

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS

OPERADOR DE POISSON PARA LA DESCRIPCIÓN DE UN  
FLUIDO EULERIANO EN TRES DIMENSIONES

PROYECTO PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE MATEMÁTICA

JENNY EDITH AGUIRRE COBA  
jennyedith.aguirre@gmail.com

Director: DR. MARCO VINICIO CALAHORRANO RECALDE  
marco.calahorrano@epn.edu.ec

QUITO, JUNIO 2016

## DECLARACIÓN

Yo JENNY EDITH AGUIRRE COBA, declaro bajo juramento que el trabajo aquí escrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

A través de la presente declaración cedo mis derechos de propiedad intelectual, correspondientes a este trabajo, a la Escuela Politécnica Nacional, según lo establecido por la Ley de Propiedad Intelectual, por su reglamento y por la normatividad institucional vigente.

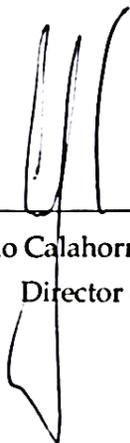


---

Jenny Edith Aguirre Coba

## CERTIFICACIÓN

Certifico que el presente trabajo fue desarrollado por JENNY EDITH AGUIRRE COBA, bajo mi supervisión.



---

Dr. Marco Vinicio Calahorrano Recalde  
Director del Proyecto

## **AGRADECIMIENTOS**

Al Dr. Marco Calahorrano, por su paciencia en el desarrollo de este proyecto, por sus consejos y recomendaciones respecto al mismo, además de sus sugerencias a lo largo de mis estudios.

A mis profesores, por los conocimientos que me han transmitido. En especial a quienes siempre lo hacen con mucho entusiasmo y pasión; quienes han llegado ser para mi una fuente de inspiración.

A mi familia, en especial a mi hermano, quien ha estado siempre pendiente de mi, por sus consejos y porque siempre me provee de algo interesante en que pensar. A mis padres, por el apoyo que me han dado. A mi abuelita, pues gracias a ella aprendí muchas cosas, entre ellas a tomar las cosas de forma objetiva e intentar ver siempre la razón de cada cosa, pues de ella nunca escuché: "porque sí". A Poleth y Maya, por su cariño y por la alegría que me contagian.

A mis amigos, quienes me han apoyado, tanto en el sentido académico como fuera de éste, a quienes me han ayudado a confiar en mi y me han dado ánimo para seguir adelante; Jhosselyne, Jonathan, Jairo, Cris, Vero, Karen, Paty, Joha y algunos más. En especial a quienes me han permitido mirar las cosas con tranquilidad.

## DEDICATORIA

*A mi familia, y a las personas que alguna vez llegaron a ser tan cercanas como ésta, pues su cariño me ha inspirado.*

# Índice general

<b>Resumen</b>	XI
<b>Abstract</b>	XII
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Sistemas hamiltonianos con finitos grados de libertad</b>	<b>3</b>
2.1. Variedad simpléctica . . . . .	4
2.1.1. Forma externa . . . . .	4
2.1.2. Espacio tangente . . . . .	5
2.1.3. Forma diferencial . . . . .	6
2.1.4. Diferencial externo . . . . .	7
2.1.5. Variedad simpléctica . . . . .	8
2.2. Sistemas hamiltonianos . . . . .	10
2.3. Estructura de Poisson . . . . .	11
<b>3. Cálculo en espacios de funciones</b>	<b>13</b>
3.1. Cálculo de variaciones . . . . .	13
3.1.1. Distribuciones . . . . .	13
3.1.2. Derivadas funcionales . . . . .	14
3.2. Sistemas con finito número de partículas . . . . .	16
3.2.1. Formulación lagrangiana . . . . .	19
3.2.2. Formulación hamiltoniana . . . . .	20
<b>4. Ecuaciones de Euler</b>	<b>23</b>

4.1.	Descripción de un fluido ideal . . . . .	23
4.1.1.	Características del dominio . . . . .	24
4.2.	Formulación euleriana de un fluido . . . . .	25
4.2.1.	Conservación de la masa . . . . .	27
4.2.2.	Ley fundamental de la dinámica . . . . .	30
4.2.3.	Ecuación general del movimiento . . . . .	37
4.3.	Hamiltoniano . . . . .	38
4.3.1.	Ley de la conservación de la energía . . . . .	38
<b>5.</b>	<b>Dinámica hamiltoniana no canónica</b>	<b>41</b>
5.1.	Ecuaciones de Euler en espacios funcionales . . . . .	41
5.2.	Proyección de Leray . . . . .	46
5.3.	Sistemas hamiltonianos no canónicos . . . . .	50
5.4.	Ecuación de Euler con dominio bidimensional . . . . .	50
5.4.1.	Ecuación respecto a la vorticidad . . . . .	52
5.4.2.	Hamiltoniano . . . . .	54
<b>6.</b>	<b>Ecuaciones de Euler en <math>\Omega \subset \mathbb{R}^3</math></b>	<b>56</b>
6.1.	Espacio en función de campos escalares . . . . .	57
6.2.	Espacio en función de campos vectoriales . . . . .	64
<b>7.</b>	<b>Conclusiones y recomendaciones</b>	<b>68</b>
7.1.	Conclusiones . . . . .	68
7.2.	Recomendaciones . . . . .	69
	<b>Apéndice</b>	<b>70</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>77</b>

# Resumen

En el presente trabajo se analiza la dinámica de un fluido no viscoso e incompresible, definido sobre un dominio acotado  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ . Considerando que los sistemas hamiltonianos permiten el estudio de la evolución temporal de un sistema de partículas, vamos a analizar una formulación hamiltoniana para este fluido. Con esto en mente, empezamos abordando temas para conocer la base del formalismo hamiltoniano y luego poder extender algunos conceptos.

Analizamos el movimiento de este fluido, que es un sistema infinito dimensional de partículas. Se trabaja a través de sus variables eulerianas y se llega a la formulación de las ecuaciones de Euler. Estudiamos los espacios sobre los cuales se formulan estas ecuaciones, obteniendo así un espacio conformado por las soluciones de dos de estas ecuaciones, éste resulta ser un espacio de Hilbert y lo denotamos por  $L^2_{\sigma}(\Omega)$ . Nos queda por analizar una sola ecuación en el espacio  $L^2_{\sigma}(\Omega)$ .

En cualquiera de los casos, que el campo de velocidades se encuentra en 2 o 3 dimensiones, existe una formulación hamiltoniana para esta ecuación respecto a la velocidad. Particularmente, cuando consideramos la velocidad como un campo bidimensional con dominio en  $\mathbb{R}^2$ , también existe una formulación hamiltoniana respecto a la vorticidad.

Para un dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  se desea conocer que sucede respecto a la variable vorticidad. Estudiamos ciertos subespacios de  $L^2_{\sigma}(\Omega)$  donde es posible analizar lo que sucede con esta ecuación respecto a esta variable. Se determina ciertos problemas que no tenemos en el caso bidimensional, se trabaja sobre éstos y describimos lo que sucede en estos espacios.

# Abstract

In this work we study the motion of an incompressible inviscid fluid on a three-dimensional domain. Taking into account that the Hamiltonian systems allow us to study the time-evolution systems, we analyze a Hamiltonian formulation for this fluid. With this aim in mind, we begin with the basis of this theory to extend some concepts.

When we analyze the motion of this fluid, we notice that we are working with an infinite-dimensional system. We work with Eulerian variables to obtain the Euler equations. We study the spaces where these equations are formulated and we obtain a space where two of these equations are satisfied, this is a Hilbert space denoted by  $L^2_\sigma(\Omega)$ .

Later we work with the residual equation and formulate it as a Hamiltonian system regarding the velocity. When we work with a domain  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , there exist also a Hamiltonian formulation regarding the vortex for this equation. In the case  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , we want to know how possible is to extend that. We study subspaces contained in  $L^2_\sigma(\Omega)$  where is possible to analyze the Euler equation regarding the vortex, and we study about the new problems encountered.

# Capítulo 1

## Introducción

El estudio de la evolución temporal de un sistema de partículas da origen a los sistemas Hamiltonianos, los cuales descritos de manera rigurosa, se definen sobre variedades simplécticas, pero este concepto es posible extenderlo sobre variedades de Poisson y luego sobre otros espacios mucho más generales. Usualmente un sistema Hamiltoniano llega a estar determinado mediante un corchete de Poisson y una función llamada Hamiltoniano que representa la energía del sistema. De forma mucho más general, un sistema Hamiltoniano es posible definirlo sobre un espacio de funciones  $W$  y se asocia con una ecuación de la forma

$$\frac{d\tilde{\zeta}}{dt} = J(\tilde{\zeta})\partial_{\tilde{\zeta}}H$$

donde  $\tilde{\zeta} \in W$ ,  $H$  es el Hamiltoniano del sistema y  $J(\tilde{\zeta})$  se denomina Operador de Poisson, el cual posee las propiedades de linealidad y antisimetría.

En el capítulo 2 y 3 se trabaja considerando sistemas de dimensión finita. En el capítulo 2 se observa las herramientas que la geometría diferencial nos provee para analizar estos sistemas, se define formalmente un sistema Hamiltoniano, y además, se observa las propiedades que posee el corchete de Poisson.

En el capítulo 3, se observa como se obtienen estos sistemas, unos los podemos obtener respecto a coordenadas canónicas a través de la segunda ley de Newton, mientras que otros se obtienen haciendo uso del cálculo de variaciones. Aquí se obtienen las ecuaciones de Hamilton en forma canónica respecto a coordenadas generalizadas, para lo cual se parte de la formulación Lagrangiana y se usa la transformada de Legendre.

El tema principal de nuestro trabajo es el estudio del movimiento de un fluido no viscoso e incompresible en un dominio acotado  $\Omega$ . Este sistema es de dimensión

infinita por lo cual resulta complicado describirlo mediante variables Lagrangianas. En el capítulo 4 se hace una descripción de este sistema respecto a las variables Eulerianas, llegando así a modelarlo mediante las ecuaciones de Euler.

Es necesario considerar los espacios sobre los cuales es posible formular las ecuaciones de Euler; en el capítulo 5 se definen espacios de campos vectoriales apropiados para esto. Se determina un espacio cuyos elementos son soluciones de dos de estas ecuaciones, éste es un espacio de Hilbert y se lo denota por  $L^2_\sigma(\Omega)$ . Se plantea en este espacio la ecuación que falta por analizar. Consideramos  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  donde es posible caracterizar de cierta forma a los elementos de  $L^2_\sigma(\Omega)$ , lo que nos permite estudiar esta ecuación respecto a la vorticidad, se generaliza la noción de sistema Hamiltoniano y se define el operador de Poisson  $J(\omega)$  para este caso.

Finalmente, en el capítulo 6 se estudia el caso en que  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , en este caso, los elementos de  $L^2_\sigma(\Omega)$  no se caracterizan como cuando  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , pero se desea analizar que sucede con la ecuación de Euler respecto a la vorticidad. Para esto, definiremos espacios sobre los cuales será posible formular esta ecuación respecto a esta variable, y estudiaremos los problemas que se encuentran en este caso.

## Capítulo 2

# Sistemas hamiltonianos con finitos grados de libertad

En el presente capítulo vamos a ver el concepto de sistema hamiltoniano desde el punto de vista de la Geometría Diferencial, para lo cual es fundamental conocer la noción de variedad simpléctica. A continuación se introducen las siguientes definiciones:

**Definición 2.0.1.** Sea  $M$  un espacio topológico y  $V$  un abierto de  $\mathbb{R}^n$ . Una  $n$ -carta de  $M$  representada como  $(U, \varphi)$ , es una aplicación biyectiva  $\varphi : U \rightarrow V$ , donde  $U$  es un subconjunto de  $M$ . Si  $p \in U$ , se dice que  $(U, \varphi)$  es una carta en  $p$ .

**Definición 2.0.2.** Dos  $n$ -cartas  $(U, \varphi)$  y  $(V, \psi)$  de  $M$  se dicen compatibles si:

- $U \cap V = \emptyset$ ; o
- Si  $U \cap V \neq \emptyset$ , entonces los conjuntos  $\varphi(U \cap V)$  y  $\psi(U \cap V)$  son abiertos en  $\mathbb{R}^n$  además que  $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$  es un difeomorfismo de clase  $C^\infty$ .

**Definición 2.0.3.** Un atlas de dimensión  $n$  sobre un conjunto  $M$  es una familia  $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$  de  $n$ -cartas dos a dos compatibles y cuyos dominios recubren a  $M$ .

Una variedad diferenciable de dimensión  $n$  es una pareja  $(M, \mathcal{A})$  donde  $M$  es un conjunto y  $\mathcal{A}$  es un atlas de dimensión  $n$  sobre  $M$ . Usualmente a la variedad se la nota por  $M$  pero está implícito que es de la forma como la hemos definido.

## 2.1. Variedad simpléctica

Las siguientes nociones se definen generalmente sobre variedades, pero por facilidad de comprensión lo haremos en  $\mathbb{R}^n$ .

### 2.1.1. Forma externa

**Definición 2.1.1.** Se llama forma de orden 1 (o 1-forma) a una función lineal  $\omega^1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , es decir para todo  $\lambda_1 \in \mathbb{R}$  y para todo  $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^n$

$$\omega^1(\lambda_1 \xi_1 + \xi_2) = \lambda_1 \omega^1(\xi_1) + \omega^1(\xi_2)$$

**Definición 2.1.2.** Se llama forma externa de orden 2 (o 2-forma) a una función bilineal y antisimétrica  $\omega^2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , es decir, para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$  y para todo  $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \mathbb{R}^n$

$$\text{i) } \omega^2(\lambda \xi_1 + \xi_2, \xi_3) = \lambda \omega^2(\xi_1, \xi_3) + \omega^2(\xi_2, \xi_3),$$

$$\text{ii) } \omega^2(\xi_1, \xi_2) = -\omega^2(\xi_2, \xi_1).$$

**Observación:** La linealidad respecto a la segunda componente, se verifica por medio de la antisimetría.

**Ejemplo:** La siguiente es una forma externa de orden 2

$$\begin{aligned} \omega^2 : \quad \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ ((\xi_1, \xi_2), (\theta_1, \theta_2)) &\longmapsto \xi_1 \theta_2 - \xi_2 \theta_1. \end{aligned}$$

**Definición 2.1.3.** Se llama forma externa de orden k (o k-forma) una función definida sobre k vectores, k veces lineal y antisimétrica.

La antisimetría se define de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \omega^k(\xi_1, \dots, \xi_k) &= (-1)^v \omega^k(\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_k}) \\ v &= \begin{cases} 0 & \text{si la permutación } i_1, \dots, i_k \text{ es par,} \\ 1 & \text{si la permutación } i_1, \dots, i_k \text{ es impar.} \end{cases} \end{aligned}$$

**Ejemplo:** La siguiente es una 3-forma sobre  $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} \omega^3 : \quad \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\xi, \theta, \chi) &\longmapsto \xi_1 \theta_2 \chi_3 - \xi_2 \theta_1 \chi_3 + \theta_1 \chi_2 \xi_3 - \chi_1 \theta_2 \xi_3 + \chi_1 \xi_2 \theta_3 - \xi_1 \chi_2 \theta_3. \end{aligned}$$

**Observación:** Toda  $k$ -forma en  $\mathbb{R}^n$  con  $n < k$  es cero.

**Definición 2.1.4.** El producto externo  $\omega^k \wedge \omega^l$  de la  $k$ -forma  $\omega^k$  en  $\mathbb{R}^n$  por la  $l$ -forma  $\omega^l$  en  $\mathbb{R}^n$  es una  $k + l$ -forma  $\omega^{k+l}$  en  $\mathbb{R}^n$  definida por

$$\omega^k \wedge \omega^l(\xi_1, \dots, \xi_{k+l}) = \sum_{\mathbf{i} \in \mathbf{I}} (-1)^v \omega^k(\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_k}) \omega^l(\xi_{i_{k+1}}, \dots, \xi_{i_{k+l}})$$

donde:

$$\mathbf{I} := \{\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_k, i_{k+1}, \dots, i_{k+l}) \in \sigma(\{1, \dots, k+l\}) : i_1 < \dots < i_k, i_{k+1} < \dots < i_{k+l}\}$$

$\sigma(\{1, \dots, k+l\})$  representa el conjunto de permutaciones de los números desde 1 hasta  $k+l$  y  $v$  se considera como en la definición anterior.

## 2.1.2. Espacio tangente

**Definición 2.1.5.** Sean  $M$  y  $N$  variedades, una aplicación  $F : M \rightarrow N$  se dice diferenciable en  $p \in M$  si existen una carta  $(U, \varphi)$  en  $p$  y una carta  $(V, \psi)$  en  $F(p) \in N$  tal que  $F(U) \subseteq V$  y la composición  $\psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \psi(V)$  es de clase  $C^\infty$  en una vecindad de  $\varphi(p)$ . Además, si  $F$  es diferenciable en todo punto de  $M$ , se dirá que  $F$  es (simplemente) diferenciable.

El conjunto de las aplicaciones diferenciables de  $M$  en  $N$  se denota  $C^\infty(M, N)$  y si además  $N = \mathbb{R}$  se denota  $C^\infty(M)$ .

Se representa como  $C^\infty(x)$  al conjunto  $\mathcal{F} = \{(U, f) : U \text{ es una vecindad (abierto) de } x \text{ y } f \in C^\infty(U)\}$  particionado por la relación de equivalencia la cual define que  $(U, f)$  y  $(V, g)$  son equivalentes, si existe una vecindad  $W \subset U \cap V$  de  $x$  tal que  $f|_W = g|_W$ .

**Definición 2.1.6.** Se llama espacio tangente a  $M$  en  $x$  y se lo denota por  $TM_x$ , al espacio de todas las funciones  $X : C^\infty(x) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que satisfacen la regla de Leibniz, es decir

$$X(fg) = f(x)X(g) + g(x)X(f).$$

**Definición 2.1.7.** Sea  $F : M \rightarrow N$  una aplicación diferenciable. Dado  $p \in M$ , el diferencial de  $F$  en  $p$ ,  $dF_p : T_pM \rightarrow T_{F(p)}N$  es una aplicación lineal definida tal que a cada  $X \in T_pM$  le corresponde  $dF_p(X)$  definido de la siguiente forma

$$\begin{aligned} dF_p(X) : C^\infty(F(p)) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ g &\longmapsto X(g \circ F). \end{aligned}$$

La unión disjunta de los espacios tangentes respecto a cada punto de una variedad se llama fibrado tangente y se denota por  $TM$ .

$$TM = \bigcup_{x \in M} \{x\} \times TM_x. \quad (2.1)$$

El fibrado tangente  $TM$  de una variedad  $M$  es también una variedad, cuya dimensión es el doble de la dimensión de  $M$ . Observemos la forma del atlas de  $TM$ .

A partir de (2.1), se define la proyección  $\pi : TM \rightarrow M$  de la forma  $(x, v) \mapsto x$ . Entonces dado el atlas  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$  de  $M$  se construye un atlas  $\{(V_\beta, \psi_\beta)\}$  para  $TM$  de la siguiente forma:

- $V_i = \pi^{-1}(U_i)$ .
- La aplicación  $\psi_i$  se define por

$$\begin{aligned} \psi_i : V &\longrightarrow \mathbb{R}^{2n} \\ (x, v) &\longmapsto (\varphi_i^1(x), \dots, \varphi_i^n(x), \langle d_x \varphi_i^1, v \rangle, \dots, \langle d_x \varphi_i^n, v \rangle), \end{aligned}$$

donde  $\langle d_x \varphi_i^j, v \rangle$  representa la componente  $j$ -ésima de  $w \in \mathbb{R}^n$ , el cual identifica al elemento  $d_x \varphi_i(v) \in T_{\varphi(x)} \mathbb{R}^n$ .

### 2.1.3. Forma diferencial

La noción de fibrado nos será de gran utilidad para definir varios conceptos importantes relacionados a este tema.

**Definición 2.1.8.** Sea  $E$  una variedad. Un fibrado vectorial de rango  $r$  sobre una variedad  $M$  es una aplicación diferenciable sobreyectiva  $\pi : E \rightarrow M$  que satisface las siguientes propiedades:

- Para cada  $p \in M$ , el conjunto  $E_p = \pi^{-1}(p)$  (llamado fibra de  $E$  en  $p$ ) está dotado de una estructura de espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$  de dimensión  $r$ .
- Para cada  $p \in M$  existe un entorno  $U$  de  $p$  en  $M$  y un difeomorfismo  $\chi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^r$ , tal que  $\pi_1 \circ \chi = \pi$ , donde  $\pi_1 : U \times \mathbb{R}^r \rightarrow U$  es la proyección sobre la primera coordenada, y la restricción de  $\chi$  a alguna fibra, sea un isomorfismo entre los espacios  $E_p$  y  $\{p\} \times \mathbb{R}^r$ .

El espacio  $E$  se lo conoce como espacio total del fibrado, pero por abuso de lenguaje es quien usualmente recibe el nombre de fibrado.

**Definición 2.1.9.** Sea  $M$  una variedad diferenciable  $n$ -dimensional y  $TM_x$  su espacio tangente en el punto  $x$ . El espacio dual de  $TM_x$  lo llamaremos espacio cotangente a  $M$  en  $x$ , y se lo notará como  $T^*M_x$ . Cada elemento de este espacio toma el nombre de vector cotangente y coincide ser una 1-forma externa sobre  $TM_x$ . Este espacio es  $n$ -dimensional.

La unión disjunta de los espacios cotangentes la llamaremos fibrado cotangente y lo notaremos por

$$T^*M = \bigcup_{x \in M} T^*M_x \times \{x\}.$$

El fibrado tangente y el fibrado cotangente poseen, efectivamente, la estructura de un fibrado. En lo que sigue vamos a denotar por  $f : T^*M \rightarrow M$  a la proyección natural que hace corresponder cada 1-forma sobre  $T^*M_x$  el punto  $x$ , así

$$\begin{aligned} f : T^*M &\longrightarrow M \\ \tilde{p} = (p, x) &\longmapsto x. \end{aligned}$$

Ésta será una aplicación diferenciable.

Se introduce además  $\wedge^k(T^*M_x)$  para denotar el espacio de las  $k$ -formas externas en  $x$ . Si tomamos la unión disjunta de estos espacio se obtiene el fibrado de las  $k$ -formas externas, el cual se nota por  $\wedge^k M$ .

**Definición 2.1.10.** Sea  $\pi : E \rightarrow M$  un fibrado vectorial. Una sección de  $E$  es una aplicación diferenciable  $s : M \rightarrow E$  tal que  $\pi \circ s = id_M$ , y para esto,  $s(p) \in E_p$  para cada  $p \in M$ .

**Definición 2.1.11.** Un campo vectorial sobre una variedad  $M$  es una sección del fibrado tangente  $TM$ .

Una  $k$ -forma diferencial sobre  $M$  es una sección del fibrado de las  $k$ -formas externas. El espacio vectorial de las  $k$ -formas diferenciales se lo nota por  $A^k(M)$ . El espacio de las 0-formas diferenciales es  $A^0(M) := C^\infty(M)$ .

## 2.1.4. Diferencial externo

Dada una variedad de dimensión  $n$ , indicaremos por

$$A^\bullet(M)$$

el espacio de las formas diferenciales sobre  $M$ .

**TEOREMA 2.1.12.** Sea  $M$  una variedad  $n$ -dimensional. Entonces existe una única aplicación lineal  $d : A^\bullet(M) \rightarrow A^\bullet(M)$  que satisface las siguientes condiciones:

- $d(A^r(M)) \subset A^{r+1}$  para cada  $r \in \mathbb{N}$ ,
- Si  $f \in C^\infty(M)$  entonces  $df \in A^1(M)$  es el diferencial de  $f$ ,
- Si  $\omega \in A^r(M)$  y  $\eta \in A^s(M)$  entonces

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^r \omega \wedge d\eta,$$

- $d \circ d = 0$ .

Esta aplicación satisface además la siguiente propiedad:

Si  $(x^1, \dots, x^n)$  son coordenadas locales en un abierto de  $M$ , entonces

$$\begin{aligned} d \left( \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \omega_{i_1, \dots, i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} \right) &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} d\omega_{i_1, \dots, i_r} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \sum_{j=1}^n \frac{\partial \omega_{i_1, \dots, i_r}}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} \end{aligned}$$

La demostración de estos resultados, la encontraremos en [1, pág. 222]. A ésta aplicación lineal se la conoce como *diferencial externo de una forma diferencial* sobre  $M$ .

**Definición 2.1.13.** Una forma diferencial  $\omega$  sobre la variedad  $M$  se dice cerrada si su diferencial externo es cero.

**Definición 2.1.14.** Una forma diferencial  $\omega$  se dice no degenerada si para todo  $\sigma \neq 0$ , existe  $\eta \in TM_x$  tal que  $\omega(\sigma, \eta) \neq 0$ .

## 2.1.5. Variedad simpléctica

**Definición 2.1.15.** Sea  $M$  una variedad diferenciable de dimensión par. Se llama estructura simpléctica sobre  $M$  una 2-forma diferencial  $\omega$  cerrada no degenerada. A la pareja  $(M, \omega)$  se la llama variedad simpléctica.

**TEOREMA 2.1.16.** Sea  $N$  una variedad diferenciable  $n$ -dimensional. El fibrado cotangente  $T^*N$  posee una estructura simpléctica natural. Sus coordenadas se escriben de la siguiente forma

$$\omega^2 = dp \wedge dq = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i.$$

*Demostración.* En este caso nuestra variedad la cual queremos mostrar que es simpléctica es  $M := T^*N$ . Habíamos dicho que existe una proyección natural diferenciable  $f : M \rightarrow N$ . Sea  $df_{\tilde{p}} : TM_{\tilde{p}} \rightarrow TN_{f(\tilde{p})}$  su diferencial, donde  $\tilde{p} = (p, x)$ , con  $p \in T^*N_x$  ( $p : TN_x \rightarrow \mathbb{R}$  es una 1-forma). Notar que para un  $\xi \in TM_{\tilde{p}}$  dado  $df_{\tilde{p}}(\xi) \in TN_x$ , definimos la 1-forma  $\omega^1$  sobre  $M$  como

$$\begin{aligned} \omega^1 : TM_{\tilde{p}} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \xi &\longmapsto p(df_{\tilde{p}}(\xi)) \end{aligned}$$

sin olvidar que  $M$  tiene dimensión  $2n$ , consideramos  $(p, q) \in M$ ,  $f$  se identifica con  $q$ , entonces  $df$  con  $dq$ , (si  $\xi = \sum_{i=1}^n (p^i \frac{\partial}{\partial p_i} + q^i \frac{\partial}{\partial q_i})$ , entonces  $df_{\tilde{p}}(\xi) = \sum_{i=1}^n q^i \frac{\partial}{\partial q_i}$ ) entonces esta 1-forma es del tipo  $\omega^1 = \sum_{i=1}^n p_i dq_i$ , de la cual aplicando el Teorema 2.1.12 tenemos la 2-forma

$$\omega^2 = d(\omega^1)$$

que es cerrada. Aplicando la propiedad que involucra al mismo teorema tenemos

$$\omega^2 = dp \wedge dq = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i$$

que es una forma no degenerada y por lo tanto  $T^*N$  posee una estructura simpléctica de manera natural.  $\square$

**Observación:** En el teorema anterior la parte esencial para que esta variedad tenga estructura simpléctica, es que la variedad está formada por 1-formas.

En una variedad simpléctica  $(M, \omega)$ , para cada  $x$  se define una correspondencia  $\mathbf{I}^1 : T^*M_x \longrightarrow TM_x$ , que es un isomorfismo, y cuya inversa hace corresponder  $\sigma \in TM_x$  a la 1-forma definida por

$$\omega^1(\eta) = \omega(\sigma, \eta) \quad \forall \eta \in TM_x.$$

Sea  $M$  una variedad de dimensión  $2n$ , se conoce que  $TM_x$  tiene la misma dimensión.  $M$  está dotada de la siguiente estructura simpléctica

$$\begin{aligned} \omega : T_x M \times T_x M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\xi_1, \xi_2) &\longmapsto \omega(\xi_1, \xi_2) = \sum_{i=1}^n p_i q^i - q_i p^i, \end{aligned}$$

con  $\xi_1 = (p_1, p_2, \dots, p_n, q_1, q_2, \dots, q_n)$ ,  $\xi_2 = (p^1, p^2, \dots, p^n, q^1, q^2, \dots, q^n)$ . Se observa que

$$\omega(\xi, \eta) = \xi^T J \eta = J^{-1} \xi \cdot \eta = \omega_\xi(\eta)$$

---

<sup>1</sup>Observemos que  $\mathbf{I}$  no tiene que ver con la identidad

con

$$J = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ -I_n & 0_n \end{pmatrix}.$$

Notaremos que la aplicación inversa de  $\mathbf{I}$  es

$$\begin{aligned} I^{-1} : TM_x &\longrightarrow T^*M_x \\ \zeta &\longmapsto \omega_\zeta = J^{-1}\zeta \end{aligned}$$

## 2.2. Sistemas hamiltonianos

El espacio vectorial de los campos vectoriales sobre  $M$  se denotará por  $\mathcal{T}(M)$ .

Observemos ahora que para cada  $h \in C^\infty(M)$ , es posible aplicar el diferencial externo, obteniendo así una 1-forma diferenciable  $dh$ . En un punto  $p$  específico se obtiene una 1-forma externa, a la cual le podemos aplicar  $\mathbf{I}$  para obtener un elemento  $z_h \in TM_p$ ; así, asociado a  $dh$  existirá un campo de vectores que lo denotaremos por  $X_h$ .

**Definición 2.2.1.** Sea  $(M, \omega)$  una variedad simpléctica y  $H : M \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable. Definimos el campo vectorial hamiltoniano asociado a  $H$ ,  $X_H$ , como el único campo vectorial que cumple:

$$\omega(Y, X_H) = \langle dH, Y \rangle$$

para todo  $Y \in \mathcal{T}(M)$ . Esto indica más bien que para cada  $x \in M$

$$\omega(Y(x), X_H(x)) = \langle dH_x, Y(x) \rangle$$

A la terna  $(M, \omega, H)$  se la denomina sistema hamiltoniano.

Sea  $(M, \omega, H)$  un sistema hamiltoniano. Puesto que  $H \in C^\infty(M)$ , se tiene que  $dH_x$  es una 1-forma, la cual al pasarla como argumento del isomorfismo  $\mathbf{I}$ , le corresponde un  $\sigma = \mathbf{I}(dH_x) \in TM_x$ . Al campo vectorial hamiltoniano asociado a  $H$  se lo denotará también por  $IdH$ . Observemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} IdH : M &\longrightarrow TM_x \\ x &\longmapsto \mathbf{I}(dH_x) \end{aligned}$$

Si consideramos  $M = T^*V$  el espacio de fases de la ecuación canónica de Hamil-

ton, entonces el campo de las velocidades de fase está determinado por

$$\dot{x} = IdH(x) \in TM_x$$

el cual proviene de las ecuaciones de Hamilton

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}.$$

## 2.3. Estructura de Poisson

**Definición 2.3.1.** Una álgebra de Lie es un espacio vectorial  $V$ , sobre un campo  $\mathbb{K}$  el cual está dotado de una operación entre vectores  $[\cdot, \cdot] : V \times V \rightarrow V$ , tal que para todo  $u, v, w \in V$  y  $a, b \in K$  satisface las siguientes propiedades

- i)  $[u, v] = -[v, u]$ ,
- ii)  $[au + bv, w] = a[u, w] + b[v, w]$
- iii) Identidad de Jacobi:  $[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0$

Al operador  $[\cdot, \cdot]$  se la conoce como corchete de Lie. Se puede observar que las condiciones i) y ii) implican bilinealidad.

**Observación:** Un espacio vectorial dotado de esta operación es un álgebra no asociativa, debido a la identidad de Jacobi.

**Definición 2.3.2.** Una estructura de Poisson sobre un espacio vectorial  $V$ , es un operador  $\{\cdot, \cdot\} : V \times V \rightarrow V$  que satisface las propiedades del corchete de Lie, y además satisface la regla de Leibniz

$$\{fg, h\} = f\{g, h\} + g\{f, h\}.$$

Esta estructura también se la conoce como corchete de Poisson.

Para una variedad  $M$  es posible definir sobre el espacio  $C^\infty(M)$  un corchete de Lie (o también un corchete de Poisson). Una variedad  $M$ , tal que está definido un corchete de Poisson sobre  $C^\infty(M)$  se llama variedad de Poisson.

En una variedad de Poisson, analizando la estructura  $\{\cdot, \cdot\}$ , debido a las propiedades del corchete de Poisson,  $\{f, \cdot\}$  determina un campo vectorial  $X_f$  para el cual

se cumple lo siguiente

$$\{f, g\} = \langle dg, X_f \rangle \quad \text{para todo } g \in C^\infty(M),$$

por la antisimetría

$$\{f, g\} = -\langle df, X_g \rangle.$$

Mas aún, existirá una 2-forma que se relaciona con el corchete de Poisson mediante

$$\{f, g\} = \omega(X_f, X_g).$$

Para mayor detalle de lo aquí descrito, se recomienda ver [8].

Esta 2-forma no tiene que ser necesariamente una forma simpléctica. Es por esto que las variedades simplécticas son un caso particular de las variedades de Poisson. Por todo lo visto anteriormente, se puede hacer uso de la notación:

$$X_f(g) := \{f, g\} \quad g \in C^\infty(M).$$

Así, el concepto de sistema hamiltoniano se lo puede extender. El corchete de Poisson define una 2-forma, la cual no necesariamente será no degenerada. A esta 2-forma es posible asociar un operador  $J : T^*M_x \rightarrow TM_x$ , tal que

$$\dot{x} = J(x)dH(x). \tag{2.2}$$

En el caso en el que la 2-forma sea degenerada, el núcleo (y también el rango) de  $J$  dependerá de  $x$ , surgen elementos  $C(x)$  tales que  $J(x)dC(x) = 0$  (a éstos se los llama elementos Casimir). Cuando se buscan los puntos de equilibrio del sistema, es decir se considera  $\dot{x} = 0$ , se observa que se cumple

$$JdH(x) = Jd[H(x) + C(x)] = 0.$$

En el caso que  $J$  sea degenerado, al sistema lo llamaremos sistema hamiltoniano no canónico. Observemos que este sistema está determinado a través de los espacios  $T^*M$  y  $TM$ ; el operador  $J$ ; y una función  $H$  que se relacionan por medio de la ecuación (2.2).

# Capítulo 3

## Cálculo en espacios de funciones

### 3.1. Cálculo de variaciones

La formulación hamiltoniana de un sistema con un número finito de partículas se lo realiza a partir de la formulación lagrangiana, para lo cual se hace uso del cálculo de variaciones y del principio de Hamilton. En esta sección se visualizará algunas de las herramientas que intervienen en la formulación hamiltoniana de un sistema de partículas.

#### 3.1.1. Distribuciones

**Definición 3.1.1.** Sea  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función infinitamente diferenciable que se hace cero fuera de un dominio acotado.  $\varphi$  dice ser una función test.

El espacio de las funciones test se denota por  $\mathcal{D}$ , es decir:

$$\mathcal{D} = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \exists U \subset \mathbb{R}^n \text{ acotado tal que } \varphi(x) = 0, \forall x \notin U\}.$$

Además, vamos a definir su espacio dual  $\mathcal{D}'$ , el cual está formado por las funciones lineales y continuas sobre  $\mathcal{D}$ . Para ello necesitamos tener la noción de continuidad en  $\mathcal{D}$ .

**Definición 3.1.2.** Sean  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  y  $\varphi$  funciones test. Se dice que la sucesión de funciones  $\varphi_n$  converge a  $\varphi$  en  $\mathcal{D}$  ( $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$ ) si se satisfacen las siguientes condiciones:

- Para todo  $n$ ,  $\varphi_n$  y  $\varphi$  desaparecen fuera de algún conjunto acotado  $S \subset \mathbb{R}^n$ .
- $D^\alpha \varphi_n$  converge uniformemente a  $D^\alpha \varphi$  para todo multi-índice  $\alpha$ .

**Definición 3.1.3.** Un funcional  $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  se llama distribución si

- a)  $F(a\varphi + b\psi) = aF(\varphi) + bF(\psi)$  para todo  $a, b \in \mathbb{R}$  y  $\varphi, \psi \in \mathcal{D}$ .
- b)  $F(\varphi_n) \rightarrow F(\varphi)$  siempre que  $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$ .

En otras palabras, el espacio  $\mathcal{D}'$  es el espacio de distribuciones; además, se usa la notación  $\langle F, \varphi \rangle$  en lugar de  $F(\varphi)$ , donde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es conocido como el producto de dualidad.

**Definición 3.1.4.** Una distribución  $F \in \mathcal{D}'$  se llama regular si existe una función localmente integrable  $f$  tal que

$$\langle F, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f \varphi \, dx$$

para todo  $\varphi \in \mathcal{D}$ .

A una distribución que no es regular se la llama singular.

**Definición 3.1.5.** Sea  $F$  una distribución, entonces la derivada distribucional de  $F$  en la dirección  $k$ -ésima  $\frac{\partial F}{\partial x_k}$  está definida por

$$\left\langle \frac{\partial F}{\partial x_k}, \varphi \right\rangle = - \left\langle F, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right\rangle \quad \text{para todo } \varphi \in \mathcal{D}.$$

Además, si  $\alpha$  es un multi-índice, entonces denotamos por  $D^\alpha F$  el funcional definido por

$$\langle D^\alpha F, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle F, D^\alpha \varphi \rangle \quad \text{para todo } \varphi \in \mathcal{D}.$$

### 3.1.2. Derivadas funcionales

**Definición 3.1.6.** Sea  $V$  un espacio de funciones. Una aplicación que toma elementos de  $V$  y los transforma en elementos de  $\mathbb{R}$  se llama funcional.

**EJEMPLO 3.1.7.** Consideramos la energía cinética de un fluido unidimensional, acotado, con densidad constante y que fluye desde la posición  $x_0$  hasta la posición  $x_1$ , como el funcional

$$T[u] = \frac{\rho_0}{2} \int_{x_0}^{x_1} u^2 dx$$

donde  $u$  representa la velocidad del fluido y  $\rho_0$  la densidad.

Para las siguientes definiciones consideramos en general  $E$  y  $W$  espacios de Banach,  $U \subset E$  abierto y  $F : U \rightarrow W$  una función.

**Definición 3.1.8.** Sean  $u \in U, h \in E$ . Se dice que  $F$  es derivable en  $u$  en la dirección  $h$  si existe

$$\delta F(u)(h) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (F(u + th) - F(u)).$$

Entonces a  $\delta F(u)(h)$  la llamamos derivada direccional de  $F$  en el punto  $u$  y en la dirección  $h$ . Si además, este límite existe para todo  $h \in E$ , entonces  $F$  se llama direccionalmente diferenciable en  $u$ .

**Definición 3.1.9.** Sea  $u \in U$  y  $F$  una función en  $u$  derivable para todo  $h \in E$  tal que  $\delta F(u)(h) = \varphi(h)$ , donde  $\varphi$  es un operador lineal y continuo respecto a  $h$ . Entonces a  $\varphi$  se lo llama la derivada de Gateaux de  $F$  en  $u$ . Si existe tal  $\varphi$ , a  $F$  se llama función Gateaux diferenciable.

**Definición 3.1.10.** Sean  $X$  un espacio vectorial de funciones,  $V \subset X, F : V \rightarrow \mathbb{R}$  un funcional,  $u_0 \in V$  y  $h \in X$ . Suponemos que  $\{u = u_0 + \varepsilon h : |\varepsilon| \leq \varepsilon_0\} \subset V$ , para algún  $\varepsilon_0 > 0$ . Se define

$$\begin{aligned} \phi : (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \varepsilon &\longmapsto F[u_0 + \varepsilon h]. \end{aligned}$$

Entonces si  $\phi'(0)$  existe, notamos por  $\delta F(u_0; h) := \phi'(0)$  y la llamamos primera variación de  $F$  en  $u_0$  en la dirección de  $h$ .

En el caso en que  $X$  es un espacio de Banach, entonces la derivada de Gateaux de  $F$  en  $u_0$  evaluada en  $h$  coincide con la primera variación de  $F$ ,  $\delta F[u_0; h]$ . En un caso particular, en el cual un funcional  $F[u]$ , con  $u$  que depende de  $x \in I \subset \mathbb{R}$ , se lo pueda escribir de la forma

$$F[u] = \int_{x_0}^{x_1} K[u] dx,$$

la primera variación de  $F$  en el punto  $u$  y en la dirección  $v$  ( $\delta F[u, v]$ ) tiene la siguiente forma

$$\delta F[u, v] := \int_{x_0}^{x_1} v \frac{\delta K}{\delta u} dx.$$

Si tomamos una dirección  $v \in \mathcal{D}$ , podemos usar la siguiente notación

$$\left\langle \frac{\delta K}{\delta u}, v \right\rangle := \int_{x_0}^{x_1} v \frac{\delta K}{\delta u} dx$$

donde a

$$\frac{\delta K}{\delta u}$$

se lo llamará derivada funcional.

Esta notación enfatiza el hecho que corresponde a un gradiente en el espacio de

funciones y además es la variación de  $K$  respecto de  $u$ .

Para un caso un tanto particular, en el que consideramos un funcional de la siguiente forma

$$F[u] = \int_{x_0}^{x_1} \mathcal{F}(x, u, u', u'', \dots, u^{(n)}) dx$$

donde  $u^{(n)} = \frac{d^n u}{dx^n}$ . Su primera variación en una dirección  $v \in \mathcal{D}$  es la siguiente

$$\delta F[u; v] = \int_{x_0}^{x_1} \left( \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u} v + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u'} v' + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u''} v'' + \dots + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u^{(n)}} v^{(n)} \right) dx,$$

luego, mediante integración por partes tenemos

$$\begin{aligned} \delta F[u; v] &= \int_{x_0}^{x_1} \left( \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u''} - \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u^{(n)}} \right) v dx \\ &\quad + \left( \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u'} v + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u''} v' + \dots \right) \Big|_{x_0}^{x_1} \end{aligned}$$

con lo cual

$$\delta F[u; v] = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} v dx, \quad (3.1)$$

donde

$$\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u''} - \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u^{(n)}}. \quad (3.2)$$

### 3.2. Sistemas con finito número de partículas

Antes de hacer uso de lo desarrollado en la sección anterior y del principio de Hamilton, se estudiarán los sistemas de partículas desde el punto de vista de la mecánica newtoniana y expresaremos la segunda ley de Newton en términos de la función lagrangiana.

Empecemos observando que para una sola partícula, cuyo movimiento se rige por las leyes de Newton, usando un sistema de referencia adecuado las ecuaciones serán descritas de forma sencilla. Analizaremos un número finito de partículas donde las fuerzas se consideran conservativas, es decir están derivadas de una energía potencial que depende sólo de sus coordenadas, es decir,

$$\mathbf{F}_i = (F_{x_i}, F_{y_i}, F_{z_i}) = -\nabla V_i(x_i, y_i, z_i).$$

Observemos que  $V$  es un campo escalar. Formamos un sistema macroscópico del cual la partícula  $i$  tiene masa  $m_i$  y posición  $(x_i, y_i, z_i)$  y de acuerdo con la segunda ley de Newton tenemos

$$m_i \frac{d^2}{dt^2}(x_i, y_i, z_i) = (F_{x_i}, F_{y_i}, F_{z_i}).$$

Notemos que

$$-\nabla V_i = \mathbf{F}_i = \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \frac{d}{dt}(m_i \mathbf{r}_i). \quad (3.3)$$

Además, la energía cinética  $T_i$  de cada partícula se define por

$$T_i = \frac{1}{2} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2)$$

y la energía cinética de un sistema de partículas es

$$T = \sum_i T_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left( \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \right) \cdot \left( \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \right).$$

Al relacionar la energía cinética del sistema con la energía potencial, observando (3.3) se tiene para cada partícula  $i$ :

$$\left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_i}{\partial \dot{x}_i} \right), \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_i}{\partial \dot{y}_i} \right), \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_i}{\partial \dot{z}_i} \right) \right] + \left[ \frac{\partial V_i}{\partial x_i}, \frac{\partial V_i}{\partial y_i}, \frac{\partial V_i}{\partial z_i} \right] = 0. \quad (3.4)$$

La energía de cada partícula es

$$E_i = T_i + V_i.$$

Considerando lo visto anteriormente se tiene

$$\begin{aligned} \frac{dE_i}{dt} &= \frac{dT_i}{dt} + \frac{dV_i}{dt} \\ &= m_i \dot{x}_i \frac{d\dot{x}_i}{dt} + m_i \dot{y}_i \frac{d\dot{y}_i}{dt} + m_i \dot{z}_i \frac{d\dot{z}_i}{dt} + \frac{\partial V_i}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial V_i}{\partial y_i} \frac{dy_i}{dt} + \frac{\partial V_i}{\partial z_i} \frac{dz_i}{dt} \\ &= \mathbf{u}_i \cdot \left( \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} + \nabla V_i \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

En general, la energía es una función dinámica, pero si una partícula está bajo la acción de fuerzas conservativas su energía es una constante de movimiento la cual no cambia respecto al tiempo cuando la partícula se mueve a lo largo de la trayectoria. Observemos que en nuestro caso ésto se cumple para cada partícula.

Ahora, definimos la función lagrangiana  $L$  como la diferencia entre la energía cinética y la energía potencial

$$L = T(\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i) - V(x_i, y_i, z_i).$$

En este caso se observa que

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i},$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = -\frac{\partial V}{\partial x_i},$$

de esta forma la ecuación (3.4) se la escribe en términos de la función lagrangiana como

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0,$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial y_i} = 0,$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial z_i} = 0,$$

las cuales se conocen como ecuaciones de Lagrange; que en este caso describen el movimiento de cada partícula.

Éstas son las ecuaciones de Newton vistas en términos de la función lagrangiana, la cual está considerada respecto a las coordenadas cartesianas. Sin embargo, muchos problemas pueden ser resueltos en otro tipo de coordenadas, es por esto que podemos generalizar este desarrollo a un tipo de coordenadas que las llamaremos coordenadas generalizadas, cuyo nombre está justificado porque la naturaleza de éstas no son específicas, pueden ser distancias, ángulos, áreas u otro tipo de magnitudes tales que sus valores sean conocidos. Estas nuevas coordenadas, las cuales las notaremos  $q_j$ , definen a las coordenadas cartesianas en un sistema de  $n$  partículas, es decir

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \dots, q_{3n}, t)$$

$$y_i = y_i(q_1, q_2, \dots, q_{3n}, t)$$

$$z_i = z_i(q_1, q_2, \dots, q_{3n}, t)$$

entonces las ecuaciones de Lagrange escritas en términos de coordenadas generalizadas se representan de la siguiente forma

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0.$$

Este resultado se lo puede observar con mas detalle en [4, cap. 7].

### 3.2.1. Formulación lagrangiana

Ahora bien, si las ecuaciones de Lagrange constituyen una descripción adecuada a la dinámica de partículas, las ecuaciones que están descritas con las leyes de Newton deberían estar de acuerdo con éstas. Para esto es necesario conocer el principio de Hamilton, que se enuncia a continuación.

“De todas las trayectorias posibles que puede seguir un sistema dinámico para desplazarse de un lugar a otro en un intervalo de tiempo determinado, la trayectoria que sigue es aquella que hace mínima la integral temporal de la diferencia entre las energías cinética y potencial”.

Vamos a analizar ésto desde el punto de vista del cálculo de variaciones. Para esto consideramos que a todo sistema con  $n$  grados de libertad con coordenadas generalizadas  $q_1(t), \dots, q_n(t)$ , le corresponde una función  $U(q_i, \dot{q}_j, t)$  llamada potencial, que describe las interacciones, caracteriza y determina el movimiento. Además, le corresponde la función  $T(\dot{q}_j)$ , que representa la energía cinética del sistema.

Sea  $L(q(t), \dot{q}(t)) = T(\dot{q}_j) - U(q_i, \dot{q}_j, t)$  la función lagrangiana. El principio de Hamilton requiere que se minimice la siguiente función

$$S(q) = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t)) dt,$$

por lo tanto, considerando algún  $w \in \mathcal{D}$ , queremos que

$$\delta S[q; w] = 0,$$

y para que esto se cumpla, considerando (3.1) y (3.2), es necesario que

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0. \quad (3.5)$$

Definimos los momentos generalizados conjugados de las variables generalizadas como

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad (3.6)$$

y a partir de (3.5) tenemos que

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}. \quad (3.7)$$

### 3.2.2. Formulación hamiltoniana

#### Transformada de Legendre

Sea una función  $f(q_i, s_j)$  ( $i = 1, \dots, n$ ), ( $j = 1, \dots, n$ ) suficientemente regular, que depende de dos conjuntos de variables. Se llama transformada de Legendre de  $f$  respecto al conjunto de variables  $s_j$  a la función

$$G(q_i, p^j) := \sum_{j=1}^n p^j s_j - f(q_i, s_j)$$

donde las nuevas variables  $p^j$  se definen por

$$p^j := \frac{\partial f}{\partial s_j} \quad \forall j = 1, \dots, n$$

y éstas se llaman variables conjugadas de las variables  $s_j$ .

Para que haya sido posible realizar el cambio de variable en  $f$  eliminando las  $s_j$  a cambio de las  $p^j$ , éste cambio de variable debe ser regular, lo que se expresa mediante el Jacobiano de la transformación

$$\det \left[ \frac{\partial p^j}{\partial s_i} \right] = \det \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial s_j \partial s_i} \right] \neq 0.$$

Al tomar el diferencial de  $G$ , se tiene que

$$\begin{aligned} dG &= s_j dp^j + p^j ds_j - \frac{\partial f}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial f}{\partial s_j} ds_j \\ &= s_j dp^j - \frac{\partial f}{\partial q_i} dq_i, \end{aligned}$$

e identificando las derivadas parciales de  $G$

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial p^j} &= s_j, \\ \frac{\partial G}{\partial q_i} &= -\frac{\partial f}{\partial q_i}. \end{aligned}$$

Se define la función de Hamilton como la transformada de Legendre del lagrangiano  $L$  respecto al conjunto de variables  $\dot{q}_i$ , es decir

$$H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n).$$

Tomando el diferencial a ambos lados tenemos

$$\begin{aligned}
 dH &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i, \\
 &= \sum_{i=1}^n [p_i d\dot{q}_i + \dot{q}_i dp_i] - \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i, \\
 &= \sum_{i=1}^n \dot{q}_i dp_i - \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^n \left[ p_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] d\dot{q}_i,
 \end{aligned}$$

luego por (3.6) y (3.7) se obtiene

$$\begin{aligned}
 \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\
 \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}.
 \end{aligned}$$

Éstas se conocen como ecuaciones de Hamilton, las cuales también se las puede analizar desde el punto de vista geométrico, como hemos indicado en la sección 2.2 del capítulo anterior.

El conjunto de valores que puede tomar  $p_i, q_i$ , se denomina espacio de fases del sistema, al cual se le asocia a una variedad  $M$  la cual es de dimensión  $2n$ .

Ahora considerando un sistema de partículas con  $n$  grados de libertad, tomamos  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  una función definida sobre el espacio de fases. Al tomar su derivada respecto al tiempo tenemos

$$\begin{aligned}
 \frac{df}{dt} &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} \right) \\
 &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right).
 \end{aligned}$$

Definimos la siguiente forma bilineal

$$\begin{aligned}
 \{\cdot, \cdot\} : C^\infty(\mathbb{R}^{2n}) \times C^\infty(\mathbb{R}^{2n}) &\longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^{2n}) \\
 (f, g) &\longmapsto \{f, g\} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right)
 \end{aligned}$$

la cual resulta ser un corchete de Poisson. Además se observa que para toda  $f$  definida sobre el espacio de fases, se cumple

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\}.$$

Cuando se consideran las funciones  $p_i, q_i$  descritas de la forma

$$\begin{aligned} p_i : \mathbb{R}^{2n} &\longrightarrow \mathbb{R} & q_i : \mathbb{R}^{2n} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (p, q) &\longmapsto p_i & (p, q) &\longmapsto q_i, \end{aligned}$$

las ecuaciones de Hamilton se las puede escribir mediante el corchete de Poisson de la forma

$$\begin{aligned} \dot{p}_i &= \{p_i, H\}, \\ \dot{q}_i &= \{q_i, H\}. \end{aligned}$$

# Capítulo 4

## Ecuaciones de Euler

En el presente capítulo se dan a conocer las principales ecuaciones que provienen del estudio de un fluido al considerarlo como un sistema de partículas infinito dimensional, veremos cómo surgen éstas y cuál es su interpretación física.

### 4.1. Descripción de un fluido ideal

Las ecuaciones que describen el movimiento de un fluido no viscoso<sup>1</sup> e incompresible son las siguientes:

$$\begin{aligned}\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\nabla p && \text{en } \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 && \text{en } \Omega \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} &= 0 && \text{sobre } \partial\Omega\end{aligned}$$

- $\Omega$  es un dominio acotado, suave en  $\mathbb{R}^3$  y frontera  $\partial\Omega$ .
- $\mathbf{n}$  es el vector unitario normal exterior a  $\partial\Omega$ .
- $\mathbf{u}$  es una representación del campo vectorial tridimensional de velocidades, dependiente de la posición  $x \in \Omega$  y el tiempo  $t \in I$ .
- $p$  es un campo escalar que representa la presión del fluido dependiente de  $x \in \Omega$ .

A continuación se presentan algunos resultados para  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ , donde  $N = 2$  o  $3$ . Más adelante nuestro interés se centra cuando  $N = 3$ .

---

<sup>1</sup>A los fluidos no viscosos también se los llaman fluidos perfectos

### 4.1.1. Características del dominio

Vamos a definir formalmente el dominio de clase  $C^k$ , también llamado de frontera suave o frontera  $C^k$ .

**Definición 4.1.1.** Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un dominio acotado con frontera  $\partial\Omega$ . El dominio  $\Omega$  se dice de clase  $C^k$ , si para cada  $x \in \partial\Omega$ , existe un sistema de coordenadas locales  $(y', y_N) := (y_1, \dots, y_{N-1}, y_N)$  con origen en  $x$ , una bola  $B(x)$  y una función  $\gamma$  definida en un entorno  $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^{N-1}$  de  $y' = 0'$  tal que:

$$\gamma \in C^k(\mathcal{N}), \quad \gamma(0') = 0$$

y

- 1.-  $\partial\Omega \cap B(x) = \{(y', y_N) : y_N = \gamma(y'), y' \in \mathcal{N}\}$ .
- 2.-  $\Omega \cap B(x) = \{(y', y_N) : y_N > \gamma(y'), y' \in \mathcal{N}\}$ .

En otras palabras un dominio  $\Omega$  se dice de clase  $C^k$ , si  $\partial\Omega$  es una  $C^k$  superficie. A este tipo de dominio  $\Omega$  se lo puede caracterizar de otra forma y para esto se consideran los siguientes conjuntos:

$$\mathbb{R}_+^N = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^N : x_N \geq 0\}$$

$$Q = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^N : |x'| \leq 1, |x_N| \leq 1\}$$

$$Q_+ = Q \cap \mathbb{R}_+^N$$

$$Q_0 = \{x = (x', 0) \in \mathbb{R}^N : |x'| \leq 1\}$$

donde  $|x'|$  denota la norma euclidiana de  $x'$ .

**Definición 4.1.2.** Sea  $m \geq 1$  un entero.  $\Omega$  se dice de clase  $C^m$ , si para cada punto  $x \in \partial\Omega$ , existe un entorno abierto  $\mathcal{O}$  de  $x$  y una aplicación biyectiva  $H : Q \rightarrow \mathcal{O}$  tal que

$$H \in C^m(\bar{Q}), \quad H^{-1} \in C^m(\bar{\mathcal{O}}), \quad H(Q_+) = \Omega \cap \mathcal{O} \quad \text{y} \quad H(Q_0) = \mathcal{O} \cap \partial\Omega.$$

El siguiente lema nos provee una propiedad del dominio, la cual será de utilidad en el siguiente capítulo.

**LEMA 4.1.3 (Partición de la unidad).** Sea  $\Gamma$  un compacto de  $\mathbb{R}^N$  y sean  $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_k$  subconjuntos abiertos de  $\mathbb{R}^N$  tales que  $\Gamma \subset \cup_{i=1}^k \mathcal{O}_i$ , entonces existen  $k+1$  funciones  $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_k$  en  $C^\infty(\mathbb{R}^N)$  tales que:

- a)  $0 \leq \theta_i(x) \leq 1$  para todo  $x \in \mathbb{R}^N$ , y cualquier  $i = 0, 1, \dots, k$ .

b)  $\sum_{i=0}^k \theta_i(x) = 1$  para todo  $x \in \mathbb{R}^N$ .

c)  $\text{supp}(\theta_i)$  es un compacto y  $\text{supp}(\theta_i) \subset \mathcal{O}_i$ , para todo  $i = 1, \dots, k$ .

d)  $\text{supp}(\theta_0) \subset \mathbb{R}^N \setminus \Gamma$ .

A la familia  $(\theta_i)_{0 \leq i \leq k}$  se le denomina una partición de la unidad subordinada al recubrimiento  $(\mathcal{O}_i)_{1 \leq i \leq k}$  de  $\Gamma$ .

Considerando  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  abierto y acotado, si aplicamos este lema a  $\Gamma = \partial\Omega$ , se observa además que  $\theta_0|_{\Omega} \in \mathcal{D}(\Omega)$ .

## 4.2. Formulación euleriana de un fluido

Cuando trabajamos en un medio continuo, para realizar esta formulación, se hacen las siguientes consideraciones:

- La mecánica de fluidos está descrita enteramente en términos de variables eulerianas.
- (Hipótesis del medio continuo). Un fluido está modelado por una colección de partículas, para esto vamos a suponer que en cada punto del espacio (continuo) existe una partícula, lo cual no es del todo cierto, por esto a estas partículas las llamaremos partículas fluidas.
- Para iniciar la descripción de un fluido se toma en cuenta a las variables lagrangianas y las eulerianas.

**Variable Lagrangiana:** A cada partícula del fluido le corresponde una trayectoria, la cual recorre el dominio en función del tiempo, si denotamos a la posición inicial de cada partícula por “ $a$ ” y la identificaremos con cada partícula fluida, entonces al punto “ $a$ ” lo llamaremos variable lagrangiana.

**Variable Euleriana:** Si fijamos un punto “ $x$ ” del dominio del fluido, es posible observar ciertas propiedades sobre este punto; además en diferentes instantes de tiempo se puede encontrar diferentes partículas. El punto “ $x$ ” se denomina variable euleriana.

## Trayectoria de una partícula

Sea  $a$  una partícula (en nuestro caso un punto material), sean  $\Omega_0$  y  $\Omega_t$  abiertos de  $\mathbb{R}^3$ ,  $I \subset \mathbb{R}$ . La trayectoria de una partícula va a ser descrita por una función

$$\begin{aligned}\phi : \Omega_0 \times I \times I &\longrightarrow \Omega_t \\ (a, t_0, t) &\longmapsto x\end{aligned}$$

lo cual indica que la partícula pasa de la posición  $a$  en el tiempo  $t_0$  a la posición  $x$  en el tiempo  $t$ . Además, si consideramos que  $a$  siempre será la posición inicial, podemos omitir  $t_0$  y consideraremos

$$\begin{aligned}\phi : \Omega_0 \times I &\longrightarrow \Omega_t \\ (a, t) &\longmapsto x = (\phi_1(a, t), \dots, \phi_N(a, t)).\end{aligned}$$

## Velocidad y aceleración de una partícula

La velocidad de una partícula material es la velocidad que tiene la partícula que se encuentra en la posición  $x$  en el tiempo  $t$ , es decir

$$u = u(x, t) = \frac{\partial \phi}{\partial t}(a, t_0, t).$$

De igual manera la aceleración, se considerará respecto a un punto  $x$  del dominio en el tiempo  $t$

$$\gamma = \gamma(x, t) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}(a, t_0, t).$$

## Derivadas eulerianas y lagrangianas

Considerando una partícula  $M$ , la cual ocupa la posición “ $a$ ” al tiempo  $t = 0$  y la posición  $x$  al tiempo  $t$ , para una función  $f = f(M, t)$  asociada a dicha partícula  $M$  tenemos dos formas de representarla:

- **Respecto a la variable lagrangiana:** existe  $g : \Omega_0 \times I \rightarrow \Omega_t$  tal que

$$f(M, t) = g(a, t)$$

- **Respecto a la variable euleriana:** existe  $h : \Omega_t \times I \rightarrow \Omega_t$  tal que

$$f(M, t) = h(x, t).$$

Se supone  $g$  y  $h$  suficientemente regulares. Además, considerando  $x = \phi(a, t)$ , se tiene

$$h(\phi(a, t), t) = g(a, t).$$

Al calcular la derivada respecto al tiempo se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial t}(a, t) &= \sum_{k=1}^N \frac{\partial h}{\partial x_k}(x, t) \frac{\partial \phi_k}{\partial t}(a, t) + \frac{\partial h}{\partial t}(x, t), \\ &= \left( \sum_{k=1}^N u_k \frac{\partial h}{\partial x_k} + \frac{\partial h}{\partial t} \right) (x, t). \end{aligned}$$

A esta derivada la vamos a llamar derivada material y la denotaremos de la siguiente forma

$$\frac{Dh}{Dt} = \frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial t} + (u \cdot \nabla)h. \quad (4.1)$$

### Representación euleriana de la aceleración

En particular, cuando se toma  $h$  como la velocidad se tiene lo siguiente

$$u(x, t) = u(\phi(a, t), t) = h(x, t) = g(a, t) = \frac{\partial \phi}{\partial t}(a, t)$$

$$\begin{aligned} \gamma(x, t) &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}(a, t), \\ &= \frac{\partial g}{\partial t}(a, t), \\ &= \left( \frac{\partial h}{\partial t} + u_k \cdot \frac{\partial h}{\partial x_k} \right) (x, t), \\ &= \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \sum_{k=1}^N u_k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_k}(x, t), \\ &= \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u. \end{aligned}$$

**Observación:** La velocidad y aceleración se las puede describir tanto en términos de las variables eulerianas como en términos de variables lagrangianas. Generalmente se usa la representación euleriana para fluidos y la representación lagrangiana para sólidos.

#### 4.2.1. Conservación de la masa

Definiremos el concepto de masa a través de la siguiente hipótesis:

Para todo sistema material  $S$ , en cada tiempo  $t$ , existe una medida positiva  $\mu_t$  en  $\Omega_t$  llamada distribución de masa. Suponemos que esta medida es regular, entonces existirá  $\rho$  suficientemente regular tal que

$$d\mu_t(x) = \rho(x, t)dx.$$

Ahora, para obtener algunos resultados, se usa el siguiente lema y la siguiente proposición:

**LEMA 4.2.1 (Diferenciación de un determinante).** *Dada una familia de operadores lineales  $S = S(t) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ ,  $t \in I$ , tal que  $\det S(t) \neq 0$ , para todo  $t \in I$ . Entonces:*

$$\frac{d}{dt}[\det(S(t))] = \det[S(t)] \cdot \text{tr} \left[ \frac{dS}{dt}(t)S^{-1}(t) \right].$$

En esta sección únicamente vamos a dejar enunciado este lema, su demostración la podemos ver en [18].

Para la siguiente proposición vamos a considerar lo siguiente:

$$K(t) = \int_{\Omega_t} C(x, t)dx$$

donde  $C = C(x, t)$  es una función escalar dada.

**PROPOSICIÓN 4.2.2.** *Suponemos que  $C(x, t)$  es una función de clase  $\mathcal{C}^1$  para  $x \in \Omega_t$  y  $t \in I$ , y que  $u$  es  $\mathcal{C}^1$  con respecto a  $x$  y  $t$ . Entonces*

$$\frac{dK}{dt}(t) = \int_{\Omega_t} \frac{\partial C}{\partial t}(x, t)dx + \int_{\Omega_t} \text{div}(Cu)(x, t)dx$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} C(x, t)dx &= \int_{\Omega_0} \frac{\partial}{\partial t} (C(\phi(a, t), t) \det(\nabla_a \phi)) da \\ &= \int_{\Omega_0} \left[ \frac{\partial C}{\partial t} \cdot \det(\nabla_a \phi) + \sum_{j=1}^N \frac{\partial C}{\partial x_j} \frac{\partial \phi_j}{\partial t} \cdot \det(\nabla_a \phi) + C \frac{\partial}{\partial t} \det(\nabla_a \phi) \right] da \\ &= \int_{\Omega_0} \left[ \frac{\partial C}{\partial t} + \sum_{j=1}^N \frac{\partial C}{\partial x_j} u_j + C \text{div } u \right] \det(\nabla_a \phi) da \\ &= \int_{\Omega_t} \left[ \frac{\partial C}{\partial t} + \text{div}(Cu) \right] dx. \end{aligned}$$

la identidad

$$\frac{\partial}{\partial t} \det(\nabla_a \phi) = \text{div } u \det(\nabla_a \phi)$$

se obtiene a partir del lema anterior, el cálculo de  $\text{tr}\left[\frac{dS}{dt}(t)S^{-1}(t)\right]$ , con  $S = \nabla_a\phi$  lo encontraremos en el apéndice.  $\square$

**Definición 4.2.3.** La masa total de un sistema en el tiempo  $t$  es la integral

$$m = \int_{\Omega_t} d\mu_t(x).$$

Además, si la medida es regular se escribe:

$$m = \int_{\Omega_t} \rho(x, t) dx.$$

**PROPOSICIÓN 4.2.4.** Si consideramos un sistema material  $S$  que llena el dominio  $\Omega_t$  en el tiempo  $t \in I$ . Entonces para toda  $x \in \Omega_t$  y para toda  $t \in I$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho u) = 0,$$

donde  $\rho(x, t)$  es la densidad de la masa volumétrica y  $u(x, t)$  es la velocidad de la partícula que ocupa la posición  $x$  al tiempo  $t$ .

*Demostración.* Sea  $\Omega'_t \subset \Omega_t$ , como se supone que la masa es constante, entonces

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega'_t} d\mu_t(x) = 0,$$

pero

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega'_t} d\mu_t(x) &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega'_t} \rho(x, t) dx \\ &= \int_{\Omega'_t} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho u) \right] dx. \end{aligned}$$

lo cual se obtiene al aplicar la Proposición 4.2.2, además para todo  $\Omega'_t \subset \Omega_t$

$$\int_{\Omega'_t} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho u) \right] dx = 0$$

por lo cual necesariamente

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho u) = 0$$

para todo  $(x, t) \in \Omega_t \times I$ .

$\square$

## 4.2.2. Ley fundamental de la dinámica

**Definición 4.2.5.** Sea  $U(x)$  un campo vectorial en  $\mathbb{R}^3$ . Se dice que  $U$  es un campo vectorial helicoidal (CVH) si existen  $\omega, b \in \mathbb{R}^3$  tal que

$$U(x) = \omega \wedge x + b$$

donde  $\omega$  se llama resultante (lineal) de  $U(x)$ <sup>2</sup>. Sea  $x_0 \in \mathbb{R}^3$ , entonces  $U(x_0)$  es su momento resultante (resultante angular) en  $x_0$ .  $\{U(x_0), \omega\}$  se los conoce como sus elementos de reducción en  $x_0$  del campo vectorial  $U$ .

Observemos que para  $U(x)$  un CVH, para todo  $x, x' \in \mathbb{R}^3$  tenemos

$$U(x') = U(x) + \omega \wedge (x' - x)$$

**PROPOSICIÓN 4.2.6 (Transporte de Reynolds).** Sea  $S$  un sistema material tridimensional que ocupa el dominio  $\Omega_t$  al tiempo  $t$  y sea  $C$  una función de clase  $\mathcal{C}^1$  en  $x$  y en  $t$ , entonces:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} C(x, t) \rho(x, t) dx = \int_{\Omega_t} \frac{DC}{Dt}(x, t) \rho(x, t) dx$$

donde  $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \cdot \nabla$  es la derivada material mostrada en (4.1).

*Demostración.* De acuerdo a la Proposición 4.2.2 se tiene:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} C(x, t) \rho(x, t) dx = \int_{\Omega_t} \left( \frac{\partial C}{\partial t} \rho + C \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla C \cdot \rho u + C \nabla \rho \cdot u + C \rho \operatorname{div} u \right) (x, t) dx$$

luego, por la Proposición 4.2.4 tenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} C(x, t) \rho(x, t) dx &= \int_{\Omega_t} \left( \frac{\partial C}{\partial t} \rho + \rho u \cdot \nabla C \right) dx \\ &= \int_{\Omega_t} \frac{DC}{Dt}(x, t) \rho(x, t) dx. \end{aligned}$$

□

## Momento lineal, angular y sus correspondientes campos vectoriales helicoidales (CVH)

Los tipos de campos vectoriales helicoidales asociados a un sistema material son momento y cantidades de aceleración.

<sup>2</sup>recordemos que  $\omega \wedge x = (\omega_2 x_3 - \omega_3 x_2, \omega_3 x_1 - \omega_1 x_3, \omega_1 x_2 - \omega_2 x_1)$

Dado un sistema material  $S$  en movimiento, se define en cada  $t$  el momento, cuyos elementos de reducción en el sistema de referencia de origen  $0$  son:

- Momento lineal del sistema

$$R = \int_{\Omega_t} u(x, t) d\mu_t(x).$$

- Momento angular en  $0$  del sistema

$$\sigma(0) = \int_{\Omega_t} x \wedge u(x, t) d\mu_t(x).$$

El momento angular en el punto  $z$  está dado por

$$\sigma(z) = \sigma(0) + R \wedge z.$$

Así,  $\{\sigma(z)\}_z$  es el momento del sistema y se lo puede escribir como

$$\sigma(z) = \int_{\Omega_t} (x - z) \wedge u(x, t) d\mu_t(x).$$

### **Cantidades de aceleración y su correspondiente CVH**

Similarmente, definimos las cantidades de aceleración cuyos elementos de reducción son:

- Resultante dinámica del sistema

$$Q = \int_{\Omega_t} \gamma(x, t) d\mu_t(x).$$

- Momento dinámico en  $0$

$$\delta(0) = \int_{\Omega_t} x \wedge \gamma(x, t) d\mu_t(x).$$

El momento dinámico en el punto  $z$  está dado por

$$\delta(z) = \delta(0) + S \wedge z.$$

$\{\delta(z)\}_z$  es el campo vectorial helicoidal *cantidades de aceleración* del sistema en el tiempo  $t$ , observemos que se lo ve de la forma

$$\delta(z) = \int_{\Omega_t} (x - z) \wedge \gamma(x, t) d\mu_t(x).$$

**PROPOSICIÓN 4.2.7.** *En un marco de referencia dado, el campo vectorial helicoidal "cantidades de aceleración" de un sistema es igual a la derivada respecto al tiempo de su campo vectorial helicoidal "momento".*

*Demostración.* aplicando la Proposición 4.2.6, con  $C = u_i$  (es decir, respecto a cada componente del campo vectorial helicoidal  $R$ ) se tiene

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} u_i(x, t) d\mu_t(x) = \int_{\Omega_t} \frac{Du_i}{Dt}(x, t) d\mu_t(x)$$

lo que significa que

$$R' = \int_{\Omega_t} \gamma(x, t) d\mu_t(x).$$

Ahora, para verificar que  $\delta(0) = \frac{d\sigma(0)}{dt}$  se cambia a variables Lagrangianas y usando la de conservación de masa se tiene:

$$\begin{aligned} \delta(0) &= \int_{\Omega_t} x \wedge \gamma(x, t) d\mu_t(x) \\ &= \int_{\Omega_0} \phi(a, t) \wedge \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi(a, t) d\mu_0(a) \\ &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega_0} \phi(a, t) \wedge \frac{\partial \phi}{\partial t}(a, t) d\mu_0(a) \\ &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} x \wedge u(x, t) d\mu_t(x) \\ &= \frac{d\sigma(0)}{dt}. \end{aligned}$$

□

## Fuerzas

Dados dos sistemas materiales  $S$  y  $S'$  en movimiento, en todo lo que tiene que ver con fuerzas ejercidas por  $S'$  sobre  $S$ , hacemos las siguientes suposiciones.

En cada tiempo  $t$ , las fuerzas ejercidas por  $S'$  sobre  $S$  son representadas por un vector medida  $d\varphi_t(x)$  que se realiza sobre  $\Omega_t$ .

Consideraremos en la práctica cuatro tipos de medidas:

- Medidas que son regulares con respecto a  $dx$ . En este caso

$$d\varphi_t(x) = f(x, t)dx,$$

con  $x \in \Omega_t$ .

- Medidas que se realizan sobre una superficie  $\Sigma_t$  y son regulares respecto a la medida de superficie  $d\Sigma_t$ .
- Medidas que se realizan sobre una curva  $\Gamma_t$  y son regulares respecto a la medida de longitud de arco  $dl_t$
- Medidas concentradas en un punto, que ocurren en el caso de puntos de fuerza.

Consideraremos estos cuatro casos que pueden ocurrir en un medio continuo tridimensional.

### Su correspondiente campo vectorial helicoidal

Asociado a las fuerzas ejercidas por  $S'$  sobre  $S$  está un campo vectorial helicoidal cuyos elementos de reducción en el punto 0 son

$$\int_{\Omega_t} d\varphi(x) \text{ y } \int_{\Omega_t} x \wedge d\varphi(x).$$

A lo siguiente llamamos *resultante lineal*

$$\int_{\Omega_t} d\varphi(x)$$

y en  $z$  el *momento resultante* será

$$\int_{\Omega_t} (x - z) \wedge d\varphi(x).$$

### Ley fundamental de la dinámica

"Existe al menos un sistema de referencia  $\mathcal{R}$ , llamado Galileano, tal que en cada tiempo  $t$  y para todo sistema material  $S$ , los campos vectoriales helicoidales asociados a las cantidades de aceleración de  $S$  y a las fuerzas externas de  $S$  son iguales."

Tomando un sistema  $S$ , se tiene un sistema de referencia en el cual en cada tiempo  $t$

$$\int_{\Omega_t} \gamma(x, t) d\mu_t(x) = \int_{\Omega_t} d\varphi_t(x)$$

$$\int_{\Omega_t} x \wedge \gamma(x, t) d\mu_t(x) = \int_{\Omega_t} x \wedge d\varphi_t(x).$$

### Hipótesis sobre las fuerzas de cohesión

Dado un sistema material  $S$  expresado de la forma  $S = S_1 \cap S_2$ , cuyos dominios correspondientes son  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  respectivamente, para un determinado tiempo. La

frontera que es común entre  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  ( $\Sigma$ ), la vamos a suponer suficientemente regular.

En lo que tiene que ver con las acciones ejercidas por  $S_2$  sobre  $S_1$ , se hacen las siguientes suposiciones:

H1 Las fuerzas ejercidas por  $S_2$  sobre  $S_1$  son fuerzas de contacto, lo cual significa que pueden ser representadas por un vector medida  $d\varphi$  concentrado en  $\Sigma = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$ .

H2 La medida es absolutamente continua respecto a la medida de superficie  $d\Sigma$ , así,

$$d\varphi = Td\Sigma$$

donde  $T$  es el vector densidad superficial de las fuerzas.

H3 La función  $T$  depende sólomente del punto  $x$  de  $\Sigma$  y del unitario normal a  $\Sigma$  en el punto  $x$ , es decir

$$T = T(x, \mathbf{n})$$

H4 Para un  $n$  fijo, la función  $x \mapsto T(x, \mathbf{n})$  es continua.

**PROPOSICIÓN 4.2.8.** Para todo  $x \in \Omega$  y para todo  $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$  con  $|\mathbf{n}| = 1$ , se tiene

$$T(x, \mathbf{n}) = -T(x, -\mathbf{n})$$

La demostración de esto se encuentra en [18, pág. 44-45]. El vector  $T(x, \mathbf{n})$  se llama vector de esfuerzos en  $x$  para la dirección  $\mathbf{n}$ .

### Tensor de esfuerzos de Cauchy

Iniciemos estudiando  $T(x, \mathbf{n})$  y observemos qué sucede cuando  $x = 0$ . Consideremos  $e_1, e_2, e_3$  los vectores unitarios a los ejes cartesianos y fijamos

$$T(0, e_i) = \sigma_{ij}e_j$$

donde para cada punto  $x$  se define una matriz  $\sigma$  de coordenadas  $\sigma_{ij}(x)$ . Vamos a considerar de una forma muy simple un dominio  $\Omega_1$  que será un tetraedro (que contendrá a un sistema material  $S_1$ ), cuyos vértices corresponderán al origen  $O$  y a tres puntos en los ejes coordenados  $A_1, A_2, A_3$ .

El plano que se genera al extender la cara del tetraedro, cuyas aristas están formadas por los puntos diferentes del origen, estará determinado por

$$n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = h.$$

Este tetraedro es elegido de tal forma que  $n_i > 0, i = 1, 2, 3$ .

Suponiendo que  $d\varphi$  sea la medida asociada a las fuerzas externas ( $d\varphi = f(x)dx$ ),  $\gamma$  la aceleración en un marco de referencia Galileano y  $d\mu$  la distribución de masa de  $S_1$ , aplicando la ley fundamental de la dinámica al sistema  $S_1$  se tiene

$$\int_{\Omega_1} \gamma(x)d\mu(x) = \int_{\Omega_1} d\varphi(x) + R \quad (4.2)$$

donde  $R$  es la resultante de las fuerzas ejercidas por  $S$  sobre  $S_1$ . De acuerdo a las hipótesis de Cauchy (enumeradas en la página anterior), tenemos

$$R = \int_{0A_2A_3} T(x, -e_1)dx_2dx_3 + \int_{0A_1A_2} T(x, -e_3)dx_1dx_2 + \int_{0A_1A_3} T(x, -e_2)dx_1dx_3 \\ + \int_{A_1A_2A_3} T(x, \mathbf{n})d\Sigma.$$

Tomando en cuenta que la función  $T$  es continua respecto a  $x$ , se tiene que

$$T(x, e_1) = \sigma_{1j}(x)e_j = [\sigma_{1j}(0) + o(\mathbf{a})]e_j$$

con  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ , donde  $a_i$  indica la magnitud que lleva la dirección  $\mathbf{e}_i$  del vector  $0A_i$  en el tetraedro descrito anteriormente, luego

$$\int_{0A_2A_3} T(x, e_1)dx_2dx_3 = \text{area}(0A_2A_3)[\sigma_{1j}(0)e_j + o(1)] \\ = n_1 \cdot \text{area}(A_1A_2A_3)[\sigma_{1j}(0)e_j + o(\mathbf{a})].$$

Además, para el plano formado por los puntos  $A_1, A_2$ , y  $A_3$  ( $A_1A_2A_3$ ) se tiene

$$\int_{A_1A_2A_3} T(x, \mathbf{n})d\Sigma = \text{area}(A_1A_2A_3)[T(0, \mathbf{n}) + o(\mathbf{a})].$$

Sin pérdida de generalidad vamos a suponer que  $\text{area}(A_1A_2A_3) = 1$ , entonces

$$R = R(\mathbf{a}) = [T(0, \mathbf{n}) - n_i\sigma_{ij}(0)e_j + o(\mathbf{a})]$$

Ahora, si consideramos un tetraedro a una escala mucho mas pequeña cuyos vértices se indican por  $\varepsilon\mathbf{a}$ , se sigue que

$$R(\varepsilon\mathbf{a}) = \varepsilon^2[T(0, \mathbf{n}) - \mathbf{n}_i\sigma_{ij}(0)e_j + o(\varepsilon\mathbf{a})]. \quad (4.3)$$

Por otro lado, de acuerdo a (4.2) y observando que las funciones son regulares

$$\begin{aligned} R(\varepsilon \mathbf{a}) &= \int_{\Omega_1} \gamma(x) d\mu(x) - \int_{\Omega_1} d\varphi(x) \\ &= \int_{\Omega_1(\mathbf{a})} [\gamma(x)\rho(x) - f(x)] dx \\ &= o(\varepsilon^3)[\gamma(0)\rho(0) - f(0)]. \end{aligned}$$

De (4.3), al dividir  $R(\varepsilon \mathbf{a})$  para  $\varepsilon^2$  y haciendo  $\varepsilon \rightarrow 0$ , tenemos

$$T(0, \mathbf{n}) = \sum_{i,j=1}^3 \sigma_{ij}(0) n_j e_i$$

para todo  $\mathbf{n}$  tal que  $|\mathbf{n}| = 1$  y  $\mathbf{n}_i > 0$ . Esto nos sugiere considerar el operador lineal

$$\mathbf{n} \rightarrow \sigma \mathbf{n} = \sum_{i,j=1}^3 \sigma_{ji} n_j e_i.$$

Partiendo del hecho de que esta definición no dependa del sistema de referencia  $e_1, e_2, e_3$ , obtenemos

$$T(x, \mathbf{n}) = \sum_{i,j=1}^3 \sigma_{ij}(x) n_j e_i.$$

Gracias a esto, el vector de esfuerzos en  $x$  para la dirección  $\mathbf{n}$  es una función lineal de las componentes de  $\mathbf{n}$ . El vector de esfuerzos ahora es posible definirlo incluso cuando  $\mathbf{n}$  no es unitario.

$$\begin{aligned} T(x, \mathbf{n}) &= \sum_{i,j=1}^3 \sigma_{ij}(x) \mathbf{n}_i e_j \\ &= \sum_{i,j=1}^3 [T(x, e_i) \cdot e_j] e_j \mathbf{n}_i. \end{aligned}$$

Se define entonces para cada  $x \in \Omega$  el siguiente operador lineal

$$\begin{aligned} \sigma(x) : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{n} &\longmapsto \sigma(x) \mathbf{n} = T(x, \mathbf{n}). \end{aligned}$$

Este operador se llama tensor de esfuerzos de Cauchy en  $x$  e introduciendo el tiempo se lo nota por  $\sigma(x, t)$ , el cual es una función lineal de clase, al menos  $C^1$ , respecto a  $x$  y a  $t$ .

### 4.2.3. Ecuación general del movimiento

**TEOREMA 4.2.9.** *Dado un cuerpo cuya densidad de masa es  $\rho(x, t)$  y está sujeta a fuerzas externas con densidad volumétrica  $f(x, t)$ , se tiene*

$$\rho\gamma_i = f_i + \operatorname{div}(\sigma_{ij}).$$

*Demostración.* Consideremos  $S' \subset S$  que ocupa el volumen  $\Omega'_t$  en el tiempo  $t$ , donde  $\Omega'_t \subset \Omega_t$ , y sea  $\Gamma'_t = \partial\Omega'_t$ . Las fuerzas externas sobre  $S'$  son las fuerzas de volumen definidas por la medida  $f dx$  y las fuerzas de contacto ejercidas por  $S - S'$  sobre  $S'$  están definidas por la medida  $T d\Gamma$  concentrada en  $\Gamma'_t$ . Por la ley fundamental de la dinámica (pág. 33), considerando cada componente de los campos vectoriales correspondientes, se tiene para  $i = 1, \dots, N$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega'_t} \rho(x, t)\gamma_i(x, t) dx &= \int_{\partial\Omega'_t} T_i(x, n) d\Gamma + \int_{\Omega'_t} f_i(x, t) dx \\ &= \int_{\partial\Omega'_t} \sigma_{ij}(x) \cdot n_j d\Gamma + \int_{\Omega'_t} f_i(x, t) dx \end{aligned}$$

además, por el teorema de la divergencia

$$= \int_{\Omega'_t} \sigma_{ij,j}(x) dx + \int_{\Omega'_t} f_i(x, t) dx$$

$$\int_{\Omega'_t} (\rho(x, t)\gamma_i(x, t) - \sigma_{ij,j}(x) - f_i(x, t)) dx = 0$$

por lo tanto

$$\rho(x, t)\gamma_i(x, t) - \sigma_{ij,j}(x) - f_i(x, t) = 0.$$

□

Para un fluido no viscoso el tensor de esfuerzos es de la forma

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}.$$

donde  $p$  es la presión del fluido. Recordemos que en nuestro caso no existen fuerzas externas, por lo tanto obtenemos

$$\rho(x, t)\gamma_i(x, t) + p_{x_i} = 0$$

lo cual, escrito de otra forma es

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u \right) = -\nabla p.$$

## Condiciones de frontera

Como es usual en la solución de EDPs, la determinación de una solución particular exige conocer datos iniciales tanto para  $\rho$  o para  $\mathbf{u}$ , y datos de contorno. La siguiente condición indica el caso de paredes impermeables

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega.$$

Si se refiere a paredes permeables, entonces

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = g \quad \text{sobre } \partial\Omega.$$

Por todo esto, al considerar la dinámica de un fluido perfecto incompresible y homogéneo, se tiene:

- Por la condición de incompresibilidad:  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ .
- Por la condición de homogeneidad:  $\nabla \rho = \mathbf{0}$ .

Entonces normalizando la densidad, se considera  $\rho = 1$ , y así nos quedan las siguientes ecuaciones.

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p \quad \text{en } \Omega_t \tag{4.4}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{en } \Omega_t \tag{4.5}$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega_t \tag{4.6}$$

donde  $\mathbf{u}$  representa la velocidad y  $p$  la presión del fluido. Notemos además que la ecuación de Euler (4.4) puede ser escrita de la forma

$$\partial_t \mathbf{u} = \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}) - \nabla \left( \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + p \right),$$

cuya demostración se puede observar en el apéndice y  $|\cdot|$  representa la norma euclidiana en  $\mathbb{R}^3$ .

## 4.3. Hamiltoniano

### 4.3.1. Ley de la conservación de la energía

Al describir la evolución de nuestro sistema de partículas, se observa que tienen energía cinética de traslación (como si fuesen masas puntuales), pero también tienen

energía cinética de rotación e incluso de vibración. Al considerar su conjunto a escala macroscópica, éstos tipos de energía se denominará energía interna.

Las leyes de la termodinámica nos ayuda a entender los intercambios de energía a nivel macroscópico y la relación del calor con el trabajo. Empezamos admitiendo la existencia de una serie de magnitudes llamadas variables de estado termodinámicas que describen el estado energético del sistema en un momento dado. Una de estas variables es la densidad  $\rho$  y postulamos la existencia de una magnitud escalar  $e$  que la llamaremos energía interna específica, la cual la vamos a entender como energía interna por unidad de masa. La energía interna está íntimamente relacionada con la temperatura.

La mayoría de variables dinámicas y las termodinámicas se rigen por leyes que se relacionan entre sí, es decir por sistemas de ecuaciones diferenciales acoplados. En algunos casos el sistema se desacopla y podemos estudiar la dinámica sin tener que preocuparnos de los procesos térmicos. El desacoplamiento de la dinámica ocurre en los procesos incompresibles, debido a que se anula el término de acoplamiento crucial, el cual relaciona la variación de la energía cinética con la variación de la energía interna. Es por esto que en los fluidos perfectos incompresibles no es necesario considerar la energía interna.

Se postula una ley de conservación para la energía total de un sistema, contenida en el volumen  $\Omega_t$

$$\mathcal{E}(\Omega_t) = \int_{\Omega_t} \rho \left( \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 + e \right).$$

El término de acoplamiento crucial es

$$\begin{aligned} \sigma : D &= \sum_{ij}^3 \sigma_{ij} D_{ij} \\ &= -p(\nabla \cdot \mathbf{u}) \end{aligned}$$

el cual se anula.<sup>3, 4</sup>

En general, para los fluidos perfectos compresibles se considera la siguiente ecuación

---

<sup>3</sup> $D$  es la parte simétrica del tensor  $\nabla \mathbf{u}$

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

<sup>4</sup>La operación  $:$  se la llama producto de contracción de dos matrices.

ción, respecto a las variables termodinámicas

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla e + \frac{p}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0.$$

Regresando al caso incompresible, la derivada material de la energía interna es

$$\frac{De}{Dt} = 0$$

debido a que en un fluido no viscoso incompresible la energía interna permanece constante a lo largo de las líneas de flujo, por lo tanto, en este caso se tiene

$$\frac{\partial e}{\partial t} = -\mathbf{u} \cdot \nabla e$$

entonces, como ya habíamos dicho, ésta queda desacoplada de las ecuaciones de movimiento. Es por esto que la variación de la energía interna no afecta a la variación de la energía cinética y viceversa. Por tales razones consideramos en este caso el hamiltoniano del sistema a

$$H(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{u}\|^2$$

el cual solamente representa la energía cinética del sistema, donde  $\|\cdot\|$  será precisado en el próximo capítulo.

# Capítulo 5

## Dinámica hamiltoniana no canónica

### 5.1. Ecuaciones de Euler en espacios funcionales

En el presente capítulo consideramos las ecuaciones de Euler

$$\partial_t \mathbf{u} = \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}) - \nabla \tilde{p} \quad \text{en } \Omega \quad (5.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (5.2)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \quad (5.3)$$

donde  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  es abierto y acotado,  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_N)$  es el campo vectorial de velocidades y  $\tilde{p} = \frac{|u|^2}{2} + p$  (con  $p$  la presión del fluido), que se analizan en espacios funcionales adecuados. Más adelante usaremos  $\omega$  para denotar  $\nabla \times \mathbf{u}$ . Además, consideraremos el estado estacionario del sistema, entonces de aquí en adelante suponemos  $\partial_t \mathbf{u} = 0$  y el dominio sobre el cual se trabajará no depende del tiempo. Por razones de notación, continuaremos incluyendo  $\partial_t \mathbf{u}$  en la ecuación (5.1).

Ahora, suponemos que  $u_i \in L^2(\Omega)$  para todo  $i \in \{1, \dots, N\}$ . Puesto que  $L^2(\Omega)$  es un espacio de Hilbert, si dotamos del producto escalar

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, dx = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} u_i v_i \, dx,$$

al espacio  $(L^2(\Omega))^N$ , éste también lo será.

**Observación:** Se denotarán con  $n$  y  $N$  las dimensión del dominio  $\Omega$  y del campo vectorial, respectivamente. En lo que viene a continuación, se trabajará con  $n = N$ , éstos tomarán valores de 2 ó 3.

Para describir la condición de incompresibilidad (5.2) y la condición de con-

torno (5.3) sobre este tipo de espacios, introducimos las siguientes definiciones.

**Definición 5.1.1.** Sean  $u \in L^2(\Omega)$  e  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Una función  $g \in L^2(\Omega)$  se llama *derivada parcial débil* de  $u$  respecto a  $x_i$  si

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} g \varphi dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

A la derivada parcial débil de  $u$  respecto a  $x_i$  se la representa por  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ .

Desde otro punto de vista, una derivada débil es una derivada en el sentido de las distribuciones. De acuerdo a esto, se define el espacio

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \forall i = 1, \dots, n \right\}$$

y cabe mencionar que también es un espacio de Hilbert dotado del siguiente producto escalar.

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + (Du, Dv)_{L^2}$$

**Definición 5.1.2.**  $H_0^1$  denota la clausura de  $C_0^1(\Omega)$  en  $H^1(\Omega)$

$H_0^1(\Omega)$  equipado con el producto escalar de  $H^1$  es un espacio de Hilbert. Existen varias caracterizaciones de este espacio, las cuales las podemos observar a detalle en [3, pág. 287-289].

**Definición 5.1.3.** Sea  $\mathbf{u}$  tal que existe  $\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \forall i = 1, \dots, N$ . Se dice que  $\mathbf{u}$  tiene divergencia cero notada por  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  si se verifica

$$\int_{\Omega} v \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) dx = 0 \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega).$$

Recordando que  $C_0^\infty(\Omega)$  es denso en  $H_0^1(\Omega)$ , en la topología de  $H^1(\Omega)$ , esta ecuación se verifica también para todo  $v \in H_0^1(\Omega)$ .

Consideramos el dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  acotado y de clase  $C^2$  (basta tipo Lipschitz), entonces lo podemos asociar con  $\mathbf{n}(x)$  que es un campo de vectores normales unitarios. Para  $\mathbf{u} \in (L^2(\Omega))^N$  queremos interpretar la ecuación (5.3). Se observa que  $\partial\Omega$  tiene medida de Lebesgue n-dimensional cero, entonces  $u_i \in L^2(\Omega)$  podría no estar definido en  $\partial\Omega$ , por lo tanto no se puede restringir  $u_i \in L^2(\Omega)$  a  $\partial\Omega$  en el sentido usual. Sin embargo, podemos definir los valores que puede tener  $u_i$  en la frontera mediante el teorema de la traza. Para ello vamos a introducir el espacio  $L^2(\partial\Omega)$ .

De acuerdo a la sección 4.1.1, debido a que  $\Omega$  se supone de clase  $C^2$  y por la compacidad de  $\partial\Omega$ , existe  $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in \{1, \dots, k\}}$  que es un recubrimiento finito de abiertos

de  $\partial\Omega$  y  $H_i : Q \rightarrow \mathcal{O}_i$  tal que verifican

$$H_i \in C^2(\bar{Q}), \quad H_i^{-1} \in C^2(\bar{\mathcal{O}}_i), \quad H_i(Q_+) = \Omega \cap \mathcal{O}_i \quad y \quad H_i(Q_0) = \mathcal{O}_i \cap \partial\Omega \quad (5.4)$$

**Definición 5.1.4.** Se dice que  $A \subset \partial\Omega$  es  $\sigma$ -medible si para todo  $1 \leq i \leq k$ ,  $H_i^{-1}(A)$  es un subconjunto Lebesgue medible de  $\mathbb{R}^{n-1}$ .

Sea  $f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Se dice que  $f$  es  $\sigma$ -integrable si para todo  $1 \leq i \leq k$  la función  $f(H_i(y', 0))$  es integrable en  $Q_0$  respecto de la medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}^{n-1}$ .

De acuerdo al teorema de partición de la unidad, tomando  $(\theta_i)_{0 \leq i \leq k}$  que es la partición de la unidad subordinada al recubrimiento  $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in \{1, \dots, k\}}$  de  $\partial\Omega$ , se define

$$\begin{aligned} \theta_i f : \mathcal{O}_i \cap \partial\Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \theta_i(x) \cdot f(x) \end{aligned}$$

**Definición 5.1.5.** Dada  $f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$   $\sigma$ -integrable en  $\partial\Omega$ , se define su integral en  $\partial\Omega$  por

$$\int_{\partial\Omega} f(x) d\sigma(x) = \sum_{i=1}^k \int_{\mathcal{O}_i \cap \partial\Omega} (\theta_i f)(x) d\sigma(x)$$

donde:

$$\sum_{i=1}^k \int_{\mathcal{O}_i \cap \partial\Omega} (\theta_i f)(x) d\sigma(x) = \int_{|y| < 1} (\theta_i f)(H_i(y', 0)) \left( \sum_{r=1}^N (\hat{H}_{ir}(y', 0))^2 \right)^{1/2} dy'$$

y

$$\hat{H}_{ir}(y) = \det \left( \frac{\partial H_i^l}{\partial y_j}(y); 1 \leq l \leq N, l \neq r, 1 \leq j \leq N-1 \right)$$

con  $H_i^l$  la componente  $l$ -ésima de  $H_i$ .

Definimos el espacio

$$L^2(\partial\Omega) = \left\{ f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R} : \int_{\partial\Omega} |f|^2 d\sigma < \infty \right\}$$

que es un espacio de Hilbert dotado del siguiente producto escalar

$$(f, g)_{L^2(\partial\Omega)} = \int_{\partial\Omega} f(x)g(x) d\sigma(x), \quad \forall f, g \in L^2(\partial\Omega).$$

**TEOREMA 5.1.6 (Teorema de la traza).** Suponemos que  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  acotado y de clase  $C^1$ . Entonces existe un operador lineal acotado

$$\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega)$$

tal que

- (i)  $\gamma(u) = u|_{\partial\Omega}$  si  $u \in H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ ,
- (ii)  $\|\gamma(u)\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C\|u\|_{H^1(\Omega)}$  para todo  $u \in H^1(\Omega)$ , con  $C > 0$  que depende de  $\Omega$ .

Este resultado es un caso particular del teorema de la traza que se puede observar en [5]. Para lo que viene, vamos a introducir un subespacio de  $(L^2(\Omega))^N$

$$(H^1(\Omega))^N = \left\{ \mathbf{u} = (u_1, \dots, u_N) : u_j \in H^1(\Omega) \right\},$$

el cual es un espacio de Hilbert con el siguiente producto escalar

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, dx + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} (\nabla u_i) \cdot (\nabla v_i) \, dx.$$

De acuerdo con el teorema anterior, en el caso en que  $\mathbf{u} \in (H^1(\Omega))^N$ ,  $\gamma(u_i) \in L^2(\partial\Omega)$  define a  $u_i$  en  $\partial\Omega$ . Considerando además el campo  $\mathbf{n}(x)$  de vectores normales unitarios a  $\partial\Omega$  se introduce la siguiente notación

$$\gamma_n(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^N n_i \gamma(u_i) \tag{5.5}$$

y la llamamos traza normal de  $\mathbf{u}$ .

### Teorema de Stokes generalizado

Para los siguientes resultados vamos a definir el espacio de S6bolev  $H^{1/2}(\partial\Omega)$ . Para ello necesitamos definir primero el siguiente espacio

$$H^{1/2}(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^n) : (1 + |y|^2)^{1/2} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\}$$

donde  $\hat{u}$  representa la transformada de Fourier de  $u$ . Adem6as, se define la siguiente norma

$$\|u\| = \left( \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |y|^2) |\hat{u}(y)|^2 \, dy \right)^{1/2}.$$

Sea  $u \in L^2(\partial\Omega)$ , entonces se lo puede escribir de la forma

$$u = \sum_{j=1}^k (\theta_j u)$$

donde  $(\theta_j u) : \mathcal{O}_j \cap \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Además, consideramos  $A = \{y \in \mathbb{R}^{n-1} : |y| < 1\}$  (observamos que para todo  $y' \in A$  tenemos  $(y', 0) \in Q_0$ ) y definimos la aplicación

$$\begin{aligned} v_j : A &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y' &\longmapsto (\theta_j u)(H_j(y', 0)). \end{aligned}$$

Entonces definimos el siguiente espacio

$$H^{1/2}(\partial\Omega) = \left\{ u : v_j \in H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1}), j = 1, \dots, k \right\}.$$

Además, utilizando el operador traza del Teorema 5.1.6 se tiene que

$$\gamma(H^1(\Omega)) = H^{1/2}(\partial\Omega)$$

La demostración de un resultado análogo a éste se lo encuentra en [9]. Se considera además

$$H^{-1/2}(\partial\Omega) = (H^{1/2}(\partial\Omega))'.$$

**TEOREMA 5.1.7 (Teorema de Green).** *Sea  $\Omega$  un abierto acotado de  $\mathbb{R}^N$  de clase  $C^1$ , que permanece en el mismo lado de la frontera  $\partial\Omega$ . Sea  $u, v \in H^1(\Omega)$ , entonces para  $1 \leq i \leq n$ ,*

$$\int_{\Omega} v \frac{\partial u}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_i} u dx + \int_{\partial\Omega} \gamma(u) \gamma(v) n_i ds,$$

Su demostración se la encuentra en [14].

Observemos en particular para  $u \in H^1(\Omega)$  y para  $v \in H_0^1(\Omega)$ , este teorema verifica

$$\int_{\Omega} v \frac{\partial u}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_i} u dx.$$

Sea  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \in (H^1(\Omega))^N$  y  $v \in H^1(\Omega)$ . Aplicando el teorema anterior a cada  $u_i$

$$\int_{\Omega} v \frac{\partial u_i}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_i} u_i dx + \int_{\partial\Omega} \gamma(u_i) \gamma(v) n_i ds,$$

sumando en  $i$  resulta

$$\int_{\Omega} v(\nabla \cdot \mathbf{u}) dx + \int_{\Omega} \nabla v \cdot \mathbf{u} dx = \int_{\partial\Omega} \gamma_n(\mathbf{u}) \gamma(v) ds \quad \forall \mathbf{u} \in (H^1(\Omega))^N, v \in H^1(\Omega).$$

Este resultado se lo conoce como *Teorema de Stokes Generalizado*. Puesto que  $\gamma(v) \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ , entonces  $\gamma_n(\mathbf{u})$  define un elemento en  $H^{-1/2}(\partial\Omega)$  pues  $H^{1/2}(\partial\Omega) \subset L^2(\partial\Omega) \subset H^{-1/2}(\partial\Omega)$ .

Ahora definimos un nuevo espacio

$$E(\Omega) = \{\mathbf{u} \in (L^2(\Omega))^N : \operatorname{div} \mathbf{u} \in L^2(\Omega)\},$$

el cual es un espacio de Hilbert con el siguiente producto escalar

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{u})(\operatorname{div} \mathbf{v}) \, dx.$$

Observemos que se tiene  $H^1(\Omega)^N \subset E(\Omega) \subset L^2(\Omega)^N$  con inyecciones continuas.

Sea  $\mathbf{u} \in E(\Omega)$ , de acuerdo con [20] y [19], le podemos asociar  $\gamma_n(\mathbf{u}) \in H^{-1/2}$ , donde  $\gamma_n$  es la traza normal definida en (5.5). Además

$$\int_{\Omega} v(\nabla \cdot \mathbf{u}) \, dx + \int_{\Omega} \nabla v \cdot \mathbf{u} \, dx = \langle \gamma_n(\mathbf{u}), \gamma(v) \rangle \quad \forall \mathbf{u} \in E(\Omega), v \in H^1(\Omega).$$

Por lo tanto la condición (5.3) equivale a

$$\langle \gamma_n(\mathbf{u}), w \rangle = 0 \quad \forall w \in H^{1/2}(\partial\Omega).$$

**Observación:** Sea  $\mathbf{u} \in E(\Omega)$  tal que verifica (5.2), entonces (5.3) la entendemos por

$$\int_{\Omega} (\nabla v \cdot \mathbf{u}) \, dx = 0 \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Si definimos el siguiente espacio

$$\mathcal{V} = \{\mathbf{v} \in C_0^\infty(\Omega) : \operatorname{div} v = 0\},$$

su clausura respecto de  $(L^2(\Omega))^N$  es

$$L_\sigma^2(\Omega) = \{\mathbf{u} \in (L^2(\Omega))^N \mid \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ en } \Omega, \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sobre } \partial\Omega\}$$

por lo que un elemento de  $L_\sigma^2(\Omega)$  que cumpla (5.1) será solución de las ecuaciones de Euler. Observemos que  $L_\sigma^2(\Omega) \subset E(\Omega)$ , pero no tiene ninguna relación de contención respecto a  $(H^1(\Omega))^N$ .

## 5.2. Proyección de Leray

Para simplificar un poco las cosas, vamos a enunciar el teorema que se lo conoce como la descomposición de Hodge-Codaira, pero antes de esto cabe mencionar un par de problemas que serán muy útiles en la demostración de este teorema.

### Problema de Dirichlet para el Laplaciano

Sea  $f \in H^{-1}(\Omega)$ , y consideramos

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f & \text{en } \Omega \\ u &= 0 & \text{en } \partial\Omega \end{aligned} \quad (5.6)$$

Se dice que una función  $u \in H_0^1(\Omega)$  es solución débil del problema (5.6) si cumple

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \langle f, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

**PROPOSICIÓN 5.2.1.** *Para toda función  $f \in H^{-1}(\Omega)$ , el problema (5.6), tiene una única solución  $u \in H_0^1(\Omega)$ , la cual satisface la desigualdad*

$$\|u\|_{H^1} \leq C \|f\|_{H^{-1}}$$

donde  $C > 0$  depende únicamente de  $\Omega$ .

Este resultado es un caso particular de las ecuaciones elípticas presentadas en [5].

**Problema de Neumann con condición de borde no homogéneo.**

Sea  $\mathbf{g} \in (L^2(\Omega))^N$ , además

$$\begin{aligned} \Delta u &= \operatorname{div} \mathbf{g} & \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} & \text{sobre } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Una función  $u \in H^1(\Omega)$  es solución débil de (5.7) si

$$\int_{\Omega} (\nabla u - \mathbf{g}) \cdot \nabla \varphi \, dx = 0 \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega).$$

**PROPOSICIÓN 5.2.2.** *Para toda función  $\mathbf{g} \in (L^2(\Omega))^N$  de divergencia cero, el problema (5.7) tiene una solución única  $u \in H^1(\Omega)$ , la cual satisface la desigualdad.*

$$\|u\|_{H^1} \leq C \|\mathbf{g}\|_{L^2}.$$

Este resultado se lo encuentra en [16].

**TEOREMA 5.2.3 (Descomposición de Hodge-Codaira).** *Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  con frontera  $C^1$ , entonces el espacio de las funciones cuadrado integrables en  $\Omega$  se puede representar mediante la siguiente suma directa:*

$$(L^2(\Omega))^N = L_{\sigma}^2 \oplus \nabla H_0^1 \oplus \nabla Z$$

donde  $Z = \{z \in H^1 : \Delta z = 0 \text{ en } \Omega\}$ .

*Demostración.* Sea  $\mathbf{u} \in (L^2(\Omega))^N$ , vamos a mostrar que  $\mathbf{u}$  se puede representar de la forma

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} + \nabla w + \nabla z \quad (5.8)$$

tal que  $\mathbf{v} \in L^2_\sigma(\Omega)$ ,  $w \in H^1_0(\Omega)$ ,  $z \in Z$ . Planteamos el siguiente problema

$$\begin{aligned} \Delta w &= \operatorname{div} \mathbf{u} && \text{en } \Omega, \\ w &= 0 && \text{en } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Gracias a la Proposición 5.2.1, este problema tiene solución única  $w \in H^1_0(\Omega)$ . Observando que  $(\mathbf{u} - \nabla w) \in (L^2(\Omega))^N$  formulamos ahora el problema

$$\begin{aligned} \Delta z &= 0 && \text{en } \Omega, \\ (\nabla z - (\mathbf{u} - \nabla w)) \cdot \mathbf{n} &= 0 && \text{en } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Gracias a que  $\operatorname{div}(\mathbf{u} - \nabla w) = 0$  y a la Proposición 5.2.2, éste tiene solución única en  $H^1(\Omega)$ , por lo tanto para verificar (5.8) basta probar que  $\mathbf{v} \in L^2_\sigma(\Omega)$ .

Observemos que

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} - \nabla w - \nabla z.$$

Por la segunda condición del problema (5.9) se verifica inmediatamente  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$  sobre  $\partial\Omega$ . Para verificar la condición  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$  tomamos  $\varphi \in C^\infty_0(\Omega)$  y observamos que

$$\begin{aligned} (\operatorname{div} \mathbf{v}, \varphi) &= (\mathbf{v}, \nabla \varphi) \\ &= (\mathbf{u} - \nabla w - \nabla z, \nabla \varphi) \\ &= (\operatorname{div} \mathbf{u} - \Delta w - \Delta z, \varphi) \\ &= 0 \end{aligned}$$

esto indica que  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$  entonces  $\mathbf{v} \in L^2_\sigma(\Omega)$ .

Ahora para finalizar, basta mostrar que los espacios en cuestión, son ortogonales entre si, para ello tomaremos atención a que  $C^\infty_0(\Omega)$  es denso en  $H^1_0(\Omega)$  en su respectiva topología. Iniciamos tomando  $\mathbf{v} \in L^2_\sigma(\Omega)$  y  $w \in H^1_0(\Omega)$ , por el teorema de Stokes generalizado se tiene

$$(\mathbf{v}, \nabla w) = - \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{v}) w \, dx + \langle \gamma_n(\mathbf{v}), \gamma(w) \rangle = 0$$

si  $v \in L^2_\sigma(\Omega)$  y  $z \in Z$

$$(\mathbf{v}, \nabla z) = - \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{v}) z \, dx + \langle \gamma_n(\mathbf{v}), \gamma(z) \rangle = 0$$

si  $\tilde{w} \in C_0^\infty(\Omega)$  y  $z \in Z$ , entonces

$$(\nabla z, \nabla \tilde{w}) = -(\Delta z, \tilde{w}) = 0$$

y extendiendo para  $w \in H_0^1(\Omega)$  tenemos

$$(\nabla z, \nabla w) = 0$$

□

A partir de este teorema, es posible definir la proyección

$$\begin{aligned} P_\sigma : (L^2(\Omega))^N &\longrightarrow L^2_\sigma(\Omega) \\ \mathbf{u} &\longmapsto P_\sigma \mathbf{u}. \end{aligned}$$

Como  $L^2_\sigma(\Omega)$  es un subespacio vectorial cerrado de  $(L^2(\Omega))^N$ , entonces es un espacio de Hilbert con el producto escalar de  $(L^2(\Omega))^N$ . Además, vamos a suponer que  $\mathbf{u}$  verifica  $u_i \partial_{x_i} u_j, u_j \partial_{x_i} u_i \in L^2(\Omega)$  para  $i \neq j$ , para esto podremos suponer que  $\partial_{x_k} u_i \in L^\infty(\Omega), \forall i, k \in 1, \dots, n$  además se toma por hipótesis que  $\nabla \tilde{p}$  se encuentra en alguno de los espacios ortogonales a  $L^2_\sigma(\Omega)$ . Como en  $L^2_\sigma(\Omega)$  se verifican ya dos de las ecuaciones de Euler, por lo tanto, vamos a plantear la ecuación que falta sobre este espacio. Analizaremos

$$P_\sigma(\partial_t \mathbf{u} - \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} + \nabla \tilde{p}) = 0.$$

que equivale a analizar

$$(\partial_t \mathbf{u} - \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} + \nabla \tilde{p}, \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in L^2_\sigma(\Omega)$$

por el teorema anterior esto se simplifica y se obtiene

$$(\partial_t \mathbf{u} - \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in L^2_\sigma(\Omega) \tag{5.10}$$

**Observación:** De aquí en adelante, cuando hablamos de *la ecuación de Euler*, nos estamos refiriendo específicamente a la ecuación (5.10), la cual a su vez proviene de una simplificación de la ecuación (5.1).

### 5.3. Sistemas hamiltonianos no canónicos

Introducimos ahora la noción de operador de Poisson, el cual, generaliza el concepto de corchete de Poisson y a su vez extiende el concepto de sistema hamiltoniano. Sea  $W$  un espacio de funciones,  $\xi \in W$ , consideramos la siguiente ecuación

$$\partial_t \xi = \mathcal{J}(\xi) \partial_{\xi} H \quad (5.11)$$

donde  $\mathcal{J}(\xi)$  es un operador lineal antisimétrico,  $H$  un funcional definido sobre  $W$ , tal que  $\partial_{\xi} H$  representa su gradiente. El operador  $\mathcal{J}(\xi)$  se lo conoce como operador de Poisson y  $H$  como el hamiltoniano del sistema.

Un sistema hamiltoniano viene descrito a través de  $W, J$  y  $H$  asociados a una ecuación del tipo (5.11). En la siguiente sección y el siguiente capítulo vamos a describir, dependiendo de la dimensión del dominio sobre el cual se definen los campos vectoriales, en cada caso, un sistema en el que está involucrada la ecuación de Euler descrita por medio de un operador de Poisson. Luego de esto observamos si es posible asociarlo a un sistema hamiltoniano.

### 5.4. Ecuación de Euler con dominio bidimensional

En la presente sección se considera  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  y además se considera

$$\text{curl } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \mathbf{i} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \mathbf{j} \quad ; \quad \text{curl } \mathbf{v} = \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}$$

**LEMA 5.4.1.** *Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , todo campo vectorial bidimensional  $\mathbf{u}$  que satisface las condiciones:*

- a)  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  en  $\Omega$
- b)  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0$  en  $\partial\Omega$

se lo puede escribir como

$$\mathbf{u} = \text{curl } \varphi$$

donde  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , visto de otro modo; se verifica

$$L_{\sigma}^2(\Omega) = \{\text{curl } \varphi : \varphi \in H^1(\Omega)\}.$$

*Demostración.* Definimos el espacio

$$\mathcal{X} = \{curl \varphi : \varphi \in H^1(\Omega).\}$$

Sea  $\mathbf{u} \in \mathcal{X}$ , observemos que

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u} &= \nabla \cdot (curl \varphi) \\ &= 0 \end{aligned}$$

además para verificar su condición en  $\partial\Omega$ . Sea  $v \in H^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla v \cdot \mathbf{u} \, d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} \nabla v \cdot (curl \varphi) \, d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} [curl (\nabla v)] \varphi \, d\mathbf{x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

entonces  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0$ . Por lo tanto  $\mathbf{u} \in L^2_{\sigma}$  y se concluye  $\mathcal{X} \subset L^2_{\sigma}$ . Ahora suponemos  $\mathbf{u} \in L^2_{\sigma}(\Omega)$ , vamos a encontrar  $\varphi \in H^1(\Omega)$  tal que  $\mathbf{u} = curl \varphi$ .

Para esto, extendemos  $\mathbf{u}$  hacia todo  $\mathbb{R}^2$  de la siguiente forma.

$$\tilde{\mathbf{u}} = \begin{cases} \mathbf{u} & \text{en } \Omega \\ 0 & \text{en } \mathbb{R}^2 - \Omega \end{cases}$$

y se introduce la transformada de Fourier para cada  $\tilde{u}_i$  con  $i = 1, 2$ .

$$\tilde{u}_i(\xi) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-2\pi i(x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2)} \tilde{u}_i(x) \, dx,$$

gracias a la transformada inversa, se obtiene

$$div \tilde{\mathbf{u}} = \int_{\mathbb{R}^2} e^{2\pi i(x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2)} 2\pi i(\xi_1 \tilde{u}_1 + \xi_2 \tilde{u}_2) \, d\xi$$

Por lo que la condición de divergencia nula equivale a

$$\xi_1 \tilde{u}_1 + \xi_2 \tilde{u}_2 = 0 \tag{5.12}$$

Definimos una función  $\hat{\varphi}$ , de la siguiente forma

$$\hat{\varphi} = \frac{1}{2\pi i \xi_2} \tilde{u}_1, \tag{5.13}$$

la cual, gracias a la condición (5.12) cumple

$$\hat{\varphi} = \frac{1}{-2\pi i \xi_1} \tilde{u}_2, \tag{5.14}$$

Así, tomando  $\varphi$  a la transformada inversa de  $\hat{\varphi}$ , es decir,

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{2\pi i(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2)} \hat{\varphi}(\xi) d\xi$$

se tiene

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = \tilde{u}_1 \quad \text{y} \quad -\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \tilde{u}_2$$

Es necesario mostrar además que  $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^2)$ , para ello vamos a mostrar que  $\hat{\varphi} \in L^2(\mathbb{R})$ . Dado que  $\tilde{u}_i \in L^2(\mathbb{R})$  y considerando (5.13) y (5.14), basta mostrar que  $\hat{\varphi}$  está acotado en una vecindad del origen. Gracias a (5.12) tenemos entonces

$$\tilde{u}_1(\xi_1, 0) = 0,$$

puesto que  $\tilde{u}_1$  es holomorfa, entonces al considerar su serie de Taylor tenemos

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1(\xi_1, \xi_2) &= \xi_2 \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \xi_2}(\xi_1, 0) + o(|\xi_2|^2), \\ \hat{\varphi}(\xi_1, \xi_2) &= \frac{1}{2\pi i} \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \xi_2}(\xi_1, 0) + o(|\xi_2|) \end{aligned}$$

por lo tanto  $\hat{\varphi}$  está acotado en una vecindad del origen, por lo que se encuentra en  $L^2(\mathbb{R}^2)$ , luego se concluye que  $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^2)$ , mas aún,  $\varphi \in H^1(\Omega)$

□

**Observación:** Todo campo vectorial bidimensional  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ , es posible considerarlo como un campo en tres dimensiones de la forma  $\bar{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, 0)$ , así, el campo  $\text{curl } \varphi$  se lo puede expresar por medio de  $\nabla \varphi \times \mathbf{e}$  donde  $\mathbf{e}$  representa el vector  $(0, 0, 1)$ .

### 5.4.1. Ecuación respecto a la vorticidad

Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , el vórtice para los elementos de  $L^2_\sigma(\Omega)$  (considerados como campos en tres dimensiones  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, 0)$ ) se lo representa por

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} = -(\Delta \varphi) \mathbf{e} = \omega \mathbf{e}$$

se verifica además  $\boldsymbol{\omega} = \omega \cdot \mathbf{e}$ . Además considerando nuevamente el problema de Dirichlet para el Laplaciano

$$\begin{aligned} -\Delta \varphi &= \omega \quad \text{en } \Omega \\ \varphi &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \end{aligned}$$

y gracias a la Proposición 5.2.1 vamos definir un operador  $K \in \mathcal{L}(H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega))$  que provee la solución débil de este problema como sigue

$$\begin{aligned} \mathcal{K} : H^{-1}(\Omega) &\longrightarrow H_0^1(\Omega) \\ \omega &\longmapsto \varphi. \end{aligned}$$

Sea  $a \in H^{-1}$ , se define el Operador de Poisson respecto de  $a$  como sigue

$$\begin{aligned} J(a) : H_0^1(\Omega) &\longrightarrow H^{-1}(\Omega) \\ b &\longmapsto J(a)b = -[\nabla a \times \nabla b] \cdot \mathbf{e} \end{aligned}$$

observemos que

$$-[\nabla a \times \nabla b] \cdot \mathbf{e} := \partial_y a \cdot \partial_x b - \partial_x a \cdot \partial_y b$$

**LEMA 5.4.2.** *La siguiente ecuación en  $H^{-1}(\Omega)$ , representada por*

$$\langle \partial_t \omega - J(\omega)\mathcal{K}\omega, \phi \rangle = 0 \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega) \quad (5.15)$$

*es equivalente a la ecuación de Euler en  $L_\sigma^2(\Omega)$ .*

*Demostración.* Considerando la topología de  $L_\sigma^2(\Omega)$ , y debido a la descomposición ortogonal la ecuación de Euler se plantea de la forma

$$(\partial_t \mathbf{u} - \mathbf{u} \times \omega, \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in L_\sigma^2(\Omega),$$

para que esto tenga sentido,  $u_i \omega \in L^2(\Omega)$ , (para esto suponemos  $\omega \in L^\infty(\Omega)$ ) además por el lema anterior, cada  $\mathbf{v} \in L_\sigma^2(\Omega)$  es de la forma  $\mathbf{v} = \nabla \phi \times \mathbf{e}$ , por lo tanto se puede representar

$$\begin{aligned} (\partial_t \mathbf{u} - \mathbf{u} \times \omega, \nabla \times (\phi \mathbf{e})) &= \langle \mathbf{e} \cdot \nabla \times (\partial_t \mathbf{u} - \mathbf{u} \times \omega), \phi \rangle \\ &= \langle \mathbf{e} \cdot \nabla \times \partial_t \mathbf{u} - \mathbf{e} \cdot \nabla \times (\mathbf{u} \times \omega), \phi \rangle \end{aligned}$$

observemos que  $\mathbf{e} \cdot \nabla \times (\partial_t \mathbf{u} - \mathbf{u} \times \omega) \in H^{-1}(\Omega)$ . Además por un lado

$$\mathbf{e} \cdot \nabla \times \partial_t \mathbf{u} = \partial_t \omega$$

y por otro lado, considerando  $\mathbf{u} = \nabla \phi \times \mathbf{e}$

$$\begin{aligned} \mathbf{e} \cdot \nabla \times (\mathbf{u} \times \omega) &= \mathbf{e} \cdot \nabla \times (-\omega \partial_x \phi \mathbf{i} - \omega \partial_y \phi \mathbf{j}) \\ &= -\partial_x \omega \partial_y \phi + \partial_y \omega \partial_x \phi \\ &= J(\omega) \phi. \end{aligned}$$

En  $H^{-1}(\Omega)$  se tiene

$$\begin{cases} \partial_t \omega = J(\omega) \varphi \\ \omega = -\Delta \varphi \end{cases}$$

considerando el operador  $\mathcal{K}$ , se tiene

$$(\partial_t \mathbf{u} - \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}, \nabla \varphi \times \mathbf{e}) = \langle \partial_t \omega - J(\omega) \mathcal{K} \omega, \varphi \rangle.$$

□

### 5.4.2. Hamiltoniano

Una vez dicho en la sección 4.3.1 que la variación de la energía interna no interviene en la variación de la energía cinética, el Hamiltoniano queda definido por

$$H(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{u}\|^2 = \frac{1}{2} (\mathbf{u}, \mathbf{u}).$$

Para  $\mathbf{u} \in L^2_\sigma(\Omega)$ , existe  $\varphi$  tal que  $\mathbf{u} = \partial_y \varphi \mathbf{i} - \partial_x \varphi \mathbf{j}$ , además observando que

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}, \nabla \varphi \times \mathbf{e})_{L^2} &= \int_{\Omega} u_1 \partial_y \varphi \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} u_2 \partial_x \varphi \, d\mathbf{x} \\ &= - \int_{\Omega} \partial_y u_1 \varphi \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \partial_x u_2 \varphi \, d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} (-\partial_y u_1 + \partial_x u_2) \varphi \, d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} [\mathbf{e} \cdot (\nabla \times \mathbf{u})] \varphi \, d\mathbf{x} \\ &= \langle \mathbf{e} \cdot (\nabla \times \mathbf{u}), \varphi \rangle \end{aligned} \tag{5.16}$$

el Hamiltoniano se lo puede representar cómo

$$H(\varphi) = \langle \mathbf{e} \cdot \nabla \times \mathbf{u}, \varphi \rangle$$

$$H(\varphi) = \langle -\Delta \varphi, \varphi \rangle$$

$$H(\omega) = \frac{1}{2} \langle \omega, \varphi \rangle$$

el Hamiltoniano queda en función de  $\omega \in H^{-1}$  y de  $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ . Haciendo uso de  $\mathcal{K}$  lo ponemos en función de  $\omega \in H^{-1}(\Omega)$

$$H(\omega) = \frac{1}{2} \langle \omega, \mathcal{K}(\omega) \rangle$$

**Definición 5.4.3 (Gradiente en espacios de Hilbert).** Sea  $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}$  un funcional definido tal que  $X$  es un espacio de Hilbert. Si existe la derivada de Gâteaux de  $\Phi$

en  $u$ , es decir existe

$$\begin{aligned}\delta\Phi(u)(\tilde{u}) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [\Phi(u + \epsilon\tilde{u}) - \Phi(u)] \\ &= \tilde{g}(\tilde{u})\end{aligned}$$

tal que  $\tilde{g} \in X^*$ , entonces a  $\tilde{g}$  lo llamaremos gradiente de  $\Phi$  y lo notaremos por

$$\partial_u \Phi.$$

Mediante el teorema de representación de Riesz, es posible también asociar el gradiente con  $g \in X$  tal que  $\tilde{g}(\tilde{u}) = (g, \tilde{u})$ .

Vamos a buscar el gradiente de  $H$ , pero antes de esto observaremos la siguiente propiedad sobre  $\mathcal{K}$ . Sea  $u, v \in H^{-1}(\Omega)$

$$\begin{aligned}\langle u, \mathcal{K}v \rangle &= \langle -\Delta \mathcal{K}u, \mathcal{K}v \rangle \\ &= \int_{\Omega} \nabla \mathcal{K}u \cdot \nabla \mathcal{K}v \, dx \\ &= \langle -\Delta \mathcal{K}v, \mathcal{K}u \rangle \\ &= \langle v, \mathcal{K}u \rangle.\end{aligned}$$

Ahora analizando el gradiente de  $H(\omega)$

$$\begin{aligned}H(\omega + \epsilon u) - H(\omega) &= \frac{1}{2} [\langle \omega + \epsilon u, \mathcal{K}(\omega + \epsilon u) \rangle - \langle \omega, \mathcal{K}\omega \rangle] \\ &= \frac{1}{2} [\langle \epsilon u, \mathcal{K}\omega \rangle + \langle \omega, \mathcal{K}(\epsilon u) \rangle + \epsilon^2 \langle u, \mathcal{K}u \rangle] \\ &= \frac{1}{2} [\epsilon \langle u, \mathcal{K}\omega \rangle + \epsilon \langle u, \mathcal{K}\omega \rangle + \epsilon^2 \langle u, \mathcal{K}u \rangle] \\ &= \epsilon \langle u, \mathcal{K}\omega \rangle + O(\epsilon^2).\end{aligned}$$

Se observa que

$$\partial_{\omega} H = \mathcal{K}\omega,$$

en este caso éste gradiente está considerado en  $H_0^1(\Omega)$ , por lo tanto en  $H^{-1}(\Omega)$  se expresa

$$\partial_t \omega = J(\omega) \partial_{\omega} H$$

## Capítulo 6

### Ecuaciones de Euler en $\Omega \subset \mathbb{R}^3$

En el capítulo anterior, se pudo observar que para  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , cada campo vectorial bidimensional  $\mathbf{u} \in L^2_\sigma(\Omega)$  se identifica con un elemento de la forma  $(\text{curl } \varphi)$ , a partir de esto la ecuación de Euler formulada en  $L^2_\sigma(\Omega)$  se la reformula en función de la variable vorticidad, obteniendo así un sistema hamiltoniano en  $H^{-1}(\Omega)$ . En el presente capítulo vamos a analizar lo que sucede cuando  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ . Observaremos casos específicos respecto al campo de velocidades y reformularemos la ecuación de Euler nuevamente respecto a la variable vorticidad. Definiremos entonces el operador de Poisson que nos permita expresar la ecuación de Euler a través de éste, además que sea posible asociarla a un sistema hamiltoniano.

A continuación la ecuación de Euler formulada respecto a la variable velocidad vamos a expresarla por medio de un operador de Poisson.

En  $L^2_\sigma(\Omega)$  la ecuación de Euler equivale a

$$\partial_t \mathbf{u} = P_\sigma(\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}).$$

Considerando el hamiltoniano  $H(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{u}\|^2$ , observemos que

$$\begin{aligned} \delta_{\mathbf{u}} H(\mathbf{h}) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [H(\mathbf{u} + \epsilon \mathbf{h}) - H(\mathbf{u})] \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [(\mathbf{u}, \mathbf{h}) + \epsilon (\mathbf{h}, \mathbf{h})] \\ &= (\mathbf{u}, \mathbf{h}), \end{aligned}$$

por lo tanto, su gradiente es

$$\partial_{\mathbf{u}} H = \mathbf{u}$$

Se define el operador de Poisson (no canónico) que depende de  $\mathbf{u}$

$$\begin{aligned} J(\mathbf{u}) : L_\sigma^2(\Omega) &\longrightarrow L_\sigma^2(\Omega) \\ \mathbf{v} &\longmapsto -P_\sigma((\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{v}) \end{aligned}$$

Este operador es lineal y además es antisimétrico respecto al producto escalar en  $L_\sigma^2(\Omega)$ . A continuación se muestra la antisimetría.

Sea  $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in L_\sigma^2(\Omega)$ , observemos que

$$(P_\sigma((\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{v}), \mathbf{v}') = ((\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{v}, \mathbf{v}')$$

puesto que el término  $(\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{v} - (P_\sigma((\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{v}))$  es ortogonal a  $\mathbf{v}'$ . Además

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}, \mathbf{v}') &= \int_\Omega v'_1(\omega_2 v_3 - \omega_3 v_2) + v'_2(\omega_3 v_1 - \omega_1 v_3) + v'_3(v_2 \omega_1 - v_1 \omega_2) \, dx \\ &= -(\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}') \end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos:

$$\begin{aligned} (J(\mathbf{u})\mathbf{v}, \mathbf{v}') &= -((\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{v}, \mathbf{v}') \\ &= (\mathbf{v}, (\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{v}') \\ &= -(\mathbf{v}, J(\mathbf{u})\mathbf{v}'). \end{aligned}$$

Se observa entonces que la ecuación de Euler en  $L_\sigma^2(\Omega)$  se escribe de la forma

$$\partial_t \mathbf{u} = J(\mathbf{u})\partial_{\mathbf{u}} H$$

Así obtenemos un sistema hamiltoniano respecto a la variable  $\mathbf{u}$ . Observemos que todo esto también se cumple en el caso  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , pero en aquel caso fue posible caracterizar a los elementos de  $L_\sigma^2(\Omega)$  y analizar esta ecuación respecto a  $\boldsymbol{\omega}$ . En un principio, no se conoce si es posible hacer lo mismo al considerar  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , por lo cual se estudiarán subespacios de  $L_\sigma^2(\Omega)$  tal que sean espacios de Hilbert, y trabajaremos con la ecuación de Euler dentro de éstos.

## 6.1. Espacio en función de campos escalares

Para construir el primer espacio, vamos a analizar lo que sucede cuando  $\mathbf{u}$  tiene una forma similar al caso bidimensional. Para dar sentido a las 3 dimensiones del campo vectorial resultante usaremos  $\mathbf{e} = \nabla \zeta$  con  $\zeta(x, y, z) = x + y + z$  y analizare-

mos el espacio formado por elementos del tipo  $\nabla\varphi \times \mathbf{e}$ , donde  $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ .

**LEMA 6.1.1.** Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , definimos el siguiente conjunto

$$Y = \{\nabla\varphi \times \mathbf{e} : \varphi \in H_0^1(\Omega)\}$$

entonces la siguiente inclusión se verifica

$$\bar{Y} \subset L_\sigma^2$$

pero la otra inclusión no se verifica.

*Demostración.* Sea  $\mathbf{u} = \nabla\varphi \times \mathbf{e} \in Y$ , observemos que

$$\begin{aligned} \nabla\varphi \times \mathbf{e} &= (\varphi_y - \varphi_z)i + (\varphi_z - \varphi_x)j + (\varphi_x - \varphi_y)k \\ &= \nabla \times (\varphi\mathbf{e}) \end{aligned}$$

por lo cual

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot (\nabla \times (\varphi\mathbf{e})) = 0.$$

Además, sea  $v \in H^1(\Omega)$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla v \cdot \mathbf{u} \, d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} \nabla v \cdot (\nabla \times (\varphi\mathbf{e})) \, d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} (\nabla \times \nabla v) \cdot (\varphi\mathbf{e}) \, d\mathbf{x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

por esto se cumple

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega$$

Además, para analizar en que falla la igualdad entre estos espacios, consideramos  $\mathbf{u}$  ortogonal a  $Y$  y observamos

$$\mathbf{e} \cdot \nabla \times \mathbf{u} = \partial_y u_3 - \partial_z u_2 + \partial_z u_1 - \partial_x u_3 + \partial_x u_2 - \partial_y u_1$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}, \nabla\varphi \times \mathbf{e})_{L^2} &= \int_{\Omega} u_1 \partial_y \varphi - u_1 \partial_z \varphi + u_2 \partial_z \varphi - u_2 \partial_x \varphi + u_3 \partial_x \varphi - u_3 \partial_y \varphi \, d\mathbf{x} \quad (6.1) \\ &= \int_{\Omega} -\partial_y u_1 \varphi + \partial_z u_1 \varphi - \partial_z u_2 \varphi + \partial_x u_2 \varphi - \partial_x u_3 \varphi + \partial_y u_3 \varphi \, d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} (\partial_y u_3 - \partial_z u_2 + \partial_z u_1 - \partial_x u_3 + \partial_x u_2 - \partial_y u_1) \varphi \, d\mathbf{x} \\ &= \langle \mathbf{e} \cdot \nabla \times \mathbf{u}, \varphi \rangle \end{aligned}$$

$$= 0 \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

por lo que tenemos  $\mathbf{e} \cdot \nabla \times \mathbf{u} = 0$ , y a partir de  $\mathbf{u} \in L_\sigma^2(\Omega)$ , expresamos el siguiente sistema

$$\begin{aligned} \mathbf{e} \cdot \nabla \times \mathbf{u} + \nabla \cdot \mathbf{u} &= \partial_x u_1 + \partial_y u_2 + \partial_z u_3 + \partial_z u_3 - \partial_z u_2 + \partial_z u_1 - \partial_x u_3 + \partial_x u_2 - \partial_y u_1 \\ \mathbf{e} \cdot \nabla \times \mathbf{u} - \nabla \cdot \mathbf{u} &= -\partial_x u_1 - \partial_y u_2 - \partial_z u_3 + \partial_y u_3 - \partial_z u_2 + \partial_z u_1 - \partial_x u_3 + \partial_x u_2 - \partial_y u_1 \end{aligned}$$

haciendo el siguiente cambio de variable

$$\begin{aligned} v_1 &= u_1 - u_2 + u_3 \\ v_2 &= u_1 + u_2 - u_3 \\ v_3 &= u_1 - u_2 - u_3 \end{aligned}$$

se tiene

$$\begin{aligned} \partial_x v_2 - \partial_y v_3 + \partial_z v_1 &= 0 \\ -\partial_x v_1 - \partial_y v_2 + \partial_z v_3 &= 0 \end{aligned}$$

por lo cual en este caso el complemento ortogonal del conjunto  $Y$  respecto a  $L_\sigma^2(\Omega)$  será diferente de  $\{0\}$ , lo que implica que  $Y$  no es, por lo menos, denso en  $L_\sigma^2(\Omega)$ , por lo cual se verifica la contención  $\bar{Y} \subset L_\sigma^2(\Omega)$  estricta.  $\square$

Recordemos que para un espacio de Hilbert  $H$ , y un conjunto  $X \subset H$  denso en  $H$ , se tiene que  $X^\perp = \{0\}$ . Observemos que todo  $\mathbf{u} \in Y$  es un campo vectorial de la forma  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, -(u_1 + u_2))$  (de cierta forma un campo bidimensional), además  $\bar{Y}$  resulta ser un espacio vectorial, por lo cual es un espacio de Hilbert con el producto escalar heredado de  $L_\sigma^2(\Omega)$ . Al plantear la ecuación solamente en este espacio tenemos

$$(\partial_t \mathbf{u} - \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in Y. \quad (6.2)$$

**LEMA 6.1.2.** Si trabajamos sobre el espacio  $\bar{Y} \subset L_\sigma^2(\Omega)$ , la ecuación de Euler (6.2) es equivalente a la siguiente ecuación en  $H^{-1}(\Omega)$

$$\langle \partial_t \tilde{\omega} + \mathbf{u} \cdot \nabla \tilde{\omega}, \varphi \rangle = 0 \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

donde  $\tilde{\omega} = \mathbf{e} \cdot (\nabla \times \mathbf{u})$ .

*Demostración.* Sea  $\mathbf{v} \in Y$ , entonces  $\mathbf{v} = \nabla \varphi \times \mathbf{e}$ , además, por (6.1) se obtiene

$$(\partial_t \mathbf{u} - \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}, \nabla \times (\varphi \mathbf{e})) = \langle \mathbf{e} \cdot \nabla \times (\partial_t \mathbf{u} - \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}), \varphi \rangle.$$

Ahora al desarrollar la parte derecha de esta ecuación se observa

$$\mathbf{e} \cdot \nabla \times (\partial_t \mathbf{u} - \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{e} \cdot \nabla \times \partial_t \mathbf{u} - \mathbf{e} \cdot \nabla \times (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega})$$

y desarrollando la segunda parte de ésta tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} &= (u_2 \omega_3 - u_3 \omega_2) \mathbf{i} + (u_3 \omega_1 - u_1 \omega_3) \mathbf{j} + (u_1 \omega_2 - u_2 \omega_1) \mathbf{k} \\ \nabla \times (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) &= (\partial_y (u_1 \omega_2 - u_2 \omega_1) - \partial_z (u_3 \omega_1 - u_1 \omega_3)) \mathbf{i} \\ &\quad + (\partial_z (u_2 \omega_3 - u_3 \omega_2) - \partial_x (u_1 \omega_2 - u_2 \omega_1)) \mathbf{j} \\ &\quad + (\partial_x (u_3 \omega_1 - u_1 \omega_3) - \partial_y (u_2 \omega_3 - u_3 \omega_2)) \mathbf{k} \\ \mathbf{e} \cdot \nabla \times (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) &= (u_1 + u_3) \partial_y \omega_2 - (\omega_1 + \omega_3) \partial_y u_2 \\ &\quad + (u_2 + u_3) \partial_x \omega_1 - (\omega_2 + \omega_3) \partial_x u_1 \\ &\quad + (u_1 + u_2) \partial_z \omega_3 - (\omega_1 + \omega_2) \partial_z u_3 \\ &\quad + \omega_1 \partial_x (u_2 + u_3) - u_1 \partial_x (\omega_2 + \omega_3) \\ &\quad + \omega_2 \partial_y (u_1 + u_3) - u_2 \partial_y (\omega_1 + \omega_3) \\ &\quad + \omega_3 \partial_z (u_2 + u_1) - u_3 \partial_z (\omega_2 + \omega_1) \\ &= (u_1 + u_3) \partial_y \omega_2 - (\omega_1 + \omega_3) \partial_y u_2 + u_2 \partial_y \omega_2 - \omega_2 \partial_y u_2 \\ &\quad + (u_2 + u_3) \partial_x \omega_1 - (\omega_2 + \omega_3) \partial_x u_1 + u_1 \partial_x \omega_1 - \omega_1 \partial_x u_1 \\ &\quad + (u_1 + u_2) \partial_z \omega_3 - (\omega_1 + \omega_2) \partial_z u_3 + u_3 \partial_z \omega_3 - \omega_3 \partial_z u_3 \\ &\quad + \omega_1 \partial_x (u_2 + u_3) - u_1 \partial_x (\omega_2 + \omega_3) - (u_1 \partial_x \omega_1 - \omega_1 \partial_x u_1) \\ &\quad + \omega_2 \partial_y (u_1 + u_3) - u_2 \partial_y (\omega_1 + \omega_3) - (u_2 \partial_y \omega_2 - \omega_2 \partial_y u_2) \\ &\quad + \omega_3 \partial_z (u_2 + u_1) - u_3 \partial_z (\omega_2 + \omega_1) - (u_3 \partial_z \omega_3 - \omega_3 \partial_z u_3) \\ &= (\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}) (\partial_x \omega_1 + \partial_y \omega_2 + \partial_z \omega_3) - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}) (\partial_x u_1 + \partial_y u_2 + \partial_z u_3) \\ &\quad + (\omega_1 \partial_x (\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}) + \omega_2 \partial_y (\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}) + \omega_3 \partial_z (\mathbf{u} \cdot \mathbf{e})) \\ &\quad - (u_1 \partial_x (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}) + u_2 \partial_y (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}) + u_3 \partial_z (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e})) \\ &= (\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}) (\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}) - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}) (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla (\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}) - \mathbf{u} \cdot \nabla (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}) \end{aligned}$$

dado que  $\mathbf{u} \in \bar{Y}$  se verifica

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{e} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \mathbf{e} \cdot \nabla \times (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) &= -\mathbf{u} \cdot [\nabla (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e})] \\ &= -\mathbf{u} \cdot [\nabla \tilde{\omega}] \end{aligned}$$

Entonces la ecuación de Euler se puede expresar como

$$\langle \partial_t \tilde{\omega} + \mathbf{u} \cdot \nabla \tilde{\omega}, \varphi \rangle = 0 \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

□

Además, el hamiltoniano del sistema es  $H(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{u}\|^2$ , pero a  $H$  lo queremos considerar en función de  $\tilde{\omega}$ , lo cual sería posible sólo para los elementos  $\nabla \varphi \times \mathbf{e} \in Y$ . Para estos elementos se tiene

$$H(\tilde{\omega}) = \frac{1}{2} \langle \tilde{\omega}, \varphi \rangle.$$

Se observa que el gradiente de  $H(\tilde{\omega})$  se lo podría relacionar con  $\varphi$ .

Observemos la siguiente relación en este caso.

$$\begin{aligned} \mathbf{e} \cdot \nabla \times (\mathbf{u} \times \omega) &= -\mathbf{u} \cdot [\nabla(\omega \cdot \mathbf{e})] \\ &= -[\nabla \varphi \times \mathbf{e}] \cdot [\nabla(\tilde{\omega})] \\ &= \mathbf{e} \cdot (\nabla \varphi \times \nabla \tilde{\omega}) \\ &= -\mathbf{e} \cdot (\nabla \tilde{\omega} \times \nabla \varphi). \end{aligned}$$

Además, observemos el siguiente el corchete de Poisson

$$\begin{aligned} \{\cdot, \cdot\} : C^\infty(\Omega) \times C^\infty(\Omega) &\longrightarrow C^\infty(\Omega) \\ (a, b) &\longmapsto \{a, b\} = -\nabla a \times \nabla b \cdot \mathbf{e} \end{aligned}$$

escrito de otra forma

$$\{a, b\} = \partial_z a \partial_y b - \partial_z b \partial_y a + \partial_x a \partial_z b - \partial_z a \partial_x b + \partial_y a \partial_x b - \partial_x a \partial_y b$$

éste posee efectivamente las propiedades de un corchete de Poisson (ver apéndice).

A partir de éste, vamos a definir el operador de Poisson del espacio  $H_0^1(\Omega)$  en  $H^{-1}(\Omega)$  como sigue:

$$\begin{aligned} J(\tilde{\omega}) : H_0^1(\Omega) &\longrightarrow H^{-1}(\Omega) \\ \varphi &\longmapsto J(\tilde{\omega})\varphi = -\nabla \tilde{\omega} \times \nabla \varphi \cdot \mathbf{e} \end{aligned}$$

Ahora, solamente si fuese el caso que la solución  $\mathbf{u}$  de (6.2) tenga la forma  $\nabla \varphi \times \mathbf{e}$ , se cumple:

$$\langle \partial_t \tilde{\omega} - J(\tilde{\omega})\varphi, \varphi \rangle = 0 \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \quad (6.3)$$

Observemos la relación que tienen  $\boldsymbol{\omega}$  y  $\varphi$  para los elementos de  $Y$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega} &= \nabla \times \mathbf{u} \\
&= [(\partial_{yx}\varphi - \partial_{yy}\varphi) - (\partial_{zz}\varphi - \partial_{zx}\varphi)]i + [(\partial_{zy}\varphi - \partial_{zz}\varphi) - (\partial_{xx}\varphi - \partial_{xy}\varphi)]j \\
&\quad + [(\partial_{xz}\varphi - \partial_{xx}\varphi) - (\partial_{yy}\varphi - \partial_{yz}\varphi)]k \\
&= [\partial_x(\partial_y\varphi + \partial_z\varphi) - (\partial_{yy}\varphi + \partial_{zz}\varphi)]i + [\partial_y(\partial_x\varphi + \partial_z\varphi) - (\partial_{xx}\varphi + \partial_{zz}\varphi)]j \\
&\quad + [\partial_z(\partial_x\varphi + \partial_y\varphi) - (\partial_{xx}\varphi + \partial_{yy}\varphi)]k \\
&= [\partial_x(\nabla\varphi \cdot \mathbf{e}) - \Delta\varphi]i + [\partial_y(\nabla\varphi \cdot \mathbf{e}) - \Delta\varphi]j + [\partial_z(\nabla\varphi \cdot \mathbf{e}) - \Delta\varphi]k \\
&= \nabla(\nabla\varphi \cdot \mathbf{e}) - (\Delta\varphi)\mathbf{e}
\end{aligned}$$

notemos que al trabajar con este campo  $\mathbf{e}$ , se tiene

$$\tilde{\omega} = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e} = (-2\Delta + \Psi)\varphi.$$

Aquí definimos  $\Psi = \partial_{xy} + \partial_{yz} + \partial_{zx} + \partial_{yx} + \partial_{zy} + \partial_{xz}$ . Esta vez expresamos  $\tilde{\omega}$  en relación directa con  $\varphi$  mediante

$$\tilde{\omega} = [-2\Delta + \Psi]\varphi$$

pero no se conoce si a cada elemento  $\tilde{\omega} \in H^{-1}(\Omega)$  se lo puede relacionar con un único  $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ . En este caso obtenemos el sistema en  $H^{-1}(\Omega)$ .

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{\omega} - J(\tilde{\omega})\varphi = 0 \\ \tilde{\omega} = [-2\Delta + \Psi]\varphi \end{cases} \quad (6.4)$$

Observemos que una solución a este sistema, implica una solución para la ecuación de Euler en  $L_v^2(\Omega)$ , pero no es un problema equivalente. Ahora, para expresar (6.3) en función de  $\tilde{\omega}$  solamente, es necesario definir un operador inverso a  $[-2\Delta + \Psi]$ . Este operador inverso se espera definir mediante la solución del siguiente problema, en el caso que tenga una única solución.

Sea  $\tilde{\omega} \in H^{-1}(\Omega)$

$$\begin{cases} L\varphi = \tilde{\omega}(x, y, z) & \text{en } \Omega \\ \varphi = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (6.5)$$

donde  $L = [-2\Delta + \Psi]$ . El cual puede ser visto de la forma

$$L = - \begin{bmatrix} \partial_x & \partial_y & \partial_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix}$$

Observemos que este operador  $L$  no es elíptico, pues uno de los valores propios de la matriz en cuestión es cero. Por lo tanto vamos a tomar un adecuado cambio de variable, y reformular el problema.

Tomamos

$$\begin{cases} u = x \\ v = x + y \\ \tau = x + y + z \end{cases}$$

en este caso

$$\varphi(x, y, z) = \varphi(u, v - u, \tau - v) = \tilde{\varphi}(u, v, \tau)$$

además se define un nuevo dominio  $\tilde{\Omega}$ .

$$\tilde{\Omega} = \{(u, v, \tau) : (u, v - u, \tau - v) \in \Omega\}$$

Al hacer este cambio de variable, se reformula el problema (ver apéndice). El nuevo problema se lo escribe de la forma:

$$\begin{cases} \tilde{L}\tilde{\varphi} = \tilde{\omega}(u, v - u, \tau - v) & \text{en } \tilde{\Omega} \\ \tilde{\varphi} = 0 & \text{sobre } \partial\tilde{\Omega} \end{cases}$$

donde:

$$\tilde{L} = - \begin{bmatrix} \partial_u & \partial_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_u \\ \partial_v \end{bmatrix}.$$

Esta vez el operador no tiene dependencia de  $\tau$ , además es un problema elíptico respecto de las variables  $u, v$ , por lo tanto, si fijamos  $\tau$ , éste se transforma en un problema paramétrico, para éste se considera un nuevo dominio

$$\tilde{\Omega}_\tau = \{(u, v) : (u, v, \tau) \in \tilde{\Omega}\}$$

y un problema

$$\begin{cases} \tilde{L}\tilde{\varphi} = \tilde{\omega}(u, v - u, \tau - v) & \text{en } \tilde{\Omega}_\tau \\ \tilde{\varphi} = 0 & \text{sobre } \partial\tilde{\Omega}_\tau \end{cases} \quad (6.6)$$

observamos que éste es un problema elíptico. La forma bilineal asociada al operador  $\tilde{L}$  se lo escribe como sigue

$$B[\varphi, \phi] := \int_{\Omega} 2(\partial_u \varphi \partial_u \phi + \partial_v \varphi \partial_v \phi) + \partial_u \varphi \partial_v \phi + \partial_v \varphi \partial_u \phi.$$

Además diremos que  $\varphi \in H_0^1(\tilde{\Omega}_\tau)$  es una solución débil del problema (6.6) si verifica

$$B[\varphi, \phi] = (\tilde{\omega}, \phi)$$

para todo  $\phi \in H_0^1(\tilde{\Omega}_\tau)$ .  $B[\phi, \phi]$  es un operador bilineal, continuo y coercivo, además  $(\tilde{\omega}, \phi)$  representa un funcional lineal y acotado en  $H_0^1(\Omega)$ . Por el teorema de Lax-Milgram cada uno de estos problemas tiene una única solución  $\varphi_\tau$  en  $H_0^1(\tilde{\Omega}_\tau)$ .

Sea

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} : \quad \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v, \tau) &\longmapsto \tilde{\varphi}_\tau(u, v) \end{aligned}$$

por lo tanto, se obtiene una solución paramétrica de (6.5).

Observemos que no se verifica necesariamente  $\tilde{\varphi} \in H_0^1(\tilde{\Omega})$ , el problema radica en que dados  $\tau_1$  y  $\tau_2$ , no conocemos la relación que guardan  $\tilde{\varphi}_{\tau_1}$  con  $\tilde{\varphi}_{\tau_2}$ , entonces la derivada respecto a  $\tau$  puede no estar definida. Hasta mientras no podemos asegurar que exista una única solución del problema (6.5)

Debido a que no logramos definir un operador  $[-2\Delta + \Psi]^{-1}$ , por el momento no se puede hablar de una función

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_2 : H^{-1}(\Omega) &\longrightarrow H_0^1(\Omega) \\ \tilde{\omega} &\longmapsto \varphi \end{aligned}$$

por lo tanto se complica definir el gradiente  $\partial_{\tilde{\omega}} H$ , entonces hasta mientras es posible definir el sistema (6.4), tal que si se obtiene una solución para éste, implica que se obtenga una solución para la ecuación de Euler en  $\bar{Y}$ .

El problema que se puede observar en un comienzo es que todo se hace en base a  $\omega \cdot \mathbf{e}$ , pero es posible encontrar fácilmente  $\omega_1$  y  $\omega_2$  diferentes tal que  $\omega_1 \cdot \mathbf{e} = \omega_2 \cdot \mathbf{e}$ . El hecho por el cual le damos sentido al problema es que nada nos asegura que cada  $\omega_i$  sea precisamente de la forma  $\nabla \times (\nabla \varphi \times \mathbf{e})$ .

## 6.2. Espacio en función de campos vectoriales

Con el fin de atacar el problema que se tiene cuando se trabaja sobre  $\omega \cdot \mathbf{e}$  además de la dimensión del espacio formado por elementos del tipo  $\mathbf{u} = \nabla \varphi \times \mathbf{e}$  vamos a definir un espacio más grande que  $Y$ , pero que sigue contenido en  $L_\sigma^2(\Omega)$ . Para ello se introduce el siguiente espacio

$$(H_0^1(\Omega))^3 = \left\{ \boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) : \varphi_i \in H_0^1(\Omega) \right\}$$

el cual resulta un espacio de Hilbert dotado del siguiente producto escalar

$$(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\phi}) = \sum_{i=1}^3 (\varphi_i, \phi_i)_{H_0^1(\Omega)}.$$

Se define el siguiente espacio

$$Z = \left\{ \mathbf{u} = \nabla \times \boldsymbol{\varphi} : \boldsymbol{\varphi} \in (H_0^1(\Omega))^3 \right\}$$

A continuación mostramos que  $\bar{Z} \subset L_v^2(\Omega)$ .

Observemos que para todo  $\mathbf{u} \in Z$  se tiene

i)  $\nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\varphi}) = 0;$

ii) Sea  $v \in H^1(\Omega)$ ,

$$\int_{\Omega} \nabla v \cdot \mathbf{u} \, dx = \int_{\Omega} (\nabla \times (\nabla v)) \cdot \boldsymbol{\varphi} \, dx = 0$$

por esto se tiene  $Z \subset L_v^2(\Omega)$ , por lo cual  $\bar{Z} \subset L_v^2(\Omega)$ . El espacio  $\bar{Z}$  resulta un subespacio vectorial, por lo tanto viene a ser un espacio de Hilbert. La ecuación de Euler en este espacio se la puede representar de la siguiente forma

$$\begin{aligned} (\partial_t \mathbf{u} - \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}, \nabla \times \boldsymbol{\varphi})_{L^2} &= 0 \\ \langle \nabla \times (\partial_t \mathbf{u} - \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}), \boldsymbol{\varphi} \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Por un lado estudiaremos  $\nabla \times (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) \in ((H_0^1(\Omega))^3)'$ . Analizando sus componentes tenemos

$$\nabla \times (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega})_i = \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla u_i - \mathbf{u} \cdot \nabla \omega_i$$

de lo que se llega a las ecuaciones en  $((H_0^1(\Omega))^3)'$

$$\begin{cases} \partial_t \omega_i = \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla u_i - \mathbf{u} \cdot \nabla \omega_i & \text{para } i = 1, 2, 3 \\ \boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} \end{cases} \quad (6.7)$$

Ahora, consideramos el espacio  $F := (C_0^\infty(\Omega))^3$  cuyos elementos son de la forma  $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ , sobre este espacio definimos el siguiente corchete de Poisson

$$\begin{aligned} \{\cdot, \cdot\} : F \times F &\longrightarrow F \\ (\mathbf{v}, \mathbf{w}) &\longmapsto (\mathbf{w} \cdot \nabla v_1 - \mathbf{v} \cdot \nabla w_1, \mathbf{w} \cdot \nabla v_2 - \mathbf{v} \cdot \nabla w_2, \mathbf{w} \cdot \nabla v_3 - \mathbf{v} \cdot \nabla w_3) \end{aligned}$$

que es bilineal, antisimétrico y satisface la identidad de Jacobi. Con el objetivo de extenderlo, y ya que hemos planteado la ecuación de Euler respecto a la vorticidad

vamos a definir el operador de Poisson  $J(\boldsymbol{\omega})$ , (ahora respecto a la vorticidad).

$$\begin{aligned} J(\boldsymbol{\omega}) : L^2_{\sigma}(\Omega) &\longrightarrow ((H_0^1(\Omega))^3)' \\ \mathbf{u} &\longmapsto \nabla \times (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) \end{aligned}$$

debido a que el hamiltoniano del sistema viene dado en función de  $\mathbf{u}$ , usando este operador, el sistema (6.7) se lo puede reescribir de la forma

$$\begin{cases} \partial_t \boldsymbol{\omega} = J(\boldsymbol{\omega}) \partial_{\mathbf{u}} H \\ \boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} \end{cases}$$

Además, para los elementos de  $Z$ , es posible expresar el hamiltoniano, en función de  $\boldsymbol{\omega}$

$$H(\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\varphi} \rangle$$

donde  $\mathbf{u} = \nabla \times \boldsymbol{\varphi}$ . Se analiza para estos elementos la relación entre  $\boldsymbol{\omega}$  y  $\boldsymbol{\varphi}$ , se observa  $u_1 = (\partial_y \varphi_3 - \partial_z \varphi_2)$ ,  $u_2 = (\partial_z \varphi_1 - \partial_x \varphi_3)$ ,  $u_3 = (\partial_x \varphi_2 - \partial_y \varphi_1)$ .

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{u} &= (\partial_{yx} \varphi_2 - \partial_{yy} \varphi_1) - (\partial_{zz} \varphi_1 - \partial_{zx} \varphi_3) + \partial_{xx} \varphi_1 - \partial_{xx} \varphi_1 \mathbf{i} \\ &\quad + (\partial_{yz} \varphi_3 - \partial_{zz} \varphi_2) - (\partial_{xx} \varphi_2 - \partial_{xy} \varphi_1) + \partial_{yy} \varphi_2 - \partial_{yy} \varphi_2 \mathbf{j} \\ &\quad + (\partial_{xz} \varphi_1 - \partial_{xx} \varphi_3) - (\partial_{yy} \varphi_3 - \partial_{yz} \varphi_2) + \partial_{xx} \varphi_1 - \partial_{xx} \varphi_1 \mathbf{k} \\ &= -\Delta \varphi_1 + \partial_x (\partial_x \varphi_1 + \partial_y \varphi_2 + \partial_z \varphi_3) \mathbf{i} \\ &\quad - \Delta \varphi_2 + \partial_y (\partial_x \varphi_1 + \partial_y \varphi_2 + \partial_z \varphi_3) \mathbf{j} \\ &\quad - \Delta \varphi_3 + \partial_z (\partial_x \varphi_1 + \partial_y \varphi_2 + \partial_z \varphi_3) \mathbf{k} \end{aligned}$$

por lo tanto tenemos

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}) - (L\boldsymbol{\varphi}) \tag{6.8}$$

con  $L\boldsymbol{\varphi} = \Delta \varphi_1 \mathbf{i} + \Delta \varphi_2 \mathbf{j} + \Delta \varphi_3 \mathbf{k}$ , visto de otro modo

$$\omega_i = -\Delta \varphi_i + \partial_{x_i}(\nabla \cdot \boldsymbol{\varphi})$$

Pero debido a que  $Z$  no se conoce si es o no cerrado, no se puede asegurar esta caracterización para todo el espacio  $\bar{Z}$ . De todas formas, resulta interesante observar si es posible o no, obtener mediante los métodos ya conocidos  $\boldsymbol{\varphi} \in (H_0^1(\Omega))^3$  dado  $\boldsymbol{\omega} \in ((H_0^1(\Omega))^3)'$ . Así que planteamos el siguiente problema y analizaremos su existencia.

La ecuación (6.8) tiene la forma de una ecuación elíptica. Dado  $\boldsymbol{\omega} \in ((H_0^1(\Omega))^3)'$ , definimos como solución débil de esta ecuación a  $\boldsymbol{\varphi} \in (H_0^1(\Omega))^3$  tal que cumple que:

Para todo  $\boldsymbol{\phi} \in (H_0^1(\Omega))^3$

$$B[\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\phi}] = \omega(\boldsymbol{\phi})$$

donde

$$\begin{aligned} B[\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\phi}] &= \int_{\Omega} \partial_y \varphi_1 \partial_y \phi_1 + \partial_z \varphi_1 \partial_z \phi_1 - \partial_x \varphi_2 \partial_y \phi_1 - \partial_x \varphi_3 \partial_z \phi_1 \, d\mathbf{x} \\ &\quad + \int_{\Omega} \partial_x \varphi_2 \partial_x \phi_2 + \partial_z \varphi_2 \partial_z \phi_2 - \partial_y \varphi_3 \partial_z \phi_2 - \partial_y \varphi_1 \partial_x \phi_2 \, d\mathbf{x} \\ &\quad + \int_{\Omega} \partial_y \varphi_3 \partial_y \phi_3 + \partial_x \varphi_3 \partial_x \phi_3 - \partial_z \varphi_1 \partial_x \phi_3 - \partial_z \varphi_2 \partial_y \phi_3 \, d\mathbf{x} \end{aligned}$$

Pero se puede observar que  $B$  es lineal y continuo, pero veamos qué sucede respecto a la coercividad.

Sea  $\beta \geq 0$ , dado que  $B$  no depende de  $\partial_x \varphi_1$ ,  $\partial_y \varphi_2$  ni de  $\partial_z \varphi_3$ , es posible encontrar  $\boldsymbol{\varphi}$  tal que  $B[\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi}] = 0$  y además

$$\int_{\Omega} \partial_x \varphi_1^2 + \partial_y \varphi_2^2 + \partial_z \varphi_3^2 \, d\mathbf{x} \neq 0,$$

entonces para tal  $\boldsymbol{\varphi}$  se cumple

$$B[\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi}] < \beta \|\boldsymbol{\varphi}\|$$

por lo tanto no es coercivo. Hasta el momento no se puede asegurar que se obtiene o no  $\boldsymbol{\varphi}$ , para  $\omega$  dado.

# Capítulo 7

## Conclusiones y recomendaciones

### 7.1. Conclusiones

- 1.- El estudio del teorema 5.2.3 (Descomposición de Hodge-Codaira) y de los espacios que lo involucran, es fundamental para el desarrollo de este trabajo, puesto que nos permite simplificar la ecuación de Euler cuando la planteamos sobre el espacio  $L^2_\sigma(\Omega)$ .
- 2.- La ecuación de Euler expresada en  $L^2_\sigma(\Omega)$  es posible interpretarla a través de un operador de Poisson respecto a la variable velocidad, que posee las propiedades de linealidad y antisimetría.
- 3.- El hecho de que los espacios a los cuales denominamos  $Y$  y  $Z$  no aseguren ser cerrados, impide que todos los elementos de los espacios  $\bar{Y}$  y  $\bar{Z}$  tengan una caracterización similar al caso bidimensional.
- 4.- El hecho que  $L^2_\sigma(\Omega)$  sea Hilbert nos permite analizar la ecuación de Euler en función de la variable vorticidad, en el espacio sobre el cual ésta se encuentra definida.
- 5.- La ecuación de Euler en  $\bar{Z}$ , es posible interpretarla mediante un sistema de dos ecuaciones en el espacio dual de  $(H^1_0(\Omega))^3$ , en términos de las variables velocidad y vorticidad, en el cual una de estas ecuaciones es posible expresarla usando un operador de Poisson.
- 6.- Es posible encontrar subespacios de  $L^2_\sigma(\Omega)$  tal que sus elementos se los puedan considerar como campos vectoriales bidimensionales y la ecuación de Euler se la pueda escribir mediante un sistema de ecuaciones en el espacio  $H^{-1}(\Omega)$ .

7.- Se encuentra una solución paramétrica al problema

$$\begin{cases} L\varphi = \tilde{\omega}(x, y, z) & \text{en } \Omega \\ \varphi = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (7.1)$$

donde  $\tilde{\omega} \in H^{-1}(\Omega)$ , y  $L = [-2\Delta + \Psi]$ , con  $\Psi = \partial_{xy} + \partial_{yz} + \partial_{zx} + \partial_{yx} + \partial_{zy} + \partial_{xz}$

## 7.2. Recomendaciones

- 1.- Realizar un estudio más a fondo sobre la relación entre los espacios  $L^2_\sigma(\Omega)$  y  $\bar{Z}$ .
- 2.- Estudiar subespacios sobre los cuales sea posible obtener solución única para cada uno de los sistemas:

En  $H^{-1}(\Omega)$

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{\omega} - \{\tilde{\omega}, \varphi\} = 0 \\ \tilde{\omega} = [-2\Delta + \Psi]\varphi \end{cases}$$

En  $((H_0^1)^3)'$

$$\begin{cases} \partial_t \omega_i = \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla u_i - \mathbf{u} \cdot \nabla \omega_i & \text{para } i = 1, 2, 3 \\ \boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} \end{cases}$$

- 3.- Estudiar los puntos de equilibrio de estos sistemas.

# Apéndice

## Ecuaciones de Euler

### Conservación de la masa

En la demostración de la proposición 4.2.2 se requiere probar lo siguiente:

Dado un campo vectorial  $\phi(a, t)$  suficientemente regular, con  $x_i = \phi_i(a, t)$  y  $u_i(x, t) = \frac{\partial \phi_i(a, t)}{\partial t}$ , entonces

$$\operatorname{div} u = \operatorname{tr} \left[ \frac{d(\nabla_a \phi)}{dt}(t) (\nabla_a \phi)^{-1}(t) \right].$$

Sea  $S = \nabla_a \phi$ , observemos que

$$S = \begin{pmatrix} \partial_{a_1} \phi_1 & \partial_{a_2} \phi_1 & \partial_{a_3} \phi_1 \\ \partial_{a_1} \phi_2 & \partial_{a_2} \phi_2 & \partial_{a_3} \phi_2 \\ \partial_{a_1} \phi_3 & \partial_{a_2} \phi_3 & \partial_{a_3} \phi_3 \end{pmatrix}$$

además, su matriz inversa es

$$S^{-1} = \frac{1}{\det S} \begin{pmatrix} \partial_{a_2} \phi_2 \partial_{a_3} \phi_3 - \partial_{a_3} \phi_2 \partial_{a_2} \phi_3 & \partial_{a_3} \phi_2 \partial_{a_1} \phi_3 - \partial_{a_1} \phi_2 \partial_{a_3} \phi_3 & \partial_{a_1} \phi_2 \partial_{a_2} \phi_3 - \partial_{a_2} \phi_2 \partial_{a_1} \phi_3 \\ \partial_{a_2} \phi_3 \partial_{a_3} \phi_1 - \partial_{a_3} \phi_1 \partial_{a_2} \phi_3 & \partial_{a_3} \phi_3 \partial_{a_1} \phi_1 - \partial_{a_3} \phi_1 \partial_{a_1} \phi_3 & \partial_{a_1} \phi_1 \partial_{a_2} \phi_3 - \partial_{a_2} \phi_1 \partial_{a_1} \phi_3 \\ \partial_{a_2} \phi_1 \partial_{a_3} \phi_2 - \partial_{a_3} \phi_1 \partial_{a_2} \phi_2 & \partial_{a_3} \phi_1 \partial_{a_1} \phi_2 - \partial_{a_1} \phi_1 \partial_{a_3} \phi_2 & \partial_{a_1} \phi_1 \partial_{a_2} \phi_2 - \partial_{a_2} \phi_1 \partial_{a_1} \phi_2 \end{pmatrix}$$

La matriz  $\frac{dS}{dt}(t)$ , es la que se obtiene al derivar respecto al tiempo cada componente. Además, como  $\phi(a, t)$  es suficientemente regular se observa que sus componentes tienen la siguiente forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial a_j} \right) &= \frac{\partial}{\partial a_j} \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial t} \right) \\ &= \frac{\partial u_i}{\partial a_j} \end{aligned}$$

$$= \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \partial_{a_j} \phi_i$$

Por lo tanto, las componentes de la diagonal de la matriz  $\left[\frac{dS}{dt} S^{-1}\right]$  son las siguientes:

$$\begin{aligned} \left[\frac{dS}{dt} S^{-1}\right]_{11} &= \frac{1}{\det S} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \partial_{a_1} \phi_1 [\partial_{a_2} \phi_2 \partial_{a_3} \phi_3 - \partial_{a_3} \phi_2 \partial_{a_2} \phi_3] + \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \partial_{a_2} \phi_1 [\partial_{a_2} \phi_3 \partial_{a_3} \phi_1 - \partial_{a_2} \phi_1 \partial_{a_3} \phi_3] + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \partial_{a_3} \phi_1 [\partial_{a_2} \phi_1 \partial_{a_3} \phi_2 - \partial_{a_3} \phi_1 \partial_{a_2} \phi_2] \right) \\ &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ \left[\frac{dS}{dt} S^{-1}\right]_{22} &= \frac{1}{\det S} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \partial_{a_1} \phi_2 [\partial_{a_3} \phi_2 \partial_{a_1} \phi_3 - \partial_{a_1} \phi_2 \partial_{a_3} \phi_3] + \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \partial_{a_2} \phi_2 [\partial_{a_3} \phi_3 \partial_{a_1} \phi_1 - \partial_{a_3} \phi_1 \partial_{a_1} \phi_3] + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \partial_{a_3} \phi_2 [\partial_{a_3} \phi_1 \partial_{a_1} \phi_2 - \partial_{a_1} \phi_1 \partial_{a_3} \phi_2] \right) \\ &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \\ \left[\frac{dS}{dt} S^{-1}\right]_{33} &= \frac{1}{\det S} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \partial_{a_1} \phi_3 [\partial_{a_1} \phi_2 \partial_{a_2} \phi_3 - \partial_{a_2} \phi_2 \partial_{a_1} \phi_3] + \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \partial_{a_2} \phi_3 [\partial_{a_1} \phi_1 \partial_{a_2} \phi_3 - \partial_{a_2} \phi_1 \partial_{a_1} \phi_3] + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \partial_{a_3} \phi_3 [\partial_{a_1} \phi_1 \partial_{a_2} \phi_2 - \partial_{a_2} \phi_1 \partial_{a_1} \phi_2] \right) \\ &= \frac{\partial u_3}{\partial x_3}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\text{tr} \left[ \frac{dS}{dt} S^{-1} \right] = \text{div } \mathbf{u}.$$

### Ecuación general del movimiento

En el siguiente desarrollo se muestra que la ecuación de Euler (4.4) puede ser escrita de la siguiente forma

$$\partial_t \mathbf{u} = \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}) - \nabla \left( \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + p \right).$$

$$\begin{aligned} d_t \mathbf{u} &= - [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p] \\ &= - \left[ \left( u_1 \frac{\partial}{\partial x} + u_2 \frac{\partial}{\partial y} + u_3 \frac{\partial}{\partial z} \right) [u_1 i + u_2 j + u_3 k] \right] - \nabla p \\ &= - \left[ \left( u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial y} + u_3 \frac{\partial u_1}{\partial z} \right) i + \left( u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} + u_3 \frac{\partial u_2}{\partial z} \right) j \right. \\ &\quad \left. + \left( u_1 \frac{\partial u_3}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_3}{\partial y} + u_3 \frac{\partial u_3}{\partial z} \right) k \right] - \nabla p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[ -u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} - u_2 \frac{\partial u_1}{\partial y} - u_3 \frac{\partial u_1}{\partial z} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} + u_3 \frac{\partial u_3}{\partial x} - u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} - u_3 \frac{\partial u_3}{\partial x} \right] i \\
&\quad + \left[ -u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x} - u_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} - u_3 \frac{\partial u_2}{\partial z} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} + u_3 \frac{\partial u_3}{\partial y} - u_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} - u_3 \frac{\partial u_3}{\partial y} \right] j \\
&\quad + \left[ -u_1 \frac{\partial u_3}{\partial x} - u_2 \frac{\partial u_3}{\partial y} - u_3 \frac{\partial u_3}{\partial z} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial z} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial z} - u_2 \frac{\partial u_2}{\partial z} - u_1 \frac{\partial u_1}{\partial z} \right] k - \nabla p \\
&= \left[ -u_2 \frac{\partial u_1}{\partial y} - u_3 \frac{\partial u_1}{\partial z} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} + u_3 \frac{\partial u_3}{\partial x} \right] i + \left[ -u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x} - u_3 \frac{\partial u_2}{\partial z} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} + u_3 \frac{\partial u_3}{\partial y} \right] j \\
&\quad + \left[ -u_1 \frac{\partial u_3}{\partial x} - u_2 \frac{\partial u_3}{\partial y} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial z} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial z} \right] k - \nabla p + \left[ -u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} - u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} - u_3 \frac{\partial u_3}{\partial x} \right] i \\
&\quad + \left[ -u_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} - u_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} - u_3 \frac{\partial u_3}{\partial y} \right] j + \left[ -u_1 \frac{\partial u_1}{\partial z} - u_2 \frac{\partial u_2}{\partial z} - u_3 \frac{\partial u_3}{\partial z} \right] k \\
&= \left[ u_2 \left( \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) - u_3 \left( \frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial u_3}{\partial x} \right) \right] i + \left[ u_1 \left( \frac{\partial u_1}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) - u_3 \left( \frac{\partial u_2}{\partial z} - \frac{\partial u_3}{\partial y} \right) \right] j \\
&\quad + \left[ u_1 \left( \frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial u_3}{\partial x} \right) - u_2 \left( \frac{\partial u_3}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial z} \right) \right] k - \frac{1}{2} \nabla (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) - \nabla p \\
&= \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}) - \nabla \left( \frac{\mathbf{u}^2}{2} + p \right)
\end{aligned}$$

## Ecuaciones de Euler con dominio en tres dimensiones

### Operador de Poisson

Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ . El operador  $\{\cdot, \cdot\}$  definido en la sección 6.1 cumple las siguientes propiedades:

Sea  $f, g, h$  en  $C^\infty(\Omega)$ .

- Antisimetría

$$\begin{aligned}
\{f, g\} &= -[\nabla f \times \nabla g] \cdot \mathbf{e} \\
&= -[\nabla g \times \nabla f] \cdot \mathbf{e} \\
&= -\{g, f\}.
\end{aligned}$$

- Bilinealidad

$$\begin{aligned}
\{f + \alpha g, h\} &= -[\nabla(f + \alpha g) \times \nabla h] \cdot \mathbf{e} \\
&= -[\nabla f \times \nabla h] \cdot \mathbf{e} - \alpha [\nabla g \times \nabla h] \cdot \mathbf{e} \\
&= \{f, h\} + \alpha \{g, h\}.
\end{aligned}$$

- Identidad de Jacobi

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0. \quad (7.2)$$

Para probar la identidad (7.2) observemos que

$$\begin{aligned} \{f, \{g, h\}\} &= -\nabla f \times \nabla \{g, h\} \cdot \mathbf{e} \\ &= (\partial_y f - \partial_z f) \partial_x \{g, h\} + (\partial_z f - \partial_x f) \partial_y \{g, h\} \\ &\quad + (\partial_x f - \partial_z f) \partial_z \{g, h\} \\ &= (\nabla f \times \mathbf{e}) \cdot \nabla \{g, h\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_x \{g, h\} &= \partial_x (\partial_z g \partial_y h - \partial_y g \partial_z h + \partial_x g \partial_z h - \partial_z g \partial_x h + \partial_x g \partial_y h - \partial_y g \partial_x h) \\ &= \partial_y h \partial_{xz} g + \partial_z g \partial_{xy} h - \partial_y g \partial_{xz} h - \partial_z h \partial_{xy} g \\ &\quad + \partial_x g \partial_{xz} h + \partial_z h \partial_{xx} g - \partial_z g \partial_{xx} h - \partial_x h \partial_{xz} g \\ &\quad + \partial_y g \partial_{xx} h + \partial_x h \partial_{xy} g - \partial_x g \partial_{xy} h - \partial_y h \partial_{xx} g \\ &= \partial_{xx} g (\partial_z h - \partial_y h) + \partial_{xx} h (\partial_y g - \partial_z g) \\ &\quad + \partial_{xy} g (\partial_x h - \partial_z h) + \partial_{xy} h (\partial_z g - \partial_x g) \\ &\quad + \partial_{xz} g (\partial_y h - \partial_x h) + \partial_{xz} h (\partial_x g - \partial_y g) \end{aligned}$$

Análogamente se tiene para  $\partial_y \{g, h\}$  y para  $\partial_z \{g, h\}$ . Para simplificar un poco las cuentas se observa que para cualquier función  $\xi \in C^\infty(\Omega)$ , introducimos una nueva notación

$$\begin{aligned} \nabla \xi \times \mathbf{e} &= (\partial_y \xi - \partial_z \xi) \mathbf{i} + (\partial_z \xi - \partial_x \xi) \mathbf{j} + (\partial_x \xi - \partial_y \xi) \mathbf{k} \\ &= \xi_1 \mathbf{i} + \xi_2 \mathbf{j} + \xi_3 \mathbf{k} \end{aligned}$$

en lugar de  $\xi$ , tomaremos  $f, g, h$ . Veamos cómo nos queda  $\{f, \{g, h\}\}$  en relación de la nueva notación, además de tomar en cuenta lo precedente

$$\begin{aligned} -\nabla f \times \nabla \{g, h\} \cdot \mathbf{e} &= -f_1 \partial_{xx} g h_1 + f_1 \partial_{xx} h g_1 - f_1 \partial_{xy} g h_2 + f_1 \partial_{xy} h g_2 \\ &\quad - f_1 \partial_{xz} g h_3 + f_1 \partial_{xz} h g_3 \\ &\quad - f_2 \partial_{yx} g h_1 + f_2 \partial_{yx} h g_1 - f_2 \partial_{yy} g h_2 + f_2 \partial_{yy} h g_2 \\ &\quad - f_2 \partial_{yz} g h_3 + f_2 \partial_{yz} h g_3 \\ &\quad - f_3 \partial_{zx} g h_1 + f_3 \partial_{zx} h g_1 - f_3 \partial_{zy} g h_2 + f_3 \partial_{zy} h g_2 \\ &\quad - f_3 \partial_{zz} g h_3 + f_3 \partial_{zz} h g_3. \end{aligned}$$

Con un procedimiento similar para  $\{g, \{h, f\}\}$  y para  $\{h, \{f, g\}\}$  se obtiene:

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0.$$

- Regla de Leibniz

$$\begin{aligned} \{fg, h\} &= -\nabla(fg) \times \nabla h \cdot \mathbf{e} \\ &= -[f\nabla g + g\nabla f] \times \nabla h \cdot \mathbf{e} \\ &= -f[\nabla g \times \nabla h \cdot \mathbf{e}] - g[\nabla f \times \nabla h \cdot \mathbf{e}] \\ &= f\{g, h\} + g\{f, h\}. \end{aligned}$$

## Equivalencia de problemas

Sea  $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ , el operador  $L = [-2\Delta + \Psi]$ , si tomamos el siguiente cambio de variable.

$$\begin{cases} u = x \\ v = x + y \\ \tau = x + y + z \end{cases}$$

considerando

$$\tilde{\varphi}(u, v, \tau) = \varphi(u, v - u, \tau - v) = \varphi(x, y, z),$$

entonces

$$L\varphi = \tilde{L}\tilde{\varphi}$$

donde

$$\tilde{L} = - \begin{bmatrix} \partial_u & \partial_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_u \\ \partial_v \end{bmatrix}.$$

Para esto, vamos a observar las derivadas parciales de  $\tilde{\varphi}$

$$\begin{aligned} \partial_u \tilde{\varphi} &= \partial_x \varphi - \partial_y \varphi \\ \partial_v \tilde{\varphi} &= \partial_y \varphi - \partial_z \varphi \\ \partial_\tau \tilde{\varphi} &= \partial_z \varphi, \end{aligned}$$

y también sus segundas derivadas

$$\begin{aligned} \partial_{uu} \tilde{\varphi} &= \partial_{xx} \varphi - \partial_{xy} \varphi - \partial_{yx} \varphi + \partial_{yy} \varphi \\ \partial_{uv} \tilde{\varphi} &= \partial_{xy} \varphi - \partial_{xz} \varphi - \partial_{yz} \varphi + \partial_{yz} \varphi \\ \partial_{vu} \tilde{\varphi} &= \partial_{yx} \varphi - \partial_{yy} \varphi - \partial_{zx} \varphi + \partial_{zy} \varphi \end{aligned}$$

$$\partial_{vv}\tilde{\varphi} = \partial_{yy}\varphi - \partial_{yz}\varphi - \partial_{zy}\varphi + \partial_{zz}\varphi,$$

analizando  $-L\varphi$  tenemos

$$\begin{aligned} [2\Delta - \Psi]\varphi &= 2\partial_{xx}\varphi + 2\partial_{yy}\varphi + 2\partial_{zz}\varphi - \partial_{xy}\varphi - \partial_{yx}\varphi - \partial_{xz}\varphi - \partial_{zx}\varphi - \partial_{yz}\varphi - \partial_{zy}\varphi \\ &= 2\partial_{xx}\varphi - 2\partial_{xy}\varphi - 2\partial_{yx}\varphi + 2\partial_{yy}\varphi + \partial_{xy}\varphi - \partial_{xz}\varphi - \partial_{yy}\varphi + \partial_{yz}\varphi \\ &\quad + \partial_{yx}\varphi - \partial_{yy}\varphi - \partial_{zx}\varphi + \partial_{zy}\varphi + 2\partial_{yy}\varphi - 2\partial_{yz}\varphi - 2\partial_{zy}\varphi + 2\partial_{zz}\varphi \\ &= 2\partial_{uu}\tilde{\varphi} - \partial_{uv}\tilde{\varphi} - \partial_{vu}\tilde{\varphi} + 2\partial_{vv}\tilde{\varphi} \\ &= -\tilde{L}\tilde{\varphi} \end{aligned}$$

## Ecuación respecto a la vorticidad

Para el sistema (6.7).

Considerando los elementos  $\mathbf{u} \in L^2_\sigma(\Omega)$ , tal que  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  tenemos

$$\begin{aligned} \nabla \times (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega})_1 &= \partial_y(u_1\omega_2 - u_2\omega_1) - \partial_z(u_3\omega_1 - u_1\omega_3) \\ &= \partial_y u_1 \omega_2 + u_1 \partial_y \omega_2 - \partial_y u_2 \omega_1 - \partial_y \omega_1 u_2 - \partial_z u_3 \omega_1 - u_3 \partial_z \omega_1 \\ &\quad + \partial_z u_1 \omega_3 + u_1 \partial_z \omega_3 \\ &= \omega_1(-\partial_y u_2 - \partial_z u_3) - \omega_2(\partial_y u_1) - \omega_3(\partial_z u_1) \\ &\quad + u_1(\partial_y \omega_2 + \partial_z \omega_3 + \partial_x \omega_1) \\ &\quad - u_1 \partial_x \omega_1 - u_2 \partial_y \omega_1 - u_3 \partial_z \omega_1 \\ &= \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla u_1 - \mathbf{u} \cdot \nabla \omega_1 \end{aligned}$$

se trabaja de la misma forma para  $i = 2, 3$ .

# Bibliografía

- [1] M. ABATE AND F. TOVENA, *Geometria Differenziale*, Springer, 2011.
- [2] V. I. ARNOLD, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer-Verlag, 1989.
- [3] H. BREZIS, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2011.
- [4] L. DEBNATH AND P. MIKUSIŃSKI, *Hilbert Spaces with Applications*, Elseiver, 2005.
- [5] L. C. EVANS, *Partial Differential Equations*, vol. 19, AMS, 1998.
- [6] G. P. GALDI, *An Introduction to the a Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations*, Springer-Verlag, 2011.
- [7] M. GIAQUINTA AND S. HILDEBRANDT, *Calculus of Variations I*, Springer-Verlag, 2004.
- [8] D. IGLESIAS PONTE, *Variedades de poisson, grupoides y algebroides de lie*, tech. report, Congreso Dr. Antonio Monteiro, 2011.
- [9] S. KESAVAN, *Topics in Functional Analysis*, Wiley, 1989.
- [10] F. KORDON, *Sistemas hamiltonianos: integrabilidad y simetrías*, tech. report, Universidad de Buenos Aires, 2014.
- [11] J. L. LIONS AND E. MAGENES, *Non-homogeneous boundary*, Springer-Verlag, 1972.
- [12] P. J. MORRISON, *Hamiltonian description of the ideal fluid*, Reviews of Modern Physics, 70 (1998).

- [13] —, *Hamiltonian fluid dynamics*, tech. report, The University of Texas at Austin, TX78712-0264.
- [14] J. NECAS, *Direct Methods in the Theory of Elliptic Equations*, Springer-Verlag, 2012.
- [15] A. SHIRIKYAN, *Navier-stokes and euler equations: Cauchy problem and controllability*, tech. report, University of Cergy-Pontoise, 2008.
- [16] M. E. TAYLOR, *Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, 1996.
- [17] R. TEMAM, *Navier-Stokes Equations and Nonlinear Functional Analysis*, Universite de Paris-Sud, Orsay, 1983.
- [18] R. TEMAM AND A. MIRANVILLE, *Mathematical Modeling in Continuum Mechanics*, Cambridge University Press, 2005.
- [19] J. L. VÁZQUEZ, *Fundamentos matemáticos de la mecánica de fluidos*, tech. report, Universidad Autónoma de Madrid, 2003.
- [20] Z. YOSHIDA, P. J. MORRISON, AND F. DOBARRO, *Singular casimir elements of the euler equation and equilibrium points*, *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, (2014).