirección de $|\beta\rangle$.

Es fácil ver que si

$$X=|\beta\rangle\langle\alpha| \tag{1.29}$$

entonces:

$$X^{\dagger}=|\alpha\rangle\langle\beta| \tag{1.30}$$

Otro importante aporte del axioma asociativo surge al tomar en cuenta la siguiente expresión:

$$(\langle\beta|)\cdot(X|\alpha\rangle)=(\langle\beta|X)\cdot(|\alpha\rangle) \tag{1.31}$$

Debido a que los dos lados de la expresión anterior son iguales, se la puede reescribir en una notación más compacta y práctica

$$\langle\beta|X|\alpha\rangle \tag{1.32}$$

Como $\langle\alpha|X^{\dagger}$ es el dual de $X|\alpha\rangle$ y $X=X^{\dagger}$

$$\begin{aligned}\langle\beta|X|\alpha\rangle &= \langle\beta|\cdot(X|\alpha\rangle)\\ &= \left\{(\langle\alpha|X^{\dagger})\cdot|\beta\rangle\right\}^{*}\\ &= \langle\alpha|X^{\dagger}|\beta\rangle^{*}\\ &= \langle\alpha|X|\beta\rangle^{*}\end{aligned} \tag{1.33}$$

1.1.2 Base de Vectores Propios y Representaciones Matriciales

Eigenkets de un Observable

Los valores propios de un operador hermitiano A son reales, y sus respectivos eigenkets son ortogonales.

Base de Eigenkets

Los eigenkets de A normalizados forman un conjunto ortonormal y un ket arbitrario $|\alpha\rangle$ puede ser representado como una combinación de la base de vectores propios de A

$$|\alpha\rangle = \sum_{a'} c_{a'} \left|a'\right\rangle \tag{1.34}$$

multiplicando $\langle a''|$ por la izquierda y haciendo uso de la propiedad de ortonormalidad encontramos que el coeficiente de expansión $c_{a'}$ es igual a:

$$c_{a'} = \left\langle a' \left| \alpha \right.\right\rangle \tag{1.35}$$

en otras palabras:

$$|\alpha\rangle = \sum_{a'} \left|a'\right\rangle \left\langle a' \left| \alpha \right.\right\rangle \tag{1.36}$$

Debido a que $|\alpha\rangle$ es un ket arbitrario se define al *operador identidad* como:

$$\sum_{a'} \left|a'\right\rangle \left\langle a'\right| = 1 \tag{1.37}$$

Debido a que al aplicar el operador $|a'\rangle \langle a'|$ sobre $|\alpha\rangle$, este operador selecciona la parte del ket $|\alpha\rangle$ que es paralela a $|a'\rangle$, el operador $\Lambda_{a'} \equiv |a'\rangle \langle a'|$ es conocido como *operador de proyección.*

Representaciones Matriciales

Haciendo uso del operador de identidad, podemos representar el operador X como:

$$X = \sum_{a''} \sum_{a'} \left|a''\right\rangle \left\langle a''\right| X \left|a'\right\rangle \left\langle a'\right| \tag{1.38}$$

y rearreglar los N^2 elementos de esta suma en una matriz $N \times N$

$$X \doteq \begin{pmatrix} \langle a^{(1)}| X |a^{(1)}\rangle & \langle a^{(1)}| X |a^{(2)}\rangle & ... & \langle a^{(1)}| X |a^{(N)}\rangle \\ \langle a^{(2)}| X |a^{(1)}\rangle & \langle a^{(2)}| X |a^{(2)}\rangle & ... & \langle a^{(2)}| X |a^{(N)}\rangle \\ ... & ... & ... & ... \\ \langle a^{(N)}| X |a^{(1)}\rangle & \langle a^{(N)}| X |a^{(2)}\rangle & ... & \langle a^{(N)}| X |a^{(N)}\rangle \end{pmatrix} \tag{1.39}$$

La representación matricial de un observable A en su base de vectores propios es una matriz diagonal con sus valores propios como elementos:

$$\begin{aligned} A &= \sum_{a''}\sum_{a'} |a''\rangle \langle a''| A |a'\rangle \langle a'| \\ &= \sum_{a'} a' |a'\rangle \langle a'| \\ &= \sum_{a'} a' \Lambda_{a'} \end{aligned} \tag{1.40}$$

1.1.3 Procesos de Medición en Mecánica Cuántica

" A measurement always causes the system to jump into an eigenstate of the dynamical variable that is being measured " (Dirac, 1958).

Podemos interpretar las palabras de Dirac como sigue: Antes de que la medición de un observable A sea hecha, se asume que el sistema está representado por una combinación lineal de estados:

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle &= \sum_{a'} c_{a'} |a'\rangle \\ &= \sum_{a'} |a'\rangle \langle a' |\alpha\rangle \end{aligned} \tag{1.41}$$

Cuando la medición es realizada, el sistema adopta uno de los vectores propios $|a'\rangle$ de A. Un proceso de medición usualmente cambia el estado del sistema, la única excepción es cuando el sistema ya se encuentra en uno de los eigenestados del observable que se va a medir.

La *probabilidad* de que el sistema en un estado inicial $|\alpha\rangle$ adopte después de la medición un estado particular $|a'\rangle$ se postula estar dada por:

$$P(a') = |\langle a' |\alpha\rangle|^2 \tag{1.42}$$

Definimos el *valor esperado* del observable A con respecto al estado $|\alpha\rangle$ como:

$$\begin{aligned} \langle A \rangle &= \langle \alpha | A | \alpha \rangle \\ &= \sum_{a''} \sum_{a'} \langle \alpha | a'' \rangle \langle a'' | A | a' \rangle \langle a' | \alpha \rangle \\ &= \sum_{a'} a' \left| \langle a' | \alpha \rangle \right|^2 \end{aligned} \tag{1.43}$$

1.1.4 Observables Compatibles e Incompatibles

Los observables A y B se dicen *compatibles* cuando sus operadores correspondientes conmutan, es decir:

$$[A, B] = 0 \tag{1.44}$$

e *incompatibles* cuando:

$$[A, B] \neq 0 \tag{1.45}$$

Los observables compatibles tienen los mismos vectores propios. Un mismo vector propio de A y B denotado por $|a', b'\rangle$ satisface la siguiente propiedad:

$$\begin{aligned} A \left| a', b' \right\rangle &= a' \left| a', b' \right\rangle \\ B \left| a', b' \right\rangle &= b' \left| a', b' \right\rangle \end{aligned} \tag{1.46}$$

Supongamos se realizan mediciones sobre los observables A y B los cuales son compatibles, después de la primera medición de A en la cual obtenemos a', medimos B y obtenemos b'. Finalmente, volvemos a medir A y obtenemos a', lo que significa que la segunda medición no destruye la información previa obtenida en la primera medición. Cuando hay degeneración, después de la primera medición (de A en donde se obtiene a') el sistema entra en una combinación lineal de estados

$$\sum_{i}^{n} c_{a'}^{(i)} \left| a', b^{(i)} \right\rangle \tag{1.47}$$

donde n es el grado de degeneración y los kets $\left| a', b^{(i)} \right\rangle$ tienen el mismo valor propio. La segunda medición (B) selecciona solo uno de los términos de la combinación lineal, por ejemplo $\left| a', b^{(j)} \right\rangle$, sin embargo en la tercera medición (A) se vuelve a obtener el valor a'. Es decir haya o no degeneración, las mediciones previas de A y/o B no interfieren.

Por otro lado los observables incompatibles no tienen un mismo conjunto de vectores propios y los resultados de sus mediciones sí dependen de los resultados de mediciones anteriores e interfieren con los resultados de las mediciones que se van a realizar.

1.1.5 Cambio de Base

Operador de Transformación

Supongamos que tenemos dos observables incompatibles A y B, el espacio ket en cuestión puede ser desarrollado ya sea por el conjunto $\{|a'\rangle\}$ o por el conjunto $\{|b'\rangle\}$ que son las bases de vectores propios de A y B respectivamente. Cambiar el conjunto de kets base significa realizar un cambio de base o de representación. Dados dos conjuntos de kets base ortonormales, existe un *operador unitario* U tal que:

$$\left|b^{(1)}\right\rangle = U\left|a^{(1)}\right\rangle, \left|b^{(2)}\right\rangle = U\left|a^{(2)}\right\rangle, ..., \left|b^{(N)}\right\rangle = U\left|a^{(N)}\right\rangle \tag{1.48}$$

El *operador unitario* U satisface las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} U^\dagger U &= 1 \\ UU^\dagger &= 1 \end{aligned} \tag{1.49}$$

Matriz de Transformación

La representación matricial de U en la antigua base $\{|a'\rangle\}$ es igual a:

$$\left\langle a^{(k)}\right| U \left|a^{(l)}\right\rangle = \left\langle \alpha^{(k)} \middle| b^{(l)} \right\rangle \tag{1.50}$$

es decir, los elementos de la matriz que representa al operador U se construyen a través de los productos internos de las antiguas bases de bras y las nuevas bases de kets. A la matriz cuadrada compuesta por $\langle a^{(k)}| U |a^{(l)}\rangle$ se le conoce como la matriz de transformación de la base $\{|a'\rangle\}$ en la base $\{|b'\rangle\}$. La relación entre los antiguos elementos de una matriz X y la nueva matriz están dados por:

$$\begin{aligned} \left\langle b^{(k)}\right| X \left|b^{(l)}\right\rangle &= \sum_m \sum_n \left\langle b^{(k)} \middle| a^{(m)} \right\rangle \left\langle a^{(m)}\right| X \left|a^{(n)}\right\rangle \left\langle \alpha^{(n)} \middle| b^{(l)} \right\rangle \\ &= \sum_m \sum_n \left\langle a^{(k)}\right| X \left|a^{(m)}\right\rangle \left\langle a^{(m)}\right| X \left|a^{(n)}\right\rangle \left\langle a^{(n)}\right| X \left|a^{(l)}\right\rangle \end{aligned} \tag{1.51}$$

que simplemente es lo que se conoce en algebra de matrices como una *transformación de semejanza*

$$X' = U^{\dagger} X U \tag{1.52}$$

La *traza* de un operador X es definida como la suma de los elementos de la diagonal

$$\begin{aligned} tr(X) &= \sum_{a'} \langle a' | X | a' \rangle & (1.53) \\ &= \sum_{b'} \langle b' | X | b' \rangle & (1.54) \end{aligned}$$

y es independiente de la representación que se elija. También se puede demostrar que:

$$tr(XY) = tr(YX) \tag{1.55}$$

$$tr(U^{\dagger} X U) = tr(X) \tag{1.56}$$

$$tr(|a'\rangle \langle a''|) = \delta_{a'a''} \tag{1.57}$$

$$tr(|b'\rangle \langle a'|) = \langle a' | b' \rangle \tag{1.58}$$

Observables Unitarios Equivalentes

Consideremos dos conjuntos de bases ortonormales $\{|a'\rangle\}$ y $\{|b'\rangle\}$ conectados por un operador U. Conociendo U, podemos construir una transformación unitaria de A, UAU^{-1}; de tal modo que se dice que A y UAU^{-1} son o*bservables unitarios equivalentes*.

La ecuación de valores propios para A

$$A \left| a^{(l)} \right\rangle = a^{(l)} \left| a^{(l)} \right\rangle \tag{1.59}$$

implica que:

$$UAU^{-1} U \left| a^{(l)} \right\rangle = a^{(l)} U \left| a^{(l)} \right\rangle \tag{1.60}$$

y esto puede ser reescrito como:

$$UAU^{-1} \left| b^{(l)} \right\rangle = a^{(l)} \left| b^{(l)} \right\rangle \tag{1.61}$$

esto significa que los observables unitarios equivalentes tienen el mismo espectro, es decir, idénticos valores propios.

1.1.6 El Operador de Densidad y la Mezcla Estadística de Estados

En Mecánica Clásica [5] podemos especificar precisamente el estado de un sistema por un punto en su espacio de fases. Su trayectoria a través del espacio de fases describe la evolución temporal del sistema y esta evolución está descrita por las leyes de Newton o las ecuaciones de Hamilton. En Mecánica Cuántica [1, 2, 3, 4] se puede describir precisamente el estado de un sistema al especificar su vector de estado $|\Psi(t)\rangle$ o su funcion de onda $\Psi(r,t)$ y la evolución del sistema está dada por la ecuación de Schrödinger. Sin embargo, en la mayoría de los casos cuando la información del sistema es incompleta, el estado del sistema no se encuentra perfectamente definido para lo cual tenemos que describir nuestro sistema en términos de probabilidades.

Un *ensamble* es una colección de sistemas físicos preparados idénticamente. Cuando cada miembro del sistema está caracterizado por el mismo vector de estado $|\Psi(t)\rangle$ se le llama *ensamble o estado puro*. Si cada miembro tiene una probabilidad p_i de estar en el estado $|\Psi_i(t)\rangle$ tenemos un *ensamble o estado mezclado.*

Caso Puro

Para el caso de un *ensamble o estado puro* el valor esperado en la medición de un cierto observable descrito por el operador A en el estado $|\Psi(t)\rangle$ al instante t está dado por:

$$\begin{aligned} \langle A\rangle &= \langle\Psi(t)|\,A\,|\Psi(t)\rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\,\langle j\,|\Psi(t)\,\rangle\,\langle\Psi(t)\,|i\,\rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}c_i^*(t)c_j(t) \end{aligned} \tag{1.62}$$

donde a_{ij} son los elementos de la matriz que representa al observable A y $c_i^* = \langle\Psi(t)\,|i\rangle$, $c_j = \langle j\,|\Psi(t)\,\rangle$ son los elementos de cierto operador ρ

$$\begin{aligned} c_i^*c_j &= \langle j\,|\Psi(t)\,\rangle\,\langle\Psi(t)\,|i\,\rangle \\ &= \langle j|\,\rho\,|i\rangle \end{aligned} \tag{1.63}$$

definido como

$$\rho(t) = |\Psi(t)\rangle\,\langle\Psi(t)| \tag{1.64}$$

El *operador de densidad* ρ para un ensamble puro en el estado $|\Psi(t)\rangle$ satisface las siguientes propiedades:

a) $\rho^{\dagger}(t) = \rho(t)$

b) $\rho^{2}(t) = \rho(t)$

c) $Tr\rho^{2}(t) = 1$

El superíndice † denota Hermitiana.

Podemos hacer todas las predicciones hechas para $|\Psi(t)\rangle$ en función de ρ. La suma de los elementos de la diagonal de la matriz de densidad es 1.

$$\sum_{n} |c_n(t)|^2 = Tr\rho(t) = 1 \tag{1.65}$$

El valor medio de un cierto observable A es calculado a través de la expresión:

$$\langle A \rangle = Tr\left\{\rho(t)A\right\} \tag{1.66}$$

Caso Mezclado

Un *estado mezclado* es una mezcla estadística de estados puros. La evolución de cada estado puro va a estar dada por la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar\frac{|\Psi(t)\rangle}{dt} = H\,|\Psi(t)\rangle \tag{1.67}$$

Las probabilidades para cada estado deben satisfacer la condición de normalización:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \tag{1.68}$$

obviamente, $0 \leq p_1, p_2, ..., p_n \leq 1$.

Supongamos que realizamos una medición de cierto observable A sobre cierto estado mezclado. El valor medio de A en ese ensamble está definido por el promedio de valores medios medidos en cada uno de los miembros del ensamble descritos por $|\Psi_i(t)\rangle$ y con probabilidad p_i.

$$\langle A \rangle_{\rho} = \sum_{i=1}^{n} p_i \left\langle \Psi_i(t) \right| A \left| \Psi_i(t) \right\rangle \tag{1.69}$$

es decir, $\langle A\rangle_\rho = p_1 \langle A\rangle_1 + p_2 \langle A\rangle_2 + ... + p_n \langle A\rangle_n$.

$$\begin{aligned}
\langle A\rangle_\rho &= \sum_{i=1}^{n} p_i \langle \Psi_i(t)| A |\Psi_i(t)\rangle \\
&= \sum_{i,j,k=1}^{n} p_i \langle \Psi_i(t) |j\rangle \langle j| A |k\rangle \langle k |\Psi_i(t)\rangle \\
&= \sum_{i,j,k=1}^{n} p_i c_j^{(i)*}(t) c_k^{(i)}(t) a_{jk} \qquad (1.70)
\end{aligned}$$

donde a_{jk} son los elementos de la matriz que representa al observable A y $c_k^{(i)} = \langle k |\Psi_i(t)\rangle$, $c_j^{(i)*} = \langle \Psi_i(t) |j\rangle$ son los elementos de cierto operador ρ

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} p_i c_j^{(i)*}(t) c_k^{(i)}(t) &= \sum_{i=1}^{n} \langle k |\Psi_i(t)\rangle p_i \langle \Psi_i(t) |j\rangle \\
&= \langle k| \rho(t) |j\rangle \qquad (1.71)
\end{aligned}$$

ahora definido como:

$$\rho(t) = \sum_{i=1}^{n} p_i |\Psi_i(t)\rangle \langle \Psi_i(t)| \qquad (1.72)$$

El operador de densidad contiene toda la información física del ensamble. Dos ensambles cualesquiera se dice que son *físicamente indistinguibles* si producen un mismo operador de densidad.

De la ecuación (1.70) tenemos que:

$$\langle A\rangle = Tr\{\rho(t)A\} \qquad (1.73)$$

Un estado puro esta especificado por $p_i = 1$ para algún $|\Psi_i(t)\rangle, i = 1, ..., n$ y su operador de densidad ρ está representado por una matriz con todos sus elementos igual a cero excepto un 1 sobre la diagonal.

El operador de densidad ρ para un ensamble mezclado satisface las siguientes propiedades:

a) ρ es Hermitiano.

b) $Tr\rho(t) = 1$

c) $\rho^2(t) \leqslant \rho(t)$

d) $Tr\rho^2(t) \leqslant 1$

Poblaciones y Coherencias

Los *elementos de la diagonal* ρ_{nn} del operador de densidad representan la probabidad media de encontrar a un sistema en el estado $|n\rangle$.

$$\begin{aligned}\rho_{nn} &= \langle n|\,\rho(t)\,|n\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle n\,|\Psi_i(t)\,\rangle\, p_i\, \langle \Psi_i(t)\,|n\,\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} p_i \left|c_n^{(i)}\right|^2 \end{aligned} \tag{1.74}$$

donde $c_n^{(i)} = \langle n\,|\Psi i(t)\,\rangle$ y $\left|c_n^{(i)}\right|^2 \in \mathbb{R}^+$.

Si el estado del sistema es $|\Psi_i(t)\rangle$, $\left|c_n^{(i)}\right|^2$ es la probabilidad de encontrar, en una medida, este sistema en el estado $|n\rangle$*(Poblaciones).* Los elementos de la diagonal ρ_{nn} son cero, si y solo si, todos los términos $\left|c_n^{(i)}\right|^2$ son cero.

Los *elementos no-diagonales* ρ_{np} expresan los efectos de interferencia entre los estados $|n\rangle$ y $|p\rangle$ los cuales pueden aparecer cuando el estado $|\Psi_i\rangle$ es una superposición coherente y lineal de estos estados (*Coherencias*).

$$\begin{aligned}\rho_{np} &= \langle n|\,\rho(t)\,|p\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle n\,|\Psi_i(t)\,\rangle\, p_i\, \langle \Psi_i(t)\,|p\,\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} p_i c_n^{(i)}(t) c_p^{(i)*}(t) \end{aligned} \tag{1.75}$$

donde $c_n^{(i)}(t) = \langle n\,|\Psi_i(t)\,\rangle$, $c_p^{(i)*}(t) = \langle \Psi_i(t)\,|p\,\rangle$ y $c_n^{(i)} c_p^{(i)*} \in \mathbb{C}$.

Si $\rho_{np} = 0$, esto significa que el promedio ha cancelado cualquier efecto de interferencia entre los estados $|n\rangle$ y $|p\rangle$, pero si es diferente de cero subsiste cierta coherencia entre estos estados.

Ecuación de Evolución del Operador de Densidad

La evolución temporal del operador de densidad, el cual describe un ensamble puro o mezclado, está dada por la siguiente ecuación:

$$i\hbar \frac{d\rho(t)}{dt} = [H(t), \rho(t)] \tag{1.76}$$

el cual es el análogo cuántico del teorema de Liouville de la mécanica clásica [6] y es también una generalización de la ecuación de Schrödinger.

1.1.7 El Operador de Densidad y la Mecánica Cuántica Estadística

Revisemos brevemente la conección entre el operador de densidad y la Mecánica Cuántica Estadística [2]. El supuesto básico que hacemos para obtener el operador de densidad del estudio de un ensamble en equilibrio térmico es que la naturaleza tiende a maximizar una cierta cantidad σ sujeta a la restricción de que el valor medio del Hamiltoniano del ensamble tiene un cierto valor prescrito. Esta cantidad σ es definida como:

$$\sigma = -Tr(\rho \ln \rho) \tag{1.77}$$

y puede ser vista como una medida cuantitativa de desorden.

Es fácil mostrar que para un estado mezclado y uno puro descrito por las matrices de densidad diagonalizadas ρ_m y ρ_p

$$\rho_m = \frac{1}{N}\begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & ... & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}, \ \rho_p = \begin{pmatrix} 0 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & ... & \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix} \tag{1.78}$$

la cantidad σ_m toma el valor:

$$\sigma_m = \ln N \tag{1.79}$$

y la cantidad σ_p toma el valor:

$$\sigma_p = 0 \tag{1.80}$$

Un ensamble puro es un ensamble con una máximma cantidad de orden porque todos sus miembros están caracterizados por el mismo vector de estado. Pero por otro lado, en un ensamble mezclado en el cual todos los vectores de estado tienen asignados una cierta probabilidad, σ toma su máximo valor posible sujeto a la condición de normalización:

$$\sum_k \rho_{kk} = 1 \tag{1.81}$$

Esta cantidad σ se relaciona con la definición de entropía S de la Mecánica Cuántica Estadística a través de la siguiente expresión:

$$S = k\sigma \tag{1.82}$$

donde k es la constante de Boltzmann y es igual a $k = 1.3806568 \times 10^{-23}\,\mathrm{J\,K^{-1}}$.

Una vez que σ alcanza su máximo valor y se establece el equilibrio térmico se espera que:

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 \tag{1.83}$$

Maximizemos σ requiriendo que:

$$\delta\sigma = 0 \tag{1.84}$$

sujeto a las restricciones:

$$\begin{aligned} \delta \langle H \rangle &= \delta Tr(\rho H) \\ &= \sum_k \delta\rho_{kk} E_k \\ &= 0 \end{aligned} \tag{1.85}$$

y

$$\begin{aligned} \delta(Tr(\rho)) &= \sum_k \delta\rho_{kk} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{1.86}$$

A través del uso de multiplicadores de Lagrange podemos acoplar estas relaciones y obtener:

$$\sum_k \delta\rho_{kk} \left[(\ln\rho_{kk} + 1) + \beta E_k + \gamma\right] = 0 \tag{1.87}$$

la cual es posible, para una variación arbitraria, solo si:

$$\rho_{kk} = \exp(-\beta E_k - \gamma - 1) \tag{1.88}$$

donde γ puede ser eliminada haciendo uso de la condición de normalización. Nuestro resultado final es:

$$\rho_{kk} = \frac{\exp(-\beta E_k)}{\sum_l^N \exp(-\beta E_l)} \tag{1.89}$$

El denominador de la ecuación (1.89) es conocido como *función de partición*

$$\begin{aligned} Z &= \sum_l \exp(-\beta E_l) \\ &= Tr(e^{-\beta H}) \end{aligned} \tag{1.90}$$

Dado ρ_{kk} en la base de vectores propios del Hamiltoniano del sistema, podemos escribir el operador de densidad como:

$$\rho = \frac{e^{-\beta H}}{Z} \tag{1.91}$$

El operador de densidad ρ es el análogo mecánico cuántico de la densidad de puntos de equilibrio en el espacio de fases para un ensamble canónico.

Sistema en Equilibrio Termodinámico

Como ya se vio, en la base de vectores propios $\{|n\rangle\}$ del Hamiltoniano H, los elementos de la diagonal del operador de densidad están dados por:

$$\begin{aligned} \rho_{nn} &= \frac{\langle n| e^{-\beta H} |n\rangle}{Z} \\ &= \frac{e^{-\beta E_n}}{Z} \end{aligned} \tag{1.92}$$

y los elementos no-diagonales estarían dados por:

$$\begin{aligned} \rho_{np} &= \frac{\langle n| e^{-\beta H} |p\rangle}{Z} \\ &= \frac{e^{-\beta E_p}}{Z} \langle n |p\rangle \\ &= 0 \end{aligned} \tag{1.93}$$

En el equilibrio termodinámico, las poblaciones de estados estacionarios son funciones exponencialmente decrecientes de la energía, y las coherencias entre estados estacionarios son cero [1].

1.2 Teoría de Juegos

1.2.1 Introducción

La *teoría de juegos* [7, 8, 9] es el estudio de la toma de decisiones de agentes que compiten en una situación conflictiva. Trata de entender el nacimiento y desarrollo de comportamientos conflictivos y cooperativos dentro de un grupo de individuos que se comportan estratégicamente de acuerdo con sus intereses personales. Cada miembro del grupo lucha para maximizar su bienestar, estado, utilidades o ganacias escogiendo el mejor curso de estrategias desde un punto de vista cooperativista o individualista. La teoría de juegos ha sido aplicada para resolver muchos problemas en Economía, Ciencias Sociales, Biología e Ingeniería.

1.2.2 Estrategias y puntos de Equilibrio

Un *juego simétrico entre dos personas* $G = (S, E)$ consiste de un conjunto finito, no vacío de estrategias puras S y una función de utilidad E la cual asigna un número real al par (s_i, s_j). $E(s_i, s_j)$ es la utilidad obtenida por un jugador que juega la estrategia s_i contra su oponente que juega la estrategia s_j. Una estrategia mezclada x es una función de distribución de probabilidad sobre el espacio estratégico S.

La *mejor respuesta* a la estrategia q es una estrategia p la cual maximiza $E(p, q)$. Un *punto de equilibrio* es el par (p, q) con la propiedad de que p y q son las mejores respuestas del uno con respecto al otro. Una estrategia r es una *estricta mejor respuesta* a una estrategia q si es la única mejor respuesta a q. Una estricta mejor respuesta debe ser una estrategia pura. Un *punto de equilibrio* (p, q) se le llama *estricto* si p y q son estrictas mejores respuestas mutuas. La mejor respuesta a p la cual es diferente de p es llamada *mejor respuesta alternativa a p*.

Un *equilibrio de Nash* (NE) es un par de estrategias tal que ningún jugador tiene un incentivo al cambiar unilateralmente su estrategia. Los jugadores están en equilibrio si un cambio en sus estrategias por alguno de ellos le conduciría a ese jugador a ganar menos que si el mantuviera su estrategia actual. Un equilibrio de Nash satisface la siguiente condición:

$$E(p, p) \geq E(r, p) \tag{1.94}$$

Un jugador no puede aumentar sus ganacias si decide jugar la estrategia r en lugar de p.

1.2.3 Representación de un Juego

Existen dos formas de representar un juego:

Representación Normal

La *representación normal* de un juego consiste de:

1. Un conjunto finito de N agentes o jugadores.
2. Un espacio estratégico $S_i, i = 1, ..., N$ para cada uno de los N jugadores.
3. y la Función de Utilidad E que asigna a cada par de estrategias (s_i, s_j) un número real $E(s_i, s_j)$ entendido como la ganancia o utilidad obtenida por un jugador que juega la estrategia s_i contra su oponente que juega la estrategia s_j.

Representación Extensiva

La *representación extensiva* de un juego es una completa descripción de:

1. El conjunto de jugadores.
2. Quién y cuándo se juega una estrategia y cuáles son las opciones que tiene.
3. Las ganacias de los jugadores como función de las elecciones que fueron realizando.
4. Qué jugadores saben cuándo "mover", es decir cuándo jugar una determinada estrategia.

La forma extensiva de un juego provee un marco más apropiado para el análisis de interacciones estratégicas que envuelven movimientos secuenciales. Da un mejor análisis de una interacción estratégica especificando quién juega una determinada estrategia, haciendo qué, cuándo y con qué información. La forma más fácil de representar un juego en forma extensiva es a través de un árbol de jugadas, que es una generalización para muchos jugadores de un árbol de decisiones [10].

1.2.4 Estructura de Información

La información que dispone un jugador es descrita por lo que se llama la *estructura de información* del juego.

Juegos Cooperativos

En los *juegos cooperativos* los jugadores están permitidos de llegar a acuerdos. Estos son restricciones sobre las posibles acciones decididas por dos o más jugadores. Los "acuerdos" generalmente requieren de una autoridad exterior quien monitorea este acuerdo a ningún costo e impone a los violadores sanciones severas para prevenir el engaño y la estafa. Para los jugadores bajo un acuerdo existe un fuerte incentivo para trabajar juntos y recibir una mayor utilidad final.

Juegos No Cooperativos

En los *juegos no cooperativos* no se pueden formar acuerdos. Los jugadores no pueden ni cooperar ni entrar en negociación para conseguir un común curso de acciones. Sin embargo los jugadores saben cómo las acciones que ellos poseen y las acciones de los otros jugadores van a determinar la ganacia de cada jugador.

1.2.5 Juegos Matriciales

Una forma de describir un juego es enumerando los jugadores que participan en el juego y las elecciones o movimientos disponibles para cada jugador. En el caso de un juego de dos jugadores, los movimientos del primer jugador forman las filas y los del segundo las columnas de una matriz (1.95). Las entradas en la matriz son dos números representando la ganacia para el primer y segundo jugador respectivamente. Tal descripción de un juego hace posible representar completamente las ganacias de los jugadores por una sola matriz.

$$
\begin{array}{cc}
 & \mathit{Baphomet} \\
 & \begin{array}{cccc} s_1 & s_2 & ... & s_N \end{array} \\
\mathit{Aliester} \begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \\ ... \\ s_N \end{array} & \begin{pmatrix} (a_{11},b_{11}) & (a_{12},b_{12}) & ... & (a_{1N},b_{1N}) \\ (a_{21},b_{21}) & (a_{22},b_{22}) & ... & (a_{2N},b_{2N}) \\ ... & ... & ... & ... \\ (a_{N1},b_{N1}) & (a_{N2},b_{N2}) & ... & (a_{NN},b_{NN}) \end{pmatrix}
\end{array}
\tag{1.95}
$$

Juegos de Suma Constante

En un *juego de suma constante*, la suma de las ganancias de todos los jugadores es la misma para cualquier resultado. Por lo tanto, la ganancia de un participante siempre es a expensas de otro.

Juegos de Suma Cero

Un *juego de suma cero* es un caso especial del de suma constante en el cual todos los resultados conllevan a una suma de ganancia de todos los jugadores igual a cero. Debido a que las ganancias pueden ser siempre normalizadas, un juego de suma constante puede ser representado como un juego de suma cero.

Juegos Bi - matriciales

En un *juego bi matricial* cada jugador tiene su propia matriz de utilidad.

1.2.6 El Replicador Dinámico y la Teoría de Juegos Evolutivos

Introducción

La *teoría de juegos evolutivos* [11, 12, 13] no se funda sobre supuestos de racionalidad (como la teoría de juegos clásicos) pero sí en la idea de que procesos de selección natural Darvinistas [14] conducen a los organismos hacia la optimización de su éxito reproductivo [15]. Combina los principios de la teoría de juegos clásicos, evolución y sistemas dinámicos para explicar la distribución de diferentes fenotipos en poblaciones biológicas. En lugar de trabajar por la mejor estrategia, los diferentes fenotipos en una población son asociados con estrategias básicas que se han formado a través de la prueba y el error en un proceso de selección natural o aprendizaje. Puede también ser utilizada para interpretar a los juegos clásicos desde una perspectiva diferente. En lugar de calcular directamente las propiedades de un juego, se simulan poblaciones de jugadores usando diferentes estrategias y se utiliza un proceso similar a la selección natural para determinar como evoluciona la población. Esto se hace a través del ánalisis de estabilidad de estas ecuaciones diferenciales y de sus implicaciones en el juego [16]. El concepto central de equilibrio de la teoría de juegos evolutivos es la noción de *estrategia evolutivamente estable* (Evolutionary Stable Strategy **ESS**) introducida por J. Smith y G. Price [17, 11]. Una ESS es descrita como una estrategia la cual tiene la propiedad de que si todos los miembros de una población la adoptan, ninguna estrategia mutante puede invadir la población bajo la influencia de un proceso de selección natural. Las ESS son interpretadas como los resultados estables de procesos de selección natural. El proceso de selección natural que determina cómo evolucionan las poblaciones jugando estrategias específicas se conoce como el *Replicador Dinámico* [18, 12, 13, 16] cuyos puntos fijos estables son equilibrios de Nash [8].

Las utilidades o ganacias en juegos biológicos se dan en términos de la *"aptitud"* (fitness), una medida del éxito reproductivo [15]. Las estrategias son consideradas programas heredados para cualquier situación concebible los cuales controlan el comportamiento del individuo. Los miembros de una población interactuan en una situación de tipo juego y la acción conjunta de procesos de selección y mutación remplazan unas estrategias por otras con un mayor éxito reproductivo. En este tipo de juegos o interacciones es menos importante conocer cuál miembro juega qué estrategia pero es realmente importante conocer la *"frecuencia relativa"* de las acciones, es decir la probabilidad con la que un jugador juega una estrategia.

Cada agente en un juego de n jugadores donde el $i^{\text{ésimo}}$ jugador tiene como espacio estratégico a S_i se modela por una población de jugadores los cuales tienen que ser particionados en grupos. Los individuos que pertenecen a un mismo grupo jugarán todos la misma estrategia. Aleatoriamente hacemos jugar a los miembros de las subpoblaciones unos encontra de otros. Las subpoblaciones que se desempeñen mejor crecerán y aquellas que no disminuirán hasta eventualmente desaparecer. El proceso de selección asegura la supervivencia de los mejores jugadores a expensas del resto. El equilibrio en una población ocurre cuando las utilidades esperadas para todas las estrategias son iguales.

Estabilidad Evolutiva y Estrategias Evolutivamente Estables

Consideremos una población grande en la cual un juego de dos jugadores $G = (S, E)$ aleatoriamente apareados se juega generación tras generación. Sea p la estrategia jugada por la vasta mayoría de la población, y sea r una estrategia mutante presente en pequeña frecuencia. Ambas p y r pueden ser puras o mezcladas. Una *estrategia evolutivamente estable (ESS)* [17] p de un juego simétrico entre dos personas $G = (S, E)$ es una estrategia pura o mezclada para G la cual satisface las siguentes condiciones:

$$E(p,p) > E(r,p)$$
$$\text{Si } E(p,p) = E(r,p) \text{ entonces } E(p,r) > E(r,r) \tag{1.96}$$

Debido a que la condición de estabilidad únicamente concierne a mejores respuestas alternativas, p es siempre evolutivamente estable si (p,p) es un punto de equilibrio estricto. Una ESS es también un equilibrio de Nash debido a que es la mejor respuesta a sí mismo y el juego es simétrico. El conjuto de todas las estrategias que son ESS es un subconjunto de los NE del juego. Una población que juega una ESS puede resistir la invasión de un pequeño grupo de mutantes que juegan una estrategia diferente esto significa que si un pequeño grupo de individuos los cuales juegan una estrategia diferente se introducen en una población en un estado ESS, el proceso de selección natural eliminará eventualmente a los invasores. Las ESS son interpretadas como resultados estables de procesos de selección natural.

El Replicador Dinámico

El proceso de selección natural que determina como una población jugando estrategias específicas evoluciona es conocido como *replicador dinamico* [18]. Éste describe la evolución de un estado polimórfico en una población representado por una estrategia mezclada q para G cuyos miembros están envueltos en un conflicto descrito por un juego simétrico entre dos personas $G = (S, E)$. La probabilidad asignada a una estrategia pura

s es denotada por $x(s)$. Si $s_i, i = 1, ..., n \in S$ son las estrategias puras posibles para un jugador, entonces la estrategia de ese jugador va a estar denotada por un vector columna x donde sus elementos $x_i \in [0,1]$ y $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ en el cual la $i^{\text{ésima}}$ componente de x es la probabilidad de jugar la estrategia s_i. La $\text{i}^{\text{ésima}}$ componente de x es también interpretada como la frecuencia relativa de jugadores usando la estrategia s_i. El jugar una estrategia pura s_j es representado por el vector x cuya $j^{\text{ésima}}$ componente es 1 y todas las otras componentes 0. La función de utilidad está dada por $E = f_i(x), i = 1, ..., n$ y especifica cuán exitosa es cada subpoblación. La función de utilidad debe ser definida para cada componente de x.

La *función de utilidad* para x_i es la utilidad esperada al jugar la estrategia s_i contra un jugador con una estrategia mezclada definida por un vector x y está dada por:

$$f_i(x) = (Ax)_i \tag{1.97}$$

donde A es la matriz de utilidad y el subíndice $i = 1, ..., n$ denota la $i^{\text{ésima}}$ componente del producto matriz-vector. También:

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \tag{1.98}$$

donde a_{ij} son los elementos de la matriz de utilidad A.

La *utilidad media* de la población está dada por:

$$\langle f(x) \rangle = x^T A x \tag{1.99}$$

$$\langle f(x) \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i(x) \tag{1.100}$$

$$\langle f(x) \rangle = \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk} x_j x_k \tag{1.101}$$

en donde el superíndice T denota transpuesta.

La evolución de las frecuencias relativas de una población está descrita por el *Replicador Dinámico*:

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = [f_i(x) - \langle f(x) \rangle]\, x_i(t) \tag{1.102}$$

Reemplazando las relaciones (1.97) y (1.99) en la ecuación (1.102) o reemplazando las relaciones (1.98) y (1.101) podemos obtener dos formas diferentes de representar al replicador dinámico:

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \left[(Ax)_i - x^T Ax\right] x_i(t) \quad (1.103)$$

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}x_k x_l\right] x_i(t) \quad (1.104)$$

Los puntos fijos estables del replicador dinámicos son equilibrios de Nash. Es importante notar que los puntos fijos de un sistema no varían en el tiempo. Esto significa que si una población alcanza un estado que es un Equilibrio de Nash, se mantendrá ahí. Existen varias versiones de Replicador dinámico [12, 13, 16, 18] dependiendo del modelo evolutivo usado. El Replicator dinámico "premia" a las estrategias que sobresalgan del promedio aumentando su frecuencia relativa y "castiga" las estrategias de bajo desempeño disminuyendo su frecuencia relativa.

En un juego simétrico las matrices de utilidad y las acciones son idénticas para ambos jugadores. Estos juegos pueden ser modelados por una población de individuos jugando unos encontra de otros. Cuando el juego es asimétrico, se debe usar una diferente población de jugadores para simular cada agente. El vector estrategia para el jugador 1 está representado por x y para el jugador 2 por y, y tendrán como matrices de utilidad a A y B respectivamente. El jugador 1 tiene n estrategias $s_{1i}, i = 1, ..., n \in S_1$ y el jugador 2, m estrategias $s_{2j}, j = 1, ..., m \in S_2$. La utilidad para un jugador que juega la estrategia s_{1i} será $f_{1i} = (Ay)_i$ y la utilidad media de la primera población será $\langle f_1 \rangle = x^T Ay$. La utilidad para un jugador que juega la estrategia s_{2i} será $f_{2i} = (Bx)_i$ y la utilidad media de la segunda población será $\langle f_2 \rangle = y^T Bx$. La evolución de este juego estaría descrito por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{dx_i(t)}{dt} &= \left[(Ay)_1 - x^T Ay\right] x_i(t) \\ \frac{dy_i(t)}{dt} &= \left[(Bx)_1 - y^T Bx\right] y_i(t) \end{aligned} \quad (1.105)$$

1.2.7 Teoría de Juegos Cuánticos

Introducción

La *teoría de juegos cuánticos* ha propuesto un nuevo e interesante punto de vista para la solución de problemas clásicos y dilemas en teoría de juegos. Se ha demostrado en varías ocaciones que los juegos cuánticos son más eficientes y proveen más ventajas que sus análogos clásicos [19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30].

Meyer [19] cuantizó un juego de "cara o sello" de una moneda y encontró que un jugador puede aumentar su utilidad media y ganar con certeza si implementa una estrategia cuántica contra la estrategia clásica de su oponente. Además, un jugador usando una estrategia cuántica óptima en un juego de dos personas de suma cero tiene una ganancia esperada por lo menos tan grande como la ganancia esperada de una estrategia mezclada óptima.

Eisert *et al* [20] desarrollaron un protocolo general para un juego cuántico de dos jugadores - dos estrategias con entanglement al cuantizar el famoso dilema de los prisioneros. Encontró un único equilibrio de Nash que es diferente del clásico. El dilema podría ser resuelto si los dos jugadores estarían permitidos de usar estrategias cuánticas. Explica las razones por las cuales resultaría ser interesante cuantizar un juego fundamentalmente por la característica probabilística de ambas teorías (juegos y mecánica cuántica), la conección entre la teoría de juegos y la teoría de la comunicación, y la posibilidad de que juegos cuánticos puedan estar siendo jugados a nivel molecular [31, 32]. Finalmente, asegura que una estrategia cuántica aumenta su "rendimiento" si es que el entanglement (entrelazamiento) está presente. El trabajo realizado por Eisert *et al* para dos jugadores fue luego extendido al caso de juegos de muchos jugadores [30].

Marinatto y Weber [22] extendieron el concepto de juego clásico estático entre dos personas al dominio cuántico al dar una estructura de espacio de Hilbert al espacio de estrategias clásicas. Permiten la existencia de combinaciones lineales de estrategias clásicas que pueden ser interpretadas de acuerdo con el formalismo usual de la mecánica cuántica. Además mostraron que la introducción de estrategias en entanglement en el juego "batalla de los sexos" conduce a una única solución del juego.

Du *et al* [24] implementaron un juego a través de un sistema de resonancia magnética nuclear y demostraron que ninguno de los dos jugadores ganarían si ellos juegan racionalmente, pero si adoptan estrategias cuánticas ambos ganarían. Vuelven a cuantizar la batalla de los sexos pero ahora siguiendo el esquema usado por Eisert *et al* [20, 21] en lugar del usado por Marinatto y Weber [22] y encuentran un número infinito de equilibrios de Nash y una ganancia inferior a la de su versión clásica.

Lee y Johnson [23] demostraron que para todo juego cuántico, por lo menos un equilibrio de Nash existe (Teorema del Equilibrio de Nash cuántico) y también demostraron la vesión cuántica del teorema Minimax.

Azhar Iqbal [29] fue el primero que buscó una versión cuántica de la teoría de juegos evolutivos y del replicador dinámico pero mantuvo la forma clásica del replicador y únicamente calculó equilibrios cuánticos. Se enfocó más en el papel que pueda jugar la mecánica cuántica a nivel molecular y de sus aplicaciones a la biología y genética, fundamentalmente en el estudio del genoma, el ADN, las proteinas y el cáncer. Sus últimos trabajos realizados en la teoría de juegos tratan sobre el rol del entanglement en la estabilidad evolutiva de un juego y en sus aplicaciones a la biología y la economía.

Piotrowski y Sladkowski han modelado mercados, subastas y negociaciones asumiendo que los negociantes pueden usar protocolos cuánticos [33, 34, 35]. En los nuevos mercados cuánticos las transacciones se describen en términos de operaciones sobre un espacio de Hilbert. La mecánica cuántica ha permitido modelar aspectos especiales del comportamiento del mercado. Por ejemplo, los negociantes observan las acciones de otros jugadores y ajustan las suyas [34]. El máximo flujo de capital a un precio dado corresponde al máximo entanglement entre compradores y vendedores [33].

La naturaleza podría estar jugando juegos cuánticos de supervivencia a nivel molecular [31, 32]. Esto nos permitiría describir muchos de los procesos "vivos" a través de la Mecánica Cuántica como lo hicieron Gogonea y Merz [36] con las proteínas.

La Teoría de juegos clásicos, evolutivos y cuánticos ofrecen interesantes y poderosas herramientas para su aplicación en la computación, análisis de sistemas complejos, economía, biología y ciencias del conocimiento [37, 38, 39].

Chapter 2

Relaciones entre el Replicador Dinámico y la Mecánica Cuántica

2.1 Representación Matricial del Replicador Dinámico

Como se vio el Replicador Dinámico es una ecuación diferencial donde x es un vector columna. Obviamente, la matriz $U = (Ax)_i - x^T Ax$ es diagonal y sus elementos están dados por la siguiente expresión:

$$u_{ii} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk} x_j x_k \tag{2.1}$$

De tal manera que el replicator dinamico puede ser expresado como:

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ux(t) \tag{2.2}$$

Multiplicando cada elemento de x por su correspondiente $(x_i)^{-1/2}$ en ambas partes de la ecuación (1.104) o de la ecuación (2.2) podemos reescribirla como:

$$v = U\hat{x} \tag{2.3}$$

donde v y $\hat{x}$ son vectores columna que tienen como elementos $v_i = \frac{1}{(x_i)^{1/2}} \frac{dx_i}{dt}$ y $\hat{x}_i = (x_i)^{1/2}$ respectivamente. Multipliquemos la ecuación (2.3) por $\hat{x}^T$ y definamos a la matriz G como:

$$G = \frac{1}{2} v \hat{x}^T \tag{2.4}$$

donde $g_{ij} = \frac{1}{2}\frac{(x_j)^{1/2}}{(x_i)^{1/2}}\frac{dx_i}{dt}$ son los elementos de G.

La matriz G es también igual a:

$$G = \frac{1}{2}U\hat{x}\hat{x}^T \tag{2.5}$$

con $(U\hat{x}\hat{x}^T)_{ij} = \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k - \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}x_k x_l\right](x_i x_j)^{1/2}$.

Hallemos G^T:

$$\begin{aligned} G^T &= \frac{1}{2}(v\hat{x}^T)^T \\ G^T &= \frac{1}{2}(\hat{x}v^T) \end{aligned} \tag{2.6}$$

donde $g_{ij}^T = \frac{1}{2}\frac{(x_i)^{1/2}}{(x_j)^{1/2}}\frac{dx_j}{dt}$ son los elementos de la matriz G^T.

La matriz G^T es tambien igual a:

$$\begin{aligned} G^T &= \frac{1}{2}(U\hat{x}\hat{x}^T)^T \\ G^T &= \frac{1}{2}(\hat{x}\hat{x}^T U^T) \end{aligned} \tag{2.7}$$

con $(\hat{x}\hat{x}^T U^T)_{ij} = (x_j x_i)^{1/2}\left[\sum_{k=1}^{n} a_{jk}x_k - \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}x_k x_l\right]$.

Definamos la variación temporal de una cierta matriz X como la suma de la matriz G y su traspuesta

$$\frac{dX}{dt} = G + G^T \tag{2.8}$$

de tal manera que X tenga como elementos:

$$x_{ij} = (x_i x_j)^{1/2} \tag{2.9}$$

La evolución temporal de X es también igual a:

$$G + G^T = \frac{1}{2}(U\hat{x}\hat{x}^T + \hat{x}\hat{x}^T U^T) \tag{2.10}$$

con:

$$\begin{aligned} \left(G + G^T\right)_{ij} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k (x_i x_j)^{1/2} \\ &\quad + \frac{1}{2}(x_j x_i)^{1/2}\sum_{k=1}^{n} a_{jk}x_k \\ &\quad - \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}x_k x_l (x_i x_j)^{1/2}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

De la expresión anterior llamemos

$$(G_1)_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k(x_ix_j)^{1/2} \quad (2.12)$$

$$(G_2)_{ij} = \frac{1}{2}(x_jx_i)^{1/2}\sum_{k=1}^{n} a_{jk}x_k \quad (2.13)$$

$$(G_3)_{ij} = \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}x_kx_l(x_ix_j)^{1/2} \quad (2.14)$$

los elementos de las matrices G_1, G_2, y G_3 que componen por adición a la matriz $\left(G+G^T\right)$.

La matriz G_1 se la puede factorar en el producto de dos matrices Q y X:

$$G_1 = QX \quad (2.15)$$

donde Q es una matriz diagonal que tiene como elementos $q_{ii} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k$.

Del mismo modo a la matriz G_2 se la puede factorar en:

$$G_2 = XQ \quad (2.16)$$

Se puede reagrupar a los miembros de la matriz G_3 de manera que pueda ser representada como $(G_3)_{ij} = \sum_{l=1}^{n}(x_ix_l)^{1/2}\sum_{k=1}^{n} a_{kl}x_k(x_lx_j)^{1/2}$ y esta puede ser factorada en:

$$G_3 = 2XQX \quad (2.17)$$

Es fácil mostrar que $X^2 = X$ de tal manera que podemos reescribir haciendo uso de las ecuaciones (2.15), (2.16) y (2.17) la ecuación (2.8) como:

$$\frac{dX}{dt} = QXX + XXQ - 2XQX \quad (2.18)$$

y finalmente podemos agrupar las matrices de la derecha de la ecuación (2.18) haciendo uso de las propiedades de commutación de tal manera que podamos expresarla como:

$$\frac{dX}{dt} = \left[\left[Q, X\right], X\right] \quad (2.19)$$

$$\frac{dX(t)}{dt} = \left[\Lambda(t), X(t)\right] \quad (2.20)$$

donde $\Lambda = [Q, X]$. Los elementos de la matriz Λ

están dados por $(\Lambda)_{ij} = \frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k(x_ix_j)^{1/2} - (x_jx_i)^{1/2}\sum_{k=1}^{n} a_{jk}x_k\right]$.

La ecuaciones (2.19) y (2.20) pueden ser consideradas como una generalización del replicador dinámico como fue visto en las ecuaciones (1.102), (1.103) y (1.104). Podemos llamar a la matriz X la *matriz de frecuencias relativas* y su evolución está descrita por la ecuación (2.20). Es fácil darse cuenta que cada componente de esta matriz evolucionará siguiendo el replicador dinámico a través de las ecuaciones (1.102), (1.103) o (1.104), es decir la ecuación (2.20) no es más que la *forma matricial del replicador dinámico.*

La matriz X de frecuencias relativas satisface las siguientes propiedades:

a) $Tr(X) = 1$

b) $X^2 = X$

c) $X^T = X$

Si tomamos $\Theta = [\Lambda, X]$, la ecuación (2.20) se convierte en:

$$\frac{dX}{dt} = \Theta \tag{2.21}$$

donde los elementos de Θ están dados por:

$$\begin{aligned}(\Theta)_{ij} \quad = \quad & \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k(x_ix_j)^{1/2} \\ & + \frac{1}{2}(x_jx_i)^{1/2}\sum_{k=1}^{n} a_{jk}x_k \\ & - \sum_{k,l=1}^{n} a_{lk}x_kx_l(x_ix_j)^{1/2}\end{aligned} \tag{2.22}$$

Por ejemplo, la ecuación para la primera componente sería $\frac{dx_1}{dt} = \left[\sum_{k=1}^{n} a_{1k}x_k - \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}x_kx_l\right] x_1$ la cual efectivamente corresponde a aquella que describe la evolución de la frecuencia relativa de individuos usando la estrategia s_1 como fue visto en la ecuación (1.104). La ventaja de usar la ecuación (2.20) en lugar de la ecuación (1.104) es debido a que nos permite conocer la evolución de los términos de "interferencia" entre frecuencias relativas de diferentes estrategias como los términos de la forma $(x_ix_j)^{1/2}$.

2.2 Relaciones de Cuantización y el Replicador Dinámico Cuántico

Se proponen las siguientes relaciones de cuantización:

$$x_i \longrightarrow \sum_{k=1}^{n} \langle i \,|\Psi_k\rangle \, p_k \, \langle \Psi_k \,| i\rangle = \rho_{ii} \tag{2.23}$$

$$(x_i x_j)^{1/2} \longrightarrow \sum_{k=1}^{n} \langle i \,|\Psi_k\rangle \, p_k \, \langle \Psi_k \,| j\rangle = \rho_{ij} \tag{2.24}$$

Es decir, una población será representada por un sistema cuántico en el cual cada subpoblación que juega una estrategia s_i será representada por un ensamble puro en el estado $|\Psi_k(t)\rangle$ y con probabilidad p_k. La probabilidad x_i de jugar la estrategia s_i o la frecuencia relativa de individuos usando la estrategia s_i en esa población será representada con la probabilidad ρ_{ii} de encontrar cada ensamble puro en el estado $|i\rangle$.

A través de estas relaciones de cuantización a nuestra matriz de frecuencias relativas de una población le corresponde la matriz de densidad ρ

$$X \longrightarrow \rho \tag{2.25}$$

y de las ecuaciones (2.20) y (1.76) obtemos que

$$\Lambda \longrightarrow \hat{H} \tag{2.26}$$

donde $H = i\hbar\hat{H}$ de tal manera que el replicador dinámico toma la forma de la ecuación de evolución de estados mezclados:

$$i\hbar \frac{d\rho(t)}{dt} = [H(t), \rho(t)] \tag{2.27}$$

Podemos trasladar nuestras definiciones hechas para un juego evolutivo al mundo cuántico como la función de utilidad:

$$f_i(\rho) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \rho_{jj} \tag{2.28}$$

y la utilidad media de una población:

$$\langle f(\rho)\rangle = \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl} \rho_{kk} \rho_{ll} \tag{2.29}$$

De acuerdo con la ecuación (1.77) la entropía de nuestro sistema estaría dada por:

$$\begin{aligned} \sigma(X) &= -Tr(X \ln X) \\ &= -\sum_{i,j=1}^{n} x_{ij} \ln x_{ji} \end{aligned} \qquad (2.30)$$

donde x_{ij} son los elementos de la matriz X.

Cuando los elementos no-diagonales de A y ρ son cero:

$$Q = \frac{1}{2} A\rho \qquad (2.31)$$

de tal manera que Λ se convierte en:

$$\Lambda = \frac{1}{2} [A\rho - \rho A\rho] \qquad (2.32)$$

Debido a que $H = i\hbar\Lambda$, el hamiltoniano que describe a nuestro sistema es igual a:

$$H = \frac{i\hbar}{2} [A\rho - \rho A\rho] \qquad (2.33)$$

y por tanto, la energía media de nuestro sistema es:

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= Tr(H\rho) \\ &= \frac{i\hbar}{2} [A\rho - \rho A] \\ &= 0 \end{aligned} \qquad (2.34)$$

Para este caso es fácil darse cuenta que en la ecuación (2.33) el Hamiltoniano H de nuestro sistema es una matriz diagonal donde sus elementos H_{ii} son sus valores propios y para el caso de un juego simétrico entre dos personas, los vectores propios del juego son:

$$\begin{aligned} |\Psi_1\rangle &= \alpha |1\rangle + \beta |0\rangle \\ |\Psi_2\rangle &= \gamma |0\rangle + \delta |1\rangle \end{aligned} \qquad (2.35)$$

donde las constantes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ están sujetas a las restricciones $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ y $|\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1$. Para este caso también $[\Lambda, \rho] = \Lambda$ y

$$\frac{dX}{dt} = \Lambda \qquad (2.36)$$

La función de utilidad toma la forma $f(x) = A\rho$ y su traza es igual a:

$$Tr(f(x)) = \langle A \rangle_\rho \tag{2.37}$$

La función de utilidad media está dada por:

$$\langle f(x) \rangle = Tr(\rho A \rho) \tag{2.38}$$

Para el caso en que $x_{ij} = 0$ la entropía de nuestro juego toma la forma:

$$\begin{aligned} \sigma &= -\sum_{i=1}^{n} x_{ii} \ln x_{ii} \\ &= -\sum_{i=1}^{n} x_i \ln x_i \end{aligned} \tag{2.39}$$

Como resumen, la ecuación de evolución de los estados mezclados de la Mecánica Cuántica Estadística (1.76) es la versión cuántica del replicador dinámico (2.20) y sus matrices respectivas tienen propiedades similares.

2.3 Equilibrio Estratégico Cuántico

Si en un sistema aislado cada uno de sus estados accesibles no tienen la misma probabilidad, el sistema no se encuentra en equilibrio. El sistema variará y evolucionará en el tiempo hasta que alcance el estado de equilibrio cuando la probabilidad de encontrar al sistema en cada uno de sus estados accesibles sea la misma. Entonces el sistema encontrará su configuración más probable en la cual el número de estados accesibles es máximo y equiprobable. Todo el sistema variará y rearreglará su estado y los estados de sus ensambles con el propósito de maximizar su entropía y alcanzar su estado de mínima energía. Podríamos decir que el propósito y máxima utilidad de un juego de este tipo es alcanzar su estado de mínima energía.

El sistema y sus miembros variarán y se rearreglarán a sí mismos para alcanzar el mejor estado posible para cada uno de ellos el cual es también el mejor estado posible para todo el sistema. Esto puede ser visto como una cooperación microscópica entre objetos cuánticos para mejorar su estado con el propósito de alcanzar o mantener el equilibrio del sistema. Todos los miembros de nuestro sistema cuántico participarán en un juego en el cual su máxima ganancia será su estado de mínima energía. Partículas diferentes cooperarán para formar un sistema en el cual su nuevo estado tendrá que ser mejor que el estado que tenían antes de que interactuen para formar un átomo. Átomos diferentes cooperarán para formar un sistema en el cual su nuevo estado tendrá que ser mejor del que tenían antes de formar lo que se conoce como molécula inorgánica.

Un sistema es estable solo si maximiza el bienestar del colectivo por encima del bienestar del individuo, si se maximiza el bienestar del individuo por encima del bienestar del colectivo el sistema se vuelve inestable y eventualmente colapsa.

Chapter 3

Discusión

3.1 Introducción Aclaratoria

Por todos los trabajos realizados sobre la teoría de juegos cuánticos podemos estar absolutamente seguros de que es verdad que los juegos cuánticos son más eficientes y proveen mejores resultados que sus análogos clásicos. Pero su aplicación real al mundo económico macroscópico, es decir al dado por los problemas que surgen de la negociación entre individuos, es muy cuestionada. Como se mencionó, la mejor estrategia cuántica produciría una utilidad o ganancia por lo menos igual que la mejor estrategia clásica [19]. Sin embargo, en una interacción macroscópica no existe la menor posibilidad de que alguno esos jugadores pueda hacer uso de una estrategia cuántica, es decir, ninguno de ellos podría efectuar en un juego una combinación lineal o una superposición de estrategias. Eiset *et al* [20] menciona que un juego se torna óptimo cuando existe entanglement ("entrelazamiento") entre los jugadores, es decir, una estrategia cuántica aumenta su "rendimiento" y produce una mejor ganancia si es que el entanglement está presente entre los jugadores. Pero en realidad, nunca se ha observado que se ha producido entanglement entre jugadores clásicos. Los trabajos fundamentales desde los cuales se ha desarrollado la teoría de juegos cuánticos fueron los desarrollados por Meyer [19], Eisert *et al* [20] y Marinato *et al* [23]. A partir de estos trabajos, la mayoría de investigaciones desarrolladas en torno a la teoría de juegos cuánticos se han enfocado en buscar soluciones a los problemas de juegos "clásicos" desde un punto de vista diferente, obteniendo resultados interesantes (como en el clásico dilema de los prisioneros) sin que en ningún caso estos resultados tengan aplicaciones reales al mundo económico macroscópico.

Es por eso que los resultados obtenidos desde la teoría de juegos cuánticos han sido fundamentalmente aplicados a la exploración de problemas no resueltos de información cuántica [40], en la producción de algoritmos para computadoras cuánticas [41] y en comunicación cuántica, la cual ha sido entendida como un juego en donde el objetivo es maximizar la comunicación efectiva. También la teoría de juegos cuánticos ha encontrado aplicaciones en la criptografía y en la codificación de información las cuales también han podido ser modeladas como juegos. [42, 43, 44, 45, 46, 47, 48].

La teoría de juegos cuánticos y la misma mecánica cuántica han sido aplicadas también para explicar desde un punto de vista muchas veces controversial procesos biológicos. Gogonea y Merz [36] señalaron que "juegos" se juegan a nivel mecánico cuántico en procesos como la síntesis de proteinas. Turner y Chao [49] estudiaron la evolución de interacciones competitivas dentro del ARN de un virus y encontraron que se genera una matriz de utilidad semejante a la del dilema de los prisioneros. Las infecciones por virus han sido presentadas como situaciones tipo juego en donde la naturaleza prefiere las estrategias dominantes. Patel [37, 38] sugirió que las dinámicas cuánticas juegan un rol importante en la replicación del ADN y en los criterios de optimización envueltos en el procesamiento de información genética. Azhar Iqbal [29] mostró en sus trabajos sobre la estabilidad evolutiva de los juegos cuánticos resultados en los cuales la mecánica cuántica juega fuertes e importantes roles en la selección de soluciones estables en un sistema de entes interactuantes los cuales pueden realizar acciones cuánticas sobre estados cuánticos. Estos entes consistirían en una colección de moléculas y la estabilidad de las soluciones o sus puntos de equilibrios podrían ser afectados por efectos cuánticos. La llamada Neuroeconomía [50, 51] parecería poder proveer una alternativa al modelo cartesiano clásico del cerebro y del comportamiento [52] a través de las relaciones entre la neurobiología teórica y la lógica cuántica [53, 54].

La Mecánica Cuántica podría ser una teoría mucho más general de lo que habíamos pensado. Ella podría encerrar teorías como la de juegos (clásicos, evolutivos y cuánticos) y a las dinámicas que rigen los sistemas que evolucionan según procesos de selección natural (replicador dinámico). La mecánica cuántica podría permitirnos explicar no solo procesos físicos sino también procesos biológicos y económicos. Desde este punto de vista muchas de las ecuaciones, conceptos y sus propiedades definidas cuánticamente deben ser más generales que sus análogos clásicos pero mantener en sus fundamentos las antiguas versiones clásicas.

Los resultados del presente trabajo pueden ser vistos como una contribución al rol que pueda estar jugando la mecánica cuántica en los procesos biológicos y económicos. También podrían contribuir al entendimiento de la generalidad de la mecánica cuántica y de cómo esta puede encerrar subteorías de interacciones a las que se puede llegar estableciendo restricciones sobre la teoría general. Entoces resulta fácil responder el porqué las versiones cuánticas de los distintos sistemas son más eficientes y proveen mejores resultados que sus análogos clásicos. Y esto es debido a que la mecánica cuántica es la única teoría de interacciones en donde los resultados y los mismos procesos de interacción, al ser una expresión y una representación de la totalidad, deben ser siempre óptimos y eficientes.

En las siguientes secciones de este capítulo se analizarán y discutirán los resultados del presente trabajo con el objetivo de aclarar el significado de los mismos, y corroborar lo que ya se concluyó en esta introducción aclaratoria.

3.2 Analogías entre la Mecánica Cuántica y la Teoría de juegos

A continuación se presenta un cuadro comparativo [55] entre la mecánica cuántica y la teoría de juegos (tabla 1):

Mecánica Cuántica	**Teoría de juegos**
Partículas: k=1,...,n	Jugadores: k=1,...,n
Interacción	Interacción
Estado Cuántico	Estrategia
Energía	Utilidad
Superposición de estados	Superposición de estrategias
Naturaleza probabilística y óptima	Naturaleza probabilística y óptima
Operadores matriciales	Operadores matriciales
Teoría de la información	Teoría de la información
Los entes se comunican eficientemente	Los jugadores interactuan eficientemente

Tabla 1

Como se puede observar, las claras semejanzas entre ambos sistemas y entre las propiedades que ambos gozan fue lo que nos motivó a buscar una relación real entre ambos.

3.3 Sobre el Desarrollo Teórico y los Resultados

Debemos enfatizar que la ecuación de Schrödinger describe únicamente la evolución de estados puros en Mecánica Cuántica. Para la descripción correcta de una mezcla estadística de estados es necesaria la introducción del operador de densidad el cual contiene toda la información del sistema estadístico y su evolución temporal está dada por la ecuación de von Neumann (1.76) que es una generalización de la ecuación de Schrödinger.

Por otro lado, como se mencionó en el primer capítulo, la teoría de juegos evolutivos ha sido aplicada en la resolución de problemas de juegos desde una perspectiva diferente. A través del replicador dinámico se pueden resolver no solamente los problemas de juegos clásicos sino también los biológicos. Es por esto que muchas veces la teoría de juegos evolutivos ha sido considerada como una generalización de la teoría de juegos clásicos. La piedra angular de la teoría de juegos evolutivos es el concepto de estrategias evolutivamente estables que es una noción mas refinada del equilibrio de Nash y la evolución temporal de la frecuencia relativa de cada estrategia está dada por el replicador dinámico (1.104) la cual es una ecuación vectorial.

Si queremos buscar analogías y semejanzas entre ambos sistemas, deberíamos buscar la forma de que los elementos de ambos sistemas se correspondan en forma y en propiedades. Es por eso que se procedió a buscar una representación del replicador dinámico que nos permitiera buscar una relación de semejanza con la ecuación de von Neumann. Sorprendentemente, la representación matricial del replicador dinámico sigue una dinámica exactamente igual a ecuación de evolución del operador de densidad y las propiedades de sus elementos (matrices) correspondientes son semejantes, siendo las propiedades correspondientes a las matrices de nuestro sistema cuántico más generales que las clásicas.

En el siguiente cuadro (tabla 2) se presentan algunas semejanzas específicas entre la teoría de juegos evolutivos (EGT) y la mecánica cuántica estadística.

Mecánica Cuántica Estadística	**EGT**
n miembros del sistema (o ensamble)	n miembros de la población (o juego)
Cada miembro en el estado $\|\Psi_k(t)\rangle$	Cada miembro juega la estrategia s_i
$\|\Psi_k(t)\rangle$ tiene una probabilidad p_k	s_i tiene una probabilidad x_i
$\rho_{ij}, \sum_{i=1}^{n} \rho_{ii} = 1$	$x_i, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1$
ρ	X
$i\hbar \frac{d\rho(t)}{dt} = [H(t), \rho(t)]$	$\frac{dX(t)}{dt} = [\Lambda(t), X(t)]$

Tabla 2

Ambos sistemas están compuestos de n miembros (partículas, subsistemas, jugadores, etc). Cada miembro está descrito por un estado o una estrategia los cuales tienen asignada una determinada probabilidad. El sistema mecánico cuántico está descrito por el operador de densidad ρ cuyos elementos representan la probabilidad de que el sistema se encuentre en un determinado estado. Mientras que para el caso de la teoría de juegos evolutivos, se definió a la matriz X o matriz de frecuencias relativas para describir al sistema y cuyos elementos representan la frecuencia de jugadores jugando una determinada estrategia. La evolución del operador de densidad está descrita por la ecuación de von Neumann (1.76) que es una generalización de la ecuación de Schrödinger. Mientras que la evolución de la matriz de frecuencias relativas está descrita por la versión matricial del replicador dinámico (2.20) propuesta, que es además una generalización del replicador dinámico en forma vectorial.

A continuación se muestran las propiedades de las matrices ρ y X (tabla 3):

Operador de densidad	**Matriz de frecuencias relativas**
ρ es Hermitiano	X es Hermitiano
$Tr\rho(t) = 1$	$TrX = 1$
$\rho^2(t) \leqslant \rho(t)$	$X^2 = X$
$Tr\rho^2(t) \leqslant 1$	$TrX^2(t) = 1$

Tabla 3

Es fácil apreciar que las propiedades de los elementos correspondientes de ambos sistemas son semejantes, así como ambos sistemas muestran una semejanza sorprendente. Razón por la cual no existía ningún impedimento para que propusieramos las relaciones de cuantización como lo hicimos en el capítulo tres.

Estas relaciones nos permitirían no solamente cuantizar juegos (ya sea clásicos o evolutivos) sino también sistemas biológicos descritos por dinámicas evolutivas (es decir por el replicador dinámico). A través de estas relaciones de cuantización, obtuvimos que la versión cuántica del replicador dinámico es la ecuación de evolución de estados mezclados o de von Neumann, y la llamamos replicador dinámico cuántico, la cual obviamente es más general que el replicador dinámico. Esta ecuación nos permitiría resolver juegos clásicos, cuánticos y evolutivos así como también las dinámicas biológicas que fueron estudiadas en forma clásica a través del replicador dinámico.

Debido a la relación directa que existe entre el operador de densidad y la matriz de frecuencias relativas, nos fue posible definir también la entropía de un juego cuántico a través de la entropía de von Neumann (1.77). Obviamente, en forma inversa, podríamos definir la entropía de un juegos clásico a través de la ecuación (2.30). Esta función alcanza su máximo valor cuando la frecuencia relativa de cada estrategia es la misma. La entropía de von Neumann es la versión cuántica de la entropía de Shannon [56] y es la base fundamental desde donde se desarrolla toda la teoría de la información cuántica y desde donde se desarrollan conceptos como el de correlación entre sistemas y el de entanglement. Es por eso que nos atrevemos a decir que no solamente existe una relación clara entre el replicador dinámico, la teoría de juegos y la mecánica cuántica, sino también se ha mostrado el vínculo que existe entre la teoría de juegos cuánticos y la teoría de información cuántica lo cual concuerda con todos los trabajos realizados previamente.

Chapter 4

Conclusiones

Se ha mostrado que a través de las relaciones de cuantización propuestas, la versión cuántica del replicador dinámico es la ecuación de evolución de estados mezclados de un sistema cuántico. Una población es representada por un sistema cuántico en el cual cada subpoblación jugando la estrategia s_i es representada por un ensamble puro en el estado $|\Psi_k\rangle$ y con probabilidad p_k . La probabilidad x_i de jugar la estrategia s_i o la frecuencia relativa de individuos usando la estrategia s_i en esa población será representada con la probabilidad ρ_{ii} de encontrar a cada ensamble puro en el estado $|i\rangle$.

A través de la mecánica cuántica podemos describir procesos biológicos y económicos desde una perspectiva diferente y con una definición cuántica de equilibrio que es más general que cualquiera definida clásicamente.

El propósito y máxima utilidad de un sistema es mejorar su estado maximizando el bienestar de sus miembros a través de la maximización del bienestar del sistema. En un sistema cuántico la máxima utilidad es su estado de mínima energía. El sistema y sus miembros cooperarán y rearreglarán sus estados para mejorar su condición actual.

Un sistema es estable solo si éste maximiza el bienestar del colectivo por encima del bienestar del individuo o sino el sistema se vuelve inestable y eventualmente colapsa.

Bibliography

[1] C. Tanoudji, B. Diu, Lao, *Quantum Mechanics,* (Herman, Parıs, 1977).

[2] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, (Addison - Wesley, 1994).

[3] L. Landau, *Mecanica Cuántica*, (Editorial Reverté, 1978).

[4] L. Landau, *Mecanica Cuántica no relativista*, (Editorial Reverté, 1964).

[5] Goldstein, *Mecánica Clásica*, (Editorial Aguilar, 1966).

[6] L. Landau, *Física Estadística*, (Editorial Reverté, 1978).

[7] J. von Neumann, O. Morgenstern, *The Theory of Games and Economic Behavior* (Princeton University Press, Princeton, 1947).

[8] R. B. Myerson, *Game Theory: An Analysis of Conflict* (MIT Press, Cambridge, 1991).

[9] M. A. Nowak and K. Sigmund, Nature **398**, 367 (1999).

[10] E. Rasmusen, *Games and Information*, (Blackwell, Cambridge MA, 1989).

[11] J. M. Smith, *Evolution and The Theory of Games* (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1982).

[12] J. Hofbauer and K. Sigmund, *Evolutionary Games and Replicator Dynamics* (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1998).

[13] J. Weibul, *Evolutionary Game Theory* (MIT Press, Cambridge, MA, 1995).

[14] R. A. Fisher, *The Genetic Theory of Natural Selection* (Oxford, Clarendon Press, 1930).

[15] P. Hammerstein and R. Selten, *Game Theory and Evolutionary Biology* (Handbook of Game Theory. Vol 2. Elsevier B.V., 1994).

[16] R. Cressman, *The Stability Concept of Evolutionary Game Theory: A Dynamic Approach* (Springer-Verlag, New York, 1992).

[17] J. M. Smith and G. R. Price, *The logic of animal conflict*, Nature **246**, 15 (1973).

[18] P. D. Taylor and L. B. Jonker , *Evolutionary stable strategies and game dynamics*, Mathematical Biosciences **40**, 145-156 (1978).

[19] D. A. Meyer, Phys. Rev. Lett. **82**, 1052-1055 (1999).

[20] J. Eisert, M. Wilkens and M. Lewenstein, Phys. Rev. Lett. **83**, 3077 (1999).

[21] J. Eisert and M. Wilkens, J. Mod. Opt. **47**, 2543 (2000).

[22] L. Marinatto and T. Weber, Phys. Lett. A **272**, 291 (2000).

[23] C. F. Lee and N. F. Johnson, Phys. Rev. A **67**, 022311 (2003).

[24] J. Du, H. Li, X. Xu, M. Shi, J. Wu, X. Zhou, and R. Han, Phys. Rev. Lett. **88**, 137902 (2002).

[25] A. P. Flitney and D. Abbott, Proc. R. Soc. (London) A **459**, 2463-74 (2003).

[26] J. Shimamura, S. K. Ozdemir, F. Morikoshi and N. Imoto, Int. J. of Quant. Inf. **2/1**, **79** (2004).

[27] S. K. Ozdemir, J. Shimamura, F. Morikoshi and N. Imoto, Phys. Lett. A **333**, 218 (2004).

[28] E. W. Piotrowski and J. Sladkowski, Int. J. Theor. Phys. **42**, 1089 (2003).

[29] Azhar Iqbal, PhD thesis, Quaid-i-Azam University, 2004, quant-ph/0503176.

[30] S. C. Benjamin and P. M. Hayden, Phys. Rev. A **64**, 030301 (2001).

[31] R. Dawkins, *The Selfish Gene* (Oxford University Press, Oxford, 1976).

[32] R. Axelrod, *The Evolution of Cooperation* (Basic Books, New York, 1984).

[33] E. W. Piotrowski and J. Sladkowski, *Quantum Market Games*, Physica A **312**, 208-216, (2002).

[34] E. W. Piotrowski and J. Sladkowski, *Quantum-like Approach to Financial Risk: Quantum Anthropic Principle*, Acta Phys.Pol. B **32**, 3873–3879, (2001).

[35] E. W. Piotrowski and J. Sladkowski, *Interference of quantum market strategies*, Physica A **318**, 516-518 (2003).

[36] V. Gogonea and K. M. Merz, *Fully quantum mechanical description of proteins in solution – combining linear scaling quantum mechanical methodologies with the Poisson-Boltzmann equation*, J. Phys. Chem. A **103**, 5171-5188 (1999).

[37] A. Patel, *Quantum algorithms and the genetic code*, Pramana **56**, 367-381, (2001).

[38] A. Patel, *Testing Quantum Dynamics in Genetic Information Processing*, Journal of Genetics **80**, 39, (2001).

[39] D. Home and R.Chattopadhayaya, *Determination of When an Outcome is Actualised in a Quantum Measurement using DNA — Photolyase System*, quant-ph/9903036.

[40] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge University Press, Cambridge, 2000).

[41] C. F. Lee and N. F. Johnson, *Parrondo Games and Quantum Algorithms*, quant-ph/0204043.

[42] P. Moulin and A. Ivanovic, Proc. of Int. Conf. on Image Process. **3**, 975-978 (2001).

[43] A. S. Cohen and A. Lapidoth, IEEE Trans. on Inf. Theory **48**, 1639-1667 (2002).

[44] J. Conway and N. Sloane, IEEE Trans. on Inf. Theory **32**, 337-348 (1986).

[45] X. M. Shen and L. Deng, IEEE Trans. on Signal Process. **45**, 1092-1095 (1997).

[46] J. M. Ettinger, *2nd Inf. HidingWorkshop*, Portland, OR, Apr 15-17 (1998).

[47] S. Pateux and G. Le Guelvouit, Elsevier, Signal Process. Image Comm. **18**, 283-296 (2003).

[48] L. A. DaSilva, and V. Srivastava, *The First Workshop on Games and Emergent Behaviors in Distributed Computing Environments*, Birmingham, UK, September (2004).

[49] P. E. Turner and L. Chao, Prisoner's dilemma in an RNA virus, Nature **398**, 6726 (1999).

[50] P. W. Glimcher, *Decisions, Decisions, Decisions: Choosing a Biological Science of Choice*, Neuron **36**, 323 (2002).

[51] P. W. Glimcher, *Decisions, Uncertainty, and the Brain: The Science of Neuroeconomics* (MIT Press, Cambridge 2003).

[52] E. W. Piotrowski and J. Sladkowski, *The next stage: quantum game theory*, quant-ph/0308027.

[53] E. W. Piotrowski and J. Sladkowski, *Quantum computer: an appliance for playing market games*, quant-ph/0305017.

[54] G. Collum, *Systems of logical systems: Neuroscience and quantum logic*, Foundations of Science **7**, 49 (2002).

[55] E. Jiménez, *Quantum Games: Mixed Strategy Nash's Equilibrium Represents Minimum Entropy*, Journal of Entropy, Vol **5**, Issue 4, 313-347 (2003).

[56] C. Shannon, *A mathematical theory of communication.* Bell System Tech. Jour. **27**, 379-423 (1948).

Anexos

La presente tesis de grado fue aceptada para publicación en el journal PHYSICA A el 3 de enero del presente año bajo el nombre "*Quantum Replicator Dynamics*".

> E. Guevara H., *Quantum Replicator Dynamics*, aceptado en PHYSICA A, quant-ph/0510128v6.

Además ha servido de base para la realización de los siguientes artículos y de 8 posibles proyectos mas.

> E. Guevara H., *Introduction to the study of entropy in Quantum Games*, quant-ph/0604170
>
> E. Guevara H., *Quantum Games Entropy*, enviado a PHYSICA A, quant-ph/0606045.