Álgebra Lineal

Juan Núñez Olmedo
Iván Sandoval Palis
Escuela Politécnica Nacional

Dedicamos

este

trabajo

a

los

estudiantes

de

la

Escuela

Politécnica

Nacional

PRÓLOGO

Esta obra está dirigida a los estudiantes que están iniciando sus estudios superiores en las diferentes carreras de ingeniería, así también como a los docentes y personas en general que necesitan una obra de consulta.

El objetivo fundamental de esta obra es proporcionar una guía, para plantear, analizar y resolver problemas de los diferentes temas del **álgebra Lineal.**

El **álgebra lineal** es una rama de las matemáticas que estudia conceptos tales como: matrices, determinantes, sistemas de ecuaciones lineales y, su enfoque más formal que son los espacios vectoriales y sus transformaciones lineales.

Es un espacio que tiene muchas conexiones con muchas áreas dentro y fuera de las matemáticas como el cálculo vectorial y las ecuaciones diferenciales, la ingeniería, etc.

La historia del **álgebra lineal** se remonta a los años de 1843 cuando *Willam Rowan Hamilton* (de quien proviene el uso del término vector) creo los *cuaterniones*; y de 1844 cuando *Hermann Grassmann* publicó su libro *La teoría de la extensión*.

De manera formal el **álgebra lineal** estudia las estructuras matemáticas denominadas espacios vectoriales, las cuales constan de un conjunto de vectores definido en un campo, con una operación de suma de vectores, y, otra de producto entre escalares y vectores que satisfacen ciertas propiedades.

El lector debe aprender la parte teórica, las propiedades que se describen en cada capítulo de este libro, para analizar cómo se aplican en los ejercicios resueltos en clases y luego debe apropiarse de sus métodos de análisis y de solución, para resolver los ejercicios propuestos.

La favorable acogida que se brinde a este texto, servirá para continuar trabajando a favor del proceso de enseñanza y aprendizaje. Las sugerencias que permitan mejorar este trabajo, serán de mucha ayuda para facilitar la comprensión y el estudio.

Deseamos expresar nuestros sinceros agradecimientos a todas las personas que de una u otra manera contribuyeron a la elaboración del mismo.

Loa Autores

ISBN: 978-9942-21-774-5

Primera Edición Septiembre 28 de 2015

Hecho en Quito – Ecuador – Sudámerica

CONTENIDO

Capítulo 1

MATRICES

DEFINICIÓN

Una ***matriz*** A de mxn es un ordenamiento rectangular de m por n números distribuidos en un orden definido de m filas y n columnas:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- a_{ij} es el elemento i,j-ésimo (pertenece a la fila i y a la columna j).
- A por conveniencia se escribe $A = (a_{ij})$.
- Las matrices se denotan con letras mayúsculas.
- $M_{m\text{x}n}$, es el conjunto de todas las matrices de orden m por n, definidas en el campo K.
- La i-ésima fila de A es: $\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \end{pmatrix}$ y constituye la matriz fila de A_i
- La j-ésima columna de A es: $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ . \\ a_{1j} \\ . \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ y constituye la matriz columna A^j
- A puede ser representada por matrices fila, así: $A = (A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots, A_m)$
- A puede ser representada por matrices columna, así: $A = (A^1, A^2, \ldots, A^j, \ldots, A^n)$

IGUALDAD

Sean las matrices $A=(a_{ij})_{mn}$ y $B=(b_{ij})_{mn}$,

$A=B \leftrightarrow a_{ij}=b_{ij}$

Ejemplos

1. Las siguientes matrices son iguales $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

2. Las siguientes matrices no son iguales $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

MATRIZ CUADRADA

Sea $A=(a_{ij})_{mn}$.

A es matriz cuadrada si y sólo si $m=n$. El conjunto de matrices cuadradas se nota $M_{n\text{x}n}$ ó M_n.

Ejemplos

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & -5 & 8 \end{pmatrix}$$

MATRIZ NULA

Sea $O=(a_{ij})_{mn}$.

O es una matriz nula si y sólo si $a_{ij}=0$, es decir, es una matriz cuyos elementos son iguales a cero.

Ejemplos

Las siguientes marices son nulas:

$$O_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad O_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad O_4=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

OPERACIONES CON MATRICES

SUMA DE MATRICES

Sean las matrices $A=(a_{ij})_{mn}$ y $B=(b_{ij})_{mn}$.

La suma de A y B es la matriz $A+B$ de m filas y n columnas, dada por:

$$A+B=(a_{ij}+b_{ij})=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & & \dots & \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

La suma de matrices está definida cuando ambas matrices tienen el mismo tamaño.

Ejemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 6 & 3 \\ 6 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

DIFERENCIA DE MATRICES

Sean las matrices $A=(a_{ij})_{mn}$ y $B=(b_{ij})_{mn}$.

La diferencia de A y B es la matriz $A-B$ de m filas y n columnas, dada por:

$A-B=A+(-B)$

Ejemplos

1. $$\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -12 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

2. $$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 5 & -6 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 10 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & 9 & 4 \\ 2 & -2 & -4 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

MULTIPLICACIÓN POR UN ESCALAR

Si $A=\left(a_{ij}\right)_{mn}$ y $\sim$ es un escalar, entonces $\sim A$ está dada por:

$$\sim A=\left(\sim a_{ij}\right)=\begin{pmatrix} \sim a_{11} & \sim a_{12} & \cdots & \sim a_{1n} \\ \sim a_{21} & \sim a_{22} & \dots & \sim a_{2n} \\ \vdots & & & \\ \sim a_{m1} & \sim a_{m2} & \dots & \sim a_{mn} \end{pmatrix}$$

Es decir, $\sim A$ se obtiene multiplicando por $\sim$ a cada componente de A.

Ejemplos

1. $5\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 & -15 \\ 35 & 5 \end{pmatrix}$

2. $-2\begin{pmatrix} 0 & -8 \\ 10 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ -20 & 8 \end{pmatrix}$

3. Dadas las matrices A y B, hallar $2A-3B$ y $3A-2B$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$2A-3B=\begin{pmatrix} -5 & 9 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$3A-2B=\begin{pmatrix} 0 & 11 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

DEFINICIÓN

$$(-1)A=-A$$

PROPIEDADES

TEOREMAS

$\forall \sim ,\quad \in K,\ \forall A,B,C \in M_{m\mathrm{x}n}$, se cumple que:

1. $A+(B+C)=(A+B)+C$
2. $A+B=B+A$
3. $A+O=A$
4. $A+(-A)=O$
5. $(\sim \quad)A=\sim (\quad A)$
6. $1.A=A$
7. $(\sim + \quad)A=\sim A+ \quad A$
8. $\sim (A+B)=\sim A+\sim B$
9. $0.A=O$

Se demostrarán los teoremas 1, 3 y 5 los restantes teoremas se dejan como ejercicio.

DEMOSTRACIONES

1. A+(B+C)=A+(B+C) — Axioma reflexivo

$=(a_{ij})+(b_{ij}+c_{ij})$ — Cambio de notación

$=(a_{ij}+b_{ij}+c_{ij})$ — Definición de suma

$=((a_{ij}+b_{ij})+c_{ij})$ — Propiedad de campo

=(A+B)+C

3. A+O=A+O — Axioma reflexivo

$=(a_{ij}+0_{ij})$ — Notación

$=(a_{ij})$ — Propiedad de campo

=A

5. $(\sim \quad)A = (\sim \quad)A$ Axioma reflexivo

$= (\sim \quad a_{ij})$ Notación

$= (\sim (\quad a_{ij}))$ Propiedad de campo

$= \sim (\quad A)$

MULTIPLICACIÓN DE MATRICES

Sean las matrices $A = \left(a_{ij}\right)_{mn}$ y $B = \left(b_{jk}\right)_{np}$.

El producto de A y B es la matriz $C = \left(c_{ik}\right)_{mp}$, donde

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} .$$

En forma desarrollada:

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \ldots + a_{ij}b_{jk} + \ldots + a_{ip}b_{pk} .$$

Esto se muestra en la figura

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pk} & \cdots & b_{pn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & \\ \vdots & \vdots & c_{ik} & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

Observaciones

1. El elemento $i,\ k$-ésimo de AB es el producto escalar de la i-ésima fila de A y la k-ésima columna de B.
2. Dos matrices A y B se pueden multiplicar solo si el número de columnas de la primera es igual al número de filas de la segunda. De otra manera el producto no estará definido.

$$\underset{mxp}{\underline{A}} \quad \underset{pxn}{\underline{B}} \quad = \quad \underset{mxn}{\underline{AB}}$$

Ejemplo

Una empresa fabrica en su planta 3 productos A, B y C. Los almacenes principales se encuentran en Quito, Guayaquil, Cuenca y Loja. Las ventas durante el año anterior en Quito se cifraron en 400,100 y 500 unidades de los productos A, B y C en orden; las del almacén de Guayaquil en 300, 150 y 400; las del almacén en Cuenca en 100, 100 y 200; y las del almacén de Loja en 200,150 y 300. Los precios de venta de los productos fueron 25, 50 y 80 USD para los productos A,B y C respectivamente.

a) Expresar las ventas de la empresa mediante una matriz A de orden 4x3.

b) Expresar mediante una matriz X de orden 3x1 el precio de cada producto.

c) ¿Qué es AX?

Solución:

a) Las ventas en el año anterior se pueden representar en una matriz A de orden 4x3 de tal forma que en cada fila aparezcan las ventas realizadas por cada uno de los almacenes principales y en cada columna las proporcionadas a cada tipo de producto. Así:

$$A = \begin{pmatrix} 400 & 100 & 500 \\ 300 & 150 & 400 \\ 100 & 100 & 200 \\ 200 & 150 & 300 \end{pmatrix}$$

b) Los precios unitarios de cada producto se pueden escribir en X de orden 3x1 en la forma

$$X = \begin{pmatrix} 25 \\ 50 \\ 80 \end{pmatrix}$$

c) Si se consideran las matrices A y X definidas en los apartados a) y b), se tiene que

$$AX = \begin{pmatrix} 55.000 \\ 47.000 \\ 23.500 \\ 36.500 \end{pmatrix}$$

AX es una matriz en la que se especifican los ingresos obtenidos en el año anterior por cada uno de los cuatro almacenes principales de la empresa.

Ejemplo

Comprobar que las siguientes identidades algebraicas

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

$$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$$

no son ciertas si A y B son matrices cuadradas de orden n, usando las marices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

¿Por qué las identidades dadas no son ciertas?

Modificar el segundo miembro de ambas identidades de manera que el resultado sea válido para cualesquiera A y B matrices cuadradas.

Solución:

$$A+B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad A-B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto

$$(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 6 & 15 \end{pmatrix} \neq A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 7 & 16 \end{pmatrix}$$

$$(A+B)(A-B) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} \neq A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Las expresiones que se indican en el enunciado para $(A+B)^2$ y $(A+B)(A-B)$ son verdaderas si A y B son escalares, pero no son válidas si A y B son matrices, ya que el producto de matrices no cumple la ley conmutativa a diferencia del producto de escalares.

Las identidades algebraicas correctas para cualesquiera $A, B \in M_{mxn}$ son

$$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$$

$$(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2$$

y como ordinariamente $AB \neq BA$

$$AB + BA \neq 2AB$$

$$AB - BA \neq O$$

Por lo que

$$(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$$

$$(A+B)(A-B) \neq A^2 - B^2$$

Observación

No existe ley conmutativa para la multiplicación de matrices.

PROPIEDADES

TEOREMAS

$$\forall \sim \in K, \forall A \in M_{m\times n,} \forall B \in M_{n\times p}$$

10. $(\sim A)B = \sim(AB)$

11. $(A\sim)B = \sim(AB)$

12. $(AB)\sim = A(B\sim)$

$$\forall A \in M_{m\times n,} \forall B, C \in M_{n\times p}$$

13. $A(B+C) = AB + AC$

$$\forall A, B \in M_{m\times n,} \forall C \in M_{n\times p}$$

14. $(A+B)C = AC + BC$

$$\forall A \in M_{m\times n,}, \forall B \in M_{n\times p}, \forall C_{p\times q}$$

15. $(AB)C = A(BC)$

DEMOSTRACIONES

10.	$(\sim A)B = (\sim A)B$	Axioma reflexivo
	$= (\sim a_{ij})(b_{jk})$	Notación
	$= (\sim)(a_{ij})(b_{jk})$	Multiplicación escalar por matriz
	$= \sim(AB)$	Notación

13. $A(B+C) = A(B+C)$ Axioma reflexivo

$= (a_{ij})(b_{jk} + c_{jk})$ Notación

$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(b_{jk} + c_{jk})$ Multiplicación de matrices

$= \sum_{j=1}^{n} (a_{ij}b_{jk} + a_{ij}c_{jk})$ Propiedad de campo

$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_{jk}$ Propiedad del sumatoria

$AB + AC$ Notación

15. $A(BC) = A(BC)$ Axioma reflexivo

$= (a_{ij})\left(\sum_{k=1}^{p} b_{jk}c_{kl}\right)$ Notación

$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(\sum_{k=1}^{p} b_{jk}c_{kl}\right)$ Multiplicación de matrices

$= \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}\right)c_{kl}$ Propiedad del sumatoria

$= \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}\right)(c_{kl})$ Multiplicación de matrices

$= (AB)\,C$ Notación

MATRIZ TRANSPUESTA

Sea la matriz $A = (a_{ij})_{mn}$.

La transpuesta de A notada por A^t, es la matriz $n \times m$ obtenida al intercambiar las filas y las columnas de A, es decir, $A^t = (a_{ji})_{nm}$.

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

PROPIEDADES

TEOREMAS

$\forall A, B \in M_{m\text{x}n,}$

16. $(A+B)^t = A^t + B^t$

17. $(A^t)^t = A$

$\forall \sim \in K, \forall A \in M_{m\text{x}n,}$

18. $(\sim A)^t = \sim A^t$

$\forall A \in M_{m\text{x}n,} \forall B \in M_{n\text{x}p}$

19. $(AB)^t = B^t A^t$

DEMOSTRACIONES

16.	$(A+B)^t = (A+B)^t$	Axioma reflexivo
	$= (a_{ij} + b_{ij})^t$	Notación
	$= (a_{ji} + b_{ji})$	Definición de transpuesta
	$= A^t + B^t$	Notación

18.	$(\sim A)^t = (\sim A)^t$	Axioma reflexivo
	$= (\sim a_{ij})^t$	Notación
	$= (\sim a_{ji})$	Definición de transpuesta
	$= \sim (a_{ji})$	Definición escalar por matriz
	$= \sim A$	Notación

19. $\left.\begin{array}{l} a_{ij} = a_{ji} \\ b_{jk} = b_{kj} \end{array}\right\}$, numéricamente

$(AB)^t = (c_{ik})^t$

$= \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \right)^t$ Producto de matrices

$$= \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ji} b_{kj} \right)$$ Definición de transpuesta

$$= \left(\sum_{j=1}^{n} b_{kj} a_{ji} \right)$$ Propiedad de campo

$$= B^t A^t$$ Notación

DEFINICIÓN

Sea la matriz $A \in M_{n\text{x}n}$, se define

$$A.A = A^2$$

$$\underbrace{A.A\ldots\ldots A}_{n \ \ veces} = A^n$$

MATRIZ SIMÉTRICA

Sea la matriz $A = (a_{ij})_{mn}$.

A es una matriz simétrica si y sólo si $A = A^t$

Ejemplos

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $A^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $A = A^t \rightarrow A$ es simétrica.

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$, $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$, $A = A^t \rightarrow A$ es simétrica.

TEOREMA 20

Si A y B son matrices simétricas, $A + B$ es matriz simétrica.

DEMOSTRACIÓN

$$\left.\begin{array}{ll} A = A^t & (1) \\ B = B^t & (2) \end{array}\right\} \textit{Hipótesis}$$

Sumando (1) y (2)

$$A + B = A^t + B^t$$

$$= (A + B)^t \qquad \text{(Teorema 16)}$$

MATRIZ ANTISIMÉTRICA

Sea la matriz $A = (a_{ij})_n$.

A es antisimétrica si y sólo si $A = -A^t$.

Ejemplo

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} = -A$$

A es matriz antisimétrica.

MATRICES CONMUTABLES

Sean las matrices $A, B \in M_{nxn}$.

A y B son conmutables si y sólo si $AB = BA$.

DIAGONAL DE UNA MATRIZ

La diagonal está definida para matrices cuadradas y forman parte de esta los elementos a_{ij}, tales que, $\forall i = j$.

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

MATRIZ TRIANGULAR SUPERIOR

Sea la matriz $A = (a_{ij})_n$.

A es matriz triangular superior si y sólo si $a_{ij} = 0, \quad \forall i > j$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

MATRIZ TRIANGULAR INFERIOR

Sea la matriz $A = (a_{ij})_n$.

A es matriz triangular inferior si y sólo si $a_{ij} = 0, \quad \forall i < j$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

MATRIZ DIAGONAL

Sea la matriz $A = (a_{ij})_n$.

A es matriz diagonal si y sólo si $a_{ij} = 0, \quad \forall i \neq j$ y a_{ij} es escalar, $\quad \forall i = j$.

Ejemplos

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

2. $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 3 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & -2 \end{pmatrix}$

MATRIZ ESCALAR

Sea la matriz $A = (a_{ij})_n$.

A es matriz escalar si y sólo si $a_{ij} = 0, \ \ \forall i \neq j$ y a_{ij} es constante, $\forall i = j$.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 5 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 5 \end{pmatrix}$$

MATRIZ IDENTIDAD

Sea la matriz $I = (a_{ij})_n$.

I es matriz identidad si y sólo si $a_{ij} = 0, \ \ \forall i \neq j$ y $a_{ij} = 1, \ \ \forall i = j$.

Ejemplos

$$I_1 = (1), \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

MATRIZ NILPOTENTE

Sea la matriz $A = (a_{ij})_n$.

A es matriz nilpotente de orden k , si k es el menor entero positivo tal que $A^k = O$.

Ejemplos

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ es matriz nilpotente de orden 2, pues, $A^2 = O$

2. $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ es matriz nilpotente de orden 3, pues, $B^3 = O$

TRAZA DE UNA MATRIZ

Sea $A \in M_{n\text{x}n}$.

La traza de A es la suma de los elementos de la diagonal. Así:

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \ .$$

Ejemplos

1. Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$, entonces $Tr(A) = 7$

2. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -2 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ **,** entonces $Tr(A) = 5$

Propiedades

1. $Tr(\sim A) = \sim .Tr(A)$
2. $Tr(A + B) = Tr(A) + Tr(B)$
3. $Tr(AB) = Tr(BA)$

TEOREMA 21

$$\forall A \in M_{m\text{x}n}, \exists I \in M_{n\text{x}n}, \text{tal que } A.I = A$$

DEMOSTRACION

Sean $A = (a_{ij})_{mn}$

$I = (b_{jk})_{nn}$, donde $b_{jk} = 0, \forall j \neq k \wedge b_{jk} = 1, \forall j = k$

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$$

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \ldots + a_{ij}b_{jk} + \ldots + a_{in}b_{nk}$$

si k=1

$$c_{i1} = a_{i1}b_{11} + a_{i2}b_{21} + \ldots + a_{ij}b_{j1} + \ldots + a_{in}b_{n1}$$

$$c_{i1} = a_{i1}$$

si k=2

$$c_{i2} = a_{i1}b_{12} + a_{i2}b_{22} + \ldots + a_{ij}b_{j2} + \ldots + a_{in}b_{n2}$$

$$c_{i2} = a_{i2}$$

si k=j

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ij}b_{jj} + \ldots + a_{in}b_{nj}$$

$$c_{ik} = c_{ij} = a_{ij}$$

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} = a_{ij}$$

Por lo tanto $A.I = A$

TEOREMA 22

$$\forall A \in M_{m\text{x}n}, \exists I \in M_{m\text{x}m}, \text{tal que. } I.A = A$$

Corolario

Sean las matrices $A, I \in M_{n\text{x}n}$

$$A.I = I.A = A$$

MATRIZ INVERTIBLE

Sea la matriz $A \in M_{n\text{x}n}$.

A es matriz invertible si y sólo si existe una matriz $B \in M_{n\text{x}n}$, tal que $A.B = B.A = I$.

Notas

1. B es matriz inversa de A, $B = A^{-1}$, de la definición,
   $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.
2. B es matriz invertible, $A = B^{-1}$, de la definición,
   $BB^{-1} = B^{-1}B = I$

TEOREMA 23

Sea $A \in M_{nxn}$,

Si A es matriz invertible, entonces su inversa es única.

DEMOSTRACION

Por contradicción:

Se supone que la inversa de A no es única, es decir, existen matrices B_1 y B_2 , inversas de A, tales que $B_1 \neq B_2$.

$AB_1 = B_1A = I$ (1)

$AB_2 = B_2A = I$ (2)

$B_1 = B_1I$ (3)

Reemplazando (2) en (3)

$B_1 = B_1(AB_2)$

$B_1 = (B_1A)B_2$

Reemplazando (1) en (4)

$B_1 = IB_2$

$B_1 = B_2$

Lo que contradice la suposición.

Por lo tanto la inversa de A es única.

TEOREMA 24

Sea $A \in M_{nxn}$, matriz invertible, entonces $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$

DEMOSTRACION

$AA^{-1} = A^{-1}A = I$

A^{-1} es matriz invertible, por lo tanto cumple que: $A^{-1}\left(A^{-1}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{-1}A^{-1} = I$

Igualando

$A = \left(A^{-1}\right)^{-1}$

TEOREMA 25

Sean $A, B \in M_{nxn}$, matrices invertibles, entonces AB también es invertible y cumple que:

$\left(AB\right)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

DEMOSTRACION

Si A y B son invertibles

existen matrices A^{-1} y B^{-1}

P.D. Existe una matriz D tal que:

$(AB)D = D(AB)$

a) $(AB)B^{-1}A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1}$

$= A(I)A^{-1}$

$= AA^{-1}$

$= I$ (1)

b) $B^{-1}A^{-1}(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B$

$= B^{-1}(I)B$

$= B^{-1}B$

$= I$ (2)

Igualando (1) y (2)

$$(AB)\underbrace{B^{-1}A^{-1}}_{D} = \underbrace{B^{-1}A^{-1}}_{D}(AB) = I$$

Por lo tanto $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

TEOREMA 26

Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n \in M_{nxn}$, matrices invertibles, entonces:

$$\left(A_1.A_2 \ldots, A_n\right)^{-1} = A_n^{-1} \ldots A_2^{-1}.A_1^{-1}$$

MATRIZ ORTOGONAL

Sea la matriz $A \in M_{nxn}$.

A es ortogonal si y sólo si $A^t = A^{-1}$, es decir,

$A.A^t = A^t.A = I$

Ejercicio

Comprobar que la matriz dada es ortogonal

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

TEOREMA 27

$$\forall A \in M_{mxn}, \exists O \in M_{nxp}, \text{ tal que } A.O = O$$

DEMOSTRACION

Sean las matrices $A = (a_{ij})_{mn} \wedge O = (b_{jk})_{np}$, donde, $\forall b_{jk} = 0$

$$\begin{aligned} AO &= (a_{ij})(b_{jk}) \\ &= \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}\right) \\ &= \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}.0\right) \\ &= O \end{aligned}$$

TEOREMA 28

$$\forall A \in M_{nxp}, \exists O \in M_{mxn}, \text{tal que}, O.A = O$$

DEMOSTRACION

Se deja como ejercicio.

TEOREMA 29

$$\forall A \in M_{mxn}, \forall B \in M_{nxp}, \text{se cumple que}$$

Fila i-ésima de AB=Fila i-ésima de A.B

DEMOSTRACION

A=$\left(A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots, A_m\right)$

B=$\left(B^1, B^2, \ldots, B^i, \ldots B^P\right)$

Fila i-ésima de AB=$\left(A_i B^1, A_i B^2, \ldots A_i B^i, \ldots, A_i B^p\right)$

$= A_{i.} B$

=Fila i-ésima de A.B

TEOREMA 30

Sea e_i la fila i-ésima de $I \in M_{nxn}$, entonces:

Fila i-ésima de $A = e_i .A$

DEMOSTRACION

Fila i-ésima de I $A = e_i .A$ (Teorema 29)

$I.A = A$, entonces

Fila i-ésima de $A = e_i .A$

TEOREMA 31

Sean $A \in M_{m\text{x}n,} B \in M_{n\text{x}p}$

Si A tiene fila de ceros, AB también tiene fila de ceros.

DEMOSTRACION

A_i es la Fila i-ésima de A

$A_i = (a_{ij})_{in}, \quad donde\ \forall a_{ij} = 0$

$B = (b_{jk})_{np}$

Fila i-ésima de AB=Fila i-ésima de A.B (Teorema 29)

$= A_i .B$

=O.B

$= O_{1p}$

Por lo tanto

AB tiene fila de ceros.

TEOREMA 32

Sea $A \in M_{n\text{x}n}$

Si A tiene fila de ceros, entonces A no es invertible.

DEMOSTRACION

Por contradicción.

Se supone que A es invertible, por lo tanto

$AA^{-1} = A^{-1}A = I$

AA^{-1} tiene fila de ceros (Teorema 31)

I tiene fila de ceros

Lo que contradice la hipótesis, pues, la matriz identidad no tiene fila de ceros.

Por lo tanto:

A no es invertible.

OPERACIONES ELEMENTALES

Una operación elemental se representa por e y se la puede aplicar sobre matrices.
Existen tres tipos de operaciones elementales:

1. Intercambio de filas o columnas (e_I)

   $F_i \leftrightarrow F_j$, $C_i \leftrightarrow C_j$

2. Multiplicación de una fila o columna por un escalar $\sim\, \neq 0$ (e_{II})

   $F_i \to \sim F_i$, $C_i \to \sim C_i$

3. Sumar una fila o columna multiplicada por un escalar a otra fila o columna (e_{III})

   $F_i + \sim F_{j,}$ $C_i + \sim C_{j,}$

OPERACIONES ELEMENTALES INVERSAS

Se expresan por e' y son aquellas que cumplen que:

1) $e_I^{'}(e_I(A)) = A$

2) $e_{II}^{'}(e_{II}(A)) = A$

3) $e_{III}^{'}(e_{III}(A)) = A$

MATRICES ELEMENTALES

Una matriz elemental se la representa por E, y se la puede obtener mediante la aplicación de una operación elemental sobre la matriz identidad.

TEOREMA 33

$e(A) = E.A$, siendo e, una operación elemental que se aplica tanto en A como en I.

MATRICES EQUIVALENTES

A es equivalente por filas o columnas a B si y sólo si B se obtiene por medio de una aplicación sucesiva e infinita de operaciones elementales sobre A.

$$A \approx B \leftrightarrow B = e_K\left(e_{K-1}\left(\ldots e_2\left(e_1(A)\right)\right)\right).$$

TEOREMA 34

Sea $A \in M_{mxn}$, A es equivalente a A , es decir,

Toda matriz es equivalente a sí misma.

DEMOSTRACION

$$B = e_K\left(e_{K-1}\left(\ldots e_2\left(e_1(A)\right)\right)\right) \qquad (1)$$

$$e'_K(B) = e_{K-1}\left(\ldots e_2\left(e_1(A)\right)\right)$$

$$\vdots$$

$$e'_1\left(e'_2\left(\ldots e'_K(B)\right)\right) = A \qquad (2)$$

Sustituyendo (1) en (2)

$$e'_1\left(e'_2\left(\ldots e'_K(A)\right)\right) = A$$

Cambiando la notación

A es equivalente a A.

Corolario

Sean $A, B \in M_{mxn}$.

Si A es equivalente a B, B es equivalente a A.

TEOREMA 35

Sean $A, B, C \in M_{mxn}$.

Si A es equivalente a B y B es equivalente a C, entonces A es equivalente a C.

DEMOSTRACION

Si A es equivalente a B,

$B = e_K\left(e_{K-1}\left(\ldots e_2\left(e_1(A)\right)\right)\right)$ (1)

Si B es equivalente a C,

$C = e_J\left(e_{J-1}\left(\ldots e_2\left(e_1(B)\right)\right)\right)$ (2)

Sustituyendo (1) en (2)

$C = e_J\left(e_{J-1}\left(\ldots e_K\left(e_{K-1}\left(\ldots e_2\left(e_1(A)\right)\right)\right)\right)\right)$

Por lo tanto A es equivalente por filas a C.

TEOREMA 36

Toda matriz elemental es invertible y su matriz inversa es elemental.

DEMOSTRACION

E matriz elemental

E´ matriz inversa de A

$I = e'\left(e(I)\right) = e\left(e'(I)\right)$

e(A)=EA

P.D. EE´=E´E=I

a) EE´=I

$e\left(e'(I)\right) = I$

$e\left(E'\right) = I$ (Teorema 33)

EE´=I (1)

b) E´´E=I

$e'\left(e(I)\right) = I$

e´(E)=I (Teorema 33)

EE´=I (2)

Igualando (1) y (2)

EE´=E´E=I

TEOREMA 37

A es equivalente por filas a B si y sólo si B es un producto de matrices elementales por A.

DEMOSTRACION

a) "Si A es equivalente por filas a B, entonces B es un producto de matrices elementales por A"

Si A es equivalente por filas a B,

$B = e_K(e_{K-1}(\ldots e_2(e_1(A))))$,

$B = e_K(e_{K-1}(\ldots e_2(E_1A)))$, (Teorema 33)

$B = e_K(e_{K-1}(\ldots e_3(E_2E_1A)))$,

$\vdots$

Por lo tanto:

$B = E_K E_{K-1} \ldots E_2 E_1 A$

b) "Si B es un producto de matrices elementales por A, entonces A es equivalente por filas a B".

Si B es un producto de matrices elementales por A.

$B = E_K E_{K-1} \ldots E_2 E_1 A$

$B = E_K E_{K-1} \ldots E_2 (E_1 A)$

$B = E_K E_{K-1} \ldots E_2(e_1(A))$ (Teorema 33)

$\vdots$

$B = e_K(e_{K-1}(\ldots e_2(e_1(A))))$,

Por lo tanto:

A es equivalente a B.

Corolario

Sean $A, B \in M_{mxn}$.

A es equivalente a B si y sólo si $B = PA$, donde P es un producto de matrices elementales por A.

FORMA ESCALONADA DE UNA MATRIZ

MATRIZ ESCALONADA POR FILAS

Es una matriz cuyos elementos iguales a cero aumentan de izquierda a derecha, fila a fila.

Ejemplos

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

MATRIZ ESCALONADA REDUCIDA POR FILAS

Es una matriz escalonada cuyos primeros elementos son iguales a 1, y en sus respectivas columnas son los únicos diferentes de cero.

Ejemplos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

TEOREMA 38

Sea $A \in M_{m\text{x}n}$.

A es equivalente por filas a una matriz escalonada por filas.

TEOREMA 39

Sea $A \in M_{m\text{x}n}$.

A es equivalente por filas a una matriz escalonada reducida por filas

.

TEOREMA 40

Sea $A \in M_{n\text{x}n}$. A es una matriz escalonada reducida por filas.

Si $A \neq I$, entonces A tiene fila de ceros.

DEMOSTRACION

"Si A no tiene fila de ceros, entonces $A = I$" (Contra recíproca)

Si A no tiene fila de ceros,

$$
\begin{array}{ll}
A_n & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
A_{n-1} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
\vdots & \\
A_2 & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
A_1 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

$A = (A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n)$

$A = I$

TEOREMA 41

Sea $A \in M_{nxn}$.

A es invertible si y sólo si es equivalente por filas a I.

DEMOSTRACION

a) “Si A es invertible, entonces es equivalente por filas a I”

Por Contradicción:

Se supone que:

A es equivalente por filas a B $(B \neq I)$

$A = E_K E_{K-1} \ldots E_2 E_1 B$

Si $B \neq I$

B tiene fila de ceros (Teorema 40)

$E_K E_{K-1} \ldots E_2 E_1 B$ tiene fila de ceros (Teorema 31)

A tiene fila de ceros

A no es invertible (Teorema 32)

Lo que contradice la suposición.

Por lo tanto:

A es equivalente por filas a I.

b) “Si A es equivalente por filas a I, entonces A es invertible”

Si A es equivalente por filas a I,

I es equivalente por filas a A (Corolario, Teorema 34)

$A = E_K E_{K-1} \ldots E_2 E_1 I$, (Teorema 37)

$A = E_K E_{K-1} \ldots E_2 E_1$,

Por lo tanto: (Teorema 21)

A es invertible. (Teoremas 25, 36)

Corolario

A es invertible si y sólo si es un producto de matrices elementales.

TEOREMA 42

Si A es invertible y reducible a la matriz identidad por sucesión de operaciones elementales, al aplicar a I esta sucesión, se obtiene A^{-1}.

DEMOSTRACION

Si A es invertible,

A es equivalente por filas a I, (Teorema 41)

$I = E_K E_{K-1} \ldots E_2 E_1 A$ (1) (Teorema 37)

$I = (E_K E_{K-1} \ldots E_2 E_1) A$

$IA^{-1} = (E_K E_{K-1} \ldots E_2 E_1) AA^{-1}$

$A^{-1} = (E_K E_{K-1} \ldots E_2 E_1) I$

$A^{-1} = e_K \left(e_{K-1}\left(\ldots e_2\left(e_1(I)\right)\right)\right)$

$I = e_K \left(e_{K-1}\left(\ldots e_2\left(e_1(A)\right)\right)\right)$ (2)

ALGORITMO PARA EL CALCULO DE A^{-1}

Sea la matriz de bloques ($A \mid B$)

Al aplicar operaciones elementales

$e_K \left(e_{K-1}\left(\ldots e_2\left(e_1(A \quad I)\right)\right)\right)$, es decir,

$\left(e_K \left(e_{K-1}\left(\ldots\left(e_2\left(e_1(A)\right)\right)\right)\right)\right) \mid \left(e_K \left(e_{K-1}\left(\ldots\left(e_2\left(e_1(I)\right)\right)\right)\right)\right)$

($I \mid A^{-1}$).

Ejemplo

Hallar la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 2 & 1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{8} & \frac{1}{8} \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{2}{8} & -\frac{5}{8} \\ 0 & 1 & \frac{2}{8} & \frac{1}{8} \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Sean las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}1 & -3 & -1\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -5\end{pmatrix}\qquad E=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & -2 & -3\\ 4 & 3 & -1\end{pmatrix}$$

Calcular:

a) C+E, AB, BA, 2C-3E, CB+D, AB+D^2, 3(2A), 6A

b) A(BD), (AB)D, A(C+E), AC+AE, 3A+2A, 5A

c) A^t, $\left(A^t\right)^t$, $(AB)^t$, $B^t A^t$, $(C+E)^t$, $A(2B)$, $2(AB)$

2. Sea $A = \begin{pmatrix} x & 0 \\ z & y \end{pmatrix}$. Hallar A^2, A^3, A^4

3. Sean las matrices A del problema anterior y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 26 & 27 \end{pmatrix}$. Determinar A tal que $A^3 = B$.

4. Comprobar que $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ es raíz de $F(X) = X^3 - 4X^2 + 5X - 2I$.

5. Las matrices A y B son conmutables si $AB = BA$. Hallar todas las matrices A conmutables con B si $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ e $I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Si ª $\in R$, calcular

ª$I_3 - A$

7. Calcular AB

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & -1 & 4 \\ 5 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & 3 & 5 & 0 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

8. Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1 & x & 3\\ x & 1 & 2\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1 & 2 & x\\ 1 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 3 & -1\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -2 & 1\\ x & 0\\ 1 & x\end{pmatrix}$$

a) Encontrar el valor de x tal qué $Tr\left(AB^tC\right)=0$.

b) Calcular el rango (número de filas no nulas de la matriz escalonada equivalente) de CA sí $x=0$.

9. Escribir una matriz simétrica $A\in M_3$, $A=\left(a_{ij}\right)$ tal que

$$a_{ij}=\frac{(i+1)(j+1)}{i+j}\text{, si } i\geq j$$

10. Reducir las siguientes matrices a su forma escalonada y luego a su forma escalonada reducida por filas

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

11. Determinar la matriz inversa de

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

12. Dadas las matrices

$$P=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix} \text{ y } J=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}. \text{ Hallar}$$

a) P^{-1} y J^{n}.

b) A tal que $A=PJP^{-1}$.

c) $A^{n}=PJ^{n}P^{-1}$. Verificar que $A^{0}=I$ y $A^{1}=A$.

13 Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} \cos\sim & sen\sim \\ -sen\sim & \cos\sim \end{pmatrix}$. Hallar A^n

Deducir la ley y demostrar por inducción.

14. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$. Hallar A^n. Usar el Teorema del Binomio.

15. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$. Hallar A^n. Usar el Teorema del Binomio.

16. Si K_{nn} es una matriz diagonal cuyos elementos, sobre la diagonal, son todos iguales a k, demostrar que $K_{nn}A_{nn} = kA_{nn}$.

17. Demostrar que la suma de dos matrices triangulares inferiores es una matriz triangular inferior.

18. Si A es una matriz simétrica probar que A^t y A^2 son simétricas.

19. Sea A una matriz cuadrada sobre un campo K, $\sim, \quad \in K$, y $B = \sim .A + \quad .I$ (I es la matriz identidad del mismo orden que A. Demostrar que A y B conmutan con el producto usual de matrices.

20 Dadas la matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Determinar la matriz X indicando su número de filas y columnas que cumple:

a) $2A + X = B$

b) $A^t - 2X = C$

c) $CX + AB^t = BB^t$

21. Una matriz A es idempotente si y sólo si $A^2 = A$. Dadas las matrices identidad de orden n, esto es, I_n y la matriz $B \in M_n$, se define $A = I_n - B\left(B^t B\right)^{-1} B^t$. Demostrar que A es una matriz idempotente.

22. Una matriz A es idempotente si y sólo si $A^2 = A$. Probar que si A es idempotente, entonces $B = I - A$ es idempotente y además $AB = BA = O$.

23. Probar que si A satisface $A^2 - A + I = O$, existe una matriz inversa de A.

24. Demostrar que toda matriz cuadrada es la suma de una matriz simétrica y una matriz antisimétrica.

25. Demostrar que $\forall \text{ª} \in R, \forall A = \left(a_{ij}\right)_{mn}$ se cumple que $\text{ª}.A = O \rightarrow \text{ª} = 0 \vee A = O$.

26. Considerando $A_{mn}X_{n1} = O_{m1}$ y $A_{mn}X_{n1} = B_{m1}$, sistemas definidos sobre los reales, demostrar que:

a) Si H es solución de $AX = O$, $\forall \sim \in R$, $\sim H$ es solución de $AX = O$.

b) Si H y K son soluciones de $AX = O$, $H + K$ es solución de $AX = O$.

c) Si H y K son soluciones de $AX = B$, $H - K$ es solución de $AX = O$.

Capítulo 2

DETERMINANTES

DEFINICIÓN

El ***determinante*** es una función que establece una correspondencia entre el conjunto de matrices cuadradas y el campo real o complejo. Asi:

$$f : M_{n\mathrm{x}n} \to K$$
$$A \mapsto f(A) = \det(A)$$

NOTACIÓN

Sea $A = (a_{ij})_n$, el determinante de A se nota así:

$$|A| = \det(A)$$

O también

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

DEFINICIÓN

Sea $A \in M_{2\mathrm{x}2}$

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, entonces

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

DEFINICIÓN

Sea $A \in M_{3x3}$

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, entonces

$$\det(A) = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

DESARROLLO POR MENORES Y COFACTORES

MENOR

Sea la matriz $A = (a_{ij})_n$ y M_{ij} la submatriz de A de orden $(n-1)$, obtenida por eliminación de la i-ésima fila y la j-ésima columna de A. El determinante $|M_{ij}|$ se denomina menor de a_{ij}.

COFACTOR

Sea la matriz $A = (a_{ij})_n$. El cofactor A_{ij} del elemento a_{ij} se define como:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$$

TEOREMA DE LA EXPANSIÓN DE LAPLACE

Sea $A = (a_{ij})_n$.

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}|M_{ij}|, \text{ ó}$$

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$$

PROPIEDADES

TEOREMAS

Sea $A = (a_{ij})_n$.

1. Si A tiene fila o columna de ceros, el $\det(A) = 0$.
2. Si la i-ésima fila de A o la j-ésima columna de A, se multiplica por $\sim$ (escalar) y se obtiene una matriz B, $\det(B) = \sim \det(A)$.
3. $\forall \sim \in K, \det(\sim A) = \sim^{n} \det(A)$.
4. Si las matrices $A, B, C,$ son idénticas, excepto en la j-ésima columna (fila) tal que la j-ésima columna (fila) de C es la suma de las j-ésimas columnas (filas) de A y B ,
   $\det(C) = \det(A) + \det(B)$
5. Si se intercambian dos filas (columnas) de A , para obtener la matriz B , $\det(B) = -\det(A)$.
6. Si la matriz A tiene dos filas (columnas) iguales, $\det(A) = 0$.
7. Si una fila (columna) de A es un múltiplo de una fila (columna) de A , $\det(A) = 0$.
8. Si un múltiplo de una fila (columna) de A , se suma a otra fila (columna) de A , el determinante no se altera.
9. $\det(A) = \det(A^t)$.
10. El determinante de una matriz triangular es igual al producto de los elementos de la diagonal.

DEMOSTRACIONES

1. Sea A una matriz con una fila de ceros

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} ,$$

Sea i la fila de ceros

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} 0.A_{ij} = 0$$

2. $$\det(B) = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} B_{ij}$$

$$\det(B) = \sum_{j=1}^{n} \sim a_{ij} B_{ij}$$

$$\det(B) = \sim \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

$$\det(B) = \sim \det(A)$$

3. $\forall \sim\ \in, \det(\sim A) = \sim^{n} \det(A)$

Por inducción

i) $n = 1$

$$\sim A_1 = (\sim a_{11})$$

$$\det(\sim A_1) = \sim^{1} . \det(A_1)$$

ii) $\det(\sim A_K) = \sim^{K} \det(A_K)$

P.D. $\det(\sim A_{K+1}) = \sim^{K+1} \det(A_{K+1})$

$$\det(\sim A_{K+1}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \sim a_{ij} \left|\sim A_{ij}\right|_{K}$$

$$\det(\sim A_{K+1}) = \sim \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \sim^{K} a_{ij} \left|A_{ij}\right|$$

$$\det(\sim A_{K+1}) = \sim^{K+1} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \left|A_{ij}\right|$$

$$\det(\sim A_{K+1}) = \sim^{K+1} \det(A_{K+1})$$

4. P.D. $\det(A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_n) + \det(A_1, \ldots, B_i, \ldots, A_n) = \det(A_1, \ldots, A_i + B_i, \ldots, A_n)$

$$\det(A_1, \ldots, A_i + B_i, \ldots, A_n) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} (a_{ij} + b_{ij}) \left|A_{ij}\right| \quad \text{según la i-ésima fila}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \left|A_{ij}\right| + \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} b_{ij} \left|A_{ij}\right|$$

$$= \det(A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_n) + \det(A_1, \ldots, B_i, \ldots, A_n)$$

5 Sean

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ a_{1+1,1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

P.D. $\det(A) = -\det(B)$

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

$$\det(B) = \sum_{j=1}^{n} b_{i+1,j} B_{i+1,j}$$

$$= \sum (-1)^{i+1+j} a_{ij} \left| N_{(i+1)} \right|$$

$$= \sum (-1)(-1)^{i+j} a_{ij} \left| N_{(i+1)} \right|$$

$$= -\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

$$= -\det(A)$$

6. Sea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ a_{1+1,1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

tal que las filas i,i+1 son iguales

Al intercambiar las filas i,i+1:

$\det(A) = -\det(B)$ (Teorema 8)

$\det(A) = -\det(A)$

Ordenando la igualdad

$$2\det(A)=0$$

$$\det(A)=0$$

7. Sea

$$B=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \sim a_{1+1,1} & \cdots & \sim a_{i+1,n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\det(B)=\sim\ \det(A)$$

Pero, $\det(A)=0$,

Por lo tanto $\det(B)=0$

8. Sea

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ a_{1+1,1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Se obtiene B al sumar: fila i+1 +$\sim$ .fila i

$$B=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \sim a_{i1}+a_{1+1,1} & \cdots & \sim a_{in}+a_{i+1,n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Al aplicar el Teorema 7

$$\det(B) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \sim a_{i1} & \cdots & \sim a_{in} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \sim a_{i+1,1} & \cdots & \sim a_{i+1,n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$0 \qquad\qquad\qquad\qquad \det(A)$$

$\det(B) = \det(A)$

9. Se demuestra por inducción

i) Si $n = 2$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{22} \tag{1}$$

$$\det(A^t) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{22} \tag{2}$$

Igualando (1) y (2)

$\det(A) = \det(A^t)$

ii) Si $n = k$

$\det(A_K) = \det(A_K^t)$

si $n = k+1$

$\det(A_{K+1}) = \det(A_{K+1}^t)$

Sean

$A = (a_{ij})_{K+1}$

$B = (b_{ij})_{K+1}$

$b_{ij} = a_{ji}$

Desarrollando B según la fila 1:

$$B = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} b_{1j} \left|B_{1j}\right|_K \tag{1}$$

Desarrollando A de acuerdo a la columna 1:

$$A = \sum_{j=1}^{K+1} (-1)^{j+1} a_{j1} \left|A_{i1}\right|_K \tag{2}$$

Pero, $a_{j1} = b_{1j}$, es decir,

$$B_{1j} = \left(A_{j1}\right)^t$$

$$\left|B_{1j}\right| = \left|\left(A_{j1}\right)^t\right|$$

$$\left|B_{1j}\right| = \left|A_{j1}\right|$$

De (1)

$$B = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{j1} \left|A_{j1}\right|_K$$

$$|B| = |A|$$

$$\det(A_{K+1}) = \det(A_{K+1}^t),$$

$$\det(A) = \det(A^t)$$

10. Se demuestra por inducción

i) Si $n = 2$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix},$$

$$|A| = a_{11}a_{22}$$

$$|A| = \prod_{i=1}^{2} a_{ii}$$

ii) Si $n = k$

$$|A_K| = \prod_{i=1}^{K} a_{ii} \qquad \text{Hipótesis inductiva}$$

$$|A_{K+1}| = \prod_{i=1}^{K+1} a_{ii} \qquad \text{Tesis inductiva}$$

$$|A_{K+1}| = \sum_{j=1}^{K+1} (-1)^{K+1+j} a_{K+1,j} \left|A_{K+1,j}\right| \qquad \text{según la fila } K+1$$

$$= 0 + \ldots + (-1)^{K+1+1} a_{K+1,1} \left|A_{K+1,1}\right|_K + 0 + \ldots + 0$$

$$= (-1)^{K+1+1} a_{K+1,K+1} \left|A_{K+1,K+1}\right|_K$$

$$= (-1)^{2K+2} a_{K+1,K+1} \prod_{i=1}^{K} a_{ii}$$

$$= a_{K+1,K+1}\prod_{i=1}^{K} a_{ii}$$

$$= \prod_{i=1}^{K} a_{ii}$$

DETERMINANTES DE MATRICES ELEMENTALES

1. E_1 es una matriz elemental tipo I obtenida por intercambio de filas o columnas, entonces: $|E_1| = -|I| = -1$.
2. E_2 es una matriz elemental tipo II obtenida al multiplicar la i-ésima fila o columna por $\sim$ (escalar), entonces: $|E_2| = \sim|I| = \sim$.
3. E_3 es una matriz elemental tipo III obtenida al sumar $\sim$ veces la fila o columna j a la fila o columna i, entonces: $|E_3| = |I| = 1$.

Observación $|E| \neq 0$**.**

TEOREMA 11

Si E es una matriz elemental, entonces:

$|EA| = |E||A|$, y

$|AE| = |A||E|$

DEMOSTRACION

a) Intercambio de dos filas o columnas

$|E| = -1$

EA se obtiene intercambiando dos filas o columnas de A

$|EA| = |A| = (-1)|A|$

Por lo tanto:

$|EA| = |E||A|$

b) Se multiplica una fila o columna por $\sim$ (escalar)

$|E| = \sim|I| = \sim$

$|EA| = \sim |A|$

$|EA| = |E||A|$

c) Se reemplaza una fila o columna por la suma de una de ellas multiplicada por $\sim$

$|E| = 1$

$|EA| = |A| = 1|A|$

$|EA| = |E||A|$

De manera semejante se demuestra que

$|AE| = |A||E|$

Corolario

Si A y B son equivalentes:

$|B| = |E_K||E_{K-1}|\ldots|E_2||E_1||A|$

TEOREMA 12

Sea $A \in M_{nxn}$

A es invertible si y sólo si $|A| \neq 0$

DEMOSTRACION

1. “Si A es invertible, entonces $|A| \neq 0$"

Si A es invertible,

A es producto de matrices elementales,

$A = E_K E_{K-1} \ldots E_2 E_1$ (M, Teorema 41)

$|A| = |E_K||E_{K-1}|\ldots|E_2||E_1|$ (Teorema 11)

$|A| \neq 0$, puesto que $\forall |E| \neq 0$

2. “Si $|A| \neq 0$, entonces A es invertible”.

Se demuestra la contrarrecíproca:

Si A no es invertible, entonces $|A| = 0$

Si A no es invertible,

A es equivalente a una matriz B que tiene fila de ceros,

$A = E_K E_{K-1} \ldots E_2 E_1 B$ es matriz con fila de ceros (M, Teorema 31)

$|A| = |E_K||E_{K-1}|\ldots|E_2||E_1||B|$ (Teorema 11)

$|A| = 0$

TEOREMA 13

Sean las matrices $A, B \in M_{nxn}$

$|AB| = |A||B|$

DEMOSTRACION

1. A es invertible

Si A es invertible

$A = E_K E_{K-1} \ldots E_2 E_1$ (1)

$|A| = |E_K||E_{K-1}|\ldots|E_2||E_1|$ (2)

$AB = E_K E_{K-1} \ldots E_2 E_1 B$

$|A||B| = |E_K||E_{K-1}|\ldots|E_2||E_1||B|$ (3)

Sustituyendo (2) en (3)

$|AB| = |A||B|$

2. A no es invertible

Si A no es invertible

$|A| = 0$ (Teorema (12)

AB no es invertible (M, Teoremas 31,32)

$|AB| = 0$

$|AB| = 0.|B|$

Por lo tanto:

$|AB| = |A||B|$

INVERSA DE UNA MATRIZ

TEOREMA 14

Sea $A \in M_{nxn}$

$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \ldots + a_{in}A_{kn} = 0$, si $i \neq k$

DEMOSTRACION

Sea B es la matriz obtenida al reemplazar la k-ésima fila de A por la i-ésima fila de A, así:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{i1} & a_{12} & \cdots & a_{an} \\ \vdots & & & \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{i1} & a_{12} & \cdots & a_{an} \\ \vdots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

B es una matriz con dos filas iguales, es decir, $|B| = 0$

Desarrollando $|B|$ según la k-ésima fila de B por menores y cofactores:

$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \ldots + a_{in}A_{kn} = 0$

DEFINICIÓN

Sea $A \in M_{nxn}$, se define como ***matriz adjunta*** de A a la transpuesta de la matriz de los cofactores de los elementos a_{ij} .

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad Cof(A) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad adjA = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

TEOREMA 15

Sea $A \in M_{nxn}$

$adjA.A = A.adjA = |A|I$

DEMOSTRACION

$$A.adjA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{11} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{k1} & \cdots & A_{ni} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{k2} & & A_{n2} \\ \vdots & & & & & \\ A_{12} & A_{2n} & \cdots & A_{kn} & & A_{nn} \end{pmatrix}$$

El elemento i,k -ésimo de la matriz A .adj A es:

$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \ldots + a_{in}A_{kn} = |A|$, si $i = k$

$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \ldots + a_{in}A_{kn} = 0$ **,** si $i \neq k$ (Teorema 14)

es decir,

$$A.adjA = \begin{pmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{pmatrix}$$

$adjA.A = A.adjA = |A|I$

Corolario

Sea $A \in M_{nxn}$ y $|A| \neq 0$, entonces

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}.adjA$$

Ejemplo

Dada la matriz

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 3 & 8 & -2\\ 2 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

a) Calcular $|A|$.

b) Hallar la matriz $Adj(A)$.

c) Comprobar que $A.Adj(A)=Adj(A).A=|A|.I$

d) Calcular A^{-1}.

Solución:

a) $$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\ 3 & 8 & -2\\ 2 & 0 & 4\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}2 & 4\\ 8 & -2\end{vmatrix}+4\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 8\end{vmatrix}=2(-36)+4(2)=-64$$

b) $$Adj(A)=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}8 & -2\\ 0 & 4\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 4\\ 0 & 4\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2 & 4\\ 8 & -2\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}3 & -2\\ 2 & 4\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 4\\ 2 & 4\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 4\\ 3 & -2\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}3 & 8\\ 2 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 8\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}32 & -8 & -36\\ -16 & -4 & 14\\ -16 & 4 & 2\end{pmatrix}$$

c) $$A.Adj(A)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 3 & 8 & -2\\ 2 & 0 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}32 & -8 & -36\\ -16 & -4 & 14\\ -16 & 4 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-64 & 0 & 0\\ 0 & -64 & 0\\ 0 & 0 & -64\end{pmatrix}$$

$$Adj(A).A=\begin{pmatrix}32 & -8 & -36\\ -16 & -4 & 14\\ -16 & 4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 3 & 8 & -2\\ 2 & 0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-64 & 0 & 0\\ 0 & -64 & 0\\ 0 & 0 & -64\end{pmatrix}$$

d) $$A^{-1}=\frac{1}{|A|}Adj(A)=\frac{1}{-64}\begin{pmatrix}32 & -8 & -36\\ -16 & -4 & 14\\ -16 & 4 & 2\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-1/2 & 1/8 & 9/16\\ 1/4 & 1/16 & -7/32\\ 1/4 & -1/16 & -1/32\end{pmatrix}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Encontrar el valor de los siguientes determinantes

a) $$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

b) $$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \end{vmatrix}$$

c) $$\begin{vmatrix} 1+2i & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1-i \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 1-a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-a \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & x \\ 1 & 9 & 8 & 4 \\ 1 & 9 & 8 & 7 \\ 1 & 9 & 9 & 0 \end{vmatrix}$, donde x es el último dígito del año actual.

2. Determinar el valor de

a) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

b) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

c) $$\begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ b & c & a & 1 \\ c & a & b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

i) $a+b+c=0$

ii) $a+b+c=3$

d) $$\begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & 1+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & 1+a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & & & & \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$$

e) $$\begin{vmatrix} x^2 & y^2 & z^2 \\ x & y & z \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix}$$

f) $$\begin{vmatrix} sen^2 A & \cos^2 A & \cos 2A \\ sen^2 B & \cos^2 B & \cos 2B \\ sen^2 C & \cos^2 C & \cos 2C \end{vmatrix}$$

g) $$\begin{vmatrix} 3+7i & 0 & -4 & 1 & 7 \\ 2+3i & 8 & 1 & 0 & -5 \\ 2 & 8 & 0 & 6 & -6 \\ 1+10i & 8 & -3 & 1 & 2 \\ 3i & 0 & 1 & -6 & 0 \end{vmatrix}$$

3. Demostrar que:

$$\begin{vmatrix} 0 & a & a & a \\ a & 0 & a & a \\ a & a & 0 & a \\ a & a & a & 0 \end{vmatrix} = -3a^4$$

4. Demostrar que el determinante $n{\times}n$

$$\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b & b \\ b & a & b & \cdots & b & b \\ b & b & a & \cdots & b & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a & b \\ b & b & b & \cdots & b & a \end{vmatrix} = (a-b)^{n-1}\left[a+(n-1)b\right]$$

5. Hallar el valor de

$$\begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_1-b_2 & \cdots & a_1-b_n \\ a_2-b_1 & a_2-b_2 & \cdots & a_2-b_n \\ \vdots & & & \\ a_n-b_1 & a_n-b_2 & \cdots & a_n-b_n \end{vmatrix}$$

6. a) Demostrar que:

$$|A| = \begin{vmatrix} b^2+ac & bc & c^2 \\ ab & ac & bc \\ a^2 & ab & b^2+ac \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$$

Verificar primero que: $|A| = \begin{vmatrix} b & c & 0 \\ a & 0 & c \\ 0 & a & b \end{vmatrix}^2$

b) Hallar el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ca \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ca & bc & a^2+b^2 \end{vmatrix}$$

7. Demostrar que

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b & b^2 \\ 1 & 0 & c & c^2 \\ 0 & 1 & d & d^2 \end{vmatrix} = -(a-c)(b-d)(a-b+c-d)$$

8. ¿Para qué valores $a, b \in R$, el siguiente determinante es diferente de cero?

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{vmatrix}$$

9. Probar que

$$\begin{vmatrix} (b+c)^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & (a+c)^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} = 2abc(a+b+c)^3$$

10. Demostrar que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1^{\ 2} & a_2^{\ 2} & a_3^{\ 2} & a_4^{\ 2} \\ a_1^{\ 3} & a_2^{\ 3} & a_3^{\ 3} & a_4^{\ 3} \end{vmatrix} = (a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_1 - a_4)(a_2 - a_3)(a_2 - a_4)(a_3 - a_4)$$

¿Cuál es la generalización de este resultado a determinantes de orden n?

11. Aplicaciones a la Geometría Analítica

a) Si $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), P_3(x_3, y_3)$ son tres puntos no colineales, la ecuación de la parábola $y = Ax^2 + Bx + C$ que pasa por los puntos P_1, P_2, P_3 puede escribirse de la forma:

$$\begin{vmatrix} y & 1 & x & x^2 \\ y_1 & 1 & x_1 & x_1^2 \\ y_2 & 1 & x_2 & x_2^2 \\ y_3 & 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix} = 0$$

Hallar la ecuación de la parábola que pasa por los puntos: $(1,5), (-2,6), (2,-2)$.

b) Si $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), P_3(x_3, y_3)$ son tres puntos no colineales, la ecuación del círculo que pasa por los puntos P_1, P_2, P_3, puede escribirse:

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Hallar la ecuación del círculo que pasa por los puntos:

$(1,5), (-2,6), (2,-2).$

c) Si se conoce que:

$L_1 : a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0,$

$L_2 : a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = 0,$

$L_3 : a_{31}x + a_{32}y + a_{33} = 0,$

son tres rectas no paralelas, el área determinada por L_1, L_2, L_3 es igual al valor absoluto de:

$$\frac{1}{A_{13}A_{23}A_{33}}\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}$$

Donde A_{ij} es el cofactor de a_{ij} en A:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Hallar la superficie del triángulo cuyos lados son las rectas:

$5x - 7y + 27 = 0, 9x - 2y - 15 = 0, 4x + 5y + 11 = 0.$

d) El volumen de tetraedro determinado en el espacio por los puntos $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2), P_3(x_3, y_3, z_3), P_4(x_4, y_4, z_4)$, está dado por el valor absoluto de $\frac{1}{6}D$, siendo D el determinante de:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

$(1,2,-5),(0,4,6),(-1,2,6),(0,-3,0)$.

12. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & a \\ -1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

a) Determinar los valores de a para que para que A sea invertible.

b) Hallar la inversa de A cuando existe.

13. Sea

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ a & 1 & a\\ 3 & 3 & 2\end{pmatrix}$$

a) Determinar el valor de a para que A sea invertible.

b) Calcular A^{-1} con el valor de a para el cual $|A| = 2$.

14. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & -3 \\ 2 & 3 & a \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Determinar los valores de a para que para que A sea invertible.

b) Hallar la inversa de A cuando existe.

15. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$$

a) Hallar $|A|$.

b) Encontrar $Adj(A)$.

c) Calcular A^{-1}.

Capítulo 3

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

DEFINICIÓN

Ecuación lineal, es una expresión del tipo:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = b \qquad (1)$$

donde

x_1 = variable

$x_2, x_3, x_n, \ldots$ = variables libres

a_i = coeficientes de las variables

b = término constante

$a, b \in K$

$x_i \in K$

El conjunto solución de la expresión (1) es: $CS = \{(t_1, t_2, \ldots, t_n) : t_i \in K\}$

Se consideran los siguientes casos:

I. Si $a_1 \neq 0$

$$x_1 = \frac{b}{a_1} - \frac{a_2}{a_1} x_2 - \cdots - \frac{a_n}{a_1} x_n$$

se puede obtener x_1 dependiendo de los valores $x_2, x_3, \cdots, x_n$

II. Si $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0 \wedge b \neq 0$

Reemplazando en (1)

$$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b$$

$$0 = b$$

Para ningún valor se verifica la igualdad anterior. La ecuación (1) es inconsistente, por lo tanto, no tiene solución, o se dice que $CS = \varnothing$

III. Si $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0 \wedge b = 0$

De (1)

$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = 0$

$0 = 0$

Se obtiene una identidad

La ecuación (1) se cumple para todos los valores de x_i.

DEFINICIÓN

Los ***sistemas de ecuaciones lineales*** son expresiones del tipo:

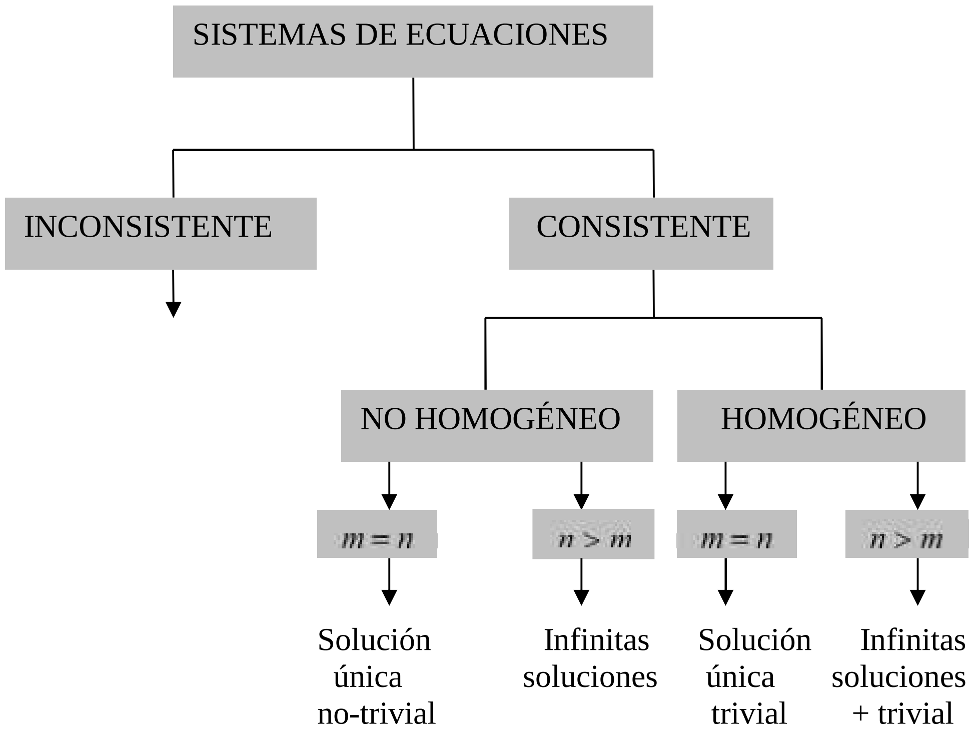
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

El sistema (1) es de m ecuaciones y n variables $(m.n)$.

Observaciones

1. Si $\exists b_i \neq 0$, (1) se llama **sistema no homogéneo.**
2. Si $\forall b_i = 0$, (1) se llama **sistema homogéneo.**
3. Resolver el sistema (1) es hallar las n-úplas ordenadas que al reemplazar en el mismo dan identidades, es decir, satisfacen el sistema.
4. Si una de las ecuaciones de (1) es del tipo $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b$, el sistema es inconsistente, es decir, no tiene solución, o no existen n-úplas ordenadas que satisfacen el sistema (Teorema de Rouché-Fröbenius).
5. Si en una de las ecuaciones los coeficientes y el término constante son iguales a cero, se tiene un sistema de $m-1$ ecuaciones con n incógnitas.

En el siguiente cuadro se presenta un resumen de los diferentes tipos de sistemas, así:



SISTEMAS EQUIVALENTES

Son aquellos sistemas que tienen las mismas soluciones.

Para obtener un sistema equivalente de uno dado, se pueden realizar las siguientes operaciones:

1. Intercambiar ecuaciones $(E_i \leftrightarrow E_j)$.
2. Multiplicar por un escalar diferente de cero a una de las ecuaciones $(E_i \to \sim E_i)$.
3. Reemplazar una ecuación por la suma de otra ecuación multiplicada por un escalar $(E_i \to E_i + \sim E_j)$.

SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES

Las operaciones definidas sobre matrices y sobre ecuaciones son idénticas, por lo tanto, es posible trabajar sobre un sistema representado en forma matricial. En este apartado se describirán métodos para hallar todas las soluciones (si las hay) de un sistema de m ecuaciones con n incógnitas.

Del sistema (1),

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{B}$$

$AX = B$ Es la ecuación matricial del sistema (1).

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \qquad (2)$$

La matriz (2) es la matriz ampliada ($A \mid B$) correspondiente al sistema (1).

Observaciones

1. A todo sistema $AX = B$ le corresponde la matriz ampliada (2).
2. De toda matriz ampliada (2) se puede escribir el sistema $AX = B$ correspondiente.
3. Si la matriz ampliada ($A \mid B$) es equivalente a la matriz ampliada ($C \mid D$), los sistemas $AX = B$ y $CX = D$ son equivalentes.

MÉTODOS DE RESOLUCIÓN

Para resolver sistemas de ecuaciones se utilizarán los métodos de Gauss (o de la triangulación), Gauss-Jordan y Cramer, los mismos que se detallan a continuación.

MÉTODO DE GAUSS

Consiste en encontrar una matriz ampliada escalonada equivalente por filas a la matriz correspondiente al sistema original, se escribe el sistema equivalente conforme a la ***matriz escalonada*** y se resuelve el sistema así obtenido. Si la matriz A tiene fila de ceros y la matriz $(A \mid B)$ no tiene fila de ceros, el sistema es inconsistente.

MÉTODO DE GAUSS-JORDAN

Consiste en encontrar una matriz ampliada escalonada reducida por filas equivalente por filas a la matriz correspondiente al sistema original, se escribe el sistema equivalente ajustado a la ***matriz escalonada reducida por filas*** y se resuelve el sistema así obtenido.

MÉTODO DE CRAMER

Este método sirve para resolver sistemas que tienen el mismo número de incógnitas que de ecuaciones.

TEOREMA DE CRAMER

Sea un sistema de ecuaciones nxn donde:

A es matriz de los coeficientes

x_i es la fila i-ésima de X (matriz de las variables)

A_i es la matriz que tiene los mismos elementos de A**,** excepto los de la i-ésima columna, en la que constan los términos independientes.

$$\text{Si } |A| \neq 0\text{, entonces } x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$$

DEMOSTRACIÓN

Se expresa el sistema en forma matricial.

$AX = B$

De acuerdo a la hipótesis:

$|A| \neq 0$

A es invertible y existe A^{-1}

$A(A^{-1}X) = A^{-1}B$

$X = A^{-1}B$

$X = \dfrac{adjA.B}{|A|}$

$$adjA = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{k1} & \cdots & A_{ni} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{k2} & & A_{n2} \\ \vdots & & & & & \\ & & & & & \\ A_{12} & A_{2n} & \cdots & A_{kn} & & A_{nn} \end{pmatrix}$$

siendo

$$A. = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{11} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Considerando la fila i-ésima de X

$$x_i = \frac{F_i(adjA.B)}{|A|}$$

$$F_i(adjA.B) = c_{1i}b_1 + c_{2i}b_2 + \cdots + c_{ni}b_n \qquad (1)$$

Se calcula $|A_i|$

$$|A_i| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \cdots & & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Desarrollando por cofactores de acuerdo a la i-ésima columna:

$$|A_i| = b_1c_{i1} + b_2c_{i2} + \cdots + b_nc_{in} \qquad (2)$$

Igualando (1) y (2)

$$x_i = \frac{F_i(adjA.B)}{|A|} = \frac{|A_i|}{|A|}$$

Síntesis

Si $A \in M_n$ con $|A| \neq 0$, entonces $AX = B$ tiene como solución única:

$$x_1 = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ b_n & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$x_2 = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & b_n & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$\vdots$

$\vdots$

$$x_n = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & & b_2 \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & b_n \end{vmatrix}$$

Observación

Este método es válido únicamente si el sistema es $n\times n$.

Ejemplo

Resolver usando el método de Cramer

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Solución:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -12 \neq 0 \rightarrow \text{el sistema es de Cramer}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{-12} = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{-12} = \frac{5}{3}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{-12} = -\frac{1}{6} \qquad CS = \left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{3}, -\frac{1}{6} \right) \right\}$$

Resumen

En ciencia y tecnología existe una gran variedad de situaciones que pueden expresarse en términos matemáticos mediante sistemas de ecuaciones lineales, o bien acercarse a un sistema de este tipo, de ahí el interés de su estudio.

Una vez que se ha planteado un sistema lineal de ecuaciones, se delinean tres cuestiones importantes. La primera de ellas es conocer si tiene o no solución, la segunda es la unicidad de la misma y, por último, el cálculo de la solución cuando existe.

A las dos primeras cuestiones da respuesta el teorema de Rouché-Fröbenius, tal como se ilustra en este capítulo. En este punto del estudio es importante tomar en cuenta también las propiedades que presentan los conjuntos de soluciones de los sistemas lineales homogéneos y no homogéneos.

La cuestión referente al cálculo de las soluciones tiene múltiples respuestas, ya que existen diversos métodos para determinarlas. Entre ellos, cabe destacar el método de triangulación de Gauss y la regla de Cramer.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Resolver

a) $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 5 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 6 \\ 5x_1 - 3x_2 - x_3 = 16 \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ 4x_1 - x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases}$$

c) $$\begin{cases} x_1 + ax_2 = 1 \\ x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

Usar el método de Cramer

d) $\begin{cases} (1+i)x_1 + (2+i)x_2 = 5 \\ (2-2i)x_1 + ix_2 = 1+2i \end{cases}$

Usar el método de Cramer

e) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 + 6x_4 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 5 \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 = -4 \\ x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$

g) $$\begin{cases} x_1+5x_2+4x_3-13x_4=3 \\ 3x_1-x_2+2x_3+6x_4=2 \\ 2x_1+2x_2+3x_3-4x_4=1 \end{cases}$$

2. Determinar los valores de k tales que el sistema con las incógnitas x_1, x_2, x_3 tenga i) Solución única, ii) Infinitas soluciones, iii) No tenga solución.

a) $$\begin{cases} kx_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+kx_2+x_3=1 \\ x_1+x_2+kx_3=1 \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} x_1 + x_2 + kx_3 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = k \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

c) $$\begin{cases} x_1 \qquad - 3x_3 = -3 \\ 2x_1 + kx_2 - x_3 = -2 \\ x_1 + 2x_2 + kx_3 = 1 \end{cases}$$

3. Determinar los valores de ª para que el sistema

$$\begin{cases} (\text{ª}-1)x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + (\text{ª}-1)x_2 + 2x_3 = 2\text{ª}-3 \\ x_1 + 2x_2 + (\text{ª}-1)x_3 = \text{ª} \end{cases}$$

a) Tenga solución única. Hallarla

b) Tenga más de una solución. Hallarlas

c) No tenga solución.

4. Determinar los valores de a para que el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = a \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - a x_3 = a^2 - a \end{cases}$$

a) Tenga solución única. Hallarla.

b) Tenga más de una solución. Hallarlas.

c) No tenga solución.

5. Determinar los valores de a y b para que el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + (3+a)x_2 + (2+a)x_3 = 1 \\ 3x_1 + 3x_2 + (4+2a)x_3 = 3+b \end{cases}$$

a) Tenga solución única. Hallarla.

b) Tenga más de una solución. Hallarlas.

c) No tenga solución.

6. Determinar los valores de a y b para que el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 \quad + ax_3 = b \end{cases}$$

a) Tenga solución única. Hallarla

b) Tenga más de una solución. Hallarlas.

c) No tenga solución.

7. Determinar los valores m para que el siguiente sistema:

$$\begin{cases} (2m+2)x_1 + (m-1)x_2 + (m+3)x_3 = 2m+2 \\ \qquad\qquad (m-1)x_2 - (m-1)x_3 = 0 \\ mx_1 \qquad + x_2 \qquad - x_3 = m+1 \end{cases}$$

a) Tenga solución única. Hallarla

b) Tenga más de una solución. Hallarlas

c) No tenga solución.

8. Determinar los valores m para que el siguiente sistema

$$\begin{cases} (m+2)x_1 + x_2 + x_3 = m-1 \\ mx_1 + (m-1)x_2 + x_3 = m-1 \\ (m+1)x_1 + (m+1)x_3 = m-1 \end{cases}$$

a) Tenga solución única. Hallarla

b) Tenga más de una solución. Hallarlas

c) No tenga solución.

9. Determinar los valores de a para que el sistema

$$\begin{cases} (2a+2)x_1 + (a-1)x_2 + (a+3)x_3 = -2 \\ \qquad\qquad (a-1)x_2 - (a-1)x_3 = 0 \\ \quad 2x_1 \quad + x_2 \quad - x_3 = -1 \end{cases}$$

a) Tenga solución única. Hallarla

b) Tenga más de una solución. Hallarlas

c) No tenga solución.

10. Determinar los valores a, b, c y k para que el sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ ax_1 + bx_2 + c\,x_3 = k \\ a^2x_1 + b^2x_2 + c^2x_3 = k^2 \end{cases}$$

a) Tenga solución única. Hallarla

b) Tenga más de una solución. Hallarlas

c) No tenga solución.

Capítulo 4

ESPACIOS VECTORIALES

DEFINICIÓN

Sean V un conjunto no vacío, K un campo, (+) una ley de composición interna sobre V, llamada adición, ($\bullet$) una ley de composición externa, que relaciona V y K, llamada producto, entonces se dice que V tiene estructura de ***espacio vectorial*** sobre el campo K, notada por $(V, K, +, \bullet)$ si cumple las siguientes propiedades:

1. (V, +) es un grupo conmutativo

i) $\forall u, v \in V \mid u + v \in V$ **Axioma de clausura**

ii) $\forall u, v, w \in V \mid (u+v)+w = u+(v+w)$ **Axioma de asociatividad**

iii) $\exists! e \in V, \forall u \in V \mid e+u = u+e = u \quad (e = 0_v)$ **Axioma del neutro aditivo**

iv) $\forall u \in V, \exists! u' \in V \mid u+u' = u'+u = e$ **Axioma del inverso aditivo**

v) $\forall u, v \in V \mid u+v = v+u$ **Axioma de conmutatividad**

2. $\forall \sim \in K, \forall u \in V \mid \sim u \in V$ **Axioma de clausura**

3. $\forall \sim, \quad \in K, \forall u \in V \mid (\sim \quad)u = \sim(\quad u)$ **Ley asociativa mixta**

4. $\exists! e \in K, \forall u \in V \mid eu = u \quad (e = 1)$ **Axioma del neutro**

5. $\forall \sim, \quad \in K, \forall u \in V \mid (a + \quad)u = \sim u + \quad u$ **Primera ley de distribución**

6. $\forall \sim \in K, \forall u, v \in V \mid \sim (u+v) = \sim u + \sim v$ **Segunda ley de distribución**

EJEMPLOS

1. $(R^n, R, +, \bullet)$ es el espacio vectorial de las $n-$úplas de números reales.

$$R^n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in R, i = 1, 2, \ldots, n\}$$

Si ª $\in R$, $u, v \in R^n$, $u = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $v = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ se definen

$u + v = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$ y ª$u = ($ª$a_1,$ ª$a_2, \ldots,$ ª$a_n)$

2. $(M_{m\text{x}n}, R, +, \bullet)$ es el espacio vectorial de todas las matrices $m\text{x}n$.

   $M_{m\text{x}n} = \{A_{m\text{x}n} \mid A_{m\text{x}n}$ es una matriz de orden $m\text{x}n$, $a_{ij} R\}$

   Donde + representa la suma usual de matrices y $\bullet$ la multiplicación usual de un número real por una matriz.

3. $(F, R, +, \bullet)$ es el espacio vectorial de todas las funciones reales.

   $F = \{f \mid f : R \rightarrow R$ es una función$\}$

   Donde + representa la suma usual de funciones y $\bullet$ la multiplicación usual de un número real por una función.

4. $(P_n[x], R, +, \bullet)$ es el espacio vectorial de todos los polinomios de grado $\leq n$.

   Donde + representa la suma usual de polinomios y $\bullet$ la multiplicación usual de un número real por un polinomio.

Observaciones

1. Los elementos de V se llaman ***vectores***, los elementos de K se llaman ***escalares***.
2. La operación (+) se llama ***suma vectorial***, la operación ($\bullet$) se llama ***multiplicación por un escalar***.
3. El vector 0_V se llama ***vector nulo*** o ***vector cero***.

El siguiente teorema es de mucho interés

TEOREMA 1

Sea $(V, K, +, \bullet)$ un espacio vectorial

$\forall \sim \in K, \forall u, v, w \in K$ se cumple que:

a) $u + v = v + w \rightarrow u = w$

b) $0.u = O_v$

c) $\sim .O_V = O_V$

d) $\sim .u = O_V \leftrightarrow \sim = 0 \vee u = O_V$

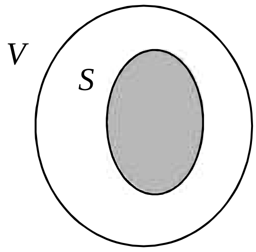
e) $(-\sim .u) = \sim (-u) = -(\sim .u)$

DEMOSTRACIONES

a)	$u+0_V=u$	Axioma del neutro
	$u+(v+(-v))=u$	Axioma del inverso
	$(u+v)+(-v)=u$	Axioma de asociatividad
	$v+w+(-v)=u$	Hipótesis
	$v+(-v)+w=u$	Axioma de asociatividad
	0_V+w=u	Axioma del inverso
	$u=w$	Axioma del neutro
c)	$0_V+0_V=0_V$	Axioma del neutro
	$\sim\ =\sim$	Axioma reflexivo
	$\sim(0_V+0_V)=\sim 0_V$	Axioma reflexivo
	$\sim 0_V+\sim 0_V=\sim 0_V$ (1)	Axioma distributivo
	$-\sim.u=-\sim.u$ (2)	Axioma reflexivo
	Sumando (1) y (2)	
	$\sim 0_V+(\sim 0_V+(-\sim 0_V))=\sim 0_V+(-\sim 0_V)$	
	$\sim 0_V+0_V=0_V$	Axioma del inverso
	$\sim 0_V=0_V$	Axioma del neutro
d)	Por Contradicción	
	Se supone que:	
	$\neg(\sim\ =0 \vee u=0_V)$	
	$\sim\ \neq 0 \wedge u \neq 0_V$	
	$\forall \sim\ \in K$, tal que, $\sim\ \neq 0,\ \exists \dfrac{1}{\sim}$	
	$\sim 0_V=0_V$	Hipótesis
	$\left(\dfrac{1}{\sim}\right)\sim u=\left(\dfrac{1}{\sim}\right)0_V$	
	$1.u=0_V$	Axioma del inverso
	$u=0_V$	
	Lo que contradice la suposición	
	$\therefore\ \sim\ =0 \vee u=0_V$	

SUBESPACIOS VECTORIALES

Sean V y S dos espacios vectoriales definidos en el campo K, entonces S es un subespacio vectorial de V, si y sólo si, $S \subseteq V$. De hecho, todos los espacios vectoriales tienen subconjuntos que también son espacios vectoriales. Gráficamente se tiene



TEOREMA 2

Sea $(V, K, +, \bullet)$ un espacio vectorial, $S \subseteq V$, $S \neq \varnothing$,

S es ***subespacio vectorial*** de V si y sólo si cumple que:

1. $\forall u, v \in S \mid u + v \in S$
2. $\forall \sim \in K, \forall u \in S \mid \sim u \in S$

DEMOSTRACION

1) "$\rightarrow$"

Se cumple pues $S \subseteq V$

2. "$\leftarrow$"

P.D. $(S, K, +, \bullet)$ es un espacio vectorial

$(S, +)$ es un grupo conmutativo

a) $\forall u, v \in S \mid u + v \in S$ **Axioma de clausura**

Si cumple

b) $\forall u, v, w \in S \mid (u + v) + w = u + (v + w)$ **Axioma de asociatividad**

Si cumple

c) $\exists! e \in S, \forall u \in S \mid e + u = u + e \ \ (e = 0_v)$ **Axioma del neutro aditivo**

P.D. $e = 0_V \in S$

Si $\sim = 0$

$\sim u = 0u$

$\sim u = 0_V$

$0_V \in S$

Si cumple

d) $\forall u \in S, \exists!\, u' \in S \mid u + u' = u' + u = e$ **Axioma del inverso aditivo**

P.D. $u' = -u \in S$

Si $\sim = -1$

$\sim u = -1.u$

$\sim u = -u$

es decir,

$-u \in S$

Si cumple

e) $\forall u, v \in V \mid u + v = v + u$

Si cumple

Puesto que $S \subseteq V$ se cumplen las propiedades de los espacios vectoriales.

Si S es espacio vectorial y $S \subseteq V$, entonces S es subespacio vectorial de V.

Observación

0_V pertenece a todo subespacio vectorial de V.

Corolario

$S \subseteq V$, si S es subespacio vectorial de V, entones se cumple que:

1. $0_V \in S,\ S \neq \varnothing$
2. $\forall \sim \in K, \forall u, v \in S \mid u + \sim v \in S$

COMBINACIÓN LINEAL

Sean $(V, K, +, \bullet)$ un espacio vectorial, $T \subseteq V$,

$T = \{t_1, t_2, \ldots t_n\}$

Se dice que $u \in V$ es combinación lineal de T si y sólo si existen elementos del campo K tal que se verifica la siguiente identidad:

$$u = \sim_1 t_1 + \sim_2 t_2 + \cdots + \sim_n t_n$$

CONJUNTO GENERADOR

Sean $(V, K, +, \bullet)$ un espacio vectorial, $S \subseteq V$, $S = \{s_1, s_2, \ldots s_n\}$, $u \in V$.

Si $u = \sim_1 s_1 + \sim_2 s_2 + \cdots + \sim_n s_n$,entonces S es conjunto generador de V.

CÁPSULA LINEAL

Sean $(V, K, +, \bullet)$ un espacio vectorial, $S \subseteq V$, $S \neq \emptyset$, $S = \{s_1, s_2, \ldots s_n\}$

La cápsula de S es el conjunto de los vectores que son combinaciones lineales de los elementos de S, y se nota por $\langle S \rangle$, es decir,

$$\langle S \rangle = \{v \in V \mid v = \sim_1 s_1 + \sim_2 s_2 + \ldots + \sim_n s_n , \sim_i \in K\}$$

TEOREMA 3

Sean $(V, K, +, \bullet)$ un espacio vectorial, $S \subseteq V$, $S \neq \emptyset$

La cápsula de S es subespacio vectorial de V.

DEMOSTRACION

1. $0_V \in \langle S \rangle$ y $S \neq \emptyset$

   $\exists u \in S$

   Sea $\sim = 0 \in K$

   $\sim u = 0_V$

   $0u = 0_V$

   $0_v \in \langle S \rangle$

2. $\forall u, v \in \langle S \rangle \mid u + v \in \langle S \rangle$

   $u = \sim_1 s_1 + \sim_2 s_2 + \ldots + \sim_n s_n$

   $v = \ \ _1 s_1 + \ \ _2 s_2 + \ldots + \ \ _n s_n$

   $u + v = (\sim_1 + \ \ _1) s_1 + (\sim_2 + \ \ _2) s_2 + \ldots + (\sim_n + \ \ _n) s_n$

   $u + v = \langle S \rangle$

3. $\forall \sim \in K, \forall u \in \langle S \rangle \mid \sim u \in \langle S \rangle$

$$u = \sim_1 s_1 + \sim_2 s_2 + \ldots \sim_n s_n$$

$$\sim u = \sim\sim_1 s_1 + \sim\sim_2 s_2 + \ldots + \sim\sim_n s_n$$

$$\sim\sim_i = ¥_i$$

$$\sim u = ¥_1 s_1 + ¥_2 s_2 + \ldots + ¥_n s_n$$

$$\sim u \in \langle S \rangle$$

DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEALES

Sean $(V, K, +, \bullet)$ un espacio vectorial, $T \subseteq V$, $T = \{t_1, t_2, \ldots t_n\}$,

1. T es **linealmente dependiente** si y sólo si existen escalares $\sim_i$ no todos iguales a cero, tales que:

$$\sim_1 t_1 + \sim_2 t_2 + \ldots + \sim_n t_n = 0_V$$

2. T es **linealmente independiente** si y sólo si existen escalares $\sim_i$ únicos e iguales a cero, tales que:

$$\sim_1 t_1 + \sim_2 t_2 + \ldots + \sim_n t_n = 0_V$$

a esta se llama **combinación lineal trivial**.

TEOREMA 4

Sean $(V, K, +, \bullet)$ un espacio vectorial, $S_1 \subseteq S_2 \subset V$

1. Si S_1 es linealmente dependiente., entonces S_2 también lo es.
2. Si S_2 es linealmente intependiente., entonces S_1 también lo es.

DEMOSTRACION

1 $S_1 = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$

$S_2 = \{s_1, s_2, \ldots, s_r\}$

Si S_1 es linealmente dependiente, $\exists \sim_1 \neq 0$, tales que:

$\sim_1 s_1 + \sim_2 s_2 + \ldots + \sim_n s_n = 0_v$

Se puede escribir que:

$\sim_1 s_1 + \sim_2 s_2 + \ldots + \sim_n s_n + 0.s_n + \ldots + 0.s_r = 0_v$,

donde no todos los coeficientes son cero.

$\therefore$ S_2 es linealmente dependiente

2. Por contradicción:

Se supone que S_1 es linealmente dependiente

S_1 es linealmente dependiente $\rightarrow$ $S_1 \subset S_2$

S_2 es linealmente dependiente

Lo que contradice la suposición.

$\therefore$ S_1 es linealmente independiente.

TEOREMA 5

Sean $(V, K, +, \bullet)$ un espacio vectorial, $S \subseteq V$.

S es linealmente dependiente si y sólo si $\exists s_i \in S$, tal que,

s_i es combinación lineal de los restantes vectores.

DEMOSTRACION

1. "$\rightarrow$"

Si S es linealmente dependiente, entonces $\exists \sim_i \neq 0$, tales que:

$\sim_1 s_1 + \sim_2 s_2 + \ldots + \sim_i s_i + \ldots + \sim_n s_n = 0_V$, es decir,

$\sim_i s_i = -\sim_1 s_1 - \sim_2 s_2 - \ldots - \sim_n s_n$

$\sim_1 \neq 0$, (en caso contrario se elige otro vector)

Despejando s_i

$s_i = {}_1 s_1 + {}_2 s_2 + \ldots + {}_n s_n$

Por lo tanto:

s_i es combinación lineal de los restantes vectores.

2. "$\leftarrow$"

Sea $s_i \in S$, tal que, es combinación lineal de los restantes vectores de S,

$$s_i = \sim_1 s_1 + \sim_2 s_2 + \ldots + \sim_{i-1} s_{i-1} + \sim_{i+1} s_{i+1} + \ldots + \sim_n s_n \qquad (1)$$

$$-s_i = -s_i \qquad (2)$$

Sumando (1) y (2) y reordenando

$$\sim_1 s_1 + \sim_2 s_2 + \ldots + \sim_{i-1} s_{i-1} + \sim_i s_i + \sim_{i+1} s_{i+1} + \ldots + \sim_n s_n = 0_V$$

$\therefore$ S es linealmente dependiente.

TEOREMA 6 EL WRONSKIANO

$\forall x \in D_f$, $S = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ es linealmente independiente si y sólo si $\exists x \in D_f$, tal que:

$$W(f_1, f_2, \cdots, f_n) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & & & \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0$$

DEMOSTRACION

a) "$\rightarrow$"

Por contradicción

Se supone que $W = 0$, entonces

Una fila o columna de W es combinación lineal de las restantes, por ejemplo:

$f_1 = \sim_2 f_2 + \ldots + \sim_n f_n$, es decir, S es linealmente dependiente.

Lo que contradice la suposición.

$\therefore$ $W \neq 0$

b) "$\leftarrow$"

Por contradicción:

Se supone que S es linealmente dependiente, entonces

Una fila o columna de W es combinación lineal de las restantes, es decir,

$W = 0$, lo que contradice la suposición

Por lo tanto S es linealmente independiente.

BASE

DEFINICION

Sean $(V, K, +, \bullet)$ un espacio vectorial y $S \subseteq V$,

S es una ***base*** de V , si y sólo si:

1. S genera a V , y
2. S es linealmente independiente.

TEOREMA 7

Sean $(V, K, +, \bullet)$ un espacio vectorial y $S \subseteq V$,

Si $S = \{s_1, s_2, \dots s_n\}$ es una base del espacio vectorial V , entonces todo vector de S se puede expresar de una y solo una manera como combinación lineal de los vectores de S. La combinación lineal es única.

DEMOSTRACION

Sea $u \in V$

Se supone que la combinación lineal no es única, es decir,

$u = \sim_1 s_1 + \sim_2 s_2 + \dots + \sim_n s_n$ (1)

$u = \ {}_1 s_1 + \ {}_2 s_2 + \dots + \ {}_n s_n$ (2)

$\sim_i \neq \ {}_i$

Restando (1) y (2)

$u + (-u) = (\sim_1 - \ {}_1)s_1 + (\sim_2 - \ {}_2)s_2 + \dots + (\sim_n - \ {}_n)s_n$

$0_V = (\sim_1 - \ {}_1)s_1 + (\sim_2 - \ {}_2)s_2 + \dots + (\sim_n - \ {}_n)s_n$

Si S es base de V , entonces S es linealmente independiente,

$\sim_i - \ {}_i = 0$,

$\sim_i = \ {}_i$

Lo que contradice la suposición.

Por lo tanto: la combinación lineal es única.

TEOREMA 8

Sean $(V, K, +, \bullet)$ un espacio vectorial y $S \subseteq V$,

Si S es un conjunto finito de vectores no nulos que genera a V entonces, S contiene a una base T de V.

DEMOSTRACION

a) Si S es linealmente independiente, entonces es base de V. //

b) Si S es linealmente dependiente, existe un vector que es combinación lineal de los restantes vectores (Teorema 6).

Si se considera el conjunto $S_1 = S - \{s_1\}$

s_1 es combinación lineal de S_1

$$s_i = \sim_1 s_1 + \sim_2 s_2 + \ldots + \sim_{i-1} s_{i-1} + \sim_{i+1} s_{i+1} + \ldots + \sim_n s_n \qquad (1)$$

S_1 genera a V?

Sea $u \in V$

u es combinación lineal de S

$$u = \sim_1 s_1 + \sim_2 s_2 + \ldots + \sim_{i-1} s_{i-1} + \sim_i s_i + \sim_{i+1} s_{i+1} + \ldots + \sim_n s_n \qquad (2)$$

Se sustituye (1) en (2)

$u = \text{¥}_1 s_1 + \text{¥}_2 s_2 + \ldots + \text{¥}_{i-1} s_{i-1} + \text{¥}_{i+1} s_{i+1} + \ldots + \text{¥}_n s_n$, es decir,

S_1 es generador de V.

Si S_1 es linealmente independiente, entonces es base. //

c) Si S_1 es linealmente dependiente, se elimina un vector, que es combinación lineal de los restantes, es decir,

$S_2 = S_1 - \{s_{i+1}\}$, que es generador de V.

Al continuar con el proceso se encuentra un subconjunto T de S que es linealmente independiente y que genera a V. //

TEOREMA 9

Sean $(V, K, +, \bullet)$ un espacio vectorial y $S, T \subseteq V$,

$S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$, es una base de V, y

$T = \{t_1, t_2, \ldots, t_r\}$ es un conjunto linealmente independiente de V, entonces $n \geq r$. Esto es, todo conjunto linealmente independiente no tiene más que n vectores.

DEMOSTRACION

Se supone que:

$n > r$

Si S genera a V

t_i es combinación lineal de S

$t_i = \sim_1 s_1 + \sim_2 s_2 + \ldots + \sim_n s_n$

Se despeja $s_n \neq 0_V$

(En caso contrario, si se despeja otro)

$t_i \neq 0_V \wedge a_n \neq 0$

$$s_n = \left(\frac{1}{a_n}\right)t_1 - \left(\frac{1}{a_n}\right)(\sim_1 s_1 + \sim_2 s_2 + \ldots + \sim_{n-1} s_{n-1})$$

$S_1 = \{s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}, t_1\}$ genera a V

t_2 es combinación lineal de S_1

$t_2 = {}_1 s_1 + {}_2 s_2 + \ldots + {}_{n-1} s_{n-1} + ¥\, t_1$

$t_2 = 0_V$

si ${}_1 = \ldots = {}_{n-1} = 0$

$t_2 = ¥\, t_1$, entonces

T es linealmente independiente

Lo que contradice la suposición.

Por lo tanto debe(n) existir algún(nos) ${}_i \neq 0$

${}_{n-1} \neq 0$

En caso contrario se elige otro

$$s_{n-1} = \left(\frac{1}{\ \ _{n-1}} \right) t_2 - \left(\frac{1}{\ \ _{n-1}} \right) (\ \ _1 s_1 + \ \ _2 s_2 + \ldots + \ \ _{n-2} s_{n-2})$$

de donde,

$S_2 = \{ s_1, s_2, \ldots, s_{n-2}, t_1, t_2 \}$ genera a V

Repitiendo el proceso n veces, se encuentra el conjunto

$S_n = \{ t_1, t_2, \ldots, t_n \}$ que es base de V, pues genera y es linealmente independiente (Teorema 4).

Si $r > n$

$t_{n+1} = \text{¢}_1 t_1 + \text{¢}_2 t_2 + \ldots + \text{¢}_n t_n$, entonces

T es linealmente dependiente

Lo que contradice la suposición.

Por lo tanto:

$n \geq r$.

TEOREMA 10

Sean $(V, K, +, \bullet)$ un espacio vectorial, $S, T \subseteq V$,

$S = \{ s_1, s_2, \ldots, s_n \}$, es una base de V, y

$T = \{ t_1, t_2, \ldots, t_r \}$ es otra base de V, entonces

$$n = r$$

DEMOSTRACION

Si S es base de V y T es linealmente independiente, $n \geq r$ (Teorema 9)

Si T es base de V y S es linealmente independiente, $n \leq r$ (Teorema 9)

Se concluye que $n = r$.

Es decir, las diferentes bases de un mismo espacio vectorial tienen igual número de vectores.

Corolario

Si S es base de V y tiene n vectores, un conjunto con $n+1$ vectores es linealmente dependiente.

DEFINICIÓN

Las coordenadas de un vector $u \in V$, respecto a una base dada S, son los escalares que sirven para expresar u como combinación lineal de S, así:

$$u = \sim_1 s_1 + \sim_2 s_2 + \ldots + \sim_n s_n$$

$[u]_S = \begin{pmatrix} \sim_1 \\ \sim_2 \\ \vdots \\ \sim_n \end{pmatrix}$, es el ***vector coordenadas*** de u respecto a S.

DIMENSIÓN

Sean $(V, K, +, \bullet)$ un espacio vectorial, $S \subseteq V$, $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$, es una base de V, entonces la dimensión de V es igual a n, y se nota por $\dim V = n$. La dimensión de espacio vectorial trivial se considera cero, esto es, $\dim\{0_V\} = 0$.

DIMENSIÓN FINITA

Un espacio vectorial V es de dimensión finita si y sólo si la base de V tiene un finito número de vectores.

Ejemplos: R^n, C^n, P_n, M_{mn}.

DIMENSIÓN INFINITA

Un espacio vectorial V es de dimensión infinita si y sólo si la base de V tiene un infinito número de vectores.

Ejemplo: P el espacio vectorial de todos los polinomios.

TEOREMA 11

Sean $(V, K, +, \bullet)$ un espacio vectorial, $\dim V = n$, $S \subseteq V$,

$S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$, entonces

Si S es linealmente independiente, S es una base de V.

DEMOSTRACION

Por contradicción

Se supone que S no es base de V ,

Si S no es base, entonces S no genera a V

$\exists u \in V$ tal que no es combinación lineal de S ,

$S \;=\{s_1, s_2, \ldots, s_n, u\}$ es linealmente independiente

Lo que contradice la suposición.

Por lo tanto S es base de V .

TEOREMA 12

Sean $(V, K, +, \bullet)$ un espacio vectorial, $\dim V = n$, $S \subseteq V$,

$$S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$$

Si S es generador de V , entonces S es una base de V .

DEMOSTRACION

Por contradicción

Se supone que S no es base de V ,

Si S no es base, entonces S es linealmente independiente (Teorema 9)

$\exists s_i \in S$, que es combinación lineal de los restantes,

$S_1 = S - \{s_i\}$

$s_i = \sim_1 s_1 + \sim_2 s_2 + \ldots + \sim_{i-1} s_{i-1} + \sim_{i+1} s_{i+1} + \ldots + \sim_n s_n$

1. Si S_1 es linealmente independiente, es base

   $\dim V = n - 1$

   Lo que contradice la suposición.

2. Si S_1 es linealmente dependiente,

   $\exists s_{i+1}$ que es combinación lineal de los restantes vectores,

   $S_2 = S_1 - \{S_{i+1}\}$

Si S_2 es linealmente independiente, es base y $\dim V = n-2$

Lo que contradice la suposición.

Por lo tanto S es base de V .

TEOREMA 13

Sean $(V, K, +, \bullet)$ un espacio vectorial, $\dim V = n$, S es un conjunto de vectores linealmente independientes, entonces existe una base T de V que contiene a S .

DEMOSTRACION

$S = \{s_1, s_2, \ldots, s_j\}$

Si S no es base, $\exists u \in V$ que es combinación lineal de S ,

$S_1 = \{s_1, s_2, \ldots, s_j, u\}$ es linealmente independiente

1. Si S es linealmente independiente y es generador, entonces es base $(S_1 = T), S \in T$.
2. Si S_1 no es generador, no es base

   $\exists v \in V$ que es combinación lineal de S_2 ,

   $S_2 = \{s_1, s_2, \ldots, s_j, u, v\}$ es linealmente independiente

   Si S_2 es linealmente independiente y es generador, entonces es base $(S_2 = T), S \in T$.

   Si S_2 es linealmente independiente, pero no es generador, se repite el proceso hasta encontrar un conjunto T generador de V .

TEOREMA 14

Sean $(V, K, +, \bullet)$ y $(W, K, +, \bullet)$ espacios vectoriales de dimensión finita, si W es subespacio vectorial de V , entonces se cumple que

$$\dim W \leq \dim V$$

DEMOSTRACION

Si W es subespacio vectorial de V,

$W \subseteq V$, es decir,

$W = V \vee W \subset V$

1. Si $W = V, \dim W = \dim V$
2. Si $W \subset V, \exists u \in V\ t.q.\ u \notin W$,

   Una base de W tiene menor número de vectores que una base de V,

   $\dim W < \dim V$

Por lo tanto $\dim W \leq \dim V$.

TEOREMA 15

Sea $(V, K, +, \bullet)$ un espacio vectorial. La intersección de cualquier colección de subespacios vectoriales de V, es un subespacio vectorial de V, es decir, si $V_1, V_2, \ldots, V_n$, son subespacios vectoriales de V, entonces

$$W = \bigcap_{i=1}^{n} V_i \text{, es subespacio vectorial de } V.$$

DEMOSTRACION

1. $0_v \in W$

   $0_v \in V_i$, $\forall i = 1,2,\ldots,n$, pues V_i es subespacio vectorial

   $0_v \in W$

2. $\forall u, v \in W \mid u + v \in W$

   $u \in \bigcap_{i=1}^{n} V_i$, $u \in V_i$, $\forall i = 1,2,\ldots,n$

   $v \in \bigcap_{i=1}^{n} V_i$, $v \in V_i$, $\forall i = 1,2,...,n$

   $u + v \in \bigcap_{i=1}^{n} V_i$

   $u + v \in W$

3. $\forall \sim \in K,\ \forall u \in W \ |\ \sim .u \in W$

$u \in W$, entonces $u \in \bigcap_{i=1}^{n} V_i$

$u \in V_i$, entonces $\sim u \in \bigcap_{i=1}^{n} V_i$

$\sim u \in \bigcap_{i=1}^{n} V$, entonces $\alpha u \in W$.

DEFINICIÓN

Sean $V_1, V_2, \ldots, V_n$ subespacios vectoriales del espacio vectorial $(V, K, +, \bullet)$, $S = \{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$, y los vectores $v_i \in V_i$ donde $i = 1, 2, \ldots, n$, la ***suma*** de los subespacios de S se define por

$$V_1 + V_2 + \ldots V_n = \left\{ v = v_1 + v_2 + \ldots v_n \,\middle|\, v_1 \in V_1, v_2 \in V_2, \ldots, v_n \in V_n \right\}$$

TEOREMA 16

Sean $(V, K, +, \bullet)$ un espacio vectorial, y W_1 y W_2 subespacios vectoriales de V , entonces $W_1 + W_2$ es un subespacio vectorial de V

TEOREMA 17

Sean $(V, K, +, \bullet)$ un espacio vectorial, y W_1 y W_2 subespacios vectoriales de V . Si B_1 y B_2 son bases de y W_1 y W_2, entonces

$$W_1 + W_2 = \langle B_1 \cup B_2 \rangle$$

DEFINICIÓN

Sean $(V, K, +, \bullet)$ un espacio vectorial y U, W_1 y W_2, subespacios vectoriales de V , $U = W_1 \oplus W_2$ define la ***suma directa*** de W_1 y W_2 si

$$W_1 \oplus W_2 = \left\{ v \in V \,\middle|\, \exists! v_1 \in W_1 \wedge \exists! v_2 \in W_2, v = v_1 + v_2 \right\}$$

TEOREMA 18

Sean $(V, K, +, \bullet)$ un espacio vectorial y U, W_1 y W_2, subespacios vectoriales de dimensión finita de V.

$U = W_1 \oplus W_2$, si y sólo si $U = W_1 + W_2$ y $W_1 \cap W_2 = \{0_V\}$.

DEMOSTRACION

$\exists u_1 \in W_2, \exists v_2 \in W_2 \mid \; v = u_2 + v_2$

$u_1 + v_1 = u_2 + v_2$

$u_1 - u_2 = v_2 - v_1$

$u_1 - u_2 \in W_1 \cap W_2 = \{0_V\}$

$v_1 - v_2 \in W_1 \cap W_2 = \{0_V\}$

$u_1 - u_2 = \{0_V\}$

$u_1 = u_2$

$v_1 - v_2 = \{0_V\}$

$v_1 = v_2$

$\rightarrow \leftarrow$

Por lo tanto $u_1 \wedge v_1$ son únicos.

Corolario

Sean $(V, K, +, \bullet)$ un espacio vectorial y U, W_1 y W_2, subespacios vectoriales de dimensión finita de V, entonces

$$\dim(W_1 \oplus W_2) = \dim W_1 + \dim W_2$$

TEOREMA 19

Sean $(V, K, +, \bullet)$ un espacio vectorial, y W_1 un subespacio vectorial de V. entonces existe un subespacio (complemento) W_2 del espacio vectorial de V tal qué $V = W_1 \oplus W_2$.

DEMOSTRACION

1. $W_1 = V$

$W_2 = \{0_V\}$

$W_1 \cap W_2 = \{0_V\} \rightarrow V = W_1 \oplus W_2$.

2. $W_1 \neq V$

W_1 es subespacio vectorial propio de V, $\dim V = n$

$S_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$, base de W_1, $r \leq n$,

$\langle S_1 \rangle = W_1$

$S_2 = \{v_{r+1}, \ldots, v_r\}$, donde $v_j \in \langle S_1 \rangle$, $j = r+1,\ldots, n$

$\langle S_2 \rangle = W_2$

$W_1 \cap W_2 = \{0_V\}$

$W_1 + W_2 = \langle v_1, v_2, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n \rangle$

$S_1 \cup S_2 = \{v_1, v_2, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n\}$

$S_1 \cup S_2$ es linealmente independiente y es base de V

$W_1 + W_2 = V \rightarrow \langle S_1 \cup S_2 \rangle = V$, entonces

$V = W_1 \oplus W_2$.

Ejercicio

Sea $W_1 = \{ax^3 + bx^2 + cx + d \in P_3[x] \mid a = 2b + c \wedge d = b - c\}$ subespacio vectorial de $P_3[x]$. Hallar un subespacio vectorial W_2 tal que $P_3[x] = W_1 \oplus W_2$.

TEOREMA 20

Sean W_1 y W_2 subespacios vectoriales de dimensión finita de un espacio vectorial $(V, K, +, \bullet)$, entonces

$W_1 + W_2$ es un espacio vectorial de dimensión finita y además:

$\dim W_1 + \dim W_2 = \dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2)$.

DEMOSTRACION

$W_1 \cap W_2 \neq \varnothing$

Sea $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ base de $W_1 \cap W_2$

S tiene k vectores y es parte de una base de W_1 y W_2

$S_1 = \{u_1, u_2, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_n\}$ es base de W_1

$S_2 = \{u_1, u_2, \ldots, u_k, w_1, \ldots, w_m\}$ es base de W_2

$S_1 \cup S_2 = \{u_1, u_2, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_m\}$

$S_1 \cup S_2$ tiene $k + m + n$ vectores

$S_1 \cup S_2$ genera a $W_1 + W_2$ (Definición)

P.D. $S_1 \cup S_2$ es linealmente independiente

$$\sum_{i=1}^{k} \sim_i u_i + \sum_{i=1}^{n} \ {}_i v_i + \sum_{i=1}^{m} ¥_i w_i = 0_V \qquad (1)$$

Reordenando

$$\sum_{i=1}^{m} (-¥_i w_i) = \sum_{i=1}^{k} \sim_i u_i + \sum_{i=1}^{n} \ {}_i v_i \in W_1$$

$$\sum_{i=1}^{m} (-¥_i w_i) \in W_2$$

$$\sum_{i=1}^{m} (-¥_i w_i) \in W_1 \cap W_2$$

$$\sum_{i=1}^{m} (-¥_i w_i) = \sum_{i=1}^{k} ¢_i u_i$$

Reordenando

$$\sum_{i=1}^{k} ¢_i u_1 + + \sum_{i=1}^{m} ¥_i w_1 = 0_V$$

Se obtiene una combinación lineal de S_2, base de W_2 que tiene $k + m$ vectores

$¢_i = 0, \forall i = 1,2,\ldots,k$

$¥_i = 0, \forall i = 1,2,\ldots,m$

Se obtiene una combinación lineal de S_1, base de W_1 que tiene $k + n$ vectores

$$\sum_{i=1}^{k} \sim_i u_1 + \sum_{i=1}^{n} \ {}_i v_i = 0_V$$

$\sim_i = 0, \forall i = 1,2,\ldots,k$

$_{i} = 0, \forall i = 1,2,\ldots,n$

$S_1 \cup S_2$ es linealmente independiente y genera a $W_1 + W_2$

$\dim W_1 + \dim W_2 = (k+n) + (k+m)$

$\dim W_1 + \dim W_2 = (k+n+m) + k$

$\dim W_1 + \dim W_2 = \dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2)$.

TEOREMA 21

Sean W_1 y W_2 subespacios vectoriales de dimensión finita de un espacio vectorial $(V, K, +, \bullet)$.

$W_1 \cup W_2$ es subespacio vectorial de V si y sólo si $W_1 \subseteq W_2$ o $W_2 \subseteq W_1$.

DEMOSTRACION

a) "$\rightarrow$"

Por contradicción

Se supone que:

$W_1 \not\subset W_2 \wedge W_2 \not\subset W_1$

$\exists u_1 \mid u_1 \in W_1 \wedge u_1 \in W_2$

$\exists u_2 \mid u_2 \in W_2 \wedge u_2 \in W_1$

$u_1 \in W_1 \subseteq W_1 \cup W_2$

$u_2 \in W_2 \subseteq W_1 \cup W_2$

$u_1, u_2 \in W_1 \cup W_2$ que es subespacio vectorial

$u_1 + u_2 \in W_1 \cup W_2$, entonces

$u_1 + u_2 \in W_1 \vee u_1 + u_2 \in W_2$

1. Si $u_1 + u_2 \in W_1$

$u_1 \in W_1 \rightarrow -u_1 \in W_1$

$-u_1 + u_1 + u_2 \in W_1$

$u_2 \in W_1$

Lo que contradice la suposición.

2. Si $u_1 + u_2 \in W_2$

$u_2 \in W_2 \rightarrow -u_2 \in W_2$

$-u_2 + u_1 + u_2 \in W_2$

$u_1 \in W_2$

Lo que contradice la suposición.

b) "$\leftarrow$"

$W_1 \subseteq W_2$

$W_1 \cup W_2$ que es subespacio vectorial

Por lo tanto

$W_1 \cup W_2$ es subespacio vectorial de V si y sólo si $W_1 \subset W_2 \vee W_2 \subset W_1$

CAMBIO DE BASE

En este apartado se estudia la relación entre dos vectores coordenadas para el mismo vector, respecto a bases diferentes.

Sean el espacio vectorial $(V, K, +, \bullet)$ y, S y T bases ordenadas de V

$S = \{s_{1,} s_2, \cdots, s_n\}$

$T = \{t_1, t_2, \cdots, t_n\}$

$\forall v \in V$

$v = \sim_1 s_1 + \sim_2 s_2 + \ldots + \sim_n s_n$ (I)

$v = \quad _1 t_1 + \quad _2 t_2 + \ldots + \quad _n t_n$ (II)

Considerando los vectores de S como combinación lineal de T

$$s_1 = a_{11}t_1 + a_{12}t_2 + \cdots + a_{1n}t_n \qquad (1)$$

$$s_2 = a_{21}t_1 + a_{22}t_2 + \cdots + a_{2n}t_n \qquad (2)$$

$$\vdots$$

$$s_n = a_{n1}t_1 + a_{n2}t_2 + \cdots + a_{nn}t_n \qquad (n)$$

Los vectores coordenadas de S respecto a la base T son:

$$[s_1]_T = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$$

$$[s_2]_T = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$[s_n]_T = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$$

Entonces se construye la matriz

$$P_{S\to T} = \left([S_1]_T \quad [S_2]_T \quad \cdots \quad [S_n]_T \right)$$

En forma desarrollada

$$P_{S\to T} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$P_{S\to T}$ es la matriz de cambio de base de S a T.

Sustituyendo (1),(2),…,(n) en (I) e igualando a (II)

$$ {}_1t_1 + \ {}_2t_2 + \ldots + \ {}_nt_n = \sim_1 (a_{11}t_1 + a_{12}t_2 + \cdots + a_{1n}t_n) + \sim_2 (a_{21}t_1 + a_{22}t_2 + \cdots + a_{2n}t_n $$
$$ + \cdots + \sim_n (a_{n1}t_1 + a_{n2}t_2 + \cdots + a_{nn}t_n) $$

Reordenando

$$ {}_1t_1 + \ {}_2t_2 + \ldots + \ {}_nt_n = (a_{11}\sim_1 + a_{12}\sim_2 + \cdots + a_{1n}\sim_n)t_1 + (a_{21}\sim_1 + a_{22}\sim_2 + \cdots + a_{2n}\sim_n)t_2 $$
$$ + \cdots + \left(a_{n1}\sim_1 + a_{n2}\sim_2 + \cdots + a_{nn}\sim_n\right)t_n $$

Escribiendo matricialmente

$$ \begin{pmatrix} {}_1 \\ {}_2 \\ \vdots \\ {}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sim_1 \\ \sim_2 \\ \vdots \\ \sim_n \end{pmatrix} $$

O también

$[v]_T = P_{S \to T} [v]_S$

Similarmente

$[v]_S = Q_{T \to S} [v]_T$

$Q_{T \to S}$ es la matriz de cambio de base de T a S, además $Q_{T \to S} = P^{-1}_{S \to T}$.

Ejemplo

Sean los conjuntos S y T bases ordenadas del espacio vectorial R^3, tales que

$S = \{(6,3,3), (4,-3,1), (5,5,2)\}$, y

$T = \{(2,01), (1,2,0), (1,1,1)\}$

Hallar la matriz de cambio de base P de S a T.

Solución:

$u = (6,,3,3) = 2(2,0,1) + 1(1,2,0) + 1(1,1,1)$

$$[u]_T = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$v = (4,,-3,1) = 2(2,0,1) - 1(1,2,0) + 1(1,1,1)$

$$[v]_T = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$w = (5,2,2) = 1(2,0,1) + 2(1,2,0) + 1(1,1,1)$

$$[w]_T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La matriz requerida es

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Resumen

En este capítulo se revela y se enseña una parte importante del Álgebra Lineal, ya que se analiza la estructura de espacio vectorial, que es el ambiente de trabajo del que se parte para la obtención de los resultados y desarrollos que se verán a continuación en los siguientes temas.

Se comenzó reflexionando con vectores en el plano y en el espacio considerándolos como segmentos de rectas orientados, junto con las posibles operaciones que pueden realizarse entre ellos y sus propiedades. Una vez conocidos los espacios R^2 y R^3 como conjuntos de vectores, se procedió a generalizar, en un proceso de abstracción, los aspectos que los caracterizan, obteniéndose así la estructura de un espacio vectorial.

De la definición de subespacio vectorial W surge de manera inmediata el concepto de conjunto generador, que permite definir, a partir de un número finito de vectores, todos los elementos de W. Dentro de los conjuntos generadores interesan aquellos que contienen el menor número de elementos y estos pueden encontrarse con ayuda de los conceptos de dependencia e independencia lineales. Estos conjuntos generadores “mínimos” se conocen como las bases de los espacios vectoriales y, el número de elementos que las componen, la dimensión de los mismos.

PROBLEMAS PROPUESTOS

ESPACIOS VECTORIALES Y SUBESPACIOS

1. Sea R^n el conjunto de n-uplas ordenadas $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ en el campo R, con la adición en R^n y la multiplicación por un escalar, definidas por:

   $(a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$

   $k(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (ka_1, ka_2, \ldots, ka_n)$

   Donde $a, b, k \in R$. Demostrar que R^n es un espacio vectorial sobre R.

2. Sea R^2 el conjunto de parejas ordenadas (a,b) de números reales. Demostrar que R^2 no es espacio vectorial sobre R con la adición en R^2 y la multiplicación por un escalar sobre R definidas por:

a) $(a,b)+(c,d)=(a+d,b+c)$ y $k(a,b)=(ka,kb)$

b) $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$ y $k(a,b)=(a,b)$

c) $(a,b)+(c,d)=(0,0)$ y $k(a,b)=(ka,kb)$

d) $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$ y $k(a,b)=(0,0)$

3. El conjunto dado con las operaciones dadas no es un espacio vectorial. ¿Qué propiedades de la definición no se satisfacen?

   a) Los reales positivos sobre los reales con las operaciones + y .

   b) El conjunto de las ternas ordenadas de números reales con las operaciones:

   $(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$, y

   $r(x, y, z) = (x, 1, z)$

   c) El conjunto de las matrices M_{2x1} tal que $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, donde $x \leq 0$,

   con las operaciones usuales en R^3 .

4. Sea el espacio vectorial de M_{3x1}.

a) $$W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \middle| \; a^2 + b^2 + c^2 \le 1 \right\}$$

b) $$W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \middle| \; a + b = 1 \right\}$$

c) $$W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \middle| \; b = a - 2c \right\}$$

Determinar si W es subespacio vectorial de M_{3x1}.

5. Determinar si el conjunto W es subespacio vectorial de R^3.

a) $W = \{(x, y, z) \mid e^x + y = 0\}$

b) $W = \{(x, y, z) \mid y = x + z\}$

c) $W = \{(x, y, z) \mid x = z^2\}$

d) $W = \{(x, y, z) \mid x - y = 0 \wedge 2x + z = 0\}$

e) $W = \{(x, y, z) \mid x - 2y + z < 0\}$

6. Determinar si el conjunto W es subespacio vectorial de $P_2[x]$

a) $W = \{p(x) = ax^2 + bx + c \mid p(0) + p(1) = 1\}$

b) $W = \{p(x) = ax^2 + bx + c \mid p'(0) + p''(0) = 0\}$

b) $W = \{p(x) = ax^2 + bx + c \mid |b| = c\}$

c) $W = \{p(x) = ax^2 + bx + c \mid p(0) = p'(1)\}$

7. Sea el espacio vectorial $V = \{ f : [-1,1] \to R \}$, $W \subseteq V$.

Determinar cuáles de los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales de V.

a) $W = \{ f : [-1,1] \to R \mid f \text{ es contínua} \}$

b) $W = \{ f : [-1,1] \to R \mid f \text{ es derivable} \}$

c) $W = \left\{ f : [-1,1] \to R \;\middle|\; \int_{-1}^{1} f(x)dx = 0 \right\}$

d) $W = \{ f : [-1,1] \to R \mid f(-x) = f(x) \}$

e) $W = \{ f : [-1,1] \to R \mid f(0) = \frac{1}{2} \}$

f) $W = \{ f : [-1,1] \to R \mid f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \}$

COMBINACIONES LINEALES Y CONJUNTOS GENERADORES

1. Dado el espacio vectorial R^2. Expresar vector $u = (1 - 2)$ como combinación lineal de T cuando es posible.

    a) $T = \{(2,-1)\}$

    b) $T = \{(2,-1),(1,-2)\}$

    c) $T = \{(3,-1),(-1,-\frac{1}{3})\}$

    d) $T = \{(1,1),(2,-5),(3,0)\}$

2. Escribir si es posible el vector $u=(1,-1,4)\in R^{3}$ como combinación lineal los vectores de R^{3}

   a) (1,1,2),((0,0,1)

   b) (2,-2,0),(-1,1,2)

   c) (3,0,-2),(2,-1,1)

   d) (1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)

3. Determinar si el conjunto de vectores dado genera al espacio vectorial indicado.

a) $S = \{(1,1),(2,-3)\}$. En R^2.

b) $S = \{(1,1,),(2,1),(-1,0)\}$. En R^2

c) $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$. En M_{3x1}.

d) $S = \{1-x, 3-x^2, x^2+x+1\}$. En $P_2[x]$.

e) $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \right\}$. En M_{2x2}.

4. Hallar la cápsula de S en el espacio vectorial dado.

a) $S = \{(1,2,-1,2), (0,1,2,3)\}$. En R^4.

b) $S = \{(1-t)^2, (1-t)\}$. En $P_2[t]$.

c) $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$. En $M_{3\times 1}$.

5. ¿Para qué valor de ª el vector (2,2,0) pertenece a la cápsula formada por el conjunto de vectores $B = \{(1,1,1), (3, ª, 0)\}$?

6. Dado el conjunto de matrices $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

   a) Calcular $\langle S \rangle$.
   b) Encontrar una base para $\langle S \rangle$.

7. Sea el conjunto $S=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ del espacio vectorial M_{3x1}.

a) Hallar $\langle S\rangle$.

b) Probar que la matriz $F=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ pertenece a $\langle S\rangle$.

c) Demostrar que $\langle S\rangle$ es subespacio vectorial de M_{3x1}.

8. En el espacio vectorial indicado determinar el valor de ª para que el conjunto de vectores dado sea linealmente independiente y linealmente dependiente.

a) $T = \{(1,1,1), (1, ª + 2,0), (4,3 - ª ,4)\}$. En R^3.

b) $T = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ ª \end{pmatrix} \right\}$. En M_{3x1}.

c) $S = \{1 - x + ªx^2, 1 - ªx + x^2, ª + x + x^2\}$. En $P_2[x]$.

9. Hallar un conjunto linealmente independiente en $P_2[x]$ que contenga a los polinomios x^2+1 y x^2-1. Sugerencia : Obtener un $p(x) \notin \langle x^2+1, x^2-1 \rangle$.

10. Hallar un conjunto linealmente independiente en R^3 que contenga a los vectores (2,1,2) y (-1,3,4). Considerar la sugerencia del ejercicio anterior.

11. En el espacio vectorial R^3 demostrar que los vectores $(1, a, a^2), (1, b, b^2), (1, c, c^2)$ son linealmente independientes si $a \neq b, a \neq c$ y b $\neq$ c .

12. Cuáles de los siguientes conjuntos de R^3 son linealmente dependientes? Para los que lo sean expresar uno de los vectores como combinación lineal de los restantes (relación de dependencia).

a) $\{(1,1,0),(3,4,2\}$

b) $\{(1,10),(0,1,1),(1,0,1),(1,2,2)\}$

c) $\{(1,1,0),(0,2,3),(1,2,3),(0,0,0)\}$

13. Considerar el espacio vectorial $P_2[t]$. Hacer lo mismo que en ejercicio 12.

a) $\{t^2+1, t-2, t+3\}$

b) $\{2t^2+t, t^2+3, t\}$

c) $\{2t^2+t+1, 3t^2+t-5, t+13\}$

14. Sea el espacio vectorial de las funciones continuas de valor real. Hacer lo mismo que en el ejercicio 12.

a) $\{\cos t, sent, e^t\}$

b) $\{t, e^t, sent\}$

c) $\{\cos^2 t, sen^2 t, \cos 2t\}$

BASES Y DIMENSION

1. Cuáles de los siguientes conjuntos forman una base en R^3? Expresar el vector $u = (2,-1,1)$ como una combinación lineal de los vectores del conjunto que sea base.

   a) $\{(1,1,1),(1,2,3),(0,1,0)\}$

   b) $\{(1,0,2),(2,1,3),(-2,0,-4)\}$

   c) $\{(1,1,3),(1,0,1),(1,1,0),(1-1,1)\}$

2. Hallar una base de R^3 que incluya a:

   a) El vector $(1,0,2)$

   b) Los vectores $(1,0,2)$, $(0,1,3)$.

3. Hallar una base de $P_3[x]$ que incluya a los vectores $x^3 + x,\ x^2 - 1$.

4. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Determinar las matrices $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, tales que $AM = MB$

b) Demostrar que las matrices M forman un subespacio vectorial de $M_{2\text{x}2}$

c) Escribir una base de este subespacio vectorial.

d) Determinar la dimensión de este subespacio vectorial.

5. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Determinar las matrices $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tales que $AM = O$.

b) Demostrar que las matrices M forman un subespacio vectorial de M_{2x2}

c) Escribir una base de este subespacio vectorial.

d) Determinar la dimensión de este subespacio vectorial.

6. Sea W el conjunto de las matrices simétricas de orden 2.

   a) Demostrar que W es subespacio vectorial de $M_{2\text{x}2}$.

   b) Hallar una base y determinar la dimensión de W.

7. Sea el conjunto W del espacio vectorial $P_2[t]$

$$W = \{p(t) = at^2 + bt + c \mid p(t) = p(1-t)\}$$

a) Demostrar que W es subespacio vectorial de $P_2[t]$.

b) Encontrar una base y la dimensión de W .

8. Sea el conjunto W del espacio vectorial $P_2[x]$

$$W = \left\{ p(x) = ax^2 + bx + c \;\middle|\; \begin{aligned} a - b + c &= 0 \\ b - c &= 0 \\ 2a + b - c &= 0 \end{aligned} \right\}$$

a) Demostrar que W es subespacio vectorial de $P_2[x]$.

b) Encontrar una base y la dimensión de W .

9. Sea el conjunto W del espacio vectorial $M_{2\text{x}2}$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} a + b - c = 0 \\ a - c - d = 0 \end{array} \right\}$$

a) Demostrar que W es subespacio vectorial de $M_{2\text{x}2}$.

b) Hallar una base y determinar la dimensión de W.

10. Dado el subespacio vectorial de $P_3[x]$

$$W = \{p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \mid a = b + c\}$$

a) Determinar una base B_1 de W y su dimensión.

b) ¿El polinomio $p(x) = x + 1 \in W$?

c) A partir de B_1, completar una base B_2 para el espacio vectorial $P_3[x]$.

11. Sean bases ordenadas de $P_2[t]$

$$B=\{t^2-t+1, t+2, 1\},\ C=\{t^2, t, 1\}$$

a) Hallar $[p(t)]_B$ si $p(t)=t^2-2t-1$

b) Encontrar $[p(t)]_C$ si $[p(t)]_B=\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$

12. Dados W_1 y W_2 los subespacios vectoriales de R^4

$$W_1 = \left\{ (a,b,c,d) \left| \begin{array}{l} a-b-c \quad\;\; = 0 \\ a-b- \quad d = 0 \end{array} \right. \right\} \text{ y } W_2 = \left\{ (a,b,c,d) \left| \begin{array}{l} a-b+c-d = 0 \\ 2a- \quad c-d = 0 \end{array} \right. \right\}$$

a) Determinar $W_1 \cap W_2$.

b) Demostrar que $W_1 \cap W_2$ es subespacio vectorial de R^4.

c) Hallar una base para $W_1 \cap W_2$ y su dimensón.

13. Dado W_1 un subespacio vectorial de R^3.

$$W_1 = \left\langle \left\{ (1,2,-3), (01,1 \right\} \right\rangle$$

a) Hallar W_1 explícitamente.

b) Hallar un subespacio vectorial W_2 tal que $W_1 \oplus W_2 = R^3$.

14. Sean W_1 y W_2 subespacios vectoriales de R^2.

$$W_1 = \{(x, y) \mid 2x + 3y = 0\}$$
$$W_2 = \{(x, y) \mid 5x - 4y = 0\}$$

a) Hallar $W_1 \cup W_2$, $W_1 \cap W_2$ y $W_1 + W_2$.

b) Establecer si $W_1 \cup W_2$ es subespacio vectorial de R^2.

c) Determinar si $R^2 = W_1 \oplus W_2$.

15. Dados W_1, W_2 y W_3 subespacios vectoriales de R^3.

$$W_1 = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 0\}$$

$$W_2 = \{(x, y, z) \mid x = z\}$$

$$W_3 = \{(x, y, z) \mid x = 0 \wedge y = 0\}$$

Demostrar que $R^3 = W_1 + W_2$, $R^3 = W_1 + W_3$ y $R^3 = W_2 + W_3$ e indicar cuando la suma es directa.

16. Dados W_1 y W_2 subespacios vectoriales de R^3

$$W_1 = \{(x, y, z) \mid x + y = 0\}$$

$$W_2 = \{(x, y, z) \mid y - z = 0\}$$

a) Calcular $W_1 \cup W_2, W_1 \cap W_2$ y $W_1 + W_2$.

b) Determinar cuáles de los subconjuntos anteriores son subespacios vectoriales de R^3.

c) Comprobar si se verifica que $R^3 = W_1 \oplus W_2$.

17. Dados los sistemas de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x - y + z - w = 0 \\ 2z + y - 3z + w = 0 \\ x \quad\quad + 2z - 2w = 0 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} x + 2y - 4z + 2w = 0 \\ \quad\quad y \quad + z - w = 0 \end{cases}$$

a) Hallar los conjuntos solución W_1 y W_2 subespacios vectoriales de R^4.

b) Dar una base para W_1 y W_2 y sus dimensiones.

c) Demostrar que $W_1 \cup W_2$ es subespacio vectorial de R^4 dar una base y su dimensión.

d) Encontrar $W_1 \cap W_2$ y $W_1 + W_2$, una base para cada subespacio vectorial y su dimensión.

18. Dados los sistemas de ecuaciones lineales

$$a-b+c=0 \quad \begin{cases} x-y+z-w=0 \\ x \qquad +2z-w=0 \\ x+2y+4z-4w=0 \end{cases} \qquad \{x+y+3z-w=0$$

a) Hallar los conjuntos solución W_1 y W_2 subespacios vectoriales de R^4.

b) Dar una base para W_1 y W_2 y sus dimensiones.

c) Dar una base para $W_1 \cap W_2$ y determinar la dimensión de $W_1 + W_2$.

d) Demostrar que $W_1 \cup W_2$ es subespacio vectorial de R^4 dar una base y su dimensión y determinar si $W_1 \cup W_2 = W_1 + W_2$.

.

Capítulo 5

PRODUCTO INTERNO

DEFINICIÓN

Sean $(V, K, +, \bullet)$ un espacio vectorial, un ***producto interno*** sobre V, es una función que asigna a cada par de vectores $u, v \in V$, un escalar $(u,v) \in K$ y cumple que:

1. $\forall u, v \in V \mid (u,v) = (v,u)$
2. $\forall u \in V \mid (u,u) \geq 0 \leftrightarrow u \neq 0_V \vee u = 0_V$
3. $\forall \sim \in K, \forall u, v \in V \mid (\sim u, v) = (u, \sim v) = \sim (u,v)$
4. $\forall u, v, w \in V \mid (u+v, w) = (u,w) + (v,w)$

Los espacios vectoriales dotados de producto interno se denominan **espacios euclidianos** o **euclídeos.**

EJEMPLOS

1. Sea $(R^n, R, +, .) \wedge u, v \in R^n$

   $u = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$

   $v = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$

   $(u,v) = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = \sum_{i=1}^{n} a_ib_i$ **Producto interno usual en** R^n

2. Sea $(C^n, C, +, .) \wedge u, v \in C^n$

   $u = (z_1, z_2, \cdots, z_n)$

   $v = (w_1, w_2, \cdots, w_n)$

   $(u,v) = z_1 \overline{w_1} + z_2 \overline{w_2} + \cdots + z_n \overline{w_n} = \sum_{i=1}^{n} z_i \overline{w_i}$ **Producto interno usual en** C^n

3. Sea $(M_n, R, +, \bullet) \wedge A, B \in M_n$

$(A, B) = Tr(B^t A)$ **Producto interno usual en** M_n

4. Sea $(M_n, C, +, \bullet) \wedge A, B \in M_n$

$(A, B) = Tr(B * A)$ **Producto interno usual en** M_n

donde B^* es la conjugada de la matriz transpuesta de B.

5. Sea F el espacio vectorial de las funciones reales continuas $[a,b] \wedge f, g \in F$ en

$$(f, g) = \int_a^b f(t) g(t) dt$$

6. Sea F el espacio vectorial de las funciones complejas continuas en $[a,b] \wedge f, g \in F$

$$(f, g) = \int_a^b f(t)\, \overline{g(t)}\, dt$$

7. Sea $(P_n[x], R, +, .) \wedge p(x), q(x) \in P_n[x]$

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

$$q(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n$$

$(p(x), q(x)) = a_0 b_0 + a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n$ **Producto interno usual en** $P_n[x]$

NORMA DE UN VECTOR

Sea el espacio vectorial $(V, K, +, \bullet)$

$\forall u \in V$

$$\|u\| = \sqrt{(u, u)}$$

Terminología

$\|u\|$ se lee: “norma de u”.

Observación. Al referirse a los espacios euclidianos R, R^2, R^3, la norma, es un número real que representa la distancia entre el origen y el extremo del vector.

TEOREMAS

Sea $(V, K, +, \bullet)$ un espacio vectorial definido con producto interno.

1. Si $u \neq 0_V$, $\|u\| > 0$
2. Si $u = 0_V$, $\|u\| = 0$
3. $\|\sim u\| = |\sim|\|u\|$
4. $|(u,v)| \leq \|u\|\|v\|$ **Desigualdad de Cauchy-Schwartz**
5. $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$ **Desigualdad triangular**

DEMOSTRACIONES

1. Si $u \neq 0_V$, $\|u\| > 0$

Si $u \neq 0_V$, $(u,u) > 0$

Si $(u,u) > 0$, $\sqrt{(u,u)} > 0$

Si $\sqrt{(u,u)} > 0$, $\|u\| > 0$

3. $\|\sim u\| = |\sim|\|u\|$

$$\|\sim u\| = \|\sim u\|$$
$$= \sqrt{(\sim u, \sim u)}$$
$$= \sqrt{\sim^2 (u, u)}$$
$$= \sqrt{\sim^2}\sqrt{(u,u)}$$
$$= |\sim|\sqrt{(u,u)}$$
$$= |\sim|\|u\|$$

5. $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$

$$\|u+v\|^2 = \left(\sqrt{u+v, u+v}\right)^2$$
$$= (u,u) + 2(u,v) + (v,v)$$

$$= \|u\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(u,v) + \|v\|^2$$ [1]

$$\leq \|u\|^2 + 2|(u,v)| + \|v\|^2$$

$$\leq \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2$$

$$\leq (\|u\| + \|v\|)^2$$

Por lo tanto:

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

TEOREMA 6

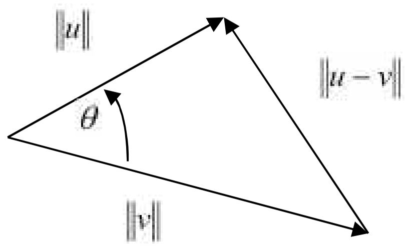
Sea $(V, K, +, \bullet)$ un espacio vectorial definido con producto interno,

$u, v \in V$, $u \neq 0_V$, $v \neq 0_V$ $K = R$

θ es el ángulo formado por u y v, entonces

$$\cos\theta = \frac{(u,v)}{\|u\|\|v\|}$$

DEMOSTRACION



$$\|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\|v\|\cos\theta \qquad (1)$$

$$\|u-v\|^2 = (u-v, u-v)$$

$$= \|u\|^2 - 2(u,v) + \|v\|^2 \qquad (2)$$

Igualando (1) y (2)

---

1 $\mathrm{Re}(z) \leq |z|$

$\mathrm{Re}(u,v) \leq |(u,v)| \leq \|u\| + \|v\|$, (Teorema 4)

$z + z = 2\,\mathrm{Re}(z)$

$\|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\|v\|\cos^{-} = \|u\|^2 - 2(u,v) + \|v\|^2$

Simplificando:

$\|u\|\|v\|\cos^{-} = (u,v)^2$

$\|u \quad \|$

VECTORES ORTOGONALES

Sea $(V,K,+,\bullet)$ un espacio vectorial definido con producto interno, $u,v \in V$, u y v son ortogonales si y solamente sí su producto interno es igual a cero, es decir,

$$\cos^{-} = \frac{(u,v)}{\|u\|\|v\|} = 0$$

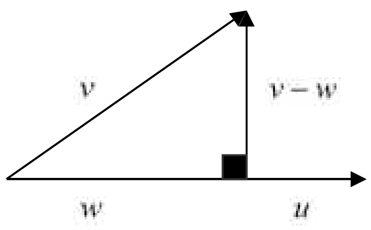
En R^2, R^3 la ortogonalidad se da para vectores perpendiculares.

Observación.

El vector nulo se considera ortogonal a todo vector $v \in V$.

PROYECCIÓN ORTOGONAL

El vector w es la proyección ortogonal de v sobre u si y solamente si $(v-w,w)=0$.



CÁLCULO DE w

Según la figura anterior:

w es paralelo a u, entonces

$w = \sim u$ (1)

$(v-w,w)=0$, pues $v-w$ es ortogonal a w.

$(v - \sim u, \sim u) = 0$

$\sim (v,u) - \sim \sim (u,u) = 0$

$$\sim = \frac{(v,u)}{(u,u)} \qquad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1)

$$w = (v,u)\frac{u}{\|u\|^2}$$

CONJUNTO ORTOGONAL

Sea $(V, K, +, \bullet)$ un espacio vectorial definido con producto interno, $T \subseteq V$.

T es un conjunto ortogonal si y solamente sí:

$\forall u, v \in T, (u \neq v) \mid \quad (v,u) = 0$

Ejemplo

Sea $T \subset R^3$

$T = \{(1,0,0), (0,2,0), (0,0,-1)\}$ es ortogonal.

TEOREMA 7

Sea $(V, K, +, \bullet)$ un espacio vectorial con producto interno, $T \subseteq V$

Si T es ortogonal, entonces es linealmente independiente.

DEMOSTRACION

Sea $T = \{t_1, t_2, \cdots, t_n\}$ conjunto ortogonal

$\sim_1 t_1 + \sim_2 t_2 + \cdots + \sim_n t_n = 0_V$

$(0_V, t_i) = 0$, donde $1 \leq i \leq n$

$(\sim_1 t_1 + \sim_2 t_2 + \cdots + \sim_n t_n, t_i) = 0$

$\sim_1 (t_1, t_i) + \sim_2 (t_2, t_i) + \cdots + \sim_n (t_n, t_i) = 0$,es decir,

$\sim_i (t_i, t_i) = 0$

$\sim_i = 0$

Si $\forall \sim_i = 0$, entonces T es linealmente independiente.

Corolario

Sea $(V, K, +, \bullet)$ un espacio vectorial definido con producto interno, $T \subset V$, T es conjunto ortogonal, entonces se cumple que si T tiene n vectores, T es base ortogonal de V.

VECTOR UNITARIO

Sea $u \in V$. Se dice que u es un vector unitario si su norma es igual a 1.

NORMALIZACIÓN DE UN VECTOR

Sea $u \in V$

$$\left\| \frac{u}{\|u\|} \right\| = 1$$

CONJUNTO ORTONORMAL

Sea $(V, K, +, \bullet)$ un espacio vectorial definido con producto interno, $T \subseteq V$, T es ortogonal, entonces se cumple que: Si $\forall u \in V$ es unitario, entonces T es ortonormal.

BASE ORTONORMAL

Sea $(V, K, +, \bullet)$ un espacio vectorial definido con producto interno, $T \subseteq V$, entonces Si T es conjunto ortonormal y es base de V, entonces T es base ortonormal de V.

Ejemplos

1. Sea el conjunto $T \subseteq R^2$

   $T = \{(1,0), (0,1)\} = \{i, j\}$ es base ortonormal de R^2.

2. Sea el conjunto $T \subseteq R^3$

   $T = \{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\} = \{i, j, k\}$ es base ortonormal de R^3.

TEOREMA 8 El Proceso de Gram-Schmidt

Sea $(V, K, +, \bullet)$ un espacio vectorial definido con producto interno,
W es subespacio vectorial de V. $DimV = n$, entonces
W tiene una base ortonormal.

DEMOSTRACION

1. $DimW = 2$

A partir de $S = \{s_1, s_2\}$, se construye una base $T = \{t_t, t_2\}$ ortogonal.

Si $s_1 = t_1$

$$t_2 = \sim_1 s_1 + \sim_2 s_2 \qquad (1)$$

$$(t_2, s_1) = (\sim_1 s_1 + \sim_2 s_2, t_1)$$

$$= (\sim_1 t_1 + \sim_2 s_2, t_1)$$

$$\underbrace{(t_2, t_1)}_{0} = \sim_1 (t_1, t_1) + \sim_2 (s_2, t_1)$$

$$0 = \sim_1 (t_1, t_1) + \sim_2 (s_2, t_1)$$

$$\sim_1 = -\sim_2 \frac{(s_{2,} t_1)}{(t_1, t_1)} \qquad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1)

$$t_2 = \sim_2 \left[s_2 - \frac{(s_2, t_1)}{(t_1, t_1)} . t_1 \right]$$

Si T es ortogonal , entonces es linealmente independiente (Teorema 7)

T es base de W

$$T' = \left\{ \frac{t_1}{\|t_1\|}, \frac{t_2}{\|t_2\|} \right\}$$ es base ortonormal de W.

2. $DimW = 3$

Se repite el proceso anterior

A partir de $S = \{s_1, s_2, s_3\}$, se construye una base $T = \{t_t, t_2, t_3\}$ ortogonal

$$t_3 = \sim_1 t_1 + \sim_2 t_2 + \sim_3 s_3 \qquad (1)$$

$$(t_3, t_1) = (\sim_1 t_1 + \sim_2 t_2 + \sim_3 s_3, t_1)$$

$$0 = \sim_1(t_1,t_1) + \sim_2\underbrace{(t_2,t_1)}_{0} + \sim_3(s_3,t_1),$$

de donde:

$$\sim_1 = -\sim_3 \frac{(s_3,t_1)}{(t_1,t_1)} \qquad (2)$$

$$(t_3,t_2) = (\sim_1 t_1 + \sim_2 t_2 + \sim_3 s_3, t_2)$$

$$0 = \sim_1\underbrace{(t_1,t_2)}_{0} + \sim_2(t_2,t_2) + \sim_3(s_3,t_2)$$

$$\sim_2 = -\sim_3 \frac{(s_3,t_2)}{(t_2,t_2)} \qquad (3)$$

Sustituyendo (2) y (3) en (1)

$$t_3 = \sim_3\left[s_3 - \frac{(s_3,t_2)}{(t_2,t_2)}.t_2 - \frac{(s_3,t_1)}{(t_1,t_1)}.t_1 \right]$$

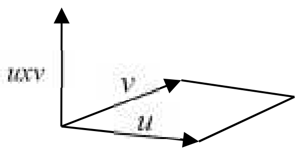
El proceso continua hasta obtener n vectores ortogonales $(DimV = n)$, luego se normalizan todos los vectores obteniendo una base ortonormal del espacio vectorial.

PRODUCTO CRUZ EN R^3

Sean $u, v \in R^3$ tales que $u = (a_1, a_2, a_3)$ y $v = (b_1, b_2, b_3)$, el ***producto cruz*** entre u y v se define por:

$$uxv = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

Gráficamente uxv es un vector perpendicular al plano formado por u y v.



El producto cruz o producto vectorial sólo tiene sentido en R^3.

Ejemplo

Sea el espacio vectorial R^4. $S \subseteq R^4$. $S = \{s_1, s_2, s_3\}$ base de R^4.

$$s_1 = (1,1,1,1)\,,\ s_2 = (1,-1,-1,-1)\,,\ s_3 = (1,1,1,-1)$$

A partir de S hallar una base ortonormal de este espacio vectorial.

Solución:

Los vectores $\{s_1, s_2, s_3\}$ son linealmente independientes. Se va a encontrar una base ortonormal $T^* = \{t_1, t_2, t_3\}$ usando el proceso de Gram-Schmidt.

Primero se considera $t_1 = s_1$

$$t_2 = \sim_2\left[s_2 - \frac{(s_2, t_1)}{(t_1, t_1)}.t_1 \right]$$

$$t_2 = \sim_2\left[(1,-1,-1,-1) - \frac{-2}{4}(1,1,1,1) \right]$$

$$t_2 = \sim_2\left[(1,-1,-1,-1) + \frac{1}{2}(1,1,1,1) \right]$$

$$\sim_2 = 2$$

$$t_2 == 2\left[(1,-1,-1,-1) - \frac{-2}{4}(1,1,1,1) \right] = (3,-1,-1,-1)$$

$$t_3 = \sim_3\left[s_3 - \frac{(s_3, t_2)}{(t_2, t_2)}.t_2 - \frac{(s_3, t_1)}{(t_1, t_1)}.t_1 \right]$$

$$t_3 = \sim_3\left[(1,1,1,-1) - \frac{2}{12}(3,-1,-1-1) - \frac{2}{4}(1,1,1,1) \right]$$

$$t_3 = \sim_3\left[(1,1,1,-1) - \frac{1}{6}(3,-1,-1-1) - \frac{1}{2}(1,1,1,1) \right]$$

$$\sim_2 = \frac{6}{4}$$

$$t_3 = \frac{6}{4}\left[(1,1,1,-1) - \frac{1}{6}(3,-1,-1-1) - \frac{1}{2}(1,1,1,1) \right]$$

$$t_3 = (0,1,1,-2)$$

$T = \{(1,1,1,1), (3,-1,-1,-1), (0,1,1,-2\}$ es base ortogonal

$$\|t_1\| = \sqrt{4} \qquad \|t_2\| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \qquad \|t_3\| = \sqrt{6}$$

$T^* = \left\{ \frac{1}{\sqrt{4}}(1,1,1,1), \frac{1}{2\sqrt{3}}(3,-1,-1,-1), \frac{1}{\sqrt{6}}(0,1,1,-2 \right\}$ es base ortonormal.

DEFINICIÓN

Sean $(V, K, +, \bullet)$ un espacio vectorial definido con ***producto interno*** y W un subespacio vectorial de V. Un vector de V es ortogonal al subespacio vectorial W si es ortogonal a cada uno de los elementos de W.

Ejemplo

Sea el espacio vectorial R^3.

a) Hallar el conjunto W de todos los vectores ortogonales a $u = (5,-3-2)$.

b) Demostrar W que es subespacio vectorial de V.

c) Hallar una base de W y su dimensión.

Solución:

a) $W = \{v = (x, y, z) \in R^3 : (v, u) = 0\}$

$(v, u) = 5x - 3y - 2z = 0$

$$W = \left\{ v = (x, y, z) \in R^3 : \ x = \frac{3}{5}y + \frac{2}{5}z \right\}$$

b) i. $0_{R^3} \in W$

$(r, 0_{R^3}) = 0$

ii. $\forall \sim \in R, \forall v, w \in W \mid \quad v + \sim w \in W$

$(u, v + \sim w) = (u, v) + (u, \sim w)$

$(u, v + \sim w) = (u, v) + \sim (u, w)$

$(u, v + \sim w) = 0$

Por i. y ii. W es subespaio vectorial de R^3.

c) Cálculo de una base de W:

$$v = \left(\frac{3}{5}y + \frac{2}{5}z, y, z \right)$$

$$v = y\left(\frac{3}{5}, 1, 0 \right) + z\left(\frac{2}{5}, 0, 1 \right)$$

$B = \{(3,5,0), (2,0,5)\}$ es base de W

$\mathrm{Dim}\, W = 2$

DEFINICIÓN

Sean $(V, K, +, \bullet)$ un espacio vectorial definido con ***producto interno*** y W un subespacio vectorial de V. El subespacio ortogonal de V notado por $W^{\perp}$ se define por:

$$W^{\perp} = \{ u \in V : \forall w \in W \text{ , } (\mathrm{u}, \mathrm{w}) = 0 \}$$

La definición anterior indica que el subespacio ortogonal $W^{\perp}$ contiene a todos los vectores de V que son ortogonales a cada uno de los elementos de W.

Ejemplo

Sea el espacio vectorial R^4. $W \subseteq R^4$

$W = \{u = (x, y, z, w) \in R^4 \ : \ x + y - 3z + w = 0\}$

a) Hallar $W^{\perp}$.

b) Demostrar que $R^4 = W \oplus W^{\perp}$.

Solución:

a) $u = (-y + 3z - w, y, z, w)$

$u = y(-1,1,0,0) + z(3,0,1,0) + w(-1,0,0,1)$

$B = \{(-1,1,0,0), (3,0,1,0), (-1,0,0,1)\} = (u_1, u_2, u_3)$

B es base de W

$W^{\perp} = \{v = (x', y', z', w') \in R^4 \ : \ (v, u) = 0\}$

$W^{\perp}$ se obtiene de : $(v, u_1) = 0$, $(v, u_2) = 0$, $(v, u_3) = 0$

De donde

$$\begin{cases} -x' + y' = 0 \\ 3x' + z' = 0 \\ -x' + w' = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y' = x' \\ z' = -3x' \\ w' = x' \end{cases}$$

$W^{\perp} = \{v = (x', y', z', w') \in R^4 \ : y' = x', z' = -3x', w' = x`'\}$

ó también: $v = (x', x', -3x', x') = x'(1,1,-3,1)$

$W^{\perp} = \langle (1,1,-3,1) \rangle$

b) Se deja como ejercicio.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Sea el espacio vectorial $P_1[t]$, $p(t), q(t) \in P_1[t]$, tales que $p(t) = a_1 t + a_0$ y $q(t) = b_1 t + b_0$. Determinar si $\left(p(t), q(t)\right) = a_1 b_1 + a_0 b_1 + a_1 b_0 + 8 a_0 b_0$ define un producto interno en $P_1[t]$.

2. Sean los vectores $u, v \in R^3$

$$u = (x_1, x_2, x_3), v = (y_1, y_2, y_3).$$

Determinar si $(u, v) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_2 + 2x_3 y_3$ define un producto interno en R^3.

3. Sea el espacio vectorial S de las matrices simétricas de orden 2.

a) Demostrar que $\left(A, B\right) = Tr(AB)$ define un producto interno en S.

b) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ -8 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

Hallar $(A,B), (B,C), (4A-5C,B), \|A\|, \|B-C\|$

4. Sea V un espacio vectorial definido con producto interno, probar que $u, v \in V$, cumplen que $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ si y sólo si $(u, v) = 0$. Este resultado se conoce como ***Teorema de Pitágoras***.

5. Probar la ***Ley del Paralelogramo*** para dos vectores cualesquiera en un espacio vectorial con producto interno:
$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$

6. En el espacio vectorial R^2, determinar:

   a) x, tal que (3,2) y (1, x +2) sean ortogonales.

   b) t, tal que $u(t) = (-1+t, 2t-2)$ sea unitario, $t \in R$.

7. Dada la base $S = \{s_1, s_2, s_3\} \in R^3$ tal que

$$s_1 = (2,1,1),\ s_2 = (1,0,1),\ s_3 = (1,-1,1)$$

A partir de S calcular una base T ortogonal de R^3 conociendo que:

$$\|s_1\| = \|s_2\| = 1,\ (s_1, s_3 + s_1) = 0,\ (s_1, s_2) = 0,\ (s_3, s_2) = 4$$

Nota: El producto interno dado no es el usual

8. Dada la base B del espacio euclidiano R^3

$$B = \{(1,01), (0,1,1), (1,1,0)\}$$

Utilizar el proceso de Gram-Schmidt para obtener, una base ortonormal. Aplicar el producto interno usual en R^3.

9. Dada la base B del espacio euclidiano R^3

$$B = \{(1,01), (0,1,-11), (0,0,1)\}$$

Utilizar el proceso de Gram-Schmidt para obtener, una base ortonormal. Aplicar el producto interno usual en R^3.

10. Sea W subespacio vectorial de las funciones reales, tal que

$$W = \left\{ f : [-1,1] \rightarrow R \mid f \text{ contínua} \right\}$$

$S \subseteq W$, un conjunto linealmente independiente, donde $S = \left\{1, t, t^2\right\}$. A partir de S encontrar un conjunto ortonormal de W, si $(f, g) = \int_{-1}^{1} f(t).g(t).dt$, define un producto interno en el espacio vectorial de las funciones reales en el intervalo dado.

11. Sea W subespacio vectorial del espacio euclidiano R^3, donde

a) $W = \{(x, y, z) \mid 2x - y + 2z = 0\}$

b) $W = \{(x, y, z) \mid x - 2y - z = 0\}$

c) $W = \langle (1,1,-1), (1,-2,3) \rangle$

Emplear el proceso de Gram-Schmidt para encontrar una base ortonormal de W.

Aplicar el producto interno usual en R^3.

12. Sea W subespacio vectorial del espacio vectorial R^3

$$W = \{(a,b,c) \mid a - b + c = 0\}$$

a) Hallar una base de B de W y su dimensión.

b) Completar una base ortonormal para R^3 usando los vectores de B.

13. Sea $W = \langle (1,2,-1), (-1,3,2) \rangle$, $W \subseteq R^3$

a) Hallar una base para el espacio complemento ortogonal de W.

b) Dar una descripción geométrica.

14. Sean W_1 y W_2 dos subespacios vectoriales del espacio vectorial $(M_{2x2}, R, +, \bullet)$

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \, a - b + 2c = 0 \right\}, \text{ y } W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{r} a - 2b - c + d = 0 \\ b + 3c - d = 0 \end{array} \right\}$$

a) Calcular $W_1 \cap W_2$, una base y su dimensión.

b) Calcular una base ortogonal para $W_1 \cap W_2$, usando el producto interno $(A, B) = Tr\left(A.B^t\right)$.

15. Si $W=\{p(x)\in P_2[x] \,|\, p(x)=p(x+1)\}$ un subespacio vectorial de $P_2[x]$ con el producto interno definido por:

$$\left(p(x),q(x)\right)=\int_0^1 p(x)q(x)dx\ .$$

Hallar el espacio complemento ortogonal de W, esto es, $W^{\perp}$.

16. Sea la matriz A del espacio vectorial del problema 3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Hallar el conjunto complemento ortogonal de A, esto es, $A^{\perp}$.

17. Sea W subespacio vectorial de R^4.

$$W = \{(x, y, y, w) \mid x - 3y + w = 0\}.$$

a) Hallar el subespacio vectorial $W^{\perp}$.

b) Verificar que $R^4 = W \oplus W^{\perp}$

Usar el producto interno usual en R^4.

Capítulo 6

TRANSFORMACIONES LINEALES

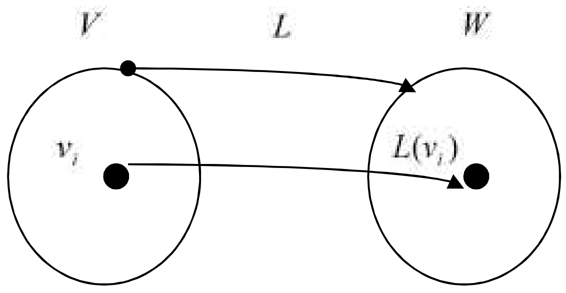
DEFINICIÓN

Sean V y W dos espacios vectoriales definidos sobre el mismo campo. Una función L de V en W que asigna a cada vector $v \in V$, un vector $L(v) \in W$ es una ***transformación lineal***, si y sólo si, $\forall \sim \in K, \forall v_i, v_j \in V$, satisface los siguientes axiomas:

1. $L(v_i + v_j) = L(v_i) + L(v_j)$
2. $L(\sim v_i) = \sim L(v_i)$

La definición anterior indica que L es una transformación lineal si y sólo si $\forall \sim \in K, \forall v_i, v_j \in V \;\; | \;\; L(\sim v_i + v_j) = \sim L(v_i) + L(v_j)$

Gráficamente:



Notación

Se escribe $L: V \to W$ para indicar que L transforma el espacio vectorial V en el espacio vectorial W.

Terminología

A las transformaciones lineales suele llamárseles **operadores** o **aplicaciones** lineales.

TEOREMA 1

Sea $L:V \to W$ una transformación lineal, entonces se cumple que:

1. $L(0_V) = 0_W$
2. $L(v_i - v_j) = L(v_i) - L(v_j)$

DEMOSTRACION

1. $L(\sim v_i) = \sim L(v_i)$

$\sim \; = 0$

$\sim v_i = 0_V$

$L(0_V) = 0_W$

2. $L(v_i - v_j) = L(v_i + (-1)v_j)$

$= L(v_i) + L(-1v_j)$

$= L(v_i) - L(v_j)$

NÚCLEO

Sea $L:V \to W$ una transformación lineal, entonces el núcleo de L, notado por $N(L)$, es el subconjunto de V, que contiene todos los elementos $v \in V$, tales que sus imágenes son iguales al vector nulo de W. Así:

$$N(L) = \{v \in V \mid L(v) = 0_W\}$$

Al núcleo de L de le llama también Ker$L$.

TEOREMA 2

Sea $L:V \to W$ una transformación lineal, entonces se cumple que:
El núcleo de L es un subespacio vectorial de V .

DEMOSTRACION

1. $0_V \in N(L)$

$L(0_V) = 0_W$

$0_V \in N(L)$

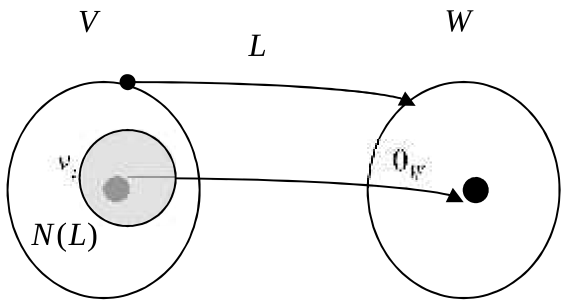
2. $\forall \sim \in K, \forall v_i, v_j \in N(L) \mid v_i + \sim v_j \in N(L)$

$$L(v_i + \sim v_j) = \underbrace{L(v_i)}_{0_W} + \sim .\underbrace{L(v_j)}_{0_W}$$

$$= 0_W$$

Por las partes 1. y 2. $N(L)$ es un subespacio vectorial de V

Gráficamente:



IMAGEN

Sea $L: V \to W$ una transformación lineal, entonces la imagen de L, notada por $\mathrm{Im}(L)$, es el subconjunto de W, que contiene todos los elementos $w \in W$, que son imágenes de vectores $v \in V$ debidas a la transformación L. Así:

$$\mathrm{Im}(L) = \{ w \in W \mid \exists v \in V, L(v) = w \}$$

A la imagen de L de le llama también rango o recorrido de L.

Se debe destacar que las definiciones de núcleo e imagen son muy importantes en el estudio de las transformaciones lineales.

TEOREMA 3

Sea $L:V \to W$ una transformación lineal, entonces se cumple que:

La imagen de L es un subespacio vectorial de W.

DEMOSTRACION

1. $0_W \in \mathrm{Im}(L)$

$L(0_V) = 0_W$

$0_W \in \mathrm{Im}(L)$

2. $\forall \sim \in K, \forall w_i, w_j \in \mathrm{Im}(L) \mid w_i + \sim w_j \in \mathrm{Im}(L)$

Si $w_i, w_j \in \mathrm{Im}(L)$, entonces $v_i, v_j \in V$, tales que:

$$L(v_i) = w_i \qquad (1)$$

$$L(v_j) = w_j$$

$$\sim L(v_j) = \sim w_j \qquad (2)$$

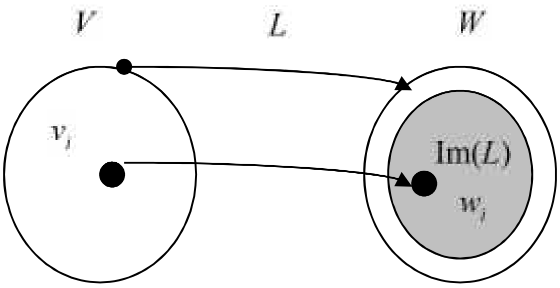
Sumando (1) y (2)

$$L(v_i) + \sim L(v_j) = w_i + \sim w_j$$

$$w_i + \sim w_j \in \mathrm{Im}(L)$$

Por las partes 1. y 2. $\mathrm{Im}(L)$ es subespacio vectorial de W.

Gráficamente:



TEOREMA 4

Una transformación lineal queda totalmente determinada si se conocen las imágenes de los elementos de la base del espacio de salida.

Sea $L: V \to W$ una transformación lineal, $\dim V = n$

$S_n = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$, una base de V tal que $v_i \in V$

$$L(v_i) = \langle L(v_1), L(v_2), \cdots, L(v_n) \rangle$$

DEMOSTRACION

Si S_n es base de V y $v_i \in V$

$v_i = \sim_1 v_1 + \sim_2 v_2 + \cdots + \sim_n v_n$

Aplicando el operador lineal L a los dos miembros

$L(v_i) = \sim_1 L(v_1) + \sim_2 L(v_2) + \cdots + \sim_n L(v_n)$

TEOREMA 5

Sea $L: V \to W$ una transformación lineal, $\dim V = n$

$$\dim V = \dim N(L) + \dim \operatorname{Im}(L)$$

DEMOSTRACION

Sea $S = \{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$, una base de $N(L)$, donde: $1 \le k \le n$

Se puede extender este conjunto hasta una base de V. Asi:

$S = \{v_1, v_2, \cdots, v_k, v_{k+1}, \cdots, v_n\}$

Sus imágenes son:

$\underbrace{L(v_1), L(v_2), \cdots, L(v_k)}_{0_W}, L(v_{k+1}), \cdots, L(v_n)$

$T = \{L(v_{k+1}), \cdots, L(v_n)\}$

P.D. T es base de $\operatorname{Im}(L)$

Se debe demostrar que en conjunto genera y es base de la imagen de L. Así:

1. T genera $\operatorname{Im}(L)$

Sea $w_i \in W$ tal que $v_i \in V$

$$L(v_i) = w_i$$

$$v_i = \sim_1 v_1 + \sim_2 v_2 + \cdots + \sim_k v_k + \sim_{k+1} v_{k+1} + \cdots + \sim_n v_n$$

$$L(v_i) = \underbrace{\sim_1 L(v_1) + \sim_2 L(v_2) + \cdots \sim_k L(v_k)}_{0_W} + \sim_{k+1} L(v_{k+1}) + \cdots + \sim_n L(v_n)$$

$$L(v_i) = \sim_{k+1} L(v_{k+1}) + \cdots + \sim_n L(v_n)$$

Por lo tanto T genera a $\operatorname{Im}(L)$

2. T es linealmente independiente

$${}_{k+1} L(v_{k+1}) + \cdots + {}_{n} L(v_n) = 0_W$$

$$L({}_{k+1} v_{k+1} + \cdots + {}_{n} v_n) = 0_W$$

$${}_{k+1} v_{k+1} + \cdots + {}_{n} v_n \in N(L)$$

$${}_{k+1} v_{k+1} + \cdots + {}_{n} v_n = \sim_1 v_1 + \sim_2 v_2 + \cdots + \sim_k v_k$$

$$\sim_1 v_1 + \sim_2 v_2 + \cdots + \sim_k v_k - {}_{k+1} v_{k+1} - \cdots - {}_{n} v_n = 0_V$$

$$\sim_i = {}_{i} = 0$$

T es linealmente independiente.

Por las partes 1. y 2. T es base de $\operatorname{Im}(L)$

$$\dim \operatorname{Im}(L) = n - k$$

Por lo tanto:

$$\dim V = \dim N(L) + \dim \operatorname{Im}(L)$$

INYECTIVIDAD, SOBREYECTIVIDAD Y BIYECTIVIDAD

Sea $L : V \to W$ una transformación lineal

1. L es inyectiva si y sólo si $\forall v_i, v_j \in V$:

   $v_1 \neq v_j \to L(v_i) \neq L(v_j)$, ó

   $L(v_i) = L(v_j) \to v_i = v_j$

2. L es sobreyectiva si y sólo si $L(V) = W$ ó

   $\dim \operatorname{Im}(L) = \dim W$

3. L es biyectiva si y sólo si L es inyectiva y es sobreyectiva.

TEOREMA 6

Sea $L : V \to W$ una transformación lineal.

L es inyectiva si y sólo si $N(L) = \{0_V\}$

DEMOSTRACION

1. Si L es inyectiva, entonces $N(L) = \{0_V\}$

Por contradicción:

Se supone que

$N(L) \neq \{0_V\}$

$L(v) = L(0_V)$

$v = 0_V$

$\to\leftarrow$

$N(L) = \{0_V\}$

2. Si $N(L) = \{0_V\}$, entonces L es inyectiva

Por contradicción:

Se supone que L no es inyectiva

Sean $v_i, v_j \in V, v_i \neq v_j$

$L(v_i) = L(v_j)$, L no es inyectiva (1)

$L(v_j) = L(v_j)$ (2)

Restando (1) y (2)

$L(v_j) - L(v_j) = 0_W$

$L(v_j - v_j) = 0_W$

$v_j - v_j = 0_V$

$v_j = v_j$

Lo que contradice la suposición, entonces

L es inyectiva.

Por las partes 1. y 2. el teorema queda demostrado.

Corolario 1

Sea $L:V \to W$ una transformación lineal.

Si L es inyectiva, entonces $\dim N(L) = 0$

Corolario 2

Sea $L:V \to W$ una transformación lineal.

L biyectiva si:
1. $\dim N(L) = 0$
2. $\dim \operatorname{Im}(L) = \dim(W)$

Corolario 3

Sea $L:V \to W$ una transformación lineal, $\dim V = \dim W$. Las siguientes proposiciones son lógicamente equivalentes:

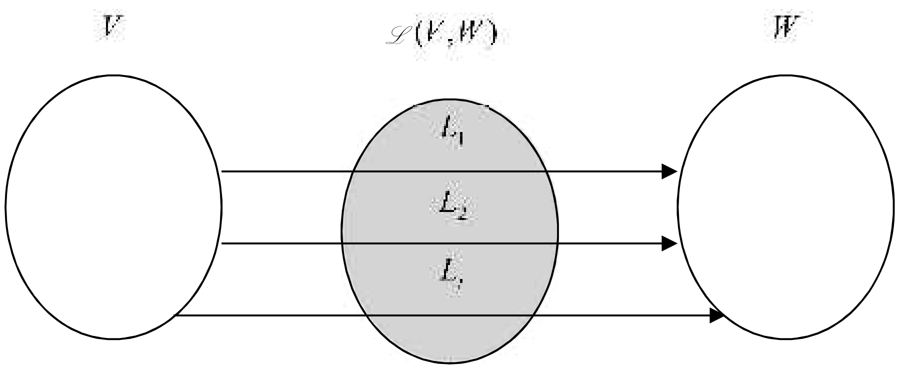
L es biyectiva $\Leftrightarrow$ L es sobre $\Leftrightarrow$ L es inyectiva $\Leftrightarrow$ $\dim N(L) = 0 \Leftrightarrow \dim \operatorname{Im}(L) = \dim(W)$

CONJUNTO DE LAS TRANFORMACIONES LINEALES $\mathscr{L}(V,W)$

Al conjunto de las transformaciones lineales de V e n W , se le notará por:

$\mathscr{L}(V,W) = \{ L:V \to W \ \mid \ L \text{ es lineal } \}$

Gráficamente:



IGUALDAD

$\forall L_i, L_j \in \mathscr{L}(V,W)$

$L_i = L_j \leftrightarrow \forall v_i \in V : L_i(v_i) = L_j(v_i)$

OPERACIONES CON TRANFORMACIONES LINEALES

SUMA

$\forall L_i , L_j \in \mathscr{L}(V,W) \mid (L_i + L_j)(v) = L_i(v) + L_j(v)$

MULTIPLICACIÓN POR UN ESCALAR

$\forall \sim \in K, \forall L_i \in \mathscr{L}(V,W) \mid (\sim L_i)(v) = \sim L_i(v)$

A continuación se presentan los siguientes teoremas que son de mucha utilidad.

TEOREMA 7

$\forall L_i , L_j \in \mathscr{L}(V,W)$ se cumple que:

$L_i + L_j \in \mathscr{L}(V,W)$

DEMOSTRACION

Sean $L_i , L_j \in \mathscr{L}(V,W)$

Sea $v_i \in V$

$L_i(v_i) = w_i$

$L_j(v_i) = w_i'$

Considerando que

$L_i , L_j \in \mathscr{L}(V,W)$

$w_i , w_i' \in W$,

$$(L_i + L_j)(v_i) = L_i(v_i) + L_j(v_i)$$

$$= w_i + w_i'$$

Según el axioma de clausura para los espacios vectoriales

$w_i + w_i' \in W$

Por lo tanto $L_i + L_j \in \mathscr{L}(V,W)$.

TEOREMA 8

$\forall \sim \in K, \forall L_i \in \mathscr{L}(V,W)$ se cumple que:

$$\sim L_i \in \mathscr{L}(V,W)$$

TEOREMA 9

$\mathscr{L}(V,W)$ definido sobre el campo K, con las operaciones de suma y producto es un espacio vectorial $(\mathscr{L}(V,W), K, +, \bullet)$.

DEMOSTRACION

Como ejemplo se demuestra el axioma de asociatividad:

$\forall L_i, L_j, L_k \in \mathscr{L}(V,W) \mid (L_i + L_j) + L_k = L_i + (L_j + L_k)$

$$\begin{aligned}
\left[(L_i + L_j) + L_k\right](v) &= \left[(L_i + L_j) + L_k\right](v) \\
&= (L_i + L_j)(v) + L_j(v) \\
&= L_i(v) + (L_j)(v) + L_j(v) \\
&= L_i(v) + \left[(L_j)(v) + L_j(v)\right] \\
&= L_i(v) + (L_i + L_j)(v) \\
&= L_i + (L_j + L_k)
\end{aligned}$$

COMPOSICIÓN DE TRANSFORMACIONES LINEALES

Sean los espacios vectoriales V, W, Z definidos sobre el campo K con las operaciones usuales de adición y multiplicación.

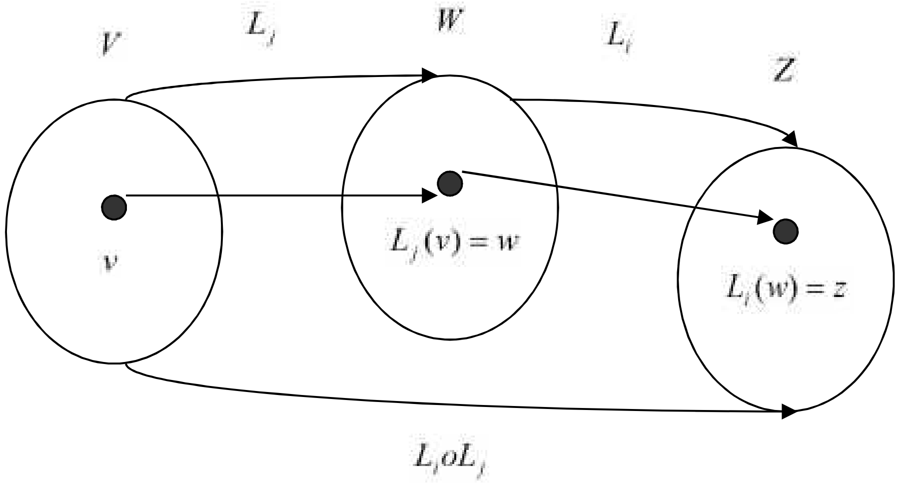
Se define la siguiente operación:

$\forall L_j \in \mathscr{L}(V,W), \forall L_i \in \mathscr{L}(W,Z) \mid (L_i o L_j)(v) = L_i(L_j(v))$

Terminología

$L_i o L_j$ se lee: "L_i compuesta L_j"

La siguiente figura ilustra la compuesta de este par de transformaciones lineales:



Los siguientes teoremas son de interés.

TEOREMA 10

$\forall L_j \in \mathscr{L}(V,W)$, $\forall L_i \in \mathscr{L}(W,Z)$, se cumple que:

$$L_i o L_j \in \mathscr{L}(V,Z)$$

DEMOSTRACION

$$\begin{aligned}(L_i o L_j)(v) &= (L_i o L_j)(v)\\ &= L_i(L_j(v))\\ &= L_i(w)\\ &= z \;,\; z \in Z\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$L_i o L_j \in \mathscr{L}(V,Z)$

TEOREMA 11

$\forall L_i \in \mathscr{L}(V,W)$, $\forall L_m, L_k \in \mathscr{L}(W,Z)$, se cumple que:

$$(L_k + L_m) o L_i = L_k o L_i + L_m o L_i$$

TEOREMA 12

$\forall L_i, L_j \in \mathscr{L}(V,W)$, $\forall L_k \in \mathscr{L}(W,Z)$, se cumple que:

$$L_k o (L_i + L_j) = L_k o L_i + L_k o L_j$$

TEOREMA 13

$\forall \sim \in K, \forall L_j \in \mathscr{L}(V,W)$, $\forall L_i \in \mathscr{L}(W,Z)$, se cumple que:

1. 1. $\sim \left(L_i o L_j \right) = \left(\sim L_i \right) o L_j$
2. 2. $\sim \left(L_i o L_j \right) = L_i o \left(\sim L_j \right)$
3.

TEOREMA 14

$\forall L_k \in \mathscr{L}(V,W)$, $\forall L_j \in \mathscr{L}(W,Z)$, $\forall L_i \in \mathscr{L}(Z,U)$, se cumple que:

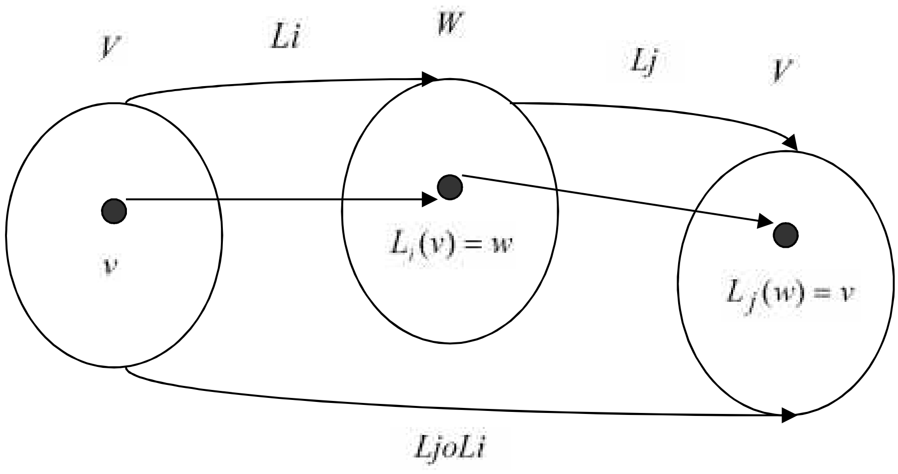
$$L_i o (L_j o L_k) = (L_i o L_j) o L_k$$

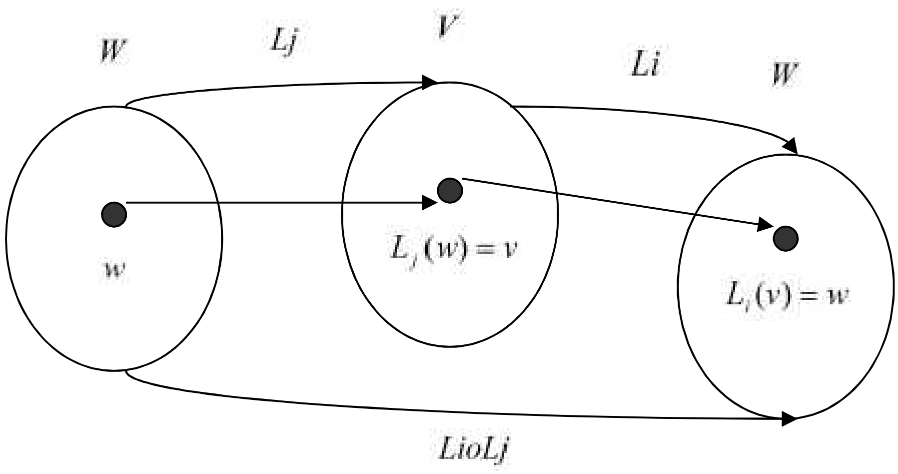
TRANSFORMACIONES LINEALES INVERTIBLES

Sea $L_i \in \mathscr{L}(V,W)$, L_i es invertible si existe una transformación $L_j : W \to V$, tal que:

$L_i o L_j = I_W$ y $L_j o L_i = I_V$.

Gráficamente:





$L_j = L_i^{-1}$

$L_i o L_i^{-1} = I_W$

$L_i^{-1} o L_i = I_V$

TEOREMA 15

Sea L una transformación lineal invertible de V en W, entonces:

1. $\forall v \in V : L^{-1}(L(v)) = v$
2. $\forall w \in W : L(L^{-1}(w)) = w$

DEMOSTRACION

1. $(L^{-1}oL)(v) = (L^{-1}oL)(v)$

$$= L^{-1}(L(v))$$
$$= L^{-1}(w)$$
$$= w$$

2. $(LoL^{-1})(w) = (LoL^{-1})(w)$

$$= L(L^{-1}(w))$$
$$= L(v)$$
$$= w$$

TEOREMA 16

Sea $L \in \mathscr{L}(V,W)$, si L es invertible, entonces

L^{-1} es una transformación lineal de W en V.

DEMOSTRACION

P.D. $L^{-1}(L(v_i) + \sim L(v_j)) = L^{-1}((L(v_i)) + \sim L^{-1}(L(v_j))$

$L(v_i), L(v_j) \in W$

$(L^{-1}oL)(v_i + \sim v_j) = (L^{-1}oL)(v_i + \sim v_j)$

$$= L^{-1}(L((v_i + \sim v_j))$$
$$= L^{-1}(L((v_i)) + L^{-1}(L(\sim v_j))$$

$= v_i + \sim v_j$ (Teorema 15)

$= L^{-1}((L(v_i)) + \sim L^{-1}(L(v_j))$

TEOREMA 17

Sea la transformación lineal $L \in \mathscr{L}(V,W)$,

L es invertible si y solamente sí L es biyectiva.

DEMOSTRACION

1. Si L es invertible, entonces es biyectiva

a) L es inyectiva

Sean $v_i, v_j \in V$

Se supone que:

$L(v_i) = L(v_j)$

$L^{-1}(L(v_j)) = L^{-1}(L(v_j))$

$v_i = v_j$

L es inyectiva

b) L es sobreyectiva

Sea $L \in \mathscr{L}(W,V)$,

$\forall w \in W, \exists v \in V : L^{-1}(w) = v$

$L(L^{-1}(w)) = L(v)$

$L(v) = w$

L es sobreyectiva

Por a) y b) L es biyectiva

2. Si L es biyectiva, entonces es invertible

P.D. $\exists L^{-1} : W \to V \mid \quad L^{-1}oL = I_v \wedge LoL^{-1} = I_W$

$L(v) = w$ (1)

$\forall w \in W, \exists v \in V \quad | \quad H(w) = v$ (2)

De (1)

$H(L(v)) = H(w)$

$H(L(v)) = v$

$HoL(v) = v$

$HoL = I_V$ (3)

De (2)

$L(H(w)) = L(v)$

De (1)

$L(H(w)) = w$

$(LoH)(w) = w$

$LoH = I_W$ (4)

Por (3) y (4) L es invertible y $L^{-1} = H$.

MATRIZ ASOCIADA A UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL

A toda transformación lineal $L: V \to W$ de espacios vectoriales de dimensión finita n y m, respectivamente, se le puede asociar una matriz $A \in M_{m\times n}$, tal que:

$L(X) = AX$, donde $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Recíprocamente a toda matriz A se le puede asociar con una transformación lineal $L: V \to W$.

Esto es de extrema utilidad. Considerando que:

1. $Dim\,\mathrm{Im}(L) =$ Rango de L = Rango de A

   (Rango es el número de filas no nulas de una matriz escalonada).

2. $DimN(L) = n -$ Rango de A.

Por lo tanto, se puede determinar el recorrido, núcleo y sus dimensiones determinando el recorrido y el núcleo de la matriz correspondiente. Además si se conoce $L(X) = AX$, se puede conocer $L(X)$ para todo X mediante una simple multiplicación matricial.

TEOREMA 18

Sea L una transformación lineal, $\dim V = n, \dim W = m$.

$B_s = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$, base ordenada de V

$B_l = \{w_1, w_2, \cdots, w_m\}$, base ordenada de W , entonces

$\exists!\ A \in M_{mxn}$, tal que $[L(v)]_{Bl} = A[v]_{Bs}$

donde: A es una matriz cuya j-ésima columna es el vector coordenadas $[L(v_j)]_{Bl}$ de $L(v_j), 1 \le j \le n$.

DEMOSTRACION

1. Existencia

Sea $v \in V$

v es combinación lineal de Bs

$$v = \sim_1 v_1 + \sim_2 v_2 + \ldots + \sim_n v_n \qquad (1)$$

$$[v]_{Bs} = \begin{pmatrix} \sim_1 \\ \sim_2 \\ \vdots \\ \sim_n \end{pmatrix} \qquad (2)$$

$L(v) \in W$

$L(v)$ es combinación lineal de Bl

$$L(v) = \ {}_1 w_1 + \ {}_2 w_2 + \ldots + \ {}_n w_m \qquad (3)$$

$$[L(v)]_{Bl} = \begin{pmatrix} {}_1 \\ {}_2 \\ \vdots \\ {}_m \end{pmatrix} \qquad (4)$$

De (3)

$$L(v) = \sum_{i=1}^{m} \ {}_i w_i \qquad (5)$$

De (1) aplicando el operador L a los dos miembros

$$L(v) = L(\sim_1 v_1 + \sim_2 v_2 + \ldots + \sim_n v_n)$$

$$L(v) = \sim_1 L(v_1) + \sim_2 L(v_2) + \ldots + \sim_n L(v_n)$$

$$L(v) = \sum_{j=1}^{n} \sim_i v_j \qquad (6)$$

$$L(v_j) \in W$$

$L(v_j)$ es combinación lineal de Bl

$$L(v_j) = a_{1j} w_1 + a_{2j} w_2 + \ldots + a_{nj} w_m$$

$$[L(v_j)]_{Bl} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

$$L(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \qquad (7)$$

Sustituyendo (7) en (6)

$$L(v) = \sum_{j=1}^{n} \sim_i \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$$

$$L(v) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \sim_j \right) w_i \qquad (8)$$

Igualando (8) y ((5)

$$\sum_{i=1}^{m} \quad {}_i w_i = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \sim_j \right) w_i$$

Se cumple la igualdad anterior si

$$_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \sim_j$$

Desarrollando

$$_i = a_{i1} \sim_1 + a_{i2} \sim_2 + \cdots + a_{in} \sim_n$$

También

$$_1 = a_{11} \sim_1 + a_{12} \sim_2 + \cdots + a_{1n} \sim_n$$

$$_2 = a_{21} \sim_1 + a_{22} \sim_2 + \cdots + a_{2n} \sim_n$$

$$\vdots$$

$$_m = a_m \sim_1 + a_{m2} \sim_2 + \cdots + a_m \sim_n$$

Escribiendo matricialmente

$$\begin{pmatrix} {}_1 \\ {}_2 \\ \vdots \\ {}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sim_1 \\ \sim_2 \\ \vdots \\ \sim_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ [L(v)]_{Bl} & A & [v]_{Bs} \end{array}$$

$[L(v)]_{Bl} = A[v]_{Bs}$, donde

$$A = \left([L(v_1)]_{Bl} \quad [L(v_2)]_{Bl} \quad \cdots \quad [L(v_n)]_{Bl}\right)$$

2. Unicidad

Por contradicción

Se supone que A no es única, entonces

$\exists A'$ tal que $A' \neq A$

$[L(v)]_{Bl} = A'[v]_{Bs}$ (1)

$[L(v)]_{Bl} = A[v]_{Bs}$ (2)

Igualando (1) y (2)

$A = A'$

Lo que contradice la suposición.

Por lo tanto A es única.

REDEFINICIÓN DE NÚCLEO E IMAGEN

Sea $L : V \rightarrow W$ una transformación lineal con matriz asociada $A = [L]_{Bl}^{Bs}$, entonces

Imagen de L :

$$Av = w$$

Núcleo de L :

$$Av = O$$

Observaciones

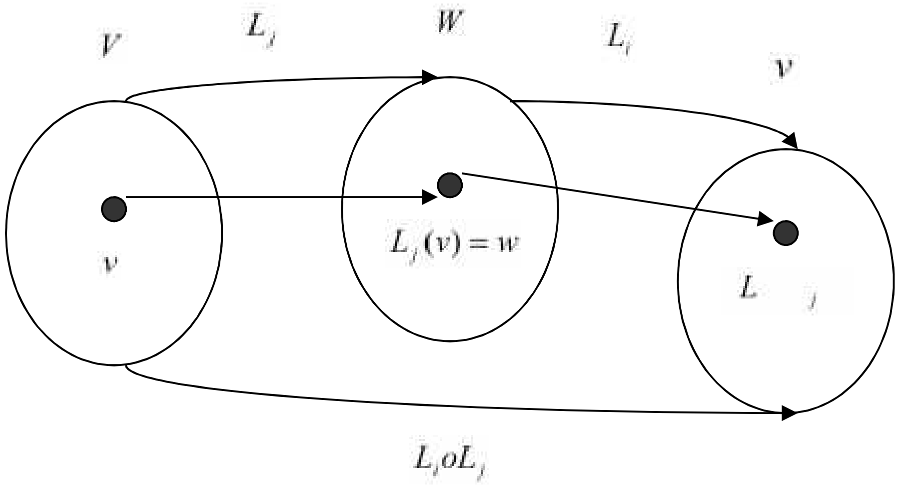
1. $Dim\,\mathrm{Im}(L) =$ Rango de L = Rango de A

   Rango es el número de filas no nulas de una matriz escalonada.

2. $DimN(L) = n -$ Rango de A.

MATRIZ ASOCIADA A UNA COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

Sea la siguiente composición de funciones:



Base B_1
$\dim V = n$

Base B_2
$\dim W = m$

Base B_3
$\dim Z = k$

La matriz asociada a $L_i o L_j$, existe y cumple que:

$$\left[(L_i o L_j)(v)\right]_{B3} = \left[L_i o L_j\right]_{B3}^{B1}[v]_{B1}$$

TEOREMA 19

$\forall L_j \in \mathscr{L}(V,W)$, $\forall L_i \in \mathscr{L}(W,Z)$, se cumple que:

$$\left[L_i o L_j\right]_{B3}^{B1} = \left[L_i\right]_{B3}^{B2}.\left[L_j\right]_{B2}^{B1}$$

DEMOSTRACION

$$\left[(L_i o L_j(v)\right]_{B3} = \left[(L_i o L_j(v)\right]_{B3}$$

$$= \left[L_i(L_j(v)\right]_{B3}$$

$$= \left[L_i\right]_{B3}^{B2}\left[L_j(v)\right]_{B2} \qquad \text{(Teorema 18)}$$

$$\left[L_i o L_j\right]_{B3}^{B1}\left[v\right]_{B1} = \left[L_i\right]_{B3}^{B2}.\left[L_j\right]_{B2}^{B1}$$

$$\left[L_i o L_j\right]_{B3}^{B1} = \left[L_i\right]_{B3}^{B2}.\left[L_j\right]_{B2}^{B1}$$

SEMEJANZA DE MATRICES

TEOREMA 20

Sea $L : V \rightarrow W$ una transformación lineal, $\dim V = n$ y la $\dim W = m$. $S, S^{'}$, bases ordenadas de V, con matriz de cambio de base $P_{S' \rightarrow S}$ de $S^{'}$ a S, y T y $T^{'}$ bases ordenadas de W con matriz de cambio de base $Q_{T' \rightarrow T}$ de $T^{'}$ a T. Entonces si $B = [L]_{T'}^{S'}$ y $A = [L]_{T}^{S}$

$$B = Q_{T' \rightarrow T}^{-1} . A . P_{S' \rightarrow S}$$

DEMOSTRACION

$S = \{s_1, s_2, \cdots . s_n\}$

$S^{'} = \{s_1^{'}, s_2^{'}, \cdots . s_n^{'}\}$

$T = \{t_1, t_2, \cdots . t_n\}$

$T^{'} = \{t_1^{'}, t_2^{'}, \cdots . t_n^{'}\}$

$[s]_S = P[s]_{S'}$ (1)

$[t]_T = Q[t]_{T'}$ (2)

$s_j^{'}$ representa la j-ésima columna de P

$t_j^{'}$ representa la j-ésima columna de Q

Si $A = [L]_T^S$, entonces

$[L(s)]_T = A[s]_S$ (Teorema 18) (3)

$L(s) = t$ (4)

Sustituyendo (4) en (2)

$[L(s)]_T = Q[t]_{T'}$ (5)

Igualando (5) y (3)

$Q[L(s)]_{T'} = A[s]_S$ (6)

Sustituyendo (1) en (6)

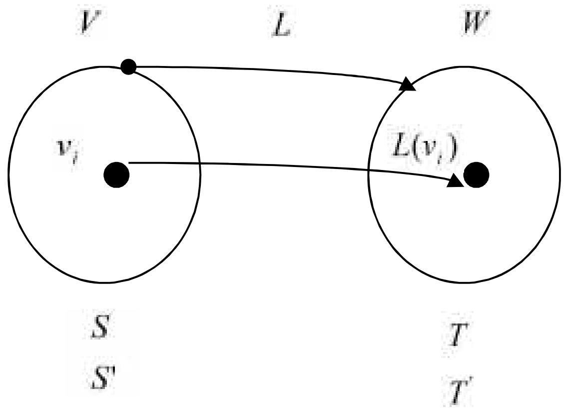
$Q[L(s)]_{T'} = AP[s]_{S'}$ (7)

Multiplicando a (7) por Q^{-1}

$$[L(s)]_{T'} = Q^{-1}AP[s]_{S'}$$

$$[L]_{T'}^{S'} = Q^{-1}AP$$

Gráficamente:



Los conjuntos S', S y T', T son bases ordenadas de V y W respectivamente.

Se definen las matrices asociadas A y B

$$\begin{tikzcd}
{[v_i]_S} \arrow[r, "A=[L]_T^S"] & {[L(v_i)]_T} \\
{[v_i]_{S'}} \arrow[u, "P"] \arrow[r, "B=[L]_{T'}^{S'}"] & {[L(v_i)]_{T'}} \arrow[u, "Q"']
\end{tikzcd}$$

P y Q son las matrices de cambio de base de S' a S y de T' a T respectivamente. Entonces se pueden considerar:

1. A_{ST} es la representación directa de L
2. $B_{S'T'} = Q_{T'\to T}^{-1} A_{ST} P_{S'\to S}$

Además:

3. $B_{ST'} = Q_{T'\to T}^{-1} A_{ST}$
4. $B_{S'T} = A_{ST} P_{S'\to S}$

Corolario

Sea $L : V \to V$ una transformación lineal y sean S, S' bases ordenadas de V con matriz de cambio de base $P_{S'\to S}$ de S' a S. Entonces si $B = [L]_{S'}^{S'}$ y $A = [L]_{S}^{S}$

$$B = P_{S'\to S}^{-1} \,.\, A.P_{S'\to S}$$

DEFINICIÓN

Sean las matrices $A, B \in M_{n\times n}$, B es ***semejante*** a A si existe una matriz P invertible, tal que, $B = P^{-1}AP$.

TEOREMA 21

Sean $L : V \to W$ una transformación lineal y $A, B \in M_{m\times n}$. Las matrices A y B son semejantes si y sólo si representan la misma transformación lineal respecto a bases diferentes.

Observaciones

1. Si B es la matriz asociada a f respecto a la base B_2 y A es la matriz asociada a f respecto a la base B_1, entonces se tiene que $B = P^{-1}AP$, donde P es la matriz de transición de la base B_2 a la base B_1.

   Este es uno de los casos que ocurre con mucha frecuencia en las aplicaciones a la ingeniería.

2 El propósito de una representación matricial de la transformación lineal f es permitir analizar f usando B. Trabajar con B presenta ventajas. Como bases distintas dan como resultado matrices asociadas distintas, la elección adecuada de una base para obtener una matriz B sencilla es importante. Este es el objetivo del siguiente capítulo.

Resumen

La teoría de matrices es una herramienta muy útil en muchas áreas del conocimiento, ya que permite trabajar con grandes conjuntos de información de una forma cómoda y activa. Sin embargo, el concepto de matriz consiste en algo más que una "tabla de “números”, de hecho, es la representación de funciones definidas entre espacios vectoriales que se conocen como transformaciones lineales. En este sentido, se ilustra en distintos ejercicios la correspondencia uno a uno existente entre el conjunto de matrices de orden mxn y el de las transformaciones lineales de $V \text{ en} W$, que son espacios vectoriales de dimensiones n y m respectivamente.

La conexión entre estos conceptos es tan estrecha que las operaciones entre transformaciones lineales tienen una simetría en términos de matrices. Otra muestra más, de esta relación, la ofrece el concepto de matriz inversa, que está asociado al de transformación lineal inversa.

Así pues, los contenidos que se enfatizan en este capítulo son:

Transformaciones lineales.

Núcleo e imagen.

Isomorfismos.

Operaciones entre transformaciones lineales.

Matriz asociada a una transformación lineal.

Matriz asociada a una transformación lineal compuesta.

Matriz y transformación lineal inversa.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Determinar si la función dada es una transformación lineal

$$f : R \to R$$
$$x \mapsto y = f(x)$$

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = ax + b$, si : i) $b \div 0$ ii) b Z 0

c) $f(x) = senx$

d) $f(x) = e^x$

e) $f(x) = |x|$

2. Determinar si la función f es una transformación lineal

a) $$\begin{aligned} f:\ & R^2 \to R^2 \\ & (x,y) \mapsto f(x,y) = (x-y, x+2y) \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} f:\ & M_n \to M_n \\ & A \mapsto f(A) = A^t \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} F:\ & V \to R \\ & f \mapsto F(f) = \int_a^b f(x)dx \end{aligned}$$, donde $V = \{ f\ [a,b] \to R : f \text{ es contínua} \}$

3. Sea la función

$$f: \quad R^4 \rightarrow P_1(x)$$
$$(a,b,c,d) \mapsto f(a,b,c,d) = (a+b-d)+(a-c+d)x$$

a) Hallar la imagen de f una base y su dimensión.

b) Encontrar el núcleo de f una base y su dimensión.

4. Dada la función

$$\begin{aligned} f: \quad R^2 &\rightarrow P_1[x] \\ (a,b) &\mapsto f(a,b) = (a-b) + (b-2a)x \end{aligned}$$

a) Demostrar que f es una transformación lineal.

b) Hallar la imagen de f una base y su dimensión.

c) Encontrar el núcleo de f una base y su dimensión.

d) ¿f es inyectiva, es sobreyectiva?

5. Sean $T : R^3 \to R^2$ una transformación lineal y B una base de R^3 tales que

$$B = \{(1,0,-1),(2,-1,1),(-1,1,-1)\}$$

$$T(1,0,-1) = (-3,1), \quad T(2,-1.1) = (4,2), \quad T(-1,1,-1) = (-1,3).$$

a) Hallar $T(x, y, z)$ explícitamente.

b) Encontrar la imagen de T, una base y su dimensión.

c) Calcular el núcleo de T, una base y su dimensión.

6. Sean $f : P_2[x] \to R^3$ una transformación lineal y B una base de $P_2[x]$ tales que:

$$B = \{1 - x, 1 - x^2, x + x^2\}$$

$$f(1 - x) = (0,1,-1)$$
$$f(1 - x^2) = (1,0,1)$$
$$f(x + x^2) = (-1,1,0)$$

Hallar:

a) $f(a + bx + cx^2)$ explícitamente.

b) Hallar la imagen de f, una base y su dimensión.

c) Encontrar el núcleo de *f*, una base y su dimensión.

7. Sea la transformación lineal

$$
\begin{array}{llll}
f: & P_2[x] & \to & R^3 \\
 & a+bx+cx^2 & \mapsto & f\left(a+bx+cx^2\right)=\left(\alpha a+b+c,\ a+\alpha b+c,\ a+b+\alpha c\right)
\end{array}
$$

a) ¿Para qué valores de α , f es biyectiva?

b) Calcular f^{-1} para $\alpha = 0$.

8. Sea $f\ :\ R^3 \to M$ una transformación lineal tal que

$$f\ (x, y, z) = \begin{pmatrix} x - 2z & 2x + y + 2z \\ 2x + y + 2z & 3\sim x + \sim y + (\sim -1)z \end{pmatrix}$$

donde M es el espacio vectorial de las matrices simétricas de orden 2x2.

a) Hallar los valores de $\sim$ para los cuales f es biyectiva.

b) Encontrar la inversa de f si $\sim = 0$.

9. Dada $f : R^3 \rightarrow R^3$, una transformación lineal invertible tal que

$$f(x, y, z) = (x - 2y + z, y - 3z, x + 2z)$$

y. además, $B_1 = \{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\}$ y $B_2 = \{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$, bases R^3 .

a) Comprobar que f es invertible

b) Hallar $A = [f]_{B_2}^{B_1}$.

c) Si $[f(u)]_{B2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ hallar u. Sugerencia: $[u]_{B1} = A^{-1}[f(u)]_{B2}$.

10. Sea la transformación lineal

$$f: \quad M_s \quad \to \quad M_s$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & a-b+c \\ a-b+c & a-c \end{pmatrix}$$

donde $M_s = \{A_{2x2} : A \text{ es simétrica}\}$ es subespacio vectorial de M_{2x2}, y

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \; B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

son bases ordenadas del subespacio vectorial $(M_S, R, +, \bullet)$.

a) Hallar la matriz asociada $A = [f]_{B_2}^{B_1}$.

b) Encontrar $[f(E)]_{B_2}$, conociendo que $E = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

11. Sea el conjunto $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ base de R^3 donde

$$u_1 = (1,-1,1),\ u_2 = (1,0,1),\ u_3 = (1,1,-1)$$

Si $L : R^3 \to R^3$ es una transformación lineal, tal que

$$u_1 \in N(L)\ ,\ v_2 = L(u_2) = (0,-1,1),\ v_3 = L(u_3) = (1,1,-1)$$

a) Hallar la matriz asociada $A = [L]_B^B$.

b) Encontrar $L(x, y, z)$

c) ¿ L es inyectiva, sobre, biyectiva?

d) A partir del conjunto $\{v_2, v_3\}$ completar una base ortogonal para R^3 .

12. Dada la transformación lineal

$$L: \quad R^3 \quad \to \quad R^3$$
$$(x, y, z) \mapsto L(x, y, z) = (x + 2y \quad , -x + 3y - 5z, 2x + 3y + a z)$$

a) ¿Para qué valores de a, L es biyectiva?

b) Hallar la matriz asociada a L respecto a las bases canónicas

c) Encontrar una base B para la cual la matriz asociada a L respecto a B tenga una columna de ceros. (Indicación: uno de los vectores de B debe pertenecer al núcleo).

13. Dada la transformación lineal

$$\begin{array}{rcl} L: \quad P_2 & \to & P_2 \\ p(x) & \mapsto & L(p(x)) = p'(x) - 2\,p(x) \end{array}$$

a) Comprobar que L es invertible

b) Hallar L^{-1}

c) Encontrar la matriz asociada $A = [L]_B^C$, donde

$C = \{1, x, x^2\}$ y $B = \{1 - x, x - x^2, 1 + x^2\}$ son bases de P_2.

d) Si $p(x) = 2 - x + x^2$, hallar $L(p(x))$ usando la definición y usando A.

14. Sean $f : R^3 \to R^3$ una transformación lineal y B base de R^3, donde

$$f(1,0,0) = (1,-1,\text{ª}),\ \ f(0,1,1) = (0,1,1),\ \ f(0,2,1) = (0,2,1)$$

$$B = \{(1,0,0),(0,1,1),(0,2,1)\}$$

a) Encontrar $f(x,y,z)$

b) ¿Para qué valores de ª, L es biyectiva?

c) Hallar las bases del núcleo y la imagen de L usando b).

d) Calcular la matriz asociada $A = [f]_B^B$ cuando ª $= 2$

15. Sean $f \in \mathscr{L}\left(P_2[t], R^3\right)$ y B_1 y B_2 bases ordenadas de $P_2[t], R^3$ respectivamente

$$B_1 = \left\{t + t^2, 1, t^2\right\} \text{ y } B_2 = \{(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0)\}$$

$$A = [f]_{B2}^{B1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcular explícitamente $f \in \mathscr{L}\left(P_2[t], R^3\right)$.

b) Encontrar $f(p(x))$ de dos maneras: usando la matriz asociada y el resultado en a). Considerar que $p(x) = x^2 - 5x + 6$

16. Sean las transformaciones lineales

$$f: R^3 \to R^3$$
$$(x,y,z) \mapsto f(x,y,z) = (x+z,\ y+z, x+y)$$

$$g: R^3 \to R^3$$
$$(x,y,z) \mapsto f(x,y,z) = (x,\ x+y,\ x+y+z)$$

a) Hallar gof y $A = [gof]_C^C$.

b) Calcular $B = [g]_C^C$ y $C = [f]_C^C$

c) Verificar que $A = BC$

17. Sea $gof : P_2[t] \rightarrow R^3$, una transformación lineal tal que

$gof(p(t)) = g(f(p(t)) = g(p(0), p'(1)) = (p(0), p'(1), p(0) + p'(1))$, y las bases

$B_1 = \{1 + t, t, t^2\}$

$B_2 = \{(1,1), (-1,2)\}$

$B_3 = \{(1,1,0), (01,1), (0,1,0)\}$

a) Encontrar $[gof]_{B3}^{B1}$ directamente.

b) Verificar que: $[gof]_{B3}^{B1} = [g]_{B3}^{B2}.[g]_{B2}^{B1}$.

18. Sea $f: R^3 \to R^3$ una transformación lineal donde

$$A = [f]_{B_2}^{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$B_1 = \{(1,0,0),(0,0,1),(0,1,0)\}$ y $B_2 = \{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\}$ son bases R^3.

a) Hallar f explícitamente.

b) Calcular $[f]_C^C$, donde C representa la base canónica de R^3.

c) Encontrar $f(u)$ de dos maneras. Considerar que $[u]_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

19. Sea la transformación lineal

$$f: M_{2\text{x}2} \rightarrow R^2$$
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+b-c, b-c+d)$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$ base ordenada de $M_{2\text{x}2}$

a) Calcular $[f]_C^B$. C representa la base canónica.

b) Encontrar $[f]_C^C$. C representa la base canónica.

c) Determinar $f(E)$ usando a). Si $[E]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

20. Sean las bases del espacio vectorial $P_2[x]$

$$B = \{1 + x, -x, x - x^2\} \text{ y } S = \{-2, 1 + x, x^2\}$$

a) Hallar la matriz de cambio de base de B a S.

b) Calcular $[p(x)]_S$ si $[p(x)]_B = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ y determinar $p(x)$.

21. Dadas las transformaciones lineales $f : R^2 \rightarrow R^3$ y $g : R^3 \rightarrow R^2$ definidas por

$$f(u_1, u_2) = (u_1, u_2, 0)$$

$$g(v_1, v_2, v_3) = (v_1 - v_3, v_2 - v_3)$$

a) Obtener la transformación lineal $h = fog$.

b) Expresar $A = [f]_C^C$.

c) Hallar $B = [g]_C^B$.

d) Encontrar $E = [h]_B^B$.

$B = \{(1,0,1), (0,-2,3), (1,-1,2\}$ y C son bases ordenadas de R^3.

22. Sean las bases de R^2

$$B_1 = \{(1,0),(0,1)\} \text{ y } B_2 = \{(1,3),(2,5)\}$$

a) Hallar la matriz de cambio de base Q de B_1 a B_2.

b) Encontrar la matriz de cambio de base P de B_2 a B_1.

c) Verificar que $P = Q^{-1}$.

d) Mostrar que $[u]_{B2} = Q[u]_{B1}$, donde $u = (x, y, z)$.

e) Mostrar que $B = P^{-1}AP$, donde $B = [\,f\,]_{B2}^{B2}$, $A = [\,f\,]_{B1}^{B1}$, y además $f(x, y, z) = (2y, 3x - y)$.

23. Sean las bases de R^3

$$B_1 = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\} \text{ y } B_2 = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$$

a) Hallar la matriz de cambio de base Q de B_1 a B_2.

b) Encontrar la matriz de cambio de base P de B_2 a B_1.

c) Verificar que $P = Q^{-1}$.

d) Mostrar que $[u]_{B2} = Q[u]_{B1}$, donde $u = (x, y, z)$.

e) Mostrar que $B = P^{-1}AP$, donde $B = [\,f\,]_{B2}^{B2}$, $A = [\,f\,]_{B1}^{B1}$, y además $f(x, y, z) = (2y + z,\ x - 4y,\ 3x)$.

24. Dada la transformación lineal $f: R^2 \to R^2$ si se conoce que

$$f(1,-1)=(-2,1) \text{ y } f(2,3)=(3,-1)$$

a) Calcular f explícitamente.

b) Hallar la matriz $A=[f]_C^C$. C es la base canónica de R^2.

c) Encontrar la matriz $B=[f]_S^S$ usando la matriz de cambio de base. $S=\{(1,1),(-1,1)\}$ es base de R^2.

25. Dadas la transformación lineal f y las bases C y S de R^2

$$\begin{aligned} f:\quad & R^2 \rightarrow R^2 \\ & (x, y) \mapsto f(x, y) = (x, -y) \end{aligned}$$

C es base canónica y $S = \{(1,-1),(1,2\}$

a) Hallar $A = [f]_C^C$.

b) Calcular $B = [f]_S^S$ usando la matriz de cambio de base.

c) Mostrar que A y B son semejantes.

26. Dada la transformación lineal

$$\begin{aligned} f: \quad & R^3 \to R^3 \\ & (x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = (2x - z, x + y - z, z) \end{aligned} \quad , \text{ y}$$

C la base canónica de R^3

$S = \{(1,0,11), (0,1,0), (1,1,0)\}$ base ordenada de R^3

a) Hallar $A = [f]_C^C$.

b) Calcular $B = [f]_S^S$ usando la matriz de cambio de base.

c) Mostrar que A y B son semejantes.

27. Dada la transformación lineal $f: \quad R^3 \to R^2$ donde

$$A = [f]_C^B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$B = \{e_1, e_2, e_3\}$ es base canónica R^3

$C = \{f_1, f_2\}$ es base canónica R^2

a) Si $B' = \{e_1', e_2', e_3'\}$ donde

$e_1' = e_2 + e_3$

$e_2' = e_1 + e_3$

$e_3' = e_1 + e_2$

Calcular $[f]_C^{B'}$

b) Si $C' = \{f_1', f_2'\}$ donde

$f_1' = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$

$f_2' = \frac{1}{2}(f_1 - f_2)$

Calcular $[f]_{C'}^{B'}$

28. Dada la transformación lineal $f: \quad R^2 \to R^2$ donde

$$A = [f]_C^B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$B = \{(1,-1),(2,3)\}$ es base R^3

$C = \{e_1, e_2\}$ es base canónica R^2

$B' = \{e_1, e_2\}$ es base canónica R^2

$C' = \{(1,1),(-2,1)\}$ es base R^3

Hallar $[f]_{C'}^{B'}$ usando la matriz de cambio de base.

Capítulo 7

VALORES Y VECTORES PROPIOS

DEFINICIÓN

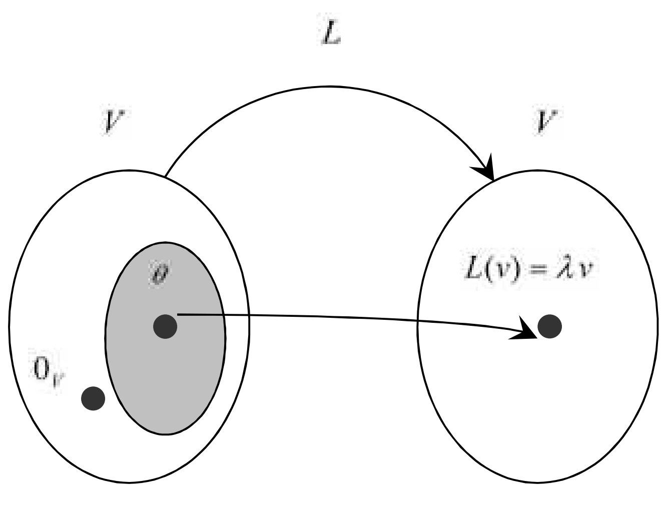
Sean $L \in \mathscr{L}(V,V)$, $(V,K,+,\bullet)$, $\lambda \in K$

λ es ***valor propio*** de L, si y solo sí $\exists v \neq 0_V, v \in V$, tal que,

$$L(v) = \lambda v.$$

$v \in V, v \neq 0_V$, es ***vector propio*** de L asociado con el valor propio λ.

Gráficamente:



Observaciones

1. 0_V no es un vector propio
2. 0 si es un valor propio

Notación

$V_{\text{ª}}$ representa al conjunto de vectores propios de la transformación lineal L asociados al valor propio ª , incluyendo al vector nulo.

$$V_{\text{ª}} = \{ v \ \mid \ L(v) = \text{ª} v \} \cup \{0_V\}$$

TEOREMA 1

$V_{\text{ª}}$ es subespacio vectorial de $(V, K, +, \bullet)$

DEMOSTRACION

1. $0_V \in V_{\text{ª}}$

   Si cumple por definición

2. $\forall \sim \in K, \forall u, v \in V_{\text{ª}} \ \mid \ u + \sim v \in V_{\text{ª}}$

   $L(u) = \text{ª} u$ (1)

   $L(v) = \text{ª} v$ (2)

   $L(u + \sim v) = L(u) + \text{ª} L(v)$ (3)

   Sustituyendo (1) y (2) en (3)

   $L(u + \sim v) = \text{ª} u + \sim \text{ª} v$

   $= \text{ª}(u + \sim v)$

   $u + \sim v \in V_K$

Por 1. y 2. $V_{\text{ª}}$ es subespacio vectorial de V .

VALORES Y VECTORES PROPIOS DE MATRICES

Sean ª $\in K$ y $X \in M_{n\text{x}1}$.

ª y X se llaman valor y vector propios de $A \in M_{n\text{x}n}$, respectivamente si y sólo si

$$AX = \text{ª} X$$

TEOREMA 2

Sean $L \in \mathscr{L}(V,V)$, $(V,K,+,\bullet)$, $A=[L]_S^S$ y $X \in M_{n\mathrm{x}1}$, entonces ª es un valor propio de L, si y sólo si ª es un valor propio de la matriz asociada A.

DEMOSTRACION

1. Si ª es un valor propio de L, entonces ª es un valor propio de A

   Si ª es un valor propio de L, $L(v) = \text{ª}\, v$

   $[L(v)]_S = [\text{ª}\, v]_S$

   $A[v]_S = \text{ª}\, [v]_S$

   $AX = \text{ª}\, X$

   ª es un valor propio de A

2. Si ª es un valor propio de A, entonces ª es un valor propio de L.

   Seguir el proceso inverso

TEOREMA 3

Si ª es un valor propio de A, $V_{\text{ª}} = CS[(\text{ª}\, I - A)X = O]$ ó también $V_{\text{ª}} = CS[(A - \text{ª}\, I)X = O]$

DEMOSTRACION

Si ª es un valor propio de A, entonces

$AX = \text{ª}\, X$

$\text{ª}\, X - AX = O$

$(\text{ª}\, I - A)X = O$

$$CS = \{X \mid (\text{ª} I - A)X = O\} \quad (1)$$

$$V_{\text{ª}} = \{X \mid (\text{ª} I - A)X = O\} \cup \{0_{nK1}\} \quad (2)$$

Igualando (1) y (2)

$V_{ª} = CS\left[(ª\, I - A)X = O\right]$

Corolario 1

$DimV_{ª} = n -$ Rango $(ª\, I - A) = n -$ Rango $(A - ª\, I)$

Corolario 2

$ª$ es valor propio de A si y sólo si $\det(ª\, I - A) = 0$ ó $\det(A - ª\, I) = 0$

TEOREMA 4

Sea $A \in M_{n \times n}$ y sean $ª_1, ª_2, \cdots, ª_n$ valores propios diferentes de A, con sus vectores propios asociados $v_1, v_2, \cdots, v_n$, entonces $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ es linealmente independiente.

DEMOSTRACION

Se demuestra por inducción

1. Si $n = 2$

v_1, v_2 son vectores propios asociados a los valores propios $ª_1, ª_2$

$\sim_1 v_1 + \sim_2 v_2 = 0_V$ (1)

Multiplicando (1) por A

$\sim_1 Av_1 + \sim_2 Av_2 = 0_V$

$\sim_1 ª_1 v_1 + \sim_2 ª_2 v_2 = 0_V$ (2)

Multiplicando (1) por $ª_1$

$\sim_1 ª_1 v_1 + \sim_2 ª_1 v_2 = 0_V$ (3)

Restando (3)-(2)

$\sim_2 ª_1 v_2 + \sim_2 ª_2 v_2 = 0_V$

$\sim_2 (ª_1 - ª_2) v_2 = 0_V$

$\sim_2 = 0$, ya que, $ª_1 \neq ª_2$, y

$v_2 \neq 0_V$ (vector propio)

De (1)

$\alpha_1 = 0$

$\{v_1, v_2\}$ es linealmente independiente.

2. $n = k$

Si $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$es LI, entonces $\{v_1, v_2, \cdots, v_n, v_{n+1}\}$es linealmente independiente

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n n_v + \alpha_{n+1} v_{v+1} = 0_V \qquad (4)$$

Multiplicando (4) por A

$$\alpha_1 v_1 A + \alpha_2 v_2 A + \cdots + \alpha_n v_n A + \alpha_{n+1} v_{n+1} A = 0_V$$

$$\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \alpha_2 \lambda_2 v_2 + \cdots + \alpha_n \lambda_n v_n + \alpha_{n+1} \lambda_{n+1} v_{n+1} = 0_V \qquad (5)$$

Multiplicando (4) por λ_{n+1}

$$\alpha_1 \lambda_{n+1} v_1 + \alpha_2 \lambda_{n+1} v_2 + \cdots + \alpha_n \lambda_{n+1} n_v + \alpha_{n+1} \lambda_{n+1} v_{n+1} = 0_V \qquad (6)$$

Restando (6) de (5)

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{n+1})v_1 + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_{n+1})v_2 + \cdots + \alpha_n(\lambda_n - \lambda_{n+1})v_n = 0_V$$

$\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ es linealmente independiente, entonces

$$\lambda_1 - \lambda_{n+1} \neq 0, \lambda_2 - \lambda_{n+1} \neq 0, \cdots, \lambda_n - \lambda_{n+1} \neq 0$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$$

De (4)

$\alpha_{n+1} = 0$, por lo tanto

$\{v_1, v_2, \cdots, v_n, v_{n+1}\}$es linealmente independiente.

POLINOMIO CARACTERÍSTICO DE UNA MATRIZ

Sea $A \in M_{n\mathrm{x}n}$, $p(\lambda)$ es el polinomio característico de A si y solo si:

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det(A - \lambda I)$$

ECUACIÓN CARACTERÍSTICA DE UNA MATRIZ

Sea $A \in M_{n\mathrm{x}n}$, $p(\lambda) = 0$ es la ecuación característica de A si y solo si:

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det(A - \lambda I) = 0$$

CÁLCULO DEL POLINOMIO CARACTERÍSTICO

Si $A \in M_{2x2} \rightarrow p(\lambda) = \lambda^2 - tr(A)\lambda + \det A$

Si $A \in M_{3x3} \rightarrow p(\lambda) = \lambda^3 - tr(A)\lambda^2 + (P_{11} + P_{22} + P_{33})\lambda - \det A$

Generalizando:

Si

$$A \in M_{nxn} \rightarrow p(\lambda) = (-\lambda)^n + (-\lambda)^{n-1} tr(A) + (-\lambda)^{n-2} tr_2(A) + (-\lambda)^{n-3} tr_3(A) + \cdots \lambda^0 \det A$$

siendo $tr_i(A)$ la suma de todos los menores de orden i que contienen en su diagonal principal, i elementos de la diagonal principal de A.

TEOREMA 5

$\lambda \in K$ es un valor propio de $A \in M_{nxn}$ si y solo si λ es raíz de la ecuación característica de A.

DEMOSTRACION

a) Si $\lambda \in K$ es un valor propio de $A \in M_{nxn}$, λ es raíz de la ecuación característica de A.

Si $\lambda \in K$ es un valor propio de A, entonces

$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det(A - \lambda I) = 0$

λ es raíz de la ecuación característica de A.

b) Se sigue el proceso inverso

MULTIPLICIDAD ALGEBRAICA

Sea $A \in M_{nxn}$ y $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n1}(\lambda - \lambda_2)^{n2} \ldots (\lambda - \lambda_n)^{nr} = 0$ su ecuación característica y $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ son raíces de $p(\lambda)$ y las mismas son de multiplicidad algebraica (MA) $n_1, n_2, \cdots, n_r$.

MULTIPLICIDAD GEOMÉTRICA

$DimV_{\lambda_i} = MG_{\lambda_i}$

Observación

$MG_{a_i} \leq MA_{a_i}$

MATRICES SEMEJANTES Y DIAGONALIZACIÓN

DEFINICIÓN

Sean $A, B \in M_{n\text{x}n}$. A es ***semejante*** a B si existe una matriz P invertible, tal que, $B = P^{-1}AP$.

DEFINICIÓN

Sea $A \in M_{n\text{x}n}$. A es ***diagonalizable*** si existe una matriz diagonal D tal que, A es semejante a D, es decir, $D = P^{-1}AP$.

TEOREMA 6

Sean $A \in M_{n\text{x}n}$ una matriz asociada a L y $L \in \mathscr{L}(V,V)$ entonces, A es diagonalizable si y sólo si existe una base del espacio vectorial $M_{n\text{x}1}$, formada por vectores propios de A.

DEMOSTRACION

a) Si A es diagonalizable, existe una base del espacio vectorial $M_{n\text{x}1}$, formada por vectores propios de A.

Si A es diagonalizable,

$D = P^{-1}AP$

Multiplicando a los dos miembros de la igualdad anterior por P, se obtiene

$PD = AP$

Se escriben D y P en forma desarrollada

$$D = \begin{pmatrix} a_1 & & & & \\ & a_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & a_k & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & a_n \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & & b_{2j} & & b_{2n} \\ \vdots & & & & & \\ b_{j1} & b_{j2} & & b_{jj} & & b_{jn} \\ \vdots & & & & & \\ b_{n1} & b_{n2} & & b_{nj} & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

Columna j-ésima de $P.D = P.$ Columna j-ésima de D, (D_j)

$$= P.D_j \qquad (1)$$

Columna j-ésima de $A.D = A.$ Columna j-ésima de P, (P_j)

$$= A.P_j \qquad (2)$$

Igualando (1) y (2)

$$P.D_j = A.P_j \qquad (3)$$

$$P.D_j = a_j \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{jj} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$$

$$P.D_j = a_j P_j$$

De (3)

$$A.P_j = a_j P_j$$

P_j es un vector propio de A asociado al valor propio a_j. Generalizando, existen n vectores propios que constituyen una base de $A \in M_{n\text{x}1}$. (Teorema 4)

b) Si existe una base de M_{nx1} formada por vectores propios de A, entonces A es diagonalizable.

Sea $S = \{v_{p1}, v_{p2}, \cdots, v_{pn}\}$ base de nK_1

$v \in V$ es combinación lineal de S

$$v = \sim_1 v_{p1} + \sim_2 v_{p2} + \cdots + \sim_n v_{pn}$$

$$L(v) = \sim_1 L(v_{p1}) + \sim_2 L(v_{p2}) + \cdots + \sim_n L(v_{pn}) \qquad (1)$$

$$\begin{cases} L(v_{p1}) = \text{a}_1 v_{p1} + 0.v_{p2} + \cdots + 0.v_{pn} \\ L(v_{p2}) = 0.v_{p1} + \text{a}_2.v_{p2} + \cdots + 0.v \\ \vdots \\ L(v_{pn}) = 0.v_{p1} + 0.v_{p2} + \cdots + \text{a}_n v_{pn} \end{cases} \qquad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1)

$$L(v) = \sim_1(\text{a}_1 v_{p1} + 0.v_{p2} + \cdots + 0.v_{pn}) + \sim_2(0.v_{p1} + \text{a}_2.v_{p2} + \cdots + 0.v_{pn}) + \cdots +$$
$$\sim_n(0.v_{p1} + 0.v_{p2} + \cdots + \text{a}_n v_{pn})$$

Reordenando

$$L(v) = (\text{a}_1\sim_1 + 0.\sim_2 + \cdots + 0.\sim_n)v_{p1} + (0.\sim_1 + \text{a}_2.\sim_2 + \cdots + 0.\sim_n)v_{p2} + \cdots +$$
$$(0.\sim_1 + 0.\sim_2 + \cdots + \text{a}_n\sim_n)v_{pn}$$

Escribiendo matricialmente

$$[L(v)]_S = \begin{pmatrix} \text{a}_1\sim_1 + 0.\sim_2 + \cdots + 0.\sim_n \\ 0.\sim_1 + \text{a}_2\sim_2 + \cdots + 0.\sim_n \\ 0.\sim_1 + 0.\sim_2 + \cdots + \text{a}_n.\sim_n \end{pmatrix}$$

$$[L(v)]_S = \underbrace{\begin{pmatrix} \text{a}_1 & & & \\ & \text{a}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \text{a}_n \end{pmatrix}}_{\downarrow \; D=[L]_S^S} \underbrace{\begin{pmatrix} \sim_1 \\ \sim_2 \\ \vdots \\ \sim_n \end{pmatrix}}_{\downarrow \; [v]_S}$$

$[L(v)]_S = D[v]_S$

A es semejante a D, entonces

A es diagonalizable.

Corolario 1

Si A_n tiene n vectores propios, entonces A_n es diagonalizable ($MG_{\lambda_i} = MA_{\lambda_i}$)

Corolario 2

Si A_n es diagonalizable, la matriz diagonal semejante a A_n tiene en su diagonal los valores propios de A_n.

Observación

Si $[v_i]_c$ son las coordenadas del vector v_i en la base canónica C, entonces $[v_i]_s$ son las coordenadas del vector v_i en la base de vectores propios S de A y forman la matriz P.

$$\begin{tikzcd}[v_i]_C \arrow[r, "A=[L]_C^C"] & [L(v_i)]_C \arrow[d, "P^{-1}"] \\ [v_i]_S \arrow[u, "P"] \arrow[r, "D=[L]_S^S"] & [L(v_i)]_S\end{tikzcd}$$

DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES SIMÉTRICAS

En este apartado se analiza la diagonalización de matrices simétricas ($A = A^t$) . Se hace particular este caso, debido a que es más fácil de resolver que el caso general, y a que las matrices simétricas se presentan en muchos problemas de aplicación.

TEOREMA 7

Todas las raíces de la ecuación característica de una matriz real y simétrica son reales.

DEMOSTRACION

Se supone que existen valores propios $a \in C$ de $A \in M(R)_{nxn}$ tales que

$$AX = aX$$

$$\overline{AX} = \overline{a.X}$$

$$A\,\overline{X} = \overline{a}.\,\overline{X} \qquad (1)$$

Multiplicando (1) por X^t

$$X^t A\,\overline{X} = X^t\,\overline{a}.\,\overline{X}$$

$$(X^t A)\,\overline{X} = \overline{a}.X^t\,\overline{X}$$

$$(AX^t)\,\overline{X} = \overline{a}.X^t\,\overline{X}$$

$$(a\,X)^t\,\overline{X} = \overline{a}.X^t\,\overline{X}$$

$$a\,X^t\,\overline{X} = \overline{a}.X^t\,\overline{X}$$

$$a = \overline{a}$$

Lo que contradice la suposición, entonces

$$a \in R$$

TEOREMA 8

Si $A \in M_{nxn}$ es matriz simétrica, entonces los vectores propios asociados a valores propios distintos de A son ortogonales.

DEMOSTRACION

Sean X_1 y X_2 vectores propios de A con valores propios a_1 y a_2, tales que:

$$AX_1 = a_1 X_1 \qquad (1)$$

$$AX_2 = a_2 X_2 \qquad (2)$$

$$a_1(X_1, X_2) = a_1(X_1, X_2)$$

$$= (a_1 X_1, X_2) \qquad (3)$$

Sustituyendo (1) en (3)

$$a_1(X_1, X_2) = (AX_1, X_2)$$

$$= (X_1, AX_2) \qquad (4)$$

Sustituyendo (2) en (4)

$$a_1(X_1, X_2) = (X_1, a_2 X_2)$$

$$a_1(X_1, X_2) = a_2(X_1, X_2)$$

$$a_1(X_1, X_2) - a_2(X_1, X_2) = 0$$

$(a_1 - a_2)(X_1, X_2) = 0$, donde $(a_1 - a_2) \neq 0$ (Hipótesis)

$\rightarrow (X_1, X_2) = 0$

DEFINICION

Una matriz cuadrada A es ***ortogonal*** si su matriz inversa es igual a su transpuesta, esto es, $A^{-1} = A^t$.

TEOREMA 9

Sea $A \in M_{nxn}$, A es ortogonal si y sólo si las columnas y las filas de A forman un conjunto ortonormal de vectores de R^n.

TEOREMA 10

Si A es una matriz real y simétrica, entonces existe una matriz ortogonal P, tal que $P^{-1}AP = P^t AP = D$. En consecuencia se dice que la matriz A es ***ortogonalmente diagonalizable.***

DEMOSTRACION

Si A es una matriz real y simétrica, existe una base de vectores de $M_{n\mathrm{x}1}$, (Teorema 6) existe una base de vectores ortonormales de $M_{n\mathrm{x}1}$, entonces existe una matriz P ortogonal, tal que, $P^{-1} = P^t$, donde $P^{-1}AP = P^t AP = D$.

TEOREMA 11

Sea la matriz $A \in M(R)_n$.

Si A es simétrica, entonces es diagonalizable.

PROPIEDADES

Sea $A \in M_{nxn}$

1. Si u y v son vectores propios asociados al valor propio a de A, si $u + v \neq 0_V$, entonces $u + v$ es un vector propio asociado con a.
2. Si u es un vector propio asociado con el valor propio a de A, ku, $k \neq 0$, también es un vector propio asociado con a.
3. Si a es un valor propio de A y u es un vector propio asociado, para cualquier entero no negativo k, a ^{k} es un valor propio de A^k y u es un vector propio asociado.
4. A y A^t tienen los mismos valores propios.
5. Si A es una matriz diagonal, triangular superior o triangular inferior, sus valores propios son las componentes de su diagonal.
6. $|A|$ es el producto de todas las raíces del polinomio característico de A. De manera equivalente, $|A|$ es el producto de los valores propios de A.
7. Matrices semejantes tienen los mismos valores propios.
8. A no es invertible si y sólo si 0 es un valor propio de A.
9. A es diagonalizable si y sólo si A tiene n vectores propios linealmente independientes.
10. Si A tiene n valores propios distintos, A es diagonalizable.

TEOREMA DE CALEY - HAMILTON

TEOREMA 12

Si $P(\lambda)$ y $Q(\lambda)$ son polinomios en la variable escalar λ, con coeficientes matriciales cuadrados y si $P(\lambda)=Q(\lambda).(\lambda I-A)$, entonces $P(A)=O.$

DEMOSTRACION

$Q(\lambda)= \ _0+\ _1\lambda+\ _2\lambda^2+\cdots+\ _n\lambda^n$, donde $\ _1$ son coeficientes matriciales cuadrados

$$P(\lambda)=\left(\ _0+\ _1\lambda+\ _2\lambda^2+\cdots+\ _n\lambda^n\right)\left(\lambda I-A\right)$$

$$P(\lambda)=-\ _0A-\ _1A\lambda-\ _2A\lambda^2-\cdots-\ _nA\lambda^n+\ _0\lambda+\ _1\lambda^2+\ _2\lambda^3-\cdots+\ _n\lambda^{n+1}$$

Si $A=\lambda$

$$P(A)=-\ _0A-\ _1A^2-\ _2A^3-\cdots-\ _nA^{n+1}+\ _0A+\ _1A^2+\ _2A^3-\cdots+\ _n\lambda^{n+1}$$

$P(A)=O$ //

TEOREMA 13

Toda matriz cuadrada satisface su ecuación característica, es decir, si $P(\lambda)=0$, es la ecuación característica de A, entonces $P(A)=O$.

DEMOSTRACION

Considerando que

$$P(\lambda)=\left|\lambda I-A\right|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}$$

Cualquier cofactor de la matriz $(\lambda I-A)$ es un polinomio en λ, entonces

$$Adj(\lambda I - A) = \begin{pmatrix} P_{11}(\lambda) & P_{12}(\lambda) & \cdots & P_{1n}(\lambda) \\ P_{21}(\lambda) & P_{22}(\lambda) & \cdots & P_{2n}(\lambda) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{n1}(\lambda) & P_{n2}(\lambda) & \cdots & P_{nn}(\lambda) \end{pmatrix}$$

Esto es, se puede expresar $adj(\lambda I - A)$ como un polinomio $Q(\lambda)$.

Además:

$\det(\lambda I - A)I = adj(\lambda I - A).(\lambda I - A)$

$\det(\lambda I - A)I = Q(\lambda).(\lambda I - A)$ (1)

Por otro lado

$\det(\lambda I - A)I = P(\lambda)\, I = P(\lambda)$ (2)

Igualando (1) y (2)

$P(\lambda) = Q(\lambda).(\lambda I - A)$

Si $\lambda = A$

$P(A) = O$ // (Teorema 12)

CÁLCULO DE LA INVERSA DE UNA MATRIZ

Sea $A \in M_{n\text{x}n}$ invertible, entonces existe la matriz A^{-1}.

La ecuación característica de A es

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

$$p(\lambda)I = \lambda^n I + a_{n-1}\lambda^{n-1} I + \cdots + a_1\lambda I + a_0 I = 0.I$$

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 I = O$$

Si $\lambda = A$

$$P(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I = O$$

$$A^{-1}.P(A) = A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \cdots + a_1 I + a_0 A^{-1} = O$$

$$A^{-1} = \frac{1}{a_0}\left(-A^{n-1} - a_{n-1}A^{n-2} - \cdots - a_1 I\right)$$

Ejemplo

Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Encontrar la ecuación característica

b) Verificar que $P(A) = O$

c) Hallar A^{-1}

Solución:

a) $p(\text{ª}) = \text{ª}^3 - tr(A)\text{ª}^2 + (P_{11} + P_{22} + P_{33})\text{ª} - |A| = 0$

$p(\text{ª}) = \text{ª}^3 - 2\text{ª}^2 - 5\text{ª} + 6 = 0$

b) $P(A) = A^3 - 2A^2 - 5A + 6I = O$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 7 & 0 & 11 \\ 3 & -1 & 8 \end{pmatrix} \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 11 & -3 & 22 \\ 29 & 4 & 17 \\ 16 & 13 & 5 \end{pmatrix}$$

$$P(A) = \begin{pmatrix} 11 & -3 & 22 \\ 29 & 4 & 17 \\ 16 & 13 & 5 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 7 & 0 & 11 \\ 3 & -1 & 8 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$P(A) = O$

c) $A^{-1} = \dfrac{1}{6}\left(-A^2 + 2A + 5I\right)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} -6 & -1 & -1 \\ -7 & 0 & -11 \\ -3 & 1 & -8 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{6}\left[\begin{pmatrix} -6 & -1 & -1 \\ -7 & 0 & -11 \\ -3 & 1 & -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -2 & 8 \\ 6 & 4 & -2 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}\right]$$

$$A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 1 & 9 & -13 \\ 1 & -3 & -5 \end{pmatrix}$$

FORMAS CUADRÁTICAS Y CANÓNICAS

DEFINICION

Sea $A \in M_{n\text{x}n}$, la función:

$$Q_A : R^n \to R$$
$$x \mapsto Q_A(x) = X^t AX$$

se llama ***forma cuadrática*** asociada a la matriz A a la expresión

$$Q_A(x) = X^t AX$$

En forma desarrollada:

$$Q_A(x) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Observación

$Q_A(x)$ puede ser representada por muchas matrices, pero solo por una matriz simétrica.

Particular

Sea $Q_A(x) = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2$**,** su matriz simétrica esta dada por:

$$A = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}$$

TEOREMA 12

Sea $A \in M_{n\text{x}n}$, existe una matriz simétrica A_1, tal que

$Q_A(x) = Q_{A_1}(x)$**,** $X^t AX = X^t A_1 X$

DEMOSTRACION

Sea la matriz

$$A_1 = \frac{1}{2}\left(A + A^t\right)$$

$$A_1^t = \frac{1}{2}\left(A + A^t\right)^t$$

$$A_1^t = \frac{1}{2}A^t + \frac{1}{2}A = \frac{1}{2}\left(A + A^t\right) = A_1$$, entonces

A_1 es matriz simétrica.

Sean

$$A_1 = \frac{1}{2}\left(A + A^t\right) \qquad (1)$$

$$X^t A_1 X = X^t A_1 X \qquad (2)$$

Sustituyendo (1) en (2)

$$X^t A_1 X = X^t . \frac{1}{2}\left(A + A^t\right)X$$

$$X^t A_1 X = \frac{1}{2}X^t AX + \frac{1}{2}X^t A^t X \qquad (3)$$

$$X^t AX = \left(X^t AX\right)^t \qquad (4)$$ pues es matriz 1x1

Sustituyendo (4) en (3)

$$X^t A_1 X = \frac{1}{2}X^t AX + \left(\frac{1}{2}X^t A^t X\right)^t$$

$$X^t A_1 X = \frac{1}{2}X^t AX + \frac{1}{2}X^t AX$$

$$X^t AX = X^t A_1 X \qquad //.$$

TEOREMA 13

Sea $A \in M_{nxn}$ una matriz simétrica y $Q_A(x) = X^t AX$ su forma cuadrática asociada. Existe un cambio de variable lineal $Y = BX$, donde $B \in M_{nxn}$, y una matriz diagonal D, tal que $Q_A(x) = Q_D(y)$, es decir, $X^t AX = Y^t DY$.

DEMOSTRACION

Si A es matriz simétrica, existe una matriz P invertible tal que:

$$A = PDP^{-1} = PDP^{\,t} \qquad (1)$$

$$Q_A(x) = X^{\,t}AX \qquad (2)$$

Sustituyendo (1) en (2)

$$Q_A(x) = \left(X^{\,t}P\right)D\left(P^{\,t}X\right) \qquad (3)$$

Sea $P^{\,t}X = Y$, entonces

$$Y^{\,t} = X^{\,t}P \qquad (4)$$

Sustituyendo (4) en (3)

$Q_A(x) = Y^t DY$, es decir,

$Q_A(x) = Q_D(y)$ //

Observación

D es matriz de los valores propios de A, y los vectores propios de P son ortonormales.

TEOREMA 14 **Teorema de los ejes principales**

Sea $ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 = d, \exists!¯ \in [0,2®]$, tal que la ecuación anterior puede escribirse de la forma $ª_1y_1^2 + ª_2y_2^2 = D$. Donde y_1 y y_2 son los ejes principales de la gráfica de la ecuación cuadrática anterior, obtenidos al rotar x_1 y x_2 un ángulo en sentido antihorario, y, $ª_1$ y $ª_2$ son los valores propios de la matriz asociada $A = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}$.

MATRIZ DE ROTACIÓN

Sea P una matriz real y ortogonal, entonces

$$\left|P.P^{-1}\right| = \left|P.P^t\right| = 1 \quad \to \quad |P|.\left|P^t\right| = 1 \quad \to \quad |P|.|P| = 1 \quad \to \quad |P|^2 = 1 \quad \to \quad |P| = \pm 1$$

Si $|P| = 1$, entonces P se denomina matriz de rotación

$$P=\begin{pmatrix}\cos \text{g} & -sen^{-}\\ -sen^{-} & \cos^{-}\end{pmatrix},\qquad \text{donde } 0\le^{-}\le 2®\ .$$

Observación. Si $|P|=-1$ se intercambian columnas.

DEFINICIÓN

Se llaman ***invariantes*** de una curva, a todas las expresiones formadas por los coeficientes de su ecuación, que no varían al realizar rotaciones y traslaciones paralelas de los ejes coordenados.

SECCIONES CÓNICAS

Sea la curva

$$f(x_1,x_2)=a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2+2a_1x_1+2a_2x_2+a=0$$

Esta ecuación puede escribirse en forma matricial como

$$X^tAX+BX+a=0$$

Como A es matriz simétrica es ortogonalmente diagonalizable, por lo tanto

$$P^tAP=\begin{pmatrix}\text{a}_1 & 0\\ 0 & \text{a}_2\end{pmatrix}$$

Si $X=PY$, donde $Y=\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}$

$$(PY)^tA(PY)+B(PY)+a=0$$

$$Y^t\left(P^tAP\right)Y+BPY+a=0$$

$$\text{a}_1y_1^2+\text{a}_2y_2^2+b_1y_2+b_2y_2+a=0$$

La ecuación anterior no tiene término de producto cruzado.

Los **invariantes de una curva** de segundo grado son:

1. La suma de los coeficientes de los cuadrados de las coordenadas

$$s=a_{11}+a_{22}$$

2. El determinante formado por los coeficientes de los términos principales

$$\text{¢} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = |A|$$

3. El determinante dado por

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a \end{vmatrix}$$

Las invariancias de $s, \text{¢}$ y Δ facilitan la reducción de la ecuación de la ecuación de la curva a la forma canónica. Así, si $\mathsf{a}_1 z_1^2 + \mathsf{a}_2 z_2^2 + c = 0 \;\wedge \text{¢} \neq 0$. Entonces

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mathsf{a}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathsf{a}2 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = \mathsf{a}_1 \mathsf{a}_2 c \qquad (1)$$

$$\text{¢} = \begin{vmatrix} \mathsf{a}_1 & 0 \\ 0 & \mathsf{a}_2 \end{vmatrix} = \mathsf{a}_1 \mathsf{a}_2 \qquad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1) $\quad \Delta = \text{¢}\, c$

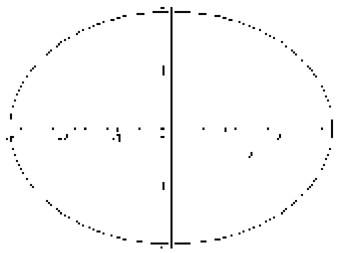
$$c = \frac{\Delta}{\text{¢}}$$

Por lo tanto $\quad \mathsf{a}_1 z_1^2 + \mathsf{a}_2 z_2^2 + \frac{\Delta}{\text{¢}} = 0$

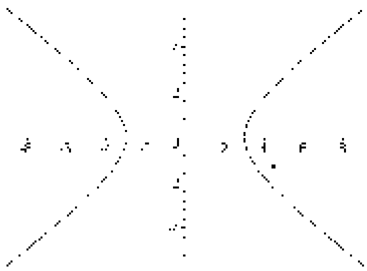
$\text{¢} > 0$	Curva de tipo elíptico	$\Delta \neq 0$	$s\Delta < 0$ Elipse $s\Delta > 0$ Elipse imaginaria
		$\Delta = 0$	Un punto o dos rectas imaginarias que se cortan en dicho punto.
$\text{¢} < 0$	Curva de tipo hiperbólico	$\Delta \neq 0$	Hipérbola
		$\Delta = 0$	Dos rectas que se cortan.
$\text{¢} = 0$	Curva de tipo parabólico	$\Delta \neq 0$	Parábola
		$\Delta = 0$	Dos rectas paralelas (Confundidas, distintas o imaginarias.

Sus graficas se presentan a continuación.

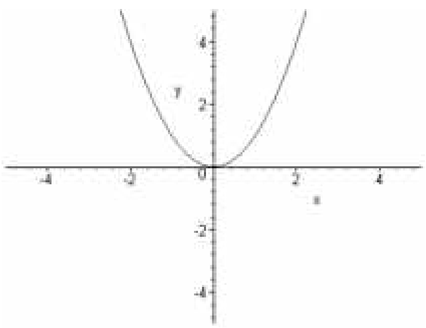
Elipse



Hipérbola



Parábola



Ejemplo

Dada la forma cuadrática

$$2x_1 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 9 = 0$$

Identificar y expresar en la forma canónica

Solución:

$$s = 4$$

$$\delta = |A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0 \text{ es curva de tipo elíptico,} \quad \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{vmatrix} = -27 < 0$$

$$s\Delta = (4)(-27) = -108 < 0 \quad \text{es una elipse}$$

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0$$

Los valores propios de A son

$$\lambda_1 = 3 \vee \lambda_2 = 1$$

Con vectores propios asociados

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ y } v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ base ortogonal, entonces}$$

$$T^* = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ base ortonormal}$$

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|P| = 1 \to P \quad \text{es matriz de rotación}$$

$$Y^t DY + f = 0$$

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 9$$

$$3y_1^2 + y_2^2 = 9$$

La ecuación canónica de la elipse es

$$\frac{y_1^2}{3} + \frac{y_2^2}{9} = 1$$

Resumen

Una de las diferentes propiedades de las transformaciones lineales es la de proteger la estructura de espacio vectorial. En concreto, si f es una transformación lineal definida en el espacio vectorial V de dimensión n en sí mismo y W es un subespacio vectorial de V, se verifica que su transformado es de nuevo subespacio vectorial de V. En ocasiones, se tiene además que $f(W)=W$, por lo que en este caso W permanece invariante por f. Las nociones que permiten determinar los subespacios invariantes por una transformación lineal f son los de valores y vectores propios de f o, exactamente, dada la correspondencia uno a uno existente entre el conjunto M_n y el de las trasformaciones lineales $\mathscr{L}(V,V)$, de su matriz asociada A.

Una vez mostrados los métodos analíticos de cálculo de valores y vectores propios de una matriz A (o de la transformación lineal f que representa) se ilustran diversas propiedades de ambos conceptos, que son de gran utilidad en el estudio de la diagonalización de una matriz $A \in M_n$. El indicado problema consiste en determinar una base de V respecto de la cual la matriz asociada a la transformación lineal f sea diagonal. Esta base, que se construye a partir de los vectores propios de A, no siempre existe, tal como se analiza en este capítulo, y por ello no todas las matrices cuadradas son diagonalizables.

La diagonalización de una matriz A permite realizar ciertas operaciones matriciales de una manera más sencilla, como sucede con el cálculo de la potencia o de la exponencial de A.

Las formas cuadráticas constituyen un instrumento del Álgebra Lineal de gran utilidad y aplicación en Estadística, Econometría, Teoría de la Optimización, etc. Lo que justifica su estudio en el ámbito de la ingeniería y ciencias.

Una forma cuadrática, tal como se aprendió, es una función con valores propios reales definida por un polinomio cuadrático.

Todos estos aspectos se desarrollaron en los conceptos:

Valores y vectores propios.

Propiedades de los valores y vectores propios.

Diagonalización de una matriz.

Formas cuadráticas y canónicas.

Aplicaciones.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Sea u un vector propio de las transformaciones lineales f y g. Mostrar que u es también vector propio de la transformación lineal $af + bg$, donde a y b son escalares arbitrarios.

2. Sean $A, B \in M_{n\times n}$. Probar AB y BA tienen los mismos valores propios.

3. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & b \end{pmatrix}$. Calcular los valores de los parámetros a y b para que el vector $(-2,1)$ sea un vector propio asociado al valor propio ª$_1 = 5$ en la matriz A. ¿Cuál es el otro valor propio en este caso?

4. Sea $L : V \to V$ una transformación lineal invertible. ¿Si ª es valor propio de L, cuál es el valor propio de L^{-1}?

5. Dada la transformación lineal

$$\begin{aligned} f: \quad & R^2 \;\to\; R^2 \\ (x, y) & \mapsto \; f(x, y) = (x + 2y, 2x + y) \end{aligned}$$

Calcular los valores y vectores propios, una base para cada espacio propio, du dimensión y una base de vectores propios S tal que f esté representada con respecto a S por una matriz diagonal.

6. Probar que si λ es un valor propio de una matriz A con vector propio asociado v y $n \in N$ es un entero positivo, entonces λ^n es un valor propio de la matriz A^n con vector propio asociado v.

7. Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$. Hallar los valores y vectores propios de A y A^2.

8. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ p & q & r \end{pmatrix}$ con vectores propios $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Encontrar los valores de a, b, c, p, q, r .

9. Hallar una matriz $A \in M_{3x3}$ tal que sus valores propios son $a_{1,2} = 2$ con vectores propios asociados $v_1 = (1,1,-1,)$ y $v_2 = (2,1,1)$, y $a_3 = 3$ con vector propio asociado $v_3 = (1,1,-2,)$

10. Demostrar que sí $D = P^{-1}AP$, entonces $D^{n} = P^{-1}A^{n}P$. Usando el resultado anterior hallar una expresión para A^{n}.

11. Dada una matriz simétrica $A \in M_{n}$ con elementos reales, comprobar que si todos sus valores propios son iguales a cero entonces A es una matriz nula.

12. Determinar una matriz de orden tres simétrica tal que

- rango$\left(A-3I_3\right)=1$.
- $W=\left\{(x,y,x)\in R^3 : 4x-3y=0\right\}$ es un espacio propio de A.
- $tr(A)=7$.

13. Para cada uno de los siguientes casos, si es posible, diagonalizar la matriz dada y hallar las matrices D y P, tales que, $D = P^{-1}AP$.

a) $$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

b) $$\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

c) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

14. Para cada uno de los siguientes casos, si es posible, diagonalizar la matriz dada y hallar las matrices D y P (ortogonal), tales que, $D = P^{t} AP$.

a) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

15. Identificar las siguientes curvas y reducir la ecuación de estas a la forma canónica

a) $3x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 + 2x_1 - 4x_2 + 1 = 0$

b) $3x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 + 2x_1 - 4x_2 + 2 = 0$

c) $x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 + 1 = 0$

d) $x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2 - 6x_1 + 4x_2 - 3 = 0$

e) $x_1^2 + 3x_1x_2 + 2x_2^2 + 2x_1 + 5x_2 - 3 = 0$

f) $x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + 4x_1 - 6x_2 + 1 = 0$

g) $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 - 2x_1 - 4x_2 - 3 = 0$

h) $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 - 2x_1 - 4x_2 + 1 = 0$

i) $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 + 2x_1 + 4x_2 + 2 = 0$

16) Del ejercicio anterior graficar las curvas:

a)

d)

f)

17) ¿Para qué valores de k se obtiene elipse, hipérbola y parábola de la ecuación $x_1^2 + 2kx_1x_2 + x_2^2 - 4x_1 - 4x_2 - 9 = 0$?

SIN INGENIEROS

Se murió un Ingeniero y se fue a las puertas del Cielo. Sabido es que los Ingenieros por su honestidad siempre van al cielo. San Pedro buscó en su archivo, pero últimamente andaba un poco desorganizado y no lo encontró en el montón de papeles, así que le dijo: "Lo lamento, no estás en listas...". De modo que el Ingeniero se fue a la puerta del infierno y le dieron albergue y alojamiento inmediatamente.

Poco tiempo pasó y el Ingeniero se cansó de padecer las miserias del infierno, y se puso a diseñar y construir mejoras. Con el paso del tiempo, ya tenían ISO 9001, sistema de monitoreo de cenizas, aire acondicionado, inodoros con drenaje, escaleras eléctricas, equipos electrónicos, redes de telecomunicaciones, programas de mantenimiento predictivo, sistemas de control visual, sistemas de detección de incendios, termostatos digitales, etc. Y el Ingeniero se hizo de muy buena reputación.

Un día Dios llamo al Diablo por teléfono y con tono de sospecha le preguntó. "¿Y qué…cómo están por allí en el infierno?".

El diablo contestó:"¡¡Estamos REBIEN!! Tenemos ISO 9001, sistema de monitoreo de cenizas, aire acondicionado, inodoros con drenaje, escaleras eléctricas, equipos electrónicos, Internet, etc. Oye, apúntate mi dirección de e-mail, es: eldiablofeliz@infierno.com. Y no sé cuál será la próxima sorpresa del Ingeniero!".

"¿QUÉ?, ¡¿QUÉ?! ¿¿TIENEN un Ingeniero allí?? ¡Eso es un error! Nunca debió haber llegado ahí un Ingeniero. Los ingenieros siempre van al cielo, eso está escrito y resuelto ya. ¡Me lo mandas inmediatamente!".

"¡Ni loco!. Me gusta tener un ingeniero de planta en la organización y me voy a quedar con él eternamente".

"Mándamelo o … ¡¡TE DEMANDARÉ!!...":

Y el Diablo, con la vista nublada por la tremenda carcajada que soltó, le contestó a Dios: "¿¿Ah Sí?? ......y por curiosidad... ¡¿DE DÓNDE VAS A SACAR UN ABOGADO?!" si todos están aquí.

Ofrece este mensaje a tus amigos y amigas para que tengan una idea de lo que es un ingeniero