ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS

CONJUNTOS DE CANTOR, NÚMEROS DE LIOUVILLE Y NÚMEROS DIOFANTINOS

TRABAJO PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE MATEMÁTICO

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

JONATHAN ALEJANDRO ORTIZ CASTRO
jonathan.ortiz.c347@gmail.com

Director: DR. BORYS YAMIL ÁLVAREZ SAMANIEGO, PH.D.
balvarez@uce.edu.ec

Codirector: DR. JUAN PABLO ROGGIERO AYALA, PH.D.
roggiero@gmail.com

QUITO, ABRIL 2016

DECLARACIÓN

Yo JONATHAN ALEJANDRO ORTIZ CASTRO, declaro bajo juramento que el trabajo aquí escrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

A través de la presente declaración cedo mis derechos de propiedad intelectual, correspondientes a este trabajo, a la Escuela Politécnica Nacional, según lo establecido por la Ley de Propiedad Intelectual, por su reglamento y por la normatividad institucional vigente.

JONATHAN ALEJANDRO ORTIZ CASTRO

CERTIFICACIÓN

Certificamos que el presente trabajo fue desarrollado por JONATHAN ALEJANDRO ORTIZ CASTRO, bajo nuestra supervisión.

Dr. Borys Yamil Álvarez Samaniego, Ph.D.
Director del Proyecto

Dr. Juan Pablo Roggiero Ayala, Ph.D.
Codirector del Proyecto

AGRADECIMIENTOS

A Juan Carlos Trujillo, por, desde primer semestre, transmitirme su entusiasmo y su pasión por descubrir las maravillas que se esconden en la Matemática.

A Andrés Merino, por, a lo largo de la carrera, siempre haber compartido su conocimiento y por su paciencia que hizo que de nuestras continuas conversaciones siempre salga alguna buena idea.

Especial reconocimiento merece el Dr. Borys Álvarez, por su confianza y su guía al haber planteado los problemas resueltos en este proyecto y por sus consejos para la elaboración del mismo.

A mis amigos de la universidad (Kathy, Josué, Carlos, Cristhian, Daniel, Jenny, Alexander,...), que con su ánimo y apoyo hicieron que mi paso por la carrera sea una de las etapas más felices de mi vida.

A mis profesores de la Facultad de Ciencias de Escuela Politécnica Nacional, por su ardua labor al impartir su conocimiento.

Finalmente, quisiera agradecer a mi familia, a mis padres, a mis abuelitos y a mis tíos, por su paciencia, su comprensión y su ánimo en la culminación de una de las etapas más importantes de mi vida.

DEDICATORIA

A Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor y a Joseph Liouville, pues ellos son los autores de los conjuntos fundamentales de este proyecto.

Índice general

Resumen

En el presente trabajo se demuestra la existencia de un conjunto de Cantor contenido en los números de Liouville y otro conjunto de Cantor contenido en los números Diofantinos. Nombremos con $\mathbb{L}$ y con $\mathbb{D}$ los conjuntos de números de Liouville y Diofantinos, respectivamente.

Mediante la estructura de los números de Liouville se construye un conjunto cerrado no numerable contenido en $\mathbb{L}$. Por el Teorema de Bendixson, se demuestra la existencia de un conjunto perfecto no vacío C_1, en $\mathbb{L}$. Puesto que $\mathbb{L}$ es un conjunto de medida de Lebesgue nula, $\lambda(\mathbb{L}) = 0$, C_1 es un conjunto de Cantor.

Utilizando la representación de $\mathbb{L}$ como intersección numerable de abiertos densos, se expresa a $\mathbb{D}$ como la unión numerable de cerrados nada densos. Puesto que $\mathbb{D}$ es no numerable, al menos uno es cerrado, no numerable y nada denso. Por el Teorema de Bendixson, se demuestra la existencia de un conjunto perfecto no vacío C_2, en $\mathbb{D}$. El conjunto C_2 es un conjunto de Cantor pues es un perfecto, no vacío, contenido en un conjunto nada denso.

También se ofrece la construcción de un conjunto de Cantor en cualquier subconjunto de $\mathbb{R}$ cuyo complemento sea numerable.

Finalmente, se prueba una condición necesaria y suficiente para que un conjunto dado contenga un conjunto de Cantor. A saber: que contenga un conjunto cerrado no numerable.

Abstract

In this document the existence of two different Cantor sets, one of them contained in the set of Liouville numbers and the other one inside the set of Diophantine numbers, is proved.

By studying the structure of Liouville numbers we build an uncountable and closed set in $\mathbb{L}$. By Bendixson's Theorem, we prove that there exists a non empty perfect set C_1, in $\mathbb{L}$. Since the set $\mathbb{L}$ is a null set under the Lebesgue measure (i.e. $\lambda(\mathbb{L}) = 0$), C_1 is a Cantor set.

Using the representation of $\mathbb{L}$ as a countable intersection of open and dense sets ($\mathbb{L}$ is a dense G_δ set in the real line), $\mathbb{D}$ can be express as countable union of closed and nowhere dense sets. Since $\mathbb{D}$ is uncountable, there exists at least one uncountable, closed and nowhere dense set in $\mathbb{D}$. By Bendixson's Theorem, we prove that there exists a non empty perfect set C_2, in $\mathbb{D}$. C_2 is a Cantor set since it is a non empty perfect set which is contained in a nowhere dense set.

Also, we build a Cantor set in every set of $\mathbb{R}$ whose complement is countable.

Finally, we obtain a necessary and sufficient condition for a set to contain a Cantor set. The condition is that the set contains an uncountable closed set.

Notaciones

- Para cualquier conjunto $A \subset \mathbb{R}$, se define el complemento de A por
$$A^c = \{x \in \mathbb{R} : x \notin A\}.$$
- Para cualquier conjunto $A \subset \mathbb{R}$, se define
$$\mathcal{P}^*(A) = \{K \subset A : K \neq \emptyset\}.$$
- Para todo conjunto Lebesgue-medible $A \subset \mathbb{R}$, se denota por
$$\lambda(A)$$
la medida de Lebesgue del conjunto A.
- $\mathbb{N}$ denota el conjunto de los números naturales dado por
$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}.$$
- $\mathbb{Z}$ se usa para denotar el conjunto de los números enteros.
- $\mathbb{Z}^+$ denota el conjunto de los números enteros positivos. Es decir, se tiene que
$$\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, \ldots\}.$$
- $\mathbb{Q}$ representa el conjunto de los números racionales. Es decir,
$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z} \text{ y } q \in \mathbb{Z}^+ \right\}.$$
- $\mathbb{L} \subset \mathbb{R}$ denota el conjunto de los números de Liouville.
- $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{L} = \mathbb{L}^c$ se usa para denotar el conjunto de números Diofantinos.

- El supremo del conjunto A (si existe) será denotado por

$$\sup(A).$$

- Dados $a \in \mathbb{R}$ y $r > 0$, se representa la bola abierta de centro a y radio r por

$$B(a,r) = \{x \in \mathbb{R} : |x-a| < r\}.$$

  Es útil recordar que, en los reales, se verifica que $B(a,r) = (a-r, a+r)$.

- Sean $a \in \mathbb{R}$ y $r > 0$, se representa la bola cerrada de centro a y radio r por

$$B[a,r] = \{x \in \mathbb{R} : |x-a| \leq r\}.$$

- Una sucesión en un conjunto A (o de elementos de A), con $A \subset \mathbb{R}$, es una función $x \colon \mathbb{N} \to A$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, se representa la imagen de x respecto de n por

$$x(n) = x_n.$$

  A modo de abreviación, se escribe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en A, en lugar de

$$\begin{aligned} x : &\mathbb{N} \to A \\ &n \mapsto x_n. \end{aligned}$$

- El conjunto de todas las sucesiones en $\{0,1\}$ se representa por $2^{\mathbb{N}}$. Es decir,

$$2^{\mathbb{N}} = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in \{0,1\} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}.$$

- Dada una función $f : A \to B$ donde $A, B \subset \mathbb{R}$, se define el *soporte* de f por

$$\text{supp } (f) = \{x \in A : f(x) \neq 0\}.$$

- Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Se define el intervalo *medio tercio de [a,b]* por

$$\text{tercio}([a,b]) = \left(\frac{2a+b}{3}, \frac{a+2b}{3}\right).$$

- Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Sea $r > 0$ tal que $r \leq \frac{b-a}{2}$. Se define el intervalo medio tercio de [a,b] de radio r por

$$\text{tercio}([a,b], r) = \left(\frac{a+b}{2} - r, \frac{a+b}{2} + r\right).$$

Capítulo 1

Introducción

Joseph Liouville fue un matemático francés nacido en 1809. Liouville fue el primero en demostrar la existencia de números trascendentes. En 1844, probó que todo número de Liouville es un número trascendente ([7]). Posteriormente, probó que el número

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^{k!}}$$

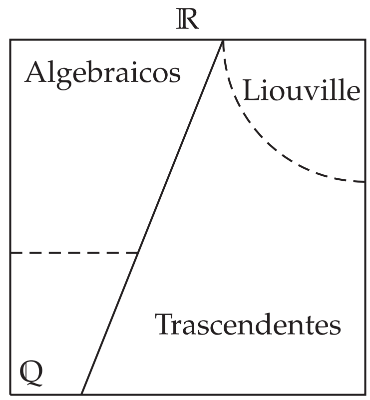
no es algebraico, y por lo tanto es trascendente.

Otra prueba de la existencia de números trascendentes, aunque no constructiva, la hizo el matemático alemán Georg Cantor (1845-1918). Él demostró que el conjunto de los números algebraicos es numerable. Puesto que $\mathbb{R}$ es no numerable, deben existir números reales que no sean algebraicos.

El matemático H.J.S. Smith fue el primero en estudiar los conjuntos de Cantor. Él dio un método para construir conjuntos nada densos en el año 1875. Cantor define sus conjuntos en el periodo de 1879 a 1884, en cinco artículos titulados *Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten*. Cantor construyó su conjunto triádico al buscar un conjunto no vacío que sea perfecto y nada denso. Al conjunto de Cantor se le puede ver como lo que está entre un punto y una recta. Por ejemplo, el conjunto triádico de Cantor de $[0, 1]$ no contiene ningún intervalo, pero posee la misma cantidad de puntos que $[0, 1]$. Es decir, es un conjunto no numerable de medida de Lebesgue nula ([16]).

Una forma de definir un número de Liouville, diferente a la que se aborda en este documento, es a través del concepto de *medida de irracionalidad* de un número, ([21]): un número es de Liouville si tiene medida de irracionalidad infinita.

En el siguiente gráfico se ilustra el lugar que ocupan los números de Liouville en los reales.



Como se puede ver, ningún número de Liouville es algebraico. Además, se sabe que existen números trascendentes que no son de Liouville. A saber, los números π y π^2 son números trascendentes que tienen medida de irracionalidad menor que 12.7 y 6.35, respectivamente ([9]).

Para demostrar la existencia de los conjuntos de Cantor en el conjunto de los números de Liouville ($\mathbb{L}$) y en el conjunto de los números Diofantinos ($\mathbb{D}$), este trabajo se ha organizado de la siguiente manera:

En el Capítulo 2 se hace una revisión de varias propiedades importantes de subconjuntos de los números reales, tanto topológicas como de numerabilidad. Se enuncia y demuestra el Teorema de Bendixson, se enuncia el Teorema de categorías de Baire y se definen los conceptos fundamentales de este trabajo.

En el Capítulo 3 se demuestra que todo conjunto cuyo complemento es numerable contiene un conjunto de Cantor. Para esto, se prueban varios lemas y proposiciones sobre los conceptos de conexidad y sobre subconjuntos cerrados y abiertos en los reales.

En el Capítulo 4 se prueba la existencia de un conjunto de Cantor en los números de Liouville. Para esto, se construye un conjunto cerrado no numerable contenido en $\mathbb{L}$ y se usa el Teorema de Bendixson.

En el Capítulo 5 se demuestra la existencia de un conjunto de Cantor en los números Diofantinos. Para este fin, se expresa $\mathbb{D}$ como una unión numerable de conjuntos cerrados y se utiliza el Teorema de Bendixson.

Finalmente, en el Capítulo 6 se muestran otros resultados importantes sobre los conjuntos de Cantor, que se obtuvieron al realizar este trabajo de titulación.

Es importante decir que en todos los capítulos se distingue entre "proposición" y "teorema" en el sentido que se usan las últimas para dar propiedades que describen hechos fundamentales sobre, $\mathbb{R}$, $\mathbb{L}$, $\mathbb{D}$ o sobre conjuntos de Cantor.

Capítulo 2

Conceptos Fundamentales

A continuación, se enuncian algunas definiciones y proposiciones básicas en el conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$, que serán de uso frecuente en este documento.

Para mayor detalle, se puede revisar [1].

2.1. Topología de $\mathbb{R}$

DEFINICIÓN 2.1. *Sea X un subconjunto de los números reales $\mathbb{R}$. Se dice que $a \in \mathbb{R}$ es punto de adherencia de X si para todo $\epsilon > 0$, se verifica que*

$$B(a, \epsilon) \cap X \neq \emptyset.$$

La clausura de X, notada por $\overline{X}$, es el conjunto de los puntos de adherencia de X. Un conjunto se dice cerrado si es igual a su clausura.

Se dice que el conjunto A es cerrado en X si existe un conjunto F tal que F es cerrado en $\mathbb{R}$ y $A = F \cap X$.

La siguiente proposición da una condición necesaria y suficiente para que un conjunto sea cerrado.

PROPOSICIÓN 2.1. *Sea X un subconjunto de los números reales $\mathbb{R}$. Si $\overline{X} \subset X$, entonces X es cerrado.*

Demostración. Por la definición de conjunto cerrado, solo falta probar que $X \subset \overline{X}$. Si $X = \emptyset$, no hay nada que probar pues el conjunto vacío, $\emptyset$, es subconjunto de todo conjunto. Si $X \neq \emptyset$, sean $x \in X$ y $\epsilon > 0$. Se deduce que

$$\{x\} \subset B(x, \epsilon) \cap X.$$

Esto prueba que $B(x, \epsilon) \cap X \neq \emptyset$. Por definición, se concluye que $x \in \overline{X}$. □

DEFINICIÓN 2.2. *Sean $X \subset \mathbb{R}$ no vacío y $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en X. Si $z \in X$ y para todo $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que*

$$n \geq N \Longrightarrow |z - x_n| < \epsilon,$$

se dice que la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente al punto z en el conjunto X y se denota por

$$\lim_{n \to \infty} x_n = z.$$

DEFINICIÓN 2.3. *Sean $X \subset \mathbb{R}$ no vacío y $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en X. Se dice que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy si para todo $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todos $n, m \in \mathbb{N}$,*

$$n, m \geq N \Longrightarrow |x_n - x_m| < \epsilon.$$

Decimos que X es completo si toda sucesión de Cauchy de X es convergente en X.

LEMA 2.2. *Toda sucesión convergente es de Cauchy.*

Demostración. Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}$ una sucesión convergente a $z \in \mathbb{R}$. Sea $\epsilon > 0$. Por lo tanto, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$n \geq N \Longrightarrow |z - x_n| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{2.1}$$

Por lo tanto, por la desigualdad triangular y por 2.1 se tiene que para todo $n, m \in \mathbb{N}$,

$$n \geq N \Longrightarrow |x_m - x_n| \leq |x_m - z| + |z - x_n| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Así, se concluye que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. □

El siguiente lema se va a usar para probar una caracterización importante de los conjuntos cerrados.

LEMA 2.3. *Sea X un subconjunto de los números reales $\mathbb{R}$. Sean $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en X y $x \in \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$. Entonces $x \in \overline{X}$.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$; puesto que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \Longrightarrow |x - x_n| < \epsilon.$$

Por lo tanto, $x_N \in B(x, \epsilon)$. Además, como $x_n \in X$ para todo $n \in \mathbb{N}$, en particular, se tiene que $x_N \in X$. Luego, se verifica que $x_N \in B(x, \epsilon) \cap X$, es decir, $B(x, \epsilon) \cap X \neq \emptyset$. Se concluye que $x \in \overline{X}$. □

La siguiente definición servirá para presentar el fundamental Axioma de Elección.

DEFINICIÓN 2.4. *Sea $X \subset \mathbb{R}$. Se dice que $F : \mathcal{P}^*(X) \to X$ es una función de elección del conjunto X si $F(Y) \in Y$ para todo $Y \in \mathcal{P}^*(X)$.*

AXIOMA (Axioma de Elección, [19])**.** *Todo subconjunto de los reales tiene una función de elección.*

El siguiente lema muestra una aplicación del Axioma de Elección.

LEMA 2.4. *Sea $X \subset \mathbb{R}$. Sea $\mathcal{C}$ una colección de conjuntos no vacíos de X. Entonces existe una función $f : \mathcal{C} \to X$ tal que $f(S) \in S$ para todo $S \in \mathcal{C}$.*

Demostración. Por el Axioma de Elección, existe $F : \mathcal{P}^* \to X$ tal que $F(K) \in K$ para todo $K \in \mathcal{P}^*$. Puesto que $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}^*$, ya que $\emptyset \notin \mathcal{C}$, se define la función $f : \mathcal{C} \to X$ tal que $f(S) = F(S)$ para todo $S \in \mathcal{C}$. Por lo tanto, $f : \mathcal{C} \to X$ tal que $f(S) \in S$ para todo $S \in \mathcal{C}$. □

La siguiente proposición es un criterio muy útil para determinar si un conjunto es cerrado.

PROPOSICIÓN 2.5. *Sea X un subconjunto de los números reales $\mathbb{R}$. El conjunto X es cerrado si y sólo si toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente en X, tiene su límite en X. Es decir, si $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, entonces $x \in X$.*

Demostración. Se supone que X es un conjunto cerrado. Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X y $x \in \mathbb{R}$ tales que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Por el Lema 2.3, se verifica que $x \in \overline{X}$. Puesto que X es cerrado, se tiene que $X = \overline{X}$. Así, se concluye que $x \in X$.

Recíprocamente, sea $x \in \overline{X}$; por definición de punto de adherencia,

$$A_n := \left\{ z \in X : |x - z| < \frac{1}{n} \right\} \neq \emptyset$$

para cada $n \in \mathbb{Z}^+$. Por el Lema 2.4, existe una función $f : \{A_n\}_{n\in Z^+} \to X$ tal que $f(A_n) \in A_n$ para cada $n \in \mathbb{Z}^+$. Sea $x_k := f(A_{k+1}) \in A_{k+1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Así, $|x - x_k| < \frac{1}{k+1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, de donde $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$. Por la hipótesis, se verifica que $x \in X$. Por la Proposición 2.1, se concluye que X es un conjunto cerrado. □

Ahora, se definen los conjuntos perfectos.

Definición 2.5. *Sea X un subconjunto de los números reales $\mathbb{R}$. Se dice que $a \in \mathbb{R}$ es punto de acumulación de X si toda vecindad de a posee puntos de X distintos de a. El derivado de X, notado por X', es el conjunto de los puntos de acumulación de X. Un conjunto se dice perfecto si es igual a su derivado.*

Observación: Por la definición de punto de adherencia y punto de acumulación, para todo $X \subset \mathbb{R}$, se tiene que $X' \subset \overline{X}$.

La siguiente proposición es muy utilizada para probar que un conjunto es perfecto.

Proposición 2.6. *Sea $X \subset \mathbb{R}$ un conjunto cerrado. Si $X \subset X'$, entonces X es un conjunto perfecto.*

Demostración. Por la observación anterior y como X es un conjunto cerrado, se verifica que

$$X' \subset \overline{X} = X.$$

De la última expresión y por la hipótesis, se sigue que $X = X'$. Es decir, X es un conjunto perfecto. □

La siguiente proposición prueba que el derivado de todo conjunto es cerrado.

Proposición 2.7. *Para todo $X \subset \mathbb{R}$, se tiene que X' es un conjunto cerrado.*

Demostración. Sea $X \subset \mathbb{R}$. Sin pérdida de generalidad, se supone que $X' \neq \emptyset$. Sean $x \in \overline{X'}$ y $\epsilon > 0$. Por definición de la clausura, se deduce que $B(x, \frac{\epsilon}{2}) \cap X' \neq \emptyset$. Sea $y \in B(x, \frac{\epsilon}{2}) \cap X'$; una vez más, sin pérdida de generalidad, se supone que $y \neq x$. Se toma $r = \frac{\text{mín}\{\epsilon, |x-y|\}}{2} > 0$, por definición del derivado, se verifica que

$$(B(y, r) \setminus \{y\}) \cap X \neq \emptyset.$$

Sea $z \in (B(y, r) \setminus \{y\}) \cap X$. Se considera las siguientes desigualdades:

$$|x - z| \leq |x - y| + |y - z| < \frac{\epsilon}{2} + r \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

donde la segunda desigualdad se verifica pues $y \in B(x, \frac{\epsilon}{2})$ y $z \in B(y, r)$. Además, $z \neq x$ pues $|z - y| < r \leq \frac{|x-y|}{2}$. En efecto, si $x = z$, de $|z - y| < \frac{|x-y|}{2} = \frac{|z-y|}{2}$, se tendría que $|z - y| < \frac{|z-y|}{2}$; esto es absurdo pues el valor absoluto es una función no negativa.

Por lo tanto, $z \in (B(x, \epsilon) \setminus \{x\}) \cap X$. Por definición, se concluye que $x \in X'$. Por la Proposición 2.1, se concluye que X' es cerrado. $\square$

Las siguientes proposiciones y los siguientes corolarios dan propiedades importantes de los conjuntos perfectos.

COROLARIO 2.8. *Todo conjunto perfecto de* $\mathbb{R}$ *es cerrado.*

Demostración. Se deduce inmediatamente de la Proposición 2.7 y de la definición de conjunto perfecto. $\square$

PROPOSICIÓN 2.9. *Si* $A, B \subset \mathbb{R}$*, entonces* $A' \cup B' = (A \cup B)'$.

Demostración. Primero se va a probar que $A' \cup B' \subset (A \cup B)'$. Sin pérdida de generalidad, se supone que $A' \cup B' \neq \emptyset$. Sean $x \in A' \cup B'$ y $\epsilon > 0$. Por definición del derivado de un conjunto, se tiene que

$$(B(x, \epsilon) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset \qquad \text{o} \qquad (B(x, \epsilon) \setminus \{x\}) \cap B \neq \emptyset.$$

Por lo tanto, se colige que

$$(B(x, \epsilon) \setminus \{x\}) \cap (A \cup B) = ((B(x, \epsilon) \setminus \{x\}) \cap A) \cup ((B(x, \epsilon) \setminus \{x\}) \cap B) \neq \emptyset.$$

Por definición de conjunto derivado, se concluye que $x \in (A \cup B)'$.

Ahora, se va a probar que $(A \cup B)' \subset A' \cup B'$. Se supone que $(A \cup B)' \neq \emptyset$. Por reducción al absurdo, se supone que existe $x \in (A \cup B)'$ tal que $x \notin A'$ y $x \notin B'$. Dado que $x \notin A'$, por definición, se tiene que existe $\epsilon > 0$ tal que

$$(B(x, \epsilon) \setminus \{x\}) \cap A = \emptyset.$$

Como $x \notin B'$, por definición, existe $\delta > 0$ tal que

$$(B(x, \delta) \setminus \{x\}) \cap B = \emptyset.$$

Se toma $r := \frac{1}{2} \min\{\epsilon, \delta\} > 0$. Como $r < \epsilon$, entonces $B(x, r) \setminus \{x\} \subset B(x, \epsilon) \setminus \{x\}$ y por lo tanto, se tiene que

$$(B(x, r) \setminus \{x\}) \cap A \subset (B(x, \epsilon) \setminus \{x\}) \cap A = \emptyset.$$

Por todo esto, se tiene que $(B(x,r) \setminus \{x\}) \cap A = \emptyset$.

De manera similar, se tiene que $(B(x,r) \setminus \{x\}) \cap B = \emptyset$. Ahora, se concluye que

$$(B(x,r) \setminus \{x\}) \cap (A \cup B) = ((B(x,r) \setminus \{x\}) \cap A) \cup ((B(x,r) \setminus \{x\}) \cap B) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset.$$

Esto contradice a que $x \in (A \cup B)'$. Con lo que se prueba la segunda inclusión. $\square$

COROLARIO 2.10. *Sea $n \in \mathbb{Z}^+$. Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset \mathbb{R}$. Entonces*

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i' = \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)'.$$

Demostración. Se deduce inmediatamente por el método de inducción matemática y de la proposición anterior, pues si $n \in \mathbb{Z}^+$, se tiene que

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right)' \cup A_n' = \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)'.$$

$\square$

COROLARIO 2.11. *En el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, la unión finita de conjuntos perfectos es un conjunto perfecto.*

Demostración. Es inmediato de la definición de conjunto perfecto y del corolario anterior. $\square$

DEFINICIÓN 2.6. *Sea X un subconjunto de los números reales $\mathbb{R}$. Se dice que $a \in X$ es* punto interior *de X si existe $r > 0$ tal que $B(a,r) \subset X$. El* interior *de X, notado por $\operatorname{int}(X)$, es el conjunto de todos los puntos interiores de X. Un conjunto es* abierto *si es igual a su interior.*

Se dice que el conjunto A es abierto en X si existe un conjunto abierto U de $\mathbb{R}$, tal que $A = U \cap X$.

El siguiente lema justifica las expresiones “intervalo abierto” e “intervalo cerrado". Pero antes se presenta la definición de intervalo.

DEFINICIÓN 2.7. *Sea X un subconjunto de los números reales $\mathbb{R}$. El conjunto X es un* intervalo *si para todo $x, y \in X$ tal que $x < y$, se verifica que*

$$(x,y) \subset X.$$

LEMA 2.12. *Todo intervalo abierto es un conjunto abierto y todo intervalo cerrado es un conjunto cerrado.*

Demostración. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$. Se va a probar que (a, b) es un conjunto abierto y $[a, b]$ es un conjunto cerrado.

Sea $x \in (a, b)$. Se define $r = \text{mín}\{x - a, b - x\} > 0$.

Sea $z \in B(x, r)$. Por la definición de bola abierta, se tiene que

$$|x - z| < r.$$

Esto es equivalente a que $-r < x - z < r$. Así $x - r < z < x + r$ y se verifican las siguientes desigualdades

$$a = x - (x - a) \leq x - r < z < x + r \leq x + (b - x) = b.$$

Por definición de (a, b), se verifica que $z \in (a, b)$. Se concluye que (a, b) es un conjunto abierto.

Ahora, por reducción al absurdo, supóngase que existe $y \in \overline{[a, b]}$ tal que $y \notin [a, b]$; es decir, $y < a$ o $y > b$. Sea $r = \text{mín}\{a - y, y - b\} > 0$. Por lo tanto, existe $w \in [a, b]$ tal que $|y - w| < r$. Pero la última desigualdad implica

$$w < y + r \leq y + a - y = a$$

y

$$w > y - r \geq y - (y - b) = b,$$

lo cuál es imposible pues $w \in [a, b]$. Por lo tanto, lo supuesto es falso, por la Proposición 2.1, se concluye que $[a, b]$ es un conjunto cerrado. □

La siguiente proposición establece una relación entre conjuntos abiertos y cerrados.

PROPOSICIÓN 2.13. *Sea $X \subset \mathbb{R}$. El conjunto X es abierto si y sólo si X^c es cerrado.*

Demostración. Sea X un conjunto abierto. Por reducción al absurdo, se supone que X^c no es cerrado. Por la Proposición 2.1, se deduce que $\overline{X^c}$ no está contenido en X^c. Sea $a \in \overline{X^c}$ tal que $a \notin X^c$. Por la definición de complemento de un conjunto, se tiene que $a \in X$. Como X es abierto, existe $r > 0$ tal que $B(a, r) \subset X$. Por la última contenencia, se deduce que $B(a, r) \cap X^c = \emptyset$. Esto contradice el hecho de que $a \in \overline{X^c}$. Por lo tanto, se colige que X^c es cerrado.

Recíprocamente, se supone que X^c es cerrado. Si $X = \emptyset$ no hay nada que probar, pues $\emptyset$ es un conjunto abierto. Si $X \neq \emptyset$, sea $x \in X$. Por la definición de complemento de un conjunto, se tiene que $x \notin X^c$. Como X^c es cerrado, se tiene que $\overline{X}^c = X^c$.

Se deduce que $x \notin \overline{X^c}$. Por definición de clausura de un conjunto, existe $r > 0$ tal que

$$B(x,r) \cap X^c = \emptyset.$$

La última igualdad equivale a $B(x,r) \subset X$. Por lo tanto, X es un conjunto abierto. $\square$

Es importante no confundir el hecho de que un conjunto no sea cerrado no significa que sea abierto ni viceversa. Por ejemplo, el intervalo $(0,1]$ no es ni abierto ni cerrado.

Ahora, se da una propiedad fundamental de los conjuntos abiertos y cerrados.

Lema 2.14. *La unión arbitraria de conjuntos abiertos es un conjunto abierto. Análogamente, la intersección arbitraria de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.*

Demostración. Sea I un conjunto de índices arbitrarios.

1. Sean $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ una colección de conjuntos abiertos. Se define

$$U = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha.$$

Sea $x \in U$. Por definición de la unión generalizada, existe $i \in I$ tal que $x \in U_i$. Como U_i es un conjunto abierto, existe $r > 0$ tal que $B(x,r) \subset U_i$. Además, puesto que

$$U_i \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha,$$

se verifica que $B(x,r) \subset U$. Se concluye que U es un conjunto abierto.

2. Sean $(F_\alpha)_{\alpha \in I}$ una colección de conjuntos cerrados. Por la Proposición 2.13 y el numeral anterior,

$$\bigcup_{\alpha \in I} F_\alpha^c$$

es un conjunto abierto. Además, puesto que se tiene la identidad

$$\bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha = \left(\bigcup_{\alpha \in I} F_\alpha^c \right)^c,$$

por la Proposición 2.13, se concluye que

$$\bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha$$

es un conjunto cerrado.

$\square$

La siguiente proposición relaciona la noción de interior, clausura y complemento de un conjunto.

PROPOSICIÓN 2.15. *Sea* $X \subset \mathbb{R}$. *Entonces,* $\text{int}(X^c) = \overline{X}^c$.

Demostración. Se tiene que:

$$\begin{aligned} a \in \text{int}(X^c) &\equiv \text{ existe } r > 0 \text{ tal que } B(a,r) \subset X^c. \\ &\equiv \text{ existe } r > 0 \text{ tal que } B(a,r) \cap X = \emptyset. \\ &\equiv a \notin \overline{X}. \\ &\equiv a \in \overline{X}^c. \end{aligned}$$

Esta cadena de equivalencias demuestra que $\text{int}(X^c) = \overline{X}^c$. $\square$

La siguiente definición sirve para la noción de compacidad de un subconjunto de los reales.

DEFINICIÓN 2.8. *Sea* $X \subset \mathbb{R}$. *El conjunto* X *se dice* acotado *si existe* $M > 0$ *tal que*

$$|x| \leq M \qquad \text{para todo } x \in X.$$

DEFINICIÓN 2.9. *Sea* $X \subset \mathbb{R}$. *El conjunto* X *se dice* compacto *si* X *es un conjunto cerrado y acotado.*

Con el fin de presentar la noción de conjuntos homeomorfos, se dan las siguientes definiciones.

DEFINICIÓN 2.10. *Sean* $A, B \subset \mathbb{R}$. *La función* $f\colon A \to B$ *es* continua *en* $a \in A$ *si para todo* $\epsilon > 0$*, existe* $\delta > 0$ *tal que para todo* $x \in A$*,*

$$|x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Se dice que f *es continua en* $S \subset A$ *si para todo* $z \in S$*,* f *es continua en* z*.*

El siguiente teorema va a ser muy importante para el Capítulo 3, para su demostración se puede revisar [1].

TEOREMA 2.16 (Teorema 4.37 de [1]). *Sea la función* $f : S \to M$. *Sea* X *un subconjunto conexo de* S. *Si* f *es continua en* X*,* $f(X)$ *es un subconjunto conexo de* M*.*

DEFINICIÓN 2.11. *Sean $A, B \subset \mathbb{R}$. La función $f\colon A \to B$ es un homeomorfismo si f es biyectiva, continua y f^{-1} es continua. Cuando exista un homeomorfismo entre dos conjuntos, se dice que estos conjuntos son homeomorfos.*

A continuación, se da la noción de conjunto conexo, junto con varias de sus propiedades.

DEFINICIÓN 2.12. *Sea X un subconjunto de los números reales $\mathbb{R}$. Se dice que $A \subset X$ es no conexo o disconexo en X si existen B y C abiertos de A en X; es decir, $B = B_1 \cap A$ y $C = C_1 \cap A$ con B_1 y C_1 abiertos de X, no vacíos tales que $A = B \cup C$ y $B \cap C = \emptyset$. Si $A \subset X$ no es disconexo en X, entonces se dice que A es conexo en X.*

Observación: Si $A = B \cup C$ y $B \cap C = \emptyset$, escribiremos

$$A = B \uplus C$$

y se lee "A es unión disjunta de B y C".

Para la demostración del siguiente teorema se necesita de la definición de supremo:

DEFINICIÓN 2.13 (Supremo)**.** *Sea $X \subset \mathbb{R}$. Se dice que a es el supremo de A si a es la mínima cota superior del conjunto A.*

y el siguiente Axioma.

AXIOMA (Axioma de Completitud)**.** *Todo subconjunto de los reales no vacío acotado superiormente posee un supremo.*

TEOREMA 2.17. *Un conjunto es conexo en $\mathbb{R}$ si y sólo si es un intervalo.*

Demostración. Sea $X \subset \mathbb{R}$ un conjunto conexo en $\mathbb{R}$. Por reducción al absurdo, se supone que X no es un intervalo; es decir, existen dos elementos $x, z \in X$ y $y \in \mathbb{R}$ tales que $x < y < z$ y $y \notin X$. Se toman $U = (-\infty, y) \cap X$ y $V = (y, +\infty) \cap X$. Por lo tanto,

$$X = U \uplus V.$$

Los conjuntos U y V son abiertos en X pues son la intersección de un conjunto abierto de $\mathbb{R}$ con X. Además, puesto que $x \in U$ y $z \in V$, se tiene que U y V son no vacíos. Así, se deduce que X es un conjunto no conexo en $\mathbb{R}$ lo cual es imposible. Por lo tanto, lo supuesto es falso; es decir, X es un intervalo.

Recíprocamente, sea I un intervalo con más de un elemento. De nuevo, por reducción al absurdo, se supone que I es un conjunto no conexo en $\mathbb{R}$. Existen U y V abiertos no vacíos en X tales que

$$I = U \biguplus V. \tag{2.2}$$

También, existen abiertos no vacíos U_1 y V_1 en $\mathbb{R}$ tales que

$$U = U_1 \cap I \qquad \text{y} \qquad V = V_1 \cap I. \tag{2.3}$$

Sean $x \in U_1 \cap I$ y $y \in V_1 \cap I$. Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que $x < y$. Puesto que $x, y \in I$, se deduce que $[x, y] \subset I$. Ahora se considera el siguiente conjunto:

$$A = \{z \in [x, y] : z \in U_1\} = [x, y] \cap U_1.$$

El Conjunto A es no vacío y acotado pues $x \in A$ y $A \subset [x, y]$. Por el Axioma de completitud, sea $a = \sup(A)$. Por la definición del supremo, $a \leq y$ pues y es una cota superior de A. También de $x \leq a \leq y$ se sigue que $a \in I$. Es verdad que $a \notin V_1$; en efecto, si $a \in V_1$, del hecho de que V_1 es abierto, existe $r > 0$ tal que $(a - r, a + r) \subset V_1$. Por otro lado, $b := \text{máx}(a - r, x) \in I$, se sigue que $(b, a) \subset V_1 \cap I = V$. Esta última contenecia y dado que $(b, a) \subset I$ implican que

$$(b, a) \cap U_1 = (b, a) \cap U = \emptyset,$$

esto es imposible pues $a = \sup(A)$.

De (2.2), (2.3) y del hecho que $a \in I$ obtenemos que $a \in U_1$. Dado que U_1 es un conjunto abierto en $\mathbb{R}$, existe $r_u > 0$ tal que $(a - r_u, a + r_u) \subset U_1$. Se define $c := a + \frac{1}{2} \text{mín}\{r_u, y - a\}$, se sigue que $c \in U_1$ y $a < c < y$. Por lo tanto, $a < c$ y $c \in A$, esto es imposible por la definición de supremo. Por lo tanto, lo supuesto es falso; es decir, I es un conjunto conexo en $\mathbb{R}$. $\square$

Se enuncia la siguiente definición para después mostrar una propiedad importante de los conjuntos de Cantor.

Definición 2.14. *Sea X un subconjunto de los números reales $\mathbb{R}$. El conjunto X se dice totalmente disconexo si sus únicos subconjuntos conexos son el vacío y los unitarios; es decir, aquellos conjuntos con un solo elemento.*

Ahora se va a estudiar la numerabilidad de los conjuntos en $\mathbb{R}$. Para esto se consideran las siguientes definiciones y proposiciones.

2.2. Numerabilidad en $\mathbb{R}$

El siguiente concepto permite extender la noción de que dos conjuntos contengan la misma "cantidad" de elementos.

DEFINICIÓN 2.15 (Conjuntos equipotentes)**.** *Sean $X, Y \subset \mathbb{R}$. El conjunto X se dice equipotente con el conjunto Y si existe una función biyectiva $f : X \to Y$.*

Observación: Es claro que si un conjunto X es equipotente a un conjunto Y, entonces el conjunto Y es equipotente al conjunto X. En efecto, se deduce inmediatamente del hecho de que la inversa de una función biyectiva también es biyectiva.

Ahora se puede introducir el siguiente concepto importante.

DEFINICIÓN 2.16 (Conjunto finito)**.** *Sea $X \subset \mathbb{R}$. Se dice que X es finito si X es vacío o si existe $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que X y $\{0, \ldots, n-1\}$ son equipotentes. Al natural n se le dice el número de elementos de X.*

Observación: Cuando un conjunto no vacío es finito, puesto que es equipotente (a través de la función biyectiva ϕ) con $\{0, \ldots, n-1\}$ para algún $n \in \mathbb{Z}^+$, se escribe

$$X = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\},$$

donde $\phi(j) = x_j$ para cada $j = 0, \ldots, n-1$.

LEMA 2.18. *Todo subconjunto de uno finito es finito.*

Demostración. Se va a probar que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$X \text{ tiene } n \text{ elementos y } A \subset X \Longrightarrow A \text{ finito.}$$

Se va a proceder por inducción matemática. Sin pérdida de generalidad, se supone que $X \neq \emptyset$. Si X es equipotente a $\{0\}$, sus únicos subconjuntos son el $\emptyset$ y todo X, ambos finitos. Sea $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $n \geq 2$ y supongamos que todo subconjunto de uno de $n-1$ elementos es finito. Sean X un conjunto de n elementos y $A \subset X$. Si $A = X$, no hay nada que probar pues X es finito. Si $A \subsetneq X$, existe $c \in X \setminus A$. Sea $f : X \to \{0, 1, \ldots, n-1\}$ una función biyectiva. Sea $g : X \to \{0, 1, \ldots, n-1\}$ la función definida por

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq c \text{ y } f(x) \neq n-1, \\ n-1 & \text{si } x = c, \\ f(c) & \text{si } f(x) = n-1. \end{cases}.$$

La función g es inyectiva. En efecto, supongamos $g(x) = g(y)$ con $x, y \in X$. Si $x \neq c$, $f(x) \neq n-1$, $y \neq c$ y $f(y) \neq n-1$, por la inyectividad de f, se sigue que $x = y$. Por la símetría queda por analizar el caso $x = c$ y $f(y) = n-1$; por la definición de la función g y por lo supuesto $n-1 = f(c)$. De $f(y) = n-1 = f(c)$, se tiene que $y = c = x$. Así, f es inyectiva.

La función g también es sobreyectiva. En efecto, sea $m \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Como f es sobreyectiva, existe $x \in X$ tal que $f(x) = m$. Si $x \neq c$ y $f(x) \neq n-1$, entonces $g(x) = m$. Si $x = c$, de la definición de g y por la biyectividad de f, se sigue que $g(f^{-1}(n-1)) = f(c) = m$. Finalmente, si $f(x) = n-1$, entonces $g(c) = n-1 = m$. Por lo tanto, g es sobreyectiva.

Se va a probar que la función $h : X \setminus \{c\} \to \{0, \ldots, n-2\}$ tal que $h(x) = g(x)$ para todo $x \in X \setminus \{c\}$ es biyectiva.

Por la inyectividad de g, la función h es inyectiva. Además, para cada $m \in \{0, \ldots, n-2\}$, existe $x \in X$ tal que $g(x) = m$. Por la definición de g y puesto que $m \neq n-1$, se sigue que $x \in X \setminus \{c\}$. Por lo tanto, la función h es biyectiva; se sigue que $X \setminus \{c\}$ es un conjunto finito.

Puesto que $A \subset X$ y $c \notin A$, se sigue que $A \subset X \setminus \{c\}$. Como $X \setminus \{c\}$ es un conjunto de $n-1$ elementos, por la hipótesis de inducción, A es un conjunto finito.

Por el principio de inducción, todo subconjunto de uno finito es finito. $\square$

Es importante remarcar que ahora estamos en la capacidad de definir conjunto infinito, simplemente al negar la propiedad de ser finito.

En la literatura hay varias definiciones de conjunto numerable. A continuación, presentaré aquella con la que se va a trabajar en este documento.

Definición 2.17 (Conjunto numerable)**.** *Sea $X \subset \mathbb{R}$. El conjunto X se dice* numerable *si X es finito o si X es equipotente con los naturales $\mathbb{N}$. Si el conjunto X es finito, se dice que es* numerable finito*. Si X es equipotente con los naturales, se dice que es* numerable infinito*.*

La siguiente proposición muestra una propiedad útil sobre los conjuntos numerables.

PROPOSICIÓN 2.19. *Sea $X \subset \mathbb{R}$ un conjunto infinito numerable, entonces X es equipotente con los enteros positivos $\mathbb{Z}^+$.*

Demostración. Como X es infinito numerable, existe $f\colon \mathbb{N} \to X$ biyectiva. Se define $g\colon \mathbb{Z}^+ \to X$ tal que

$$g(n) = f(n-1),$$

para todo $n = 1, 2, \ldots$

Se va a probar que g es inyectiva. Se supone que $g(n) = g(m)$, donde $n, m \in \mathbb{Z}^+$. Por definición de g, se tiene que $f(n-1) = f(m-1)$. Puesto que f es inyectiva, se colige que $n - 1 = m - 1$, de donde se deduce que $n = m$.

Ahora, se va a probar que g es sobreyectiva. Sea $x \in X$, se va a buscar $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $g(n) = x$. Como f es sobreyectiva y $x \in X$, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f(m) = x$. Se define $n = m + 1$. Como $m \in \mathbb{N}$, entonces $n = m + 1 \in \mathbb{Z}^+$. Por definición de g, se tiene que

$$g(n) = g(m+1) = f(m+1-1) = f(m) = x.$$

Por todo esto, se tiene que g es biyectiva. Se concluye que X es equipotente con $\mathbb{Z}^+$. □

Observación: Si X es un conjunto infinito numerable, por la proposición anterior, existe una función biyectiva $f\colon \mathbb{Z}^+ \to X$ tal que se escribirá así

$$X = \{x_1, x_2, \ldots\},$$

donde $f(i) = x_i \in X$ para todo $i = 1, 2, \ldots$ y $x_j \neq x_k$ para todo $j, k \in \mathbb{Z}^+$ tales que $j \neq k$.

El siguiente criterio es útil para demostrar la numerabilidad de un conjunto.

TEOREMA 2.20 (Teorema 2.26 de [19])**.** *La composición de funciones biyectivas es otra función biyectiva.*

LEMA 2.21. *Sean $X, Y \subset \mathbb{R}$. Si X es numerable y equipotente con Y, entonces Y es numerable.*

Demostración. Puesto que X y Y son equipotentes, existe una función $f\colon X \to Y$

biyectiva. Como X es numerable, por definición, hay dos casos.

Si X es finito, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que X y $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ son equipotentes. Así, por el Teorema 2.26 de [19], $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ y Y son equipotentes. Se colige que Y es un conjunto finito y por lo tanto numerable.

Si X es infinito, entonces existe $g \colon \mathbb{N} \to X$ biyectiva. Se considera la función $h = f \circ g \colon \mathbb{N} \to Y$. Como f y g son funciones biyectivas, por el Teorema 2.26 de [19], se deduce que h es biyectiva. Por lo tanto, Y es equipotente con los naturales. Se concluye que Y es numerable. $\square$

COROLARIO 2.22. *Sean $X, Y \subset \mathbb{R}$. Si X es no numerable y X es equipotente con Y, entonces Y es no numerable.*

Demostración. Por reducción al absurdo, se supone que Y es numerable. Como X es equipotente con Y y Y es numerable, por el lema anterior, se deduce que X es numerable. Esto contradice la hipótesis, por lo tanto, lo supuesto es falso. Es decir, Y es no numerable. $\square$

El siguiente lema se usa para demostrar que todo subconjunto de un conjunto numerable es numerable.

DEFINICIÓN 2.18 (Conjunto bien ordenado)**.** *Sea $X \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío. Se dice que X es* bien ordenado *si todo subconjunto de X posee elemento mínimo.*

TEOREMA 2.23 (El principio del buen orden)**.** *El conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ es bien ordenado.*

LEMA 2.24. *Todo subconjunto de los naturales es numerable.*

Demostración. Sea $X \subset \mathbb{N}$. Sin pérdida de generalidad, se supone que X es infinito.

Se define $f \colon \mathbb{N} \to X$ de forma recursiva. Sean $F_0 = X$ y $f(0) = \operatorname{mín} F_0 \in X$, $F_1 = X \setminus \{f(0)\}$ y $f(1) = \operatorname{mín} F_1$. Además, $F_{n+1} = F_n \setminus \{f(n)\}$ y $f(n+1) = \operatorname{mín} F_{n+1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

La función f es inyectiva. En efecto, por reducción al absurdo, supóngase que existan $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $f(n) = f(m)$ con $n < m$. Puesto que $F_m \subset \ldots \subset F_{n+1} \subset F_n$ y $f(n) \notin F_{n+1} = F_n \setminus \{f(n)\}$, se deduce que $f(n) \notin F_m$. Puesto que $f(m) = \operatorname{mín} F_m \in F_m$, es imposible que $f(n) = f(m)$.

La función f también es sobreyectiva. En efecto, sea $x \in X$. Puesto que $\{y \in X : y < x\} \subset \{0, 1, \ldots, x-1\}$, por el Lema 2.18, existe $k \in \mathbb{Z}^+$ tal que $\{1, 2, \ldots, k\}$ es equipotente con $\{y \in X : y < x\}$. Por lo tanto, se tiene que $F_k = \{z \in X : z \geq x\}$. Así, $f(k) = \text{mín}\, F_k = x$.

Por lo tanto, se concluye que X es numerable. $\square$

El siguiente lema proporciona una manera frecuente de probar que un conjunto es numerable.

LEMA 2.25. *Todo subconjunto de un conjunto numerable es numerable.*

Demostración. Sean $A \subset \mathbb{R}$ numerable y $B \subset A$. Sin pérdida de generalidad, se supone que B es infinito. Por el Lema 2.18, se deduce que A es infinito. Como A es numerable, entonces existe $f\colon A \to \mathbb{N}$ biyectiva. Se define la función $g\colon B \to \mathbb{N}$ tal que $g(x) = f(x)$ para todo $x \in B$.

Se va a probar que g es inyectiva. Sean $x, y \in B$ tales que $g(x) = g(y)$. Por definición de la función g, se tiene que $f(x) = f(y)$. Puesto que f es inyectiva, se deduce que $x = y$.

Por todo esto, se tiene que $g\colon B \to \mathbb{N}$ es inyectiva. Como $g(B) \subset \mathbb{N}$, por el lema anterior, se tiene que $g(B)$ es numerable. Por la definición de sobreyectividad, se deduce que $g\colon B \to g(B)$ es sobreyectiva. Por lo tanto, $g\colon B \to g(B)$ es biyectiva. Entonces, B es equipotente con $g(B)$. Por el Lema 2.21, se concluye que B es numerable. $\square$

El siguiente lema es útil para probar que un conjunto es numerable.

LEMA 2.26. *Sean $X, Y \subset \mathbb{R}$. Si Y es numerable y existe $g\colon X \to Y$ inyectiva, entonces X es numerable.*

Demostración. Se define $h\colon X \to g(X)$ tal que $h(x) = g(x)$ para todo $x \in X$. Como g es inyectiva, se tiene que h es biyectiva.

Puesto que $g(X) \subset Y$ y Y es numerable, por el Lema 2.25, se tiene que $g(X)$ es numerable. Como $g(X)$ y X son equipotentes, por el Lema 2.21, se concluye que X es numerable. $\square$

El siguiente teorema demuestra que existe una función biyectiva entre los conjuntos $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}^+$.

TEOREMA 2.27. *El conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ es numerable.*

Demostración. Se define la función $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} 2x-1, & \text{si } x \geq 1, \\ -2x, & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Sean $x, y \in \mathbb{Z}$ tales que $f(x) = f(y)$. Por la definición de f, se consideran 3 casos.

Si $x, y \leq 0$, entonces se tiene que

$$-2x = f(x) = f(y) = -2y,$$

de donde es inmediato que $x = y$.

Si $x, y \geq 1$, entonces

$$2x - 1 = f(x) = f(y) = 2y - 1;$$

luego también se tiene que $x = y$.

Ahora, se tiene que x o y sea no positivo y el otro sea positivo. Sin pérdida de generalidad, se supone que $x \geq 1$ y $y \leq 0$. Por la definición de f, se tiene que

$$2x - 1 = f(x) = f(y) = -2y;$$

de esta igualdad, se colige que $2y = 1 - 2x$. Esto es imposible pues como $x, y \in \mathbb{Z}$, $2y$ es par y $1 - 2x$ es impar. Por lo tanto, no es posible que $f(x) = f(y)$.

Por todo esto, se deduce que si $f(x) = f(y)$, entonces $x = y$. Por lo tanto, f es inyectiva y por el Lema 2.26, se concluye que $\mathbb{Z}$ es numerable. □

El siguiente lema se va a usar para probar que $\mathbb{Q}$ es numerable.

Teorema 2.28 (Teorema de la división)**.** *Para todo $n \in \mathbb{N}$ y $m \in \mathbb{Z}^+$, existen $r, k \in \mathbb{N}$ únicos tales que*

$$n = mk + r$$

con $0 \leq r < m$.

Lema 2.29. *Sean $A, B \subset \mathbb{R}$. Si A y B son numerables, entonces $C = A \times B$ es un conjunto numerable.*

Demostración. Como A y B son numerables, existen 4 casos.

A y B son finitos. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $m \in \mathbb{N}$ el número de elementos de A y B, respectivamente. Por definición, para cada $z \in A \times B$ existen $a \in A$ y $b \in B$ tales que $z = (a, b)$. Como hay n elementos de A y m elementos de B, se verifica que C

tiene mn elementos. Por lo tanto, C es finito. Se concluye que C es numerable.

A **es infinito y** B **es finito.** Como A es numerable, existe $f\colon \mathbb{N} \to A$ tal que f es biyectiva. Sin pérdida de generalidad, se supone que B es no vacío. Sea $m \in \mathbb{Z}^+$ el número de elementos de B. Por lo tanto, se puede escribir

$$B = \{b_0, \ldots, b_{m-1}\}, \tag{2.4}$$

donde $b_i \neq b_j$ para todo $i, j \in \{0, \ldots, m-1\}$ con $i \neq j$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, por el teorema de la división, existen $k, r \in \mathbb{N}$ únicos tales que $n = mk + r$ y $0 \leq r < m$. Luego, se puede definir la función $h\colon \mathbb{N} \to C$ tal que $h(n) = (f(k), b_r)$. Se tiene que h está bien definida pues k y r son únicos. Para ilustrar la función h, se calculan las imágenes de 0, 1, m y $m+3$: $h(0) = (f(0), b_0)$, $h(1) = (f(0), b_1)$, $h(2) = (f(0), b_2)$, $h(m) = (f(1), b_0)$, $h(m+3) = (f(1), b_3)$, etc.

Se va a probar que h es biyectiva. Sean $n, t \in \mathbb{N}$ tales que $h(n) = h(t)$. Por el teorema de la división, existen únicos $k_n, r_n, k_t, r_t \in \mathbb{N}$ tales que $n = mk_n + r_n$, $t = mk_t + r_t$ y $0 \leq r_n, r_t < m$. Por lo tanto, se tiene que

$$(f(k_n), b_{r_n}) = h(n) = h(t) = (f(k_t), b_{r_t}).$$

Luego, se tiene que $f(k_n) = f(k_t)$ y $b_{r_n} = b_{r_t}$. Puesto que la función f es biyectiva, se deduce que $k_n = k_t$. Por (2.4), se tiene que $r_n = r_t$. Por todo esto, se tiene que

$$n = mk_n + r_n = mk_t + r_t = t.$$

Se concluye que h es inyectiva.

Ahora se va a probar que h es sobreyectiva. Sea $z \in C$. Por la definición de producto cartesiano, existen $x \in A$ y $y \in B$ tales que $z = (x, y)$. Como f es biyectiva, entonces f es sobreyectiva. Por lo tanto, existe $k \in \mathbb{N}$ tales que $f(k) = x$. Por la definición del conjunto B, existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $b_r = y$ y $0 \leq r < m$. Se define $n = mk + r$. Es inmediato que $h(n) = (x, y) = z$. Se concluye que h es sobreyectiva. Por todo lo anterior h es biyectiva y C es numerable.

A **es finito y** B **es infinito.** Se demuestra de la misma manera que C es numerable: solo se invierten los papeles de A y B.

A **es infinito y** B **es infinito.** Como A y B son numerables, entonces se puede escribir

$$A = \{a_0, a_1, \ldots\} \quad \text{y} \quad B = \{b_0, b_1, \ldots\},$$

donde $a_i \neq a_j$ para cada $i, j \in \mathbb{N}$ con $i \neq j$ y también, $b_l \neq b_k$ para $l, k \in \mathbb{N}$ con $l \neq k$.

Se define la función $h\colon C \to \mathbb{N}$ tal que $h(a_i, b_j) = 2^i 3^j$ para todos $i, j \in \mathbb{N}$.

Se va a probar que h es inyectiva. Sean $i, j, k, t \in \mathbb{N}$ tales que $h(a_i, b_j) = h(a_k, b_t)$. Por definición de h se tiene que

$$2^i 3^j = h(a_i, b_j) = h(a_k, b_t) = 2^k 3^t.$$

Puesto que 2 y 3 son números primos y $2^i 3^j = 2^k 3^t$, se deduce que $i = k$ y $j = t$. Por lo tanto, se tiene que $a_i = a_k$ y $b_j = b_t$.

Por el Lema 2.26, se concluye que C es numerable. $\square$

Observación: El producto cartesiano finito de conjuntos numerables es numerable. La demostración se la puede hacer por inducción y usando el teorema anterior.

El siguiente es un resultado sorprendente. Hay la misma cantidad de números racionales como naturales.

TEOREMA 2.30. *El conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ es numerable.*

Demostración. Como $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}^+$ son numerables, por el Lema 2.29, se tiene que $C = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^+$ es numerable. Se define la función $f\colon \mathbb{Q} \to C$ tal que $f(x) = (p, q)$ donde p y q no tienen divisores en común (M.C.D.$(p, q) = 1$) y $x = \frac{p}{q}$ para todo $x \in \mathbb{Q}$.

Se va a probar que f es inyectiva. Sean $x, y \in \mathbb{Q}$ tales que $f(x) = f(y)$. Por lo tanto, existen $p, r \in \mathbb{Z}$ y $q, s \in \mathbb{Z}^+$ tales que $f(x) = (p, q)$ y $f(y) = (r, s)$ donde $x = \frac{p}{q}$ con M.C.D.$(p, q) = 1$ y $y = \frac{r}{s}$ con M.C.D.$(r, s) = 1$. Así se tiene que

$$(p, q) = f(x) = f(y) = (r, s),$$

de donde $p = r$ y $q = s$. Entonces $x = \frac{p}{q} = \frac{r}{s} = y$. Así, f es inyectiva y, por el Lema 2.26, se concluye que $\mathbb{Q}$ es numerable. $\square$

PROPOSICIÓN 2.31. *Sean $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tal que $A_i \subset \mathbb{R}$ es numerable para cada $i \in \mathbb{N}$. Además, si $A_i \cap A_j = \emptyset$ para cada $i, j \in \mathbb{N}$ tales que $i \neq j$. Entonces el conjunto*

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$$

es numerable.

Demostración. Para cada $i \in \mathbb{N}$, como A_i es numerable, existe una función inyectiva $f_i : A_i \to \mathbb{N}$. Además, puesto que A_i y A_j son disjuntos para todos $i, j \in \mathbb{N}$ tales que

$i \neq j$; dado $x \in \biguplus_{i\in\mathbb{N}} A_i$, existe un único $k \in \mathbb{N}$ tal que $x \in A_k$. Así, se puede definir la función g de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rccc} g: & \biguplus_{i\in\mathbb{N}} A_i & \longmapsto & \mathbb{N}\times\mathbb{N} \\ & x & \longmapsto & (j, f_j(x)), \end{array}$$

donde $x \in A_j$ con $j \in J$.

La función g es inyectiva. En efecto, sean $x, y \in \biguplus_{i\in\mathbb{N}} A_i$ tales que $g(x) = g(y)$. Por la definición de unión generalizada, existen $m, n \in \mathbb{N}$ tales que $x \in A_n$ y $y \in A_m$. Por lo tanto, $g(x) = (n, f_n(x))$ y $g(y) = (m, f_m(y))$. Puesto que $g(y) = g(x)$, se sigue que $m = n$ y $f_n(x) = f_m(y)$. Así, $f_n(x) = f_m(x)$; pero del hecho de que $f_m(x) = f_m(y)$ y de que f_m es inyectiva, se tiene que $x = y$.

Por el Lema 2.29, el Lema 2.26 y como g es inyectiva, se concluye que $\biguplus_{i\in\mathbb{N}} A_i$ es numerable. □

El siguiente teorema es muy importante para el presente trabajo.

TEOREMA 2.32. *La unión numerable de conjuntos numerables es numerable.*

Demostración. Sean $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tal que $A_i \subset \mathbb{R}$ es numerable para cada $i \in \mathbb{N}$. Se definen $B_0 = A_0$, $B_1 = A_1 \setminus A_0$, $B_2 = A_2 \setminus (A_0 \cup A_1)$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 1$, se define $B_n = A_n \setminus \bigcup_{i=0}^{n-1} A_i$.

Por su construcción $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos disjuntos dos a dos. En efecto, por reducción al absurdo, supongamos que existe $x \in B_n \cap B_m$ con $m, n \in \mathbb{N}$ y $m > n$. Por lo tanto, $x \in A_n \setminus \bigcup_{i=0}^{n-1} A_i$ y $x \in A_m \setminus \bigcup_{i=0}^{m-1} A_i$. Así, $x \in B_n$ y $x \notin \bigcup_{i=0}^{m-1} A_i$. Puesto que $n < m$, se deduce que $x \notin B_n$. Esto es una contradicción, por lo tanto, lo supuesto es falso; es decir, $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos disjuntos dos a dos.

También se tiene que

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i.$$

En efecto, para cada $i \in \mathbb{Z}^+$ se tiene que

$$B_n = A_n \setminus \bigcup_{i=0}^{n-1} A_i \subset A_n,$$

lo que implica que $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$. Por otro lado, para cada $x \in \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$, existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal $x \in A_{i_0}$. Se considera el conjunto

$$C = \{i \in \mathbb{N} : x \in A_i\} \subset \mathbb{N}.$$

Como $i_0 \in C$, por el Principio del buen orden sea $j = \min C$. Así, se tiene que $x \in A_j$ y $x \notin A_i$ para todo natural $i < j$. Luego, se tiene que $x \in B_j$. De esta manera se tiene que $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i$.

Por la proposición anterior se concluye que $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ es un conjunto numerable. $\square$

LEMA 2.33. *Sean $X, Y \subset \mathbb{R}$ tales que $X \subset Y$. Si X es no numerable, entonces Y es no numerable.*

Demostración. Por reducción al absurdo, se supone que Y es numerable. Como $X \subset Y$ y como Y es numerable, por el Lema 2.25, se infiere que X es numerable. Esto es absurdo, por lo tanto, lo supuesto es falso, es decir, Y es no numerable. $\square$

Ahora, se da un ejemplo de un conjunto que no es numerable.

TEOREMA 2.34. *El conjunto $2^{\mathbb{N}}$ es no numerable.*

Demostración. Por reducción al absurdo, se supone que $2^{\mathbb{N}}$ es numerable. Entonces se puede escribir

$$2^{\mathbb{N}} = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\},$$

donde $x_i \neq x_j$, para todo $i, j \in \mathbb{N}$.

Además, por la definición de $2^{\mathbb{N}}$, para todo $i \in \mathbb{N}$ se puede expresar

$$x_i = (a_0^i, a_1^i, a_2^i, a_3^i, \ldots),$$

donde $a_j^i = 0$ o $a_j^i = 1$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

Se va construir $y \in 2^{\mathbb{N}}$ tal que $y \neq x_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Se define

$$y = (y_0, y_1, y_2, \ldots),$$

tal que

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{si } a_i^i = 0 \\ 0, & \text{si } a_i^i = 1 \end{cases}$$

para todo $i \in \mathbb{N}$. Este método es conocido como la Diagonal de Cantor.

Así, para cada $i \in \mathbb{N}$ se tiene que $y_i \neq x_i$; luego $y \neq x_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Esto es imposible pues $y \in 2^{\mathbb{N}}$, por lo tanto lo supuesto es falso; es decir, $2^{\mathbb{N}}$ no es numerable. □

Ahora, se va a probar que no existe una función biyectiva ente $\mathbb{R}$ y $\mathbb{N}$. Para este fin se da el siguiente teorema.

TEOREMA 2.35. *El conjunto* $[0,1]$ *es no numerable.*

Demostración. Se define la función $f : 2^{\mathbb{N}} \to [0,1]$ tal que

$$f((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \frac{9}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x_n}{10^n},$$

para cada $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in 2^{\mathbb{N}}$. Puesto que

$$0 \leq f\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = \frac{9}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x_n}{10^n} \leq \frac{9}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{10^n} = \frac{9}{10}\left(\frac{1}{1-0{,}1}\right) = 1$$

para toda $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in 2^{\mathbb{N}}$, la función f está bien definida.

La función f es inyectiva. En efecto, supongamos que $f\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = f\left((y_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$, por la definición de la función f, se tiene que

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x_n}{10^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{y_n}{10^n}. \tag{2.5}$$

Para probar que $x_n = y_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, se va a proceder por inducción matemática. De (2.5), se deduce que

$$|x_0 - y_0| = \left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n - y_n}{10^n}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x_n - y_n|}{10^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10^n} = \frac{1}{9} < 1,$$

así se colige que $x_0 = y_0$. Sea $n \in \mathbb{Z}^+$ y supongamos que $x_k = y_k$ para todo natural $k < n$. Por la hipótesis de inducción y de 2.5, se tiene que

$$\sum_{j=n}^{\infty}\frac{x_j}{10^j} = \sum_{j=n}^{\infty}\frac{y_j}{10^j},$$

aplicando el mismo procedimiento anterior, se verifica que

$$\frac{|x_n - y_n|}{10^n} = \left|\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{x_j - y_j}{10^j}\right| \leq \sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{|x_j - y_j|}{10^j} \leq \sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{1}{10^j} = \frac{1}{9\cdot 10^n}.$$

La última expresión implica que $|x_n - y_n| \leq \frac{1}{9} < 1$, así $x_n = y_n$. Por el principio de inducción matemática, se deduce que $x_n = y_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, la función f es inyectiva.

Por el contra recíproco del Lema 2.26 y por el teorema anterior, se concluye que $[0,1]$ es un conjunto no numerable. $\square$

Las técnicas que se usaron para probar que la función f, del teorema anterior, van a ser de gran utilidad en el Capítulo 4.

COROLARIO 2.36. *El conjunto* $\mathbb{R}$ *es no numerable.*

Demostración. Por el teorema anterior, $[0,1]$ no es numerable. Además, el intervalo $[0,1] \subset \mathbb{R}$ y por el Lema 2.33, se concluye que $\mathbb{R}$ es no numerable. $\square$

Las siguientes definiciones y proposiciones son importantes para la prueba del Teorema de Bendixson.

DEFINICIÓN 2.19. *Sea X un subconjunto de los números reales $\mathbb{R}$. Un punto $x \in \mathbb{R}$ es un* punto de condensación *de X si para todo $\epsilon > 0$, se tiene que*

$$B(x,\epsilon) \cap X \text{ es no numerable.}$$

LEMA 2.37. *El conjuntos de puntos de condensación de un conjunto está contenido en la clausura del conjunto.*

Demostración. Sea $X \subset \mathbb{R}$. Sea T el conjunto de los puntos de condensación de X. Se va a probar que $T \subset \overline{X}$. En efecto, esto es verdad pues

$$\begin{aligned} T &= \{x \in \mathbb{R} : \text{ para todo } \epsilon > 0,\ B(x,\epsilon) \cap X \text{ es no numerable}\} \\ &\subset \{x \in \mathbb{R} : \text{ para todo } \epsilon > 0,\ B(x,\epsilon) \cap X \text{ es no vacío}\} = \overline{X}, \end{aligned}$$

donde la última contenencia es verdad pues todo conjunto no numerable es no vacío. $\square$

TEOREMA 2.38 (Teorema del recubrimiento de Lindelöf)**.** *Supongamos que $A \subset \mathbb{R}$ y que F es un recubrimiento abierto de A. Entonces existe una subcolección numerable de F que también recubre a A.*

LEMA 2.39. *Sean $E \subset \mathbb{R}$ y T el conjunto de puntos de condensación de E. Entonces, $E \setminus T$ es numerable y T es cerrado.*

Demostración. Para cada $x \in E \setminus T$ existe $\epsilon_x > 0$ tal que $B(x, \epsilon_x) \cap E$ es numerable. Por lo tanto, se tiene que

$$E \setminus T \subset \bigcup_{x \in E \setminus T} B(x, \epsilon_x) \cap E. \tag{2.6}$$

Por el Teorema de Recubrimiento de Lindelöf ([1]), existe $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset E \setminus T$ tal que

$$\bigcup_{x \in E \setminus T} B(x, \epsilon_x) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B(x_n, \epsilon_{x_n}).$$

Por lo tanto, se tiene que

$$\begin{aligned}\bigcup_{x \in E \setminus T} B(x, \epsilon_x) \cap E = \left(\bigcup_{x \in E \setminus T} B(x, \epsilon_x) \right) \cap E = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B(x_n, \epsilon_{x_n}) \right) \cap E \\ = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(B(x_n, \epsilon_{x_n}) \cap E \right).\end{aligned}$$

Por el Teorema 2.32, se concluye que el conjunto

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B(x_n, \epsilon_{x_n}) \cap E \text{ es numerable.}$$

Por lo tanto, de (2.6) se sigue que $E \setminus T$ es numerable.

Ahora se va a mostrar que T es cerrado. Sean $x \in \overline{T}$ y $\epsilon > 0$, se va a demostrar que $B(x, \epsilon) \cap E$ es no numerable; es decir, $x \in T$.

Como $\frac{\epsilon}{2} > 0$ y $x \in \overline{T}$, entonces $B(x, \frac{\epsilon}{2}) \cap T \neq \emptyset$. Sea $y \in B(x, \frac{\epsilon}{2}) \cap T$. Como $\frac{\epsilon}{2} > 0$ y $y \in T$, entonces $B(y, \frac{\epsilon}{2}) \cap E$ es no numerable. Ahora, se va a probar que $B(y, \frac{\epsilon}{2}) \subset B(x, \epsilon)$. Para esto sea $z \in B(y, \frac{\epsilon}{2})$. Por la desigualdad triangular se tiene que

$$|x - z| \leq |x - y| + |y - z| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

donde la última desigualdad se verifica pues $y \in B(x, \frac{\epsilon}{2})$ y $z \in B(y, \frac{\epsilon}{2})$. Esto prueba que $B(y, \frac{\epsilon}{2}) \subset B(x, \epsilon)$. Se concluye que $B(y, \frac{\epsilon}{2}) \cap E \subset B(x, \epsilon) \cap E$. Luego, como $B(y, \frac{\epsilon}{2}) \cap E$ es no numerable, por el Lema 2.25, se deduce que $B(x, \epsilon) \cap E$ también es no numerable. Todo esto prueba que T es cerrado. □

COROLARIO 2.40. *Sean $E \subset \mathbb{R}$ no numerable y T el conjunto de los puntos de condensación de E. Entonces, $E \cap T$ es no numerable.*

Demostración. Por reducción al absurdo, se supone que $E \cap T$ es numerable. Como

$$E = (E \cap T) \cup (E \setminus T)$$

y $E \cap T$ es numerable (Lema 2.39), se concluye que E también lo es (Teorema 2.32), lo que contradice la hipótesis de que E no es numerable. $\square$

Observación: En particular, se tiene del Lema 2.25, que si E es no numerable y T denota el subconjunto de puntos de condensación de E, T es no numerable; ya que $E \cap T \subset T$.

TEOREMA 2.41. *Sean $E \subset \mathbb{R}$ no numerable y T el conjunto de puntos de condensación de E. Entonces T es perfecto no vacío.*

Demostración. Por la observación anterior, T es no vacío (pues el vacío es un conjunto numerable ya que está contenido en $\mathbb{N}$). Por el Lema 2.39, se tiene que T es cerrado.

Por la Proposición 2.6, para mostrar que T es perfect,o falta probar que $T \subset T'$. Por reducción al absurdo, se supone existe $x \in T$ tal que $x \notin T'$. Sea $\epsilon > 0$ tal que $B(x, \epsilon) \cap T = \{x\}$. Esto es equivalente a que

$$0 < |x - y| < \epsilon \Longrightarrow y \notin T.$$

La proposición $y \notin T$ es equivalente a que existe $r_y > 0$ tal que $B(y, r_y) \cap E$ es numerable. Es inmediato que

$$B(x, \epsilon) \cap E \subset \bigcup_{0<|x-z|<\epsilon} \left((B(z, r_z) \cup \{x\}) \cap E\right).$$

Por el Teorema de recubrimiento de Lindelöf ([1]), existe $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $0 < |x - y_i| < \epsilon$ para todo $i \in \mathbb{N}$

$$\bigcup_{0<|x-y|<\epsilon} B(y, r_y) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B(y_n, r_{y_n}).$$

Por el Teorema 2.32, el conjunto del lado derecho de la última igualdad es numerable. Como $\{x\}$ es un conjunto numerable, se deduce que

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (B(y_n, r_{y_n}) \cup \{x\})$$

también lo es y puesto que se verifica

$$B(x, \epsilon) \cap E \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left((B(y_n, r_{y_n}) \cup \{x\}) \cap E\right) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (B(y_n, r_{y_n}) \cup \{x\}),$$

por el Lema 2.25 se tiene que $B(x, \epsilon) \cap E$ es numerable, lo que es absurdo ya que $x \in T$. Lo supuesto es falso; es decir, $T \subset T'$. $\square$

A continuación se enuncian algunas definiciones y lemas importantes para el presente trabajo según [20].

2.3. Conjunto nada denso

Definición 2.20 (Conjunto nada denso)**.** *Sea $X \subset \mathbb{R}$ un subconjunto de los reales. Se dice que X es* denso en ninguna parte *o* nada denso *si se verifica que*

$$\text{int}(\overline{X}) = \emptyset.$$

El siguiente lema se usa frecuentemente para probar que un conjunto es nada denso.

Lema 2.42. *Sean $X, Y \subset \mathbb{R}$ subconjuntos de los reales. Si $X \subset Y$ y Y es nada denso, entonces X es nada denso.*

Demostración. Por la definición de clausura de un conjunto y como $X \subset Y$, se verifica que

$$\overline{X} \subset \overline{Y}.$$

Además, por la definición de interior de un conjunto y la última contenencia, se tiene que

$$\text{int}(\overline{X}) \subset \text{int}(\overline{Y}).$$

Puesto que Y es nada denso, se tiene que $\text{int}(\overline{Y}) = \emptyset$; luego se colige que $\text{int}(\overline{X}) = \emptyset$. Por lo tanto, se concluye que X es nada denso. $\square$

El siguiente lema da una condición suficiente para que un conjunto cerrado sea nada denso.

Lema 2.43. *Sea $X \subset \mathbb{R}$ un subconjunto de los reales. Si X es cerrado y $\lambda(X) = 0$, entonces X es nada denso.*

Demostración. Puesto que X es cerrado, es suficiente probar que $\text{int}(X) = \emptyset$.

Por reducción al absurdo, sea $a \in \text{int}(X)$. Por la definición de interior de un conjunto, existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset X$. Dado que $\lambda(B(x, r)) = 2r$, se tiene que $\lambda(X) \geq 2r > 0$. Esto es absurdo pues $\lambda(X) = 0$; por lo tanto, lo supuesto es falso; es decir, X es nada denso. $\square$

Ahora, se da la definición de conjunto denso en los reales.

DEFINICIÓN 2.21 (Denso)**.** *Sea $X \subset \mathbb{R}$ un subconjunto de los reales. Se dice que X es denso si se verifica que*

$$\overline{X} = \mathbb{R}.$$

Los conjuntos $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}^c$, los números de Liouville y los números Diofantinos son ejemplos de conjuntos densos.

Observación: Para la demostración de que $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}^c$ son densos, se puede revisar el Ejercicio 3.32 de [1]. Mientras que la densidad $\mathbb{L}$ y $\mathbb{D}$ se prueba en el Capítulo 5.

PROPOSICIÓN 2.44. *Sea $X \subset \mathbb{R}$ un subconjunto abierto. El conjunto X^c es nada denso si y sólo si X es denso.*

Demostración. Como X es abierto, por la Proposición 2.13, se deduce que X^c es cerrado. Por lo tanto, se tiene que $\overline{X^c} = X^c$.

Se supone que X^c es nada denso. Por la definición de nada denso y por hipótesis, se colige que $\operatorname{int}(\overline{X^c}) = \operatorname{int}(X^c) = \emptyset$. Por la Proposición 2.15, se verifica que

$$\overline{X}^c = \operatorname{int}(X^c) = \emptyset.$$

Por lo tanto, se deduce que $\overline{X} = \mathbb{R}$. Es decir, X es denso.

Recíprocamente, se supone que X es denso, es decir, $\overline{X} = \mathbb{R}$. Por lo tanto, $\overline{X}^c = \emptyset$. Por la Proposición 2.15, se tiene que

$$\operatorname{int}(X^c) = \overline{X}^c = \emptyset.$$

Como X^c es cerrado, se verifica que $\operatorname{int}(\overline{X^c}) = \operatorname{int}(X^c) = \emptyset$. Por definición, se concluye que X^c es nada denso. $\square$

DEFINICIÓN 2.22 (Primera categoría)**.** *Sea $X \subset \mathbb{R}$. Se dice que X es un conjunto de primera categoría o magro si*

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n,$$

donde A_n es un conjunto nada denso para todo $n \in \mathbb{N}$. Además, un conjunto que no es de primera categoría se dice conjunto de segunda categoría.

2.4. Conjunto de Cantor

Ahora, se enuncia la definición de Conjunto de Cantor.

Definición 2.23 (Conjunto de Cantor, [6])**.** *Sea X un subconjunto no vacío de los reales. Se dice que X es un* conjunto de Cantor *si es perfecto y nada denso.*

El siguiente lema establece una condición suficiente para que un conjunto sea de Cantor.

Lema 2.45. *Sea $X \subset \mathbb{R}$ no vacío. Si $\operatorname{int}(X) = \emptyset$ y X es perfecto, entonces X es un conjunto de Cantor.*

Demostración. Por la definición de conjunto de Cantor, hace falta probar que X es nada denso. Por el Corolario 2.8, se verifica que X es cerrado, es decir, $\overline{X} = X$. Además, puesto que $\operatorname{int}(X) = \emptyset$. Se deduce que

$$\operatorname{int}(\overline{X}) = \operatorname{int}(X) = \emptyset.$$

Se colige que X es nada denso. Por todo esto, se concluye que X es un conjunto de Cantor. $\square$

En el siguiente teorema se prueba que los conjuntos de Cantor existen. Para este fin se introduce la siguiente definición.

Definición 2.24. *Primero, se define para $n = 0$: $\Delta_0 = [0,1]$ y $C_0^0 = \Delta_0 = [0,1]$; para $n = 1$: $\Delta_{1,0} = \left[0, \frac{1}{3}\right]$, $\Delta_{1,1} = \left[\frac{2}{3}, 1\right]$ y*

$$C_0^1 = \Delta_{1,0} \biguplus \Delta_{1,1} = \left[0, \frac{1}{3}\right] \biguplus \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

Procediendo recursivamente, supóngase que para $n \in \mathbb{N}$, existen 2^n intervalos cerrados: $\Delta_{n,k}$ para $k = 0, 1, 2^n - 1$ y

$$C_0^n = \biguplus_{k=0}^{2^n-1} \Delta_{n,k}.$$

Cada intervalo cerrado $\Delta_{n,k}$ se divide 3 intervalos iguales y se extrae el intervalo abierto central, así se obtienen 2^{n+1} intervalos cerrados $\Delta_{n,k}$ para $k = 0, 1, 2^{n+1} - 1$ y se define

$$C_0^{n+1} = \biguplus_{k=0}^{2^{n+1}-1} \Delta_{n+1,k}.$$

El conjunto Triádico de Cantor en el intervalo [0,1] está dado por:

$$C_0 = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_0^n.$$

TEOREMA 2.46 ([16]). *El conjunto Triádico de Cantor C_0 es un conjunto de Cantor.*

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, C_0^n, dado en la definición anterior, es la unión de 2^n intervalos cerrados. Por el Lema 2.12 y por el Teorema 3.13 de [1], C_0^n es cerrado. Por lo tanto, C_0^n es cerrado para cada $n \in \mathbb{N}$. Por el Lema 2.14, C_0 es un conjunto cerrado.

Ahora, se va a proceder por inducción matemática para probar que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\lambda\left(C_0^n\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Es inmediato que $\lambda\left(C_0^0\right) = \lambda\left([0,1]\right) = 1$. Sea $n \in \mathbb{Z}^+$ y supóngase que $\lambda\left(C_0^{n-1}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$. Por la construcción de C_0^{n-1}, $\lambda\left(\Delta_{n-1,k}\right) = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{3^{n-1}}$ para cada $k = 0, \ldots 2^{n-1} - 1$. Así, $\lambda\left(\Delta_{n,l}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^{n-1}} = \frac{1}{3^n}$ para cada $l = 0, 1, \ldots, 2^n - 1$. Puesto que estos conjuntos son disjuntos entre sí, se prueba que $\lambda\left(C_0^n\right) = \sum_{l=0}^{2^n-1} \frac{1}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Por el principio de inducción,

$$\lambda\left(C_0^n\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sea $x \in C_0$ y $\epsilon > 0$. Puesto que $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\left(\frac{2}{3}\right)^N < \epsilon$. Por la definición del conjunto C_0, $x \in C_0^N$. Por la construcción del conjunto C_0^N, existe un único $j = 0, \ldots, 2^N - 1$ tal que $x \in \Delta_{N,j}$. Se toma

$$y = \begin{cases} \min \Delta_{N,j} & \text{si } x = \max \Delta_{N,j}, \\ \max \Delta_{N,j} & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Así, $y \neq x$. Además, como $\min \Delta_{N,j}$ y $\max \Delta_{N,j}$ son extremos de un intervalo de C_0^N, a partir de la iteración N jamás se los retira. Por lo tanto, $\min \Delta_{N,j}, \max \Delta_{N,j} \in C_m$ para todo $m \in \mathbb{N}$ tal que $m \geq N$. Pero como la sucesión $(C_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ es decreciente y $\min \Delta_{N,j}, \max \Delta_{N,j} \in C_0^N$, se tiene que $\min \Delta_{N,j}, \max \Delta_{N,j} \in C_0^j$ para todo $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Así $\min \Delta_{N,j}, \max \Delta_{N,j} \in C_0$. Por la Proposición 2.6, C_0 es un conjunto perfecto.

También, puesto que $\lambda\left([0,1]|\right) = 1$ y $(C_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ es decreciente; por el Lema 3.4, literal (b), de [3], se deduce que

$$\lambda(C_0) = \lim_{n\to\infty} \lambda(C_0^n) \leq \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0.$$

Por el Lema 2.45 y puesto que $0 \in C_0 \neq \emptyset$, por su construcción, se concluye que C_0 es un conjunto de Cantor. $\square$

Observación: La medida de Lebesgue de un conjunto de Cantor puede ser positiva; estos conjuntos son llamados *fat Cantor*. Un ejemplo se puede ver en la Sección 7.1 de [6].

La siguiente proposición prueba que todo conjunto de Cantor es totalmente disconexo.

PROPOSICIÓN 2.47. *Sea $X \subset \mathbb{R}$. Si X es nada denso, entonces X es totalmente disconexo en $\mathbb{R}$. Además, si X es cerrado se tiene la proposición recíproca.*

Demostración. Sea $X \subset \mathbb{R}$ tal que X es nada denso. Por reducción al absurdo, se supone que X no es totalmente disconexo, entonces existe $Y \subset X$ conexo con más de un elemento.

Sean $a, b \in Y$ tales que $a < b$. Como $Y \subset \mathbb{R}$ es conexo, por el Teorema2.17, Y es un intervalo; así $(a, b) \subset Y$. Pero esto implica que $x_0 \in \text{int}(X)$ con $x_0 = \frac{a+b}{2}$. Esto contradice que X sea nada denso. Por lo tanto lo supuesto es falso, y se tiene que X es totalmente disconexo.

Recíprocamente, sea $X \subset \mathbb{R}$, cerrado y totalmente disconexo. Por reducción al absurdo, se supone que X no es nada denso, entonces $\text{int}(X) = \text{int}(\overline{X}) \neq \emptyset$. Se toma $x_0 \in \text{int}(X)$, por lo tanto, existe $r > 0$ tal que $(x_0 - r, x_0 + r) \subset X$. Como $(x_0 - r, x_0 + r)$ es conexo en X con más de un elemento, se tiene que X no es totalmente disconexo. Esto es absurdo, por lo tanto lo supuesto es falso; es decir, X debe ser nada denso. $\square$

Observación: En la Proposición 2.47 no se puede prescindir de la condición de que X sea cerrado. En efecto, basta considerar que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ es totalmente disconexo, pues todo intervalo contiene irracionales; luego ningún intervalo está contenido en $\mathbb{Q}$. Pero $\mathbb{Q}$ no es nada denso pues $\text{int}(\overline{\mathbb{Q}}) = \text{int}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

2.5. Teorema de Baire

Para probar la siguiente proposición se usará el célebre Teorema de Categorías de Baire, Sección 4.7-2 de [12]:

TEOREMA 2.48 (Baire, [12]). *Sea $X \neq \emptyset$ un espacio métrico. Si X es completo, entonces X es de segunda categoría.*

TEOREMA 2.49 (Teorema 1.4-4 de [12]). *Los conjuntos $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ (conjunto de los números complejos) son completos.*

El Teorema de Baire demuestra que el conjunto $\mathbb{R}$ es un conjunto de segunda categoría, puesto que $\mathbb{R}$ es completo por el Teorema 1.4-4 de [12].

La siguiente proposición da una característica muy importante de los conjuntos perfectos no vacíos. Además, prueba que todo conjunto de Cantor es no numerable.

TEOREMA 2.50 (Teorema 1.4-7 de [12]). *Un subconjunto de un conjunto completo es cerrado si y sólo si es completo.*

PROPOSICIÓN 2.51. *Sea $X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$. Si X es perfecto, entonces X no es numerable.*

Demostración. Sea $X \subset \mathbb{R}$, no vacío y perfecto. Por reducción al absurdo, se supone que X es numerable, por lo tanto se puede escribir

$$X = \{x_1, x_2, \ldots\}.$$

Como X es cerrado y $\mathbb{R}$ es completo (Teorema 1.4-4 de [12].), por el Teorema 1.4-7 de [12] se tiene que X es completo. Se considera a X como subespacio métrico de $\mathbb{R}$. Vamos a probar que $\operatorname{int}(\{x_i\}) = \emptyset$ en X para todo $i \in \mathbb{N}$. Sea $i \in \mathbb{N}$ y supongamos que $a \in \operatorname{int}(\{x_i\})$. Entonces, existe V abierto de X tal que $a \in V$ y $V \subset \{x_i\}$. De donde se deduce que $x_i = a$, luego $V = \{a\}$. Como V es abierto en X, se tiene que existe U abierto en $\mathbb{R}$ tal que $V = U \cap X$. En resumen se tiene que existe un abierto U en $\mathbb{R}$ tal que $U \cap X = V = \{x_i\}$. Esto prueba que $\{x_i\}$ es un punto aislado de X; es decir, $x \in X$ pero $x \notin \overline{X}$, lo cual contradice el hecho que X sea perfecto. Por lo tanto, $\operatorname{int}(\{x_i\}) = \emptyset$. Además, como $\{x_i\}$ es cerrado, se tiene que

$$\operatorname{int}(\overline{\{x_i\}}) = \operatorname{int}(\{x_i\}) = \emptyset$$

para todo $i \in \mathbb{N}$. Por todo lo visto, se puede escribir

$$X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{x_i\},$$

donde $\{x_i\}$ es nada denso para todo $i \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, X es de primera categoría, lo cual contradice el Teorema de Baire 2.48. Por lo tanto, lo supuesto es falso, es decir, se concluye que X es un conjunto no numerable. □

Observación: Sea Y espacio métrico completo, $X \subset Y$, $X \neq \emptyset$. Si X es perfecto, $X' = X$ donde el derivado se lo hace en el sentido de la métrica de Y, entonces X es no numerable.

Demostración. Este resultado se prueba de forma similar a la Proposición 2.51. □

2.6. Teorema de Bendixson

El Teorema de Bendixson es muy importante para probar la existencia de los conjuntos de Cantor en $\mathbb{L}$ y en $\mathbb{D}$; por está razón, se lo enuncia y demuestra a continuación.

TEOREMA 2.52 (Bendixson). *Todo subconjunto cerrado de* $\mathbb{R}$ *se puede expresar como la unión disjunta de un conjunto perfecto y uno numerable.*

Demostración. Sea $E \subset \mathbb{R}$ un conjunto cerrado. Si E es numerable, se puede escribir

$$E = E \biguplus \emptyset,$$

donde E es numerable y $\emptyset$ es perfecto.

Si E no es numerable, sea T el conjunto de los puntos de condensación de E. Por el Lema 2.37, $T \subset \overline{E} = E$, donde la última igualdad se da pues E es cerrado. Por el Lema 2.39, se tiene que $E \setminus T$ es numerable. Además, por el Teorema 2.41, se tiene que T es no vacío y perfecto. Por todo esto se puede escribir

$$E = (E \setminus T) \biguplus T.$$

Esto prueba el Teorema de Bendixson. □

Ahora, se da una noción importante para el entendimiento de la estructura del conjunto de los números reales.

Definición 2.25 (Números algebraicos)**.** *Se dice que un número real β es algebraico si existe un polinomio $p \in \mathbb{Z}[X]$ (con coeficientes enteros) tal que $p(\beta) = 0$. Un número real que no es algebraico se llama trascendente.*

2.7. Números de Liouville y Diofantinos

Las siguientes definiciones son las principales para el presente trabajo.

Definición 2.26. *Se dice que $\alpha \in \mathbb{Q}^c$ es un número de Liouville si para todo $n \in \mathbb{N}$, existen enteros p y q con $q > 1$ tales que*

$$0 < \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^n}. \tag{2.7}$$

Un número que no es de Liouville se denomina Diofantino. El conjunto de los números de Liouville se denota por $\mathbb{L}$ y el de los números Diofantinos por $\mathbb{D}$.

Observación: En la definición anterior es suficiente considerar $n \in \mathbb{Z}^+$. En efecto, suponga que dado $n \in \mathbb{Z}^+$, existen enteros p y q con $q > 1$ tales que

$$0 < \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^n}.$$

También, se puede concluir que

$$0 < \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^n} < \frac{1}{q^0} = 1,$$

puesto que $q > 1$.

A continuación, se enuncia el teorema cuya demostración es el objetivo principal de este trabajo.

Teorema 2.53. *Existen dos conjuntos de Cantor C_1 y C_2, tales que $C_1 \subset \mathbb{L}$ y $C_2 \subset \mathbb{D}$.*

La demostración de este teorema se desarrollará en dos partes. La existencia del conjunto de Cantor en $\mathbb{L}$ se probará en el Capítulo 4 y la del conjunto de Cantor en $\mathbb{D}$ en el Capítulo 5. En las dos demostraciones primero se probará la existencia de un conjunto cerrado que no es numerable en $\mathbb{L}$ y $\mathbb{D}$; y finalmente el Teorema de Bendixson implicará nuestro objetivo.

El siguiente resultado muestra una condición suficiente para que un número irracional dado sea un número de Liouville.

PROPOSICIÓN 2.54. *Sea $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Si existe $k \in \mathbb{Z}^+$ tal que para todo $r \in \mathbb{N}$ con $r \geq k$, existen enteros p y q con $q > 1$ tales que*

$$0 < \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^r}, \tag{2.8}$$

entonces $\alpha \in \mathbb{L}$.

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$. Si $n \geq k$, por la hipótesis, se obtiene (2.7). Se considera ahora el caso para $n < k$. Se tiene entonces que $q^n < q^k$. Luego, se concluye que

$$0 < \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^k} < \frac{1}{q^n}.$$

Esto prueba que $\alpha \in \mathbb{L}$. □

PROPOSICIÓN 2.55 (Irracionalidad)**.** *Todos los números reales que verifican la expresión* (2.7)*, en la definición de números de Liouville, son irracionales.*

Demostración. Por reducción al absurdo, sea $\alpha = \frac{c}{d}$ con c, d enteros y $d > 0$, tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ existen enteros p y q con $q > 1$ tales que

$$0 < \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^n}.$$

Entonces, para todo $p, q \in \mathbb{Z}$ con $q > 1$, se tiene que

$$0 < \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| = \left|\frac{c}{d} - \frac{p}{q}\right| = \left|\frac{cq - pd}{dq}\right|$$

implica que $1 \leq |cq - pd|$, pues $cq - pd$ es un número entero no nulo. Por otro lado, puesto que $\lim_{k\to\infty} 2^{k-1} = \infty$, existe $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $2^{n-1} > d$. Y también, del hecho que $2 \leq q$, se sigue que

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{dq} > \frac{1}{2^{n-1}q} \geq \frac{1}{q^n}.$$

Por lo tanto, α no verifica la desigualdad (2.7) de la definición en los números de Liouville. Esta contradicción prueba que lo supuesto es falso, es decir, se concluye que $\alpha \notin \mathbb{Q}$. □

Observación: La proposición anterior muestra que, en la definición de los números de Liouville, se puede quitar la hipótesis de que el número sea irracional, pues ningún número racional verifica la expresión (2.7).

La siguiente proposición da un ejemplo de un número de Liouville, dado por Joseph Liouville en 1851.

PROPOSICIÓN 2.56 ([15]). *Si*
$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}},$$
entonces x es un número de Liouville.

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$, por la Proposición 2.54, se puede suponer que $n > 0$. Se considera $q = 10^{n!}$ y $p = q \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{10^{k!}}$. Luego,

$$\begin{aligned} 0 < x - \frac{p}{q} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^{k!}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{10^{k!}} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{10^{k!}} < \sum_{k=(n+1)!}^{\infty} \frac{1}{10^{k}} \\ &= \frac{10}{9(10^{(n+1)!})} < \frac{10^{n!}}{10^{(n+1)!}} = \frac{1}{10^{(n!)n}} = \frac{1}{q^n}. \end{aligned}$$

Por todo esto, se concluye que
$$0 < \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^n}.$$
Esto prueba que $x \in \mathbb{L}$. $\square$

Ahora, se prueban algunas características importantes sobre los números de Liouville.

LEMA 2.57. *El conjunto de los Números de Liouville se puede representar por*
$$\mathbb{L} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} T_n,$$
donde
$$T_n = \bigcup_{q=2}^{\infty} \bigcup_{p \in \mathbb{Z}} \left[\left(\frac{p}{q} - \frac{1}{q^n}, \frac{p}{q} \right) \cup \left(\frac{p}{q}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^n} \right) \right], \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demostración. Sean $x \in \mathbb{L}$ y $n \in \mathbb{N}$. Por definición del conjunto $\mathbb{L}$, existen $p, q \in \mathbb{Z}$ tales que $q \geq 2$ y
$$0 < \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^n}.$$
Esta desigualdad equivale a
$$x \in \left(\frac{p}{q} - \frac{1}{q^n}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^n} \right) \setminus \left\{ \frac{p}{q} \right\}.$$

Como $p, q \in \mathbb{Z}$ y $q \geq 2$, se tiene que

$$\left(\frac{p}{q} - \frac{1}{q^n}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^n}\right) \setminus \left\{\frac{p}{q}\right\} \subset \bigcup_{q=2}^{\infty} \bigcup_{p \in \mathbb{Z}} \left[\left(\frac{p}{q} - \frac{1}{q^n}, \frac{p}{q}\right) \cup \left(\frac{p}{q}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^n}\right)\right].$$

Por la definición de T_n, se verifica que $x \in T_n$. Se deduce que

$$\mathbb{L} \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} T_n.$$

Recíprocamente, sea $x \in \bigcap_{m \in \mathbb{N}} T_m$ y $n \in \mathbb{N}$. Por la hipótesis, se tiene que $x \in T_n$, por la definición de T_n,

$$x \in \bigcup_{q=2}^{\infty} \bigcup_{p \in \mathbb{Z}} \left[\left(\frac{p}{q} - \frac{1}{q^n}, \frac{p}{q}\right) \cup \left(\frac{p}{q}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^n}\right)\right].$$

Luego, de la definición de unión generalizada, se sigue que existen $p, q \in \mathbb{Z}$ (con $q \geq 2$) y

$$x \in \left(\frac{p}{q} - \frac{1}{q^n}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^n}\right) \setminus \left\{\frac{p}{q}\right\},$$

la última proposición equivale a

$$0 < \left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^n},$$

de donde, se deduce que $x \in \mathbb{L}$. Así, $\bigcap_{m \in \mathbb{N}} T_m \subset \mathbb{L}$.

En resumen, se concluye que

$$\mathbb{L} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} T_n.$$

□

El lema anterior permite verificar que el conjunto $\mathbb{L}$ es “pequeño” en el sentido de la medida de Lebesgue. En efecto, se tiene la siguiente proposición.

LEMA 2.58 (Lema 3.4 (a) de [3]). *Sea μ una medida definida sobre una $\sigma-$algebra X.*

(a) Si $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión creciente en X, entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}}\right) = \lim_{n \to \infty} \mu(E_n).$$

(b) Si $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente en X y si $\mu(F_1) < \infty$, entonces

$$\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(F_n).$$

Este lema se va en la siguiente proposición con $\mu = \lambda$ y la $X = \operatorname{dom}(\lambda)$.

TEOREMA 2.59 (Teorema 4.27 de [1]). *Sea $f : S \to \mathbb{R}$ una función continua con $S \subset \mathbb{R}$. Si f es continua en un subconjunto compacto X de S, entonces $f(X)$ es acotada.*

PROPOSICIÓN 2.60 (Medida de $\mathbb{L}$, [17]). *La medida de Lebesgue del conjunto $\mathbb{L}$ es nula.*

Demostración. Por el lema anterior, se tiene que

$$\mathbb{L} \subset \bigcup_{q=2}^{\infty} \bigcup_{p\in\mathbb{Z}} \left(\frac{p}{q} - \frac{1}{q^n}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^n}\right)$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

Para todo $m \in \mathbb{Z}^+$ y cada $n \in \mathbb{N}$, se verifica que

$$\mathbb{L} \cap \left(-m + \frac{1}{2}, m - \frac{1}{2}\right) \subset \bigcup_{q=2}^{\infty} \bigcup_{p\in\mathbb{Z}} \left(\frac{p}{q} - \frac{1}{q^n}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^n}\right) \cap \left(-m + \frac{1}{2}, m - \frac{1}{2}\right) \tag{2.9}$$

Ahora, puesto que $\frac{1}{q^n} \leq \frac{1}{2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $q \in \{2, 3, \ldots\}$, la contenencia anterior se transforma en

$$\mathbb{L} \cap \left(-m + \frac{1}{2}, m - \frac{1}{2}\right) \subset \bigcup_{q=2}^{\infty} \bigcup_{p=-mq}^{mq} \left(\frac{p}{q} - \frac{1}{q^n}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^n}\right).$$

Además, se tiene

$$\left|\left(\frac{p}{q} + \frac{1}{q^n}\right) - \left(\frac{p}{q} - \frac{1}{q^n}\right)\right| = \frac{2}{q^n}.$$

Para $n > 2$, se tiene que

$$\begin{aligned} 0 \leq \lambda\left(\mathbb{L} \cap \left(-m + \frac{1}{2}, m - \frac{1}{2}\right)\right) &\leq \sum_{q=2}^{\infty} \sum_{p=-mq}^{mq} \frac{2}{q^n} = \sum_{q=2}^{\infty} \frac{2(2mq+1)}{q^n} = \sum_{q=2}^{\infty} \frac{(4m + \frac{2}{q})}{q^{n-1}} \\ &\leq (4m+1) \sum_{q=2}^{\infty} \frac{1}{q^{n-1}} \leq (4m+1) \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{n-1}} \\ &= \frac{4m+1}{n-2}, \end{aligned} \tag{2.10}$$

donde la penúltima desigualdad se da porque $q \geq 2$ y la última desigualdad se da pues la función $\frac{1}{x^{n-1}}$ con $n > 2$ es Riemman integrable en el sentido impropio en el intervalo $[1, +\infty[$ y su integral es el supremo de todas las sumas inferiores y, se tiene que $\sum_{q=2}^{\infty} \frac{1}{q^{n-1}}$ es una suma inferior correspondiente a $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{n-1}}$.

Por este análisis, tomando el límite cuando n tiende a infinito en (2.10), se tiene que $\lambda\left(\mathbb{L} \cap \left(-m + \frac{1}{2}, m - \frac{1}{2}\right)\right) = 0$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} 0 \leq \lambda(\mathbb{L}) = \lambda(\mathbb{L} \cap \mathbb{R}) &= \lambda\left(\mathbb{L} \cap \bigcup_{m \in \mathbb{Z}^+} \left(-m + \frac{1}{2}, m - \frac{1}{2}\right)\right) \\ &= \lim_{m \to \infty} \lambda\left(\mathbb{L} \cap \left(-m + \frac{1}{2}, m - \frac{1}{2}\right)\right) = 0, \end{aligned}$$

donde la última desigualdad se da por el Lema 3.4 (a) de [3]. $\square$

El siguiente lema se usa para demostrar que todo número de Liouville es trascendente.

Lema 2.61. *([7]) Sea α un irracional y raíz de $f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ (con $a_j \in \mathbb{Z}$ para cada $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$), donde f no es constante. Entonces, existe $A > 0$ tal que*

$$\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| > \frac{A}{b^n}$$

para todo $a \in \mathbb{Z}$ y todo $b \in \mathbb{Z}^+$.

Demostración. Como f es un polinomio y $[\alpha - 1, \alpha + 1]$ es un compacto, se sigue que $M := \text{máx}_{x \in [\alpha-1, \alpha+1]} |f'(x)| < +\infty$, por el Teorema 4.27 de [1]. Además, como f no es constante, se tiene que $M > 0$. Sean $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ las raíces, reales o complejas, de f distintas de α. Ahora, sea

$$0 < A < \text{mín}\left\{1, \frac{1}{M}, |\alpha - \alpha_1|, |\alpha - \alpha_2|, \ldots, |\alpha - \alpha_m|\right\}.$$

Por reducción al absurdo, se supone que existen a, b enteros, $b > 0$, tales que

$$\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| \leq \frac{A}{b^n}.$$

Luego,

$$\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| \leq \frac{A}{b^n} \leq A < \text{mín}\left\{1, \frac{1}{M}, |\alpha - \alpha_1|, |\alpha - \alpha_2|, \ldots, |\alpha - \alpha_m|\right\}.$$

Puesto que $\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| \leq 1$ y $\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| < |\alpha - \alpha_i|$ para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, se sigue que

$$\frac{a}{b} \in [\alpha - 1, \alpha + 1] \text{ y } \frac{a}{b} \notin \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\}.$$

Por el Teorema de Valor Medio, existe c entre $\frac{a}{b}$ y α tal que

$$f\left(\frac{a}{b}\right) = f\left(\frac{a}{b}\right) - f(\alpha) = \left(\frac{a}{b} - \alpha\right) f'(c).$$

Como $\frac{a}{b} \notin \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\}$, se sigue que $f\left(\frac{a}{b}\right) \neq 0$. Luego, $f'(c) \neq 0$. Por lo tanto, se tiene

$$\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{f(\frac{a}{b})}{f'(c)}\right|.$$

Además, se tiene

$$\left|f\left(\frac{a}{b}\right)\right| = \frac{\left|\sum\limits_{j=0}^{n} a_j a^j b^{n-j}\right|}{b^n} \geq \frac{1}{b^n},$$

donde la última desigualdad se da pues $\frac{a}{b}$ no es una raíz de f y $\sum\limits_{j=0}^{n} a_j a^j b^{n-j}$ es un entero. Por todo esto, se concluye que

$$\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| \geq \frac{1}{|f'(c)|b^n} \geq \frac{1}{Mb^n} > \frac{A}{b^n} \geq \left|\alpha - \frac{a}{b}\right|,$$

que es una contradicción. Esto prueba el lema. $\square$

TEOREMA 2.62. *Sea α un irracional y raíz de $f(x) = \sum\limits_{j=0}^{n} a_j x^j$ (con $a_j \in \mathbb{Z}$ para cada $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$), donde f no es constante. Si $k \geq n$, entonces existe $A > 0$ tal que*

$$\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| > \frac{A}{b^k},$$

para todo $a \in \mathbb{Z}$ y todo $b \in \mathbb{Z}^+$.

Demostración. Basta aplicar el Lema 2.61 al polinomio $g(x) = x^{k-n} f(x)$ y se obtiene el resultado deseado. $\square$

PROPOSICIÓN 2.63 (Trascendencia de $\mathbb{L}$, [7])**.** *Todos los números de Liouville son trascendentes.*

Demostración. Por reducción al absurdo, sea $\alpha \in \mathbb{L}$ tal que α algebraico. Sea $n \in \mathbb{Z}^+$ el grado del polinomio con coeficientes enteros cuya raíz es α dada por la función f. Sea $r \in \mathbb{N}$ tal que $2^r > \frac{1}{A}$, donde A es la constante del Lema 2.61. Como $n + r \in \mathbb{N}$

y como $\alpha \in \mathbb{L}$, por la definición de $\mathbb{L}$, existen $a, b \in \mathbb{Z}$ con $b > 1$ tales que

$$0 < \left|\alpha - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{b^{n+r}} \leq \frac{1}{2^r b^n} < \frac{A}{b^n}.$$

Esto contradice el Lema 2.61. Por lo tanto, α es trascendente. $\square$

Ahora se va a dar un ejemplo de otro número de Liouville.

Ejemplo: Se tiene que $\alpha := \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j!} \in \mathbb{L}$.

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$, se toman

$$a := 2^{n!} \sum_{j=0}^{n} 2^{-j!} \qquad \text{y} \qquad b := 2^{n!}.$$

Se nota que $b > 1$. Además, se tiene

$$0 < \left|\alpha - \frac{a}{b}\right| = \sum_{j=n+1}^{\infty} 2^{-j!} < \sum_{j=(n+1)!}^{\infty} 2^{-j} = \frac{1}{2^{(n+1)!-1}} = \frac{2^{1-n!}}{2^{n(n!)}} \leq \frac{1}{2^{n(n!)}} = \frac{1}{b^n}.$$

$\square$

La siguiente proposición da una forma de construir infinitos números de Liouville.

Proposición 2.64. *Para todo entero $b > 1$ y toda sucesión $(a_i)_{i \in \mathbb{Z}^+}$ de enteros no negativos menores o iguales a $b - 1$, con soporte infinito. Si se define*

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{b^{i!}},$$

entonces $x \in \mathbb{L}$.

Demostración. Sean $b \in \mathbb{N}$, $b > 1$ y $(a_i)_{i \in \mathbb{Z}^+}$ una sucesión en $\mathbb{N}$ con soporte infinito tal que $a_i < b$ para todo $i \in \mathbb{Z}^+$. Sea

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{b^{i!}}.$$

Se va a utilizar la Proposición (2.54) para probar que $x \in \mathbb{L}$. Por ello, sea $n \in \mathbb{Z}^+$. Se definen $q = b^{n!}$ y $p = q \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b^{i!}} = \sum_{i=1}^{n} a_i b^{n!-i!}$. Como $b \geq 2$, entonces $q \geq 2$. Como el factorial es una función creciente, se tiene que $b^{n!-i!}$ es un entero para cada $i = 1, 2, \ldots, n$; se sigue que p también lo es. Además, como $a_i \geq 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$ y el soporte de $(a_i)_{i\in\mathbb{Z}^+}$ es infinito, se tiene que $x > \frac{p}{q}$. Por lo tanto,

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| = x - \frac{p}{q} = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{a_i}{b^{i!}}. \tag{2.11}$$

Como $a_i \leq b-1$ para todo $i \in \mathbb{Z}^+$, se sigue que

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{a_i}{b^{i!}} \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{b-1}{b^{i!}}.$$

Ahora, como $\displaystyle\sum_{i=n+1}^{\infty} b^{-i!} < \sum_{i=(n+1)!}^{\infty} b^{-i}$, se tiene que

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{b-1}{b^{i!}} < \sum_{i=(n+1)!}^{\infty} \frac{b-1}{b^{i}} = (b-1) \sum_{i=(n+1)!}^{\infty} \frac{1}{b^{i}} = \frac{1}{b^{(n+1)!-1}}.$$

También, como

$$\frac{b^{n(n!)}}{b^{(n+1)!-1}} = b^{-(n+1)n!+1+n(n!)} = b^{-n!+1} = \frac{1}{b^{n!-1}} \leq 1.$$

Por lo tanto, se tiene

$$\frac{1}{b^{(n+1)!-1}} \leq b^{-n(n!)} = \frac{1}{q^n}.$$

Así, de (2.11), se tiene que

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^n}.$$

Por la Proposición 2.54, se concluye que $x \in \mathbb{L}$. □

A continuación, se dan los detalles de la demostración de un resultado del primer teorema, que aparece sin demostración, en [18].

Proposición 2.65 (Corolario 1 de [18])**.** *La suma de números de Liouville es de Liouville ó racional.*

Observación: Lo que nos dice el siguiente teorema es que si se tiene un número de Liouville α y un número racional z, entonces su suma es un número de Liouville, es decir, $\alpha + z \in \mathbb{L}$. Así, se tiene que

$$\mathbb{Q} + \mathbb{L} = \mathbb{L}.$$

Proposición 2.66. *Si $\alpha \in \mathbb{L}$ y $z \in \mathbb{Q}$, entonces $\alpha + z \in \mathbb{L}$.*

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$. Por la definición de número racional, existen $r \in \mathbb{Z}$ y

$s \in \mathbb{Z}^+$ tales que $z = \frac{r}{s}$.

Como la función $f(x) = 2^{x-n}$ es estrictamente creciente y

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty,$$

existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $s^n < 2^{m-n}$ y $m > n$.

Como $\alpha \in \mathbb{L}$ y $m \in \mathbb{N}$, existen $p \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{Z}^+$ tales que $q \geq 2$ y

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^m}.$$

Se necesita encontrar $x \in \mathbb{Q}$ tal que

$$\alpha + z - x = \alpha - \frac{p}{q}.$$

Por lo tanto, $x = \frac{p}{q} + z = \frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{ps+qr}{qs}$. Por todo esto, se tiene que

$$\left|\alpha + z - \frac{ps+qr}{qs}\right| = |\alpha + z - x| = \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^m} < \frac{1}{q^n s^n},$$

donde la última desigualdad se da pues,

$$s^n < 2^{m-n} \leq q^{m-n}$$

lo que equivale a $s^n q^n < q^m$. En resumen, se obtiene que

$$\left|\alpha + z - \frac{ps+qr}{qs}\right| < \frac{1}{(qs)^n}.$$

Todo esto prueba que $\alpha + z \in \mathbb{L}$. $\square$

Capítulo 3

Construcción de un conjunto de Cantor en un subconjunto de los Números Reales de complemento numerable

A continuación se presenta la construcción de un conjunto de Cantor en un conjunto cuyo complemento es numerable. Para llevar acabo este propósito, se necesitan de varios lemas, proposiciones y teoremas que se presentan en las siguientes líneas.

El primer lema prueba que, en los reales, la conexidad es una propiedad intrínseca de un conjunto; es decir, un conjunto conexo en $\mathbb{R}$ es conexo en cualquier subconjunto y viceversa.

Lema 3.1. *Sean $A, X \subset \mathbb{R}$ tales que $A \subset X$. El conjunto A es conexo en X si y solo si A es conexo en $\mathbb{R}$.*

Demostración. Sea A un conjunto conexo en X. Por reducción al absurdo, se supone que A no es un conjunto conexo de $\mathbb{R}$. Por definición, existen abiertos no vacíos B y C de A, bajo la topología heredada de $\mathbb{R}$, tales que

$$A = B \uplus C.$$

Además, existen abiertos B_1 y C_1 de $\mathbb{R}$ tales que

$$B = B_1 \cap A \qquad \text{y} \qquad C = C_1 \cap A.$$

Se toman $B_2 = B_1 \cap X$ y $C_2 = C_1 \cap X$. Luego, B_2 y C_2 son abiertos de X. También, puesto que $A \subset X$, se tiene que

$$B_2 \cap A = (B_1 \cap X) \cap A = B_1 \cap A = B \qquad \text{y} \qquad C_2 \cap A = (C_1 \cap X) \cap A = C_1 \cap A = C.$$

Luego se deduce que B y C son conjuntos abiertos de A en X. Así, se verifica que A no es conexo en X, lo que muestra que lo supuesto es falso; es decir, A es un conjunto conexo en $\mathbb{R}$.

Recíprocamente, sea A conexo en $\mathbb{R}$. Por reducción al absurdo, se supone que A no es conexo en X. Por la definición, existen abiertos no vacíos B y C de A en X, tales que

$$A = B \uplus C.$$

Además, existen abiertos B_1 y C_1 de X tales que

$$B = B_1 \cap A \qquad \text{y} \qquad C = C_1 \cap A.$$

También, existen B_2 y C_2 conjunto abiertos de $\mathbb{R}$ tales que

$$B_1 = B_2 \cap X \qquad \text{y} \qquad C_1 = C_2 \cap X.$$

Puesto que $A \subset X$, se tiene que

$$B = (B_2 \cap X) \cap A = B_2 \cap A \qquad \text{y} \qquad C = (C_2 \cap X) \cap A = C_2 \cap A.$$

La última expresión implica que B y C son conjuntos abiertos de A en $\mathbb{R}$. Por lo tanto, se colige que A no es un conjunto conexo en $\mathbb{R}$. Esta contradicción muestra que lo supuesto es falso; es decir, que A es un conjunto conexo en X. $\square$

Las siguientes proposiciones, lemas y corolarios se dan para probar que todo intervalo con más de un punto, contiene un conjunto de Cantor.

Proposición 3.2. *Sean $A, B \subset \mathbb{R}$ tales que B es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}$. Si A y B son homeomorfos, entonces para todo conjunto de Cantor $C \subset A$, se tiene que $f(C) \subset B$ es un conjunto de Cantor.*

Demostración. Por la definición de conjuntos homeomorfos, existe $f\colon A \to B$ tal que f es biyectiva, continua y f^{-1} continua. Sea $C \subset A$ un conjunto de Cantor. Se va a probar que $f(C) \subset B$ es un conjunto de Cantor.

Como el conjunto C es perfecto, entonces C es cerrado en $\mathbb{R}$. Puesto que $C \subset A$, se tiene que $C = C \cap A$. Esto implica que C es un conjunto cerrado en A. Dado que la función f^{-1} es continua, se colige que $f(C) = (f^{-1})^{-1}(C)$ es un conjunto cerrado en B; existe D un conjunto cerrado en $\mathbb{R}$ tal que

$$f(C) = D \cap B.$$

Así $f(C)$ es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}$ pues la intersección de conjuntos cerrados es también un conjunto cerrado.

Ahora, se va a probar que $f(C) \subset (f(C))'$ en $\mathbb{R}$. Sea $y \in f(C)$ y $\epsilon > 0$. Por definición de $f(C)$, existe $x \in C$ tal que $y = f(x)$. Como f es continua en x, existe $\delta > 0$ tal que para todo $u \in A$,

$$|u - x| < \delta \Longrightarrow |f(u) - f(x)| < \epsilon. \tag{3.1}$$

Puesto que C es un conjunto de Cantor, $C = C'$ en $\mathbb{R}$, por la definición de punto de acumulación, existe $z \in C \subset A$ tal que

$$0 < |x - z| < \delta. \tag{3.2}$$

Dado que la función f es inyectiva, se verifica que $f(x) \neq f(z)$. Por la continuidad de f en x se verifica que $|f(z) - f(x)| < \epsilon$. En particular, (3.1) es verdadero para z:

$$|z - x| < \delta \Longrightarrow |f(z) - f(x)| < \epsilon.$$

Luego, por (3.2), se tiene que

$$|f(z) - f(x)| < \epsilon. \tag{3.3}$$

Pero, como f es inyectiva, de (3.2) se deduce que

$$f(x) \neq f(z),$$

así, de (3.3),

$$0 < |f(z) - f(x)| < \epsilon.$$

Es decir, $f(z) \in B(f(x), \epsilon) \setminus \{f(x)\}$ lo que implica que

$$f(z) \in (B(y, \epsilon) \setminus \{y\}) \cap f(C).$$

Se concluye que $y \in (f(C))'$. Por la Proposición 2.6, se colige que $f(C)$ es un conjunto perfecto. Además, como $C \neq \emptyset$, existe $t \in C$, de donde $f(t) \in f(C) \neq \emptyset$. Todo esto, prueba que $f(C)$ es un conjunto perfecto en $\mathbb{R}$, no vacío y que está contenido en B.

Ahora, se va a probar que $f(C)$ es nada denso. Como $f(C)$ es cerrado en $\mathbb{R}$, es suficiente probar que $\text{int}(f(C)) = \emptyset$. Por reducción al absurdo, se supone que $\text{int}(f(C)) \neq \emptyset$ en $\mathbb{R}$. Sea $y \in \text{int}(f(C))$, por la definición de interior de un conjunto, existe $r > 0$ tal que $B(y, r) \subset f(C)$, de donde se verifica que

$$f^{-1}(B(y, r)) \subset C.$$

Como $B(y, r)$ es un conjunto conexo en $\mathbb{R}$, por el Lema 3.1, se deduce que $B(y, r)$ es un conjunto conexo en B, ya que $B(y, r) \subset B$. Dado que la función f^{-1} es continua, del Teorema 2.16 se sigue que $f^{-1}(B(y, r))$ es un conjunto conexo de A. Por el Lema 3.1, se deduce que el conjunto $f^{-1}(B(y, r))$ es un conjunto conexo en $\mathbb{R}$.

Se definen $u = y - \frac{r}{2}$ y $v = y + \frac{r}{2}$. Por definición de bola abierta, se verifica que $u, v \in B(y, r)$. Por la sobreyectividad de f, existen $t, w \in A$ tales que $u = f(t)$ y $v = f(w)$. Por la inyectividad de f y como $u \neq v$, se deduce que $t \neq w$. Por definición de preimagen, se verifica que $t, w \in f^{-1}(B(y, r))$.

Como los únicos conexos en $\mathbb{R}$ con dos o más elementos son los intervalos (Teorema 2.17), se deduce que $f^{-1}(B(y, r))$ es un intervalo. Además, como $t, w \in f^{-1}(B(y, r))$ y $f^{-1}(B(y, r))$ es un intervalo, se colige que $(\text{mín}\{w, t\}, \text{máx}\{w, t\}) \subset f^{-1}(B(y, r))$.

Pero como $f^{-1}(B(y, r)) \subset C$, se tiene que

$$(\text{mín}\{w, t\}, \text{máx}\{w, t\}) \subset \text{int}(C) = \emptyset,$$

donde la última igualdad es verdad pues C es un conjunto cerrado nada denso. Esta contradicción implica que $\text{int}(f(C)) = \emptyset$.

Así se concluye que $f(C) \subset B$ es un conjunto de Cantor. $\square$

PROPOSICIÓN 3.3. *Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$. Entonces, los intervalos $[0, 1]$ y $[a, b]$ son homeomorfos.*

Demostración. La función $f\colon [0, 1] \to [a, b]$ tal que $f(x) = (b - a)x + a$ para todo $x \in [0, 1]$. Además, f es biyectiva y continua.

Además, $f^{-1}\colon [a, b] \to [0, 1]$ definida por $f^{-1}(x) = \frac{x-a}{b-a}$ para todo $x \in [a, b]$ también es continua. Se concluye que f es un homeomorfismo entre $[0, 1]$ y $[a, b]$ lo que prueba que los intervalo $[0, 1]$ y $[a, b]$ son homeomorfos. $\square$

COROLARIO 3.4. *Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$. Entonces, los intervalos $(0, 1)$ y (a, b) son homeomorfos.*

Demostración. En este caso la función $f\colon (0,1) \to (a,b)$ tal que $f(x) = (b-a)x + a$ para todo $x \in (0,1)$ es un homeomorfismo. $\square$

COROLARIO 3.5. *Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$ y $c < d$. Entonces, los intervalos $[a,b]$ y $[c,d]$ son homeomorfos.*

Demostración. Por la Proposición 3.3, existen $f\colon [a,b] \to [0,1]$ y $g\colon [0,1] \to [c,d]$ tales que f y g son homeomorfismos. Se define $h\colon [a,b] \to [c,d]$ por $h = g \circ f$. Luego h es un homeomorfismo. Esto prueba que los intervalo $[c,d]$ y $[a,b]$ son homeomorfos. $\square$

COROLARIO 3.6. *Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$ y $c < d$. Entonces, los intervalos (a,b) y (c,d) son homeomorfos.*

Demostración. Similar al del corolario anterior con la ayuda del 3.4. $\square$

LEMA 3.7. *Sean $c, d \in \mathbb{R}$ tales que $c < d$. El conjunto (c,d) es no numerable.*

Demostración. Por el Teorema 2.35, se tiene que el intervalo $[0,1)$ no es numerable. Dado que $[0,1) \subset (-1,1)$, del Lema 2.33 se deduce que el intervalo $(-1,1)$ no es numerable. Por el Corolario 3.6, se tiene que (c,d) y $(-1,1)$ son homeomorfos; en particular, (c,d) y $(-1,1)$ son equipotentes. Así, del Corolario 2.22, se concluye que (c,d) es no numerable. $\square$

LEMA 3.8. *Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Si $a < b$, entonces existe $C \subset \mathbb{R}$ un conjunto de Cantor tal que $C \subset [a,b]$.*

Demostración. Sea C_0 el conjunto triádico de Cantor en el intervalo $[0,1]$. Por la Proposición 3.3, existe $f\colon [0,1] \to [a,b]$ tal que f es un homeomorfismo. Sea $C = f(C_0) \subset [a,b]$, como el intervalo $[a,b]$ es un conjunto cerrado, por la Proposición 3.2, se verifica que $f(C_0) \subset [a,b]$ y es un conjunto de Cantor. Se define $C = f(C_0)$. $\square$

COROLARIO 3.9. *Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Si $a < b$, entonces existe $C \subset \mathbb{R}$ un conjunto de Cantor tal que $C \subset (a,b)$.*

Demostración. Se definen $x = \frac{2a+b}{3}$ y $y = \frac{a+2b}{3}$. Se tiene que

$$x = \frac{2a+b}{3} = \frac{a+a+b}{3} < \frac{a+b+b}{3} = \frac{a+2b}{3} = y.$$

Por lo tanto, $x < y$. Además, se deduce que

$$x = \frac{2a+b}{3} > \frac{2a+a}{3} = a,$$

y también que

$$y = \frac{a+2b}{3} < \frac{b+2b}{3} = b.$$

En resumen, se tiene que $a < x < y < b$. Por Lema 3.8, existe un conjunto de Cantor $C \subset [x, y] \subset (a, b)$. $\square$

El siguiente lema es muy importante para la prueba del Teorema 3.12.

LEMA 3.10. *Sea $X \subset \mathbb{R}$ tal que X^c sea numerable. Para todo $t < s$, se tiene que $(t, s) \cap X \neq \emptyset$.*

Demostración. Por reducción al absurdo, se supone que $(t, s) \cap X = \emptyset$. Entonces, se tiene que $(t, s) \subset X^c$. Por el Lema 3.7, se verifica que (t, s) no es numerable de donde X^c no es numerable (Lema 2.33). Esto contradice la hipótesis. Por lo tanto, se tiene que $(t, s) \cap X \neq \emptyset$. $\square$

El siguiente teorema es una generalización de la siguiente proposición de [8].

PROPOSICIÓN 3.11 ([8])**.** *Existe un conjunto no vacío, perfecto y nada denso en los números irracionales.*

TEOREMA 3.12. *([8]) Sea $X \subset \mathbb{R}$. Si X^c es un conjunto numerable, entonces existe un conjunto de Cantor C tal que $C \subset X$.*

Demostración. Sean $a, b \in X$ tales que $a < b$. Como X^c es numerable y $[a, b] \cap X^c \subset X^c$, por el Lema 2.25, se deduce que $[a, b] \cap X^c$ es un conjunto numerable.

Hay 3 casos posibles.

Si $[a, b] \cap X^c = \emptyset$, por el Lema 3.8 existe un conjunto de Cantor, $C \subset [a, b]$. Se deduce que $C \cap X^c \subset [a, b] \cap X^c = \emptyset$. Por lo tanto, se tiene que $C \cap X^c = \emptyset$. De la última expresión, se concluye que existe un conjunto de Cantor, C, tal que $C \subset X$.

Si $[a, b] \cap X^c$ es finito y no vacío, existe $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que

$$[a, b] \cap X^c = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}, \tag{3.4}$$

donde $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Por el Corolario 3.9, existe un conjunto de Cantor C tal que $C \subset (x_1, x_2)$. Además, por la definición de x_i para $i = 1, 2, \ldots, n$, se tiene que $(x_1, x_2) \cap X^c = \emptyset$. Por lo tanto, se deduce que

$$C \subset (x_1, x_2) \subset X.$$

Se concluye que existe un conjunto de Cantor C tal que $C \subset X$.

Si $[a,b] \cap X^c$ es infinito numerable, se puede escribir

$$[a,b] \cap X^c = (a,b) \cap X^c = \{x_1, x_2, \ldots\},$$

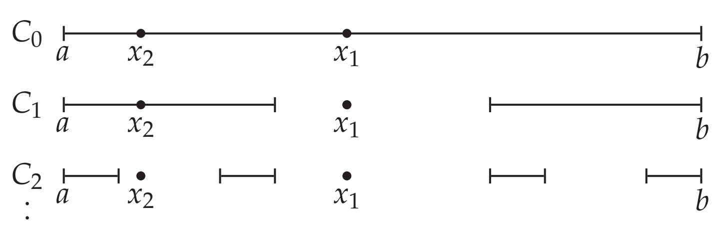
donde $x_i \neq x_j$, $i \neq j$, $i, j \in \mathbb{Z}^+$.

A continuación, se da la construcción del conjunto C. Posteriormente se probará que C es un conjunto de Cantor.

1. **Construcción del conjunto** C:

   Se va a proceder de la misma forma en la que se construye el conjunto triádico de Cantor C_0, pero en este caso se va a agrandar la longitud del intervalo que se va a remover en cada paso de tal manera que en el paso i se extraiga a x_i para todo $i = 1, 2, \ldots$ De esta forma, se va obtener un conjunto de Cantor que no contiene a ningún x_i para todo $i \in \mathbb{Z}^+$.

   El siguiente gráfico muestra como sel conjunto C_1 y C_2 no contiene a x_1 y a x_2, respectivamente. Es importante también asegurarse que en cada iteración se remueva un intervalo de longitud mayor al tercio del presente pues la demostración de que el conjunto C es de Cantor utiliza las mismas ideas que se usaron para probar que C_0 también lo es.



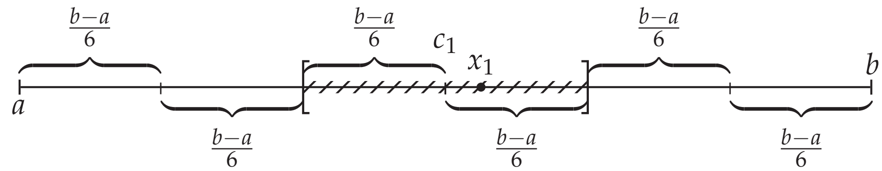
   Sea $C_0 = [a,b]$, C_0 es un conjunto cerrado y $c_1 = \frac{a+b}{2}$ (el punto medio del intervalo $[a,b]$). Sea

$$r_1 = \text{máx}\left\{|x_1 - c_1|, \frac{b-a}{6}\right\} > 0.$$

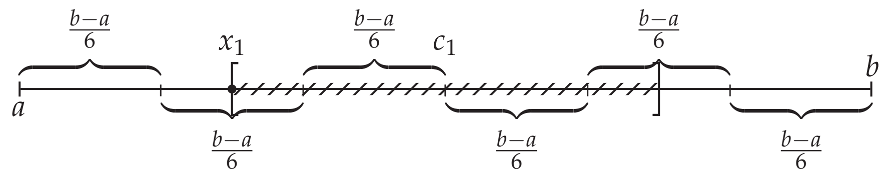
   Se verifica que $x_1 \in B[c_1, r_1] \subsetneq C_0 = [a,b]$.

   Los siguiente gráficos ilustran el conjunto $B[c_1, r_1]$ cuando

- $r_1 = \frac{b-a}{6}$:



- y $r_1 = |c_1 - x_1|$:



Por el Lema 3.10, $(a, c_1 - r_1) \cap X \neq \emptyset$ y $(c_1 + r_1, b) \cap X \neq \emptyset$. Se toman

$$z_1^1 \in (a, c_1 - r_1) \cap X \quad \text{ y } \quad z_1^2 \in (c_1 + r_1, b) \cap X.$$

Se define

$$C_1 = [z_1^0, z_1^1] \biguplus [z_1^2, z_1^3],$$

donde $z_1^0 = a$, $z_1^3 = b$. Además, por la definición de z_1^1 y z_1^2, se verifica que

$$z_1^0 < z_1^1 < z_1^2 < z_1^3,$$

y que $z_1^1 - z_1^0 < \frac{b-a}{3}$, $z_1^3 - z_1^2 < \frac{b-a}{3}$ y $x_1 \notin C_1$. En efecto,

$$\begin{aligned} z_1^1 - z_1^0 = z_1^1 - a < (c_1 - r_1) - a &\leq \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{6} - a \\ = \frac{3a + 3b - b + a - 6a}{6} &= \frac{2b - 2a}{6} = \frac{b-a}{3}, \end{aligned}$$

donde la primera igualdad se da pues $z_1^0 = a$, la primera desigualdad se da porque $z_1^1 \in (a, c_1 - r_1)$ y la última desigualdad cumple pues $r_1 \geq \frac{b-a}{6}$. Además,

$$\begin{aligned} z_1^3 - z_1^2 = b - z_1^2 < b - (c_1 + r_1) &\leq b - \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{6} \\ = \frac{6b - 3a - 3b - b + a}{6} &= \frac{2b - 2a}{6} = \frac{b-a}{3}, \end{aligned}$$

donde la primera igualdad se da pues $z_1^3 = b$, la primera desigualdad se da pues $z_1^2 \in (c_1 + r_1, b)$ y la segunda desigualdad se da pues $c_1 = \frac{a+b}{2}$ y $r_1 \geq \frac{b-a}{6}$.

Por otro lado,

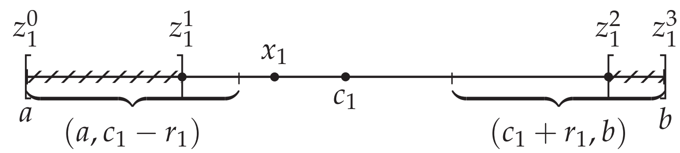
$$x_1 - z_1^1 > x_1 - (c_1 - r_1) \geq x_1 - c_1 + |x_1 - c_1| \geq x_1 - c_1 + c_1 - x_1 = 0,$$

donde la primera desigualdad se da pues $z_1^1 \in (a, c_1 - r_1)$, la segunda desigualdad se da pues $r_1 \geq |x_1 - c_1|$ y la última desigualdad se da pues $|w| \geq w$, para todo $w \in \mathbb{R}$. También, se cumple

$$z_1^2 - x_1 > (c_1 + r_1) - x_1 \geq c_1 - x_1 + |x_1 - c_1| \geq c_1 - x_1 + x_1 - c_1 = 0,$$

donde la primera desigualdad se da pues $z_1^2 \in (c_1 + r_1, b)$, la segunda desigualdad se da pues $r_1 \geq |x_1 - c_1|$ y la última desigualdad se da pues $|w| \geq w$, para todo $w \in \mathbb{R}$.

Los dos últimos cálculos prueban que $x_1 \in \left(z_1^1, z_1^2\right)$. Así $x_1 \notin C_1$.



Para el paso $n = 2$, hay dos casos.

Si $x_2 \in C_1$, entonces

$$x_2 \in [z_1^0, z_1^1] \biguplus [z_1^2, z_1^3].$$

Por la definición de unión disjunta, existe un único $j \in \{0, 1\}$ tal que

$$x_2 \in \left(z_1^{2j}, z_1^{2j+1}\right),$$

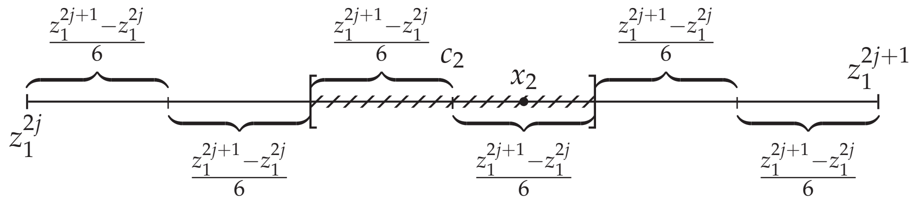
pues $x_2 \in X^c$ y $z_1^{2j}, z_1^{2j+1} \in X$.

Sea $c_2 = \frac{z_1^{2j} + z_1^{2j+1}}{2}$ el punto medio del intervalo al que pertenece x_2. Se define

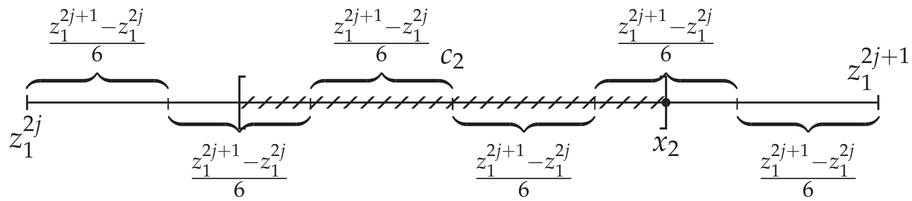
$$r_2 = \text{máx}\left\{|x_2 - c_2|, \frac{z_1^{2j+1} - z_1^{2j}}{6}\right\}.$$

Los siguiente gráficos ilustran el conjunto $B[c_2, r_2]$ cuando

- $r_2 = \frac{z_1^{2j+1} - z_1^{2j}}{6}$:



- y $r_2 = |c_2 - x_2|$:



Como $z_1^{2j+1} - z_1^{2j} > 0$, entonces $\frac{z_1^{2j+1}-z_1^{2j}}{6} < \frac{z_1^{2j+1}-z_1^{2j}}{2}$. También, como

$$x_2 \in \left(z_1^{2j}, z_1^{2j+1}\right) = B\left(c_2, \frac{z_1^{2j+1} - z_1^{2j}}{2}\right),$$

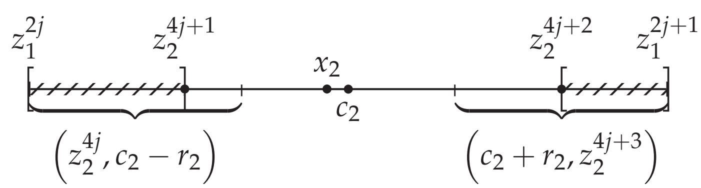
se deduce que $|x_2 - c_2| < \frac{z_1^{2j+1}-z_1^{2j}}{2}$. Por todo esto, se colige que $r_2 < \frac{z_1^{2j+1}-z_1^{2j}}{2}$.

Se verifica que

$$x_2 \in B[c_2, r_2] \subsetneq [z_1^{2j}, z_1^{2j+1}] \subset C_1.$$

Por el Lema 3.10, $(z_1^{2j}, c_2 - r_2) \cap X \neq \emptyset$ y $(c_2 + r_2, z_1^{2j+1}) \cap X \neq \emptyset$. Se toman

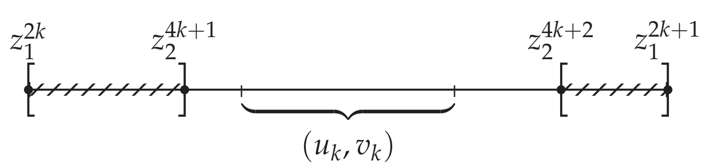
$$z_2^{4j+1} \in (z_1^{2j}, c_2 - r_2) \cap X \quad \text{y} \quad z_2^{4j+2} \in (c_2 + r_2, z_1^{2j+1}) \cap X.$$



Sea $k \in \{0, 1\}$ tal que $k \neq j$. Se define $(u_k, v_k) = \text{tercio}([z_1^{2k}, z_1^{2k+1}])$.

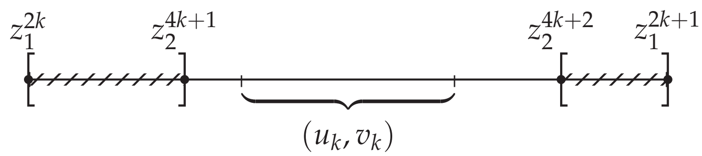
Por Lema 3.10, se tiene que $(z_1^{2k}, u_k) \cap X \neq \emptyset$ y $(v_k, z_1^{2k+1}) \cap X \neq \emptyset$. Se toman

$$z_2^{4k+1} \in (z_1^{2k}, u_k) \cap X \quad \text{y} \quad z_2^{4k+2} \in (v_k, z_1^{2k+1}) \cap X.$$



Si $x_2 \notin C_1$, entonces para $k \in \{0,1\}$ se define $(u_k, v_k) = \text{tercio}([z_1^{2k}, z_1^{2k+1}])$. Por el Lema 3.10, se tiene que $(z_1^{2k}, u_k) \cap X \neq \emptyset$ y $(v_k, z_1^{2k+1}) \cap X \neq \emptyset$. Se toman

$$z_2^{4k+1} \in (z_1^{2k}, u_k) \cap X \quad \text{y} \quad z_2^{4k+2} \in (v_k, z_1^{2k+1}) \cap X.$$

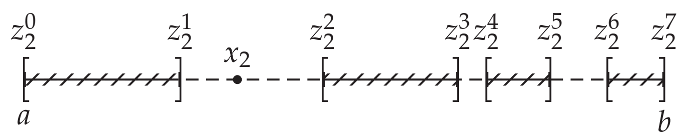


Para cada $l = 0, 1$ se define $z_2^{4l} = z_1^{2l}$ y $z_2^{4l+3} = z_1^{2l+1}$.

Por todo este análisis, se define

$$C_2 = \biguplus_{j=0}^{3} [z_2^{2j}, z_2^{2j+1}],$$

donde $z_2^i \in X$ para todo $i = 0, 1, \ldots, 7$, $z_2^0 = a$ y $z_2^{2^{n+1}-1} = b$. Además, $z_2^{2j+1} - z_2^{2j} < \frac{b-a}{9}$ para todo $j = 0, 1, 2, 3$ y $x_1, x_2 \notin C_2$.



Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > 2$. Se supone que se ha realizado este proceso n veces, entonces se tiene que

$$C_n = \biguplus_{j=0}^{2^n-1} [z_n^{2j}, z_n^{2j+1}],$$

donde $z_n^i \in X$ para todo $i = 0, 1, \ldots, 2^{n+1} - 1$, $z_n^0 = a$ y $z_n^{2^{n+1}-1} = b$. Además, $z_n^{2j+1} - z_n^{2j} < \frac{b-a}{3^n}$ para todo $j = 0, 1, \ldots, 2^n - 1$ y $x_k \notin C_n$ para todo $k = 1, 2, \ldots n$. Se va a definir por recurrencia los extremos del paso $n + 1$.

Hay dos casos posibles.

Si $x_{n+1} \in C_n$, entonces existe un único $j \in \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$, tal que

$$x_{n+1} \in \left(z_n^{2j}, z_n^{2j+1}\right) \text{ pues } x_{n+1} \in X^c \text{ y } z_n^{2j}, z_n^{2j+1} \in X.$$

Sean $c_{n+1} = \frac{z_n^{2j}+z_n^{2j+1}}{2}$ y

$$r_{n+1} = \text{máx}\left\{\frac{z_n^{2j+1} - z_n^{2j}}{6}, |c_{n+1} - x_{n+1}|\right\} < \frac{z_n^{2j+1} - z_n^{2j}}{2}.$$

Por el Lema 3.10, $(z_n^{2j}, c_{n+1} - r_{n+1}) \cap X \neq \emptyset$ y $(c_{n+1} + r_{n+1}, z_n^{2j+1}) \cap X \neq \emptyset$. Se toman

$$z_{n+1}^{4j+1} \in (z_n^{2j}, c_{n+1} - r_{n+1}) \cap X \quad \text{y} \quad z_{n+1}^{4j+2} \in (c_{n+1} + r_{n+1}, z_n^{2j+1}) \cap X.$$

Sea $k \in \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$ tal que $k \neq j$. Se define $(u_k, v_k) = \text{tercio}([z_n^{2k}, z_n^{2k+1}])$. Por el Lema 3.10, se tiene que $(z_n^{2k}, u_k) \cap X \neq \emptyset$ y $(v_k, z_n^{2k+1}) \cap X \neq \emptyset$. Se toman

$$z_{n+1}^{4k+1} \in (z_n^{2k}, u_k) \cap X \quad \text{y} \quad z_{n+1}^{4k+2} \in (v_k, z_n^{2k+1}) \cap X.$$

Si $x_{n+1} \notin C_n$, entonces para cada $k \in \{0, 1, 2, \ldots, 2^n - 1\}$ se define $(u_k, v_k) = \text{tercio}([z_n^{2k}, z_n^{2k+1}])$.

Por el Lema 3.10, se tiene que $(z_n^{2k}, u_k) \cap X \neq \emptyset$ y $(v_k, z_n^{2k+1}) \cap X \neq \emptyset$. Se toman

$$z_{n+1}^{4k+1} \in (z_n^{2k}, u_k) \cap X \quad \text{y} \quad z_{n+1}^{4k+2} \in (v_k, z_n^{2k+1}) \cap X.$$

Para todo $l = 0, 1, 2, \ldots, 2^n - 1$ se define $z_{n+1}^{4l} = z_n^{2l}$ y $z_{n+1}^{4l+3} = z_n^{2l+1}$.

Por todo este análisis, se define

$$C_{n+1} = \bigcup_{j=0}^{2^{n+1}-1} [z_{n+1}^{2j}, z_{n+1}^{2j+1}],$$

donde $z_{n+1}^i \in X$ para todo $i = 0, 1, \ldots, 2^{n+2} - 1$, $z_{n+1}^0 = a$ y $z_{n+1}^{2^{n+2}-1} = b$.

Además, $z_{n+1}^{2j+1} - z_{n+1}^{2j} < \frac{b-a}{3^{n+1}}$ para todo $j = 0, 1, \ldots, 2^{n+1} - 1$ y $x_k \notin C_{n+1}$ para todo $k = 1, 2, \ldots n + 1$.

Finalmente, se define

$$C = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}^+} C_n,$$

donde $x_n \notin C_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.

2. C_n **es cerrado para todo** $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Sea $n \in \mathbb{Z}^+$. Por la construcción del conjunto C_n se tiene que

$C_n = \bigcup_{j=0}^{2^n-1} [z_n^{2j}, z_n^{2j+1}]$ donde $z_n^j \in X$ para todo $j \in \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$. Por el Teorema 3.13 de [1], se tiene que C_n es cerrado. □

3. C **es un conjunto cerrado.**

Demostración. Por la definición de C, se tiene que

$$C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n.$$

Por el numeral anterior y por el Teorema 3.13 de [12], se tiene que

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n \text{ es cerrado.}$$

Por lo tanto, se tiene que C es cerrado. □

4. $C \subset X \cap [a, b]$**.**

Demostración. Por la construcción sabemos que $C \subset [a, b]$, pues $C_0 = [a, b]$ y $C \subset C_0$.

Por reducción al absurdo, se supone que existe $x \in C$ tal que $x \in X^c \cap [a, b]$. Por lo tanto, existe $i \in \mathbb{Z}^+$ tal que $x = x_i$.

Por la construcción de C_i, se tiene que $x = x_i \notin C_i$. Esto es absurdo, pues $x \in C$. Por lo tanto, lo supuesto es falso, es decir, $C \subset X \cap [a, b]$. □

5. $\lambda(C) = 0$**.**

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, por el numeral **1.**, se tiene que C_n es la unión de 2^n intervalos disjuntos de longitud menor o igual que $\frac{b-a}{3^n}$. Luego,

$$\lambda(C_n) \leq 2^n \frac{b-a}{3^n}.$$

Por lo tanto, se tiene que $\lambda(C_n) \leq (b-a)\left(\frac{2}{3}\right)^n$. Puesto que $\lambda([a, b]) = b - a$ y $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es decreciente. Por el Lema 3.4, literal (b), de [3], se deduce que

$$\lambda(C) = \lim_{n \to \infty} \lambda(C_n) \leq \lim_{n \to \infty} (b-a)\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0.$$

□

6. C **es no vacío.**

Demostración. Se va a probar que $a = z_n^0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ mediante inducción matemática. Puesto que $C_0 = [a, b] = [z_0^0, z_0^1]$, se tiene que $a = z_0^0$. Se supone que $a = z_n^0$ con $n \in \mathbb{Z}^+$. Por la construcción del conjunto C se define que $z_{n+1}^0 = z_n^0 = a$. Por lo tanto, $a = z_n^0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ahora se va a probar que $a \in C_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $n \in \mathbb{N}$. Se verifica que $a \in C_n$ pues

$$C_n = \biguplus_{j=0}^{2^n-1} [z_n^{2j}, z_n^{2j+1}].$$

Por lo tanto, se concluye que

$$a \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n = C,$$

de donde $C \neq \emptyset$. $\square$

7. $C \subset C'$**.**

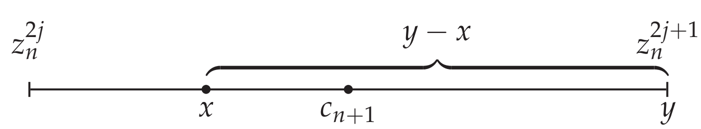
Demostración. Sean $x \in C$ y $\epsilon > 0$. Como $\lim_{n\to\infty} \dfrac{b-a}{3^n} = 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{b-a}{3^n} < \epsilon$. Como $x \in C$, $x \in C_n$.

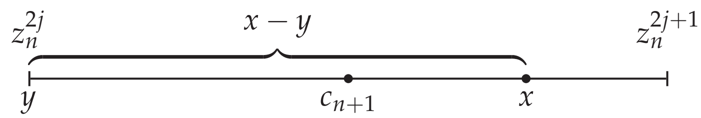
Por el numeral **1.**, se tiene que $C_n = \bigcup_{j=0}^{2^n-1} [z_n^{2j}, z_n^{2j+1}]$, donde $z_n^i \in X$ para todo $i \in \{0, 1, \ldots, 2^{n+1} - 1\}$. Como $x \in C_n$, entonces existe $j \in \{0, 1, 2, \ldots, 2^{n-1}\}$ tal que $x \in \left[z_n^{2j}, z_n^{2j+1}\right]$. Sea $y \in \left[z_n^{2j}, z_n^{2j+1}\right]$ tal que

$$y = \begin{cases} z_n^{2j} & \text{si } x \in \left(c_{n+1}, z_n^{2j+1}\right], \\ z_n^{2j+1} & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

donde $c_{n+1} = \frac{z_n^{2j}, z_n^{2j+1}}{2}$. Entonces, se tiene que $x \neq y$ y además $|x - y| \leq z_n^{2j+1} - z_n^{2j} \leq \frac{b-a}{3^n} < \epsilon$.

En los siguiente gráficos se ilustra la elección de y.





Finalmente, como y es un extremo de un intervalo de C_n, a partir de la iteración n jamás se lo retira. Por lo tanto, $y \in C_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$ tal que $j \geq n$. Pero como la sucesión $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es decreciente y $y \in C_n$, se tiene que $y \in C_j$ para todo $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

En resumen, se tiene que $y \in C_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Esto prueba que existe $y \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n = C$ tal que $x \neq y$ y $|x - y| < \epsilon$. Por definición, se concluye que $x \in C'$. $\square$

8. C **es un conjunto perfecto.**

Demostración. Por el numeral anterior, por el numeral **3.** y por la Proposición 2.6, se deduce que el conjunto C es perfecto. $\square$

9. C **es un conjunto nada denso.**

Demostración. Por los numerales **5.** y **3.**, y por el Lema 2.43, se deduce que C es un conjunto nada denso. $\square$

10. C **es un conjunto de Cantor.**

Demostración. Por los numerales **6.**, **8.** y **9.**, se concluye que C es un conjunto de Cantor. $\square$

Por los numerales **4.** y **10.**, se concluye que existe un conjunto de Cantor C tal que $C \subset X$. $\square$

El teorema anterior prueba que $\mathbb{Q}^c = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ y los números trascendentes contienen conjuntos de Cantor. En efecto, este resultado es inmediato pues $\mathbb{Q}$ y los números algebraicos son conjuntos numerables.

Capítulo 4

Existencia de un Conjunto de Cantor en los Números de Liouville

Para probar la existencia de un conjunto de Cantor C_1, tal que $C_1 \subset \mathbb{L}$, se definen los conjuntos $A \subset 2^{\mathbb{N}}$ y $S \subset \mathbb{R}$. Primero se muestra que A no es numerable; este hecho implica que S tampoco es numerable. Después se prueba que S es un conjunto cerrado y está contenido en $\mathbb{L}$. Finalmente, por el Teorema de Bendixson existe un conjunto perfecto $C_1 \subset \mathbb{L}$ y del Lema 2.43 se concluye que C_1 es un conjunto de Cantor.

Se empieza definiendo el conjunto

$$A = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in 2^{\mathbb{N}} : x_{2n} + x_{2n+1} = 1 \text{ para cada } n \in \mathbb{N}\}.$$

Proposición 4.1. *El conjunto A no es numerable.*

Demostración. Se define $f\colon A \to 2^{\mathbb{N}}$ tal que para $x \in A$, $f(x) = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donde

$$y_n = \begin{cases} 1 & \text{si } x_{2n+1} = 1 \\ 0 & \text{si } x_{2n} = 1, \end{cases}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

La función f es inyectiva. En efecto, se supone que $x, z \in A$ tales que $x \neq z$. Existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $x_i \neq z_i$. Sin pérdida de generalidad, se supone que $x_i = 0$ y $z_i = 1$.

Si $i = 2k$ con $k \in \mathbb{N}$, se tiene que $(f(x))_k = 1$ y $(f(z))_k = 0$; luego $f(x) \neq f(z)$.

Si $i = 2k+1$ con $k \in \mathbb{N}$, se tiene que $(f(x))_k = 0$ y $(f(z))_k = 1$; nuevamente $f(x) \neq f(z)$.

La función f también es sobreyectiva pues, dado $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in 2^{\mathbb{N}}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se define por

$$x_{2n} = \begin{cases} 0 & \text{si } y_n = 1 \\ 1 & \text{si } y_n = 0 \end{cases}$$

y

$$x_{2n+1} = \begin{cases} 1 & \text{si } y_n = 1 \\ 0 & \text{si } y_n = 0. \end{cases}$$

Por lo tanto, $x \in A$ y se verifica que $f(x) = y$.

Así se concluye que f es biyectiva. Por el Corolario 2.22 y el Teorema 2.34, se colige que A no es numerable. $\square$

Ahora, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A$, entonces $|x_n| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, la serie

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^+} \frac{x_{n-1}}{10^{n!}}$$

converge. También se define

$$S = \left\{ \sum_{n\in\mathbb{Z}^+} \frac{x_{n-1}}{10^{n!}} \in \mathbb{R} : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A \right\}.$$

LEMA 4.2. *Dado $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, si existe $N \in \mathbb{N}$ tal que*

$$x_n = \alpha$$

para todo $n \geq N$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha.$$

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Para todo natural $n \geq N$, se tiene que

$$|x_n - \alpha| = |\alpha - \alpha| = 0 < \epsilon.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha.$$

$\square$

LEMA 4.3. *Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in 2^{\mathbb{N}}$ y existe $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, entonces*

$$x \in \{0, 1\}.$$

Más aún, existe $N \in \mathbb{N}$ *tal que para todo* $n \geq N$,

$$x_n = x.$$

Demostración. Puesto que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in 2^{\mathbb{N}}$ es una sucesión convergente, también es de Cauchy. Así, para $1 > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todos $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $n, m \geq N$, se tiene que

$$|x_n - x_m| < 1.$$

Además, puesto que $x_n - x_m \in \{-1, 0, 1\}$ para todo $n, m \in \mathbb{N}$; se sigue que si $n \geq N$, entonces $x_n = x_N$. Por el Lema 4.2 se tiene que

$$x_n \to x_N.$$

Por la hipótesis y la unicidad del límite se concluye que $x = x_N \in \{0, 1\}$. $\square$

El siguiente lema se va a usar para probar que A y S son equipotentes.

LEMA 4.4. *Sea* $z = (z_i)_{i\in\mathbb{Z}^+}$ *tal que* $z_i \in \{-1, 0, 1\}$ *para cada* $i \in \mathbb{Z}^+$. *Si*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{z_i}{10^{i!}} = 0,$$

entonces $z_i = 0$ *para todo* $i \in \mathbb{Z}^+$.

Demostración. Se va a proceder por inducción matemática. Como la serie converge a 0, se puede escribir

$$-\frac{z_1}{10} = \sum_{i=2}^{\infty} \frac{z_i}{10^{i!}}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \left|\frac{z_1}{10}\right| &= \left|\sum_{i=2}^{\infty} \frac{z_i}{10^{i!}}\right| \leq \sum_{i=2}^{\infty} \frac{|z_i|}{10^{i!}} \leq \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{10^{i!}} \\ &< \sum_{i=2!}^{\infty} \frac{1}{10^{i}} = \frac{\frac{1}{10^2}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{90}. \end{aligned}$$

Entonces se verifica que $|z_1| < \frac{1}{9} < 1$. Como los únicos valores que puede tomar z_1 son elementos de $\{-1, 0, 1\}$, se concluye que $z_1 = 0$.

Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2$ y $z_k = 0$ para $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Se va a probar que $z_n = 0$. Como la serie converge a 0 y sus primeros $n - 1$ términos son 0, se puede escribir

$$-\frac{z_n}{10^{n!}} = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{z_i}{10^{i!}}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{z_n}{10^{n!}}\right| &= \left|\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{z_i}{10^{i!}}\right| \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|z_i|}{10^{i!}} \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{10^{i!}} \\
&< \sum_{i=(n+1)!}^{\infty} \frac{1}{10^{i}} = \frac{\frac{1}{10^{(n+1)!}}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{10}{9}\frac{1}{10^{(n+1)!}}.
\end{aligned}$$

Así se verifica que

$$|z_n| < \frac{10}{9}\frac{10^{n!}}{10^{(n+1)!}} = \frac{10}{9}10^{n!(1-(n+1))} = \frac{10}{9}10^{-n(n!)}.$$

Como $n \geq 2$, entonces $n! \geq 2$. Se tiene que $n(n!) \geq 4$ y $-n(n!) \leq -4$. Por lo tanto,

$$|z_n| < \frac{10}{9}10^{-n(n!)} \leq \frac{10}{9}10^{-4} = \frac{1}{9000} < 1.$$

Una vez más, se tiene que $|z_n| < 1$. Así se concluye que $z_n = 0$, puesto que $z_n \in \{-1, 0, 1\}$. □

Los siguientes 3 teoremas prueban la existencia de un conjunto cerrado no numerable contenido en $\mathbb{L}$.

Teorema 4.5. *El conjunto S no es numerable.*

Demostración. Sea $f\colon A \to S$ tal que $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_{i-1}}{10^{i!}}$ para todo $x \in A$. Por la definición de S, se verifica que f es sobreyectiva. Se va a probar que f es inyectiva. Sean $x, y \in A$ tales que $f(x) = f(y)$. Por la definición de f, se verifica que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_{i-1}}{10^{i!}} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_{i-1}}{10^{i!}},$$

esto equivale a

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_{i-1} - y_{i-1}}{10^{i!}} = 0.$$

Sea $z_i = x_{i-1} - y_{i-1}$ para todo $i \in \mathbb{Z}^+$. Por la definición de x y y se tiene que $z_i \in \{-1, 0, 1\}$ para todo $i \in \mathbb{Z}^+$. Y, además

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{z_i}{10^{i!}} = 0.$$

Luego, por el Lema 4.4, se colige que $z_i = 0$ para todo $i \in \mathbb{Z}^+$, de donde se verifica que $x_{i-1} = y_{i-1}$ para todo $i \in \mathbb{Z}^+$. Se concluye que $x = y$, lo que prueba que f es inyectiva.

En resumen, A y S son equipotentes y, como A no es numerable, se concluye que S no es numerable (Corolario 2.22). $\square$

TEOREMA 4.6. *El conjunto S es cerrado.*

Demostración. Sea $y \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{n\to\infty} x^n = y$, donde $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ está en S. Se va a probar que $y \in S$. Por la definición de S, para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$x^n = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_{i-1}^n}{10^{i!}},$$

donde $(x_i^n)_{i\in\mathbb{N}}$ está en A. Se va a probar que la sucesión $(x_k^n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}$ converge para todo $k \in \mathbb{N}$ mediante inducción matemática.

Como la sucesión $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy. Así, como $\frac{1}{90} > 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq N_0$, entonces

$$|x^n - x^m| = \left| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_{i-1}^n - x_{i-1}^m}{10^{i!}} \right| < \frac{1}{90}. \tag{4.1}$$

Luego, por la desigualdad triangular y por (4.1) para todos naturales $n, m \geq N_0$ se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{|x_0^n - x_0^m|}{10} &\leq \left| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_{i-1}^n - x_{i-1}^m}{10^{i!}} \right| + \left| \sum_{i=2}^{\infty} \frac{x_{i-1}^n - x_{i-1}^m}{10^{i!}} \right| < \frac{1}{90} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{|x_{i-1}^n - x_{i-1}^m|}{10^{i!}} \\ &\leq \frac{1}{90} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{10^{i!}} < \frac{1}{90} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{10^{i}} = \frac{1}{90} + \frac{0{,}1^2}{1 - 0{,}1} = \frac{1}{90} + \frac{1}{90} = \frac{1}{45}, \end{aligned}$$

(recuérdese que $|x_{i-1}^n - x_{i-1}^m| \leq 1$ para todo $i \in \mathbb{Z}^+$ ya que $x^n, x^m \in A$). Puesto que $x_0^n - x_0^m \in \{-1, 0, 1\}$, de $|x_0^n - x_0^m| < \frac{10}{45} < 1$ se concluye que $x_0^n - x_0^m = 0$; es decir, si $n, m \geq N_0$, entonces $x_0^n = x_0^m$. Por el Lema 4.2 existe $x_0 \in \{0, 1\}$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_0^n = x_0$.

Sea $k \in \mathbb{Z}^+$. Se supone que $x_j^n \to x_j$ donde $x_j \in \{0, 1\}$ para todo $j = 1, \ldots, k$. Se va a probar que x_{k+1}^n converge cuando $n \to \infty$.

Como la sucesión $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, entonces $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy. Para $\epsilon = \frac{10}{9} 10^{-(k+3)!} > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq N$, entonces

$$|x^n - x^m| = \left| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_{i-1}^n - x_{i-1}^m}{10^{i!}} \right| < \epsilon.$$

Como $(x_j^n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente para $j = 0, 1, \ldots, k$ en $\{0, 1\}$, por el Lema 4.3 existe $N_j \in \mathbb{N}$ tal que $(x_j^n)_{n\in\mathbb{N}}$ es constante si $n \geq N_j$. Sea $N_{k+1} := \text{máx}_{j<k+1}\{N_j, N\}$. Entonces, si $n, m \geq N_{k+1}$, se verifica que

$$|x^n - x^m| = \left| \sum_{i=k+2}^{\infty} \frac{x_{i-1}^n - x_{i-1}^m}{10^{i!}} \right| < \epsilon.$$

Luego, de la desigualdad triangular, para todo $n, m \geq N_{k+1}$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{|x_{k+1}^n - x_{k+1}^m|}{10^{(k+2)!}} &\leq \left| \sum_{i=k+2}^{\infty} \frac{x_{i-1}^n - x_{i-1}^m}{10^{i!}} \right| + \left| \sum_{i=k+3}^{\infty} \frac{x_{i-1}^n - x_{i-1}^m}{10^{i!}} \right| < \epsilon + \sum_{i=k+3}^{\infty} \frac{|x_{i-1}^n - x_{i-1}^m|}{10^{i!}} \\
&\leq \epsilon + \sum_{i=k+3}^{\infty} \frac{1}{10^{i!}} < \epsilon + \sum_{i=(k+3)!}^{\infty} \frac{1}{10^{i}} = 2\epsilon \\
&= 20\frac{0{,}1^{(k+3)!}}{9},
\end{aligned}$$

(recuérdese que $|x_{i-1}^n - x_{i-1}^m| \leq 1$ para todo $i \in \mathbb{Z}^+$ ya que $x^n, x^m \in A$). En resumen, se tiene que

$$|x_{k+1}^n - x_{k+1}^m| < \frac{20}{9} \cdot 10^{(k+2)!-(k+3)!} = \frac{20}{9} \cdot 10^{-(k+2)!(k+2)}.$$

Como $k \geq 1$, entonces $(k+2)! > 3!$, se sigue que $(k+2)!(k+2) > 3! \cdot 3 = 18$. Por lo tanto,

$$|x_{k+1}^n - x_{k+1}^m| < \frac{20}{9} \cdot 10^{-18} < 1.$$

Puesto que $x_{k-1}^n - x_{k-1}^m \in \{-1, 0, 1\}$, se sigue que si $n, m \geq N_{k+1}$, entonces $x_{k+1}^n = x_{k+1}^m$. Por los Lemas 4.2 y 4.3 existe $x_{k+1} \in \{0, 1\}$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_{k+1}^n = x_{k+1}$.

Ahora, se va a probar que $y = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_{i-1}}{10^{i!}} \in S$. Sea $\epsilon > 0$. Puesto que $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{10^{i!}}$ es convergente, $\lim_{m\to\infty} \sum_{i=m}^{\infty} \frac{1}{10^{i!}} = 0$. Por lo tanto, existe $a \in \mathbb{Z}^+$ tal que

$$\sum_{i=a}^{\infty} \frac{1}{10^{i!}} < \epsilon.$$

Como $x_k^n \to x_k$ para cada $k = 0, 1, \ldots, a-1$, por el Lema 4.3 existe N_k tal que para todo natural $n \geq N_k$,

$$x_k^n = x_k.$$

Sea $N_a = \max_{0 \leq k < a} \{N_k\}$. Así se tiene que para todo $n \in \mathbb{N}$, si $n \geq N_a$, entonces

$$\begin{aligned}
\left| x^n - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_{i-1}}{10^{i!}} \right| &= \left| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_{i-1}^n}{10^{i!}} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_{i-1}}{10^{i!}} \right| = \left| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_{i-1}^n - x_{i-1}}{10^{i!}} \right| \\
&= \left| \sum_{i=1}^{a-1} \frac{x_{i-1}^n - x_{i-1}}{10^{i!}} + \sum_{i=a}^{\infty} \frac{x_{i-1}^n - x_{i-1}}{10^{i!}} \right| = \left| \sum_{i=a}^{\infty} \frac{x_{i-1}^n - x_{i-1}}{10^{i!}} \right| \\
&\leq \sum_{i=a}^{\infty} \frac{|x_{i-1}^n - x_{i-1}|}{10^{i!}} \leq \sum_{i=a}^{\infty} \frac{1}{10^{i!}} < \epsilon.
\end{aligned}$$

Entonces, se verifica que

$$x^n \to \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_{i-1}}{10^{i!}}.$$

Por la unicidad del límite, se deduce que $y = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_{i-1}}{10^{i!}}$.

Finalmente, se va a probar que $x \in A$. Sea $k \in \mathbb{N}$, como cada $x^n \in A$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $x_{2k+1}^n + x_{2k}^n = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por las convergencias de $(x_{2k+1}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(x_{2k}^n)_{n \in \mathbb{N}}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N$ implica que $x_{2k+1}^n = x_{2k+1}$ y $x_{2k}^n = x_{2k}$. Por todo esto, se deduce que para $n \geq N$,

$$x_{2k+1} + x_{2k} = x_{2k+1}^n + x_{2k}^n = 1.$$

Por definición, se deduce que $x \in A$. Ahora, por definición de S, se concluye que $y \in S$. Todo esto prueba que S es cerrado. $\square$

El siguiente teorema prueba que todos los elementos de S son números de Liouville.

TEOREMA 4.7. *Se verifica que $S \subset \mathbb{L}$.*

Demostración. Sea $y \in S$, por definición del conjunto S, se puede escribir

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_{i-1}}{10^{i!}},$$

donde $x \in A$. Por definición del conjunto A, se tiene que $x_{2n+1} + x_{2n} = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y por lo tanto, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tiene soporte infinito. Además, como $x_i \in \{0, 1\}$ para todo $i \in \mathbb{N}$, por la Proposición 2.64 se verifica que

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_{i-1}}{10^{i!}} \in \mathbb{L}.$$

Todo esto prueba que $S \subset \mathbb{L}$. $\square$

Finalmente, se prueba el primer objetivo del presente trabajo.

TEOREMA 4.8. *Existe* $C_1 \subset \mathbb{L}$ *tal que* C_1 *es un conjunto de Cantor.*

Demostración. Como el conjunto S es cerrado, por el Teorema de Bendixson existe un conjunto perfecto C_1 tal que $C_1 \subset S$. El conjunto C_1 es no vacío, pues S es no numerable.

Dado que el conjunto $\mathbb{L}$ es un conjunto de medida nula y $C_1 \subset S \subset \mathbb{L}$, se verifica que C_1 es un conjunto de medida nula. Además, C_1 es cerrado (Corolario 2.8) y del Lema 2.43 se sigue que C_1 es nada denso.

En resumen, se concluye que C_1 es un conjunto de Cantor tal que $C_1 \subset \mathbb{L}$. $\square$

Capítulo 5

Existencia de un Conjunto de Cantor en los Números Diofantinos

Primero se prueba que T_n, del Lema 2.57, es abierto y denso para cada $n \in \mathbb{N}$. Así se presentar a $\mathbb{D}$ cono la unión numerable de conjuntos cerrados y nada densos. Se prueba que uno de esos conjuntos es no numerable y a través del Teorema de Bendixson se demuestra la existencia de un conjunto de Cantor $C_2 \subset \mathbb{D}$.

Se recuerda que

$$\mathbb{L} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} T_n,$$

donde

$$T_n = \bigcup_{q=2}^{\infty} \bigcup_{p \in \mathbb{Z}} \left[\left(\frac{p}{q} - \frac{1}{q^n}, \frac{p}{q} \right) \cup \left(\frac{p}{q}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^n} \right) \right], \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Proposición 5.1. *Para todo $n \in \mathbb{N}$, T_n es abierto.*

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$, para cada $p, q \in \mathbb{Z}$ tal que $q \geq 2$, por el Lema 2.12, se tiene que

$$\left(\frac{p}{q} - \frac{1}{q^n}, \frac{p}{q} \right) \text{ y } \left(\frac{p}{q}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^n} \right),$$

son conjuntos abiertos. Por el Lema 2.14, se deduce que

$$\left(\frac{p}{q} - \frac{1}{q^n}, \frac{p}{q} \right) \cup \left(\frac{p}{q}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^n} \right)$$

es abierto y por lo tanto,

$$\bigcup_{q=2}^{\infty} \bigcup_{p \in \mathbb{Z}} \left[\left(\frac{p}{q} - \frac{1}{q^n}, \frac{p}{q} \right) \cup \left(\frac{p}{q}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^n} \right) \right]$$

también lo es; es decir, T_n es un conjunto abierto. $\square$

LEMA 5.2. *Para todo $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{Q} \subset \overline{T_n}$.*

Demostración. Sean $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{Q}$ y $\epsilon > 0$. Se va a demostrar que $B(z,\epsilon) \cap T_n \neq \emptyset$.

Como $z \in \mathbb{Q}$, existen $r \in \mathbb{Z}$ y $s \in \mathbb{Z}^+$ tales que $z = \frac{r}{s}$. Se definen $p = 2r$ y $q = 2s$. Entonces $z = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}^+$ y $q \geq 2$. Ahora, se toma

$$y = z - \frac{1}{2}\operatorname{mín}\{\epsilon, q^{-n}\}.$$

Se tiene que $y \in B(z,\epsilon)$, pues $z - y \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$. Además, $y \in \left(\frac{p}{q} - \frac{1}{q^n}, \frac{p}{q}\right)$, porque

$$\frac{p}{q} - \frac{1}{q^n} = z - \frac{1}{q^n} \leq z - \operatorname{mín}\{\epsilon, q^{-n}\} < z - \frac{1}{2}\operatorname{mín}\{\epsilon, q^{-n}\} = y$$

y

$$y = z - \frac{1}{2}\operatorname{mín}\{\epsilon, q^{-n}\} < z = \frac{p}{q}.$$

Ahora, se considera

$$\emptyset \neq B(z,\epsilon) \cap \left(\frac{p}{q} - \frac{1}{q^n}, \frac{p}{q}\right) \subset B(z,\epsilon) \cap T_n.$$

Se deduce que $B(z,\epsilon) \cap T_n \neq \emptyset$, de donde se concluye que $z \in \overline{T_n}$. $\square$

COROLARIO 5.3. *Para todo $n \in \mathbb{N}$, T_n es denso.*

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$, por el lema anterior, $\mathbb{Q} \subset \overline{T_n}$. Dado que el conjunto $\overline{T_n}$ es cerrado, se deduce que $\overline{\mathbb{Q}} \subset \overline{T_n}$. Puesto que $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, se verifica que $\mathbb{R} \subset \overline{T_n}$; así se concluye que $\overline{T_n} = \mathbb{R}$. $\square$

El siguiente corolario establece una propiedad importante del conjunto $\mathbb{L}$.

COROLARIO 5.4. *El conjunto $\mathbb{L}$ es denso.*

Demostración. Por el Teorema de Categoría de Baire; es decir, la intersección numerable de abiertos densos es un conjunto denso, como T_n es abierto y denso para todo $n \in \mathbb{N}$, se verifica que el conjunto

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} T_n$$

es un conjunto denso. Por el Lema 2.57, $\mathbb{L} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} T_n$ de donde se concluye que $\mathbb{L}$ es un conjunto denso. $\square$

El siguiente teorema da una característica importante del conjunto $\mathbb{D}$.

TEOREMA 5.5. *El conjunto $\mathbb{D}$ no es numerable.*

Demostración. Por reducción al absurdo, se supone que $\mathbb{D}$ es numerable. Por la definición de la medida de Lebesgue, se tiene que

$$\lambda(\mathbb{D}) = 0.$$

Además, por la Proposición 2.60, $\lambda(\mathbb{L}) = 0$. Por lo tanto, se verifica que

$$\lambda(\mathbb{R}) = \lambda\left(\mathbb{L} \biguplus \mathbb{D}\right) = \lambda(\mathbb{L}) + \lambda(\mathbb{D}) = 0 + 0 = 0.$$

Pero $\lambda(\mathbb{R}) = +\infty$. Esta contradicción implica que $\mathbb{D}$ no es numerable. $\square$

Observación: El conjunto de los Números Diofantinos se puede representar por

$$\mathbb{D} = \mathbb{L}^c = \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} T_n\right)^c = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} T_n^c = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n,$$

donde $D_n = T_n^c$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ahora, se estudian las características de los conjuntos D_n para $n \in \mathbb{N}$.

PROPOSICIÓN 5.6. *Para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que D_n es cerrado y nada denso.*

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$, por la Proposición 5.1, se tiene que T_n es un conjunto abierto. Luego, por la Proposición 2.13, $D_n = T_n^c$ es un conjunto cerrado.

Como el conjunto T_n es abierto y denso, por la Proposición 2.44, se colige que D_n es nada denso.

Por todo esto, se concluye que D_n es cerrado y nada denso. $\square$

Finalmente, se demuestra el segundo objetivo del presente trabajo.

TEOREMA 5.7. *Existe $C_2 \subset \mathbb{D}$ tal que C_2 es un conjunto de Cantor.*

Demostración. Como el conjunto $\mathbb{D}$ no es numerable y como

$$\mathbb{D} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n,$$

por el contra recíproco del Teorema 2.32, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que D_k no es numerable.

Por la proposición anterior, D_k es cerrado. Por el Teorema de Bendixson, existe $C_2 \subset D_k$ tal que C_2 es un conjunto perfecto. El conjunto C_2 es no vacío, pues D_k es no numerable.

También, por la proposición anterior, D_k es nada denso. Por el lema 2.42, C_2 es nada denso. Por definición, C_2 es un conjunto de Cantor tal que

$$C_2 \subset D_k \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n = \mathbb{D}.$$

Así se concluye que existe un conjunto de Cantor C_2, tal que $C_2 \subset \mathbb{D}$. $\square$

Capítulo 6

Resultados adicionales

En este capítulo se dan algunos resultados importantes que se han probado al cumplir los objetivos del trabajo.

No es necesario que un conjunto de Cantor sea compacto. Para convencerse de este hecho, se da un conjunto de Cantor que no es acotado.

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea C_n el conjunto triádico de Cantor que se construye en $[2n, 2n+1]$. Se define

$$C = \biguplus_{n \in \mathbb{N}} C_n.$$

El conjunto C es no acotado pues por su construcción, $2n \in C_n \subset C$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

También es cerrado. En efecto, sea $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ en C tal que

$$x_k \to x.$$

Con $\frac{1}{2} > 0$, existe $K \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq K$, entonces

$$|x - x_k| < \frac{1}{2}. \tag{6.1}$$

Como $x_K \in C$ existe un único $j \in \mathbb{N}$ tal que $x_K \in C_j$. Así

$$k \geq K \Longrightarrow x_k \in C_j.$$

En efecto, por reducción al absurdo. Supongamos que existe un natural $m \geq K$ tal que $x_m \in C_{n_0}$ con $n_0 \neq j$. Por lo tanto, se tiene que

$$1 \leq |x_m - x_K| \leq |x_m - x| + |x - x_k| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

donde la primera desigualdad se cumple pues $x_m \in C_{n_0}$ y $x_K \in C_j$ con $j \neq K$ y la tercera desigualdad se da por (6.1). Esta contradicción implica que lo supuesto es falso.

Puesto que C_j es un conjunto cerrado y $(x_k)_{k \geq K}$ es una sucesión de C_j que converge a x, por la Proposición 2.5, se verifica que $x \in C_j$. Se concluye que

$$x \in C_j \subset C.$$

Por otra parte, el conjunto C es de medida de Lebesgue nula, pues se tiene que

$$\lambda(C) = \lambda\left(\biguplus_{n \in \mathbb{N}} C_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda(C_n) = 0,$$

donde la última igualdad se da pues C_n es el conjunto triádico de Cantor trasladado y la medida de Lebesgue es invariante por traslaciones y $\lambda(C_n) = 0$. Por el Teorema 2.43, el conjunto C es nada denso.

También es perfecto. En efecto, sean $x \in C$ y $\epsilon > 0$. Existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $x \in C_j$. Se sabe que C_j es perfecto. Por lo tanto, existe $y \in C_j$ tal que $x \neq y$ y $|x - y| < \epsilon$. Se concluye que existe $y \in C$ tal que $0 < |x - y| < \epsilon$.

Por todo lo anterior, C es un conjunto de Cantor no acotado. $\square$

La siguiente proposición prueba que todo conjunto perfecto no vacío contiene un perfecto no vacío y acotado.

PROPOSICIÓN 6.1. *Sea $P \subset \mathbb{R}$ un conjunto perfecto y no vacío. Entonces existe $K \subset P$ tal que K es perfecto, no vacío y acotado. Además, K es compacto.*

Demostración. Se tiene que

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [n, n+1].$$

Por lo tanto,

$$P = P \cap \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [n, n+1] = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left(P \cap [n, n+1]\right).$$

Por la Proposición 2.51, P no es numerable. Por el contra recíproco del Teorema 2.32, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $P \cap [k, k+1]$ es no numerable. El conjunto P es cerrado (Corolario 2.8), se sigue que $P \cap [k, k+1]$ es cerrado.

Por el Teorema de Bendixson, existe $K \subset P \cap [k, k+1]$ tal que K es perfecto. El conjunto K es no vacío, pues $P \cap [k, k+1]$ no es numerable.

Además, el conjunto K es acotado. En efecto, para todo $x \in K$, se verifica que $x \in [k, k+1]$, se sigue que

$$|x| \leq \text{máx}\{|k|, |k+1|\}.$$

Así se concluye que K es compacto. $\square$

El siguiente lema y teorema se prueban para dar una condición necesaria y suficiente para que un conjunto contenga un conjunto de Cantor.

LEMA 6.2. *Todo conjunto perfecto no vacío contiene un conjunto de Cantor.*

Demostración. Sea $P \subset \mathbb{R}$ un conjunto perfecto, no vacío. Hay dos casos.

Si $\text{int}(P) = \emptyset$, por el Lema 2.45, P es un conjunto de Cantor.

Si $\text{int}(P) \neq \emptyset$, entonces se toma $x \in \text{int}(P)$. Por la definición de interior de un conjunto, existe $r > 0$ tal que

$$B(x, r) \subset P.$$

Por otro lado, existe un conjunto de Cantor C, por el Corolario 3.9, tal que

$$C \subset (x - r, x + r) = B(x, r).$$

Luego, se deduce que existe $C \subset P$.

En ambos casos se concluye que existe un conjunto de Cantor contenido en P. $\square$

TEOREMA 6.3 (Teorema 3.39 de [1])**.** *Todo subconjunto cerrado de un compacto $X \subset \mathbb{R}$ es compacto*

TEOREMA 6.4. *Todo conjunto de Cantor tiene un subconjunto de Cantor compacto.*

Demostración. Sea $C \subset \mathbb{R}$ un conjunto de Cantor. Por definición, C es un conjunto perfecto y no vacío. De la Proposición 6.1, se colige que existe un conjunto $P \subset C$ tal que P es un conjunto perfecto, no vacío y acotado.

Por el Lema 6.2, existe $K \subset P$, tal que K es un conjunto de Cantor. El conjunto K es compacto. En efecto, dado que K es cerrado, P es compacto y $K \subset P$, por el teorema 3.39 de [1], se deduce que K es compacto.

Se concluye que $K \subset C$ es un conjunto de Cantor compacto. $\square$

Finalmente, se da una condición necesaria y suficiente para que un conjunto contenga un conjunto de Cantor.

Teorema 6.5. *Sea $X \subset \mathbb{R}$. El conjunto X contiene un conjunto de Cantor si y solo si X contiene un conjunto cerrado y no numerable.*

Demostración. Si existe un conjunto de Cantor $C \subset X$. El conjunto C es un perfecto y no vacío. Por el Corolario 2.8 y la Proposición 2.51, se deduce que C es un conjunto cerrado y no numerable contenido en X.

Recíprocamente, si existe un conjunto $S \subset X$ tal que S es cerrado y no numerable, por el Teorema de Bendixson, existe $P \subset S$ tal que P es un conjunto perfecto.

El conjunto P es no vacío pues S es no numerable. Así, por el lema anterior, existe $C \subset P$ tal que C es un conjunto de Cantor. □

Capítulo 7

Conclusiones y Comentarios

Conclusiones

- Todo conjunto que contenga un intervalo con más de dos elementos, contiene un conjunto de Cantor (Corolario 3.9).
- En un conjunto, cuyo complemento sea numerable, se puede construir un conjunto de Cantor (Teorema 3.12).
- Por el Teorema 6.5, un conjunto $X \subset \mathbb{R}$ contiene un conjunto de Cantor si y solo si contiene un cerrado no numerable.
- A pesar de que en algunas publicaciones, como en [11], se tratan conjuntos de Cantor solo en la forma de intervalos, en el presente trabajo se aborda este concepto de una forma mucho más general.

Comentarios

- Una posible continuación de esta investigación es buscar la demostración de que todo conjunto no numerable posee un conjunto cerrado no numerable o de dar un contra ejemplo.
- El Teorema de Bendixson solo se cumple en espacios de Lindelöf; es decir, donde todo recubrimiento contenga un sub-recubrimiento numerable. Por está razón, algunos de los resultados probados en el presente trabajo podrían no mantenerse en espacios métricos más generales.

Bibliografía

[1] T. M. APOSTOL, *Análisis Matemático*, Reverté, Barcelona, 2006.

[2] L. ARETHYR STEEN AND J. ARTHUR SEEBACH, *Counterexamples in Topology*, Dover Publications, Inc., Estados Unidos, 1995.

[3] R. BARTLE, *The elements of integration and Lebesgue Measure*, Wiley Classics Library, Estados Unidos, 1995.

[4] R. BARTLE AND D. SHERBERT., *Introducction to Real Analysis*, John Wiley and Sons, Inc, Estados Unidos, 2000.

[5] G. CANTOR, *Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten I*, Mathematische Annalen, 15 (1879), pp. 1–7.

[6] M. ESMERALDA CARREÑO, *El conjunto de Cantor y algunas de sus propiedades*. Tesis, 2003.

[7] M. FILASETA, *Transcendental number theory*. `http://people.math.sc.edu/filaseta/gradcourses/Math785/Math785Notes5.pdf`, 2014. Visitado el 10 de julio 2015.

[8] B. R. GELBAUM AND J. M. OLMSTED, *Counterexamples in Analysis*, Dover Publications, Inc., Estados Unidos, 1992.

[9] M. HATA, *Improvement in the irrationality measures of π and π^2*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci., 68 (1992), pp. 283–286.

[10] E. W. (HTTP://MATH.STACKEXCHANGE.COM/USERS/30402/ERICK WONG), *An uncountable and closed subset of the Liouville Numbers*. Mathematics Stack Exchange. URL:http://math.stackexchange.com/q/1372207 (version: 2015-07-24).

[11] S. I. KHAN AND S. ISLAM, *An Exploration Of The Generalized Cantor Set*, International Journal Of Scientific & Technology Research, 2 (2013), pp. 1–7.

[12] E. KREYSZIG, *Introductory Functional Analysis with Applications*, Wiley, Estados Unidos, 1989.

[13] E. LAGES LIMA, *Análisis Real, Volumen 1*, IMCA, Chile, 1997.

[14] ——, *Análise Real, Volume 2*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, Brasil, 2004.

[15] J. LIOUVILLE, *Sur des classes très étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même réductible à des irrationnelles algébriques*, C. R. Acad. Sci., 18 (1844), pp. 883–885.

[16] M. MACHO STADLER, *Curiosidades sobre el Conjunto de Cantor*, 2009.

[17] J. C. OXTOBY, *Measure and Category*, vol. 2, Springer-Verlag, Estados Unidos, 1980.

[18] G. PETRUSKA, *On strong Liouville numbers (a problem of P. Erdös)*, Indagationes Mathematicae, 3 (1991), pp. 211–218.

[19] C. PINTER, *Set Theory*, Addison-Wesley, Estados Unidos, 1971.

[20] R. W. VALLIN, *The elements of Cantor Sets with applications*, Wiley, Estados Unidos, 2013.

[21] E. WEISSTEIN, *Irrationality Measure*. `http://mathworld.wolfram.com/IrrationalityMeasure.html`, 2015.