

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS

CONTROL ÓPTIMO Y RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE PROBLEMAS
PARABÓLICOS CON CONTROLES FINITOS DISPERSOS

PROYECTO DE TITULACIÓN PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE
MATEMÁTICA

VERÓNICA FRANCISCA VACA MEJÍA
vefra_23@hotmail.com

Director: PEDRO MARTIN MERINO ROSERO
pedro.merino@epn.edu.ec

QUITO, ABRIL 2016

DECLARACIÓN

Yo VERÓNICA FRANCISCA VACA MEJÍA, declaro bajo juramento que el trabajo aquí escrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

A través de la presente declaración cedo mis derechos de propiedad intelectual, correspondientes a este trabajo, a la Escuela Politécnica Nacional, según lo establecido por la Ley de Propiedad Intelectual, por su reglamento y por la normatividad institucional vigente.

Verónica Francisca Vaca Mejía

CERTIFICACIÓN

Certifico que el presente trabajo fue desarrollado por VERÓNICA FRANCISCA VACA MEJÍA, bajo mi supervisión.

Pedro Martin Merino Rosero
Director del Proyecto

AGRADECIMIENTOS

A mis Padres por el apoyo incondicional.

A Pedro Merino por su motivación, enseñanzas y paciencia.

A mi Esposo por las desveladas y el constante apoyo.

A mis hermanos por su ejemplo y amor

A mis amigos que me han apoyado en las buenas y en las malas.

Y especialmente agradezco a mi Padre Celestial, quien me ha dado la fuerza para poder cumplir con esta meta y a puesto a todas las personas antes mencionadas en mi vida.

DEDICATORIA

A mi hijo Pablo, mi inspiración.

Verónica Vaca

Índice de contenido

Índice de figuras	ix
Resumen	1
Índice de tablas	1
Abstract	2
1 Introducción	1
1.1 Notaciones	3
1.2 Formulación del problema	3
1.3 Estudio de la ecuación de estado	4
1.3.1 Soluciones débiles en el espacio $W(0, T)$	4
1.4 Ecuaciones parabólicas lineales	6
2 Problemas de Control Óptimo con regularización en norma L^2	10
2.1 Control Óptimo con controles finitos	11
2.1.1 Formulación del Problema	11
2.1.2 Análisis del problema de control óptimo	11
2.1.3 Condiciones de Optimalidad	15
2.2 Control Óptimo con controles dependientes del tiempo	19
2.2.1 Formulación del Problema	19
2.2.2 Análisis del problema de control Óptimo	20
2.2.3 Condiciones de Optimalidad	24
2.3 Resolución Numérica	28
2.3.1 Método Primal Dual de Conjuntos Activos (PDAS) para el caso con controles finitos	28
2.3.2 Análisis de convergencia (PDAS) - Caso Controles Finitos	30

2.3.3	Método Primal Dual de Conjuntos Activos (PDAS) para el caso con controles dependientes del tiempo	30
2.3.4	Análisis de convergencia (PDAS) - Caso controles dependientes del tiempo	31
2.4	Implementación	32
2.5	Experimentos Numéricos	35
3	Problemas de Control Óptimo con regularización en norma ℓ_1	45
3.1	Motivación	45
3.2	Análisis del problema de Control Óptimo	46
3.3	Condiciones de Optimalidad	48
3.4	Resolución Numérica	53
3.4.1	Método Primal Dual de Conjuntos Activos (PDAS)	53
3.4.2	Convergencia del método Primal Dual de Conjuntos Activos (PDAS)	56
3.4.3	Método de Coordenadas descendentes (CGDM)	57
3.4.4	Análisis de la convergencia del método de Coordenadas descendentes (CGDM)	64
3.5	Experimentos numéricos	65
3.5.1	Experimento 3.2	71
3.6	Paralelización del algoritmo de coordenadas de descenso (CGDM) . . .	76
3.6.1	Paralelización del algoritmo CGDM	76
3.6.2	Experimentos Numéricos	79
4	Conclusiones	89
A	Apéndice	91
A.1	Algunos resultados de optimización y análisis convexo	91
	Referencias	96

Índice de figuras

2.1	Evolución del funcional de Costo del segundo experimento ($\lambda = 1$)	36
2.2	Solución de la ecuación de estado del segundo experimento ($\lambda = 1$)	36
2.3	Evolución del error en cada iteración, PDAS-controles finitos	38
2.4	Funciones φ_i con $i = 1, \dots, 10$ del primer experimento	40
2.5	Evolución del funcional de Costo del primer experimento ($\lambda = 1$)	41
2.6	Solución de la ecuación de estado del primer experimento ($\lambda = 1$)	41
2.7	Solución de la ecuación adjunta del primer experimento ($\lambda = 1$)	42
2.8	Control Óptimo del primer experimento ($\lambda = 1$)	42
2.9	Evolución del error en cada iteración, PDAS - Controles dependientes del tiempo	44
3.1	Funciones φ del primer experimento	66
3.2	Evolución del funcional de Costo del primer experimento	67
3.3	Solución de la ecuación de estado del primer experimento	68
3.4	Evolución del error en cada iteación, PDAS - Controles finitos dispersos	70
3.5	Evolución del funcional de Costo del segundo experimento	72
3.6	Solución de la ecuación de estado del segundo experimento	72
3.7	Evolución del error en cada iteración, CGDM-Controles finitos dispersos	74
3.8	Direcciones del control en serie en 2 dimensiones	77
3.9	Direcciones del control calculadas en paralelo	78
3.10	Izquierda: Las Coordenadas no se encuentran correlacionadas, las actualizaciones paralelas son útiles Derecha:Las Coordenadas no se encuentran correlacionadas, las actualizaciones paralelas tienen conflicto.	79
3.11	Funciones φ del primer experimento	81
3.12	Evolución del funcional de Costo del primer experimento	82
3.13	Solución de la ecuación de estado del primer experimento	82
3.14	Evolución del funcional de Costo del segundo experimento	85
3.15	Solución de la ecuación de estado del segundo experimento	85

Índice de tablas

2.1	Resumen de los experimentos	35
2.2	Resultados del experimento 2 con la primera discretización	37
2.3	Resultados del experimento 2 con una discretización más gruesa	37
2.4	Evolución del error por cada iteración, PDAS-controles finitos	38
2.5	Relación de dos errores consecutivos, PDAS-controles finitos	39
2.6	Resultados del experimento 1 con la primera discretización	40
2.7	Resultados del experimento 1 con la segunda discretización	40
2.8	Evolución del error por cada iteración, PDAS - Controles dependientes del tiempo	43
2.9	Relación de dos errores consecutivos, PDAS - Controles dependientes del tiempo	43
3.1	Resumen de los experimentos	66
3.2	Resultados del Experimento con el Algoritmo PDAS	69
3.3	Evolución del error por cada iteración, PDAS - Controles finitos dispersos	70
3.4	Relación de dos errores consecutivos, PDAS - Controles finitos dispersos	71
3.5	Resultados del Experimento con el algoritmo CGDM	73
3.6	Evolución del error por cada iteración, CGDM-Controles finitos dispersos	74
3.7	Relación de dos errores consecutivos, CGDM-Controles finitos dispersos	75
3.8	Resumen del Experimento 3.2 con $\gamma = 1$	75
3.9	Resumen del Experimento 3.2 con $\gamma = 0,5$	75
3.10	Resumen de los experimentos con el Método CGDM paralelizado	80
3.11	Resumen del Experimento 4.1, donde $\gamma = 1$	83
3.12	Comparación de los valores del funcional de costo del primer experimento.	84
3.13	Resumen del Experimento 4.2, donde $\gamma = 0,5$	86
3.14	Comparación de los valores del funcional de costo del segundo experimento.	86
3.15	Comparación de los valores del funcional de costo del segundo experimento.	87
3.16	Resumen del Experimento 4.1, fijando el número de iteraciones	87

Resumen

En el presente proyecto realizamos el análisis de los problemas de control óptimo parabólicos con controles finitos, con y sin dependencia del tiempo y con un funcional de costo cuadrático. Luego añadimos dispersión al problema para el caso finito. Además realizamos la caracterización de la dispersión del control óptimo mediante una fórmula de proyección. Implementamos los métodos: Primal dual de conjuntos activos y De coordenadas descendentes, el cual es paralelizable. Finalmente presentaremos algunos experimentos numéricos obtenidos de la aplicación de los algoritmos desarrollados, para la comparación de los mismos.

Palabras clave: Control óptimo, Controles Finitos, Método Primal Dual de Conjuntos Activos, Método de Coordenadas Descendentes, Paralelización.

Abstract

The purpose of this project is to solve parabolic optimal control problems with finite controls, with and without dependence on time and a quadratic functional. Then, we add sparsity to the problem for the finite case. We also make a characterization of the optimal control by a projection formula. We implement the methods: Primal Dual Active set and Coordinate descent that has parallelization properties. Finally, we present some numerical experiments obtained from the application of the developed algorithms.

Keywords: Finite control, Primal dual active set, Coordinate descent, Parallelization.

Capítulo 1

Introducción

Es de interés controlar las ecuaciones en derivadas parciales de tipo parabólico, ya que nos permiten modelar fenómenos evolutivos. Las cantidades destinadas para la realización del control pueden ser coeficientes de funciones prefijadas, la cuales representan alguna fuente que alimenta al fenómeno estudiado, o incluso coeficientes de la solución de la ecuación. Por ejemplo: el enfriamiento de paneles de acero es un proceso fundamental en las acerías y de muy alto costo, por lo cual es importante tener una estrategia óptima. Otros ejemplos son el proceso de sublimación para la producción de monocristales de SiC que es un elemento utilizado en la elaboración de dispositivos electrónicos, la terapia de hipertermia para el tratamiento del cáncer, entre otros.

Una vez modelados los fenómenos nos interesa controlarlos de forma óptima, por lo que los problemas de control óptimo son importantes para este tipo de aplicaciones. En el caso del enfriamiento del acero es de gran interés realizarlo de manera eficaz y localizado en los paneles de acero ya que reduciría en gran manera el costo c.f. [1], también en el proceso de sublimación para la producción de mono-cristales de SiC se desea controlar el calor y su frecuencia en los hornos de Grafito c.f. [2], además en la terapia de hipertermia para tratamiento de tumores se debe optimizar la distribución de temperatura generada dentro del cuerpo del paciente de tal manera que el tumor sea calentado, sin afectar el tejido sano c.f. [3]. En todos estos problemas los controles están representados por cantidades que se distribuyen en el dominio o donde se los aplica o sobre su frontera c.f. [4], y que deben ser escogidas para tener un resultado deseado.

Además, hay aplicaciones en las que no es posible implementar los dispositivos de control o actuadores en todo el dominio ya que es muy costoso o no es realista. Los

controles dispersos proporcionan información acerca de *donde* es más eficiente ponerlos, debido a que estos controles son cero en amplias zonas del dominio c.f. [5].

Las ventajas de utilizar este tipo de controles son:

- Simplicidad en la aplicación del control
- Disminuye en gran manera los costos de aplicación
- Nos dan una idea de cuáles son los parámetros más relevantes de control.

Otra estrategia de control es la de usar cantidades finitas en lugar de funciones. Estas cantidades son conocidas como controles finitos. En la actualidad, se encuentra alguna literatura en cuanto a los controles finitos aplicados a ecuaciones en derivadas parciales elípticas c.f. [5], [4], [6], en todos estos casos sin dispersión. En cuanto a artículos en los cuales podamos encontrar controles finitos con dispersión, hasta donde conocemos este sería el primer trabajo en el que se considera control óptimo de E.D.P. con este tipo de controles.

El aporte del presente trabajo es en primer lugar el análisis de los problemas de control óptimo parabólicos con controles finitos, al obtener las condiciones de optimalidad para el caso de controles finitos con y sin dependencia del tiempo sin dispersión y para el caso finito con controles dispersos. Además la caracterización de la dispersión del control óptimo mediante una fórmula de proyección. Basándonos en estas condiciones y caracterización hemos desarrollado los siguientes algoritmos numéricos:

- De tipo Conjuntos Activos (PDAS) para el caso funcional , finito sin dispersión y finito con controles dispersos,
- De tipo de Coordenadas Descendentes (CGDM) para el caso finito con controles dispersos, el cual es paralelizable.

Además se han realizado la implementación numérica y sus respectivos experimentos. Este proyecto de titulación está organizado en seis partes: en el Capítulo 1 se introducen conceptos teóricos y se resumen trabajos preliminares relevantes para los objetivos de la investigación. En el Capítulo 2 se analiza el problema lineal - cuadrático con penalización en norma ℓ_2 . El Capítulo 3 analiza la formulación de nuestro problema lineal cuadrático disperso pues tiene la segunda penalización en norma ℓ_1 y utilizaremos los métodos PDAS y CGDM para su implementación numérica. En el Capítulo 4 se realiza la paralelización del algoritmo de coordenadas descendentes (CGDM) implementado

en el capítulo 3. Finalmente, en el Capítulo 5 se presentan algunas conclusiones sobre el trabajo realizado.

1.1 Notaciones

A lo largo de este trabajo utilizaremos la siguientes notaciones:

$\nabla f(x)$	El gradiente de una función f diferenciable en x
$y_t = \frac{\partial y}{\partial t}$	Primera derivada parcial de una función y con respecto a t
Ω	Un dominio Lipschitz acotado en \mathbb{R} .
Γ	Frontera de Ω .
(\cdot, \cdot)	Representa el producto escalar en $L^2(\Omega)$
$\ \cdot\ _{L^2(\Omega)}$	La norma correspondiente al espacio funcional $L^2(\Omega)$
$\ x\ _{\ell_2} = (\sum_i x_i^2)^{\frac{1}{2}}$	La norma euclideana de \mathbb{R}^n
$\ x\ _{\ell_1} = \sum_i x_i $	La norma ℓ_1
t	Variable del tiempo

(1.1)

Para indicar las iteraciones de los algoritmos se utilizarán super-índices, y para cada componente de los vectores sub-índices, es decir, la notación x_i^k hace referencia a la componente i -ésima de la k -ésima iteración de algún algoritmo, para el caso de control Óptimo con controles finitos se tendrá la notación $x_i(k)$ donde se hace referencia a la componente i -ésima de la k -ésima iteración de algún algoritmo. Las matrices se denotarán con letras mayúsculas y los vectores con minúsculas.

1.2 Formulación del problema

De manera general estudiamos el problema:

$$\text{mín } F(y, u) := f(y, u) + \gamma P(u), \quad (1.2)$$

donde f es un funcional diferenciable cuadrático que depende de las variables de estado y y del control u . P es una función propia convexa y semi-continua inferior, la cual no es necesariamente diferenciable y contiene el término responsable de inducir dispersión en las soluciones.

La variable y considerada en (1.2) debe satisfacer la ecuación de estado, que está dada por la ecuación parabólica lineal:

$$\begin{aligned}
y_t - \Delta y + \gamma y &= \sum_{i=1}^m u_i \varphi_i, & Q, \\
\partial_\nu y &= 0, & \Sigma, \\
y(0, \cdot) &= y_{ini}, & \Omega.
\end{aligned} \tag{1.3}$$

donde $Q = \Omega \times (0, T)$, $\Sigma = \Gamma \times (0, T)$, Δy es el Laplaciano de y , con $T > 0$ un tiempo fijo final y $\gamma \geq 0$ una constante fija. Asumamos que $y_{ini} \in L^2(Q)$ es una función dada y que $\varphi_i \in L^2(Q)$, para $i = 1, 2, 3, \dots, m$

En nuestro caso tomamos $P = \gamma \|\cdot\|_{\ell_1} + \chi_{U_{ad}}$ el control óptimo pertenece a un espacio de dimensión finita ya que el control u se toma como una combinación lineal de un número finito de funciones $(\varphi_i)_{i=1\dots m}$. En nuestro primer problema analizaremos (1.2), donde $\gamma = 0$ y los controles están en un espacio de dimensión finita. Luego, en nuestro segundo caso tendremos $\gamma = 0$ con controles que son dependientes del tiempo, para terminar abordando el tema de controles dispersos con $\gamma > 0$.

Continuaremos entonces en la siguiente sección con el estudio de la ecuación de estado.

1.3 Estudio de la ecuación de estado

1.3.1 Soluciones débiles en el espacio $W(0, T)$

Empezaremos con las definiciones tomadas del libro de control óptimo para E.D.P. de Fredi Tröltzsch c.f. [7, pág 141], necesarias para nuestro estudio.

Definición 1. *Cualquier función definida de $[a, b] \subset \mathbb{R}$ en un espacio de Banach X se llama función vectorial.*

Definición 2. *Sea $\{X, \|\cdot\|_X\}$ un espacio de Banach real. Decimos que una función vectorial $y : [a, b] \rightarrow X$ es continua en el punto $t \in [a, b]$ si $\lim_{\tau \rightarrow t} \|y(\tau) - y(t)\|_X = 0$. Denotamos el espacio de todas las funciones vectoriales que son continuas en todo punto $t \in [a, b]$ por $C([a, b], X)$. El espacio $C([a, b], X)$ es un espacio de Banach con respecto a la norma*

$$\|y\|_{C([a,b],X)} = \max_{t \in [a,b]} \|y(t)\|_X \tag{1.4}$$

Definición 3. *Una función vectorial $y : [a, b] \rightarrow X$ se llama función de pasos si hay un número finito de $y_i \in X$ y conjuntos disjuntos $M_i \subset [a, b]$ lebesgue medibles, con m*

tal que $1 \leq i \leq m$, y $[a, b] = \bigcup_{i=1}^m M_i$ y $y(t) = y_i$ para todo $t \in M_i$, $1 \leq i \leq m$.

Definición 4. Una función vectorial $y : [a, b] \rightarrow X$ se dice medible si existe una sucesión $\{y_k\}_k^\infty$ de funciones de pasos $y_k : [a, b] \rightarrow X$ tal que $y(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} y_k(t)$ para casi todo $t \in [a, b]$.

Definición 5. Espacios L^p

(i) Denotamos por $L^p(a, b; X)$, $1 \leq p < \infty$, los espacios lineales de todas las (clases de equivalencia) funciones vectoriales medibles $y : [a, b] \rightarrow X$ que tienen la propiedad

$$\int_a^b \|y(t)\|_X^p dt < \infty. \quad (1.5)$$

El espacio $L^p(a, b; X)$ es un espacio de Banach con respecto a la norma

$$\|y\| := \left(\int_a^b \|y(t)\|_X^p dt \right)^{(1/p)}. \quad (1.6)$$

(ii) Denotamos por $L^\infty(a, b; X)$ el espacio de Banach de todas (clases de equivalencia) las funciones vectoriales medibles $y : [a, b] \rightarrow X$ que tienen la propiedad

$$\|y\|_{L^\infty(a, b; X)} := \operatorname{ess\,sup}_{[a, b]} \|y(t)\|_X < \infty \quad (1.7)$$

En los espacios definidos, las funciones que difieren en un subconjunto de $[a, b]$ de medida de Lebesgue 0 pertenecen a la misma clase de equivalencia y se los toma como iguales. También sabemos que $C([a, b], X) \subset L^p(a, b; X) \subset L^q(a, b; X)$ para $1 \leq q \leq p \leq \infty$.

Distribuciones Vectoriales

En la siguiente sección presentaremos algunos conceptos sobre distribuciones vectoriales c.f. [7, pág 145].

Definición 6. Tenemos el espacio de Banach $V = H^1(\Omega)$. Para un $y \in X$, definimos una distribución vectorial $\mathcal{T} : C_0^\infty(0, T) \rightarrow V$ como sigue

$$\mathcal{T}\varphi := \int_0^T y(t)\varphi(t)dt \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(0, T). \quad (1.8)$$

Introduciremos también la derivada de \mathcal{T} como una distribución vectorial en términos de la integral de Bochner c.f. [7, pág 145]:

$$\mathcal{T}'\varphi := - \int_0^T y(t)\varphi'(t)dt. \quad (1.9)$$

Observemos que y es una función vectorial, mientras φ es real. Si existe una función $w = w(t) \in L^1(0, T; V)$ tal que

$$\mathcal{T}'\varphi = - \int_0^T y(t)\varphi'(t)dt = \int_0^T w(t)\varphi(t) dt \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(0, T), \quad (1.10)$$

entonces \mathcal{T}' puede ser identificada con w , ya que es inducida por ésta. Dado que identificamos \mathcal{T} con y y \mathcal{T}' con w , hacemos lo mismo para y' y definimos:

$$y'(t) := w(t), \quad (1.11)$$

en este sentido, tenemos que $y' \in L^1(0, T; V)$.

Definición 7. *Tenemos $V = H^1(\Omega)$ un espacio de Banach y V^* su dual, denotamos por $W(0, T)$ al espacio lineal de todas las $y \in L^2(0, T; V)$ que tienen una derivada (en el sentido de distribuciones) $y' \in L^2(0, T; V^*)$, cuya norma está definida por*

$$\|y\|_{W(0, T)} = \left(\int_0^T (\|y(t)\|_V^2 + \|y'(t)\|_{V^*}^2) dt \right)^{1/2}. \quad (1.12)$$

El espacio $W(0, T) = \{y \in L^2(0, T; V) : y' \in L^2(0, T; V^*)\}$ es un espacio de Hilbert con el producto escalar

$$(u, v)_{W(0, T)} = \int_0^T (u(t), v(t))_V dt + \int_0^T (u', v')_{V^*} dt \quad (1.13)$$

1.4 Ecuaciones parabólicas lineales

Para poder resolver los problema de control óptimo que planteamos en este proyecto lo primero que debemos evaluar es la ecuación diferencial, conocida como ecuación de estado. La resolución de la ecuación de estado es importante ya que es la que puede modelar fenómenos como la propagación del sonido o del calor, electrostática, electrodinámica, dinámica de fluidos, elasticidad, mecánica cuántica entre otros. Como caso

particular tenemos una ecuación parabólica lineal, para la cual se discutirá sobre la existencia de las soluciones y sus propiedades.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio Lipschitz acotado con frontera $\Gamma = \bar{\Omega} \setminus \Omega$ y sea $T > 0$ un tiempo fijo final.

Consideramos el problema:

$$\begin{aligned} y_t - \Delta y + y &= f, & \Omega \times (0, T), \\ \partial_\nu y &= 0, & \Sigma \times (0, T), \\ y(0, \cdot) &= y_{ini}, & \Omega, \end{aligned} \tag{1.14}$$

donde,

$$\begin{aligned} Q &= \Omega \times (0, T), \\ \Sigma &= \Gamma \times (0, T), \\ f &\in C^2(\Omega), \end{aligned} \tag{1.15}$$

con las hipótesis del problema (1.3).

Para analizar (1.14) debemos dividirlo en dos subproblemas.

Definición 8. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio Lipschitz acotado con frontera $\Gamma = \bar{\Omega} \setminus \Omega$ y sea $T > 0$ un tiempo fijo final.

Tenemos el problema

$$\begin{aligned} y_t - \Delta y + y &= f, & Q, \\ \partial_\nu y &= 0, & \Sigma, \\ y(0, \cdot) &= 0, & \Omega. \end{aligned} \tag{1.16}$$

y

Definición 9. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio Lipschitz acotado con frontera $\Gamma = \bar{\Omega} \setminus \Omega$ y sea $T > 0$ un tiempo fijo final.

Tenemos el problema

$$\begin{aligned} y_{0,t} - \Delta y_0 + y_0 &= 0, & Q, \\ \partial_\nu y_0 &= 0, & \Sigma, \\ y_0(0, \cdot) &= y_{ini}, & \Omega, \end{aligned} \tag{1.17}$$

donde Q y Σ se toman como antes.

Empezaremos realizando la formulación variacional de (1.16) en $H^1(\Omega)$. Para encontrar la solución débil, busquemos $y \in W(0, T)$ tal que para todo $v \in H^1$ tengamos

$$\int_{\Omega} y_t v + \int_{\Omega} \nabla y \nabla v + \int_{\Omega} y v = \int_{\Omega} f v \quad (1.18)$$

Definición 10. La forma bilineal, continua y coerciva $a(y, v, t)$ asociada a la formulación variacional en (1.18) está definida por

$$a(y, v, t) := \int_{\Omega} \nabla y \nabla v + \int_{\Omega} y v = (\nabla y, \nabla v) + (y, v) \quad (1.19)$$

con $y \in W(0, T)$ y $v \in H^1(\Omega)$ donde (\cdot, \cdot) representa el producto escalar en $L^2(\Omega)$, además definimos el funcional lineal $F(v, t)$ por

$$F(v) := \int_{\Omega} f v \quad (1.20)$$

por los teoremas (3.9), (3.12) y (3.13) en el libro de Troltsch c.f. [7, pág 140,149,150], aplicados para $i = 1, \dots, m$, $f = f$, $\alpha = 0$, $c_0 = 1$ y $g = 0$ podemos formular (1.19) como una ecuación diferencial ordinaria

$$(y_t, v) + a(y, v, t) = F(v) \quad \text{c.t.p. } t \in [0, T], \quad (1.21)$$

la cual tiene una solución, $\hat{y} \in W(0, T)$ que es única.

Ahora vamos a considerar el problema con la condición inicial en el tiempo, realizando su formulación variacional. Buscamos $y_0 \in W(0, T)$ tal que para todo $v \in H^1$ tengamos

$$\int_{\Omega} y_{0,t} v + \int_{\Omega} \nabla y_0 \nabla v + \int_{\Omega} y_0 v = 0 \quad (1.22)$$

Haciendo referencia a la definición (10) tenemos el operador definido anteriormente a y tomamos el funcional $F = 0$, por los teoremas (3.13), (3.12) y (3.9) en el libro de Troltsch c.f. [7, pág 140,149,150], aplicados para $f = 0$, $\alpha = 0$, $c_0 = 1$, $g = 0$ y $y_0 = y_{ini}$ tenemos que la ecuación diferencial ordinaria

$$(y_t, v) + a(y, v, t) = 0 \quad \text{c.t.p. } t \in [0, T] \quad (1.23)$$

tiene una solución, $y_0 \in W(0, T)$ que es única.

Definiremos entonces la solución de (1.14) de la siguiente manera

$$y = \hat{y} + y_0 \quad (1.24)$$

por lo tanto, obtenemos que la solución del problema (1.14) existe y es única.

Continuidad de las Soluciones

Una vez halladas las soluciones de las ecuaciones parabólicas nos interesa la continuidad de las mismas por lo que en esta sección citaremos el lema de estimaciones a priori de Troltzsch [7, pág 378] aplicado a nuestro problema.

Lema 1.4.1. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ un dominio Lipschitz acotado, y supongamos que que hay funciones acotadas dadas $f \in L^2(Q)$, y $y_0 \in C(\bar{\Omega})$, donde $r > N/2 + 1$ y $s > N + 1$. Entonces la solución débil y de la ecuación parabólica lineal*

$$\begin{aligned} y_t + \Delta y + y &= f, & \text{en } Q, \\ \partial_\nu y &= 0, & \text{en } \Sigma, \\ y(0, \cdot) &= y_{ini} & \text{en } \Omega. \end{aligned} \tag{1.25}$$

pertenece a $W(0, T) \cap C(\bar{\Omega})$. Además, existe una constante $c > 0$, que no depende de f o y_0 , tal que

$$\|y\|_{W(o, T)} + \|y\|_{C(\bar{Q})} \leq c(\|f\|_{L^2(Q)} + \|y_0\|_{C(\bar{\Omega})}). \tag{1.26}$$

Capítulo 2

Problemas de Control Óptimo con regularización en norma L^2

En este capítulo vamos a resolver problemas de control óptimo de tipo parabólico con funcionales del tipo lineal - cuadrático con regulaciones L^2 y controles finitos sin dependencia del tiempo y con dependencia del tiempo. Estos problemas se rigen por ecuaciones diferenciales parciales parabólicas, las cuales fueron presentadas en el capítulo anterior. Analizamos la existencia y unicidad de las soluciones para el problema de control óptimo y derivamos sus condiciones de optimalidad. Desarrollamos un algoritmo para su resolución numérica basado en el método primal-dual de conjuntos activos (PDAS) que se describirá más adelante. Mostramos aspectos prácticos de implementación y por último presentaremos los resultados obtenidos por medio de los experimentos numéricos realizados.

Si bien es claro que el algoritmo primal-dual es directamente aplicable en este tipo de problemas, éste requiere algunas modificaciones y consideraciones que no se encuentra en literatura existente, ni tampoco experimentos numéricos. Es interesante notar que si bien el algoritmo de Newton semi-suave es equivalente al PDAS (bajo ciertas condiciones) un esquema de Newton semi-suave no aprovecha la estructura de los controles finitos. Veremos más adelante que el algoritmo PDAS aprovecha dicha estructura de manera natural.

2.1 Control Óptimo con controles finitos

2.1.1 Formulación del Problema

Para empezar vamos a fijar algunas hipótesis generales en los datos dados, que serán de utilidad.

Hipótesis 2.1.1. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio Lipschitz acotado con frontera $\Gamma = \bar{\Omega} \setminus \Omega$, $\Sigma = \Gamma \times (0, T)$ y $Q = \Omega \times (0, T)$, con $T > 0$ un tiempo fijo final y $\lambda \geq 0$ una constante fija. Asumamos que $y_d \in L^2(Q)$ es una función dada y $u_a, u_b \in \mathbb{R}^m$ tal que $u_a \geq u_b$. Además $\varphi_i \in L^2(\Omega)$, para $i = 1, 2, 3, \dots, m$

Sea el subconjunto de los controles admisibles definido de la siguiente manera

$$U_{ad} = \{u \in \mathbb{R}^m : u_a \leq u \leq u_b\}. \quad (2.1)$$

Procedemos entonces a definir el problema como sigue bajo las hipótesis anteriores.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{mín } J(y, u) = \frac{1}{2} \|y - y_d\|_{L^2(Q)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L^2(0, T; \mathbb{R}^m)}^2 \\ \text{sujeto a:} \\ y_t - \Delta y + y = \sum_{i=1}^m u_i \varphi_i, \quad Q, \\ \partial_\nu y = 0, \quad \Sigma, \\ y(0, \cdot) = y_{ini}, \quad \Omega, \\ u \in U_{ad}. \end{array} \right. \quad (2.2)$$

2.1.2 Análisis del problema de control óptimo

La existencia y unicidad del problema se estudiará usando el hecho de que el conjunto de los controles está en un espacio de dimensión finita. A cada control finito se le relaciona un estado mediante la siguiente ecuación

$$\left\{ \begin{array}{l} y_t - \Delta y + y = \sum_{i=1}^m u_i \varphi_i, \quad Q, \\ \partial_\nu y = 0, \quad \Sigma, \\ y(0, \cdot) = y_{ini}, \quad \Omega, \\ u \in U_{ad}. \end{array} \right. \quad (2.3)$$

se puede dividir en m subproblemas definidos como en (1.16) tomado $f = \varphi_i$; y las

soluciones de estos m subproblemas están dados por y_i donde y_i satisface

$$\begin{aligned} y_{i,t} - \Delta y_i + y_i &= \varphi_i, \\ \partial_\nu y_i &= 0, \\ y_i(0, \cdot) &= 0. \end{aligned} \tag{2.4}$$

con $i = 1, 2, 3, \dots, m$. Adicionalmente se considera el subproblema (1.17) cuya solución esta dada por y_0 . Las soluciones correspondientes existen y son únicas como lo demostramos en la primera sección (1.4).

Multiplicamos los m subproblemas por u_i con $i = 1, 2, 3, \dots, m$,

$$\begin{aligned} y &= \sum_{i=1}^m u_i y_i, \\ y_t &= \sum_{i=1}^m u_i y_{i,t}, \\ \Delta y &= \sum_{i=1}^m u_i \Delta y_i. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Para las condiciones en la frontera tenemos

$$\partial_\nu \sum_{i=1}^m u_i y_i = \sum_{i=1}^m u_i \partial_\nu y_i = 0. \tag{2.6}$$

Entonces para la ecuación

$$\begin{aligned} y_t - \Delta y + y &= \sum_{i=1}^m u_i \varphi_i, & Q, \\ \partial_\nu y &= 0, & \Sigma, \\ y(0, \cdot) &= 0, & \Omega. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Usamos el principio de superposición citado en el apéndice (A.1) tomando $c_1 = u_1$, $f_1 = \varphi_1$, $c_2 = u_2$ y $f_2 = \varphi_2$ y obtenemos la solución $y_{12} = u_1 y_1 + u_2 y_2$, luego tomamos $c_2 = u_3$ y $f_2 = \varphi_3$ con la solución $y_{13} = u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3$ y así sucesivamente por lo tanto podemos escribir que por el principio de superposición la solución existe, es única y esta dada por

$$y = \sum_{i=1}^m u_i y_i + y_0, \tag{2.8}$$

donde y_0 es la solución de la ecuación parabólica lineal dada por (1.17).

Problema Reducido

Para tratar el problema de existencia, vamos a reescribir el problema de control óptimo (2.2) como un problema de optimización en términos de u . Para esto reemplazamos en y definido en (2.2) por el operador de control - estado que definiremos en la siguiente sección

Operadores lineales de Control-Estado

Para poder resolver un problema de optimización debemos relacionar la solución de la ecuación de estado con la función independiente, lo realizaremos mediante la definición de operadores lineales que nos permite escribir el problema de optimización en términos de u . A continuación se describe una forma general de los operadores.

Tenemos que la solución de la ecuación parabólica lineal está dada en (2.8), los operadores están definidos entonces por

Definición 11. Sea $i = 1, \dots, m$ y sean G_i y G_0 los operadores definidos por

$$\begin{aligned} G_i : \mathbb{R} &\rightarrow W(0, T) \\ u &\mapsto y_i \end{aligned} \quad , \quad (2.9)$$

tal que y_i es solución del problema (1.16).

Así mismo definimos G_0 de la siguiente manera

$$\begin{aligned} G_0 : \mathbb{R} &\rightarrow W(0, T) \\ u_0 &\mapsto \tilde{y}_0, \end{aligned} \quad (2.10)$$

tal que \tilde{y} es solución del problema (1.17)

Definimos el operador de control-estado

Definición 12. Sea S el operador de control-estado definido por

$$\begin{aligned} S : \mathbb{R}^m &\rightarrow W(0, T) \\ u &\mapsto y = Su = G(u) + G_0(u), \end{aligned} \quad (2.11)$$

donde $G(u) = \sum_{i=1}^m G_i(u)$ y y es solución del problema (2.2)

Una de las propiedades inmediatas de este operador está en el siguiente lema

Lema 2.1.2. EL operador S es afín-lineal y continuo.

Demostración La afin linealidad se sigue de la definición de G y G_0 , pues las G_i son lineales y G_0 es constante, por lo tanto S es afin-lineal.

La continuidad tenemos del hecho de que los operadores G_i están acotados por las estimaciones a priori en (1.26) por lo tanto son continuos, y como G_0 es constante tenemos que S es continuo. ■

Ahora, para obtener el problema reducido debemos calcular el funcional de costo F . Partimos de la solución y de (2.2). Tenemos que

$$y = Su, \tag{2.12}$$

reemplazando en el funcional de costo J definimos $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ como $F(u) = J(S(u), u)$

$$F(u) = \frac{1}{2} \|S(u) - y_d\|_{L^2(Q)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{\mathbb{R}^m}^2 \tag{2.13}$$

Así hemos obtenido el funcional de costo. A continuación estudiamos la existencia del control óptimo.

Existencia del Control Óptimo

Ahora demostraremos la existencia del control óptimo usando su formulación reducida.

Teorema 2.1.3. *Existe un control óptimo \bar{u} para el problema (2.2), que es único y está acotado.*

Demostración

Como U_{ad} es convexo, cerrado y acotado. F es continua, pues los operadores G_0 y G_i son continuos, además es convexa, por lo tanto por el teorema de Weierstrass [8] el operador S alcanza sus valores mínimos en U_{ad}

■

Para obtener información sobre la solución del problema (2.2) es necesario caracterizarla mediante las condiciones de optimalidad. Estas condiciones proveen información esencial para el diseño de algoritmos numéricos. Dado que tratamos con problemas cuadráticos lineales, y por tanto convexos. Las condiciones necesarias de primer orden también son suficientes. Por tanto, si un control satisface dichas condiciones entonces está garantizado que es la solución buscada. A continuación utilizamos la técnica Lagrangeana para deducir dichas condiciones en términos de un sistema de optimalidad

2.1.3 Condiciones de Optimalidad

Para calcular las condiciones de optimalidad utilizaremos el método del Lagrangeano. Por lo tanto definimos en lagrangeano como

$$\begin{aligned}
 L(y, u, p, \mu_a, \mu_b) = & \\
 \frac{1}{2} \|y - y_d\|_{L^2(Q)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{\mathbb{R}^m}^2 + \int_0^T \int_{\Omega} p(y_t - \Delta y + y - \sum_1^m u_i \varphi_i) dx dt & \quad (2.14) \\
 + \langle \mu_a, u_a - u \rangle + \langle \mu_b, u - u_b \rangle &
 \end{aligned}$$

donde p , μ_a y μ_b son los multiplicadores de Lagrange que penalizan las restricciones del control dadas por u_a y u_b , respectivamente.

Las condiciones de optimalidad se obtienen hallando los puntos críticos del Lagrangeano y observamos para que expresiones se cumple las condiciones necesarias de optimalidad.

Buscamos $\bar{u} \in L^2(0, T, \mathbb{R}^m)$, $\bar{y} \in W(0, T)$, $p \in W(0, T)$ y $\mu_a, \mu_b \in \mathbb{R}^m$ tales que

$$D_y(\bar{y}, \bar{u}, p, \mu_a, \mu_b) = 0 \quad (2.15)$$

$$D_u(\bar{y}, \bar{u}, p, \mu_a, \mu_b) = 0 \quad (2.16)$$

La primera ecuación nos lleva a la ecuación adjunta c.f. [7], por lo tanto la derivada nos queda:

$$\begin{aligned}
 D_y(\bar{y}, \bar{u}, p, \mu_a, \mu_b)y &= \int_0^T \int_{\Omega} (\bar{y} - y_d) y dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} p(y_t - \Delta y + y) dx dt \\
 &= \int_0^T \int_{\Omega} (\bar{y} - y_d) y dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} y_t p dx dt \\
 &\quad - \int_0^T \int_{\Omega} \Delta y p dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} y p dx dt
 \end{aligned} \quad (2.17)$$

Integrando por partes respecto a la variable temporal y utilizando la fórmula de Green

en la variable espacial obtenemos

$$\begin{aligned}
D_y(\bar{y}, \bar{u}, p, \mu_a, \mu_b)y &= \int_0^T \int_{\Omega} (\bar{y} - y_d) y \, dx \, dt - \int_0^T \int_{\Omega} p_t y \, dt \\
&+ \int_0^T \int_{\Omega} \nabla y \nabla p \, dx \, dt + \int_0^T \int_{\Omega} y p \, dx \, dt \\
&+ \int_{\Omega} (y(0, x)p(0, x) - y(T, x)p(T, x)) \, dx \\
&- \int_0^T \int_{\Gamma} \partial_\nu y p \, ds \, dt,
\end{aligned} \tag{2.18}$$

aplicando la fórmula de green nuevamente

$$\begin{aligned}
D_y(\bar{y}, \bar{u}, p, \mu_a, \mu_b)y &= \int_0^T \int_{\Omega} (\bar{y} - y_d) y \, dx \, dt - \int_0^T \int_{\Omega} p_t y \, dt \\
&- \int_0^T \int_{\Omega} y \Delta p \, dx \, dt + \int_0^T \int_{\Omega} y p \, dx \, dt \\
&+ \int_{\Omega} (y(0, x)p(0, x) - y(T, x)p(T, x)) \, dx \\
&- \int_0^T \int_{\Gamma} (\partial_\nu y p - \partial_\nu p y) \, ds \, dt.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Notemos ahora que si en particular $y \in C_0^\infty(Q)$, las expresiones $y(T, x)$, $y(0, x)$, $\partial_\nu p$ y $\partial_\nu y$ se anulan en Ω y Σ respectivamente, por lo tanto tenemos:

$$\int_0^T \int_{\Omega} (\bar{y} - y_d) y \, dx \, dt + \int_0^T \int_{\Omega} (-p_t y - \Delta p y + p y) \, dx \, dt = 0 \tag{2.20}$$

como $C_0^\infty(Q)$ es denso en $L^2(Q)$ tenemos

$$\int_0^T \int_{\Omega} (-p_t - \nabla p \nabla + p) y \, dx \, dt = \int_0^T \int_{\Omega} (y_d - \bar{y}) y \, dx \, dt \tag{2.21}$$

de donde obtenemos

$$-p_t - \Delta p + p = y_d - \bar{y} \quad \text{en } Q \tag{2.22}$$

Ahora vamos a considerar $y \in C^1(\bar{Q})$, tal que $y|_{\Sigma} = 0$ y $y(0, x) = 0$, y como $C^1(\bar{Q})$ es denso en $L^2(Q)$ concluimos

$$\begin{aligned}
y(T)p(T) &= 0 \\
p(T) &= 0
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Ahora vamos a considerar que $y \in C^1(\bar{Q})$ y obtenemos que

$$\int_{\Omega} \int_0^T \partial_v p y = 0 \quad (2.24)$$

como sabemos que $C^1(\bar{Q})$ es denso en $L^2(\Sigma)$, concluimos formalmente que el siguiente sistema es un candidato para ser la ecuación adjunta

$$\begin{aligned} -p_t - \Delta p + p &= y_d - \bar{y}, & \text{en } Q \\ \partial_v p &= 0, & \text{en } \Sigma \\ p(T, x) &= 0, & \text{en } \Omega \end{aligned} \quad (2.25)$$

El problema parabólico (1.20) tiene solución débil única $p \in W_2^{1,1}(Q)$ por el Lema 3.17 del libro de Troeltsch [7] en la página 157.

En cuanto a la ecuación del gradiente podemos proceder de la siguiente manera: para todo $u \in \mathbb{R}^m$ se tiene que:

$$\begin{aligned} D_u L(\bar{y}, \bar{u}, p, \mu_a, \mu_b)(u) &= \lambda \bar{u}^T u - \int_0^T \int_{\Omega} p \varphi^T u y \, dx \, dt \\ &\quad - \mu_a^T u + \mu_b^T u \\ &= \lambda \bar{u}^T u - \int \int_{\Sigma} p u \, ds \, dt \\ &= - \int_0^T \int_{\Omega} p \varphi^T u \, dx \, dt - (\mu_a - \mu_b)^T u \\ &= (\lambda \bar{u} + \mu_a - \mu_b)^T u - \left(\int_0^T \int_{\Omega} p \varphi^T \, dx \, dt \right) u \\ &= \left\langle \lambda \bar{u} - \int_0^T \int_{\Omega} p(x, \cdot) \varphi \, dx + \mu_b - \mu_a, u \right\rangle_{\mathbb{R}^m} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (2.26)$$

De donde se obtiene la ecuación del gradiente:

$$\lambda \bar{u} - \int_0^T \int_{\Omega} p(x, \cdot) \varphi(x)^T \, dx \, dt + \mu_b - \mu_a = 0. \quad (2.27)$$

Así tenemos el siguiente sistema de optimalidad:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\text{Ecuación de estado} \quad \bar{y}_t - \Delta \bar{y} + \bar{y} = \sum_{i=1}^m u_i \varphi_i(x), \quad \text{en } Q \\
\quad \quad \quad \partial_\nu \bar{y} = 0, \quad \text{en } \Sigma \\
\quad \quad \quad \bar{y}(0, \cdot) = y_0, \quad \text{en } \Omega \\
\\
\text{Ecuación adjunta} \quad -\bar{p}_t - \Delta \bar{p} + \bar{p} = \bar{y} - y_d \quad \text{en } Q \\
\quad \quad \quad \partial_\nu \bar{p} = 0 \quad \text{en } \Sigma \\
\quad \quad \quad \bar{p}(T, \cdot) = 0 \quad \text{en } \Omega \\
\\
\text{Ecuación del Gradiente} \quad \lambda \bar{u} - \int_0^T \int_\Omega \bar{p}(x, \cdot) \varphi(x)^T dx dt + \mu_b - \mu_a = 0
\end{array} \right. \quad (2.28)$$

Podemos ver en este caso que obtenemos una doble integral en la ecuación del gradiente en el término que contiene a p , pues como estamos en el caso que u no depende del tiempo ni del espacio entonces solamente quedan las integrales de la función $p(x, t)$.

Calcularemos el operador adjunto S^* para esto volvemos a definir el operador de control - estado S de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
S : \mathbb{R}^m &\longrightarrow L^2(Q) \\
u &\longrightarrow Su = \sum_{i=1}^m u_i y_i
\end{aligned} \quad (2.29)$$

Por lo que el operador control-estado se escribe como $u \mapsto Su + y_0$.

Lema 2.1.4. *El operador adjunto S^* de S está dado por*

$$\begin{aligned}
S^* : L^2(Q) &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\
v &\longrightarrow S^*v = \begin{pmatrix} \int_0^T \int_\Omega y_1 v \\ \int_0^T \int_\Omega y_2 v \\ \vdots \\ \int_0^T \int_\Omega y_m v \end{pmatrix}
\end{aligned} \quad (2.30)$$

Demostración

Tenemos que

$$(Su, v)_{L^2(Q)} = (u, S^*v)_{\mathbb{R}^m} \quad (2.31)$$

Por lo tanto reemplazando tenemos

$$\begin{aligned}
(Su, v)_{L^2(Q)} &= \int_0^T \int_{\Omega} Su v \\
&= \int_0^T \int_{\Omega} \sum_{i=1}^m u_i y_i v \\
&= \sum_{i=1}^m u_i \int_0^T \int_{\Omega} y_i v \\
&= u^T \zeta \\
&= (u, \zeta)_{\mathbb{R}^m},
\end{aligned} \tag{2.32}$$

donde ζ es el vector de componentes $\zeta_i = \int_0^T \int_{\Omega} y_i v$. Finalmente obtenemos que el operador S^* esta definido por

$$\begin{aligned}
S^* : L^2(Q) &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\
v &\longrightarrow S^*v = \begin{pmatrix} \int_0^T \int_{\Omega} y_1 v \\ \int_0^T \int_{\Omega} y_2 v \\ \vdots \\ \int_0^T \int_{\Omega} y_m v \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{2.33}$$

■

2.2 Control Óptimo con controles dependientes del tiempo

2.2.1 Formulación del Problema

Para empezar vamos a fijar algunas hipótesis generales en los datos dados, que serán de utilidad.

Hipótesis 2.2.1. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio Lipschitz acotado con frontera $\Gamma = \bar{\Omega} \setminus \Omega$, $\Sigma = \Gamma \times (0, T)$ y $Q = \Omega \times (0, T)$, con $T > 0$ un tiempo fijo final y $\lambda \geq 0$ una constante fija. Asumamos que $y_d \in L^2(Q)$ es una función dada y $u_a(\cdot), u_b(\cdot) \in L^2(0, T; \mathbb{R}^N)$ tal que $u_a(t) \geq u_b(t)$ para casi todo $t \in [0, T]$. Además $\varphi_i \in L^2(\Omega)$, para $i = 1, 2, 3, \dots, m$*

Sea el subconjunto de los controles admisibles definido de la siguiente manera

$$U_{ad} = \{u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m) : u_a(t) \leq u(t) \leq u_b(t)\} \tag{2.34}$$

Procedemos entonces a definir el problema de control óptimo como sigue bajo las hipótesis anteriores.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{mín } J(y, u) = \frac{1}{2}\|y - y_d\|_{L^2(Q)}^2 + \frac{\lambda}{2}\|u\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^m)}^2 \\ \text{sujeto a:} \\ y_t - \Delta y + y = \sum_{i=1}^m u_i \varphi_i, \quad \text{en } Q, \\ \partial_\nu y = 0, \quad \text{en } \Sigma, \\ y(0, \cdot) = y_{ini}, \quad \text{en } \Omega, \\ u \in U_{ad} \end{array} \right. \quad (2.35)$$

2.2.2 Análisis del problema de control Óptimo

Para poder tratar el problema de control óptimo lo primero que haremos es definir el operador de control-estado. Para esto debemos resolver la ecuación de estado. Nótese que para este caso el principio de superposición no se aplica.

Tenemos que la ecuación de estado es una ecuación parabólica lineal como en (1.14) con $f = u = \sum_{i=1}^m u_i \varphi_i$, nótese que f depende de (x, t) ya que $u = u(t)$ y $\varphi = \varphi(x)$. En particular para este problema la ecuación de estado se puede dividir en 2 subproblemas, el primero definido como en (1.16), esto es

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{y}_t - \Delta \hat{y} + \hat{y} = f, \quad \text{en } Q, \\ \partial_\nu \hat{y} = 0, \quad \text{en } \Sigma, \\ \hat{y}(0, \cdot) = 0, \quad \text{en } \Omega. \end{array} \right. \quad (2.36)$$

Es claro que esta ecuación tiene solución, ya que es un caso particular de (2.36) en la sección (1.4) tomando $f = \sum_{i=1}^m u_i \varphi_i$. Nótese que f está en $L^2(Q)$ y como $u_i \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ la ecuación tiene solución en $W(0, T)$ y es única.

Y el segundo subproblema dado como en (1.17)

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{y}_t - \Delta \tilde{y} + \tilde{y} = 0, \quad \text{en } Q, \\ \partial_\nu \tilde{y} = 0, \quad \text{en } \Sigma, \\ \tilde{y}(0, \cdot) = y_{ini}, \quad \text{en } \Omega. \end{array} \right. \quad (2.37)$$

el cual también tiene una solución única como lo vimos en (1.4) y esta dada por y_0

que cumpla (2.37).

Por lo tanto la ecuación de estado del problema (2.35) tiene solución única y está dada por

$$y = \hat{y} + y_0 \quad (2.38)$$

Problema Reducido

Ya con la solución de la ecuación de estado, vamos a reescribir el problema de control óptimo (2.35) como un problema de optimización en términos de u . Para esto vamos a definir el operador de control-estado

Operadores lineales de Control - Estado

Para poder resolver un problema de optimización debemos relacionar la solución de la ecuación de estado con la función independiente, esto lo realizamos por medio de la definición de operadores lineales que nos permiten escribir el problema de optimización en términos de u . A continuación se describe una forma general de los operadores. Tenemos que la solución de la ecuación parabólica lineal está dada en (A.1), los operadores están definidos entonces por

Definición 13. Sean G y G_0 los operadores definidos por

$$\begin{aligned} G : L^2(0, T; \mathbb{R}) &\rightarrow W(0, T) \\ u &\mapsto \hat{y} \end{aligned}, \quad (2.39)$$

tal que \hat{y} es solución del problema (2.36) Así mismo definimos el operador G_0 dado por

$$\begin{aligned} G_0 : L^2(0, T; \mathbb{R}) &\rightarrow W(0, T) \\ u_0 &\mapsto \tilde{y}_0 \end{aligned} \quad (2.40)$$

tal que \tilde{y}_0 es solución del problema (2.37)

Definimos el operador de control-estado como

Definición 14. Sea S el operador de control-estado definido por

$$\begin{aligned} S : L^2(0, T; \mathbb{R}) &\rightarrow W(0, T) \\ u &\mapsto \bar{y} = S(u) = G(u) + G_0 \end{aligned} \quad (2.41)$$

donde $G(u)$ y G_0 , están dados por (13)

Una de las propiedades inmediatas de este operador está en el siguiente lema

Lema 2.2.2. *EL operador S es afín lineal y continuo.*

Demostración Tenemos que el operador S , está asociado a los operadores $G(u)$ y G_0 . El operador G_0 no depende de u por lo que determina el término afín, por lo tanto la linealidad está dada por en el operador $G(u)$.

Sea z una solución de la ecuación

$$\begin{aligned}\delta_t z - \Delta z + z &= \sum_{i=1}^m (u_i(t) + \alpha v_i(t)) \varphi_i, & Q, \\ \partial_\nu z &= 0, & \Sigma, \\ z(0, \cdot) &= 0, & \Omega.\end{aligned}\tag{2.42}$$

Ahora tomemos z_u como solución de la ecuación

$$\begin{aligned}\delta_t z_u - \Delta z_u + z_u &= \sum_{i=1}^m u_i(t) \varphi_i, & Q, \\ \partial_\nu z_u &= 0, & \Sigma, \\ z_u(0, \cdot) &= 0, & \Omega.\end{aligned}\tag{2.43}$$

y z_v como solución de

$$\begin{aligned}\delta_t z_v - \Delta z_v + z_v &= \sum_{i=1}^m \alpha v_i(t) \varphi_i, & Q, \\ \partial_\nu z_v &= 0, & \Sigma, \\ z_v(0, \cdot) &= 0, & \Omega.\end{aligned}\tag{2.44}$$

Para demostrar la linealidad de G debemos probar que $G(z_u + \alpha z_v) = G(z_u) + \alpha G(z_v)$. Multiplicando (2.44) por un escalar y sumando con (2.43) tenemos

$$\begin{aligned}\delta_t(z_u + \alpha z_v) - \Delta(z_u + \alpha z_v) + (z_u + \alpha z_v) &= \sum_{i=1}^m u_i(t) \varphi_i + \alpha v_i(t) \varphi_i, \\ \delta_t(z_u + \alpha z_v) - \Delta(z_u + \alpha z_v) + (z_u + \alpha z_v) &= \sum_{i=1}^m (u_i(t) + \alpha v_i(t)) \varphi_i,\end{aligned}\tag{2.45}$$

para las condiciones de frontera tenemos que

$$\begin{aligned}\partial_\nu z_u &= 0 \\ \partial_\nu \alpha z_v &= 0\end{aligned}\tag{2.46}$$

por lo tanto

$$\partial_\nu(z_u + \alpha z_v) = 0\tag{2.47}$$

por lo que tenemos $G(u)$ es lineal. Y como $S(u) = G(u) + G_0$, entonces $S(u)$ es afín lineal.

Para demostrar la continuidad de $G(u)$, demostraremos que está acotado, usando (1.26)

$$\begin{aligned} \|G(u)\|_{W(0,T)} &\leq c \left\| \sum_{i=1}^m u_i \varphi_i \right\|_{L^2(Q)}, \\ &\leq c \sum_{i=1}^m \int_0^T \int_{\Omega} u_i(t) \varphi_i(x) dx dt, \end{aligned} \quad (2.48)$$

Utilizando la desigualdad de Hölder tenemos

$$\begin{aligned} \|G(u)\|_{W(0,T)} &\leq c \sum_{i=1}^m \int_0^T \sqrt{\int_{\Omega} (u_i(t))^2 dx} \|\varphi_i\|_{L^2(\Omega)} dt, \\ &\leq c \sum_{i=1}^m \sqrt{|\Omega|} \int_0^T u_i(t) dt \|\varphi_i\|_{L^2(\Omega)}, \\ &\leq c \sqrt{|\Omega|} \sum_{i=1}^m \|u_i\|_{L^2(0,T)} \|\varphi_i\|_{L^2(\Omega)}, \\ &\leq c \sqrt{|\Omega|} \|u\|_{L^2(0,T,\mathbb{R}^m)} \max_i \|\varphi_i\|_{L^2(\Omega)}, \\ &\leq c \sqrt{|\Omega|} \max_i \|\varphi_i\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(0,T,\mathbb{R}^m)}, \\ &\leq \bar{c} \|u\|_{L^2(0,T,\mathbb{R}^m)} \end{aligned} \quad (2.49)$$

donde \bar{c} es una constante que no depende de u y contiene a $\sqrt{|\Omega|}$ y $\max_i \|\varphi_i\|_{L^2(\Omega)}$. Por lo tanto el operador es acotado, entonces es continuo. Como S es la suma de un operador continuo más un constante, también es continuo. ■

Ahora reemplazamos en el funcional de costo J . Definimos $F : L^2(0, T, \mathbb{R}^m) \longrightarrow \mathbb{R}$ como $F(u) = J(S(u), u)$ donde

$$F(u) = \frac{1}{2} \|S(u) - y_d\|_{L^2(Q)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L^2(0,T,\mathbb{R}^m)}^2 \quad (2.50)$$

Así hemos obtenido el funcional de costo F . A continuación estudiamos la existencia del control óptimo.

Existencia del Control Óptimo

Teorema 2.2.3. *Existe un control óptimo \bar{u} para el problema (2.35), que es único y está acotado.*

Demostración Sea una sucesión $(u_n) \subset U_{ad}$ que minimiza f , es decir, $f(u_n) \rightarrow j$

cuando $n \rightarrow \infty$. Como $L^2(Q)$ es reflexivo ya que es un espacio de Hilbert, y (u_n) es acotado, tenemos que existe una subsucesión u_{n_k} tal que $u_{n_k} \rightharpoonup \bar{u}$ en $L^2(\Omega)$ cuando $k \rightarrow \infty$.

Como U_{ad} es convexo y cerrado, por tanto es débilmente cerrado y f es continua, pues los operadores G_0 y G son continuos, además es convexa, por lo que tenemos que es débilmente semicontinua inferior, de donde podemos deducir que

$$j = \lim f(u_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \inf f(u_{n_k}) \geq f(\bar{u}) \quad (2.51)$$

por definición de ínfimo tenemos entonces que $j = f(\bar{u})$, por lo tanto, \bar{u} es un mínimo para f . La unicidad se sigue de la convexidad estricta de f en caso que $\lambda > 0$

■

Para obtener información sobre la solución del problema (2.35) es necesario caracterizarla mediante las condiciones de optimalidad. Estas condiciones proveen información esencial para el diseño de algoritmos numéricos. Dado que tratamos con problemas cuadráticos lineales, y por tanto convexos. Las condiciones necesarias de primer orden también son suficientes. Por tanto, si un control satisface dichas condiciones entonces está garantizado que es la solución buscada. A continuación utilizamos la técnica Lagrangeana para deducir dichas condiciones en términos de un sistema de optimalidad

2.2.3 Condiciones de Optimalidad

Sea \bar{u} un control óptimo de (2.35). En esta sección investigamos las condiciones que \bar{u} debe satisfacer si asumimos que es óptimo,

Consideremos primero controles que son funciones de la variable t solamente. Es decir,

$$U_{ad} = \{u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m) : u_a(t) \leq u(t) \leq u_b(t)\}. \quad (2.52)$$

donde $u_a, u_b \in L^2(0, T, \mathbb{R}^m)$ y $u_a \leq u_b$ casi todo punto en $t \in (0, 1)$, entendiéndose la relación " \leq " componente-a-componente.

Introducimos el lagrangeano asociado al problema (2.35) como

$$\begin{aligned} L(y, u, p, \mu_a, \mu_b) = & \\ \frac{1}{2} \|y - y_d\|_{L^2(Q)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L^2(0, T; \mathbb{R}^m)}^2 + \int_0^T \int_{\Omega} p(y_t - \Delta y + y - \sum_1^m u_i \varphi_i) dx dt & \quad (2.53) \\ + \langle \mu_a, u_a - u \rangle + \langle \mu_b, u - u_b \rangle & \end{aligned}$$

donde p , μ_a y μ_b son los multiplicadores de Lagrange que penalizan las restricciones del control dadas por u_a y u_b , respectivamente.

Las condiciones de optimalidad se obtienen hallando los puntos críticos del Lagrangeano y observamos para que expresiones se cumple las condiciones necesarias de optimalidad.

Buscamos $\bar{u} \in L^2(0, T, \mathbb{R}^m)$, $\bar{y} \in W(0, T)$, $p \in W(0, T)$ y $\mu_a, \mu_b \in L^2(0, T, \mathbb{R}^m)$ tales que

$$D_y(\bar{y}, \bar{u}, p, \mu_a, \mu_b) = 0 \quad (2.54)$$

$$D_u(\bar{y}, \bar{u}, p, \mu_a, \mu_b) = 0 \quad (2.55)$$

La primera ecuación nos lleva a la ecuación adjunta [7], por lo tanto la derivada nos queda:

$$\begin{aligned} D_y(\bar{y}, \bar{u}, p, \mu_a, \mu_b)y &= \int_0^T \int_{\Omega} (\bar{y} - y_d) y \, dx \, dt + \int_0^T \int_{\Omega} p(y_t - \Delta y + y) \, dx \, dt \\ &= \int_0^T \int_{\Omega} (\bar{y} - y_d) y \, dx \, dt + \int_0^T \int_{\Omega} y_t p \, dx \, dt \\ &\quad - \int_0^T \int_{\Omega} \Delta y p \, dx \, dt + \int_0^T \int_{\Omega} y p \, dx \, dt \end{aligned} \quad (2.56)$$

Integrando por partes respecto a la variable temporal y utilizando la fórmula de Green en la variable espacial obtenemos

$$\begin{aligned} D_y(\bar{y}, \bar{u}, p, \mu_a, \mu_b)y &= \int_0^T \int_{\Omega} (\bar{y} - y_d) y \, dx \, dt - \int_0^T \int_{\Omega} p_t y \, dt \\ &\quad + \int_0^T \int_{\Omega} \nabla y \nabla p \, dx \, dt + \int_0^T \int_{\Omega} y p \, dx \, dt \\ &\quad + \int_{\Omega} (y(0, x)p(0, x) - y(T, x)p(T, x)) \, dx \\ &\quad - \int_0^T \int_{\Gamma} \partial_\nu y p \, ds \, dt, \end{aligned} \quad (2.57)$$

aplicando la fórmula de green nuevamente

$$\begin{aligned}
D_y(\bar{y}, \bar{u}, p, \mu_a, \mu_b)y &= \int_0^T \int_{\Omega} (\bar{y} - y_d) y \, dx \, dt - \int_0^T \int_{\Omega} p_t y \, dt \\
&\quad - \int_0^T \int_{\Omega} y \Delta p \, dx \, dt + \int_0^T \int_{\Omega} y p \, dx \, dt \\
&\quad + \int_{\Omega} (y(0, x)p(0, x) - y(T, x)p(T, x)) \, dx \\
&\quad - \int_0^T \int_{\Gamma} (\partial_\nu y p - \partial_\nu p y) \, ds \, dt.
\end{aligned} \tag{2.58}$$

Notemos ahora que si en particular $y \in C_0^\infty(Q)$, las expresiones $y(T, x)$, $y(0, x)$, $\partial_\nu p$ y $\partial_\nu y$ se anulan en Ω y Σ respectivamente, por lo tanto tenemos:

$$\int_0^T \int_{\Omega} (\bar{y} - y_d) y \, dx \, dt + \int_0^T \int_{\Omega} (-p_t y - \Delta p y + p y) \, dx \, dt = 0 \tag{2.59}$$

como $C_0^\infty(Q)$ es denso en $L^2(Q)$ tenemos

$$\int_0^T \int_{\Omega} (-p_t - \Delta p + p)y \, dx \, dt = \int_0^T \int_{\Omega} (y_d - \bar{y}) y \, dx \, dt \tag{2.60}$$

de donde obtenemos

$$-p_t - \Delta p + p = y_d - \bar{y} \quad \text{en } Q \tag{2.61}$$

Ahora vamos a considerar $y \in C^1(\bar{Q})$, tal que $y|_{\Sigma} = 0$ y $y(0, x) = 0$, y como $C^1(\bar{Q})$ es denso en $L^2(Q)$ concluimos

$$\begin{aligned}
y(T)p(T) &= 0 \\
p(T) &= 0
\end{aligned} \tag{2.62}$$

Ahora vamos a considerar que $y \in C^1(\bar{Q})$ y obtenemos que

$$\int_{\Omega} \int_0^T \partial_\nu p y = 0 \tag{2.63}$$

como sabemos que $C^1(\bar{Q})$ es denso en $L^2(\Sigma)$, concluimos formalmente que el siguiente sistema es un candidato para ser el sistema de la ecuación adjunta

$$\begin{aligned}
-p_t - \Delta p + p &= y_d - \bar{y}, & \text{en } Q \\
\partial_\nu p &= 0, & \text{en } \Sigma \\
p(T, x) &= 0, & \text{en } \Omega
\end{aligned} \tag{2.64}$$

El problema parabólico (1.20) tiene solución débil única $p \in W_2^{1,1}(Q)$ por el Lema 3.17 del libro de Troeltsch [7] en la página 157.

Ahora vamos a considerar la derivada con respecto a u del Lagrangeano. Sea $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m) \in (L^2(\Omega))^m$

$$\begin{aligned}
D_u L(\bar{y}, \bar{u}, p, \mu_a, \mu_b)v &= \lambda \int_0^T \bar{u}^T v \, dt - \int_0^T \int_\Omega p \varphi^T v \, y \, dx \, dt \\
&\quad - \int_0^T \mu_a(t)^T v \, dt + \int_0^T \mu_b(t)^T v \, dt \\
&= \lambda \int_0^T \bar{u}^T v \, dt + \int \int_\Sigma p \, v \, ds \, dt \\
&\quad - \int_0^T \int_\Omega p \varphi^T v \, dx \, dt - \int_0^T (\mu_a(t) - \mu_b(t))^T v \, dt \tag{2.65} \\
&= \int_0^T \left[\lambda \bar{u}^T - \int_\Omega p \varphi^T \, dx + (\mu_a(t) - \mu_b(t))^T \right] v \, dt \\
&= \left(\lambda \bar{u}^T - \int_\Omega p(x, \cdot) \varphi^T \, dx + \mu_b(t) - \mu_a(t), v \right)_{L^2(0,T)} \\
&= 0
\end{aligned}$$

de donde se obtiene la ecuación del gradiente

$$\lambda \bar{u} - \int_\Omega p(x, \cdot) \varphi(x)^T \, dx + \mu_b - \mu_a = 0, \tag{2.66}$$

por lo tanto obtenemos el sistema de optimalidad como sigue:

$$\left\{ \begin{array}{ll}
\text{Ecuación de estado} & \begin{array}{l} \bar{y}_t - \Delta \bar{y} + \bar{y} = \sum_{i=1}^m \bar{u}_i(t) \varphi_i(x), \quad \text{en } Q \\ \partial_\nu \bar{y} = 0, \quad \text{en } \Sigma \\ \bar{y}(0, \cdot) = y_0, \quad \text{en } \Omega \end{array} \\
\text{Ecuación adjunta} & \begin{array}{l} -\bar{p}_t - \Delta \bar{p} + \bar{p} = y_d - \bar{y}, \quad \text{en } Q \\ \partial_\nu \bar{p} = 0, \quad \text{en } \Sigma \\ \bar{p}(T, x) = 0, \quad \text{en } \Omega \end{array} \\
\text{Ecuación del Gradiente:} & \lambda \bar{u} - \int_{\Omega} \bar{p}(x, \cdot) \varphi(x)^T dx + \mu_b - \mu_a = 0
\end{array} \right. \quad (2.67)$$

Nótese el carácter integral de la ecuación del gradiente, se debe a que los controles dependen de t pero no de x .

2.3 Resolución Numérica

En esta sección vamos a deducir un método primal-dual de conjuntos activos [5], que hemos utilizado para implementar el problema de optimización. Además presentaremos el mismo método, para el caso finito con lo que luego pasaremos a la implementación y a los experimentos numéricos.

2.3.1 Método Primal Dual de Conjuntos Activos (PDAS) para el caso con controles finitos

El método primal-dual de conjuntos activos (PDAS) utiliza información de los multiplicadores de Lagrange y la subsecuente actualización de los conjuntos activos. En lo que sigue definimos los conjuntos activos y mostramos el algoritmo de éste método.

Definición 15. Sea $i \in \mathfrak{S} = \{1, 2, \dots, m\}$ un conjunto de índices tal que $u = (u(1), u(2), \dots, u(m))$ con $u(i) \in \mathbb{R}$ y $c > 0$, los conjuntos activos están definidos de la siguiente manera.

$$\mathcal{A}_{k+1}^+ = \left\{ i \in \mathfrak{S} \mid u_k(i) + \frac{\mu^i}{c} \geq u_b(i) \right\}, \quad (2.68)$$

y

$$\mathcal{A}_{k+1}^- = \left\{ i \in \mathfrak{S} \mid u_k(i) + \frac{\mu^i}{c} \leq u_a(i) \right\}. \quad (2.69)$$

Ahora presentaremos el algoritmo

Algoritmo 1 PDAS

- 1: Inicializar u_0, μ_0 y $k = 1$.
- 2: Calcular $y_i, i = 1, \dots, m$ donde y_i es la solución de la ecuación (2.7)
- 3: Determinar los conjuntos activos como en (2.68) y (2.69) y luego obtenemos $\mathcal{I}_{k+1} = [0, T] \setminus (\mathcal{A}_{k+1}^+ \cup \mathcal{A}_{k+1}^-)$.
- 4: **mientras** Si $k \geq 2, \mathcal{A}_{k+1}^+ \neq \mathcal{A}_k^+, \mathcal{A}_{k+1}^- \neq \mathcal{A}_k^-$ y $\mathcal{I}_{k+1} \neq \mathcal{I}_k$ **hacer**
- 5: Calcular $(y_{k+1}, p_{k+1}, u_{k+1})$ tal que

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= \sum_{i=1}^m u_{k+1}(i) y_{k+1} + y_0, \\ p_{k+1} &= S^*(y_Q - y_{k+1}), \end{aligned} \tag{2.70}$$

donde

$$u_{k+1} = \begin{cases} u_b(i), & si \ i \in \mathcal{A}_{k+1}^+, \\ u_a(i), & si \ i \in \mathcal{A}_{k+1}^-, \\ \frac{1}{\lambda} \int_0^T \int_{\Omega} p_{k+1} \varphi, & si \ i \in \mathcal{I}_{k+1}. \end{cases} \tag{2.71}$$

- 6: Actualizar $\mu_{k+1} = \int_0^T \int p_{k+1} \varphi - \lambda u_{k+1}$.
 - 7: $k \leftarrow k + 1$.
 - 8: **fin mientras**
-

Tomando S^* como en (2.30), esto es $S^*(v_i) = \int_0^T \int_Q y_i v_i$ Además

$$\begin{aligned} (S u, \bar{y} + y_0 - y_d) &= (S \sum_i u_i \varphi_i, \bar{y} + y_0 - y_d) \\ &= \sum_i u_i (G \varphi_i, \bar{y} + y_0 - y_d) \\ &= \sum_i u_i (\varphi, G^*(\bar{y} + y_0 - y_d)) \\ &= \sum_i u_i (\varphi, p) \end{aligned} \tag{2.72}$$

por lo tanto,

$$\int_0^T \int_{\Omega} p_{k+1} \varphi_i = \int_0^T \int_{\Omega} (\bar{y} + y_0 - y_d) y_i \tag{2.73}$$

Podemos escribir un nuevo algoritmo PDAS cuya implementación no dependa de la resolución de la ecuación diferencial adjunta de la siguiente manera,

Algoritmo 2 PDAS

- 1: Inicializar u_0, μ_0 y $k = 1$.
- 2: Calcular $y_i, i = 1, \dots, m$ donde y_i es la solución de la ecuación (2.7)
- 3: Determinar los conjuntos activos como en (2.68) y (2.69) y luego obtenemos $\mathcal{I}_{k+1} = [0, T] \setminus (\mathcal{A}_{k+1}^+ \cup \mathcal{A}_{k+1}^-)$.
- 4: **mientras** Si $k \geq 2, \mathcal{A}_{k+1}^+ \neq \mathcal{A}_k^+, \mathcal{A}_{k+1}^- \neq \mathcal{A}_k^-$ y $\mathcal{I}_{k+1} \neq \mathcal{I}_k$ **hacer**
- 5: Calcular (y_{k+1}, u_{k+1}) tal que

$$y_{k+1} = \sum_{i=1}^m u_{k+1}(i)y_{k+1} + y_0, \quad (2.74)$$

donde

$$u_{k+1} = \begin{cases} u_b(i), & \text{si } i \in \mathcal{A}_{k+1}^+, \\ u_a(i), & \text{si } i \in \mathcal{A}_{k+1}^-, \\ \frac{1}{\lambda} \int_0^T \int_{\Omega} (y_{k+1} + y_0 - y_d)y_i, & \text{si } i \in \mathcal{I}_{k+1}. \end{cases} \quad (2.75)$$

- 6: Actualizar $\mu_{k+1} = \int_0^T \int (y_{k+1} + y_0 - y_d)y_i - \lambda u_{k+1}$.
 - 7: $k \leftarrow k + 1$.
 - 8: **fin mientras**
-

2.3.2 Análisis de convergencia (PDAS) - Caso Controles Finitos

La convergencia del método PDAS para el problema (2.35) se obtiene directamente de los resultados presentados en en el artículo de K. Kunisch y A. Rösch [30] ya que nuestro problema es un caso particular de problemas de control óptimo parabólicos lineales. Por tanto, si se toma λ adecuadamente y según lo especificado [30] Teoremas 2 y 3 y Corolario 4 en [30, págs. 328,330,328], la sucesión (u_n, y_n, p_n, μ_n) converge a la solución óptima $(\bar{u}, \bar{y}, \bar{p}, \bar{\mu})$ con velocidad de convergencia superlineal.

2.3.3 Método Primal Dual de Conjuntos Activos (PDAS) para el caso con controles dependientes del tiempo

Empezaremos definiendo los conjuntos activos como lo hicimos en la sección anterior

Definición 16. Sea $c > 0$ y sean $(u_k)_k, (\mu_{ka})_k, (\mu_{kb})_k$, sucesiones que aproximan a \bar{u}, μ_a y μ_b respectivamente, los conjuntos activos se definen de la siguiente manera.

$$\mathcal{A}_{k+1}^+ = \left\{ t \in [0, T] \left| u_k(t) + \frac{\mu_{kb}(t)}{c} \geq u_b(t) \right. \right\}, \quad (2.76)$$

y

$$\mathcal{A}_{k+1}^- = \left\{ t \in [0, T] \left| u_k(t) + \frac{\mu_{ka}(t)}{c} \leq u_a(t) \right. \right\}. \quad (2.77)$$

Ahora presentaremos el algoritmo

Algoritmo 3 PDAS

- 1: Inicializar u_0 , μ_0 y $k = 1$.
- 2: Calcular y_i
- 3: Determinar los conjuntos activos \mathcal{A}_{k+1}^+ (2.76) y \mathcal{A}_{k+1}^- (2.77) y luego obtenemos $\mathcal{I}_{k+1} = [0, T] \setminus (\mathcal{A}_{k+1}^+ \cup \mathcal{A}_{k+1}^-)$.
- 4: **mientras** $k \geq 2$, $\mathcal{A}_{k+1}^+ \neq \mathcal{A}_k^+$, $\mathcal{A}_{k+1}^- \neq \mathcal{A}_k^-$ y $\mathcal{I}_{k+1} \neq \mathcal{I}_k$ **hacer**
- 5: Calcular (y_{k+1}, p_{k+1}) tal que

$$\begin{aligned} y_{k+1} \text{ en } Q - \Delta y_{k+1} + y_{k+1} &= \sum_{i=1}^m u_{k+1} \varphi_i(x), & \text{en } Q \\ \partial_v y_{k+1} &= 0, & \text{en } \Sigma \\ y_{k+1}(0, \cdot) &= y_0, & \text{en } \Omega \end{aligned} \quad (2.78)$$

$$\begin{aligned} -p_{k+1} \text{ en } Q - \Delta p_{k+1} + p_{k+1} &= \bar{y}_{k+1} - y_d & \text{en } Q \\ \partial_v p_{k+1} &= 0 & \text{en } \Sigma \\ p_{k+1}(T, \cdot) &= 0 & \text{en } \Omega \end{aligned} \quad (2.79)$$

donde

$$u_{k+1}(t) = \begin{cases} u_b(t), & \text{si } t \in \mathcal{A}_{k+1}^+, \\ u_a(t), & \text{si } t \in \mathcal{A}_{k+1}^-, \\ \frac{1}{\lambda} \int_{\Omega} p_{k+1} \varphi, & \text{si } t \in \mathcal{I}_{k+1}. \end{cases} \quad (2.80)$$

- 6: Actualizar $\mu_{k+1} = \int_{\Omega} p_{k+1} \varphi - \lambda u_{k+1}$.
 - 7: $k \leftarrow k + 1$.
 - 8: **fin mientras**
-

2.3.4 Análisis de convergencia (PDAS) - Caso controles dependientes del tiempo

De la misma manera que en el caso anterior, la convergencia del método PDAS para el problema (2.35) se obtiene directamente de los resultados presentados en el artículo de K. Kunisch y A. Rösch [30] ya que nuestro problema es un caso particular de problemas de control óptimo parabólicos lineales. Por tanto, si se toma λ adecuadamente y según lo especificado [30] Teoremas 2 y 3 y Corolario 4 en [30, págs. 328,330,328],

la sucesión (u_n, y_n, p_n, μ_n) converge a la solución óptima $(\bar{u}, \bar{y}, \bar{p}, \bar{\mu})$ con velocidad de convergencia superlineal

2.4 Implementación

La implementación del algoritmo requiere resolver numéricamente las EDPs de estado y adjunta. Aplicaremos una semidiscretización. Es decir, la discretización espacial se hará usando elementos finitos lineales de lagrange mientras que la EDO resultante se resolverá con el método de Euler implícito, tanto para la ecuación de estado como para la ecuación adjunta como se explica a continuación.

Aproximación de la Ecuación de Estado

Siguiendo la metodología en Grossmann [9, p. 173], resolvemos numéricamente usando el método de semidiscretización, el cual consiste en discretizar la variable espacial en cada instante de tiempo usando elementos finitos lineales de Lagrange, lo cual da como resultado un sistema de EDO que es resuelto con el método de Euler implícito. Tomando $V = H^1$ en la definición (7) y sea V_h un subespacio de dimensión finita en $H^1(\Omega)$. Tomemos $\xi_i = \xi_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) funciones suaves tales que,

$$\{\xi_k\}_{k=1}^n \text{ es una base ortonormal de } V_h, \quad (2.81)$$

Ahora en la formulación variacional que obtuvimos en (1.21) tomamos

$$\begin{aligned} v &= \xi_j \\ y &= \sum_{i=1}^n y_i \xi_i \\ f &= \sum_{i=1}^m f_i \xi_i \end{aligned} \quad (2.82)$$

y reemplazando obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\sum_{i=1}^n y'_j(\xi_i, \xi_j) + \sum_{i=1}^n y_i a(\xi_i, \xi_j, t) = \sum_{i=1}^m f_i(\xi_i, \xi_j)_{L^2}, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.83)$$

Si reescribimos abriendo el operador $a(\cdot, \cdot, t)$ obtenemos

$$\sum_{i=1}^n y_i'(\xi_i, \xi_j) + \sum_{i=1}^n y_i((\nabla \xi_i, \nabla \xi_j) + (\xi_i, \xi_j)) = \sum_{i=1}^n f_i(\xi_i, \xi_j), \quad (2.84)$$

$$\sum_{i=1}^n y_i'(\xi_i, \xi_j) + \sum_{i=1}^n y_i(\nabla \xi_i, \nabla \xi_j) + \sum_{i=1}^n y_i(\xi_i, \xi_j) = \sum_{i=1}^n f_i(\xi_i, \xi_j), \quad (2.85)$$

donde (\cdot, \cdot) representa el producto escalar en L^2 . Definimos ahora

$$M = (\xi_j, \xi_i) \quad K = (\nabla \xi_j, \nabla \xi_i) \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (2.86)$$

las matrices de masa y rigidez respectivamente, luego volvemos a escribir el problema como sigue

$$My' + Ky + My = Mf \quad (2.87)$$

Ahora volvemos a la variable temporal y utilizando el método de Euler implícito tenemos

$$M \frac{y_{k+1} - y_k}{\delta t} + Ky_{k+1} + My_{k+1} = Mf$$

$$My_{k+1} + \delta t(K + M)y_{k+1} = My_k + \delta tMf \quad (2.88)$$

$$(M + \delta t(K + M))y_{k+1} = My_k + \delta tMf$$

Nota Para el caso de controles finitos la solución de la ecuación de estado está dada por la resolución de m subproblemas como en (1.16), donde se toma $f = \varphi_i$ para $i = 1, \dots, m$ debido al principio de superposición. ■

Aproximación de la Ecuación Adjunta

Análogamente haremos la aproximación de la ecuación adjunta por medio de elementos finitos. Sea $V_h \subset H^1$ un subespacio de dimensión finita. Tomando la misma base $\{\xi_k\}_{k=1}^n$ tenemos

$$p = \sum_{j=1}^n p_j \xi_j \quad (2.89)$$

$$\bar{y} = \sum_{j=1}^n \bar{y}_j \xi_j,$$

donde \bar{y} es la solución de la ecuación de estado. Reemplazando en (1.21), obtenemos

$$\sum_{j=1}^n p'_j(\xi_j, \xi_i) + \sum_{j=1}^n p_j a(\xi_j, \xi_i) = h. \pm k j j k, loim, op.u, o.p \pm -i.pu, o.pi - m.pmP :]P :]OP] ::]P * P * \quad (2.90)$$

Si reescribimos abriendo el operador $a(\cdot, \cdot)$ obtenemos

$$\sum_{j=1}^m p'_j(\xi_j, \xi_i) + \sum_{j=1}^n p_j(\nabla \xi_j, \nabla \xi_i) + \sum_{j=1}^n p_j(\xi_j, \xi_i) = \sum_{j=1}^n (\bar{y}_j - y_Q)(\xi_j, \xi_i). \quad (2.91)$$

Vamos a tomar M y K como antes, las matrices de masa y rigidez respectivamente, luego volvemos a escribir el problema como sigue

$$Mp' + Kp + Mp = M(\bar{y} - y_Q) \quad (2.92)$$

Utilizando el método de Euler implícito tenemos

$$M \frac{p_k - p_{k-1}}{\delta t} + K p_{k-1} + M p_{k-1} = M(\bar{y} - y_Q), \quad (2.93)$$

$$(M - \delta t(M + K))p_{k-1} = M p_k - \delta t M(\bar{y} - y_Q).$$

Nota La implementación del método de Conjuntos activos se lo realiza mediante el algoritmo detallado en la sección (2.3). Cabe destacar que para el caso con controles dependientes del tiempo la parte de la ecuación del gradiente

$$\int_Q p \varphi dx \approx p M \varphi \quad (2.94)$$

se lo hace mediante la matriz de masa calculada al implementar la resolución de la ecuación de estado y adjunta.

Para el caso con controles finitos tenemos

$$\int_0^T \int_Q (\bar{y} + y_0 - y_d) y_i dx dt \approx \int_0^T (\bar{y} + y_0 - y_d) M y_i dt \quad (2.95)$$

donde se utiliza la matriz de masa para la integral espacial y el método del trapecio para poder discretizar la integral con respecto al tiempo. ■

Experimento	Descripción
2.1	Caso Unidimensional con Controles en \mathbb{R}^m
2.2	Caso Unidimensional con Controles dependientes del tiempo

Tabla 2.1: Resumen de los experimentos

2.5 Experimentos Numéricos

En esta sección realizaremos experimentos variando algunos parámetros de interés. Previamente implementamos el algoritmo del método primal-dual de conjuntos activos dado en la sección (2.3). Haremos experimentos unidimensionales y bidimensionales.

Volvemos al problema (2.35) bajo las hipótesis definidas en (2.2.1):

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{mín } J(y, u) := \frac{1}{2} \|y - y_Q\|_{L^2(Q)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L^2(Q)}^2 \\ \text{s.a.} \\ y_t - \Delta y + y = \sum_{i=1}^m u_i \varphi_i, \quad \text{en } Q, \\ \partial_\nu y = 0, \quad \text{en } \Sigma, \\ y(0, x) = y_0, \quad \text{en } \Omega, \end{array} \right. \quad (2.96)$$

donde hemos realizado los siguientes experimentos, con los datos que se describen a continuación.

Caso unidimensional con controles finitos

Experimento 2.1

Para el experimento tenemos los siguientes datos $N = 1750$, $n = 280$, $u_0 = \text{ones}(10, 1)$, $Mu = 0$, $\mu = 1$, $ub = 2 * u_0$, $ua = -1 * u_0$, $\lambda = 1$

Tomaremos $m = 10$, las funciones están dadas como el experimento anterior mostradas en la figura 2.4 y y_d está dada por

$$y_d = \begin{cases} 30 \sin(\pi x) \cos(\pi t), & 0,25 < t < 0,75, \\ -10, & x < 0,5, \\ -80, & \text{casocontrario.} \end{cases} \quad (2.97)$$

Mostramos en las figuras la ecuación de estado (2.2) y la evolución del funcional de costo en la figura (2.1)

Para el Caso unidimensional con controles que no son dependientes del tiempo se

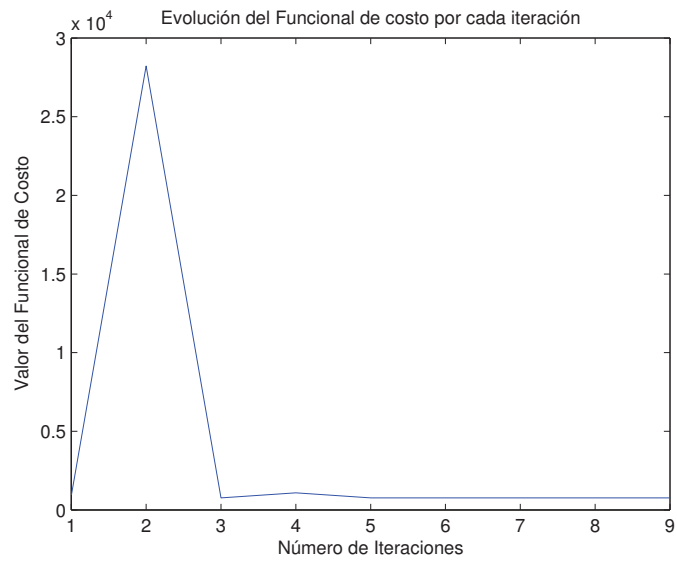


Figura 2.1: Evolución del funcional de Costo del segundo experimento ($\lambda = 1$)

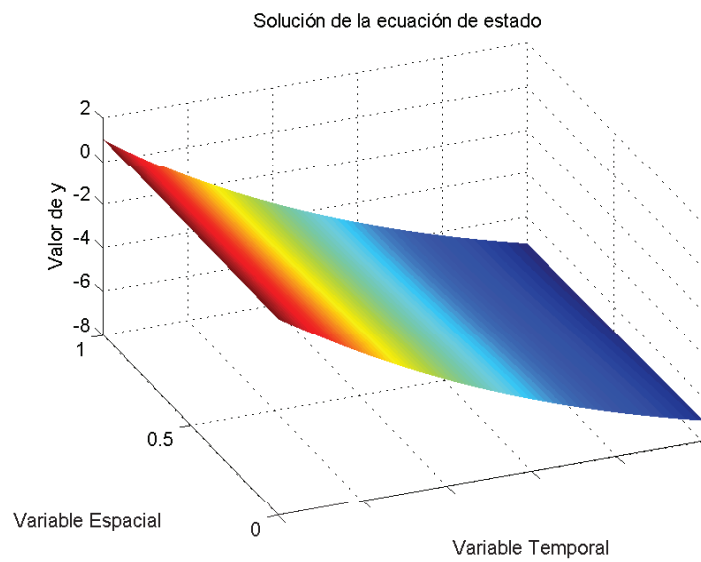


Figura 2.2: Solución de la ecuación de estado del segundo experimento ($\lambda = 1$)

λ	0.3	0.6	1	1.4
Funcional de costo	760	761	764	766
Nro. Iteraciones	12	8	8	8
tiempo de ejecución (s)	5.4779	3.7146	3.7807	3.7198

Tabla 2.2: Resultados del experimento 2 con la primera discretización

λ	0.3	0.6	1	1.4
Funcional de costo	761	764	766	769
Nro. Iteraciones	12	8	8	8
tiempo de ejecución (s)	0.31	0.25	0.21	0.22

Tabla 2.3: Resultados del experimento 2 con una discretización más gruesa

realizará experimentos variando λ , de donde tenemos los resultados mostrados en la tabla (2.2)

Además realizaremos los mismos experimentos para una discretización más gruesa, esto es $N = 150$, $n = 80$, los resultados se presentan en la tabla (2.3)

Podemos observar que al tomar un discretización más gruesa los tiempos de ejecución disminuyen de manera considerable. Pero con la discretización más fina se obtiene un valor menor para el funcional de costo ya que tenemos una mejor aproximación.

Velocidad de Convergencia del Método

En esta subsección estimaremos la velocidad de convergencia del algoritmo PDAS para controles finitos mediante la estimación del error. Para esto consideraremos como solución exacta el control \bar{u} obtenido en la última iteración del algoritmo del experimento (2,2) y el error dado por:

$$error = \|u - \bar{u}\|_{\mathbb{R}^m} \quad (2.98)$$

Tenemos que el error evoluciona como se muestra en la tabla (2.4) y en la figura (2.3) la cual tiene el eje y a escala logarítmica

Tenemos que el valor del error en la última iteración siempre sera 0, por la solución que estamos tomando como óptima.

Podemos ver que la convergencia del método empieza desde la tercera iteración. Tenemos que la relación entre errores de dos iteraciones consecutivas esta dada por:

$$v = \frac{\|\bar{u} - u^{k+1}\|_{L^2}}{\|\bar{u} - u^k\|_{L^2}} \quad (2.99)$$

Iteraciones	error
1	76.244193211
2	0.807562236
3	8.262430754
4	1.426498856
5	0.704843612
6	0.007800367
7	0.000088624
8	0

Tabla 2.4: Evolución del error por cada iteración, PDAS-controles finitos

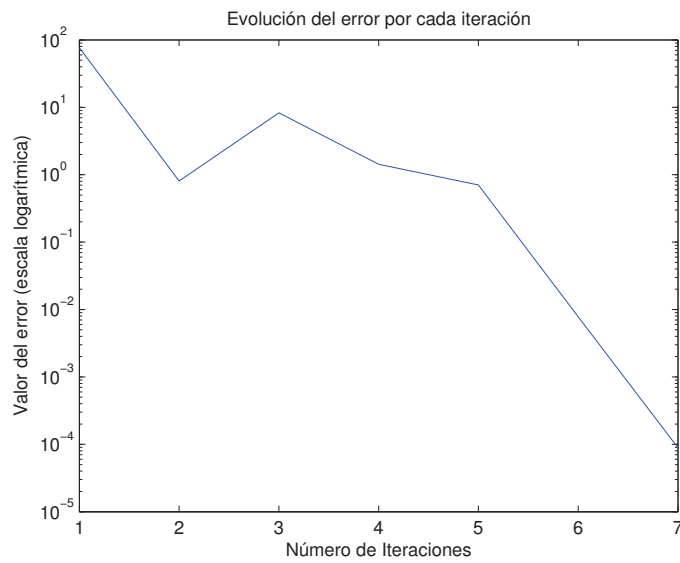


Figura 2.3: Evolución del error en cada iteración, PDAS-controles finitos

Iteraciones	Relación v
1	0.010591786
2	10.231323833
3	0.172648812
4	0.494107379
5	0.011066805
6	0.011361593
7	0

Tabla 2.5: Relación de dos errores consecutivos, PDAS-contróles finitos

Obtenemos la tabla (2.5) donde podemos ver que v se comporta como una función que tiende a 0 por lo tanto el error converge superlinealmente.

Caso unidimensional con controles dependientes del tiempo

Experimento 2.2

En el presente ejemplo seleccionamos los siguientes valores:

$N = 1750$, $n = 280$, $u_0 = 0,5 * ones(N, 10)$, $Mu = 0$, $\mu = 1$, $u_b = 1$, $u_a = -1$, $\lambda = 1$ y con las siguientes funciones φ_i , $i = 1, \dots, m$

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= 1, \\
\varphi_2 &= x - 1, \\
\varphi_3 &= (x - 1)^2, \\
\varphi_4 &= (x - 1)^3, \\
\varphi_5 &= x^2, \\
\varphi_6 &= \sin(\pi x), \\
\varphi_7 &= \cos(\pi x), \\
\varphi_8 &= 5 \log(3(x + 1)), \\
\varphi_9 &= \exp(-(x - 0,5)^2), \\
\varphi_{10} &= (\text{sen}(4\pi x)) + \text{cos}(4\pi x),
\end{aligned} \tag{2.100}$$

con $x \in [0, 1]$ y que están graficadas en la figura 2.4. Como *estado deseado* tomamos

$$y_d = \begin{cases} 30 \sin(\pi x) \cos(\pi t), & 0,25 < t < 0,75, \\ -10, & x < 0,5, \\ -80, & \text{caso contrario.} \end{cases} \tag{2.101}$$

En la figura (2.6) podemos ver los resultados de la ecuación de estado, la solución de la ecuación adjunta en la figura (2.7) y el control en la figura (2.8) que es dependiente

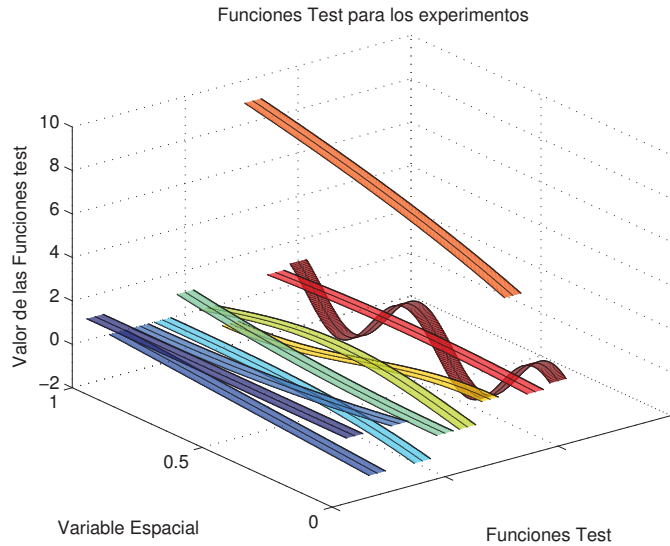


Figura 2.4: Funciones φ_i con $i = 1, \dots, 10$ del primer experimento

λ	0.25	0.5	1	1.4
Funcional de Costo	760	765	769	771
Nro. Iteraciones	21	7	6	6
tiempo de ejecución (s)	0.4533	0.1559	0.1341	0.1396

Tabla 2.6: Resultados del experimento 1 con la primera discretización

del tiempo y se muestra el funcional de costo en cada iteración en la figura (2.5).

Se realiza el experimento variando la constante λ , de donde tenemos los resultados mostrados en la tabla (2.6)

Además realizamos los mismo experimentos para una discretización más fina tomando: $N = 1750$, $n = 280$. Los resultados se pueden observar en la tabla (2.7)

Velocidad de Convergencia del Método

En esta subsección estimaremos la velocidad de convergencia del algoritmo mediante la estimación del error. Para esto consideraremos como solución exacta el control \bar{u}

λ	0.25	0.5	1	1.4
Funcional de Costo	762	763	765	767
Nro. Iteraciones	15	9	8	8
tiempo de ejecución (s)	3.37	2.04	1.98	1.82

Tabla 2.7: Resultados del experimento 1 con la segunda discretización

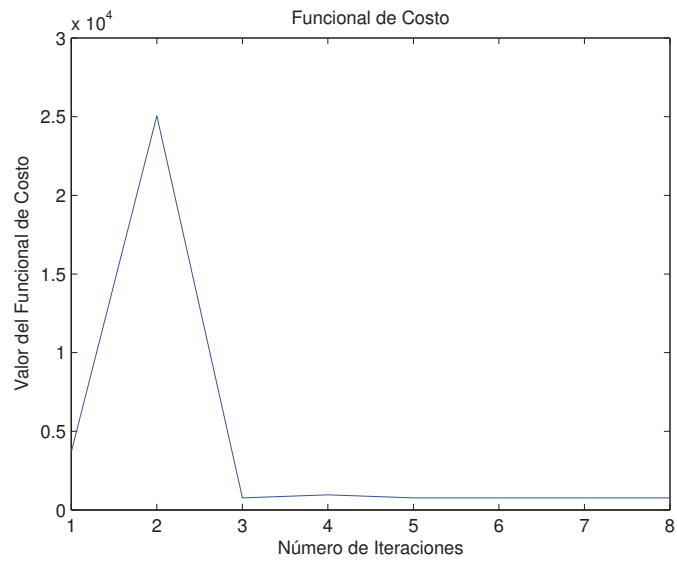


Figura 2.5: Evolución del funcional de Costo del primer experimento ($\lambda = 1$)

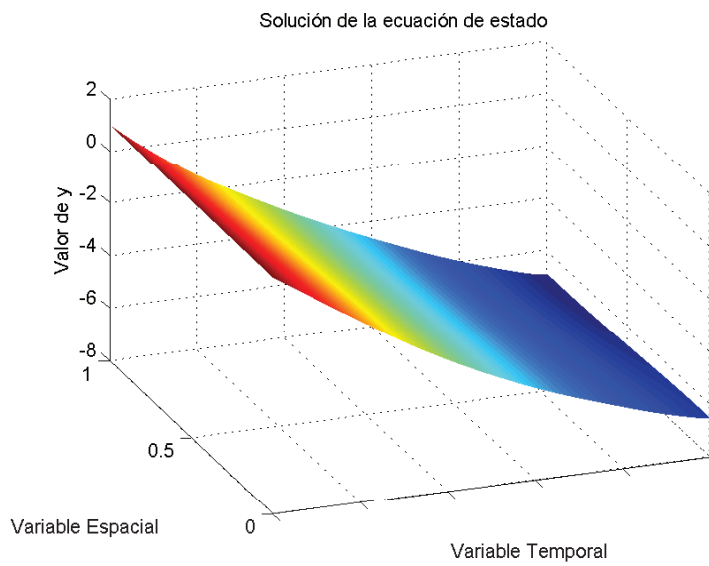


Figura 2.6: Solución de la ecuación de estado del primer experimento ($\lambda = 1$)

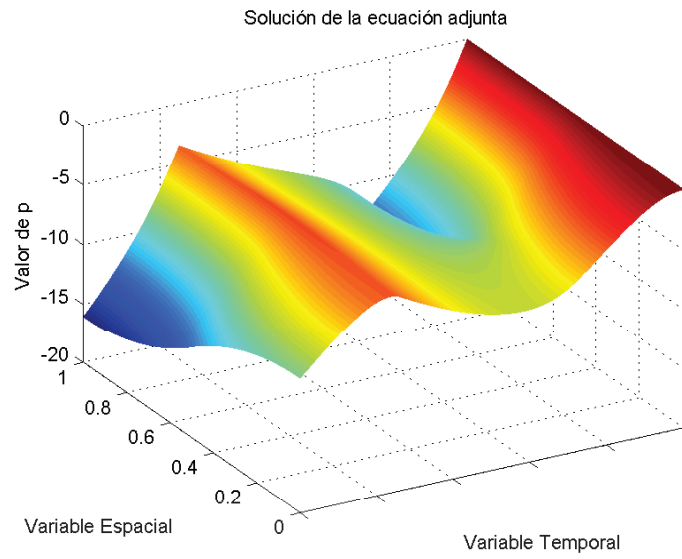


Figura 2.7: Solución de la ecuación adjunta del primer experimento ($\lambda = 1$)

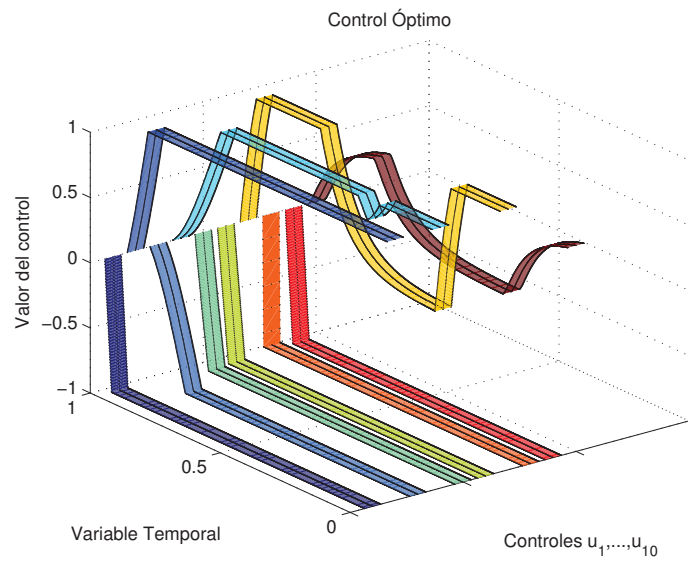


Figura 2.8: Control Óptimo del primer experimento ($\lambda = 1$)

Iteración	error
1	73.884303345
2	3.488970421
3	5.561304716
4	0.425171734
5	0.092681806
6	0.000193071
7	0.000002546
8	0

Tabla 2.8: Evolución del error por cada iteración, PDAS - Controles dependientes del tiempo

Iteraciones	Relación v
1	0.047222079
2	1.593967287
3	0.076451796
4	0.217986756
5	0.002083162
6	0.013184963
7	0

Tabla 2.9: Relación de dos errores consecutivos, PDAS - Controles dependientes del tiempo

obtenido en la última iteración del algoritmo del experimento (2,1) y el error dado por:

$$error = \left(\int_0^1 \|u(t) - \bar{u}(t)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.102)$$

Tenemos que el error evoluciona como se muestra en la tabla (2.8) y en la figura (2.9) la cual tiene el eje y a escala logarítmica

Podemos ver que la convergencia del método empieza desde la tercera iteración. Tenemos que la relación entre errores de dos iteraciones consecutivas esta dada por:

$$v = \frac{\|\bar{u} - u^{k+1}\|_{L^2}}{\|\bar{u} - u^k\|_{L^2}} \quad (2.103)$$

Obtenemos la tabla (2.9) donde podemos ver que v se comporta como una función que tiende a 0 cuando k aumenta, por lo tanto el error tiene una convergencia mayor a lineal. Esto confirma los resultados de convergencia conocidos y que fueron mencionados en la Sección (2.3.2) de que el orden de convergencia es superlineal.

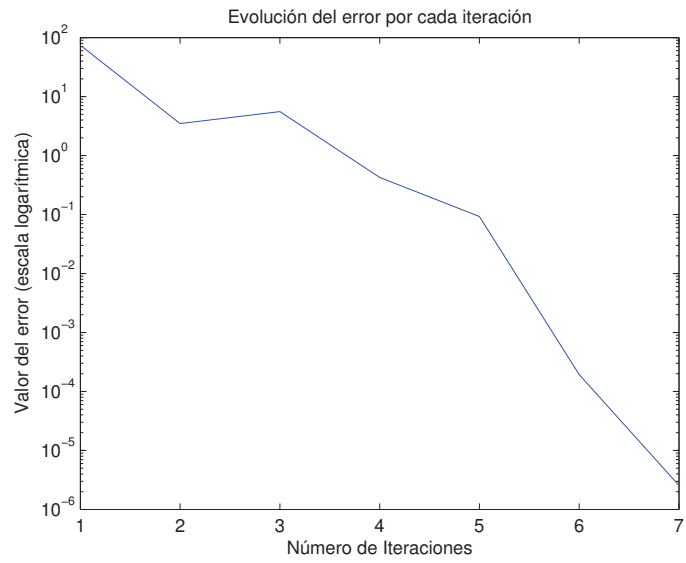


Figura 2.9: Evolución del error en cada iteración, PDAS - Controles dependientes del tiempo

Capítulo 3

Problemas de Control Óptimo con regularización en norma ℓ_1

En este capítulo vamos a tratar con un tipo especial de controles, llamados *sparse* o poco densos ya que el término $\|\cdot\|_{\ell_1}$ induce una estructura de las soluciones que contienen una gran cantidad de entradas nulas del vector que las representa. Esto es útil, pues un vector con pocas componentes no nulas es más fácil de interpretar e implementar, sobre todo si se trabaja con una gran cantidad de datos.

Nos concentraremos en establecer métodos adaptados a las particularidades que exhiben este tipo de problemas, utilizaremos el método primal-dual de conjuntos activos y luego extenderemos algoritmos de coordenadas de descenso, inspirado en optimización en dimensión finita.

3.1 Motivación

Si queremos colocar dispositivos disponibles de una manera óptima, la norma ℓ_1 combinado con controles finitos da información acerca de la ubicación óptima de los dispositivos de control y nos permite encontrar los controles más relevantes para el fenómeno [5]. Las regularizaciones no suaves para problemas de optimización en EDP han sido principalmente utilizados para problemas inversos con parámetros finitos, véase, por ejemplo, [10], [11], [12]. En particular, el uso de la norma ℓ_1 ha dado lugar a mejores resultados para la recuperación de los datos de las mediciones de ruido que la regularización suave [5].

Consideraremos el siguiente problema de control óptimo de tipo parabólico con término regularizante ℓ_1 en el funcional de costo.

Además sea el subconjunto de los controles admisibles definido de la siguiente manera

$$U_{ad} = \{u \in \mathbb{R}^m : u_a \leq u \leq u_b\}. \quad (3.1)$$

Procedemos entonces a definir el problema como sigue bajo las hipótesis anteriores.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{mín } J(y, u) = \frac{1}{2}\|y - y_d\|_{L^2(Q)}^2 + \frac{\lambda}{2}\|u\|_{l^2}^2 + \gamma\|u\|_{l^1} \\ \text{sujeto a:} \\ y_t - \Delta y + y = \sum_{i=1}^m u_i \varphi_i, \quad \text{en } Q, \\ \partial_\nu y = 0, \quad \text{en } \Sigma, \\ y(0, \cdot) = y_0, \quad \text{en } \Omega, \\ u \in U_{ad}. \end{array} \right. \quad (3.2)$$

donde $\varphi_i \in L^2(\Omega)$, y además,

$$\begin{aligned} Q &= \Omega \times (0, T) & y_0 &\in L^2(\Omega) & y_Q &\in L^2(Q) \\ \Sigma &= \Gamma \times (0, T) & u_a, u_b &\in \mathbb{R}^m \end{aligned} \quad (3.3)$$

3.2 Análisis del problema de Control Óptimo

Tenemos que la ecuación de estado está dada por la ecuación parabólica

$$\begin{aligned} y_t - \Delta y + y &= u, & \text{en } Q, \\ \partial_\nu y &= 0, & \text{en } \Sigma, \\ y(0, \cdot) &= y_0, & \text{en } \Omega. \end{aligned} \quad (3.4)$$

La existencia de una solución para esta ecuación ya se analizó en el capítulo (2), por lo tanto tenemos que la misma está expresada por (2.38), que es

$$y = S(u) = \sum_{i=1}^m u_i y_i + y_0, \quad (3.5)$$

donde y_i satisface la ecuación (2.36) con $f = \varphi_i$ para $i = 1, \dots, m$. Con esta solución procederemos a determinar el problema reducido para obtener la existencia y las condiciones de optimalidad del problema de Control Óptimo.

Problema Reducido

En esta subsección vamos a definir el problema reducido pues es necesario para determinar la existencia del control óptimo. Tenemos que la solución de la ecuación de estado es $y = S(u) = \sum_{i=1}^m u_i y_i + y_0$, por lo tanto vamos a definir un problema de optimización en términos de u reemplazando (3.5) en el funcional de costo definido en (3.2), así obtenemos

Definición 17. Sea F el funcional de costo tal que

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R} \\ u &\rightarrow F(u) \end{aligned} \quad (3.6)$$

donde $F(u)$ esta definido por

$$F(u) = \frac{1}{2} \|S(u) - y_d\|_{L^2}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{\ell_2}^2 + \frac{\gamma}{2} \|u\|_{\ell_1}. \quad (3.7)$$

Siguiendo la metodología en el libro de Ito - Kunisch [13] vamos a reescribir el problema de optimización como la suma de dos funciones, tomando

$$\begin{aligned} f(u) &= \frac{1}{2} \|S(u) - y_d\|_{L^2}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{\ell_2}^2 \\ &\text{y} \\ \varsigma(u) &= \frac{\gamma}{2} \|u\|_{\ell_1}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Tenemos entonces que el problema reducido se puede expresar de la siguiente manera

$$\min_{u \in U_{ad}} F(u) = f(u) + \varsigma(u) \quad (3.9)$$

para $u \in U_{ad}$, donde $f(u)$ es una función convexa continuamente diferenciable, y $\varsigma(u)$ es una función propia convexa, semi-continua inferior, pero no diferenciable. Utilizaremos algunos resultados de análisis convexo expuestos en la sección (A.1) para lidiar con la no suavidad de ς .

Existencia del Control Óptimo

A continuación deducimos la existencia del control óptimo

Teorema 3.2.1. Existe un control óptimo \bar{u} para el problema (3.2), que es único y está acotado.

Demostración Tenemos que en el problema (3.2) $F(u)$ es continua y además está definido en un espacio de dimensión finita. U_{ad} es cerrado y acotado en \mathbb{R}^m por las restricciones del control, por lo tanto, por el teorema de Weierstrass existe un mínimo para (3.2) y es único ■

3.3 Condiciones de Optimalidad

Procederemos entonces a calcular las condiciones de optimalidad del problema. Empezaremos obteniendo la desigualdad variacional, para esto vamos a aplicar el teorema (4.42) en la página 110 del libro de Ito - Kunisch [13] a nuestro caso, con lo que obtenemos el siguiente teorema

Teorema 3.3.1. *Una condición necesaria y suficiente para que $\bar{u} \in U_{ad}$ sea un mínimo en (3.9) está dada por*

$$\langle f'(u), u - \bar{u} \rangle + \zeta(u) - \zeta(\bar{u}) \geq 0, \quad \text{para todo } u \in U_{ad}. \quad (3.10)$$

donde f es una función convexa continuamente diferenciable, y $\zeta(u)$ es una función propia convexa, semi-continua inferior pero no necesariamente diferenciable.

Tenemos que la derivada de f en dirección v esta dada por

$$\begin{aligned} f'(\bar{u})v &= \langle f'(\bar{u}), v \rangle + \lambda \langle \bar{u}, v \rangle \\ &= \langle S\bar{u} + y_0 - y_d, Sv \rangle + \lambda \langle \bar{u}, v \rangle \end{aligned} \quad (3.11)$$

además tenemos que el operador adjunto S^* (2.30) definido en la sección (2.1.3) cumple con la condición

$$\langle Su, v \rangle_{L^2(Q)} = \langle u, S^*v \rangle_{\mathbb{R}^m}, \quad (3.12)$$

donde S^* esta definido por:

$$\begin{aligned} S^* : L^2(Q) &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ v &\longrightarrow S^*v = \begin{pmatrix} \int_0^T \int_{\Omega} y_1 v \\ \int_0^T \int_{\Omega} y_2 v \\ \vdots \\ \int_0^T \int_{\Omega} y_m v \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Aplicando (3.12) en (3.11) obtenemos que

$$\begin{aligned}
f'(\bar{u})v &= \langle S^*(S\bar{u} + y_0 - y_d), v \rangle + \lambda \langle \bar{u}, v \rangle \\
&= \langle S^*(S\bar{u} + y_0 - y_d) + \lambda \bar{u}, v \rangle,
\end{aligned} \tag{3.14}$$

y si reemplazamos (3.14) en (3.10) obtenemos la desigualdad variacional que esta dada por

$$(S^*(S\bar{u} + y_0 - y_d) + \lambda \bar{u}, u - \bar{u}) + \gamma(|u|_{l_1} - |\bar{u}|_{l_1}) \geq 0, \quad \forall u \in U_{ad} \tag{3.15}$$

donde S^* está dado por (3.13).

Ahora trabajamos con la parte no diferenciable del problema (3.9). Para esto utilizamos los resultados obtenidos en el Capítulo 1 en la Sección A.1. Denotamos por $\partial\varsigma(\bar{u})$ el subdiferencial de ς en \bar{u} , es decir,

$$\partial\varsigma(\bar{u}) = \{\mu \in \mathbb{R}^m : \varsigma(v) - \varsigma(\bar{u}) \geq \langle \mu, v - \bar{u} \rangle, \quad \forall v \in \mathbb{R}^m\}. \tag{3.16}$$

Además, por el Teorema 4.43 y 4.45 del libro de Ito - Kunisch [13] en la página (113) se puede deducir que si \bar{u} es un minimizador de (3.9) entonces existe un $\bar{\mu} \in \partial\varsigma(\bar{u})$ tal que el par $(\bar{u}, \bar{\mu}) \in (U_{ad}, \partial\varsigma(\bar{u}))$ satisface:

$$\langle S^*(S\bar{u} + y_0 - y_d) + \lambda \bar{u} + \bar{\mu}, u - \bar{u} \rangle \geq 0, \quad \forall u \in U_{ad}. \tag{3.17}$$

Lema 3.3.2. *Como $\bar{\mu} \in \partial\varsigma(\bar{u})$ tenemos en particular que*

$$\mu \in \Lambda_{ad} := \{\mu \in \mathbb{R}^m : |\mu| \leq \gamma\} \tag{3.18}$$

donde la última desigualdad se entiende componente-a-componente.

Demostración Tenemos que $\varsigma(u) = \gamma\|u\|_{\ell_1}$ y que el subdiferencial está definido por

$$\partial\varsigma(\bar{u}) = \{\mu \in \mathbb{R}^m : \varsigma(u) - \varsigma(\bar{u}) \geq \langle \mu, u - \bar{u} \rangle\} \tag{3.19}$$

reemplazando ς obtenemos que

$$\partial\varsigma(\bar{u}) = \{\mu \in \mathbb{R}^m : \gamma(\|u\|_{\ell_1} - \|\bar{u}\|_{\ell_1}) \geq \langle \mu, u - \bar{u} \rangle, \quad \forall u \in \mathbb{R}^m\} \tag{3.20}$$

es decir

$$\mu^T(u - \bar{u}) \leq \gamma(\|u\|_{\ell_1} - \|\bar{u}\|_{\ell_1}). \tag{3.21}$$

Si en particular tomamos

$$v = \begin{cases} \bar{u}_i & \text{si } i \neq j, \\ v_j & \text{si } i = j, \end{cases} \quad (3.22)$$

donde $u_{aj} \leq v_j \leq u_{bj}$. Reemplazando $u = v$ tenemos:

$$\begin{aligned} \mu_j(v_j - \bar{u}_j) &\leq \gamma \left(\sum_{i \neq j} |u_i| + |v_j| - \sum_{j \neq i} |\bar{u}_i| - |\bar{u}_j| \right) \\ &= \gamma (|v_j| - |\bar{u}_j|) \end{aligned} \quad (3.23)$$

entonces

$$\mu_j(v_j - \bar{u}_j) \leq \gamma (|v_j| - |\bar{u}_j|) \leq \gamma |v_j - \bar{u}_j| \quad (3.24)$$

de donde, como v_j varía en \mathbb{R} , se tiene que

$$|\mu_j| \leq \gamma, \quad (3.25)$$

para cualquier $j = 1, \dots, m$. ■

Ahora vamos a incluir las restricciones de caja de los controles, para esto tenemos como en [14] utilizaremos multiplicadores de Lagrange asociados a las restricciones: $u_a - \bar{u} \leq 0$ y $\bar{u} - u_b \leq 0$ de donde obtenemos la siguiente igualdad

$$S^*(S\bar{u} + y_0 - y_d) + \lambda\bar{u} + \bar{\mu} + \mu_b - \mu_a = 0 \quad (3.26)$$

Así la solución óptima se describe en el siguiente teorema:

Teorema 3.3.3. *La solución óptima de (3.2) \bar{u} se caracteriza por la existencia de $(\bar{\mu}, \bar{\mu}_a, \bar{\mu}_b) \in \Lambda_{ad} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ tal que*

$$S^*(S\bar{u} + y_0 - y_d) + \lambda\bar{u} + \bar{\mu} + \bar{\mu}_b - \bar{\mu}_a = 0 \quad (3.27a)$$

$$\bar{\mu}_b \geq 0, u_b - \bar{u} \geq 0, \bar{\mu}_b(u_b - \bar{u}) = 0 \quad (3.27b)$$

$$\bar{\mu}_a \geq 0, \bar{u} - u_a \geq 0, \bar{\mu}_a(\bar{u} - u_a) = 0 \quad (3.27c)$$

$$\bar{\mu} = \gamma \text{ c.t.p. en } \{x \in \Omega : \bar{u} > 0\} \quad (3.27d)$$

$$|\bar{\mu}| \leq \gamma \text{ c.t.p. en } \{x \in \Omega : \bar{u} = 0\} \quad (3.27e)$$

$$\bar{\mu} = -\gamma \text{ c.t.p. en } \{x \in \Omega : \bar{u} < 0\} \quad (3.27f)$$

Demostración Sea $(\bar{\mu}, \bar{\mu}_a, \bar{\mu}_b) \in \Lambda_{ad} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ la solución óptima de (3.2). Para

(3.27a) tenemos que esta dada por (3.26) y (3.27e) por (3.3.2).

Las ecuaciones (3.27b) y (3.27c) son las condiciones complementarias para las restricciones de caja que define U_{ad} . Por último tenemos que

$$\mu \in \partial(\gamma \|u\|_{\ell^1}) = \begin{cases} \gamma & u_i > 0, \\ -\gamma & u_i < 0, \\ [-\gamma, \gamma] & \text{si } u_i = 0, \end{cases} \quad (3.28)$$

de donde obtenemos (3.27d) y (3.27f) ■

Con este resultado derivamos el sistema de optimalidad para (3.2). Primeramente vamos a obtener la ecuación adjunta, tomado $\varrho := S^*(S\bar{u} + y_0 - y_d)$ y reemplazando en (3.27) tenemos

$$\int_0^T \int_{\Omega} \varrho \, dx \, dt + \lambda \bar{u} + \bar{\mu} + \mu_b - \mu_a = 0. \quad (3.29)$$

aplicando el operador S en (3.29) se sigue que

$$S \varrho = S\bar{u} + y_0 - y_d = \bar{y} + y_0 - y_d, \quad (3.30)$$

de donde el problema adjunto esta dado por

$$\begin{aligned} -p_t - \Delta p + p &= \bar{y} - y_d, & \text{en } Q, \\ \partial_\nu p &= 0, & \text{en } \Sigma, \\ p(T, x) &= 0, & \text{en } \Omega. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Ahora estudiaremos las condiciones complementarias representándolas de manera compacta. Para esto, vamos a condensar los multiplicadores de Lagrange siguiendo la metodología en [5], donde se define un multiplicador η de la siguiente manera

$$\eta := \bar{\mu} - \bar{\mu}_a + \bar{\mu}_b. \quad (3.32)$$

Como tenemos que $u_{ai} < u_{bi}$, $i = 1, \dots, m$ esta condensación puede ser revertida, es decir, para \bar{u} dada, se puede calcular $\bar{\mu}$, $\bar{\mu}_a$, $\bar{\mu}_b$ de la siguiente manera

$$\begin{cases} \bar{\mu} &= \text{mín}(\gamma, \text{máx}(-\gamma, \bar{\eta}), \\ \bar{\mu}_a &= -\text{mín}(0, \bar{\eta} + \gamma), \\ \bar{\mu}_b &= \text{máx}(0, \bar{\eta} - \gamma). \end{cases} \quad (3.33)$$

Las funciones máx y mín se entienden componente-a-componente. Gracias al Lema 2.2 en [5] tenemos que $\bar{\eta} \in \mathbb{R}^m$ tal que $(\bar{u}, \bar{\eta})$ satisface (3.34) y $\bar{\mu}, \bar{\mu}_a, \bar{\mu}_b$ pueden ser obtenidas de (3.33). Además, se tiene que la condensación (3.32) permite reformular el sistema (3.27), tomando $c > 0$ en una sola ecuación no suave definida por:

$$\begin{aligned} C(\bar{u}, \bar{\eta}) := & \bar{u} - \text{máx}(0, \bar{u} + c(\bar{\eta} - \gamma)) - \text{mín}(0, \bar{u} + c(\bar{\eta} + \gamma)) \\ & + \text{máx}(0, (\bar{u} - u_b) + c(\bar{\eta} - \gamma)) + \\ & + \text{mín}(0, (\bar{u} - u_a) + c(\bar{\eta} + \gamma)) = 0 \end{aligned} \quad (3.34)$$

En el siguiente teorema se resumen las condiciones de la ecuación adjunta y de la desigualdad variacional para el problema (3.2)

Teorema 3.3.4. *La solución $(\bar{y}, \bar{u}) \in W(0, T) \times \mathbb{R}^m$ de (3.2) es caracterizada por la existencia de $(p, \bar{\eta}) \in H_0^1(\Omega) \times \mathbb{R}$ tal que*

$$\begin{aligned} \bar{y} &= Su + y_0, \\ p &= S^*(\bar{y} - y_d), \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} \bar{u} - \text{máx}(0, \bar{u} + c(\bar{\eta} - \gamma)) - \text{mín}(0, \bar{u} + c(\bar{\eta} + \gamma)) \\ + \text{máx}(0, (\bar{u} - u_b) + c(\bar{\eta} - \gamma)) \\ + \text{mín}(0, (\bar{u} - u_a) + c(\bar{\eta} + \gamma)) = 0 \end{aligned} \quad (3.36)$$

con $c > 0$.

Nótese que en particular el caso sin regularización ℓ_1 tomando $\gamma = 0$ se puede expresar la última ecuación de la siguiente manera.

$$\bar{u} + \text{máx}(0, \bar{\eta} + c^{-1}(\bar{u} - u_b)) + \text{mín}(0, \bar{\eta} + c^{-1}(\bar{u} - u_a)) = 0. \quad (3.37)$$

El sistema de optimalidad esta dado por

$$\left\{ \begin{array}{ll}
\text{Ecuación de estado} & \begin{array}{l} \bar{y}_t - \Delta \bar{y} + \bar{y} = \sum_{i=1}^m \bar{u}_i \varphi_i(x, t), \quad \text{en } Q \\ \partial_\nu \bar{y} = 0, \quad \text{en } \Sigma \\ \bar{y}(0, \cdot) = y_0, \quad \text{en } \Omega \end{array} \\
\text{Ecuación adjunta} & \begin{array}{l} -\bar{p}_t - \Delta \bar{p} + \bar{p} = y_d - \bar{y}, \quad \text{en } Q \\ \partial_\nu \bar{p} = 0, \quad \text{en } \Sigma \\ \bar{p}(T, x) = 0, \quad \text{en } \Omega \end{array} \\
\text{Ecuación del Gradiente} & \begin{array}{l} \bar{u} - \text{máx}(0, \bar{u} + c(\bar{\eta} - \gamma)) \\ - \text{mín}(0, \bar{u} + c(\bar{\eta} + \gamma)) \\ + \text{máx}(0, (\bar{u} - u_b) + c(\bar{\eta} - \gamma)) \\ + \text{mín}(0, (\bar{u} - u_a) + c(\bar{\eta} + \gamma)) = 0. \end{array}
\end{array} \right. \quad (3.38)$$

3.4 Resolución Numérica

Resolvemos el problema con dos métodos numéricos distintos. El primero es el Método Primal Dual de Conjuntos Activos visto anteriormente, en este caso lo aplicaremos también al problema con regularización de tipo disperso utilizando el sistema de optimalidad obtenido (3.38) siguiendo la metodología dada en [5]. El segundo método que usaremos para la implementación del problema es el de Coordenadas Descendentes que transforma nuestro problema (3.2) a un problema de dimensión finita cuya resolución numérica es menos costosa que el de conjuntos activos. El método de Coordenadas Descendentes implica calcular el gradiente del funcional de costo, para ello nos apoyaremos en resultados de análisis convexo puesto que debemos lidiar con la no diferenciable del mismo.

3.4.1 Método Primal Dual de Conjuntos Activos (PDAS)

Para resolver este problema por medio del método de conjuntos activos vamos a tomar en cuenta las condiciones de optimalidad (3.35) y además los resultados obtenidos por Georg Stadler [5] (página 12).

Definición 18. *Sea $c > 0$ y sea $\mathfrak{S} = \{1, 2, 3, \dots, m\}$. Los conjuntos activos se definen de la siguiente manera:*

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{k+1}^a &= \left\{ i \in \mathfrak{S} \mid u_k(i) + \frac{\eta_k(i)}{\lambda} + \frac{\gamma}{\lambda} \leq u_a(i) \right\}, \\
\mathcal{I}_{k+1}^- &= \left\{ i \in \mathfrak{S} \mid u_a(i) < u_k(i) + \frac{\eta_k(i)}{\lambda} + \frac{\gamma}{\lambda} \leq 0 \right\} \\
\mathcal{A}_{k+1}^0 &= \left\{ i \in \mathfrak{S} \mid \left| u_k(i) + \frac{\eta_k(i)}{\lambda} \right| < \frac{\gamma}{\lambda} \right\} \\
\mathcal{I}_{k+1}^+ &= \left\{ i \in \mathfrak{S} \mid 0 \leq u_k(i) + \frac{\eta_k(i)}{\lambda} - \frac{\gamma}{\lambda} < u_b(i) \right\} \\
\mathcal{A}_{k+1}^b &= \left\{ i \in \mathfrak{S} \mid u_k(i) + \frac{\eta_k(i)}{\lambda} - \frac{\gamma}{\lambda} \geq u_b(i) \right\}
\end{aligned} \tag{3.39}$$

con esta definición tenemos que el algoritmo esta dado por

Algoritmo 4 PDAS

- 1: Inicializar u_0, η_0, p_0 y $k = 1$.
- 2: Calcular y_i
- 3: Determinar los conjuntos activos como en (3.39)
- 4: **mientras** Si $k \geq 2, \mathcal{A}_{k+1}^b \neq \mathcal{A}_k^b, \mathcal{A}_{k+1}^0 \neq \mathcal{A}_k^0, \mathcal{A}_{k+1}^a \neq \mathcal{A}_k^a, \mathcal{I}_{k+1}^- \neq \mathcal{I}_k^-$ y $\mathcal{I}_{k+1}^+ \neq \mathcal{I}_k^+$
hacer
- 5: Calcular $(y_{k+1}, p_{k+1}, u_{k+1})$ tal que

$$\begin{aligned}
y_{k+1} &= \sum_{i=1}^m u_{k+1} \varphi_{k+1}, \\
p_{k+1} &= S^*(u_{k+1})
\end{aligned} \tag{3.40}$$

y además

$$u_{k+1} = \begin{cases} u_b & \text{si } t \in \mathcal{A}_{k+1}^a, \\ 0 & \text{si } t \in \mathcal{A}_{k+1}^0, \\ u_a & \text{si } t \in \mathcal{A}_{k+1}^b, \\ \frac{1}{\lambda} \int_0^T \int_{\Omega} p_{k+1} \varphi_i & \text{caso contrario} \end{cases} \tag{3.41}$$

- 6: Actualizar

$$\eta_{k+1} = \begin{cases} -\gamma & \text{si } t \in \mathcal{I}_{k+1}^-, \\ \gamma & \text{si } t \in \mathcal{I}_{k+1}^+, \\ \int_0^T \int_{\Omega} p_{k+1} \varphi_i - \lambda u_{k+1} & \text{caso contrario} \end{cases} \tag{3.42}$$

- 7: $k \leftarrow k + 1$.

- 8: **fin mientras**
-

Tomando S^* como en (2.30), esto es $S^*(v_i) = \int_0^T \int_Q y_i v_i$. Además,

$$\begin{aligned}
(S u, \bar{y} + y_0 - y_d)_{L^2(Q)} &= (S \sum_i u_i \varphi_i, \bar{y} + y_0 - y_d)_{L^2(Q)} \\
&= \sum_i u_i (G \varphi_i, \bar{y} + y_0 - y_d)_{L^2(Q)} \\
&= \sum_i u_i (\varphi, G^* (\bar{y} + y_0 - y_d))_{L^2(Q)} \\
&= \sum_i u_i (\varphi, p)_{L^2(Q)}
\end{aligned} \tag{3.43}$$

donde $G = \sum_{i=1}^m G_i$ y G_i es el operador lineal dado por la definición (11) y G^* es su operador adjunto, por lo tanto,

$$\int_0^T \int_{\Omega} p_{k+1} \varphi_i = \int_0^T \int_{\Omega} (\bar{y} + y_0 - y_d) y_i. \tag{3.44}$$

Gracias a (3.44) podemos escribir un nuevo algoritmo PDAS cuya implementación no dependa de la resolución de la ecuación diferencial adjunta. Cuya implementación es más eficiente ya que no se debe resolver otra ecuación diferencial.

Algoritmo 5 PDAS

- 1: Inicializar u_0, η_0, p_0 y $k = 1$.
- 2: Calcular y_i
- 3: Determinar los conjuntos activos como en (3.39)
- 4: **mientras** Si $k \geq 2$, $\mathcal{A}_{k+1}^b \neq \mathcal{A}_k^b$, $\mathcal{A}_{k+1}^0 \neq \mathcal{A}_k^0$, $\mathcal{A}_{k+1}^a \neq \mathcal{A}_k^a$, $\mathcal{I}_{k+1}^- \neq \mathcal{I}_k^-$ y $\mathcal{I}_{k+1}^+ \neq \mathcal{I}_k^+$
hacer
- 5: Calcular (y_{k+1}, u_{k+1}) tal que

$$y_{k+1} = \sum_{i=1}^m u_{k+1} \varphi_{k+1}, \quad (3.45)$$

y además

$$u_{k+1} = \begin{cases} u_b & \text{si } t \in \mathcal{A}_{k+1}^a, \\ 0 & \text{si } t \in \mathcal{A}_{k+1}^0, \\ u_a & \text{si } t \in \mathcal{A}_{k+1}^b, \\ \frac{1}{\lambda} \int_0^T \int_{\Omega} (y_{k+1} + y_0 - y_d) y_i & \text{caso contrario} \end{cases} \quad (3.46)$$

- 6: Actualizar

$$\eta_{k+1} = \begin{cases} -\gamma & \text{si } t \in \mathcal{I}_{k+1}^-, \\ \gamma & \text{si } t \in \mathcal{I}_{k+1}^+, \\ \int_0^T \int_{\Omega} (y_k + y_0 - y_d) y_i - \lambda u_{k+1} & \text{caso contrario,} \end{cases} \quad (3.47)$$

- 7: $k \leftarrow k + 1$.

- 8: **fin mientras**
-

3.4.2 Convergencia del método Primal Dual de Conjuntos Activos (PDAS)

El análisis de convergencia del algoritmo PDAS para el caso con penalización ℓ_1 es un problema abierto y su análisis no fue considerado en esta tesis. Sin embargo, una de las formas de probar su convergencia podría ser demostrar la equivalencia con el método de Newton Semismooth cuando existen penalizaciones con norma ℓ_1 . Otra forma de analizar la convergencia podría ser adaptando la misma teoría desarrollada en [30], la diferencia radica en que se debe incluir el multiplicador asociado a la restricción

no diferenciable en el análisis, se podría esperar que el análisis se aplique sin mayores dificultades ya que el multiplicador asociado a las restricciones ℓ_1 se encuentra en \mathbb{R}^m y la regularidad del multiplicador no implica dificultades adicionales.

3.4.3 Método de Coordenadas descendentes (CGDM)

El método de coordenadas descendentes es un método proximal, estos métodos son específicamente adaptados para optimizar una función objetivo que se puede descomponer en dos funciones, una que sea Lipschitz diferenciable, y otra que no sea diferenciable. Por lo que debemos calcular el subgradiente del funcional (3.2) eficientemente.

Para aprovechar este método de la mejor manera vamos a reescribir el problema (3.2) considerando las restricciones de caja U_{ad} del control u con una función indicadora de U_{ad}

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{mín } J(y, u) = \frac{1}{2}\|y - y_d\|_{L^2(Q)}^2 + \frac{\lambda}{2}\|u\|_{\ell_2}^2 + \gamma\|u\|_{\ell_1} + P(u) \\ \text{s.a.} \\ y_t - \Delta y + y = u, \quad \text{en } Q, \\ \partial_\nu y = 0, \quad \text{en } \Sigma, \\ y(0, \cdot) = y_0, \quad \text{en } \Omega, \end{array} \right. \quad (3.48)$$

donde P esta dado por

$$P(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u_a \leq u \leq u_b, \\ \infty & \text{caso contrario.} \end{cases} \quad (3.49)$$

y $u_a \leq 0 \leq u_b$ son las condiciones de frontera del control u .

Seguiremos la metodología utilizada en [14], expresaremos el funcional $J(y, u)$ como función solo de u , esto es $J(y, u) = F(u)$ por medio del operador $S(u) = y$ definido en (3.5), esto es

$$F(u) = \frac{1}{2}\|Su - y_d\|_{L^2(Q)}^2 + \frac{\lambda}{2}\|u\|_{\ell_2}^2 + \gamma\|u\|_{\ell_1} + P(u) \quad (3.50)$$

separaremos además F en dos funciones f que es la parte diferenciable de $F(u)$ y Φ que es la parte no diferenciable, de la siguiente manera

$$f(u) = \frac{1}{2}\|Su - y_d\|_{L^2(Q)}^2 + \frac{\lambda}{2}\|u\|_{\ell_2}^2 \quad (3.51)$$

y

$$\Phi(u) = \gamma \|u\|_{\ell_1} + P(u) \quad (3.52)$$

con lo que obtenemos que el problema a resolver es

$$\text{mín } F(u) = f(u) + \Phi(u) \quad (3.53)$$

Tenemos que el algoritmo básico de coordenadas descendentes resuelve problemas de optimización mediante el cálculo sucesivo de las diferentes direcciones que minimizan el problema [15]. Consiste en determinar la dirección de descenso por medio del gradiente de f en la i -ésima componente. Tenemos por tanto que el algoritmo esta dado por:

Algoritmo 6 CGDM

- 1: Inicializar $u_0, \gamma, \lambda, y_d$ y δ .
- 2: **para** $k = 1 : m$ **hacer**
- 3: Calcular

$$d_k = d_{H_k} = \arg \min_d \left\{ \nabla f(u_k)^T d - \frac{1}{2} d^T H_k d + \Phi(u_k + d) \right\} \quad (3.54)$$

- 4: Actualizar $u_{k+1} = u_k + \delta_k d_k$.
 - 5: **fin para**
-

donde H^k es la matriz Hessiana de f calculada para cada componente $k = 1, \dots, m$ y δ_k se obtiene por medio de la regla de armijo

Inicializar $\delta_k^{init} > 0$ y sea δ_k el elemento más grande de $\{\delta_k^{init}, \eta\}_{j=0,1,\dots}$ tal que satisfaga

$$J(u_k + \delta_k d_k) \leq J(u_k) + \delta_k \sigma \Lambda_k, \quad (3.55)$$

donde $0 < \eta < 1, 0 < \sigma < 1, 0 < \rho < 1$ y

$$\Lambda_k = \nabla f(u_k)^T d_k + \rho d_k^T H_k d_k + \Phi(u_k + d_k) - \Phi(u_k) \quad (3.56)$$

Como podemos ver en el método de coordenadas descendentes debemos calcular la dirección por cada componente del control por separado, por esto debemos definir un subproblema cuadrático unidimensional. Éste es un problema de optimización que depende de la dirección d_k , y se resuelve calculando un operador proximal asociado al

término de regularización Φ ya que esto proporciona una interesante generalización de cambios en el gradiente, esto es una gran ventaja ya que es un problema en dimensión finita y el operador proximal calcula de forma explícita la solución del problema auxiliar. En efecto, el operador proximal que nosotros denotaremos como $Prox(u)$ asigna a un vector u la solución única del subproblema cuadrático dado por: Sea H la matriz Hessiana y d la dirección tenemos

$$\min_d F_i = \nabla f(u)^T d + \frac{1}{2} d^T H d + \gamma \|u_i + d\|_{\ell_1} + P(u_i + d) \quad (3.57)$$

Calcular el operador proximal es fundamental para obtener tasas de convergencia rápida en los métodos proximales [14]. Por lo tanto, nos centramos en su cálculo para nuestro caso.

Subproblema Cuadrático

Consideremos el subproblema cuadrático

$$\min_d F_i = \nabla f(u)^T d + \frac{1}{2} d^T H d + \gamma \|u_i + d\|_{\ell_1} + P(u_i + d) \quad (3.58)$$

con d la dirección y H la matriz Hessiana de f .

Debemos encontrar $\nabla f(u)$ y la matriz Hessiana H , para esto partimos del funcional de costo

$$\begin{aligned} \min_u F(u) &= \frac{1}{2} \|Su - y_d\|^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{\ell_2}^2 + \gamma \|u\|_{\ell_1} + P(u) \\ &= \frac{1}{2} (Su - y_d, Su - y_d) + \frac{\lambda}{2} \langle u, u \rangle + \gamma \|u\|_{\ell_1} + P(u) \end{aligned} \quad (3.59)$$

Para luego encontrar $\nabla f(u)^T d$ como sigue

$$\begin{aligned} \nabla f(u)^T d &= \langle Su - y_d, Sd \rangle + \lambda \langle u, d \rangle \\ &= \langle S^*(Su - y_d), d \rangle + \lambda \langle u, d \rangle \\ &= \langle S^*(Su - y_d) + \lambda u, d \rangle \end{aligned} \quad (3.60)$$

por tanto,

$$\nabla f(u) = S^*(Su - y_d) + \lambda u. \quad (3.61)$$

Ahora vamos a calcular H obteniendo la segunda derivada de f . Para esto definimos $g(u) = \|Su - y_d\|^2$, por lo que obtenemos

$$\begin{aligned}
g(u) &= (Su - y_d, Su - y_d) \\
&= \left(\sum_i u_i y_i - y_d, \sum_i u_i y_i - y_d \right)
\end{aligned} \tag{3.62}$$

derivando dos veces

$$g''(u) = \left[\int_0^T \int_{\Omega} y_i y_j \right]_{ij=1, \dots, m}, \tag{3.63}$$

por lo que las componentes de H están dadas por

$$H_{ij} = \int_0^T \int_{\Omega} y_i y_j + \lambda \delta_{ij} = \beta, \quad i, j = 1, \dots, m. \tag{3.64}$$

Existen varias posibilidades en la definición del subproblema cuadrático. En particular, estamos interesados en el algoritmo de coordenadas descendentes que optimiza el problema coordenada a coordenada, por lo cual consideramos el subproblema cuadrático unidimensional asociado a cada coordenada, el cual está dado por:

$$\min_{d_i} F_i = \nabla f(u_i)^T d_i + \frac{1}{2} d_i^T H_i d_i + \gamma \|u_i + d_i\|_{\ell_1} + P(u_i + d_i) \tag{3.65}$$

Reemplazando H_i y $\nabla f(u_i)$ con

$$\alpha_i = \nabla_i f(u) = \int_0^T \int_{\Omega} y_i (\bar{y} - y_d) + \lambda u_i \tag{3.66}$$

y

$$\beta = H_i = \int_{\Omega} y_i^2 + \lambda. \tag{3.67}$$

tenemos

$$\min_{d_i \in \mathbb{R}} F_i(u_i) = \alpha d_i + \frac{\beta}{2} d_i^2 + \gamma |u_i + d_i| + P(u_i + d_i) \tag{3.68}$$

Haciendo el cambio de variable $\zeta = d_i + u_i$ tenemos

$$\min_{\zeta \in \mathbb{R}} F_i(\zeta) = \alpha(\zeta - u_i) + \frac{\beta}{2} (\zeta - u_i)^2 + \gamma |\zeta| + P_i(\zeta), \tag{3.69}$$

donde $P_i(\zeta)$ está dada por

$$P_i(\zeta) = \begin{cases} 0, & \text{si } u_{ai} \leq \zeta \leq u_{bi} \\ +\infty, & \text{caso contrario.} \end{cases} \tag{3.70}$$

A partir de este problema procedemos con el cálculo del operador proximal.

Operador Proximal

Este operador es central para los métodos proximales ya que nos permite caracterizar la solución del subproblema cuadrático mediante una fórmula para encontrar el mínimo del problema

$$\min_{d_i} F_i(u_i) \quad (3.71)$$

para esto aplicaremos la metodología dada en [14].

Para calcular el operador proximal se tiene que determinar ∂F_i . Como $F_i = f + \Phi_i$, tenemos que f es una función diferenciable, por lo tanto nos enfocaremos por un momento en la parte no diferenciable del problema, es decir $\Phi(\zeta)$, la cual está dada por una suma de dos términos no diferenciables. Utilizaremos la teoría de análisis convexo para calcular el subdiferencial de $\Phi(u)$. Al respecto, tenemos el siguiente resultado de análisis convexo dado por el Teorema (A.1.6), en nuestro caso particular, tenemos que dados $\Phi(\zeta) = \gamma|\zeta| + P(\zeta)$, definido en (3.49). Queremos calcular $\partial\Phi = \partial(\|\cdot\|_{\ell_1} + P)$.

Teorema 3.4.1 (Subdiferencial de la suma). *Sean $\varphi = \|\cdot\|_{\ell_1}$ y P dos funciones convexas que admiten un punto en $\text{dom } \varphi \cap \text{dom } P$ en el cual φ es continua. Entonces tenemos*

$$\partial(\varphi + P)(u) = \partial\varphi(u) + \partial P(u) \quad \forall u \in (\text{dom } \varphi \cap \text{dom } P). \quad (3.72)$$

De acuerdo a este teorema podemos calcular $\partial\varphi$ y ∂P por separado y tenemos que si $\Phi_i = \gamma|\cdot| + P_i$, entonces

$$\partial\Phi_i = \partial\varphi + \partial P_i. \quad (3.73)$$

Por lo tanto, para F_i dado en (3.69) aplicando (3.73) tenemos: Sea $\zeta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \partial F_i(\zeta^*) &= \frac{\partial}{\partial \zeta} (\alpha(\zeta^* - u_i) + \frac{\beta}{2}(\zeta^* - u_i)^2) + \gamma \partial|\cdot|(\zeta^*) + \gamma \partial P_i(\zeta^*) \\ &= \alpha + \beta(\zeta^* - u_i) + \gamma \partial P(u) + \gamma \begin{cases} 1, & \text{si } \zeta^* > 0, \\ -1, & \text{si } \zeta^* < 0, \\ [-1, 1], & \text{si } \zeta^* = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.74)$$

Ahora, para $P(\zeta^*)$ el subdiferencial está dado por el cono normal de U_{ad} en u , esto es

$$\begin{aligned}
N_{U_{ad}}(\zeta^*) = \partial P(\zeta^*) &= \begin{cases} \{z \in \mathbb{R} : \langle z, c - \zeta^* \rangle \leq 0, \quad u_{ai} \leq c \leq u_{bi}\}, & \zeta^* \in U_{ad}, \\ \emptyset, & \zeta^* \notin U_{ad}, \end{cases} \\
&= \begin{cases} \{z \in \mathbb{R} : z(c - \zeta^*) \leq 0, \quad u_{ai} \leq c \leq u_{bi}\}, & \zeta^* \in U_{ad}, \\ \emptyset, & \zeta^* \notin U_{ad}. \end{cases}
\end{aligned} \tag{3.75}$$

Tenemos entonces que reemplazando (3.75) en (3.74)

$$\begin{aligned}
\partial F_i(\zeta^*) = \alpha + \beta(\zeta^* - u_i) + \gamma &\begin{cases} 1, & si \quad \zeta^* > 0, \\ -1, & si \quad \zeta^* < 0, \\ [-1, 1], & si \quad \zeta^* = 0. \end{cases} \\
+ \begin{cases} \{z \in \mathbb{R} : z(c - \zeta^*) \leq 0, \quad u_{ai} \leq c \leq u_{bi}\}, & \zeta^* \in U_{ad}, \\ \emptyset, & \zeta^* \notin U_{ad}. \end{cases} & \tag{3.76}
\end{aligned}$$

Note que si $zc \leq 0$ para $u_{ai} \leq cu_{bi}$ implica que $z = 0$ ya que c puede tomar valores positivos y negativos por definición de U_{ad} .

Asumiendo que $u \in U_{ad}$, procedemos entonces a analizar por casos para poder obtener el operador proximal.

Caso $\zeta^* = 0$:

$$\begin{aligned}
0 &\in \alpha - \beta u_i + \gamma[-1, 1], \\
&\Leftrightarrow \beta u_i \in \alpha + \gamma[-1, 1], \\
&\Leftrightarrow u_i \in \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\beta}[-1, 1], \\
&\Leftrightarrow u_i - \frac{\alpha}{\beta} \in \left[-\frac{\gamma}{\beta}, \frac{\gamma}{\beta} \right].
\end{aligned} \tag{3.77}$$

Caso $\zeta^* > 0$:

$$\begin{aligned}
0 &\in \alpha + \beta(\zeta^* - u_i) + \gamma, \\
&\Leftrightarrow 0 = \alpha + \beta\zeta^* - \beta u_i + \gamma, \\
&\Leftrightarrow \zeta^* = u_i - \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\gamma}{\beta},
\end{aligned} \tag{3.78}$$

que convenientemente se escribe:

$$\zeta^* = \left(1 - \frac{\frac{\gamma}{\beta}}{(u_i - \frac{\alpha}{\beta})} \right) \left(u_i - \frac{\alpha}{\beta} \right) \tag{3.79}$$

Caso $\zeta^* < 0$:

$$\begin{aligned}
0 &\in \alpha + \beta(\zeta^* - u_i) - \gamma, \\
\Leftrightarrow 0 &= \alpha + \beta\zeta^* - \beta u_i - \gamma, \\
\Leftrightarrow \zeta^* &= u_i - \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\beta},
\end{aligned} \tag{3.80}$$

y nuevamente escribimos

$$\zeta^* = \left(1 - \frac{\frac{\gamma}{\beta}}{(u_i - \frac{\alpha}{\beta})}\right) \left(u_i - \frac{\alpha}{\beta}\right) \tag{3.81}$$

por lo tanto, el operador proximal para $u \in U_{ad}$ esta dado por

$$\zeta^* = Prox(u_i) = \begin{cases} 0, & \text{si } \left|u_i - \frac{\alpha}{\beta}\right| \leq \frac{\lambda}{\beta}, \\ \left(1 - \frac{\frac{\gamma}{\beta}}{u_i - \frac{\alpha}{\beta}}\right) \left(u_i - \frac{\alpha}{\beta}\right), & \text{si } u_i - \frac{\alpha}{\beta} > \frac{\lambda}{\beta}, \\ \left(1 - \frac{\frac{\gamma}{\beta}}{u_i - \frac{\alpha}{\beta}}\right) \left(u_i - \frac{\alpha}{\beta}\right), & \text{si } u_i - \frac{\alpha}{\beta} < -\frac{\lambda}{\beta}. \end{cases} \tag{3.82}$$

luego, expresándolo de manera compacta tenemos

$$\zeta^* = \left(1 - \frac{\frac{\gamma}{\beta}}{\left|u_i - \frac{\alpha}{\beta}\right|}\right)_+ \left(u_i - \frac{\alpha}{\beta}\right). \tag{3.83}$$

Por otro lado, cuando $u \notin U_{ad}$, tomado en cuenta (3.75) tenemos que

$$u = \begin{cases} u_a, & \text{si } u \leq u_a, \\ u_b, & \text{si } u \geq u_b. \end{cases} \tag{3.84}$$

Así podemos escribir el siguiente algoritmo

Algoritmo 7 Método de Coordenadas del Gradiente Descendente 2 (CGDM2)

- 1: Inicializar u^0 , γ , λ , y_d y δ .
- 2: Calcular $\bar{y} = [y_i]$ con y_i $i = 1, \dots, m$ soluciones de (3.2)
- 3: **mientras** $\|u^{k+1} - u^k\| > 1 \times 10^{-5}$ **hacer**
- 4: **para** $i = 1 : m$ **hacer**
- 5: Calcular

$$\begin{aligned}\alpha_k &= \int_0^T \int_{\Omega} y_i^k (\bar{y}^k - y_d) + \lambda u_i^k \\ \beta_k &= \int_0^T \int_{\Omega} y^{k^2} + \lambda \\ d_i^* &= \left(1 - \frac{\frac{\gamma}{\beta_k}}{|u_i - \frac{\alpha_k}{\beta_k}|} \right)_+ \left(u_i - \frac{\alpha_k}{\beta_k} \right) \\ &\text{para } i = 1, \dots, m\end{aligned}\tag{3.85}$$

- 6: Obtener δ aplicando la regla de armijo (3.55)
- 7: Actualizar

$$u_i^{k+1} = \begin{cases} u_{ai} & u_i^{k+1} < u_{ai} \\ u_i^k + \delta d_i^* & u_{ai} \leq u_i^{k+1} \leq u_{bi} \\ u_{bi} & u_i^{k+1} > u_{bi} \end{cases}\tag{3.86}$$

- 8: $k \leftarrow k + 1$
 - 9: **fin para**
 - 10: **fin mientras**
-

3.4.4 Análisis de la convergencia del método de Coordenadas descendentes (CGDM)

Para el análisis de convergencia del método CGDM utilizaremos los resultados obtenidos por P. Tseng y S. Yun en [18]. Tenemos que nuestra matriz Hessiana definida por sus componentes H_{ij} corresponde a la matriz asociada a una forma cuadrática dada por el funcional objetivo de tipo tracking, donde el parámetro $\lambda > 0$ garantiza que es definida positiva. Además dado que los y_i son fijos, ya que estos están determinados por las funciones ϕ_i , entonces las entradas H_{ij} no dependen de u y por tanto la forma cuadrática asociada a la matriz Hessiana está acotada superiormente ya que los u pertenecen al conjunto acotado U_{ad} . Es decir, tenemos que

$$u^T H u \leq \|H\| \|u\|^2, \quad \forall u \in U_{ad}\tag{3.87}$$

y como u_{ad} es acotado, tenemos que

$$u^T H u \leq c_{U_{ad}} \|H\|, \quad (3.88)$$

donde $c_{U_{ad}}$ es una constante independiente de u , pero depende la acotación de U_{ad} . Por lo tanto, por el Teorema 1 en [18, pág 399] tenemos que la convergencia aplica a nuestro método.

3.5 Experimentos numéricos

En esta sección presentamos algunos experimentos numéricos para los algoritmos PDAS y CGDM, iremos evaluando y comparando su desempeño para el mismo problema. La resolución de las ecuaciones diferenciales se realiza mediante el método de elementos finitos para aproximar la variable espacial y un esquema de Euler implícito para resolver el sistema EDO resultante. La discretización de las integrales utiliza el método del trapecio.

Resolveremos el problema (3.2), donde para $u \in U_{ad}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{mín } J(y, u) := \frac{1}{2} \|y - y_Q\|_{L^2(Q)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L^2(Q)}^2 + \gamma \|u\|_{\ell_1} \\ \text{s.a.} \\ y_t - \Delta y + y = \sum_{i=1}^m u_i \varphi_i, \quad \text{en } Q, \\ \partial_\nu y = 0, \quad \text{en } \Sigma, \\ y(0, x) = y_0, \quad \text{en } \Omega. \end{array} \right. \quad (3.89)$$

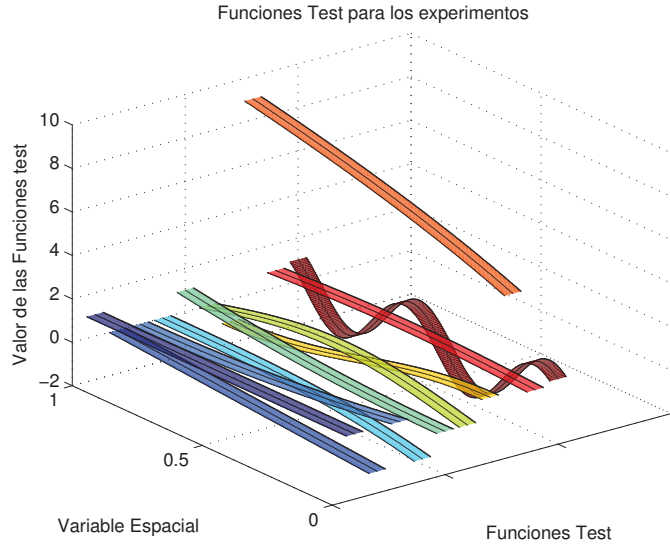


Figura 3.1: Funciones φ del primer experimento

Experimento	Descripción
3.1	El problema (3.2) con el Algoritmo PDAS
3.2	El problema (3.2) con el Algoritmo CGDM

Tabla 3.1: Resumen de los experimentos

Para los experimentos tomaremos $m = 10$, las funciones φ_i están dadas por:

$$\begin{aligned}
 \varphi_1 &= 1, \\
 \varphi_2 &= x - 1, \\
 \varphi_3 &= (x - 1)^2, \\
 \varphi_4 &= (x - 1)^3, \\
 \varphi_5 &= x^2, \\
 \varphi_6 &= \sin(\pi x), \\
 \varphi_7 &= \cos(\pi x), \\
 \varphi_8 &= 5 \log(3(x + 1)), \\
 \varphi_9 &= \exp(-(x - 0,5)^2), \\
 \varphi_{10} &= (\text{sen}(4\pi x)) + \text{cos}(4\pi x),
 \end{aligned} \tag{3.90}$$

como se muestra en la figura (3.1)

Tendremos los experimentos detallados en la tabla (3.1)

Experimento 3.1

Empezaremos con el método Primal Dual de Conjuntos Activos donde evaluaremos para

$N = 1750$, $n = 400$, $u_0 = \text{ones}(10, 1)$, $Mu = \text{rand}(10, 1)$, $\mu = 1$, $u_b = 2u_0$, $u_a = -u_0$, $\lambda = 1$ y $\gamma = 0,5$. Además las funciones φ_i están dadas por (3.90) y

$$y_d = \begin{cases} 30 \sin(\pi x) \cos(\pi t), & 0,25 < t < 0,75, \\ -10, & x < 0,5, \\ -80, & \text{otro.} \end{cases} \quad (3.91)$$

En este experimento variamos los valores de los parámetros de regularización. Obtenemos la solución de la ecuación de estado mostrada en la figura (3.3) y el funcional de costo en cada iteración se muestra en la figura (3.2)

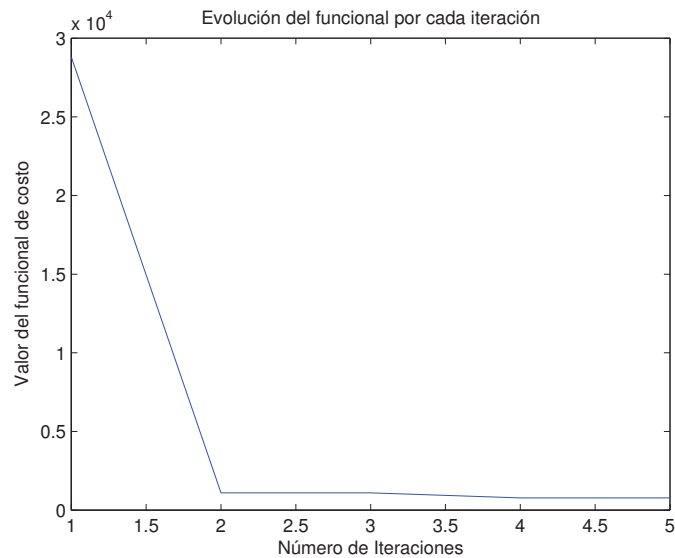


Figura 3.2: Evolución del funcional de Costo del primer experimento

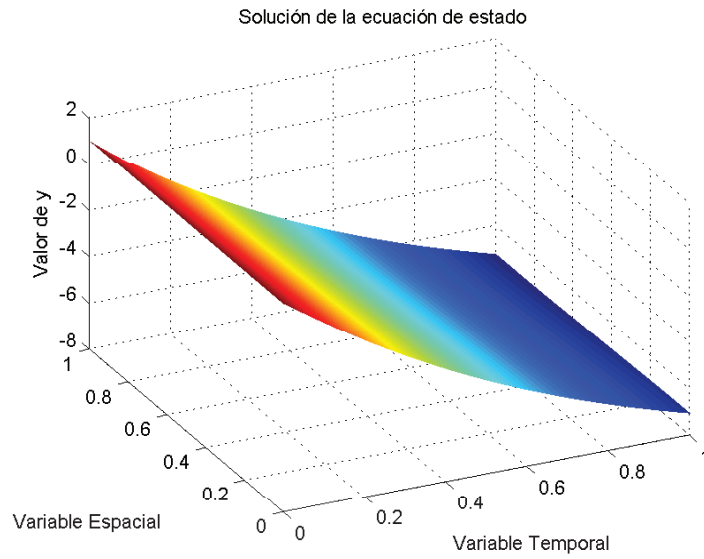


Figura 3.3: Solución de la ecuación de estado del primer experimento

También se realiza el experimento variando las constantes λ y γ , de donde tenemos los resultados mostrados en las tablas (3.2), donde podemos ver la variación del Funcional de costo, del tiempo, la cantidad de elementos nulos y el número de iteraciones.

		Funcional de Costo				Tiempo de ejecución (s)			
		λ				λ			
		0.3	0.6	1	1.4	0.3	0.6	1	1.4
γ	0.1	759	762	765	768	5.28	7.92	7.98	5.30
	0.5	764	766	769	771	5.23	7.92	7.90	7.99
	1	769	771	774	775	3.94	5.27	5.27	7.93
	5	791	790	791	792	2.65	5.29	5.28	5.29
	10	799	799	799	799	1.52	1.53	1.54	1.60
		Elementos Nulos				Número de Iteraciones			
		λ				λ			
		0.3	0.6	1	1.4	0.3	0.6	1	1.4
γ	0.1	0	0	0	0	4	6	6	4
	0.5	1	1	1	1	4	6	6	6
	1	2	2	2	2	3	4	4	6
	5	6	7	7	7	2	4	4	4
	10	9	9	9	9	3	3	3	3

Tabla 3.2: Resultados del Experimento con el Algoritmo PDAS

Velocidad de Convergencia del Método

En esta subsección estimaremos la velocidad de convergencia del algoritmo PDAS para controles finitos mediante la estimación del error. Para esto consideraremos como solución exacta el control \bar{u} obtenido en la última iteración del algoritmo del experimento (2,2) y el error dado por:

$$error = \|u - \bar{u}\|_{\mathbb{R}^m} \quad (3.92)$$

Tenemos que el error evoluciona como se muestra en la tabla (3.3), dado que la solución exacta es el valor del funcional en la última iteración, se tiene que el valor del error en esta es 0, además podemos ver en la figura (3.4) la cual tiene el eje y a escala logarítmica la evolución del error

Podemos ver que la convergencia del método empieza desde la tercera iteración. Tenemos que la relación entre errores de dos iteraciones consecutivas esta dada por:

Iteraciones	error
1	76.907227818
2	24.412430474
3	8.143297544
4	1.433768212
5	1.213362512
6	0

Tabla 3.3: Evolución del error por cada iteración, PDAS - Controles finitos dispersos

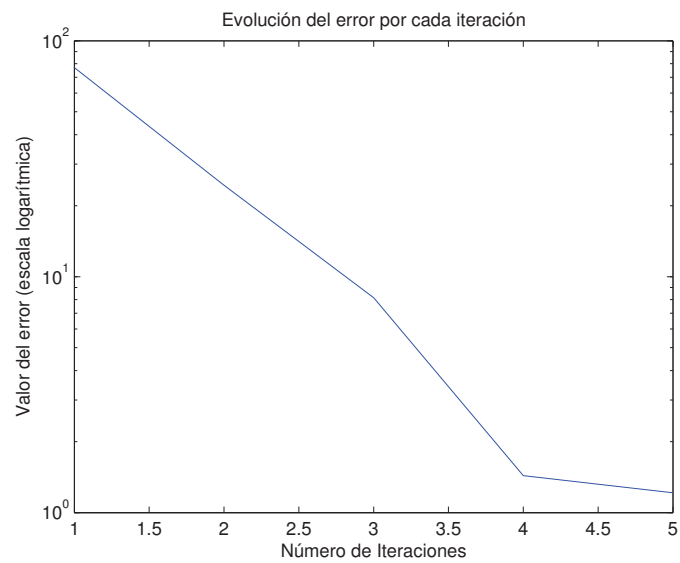


Figura 3.4: Evolución del error en cada iteación, PDAS - Controles finitos dispersos

Iteraciones	Relación v
1	0.317426998
2	0.333571766
3	0.176067275
4	0.846275222
5	0

Tabla 3.4: Relación de dos errores consecutivos, PDAS - Controles finitos dispersos

$$v = \frac{\|\bar{u} - u^{k+1}\|_{\mathbb{R}^m}}{\|\bar{u} - u^k\|_{\mathbb{R}^m}} \quad (3.93)$$

Obtenemos la tabla (3.4) donde podemos ver que v se comporta como una función que tiende a 0 por lo tanto el error converge superlinealmente.

3.5.1 Experimento 3.2

Para el experimento 2 tenemos los siguientes datos $N = 1750$, $n = 400$, $u_0 = ones(10, 1)$, $Mu = 0$, $\mu = 1$, $u_b = 2u_0$, $u_a = -u_0$, $\delta = 0,5$, $\lambda = 1$ y $\gamma = 0,5$.

Tomamos $m = 10$. Las funciones están dadas como el experimento anterior mostradas en la figura 3.1 y y_d está dada por

$$y_d = \begin{cases} 30 \sin(\pi x) \cos(\pi t) & 0,25 < t < 0,75 \\ -10 & x < 0,5 \\ -80 & \text{otro} \end{cases} \quad (3.94)$$

Podemos ver los resultados del experimento, primeramente la ecuación de estado mostrados en la figura (3.6) y la evolución del funcional de costo en la figura (3.5)

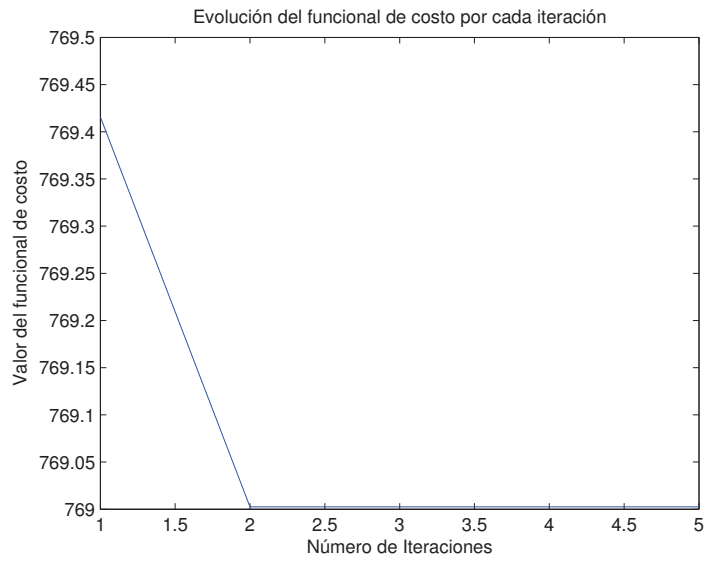


Figura 3.5: Evolución del funcional de Costo del segundo experimento

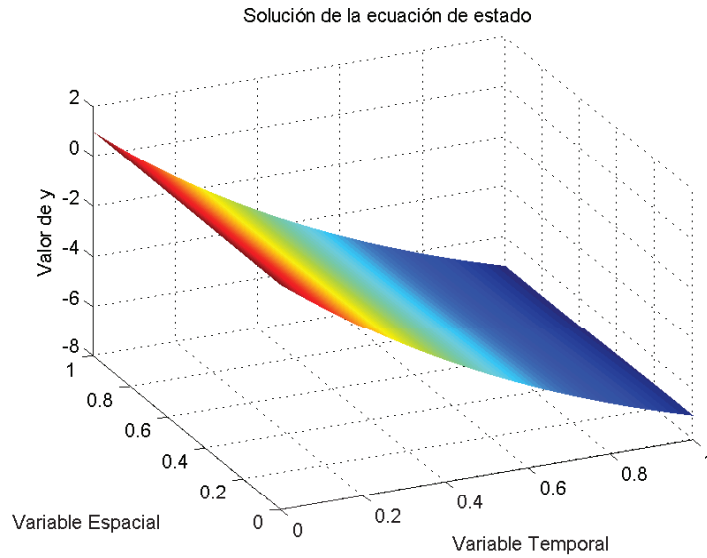


Figura 3.6: Solución de la ecuación de estado del segundo experimento

Se realiza el experimento variando las constantes λ y γ , de donde tenemos los resultados presentados en la tabla (3.5), donde podemos ver la variación del Funcional de costo, tiempo de ejecución, cantidad de elementos nulos y el número de iteraciones para el algoritmo CGDM.

		Funcional de Costo				Tiempo de ejecución (s)			
		λ				λ			
J		0.3	0.6	1	1.4	0.3	0.6	1	1.4
γ	0.1	759	762	764	767	14.21	26.36	23.70	35.62
	0.5	764	766	769	770	14.07	31.47	31.58	43.69
	1	769	770	773	774	14.05	14.12	48.75	36.15
	5	790	790	791	791	14.14	14.21	14.14	18.74
	10	799	799	799	799	3.35	3.35	3.40	3.39
		Elementos Nulos				Número de Iteraciones			
		λ				λ			
J		0.3	0.6	1	1.4	0.3	0.6	1	1.4
γ	0.1	0	0	0	0	3	4	5	6
	0.5	1	1	1	1	3	5	5	6
	1	2	2	2	2	3	3	7	6
	5	7	7	7	7	3	3	3	4
	10	9	9	9	9	2	2	2	2

Tabla 3.5: Resultados del Experimento con el algoritmo CGDM

Velocidad de Convergencia del Método

En esta subsección estimaremos la velocidad de convergencia del algoritmo PDAS para controles finitos mediante la estimación del error. Para esto consideraremos como solución exacta el control u^* obtenido en la última iteración del algoritmo del experimento (2,2) y el error dado por:

$$error = \|u - \bar{u}\|_{\mathbb{R}^m} \quad (3.95)$$

Tenemos que el error evoluciona como se muestra en la tabla (3.6) , dado que la solución exacta es el valor del funcional en la última iteración, se tiene que el valor del error en esta es 0, además podemos ver la evolución del error en la figura (3.4) la cual tiene el eje y a escala logarítmica

Tenemos que la relación entre errores de dos iteraciones consecutivas esta dada por:

$$v = \frac{\|\bar{u} - u^{k+1}\|_{\mathbb{R}^m}}{\|\bar{u} - u^k\|_{\mathbb{R}^m}} \quad (3.96)$$

Iteraciones	error
1	0.724745961
2	0.023996033
3	0.000981380
4	0.000041063
5	0.000001789
6	0.000000051
7	0

Tabla 3.6: Evolución del error por cada iteración, CGDM-Controles finitos dispersos

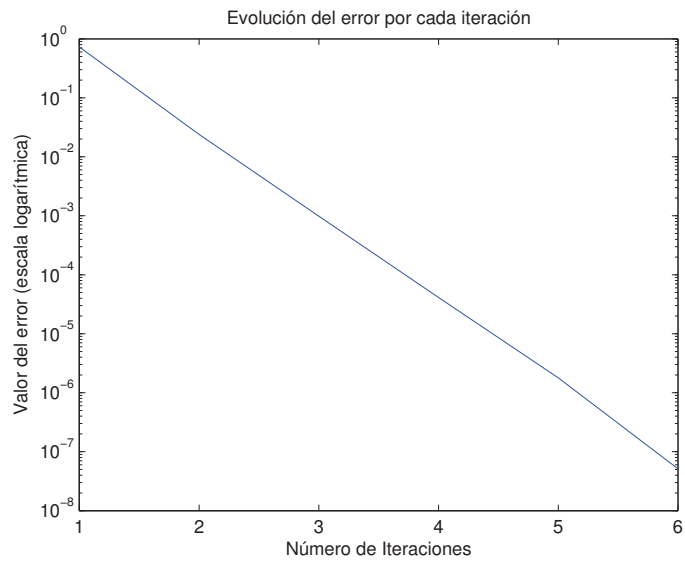


Figura 3.7: Evolución del error en cada iteración, CGDM-Controles finitos dispersos

Iteraciones	Relación v
1	0.033109579
2	0.040897596
3	0.041842910
4	0.043576602
5	0.028671741
6	0

Tabla 3.7: Relación de dos errores consecutivos, CGDM-Controles finitos dispersos

Obtenemos la tabla (3.4) donde podemos ver que v se comporta como una función que es constante, por lo tanto converge linealmente.

Comparaciones de los Algoritmos

Procederemos a comparar los resultados del algoritmo PDAS contra el algoritmo CGDM. En la tabla (3.8) podemos comparar el tiempo de ejecución, número de iteraciones y valor de la función objetivo, cuando $\lambda = 1$ y $\gamma = 1$

Algoritmo	Tiempo de ejecución (s)	Número de Iteraciones	Función Objetivo
PDAS	5.32	4	774
CGDM	49.04	7	773

Tabla 3.8: Resumen del Experimento 3.2 con $\gamma = 1$

Se realiza el experimento disminuyendo $\gamma = 0,5$, donde tenemos el tiempo de ejecución, número de iteraciones y el valor de la función objetivo mostrados en la tabla (3.9),

Algoritmo	Tiempo de ejecución (s)	Número de Iteraciones	Función Objetivo
PDAS	7.90	6	769
CGDM	31.54	5	769

Tabla 3.9: Resumen del Experimento 3.2 con $\gamma = 0,5$

Podemos observar que en ambos casos el tiempo de ejecución del PDAS es menor que CGDM. En cuanto a la función objetivo observamos que en el CGDM obtenemos un valor más pequeño, esto se produce debido a que el criterio de parada del PDAS es diferente al CGDM, ya que en el primero el criterio depende de los conjuntos activos y el segundo de u . En el capítulo (3.6) realizaremos experimentos adicionales para poder observar de mejor manera la eficiencia de cada algoritmo.

3.6 Paralelización del algoritmo de coordenadas de descenso (CGDM)

Los algoritmos paralelos surgen con la creciente demanda de resolución de problemas a gran escala. En este capítulo veremos que el algoritmo con el método de coordenadas descendentes junto a la resolución de las EDPs parabólicas, es altamente paralelizable. Evaluaciones experimentales indican que los algoritmos de coordenadas de descenso pueden aprovechar la paralelización en las plataformas de computación multinúcleo [16].

La necesidad de optimización escalable esta creciendo ya que más aplicaciones utilizan datos de mayor dimensión, pero la velocidad de los núcleos de los procesadores a dejado de aumentar, en cambio, las computadores vienen con mas núcleos y el nuevo reto es poder utilizarlos eficientemente. A pesar de que hay muchos algoritmos para resolver problemas con regularizaciones con la norma ℓ_1 , existen pocos algoritmos paralelos.

Richtárik y Takic (2012) [17] muestran que métodos de coordenadas descendentes por bloques pueden ser acelerados por paralelización y muestran una mejora significativa en problemas de tipo LASSO. En nuestro caso, debido a que los problemas de control óptimo estudiados tienen un número pequeño de variables de control en comparación a otros problemas de optimización dispersa tratados en aprendizaje de máquinas, nos concentraremos en la paralelización del algoritmo, en lugar de considerar la estrategia de optimización por bloques, aunque la extensión por bloques del algoritmo propuesto se puede extender con relativa facilidad si se considera un número elevado de variables.

3.6.1 Paralelización del algoritmo CGDM

Procedemos a desarrollar un algoritmo de coordenadas descendentes paralelos para comparar, basado en el algoritmo CGDM desarrollado anteriormente en la Subsección (3.4.3). Este algoritmo es una extensión del método de Coordenadas Descendentes propuesto por Tseng y Yun [18] a problemas de control óptimo con controles finitos.

Para entender un poco mejor lo que se quiere lograr damos un ejemplo en dos dimensiones de nuestro problema. Supongamos que el control tiene dos componentes posibles como se muestra en la figura (3.8). El algoritmo serial calcula una dirección (de dos componentes) en cada paso.

Al paralelizar el algoritmo queremos que ambas componentes de una dirección se

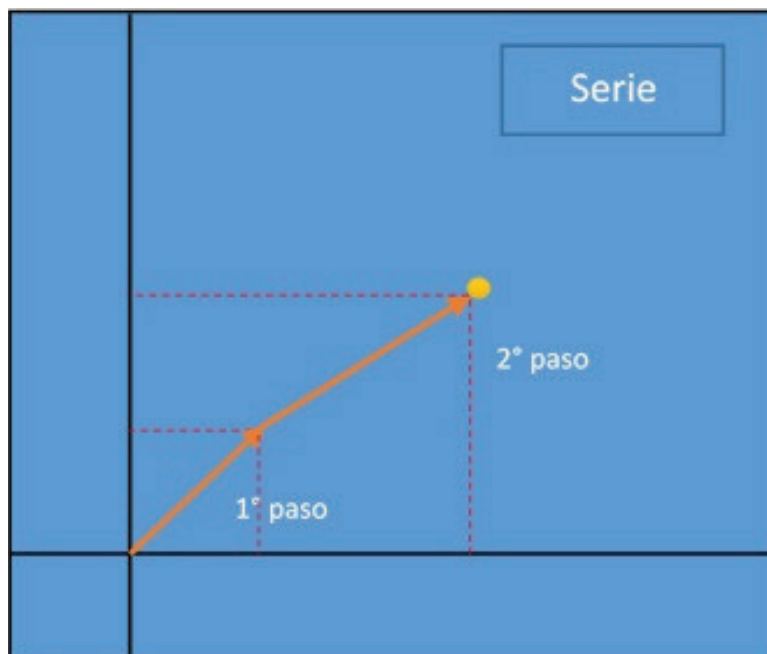


Figura 3.8: Direcciones del control en serie en 2 dimensiones

calculen simultáneamente, como se indica en la figura (3.9). Esto nos permite aprovechar varios núcleos del procesador y una disminución en el tiempo de ejecución, ya que lo que antes se calculaba en un solo núcleo del procesador ahora lo podemos hacer en dos. En nuestro caso tenemos que el control tiene m coordenadas que deseamos optimizar por lo que asumimos que tenemos m procesadores a disposición. Si bien esta suposición es algo artificial si se considera computadores personales, muchos lenguajes de programación distribuyen la carga entre los núcleos disponibles, independientemente del número disponible, como por ejemplo Matlab en su toolbox de paralelización.

Sean \bar{P} la cantidad de procesadores que vamos a utilizar, claramente nuestro algoritmo para resolución de la ecuación de estado puede ser descompuesto en m subproblemas independientes para cada φ_i usando el principio de superposición en el caso finito ver (3.4). Ahora si tenemos m procesadores o núcleos, cada uno puede ser asignado con la tarea de resolver un solo subproblema. Además, también tenemos que el algoritmo de coordenadas de descenso se puede paralelizar, ya que se debe calcular la dirección para cada control y cada uno es independiente del otro. Así proponemos el siguiente algoritmo paralelizado:

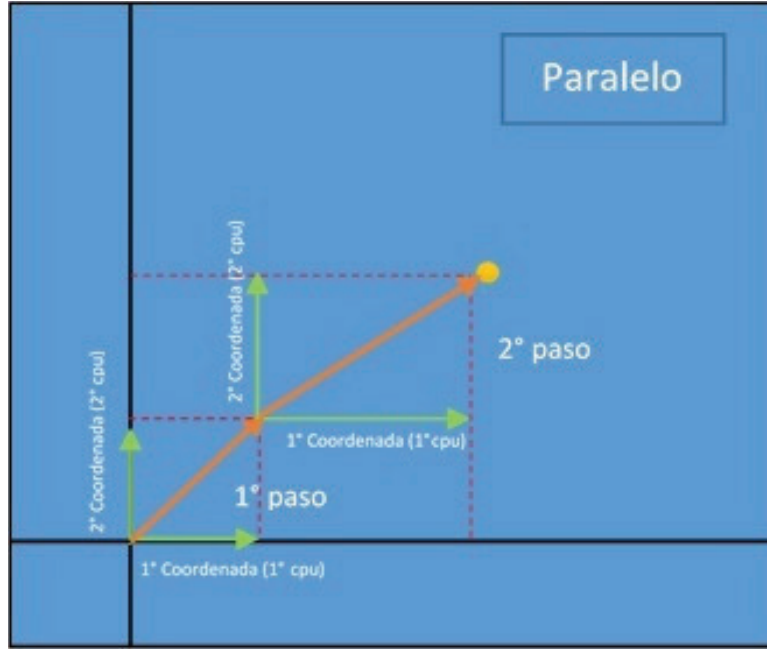


Figura 3.9: Direcciones del control calculadas en paralelo

Algoritmo 8 CGDM-P

- 1: Inicializar u^0 , J_0 , γ , λ , y_d y δ .
- 2: **parfor** $i \in \{1, \dots, m\}$ **do**
- 3: Calcular en m procesadores y_i soluciones de (1.16)
- 4: **end parfor**.
- 5: Calcular $\bar{y} = \sum_{i=1}^m u_i \varphi_i$.
- 6: **mientras** $\|u^{k+1} - u^k\| > 1 \times 10^{-5}$ **hacer**
- 7: **parfor** $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ **do**
- 8: En m procesadores, en cada procesador i , calcular

$$\begin{aligned}
 \alpha_i &= \int_0^T \int_{\Omega} y_i (\bar{y} - y_d) + \lambda u_i \\
 \beta_i &= \int_0^T \int_{\Omega} y_i^2 + \lambda \\
 d_i^* &= \left(1 - \frac{\frac{\gamma}{\beta_k}}{|u_i - \frac{\alpha_k}{\beta_k}|} \right)_+ \left(u_i - \frac{\alpha_k}{\beta_k} \right)
 \end{aligned} \tag{3.97}$$

- 9: Actualizar

$$u_i^{k+1} = \begin{cases} u_{ai} & u_i^{k+1} < u_{ai} \\ u_i^k + \delta d_i^* & u_{ai} \leq u_i^{k+1} \leq u_{bi} \\ u_{bi} & u_i^{k+1} > u_{bi} \end{cases} \tag{3.98}$$

- 10: **end parfor**.
- 11: Obtenemos $u^{k+1} = (u_1^{k+1}, u_2^{k+1}, u_3^{k+1}, \dots, u_m^{k+1})$.
- 12: $k \leftarrow k + 1$
- 13: **fin mientras**

Tenemos una desventaja para este algoritmo, podemos ver que en Bradley, Kyrola, Bickson y Carlos Guestrin en [19] recalcan que las actualizaciones paralelas podrían aumentar el riesgo de divergencia en el algoritmo. En la figura (3.10) tomada de [19], en la parte izquierda, se puede visualizar que un algoritmo paralelo acelera la convergencia cuando las componentes no están correlacionadas; en contraste, en la parte derecha podemos ver que cuando las componentes están correlacionadas las actualizaciones paralelas tienen un creciente riesgo de no llegar al objetivo. Se pueden evitar divergencias mediante la imposición de un tamaño de paso δ , pero experimentos mostraron que ese enfoque es poco práctico [19]. En nuestro caso el parámetro δ se impone como $\delta = 0,5$. El algoritmo paralelo hace menos eficiente al método ya que se espera que haga más iteraciones, pero al calcular las componentes de descenso simultáneamente cada iteración se calcula más rápido.

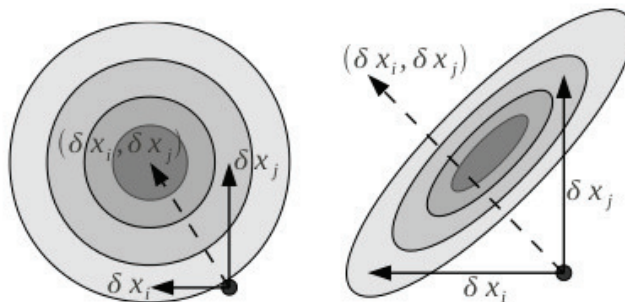


Figura 3.10: Izquierda: Las Coordenadas no se encuentran correlacionadas, las actualizaciones paralelas son útiles Derecha: Las Coordenadas no se encuentran correlacionadas, las actualizaciones paralelas tienen conflicto.

3.6.2 Experimentos Números

En esta sección resolveremos el mismo problema que en la sección (3.5) el experimento (3.5), por lo tanto, la implementación es similar, la diferencia con estos experimentos es que se aplican los cambios para la paralelización del algoritmo. Evaluamos el desempeño de esta técnica aplicada a nuestro problema.

Resolvemos el problema (3.2), donde para $u_i \in U_{ad}$, U_{ad} definido como en (3.1)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{mín } J(y, u) := \frac{1}{2} \|y - y_Q\|_{L^2(Q)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{\ell_2} + \gamma \|u\|_{\ell_1} \\ \text{s.a.} \\ y_t - \Delta y + y = \sum_{i=1}^m u_i \varphi_i, \quad \text{en } Q, \\ \partial_\nu y = 0, \quad \text{en } \Sigma, \\ y(0, x) = y_0, \quad \text{en } \Omega. \end{array} \right. \quad (3.99)$$

Los experimentos que realizaremos están detallados en la tabla (3.10)

Experimento	Descripción
4.1	$\lambda = 1$ y $\gamma = 1$
4.2	$\lambda = 1$ y $\gamma = 0,5$

Tabla 3.10: Resumen de los experimentos con el Método CGDM paralelizado

Experimento 4.1

Para el experimento 4.1 tenemos los siguientes datos

$N = 1750$, $n = 400$, $u_0 = \text{ones}(N, 10)$, $ub = 2u_0$, $ua = -u_0$, $\lambda = 1$, $\delta = 0,5$ y $\gamma = 1$

Tomaremos $m = 10$, para el primer experimento las funciones φ_i están dadas por

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 1, \\ \varphi_2 &= x - 1, \\ \varphi_3 &= (x - 1)^2, \\ \varphi_4 &= (x - 1)^3, \\ \varphi_5 &= x^2, \\ \varphi_6 &= \sin(\pi x), \\ \varphi_7 &= \cos(\pi x), \\ \varphi_8 &= 5 \log(3(x + 1)), \\ \varphi_9 &= \exp(-(x - 0,5)^2), \\ \varphi_{10} &= (\text{sen}(4\pi x)) + \cos(4\pi x), \end{aligned} \quad (3.100)$$

mostradas en la figura 3.11. Además, tomamos

$$y_d = \begin{cases} 30 \sin(\pi x) \cos(\pi t), & 0,25 < t < 0,75, \\ -10, & x < 0,5, \\ -80, & \text{otro.} \end{cases} \quad (3.101)$$

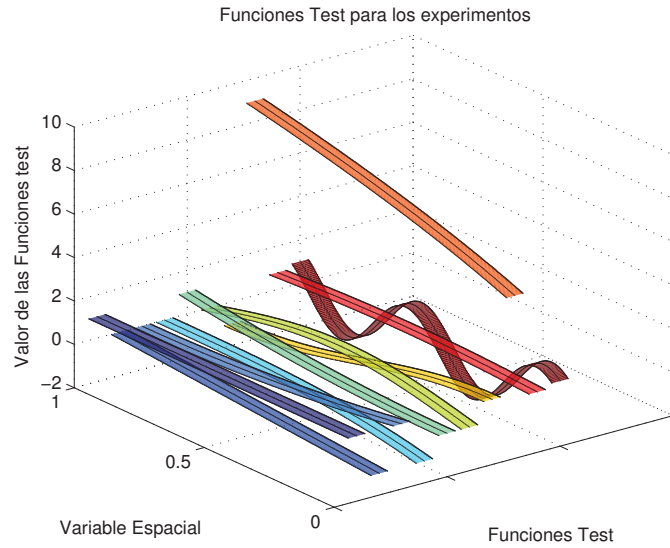


Figura 3.11: Funciones φ del primer experimento

Podemos ver los resultados del algoritmo, la ecuación de estado mostrada en la figura (3.13) y la evolución del funcional de costo en la figura (3.12)

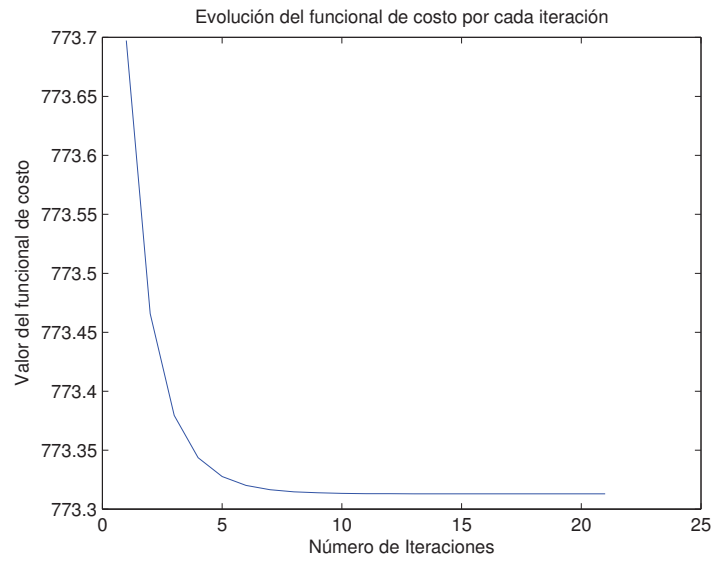


Figura 3.12: Evolución del funcional de Costo del primer experimento

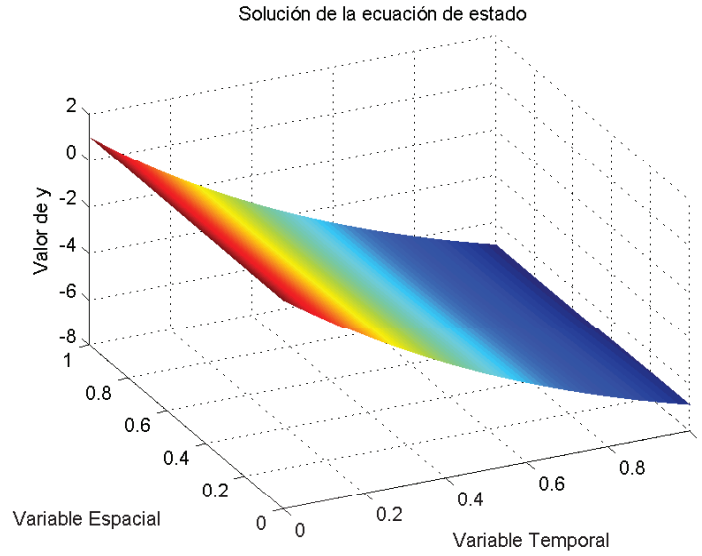


Figura 3.13: Solución de la ecuación de estado del primer experimento

En la tabla (3.11) podemos comparar el desempeño de los algoritmos cuando $\lambda = 1$ y $\gamma = 1$

Algoritmo	Tiempo (s)	Número de Iteraciones	Función Objetivo
PDAS	4.50	4	774
CGDM	39.54	7	773
CGDM-P	25.46	22	773

Tabla 3.11: Resumen del Experimento 4.1, donde $\gamma = 1$

Observamos que el tiempo de ejecución del algoritmo que se encuentra paralelizado CGDM-P es menor que el CGDM. El número de iteraciones del CGDM-P es mayor que los demás algoritmos. El PDAS es el más rápido.

En la tabla (3.12) podemos visualizar la evolución del funcional de costo con respecto al número de iteraciones para cada algoritmo.

Iteraciones	PDAS	CGDM	PCGDM
1	955	954	774.5
2	29363	774.8	773.6
3	1129	773.3	773.4
4	1102	773.3	773.4
5	774	773.3	773.3
6		773.3	773.3
7		773.3	773.3
8			773.3
9			773.3
10			773.3
11			773.3
12			773.3
13			773.3
14			773.3
15			773.3
16			773.3
17			773.3
18			773.3
19			773.3
20			773.3
21			773.3
22			773.3

Tabla 3.12: Comparación de los valores del funcional de costo del primer experimento.

Experimento 4.2

Se realiza el experimento con los mismos datos anteriores a excepción de γ disminuyéndolo a $\gamma = 0,5$, de donde tenemos los siguientes resultados

Podemos ver los resultados del algoritmo, primeramente la ecuación de estado mostrados en la figura (3.13) y la evolución del funcional de costo en la figura (3.12)

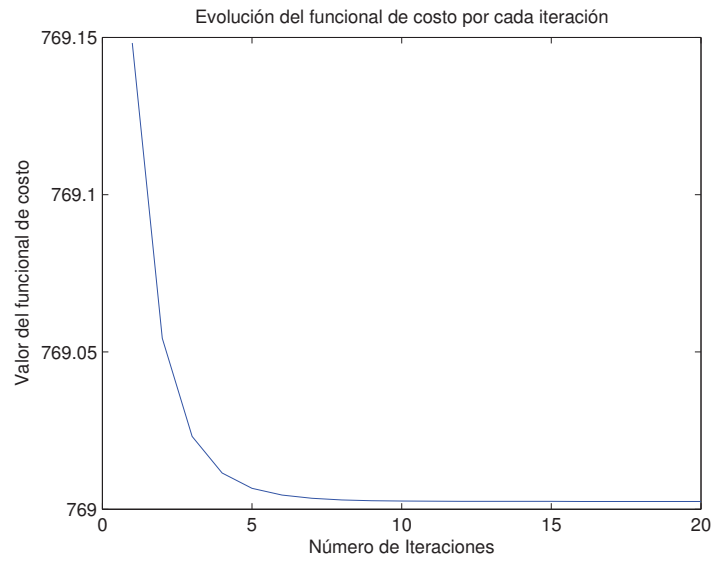


Figura 3.14: Evolución del funcional de Costo del segundo experimento

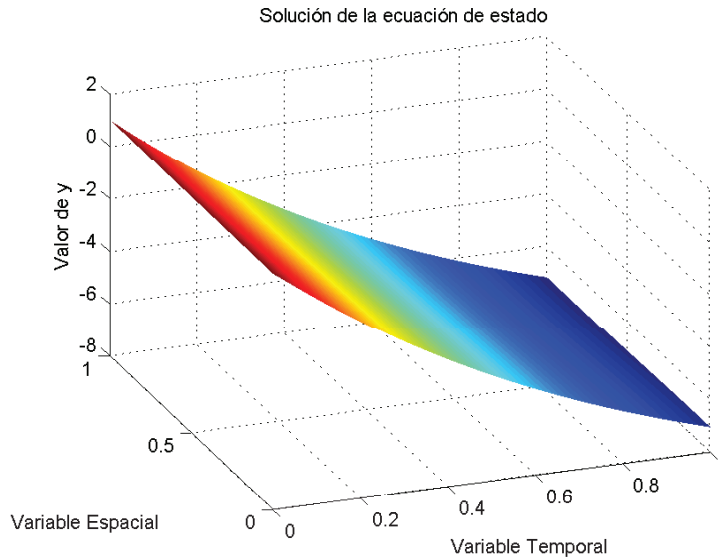


Figura 3.15: Solución de la ecuación de estado del segundo experimento

Realizamos la comparación de los tiempos de ejecución, Número de iteraciones y Valor del Funcional de costo para cada algoritmo podemos apreciar los resultados en la tabla (3.13)

Algoritmo	Tiempo (s)	Número de Iteraciones	Función Objetivo
PDAS	6.96	6	769
CGDM	28.29	5	768
PCGDM	22.45	21	768

Tabla 3.13: Resumen del Experimento 4.2, donde $\gamma = 0,5$

En este caso podemos visualizar que la paralelización permite mejorar el tiempo de ejecución del algoritmo.

Iteraciones	PDAS	CGDM	PCGDM
1	949	770	770
2	28791	769	769
3	1094	769	769
4	1095	769	769
5	770	769	769
6	770	769	769
7	769		769
8			769
9			769
10			769
11			769
12			769
13			769
14			769
15			769
16			769
17			769
18			769
19			769
20			769
21			769

Tabla 3.14: Comparación de los valores del funcional de costo del segundo experimento.

Evolución del Funcional de Costo (J)							
Iteraciones	1	2	3	4	5	6	7
PDAS	950	28791	1094	1095	770	770	769
CGDM	949.54	769.41	769	769	769	769	769
PCGDM	769	769	769	769	769	769	769

Tabla 3.15: Comparación de los valores del funcional de costo del segundo experimento.

El tiempo de ejecución del PDAS es menor que CGDM y que el CGDM-P. Además podemos observar que el algoritmo paralelo realiza más iteraciones pero éstas son más rápidas por lo que su tiempo de ejecución es menor que el CGDM. En cuanto a la función objetivo observamos que con el CGDM y CGDM-P obtenemos un valor más pequeño que con el PDAS, debido al criterio de parada.

Experimentos fijando $k = 30$

Para concluir con los experimentos incluiremos lo mencionado en el capítulo (3). Realizaremos experimentos fijando el número de iteraciones $k = 30$ para $\lambda = 1$ y $\gamma = 1$, evaluando el tiempo de ejecución para cada algoritmo.

Algoritmo	Tiempo (s)	Función Objetivo
PDAS	15.61	773
CGDM	252.68	773
CGDM-P	44.20	773

Tabla 3.16: Resumen del Experimento 4.1, fijando el número de iteraciones

Podemos observar que el PDAS sigue siendo el algoritmo que realiza más rápido cada iteración. Además el CGDM-P es más rápido que el CGDM ya que sus iteraciones son más rápidas pues se realizan en paralelo.

Capítulo 4

Conclusiones

Los problemas de control óptimo de dimensión finita son importantes para aplicaciones reales de la teoría de control. En este proyecto hemos analizado los algoritmos de conjuntos activos, coordenadas descendentes y coordenadas descendentes paralelas, con lo que hemos obtenido las siguientes conclusiones:

- Las condiciones de optimalidad de estos problemas nos permiten desarrollar algoritmos eficientes
- El algoritmo PDAS no involucra la resolución numérica de la ecuación adjunta, por lo que obtenemos mas eficiencia en la resolución del problema
- El método CGDM no involucra la resolución de la ecuación adjunta ya que se calcula un operador proximal y se reduce el problema a la resolución de un problema en dimensión finita, lo que implica más eficiencia
- El método CGDM tiene más iteraciones que el PDAS, pero tiene la ventaja de que es paralelizable.
- En las tablas (3.2) y (3.5) podemos ver que el Método CGDM induce mayor esparcidad en los resultados.
- Podemos observar en la tabla (3.11) y (3.13) se observa que el método más rápido para resolver el problema (3.2) es PDAS
- Aunque la paralelización de CGDM ofrece mejoras en algunos casos, merece la pena mayor investigación sobre varias estrategias disponibles para aprovecharla de mejor manera.

Entre las diversas alternativas para reducir el tiempo de resolución de este tipo de problemas mencionamos la paralelización del Algoritmo de Coordenadas Descendentes que podrían ser abordados en trabajos futuros ya que las variables deben estar correlacionadas para obtener mejores resultados.

Apéndice A

Apéndice

A.1 Algunos resultados de optimización y análisis convexo

Más adelante veremos que por la estructura cuadrática - lineal de los problemas de control óptimo considerados, éstos pueden ser reducidos a problemas convexos no diferenciables, por lo cual, el estudio del análisis convexo nos será de utilidad. Por ejemplo, un tipo de problemas de optimización no convexa y no suave estudiados tienen la siguiente forma:

$$\min_u J(u) = f(u) + \gamma P(u) \quad (\text{A.1})$$

donde $\gamma > 0$, $P : \mathbb{R} \rightarrow (-\infty, \infty]$ es propia, convexa y dÃ©bilmente semi-continua y f es suave en un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n que contiene $\text{dom}P = \{u : P(u) < \infty\}$. Un caso especial de (A.1) es: si tenemos restricciones en la frontera, esto es cuando tomamos

$$\mathcal{I}_{U_{ad}} = \begin{cases} 0 & u_a \leq u \leq u_b, \\ \infty & \text{caso contrario,} \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

con $u_a \leq u_b$. Estos modelos son comunes en la aplicación al limpiar señales o imágenes utilizando campos de Markov aleatorios c.f. [20] u optimización con regularizaciones e norma ℓ_1 c.f. [21].

$$\gamma \|u\|_{\ell_1} \quad (\text{A.3})$$

donde la norma ℓ_1 es introducida para inducir dispersión en la solución final c.f.

[18]. En uno de nuestros problemas vamos a hacer una combinación de los dos casos antes mencionados. En el caso de problemas de control óptimo con cantidades finitas, nuestro interés es cuando

$$P(u) := \mathcal{I}_{U_{ad}} + \gamma \|u\|_{\ell_1} \quad (\text{A.4})$$

donde $\mathcal{I}_{U_{ad}}$ esta dada como en (A.2)

Herramientas de optimización

Para poder implementar estos problemas numéricamente debemos tratar con la no diferenciabilidad de la función $P(u)$ definida en (A.4), por lo que mencionaremos algunos resultados estándar de análisis convexo c.f. [22]. Sea X un espacio de Banach

Definición 19. 1. Un funcional $F : X \rightarrow (-\infty, \infty]$ se llama convexo si

$$F((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2) \leq (1 - \lambda)F(x_1) + \lambda F(x_2) \quad (\text{A.5})$$

para todo $x_1, x_2 \in X$ y $0 \leq \lambda \leq 1$. Se llama propia si no es idénticamente ∞ .

2. Un funcional $F : X \rightarrow (-\infty, \infty]$ se dice semi-continuo inferior (s.c.i.) en $x \in X$ si

$$F(x) \leq \liminf_{y \rightarrow x} F(y). \quad (\text{A.6})$$

Un funcional F es s.c.i. si es s.c.i. para todo $x \in X$.

3. Un funcional $F : X \rightarrow (-\infty, \infty]$ se dice débilmente semi-continuo inferior (d.s.c.i.) en x si

$$F(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F(x_n) \quad (\text{A.7})$$

para todas las sucesiones $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que convergen débilmente a x . Además, F se dice d.s.c.i. si es d.s.c.i. en todo $x \in X$.

4. El subconjunto $D(F) = \{x \in X : F(x) < \infty\}$ de X , se dice el dominio efectivo de F

5. EL epígrafo de F se define por $\text{epi}(F) = \{(x, c) \in X \times \mathbb{R} : F(x) \leq c\}$

Teorema A.1.1. Si $F : X \rightarrow (-\infty, \infty]$ es convexo y acotado inferiormente en un conjunto abierto U , entonces F es continuo en U .

Teorema A.1.2. Si $F : X \rightarrow (-\infty, \infty]$ es un funcional propio s.c.i. convexo en X , y F es acotado sobre una vecindad V de un conjunto acotado y convexo C , entonces F es lipschitz continuo en C .

Subdiferenciales

En esta pequeña sección resumiremos algunos resultados de los subdiferenciales que nos serán útiles en nuestro estudio. Consideremos $X = \mathbb{R}^n$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producto escalar en \mathbb{R}^n .

Definición 20. Sea $F : \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, \infty)$, el subdiferencial de F en x , es el conjunto:

$$\partial F(x) = \{x^* \in \mathbb{R}^n : F(y) - F(x) \geq \langle x^*, y - x \rangle \text{ para todo } y \in \mathbb{R}^n\}. \quad (\text{A.8})$$

Si $\partial F(x)$ es no vacío, entonces F se dice subdiferenciable. El conjunto de todos los puntos donde F es subdiferenciable se denota por $D(\partial F)$.

Teorema A.1.3. $x_0 = \underset{x \in \mathbb{R}^n}{\operatorname{arg\,mín}} F(x)$ sí y solamente si $0 \in \partial F(x_0)$.

También tenemos los siguientes resultados

Proposición A.1.4. Para $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, el conjunto $\partial F(x)$ es cerrado y convexo para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Teorema A.1.5. Si el funcional convexo F es continuo en \bar{x} , entonces $\partial F(\bar{x})$ es no vacío.

Además tenemos un resultado importante que utilizaremos más adelante, esto es

Teorema A.1.6 (Subdiferencial de la suma). Sean $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ funciones convexas que admiten un punto en $\operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g$ en el cual f es continua. Entonces tenemos

$$\partial(f + g)(x) = \partial f(x) + \partial g(x) \quad \forall x \in \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g. \quad (\text{A.9})$$

Demostración Sea $u \in \mathbb{R}^n = (\operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g)$, $h^* \in \mathbb{R}^n$, $\partial f(u)$ y $\partial g(u)$ son los subdiferenciales correspondientes de f y g , Se sigue de (3.19) que deben cumplir

$$\begin{aligned} f(u) - f(\bar{u}) &\geq \langle h^*, u - \bar{u} \rangle \\ g(u) - g(\bar{u}) &\geq \langle z^*, u - \bar{u} \rangle \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

para todo \bar{u} . También tenemos que $h \in \partial f(u) + \partial g(u)$, debemos demostrar que $h \in \partial(f+g)(u)$. Vamos a sumar las desigualdades en (A.10) y obtenemos

$$\begin{aligned} (f(u) + g(u)) - (f(\bar{u}) + g(\bar{u})) &\geq \langle h^* + z^*, u - \bar{u} \rangle \\ (f+g)(u) - (f+g)(\bar{u}) &\geq 2\langle h^* + z^*, u - \bar{u} \rangle \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

como sabemos que por hipótesis las funciones f y g admiten un punto en $\text{dom} f \cap \text{dom} g$ podemos tomar en particular $h = h^* + z^*$ entonces, $h \in \partial(f+g)(u)$; por lo tanto, $\partial f(u) + \partial g(u) \subset \partial(f+g)(u)$.

Ahora sea $h \in \partial(f+g)(u)$. Nos reduciremos al caso donde $u = 0$, $f(0) = g(0) = 0$. Sea u un punto en $(\text{dom} f \cap \text{dom} g)$ en el que f es continua.

Sea $\text{epi}(f) = \{(x, \xi) : x \in \mathbb{R}^n, \xi \in \mathbb{R}, f(x) \leq \xi\}$ los subconjuntos de \mathbb{R}^{n+1} definidos por

$$C = \int \text{epi}(f), \quad D = \{(w, t) : \langle h, w \rangle - g(w) \geq t\} \quad (\text{A.12})$$

son no vacíos como consecuencia de la existencia de u . Son convexos y disjuntos como resultado de la desigualdad del subgradiente para h . Por el teorema de separación de Hahn Banach C y D pueden separarse: Existe $h^* \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\langle h^*, w \rangle + \lambda t < \langle h^*, u \rangle + \lambda s \quad \forall (w, t) \in D, (u, s) \in \int \text{epi} f. \quad (\text{A.13})$$

Se sigue que $\lambda > 0$; podemos normalizar tomando $\lambda = 1$. Como $\text{epi} f \subset \text{cl} \text{epi} f = \text{cl}(\text{int} \text{epi} f)$ tenemos

$$\langle h^*, w \rangle + t \leq \langle h, u \rangle + s \quad \forall (w, t) \in D \forall (u, s) \in \text{epi} f. \quad (\text{A.14})$$

Tomando $(w, t) = (0, 0)$, esto implica que $-h^* \in \partial f(0)$. Tomando $(u, t) = (0, 0)$ llegamos a que $h^* + h \in \partial g(0)$. Así $h \in \partial f(0) + \partial g(0)$. ■

Principio de Superposición

Para la resolución de la ecuación parabólica con controles finitos utilizaremos el principio de superposición, en general el principio de superposición se formula de la siguiente manera:

Definición 21. *Sea y_1 una solución de la EDP lineal $L[y_1] = f_1$ y sea u_2 la solución de la EDP lineal $L[y_2] = f_2$. Entonces, para cualquier constante c_1 y c_2 , $c_1 y_1 + c_2 y_2$ es una solución de $L[y] = c_1 f_1 + c_2 f_2$. En otras palabras*

$$L[c_1y_1 + c_2y_2] = c_1f_1 + c_2f_2. \tag{A.15}$$

Referencias

- [1] F. T. K. Eppler, *Fast Optimization Methods in the Selective Cooling of Steel*. Online Optimization of Large Scale Systems 2001, pp 185-204, 2001.
- [2] C. Meyer and P. Philip, *Optimizing the Temperature Profile During Sublimation Growth of SiC Single Crystals: Control of Heating Power, Frequency, and Coil Position*, ser. Weierstraß-Institut für Angewandte Analysis und Stochastik Berlin: Preprint. WIAS, 2003. [Online]. Available: <http://books.google.com.ec/books?id=OYLfSgAACAAJ>
- [3] P. Deuffhard, *Hyperthermia Treatment Planning in Clinical Cancer Therapy: Modelling, Simulation, and Visualization*, ser. Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik Berlin. ZIB, 1997. [Online]. Available: <http://books.google.com.ec/books?id=9BXxHAAACAAJ>
- [4] J. de Los Reyes P. Merino J. Rehberg and F. Troltsch, *Optimality conditions for state-constrained PDE control problems with time-dependent controls*. Control y Cybernetics . Mar2008, Vol. 37 Issue 1, p5-38. 34p, 2008.
- [5] S. Georg, *Elliptic Optimal Control Problems with l_1 -Control Cost and Applications for the placement of Control Devices*. SIAM J. Optim., 2003.
- [6] K. Kunisch and D. Wachsmuth, “On time optimal control of the wave equation and its numerical realization as parametric optimization problem,” *SIAM J. Control and Optimization*, vol. 51, no. 2, pp. 1232–1262, 2013. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1137/120877520>
- [7] F. Troltsch, *Optimal Control of Partial Differential Equations: Theory, Methods, and Applications*, ser. Graduate Studies in Mathematics Series. Amer Mathematical Society, 2010. [Online]. Available: <http://books.google.com.ec/books?id=MmkqgJKrnDwC>

- [8] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*, ser. Wiley classics library. Wiley India Pvt. Limited, 2007. [Online]. Available: <http://books.google.com.ec/books?id=osXw-pRsptoC>
- [9] C. Grossmann, H. Roos, and M. Stynes, *Numerical Treatment of Partial Differential Equations*, ser. Universitext (1979). Springer, 2007. [Online]. Available: <http://books.google.com.ec/books?id=lmtboXIXttAC>
- [10] E. H. U. M. Ascher and H. Huang., *On efective methods for implicit piecewise smooth surface recovery*. SIAM J. Optim., 2006.
- [11] S. Georg, *Elliptic Optimal Control Problems with l1-Control Cost and Aplications for the placement of Control Devices*. SIAM J. Optim., 2003.
- [12] T. F. Chan and X.-C. Tai., *Identification of discontinuous coeficients in elliptic problems using total variation regularization*. SIAM J. Optim., 2003.
- [13] K. Ito and K. Kunisch, *Lagrange Multiplier Approach to Variational Problems and Applications*, ser. Advances in Design and Control. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2008. [Online]. Available: <http://books.google.com.ec/books?id=XaYf2JPaGdkC>
- [14] S. Sra, S. Nowozin, and S. Wright, *Optimization for Machine Learning*, ser. Neural information processing series. MIT Press, 2012. [Online]. Available: <http://books.google.com.ec/books?id=JPQx7s2L1A8C>
- [15] S. J. Wright, “Coordinate descent algorithms,” *Mathematical Programming*, vol. 151, no. 1, pp. 3–34, 2015.
- [16] Y. Bian, X. Li, and Y. Liu, “Parallel coordinate descent newton for large-scale l1-regularized minimization,” *CoRR*, vol. abs/1306.4080, 2013.
- [17] P. Richtárik and M. Takác, “Parallel coordinate descent methods for big data optimization,” *CoRR*, vol. abs/1212.0873, 2012.
- [18] P. Tseng and S. Yun, *A coordinate gradient descent method for nonsmooth separable minimization*. Springer Verlag, 2007.
- [19] J. K. Bradley, A. Kyrola, D. Bickson, and C. Guestrin, “Parallel coordinate descent for l1-regularized loss minimization,” *CoRR*, vol. abs/1105.5379, 2011. [Online]. Available: <http://arxiv.org/abs/1105.5379>

- [20] S. Saquib, C. Bouman, and K. Sauer, *ML Parameter Estimation for Markov Random Fields, with Applications to Bayesian Tomography*, ser. Technical report (Purdue University. School of Electrical and Computer Engineering). Purdue University, School of Electrical and Computer Engineering, 1995. [Online]. Available: <https://books.google.com.ec/books?id=E3ejZwEACAAJ>
- [21] S. Geman and D. Geman, “Stochastic relaxation, gibbs distributions, and the bayesian restoration of images,” *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, vol. 6, no. 6, pp. 721–741, Nov. 1984. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1109/TPAMI.1984.4767596>
- [22] M. Hinze, R. Pinnau, and M. Ulbrich, *Optimization with PDE Constraints*, ser. Mathematical Modelling: Theory and Applications, 23. Springer London, Limited, 2009. [Online]. Available: <http://books.google.com.ec/books?id=PFbqxa2uDS8C>
- [23] K. K. M. Hintermuller, K. Ito, *The primal-dual active set strategy as a semismooth Newton method*. SIAM J. Optim., 2003.
- [24] K. K. K. Ito, *Semi-smooth Newton methods for state-constrained optimal control problems*. Systems and Control, 2003.
- [25] B. V. R. Becker, D. Meidner, *Efficient numerical solution of parabolic optimization problems by finite element methods*. Optim. Methods Softw., 2007.
- [26] A. R. K. Kunisch, *Primal-dual active set strategy for a general class of constrained optimal control problems*. SIAM J. Optim., 2002.
- [27] J. S. L. Qi, *A nonsmooth version of Newton method*. Math. Programming, 2003.
- [28] Q. A., *Numerical Models for Differential Problems*, ser. M. S. A. Springer-Verlag Milan, 2009. [Online]. Available: <http://books.google.com.ec/books?id=0gCRhwrnEO4C>
- [29] R. K. L. Henning, *Drag reduction by closed-loop control of a separated flow over a bluff body with a blunt trailing edge*. Decision and Control, 2005 and 2005 European Control Conference. CDC-ECC '05. 44th IEEE, 2005.
- [30] K. Kunisch and A. Röscher, “Primal-dual active set strategy for a general class of constrained optimal control problems,” *SIAM Journal on Optimization*,

vol. 13, no. 2, pp. 321–334, 2002. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1137/S1052623499358008>