ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS

PARTICIÓN DE GRAFOS CON CONDICIONES DE TAMAÑO, PESO Y PERTENENCIA

PROYECTO DE TITULACIÓN PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE MATEMÁTICO

ANGEL GABRIEL GAIBOR COSTTA

angleito2112@gmail.com

DIRECTOR: DR. DIEGO FERNANDO RECALDE CALAHORRANO

diego.recalde@epn.edu.ec

Quito, abril de 2016

DECLARACIÓN

Yo, ANGEL GABRIEL GAIBOR COSTTA, declaro bajo juramento que el trabajo aquí escrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

La Escuela Politécnica Nacional puede hacer uso de los derechos correspondientes a este trabajo, según lo establecido por la Ley de Propiedad Intelectual, por su Reglamento y por la normatividad institucional vigente.

Angel Gabriel Gaibor Costta

CERTIFICACIÓN

Certifico que el presente trabajo fue desarrollado por ANGEL GABRIEL GAIBOR COSTTA, bajo mi supervisión

Dr. Diego Fernando Recalde Calahorrano
DIRECTOR

AGRADECIMIENTOS

A la señora que vendía fuera de la Poli, gracias por el amuleto que hasta hoy me acompaña.
A mis padres por la paciencia y la comprensión, por ser mis amigos y darme las mejores lecciones que no puedo aprender en ninguna aula de clases. Gracias a ellos soy lo que soy.
A mis hermanos, por el simple hecho de darme la certeza de que cuando nadie más esté, ellos siempre estarán.
A mi cuñada, por regalarme la posibilidad de conocer a esas dos criaturas maravillosas que me transportan a mi niñez.
A mis sobrinos, por contagiarme su sonrisa aunque no me presten sus juguetes.
A Mamá Carmencita, por decirme sí cuando le pedí empezar ese sueño pendiente.
A Socorrito, por darme la mayor enseñanza de mi vida sobre el amor desinteresado.
Chaparrita, gracias por todos los atardeceres.
A mis tíos, por dejar huellas imborrables en mi corazón.
A mis primos, por compartir conmigo las diferentes etapas de esto que es crecer.
A Diego, por su guía, pero sobre todo porque aunque desaparecí varias veces, me permitió continuar.
A mis amigos, por dejarme ser parte de sus vidas y escucharme por varias horas.
A todas las personas que formaron parte importante de mi vida pero que ya no están junto a mí, gracias por el abrigo.

DEDICATORIA

A doña Graciela

Índice de Contenido

Lista de Figuras

Lista de Tablas

Resumen

El objetivo principal de este trabajo es desarrollar un algoritmo eficiente que permita hallar una buena solución del problema de partición de grafos con restricciones de tamaño, peso y pertenencia en un tiempo de computo razonable. El problema abordado está relacionado con un problema de construcción de grupos de equipos en el campeonato ecuatoriano de fútbol de segunda categoría. En primer lugar, se formulará el problema como un programa lineal entero. En segundo lugar, se particularizará y estudiará la zonificación provincial de los equipos del campeonato ecuatoriano de fútbol de segunda categoría. En tercer lugar, se propondrá una nueva zonificación de los equipos, además de un esquema alternativo que vuelva más competitivo el campeonato. Para esto se estudiará la heurística de Kernhigan-Lin y a partir de esta se generarán heurísticas alternativas que mejoren las soluciones actuales. Finalmente, se presentarán algunos experimentos numéricos obtenidos de la aplicación de los algoritmos desarrollados.

Palabras clave: programación lineal y entera, partición de grafos, heurísticas.

Abstract

The main objective of this work is to develop an efficient algorithm to find an acceptable solution to the graph partitioning problem with restrictions of size, weight and membership in a reasonable computation time. The problem addressed here is related to a team's group construction problem in the second category of the ecuadorian football championship. First, the problem is formulated as an integer linear programming problem. Second, the provincial grouping of the teams playing in the second category of the ecuadorian football championship is explained. Third, a new grouping methodology of the teams is proposed, along with an alternative championship scheme to make it more competitive. Moreover, Kernighan-Lin based heuristics are addressed to find good solutions in a reasonable computation time. Finally, some numerical experiments, obtained from the real world application, are shown to evaluate the heuristic's performace.

Keywords: linear and integer programming, graph partitioning, heuristics.

CAPÍTULO 1

Introducción General

1.1 Antecedentes

En los últimos 50 años el problema de partición de grafos ha sido ampliamente estudiado. Este problema se deriva de situaciones del mundo real por lo que tiene aplicación en varias ramas de la ingeniería y de la investigación. La partición de grafos es una disciplina ubicada entre las ciencias computacionales y la matemática aplicada. La mayoría de estos problemas tienen aplicación comercial ya que se busca minimizar los costos o maximizar los beneficios a través de una correcta distribución de los recursos.

Una aplicación interesante de este tipo de problemas es la partición de componentes de un circuito en un conjunto de tarjetas que juntas realizan tareas en un dispositivo electrónico. Las tarjetas tienen un tamaño limitado, de tal manera que el dispositivo no llegue a ser tan grande, y el número de elementos en cada tarjeta está restringido. Si el circuito es demasiado grande puede ser dividido en varias tarjetas las cuales estarán interconectadas, sin embargo el costo de interconexión es muy grande por lo que el número de interconexiones debe ser minimizado.

El ejemplo descrito anteriormente es la primera aplicación presentado en [1], debido a Kernighan y Lin (1970), en el cual se define un algoritmo eficiente para encontrar buenas soluciones. En el ejemplo, el circuito es asociado a un grafo y las tarjetas como subconjuntos de una partición. Los nodos del grafo son representados por los componentes electrónicos y las aristas son las interconexiones entre los componentes y las tarjetas.

En este trabajo, de manera concreta, se va a estudiar un problema que aparece en una aplicación deportiva de la partición de grafos, presente en el campeonato de segunda categoría del fútbol en el Ecuador. El problema consiste en dividir un conjunto de equipos de fútbol en diferentes grupos donde se jugarán campeonatos, de acuerdo a ciertas restricciones. Debido a la naturaleza combinatoria del problema, cuando el número de equipos aumenta, la búsqueda de una solución óptima se vuelve costosa desde el punto de vista computacional. Se pretende abordar el problema utilizando diferentes heurísticas para resolverlo.

Por regulaciones de la Federación Ecuatoriana de Fútbol (FEF), el campeonato ecuatoriano de segunda categoría consiste de los mejores dos equipos de cada asociación provincial de fútbol. Las provincias son agrupadas en K zonas geográficas, donde un torneo de partidos

de ida y vuelta conocido en la literatura como (Round Robin Tournament) es jugado por los equipos de las correspondientes asociaciones provinciales en cada zona. Este torneo es llamado la liga zonal y clasifican los dos mejores equipos de cada zona a la siguiente etapa del campeonato. El problema consiste en agrupar a las provincias en $K \geq 2$ zonas minimizando la proximidad geográfica, procurando que el nivel de fútbol sea homogéneo, y además que el número de equipos en cada zona esté acotado superior e inferiormente. La proximidad entre dos provincias es definida por la distancia del camino de carretera principal entre las ciudades capitales. Esto significa asumir que al menos un equipo tiene su sede en la capital de su provincia, lo cual sucede en la mayoría de los casos. Este proyecto es parte de una cooperación entre el Departamento de Matemática de la Escuela Politécnica Nacional y la Asociación de Fútbol No Amateur de Pichincha (AFNA).
Considerando a las capitales de provincia de cada asociación provincial como nodos en un grafo, la conexión por carretera entre las capitales como las aristas del grafo, la distancia por carretera entre las capitales provinciales como pesos en las aristas, y una medida del nivel futbolístico de los equipos con un peso en los nodos, el problema puede ser modelado como un problema de partición en cliques con restricción de tamaño y peso.
Este problema de optimización fue introducido por Grötschel y Wabayashi en [2], ellos estudiaron el problema desde un punto de vista poliedral y los resultados son utilizados en un algoritmo de plano cortante que incluye heurísticas con rutinas de separación para algunas clases de facetas.
En [3] el autor presenta un algoritmo de tipo Branch & Bound donde para cada nodo en el árbol de búsqueda las cotas que se reportan son más ajustadas.
El problema de partición de grafo satisface restricciones sobre la suma de los pesos de los nodos en cada subconjunto de la partición analizada en [4].
En [5] los autores resuelven el problema con restricciones de tamaño mínimo para cada clique con un método Branch & Price.
Restricciones sobre el tamaño de subcliques son introducidos para el problema y la estructura del poliedro resultante es estudiado en [6].

El problema de partición de grafos puede formularse como un problema de programación entera. Los problemas de programación entera, generalmente están relacionados directamente a problemas combinatorios, esto genera que al momento de resolver los problemas de programación entera se encuentren limitantes dado el costo computacional de resolverlos; por este motivo se han desarrollado algoritmos que buscan soluciones de una forma más directa, el limitante de los mismos es que no se puede garantizar que la solución encontrada sea la óptima. En el presente trabajo se pretende estudiar el algoritmo descrito en [1], y mostrar los limitantes que se tienen al momento de introducir nuevas restricciones al problema, dando alternativas para resolver el mismo.

1.2 Definiciones básicas

La partición de un conjunto es la acción de dividirlo en varias partes disjuntas entre sí, esta técnica es usada para resolver diversos problemas de ingeniería. Según el problema a ser resuelto la función objetivo será diferente, como por ejemplo en el problema de coloración de grafos se busca minimizar el número de colores necesarios para una coloración propia del grafo, se denomina una coloración propia de un grafo a la asignación de un color a cada nodo de tal manera que para cada par de nodos que sean los extremos de una arista del grafo se debe asignar un color distinto. El problema que se presenta en este trabajo busca dividir un conjunto de equipos de fútbol en un número determinad de grupos minimizando la distancia que debe recorrer cada equipo para visitar a los equipos que pertenecen a su mismo grupo.
Antes de formular el problema se presentan las siguientes definiciones tomadas de [7].

1.2.1 Grafo

Sea V un conjunto no vacío de n elementos y E un conjunto de pares de elementos de V. Un grafo se define como la pareja (V, E). Los elementos de V se denominan nodos y a los elementos de E se les llama aristas del grafo. Una arista representa una conexión entre dos nodos.
Si para todo $i,\ j \in V$ existe $(i, j) \in E$ entonces el grafo se denomina completo.

1.2.2 Cardinalidad de un conjunto

Sea X un conjunto finito de n elementos. La cardinalidad del conjunto X (notada $|X|$) es el número n de elementos de X. Así tenemos que $|X| = n$.

1.2.3 Partición de un conjunto

Sea V un conjunto. Un conjunto P de subconjuntos de V es llamado una partición de V si:

- ningún elemento de P es vacío,
- los elementos de P son disjuntos dos a dos, y
- la unión de los elementos de P es igual a V.

Los elementos de P son llamados las partes de la partición P. La cardinalidad de la partición P es por lo tanto el número de partes de P. En la partición de grafos, el número de partes de P es notado por K.

1.2.4 Problema de optimización combinatoria

Un problema de optimización combinatoria es definido por una tripleta (S, p, f) de tal modo que:

- S es un conjunto discreto llamado espacio de búsqueda (también llamado espacio de solución),
- p es una función de S (verdadera o falsa), conformada por el conjunto de restricciones del problema,
- $f:\ S \rightarrow \mathbb{R}$ asocia con cada elemento $x \in S$ un costo $f(x)$.

La función f es llamada la función objetivo o la función de costo del problema. p crea un conjunto $Sa = \{x \in S:\ p(x)\ es\ verdad\}$ el cual es llamado el conjunto de las soluciones admisibles del problema. Cada elemento de S es llamado una solución del problema, y cada elemento de Sa es una solución admisible del problema.
Un problema de optimización combinatoria pretende encontrar el elemento $\widetilde{x} \in Sa$ (o el subconjunto de elementos de Sa) que minimicen f:

$$f(\widetilde{x}) = \min_{x \in Sa} f(x)$$

$Nota$: El problema de optimización combinatoria que busca maximizar la función objetivo en lugar de minimizarla, es de la misma naturaleza porque:

$$\max_{x \in Sa} f(x) = -\min_{x \in Sa}(-f(x))$$

1.2.5 Óptimo global, óptimo local

Sea (S, p, f) un problema de optimización combinatoria y Sa el conjunto de soluciones admisibles para el problema resultado de la función p. Sea $\widetilde{x} \in Sa$.

- Si podemos probar que $\forall x \in Sa,\ f(\widetilde{x}) \leqslant f(x)$, entonces $\widetilde{x}$ es llamado un óptimo global del problema
- Si hay un conjunto de soluciones admisibles $X \subset Sa,\ |X| \geq 2$, y $\widetilde{x} \in X$ de tal modo que $\forall x \in X,\ f(\widetilde{x}) \leqslant f(x)$, entonces $\widetilde{x}$ es llamado un óptimo local del problema.

1.2.6 Partición de un grafo

Sea $G = (V, E)$ un grafo y $\Pi = \{P_1, \ldots, P_K\}$ un conjunto de K subconjuntos de V. Se dice que Π es una partición de G si:

- Ningún elemento de Π es vacío:
  $\forall c \in \{1, \ldots, K\},\ P_c \neq \emptyset$;
- Los elementos de Π son parejas disjuntas:
  $\forall (i, j) \in \{1, \ldots, K\}^2,\ i \neq j,\ P_i \bigcap P_j = \emptyset$;
- La unión de todos los elementos de Π es igual a V
  $\bigcup_{c=1}^{K} P_c = V.$

Los elementos P_c de Π son llamados las partes de la partición. El número K es llamado la cardinalidad de la partición, o el número de partes de la partición.

1.2.7 Clique

Sea $G = (V, E)$ un grafo y $C \subset V$, C es una clique si junto con las aristas que tienen como vertices elementos de C es un grafo completo.

1.2.8 Cardinalidad del conjunto de soluciones admisibles

Sea $G = (V, E)$ un grafo y sea K la cardinalidad de la partición. El vector $s \in \mathbb{N}^K$ es llamado vector de tamaño si $\sum_{c=1}^{K} s_c = |V|$.
Sea $T = \{t : \exists c \in \{1, ..., K\};\ t = s_c\}$ el conjunto de tamaños, cada valor de este conjunto tiene asociado su multiplicidad, que es el número de veces que se repite cada elemento de T en el vector s. Se nota m_t la multiplicidad de $t \in T$.
Sea el problema de optimización combinatoria (S, p, f) donde:

- $S = \{\Pi$ partición de V de cardinalidad $K\}$;
- p: Sea $\Pi = \{P_1, ..., P_K\} \in S\ \forall c \in \{1, ..., K\}\ |P_c| = s_i$ para algún $i \in \{1, 2, \ldots, K\}$;

La cardinalidad de Sa asociado al problema de optimización combinatoria (S, p, f) se puede probar que es:

$$|S_a| = \frac{n!}{\prod_{t \in T} m_t!(t!)^{m_t}} \tag{1.1}$$

Demostración: El número de formas en el que se puede construir P_1 es $\binom{n}{s_1}$.
Para cada una de las posibles combinaciones en P_1 se tiene que existen $\binom{n - s_1}{s_2}$ formas para construir P_2.
Continuando recursivamente las formas en que se puede construir P_j de $\binom{n - \sum_{i=1}^{j-1} s_i}{s_j}$.
Por lo tanto el número de posibles combinaciones para construir una partición que pertenezca a Sa está dado por:

$$\begin{aligned}\binom{n}{s_1}\binom{n - s_1}{s_2}\cdots\binom{n - \sum_{i=1}^{j-1} s_i}{s_j}\cdots\binom{n - \sum_{i=1}^{K-1} s_i}{s_K} &= \frac{n!}{s_1!s_2!\ldots s_K!}\\ &= \frac{n!}{\prod_{t \in T}(t!)^{m_t}}\end{aligned}$$

En el caso que $m_t > 1$ se repite la misma solución $m_t!$ por lo que para no considerar la misma solución se debe dividir por $m_t!$, entonces la cardinalidad de S_a está dada por:

$$|S_a| = \frac{n!}{\prod_{t \in T} m_t!(t!)^{m_t}} \tag{1.2}$$

Nota: En el caso que los elementos del vector de tamaño difieren a los más en uno el problema es llamado de equipartición.

1.3 Motivación práctica: zonificación del campeonato ecuatoriano de fútbol de la segunda categoría

De acuerdo al reglamento del comité ejecutivo de fútbol profesional, en el campeonato ecuatoriano de fútbol de la segunda categoría participan los clubes campeón y subcampeón de cada asociación provincial del país. Además, estos clubes serán ubicados en zonas que se determinarán por el comité ejecutivo de fútbol profesional, tomando en cuenta principalmente la ubicación geográfica de las asociaciones. Cada zona se conformará por subgrupos de seis o cinco clubes. Bajo ningún concepto dos clubes de una asociación provincial pertenecerán al mismo subgrupo. También en la medida de lo posible se tratará de que en cada subgrupo existan el mismo número de campeones y subcampeones.

1.3.1 Campeonato ecuatoriano de fútbol de segunda categoría

Actualmente el campeonato ecuatoriano de fútbol de segunda categoría se desarrolla en cuatro etapas que se detallan a continuación:

1.3.1.1 Fase provincial (primera etapa)

Desde el año 2014 existen 22 asociaciones provinciales con la inclusión de la asociación de fútbol profesional del Carchi. Cada una de las asociaciones organiza un campeonato con los equipos que la conforman y los campeones y vicecampeones de estos torneos pasan a la denominada fase regional. La siguiente tabla contiene la información del número de equipos por cada asociación provincial.

Tabla 1.1: Asociaciones provinciales

i	Provincia	Número de equipos
1	Pichincha	10
2	Guayas	20
3	Manabí	12
4	Azuay	8
5	Bolívar	7
6	Cañar	15
7	Carchi	5
8	Chimborazo	18
9	Cotopaxi	8
10	El Oro	14
11	Esmeraldas	11
12	Imbabura	19
13	Loja	4
14	Los Ríos	8
15	Morona Santiago	7
16	Napo	4
17	Orellana	6
18	Pastaza	12
19	Santa Elena	16
20	Santo Domingo	14
21	Sucumbíos	4
22	Tungurahua	5

1.3.1.2 Fase regional (segunda etapa)

Las 22 provincias conforman cuatro zonas geográficas, a diferencia de años anteriores en la que la conformación fue por regiones (Costa-Sierra-Austro-Amazonía). Las cinco provincias de la Amazonía deben ir en zonas diferentes a excepción de una que tendrá dos provincias amazónicas. Esto último se debe a que los equipos amazónicos tienen un bajo rendimiento en las siguientes fases del campeonato. Por el contrario, las provincias de Pichincha, Guayas y Manabí deben estar en zonas distintas dado el alto nivel de competitividad que muestran sus equipos cada año. Con estas consideraciones las zonas están conformadas de la siguiente manera:

Tabla 1.2: *Zonas del campeonato de segunda categoría*

Zona	**Asociaciones provinciales**
$Zona\ 1:$	Carchi, Imbabura, Sucumbíos, Orellana y Pichincha.
$Zona\ 2:$	Napo, Pastaza, Cotopaxi, Tungurahua, Chimborazo y Bolívar.
$Zona\ 3:$	Manabí, Santo Domingo de los Tsáchilas, Los Ríos, Santa Elena y Esmeraldas.
$Zona\ 4:$	Morona Santiago, Loja, Azuay, Cañar, El Oro y Guayas.

Cada zona estará dividida en dos grupos A y B. Los grupos serán conformados mediante un sorteo considerando que dos equipos de la misma asociación provincial no pertenezcan al mismo grupo y que los grupos estén balanceados respecto al número de campeones y vicecampeones que los conformen.

1.3.1.3 Fase nacional (tercera etapa)

En esta etapa participan un total de 12 clubes. Los 8 ganadores de cada grupo de la fase regional y los 4 mejores segundos. Se dividirán en dos grupos de 6 equipos cada uno, en esta etapa pueden cruzarse equipos de la misma provincia dependiendo del sorteo. A estos grupos se los denomina hexagonales. En los dos grupos se juegan partidos de ida y vuelta (10 fechas). Los dos equipos mejor puntuados de cada hexagonal se clasificarán a la fase final.

1.3.1.4 Fase final (cuarta etapa)

Un total de 4 clubes jugarán esta etapa. El cuadrangular constará de partidos de ida y vuelta (6 fechas). El primero y el segundo equipo lograrán el ascenso a la serie B del siguiente año.

CAPÍTULO 2

Planteamiento del problema

Cada problema que se abordará está asociado a un problema de partición de grafos, en los que las ciudades sedes de cada equipos son los nodos, las aristas son las conexiones entre las ciudades y los pesos de las aristas están dados por las distancias por carretera de ciudad a ciudad.

Sea $G = (V, E)$ un grafo completo no dirigido donde $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ es el conjunto de nodos y $E = \{(i, j) : i, j \in V, i < j\}$ es el conjunto de aristas. Sean $d_{ij} \in \mathbb{R}$ ponderaciones asociadas a cada arista $(i, j) \in E$.

Sea $W = (w_1, w_2, ..., w_n) \in \mathbb{R}$ un vector de pesos asociado a los nodos del grafo, sean $W_u \ y \ W_l \ \in \mathbb{R}$ tales que $W_u \geq W_l$, son los límites superior e inferior, respectivamente, para el peso total de cada una de las cliques.

Sea K la cardinalidad de la partición. Sea $\{P_c\}_{c=1}^{K}$ una partición de V. Sea $s = (s_1, s_2, ..., s_K) \in \mathbb{N}^K$ un vector de tamaños. Sea x_i^c la variable que toma el valor 1 si el nodo i se encuentra en la clique c y 0 en caso contrario. Sea x_{ij}^c la variable que toma el valor de 1 si la arista (i, j) pertenece a la clique c y 0 en caso contrario.

Sea $T \subset V$ y $t \in \mathbb{N}$. Esta última notación se introduce para incluir una restricción de que para cada clique pertenezcan t elementos de un conjunto T fijo.

La formulación general del problema de partición de grafos con restricciones de tamaño, peso y selección es:

$$z = \textit{mín} \sum_{c=1}^{K} \sum_{(i,j)\in E} d_{ij} x_{ij}^c \tag{2.1}$$

s.a.

$$x_{ij}^c + x_{jk}^c - x_{ik}^c \leq \ 1, \qquad \forall\, 1 \leq \ i \ < \ j \ \leq k \ , \ c \ = 1, \ldots, K \tag{2.2}$$

$$x_{ij}^c - x_{jk}^c + x_{ik}^c \leq \ 1, \qquad \forall\, 1 \leq \ i \ < \ j \ \leq k \ , \ c \ = 1, \ldots, K \tag{2.3}$$

$$- x_{ij}^c + x_{jk}^c + x_{ik}^c \leq \ 1, \qquad \forall\, 1 \leq \ i \ < \ j \ \leq k \ , \ c \ = 1, \ldots, K \tag{2.4}$$

$$\sum_{c=1}^{K} x_i^c = 1, \qquad \forall i \in V \tag{2.5}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^c = s_c, \qquad \forall c = 1, ..., K \tag{2.6}$$

$$\sum_{i \in T} x_i^c \leq t \qquad \forall c = 1, ..., K \tag{2.7}$$

$$W_l \leq \sum_{i=1}^{n} w_i x_i^c \leq W_u \qquad \forall c = 1, ..., K \tag{2.8}$$

$$x_i^c,\ x_{ij}^c \in \{0, 1\} \qquad \forall \in V, \{i, j\} \in E, c = 1, \ldots, K \tag{2.9}$$

La función objetivo (2.1) busca minimizar la suma total de los pesos de las aristas de las K cliques. Las restricciones (2.2)-(2.4) son también llamadas desigualdades triangulares y garantizan que si tres nodos de V están unidos por dos aristas en una clique, entonces el tercer nodo también pertenece a la misma clique. La restricción (2.5) garantiza que cada nodo es asignado a exactamente una clique. La restricción (2.6) define el tamaño de cada una de las cliques. (2.7) garantiza que a cada clique c pertenezcan a lo más t elementos de un conjunto T fijo. La restricción (2.8) acota el peso de cada clique.
En el presente trabajo se abordarán dos problemas principales: la zonificación de los equipos, el mismo que será trabajado desde dos ópticas distintas; en primer lugar la zonificación provincial, como actualmente se desarrolla el campeonato, y la zonificación general de los equipos. El segundo problema consiste en abordar el campeonato en la etapa previa a la zonificación, y generar una propuesta para que el campeonato sea más competitivo, este problema se lo denominará Problema de Construcción de Bombos.
Los dos problemas son de equipartición por lo que los valores del vector de tamaños son:
$S_u = \lceil \frac{n}{K} \rceil \ y \ S_l = \lfloor \frac{n}{K} \rfloor$

2.1 Campeonato de Segunda Categoría

La zonificación del campeonato ecuatoriano de fútbol de la segunda categoría, se lo puede plantear como un problema de partición de grafos, para su formulación abordaremos el problema de dos manera distintas, en primer lugar como ya se lo trabajó en [8], donde se consideran a las 22 asociaciones provinciales como el conjunto de nodos y la cardinalidad de partición 4, para luego mediante un sorteo dirigido conformar los 8 grupos requeridos por el reglamento de la FEF a este problema se le denomina zonificación provincial; la segunda forma en la que se abordará el problema es considerando a los 44 equipos (campeón y subcampeón de cada asociación provincial) como el conjunto de nodos y la cardinalidad de la partición 8, este problema se denomina zonificación de equipos.

2.1.1 Formulación del problema de zonificación provincial

Sea $G = (V_p, E_p)$ donde $V_p = \{1, \ldots, 22\}$, la relación entre el conjunto de nodos y las asociaciones provinciales está dada en la Tabla 1.1. El valor d_{ij} está dado por la distancia entre la capital de la provincia i con la capital de la provincia j como se detalla en la matriz A.1. La cardinalidad de la partición es $K = 4$. Sea CS_p el conjunto de nodos correspondientes a las provincias consideradas cabeza de serie que son Pichincha, Guayas y Manabí, sea A_p el conjunto de nodos correspondiente a las provincias pertenecientes a la región Amazónica que son Sucumbíos, Francisco de Orellana, Napo, Pastaza y Morona Santiago.

$$\begin{array}{ll} CSp = \{1,2,3\}, & cs_p = 1 \\ A_p = \{17,18,19,20,21,22\}, & a_p = 2 \end{array}$$

Los valores correspondientes a los límites del tamaño de cada partición son $S_l = 5$ y $S_u = 6$, por lo que se convierte en un problema de equipartición.
Dadas estas condiciones la formulación del problema quedaría de la siguiente manera:

$$z = \text{mín} \sum_{c=1}^{4} \sum_{(i,j)\in E_p} d_{ij} x_{ij}^c \tag{2.10}$$

s.a.

$$x_{ij}^c + x_{jk}^c - x_{ik}^c \leq 1, \qquad \forall\, 1 \leq i < j \leq k\,,\ c = 1,\ldots,4 \tag{2.11}$$

$$x_{ij}^c - x_{jk}^c + x_{ik}^c \leq 1, \qquad \forall\, 1 \leq i < j \leq k\,,\ c = 1,\ldots,4 \tag{2.12}$$

$$-x_{ij}^c + x_{jk}^c + x_{ik}^c \leq 1, \qquad \forall\, 1 \leq i < j \leq k\,,\ c = 1,\ldots,4 \tag{2.13}$$

$$\sum_{c=1}^{4} x_i^c = 1, \qquad \forall i \in V_p \tag{2.14}$$

$$\sum_{i=1}^{22} x_i^c = 5, \qquad \forall c \in \{1,2\} \tag{2.15}$$

$$\sum_{i=1}^{22} x_i^c = 6, \qquad \forall c \in \{3,4\} \tag{2.16}$$

$$\sum_{i\in CS_p} x_i^c \leq 1 \qquad \forall c = 1,...,4 \tag{2.17}$$

$$\sum_{i\in A_p} x_i^c \leq 2 \qquad \forall c = 1,...,4 \tag{2.18}$$

$$x_i^c,\ x_{ij}^c \in \{0,1\}, \qquad \forall \in V_p, \{i,j\} \in E_p, c = 1,\ldots,4 \tag{2.19}$$

Las restricciones (2.17) y (2.18) son restricciones de selección que limitan el número de provincias cabezas de serie a 1 por grupo y el número de provincias de la Amazonía a 2 por grupos respectivamente.

2.1.2 Formulación del problema de zonificación de equipos

Sea $G = (V, E)$ donde $V = \{1, \ldots, 44\}$. La relación entre el conjunto de nodos y los equipos de cada asociación provincial está dada en A.4. El valor d_{ij} es la distancia entre la ciudad sede del equipo i con la ciudad sede del equipo j como se detalla en la matriz A.4. La cardinalidad de la partición es $K = 8$. Sea CS el conjunto de nodos correspondientes a los equipos considerados cabeza de serie que son los equipos de las provincias Pichincha, Guayas y Esmeraldas. Sea A el conjunto de nodos correspondiente a los equipos de las provincias pertenecientes a la región amazónica que son Sucumbíos, Francisco de Orellana, Napo, Pastaza y Morona Santiago.

$$\begin{aligned} CS &= \{1,2,3,4,5,6\}, & cs &= 1 \\ A &= \{33,34,35,36,37,38,39,40,41,42,43,44\}, & a &= 2 \end{aligned}$$

Los valores correspondientes a los límites del tamaño de cada partición son $S_l = 5$ y $S_u = 6$. Sea $W = (w_1, w_2, ..., w_{44})$, tal que $w_i = 1$ si el equipo al que corresponde el nodo i es campeón en su asociación provincial y $w_i = -1$ si el equipo al que corresponde el nodo i es viceampeón en su asociación provincial. Dadas estas condiciones la formulación del problema quedaría de la siguiente manera:

$$z = \text{mín} \sum_{c=1}^{8} \sum_{(i,j)\in E} d_{ij} x_{ij}^c \tag{2.20}$$

$$s.a \tag{2.21}$$

$$x_{ij}^c + x_{jk}^c - x_{ik}^c \leq 1, \qquad \forall\, 1 \leq i < j \leq k \;,\; c = 1,\ldots,8 \tag{2.22}$$

$$x_{ij}^c - x_{jk}^c + x_{ik}^c \leq 1, \qquad \forall\, 1 \leq i < j \leq k \;,\; c = 1,\ldots,8 \tag{2.23}$$

$$-x_{ij}^c + x_{jk}^c + x_{ik}^c \leq 1, \qquad \forall\, 1 \leq i < j \leq k \;,\; c = 1,\ldots,8 \tag{2.24}$$

$$\sum_{c=1}^{8} x_i^c = 1 \qquad \forall i \in V \tag{2.25}$$

$$\sum_{i=1}^{44} x_i^c = 5, \qquad \forall c \in \{1,2,3,4\} \tag{2.26}$$

$$\sum_{i=1}^{44} x_i^c = 6, \qquad \forall c \in \{5,6,7,8\} \tag{2.27}$$

$$\sum_{i\in CS} x_i^c \leq 1 \qquad \forall c = 1,...,8 \tag{2.28}$$

$$\sum_{i\in A} x_i^c \leq 2 \qquad \forall c = 1,...,8 \tag{2.29}$$

$$x_{2i-1}^c + x_{2i}^c \leq 2 \qquad \forall c = 1,...,8,\ \forall i = 1,...,44 \tag{2.30}$$

$$-1 \leq \sum_{i=1}^{44} w_i x_i^c \leq 1 \qquad \forall c = 1,...,8 \tag{2.31}$$

$$x_i^c,\ x_{ij}^c \in \{0,1\}, \qquad \forall \in V, \{i,j\} \in E, c = 1,\ldots,8 \tag{2.32}$$

Las restricciones (2.28) y (2.29) son restricciones de selección que limitan el número de provincias cabezas de serie a 1 por grupo y el número de provincias de la Amazonía a 2 por grupo respectivamente. La restricción (2.30) es también una restricción de selección, de acuerdo a la relación en A.4 entre los nodos y los equipos, cada nodo impar corresponde al campeón de alguna asociación provincial y su sucesor corresponde al equipo vicecampeón de su misma asociación provincial, por lo que esta restricción limita a 1 el número de equipos de cada asociación provincial por grupo.

2.2 Bombos

La competitividad en algunas provincias es diferente que en otras, eso se ve reflejado en que hay provincias que nunca han tenido campeones en la segunda categoría.
Un forma de volver más competitivo el campeonato de segunda categoría es eliminar la fase provincial y cambiarlo por una fase de grupos conformados por equipos de todas las provincias, pero de tal manera que sean cercanos y homogéneos en cuanto al nivel de competencia. La propuesta es generar un ranking para los equipos considerando el historial en las competiciones.
A partir del ranking se construyen los bombos que son conjuntos de equipos (nodos), con la consideración que los equipos que pertenezcan al mismo bombo al momento de realizar la partición no pueden pertenecer a la misma clique.
Para generar los bombos se necesitan como datos el número total de equipos n y la cantidad de grupos K. Sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido y completo. Sea $W \in \mathbb{R}^n$ un vector de pesos asociado a los nodos de V. Sea K la cardinalidad de la partición, se define a m el número de bombos necesarios y está dado por:

$$m = \left\lceil \frac{n}{K} \right\rceil$$

Si m es par se define:

$$s = \{\underbrace{K, K, \ldots, K}_{\frac{m}{2}-1}, n \text{mod} K, \underbrace{K, K, \ldots, K}_{\frac{m}{2}}\}$$

Si m es impar se define:

$$s = \{\underbrace{K, K, \ldots, K}_{\frac{m-1}{2}}, n \text{mod} K, \underbrace{K, K, \ldots, K}_{\frac{m-1}{2}}\}$$

$\{B_i\}_{i=1}^m$ es una partición de V tal que:

- Para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$ $|B_i| = s_i$
- Para todo $i, j \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $i > j$, $\min\limits_{l \in B_i} W_l \geq \max\limits_{l \in B_j} W_l$

La formulación del problema desde el punto de vista de los bombos quedaría de la siguiente manera:

$$z = \textit{mín} \sum_{c=1}^{K} \sum_{(i,j)\in E} d_{ij} x_{ij}^{c} \tag{2.33}$$

s.a.

$$x_{ij}^{c} + x_{jk}^{c} - x_{ik}^{c} \leq 1, \qquad \forall\, 1 \leq i < j \leq k,\ c = 1, \ldots, K \tag{2.34}$$

$$x_{ij}^{c} - x_{jk}^{c} + x_{ik}^{c} \leq 1, \qquad \forall\, 1 \leq i < j \leq k,\ c = 1, \ldots, K \tag{2.35}$$

$$-x_{ij}^{c} + x_{jk}^{c} + x_{ik}^{c} \leq 1, \qquad \forall\, 1 \leq i < j \leq k,\ c = 1, \ldots, K \tag{2.36}$$

$$\sum_{c=1}^{K} x_{i}^{c} = 1 \qquad \forall i \in V \tag{2.37}$$

$$\sum_{i\in B_j} x_{i}^{c} \leq 1, \qquad \forall c = 1, ..., K\ j = 1, 2, \ldots, m \tag{2.38}$$

$$x_{i}^{c},\ x_{ij}^{c} \in \{0, 1\} \qquad \forall \in V, \{i, j\} \in E, c = 1, \ldots, K \tag{2.39}$$

La restricción (2.38) garantiza que cada grupo esté conformado por un representante de cada bombo.

CAPÍTULO 3

Heurísticas

El problema de partición de grafos es NP completo, es decir, existe una remota posibilidad de encontrar un algoritmo polinomial para hallar su solución. Por otro lado el tamaño del conjunto solución en un problema de partición de grafos, considerando únicamente la restricción de tamaño, es extremadamente grande, para ejemplificarlo consideremos un grafo $G = (V, E)$, tal que la cardinalidad de V es igual a Km, vamos a partir el grafo en K partes iguales.
La cardinalidad del conjunto solución está dado por:

$$\frac{(Km)!}{K!(m!)^K}$$

En la siguiente tabla se presentan algunos ejemplos para tener una idea de la magnitud del tamaño del conjunto de soluciones que podría alcanzar.

n	K	$\|S_a\|$
40	8	$5,6475 \times 10^{28}$
20	4	$5,8664 \times 10^{10}$

Para el caso particular del tamaño de las particiones en los problemas de zonificación tenemos que la fórmula del tamaño del conjunto de soluciones admisibles, considerando únicamente la restricción de tamaño, viene dado por:

$$\frac{n!}{(K-a)!a!(S_u!)^a(S_l!)^{(K-a)}}$$

donde,

- $a = n \mod K$
- $S_u = \lceil \frac{n}{K} \rceil$
- $S_l = \lfloor \frac{n}{K} \rfloor$

En la siguiente tabla se describen los tamaños de los conjuntos solución para los problemas de zonificación, considerando únicamente la restricción del tamaño de los grupos.

Zonificación	n	K	$\lvert S_a\rvert$
Equipos	44	8	$8,2817 \times 10^{31}$
Provincial	22	4	$3,7643 \times 10^{10}$

Con estos resultados se puede observar que realizar una búsqueda directa sobre el conjunto de soluciones es una tarea demasiado complicada teniendo en cuenta el costo computacional, incluso utilizando Solvers que usan técnicas sofisticadas de enumeración implícita como Gurobi [9] se tiene que a partir de un número grande de nodos el paquete computacional no puede entregar la solución exacta.

Por tal motivo se propone el uso de heurísticas para obtener una buena solución en un tiempo razonable. Para el presente trabajo se utilizará la heurística de Kernighan-Lin [1], para construir un algoritmo que permita obtener soluciones "buenas" para el problema de zonificación tanto a nivel provincial como por equipos.

3.1 Heurística de Kernighan-Lin

La heurística de Kernhigan-Lin considera el problema de bipartición de grafos, toma como dato una solución inicial, y se considera cómo varía la solución objetivo si se toma un elemento de la parte 1 y se lo reemplaza con un elemento de la parte 2, completando la parte 2 con el elemento que se extrae de la parte 1, se realiza la comparación entre todos los intercambios posibles, realizando el intercambio que disminuya más la solución objetivo. De esta manera se obtiene como resultado una nueva partición en la que se realiza la misma consideración hasta que no exista un intercambio que mejore la solución objetivo.

Sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido, donde $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ es el conjunto de nodos y E es el conjunto de aristas $e = \{i, j\}$ e $i, j \in V, i < j$, son sus nodos adyacentes. Sean $d_{ij} \in R$ ponderaciones asociadas a cada arista $e \in E$.

La heurística está diseñada de tal manera que resuelve el problema cuando el tamaño de la partición es $K = 2$.

Sea $\Pi_0 = \{A, B\}$ una partición de V. La función objetivo es:

$$\begin{aligned} z(A,B) &= \sum_{c=1}^{2} \sum_{(i,j)\in E} d_{ij} x_{ij}^{c} && (3.1) \\ &= \sum_{(i,j)\in E} d_{ij} x_{ij}^{1} + \sum_{(i,j)\in E} d_{ij} x_{ij}^{2} \\ &= \sum_{i\in A} \sum_{j\in A} d_{ij} + \sum_{i\in B} \sum_{j\in B} d_{ij} && (3.2) \end{aligned}$$

Para cada $a \in A$ vamos a definir el costo interno $I_A(a)$ y el costo externo $E_A(a)$ como:

$$I_A(a) = \sum_{i\in A} d_{ai} \tag{3.3}$$

$$E_A(a) = \sum_{i \in B} d_{ai} \tag{3.4}$$

Para cada $b \in B$ vamos a definir el costo interno $I_B(b)$ y el costo externo$E_B(b)$.

$$I_B(b) = \sum_{i \in B} d_{bi} \tag{3.5}$$

$$E_B(b) = \sum_{i \in A} d_{bi} \tag{3.6}$$

La función objetivo se puede reescribir de la siguiente manera:

$$z(A, B) = \sum_{a \in A} I_A(a) + \sum_{b \in B} I_B(b) \tag{3.7}$$

Sean $a' \in A$ y $b' \in B$. Realizamos el intercambio de estos dos elementos y tenemos la nueva partición:

$$A' = (A - \{a'\}) \cup \{b'\} \tag{3.8}$$

$$B' = (B - \{b'\}) \cup \{a'\} \tag{3.9}$$

La función objetivo para esta nueva partición sería:

$$z(A', B') = \sum_{a \in A} I_A(a) + 2E_B(b') - 2I_A(a') + \sum_{b \in B} I_B(b') + 2E_A(a') - 2I_B(b') - 4d_{a'b'} \tag{3.10}$$

Se calcula la diferencia entre los valores de las funciones objetivo de la partición luego de realizar el intercambio y la partición inicial.

$$z(A', B') - z(A, B) = 2E_A(a') + 2E_B(b') - 2I_B(b') - 2I_A(a') - 4d_{a'b'} \tag{3.11}$$

Se define la siguiente función:

$$\begin{aligned} M :& A \times B \to \mathbb{R} \\ & (a', b') \mapsto M(a', b') = \begin{cases} 2E_A(a') + 2E_B(b') - 2I_B(b') - 2I_A(a') - 4d_{a'b'} & \text{si } \{A', B'\} \in S_a \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases} \end{aligned}$$

Algorithm 1 Heurística Kernighan-Lin

Require: Un grafo no dirigido completo $G = (V, E)$, $\{A,\ B\}$ partición de V.
Ensure: $\{A',\ B'\}$ partición de V tal que $z(A', B') \leq z(A, B)$.

```
Inicialice m=-1.
while m<0 do
    Calcular la imagen de M en A × B.
    Determinar a', b' tal que M(a', b') = mín_{a∈A y b∈B} M(a, b)
    m = M(a', b')
    if m < 0 then
        A = (A − {a'}) ∪ {b'} y B = (B − {b'}) ∪ {a'}
    end if
end while
A' ← A B' ← B
```

3.1.1 Heurística de intercambios "dos a dos"

En el problema de zonificación de equipos se presenta un inconveniente, ya que al tomar como solución inicial la actual conformación de los grupos del campeonato de segunda categoría, descrita en la Tabla A.2, no se pueden realizar intercambios puesto que por las diferentes restricciones del problema impiden que existan intercambios factibles de tal manera que la nueva solución siga perteneciendo al conjunto de soluciones admisibles. Por tal motivo se considera la heurística de intercambios 2 a 2, la misma que se detalla a continuación.
Sean a', $a'' \in A$ y b', $b'' \in B$. Realizamos el intercambio de los elementos entre sí y tenemos la nueva partición:

$$\begin{aligned} A' &= (A - \{a', a''\}) \cup \{b', b''\} \\ B' &= (B - \{b', b''\}) \cup \{a', a''\} \end{aligned}$$

La función objetivo para esta nueva partición sería:

$$\begin{aligned} z(A', B') = \sum_{a \in A} I_A(a) + \sum_{b \in B} I_B(b) + \\ 2E_A(a') - 2I_A(a') + 2E_A(a'') - 2I_A(a'') \\ + 2E_B(b') - 2I_B(b') + 2E_B(b'') - 2I_B(b'') \\ - 4d_{a'b'} - 4d_{a'b''} - 4d_{a''b'} - 4d_{a''b''} + 4d_{a'a''} + 4d_{b'b''} \end{aligned}$$

Se calcula la diferencia entre los valores de las funciones objetivo de la partición luego de realizar el intercambio y la partición inicial.

$$\begin{aligned} z(A', B') - z(A, B) = {} & 2E_A(a') - 2I_A(a') + 2E_A(a'') - 2I_A(a'') \\ & + 2E_B(b') - 2I_B(b') + 2E_B(b'') - 2I_B(b'') \\ & - 4d_{a'b'} - 4d_{a'b''} - 4d_{a''b'} - 4d_{a''b''} + 4d_{a'a''} + 4d_{b'b''}, \end{aligned}$$

Se define la siguiente función:

$$
\begin{aligned}
\widetilde{M} : A^2 \times B^2 &\to \mathbb{R} \\
(a', a'', b', b'') &\mapsto \widetilde{M}(a', a'', b', b'') = \begin{cases} M(a', b') + M(a'', b'') - 4d_{a'b''} & \\ -4d_{a''b'} + 4d_{a'a''} + 4d_{b'b''} & \text{si } \{A', B'\} \in S_a \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Algorithm 2 Heurística Intercambio dos a dos

Require: Un grafo no dirigido completo $G = (V, E)$, $A,\ B$ partición de V.

Ensure: $A',\ B'$ partición de V tal que $z(A', B') \leq z(A, B)$.

```
Inicialice m=-1.
while m < 0 do
    Calcular M para la partición A, B
    Determinar a', a'', b', b'' tal que M~(a', a'', b', b'') = mín_{c,i∈A y d,j∈B} M(c, i, d, j)
    m = M~(a', a'', b', b'')
    if m < 0 then
        A = (A − {a', a''}) ∪ {b', b''} y B = (B − {b', b''}) ∪ {a', a''}
    end if
end while
A' ← A B' ← B
```

3.1.2 Heurística mixta

La heurística mixta no es más que una combinación de la Heurística de Kernigan-Lin y la Heurística de Intercambios 2 a 2, es decir consideramos todos los intercambios 1 a 1 y los intercambios 2 a 2 de tal manera que se realiza el que mayor beneficio genere en la función objetivo.

Algorithm 3 Heurística Mixta

Require: Un grafo no dirigido completo $G = (V, E)$, $A,\ B$ partición de V

Ensure: $A',\ B'$ partición de V tal que $z(A', B') \leq z(A, B)$.

Inicialice m=-1.
while $m < 0$ **do**
    Calcular M y $\widetilde{M}$ para la partición $A,\ B$.
    Determinar $a',\ a'',\ b',\ b''$ tal que $\widetilde{M}(a', a'', b', b'') = \text{mín}_{c,i \in A\ y\ d,j \in B} M(c, i, d, j)$.
    Determinar $a''',\ b'''$ tal que $M(a''', b''') = \text{mín}_{a \in A\ y\ b \in B} M(a, b)$.
    $m_1 = M(a''', b''')$
    $m_2 = \widetilde{M}(a', a'', b', b'')$
    if $m_2 < 0\ \wedge\ m_2 < m_1$ **then**
        $A = (A - \{a', a''\}) \cup \{b', b''\}$ y $B = (B - \{b', b''\}) \cup \{a', a''\}$
    end if
    if $m_1 < 0\ \wedge\ m_1 < m_2$ **then**
        $A = (A - \{a'''\}) \cup \{b'''\}$ y $B = (B - \{b'''\}) \cup \{a'''\}$
    end if
end while
$A' \leftarrow A\ B' \leftarrow B$

3.1.3 Heurística Loli

Hasta el momento se han descrito Heurísticas para la bisección de un grafo. Para generalizar este procedimiento al problema de K-partición de un grafo G, siendo K la cardinalidad de la partición, consideramos el problema de optimización combinatoria (S, p, f) asociado al problema de partición de grafos.

Se genera una solución aleatoria $\Pi_0 = \{P_1, P_2, \ldots, P_K\} \in\ S_a$.
Se aplica la heurística mixta a (P_1, P_2) obteniendo un nuevo par ordenado (P_1', P_2'). De manera sistemática se sigue con (P_1', P_3) obteniéndose un nuevo par (P_1'', P_3'). Bajo este procedimiento se aplica la heurística mixta a todas las posibles combinaciones tomando a la primera componente del vector partición como pivote. Así, se llega a una nueva partición

$$\Pi_1 = \left\{ P_1^{(K-1)}, P_2', \ldots, P_K' \right\}.$$

Posteriormente se toma a la segunda componente del vector como pivote y se procede de la misma manera hasta utilizar a todas las posiciones subsiguientes del vector partición como pivote obteniendo la solución

$$\Pi_K = \left\{ P_1^{2K-2}, \ldots, P_K^{2K-2} \right\}.$$

Luego, se compara la función objetivo evaluada entre Π_0 y Π_K. Si $z(\Pi_0) > z(\Pi_K)$, entonces se repite el proceso tomando como solución inicial a Π_K, caso contrario se para.

A continuación se presenta el esquema general de la Heurística LOLI.

Algorithm 4 Heurística LOLI

Require: Un grafo no dirigido completo $G = (V, E)$, $r = \{P_1, \ldots, P_K\} \in S_a$.
Ensure: $s \in S_a$ partición de V tal que $z(s) \leq z(r)$.

Inicialice h=-1.
while $h < 0$ **do**
  for $i = 1 : K$ **do**
    for $j = 1 : K$ **do**
      if $i \ = j$ **then**
        (P_i', P_j')=Heurística Mixta$(G|_{P_i \cup P_j}, (P_i, P_j))$
      end if
    end for
  end for
  $s = \{P_1', \ldots, P_K'\}$
  $h = z(s) - z(r)$
  if $h < 0$ **then**
    r=s
  end if
end while
$A' \leftarrow A$ $B' \leftarrow B$

Dimensión conjunto de optimalidad local

Cada heurística se detiene cuando no existen más intercambios que mejoren el valor de la función objetivo por realizar, es decir cuando han encontrado un mínimo local. El conjunto para el cual la solución hallada es mínimo local está conformado por las soluciones que se generan por los intercambios considerados por cada heurística, por lo que el conjunto de optimalidad local está compuesto por todas las soluciones factibles del problema de partición que se generarían mediante intercambios hasta hallar un mínimo local. Para ejemplificar y tener una noción de los tamaños de estos conjuntos vamos a considerar el problema de equipartición.
Sea K la cardinalidad de partición. Sea $G = (V, E)$ un grafo completo tal que $|V| = Kn$.
En la siguiente tabla se detallan los tamaños de cada uno de los conjuntos de optimalidad para las heurísticas y el conjunto de soluciones admisibles.

Tabla 3.1: *Cardinalidad de los conjuntos de optimalidad de las soluciones obtenidas por las heurísticas*

Conjunto	Cardinalidad
Soluciones admisibles	$\frac{Kn!}{K!(n!)^K}$
Kernighan Lin	$\frac{K(K-1)n^2}{2}$
Intercambio 2 a 2	$\frac{K(K-1)(n^4-2n^3+n^2)}{2}$
Mixta	$\frac{K(K-1)(n^4-2n^3+2n^2)}{2}$

CAPÍTULO 4

Resultados Numéricos

El presente capítulo se divide en cuatro secciones. En la primera y segunda sección se comparan los resultados de las heurísticas descritas en el capítulo anterior con las soluciones de los mismos problemas encontradas mediante paquetes especializados (Gurobi). Esta comparación se hace en función de los tiempos de cómputo que toman tanto las heurísticas como los paquetes especializados. En la siguiente sección se presenta el problema de creación de bombos como una solución alternativa al problema general de partición de grafos con restricciones de tamaño y peso desarrollado en las dos secciones anteriores. Para plantear esta solución alternativa partimos de un grafo con 227 nodos, que corresponden a todos los equipos participantes en el campeonato ecuatoriano de fútbol de segunda categoría. Particionamos el grafo en subgrafos para luego agregarlos y obtener un grafo cuyas particiones corresponden a cada una de las 22 provincias ecuatorianas. A partir de esto recreamos la realización de los campeonatos de fútbol, para terminar con la creación de los bombos considerando el desempeño histórico de los equipos.

Para terminar, en la última sección se presenta la comparación entre la heurística de Kernighan Lin y la de Intercambio dos a dos para un grafo aleatorio de cardinalidad 400, y un número de partición $K = 8$.

Implementación

Todos los algoritmos desarrollados a lo largo de este trabajo fueron implementados en MatLab, en un computador con procesador AMD Dual-Core Procesador (1.0 GHz) con 4 GB de memoria RAM. Los resultados obtenidos por el solver Gurobi v5.6 fueron realizados en un computador con procesador Core i7 con 8 GB de memoria RAM, dichos datos fueron tomados de [8].

4.1 Experimento 1: Zonificación provincial

El problema de zonificación provincial ya fue estudiado previamente en [8]. Este consiste en resolver el problema de zonificación provincial utilizando el solver Gurobi, además se presentan diferentes heurísticas para la solución del problema de zonificación de los equipos. En el mismo se llega a la solución exacta del problema, la cual está siendo utilizada actualmente para el desarrollo del campeonato ecuatoriano de fútbol de la segunda categoría. La solución exacta está debidamente descrita en la Tabla 1.2 y presentada gráficamente en la Figura (4.1).

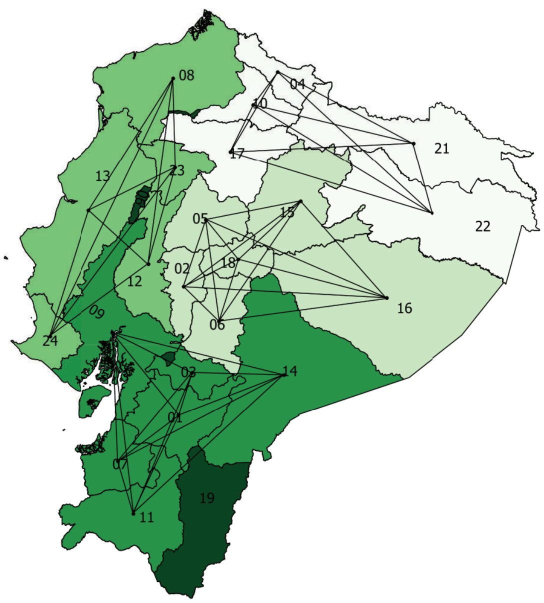


Figura 4.1: *Experimento 1.- Representación gráfica de la zonificación provincial.*

Además, el problema de zonificación provincial también fue resuelto con la heurística Loli, llegando al mismo resultado que con el solver. En la Tabla (4.1) se presenta la comparación de los tiempos de cómputo de cada uno de los métodos.

Tabla 4.1: *Experimento 1.- Comparativa Gurobi-Loli.*

Herramienta	**Objetivo**	**Tiempo (s)**
Gurobi	23081	2485,78
Loli	23081	2, 60

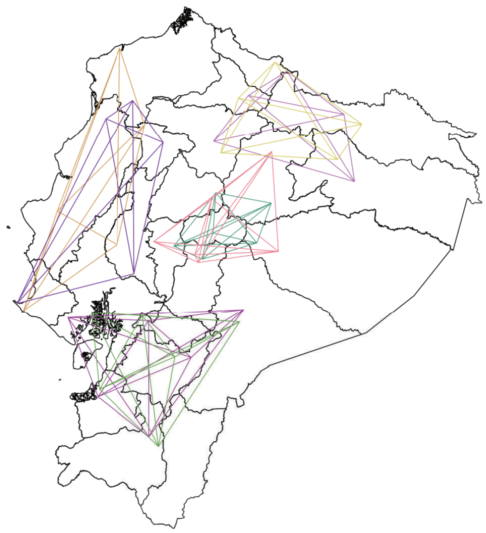
4.2 Experimento 2: Zonificación equipos

Actualmente, los 44 equipos que pasan a la fase regional del campeonato ecuatoriano de fútbol de la segunda categoría se agrupan utilizando la solución exacta del problema de zonificación provincial. A partir de esta solución, en cada una de las zonas se forman dos grupos mediante sorteo de tal manera que se cumplan las restricciones, es decir, que la partición pertenece al conjunto solución del problema propuesto. Las restricciones se plantean de esta forma puesto que al momento de resolver el problema mediante el solver Gurobi no se pudo encontrar la solución óptima en un tiempo razonablemente corto.
En la Tabla (4.2) se presenta una comparación entre la solución actual y la función objetivo y el tiempo empleados por el solver Gurobi y la heurística loli.

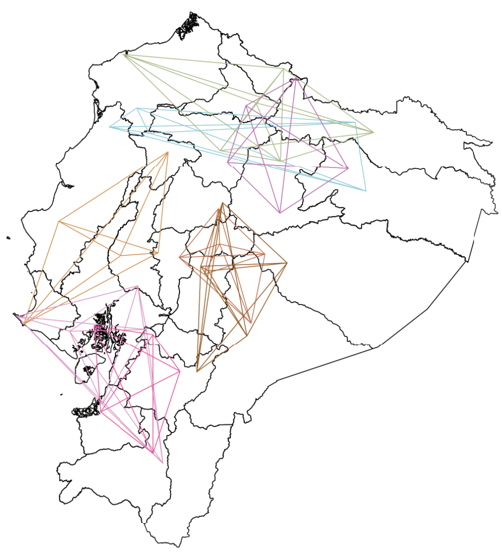
Tabla 4.2: *Experimento 2.- Comparativa Actual-Gurobi-Loli*

Solución	**Objetivo**	**Tiempo (s)**
Actual	47368	–
Gurobi	59624	14400
LOLI	46186	120

En la Figura (4.2) se representa gráficamente la solución actual y la solución obtenida mediante la heurística loli. La mayor diferencia es que al tomar la solución de la zonificación provincial y generar los grupos a partir de esta, se ve limitado el encontrar la solución óptima del problema, pues, como se aprecia en la parte (a) de la figura, los grupos se solapan, mientras que al utilizar la heurística no existe esta limitante y por tal razón el resultado de la función objetivo se puede mejorar.



(a) *Solución Gurobi*



(b) *Solución Loli*

Figura 4.2: *Experimento 2.- Comparativo gráfico de los resultados de la zonificación de equipos*

4.3 Experimento 3: creación de bombos como solución alternativa al problema de zonificación provincial con restricciones de tamaño y peso

4.3.1 Desventajas de la configuración actual del campeonato ecuatoriano de fútbol de la segunda categoría

Existen dos desventajas evidentes en la estructuración del campeonato ecuatoriano de fútbol de la segunda categoría. La primera es el desbalance en el número de equipos por Asociación Provincial, teniendo un mínimo de 4 equipos y un máximo de 20. Esto desemboca en una desigualdad de posibilidades entre cada uno de los equipos para ascender a la segunda categoría, y en otros casos volviendo a la primera etapa demasiado complicada.

Tomando en cuenta los campeonatos de la segunda categoría realizados desde el año 2011 hasta el año 2013 y además, las fases nacional y final, se obtiene el siguiente ranking de las asociaciones provinciales:

Tabla 4.3: *Ranking Provincial*

	Equipos en hexagonales			Equipos en fase final			
Provincia	2011	2012	2013	2011	2012	2013	**Puntaje**
Manabí	0	1	2	0	1	2	3,13
Pichincha	2	2	2	1	1	1	2,70
Guayas	1	0	1	1	0	1	1,63
Imbabura	0	1	1	0	1	0	0,88
El Oro	1	1	2	0	0	0	0,70
Azuay	1	1	0	1	0	0	0,50
Orellana	0	2	1	0	0	0	0,50
Esmeraldas	2	0	1	0	0	0	0,40
Tungurahua	1	0	0	1	0	0	0,38
Morona Santiago	1	0	1	0	0	0	0,33
Pastaza	0	0	1	0	0	0	0,25
Bolívar	1	1	0	0	0	0	0,20
Santo Domingo	1	1	0	0	0	0	0,20
Cañar	0	1	0	0	0	0	0,13
Los Ríos	0	1	0	0	0	0	0,13
Napo	1	0	0	0	0	0	0,08
Carchi	0	0	0	0	0	0	0,00
Chimborazo	0	0	0	0	0	0	0,00
Cotopaxi	0	0	0	0	0	0	0,00
Loja	0	0	0	0	0	0	0,00
Santa Elena	0	0	0	0	0	0	0,00
Sucumbíos	0	0	0	0	0	0	0,00

El puntaje de cada asociación provincial se calcula mediante una suma ponderada del número de equipos que aportan a las 2 fases finales del campeonato, por ejemplo en el caso de Manabí el puntaje del año 2013 es de $2,5$, un punto por cada equipo en la fase final y $0,25$ por cada equipo en los hexagonales, en el año 2012 el puntaje es de $1,25$ y en 2011 el puntaje es 0, para determinar el puntaje final se tiene que las ponderaciones son de 1 para el 2013, $0,5$ para 2012 y $0,3$ para 2011, teniendo como resultado $3,125$ que redondeado a dos cifras decimales se obtiene el valor de la tabla.

De esta manera se puede apreciar que hay 6 provincias que no aportan equipos a los hexagonales, mientras que hay provincias que prácticamente siempre están presentes en estas instancias del campeonato.

El segundo inconveniente es la dispersión en el ranking a nivel provincial, el cual queda en evidencia en la Tabla (4.3). Para sobreponerse a este inconveniente, se propone construir un ranking que considere a los 227 equipos que participan en el campeonato de la segunda categoría sin discriminarlos por provincia. Para esto se necesita el ranking de los 227 equipos participantes construido a partir de sus resultados deportivos en los últimos 3 años.

Lamentablemente, esta información no está disponible en la página web de la Federación Ecuatoriana de Fútbol. A pesar de que esta información se encuentra en las asociaciones provinciales, esta no está debidamente archivada, razón por la cual en este trabajo se desarrolla una simulación de los campeonatos, como se detalla a continuación.

4.3.2 Esquema de la simulación de un campeonato

Para esta simulación del campeonato se construye una región equivalente al Ecuador, se detalla el esquema de la simulación de los partidos y al final se construye el ranking en función de una suma ponderada.

Construcción de una región equivalente al Ecuador

Dentro de un cuadrado de dimensión 100×100, se posicionan aleatoriamente 227 puntos cuyas coordenadas son estrictamente números enteros, donde cada uno de ellos representa a un equipo.

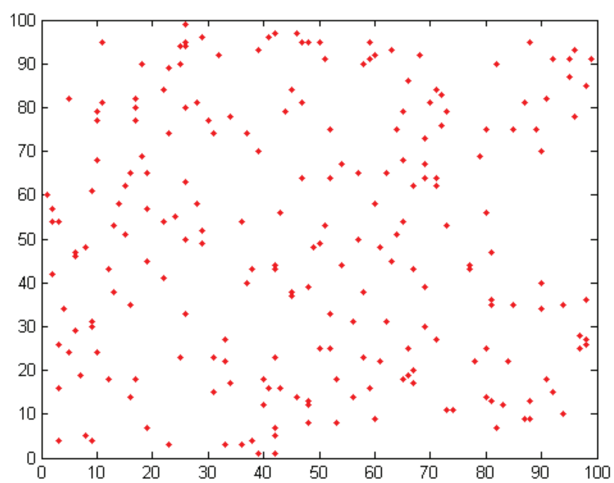


Figura 4.3: *Distribución de los 227 equipos*

La construcción de las provincias se realizará mediante la agregación de subsecciones determinadas mediante el trazado de segmentos de líneas verticales que pasan por los puntos 0, 10.5, 20.5, 30.5,. . ., 90.5, 100 y de segmentos de líneas horizontales que pasan por los puntos 0, 10.5, 20.5, 30.5,. . ., 90.5 y 100. Estas coordenadas fueron seleccionadas para garantizar que cada equipo pertenezca a una única subsección, es decir, la intersección entre cada par de subsecciones es vacía. Este desarrollo se muestra en la Figura (4.4).

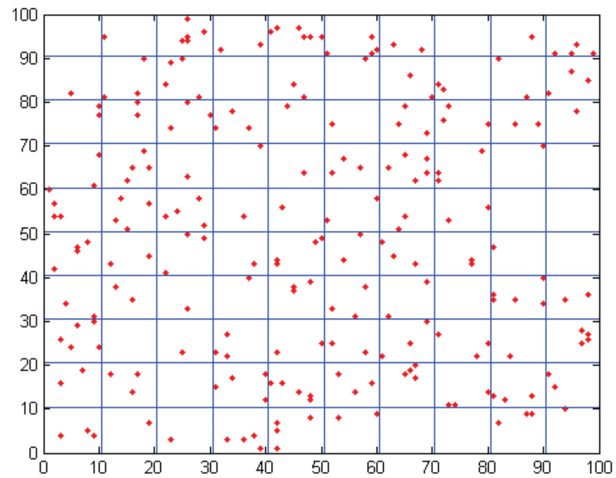


Figura 4.4: *Equipos distribuidos por subsecciones*

El proceso de construcción de las provincias considera dos restricciones. La primera restricción establece que para agregar subsecciones estas deben compartir una frontera en común. La segunda restricción fija el número de equipos por provincia a un equivalente en la distribución por asociación provincial del campeonato ecuatoriano de fútbol de la segunda categoría.

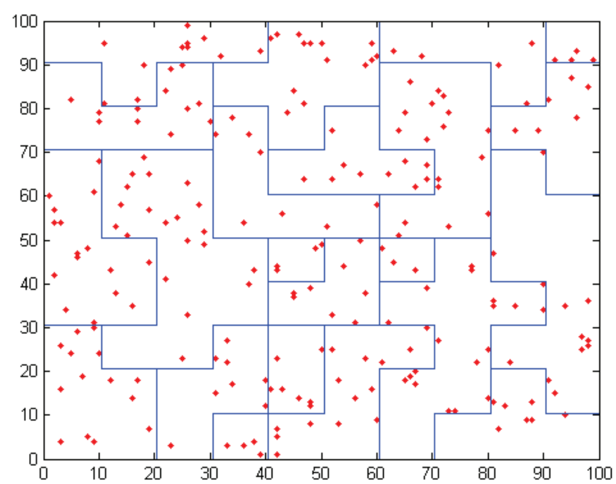


Figura 4.5: *Equipos distribuidos por provincia*

Como resultado se obtienen 22 provincias (particiones en el plano) de tal manera que cada una es conexa y tiene un número de equipos equivalente al campeonato actual. En la Figura (4.6) se presenta la codificación de las provincias resultantes.

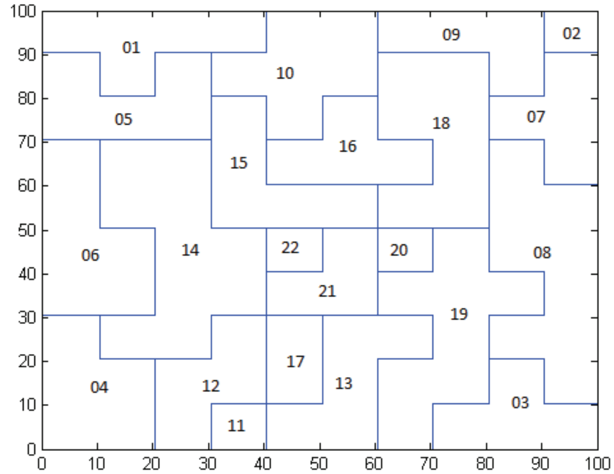


Figura 4.6: *Codificación de provincias*

Construcción del ranking

Simulación de un partido

Sean a y b dos equipos cuyos puntajes al momento de enfrentarse son w_a y w_b respectivamente. Para la simulación de un cotejo entre estos dos equipos se generan números aleatorios r_a y $r_b \in [0,1]$, donde los goles anotados por el equipo a y b están dados por:

$$G(a,b) = \begin{cases} 0 & si\ r_a > \frac{w_a}{w_a+w_b} \\ aleatorio(1,2) & si\ r_a \leq \frac{w_a}{w_a+w_b} \end{cases}$$

$$G(b,a) = \begin{cases} 0 & si\ r_b > \frac{w_a}{w_a+w_b} \\ aleatorio(1,2) & si\ r_b \leq \frac{w_a}{w_a+w_b} \end{cases}$$

Ranking

Para el primer campeonato todos los equipos comparten la primera posición del ranking. A partir del segundo campeonato, los equipos obtendrán su puntaje en función a su desempeño histórico, determinado a partir de las siguientes variables:

- P: número de equipos participantes,
- L: lugar en que terminó la fase,
- G: número de partidos ganados en la fase,
- E: número de partidos empatados,

donde, el puntaje obtenido por un equipo en un campeonato es la suma de los puntajes que obtiene en cada una de las fases. Para cada fase del campeonato el puntaje se calcula de la siguiente manera:

$$p(f,e) = 50\left(\frac{P-L+1}{P} + \frac{3G+E}{3(P-1)}\right) \tag{4.1}$$

Para generar el puntaje histórico de cada uno de los equipos se suman los puntajes obtenidos en los cuatro últimos años de competencia con una ponderación del $100\,\%,\ 50\,\%,\ 30\,\%\ y\ 20\,\%$ empezando desde el último campeonato jugado.

4.3.3 Resultado de la simulación del primer campeonato

A continuación se presenta el resultado de la simulación del primer campeonato mediante la presentación de tablas de resumen y su respectivo gráfico. Para ver el resultado de la simulación de los otros tres campeonatos dirigirse al ANEXO B.

En el primer campeonato simulado los equipos campeones (rojo) y subcampeones (verde) de cada sección son:

Tabla 4.4: *Campeones y vicecampeones de cada sección*

Posición	**Equipo**
Campeón:	0103, 0201, 0303, 0412, 0509, 0607, 0703, 0812, 0902, 1010, 1104,
	1206, 1303, 1404, 1503, 1605, 1703, 1807, 1917, 2001, 2105, 2204
Vicecampeón:	0105, 0202, 0306, 0409, 0507, 0604, 0701, 0808, 0901, 1011, 1102,
	1208, 1312, 1414, 1501, 1601, 1707, 1803, 1919, 2003, 2108, 2202

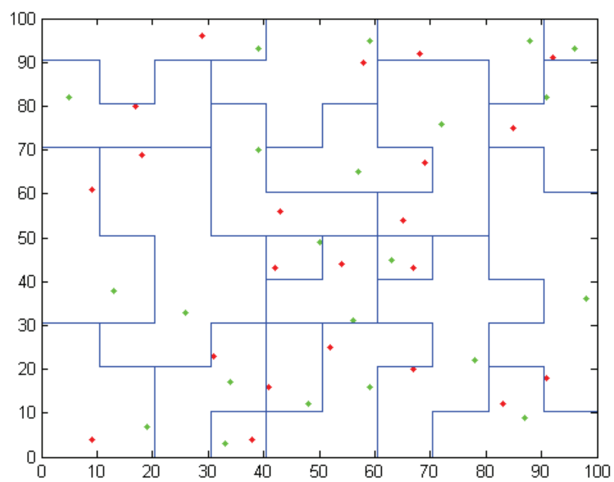
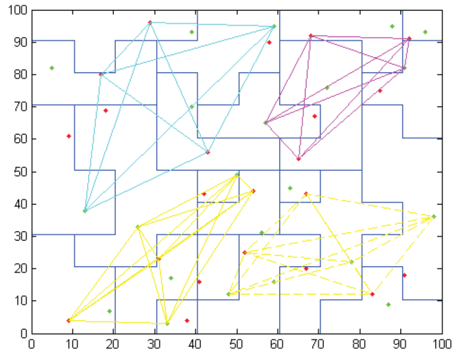


Figura 4.7: *Equipos participantes de la fase zonal*

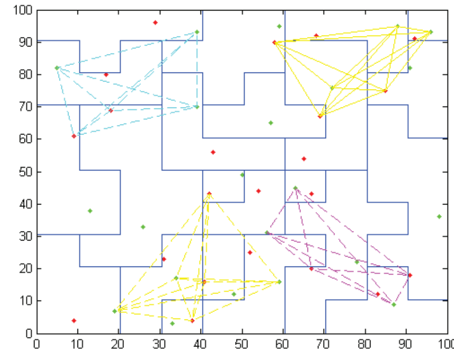
Mediante la heurística Loli se generan los grupos para la segunda fase del campeonato, los cuales son:

Tabla 4.5: *Grupos Segunda Fase*

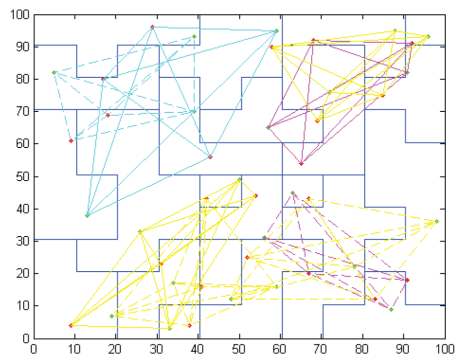
Grupos	**Equipos**
Grupo 1 :	0103, 0509, 0604, 1011, 1503
Grupo 2 :	0105, 0507, 0607, 1404, 1501
Grupo 3 :	0201, 0701, 0902, 1601, 1807
Grupo 4 :	0306, 0812, 1917, 2003, 2108
Grupo 5 :	0202, 0703, 0901, 1010, 1605, 1803
Grupo 6 :	0303, 0808, 1303, 1707, 1919, 2001
Grupo 7 :	0412, 1102, 1206, 1414, 2105, 2202
Grupo 8 :	0409, 1104, 1208, 1312, 1703, 2204



(a) Grupos Segunda Fase 1



(b) Grupos Segunda Fase 2



(c) Grupos Segunda Fase

Figura 4.8: *Resultados del primer campeonato simulado*

Los equipos campeones de cada grupo y los cuatro mejores segundos juegan la tercera fase. Esta fase consiste en dos hexagonales, conformados por cuatro campeones y dos subcampeones agrupados mediante un sorteo. Los hexagonales quedaron conformados de la siguiente manera:

Tabla 4.6: *Hexagonales*

Hexagonal	**Equipos**
Hexagonal 1 :	1807, 1703, 0604, 0202, 0201, 2202
Hexagonal 2 :	1501, 0412, 0306, 2001, 1104, 0901

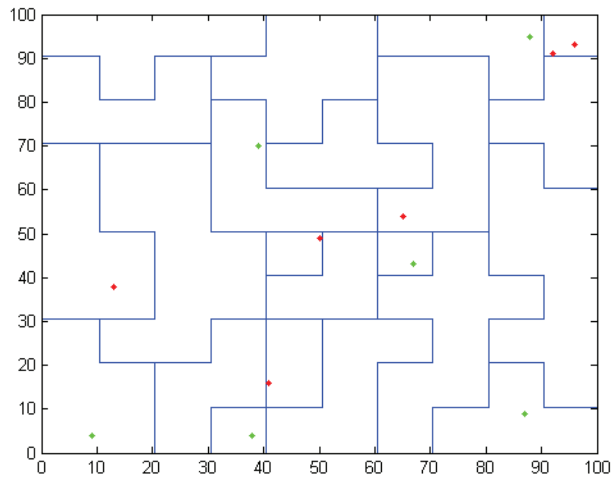


Figura 4.9: *Hexagonales*

Finalmente, los equipos en primera y segunda posición de cada hexagonal juegan la fase final, obteniéndose el siguiente resultado:

Tabla 4.7: *Fase Final*

Primero	Segundo	Tercero	Cuarto
0901	1501	1703	1807

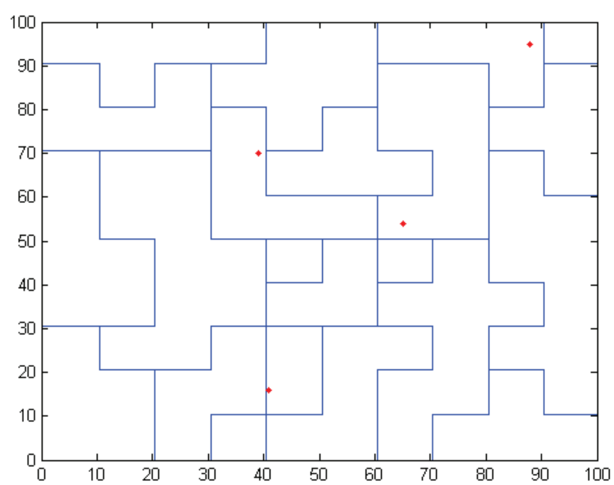


Figura 4.10: *Final*

Una vez simulados los cuatro campeonatos, el ranking queda establecido como se detalla desde la Tabla B.13 hasta la Tabla B.34.

4.3.4 Resultado de la creación de bombos como solución alternativa al problema de zonificación provincial con restricciones de tamaño y peso

Al resolver el problema de los bombos con una cardinalidad de partición igual a 22 para que sea comparable con las 22 provincias se llega a las siguientes comparaciones.

Tabla 4.8: *Bombos vs. Provincias*

Agrupación	Provincias	Bombos 22
Media pesos promedio	$137,17$	$125,91$
Desv. pesos promedio	$31,30$	$8,83$
Peso promedio mínimo	$100,86$	$115,27$
Peso promeido máximo	$230,73$	$155,69$
Media distancias	$172,45$	$166,96$
Desv. Dista	$105,92$	$57,48$
Distancia mínima	$8,84$	$74,72$
Distancia máxima	$599,29$	$433,40$

La dispersión del promedio de los pesos de cada grupo como resultado del uso de los bombos es mucho menor que en la agrupación provincial ya que la desviación estándar es de apenas $8,83$ comparado con el $31,30$ del promedio en las provincias. De manera más clara se puede apreciar esta diferencia con respecto al rango: en el caso de las provincias va desde un promedio de $100,86$ hasta $230,73$, mientras que en los grupos generados por los bombos los promedios se encuentran distribuidos en un intervalo más pequeño desde $115,27$ hasta $155,69$.

En cuanto a las distancias, en el caso de la agrupación provincial el promedio de distancia que un equipo debería trasladarse es de $172,45$ km mientras que en los grupos es de $166,96$ km, cuya diferencia podría no ser muy considerable, sin embargo, si esto lo vemos como el desplazamiento total de los equipos sería $39146,15$ km en el caso de desarrollar el campeonato normalmente, comparado con $37899,92$ km en el caso de los grupos de los bombos.

4.4 Experimento 4: Comparación entre heurística de Kernighan Lin, heurística de intercambio dos a dos y heurística mixta

El presente experimento consiste en considerar un grafo aleatorio de 400 nodos, y se considera el problema de equipartición con restricciones de tamaño con 8 como cardinalidad de la partición.

En primer lugar se aplicarán las tres heurísticas partiendo de una misma solución inicial y se compararán los tiempos y las funciones objetivo de las soluciones obtenidas por cada una de las heurísticas. Luego se procederá a aplicar las heurísticas de intercambio 2 a 2 y la heurística mixta a la solución obtenida por la heurística de Kernighan Lin.

En la Figura 4.11 se muestra el grafo aleatorio de 400 nodos en el que se hallarán las diferentes soluciones.

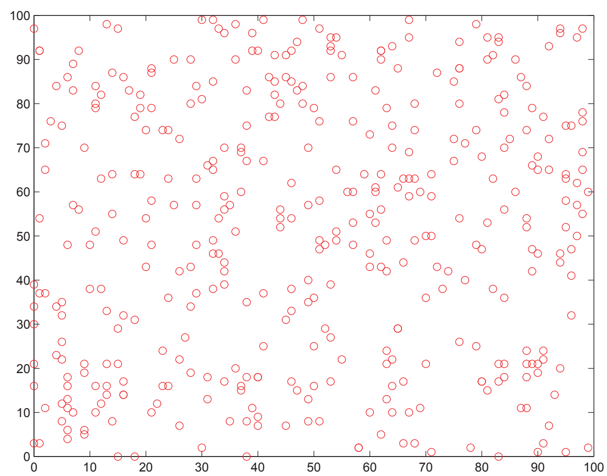


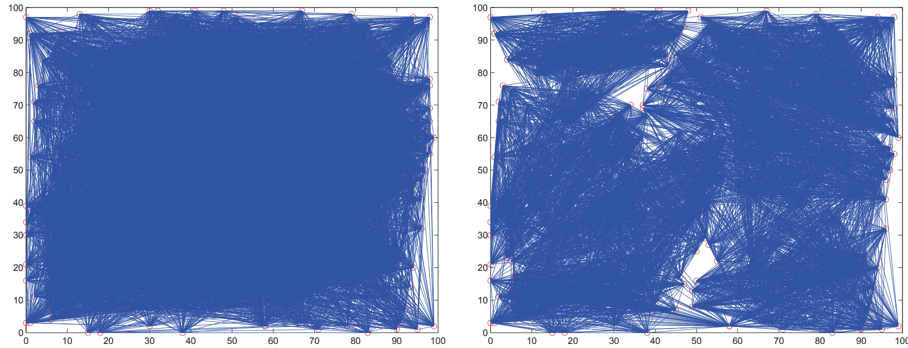
Figura 4.11: *Experimento 4.- Grafo aleatorio de* 400 *nodos.*

4.4.1 Solución inicial aleatoria

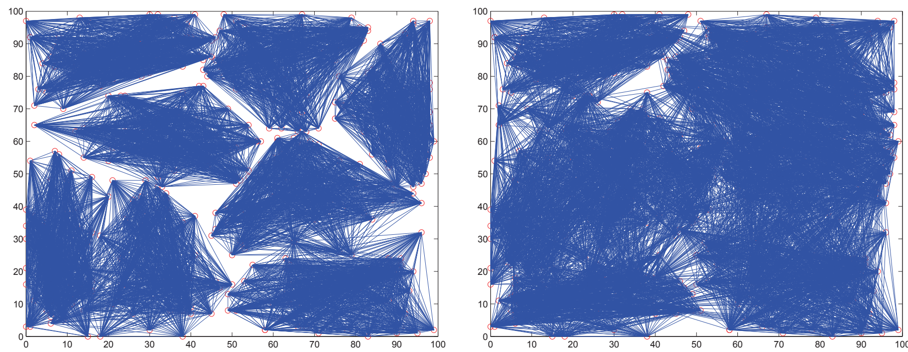
En la Tabla 4.9 se muestran los resultados de las diferentes heurísticas partiendo de una solución inicial aleatoria, de la misma manera en la Figura 4.12 se pueden observar los comparativos entre las diferentes soluciones.

Tabla 4.9: *Comparación de las soluciones obtenidas por las* 3 *heurísticas*

Heurística	Función objetivo	Tiempo	Intercambios factibles
Solución aleatoria	1045800	$0,14$	-
Kernighan-Lin	483140	$2,29$	140000
Intercambios 2 a 2	394590	$970,19$	$3,3614 \times 10^8$
Mixta	491460	$967,93$	$3,3628 \times 10^8$



(a) Solución aleatoria *(b) Solución Kernighan-Lin*



(c) Solución Intercambio 2a2 *(d) Solución Mixta*

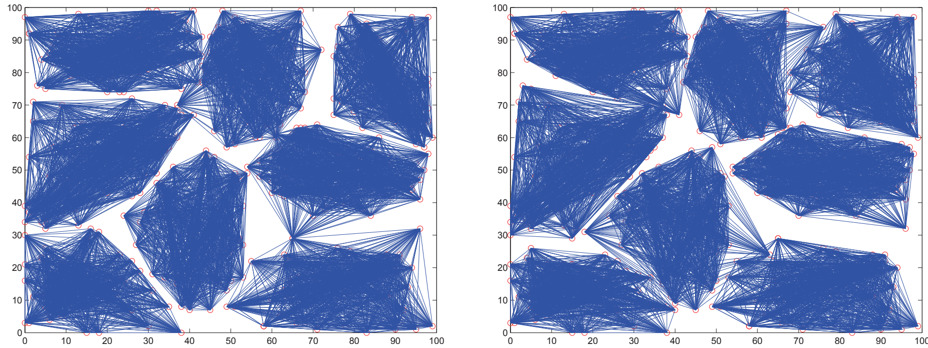
Figura 4.12: *Comparativo heurísticas*

4.4.2 Solución inicial obtenida por la heurística Kernighan-Lin

En la Tabla 4.10 se muestran los resultados de las diferentes heurísticas partiendo de una solución inicial aleatoria, de la misma manera en la Figura 4.13 se pueden observar los comparativos entre las diferentes soluciones.

Tabla 4.10: *Comparación de las soluciones obtenidas por la heurística mixta y la de intercambios dos a dos*

Heurística	**Función objetivo**	**Tiempo**
Intercambios 2a2	377570	1058, 61
Mixta	383470	1043, 81



(a) *Solución Intercambio 2a2* ***(b)*** *Solución Mixta*

Figura 4.13: *Comparativo heurística intercambios 2a2 y heurística mixta*

4.5 Conclusiones

Las conclusiones serán expuestas en tres grupos, primero una comparación de los resultados tanto en tiempo de cómputo como en el valor de la función objetivo al resolver un problema utilizando el solver Gurobi y la heurística; las ventajas que genera el uso de la idea de los bombos para reformular la estructura del campeonato, y finalmente los comparativos entre los algoritmos implementados y previamente descritos.

Gurobi vs. Loli

En el experimento 1 se tiene que tanto con el solver como con la heurística se llegó a la solución óptima del problema sin embargo en cuanto al tiempo que llevo encontrar la solución se ve una diferencia bastante considerable. Por supuesto, al utilizar la heurística no se puede asegurar el haber obtenido la solución óptima del problema.
Con respecto al experimento 2 el solver no llega a encontrar la solución óptima del problema como se detalla en [8] donde la solución tiene una brecha de optimalidad del $15\,\%$. Si comparamos la solución obtenida con el solver y la heurística se ve una diferencia marcada con respecto a la función objetivo y el tiempo que se tarda en hallar esta.
Se puede sugerir el uso de la heurística cuando los recursos computacionales y de tiempo no sean suficientes para obtener una solución óptima con un solver, sin embargo, es de mucha ayuda tener la solución que se puede obtener con el solver para poder contrastar con las soluciones que se pueden obtener utilizando la heurística.

Ventajas de los bombos

El comparativo entre desarrollar el campeonato utilizando el sistema actual y los bombos como una alternativa para reformular la fase inicial del campeonato se ven descritos en la Tabla 4.8, donde se muestra las ventajas de utilizar el nuevo sistema de campeonato. Con respecto al nivel futbolístico de los grupos resultantes al utilizar los bombos es mucho más balanceado que en el caso de la agrupación provincial, de la misma manera si consideramos los gastos de traslado de los equipos y asumimos que estos son proporcionales a la distancia, se tiene que el nuevo sistema de campeonato genera un ahorro del $3,18\,\%$.

Comparativo de las heurísticas

Ninguna de las heurísticas descritas en este documento puede competir contra el uso de un solver para obtener la solución óptima del problema, ya que ninguna de las heurísticas garantiza llegar a dicha solución. La ventaja está directamente relacionada con el tiempo de cómputo, puesto que si se tienen limitaciones computacionales no se puede obtener la solución óptima con el solver.
Las tres heurísticas tienen el mismo comportamiento, parten de una solución factible inicial y realizan todos los intercambios posibles de tal manera que se mejore la función objetivo, es decir, se llega a un mínimo local y es cuando la heurística se detiene.

Si consideramos el tiempo de computo como determinante para elegir una heurística como mejor, la heurística de Kernighan-Lin sería la mejor ya que como se puede apreciar en la Tabla 4.12 el tiempo de ejecución de esta es mucho menor.
Mientras que si consideramos como determinante el tamaño de los conjuntos para los que las soluciones halladas son óptimos locales se tiene que la heurística de Kernighan Lin tiene una gran desventaja en contra de la heurística de intercambio 2 a 2, pues las cardinalidades vienen dadas por un polinomio de grado 2 y 4 respectivamente como se tiene en la Tabla 3.1. Bajo esta consideración se planteó la segunda parte del experimento 4 en el que se toma como solución inicial la obtenida por la heurística de Kernighan Lin y se aplican los algoritmos de intercambio 2 a 2 y la heurística mixta y se obtienen soluciones con un valor de la función objetivo mejoradas hasta en un $21,85\,\%$.

Anexos

ANEXO A

Campeonato nacional de fútbol de segunda categoría

A.1 Zonificación

Tabla A.1: *Matriz de distancias problema Zonificación Provincial*

Provincia	**Ciudad**	**i**	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
Pichincha	Quito	1	0	419	363	447	237	365	265	200	98, 5	503	316	137	641	374	366	184	287	240	656	142	255	158
Guayas	Guayaquil	2	419	0	185	198	196	83, 3	668	227	323	187	460	540	390	70	337	434	606	357	138	284	653	276
Manabí	Portoviejo	3	363	185	0	379	343	264	610	413	312	367	367	482	571	233	579	530	627	453	213	221	595	371
Azuay	Cuenca	4	447	198	379	0	311	150	693	252	349	170	601	566	200	211	200	402	575	326	334	425	635	301
Bolívar	Guaranda	5	237	196	343	311	0	223	484	83, 5	139	326	472	356	506	127	238	270	443	194	331	298	469	112
Cañar	La Troncal	6	365	83, 3	264	150	223	0	612	171	268	138	486	485	342	95, 5	281	378	551	302	218	309	597	220
Carchi	Tulcán	7	265	668	610	693	484	612	0	448	347	751	374	130	889	623	601	398	502	477	804	390	469	406
Chimborazo	Riobamba	8	200	227	413	252	83, 5	171	448	0	102	309	435	319	447	216	157	213	385	136	362	260	432	54, 5
Cotopaxi	Latacunga	9	98, 5	323	312	349	139	268	347	102	0	406	335	219	544	278	269	219	364	142	458	160	331	60, 8
El Oro	Machala	10	503	187	367	170	326	138	751	309	406	0	590	623	237	199	368	516	689	440	322	413	735	358
Esmeraldas	Esmeraldas	11	316	460	367	601	472	486	374	435	335	590	0	291	793	391	600	477	580	474	595	179	548	392
Imbabura	Ibarra	12	137	540	482	566	356	485	130	319	219	623	291	0	762	495	473	271	374	349	676	262	341	279
Loja	Loja	13	641	390	571	200	506	342	889	447	544	237	793	762	0	402	334	536	709	460	525	616	769	496
Los Ríos	Babahoyo	14	374	70	233	211	127	95, 5	623	216	278	199	391	495	402	0	349	396	568	319	204	214	608	237
Morona Santiago	Macas	15	366	337	579	200	238	281	601	157	269	368	600	473	334	349	0	203	375	126	471	427	435	209
Napo	Tena	16	184	434	530	402	270	378	398	213	219	516	477	271	536	396	203	0	173	78, 8	569	304	233	159
Orellana	Orellana	17	287	606	627	575	443	551	502	385	364	689	580	374	709	568	375	173	0	253	743	408	82, 2	333
Pastaza	Puyo	18	240	357	453	326	194	302	477	136	142	440	474	349	460	319	126	78, 8	253	0	492	300	311	82, 2
Santa Elena	Salinas	19	656	138	213	334	331	218	804	362	458	322	595	676	525	204	471	569	743	492	0	420	789	412
Santo Domingo	Santo Domingo	20	142	284	221	425	298	309	390	260	160	413	179	262	616	214	427	304	408	300	420	0	373	217
Sucumbíos	Nueva Loja	21	255	653	595	635	469	597	469	432	331	735	548	341	769	608	435	233	82, 2	311	789	373	0	392
Tungurahua	Pelileo	22	158	276	371	301	112	220	406	54, 5	60, 8	358	392	279	496	237	209	159	333	82, 2	412	217	392	0

Tabla A.2: *Grupos de la fase zonal del campeonato 2014*

Zona 1	*Grupo A:*	F.C. U.I.D.E, C.D. Caribe Junior, C.D. Teodoro Gómez de la Torre, Deportivo Oriental, C.D. Estrellas del Oriente
	Grupo B:	Anaconda F.C., C.D. Clan Juvenil, Atlético Tulcán, C.D. 2 de Marzo, C.S.C.D. Chicos Malos
Zona 2	*Grupo A:*	Pelileo S.C., C.D. Juventud Minera, C.D. Brasilia, Deportivo Sarayaku, C.D. Los Ases, C.D. New Star
	Grupo B:	C.D. Star Club, C.S.C.D. León Carr, C.S.C.D. Cumandá, Manchester F.C., C.S.C.D. Malta Shungo, Ñucanchik Pura S.C.
Zona 3	*Grupo A:*	C.S.C.D 5 de Julio, C.D. Esmeraldas Petrolero, C.D.S. Santa Rita, C.D. San Rafael, Sport Bilbao SV
	Grupo B:	C.D. Venecia, C.C.D. Águilas, Deportivo Quinindé, C.D. 3E, C.D. Ciudad de Pedernales
Zona 4	*Grupo A:*	Fuerza Amarilla S.C., Academia Alfaro Moreno, C.D. El Volante, C.D. Ciudadelas del Norte, C.D. Estrella Roja, Municipal Sucúa
	Grupo B:	Orense S.C., Gualaceo S.C., C.D. Italia, Rocafuerte F.C., Cañar F.C., L.D.J. Macas

Tabla A.3: *Solución obtenida zonificación equipos*

Grupo 1	CD. Clan Juvenil, CD. Oriental (Tulcán), CD. 2 de marzo, CSCD. Malta Shungo, Anaconda FC.
Grupo 2	UIDE FC., CA. Tulcán, CSDC. Esmeraldas Petrolero, CD. Teodoro Gómez, CD. New Star, CSCD. Chicos Malos
Grupo 3	CD. Academia Alfaro Moreno, CD. Estrella Roja, CD. Cañar FC., Orense SC., CD. Italia
Grupo 4	Rocafuerte FC., CD. Ciudades del Norte, Fuerza Amarilla SC., CDFE. El Volante, CD. Venecia, CDE. 3E
Grupo 5	CD. Ciudad de Pedernales, CD. Quinindé, CDEF. San Rafael, CD. Estrellas de Orellana, CD. Caribe Junior
Grupo 6	CSD. 5 de julio, CD. Juventud Minera, CDS. Santa Rita, CD. Sport Bilbao SV, CCD. Águilas
Grupo 7	Gualaceo SC., CD. Star Club, Manchester FC., Pelileo SC., CDF. Municipal Sucúa, CD. Sarayaku
Grupo 8	ÑucanchiAV Pura SC., CD. Los Ases, CD. Brasilia, CSCD. León Carr, LDJ Macas, CSCD. Cumanda

Tabla A.4: *Matriz de distancias problema Zonificación Equipos*

Equipo	Ciudad		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44
CD. Clan Juvenil	Sangolquí	1	0	26	400	400	250	344	426	427	397	217	346	346	267	267	181	181	79	79	484	484	297	202	140	128	622	622	359	355	537	537	123	163	181	139	347	370	181	119	284	284	221	221	252	252
UIDE FC.	Quito	2	26	0	419	419	269	363	446	447	376	237	365	365	265	265	200	200	99	99	503	503	316	222	137	125	641	641	378	374	656	656	142	182	200	158	366	389	184	121	287	287	240	240	255	255
CD. Academia Alfaro Moreno	Guayaquil	3	400	419	0	0	368	185	233	198	150	196	83	83	668	668	227	227	323	323	187	187	460	365	540	528	390	390	105	70	138	138	284	326	227	276	337	373	434	519	606	606	357	357	653	653
Rocafuerte FC.	Guayaquil	4	400	419	0	0	368	185	233	198	150	196	83	83	668	668	227	227	323	323	187	187	460	365	540	528	390	390	105	70	138	138	284	326	227	276	337	373	434	519	606	606	357	357	653	653
CD. Ciudad de Pedernales	Pedernales	5	250	269	368	368	0	183	581	547	338	423	432	432	516	516	386	386	285	285	535	535	182	139	388	376	738	738	339	336	391	391	127	99	386	345	553	576	430	367	533	533	426	426	501	501
CSD. 5 de julio	Portoviejo	6	344	363	185	185	183	0	414	379	303	343	264	264	610	610	413	413	312	312	367	367	367	279	482	470	571	571	220	233	213	213	221	240	413	371	579	602	530	461	627	627	453	453	595	595
Gualaceo SC.	Gualaceo	7	426	446	233	233	581	414	0	38	345	310	150	150	693	693	252	252	348	348	204	204	635	541	565	553	234	234	308	245	368	368	459	501	252	301	165	141	367	466	539	539	290	290	599	599
CD. Estrella Roja	Cuenca	8	427	447	198	198	547	379	38	0	292	311	150	150	693	693	252	252	349	349	170	170	601	507	566	554	200	200	274	211	334	334	425	467	252	301	200	177	402	501	575	575	326	326	635	635
CD. Juventud Minera	Echeandía	9	397	376	150	150	338	303	345	292	0	55	176	176	595	595	111	111	175	175	279	279	383	286	472	462	562	562	87	79	296	296	195	244	111	133	253	526	563	499	784	784	379	379	707	707
ÑucanchiAV Pura SC.	Guaranda	10	217	237	196	196	423	343	310	311	55	0	223	223	484	484	84	84	139	139	326	326	472	377	356	344	506	506	172	127	331	331	298	338	84	112	238	260	270	335	443	443	194	194	469	469
CD. Cañar FC.	La Troncal	11	346	365	83	83	432	264	150	150	176	223	0	0	612	612	171	171	268	268	138	138	486	391	485	473	342	342	158	96	218	218	309	352	171	220	281	290	378	463	551	551	302	302	597	597
CD. Ciudades del Norte	La Troncal	12	346	365	83	83	432	264	150	150	176	223	0	0	612	612	171	171	268	268	138	138	486	391	485	473	342	342	158	96	218	218	309	352	171	220	281	290	378	463	551	551	302	302	597	597
CA. Tulcán	Tulcán	13	267	265	668	668	516	610	693	693	595	484	612	612	0	0	448	448	347	347	751	751	374	457	130	141	889	889	626	623	804	804	390	430	448	406	601	624	398	336	502	502	477	477	469	469
CD. Oriental (Tulcán)	Tulcán	14	267	265	668	668	516	610	693	693	595	484	612	612	0	0	448	448	347	347	751	751	374	457	130	141	889	889	626	623	804	804	390	430	448	406	601	624	398	336	502	502	477	477	469	469
CD. Star Club	Riobamba	15	181	200	227	227	386	413	252	252	111	84	171	171	448	448	0	0	102	102	309	309	435	340	319	307	447	447	256	216	362	362	260	301	0	55	157	178	213	298	385	385	136	136	432	432
CD. Los Ases	Riobamba	16	181	200	227	227	386	413	252	252	111	84	171	171	448	448	0	0	102	102	309	309	435	340	319	307	447	447	256	216	362	362	260	301	0	55	157	178	213	298	385	385	136	136	432	432
CD. Brasilia	Latacunga	17	79	99	323	323	285	312	348	349	175	139	268	268	347	347	102	102	0	0	406	406	335	240	219	207	544	544	282	278	458	458	160	201	102	61	269	292	219	198	364	364	142	142	331	331
Manchester FC.	Latacunga	18	79	99	323	323	285	312	348	349	175	139	268	268	347	347	102	102	0	0	406	406	335	240	219	207	544	544	282	278	458	458	160	201	102	61	269	292	219	198	364	364	142	142	331	331
Fuerza Amarilla SC.	Machala	19	484	503	187	187	535	367	204	170	279	326	138	138	751	751	309	309	406	406	0	0	590	495	623	611	237	237	262	199	322	322	413	456	309	358	368	344	516	602	689	689	440	440	735	735
Orense SC.	Machala	20	484	503	187	187	535	367	204	170	279	326	138	138	751	751	309	309	406	406	0	0	590	495	623	611	237	237	262	199	322	322	413	456	309	358	368	344	516	602	689	689	440	440	735	735
CSDC. Esmeraldas Petrolero	Esmeraldas	21	297	316	460	460	182	367	635	601	383	472	486	486	374	374	435	435	335	335	590	590	0	95	291	303	793	793	394	391	595	595	179	136	434	392	600	623	477	414	580	580	474	474	548	548
CD. Quinindé	Quinindé	22	202	222	365	365	139	279	541	507	286	377	391	391	457	457	340	340	240	240	495	495	95	0	341	329	698	698	300	296	500	500	85	41	339	297	505	528	382	320	485	485	379	379	453	453
CD. Teodoro Gómez	Ibarra	23	140	137	540	540	388	482	565	566	472	356	485	485	130	130	319	319	219	219	623	623	291	341	0	14	762	762	498	495	676	676	262	303	320	279	473	496	271	208	374	374	349	349	341	341
CD. 2 de marzo	Atuntaqui	24	128	125	528	528	376	470	553	554	462	344	473	473	141	141	307	307	207	207	611	611	303	329	14	0	750	750	486	483	664	664	250	291	308	267	461	484	259	196	362	362	337	337	330	330
CDFE. El Volante	Loja	25	622	641	390	390	738	571	234	200	562	506	342	342	889	889	447	447	544	544	237	237	793	698	762	750	0	0	465	402	525	525	616	658	448	496	334	311	536	635	709	709	460	460	769	769
CD. Italia	Loja	26	622	641	390	390	738	571	234	200	562	506	342	342	889	889	447	447	544	544	237	237	793	698	762	750	0	0	465	402	525	525	616	658	448	496	334	311	536	635	709	709	460	460	769	769
CDS. Santa Rita	Vinces	27	359	378	105	105	339	220	308	274	87	172	158	158	626	626	256	256	282	282	262	262	394	300	498	486	465	465	0	62	239	239	217	260	256	284	412	448	442	478	615	615	366	366	612	612
CD. Venecia	Babahoyo	28	355	374	70	70	336	233	245	211	79	127	96	96	623	623	216	216	278	278	199	199	391	296	495	483	402	402	62	0	204	204	214	256	216	237	349	385	396	474	568	568	319	319	608	608
CDE. 3E	Salinas	29	537	656	138	138	391	213	368	334	296	331	218	218	804	804	362	362	458	458	322	322	595	500	676	664	525	525	239	204	0	0	420	463	364	412	471	493	569	655	743	743	492	492	789	789
CD. Sport Bilbao SV	Salinas	30	537	656	138	138	391	213	368	334	296	331	218	218	804	804	362	362	458	458	322	322	595	500	676	664	525	525	239	204	0	0	420	463	364	412	471	493	569	655	743	743	492	492	789	789
CCD. Águilas	Santo Domingo	31	123	142	284	284	127	221	459	425	195	298	309	309	390	390	260	260	160	160	413	413	179	85	262	250	616	616	217	214	420	420	0	44	259	217	427	450	304	241	408	408	300	300	373	373
CDEF. San Rafael	La Concordia	32	163	182	326	326	99	240	501	467	244	338	352	352	430	430	301	301	201	201	456	456	136	41	303	291	658	658	260	256	463	463	44	0	300	258	467	490	344	281	448	448	341	341	414	414
Pelileo SC.	Riobamba	33	181	200	227	227	386	413	252	252	111	84	171	171	448	448	0	0	102	102	309	309	434	339	320	308	448	448	256	216	364	364	259	300	0	55	159	181	213	299	387	387	136	136	433	433
CSCD. León Carr	Pelileo	34	139	158	276	276	345	371	301	301	133	112	220	220	406	406	55	55	61	61	358	358	392	297	279	267	496	496	284	237	412	412	217	258	55	0	209	231	159	258	333	333	82	82	392	392
LDJ Macas	Macas	35	347	366	337	337	553	579	165	200	253	238	281	281	601	601	157	157	269	269	368	368	600	505	473	461	334	334	412	349	471	471	427	467	159	209	0	24	203	302	375	375	126	126	435	435
CDF. Municipal Sucúa	Sucúa	36	370	389	373	373	576	602	141	177	526	260	290	290	624	624	178	178	292	292	344	344	623	528	496	484	311	311	448	385	493	493	450	490	181	231	24	0	225	324	398	398	149	149	458	458
CSCD. Malta Shungo	Tena	37	181	184	434	434	430	530	367	402	563	270	378	378	398	398	213	213	219	219	516	516	477	382	271	259	536	536	442	396	569	569	304	344	213	159	203	225	0	99	173	173	79	79	233	233
CD. New Star	El Chaco	38	119	121	519	519	367	461	466	501	499	335	463	463	336	336	298	298	198	198	602	602	414	320	208	196	635	635	478	474	655	655	241	281	299	258	302	324	99	0	214	214	178	178	134	134
Anaconda FC.	Orellana	39	284	287	606	606	533	627	539	575	784	443	551	551	502	502	385	385	364	364	689	689	580	485	374	362	709	709	615	568	743	743	408	448	387	333	375	398	173	214	0	0	253	253	82	82
CD. Estrellas de Orellana	Orellana	40	284	287	606	606	533	627	539	575	784	443	551	551	502	502	385	385	364	364	689	689	580	485	374	362	709	709	615	568	743	743	408	448	387	333	375	398	173	214	0	0	253	253	82	82
CSCD. Cumanda	Puyo	41	221	240	357	357	426	453	290	326	379	194	302	302	477	477	136	136	142	142	440	440	474	379	349	337	460	460	366	319	492	492	300	341	136	82	126	149	79	178	253	253	0	0	311	311
CD. SarayaAVu	Puyo	42	221	240	357	357	426	453	290	326	379	194	302	302	477	477	136	136	142	142	440	440	474	379	349	337	460	460	366	319	492	492	300	341	136	82	126	149	79	178	253	253	0	0	311	311
CD. Caribe Junior	Nueva Loja	43	252	255	653	653	501	595	599	635	707	469	597	597	469	469	432	432	331	331	735	735	548	453	341	330	769	769	612	608	789	789	373	414	433	392	435	458	233	134	82	82	311	311	0	0
CSCD. Chicos Malos	Nueva Loja	44	252	255	653	653	501	595	599	635	707	469	597	597	469	469	432	432	331	331	735	735	548	453	341	330	769	769	612	608	789	789	373	414	433	392	435	458	233	134	82	82	311	311	0	0

ANEXO B

Simulación

B.1 Simulación de campeonatos

A continuación se presentan los campeonatos simulados para obtener los datos para la generación del ranking de los equipos:

Campeonato 2

En el segundo campeonato simulado los equipos campeones (rojo) y subcampeones (verde) de cada sección son:

Tabla B.1: *Campeones y Vicecampeones de cada Sección*

Posición	**Equipo**
Primero :	0103, 0204, 0306, 0406, 0503, 0607, 0705, 0808, 0903, 1005, 1103
	1201, 1315, 1406, 1502, 1601, 1703, 1813, 1905, 2003, 2102, 2202
Segundo :	0111, 0203, 0307, 0408, 0501, 0605, 0702, 0806, 0902, 1004, 1102
	1202, 1310, 1401, 1503, 1605, 1707, 1806, 1904, 2005, 2105, 2204

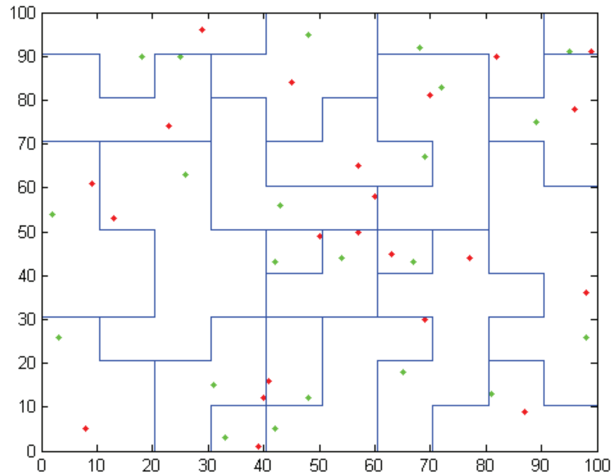


Figura B.1: *Equipos participantes de la fase zonal*

Mediante la heurística Loli se generan los grupos para la segunda fase del campeonato, los cuales son:

Tabla B.2: *Grupos Segunda Fase*

Grupos	**Equipos**
Grupo 1 :	0103, 0501, 0607, 1005, 1401
Grupo 2 :	0111, 0408, 0503, 0605, 1406
Grupo 3 :	0406, 1102, 1202, 1703, 2204
Grupo 4 :	1503, 1601, 2003, 2105, 2202
Grupo 5 :	0204, 0702, 0808, 0903, 1605, 1806
Grupo 6 :	0203, 0705, 0902, 1004, 1502, 1813
Grupo 7 :	0306, 1103, 1201, 1310, 1707, 1904
Grupo 8 :	0307, 0806, 1315, 1905, 2005, 2102

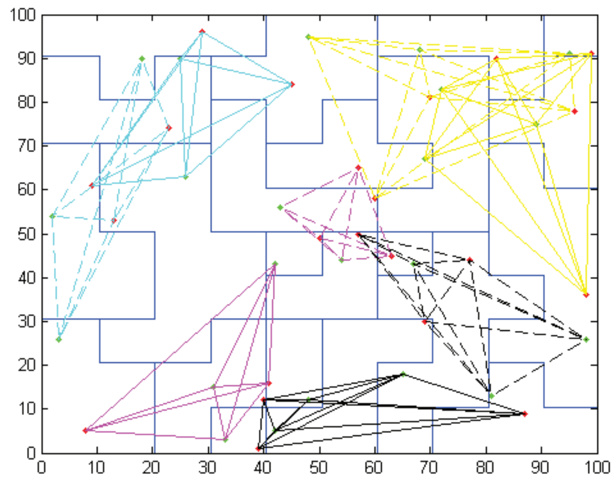


Figura B.2: *Grupos*

Los equipos campeones de cada grupo y los cuatro mejores segundos juegan la tercera fase. Esta fase consiste en dos hexagonales, conformados por cuatro campeones y dos subcampeones agrupados mediante un sorteo. Los hexagonales quedaron conformados de la siguiente manera:

Tabla B.3: *Hexagonales*

Hexagonal	**Equipos**
$Hexagonal1:$	0902, 0503, 0307, 1703, 0111, 0808
$Hexagonal2:$	1904, 2003, 1605, 0607, 2204, 1503

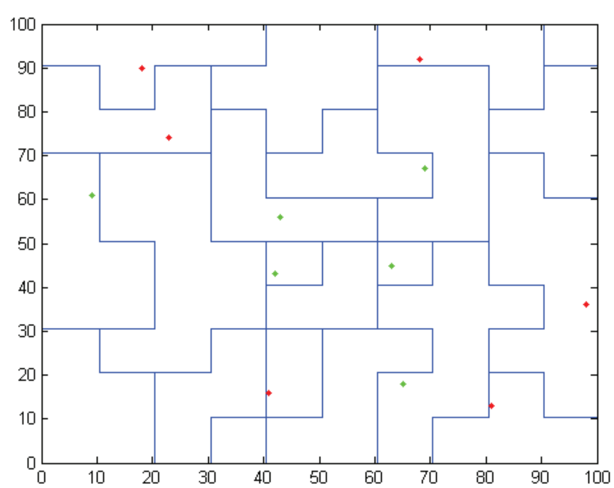


Figura B.3: *Hexagonales*

Finalmente, el primero y segundo de cada hexagonal juegan la fase final, obteniéndose el siguiente resultado:

Tabla B.4: *Fase Final*

Primero	**Segundo**	**Tercero**	**Cuarto**
1703	0607	0503	1503

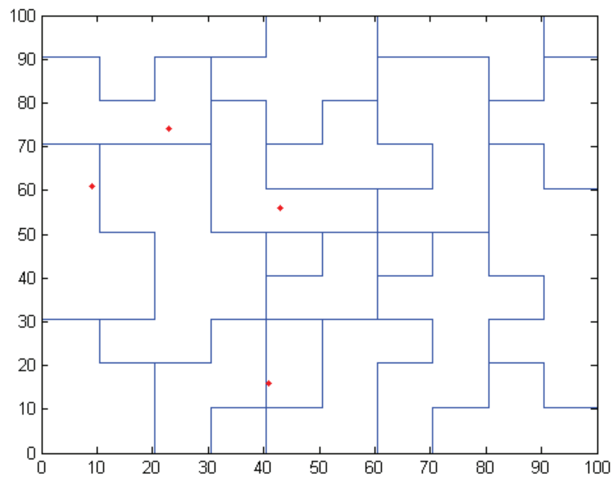


Figura B.4: *Final*

Campeonato 3

En el tercer campeonato simulado los equipos campeones (rojo) y subcampeones (verde) de cada sección son:

Tabla B.5: *Campeones y Vicecampeones de cada Sección*

Posición	**Equipo**
Primero :	0103, 0204, 0307, 0409, 0512, 0605, 0701, 0811, 0903, 1004, 1103
	1208, 1311, 1404, 1502, 1601, 1703, 1803, 1914, 2003, 2108, 2204
Segundo :	0111, 0203, 0306, 0401, 0507, 0615, 0705, 0808, 0905, 1008, 1102
	1202, 1304, 1412, 1503, 1608, 1702, 1812, 1907, 2005, 2107, 2202

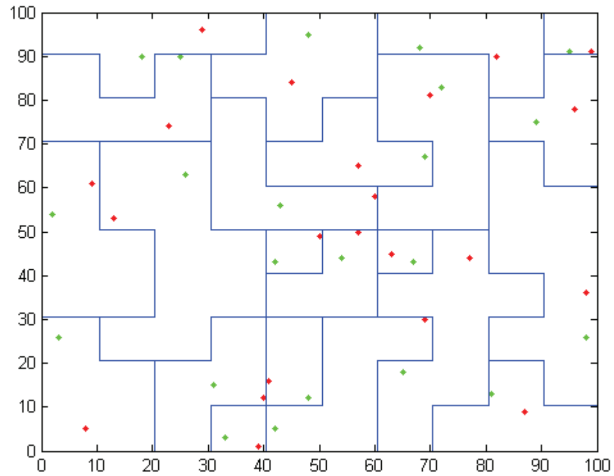


Figura B.5: *Equipos participantes de la fase zonal*

Mediante la heurística Loli se generan los grupos para la segunda fase del campeonato, los cuales son:

Tabla B.6: *Grupos Segunda Fase*

Grupos	**Equipos**
Grupo 1 :	0605, 0103, 1404, 2204, 0401
Grupo 2 :	0615, 1102, 1311, 1412, 0409
Grupo 3 :	1703, 0307, 1103, 1304, 1202
Grupo 4 :	1702, 0306, 0811, 1907, 1208
Grupo 5 :	0512, 0203, 0701, 0903, 1608, 1008
Grupo 6 :	0507, 0111, 0204, 0705, 0905, 1004
Grupo 7 :	1502, 0808, 1812, 1914, 2005, 2108
Grupo 8 :	1503, 1601, 1803, 2003, 2202, 2107

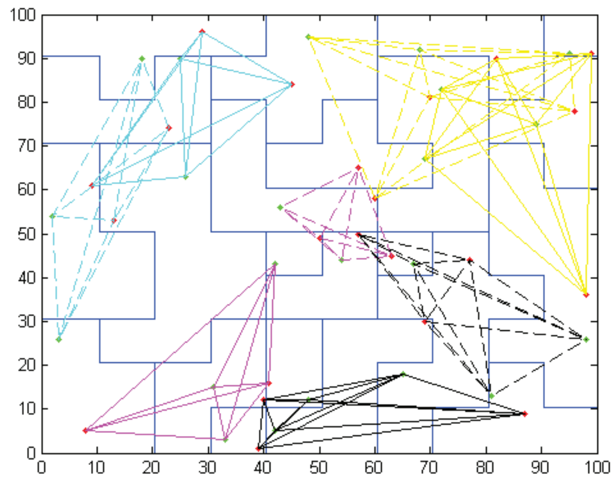


Figura B.6: *Grupos*

Los equipos campeones de cada grupo y los cuatro mejores segundos juegan la tercera fase. Esta fase consiste en dos hexagonales, conformados por cuatro campeones y dos subcampeones agrupados mediante un sorteo. Los hexagonales quedaron conformados de la siguiente manera:

Tabla B.7: *Hexagonales*

Hexagonal	**Equipos**
$Hexagonal1:$	0605, 1812, 1208, 0903, 0111, 1502
$Hexagonal2:$	0507, 0409, 2003, 1703, 2202, 1608

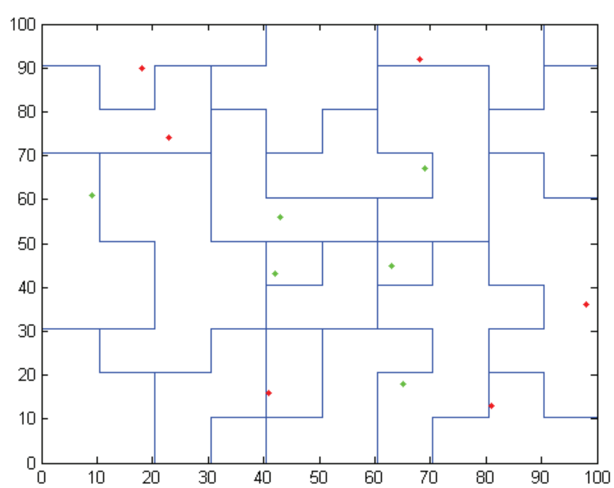


Figura B.7: *Hexagonales*

Finalmente, el primero y segundo de cada hexagonal juegan la fase final, obteniéndose el siguiente resultado:

Tabla B.8: *Fase Final*

Primero	Segundo	Tercero	Cuarto
0605	1502	1703	0409

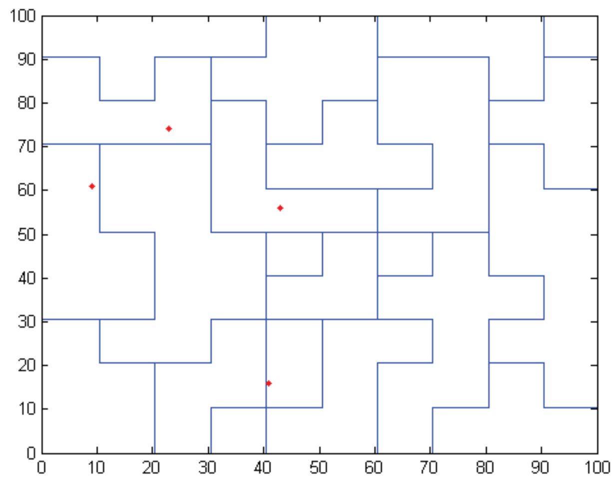


Figura B.8: *Final*

Campeonato 4

En el cuarto campeonato simulado los equipos campeones (rojo) y subcampeones (verde) de cada sección son:

Tabla B.9: *Campeones y Vicecampeones de cada Sección*

Posición	Equipo
Primero :	0110, 0204, 0302, 0409, 0503, 0609, 0701, 0812, 0902, 1004, 1103
	1207, 1304, 1404, 1503, 1601, 1703, 1814, 1914, 2001, 2105, 2204
Segundo :	0102, 0203, 0307, 0407, 0505, 0605, 0705, 0804, 0903, 1010, 1104
	1206, 1310, 1406, 1501, 1605, 1702, 1807, 1917, 2002, 2107, 2202

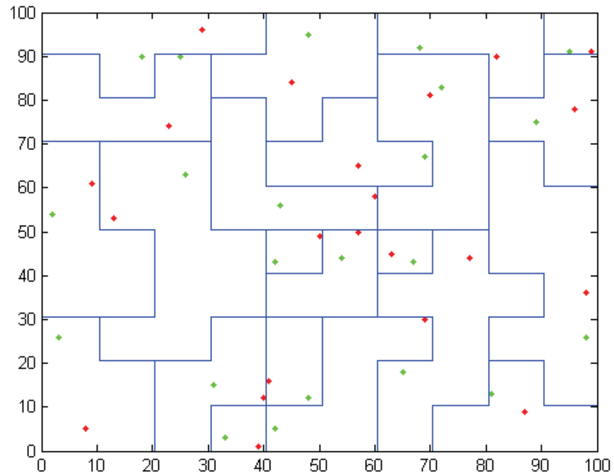


Figura B.9: *Equipos participantes de la fase zonal*

Mediante la heurística Loli se generan los grupos para la segunda fase del campeonato, los cuales son:

Tabla B.10: *Grupos Segunda Fase*

Grupos	**Equipos**
Grupo 1 :	0409, 0302, 0812, 1310, 1104
Grupo 2 :	0407, 1206, 2002, 2204, 2107
Grupo 3 :	0609, 0110, 0505, 1601, 1404
Grupo 4 :	0605, 0102, 0503, 2202, 1406
Grupo 5 :	1503, 0204, 0705, 0903, 1605, 1004
Grupo 6 :	1501, 0203, 0701, 0902, 1814, 1010
Grupo 7 :	1703, 0307, 1207, 1304, 1917, 1103
Grupo 8 :	1702, 0804, 1807, 1914, 2001, 2105

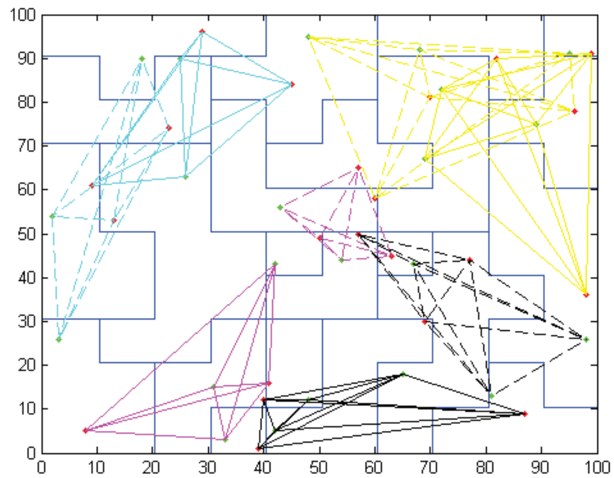


Figura B.10: *Grupos*

Los equipos campeones de cada grupo y los cuatro mejores segundos juegan la tercera fase. Esta fase consiste en dos hexagonales, conformados por cuatro campeones y dos subcampeones agrupados mediante un sorteo. Los hexagonales quedaron conformados de la siguiente manera:

Tabla B.11: *Hexagonales*

Hexagonal	**Equipos**
$Hexagonal1:$	0110, 0302, 1807, 0503, 0407, 1501
$Hexagonal2:$	0204, 1703, 0902, 2204, 2001, 1207

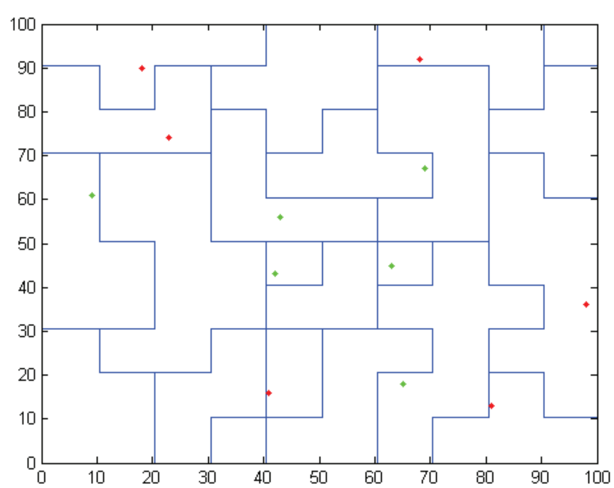


Figura B.11: *Hexagonales*

Finalmente, el primero y segundo de cada hexagonal juegan la fase final, obteniéndose el siguiente resultado:

Tabla B.12: *Fase Final*

Primero	**Segundo**	**Tercero**	**Cuarto**
1703	2204	0407	1807

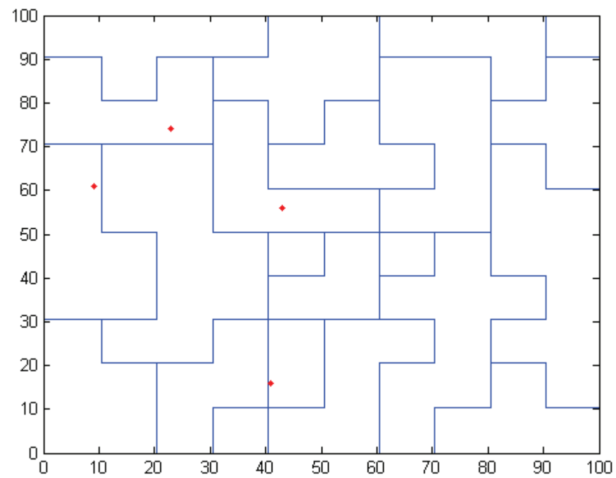


Figura B.12: *Final*

Tabla B.13: *Información general de los equipos provincia 01*

				Secciones		Bombos		
Equipo	*Puntaje*	x	y	N	*Distancia*	N	*Grupo*	*Distancia*
0101	98, 09	11	81	01	191, 99	14	18	233, 21
0102	163, 67	11	95	01	163, 83	6	22	154, 16
0103	198, 16	29	96	01	103, 35	4	18	111, 91
0104	71, 53	26	95	01	90, 2	17	14	330, 63
0105	118, 88	39	93	01	176, 4	11	18	113, 74
0106	20, 09	26	99	01	112, 11	23	22	164, 79
0107	65, 41	25	94	01	88, 93	18	18	119, 72
0108	115, 3	26	94	01	88, 8	11	22	136, 22
0109	71, 5	17	82	01	154	18	22	113, 01
0110	252, 74	32	92	01	118, 69	2	18	102, 29
0111	236, 88	18	90	01	114, 43	3	22	111, 42

Tabla B.14: *Información general de los equipos provincia 02*

				Secciones		Bombos		
Equipo	*Puntaje*	*x*	*y*	*N*	*Distancia*	*N*	*Grupo*	*Distancia*
0201	123, 22	92	91	02	96, 57	10	13	81, 23
0202	65, 78	96	93	02	94, 69	18	13	89, 84
0203	172, 61	95	91	02	91, 53	5	13	78, 31
0204	278, 89	99	91	02	97, 34	2	13	94, 2

Tabla B.15: *Información general de los equipos provincia 03*

				Secciones		Bombos		
Equipo	*Puntaje*	*x*	*y*	*N*	*Distancia*	*N*	*Grupo*	*Distancia*
0301	46, 98	88	9	03	331, 51	21	17	96, 07
0302	214, 25	82	7	03	37, 42	3	12	230, 95
0303	105, 87	83	12	03	28, 61	13	17	83, 23
0304	52, 98	94	10	03	50, 67	20	21	285, 67
0305	115, 48	88	13	03	31, 42	11	17	84, 07
0306	203, 27	87	9	03	28, 79	4	17	93, 74
0307	258, 18	81	13	03	35, 87	2	17	87, 2

Tabla B.16: *Información general de los equipos provincia 04*

				Secciones		Bombos		
Equipo	*Puntaje*	x	y	N	*Distancia*	N	*Grupo*	*Distancia*
0401	134, 49	3	4	04	222, 9	9	5	174, 9
0402	60, 68	3	16	04	154, 82	19	5	128, 51
0403	82, 26	16	14	04	161, 21	16	1	233, 11
0404	72, 53	5	24	04	153, 03	17	10	179, 37
0405	52, 31	7	19	04	132, 62	20	5	115, 08
0406	130, 36	8	5	04	194, 3	9	10	244, 5
0407	303, 67	17	18	04	164, 97	1	10	157, 68
0408	85, 41	3	26	04	176, 71	16	5	144, 08
0409	331, 85	19	7	04	221, 79	1	5	169, 51
0410	103, 57	12	18	04	135, 06	13	5	118, 25
0411	57, 44	10	24	04	147, 99	19	1	308, 64
0412	166, 25	9	4	04	203, 46	6	5	162, 47
0413	125, 65	6	29	04	188, 41	10	5	150, 15
0414	55, 24	9	30	04	197, 12	19	10	168, 47

Tabla B.17: *Información general de los equipos provincia 05*

				Secciones		Bombos		
Equipo	*Puntaje*	x	y	N	*Distancia*	N	*Grupo*	*Distancia*
0501	119, 03	25	90	05	146, 6	11	9	226, 15
0502	131, 02	26	80	05	111, 03	9	18	157, 72
0503	318, 89	23	74	05	126, 26	1	7	167, 14
0504	95, 45	10	79	05	138, 35	14	22	147, 74
0505	168, 71	23	89	05	132, 79	5	18	129, 16
0506	66, 55	17	77	05	108, 46	18	9	159, 19
0507	186, 72	5	82	05	185, 35	5	22	170, 51
0508	47, 46	30	77	05	147, 48	21	22	157, 97
0509	127, 43	17	80	05	101, 75	9	7	177, 34
0510	72, 16	10	77	05	143, 18	17	7	154, 99
0511	28, 3	28	81	05	123, 26	22	9	166, 83
0512	135, 15	22	84	05	103, 87	8	22	108, 61

Tabla B.18: *Información general de los equipos provincia 06*

				Secciones		Bombos		
Equipo	*Puntaje*	*x*	*y*	*N*	*Distancia*	*N*	*Grupo*	*Distancia*
0601	120, 39	8	48	06	163, 53	11	3	80, 78
0602	81, 53	2	42	06	201, 02	16	10	255, 01
0603	24, 79	9	31	06	285, 01	23	5	162, 39
0604	134, 96	13	38	06	220, 18	8	3	106, 48
0605	361, 26	2	54	06	194, 86	1	3	130, 92
0606	123, 69	4	34	06	257, 86	10	10	200, 54
0607	184, 64	9	61	06	250, 06	5	7	111, 46
0608	48, 38	6	46	06	163, 91	20	3	86, 06
0609	188, 83	1	60	06	250, 54	5	7	146, 82
0610	92, 51	10	68	06	340, 54	15	7	113, 89
0611	133, 53	19	45	06	243	9	6	202, 55
0612	57, 83	12	43	06	185, 97	19	3	84, 61
0613	144, 18	2	57	06	215, 34	7	7	149, 31
0614	95, 82	16	35	06	267, 46	14	3	132, 36
0615	134, 71	3	54	06	189, 63	8	9	262, 93
0616	22, 25	6	47	06	162, 53	23	3	85, 44

Tabla B.19: *Información general de los equipos provincia 07*

				Secciones		Bombos		
Equipo	*Puntaje*	*x*	*y*	*N*	*Distancia*	*N*	*Grupo*	*Distancia*
0701	197, 5	91	82	07	36, 92	4	13	91, 65
0702	124, 17	89	75	07	45, 77	10	19	246, 04
0703	95	85	75	07	56, 64	14	13	147, 22
0704	25, 33	98	85	07	48, 36	23	13	88, 29
0705	240, 17	96	78	07	41, 76	3	21	433, 4
0706	92, 33	95	87	07	48, 1	15	13	74, 72

Tabla B.20: *Información general de los equipos provincia 08*

				Secciones		Bombos		
Equipo	*Puntaje*	*x*	*y*	*N*	*Distancia*	*N*	*Grupo*	*Distancia*
0801	99, 43	98	27	08	141, 27	13	19	334, 28
0802	54, 43	90	70	08	461, 78	19	13	168, 21
0803	94, 7	97	25	08	145, 67	14	21	187, 74
0804	145, 91	81	47	08	277, 89	7	19	193, 22
0805	27, 84	97	28	08	137, 72	22	21	175, 29
0806	148, 82	98	26	08	143, 96	7	17	179, 03
0807	91, 33	92	15	08	217, 5	15	17	103, 22
0808	198, 36	98	36	08	158, 36	4	21	169, 93
0809	71, 59	98	36	08	158, 36	17	21	169, 93
0810	51, 44	94	35	08	151, 78	20	19	264, 08
0811	135, 72	84	22	08	205, 33	8	17	108, 71
0812	197, 48	91	18	08	192, 71	4	11	230, 86

Tabla B.21: *Información general de los equipos provincia 09*

				Secciones		Bombos		
Equipo	*Puntaje*	*x*	*y*	*N*	*Distancia*	*N*	*Grupo*	*Distancia*
0901	135, 28	88	95	09	67, 15	8	13	117, 09
0902	313, 25	68	92	09	61, 42	1	8	143, 26
0903	251, 33	82	90	09	51, 48	2	20	181, 63
0904	22, 92	87	81	09	73, 12	23	20	189, 82
0905	129, 17	63	93	09	76, 25	9	20	190, 95

Tabla B.22: *Información general de los equipos provincia 10*

				Secciones		Bombos		
Equipo	*Puntaje*	*x*	*y*	*N*	*Distancia*	*N*	*Grupo*	*Distancia*
1001	80, 2	59	91	10	150, 54	17	8	105, 85
1002	53, 42	42	97	10	155, 69	19	18	132, 13
1003	131, 73	50	95	10	113, 11	9	8	150, 2
1004	212, 38	48	95	10	112, 41	3	14	230, 96
1005	136, 24	45	84	10	156, 39	8	14	171, 97
1006	25, 86	47	95	10	114, 89	22	18	164, 23
1007	84, 17	47	81	10	174, 59	16	14	162, 79
1008	107, 69	51	91	10	111, 54	12	8	134
1009	81, 36	41	96	10	160, 12	16	18	123, 86
1010	187, 66	58	90	10	144, 83	5	8	105, 82
1011	125, 86	59	95	10	159, 68	10	14	257, 51
1012	113, 44	44	79	10	205, 5	12	14	166, 52
1013	116, 53	60	92	10	160, 22	11	8	109, 73
1014	44, 99	46	97	10	129, 86	21	8	187, 5

Tabla B.23: *Información general de los equipos provincia 11*

				Secciones		Bombos		
Equipo	*Puntaje*	*x*	*y*	*N*	*Distancia*	*N*	*Grupo*	*Distancia*
1101	35	36	3	11	8, 84	21	1	161, 29
1102	133, 03	33	3	11	14, 42	9	1	163, 58
1103	270, 61	39	1	11	13, 09	2	15	130, 99
1104	154, 94	38	4	11	10, 5	6	1	159, 95

Tabla B.24: *Información general de los equipos provincia 12*

				Secciones		Bombos		
Equipo	*Puntaje*	x	y	N	*Distancia*	N	*Grupo*	*Distancia*
1201	113, 07	40	12	12	85, 5	12	1	151, 46
1202	167, 23	31	15	12	64, 45	6	10	197, 83
1203	103, 63	23	3	12	143, 15	13	1	203, 92
1204	31, 34	33	27	12	85, 64	22	10	200, 79
1205	43, 54	33	22	12	61, 35	21	1	184, 15
1206	166, 34	31	23	12	67, 47	6	2	209, 32
1207	228, 75	40	18	12	74	3	10	247, 33
1208	207, 27	34	17	12	57, 16	3	5	251, 33

Tabla B.25: *Información general de los equipos provincia 13*

				Secciones		Bombos		
Equipo	*Puntaje*	x	y	N	*Distancia*	N	*Grupo*	*Distancia*
1301	95, 81	60	9	13	192, 31	14	15	152, 64
1302	33, 64	61	22	13	196, 91	22	11	152, 97
1303	144, 76	52	25	13	216, 07	7	2	171, 99
1304	184, 74	48	8	13	188, 6	5	15	80, 07
1305	79, 62	42	7	13	237, 62	17	15	90, 85
1306	123, 02	53	8	13	171, 83	10	1	237, 34
1307	76, 33	66	25	13	254, 77	17	17	215, 2
1308	17, 38	56	14	13	155, 67	23	2	250, 06
1309	70, 21	58	23	13	191, 84	18	12	159, 33
1310	214, 07	42	5	13	247, 85	3	15	94, 84
1311	143, 54	42	1	13	282, 11	7	15	116, 18
1312	137, 21	59	16	13	166, 16	8	12	154, 01
1313	52, 71	53	18	13	164, 59	20	15	132, 52
1314	117, 81	53	8	13	171, 83	11	15	99, 49
1315	132, 5	69	30	13	325, 28	9	21	255, 6

Tabla B.26: *Información general de los equipos provincia 14*

				Secciones		Bombos		
Equipo	*Puntaje*	*x*	*y*	*N*	*Distancia*	*N*	*Grupo*	*Distancia*
1401	145,03	26	63	14	296,81	7	9	140,78
1402	99,01	22	54	14	226,24	13	7	165,96
1403	55,38	19	65	14	309,03	19	6	232,86
1404	202,51	18	69	14	373,44	4	9	139,26
1405	81,64	14	58	14	284,15	16	3	134,47
1406	193,36	13	53	14	290,61	4	3	100,63
1407	120,94	29	52	14	255,54	10	6	151,93
1408	92,19	16	65	14	324,3	15	6	249,48
1409	51,7	19	57	14	240,46	20	9	166,86
1410	37,31	15	62	14	300,15	21	7	111,94
1411	66,32	37	40	14	414,45	18	2	156,88
1412	151,87	22	41	14	321,02	6	3	135,32
1413	95,03	29	49	14	264,37	14	6	153,91
1414	156,39	26	33	14	430,57	6	6	248,84
1415	112,43	26	50	14	241,87	12	6	156,04
1416	11,2	15	51	14	274,67	23	7	158,86
1417	94,82	24	55	14	228,52	14	9	175,76
1418	47,89	28	58	14	264,76	20	6	170,29
1419	99,65	25	23	14	599,29	13	10	159,98
1420	102,51	38	43	14	401,4	13	2	165,67

Tabla B.27: *Información general de los equipos provincia 15*

				Secciones		Bombos		
Equipo	*Puntaje*	*x*	*y*	*N*	*Distancia*	*N*	*Grupo*	*Distancia*
1501	311,4	39	70	15	98,68	1	9	192,25
1502	258,36	60	58	15	169,87	2	16	145,45
1503	327,06	43	56	15	111,88	1	6	212,18
1504	51,07	37	74	15	107,73	20	14	208,46
1505	94,26	36	54	15	127,65	14	16	202,32
1506	80,45	34	78	15	130,32	16	22	177,26
1507	83,24	31	74	15	124,31	16	9	149,44
1508	52,77	51	53	15	139,15	20	16	126

Tabla B.28: *Información general de los equipos provincia 16*

				Secciones		Bombos		
Equipo	*Puntaje*	*x*	*y*	*N*	*Distancia*	*N*	*Grupo*	*Distancia*
1601	270,72	57	65	16	78,13	2	14	215,94
1602	92,59	54	67	16	86,59	15	8	248,58
1603	128,91	52	75	16	130,3	9	16	240,87
1604	47,22	62	65	16	76,9	21	20	210,34
1605	252,06	69	67	16	105,21	2	19	207,85
1606	103,93	47	64	16	132,52	13	14	216,83
1607	83,44	69	64	16	105,14	16	4	185,52
1608	166,83	65	68	16	86,74	6	14	240,46
1609	78	52	64	16	97,75	17	16	161,69
1610	28,33	67	62	16	99,82	22	14	281,14

Tabla B.29: *Información general de los equipos provincia 17*

				Secciones		Bombos		
Equipo	*Puntaje*	*x*	*y*	*N*	*Distancia*	*N*	*Grupo*	*Distancia*
1701	29,84	48	13	17	40,51	22	15	85,52
1702	194,62	50	25	17	69,4	4	1	252,3
1703	672	41	16	17	42,86	1	1	162,13
1704	67,1	43	16	17	36,31	18	15	113,72
1705	106,9	46	14	17	35,61	12	2	217,92
1706	120,52	42	23	17	56,43	11	2	161,38
1707	106,93	48	12	17	43,98	12	15	81,76

Tabla B.30: *Información general de los equipos provincia 18*

				Secciones		Bombos		
Equipo	*Puntaje*	*x*	*y*	*N*	*Distancia*	*N*	*Grupo*	*Distancia*
1801	107,72	73	79	18	218,81	12	20	106,93
1802	98,84	79	69	18	256,37	13	20	173,06
1803	160,13	72	76	18	204,79	6	20	113,35
1804	22,35	71	64	18	242,06	23	19	193,33
1805	89,4	71	84	18	255,72	15	20	112,27
1806	152,44	72	83	18	246,61	6	8	171,68
1807	355,24	65	54	18	361,04	1	4	137,09
1808	69,03	64	75	18	234,57	18	20	140,56
1809	82,81	80	75	18	262,99	16	19	225,06
1810	135,01	80	56	18	363,25	8	19	175,16
1811	77,4	65	79	18	236,94	17	8	151,68
1812	200,55	73	53	18	362,57	4	4	137,28
1813	124,8	70	81	18	225,58	10	20	105,82
1814	188,43	66	86	18	291,85	5	20	133
1815	35,78	66	86	18	291,85	21	8	125,6
1816	87,84	64	51	18	406,89	15	12	307,11
1817	62,01	69	73	18	205,39	19	19	234,36
1818	8,93	71	62	18	257,72	23	4	172,55

Tabla B.31: *Información general de los equipos provincia 19*

				Secciones		Bombos		
Equipo	*Puntaje*	*x*	*y*	*N*	*Distancia*	*N*	*Grupo*	*Distancia*
1901	54,86	71	27	19	247,9	19	11	118,07
1902	28,1	80	14	19	333,66	22	17	91,54
1903	24,16	67	17	19	303,23	23	12	129,45
1904	175,39	65	18	19	312,75	5	12	128,31
1905	149,78	77	44	19	357,67	7	21	208,63
1906	125,14	74	11	19	349,8	10	12	163,87
1907	127,23	90	34	19	354,5	10	21	159,44
1908	94,19	80	25	19	253,71	14	11	139,37
1909	86,38	81	35	19	271,33	15	11	164,9
1910	138,37	62	31	19	340,7	8	11	142,71
1911	102,47	69	39	19	329,17	13	4	144,55
1912	52,81	85	35	19	300,35	20	4	217,58
1913	93,39	73	11	19	350,23	15	12	160,09
1914	227,57	90	40	19	396,07	3	19	227,28
1915	119,85	81	36	19	277,88	11	4	189,8
1916	78,48	77	43	19	343,6	17	21	205,2
1917	184,64	67	20	19	281,83	5	11	139,03
1918	39,99	66	19	19	295,13	21	12	128,22
1919	120,17	78	22	19	255,14	11	11	137,63

Tabla B.32: *Información general de los equipos provincia 20*

				Secciones		Bombos		
Equipo	*Puntaje*	*x*	*y*	*N*	*Distancia*	*N*	*Grupo*	*Distancia*
2001	296,08	67	43	20	20,09	2	11	189,05
2002	147,5	61	48	20	19,23	7	4	141,59
2003	232,33	63	45	20	16,16	3	16	158,22
2004	26,25	61	48	20	19,23	22	16	138,97
2005	137	67	43	20	20,09	8	4	130,4

Tabla B.33: *Información general de los equipos provincia 21*

				Secciones		Bombos		
Equipo	*Puntaje*	*x*	*y*	*N*	*Distancia*	*N*	*Grupo*	*Distancia*
2101	58, 1	48	39	21	57, 37	19	4	243, 08
2102	145, 15	57	50	21	104, 37	7	16	124, 46
2103	89, 26	45	38	21	66, 59	15	2	135, 45
2104	64, 14	52	33	21	65, 06	18	11	210, 42
2105	236, 17	54	44	21	68, 28	3	6	282, 73
2106	28, 27	58	38	21	70, 43	22	6	333, 47
2107	199, 94	45	37	21	67, 33	4	2	133, 7
2108	143, 13	56	31	21	80, 81	7	16	229, 26

Tabla B.34: *Información general de los equipos provincia 22*

				Secciones		Bombos		
Equipo	*Puntaje*	*x*	*y*	*N*	*Distancia*	*N*	*Grupo*	*Distancia*
2201	43, 19	49	48	22	18, 08	21	2	206, 39
2202	294, 47	50	49	22	20, 85	2	12	322, 39
2203	63, 47	42	44	22	18, 5	18	16	177, 83
2204	521, 78	42	43	22	19, 6	1	2	155, 87

Tabla B.35: *Resumen Información Secciones*

		Peso			Distancia		
Secciones	Cardinalidad	Promedio	Mínimo	Máximo	Promedio	Mínimo	Máximo
01	11	$128,39$	$20,09$	$252,74$	$127,52$	$88,8$	$191,99$
02	4	$160,13$	$65,78$	$278,89$	$95,03$	$91,53$	$97,34$
03	7	$142,43$	$46,98$	$258,18$	$77,76$	$28,61$	$331,51$
04	14	$125,84$	$52,31$	$331,85$	$175,31$	$132,62$	$222,9$
05	12	$124,74$	$28,3$	$318,89$	$130,7$	$101,75$	$185,35$
06	16	$121,83$	$22,25$	$361,26$	$224,47$	$162,53$	$340,54$
07	6	$129,08$	$25,33$	$240,17$	$46,26$	$36,92$	$56,64$
08	12	$109,75$	$27,84$	$198,36$	$199,36$	$137,72$	$461,78$
09	5	$170,39$	$22,92$	$313,25$	$65,88$	$51,48$	$76,25$
10	14	$107,25$	$25,86$	$212,38$	$146,38$	$111,54$	$205,5$
11	4	$148,4$	35	$270,61$	$11,71$	$8,84$	$14,42$
12	8	$132,65$	$31,34$	$228,75$	$79,84$	$57,16$	$143,15$
13	15	$108,22$	$17,38$	$214,07$	$210,9$	$155,67$	$325,28$
14	20	$100,86$	$11,2$	$202,51$	$317,08$	$226,24$	$599,29$
15	8	$157,33$	$51,07$	$327,06$	$126,2$	$98,68$	$169,87$
16	10	$125,2$	$28,33$	$270,72$	$99,91$	$76,9$	$132,52$
17	7	$185,42$	$29,84$	672	$46,44$	$35,61$	$69,4$
18	18	$114,37$	$8,93$	$355,24$	$273,61$	$204,79$	$406,89$
19	19	$106,47$	$24,16$	$227,57$	$313,4$	$247,9$	$396,07$
20	5	$167,83$	$26,25$	$296,08$	$18,96$	$16,16$	$20,09$
21	8	$120,52$	$28,27$	$236,17$	$72,53$	$57,37$	$104,37$
22	4	$230,73$	$43,19$	$521,78$	$19,26$	$18,08$	$20,85$

Tabla B.36: *Resumen Información Bombos*

		Peso			Distancia		
Grupos	Cardinalidad	Promedio	Mínimo	Máximo	Promedio	Mínimo	Máximo
1	11	155,69	35	672	201,62	151,46	308,64
2	11	143,54	17,38	521,78	178,6	133,7	250,06
3	10	126,78	22,25	361,26	107,71	80,78	135,32
4	10	126,59	8,93	355,24	169,94	130,4	243,08
5	10	129,23	24,79	331,85	157,67	115,08	251,33
6	11	127,75	28,27	327,06	217,66	151,93	333,47
7	10	127,62	11,2	318,89	145,77	111,46	177,34
8	11	121,84	35,78	313,25	148,54	105,82	248,58
9	10	123,73	28,3	311,4	177,95	139,26	262,93
10	10	129,4	31,34	303,67	201,15	157,68	255,01
11	10	127	33,64	296,08	162,5	118,07	230,86
12	10	126,21	24,16	294,47	188,37	128,22	322,39
13	10	124,04	25,33	278,89	103,08	74,72	168,21
14	11	124,05	28,33	270,72	225,75	162,79	330,63
15	11	123,89	29,84	270,61	107,14	80,07	152,64
16	10	122,26	26,25	258,36	170,51	124,46	240,87
17	10	121,01	28,1	258,18	114,2	83,23	215,2
18	10	119,37	25,86	252,74	138,8	102,29	233,21
19	10	120,28	22,35	252,06	230,07	175,16	334,28
20	11	117,18	22,92	251,33	150,7	105,82	210,34
21	10	117,36	27,84	240,17	225,08	159,44	433,4
22	10	115,27	20,09	236,88	144,17	108,61	177,26

Referencias

[1] B. Kernighan and S. Lin. *An efficient heuristic procedure for partitioning graphs*. Bell Systems Technical J. 49, (1970), 291-307.

[2] M. Grötschel and Y. Wakabayashi. *A cutting plane algorithm for a clustering problem*. Relatório técnico. Inst. für Mathematik, (1987), 59-86.

[3] F. Aykut Özsoy M. Labbé. *Size-constrained graph partitioning polytopes*. Discrete Mathematics 310, (2010), 3473-3493.

[4] E Pesch. F. Jaehn. *New bounds and constraint propagation techniques for the clique partitioning problem*. Discrete Applied Mathematics 161, (2013), 2025-2037.

[5] J.E. Mitchell. X. Ji. *Branch-and-price-and-cut on the clique partitioning problem with minimum clique size requirement*. Discrete Optimization 4, (2007), 87-102.

[6] R. Weismantel L.A. Wolsey C.E. Ferreira, A. Martin C.C. de Souza. *The node capacitated graph partitioning problem: A computational study*. Mathematical Programming 81, (1998), 229-256.

[7] C.E. Bichot and P. Siarry. *Graph Partitioning*. ISTE. Wiley, (2013).

[8] Torres R. Recalde, D. and P. Vaca. *Balanced K-clique partitioning problem with application in the third division of the Ecuadorian football league*. Preprint, (2015).

[9] Gurobi I. *Gurobi optimizer reference manual*. http://www.gurobi.com, (2007).