

# **ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL**

**FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA**

**ANÁLISIS CINEMÁTICO INVERSO Y DIRECTO  
DEL ROBOT PARALELO**

**TESIS PREVIA A LA OBTENCIÓN DEL GRADO DE MAGÍSTER EN  
DISEÑO, PRODUCCIÓN Y AUTOMATIZACIÓN INDUSTRIAL**

**LORENA ALEJANDRA FERNÁNDEZ YÁNEZ**  
aleferyan@gmail.com

**LUISA FERNANDA SOTOMAYOR REINOSO**  
luisa\_sotomayor@hotmail.com

**DIRECTOR: ING. IVÁN ZAMBRANO M.Sc**  
ivan.zambrano@epn.edu.ec

**Quito, Noviembre 2016**

## DECLARACIÓN

Nosotras, Lorena Alejandra Fernández Yáñez y Luisa Fernanda Sotomayor Reinoso, declaramos que el trabajo aquí descrito es de nuestra autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y, que hemos consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

La Escuela Politécnica Nacional, puede hacer uso de los derechos correspondientes a este trabajo, según lo establecido por la Ley de Propiedad Intelectual, por su Reglamento y por la normatividad institucional vigente.

---

**ALEJANDRA FERNÁNDEZ**

---

**LUISA SOTOMAYOR**

## **CERTIFICACIÓN**

Certifico que el presente trabajo fue desarrollado por Lorena Alejandra Fernández Yáñez y Luisa Fernanda Sotomayor Reinoso bajo mi supervisión.

---

**ING. IVÁN ZAMBRANO M.Sc**

**DIRECTOR DE PROYECTO**

## DEDICATORIA

A mis padres que cada día me motivan a ser una mejor persona.

Alejandra

A mis hijos Nelson Fernando y Antonella de Carmen que son mi fortaleza y la fuente de inspiración para superarme cada día, a mis padres y hermanas por sus consejos y apoyo que me permitieron ser que soy hoy. A mis compañeros y amigos que se han convertido en parte de mi familia. En memoria de mi hermano Luis compañero de juegos estás en los recuerdos y mi corazón sé que desde el cielo me cuidas y proteges.

Luisa

## AGRADECIMIENTO

A ti Señor por hacer este sueño una realidad por todo el amor que nos rodeas y en tus manos está nuestra vida.

A nuestro director de proyecto Ingeniero Iván Zambrano M.Sc por su constante aporte académico, su paciencia, guía y amistad.

A los doctores Vicente Mata, Antonio Sánchez, Ángel Varela y Álvaro Page por la ayuda que nos otorgaron y el tiempo de asesorías brindado para que este trabajo pudiera culminar.

A la Universidad Politécnica Salesiana por su estímulo y colaboración.

A nuestros grandes amigos Johanna, Hamilton y Junior por brindarnos su amistad y por todo el apoyo durante esta época de peripecias, sufrimientos pero también de muchas glorias.

A todas aquellas personas, familiares y amigos, que de un modo u otro nos han apoyado en forma incondicional para la realización de este trabajo.

Alejandra y Luisa

## ÍNDICE DE CONTENIDO

<b>DECLARACIÓN</b> .....	i
<b>CERTIFICACIÓN</b> .....	ii
<b>DEDICATORIA</b> .....	iii
<b>AGRADECIMIENTO</b> .....	iv
<b>ÍNDICE DE CONTENIDO</b> .....	v
<b>ÍNDICE DE FIGURAS</b> .....	viii
<b>ÍNDICE DE TABLAS</b> .....	xi
<b>RESUMEN</b> .....	xii
<b>PRESENTACIÓN</b> .....	xiii
<b>CAPÍTULO 1. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA</b> .....	1
1.1    Introducción .....	1
1.2    Estructura del Robot.....	2
1.3    Robots Seriales.....	4
1.4    Robots Paralelos.....	5
1.4.1    Clasificación de los Robots Paralelos .....	7
1.5    Aplicaciones de los Robots .....	8
1.6    Modelado Cinemático del Robot Paralelo .....	10
1.6.1    Cinemática Inversa del Robot Paralelo.....	11
1.6.2    Cinemática Directa del Robot Paralelo.....	11
1.6.3    Espacio De Trabajo del Robot Paralelo .....	12
1.7    Método de Denavit-Hartenberg (D-H).....	12
1.8    Localización Espacial del Robot.....	15
1.8.1    Ángulos R-P-Y .....	16
1.9    Anatomía de la Extremidad Inferior.....	17
1.9.1    Cadera .....	18
1.9.2    Pierna .....	18

1.9.3	Pie .....	19
1.10	Movimientos de la Extremidad Inferior .....	20
1.10.1	Articulación de la Cadera .....	20
1.10.2	Articulación de la Rodilla .....	23
1.10.3	Articulación del Tobillo .....	24
<b>CAPÍTULO 2. DISEÑO CINEMÁTICO DEL ROBOT PARALELO .....</b>		<b>26</b>
2.1	Introducción .....	26
2.2	Movimientos del Robot Paralelo .....	27
2.3	Topología del Robot Paralelo.....	28
2.4	Algoritmo de Denavit – Hartenberg (D-H) aplicado al Robot Paralelo.....	29
2.4.1	Análisis de Cadena UPE .....	31
2.4.2	Análisis de Cadena RPU .....	36
2.5	Cinemática Inversa del Robot .....	41
2.5.1	Posición.....	41
2.5.1.1	Ecuaciones de Restricción .....	42
2.5.2	Velocidad .....	50
2.5.3	Aceleración .....	54
2.6	Cinemática Directa del Robot .....	55
2.6.1	Posición.....	55
2.6.1.1	Ecuaciones de Restricción .....	56
2.6.2	Velocidad .....	59
2.6.3	Aceleración .....	62
2.7	Características del Espacio de Trabajo.....	66

<b>CAPÍTULO 3. VALIDACIÓN DEL ROBOT PARALELO</b> .....	68
3.1 Determinación de los Parámetros Físicos del Robot.....	68
3.2 Simulación del Robot Paralelo .....	73
3.2.1 Descripción de la Aplicación .....	74
3.2.1.1 Modelado 3D en VRBUILD2.....	74
3.2.1.2 Interfaz en GUIDE.....	76
3.2.2 Algoritmo de la Cinemática Inversa del Robot Paralelo .....	81
3.2.3 Algoritmo de la Cinemática Directa del Robot Paralelo .....	82
3.2.4 Ejemplos de Simulación de la Cinemática Directa e Inversa del Robot Paralelo .....	84
3.2.4.1 Ejemplo 1.....	84
3.2.4.2 Ejemplo 2.....	86
3.2.4.3 Ejemplo 3.....	87
3.2.4.4 Ejemplo 4.....	88
3.3 Análisis De Resultados.....	89
CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES .....	91
BIBLIOGRAFÍA .....	92
ANEXOS .....	96



## ÍNDICE DE FIGURAS

<b>Figura 1.1</b> Articulaciones según sus grados de libertad.....	3
<b>Figura 1.2</b> Clasificación de los eslabones según el número de nodos.....	3
<b>Figura 1.3</b> Cadenas cinemáticas.....	4
<b>Figura 1.4</b> (a) robot serie y (b) robot paralelo.....	6
<b>Figura 1.5</b> Robots paralelos usados en la industria.....	7
<b>Figura 1.6</b> Aplicaciones de los robots.....	8
<b>Figura 1.7</b> Aplicaciones de los robots en la medicina.....	9
<b>Figura 1.8</b> Metodología de la cinemática.....	11
<b>Figura 1.9</b> (a) cartesiano, (b) cilíndrico y (c) esférico.....	15
<b>Figura 1.10</b> Ángulos R-P-Y.....	16
<b>Figura 1.11</b> Estructura ósea y muscular de la pierna humana.....	17
<b>Figura 1.12</b> Huesos de la cadera masculina y femenina.....	18
<b>Figura 1.13</b> Vista de la articulación de rodilla.....	19
<b>Figura 1.14</b> Vista anterior y lateral de un pie humano.....	20
<b>Figura 1.15</b> Movimiento de flexión de la cadera.....	21
<b>Figura 1.16</b> Movimiento de extensión de la cadera.....	21
<b>Figura 1.17</b> Movimiento de abducción de la cadera.....	22
<b>Figura 1.18</b> Movimiento de rotación externa de la cadera.....	22
<b>Figura 1.19</b> Articulación de la rodilla en su posición de referencia.....	23
<b>Figura 1.20</b> Flexión de la rodilla.....	24
<b>Figura 1.21</b> Movimiento de flexión y extensión del tobillo.....	24
<b>Figura 1.22</b> Movimientos de eversión e inversión del pie.....	25
<b>Figura 1.23</b> Movimiento del pie abducción y aducción.....	25
<b>Figura 2.1</b> Robot Delta.....	27
<b>Figura 2.2</b> Topología del robot 3UPE – RPU.....	28
<b>Figura 2.3</b> Ejes del robot.....	30
<b>Figura 2.4</b> Enumeración de eslabones y articulaciones.....	30
<b>Figura 2.5</b> Ejes Z en dirección del movimiento de la cadena UPE.....	31
<b>Figura 2.6</b> Definición del origen y del eje X en la cadena UPE.....	32
<b>Figura 2.7</b> Ley de la mano derecha para establecer el eje Y en la cadena UPE.....	32
<b>Figura 2.8</b> Ejes rotacionales y traslacionales de la cadena UPE.....	33

<b>Figura 2.9</b> Parámetros D-H del grado $q_1$ del brazo UPE.....	34
<b>Figura 2.10</b> Parámetros D-H del grado $q_2$ del brazo UPE.....	34
<b>Figura 2.11</b> Parámetros D-H del grado $q_3$ del brazo UPE.....	35
<b>Figura 2.12</b> Parámetros D-H del grado $q_4$ del brazo UPE.....	35
<b>Figura 2.13</b> Parámetros D-H del grado $q_5$ del brazo UPE.....	35
<b>Figura 2.14</b> Parámetros D-H del grado $q_6$ del brazo UPE.....	36
<b>Figura 2.15</b> Ubicación de los ejes Z en la cadena RPU .....	37
<b>Figura 2.16</b> Definición del origen de coordenadas para la cadena RPU .....	38
<b>Figura 2.17</b> Definición del eje X en la cadena RPU.....	38
<b>Figura 2.18</b> Ley de la mano derecha para establecer el eje Y en la cadena RPU.....	39
<b>Figura 2.19</b> ejes rotacionales y traslacionales de la cadena RPU.....	39
<b>Figura 2.20</b> Parámetros D-H del grado $q_1$ del brazo RPU.....	40
<b>Figura 2.21</b> Parámetros D-H del grado $q_2$ del brazo RPU.....	40
<b>Figura 2.22</b> Parámetros D-H del grado $q_3$ del brazo RPU.....	40
<b>Figura 2.23</b> Parámetros D-H del grado $q_4$ del brazo RPU.....	41
<b>Figura 2.24</b> Determinación de los puntos de análisis del mecanismo del robot .....	42
<b>Figura 2.25</b> Distancias R y $R_m$ .....	43
<b>Figura 2.26</b> Trayectorias para definir la posición del punto A.....	44
<b>Figura 2.27</b> Referencia del sistema móvil y cadenas para la cinemática directa. ....	56
<b>Figura 3.1</b> Dimensiones mínimas de la plataforma móvil.....	69
<b>Figura 3.2</b> Distribución del pie en la base .....	70
<b>Figura 3.3</b> Dimensiones del triángulo equilátero de la plataforma móvil .....	71
<b>Figura 3.4</b> Base fija y plataforma móvil del robot.....	71
<b>Figura 3.5</b> Dimensiones de las plataformas con radio $R= 613.33$ mm .....	72
<b>Figura 3.6</b> Brazo UPE con sus articulaciones .....	75
<b>Figura 3.7</b> Modelado en 3D del robot paralelo .....	76
<b>Figura 3.8</b> Pantalla principal de la simulación en GUIDE .....	76
<b>Figura 3.9</b> Ejercicio para comprobar el funcionamiento de robot_paralelo.m.....	77
<b>Figura 3.10</b> Gráficas de la posición de cada una de las articulaciones de las cadenas cinemáticas .....	78
<b>Figura 3.11</b> Tabla de datos de los movimientos de las articulaciones.....	78
<b>Figura 3.12</b> Simulación del modelado con cinemática inversa .....	79
<b>Figura 3.13</b> Gráfica de resultados cinemática directa .....	80

<b>Figura 3.14</b> Tabla de resultados de la cinemática directa.....	80
<b>Figura 3.15</b> Diagrama de flujo del programa para la cinemática inversa.....	81
<b>Figura 3.16</b> Diagrama de flujo del programa para la cinemática directa .....	83
<b>Figura 3.17</b> Resultados del ejemplo 1 .....	84
<b>Figura 3.18</b> Movimiento de las articulaciones de la cinemática inversa – posición .....	85
<b>Figura 3.19</b> Movimiento de las articulaciones de la cinemática directa – posición.....	86
<b>Figura 3.20</b> Resultados del ejemplo 2 .....	87
<b>Figura 3.21</b> Resultados del ejemplo 3 .....	88
<b>Figura 3.22</b> Resultados del ejemplo 4 .....	89

## ÍNDICE DE TABLAS

<b>Tabla 1.1</b> Ventajas y desventajas de los robots paralelos vs. serie.....	6
<b>Tabla 1.2</b> Aplicaciones de los robots paralelos .....	9
<b>Tabla 2.1</b> Movimientos de la pierna .....	27
<b>Tabla 2.2</b> Parámetros D-H del primer par .....	33
<b>Tabla 2.3</b> Resumen de los parámetros D-H de las cadenas UPE.....	36
<b>Tabla 2.4</b> Resumen de los parámetros D-H de la cadena RPU .....	41
<b>Tabla 2.5</b> Rango de las variables de la plataforma móvil del robot paralelo .....	67
<b>Tabla 3.1</b> Tabla de las correspondencias entre talla y medida del pie.....	68
<b>Tabla 3.2</b> Equivalencia de grados de libertad con variables de Matlab.....	82
<b>Tabla 3.3</b> Equivalencia entre variables de cinemática directa y Matlab.....	83
<b>Tabla 3.4</b> Errores en porcentaje del ejemplo 1 .....	85
<b>Tabla 3.5</b> Errores en porcentaje del ejemplo 2 .....	87

## RESUMEN

El presente trabajo es parte de un proyecto de investigación multidisciplinario de la Escuela Politécnica Nacional PIMI 15-04 "Control adaptativo basado en inteligencia artificial aplicado a un sistema mecatrónico fundado en un robot paralelo para la diagnosis y rehabilitación". El objetivo del trabajo es analizar la cinemática de un robot paralelo con 4GDL, constituido por una plataforma fija y una móvil, unidas por cadenas cinemáticas de tipo 3UPE (Universal, Prismática, Esférica) – RPU (Rotacional, Prismática, Universal), para aplicarlo en actividades de rehabilitación de rodilla. En atención a las funciones que debe desempeñar el robot, se establece una configuración geométrica inicial, la que posteriormente se verifica a través de un proceso de simulación. Se determinan los parámetros de Denavit – Hartenberg (D-H) para definir las matrices de transformación que permiten establecer las ecuaciones de restricción. Se aplican los principios de la cinemática inversa y directa para encontrar las coordenadas generalizadas y velocidades de las articulaciones. Con las posiciones límites del miembro inferior, se establece el espacio de trabajo del robot. Se desarrollan subrutinas de programación en Matlab que permiten ingresar los giros y traslaciones de la plataforma móvil como parámetros de la cinemática inversa; las posiciones obtenidas se utilizan como entradas de la cinemática directa y se determina el error generado. A fin de poder apreciar de mejor manera el movimiento del robot se desarrolla el modelo geométrico en el módulo VRBUILD en Matlab y se observa los resultados con la interfaz en GUIDE. Este trabajo es la primera fase del proyecto de investigación mencionado, que continúa con el estudio dinámico y el desarrollo del sistema de control.

## PRESENTACIÓN

En la actualidad, por el estilo de vida, gran porcentaje de la población realiza deportes de alto impacto lo que ha aumentado la cantidad de lesiones en los miembros inferiores, muchos de los cuales requieren rehabilitaciones largas, costosas y dolorosas.

Los centros y clínicas de rehabilitación presentan algunos problemas en sus servicios, como poco espacio para la cantidad de pacientes, cantidad insuficiente de médicos especialistas y fisioterapeutas, demora en la agenda de citas, tratamientos con movimientos bruscos o inadecuados a la dolencia. Además hay que considerar que el traslado de los pacientes a los centros de rehabilitación puede suponer no solo una molestia para el paciente sino un coste importante para el paciente.

Con el fin de garantizar una asistencia de calidad a una mayor cantidad de pacientes, se han realizado diversos intentos para automatizar el proceso de rehabilitación, pero los sistemas robotizados empleados, basados fundamentalmente en mecanismos de lazo abierto, son muy costosos y difíciles de operar. Por ello, se considera que un robot paralelo con un limitado número de grados de libertad puede constituir una base mecánica robusta y de bajo coste para la rehabilitación robotizada.

En este trabajo se aborda el diseño y modelado mediante la metodología de Denavit-Hartenberg y resolución del problema cinemático inverso y directo de un robot paralelo para aplicaciones biomecánicas, específicamente rehabilitación de lesiones de rodilla.

El presente trabajo forma parte de un proyecto multidisciplinario de investigación "Control adaptativo basado en inteligencia artificial aplicado a un sistema mecatrónico fundado en un robot paralelo para la diagnosis y rehabilitación" que busca desarrollar un laboratorio de bioingeniería que aporte conocimientos sobre el diseño, construcción y control de robots paralelos orientados a la biomedicina.

## OBJETIVOS

El presente proyecto tiene los siguientes objetivos.

### GENERAL

Analizar el problema cinemático inverso y directo de un robot paralelo para aplicaciones de rehabilitación de lesiones de rodilla.

### ESPECÍFICOS

- Definir los movimientos que requiere el robot paralelo para la diagnosis y rehabilitación de lesiones de rodilla.
- Identificar la topología del robot paralelo que reproduzca los movimientos para la diagnosis y rehabilitación de lesiones de rodilla con un mínimo de grados de libertad.
- Modelar la cinemática inversa y directa del robot paralelo mediante la convención de Denavit – Hartenberg.
- Validar el modelo mediante simulación.

Los beneficiarios de esta tesis son los investigadores del proyecto final para seguir con el estudio, construcción y control del robot paralelo. Al final del proyecto de investigación son potenciales usuarios, pacientes que necesiten de ejercicios de rehabilitación de rodilla con la supervisión de profesionales especializados como fisioterapeutas, fisiatras, traumatólogos, rehabilitadores, además de instituciones públicas y privadas que brinden servicios de rehabilitación

# CAPÍTULO 1

## FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

### 1.1 INTRODUCCIÓN

En la historia de la humanidad, las personas han sentido atracción por las máquinas primero con accionamientos mecánicos, pasando por los eléctricos hasta llegar a controles electrónicos, iniciándose en la década de los 40 la robótica.

Los primeros dispositivos fueron manipuladores teleoperados, que se construyeron con el objetivo de manejar elementos radioactivos que repliquen fielmente los movimientos del operador, sin embargo la transmisión mecánica se sustituyó con la electrónica con el transcurso del tiempo y los avances tecnológicos. (Barrientos, Peñin, Blaguer, & Aracil, 2007).

La palabra robot viene de 'robotnik' o 'robota', que se podría traducir como 'trabajo tedioso' en checo. Lo empleó por vez primera, en 1917, el dramaturgo checoslovaco Karel Capek en su obra *Rossum's Universal Robot* (R.U.R.) La trama era sencilla: el hombre fabrica un robot, luego el robot mata al hombre. Pero fue el escritor Isaac Asimov quien popularizó el concepto con sus muchos relatos de ciencia ficción, dotándolo de un componente romántico del que en realidad carecen estos artefactos. (Saha, 2010).

Un robot se describe con varias definiciones, por ejemplo la del Robot Institute of América (RIA) de 1980 que dice: “Un robot manipulador multifuncional reprogramable diseñado para mover materiales, partes, herramientas o dispositivos especializados a través de movimientos programados para la ejecución de una gran variedad de tareas.” (Reyes, 2011, pág. 3)

Una definición más actual de Reyes Cortés, dice: “La robótica es una disciplina científica que aborda la investigación y desarrollo de una clase particular de sistemas mecánicos, denominados robots manipuladores, diseñados para realizar



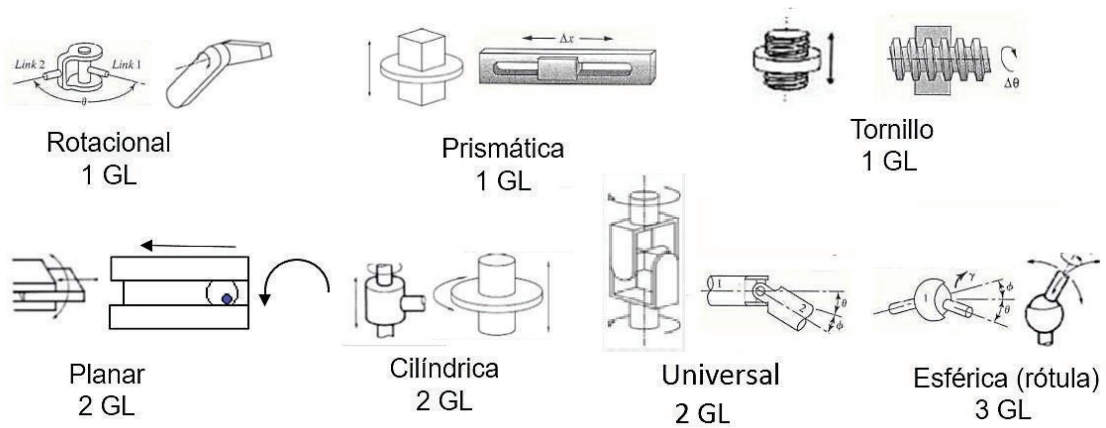
una amplia variedad de aplicaciones industriales, científicas, domésticas y comerciales”. (pág. 4)

La noción de robótica implica una cierta idea preconcebida de una estructura mecánica y eléctrica capaz de adaptarse a diversas acciones; las principales características de un robot son: movilidad, gobernabilidad, programación, autonomía, repetibilidad y multifuncionalidad.

En la actualidad el campo de trabajo de la robótica es muy amplio, se han implementado nuevas tecnologías para varias áreas de trabajo como la cinemática y la dinámica en mecánica, la planificación de sistemas, el control, sensores, lenguajes de programación e inteligencia artificial en electrónica y sistemas. Existe una gran variedad de robots, con características físicas y funcionales asociados a su estructura mecánica, a sus características operativas y al campo de aplicación para el cual han sido diseñados. Lo que hace difícil concretar elementos comunes a todos, pero en la mayoría disponen de un esqueleto o chasis, que puede ser interno o externo, motores, piezas que permiten su movilidad, sistemas de agarre y manipulación y una fuente de alimentación, normalmente eléctrica. (López Apostolovich, 2009)

## **1.2 ESTRUCTURA DEL ROBOT**

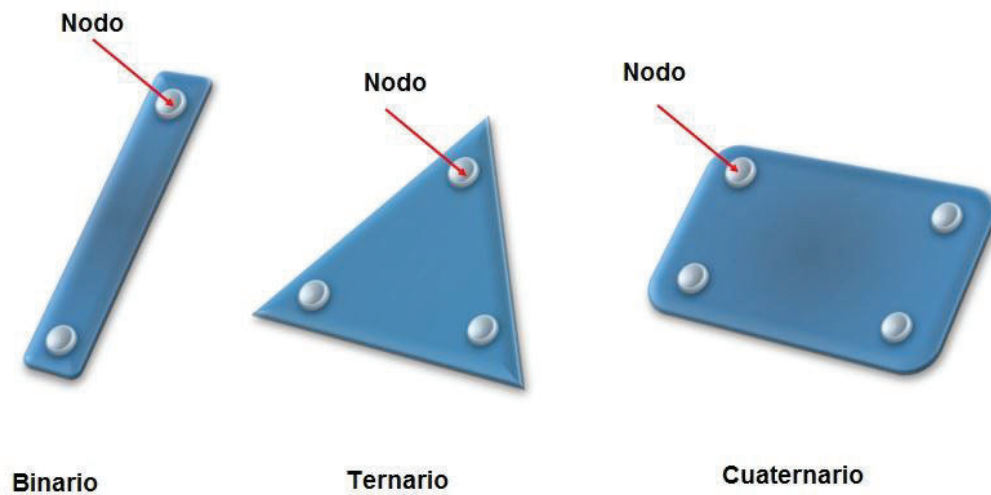
La cadena cinemática llamada brazo se compone de uno o varios eslabones unidos por articulaciones, los movimientos en las articulaciones son de desplazamiento, giro o una combinación de ambos, en la Figura 1.1 se observa las articulaciones más usadas clasificadas según los grados de libertad que pueden desarrollar.



**Figura 1.1** Articulaciones según sus grados de libertad.

Fuente (Barrientos, Peñin, Blaguer, & Aracil, 2007)

El eslabón es el cuerpo rígido constituido al menos por dos nodos, en donde se unen con las articulaciones y forman las cadenas cinemáticas, en la Figura 1.2 se puede observar la clasificación de los eslabones según el número de nodos que posee.

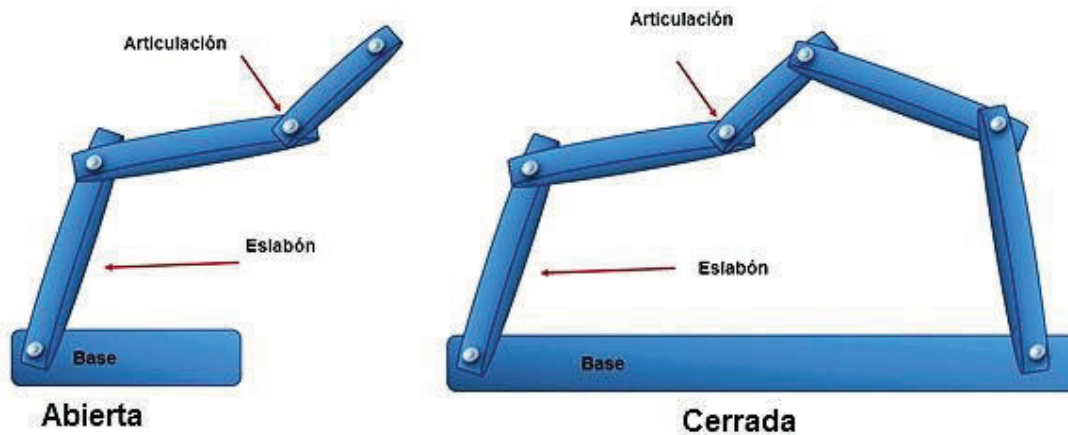


**Figura 1.2** Clasificación de los eslabones según el número de nodos

Elaborado por las autoras, 2016

La cadena cinemática es la unión de varios eslabones y articulaciones. Si cada eslabón se encuentra conectado a otro por al menos dos caminos se denomina cadena cinemática cerrada y, si en la cadena cinemática cada eslabón se conecta

exclusivamente al anterior y al siguiente, se denomina cadena cinemática abierta, se observa en la Figura 1.3 estos tipos de cadenas cinemáticas.



**Figura 1.3** Cadenas cinemáticas

Elaborado por las autoras, 2016

En cada cadena cinemática abierta todas las articulaciones son activas, de las cadenas cerradas solo algunas son activas y otras pasivas. Existen mecanismos formados por cadenas cinemáticas cerradas y abiertas denominadas híbridas. (Cisneros León, 2006)

### 1.3 ROBOTS SERIALES

En términos generales, un robot serie llamado también robot de cadena abierta es un conjunto de cuerpos (llamados enlaces) conectados en serie a través de juntas de accionamiento, que son típicamente de revolución (rotación) o prismático (traslación). Una extremidad de esta cadena en serie de enlaces se llama la base y el otro el efector final. Un gran porcentaje de los robots industriales es de tipo serie. Estos robots consisten en varios subsistemas: de movimiento, de reconocimiento y de control.

El subsistema de movimiento es la estructura del robot que realiza movimientos similares a los brazos humanos, consta de manipuladores, efector final, actuador y transmisión. El subsistema de reconocimiento utiliza diferentes sensores que identifican la posición del objeto a manipular y el ambiente de trabajo, consta de sensores y convertidores. El subsistema de control regula el movimiento del robot para que efectúe una tarea utilizando las señales del subsistema de reconocimiento y consta de un controlador digital y un conversor digital análogo. (Saha, 2010)

## **1.4 ROBOTS PARALELOS**

El robot paralelo llamado también robot de cadena cerrada, se compone básicamente una plataforma móvil o efector final unido a una base fija a través de varias cadenas cinemáticas independientes de eslabones interconectados. En otras palabras, un robot paralelo tiene por lo menos dos "brazos". Los grados de libertad (GDL) son desplazamientos longitudinales o rotacionales independientes que puede tener un mecanismo. Algunas articulaciones pueden tener más de un GDL.

Los movimientos que pueden realizar los robots están asociados a los grados de libertad y del número de cadenas cinemáticas que posean. La cantidad de grados de libertad y por ende, de la complejidad del robot, dependen de la acción a realizar.

Típicamente cada brazo está controlado por un actuador, para reducir la complejidad y regular la energía de los actuadores y así mejorar las características de velocidad y capacidad de carga del robot. Los robots paralelos consiguen manipular cargas mayores que los seriales, ya que en sus brazos se distribuye la carga. Un ejemplo de estos robots se lo observa en la Figura 1.4.

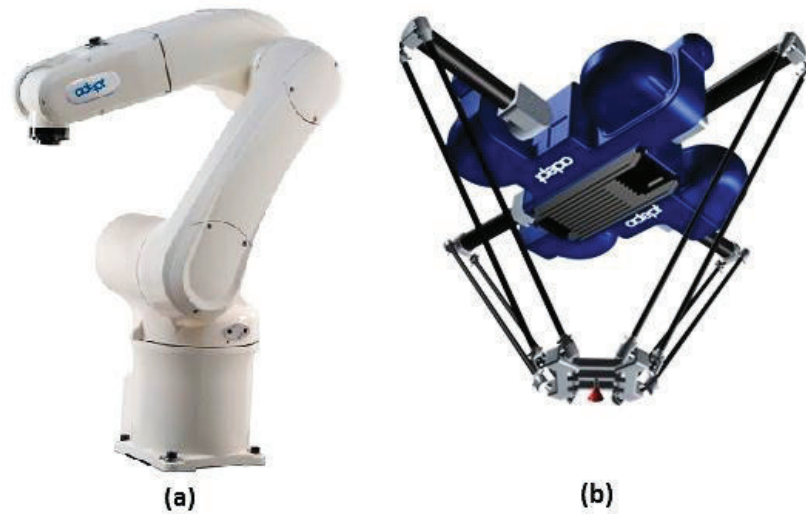


Figura 1.4 (a) robot serie y (b) robot paralelo

Fuente (adept, 2016)

Al comparar los dos tipos de robots se obtienen varias ventajas y desventajas que se aprecian en la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia..**

Tabla 1.1 Ventajas y desventajas de los robots paralelos vs. serie

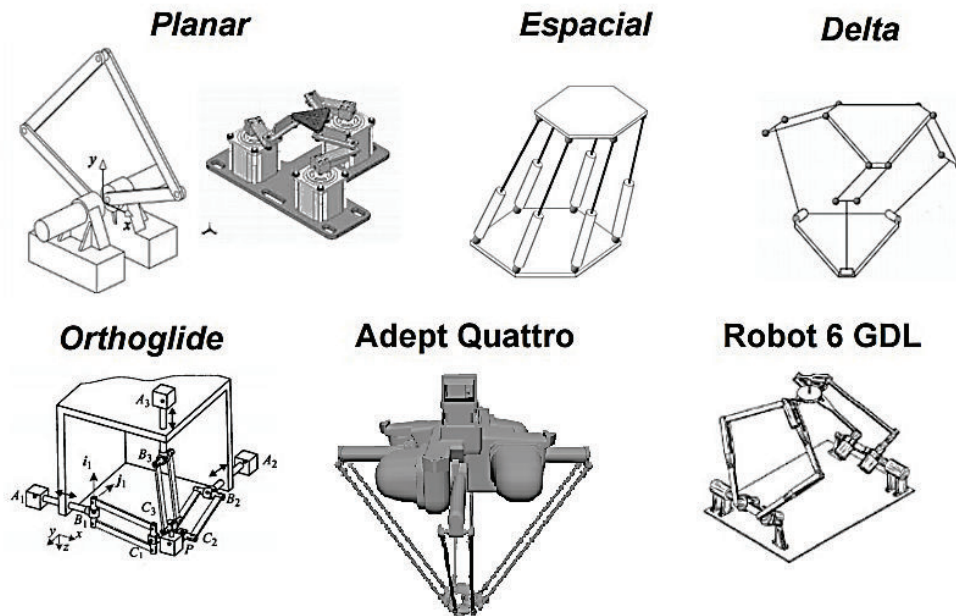
VENTAJAS	DESVENTAJAS
Arquitectura más rígida, lo cual permite obtener mejores resultados que los serie.	Cinemática compleja, la definición de las posiciones y la construcción del modelo dinámico son más complejos.
Alta relación carga / peso ya que los accionamientos de potencia conectan directamente la base del robot al efector final, sirviendo de elementos estructurales que actúan de manera simultánea, permitiendo manipular cargas superiores a su propio peso.	Espacio de trabajo reducido, además no es sencillo su cálculo pues la orientación y posición están fuertemente ligados.
Mayor precisión, debido a su estructura, la posición final tiene una precisión muy alta.	Configuraciones singulares, no existe un modelo dinámico general, esto dificulta tener algoritmos generales para su control.
Altas velocidades, su arquitectura les permite alcanzar altas velocidades y aceleraciones, lo cual les permite realizar trabajos industriales con más eficiencia.	Arquitectura mecánica compleja, puesto que el número de eslabones va a depender de los grados de libertad que se desea.
Mejores características dinámicas	

Elaborado por las autoras, 2016

### 1.4.1 CLASIFICACIÓN DE LOS ROBOTS PARALELOS

Es muy difícil clasificar a los manipuladores paralelos dado el gran número de parámetros que intervienen, pero según las características del movimiento se pueden clasificar en planares y espaciales, dependiendo de si actúan sobre un plano de dos o tres dimensiones, además de los robots especiales como el Delta, Orthoglide, el Adept Quattro y el robot de 6GDL, ejemplos de estos robots paralelos que se utilizan en la industria se observa en la Figura 1.5.

Dos de los robots paralelos más populares son el Hexápodo Telescópico de Ida utilizado en la mayoría de los simuladores de movimientos (a menudo llamadas "plataformas de movimiento") y el llamado robot Delta, que se utiliza generalmente para un rápido pick-and-place. Mientras que hay un menor número de robots paralelos que los robots en serie en uso, la variedad de robots paralelos es más grande.

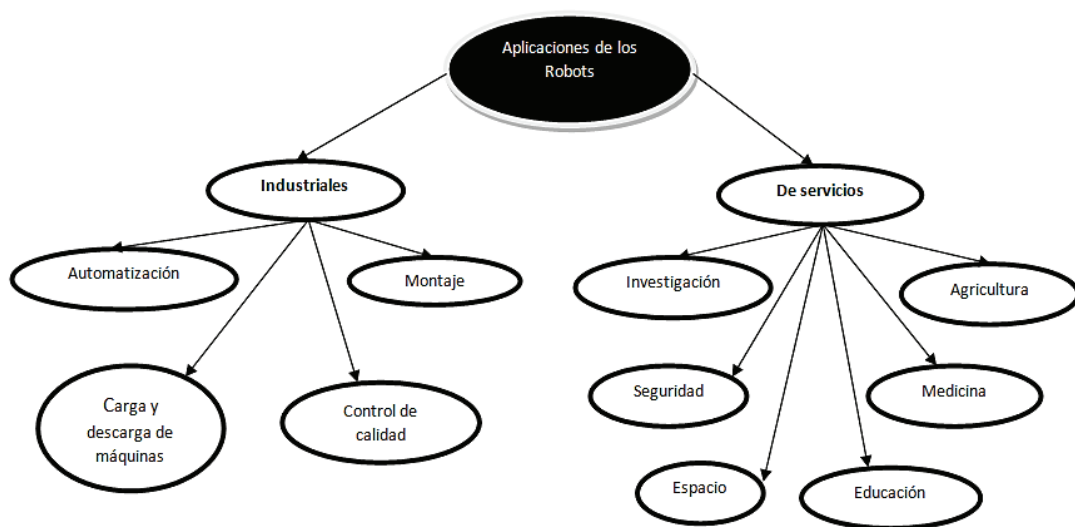


**Figura 1.5** Robots paralelos usados en la industria

Fuente (Cook, 2009)

## 1.5 APLICACIONES DE LOS ROBOTS

Los robots son ampliamente utilizados en tareas repetitivas o peligrosas para el ser humano, además en aquellas que requieren ciertas características como precisión, fuerza, estabilidad, optimización de tareas, multitarea o capacidad de carga. Como se puede ver en la Figura 1.6, estas aplicaciones pueden ser industriales o de servicio y estas a su vez tienen aplicaciones puntuales.



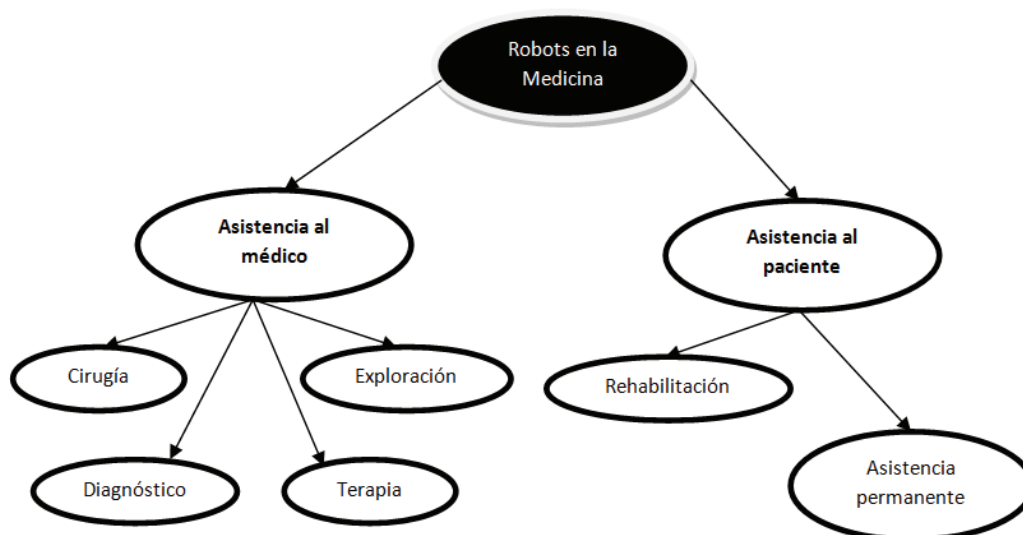
**Figura 1.6** Aplicaciones de los robots

Elaborado por las autoras, 2016

Dentro de las aplicaciones de los robots está la medicina, donde se aprovecha sus características de precisión, percepción, soporte y clasificación, en dos áreas específicas que son la asistencia al médico y la asistencia al paciente (Barrientos, Webs, Universidad de Murcia, 2008). Como se puede ver en la Figura 1.7, dentro de la aplicación de robots paralelos está la asistencia al paciente en rehabilitación.

Los robots son utilizados para tratar rehabilitación física y operacional. Dentro de la rehabilitación física su mayor aporte es en la de miembros superiores e inferiores.





**Figura 1.7** Aplicaciones de los robots en la medicina

Elaborado por las autoras, 2016

La rehabilitación se puede realizar a distancia o en el lugar, siendo a distancia desde la comodidad del hogar del paciente, quien a través de un computador e internet se conecta con el centro hospitalario y se simulan movimientos de fuerza y manipulación del miembro.

En cuanto a los robots paralelos, su evolución y aplicaciones a través de su historia se detallan en la Tabla 1.2 (Saravia & López, 2009):

**Tabla 1.2** Aplicaciones de los robots paralelos

AÑO / AUTOR	CARACTERÍSTICAS DEL ROBOT	APLICACIÓN
1940	Cinco grados de libertad. Posee tres brazos con dos eslabones unidos mediante articulaciones universales. Los tres actuadores de la base rigen la posición de la herramienta, otros dos actuadores proporcionan la orientación y transmiten movimiento a la herramienta mediante la rotación de cables flexibles.	Pintura con spray
1947 / Dr. Eric Gough	Es un octaedro hexápodo con lados de longitud variable como plataforma. Permite realizar pruebas de comportamiento de los neumáticos de la casa <u>Dunlop</u> bajo cargas aplicadas en diferentes ejes.	Simulación del proceso del aterrizaje de un avión



**Tabla 1.2** Aplicación de los robots paralelos (**continuación ...**)

1965 / Mr. Stewart	Es una plataforma de movimiento de seis grados de libertad. Uno de los primeros trabajos de análisis de plataformas paralelas y base de los siguientes estudios de robots paralelos.	Simulador de vuelo
1990 / Reymond Clavel	Manipulador Delta de tres y cuatro grados de libertad. Está constituido por una base fija y otra móvil, unidas por tres cadenas cinemáticas cerradas o brazos. Los motores que conducen los brazos están montados en la base fija, con lo que la masa del robot a mover es menor y permite mayor aceleración. Para el Delta de 4 grados, se añade un giro a la pinza final.	Manipulación de alimentos

Elaborado por las autoras, 2016

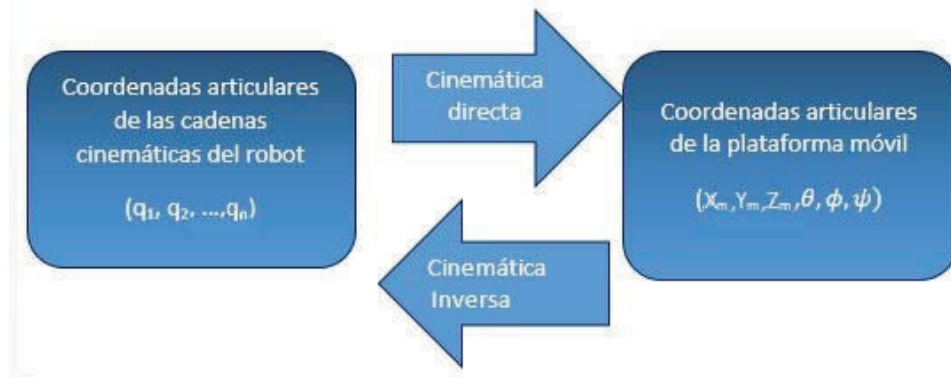
## 1.6 MODELADO CINEMÁTICO DEL ROBOT PARALELO

No existe una metodología general para modelar un robot paralelo. Sin embargo la tarea no es difícil, dado que en el campo del ensamblaje industrial los robots más populares son aquellos del tipo Delta y Stewart, se analiza en este proyecto el modelado completo del robot basado en estos dos.

En la cinemática de los robots se estudian sus movimientos con respecto a un sistema de referencia dado, la cinemática investiga la descripción analítica del movimiento espacial del robot en función del tiempo y las relaciones que existe entre la posición o referencia y la orientación o posición del extremo final del robot en función de los valores que toman sus articulaciones. (Silva, 2005)

El análisis de la cinemática de un mecanismo o robot se lo realiza de dos formas: inversa y directa.

Debido a los lazos de control que tiene, el cálculo de la cinemática directa es compleja y puede tener varias soluciones; el cálculo de la cinemática inversa es más simple en robots paralelos, en la Figura 1.8 se observa la metodología de la cinemática tanto directa como inversa.



**Figura 1.8** Metodología de la cinemática

Elaborado por las autoras, 2016

### 1.6.1 CINEMÁTICA INVERSA DEL ROBOT PARALELO

En la cinemática inversa se determinan las coordenadas de las articulaciones de cada actuador teniendo como datos la posición y orientación de la plataforma móvil.

La cinemática inversa puede analizarse por el método analítico y por el método geométrico, siendo el más fácil de utilizar el segundo, ya que permite determinar una solución para el movimiento del actuador dependiendo de la posición y rotación de la plataforma móvil, tomando como referencia a la plataforma fija.

### 1.6.2 CINEMÁTICA DIRECTA DEL ROBOT PARALELO

Con los valores del movimiento de las articulaciones de cada cadena que conforma al robot paralelo se determina cuál es la posición y orientación final de la plataforma móvil, tomando como referencia la plataforma fija. Los métodos numéricos para el obtener la solución de la cinemática directa son los iterativos y polinomiales. En la actualidad también se pueden usar programación de redes neuronales para el cálculo de la cinemática directa de un mecanismo paralelo. Para describir o representar la localización de un objeto en tres dimensiones se usa álgebra vectorial y matricial. (González Alvarez & Reinoso Mendoza, 2011)

### **1.6.3 ESPACIO DE TRABAJO DEL ROBOT PARALELO**

El espacio de trabajo es el campo de acción de la plataforma móvil del robot, es decir, las posiciones que puede alcanzar el extremo del robot. Este campo o volumen se determina considerando el tamaño, forma y tipo de eslabones, la geometría de la plataforma móvil y fija y las limitaciones de movimiento impuestas por el sistema de control.

El espacio de trabajo es un parámetro importante a tomar en cuenta para optimizar las dimensiones del robot. Éste se debe elegir de tal forma que su espacio de trabajo le permita realizar la tarea para la que se construyó. Los puntos más lejanos y los más cercanos a los que debe acceder el robot se alcanzan con orientaciones determinadas.

Entre las ventajas de determinar el espacio de trabajo está que se define el entorno de trabajo del robot, el alcance efector final, se asegura las características cinemáticas que están relacionadas con la interacción del robot y su entorno. (Martínez, 2013)

La forma y dimensión del espacio de trabajo está limitada además por las articulaciones tanto pasivas como activas, de la estructura geométrica del robot y los grados de libertad total del mecanismo.

## **1.7 MÉTODO DE DENAVIT-HARTENBERG (D-H)**

Es un procedimiento sistemático matricial que describe la estructura cinemática de una cadena constituida por eslabones y articulaciones, pudiendo determinar las ecuaciones cinemáticas de la cadena completa.

Si se escoge correctamente el sistema de coordenadas de cada articulación con la parametrización D-H, será posible pasar de un sistema al siguiente mediante cuatro transformaciones básicas que van a depender solo de las características geométricas del eslabón y de las articulaciones que los unen.

Son cuatro variables: ángulo de articulación ( $\theta_i$ ), distancia de articulación ( $d_i$ ), longitud de enlace ( $a_i$ ) y torsión de enlace ( $\alpha_i$ ), todos definidos respecto al grado de libertad  $i$ .

Los pasos para obtener el modelo mediante el algoritmo de Denavit- Hartenberg son. (Barrientos, Peñin, Blaguer, & Aracil, 2007)

**DH1.** Se enumera los eslabones, 1 (primer eslabón móvil de la cadena) y  $n$  (último eslabón móvil), se numerará como eslabón 0 a la base fija de la cadena analizada del robot.

**DH2.** Se enumera cada articulación comenzando por 1 la correspondiente al primer grado de libertad y acabando en  $n$ .

**DH3.** Se debe localizar el eje de cada articulación, si es rotativa, el eje será su eje de giro, si es prismática, será el eje en el cual se produce el desplazamiento.

**DH4.** Para trasladarse de 0 a  $n-1$ , situar el eje  $Z_i$ , sobre el eje de la articulación  $i+1$ .

**DH5.** Se sitúa el origen del sistema de la base ( $S_0$ ) en cualquier punto del eje  $Z_0$ , los ejes  $X_0$  e  $Y_0$  se colocan de modo que formen un sistema dextrógiro con  $Z_0$ .

**DH6.** Para ir de 1 a  $n-1$ , situar el sistema ( $S_i$ ) (solidario al eslabón  $i$ ) en la intersección del eje  $Z_i$  con la línea normal común a  $Z_{i-1}$  y  $Z_i$ , si ambos ejes se cortasen se situaría ( $S_i$ ) en el punto de corte, si fuesen paralelos ( $S_i$ ) se situaría en la articulación  $i+1$ .

**DH7.** Situar el eje  $X_i$  en la línea normal común a  $Z_{i-1}$  y  $Z_i$ .

**DH8.** Situar el eje  $Y_i$  de modo que forme un sistema dextrógiro con  $X_i$  y  $Z_i$ .

**DH9.** Situar el sistema ( $S_n$ ) en el extremo del robot de modo que  $Z_n$  coincida con la dirección de  $Z_{n-1}$  y  $X_n$  sea normal a  $Z_{n-1}$  y  $Z_n$ .

**DH10.** Obtener  $\theta_i$  como el ángulo que hay que girar en torno a  $Z_{i-1}$  para que  $X_{i-1}$  y  $X_i$  queden paralelos.

**DH11.** Obtener  $d_i$  como la distancia, medida a lo largo de  $Z_{i-1}$ , que habría que desplazar ( $S_{i-1}$ ) para que  $X_i$  y  $X_{i-1}$  quedasen alineados.

**DH12.** Obtener  $a_i$  como la distancia medida a lo largo de  $X_i$  (que ahora coincidiría con  $X_{i-1}$ ) que habría que desplazar el nuevo ( $S_{i-1}$ ) para que su origen coincidiese con ( $S_i$ ).

**DH13.** Obtener  $\alpha_i$  como el ángulo que habría que girar entorno a  $X_i$  (que ahora coincidiría con  $X_{i-1}$ ), para que el nuevo ( $S_{i-1}$ ) coincidiese totalmente con ( $S_i$ ).

**DH14.** Obtener las matrices de transformación  $i-1A_i$ .

**DH15.** Obtener la matriz de transformación que relaciona el sistema de la base con el del extremo del robot  $T = {}^0A_1 {}^1A_2 \dots {}^{n-1}A_n$ .

**DH16.** La matriz  $T$  define la orientación (sub-matriz de rotación) y posición (submatriz de traslación) del extremo referido a la base en función de las  $n$  coordenadas articulares. (Barrientos, Peñin, Blaguer, & Aracil, 2007)

Con los parámetros D-H es posible construir la matriz de transformación homogénea total definida como:

$$T = {}^0A_i = {}^0A_1 {}^1A_2 {}^2A_3 \dots {}^{i-1}A_i \quad [ 1.1]$$

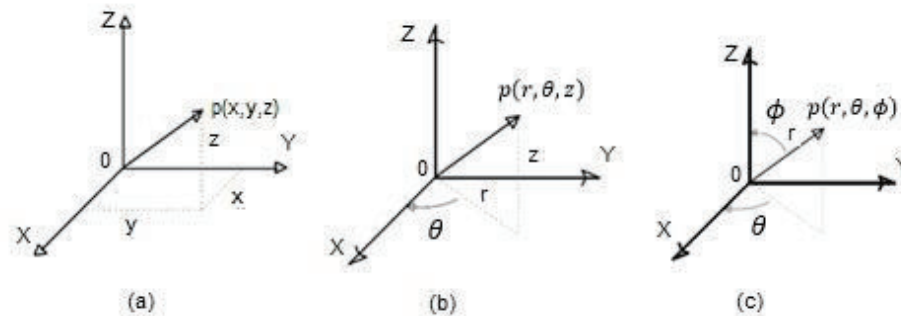
$$T = \begin{bmatrix} R_{3x3} & r_{3x1} \\ f_{1x3} & 1x1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Matriz de rotación} & \text{Matriz de posición} \\ \text{Matriz de perspectiva} & \text{Escala} \end{bmatrix} \quad [ 1.2]$$

La matriz A, que pertenece a cada eslabón, se define:

$${}^{i-1}A_i = T_{z,d}T_{z,\theta}T_{x,\alpha}T_{x,\alpha} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\cos \alpha_i \sin \theta_i & \sin \alpha_i \sin \theta_i & a_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \alpha_i \cos \theta_i & -\sin \alpha_i \cos \theta_i & a_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [1.3]$$

## 1.8 LOCALIZACIÓN ESPACIAL DEL ROBOT

Para realizar la manipulación del robot es necesario conocer su posición en todo momento, se establece un sistema de coordenadas con el cual se puede localizar cualquier punto en el espacio mediante el vector posición (sistema cartesiano), mediante radio, ángulos de giro (sistema esférico y cilíndrico), como se aprecia en la Figura 1.9.



**Figura 1.9** (a) cartesiano, (b) cilíndrico y (c) esférico

Elaborado por las autoras, 2016

Para la orientación con respecto a un marco de referencia fijo, se puede utilizar diferentes métodos entre los cuales se tiene:

**Matriz de rotación:** La DCM o matriz de rotación es una matriz de orden 3x3, donde sus columnas representan los vectores unidad del cuerpo analizado proyectado sobre los ejes del sistema de referencia. (Rivas Gil, 2006)

**Ángulos RPY y ángulos de Euler:** Un cambio de un sistema referencial a otro se lo define usando tres rotaciones sucesivas sobre los diferentes ejes. Se los

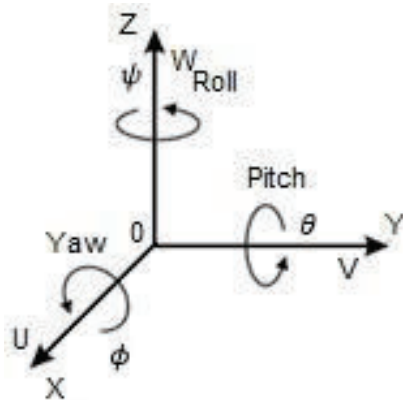
denomina roll, pitch y yaw (rotaciones sobre los ejes X, Y y Z, respectivamente). Los ángulos de Euler se derivan de esto, cambiando los ejes sobre los que se realizan las rotaciones y el orden en que se tienen en cuenta. (Rivas Gil, 2006)

**Cuaterniones:** En este caso la rotación se considera única sobre un vector definido en el marco de referencia. El vector de cuatro tetradimensional resultante es un cuaternión, cuyos elementos son función de este nuevo vector y la magnitud de la rotación. (Rivas Gil, 2006)

La orientación del cuerpo es una función de los ángulos de rotación sobre los diferentes ejes y del orden en que ocurren para que se cumpla el movimiento.

### 1.8.1 ÁNGULOS R-P-Y

El sistema 0UVW móvil puede definirse con respecto al sistema 0XYZ fijo a través de tres ángulos  $\psi$ ,  $\theta$ ,  $\phi$  llamados roll, pitch y yaw por sus siglas en inglés o balanceo, inclinación y orientación, en la Figura 1.10 se observa estos giros.



**Figura 1.10** Ángulos R-P-Y

Elaborado por las autoras, 2016

Tomando en cuenta estas rotaciones se obtienen las matrices para cada giro.

$$R_z(\psi) = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\text{sen } \psi & 0 \\ \text{sen } \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

[ 1.4]

$$R_Y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \text{sen } \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen } \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad [ 1.5 ]$$

$$R_X(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\text{sen } \phi \\ 0 & \text{sen } \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \quad [ 1.6 ]$$

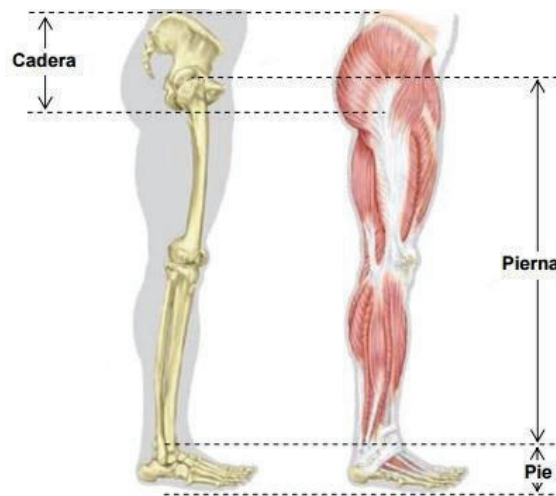
La matriz general se consigue al multiplicar las matrices de cada giro, obteniéndose:

$${}^f R_m = R_Z(\psi) R_Y(\theta) R_X(\phi) \quad [ 1.7 ]$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & \text{sen } \phi \text{ sen } \theta \cos \psi - \cos \phi \text{ sen } \psi & \cos \phi \text{ sen } \theta \cos \psi + \text{sen } \phi \text{ sen } \psi \\ \cos \theta \text{ sen } \psi & \text{sen } \phi \text{ sen } \theta \text{ sen } \psi + \cos \phi \cos \psi & \cos \phi \text{ sen } \theta \text{ sen } \psi - \text{sen } \phi \cos \psi \\ -\text{sen } \theta & \text{sen } \phi \cos \theta & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix}$$

## 1.9 ANATOMÍA DE LA EXTREMIDAD INFERIOR

Para realizar el análisis de la anatomía de la rodilla se debe tomar en cuenta que forma parte del sistema de locomoción inferior. La estructura del miembro inferior a grandes rasgos se divide en tres segmentos: cadera, pierna y pie; como se puede ver en la en la Figura 1.11, se hace una breve descripción de cada parte.



**Figura 1.11** Estructura ósea y muscular de la pierna humana

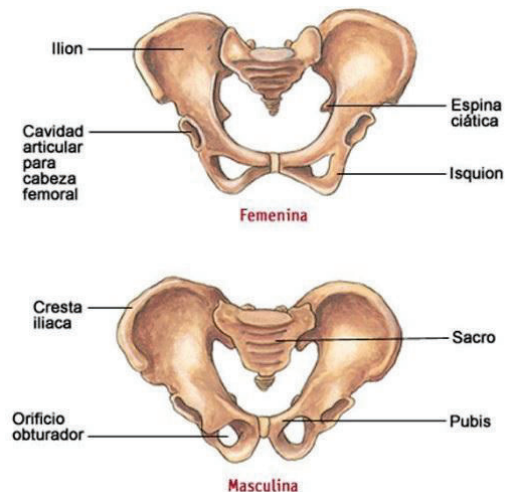
Fuente (Hernández Stengete, 2008)



### 1.9.1 CADERA

La cadera es la articulación proximal del miembro inferior y se encuentra en la base o raíz, tiene la función de ser el soporte de todo el peso del cuerpo, además orienta a toda la pierna en su espacio de trabajo, posee tres ejes y tres grados de libertad. Estos ejes son transversal, anteroposterior y vertical.

La cadera está conformada por dos huesos, llamados iliacos o coxales, soldados entre sí en la sección anterior y unidos por el sacro en la sección posterior. El hueso iliaco es plano y se articula con el sacro, formándose una cuña entre los dos iliacos. Esta unión constituye el cinturón pélvico, donde se localizan órganos importantes, existe pequeñas diferencias de forma entre la cadera masculina y femenina como se puede observar en la Figura 1.12.

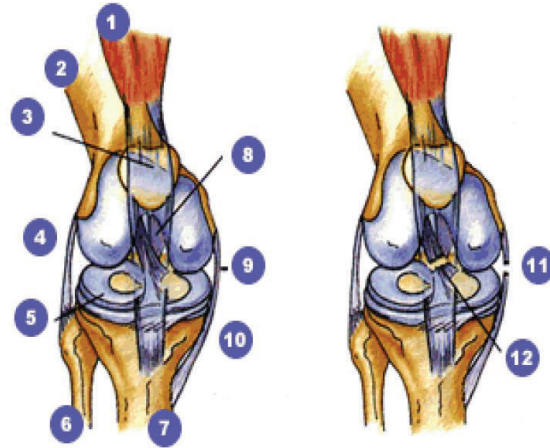


**Figura 1.12** Huesos de la cadera masculina y femenina

Fuente (Rodríguez, 2011)

### 1.9.2 PIERNA

La pierna incluye a la rodilla, la articulación más grande y compleja del esqueleto humano ya que en ésta se unen el fémur, la tibia y la rótula; Soporta el peso del cuerpo humano y permite su movilidad para caminar o correr y para dar la posición adecuada al pie de acuerdo a la irregularidad del terreno. En la Figura 1.13 se observa la rodilla con sus diferentes componentes.



**Figura 1.13** Vista de la articulación de rodilla

1. Cuádriceps 2. Fémur 3. Rótula 4.8.9.10.11.12 Ligamentos 5. Menisco 6. Peroné 7. Tibia

Fuente (García & Góngora)

Los tres huesos que forman la rodilla son el fémur, la rótula y la tibia; el peroné no se considera parte de la articulación. A éstos se unen los meniscos, tendones, ligamentos y cóndilos femorales, que ayudan o limitan los grados de movimiento de la articulación.

### 1.9.3 PIE

El pie es parte del miembro inferior distal de la pierna, es el soporte esencial para el desplazamiento humano, sus funciones básicas son: adaptarse a superficies irregulares, absorber el impacto constante, funcionar como palanca rígida que crea la fuerza de caminar y trasladar la fuerza de rotación de la cadera.

Se compone de tres grupos de huesos, estos son el tarso, metatarso y falanges, los músculos y tendones trabajan junto con los huesos, ligamentos y articulaciones para realizar sus movimientos.

La articulación del tobillo está compuesta por la parte baja de la tibia y el peroné formando el maléolo interno y maléolo externo respectivamente en combinación con los huesos de del retropié: calcáneo y astrágalo. En la Figura 1.14 se puede ver una imagen con las distintas articulaciones que forman el tobillo.



**Figura 1.14** Vista anterior y lateral de un pie humano

Fuente (Asencio, s.f.)

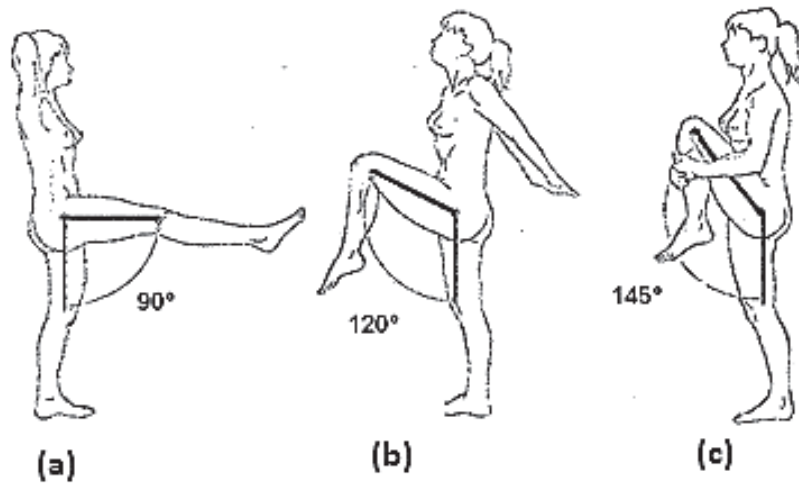
## 1.10 MOVIMIENTOS DE LA EXTREMIDAD INFERIOR

No se puede tratar independientemente el movimiento de la rodilla pues forma parte de la extremidad inferior, por lo que se detallan los movimientos de la cadera, rodilla y tobillo.

### 1.10.1 ARTICULACIÓN DE LA CADERA

Los movimientos de la cadera son: Flexo-extensión, Abducción-aducción, Rotaciones, Los movimientos varían dependiendo de la flexibilidad de los músculos.

El movimiento de flexión se analiza con la persona en posición vertical, si levanta la pierna estirada su ángulo de amplitud es de  $90^\circ$  máximo, como se muestra en la Figura 1.15 (a); cuando se levanta la pierna con la rodilla flexionada el ángulo máximo es  $120^\circ$ , Figura 1.15 (b), pero puede llegar a  $145^\circ$  si se refuerza con ayuda de los brazos Figura 1.15 (c).

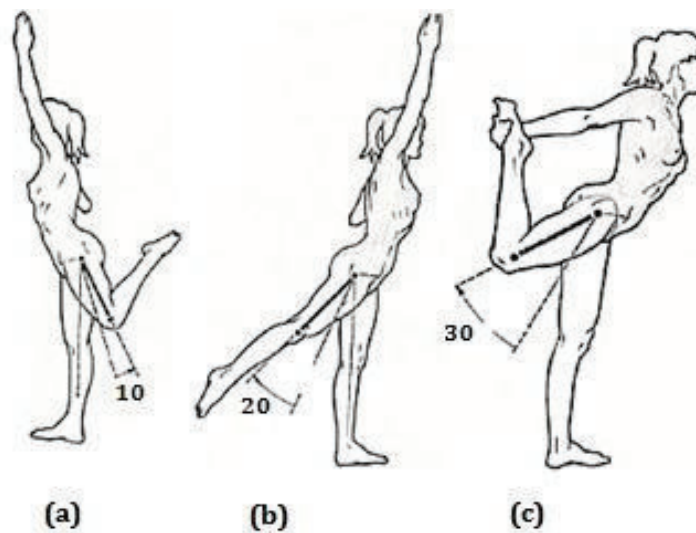


**Figura 1.15** Movimiento de flexión de la cadera

Fuente (Bernaldez, 2016)

El movimiento de extensión tiene menor movimiento articular, la masa muscular del glúteo y la tensión del ligamento ileofemoral limitan este movimiento.

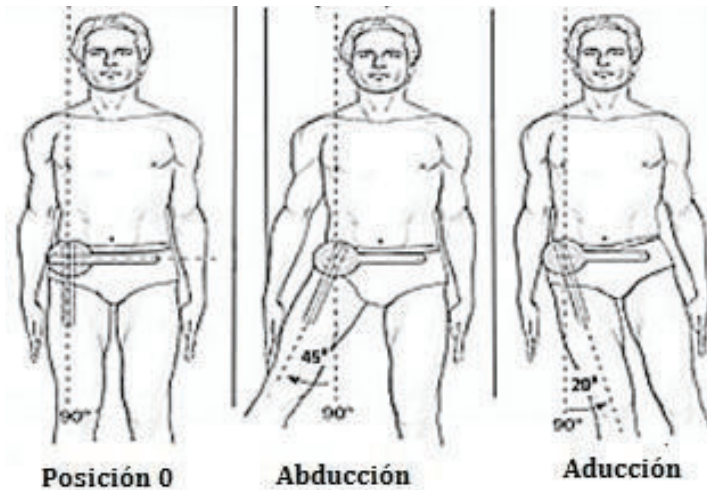
El rango de movimiento articular es  $10^\circ$  en activo Figura 1.16 (a), y con ayuda, de  $20^\circ$  a  $30^\circ$  en pasivo Figura 1.16 (b) y (c), la extensión aumenta si la cadera se mueve hacia atrás.



**Figura 1.16** Movimiento de extensión de la cadera

Fuente (Pérez, 2011)

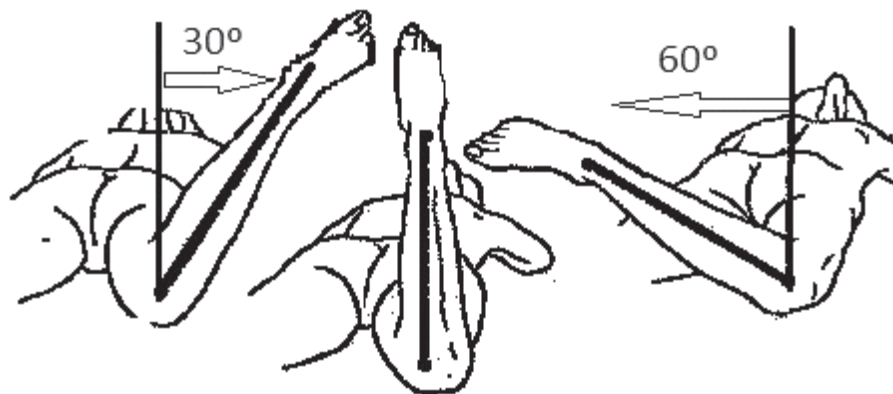
La abducción o separación es un movimiento transversal. La amplitud en abducción es  $45^\circ$  y en aducción  $20^\circ$  como se puede apreciar en la Figura 1.17.



**Figura 1.17** Movimiento de abducción de la cadera

Fuente (DeLamo, 2016)

El movimiento de rotación de la cadera se analiza con la persona acostada boca abajo y la pierna flexionada  $90^\circ$  hacia atrás. En la Figura 1.18 se observa que la rotación longitudinal externa hacia afuera es  $30^\circ$  y hacia adentro  $60^\circ$ .



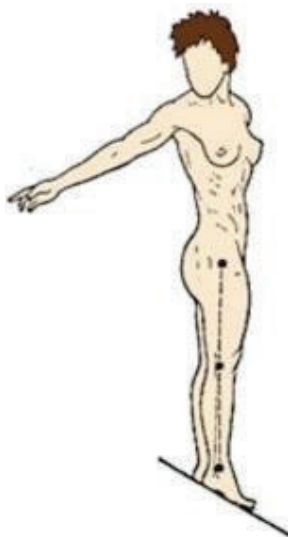
**Figura 1.18** Movimiento de rotación externa de la cadera

Fuente (Pérez, 2011)

## 1.10.2 ARTICULACIÓN DE LA RODILLA

La rodilla es una articulación que une el muslo con la pierna, sus movimientos son complejos y se puede dividir a su vez en dos articulaciones, aunque funcionalmente se la puede considerar como una. La rodilla cuenta con tres grados de libertad, dependiendo del eje de rotación: el de flexo extensión, en el eje longitudinal de rotación cuando la rodilla está flexionada, este movimiento es imposible en extensión total; en eje anteroposterior solo existe flexión de rodilla que permite regular su distancia con respecto al piso, y el de rotación sobre el eje longitudinal cuando está flexionada.

En el movimiento de extensión la cara posterior de la pierna se aleja del muslo, se tiene la extensión relativa que se hace durante la marcha, En la Figura 1.19 se alcanza una extensión máxima en la posición de referencia (a), también puede haber extensión máxima cuando no se flexiona la rodilla aunque gire las otras articulaciones de la extremidad inferior.

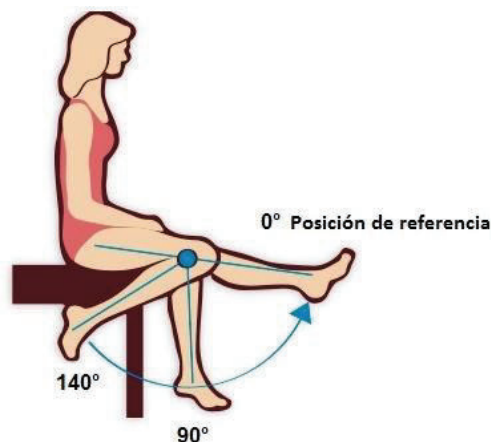


**Figura 1.19** Articulación de la rodilla en su posición de referencia

Fuente (Pérez, 2011)

El movimiento de flexión es contrario al de extensión, la flexión activa alcanza un ángulo de  $140^\circ$ , si la cadera está también en flexión, pero alcanza  $120^\circ$  si la cadera

está en extensión, En la Figura 1.20 se observa la flexión de la rodilla con flexión activa, en el presente trabajo se hará referencia solo a este movimiento, en la flexión pasiva la rodilla puede alcanzar  $160^\circ$  permitiendo el contacto entre talón y nalga.



**Figura 1.20** Flexión de la rodilla

Fuente: (Sastre, s.f.)

### 1.10.3 ARTICULACIÓN DEL TOBILLO

El movimiento del tobillo permite: flexo-extensión, inversión, eversión y rotaciones. En extensión el dorso del pie se aleja de la cara anterior de la pierna, cuando este ángulo es agudo, su amplitud es de  $20$  a  $30^\circ$ , cuando este ángulo es obtuso, se puede afirmar entonces que se trata de una flexión, su amplitud es de  $30$  a  $50^\circ$ . Este movimiento se lo observa en la Figura 1.21.



**Figura 1.21** Movimiento de flexión y extensión del tobillo

Fuente (Bernaldez, 2016)

En el movimiento de eversión (supinación) el pie se mueve hacia adentro y arriba con un ángulo máximo de  $20^\circ$  y el de inversión (pronación) hacia afuera y arriba con un ángulo no mayor a  $30^\circ$  esto se lo puede ver en la Figura 1.22.



**Figura 1.22** Movimientos de eversión e inversión del pie

Fuente (Bernaldez, 2016)

El movimiento de aducción consiste en girar hacia afuera con un ángulo de  $20^\circ$  y el de abducción el ángulo es de  $10^\circ$ , con referencia al eje perpendicular al piso como indica la Figura 1.23.



**Figura 1.23** Movimiento del pie abducción y aducción

Fuente (Bernaldez, 2016)



## CAPÍTULO 2

### DISEÑO CINEMÁTICO DEL ROBOT PARALELO

#### 2.1 INTRODUCCIÓN

El diseño cinemático del robot paralelo comprende varias fases, primero se define la estructura física a usarse, luego se obtiene el algoritmo de D-H para definir las ecuaciones de la cinemática inversa y directa.

Los robots o manipuladores paralelos con menos de 6 grados de libertad tienen la ventaja de tener un diseño mecánico más simple, un bajo costo de fabricación, un espacio de trabajo más amplio y actuadores simples, entre los más desarrollados se encuentran los robots paralelos con 3 grados de libertad que en la actualidad son más utilizados en la industria.

Los robots de 4 y 5 grados de libertad (GDL) no pueden ser construidos con cadenas cinemáticas idénticas como los de 3 grados de libertad por lo que aún están en desarrollo, aunque en la actualidad hay robots paralelos con 4 GDL con cadenas cinemáticas no simétricas como las presentadas por Hesselbach en 1998, que desarrolló un robot con dos cadenas cinemáticas asimétricas para el corte de paneles convexos de cristal, la de Lenarcit en el 2000 la cual tenía una cadena cinemática prismática–esférica (PS) y tres cadenas cinemáticas esférica–prismática–esférica (EPE) para simular el hombro de un humanoide, con un grado de libertad rotacional y tres traslacionales. En 1998 Wang y Gosselin investigaron la cinemática de un robot paralelo de 4 GDL con 4 cadenas cinemáticas Rotacional–Universal–Esférica (RUE) y una cadena cinemática Rotacional–Esférica (RE) pasiva. (Rueda, 2008).

Un manipulador con cadenas cinemáticas no simétricas crea espacios de trabajo no simétricos, lo cual hace que el análisis sea complejo; en los años 80 se estudió una estructura robusta tipo paralelogramo para robots paralelos, a esta estructura se le dio el nombre de robot Delta. La Figura 2.1 muestra un esquema del robot

Delta, se observa que las cadenas cinemáticas que unen las plataformas son idénticas y el brazo central da al robot un cuarto grado de libertad que es rotatorio.



**Figura 2.1** Robot Delta

Fuente (ABB, s.f.)

## 2.2 MOVIMIENTOS DEL ROBOT PARALELO

Con los movimientos de la cadera, pie y rodilla explicados en el capítulo anterior se realiza en la Tabla 2.1 un resumen de los valores máximos.

**Tabla 2.1** Movimientos de la pierna

ARTICULACIÓN MOVIMIENTO	CADERA			TOBILLO	RODILLA
Flexión	90°	120°	145°	30° - 50°	5° - 10°
Extensión	20°	10°	30°	20° - 30°	
Abducción	45°			10°	
Aducción	20°			20°	
Rotación	-30° a +60°			-20° a +30°	0° - 140°

Elaborado por las autoras, 2016

Las articulaciones de la cadera y tobillo tienen 4 grados de libertad, en cambio la rodilla tiene 3 grados de libertad, por lo que el robot paralelo debe tener 4 grados de libertad para generar los movimientos que permitan la rehabilitación de la extremidad inferior.

### 2.3 TOPOLOGÍA DEL ROBOT PARALELO

Un primer esquema del robot paralelo incluye dos plataformas, una fija y una móvil, de forma triangular, las cuales están unidas entre sí por cadenas cinemáticas con distintos tipos de articulaciones para generar los movimientos en la rodilla para su rehabilitación.

El robot paralelo a desarrollar dispone de 4 cadenas: tres de tipo Universal–Prismática–Esférica (UPE), las cuales unen los vértices de las plataformas; y una Rotacional–Prismática–Universal (RPU), que se encuentra en el centro. Está constituido por 10 eslabones (incluidas las plataformas fija y móvil) y 12 articulaciones o pares cinemáticos, tal como se muestra en la Figura 2.2.

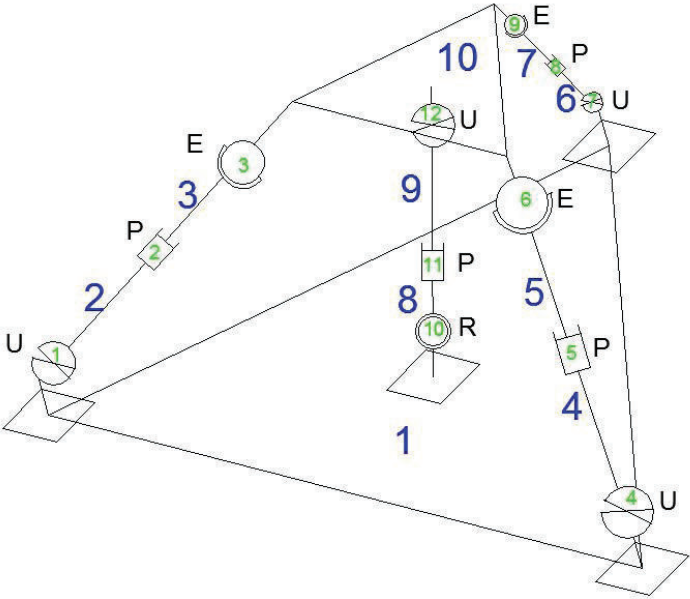


Figura 2.2 Topología del robot 3 UPE – RPU

Elaborado por las autoras, 2016

Las articulaciones tienen diferentes grados de libertad, es así que, las articulaciones prismática y rotacional tienen un grado de libertad; las universales, dos; y las esféricas, tres.

Para determinar los grados de libertad que posee el robot con estas cadenas, se utilizará el criterio de Kutzbach, el cual indica que “cuando las restricciones de las articulaciones se restan de los grados de libertad de los eslabones no conectados, se encuentra la movilidad (grados de libertad) del mecanismo conectado” (Shigley & Uicker, 2001), que para el caso de un mecanismo espacial se calcula con la siguiente ecuación,

$$m = 6(n - 1) - 5j_1 - 4j_2 - 3j_3 - 2j_4 - j_5 \quad [2.1]$$

Donde:

$m$  = grados de libertad

$n$  = número de eslabones

$j_i$  = número de articulaciones con  $i$  grados de libertad

Dados los valores del robot paralelo,  $n = 10$ ,  $j_1 = 5$ ,  $j_2 = 4$ ,  $j_3 = 3$ , el número de los diferentes movimientos o grados de libertad es:

$$m = 6(10 - 1) - 5(5) - 4(4) - 3(3) - 2(0) - 0 = 6(9) - 25 - 16 - 9$$

$$m = 4$$

## **2.4 ALGORITMO DE DENAVIT – HARTENBERG (D-H) APLICADO AL ROBOT PARALELO**

El Robot 3UPE-RPU es un sistema complejo, por lo que se han definido ejes iniciales en la plataforma fija y en la plataforma móvil, los cuales son coincidentes en la dirección de los ejes X, Y y Z, como se puede observar en la Figura 2.3. Además se ha establecido un eje en la base de cada cadena UPE.

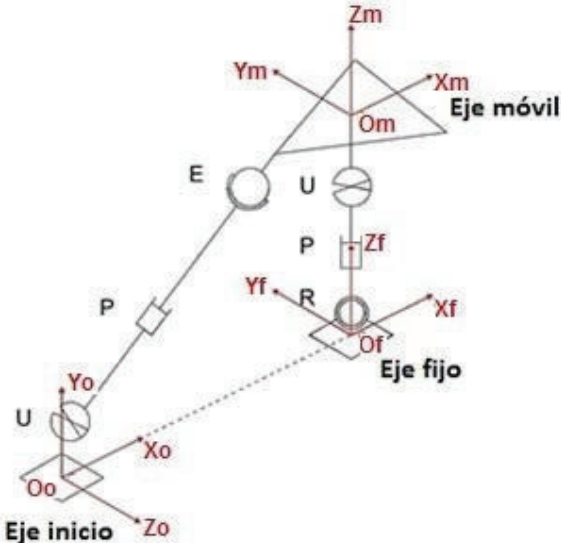


Figura 2.3 Ejes del robot

Elaborado por las autoras, 2016

Cada brazo del robot se analiza por separado, por lo que en cada brazo UPE se enumeran los eslabones, colocando 0 en la plataforma fija y llegando a 3 en la plataforma móvil, como se muestra en la Figura 2.4. De la misma forma, se establece la numeración de los eslabones en el brazo RPU.

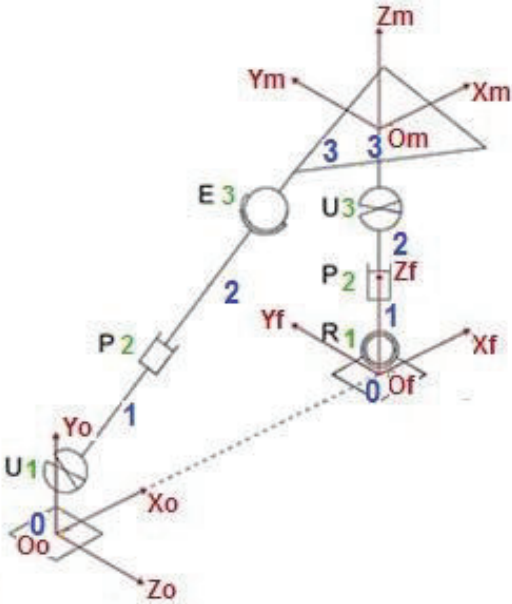


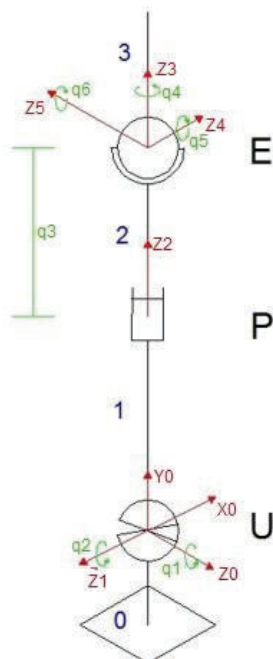
Figura 2.4 Enumeración de eslabones y articulaciones

Elaborado por las autoras, 2016

### 2.4.1 ANÁLISIS DE CADENA UPE

Después de enumerar cada eslabón de la cadena UPE, se colocan los ejes de coordenadas en cada articulación teniendo en cuenta el número de grados de libertad que posee cada una de ellas. La articulación prismática tiene un grado de libertad; las universales, dos grados de libertad rotacionales perpendiculares entre sí; las esféricas, tres grados de libertad también perpendiculares. En total, cada cadena UPE posee seis grados de libertad.

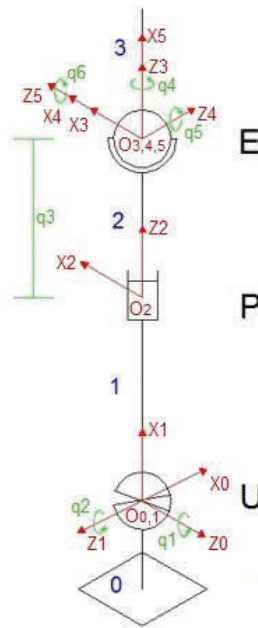
El primer sistema de coordenadas que se coloca es el de la base  $O_0 - X_0Y_0Z_0$  con  $Z_0$  en la dirección del eje de movimiento del grado de libertad 1. A continuación se colocan los ejes  $Z_i$  en los ejes de movimiento de los grados de libertad  $i + 1$  ( $i = 1 \dots 5$ ) como se observa en la Figura 2.5.



**Figura 2.5** Ejes  $Z$  en dirección del movimiento de la cadena UPE

Elaborado por las autoras, 2016

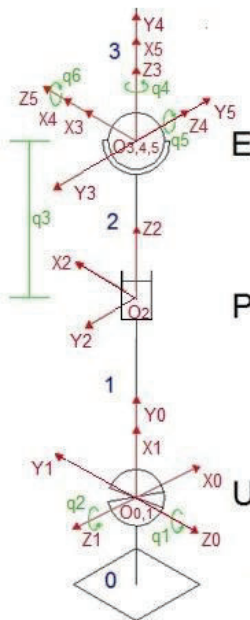
Luego se establece el origen de coordenadas  $i$ -ésimo en la intersección de los ejes  $Z_i$  y  $Z_{i-1}$  o en la intersección de las normales comunes a  $Z_i$  y  $Z_{i-1}$ . En seguida se establece el eje  $X_i$ , el cual es perpendicular al plano formado por los ejes  $Z_i$  y  $Z_{i-1}$  lo que se aprecia en la Figura 2.6.



**Figura 2.6** Definición del origen y del eje X en la cadena UPE

Elaborado por las autoras, 2016

Se establece el eje  $Y_i$  aplicando la regla de la mano derecha y completando el sistema de coordenadas, mostrado en la Figura 2.7.



**Figura 2.7** Ley de la mano derecha para establecer el eje Y en la cadena UPE

Elaborado por las autoras, 2016

Por último, el sistema de coordenadas  $O_6 - X_6Y_6Z_6$  se hace coincidir con el eje de la plataforma móvil ya que ésta corresponde al último eslabón, tal como se muestra en la Figura 2.8, que contiene todos los ejes correspondientes a la cadena UPE.

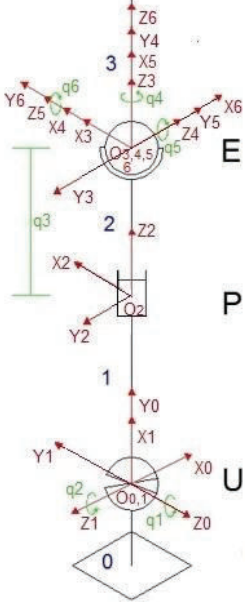


Figura 2.8 Ejes rotacionales y traslacionales de la cadena UPE

Elaborado por las autoras, 2016

Colocados los ejes de cada grado de libertad se obtienen los parámetros D-H que relacionan los sistemas de coordenadas del grado de libertad de la articulación con respecto al sistema de coordenadas del grado previo. Los grados de libertad se simbolizan con la letra  $q$ . El grado de libertad  $q_1$  se encuentra sobre el eje  $Z_0$ . Para hallar los parámetros D-H de este par se analiza en la siguiente Tabla 2.2.

Tabla 2.2 Parámetros D-H del primer par

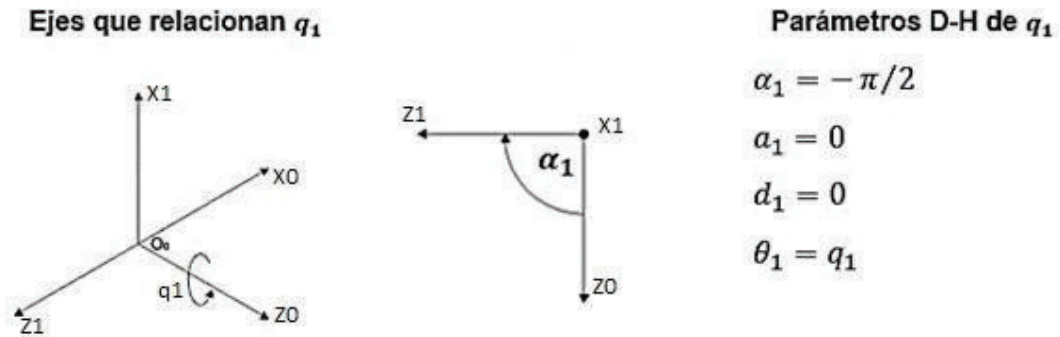
ITEM	DESCRIPCIÓN
$\alpha_1$	Ángulo de rotación desde el eje $Z_0$ hasta el eje $Z_1$ respecto del eje $X_1$
$a_1$	Distancia del origen $O_0$ a la intersección entre los ejes $Z_0$ y $X_1$ a lo largo de $X_1$
$d_1$	Distancia del origen $O_0$ a la intersección entre los ejes $Z_0$ y $X_1$ a lo largo de $Z_0$
$\theta_1$	Ángulo de rotación desde el eje $X_0$ hasta el eje $X_1$ respecto del eje $Z_0$ . Al ser una articulación rotacional, este parámetro es variable.

Elaborado por las autoras, 2016



Este análisis se presenta en la Figura 2.9.

$\{O_0 - X_0Y_0Z_0\} \rightarrow \{O_1 - X_1Y_1Z_1\}$  par U, primer par R.

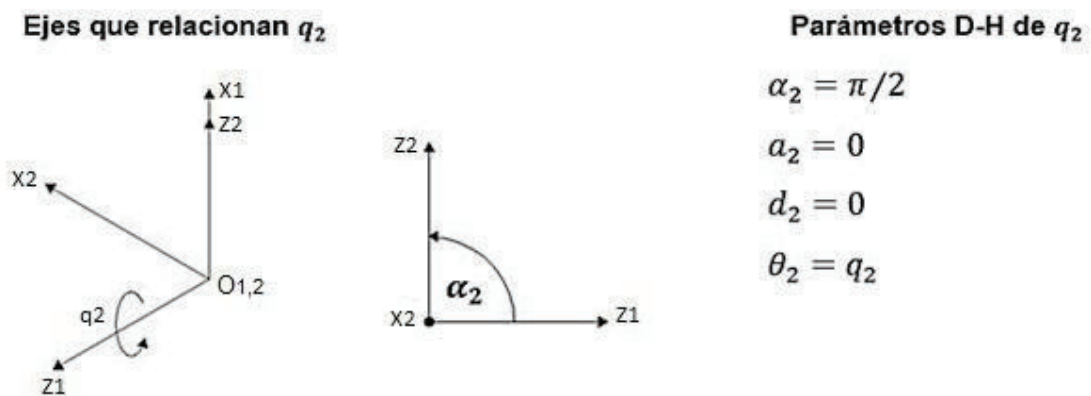


**Figura 2.9** Parámetros D-H del grado  $q_1$  del brazo UPE

Elaborado por las autoras, 2016

En forma análoga al análisis del primer grado de libertad, se procede con el resto de articulaciones de la cadena UPE, que se muestra desde la Figura 2.10 hasta la Figura 2.14.

$\{O_1 - X_1Y_1Z_1\} \rightarrow \{O_2 - X_2Y_2Z_2\}$  par U, segundo par R



**Figura 2.10** Parámetros D-H del grado  $q_2$  del brazo UPE

Elaborado por las autoras, 2016

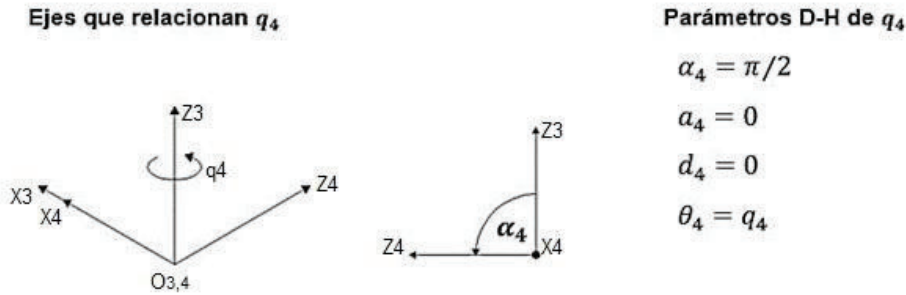
$\{O_2 - X_2 Y_2 Z_2\} \rightarrow \{O_3 - X_3 Y_3 Z_3\}$  par P



**Figura 2.11** Parámetros D-H del grado  $q_3$  del brazo UPE

Elaborado por las autoras, 2016

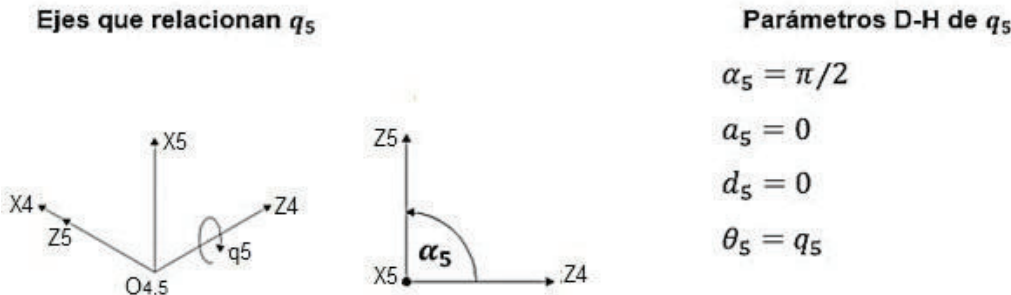
$\{O_3 - X_3 Y_3 Z_3\} \rightarrow \{O_4 - X_4 Y_4 Z_4\}$  par E, primer par R



**Figura 2.12** Parámetros D-H del grado  $q_4$  del brazo UPE

Elaborado por las autoras, 2016

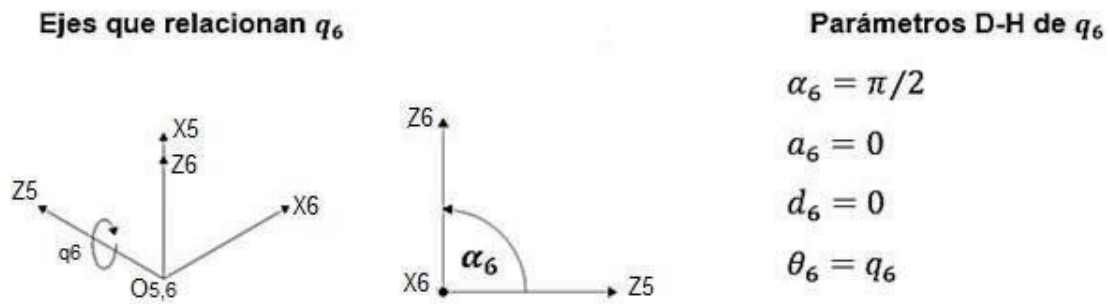
$\{O_4 - X_4 Y_4 Z_4\} \rightarrow \{O_5 - X_5 Y_5 Z_5\}$  par E, segundo par R



**Figura 2.13** Parámetros D-H del grado  $q_5$  del brazo UPE

Elaborado por las autoras, 2016

$\{O_5 - X_5 Y_5 Z_5\} \rightarrow \{O_6 - X_6 Y_6 Z_6\}$  par E, tercer par R



**Figura 2.14** Parámetros D-H del grado  $q_6$  del brazo UPE

Elaborado por las autoras, 2016

En la Tabla 2.3, se resumen los parámetros D–H de la cadena UPE, que se aplica para los tres brazos externos del robot.

**Tabla 2.3** Resumen de los parámetros D-H de las cadenas UPE

Grado de libertad $i$ -ésimo	$\alpha_i$	$a_i$	$d_i$	$\theta_i$
1	$-\pi/2$	0	0	$q_1$
2	$\pi/2$	0	0	$q_2$
3	0	0	$q_3$	0
4	$\pi/2$	0	0	$q_4$
5	$\pi/2$	0	0	$q_5$
6	$\pi/2$	0	0	$q_6$

Elaborado por las autoras 2016

## 2.4.2 ANÁLISIS DE CADENA RPU

La cadena RPU consta de cuatro grados de libertad. La articulación rotacional presenta un grado de libertad rotacional; la prismática, uno traslacional; y la universal, dos rotacionales perpendiculares entre sí.

Al igual que en la cadena UPE, después de enumerar cada eslabón de la cadena RPU, se colocan los ejes de coordenadas en cada articulación.

El sistema de coordenadas de la base  $O_0 - X_0Y_0Z_0$  coincide con el sistema  $O_f - X_fY_fZ_f$  de la plataforma fija y  $Z_0$  está ubicado en la dirección del eje de movimiento del grado de libertad 1. Los ejes  $Z_i$  se colocan en los ejes de movimiento de los grados de libertad  $i + 1$  ( $i = 1 \dots 3$ ). Como se lo observa en la Figura 2.15.

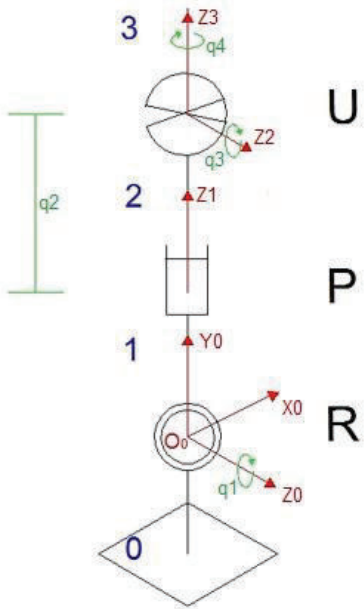


Figura 2.15 Ubicación de los ejes Z en la cadena RPU

Elaborado por las autoras, 2016

El origen de coordenadas i-ésimo se coloca en la intersección de los ejes  $Z_i$  y  $Z_{i-1}$  o en la intersección de las normales comunes a  $Z_i$  y  $Z_{i-1}$ , observado en la Figura 2.16.

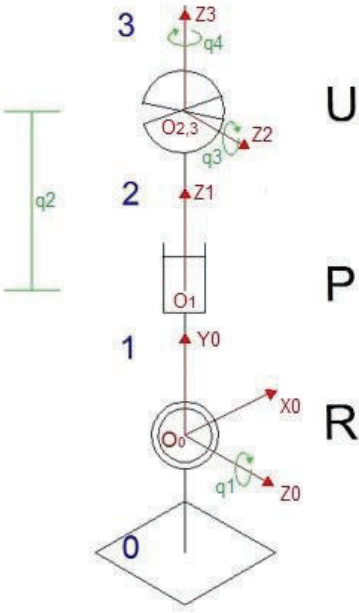


Figura 2.16 Definición del origen de coordenadas para la cadena RPU

Elaborado por las autoras, 2016

El eje  $X_i$  se ubica perpendicular al plano formado por los ejes  $Z_i$  y  $Z_{i-1}$ , esto se observa en la Figura 2.17.

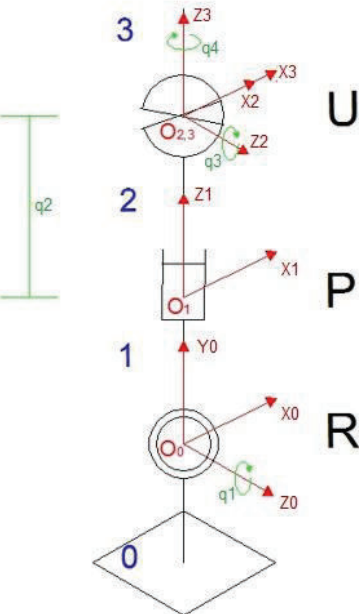
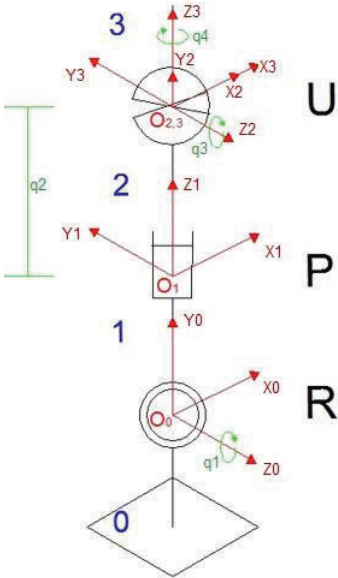


Figura 2.17 Definición del eje X en la cadena RPU

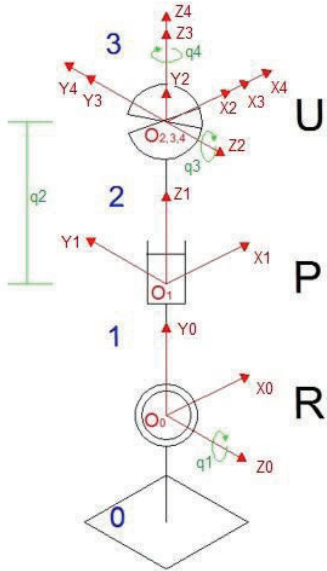
Elaborado por las autoras, 2016

Se establece el eje  $Y_i$  aplicando la regla de la mano derecha y completando el sistema de coordenadas. Mostrada en la Figura 2.18.



**Figura 2.18** Ley de la mano derecha para establecer el eje Y en la cadena RPU  
Elaborado por las autoras, 2016

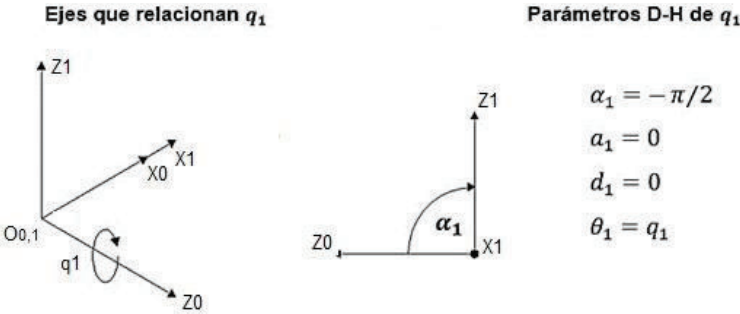
Por último, el sistema de coordenadas  $O_4 - X_4Y_4Z_4$  se hace coincidir con el eje de la plataforma móvil que es el último eslabón. La ubicación final de los ejes se presenta en la Figura 2.19.



**Figura 2.19** Ejes rotacionales y traslacionales de la cadena RPU  
Elaborado por las autoras, 2016

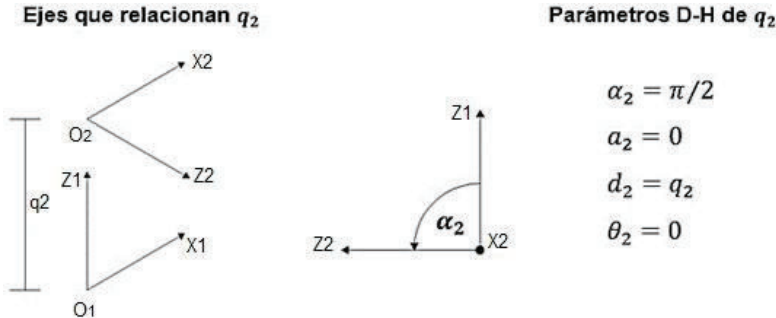
La obtención de los parámetros D-H para la cadena RPU se presentan desde la Figura 2.20 hasta la Figura 2.23.

$\{O_0 - X_0 Y_0 Z_0\} \rightarrow \{O_1 - X_1 Y_1 Z_1\}$  par R



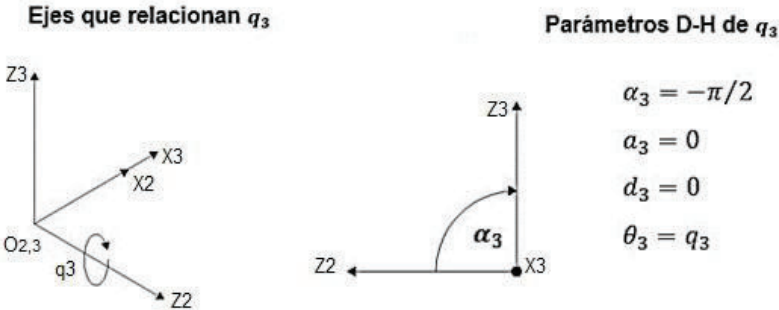
**Figura 2.20** Parámetros D-H del grado  $q_1$  del brazo RPU  
Elaborado por las autoras, 2016

$\{O_1 - X_1 Y_1 Z_1\} \rightarrow \{O_2 - X_2 Y_2 Z_2\}$  par P



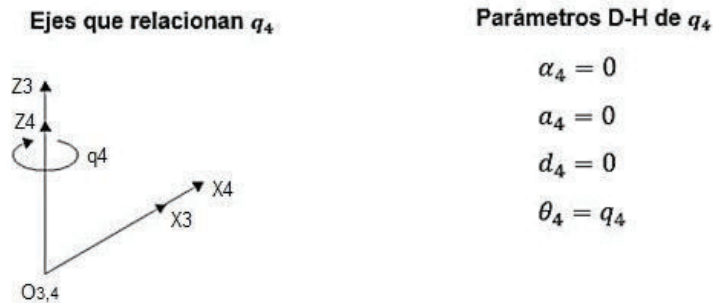
**Figura 2.21** Parámetros D-H del grado  $q_2$  del brazo RPU  
Elaborado por las autoras, 2016

$\{O_2 - X_2 Y_2 Z_2\} \rightarrow \{O_3 - X_3 Y_3 Z_3\}$  par U, primer par R



**Figura 2.22** Parámetros D-H del grado  $q_3$  del brazo RPU  
Elaborado por las autoras, 2016

$\{O_3 - X_3 Y_3 Z_3\} \rightarrow \{O_4 - X_4 Y_4 Z_4\}$  par U, segundo par R



**Figura 2.23** Parámetros D-H del grado  $q_4$  del brazo RPU

Elaborado por las autoras, 2016

En la Tabla 2.4, se resumen los parámetros D–H de la cadena RPU, del brazo central del robot.

**Tabla 2.4** Resumen de los parámetros D-H de la cadena RPU

Grado de libertad $i$ -ésima	$\alpha_i$	$a_i$	$d_i$	$\theta_i$
1	$-\pi/2$	0	0	$q_1$
2	$\pi/2$	0	$q_2$	0
3	$-\pi/2$	0	0	$q_3$
4	0	0	0	$q_4$

Elaborado por las autoras, 2016

Con los parámetros D-H es posible construir la matriz de transformación homogénea total, definida por la ecuación 1.1.

## 2.5 CINEMÁTICA INVERSA DEL ROBOT

### 2.5.1 POSICIÓN

La cinemática inversa establece las coordenadas generalizadas de las articulaciones  $\{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6\}$  en cada brazo, conocidas la posición y la orientación de la plataforma móvil  $\{x_m, y_m, z_m, \phi, \theta, \psi\}$ .

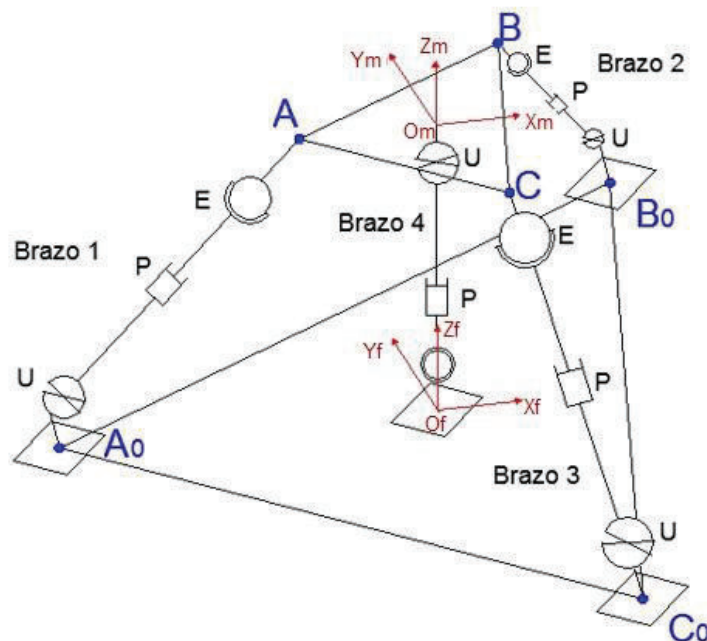


Las articulaciones se dividen en dos grupos. Las articulaciones  $q_1, q_2, q_3$  de los brazos UPE y  $q_1, q_2$  del brazo central RPU se consideran activas porque el movimiento del robot depende específicamente de ellas; por otra parte,  $q_4, q_5, q_6$  de los brazos UPE y  $q_3, q_4$  del brazo central RPU son pasivas, están ubicadas directamente bajo la plataforma móvil y su posición depende de las articulaciones activas. Estas articulaciones pasivas tienen una utilidad limitada, por lo que se las excluye de cálculos y simulación.

### 2.5.1.1 Ecuaciones de restricción

Para iniciar el análisis de las articulaciones activas, se numeran los brazos del 1 al 4. Esta numeración hace la diferencia de los grados de libertad ya que forma parte de la nomenclatura utilizada más adelante.

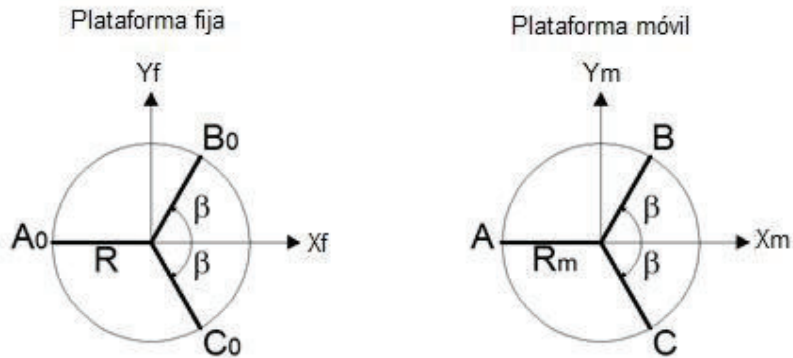
Para determinar las coordenadas de las articulaciones  $q_1, q_2, q_3$  de los brazos UPE y  $q_1, q_2$  del brazo RPU se analizan los puntos extremos de los brazos, donde los extremos de la plataforma móvil se conocen como las posiciones A, B, C y los extremos de la plataforma fija son  $A_0, B_0$  y  $C_0$ , como se muestra en la Figura 2.24.



**Figura 2.24** Determinación de los puntos de análisis del mecanismo del robot

Elaborado por las autoras, 2016

Tal como se muestra en la Figura 2.25, desde el origen de coordenadas de la plataforma fija, se define una distancia  $R$  a la que se encuentran las bases  $A_0, B_0, C_0$  de los brazos UPE, además  $B_0$  y  $C_0$  tienen un ángulo de inclinación  $\beta$  con el eje  $X$ . Por otra parte, en la plataforma móvil la distancia desde el origen hasta los extremos  $A, B, C$  de los brazos UPE es  $R_m$ .



**Figura 2.25** Distancias  $R$  y  $R_m$

Elaborado por las autoras, 2016

Para hallar la relación entre el sistema de referencia fijo  $\{O_f - X_f Y_f Z_f\}$  y el sistema ubicado en cada una de las bases de los brazos UPE ( $A_0, B_0$  y  $C_0$ ) se obtiene por separado la matriz de rotación, en la que  $\theta = 0^\circ$  y  $\alpha = 90^\circ$  y la matriz de posición, que para cada punto es diferente respecto al sistema de referencia fijo, siendo la distancia  $R$  y la dirección dependiente de  $\beta$ .

$${}^f R_p = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\cos \alpha \sin \theta & \sin \alpha \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \alpha \cos \theta & -\sin \alpha \cos \theta \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$\vec{r}_p = \begin{bmatrix} a \cos \theta \\ a \sin \theta \\ d \end{bmatrix}$$

Brazo UPE1

$${}^f R_{A_0 0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{r}_{O_f A_0} = \begin{bmatrix} -R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Brazo UPE2

$${}^f R_{B_0 0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{r}_{O_f B_0} = \begin{bmatrix} R \cos \beta \\ R \sin \beta \\ 0 \end{bmatrix}$$

Brazo UPE3

$${}^f R_{C_0 0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{r}_{O_f C_0} = \begin{bmatrix} R \cos \beta \\ -R \sin \beta \\ 0 \end{bmatrix}$$

La orientación de la plataforma móvil se toma respecto a los ejes fijos con la matriz de rotación de ángulos RPY (Roll – Pitch – Yaw), detallada en la ecuación 1.7.

El análisis de los grados de libertad se realiza en forma independiente para cada brazo. Es así que, en el Brazo 1 el problema se centra en definir la posición del punto final A. Para alcanzar este punto se pueden trazar dos trayectorias. Una a través de los puntos Of – Om – A y la segunda, desde el eje fijo a la base del brazo 1 hasta A Of – A0 – A, tal como se muestra en la Figura 2.26.

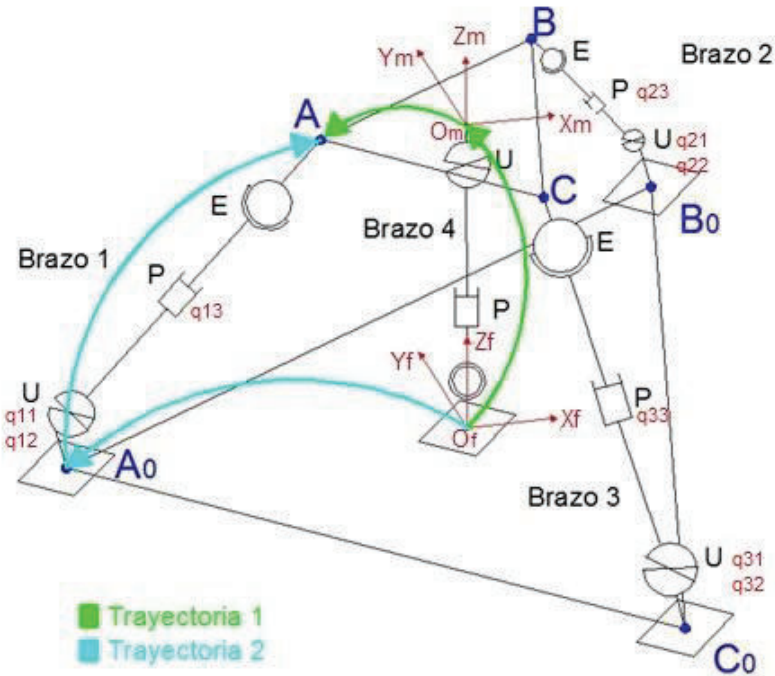


Figura 2.26 Trayectorias para definir la posición del punto A

Elaborado por las autoras, 2016

De este modo, se igualan los desplazamientos definidos por las trayectorias para alcanzar el punto A, las que se expresan:

$$\begin{bmatrix} x_m \\ y_m \\ z_m \end{bmatrix} + {}^f R_m \cdot \begin{bmatrix} -R_m \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = [{}^f R_{A_0} {}^0 R_1(q_{11}) {}^1 R_2(q_{12}) {}^2 R_3(q_{13})] + \begin{bmatrix} -R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De la trayectoria 1, el miembro izquierdo de la ecuación, se tiene:

$$\begin{bmatrix} x_m \\ y_m \\ z_m \end{bmatrix} + {}^f R_m \cdot \begin{bmatrix} -R_m \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} x_m \\ y_m \\ z_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & \text{sen } \phi \text{ sen } \theta \cos \psi - \cos \phi \text{ sen } \psi & \cos \phi \text{ sen } \theta \cos \psi + \text{sen } \phi \text{ sen } \psi \\ \cos \theta \text{ sen } \psi & \text{sen } \phi \text{ sen } \theta \text{ sen } \psi + \cos \phi \cos \psi & \cos \phi \text{ sen } \theta \text{ sen } \psi - \text{sen } \phi \cos \psi \\ -\text{sen } \theta & \text{sen } \phi \cos \theta & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -R_m \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_m \\ y_m \\ z_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -R_m \cos \theta \cos \psi \\ -R_m \cos \theta \text{ sen } \psi \\ R_m \text{ sen } \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_m - R_m \cos \theta \cos \psi \\ y_m - R_m \cos \theta \text{ sen } \psi \\ z_m + R_m \text{ sen } \theta \end{bmatrix}$$

De la trayectoria 2, miembro derecho, se tiene:

$$\begin{aligned} & [{}^f R_{A_0} {}^0 R_1(q_{11}) {}^1 R_2(q_{12}) {}^2 R_3(q_{13})] + \begin{bmatrix} -R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos q_{11} & 0 & -\text{sen } q_{11} \\ \text{sen } q_{11} & 0 & \cos q_{11} \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos q_{12} & 0 & \text{sen } q_{12} \\ \text{sen } q_{12} & 0 & -\cos q_{12} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_{13} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos q_{11} & 0 & -\text{sen } q_{11} \\ \text{sen } q_{11} & 0 & \cos q_{11} \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{13} \text{ sen } q_{12} \\ -q_{13} \cos q_{12} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{13} \cos q_{11} \text{ sen } q_{12} \\ q_{13} \text{ sen } q_{11} \text{ sen } q_{12} \\ q_{13} \cos q_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{13} \cos q_{11} \text{ sen } q_{12} \\ -q_{13} \cos q_{12} \\ q_{13} \text{ sen } q_{11} \text{ sen } q_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} q_{13} \cos q_{11} \text{ sen } q_{12} - R \\ -q_{13} \cos q_{12} \\ q_{13} \text{ sen } q_{11} \text{ sen } q_{12} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Igualando estos resultados para el punto A se obtiene:

$$\begin{bmatrix} x_m - R_m \cos \theta \cos \psi \\ y_m - R_m \cos \theta \sin \psi \\ z_m + R_m \sin \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{13} \cos q_{11} \sin q_{12} - R \\ -q_{13} \cos q_{12} \\ q_{13} \sin q_{11} \sin q_{12} \end{bmatrix}$$

En forma análoga, para B (Brazo 2):

$$\begin{bmatrix} x_m \\ y_m \\ z_m \end{bmatrix} + {}^f R_m \cdot \begin{bmatrix} R_m \cdot \cos \beta \\ R_m \cdot \sin \beta \\ 0 \end{bmatrix} = [{}^f R_{B_0 0} {}^0 R_1(q_{21}) {}^1 R_2(q_{22}) {}^2 R_3(q_{23})] + \begin{bmatrix} R \cos \beta \\ R \sin \beta \\ 0 \end{bmatrix}$$

Del miembro izquierdo se tiene:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} x_m \\ y_m \\ z_m \end{bmatrix} + {}^f R_m \cdot \begin{bmatrix} R_m \cdot \cos \beta \\ R_m \cdot \sin \beta \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_m \\ y_m \\ z_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & \sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi & \cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi \\ \cos \theta \sin \psi & \sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi & \cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi \\ -\sin \theta & \sin \phi \cos \theta & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_m \cdot \cos \beta \\ R_m \cdot \sin \beta \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_m \\ y_m \\ z_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_m \cos \beta \cos \theta \cos \psi + R_m \sin \beta (\sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi) \\ R_m \cos \beta \cos \theta \sin \psi + R_m \sin \beta (\sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi) \\ -R_m \cos \beta \sin \theta + R_m \sin \beta \sin \phi \cos \theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_m + R_m \cos \beta \cos \theta \cos \psi + R_m \sin \beta (\sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi) \\ y_m + R_m \cos \beta \cos \theta \sin \psi + R_m \sin \beta (\sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi) \\ z_m - R_m \cos \beta \sin \theta + R_m \sin \beta \sin \phi \cos \theta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Del miembro derecho:

$$\begin{aligned} & [{}^f R_{A_0 0} {}^0 R_1(q_{21}) {}^1 R_2(q_{22}) {}^2 R_3(q_{23})] + \begin{bmatrix} R \cos \beta \\ R \sin \beta \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos q_{21} & 0 & -\sin q_{21} \\ \sin q_{21} & 0 & \cos q_{21} \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos q_{22} & 0 & \sin q_{22} \\ \sin q_{22} & 0 & -\cos q_{22} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_{23} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R \cos \beta \\ R \sin \beta \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} q_{23} \cos q_{21} \sin q_{22} \\ -q_{23} \cos q_{22} \\ q_{23} \sin q_{21} \sin q_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R \cos \beta \\ R \sin \beta \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \cos \beta + q_{23} \cos q_{21} \sin q_{22} \\ R \sin \beta - q_{23} \cos q_{22} \\ q_{23} \sin q_{21} \sin q_{22} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Igualando los dos resultados:

$$\begin{bmatrix} x_m + R_m \cos \beta \cos \theta \cos \psi + R_m \operatorname{sen} \beta (\operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \cos \psi - \cos \phi \operatorname{sen} \psi) \\ y_m + R_m \cos \beta \cos \theta \operatorname{sen} \psi + R_m \operatorname{sen} \beta (\operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \psi + \cos \phi \cos \psi) \\ z_m - R_m \cos \beta \operatorname{sen} \theta + R_m \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \phi \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \cos \beta + q_{23} \cos q_{21} \operatorname{sen} q_{22} \\ R \operatorname{sen} \beta - q_{23} \cos q_{22} \\ q_{23} \operatorname{sen} q_{21} \operatorname{sen} q_{22} \end{bmatrix}$$

Para el punto C (Brazo 3):

$$\begin{bmatrix} x_m \\ y_m \\ z_m \end{bmatrix} + {}^f R_m \cdot \begin{bmatrix} R_m \cos \beta \\ -R_m \operatorname{sen} \beta \\ 0 \end{bmatrix} = [{}^f R_{C_0 0} {}^0 R_1(q_{31}) {}^1 R_2(q_{32}) {}^2 R_3(q_{33})] + \begin{bmatrix} R \cos \beta \\ -R \operatorname{sen} \beta \\ 0 \end{bmatrix}$$

Del miembro izquierdo se tiene:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} x_m \\ y_m \\ z_m \end{bmatrix} + {}^f R_m \cdot \begin{bmatrix} R_m \cos \beta \\ -R_m \operatorname{sen} \beta \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_m \\ y_m \\ z_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \cos \psi - \cos \phi \operatorname{sen} \psi & \cos \phi \operatorname{sen} \theta \cos \psi + \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \psi \\ \cos \theta \operatorname{sen} \psi & \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \psi + \cos \phi \cos \psi & \cos \phi \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \psi - \operatorname{sen} \phi \cos \psi \\ -\operatorname{sen} \theta & \operatorname{sen} \phi \cos \theta & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_m \cos \beta \\ -R_m \operatorname{sen} \beta \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_m \\ y_m \\ z_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_m \cos \beta \cos \theta \cos \psi - R_m \operatorname{sen} \beta (\operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \cos \psi - \cos \phi \operatorname{sen} \psi) \\ R_m \cos \beta \cos \theta \operatorname{sen} \psi - R_m \operatorname{sen} \beta (\operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \psi + \cos \phi \cos \psi) \\ -R_m \cos \beta \operatorname{sen} \theta - R_m \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \phi \cos \theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_m + R_m \cos \beta \cos \theta \cos \psi - R_m \operatorname{sen} \beta (\operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \cos \psi - \cos \phi \operatorname{sen} \psi) \\ y_m + R_m \cos \beta \cos \theta \operatorname{sen} \psi - R_m \operatorname{sen} \beta (\operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \psi + \cos \phi \cos \psi) \\ z_m - R_m \cos \beta \operatorname{sen} \theta - R_m \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \phi \cos \theta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

En el miembro derecho:

$$\begin{aligned} & [{}^f R_{A_0 0} {}^0 R_1(q_{31}) {}^1 R_2(q_{32}) {}^2 R_3(q_{33})] + \begin{bmatrix} R \cos \beta \\ -R \operatorname{sen} \beta \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos q_{31} & 0 & -\operatorname{sen} q_{31} \\ \operatorname{sen} q_{31} & 0 & \cos q_{31} \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos q_{32} & 0 & \operatorname{sen} q_{32} \\ \operatorname{sen} q_{32} & 0 & -\cos q_{32} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R \cos \beta \\ -R \operatorname{sen} \beta \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} q_{33} \cos q_{31} \operatorname{sen} q_{32} \\ -q_{33} \cos q_{32} \\ q_{33} \operatorname{sen} q_{31} \operatorname{sen} q_{32} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R \cos \beta \\ -R \operatorname{sen} \beta \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \cos \beta + q_{33} \cos q_{31} \operatorname{sen} q_{32} \\ -R \operatorname{sen} \beta - q_{33} \cos q_{32} \\ q_{33} \operatorname{sen} q_{31} \operatorname{sen} q_{32} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Igualando los dos resultados:

$$\begin{bmatrix} x_m + R_m \cos \beta \cos \theta \cos \psi - R_m \sin \beta (\sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi) \\ y_m + R_m \cos \beta \cos \theta \sin \psi - R_m \sin \beta (\sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi) \\ z_m - R_m \cos \beta \sin \theta - R_m \sin \beta \sin \phi \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \cos \beta + q_{33} \cos q_{31} \sin q_{32} \\ -R \sin \beta - q_{33} \cos q_{32} \\ q_{33} \sin q_{31} \sin q_{32} \end{bmatrix}$$

Para el brazo RPU las matrices de rotación y posición son:

$${}^f R_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \vec{r}_{o_f o_f} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Las coordenadas se definen como:

$$\begin{bmatrix} x_m \\ y_m \\ z_m \end{bmatrix} = [{}^f R_0 {}^0 R_1(q_{41}) {}^1 R_2(q_{42})]$$

$$\begin{bmatrix} x_m \\ y_m \\ z_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos q_{41} & 0 & -\sin q_{41} \\ \sin q_{41} & 0 & \cos q_{41} \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_{42} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_m \\ y_m \\ z_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -q_{42} \sin q_{41} \\ q_{42} \cos q_{41} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_m \\ y_m \\ z_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -q_{42} \sin q_{41} \\ 0 \\ q_{42} \cos q_{41} \end{bmatrix}$$

En el brazo RPU se presentan las restricciones para el movimiento con las que se condiciona la posición final de la plataforma móvil y se establecen los cuatro grados de libertad del robot. Las ecuaciones para  $q_{41}$  y  $q_{42}$  del brazo RPU son:

$$x_m + q_{42} \sin q_{41} = 0$$

$$y_m = 0$$

$$z_m - q_{42} \cos q_{41} = 0$$

Como  $y_m = 0$  entonces los movimientos traslacionales que tiene en robot son respecto al eje X y al eje Z. Con esta condición, se desarrollan las ecuaciones de los brazos UPE.

Las ecuaciones para  $q_{11}$ ,  $q_{12}$  y  $q_{13}$  del brazo UPE 1 son

$$x_m - R_m \cos \theta \cos \psi = q_{13} \cos q_{11} \sin q_{12} - R$$

$$-R_m \cos \theta \sin \psi = -q_{13} \cos q_{12}$$

$$z_m + R_m \sin \theta = q_{13} \sin q_{11} \sin q_{12}$$

Con estas ecuaciones se establece que  $\phi = 0^\circ$

Las ecuaciones para  $q_{21}$ ,  $q_{22}$  y  $q_{23}$  del brazo UPE 2 son:

$$x_m + R_m \cos \beta \cos \theta \cos \psi - R_m \sin \beta \sin \psi = R \cos \beta + q_{23} \cos q_{21} \sin q_{22}$$

$$R_m \cos \beta \cos \theta \sin \psi + R_m \sin \beta \cos \psi = R \sin \beta - q_{23} \cos q_{22}$$

$$z_m - R_m \cos \beta \sin \theta = q_{23} \sin q_{21} \sin q_{22}$$

Las ecuaciones para  $q_{31}$ ,  $q_{32}$  y  $q_{33}$  del brazo UPE 3 son:

$$x_m + R_m \cos \beta \cos \theta \cos \psi + R_m \sin \beta \sin \psi = R \cos \beta + q_{33} \cos q_{31} \sin q_{32}$$

$$R_m \cos \beta \cos \theta \sin \psi - R_m \sin \beta \cos \psi = -R \sin \beta - q_{33} \cos q_{32}$$

$$z_m - R_m \cos \beta \sin \theta = q_{33} \sin q_{31} \sin q_{32}$$

En resumen, las ecuaciones utilizadas para resolver la cinemática inversa son:

$$\Phi_1 = x_m - R_m \cos \theta \cos \psi - q_{13} \cos q_{11} \sin q_{12} + R$$

$$\Phi_2 = R_m \cos \theta \sin \psi - q_{13} \cos q_{12}$$

$$\Phi_3 = z_m + R_m \sin \theta - q_{13} \sin q_{11} \sin q_{12}$$

$$\Phi_4 = x_m + R_m \cos \beta \cos \theta \cos \psi - R_m \sin \beta \sin \psi - R \cos \beta - q_{23} \cos q_{21} \sin q_{22}$$

$$\Phi_5 = R_m \cos \beta \cos \theta \sin \psi + R_m \sin \beta \cos \psi - R \sin \beta + q_{23} \cos q_{22}$$

$$\Phi_6 = z_m - R_m \cos \beta \sin \theta - q_{23} \sin q_{21} \sin q_{22}$$

$$\Phi_7 = x_m + R_m \cos \beta \cos \theta \cos \psi + R_m \sin \beta \sin \psi - R \cos \beta - q_{33} \cos q_{31} \sin q_{32}$$

$$\Phi_8 = R_m \cos \beta \cos \theta \sin \psi - R_m \sin \beta \cos \psi + R \sin \beta + q_{33} \cos q_{32}$$

$$\Phi_9 = z_m - R_m \cos \beta \sin \theta - q_{33} \sin q_{31} \sin q_{32}$$

$$\Phi_{10} = x_m + q_{42} \sin q_{41}$$

$$\Phi_{11} = z_m - q_{42} \cos q_{41}$$



El sistema de ecuaciones no lineales de la cinemática inversa se resuelve utilizando el programa MATLAB.

## 2.5.2 VELOCIDAD

El problema inverso de velocidad se resuelve para las articulaciones activas de los brazos UPE y RPU. La velocidad de la plataforma móvil viene dada por  $\dot{x}_m, \dot{y}_m, \dot{z}_m$  y la velocidad angular por  $\vec{\omega}_m = [\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z]^T$ .

Por una parte, la velocidad en estos puntos A, B, C, representados en forma general como P, se obtiene derivando el vector posición respecto al tiempo:

$$\vec{r}_{P_0P} = [{}^fR_{P_0} {}^0R_1(q_1) {}^1R_2(q_2) {}^2R_3(q_3)] = \begin{bmatrix} q_3 \cos q_1 \sin q_2 \\ -q_3 \cos q_2 \\ q_3 \sin q_1 \sin q_2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}_P = \frac{\partial \vec{r}_{P_0P}}{\partial q_1} \cdot \dot{q}_1 + \frac{\partial \vec{r}_{P_0P}}{\partial q_2} \cdot \dot{q}_2 + \frac{\partial \vec{r}_{P_0P}}{\partial q_3} \cdot \dot{q}_3 \quad [2.2]$$

$$= \begin{bmatrix} -q_3 \sin q_1 \sin q_2 \\ 0 \\ q_3 \cos q_1 \sin q_2 \end{bmatrix} \dot{q}_1 + \begin{bmatrix} q_3 \cos q_1 \cos q_2 \\ q_3 \sin q_2 \\ q_3 \sin q_1 \cos q_2 \end{bmatrix} \dot{q}_2 + \begin{bmatrix} \cos q_1 \sin q_2 \\ \cos q_2 \\ \sin q_1 \sin q_2 \end{bmatrix} \dot{q}_3$$

Por otra parte, la velocidad angular se relaciona con las derivadas temporales de los ángulos RPY, donde se establece la orientación de la plataforma móvil, siendo

$$\vec{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + R_Z(\psi) \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + R_Z(\psi)R_Y(\theta) \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como en el robot  $\dot{\phi} = 0$ , entonces:

$$\vec{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\theta} \sin \psi \\ \dot{\theta} \cos \psi \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

La velocidad de los puntos A, B y C, representados en forma general por P, en la plataforma móvil está dada por,

$$\vec{v}_P = \begin{bmatrix} \dot{x}_m \\ \dot{y}_m \\ \dot{z}_m \end{bmatrix} + \vec{\omega} \times ({}^f R_m \vec{r}_{O_f P_0}) \quad [2.3]$$

Donde,  ${}^f R_m$  con  $\phi = 0^\circ$  es

$${}^f R_m = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & -\sin \psi & \sin \theta \cos \psi \\ \cos \theta \sin \psi & \cos \psi & \sin \theta \sin \psi \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad [2.4]$$

Utilizando la ecuación 2.2, en el caso del brazo 1 se tiene:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_m \\ 0 \\ \dot{z}_m \end{bmatrix} + \vec{\omega} \times ({}^f R_m \vec{r}_{O_f A_0}) = \begin{bmatrix} \dot{x}_m \\ 0 \\ \dot{z}_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\dot{\theta} \sin \psi \\ \dot{\theta} \cos \psi \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & -\sin \psi & \sin \theta \cos \psi \\ \cos \theta \sin \psi & \cos \psi & \sin \theta \sin \psi \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -R_m \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Al igualar los resultados de las ecuaciones generales 2.2 y 2.3, se obtienen las expresiones de velocidades generalizadas:

$$\dot{q}_{11} = \frac{(\dot{z}_m + \dot{\theta} R_m \cos \theta) \cos q_{11} - (\dot{x}_m + R_m \dot{\theta} \cos \psi \sin \theta + \dot{\psi} R_m \cos \theta \sin \psi) \sin q_{11}}{q_{13} \sin q_{12}}$$

$$\dot{q}_{12} = \frac{(\dot{x}_m + R_m \dot{\theta} \cos \psi \sin \theta + \dot{\psi} R_m \cos \theta \sin \psi) \cos q_{11} \cos q_{12}}{q_{13} \cos 2q_{12}} + \frac{(\dot{z}_m + \dot{\theta} R_m \cos \theta) \sin q_{11} \cos q_{12}}{q_{13} \cos 2q_{12}} + \frac{(\dot{\theta} \sin \psi R_m \sin \theta + \dot{\psi} R_m \cos \theta \cos \psi) \sin q_{12}}{q_{13} \cos 2q_{12}}$$

$$\dot{q}_{13} = -\frac{(\dot{\theta} \sin \psi R_m \sin \theta + \dot{\psi} R_m \cos \theta \cos \psi) \cos q_{12}}{\cos 2q_{12}} - \frac{(\dot{x}_m + R_m \dot{\theta} \cos \psi \sin \theta + \dot{\psi} R_m \cos \theta \sin \psi) \cos q_{11} \sin q_{12}}{\cos 2q_{12}} - \frac{(\dot{z}_m + \dot{\theta} R_m \cos \theta) \sin q_{11} \sin q_{12}}{\cos 2q_{12}}$$

Para el brazo 2:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_m \\ 0 \\ \dot{z}_m \end{bmatrix} + \vec{\omega} \times ({}^f R_m \vec{r}_{O_f B_0}) = \begin{bmatrix} \dot{x}_m \\ 0 \\ \dot{z}_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\dot{\theta} \sin \psi \\ \dot{\theta} \cos \psi \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & -\sin \psi & \sin \theta \cos \psi \\ \cos \theta \sin \psi & \cos \psi & \sin \theta \sin \psi \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_m \cos \beta \\ R_m \sin \beta \\ 0 \end{bmatrix}$$

Al igualar los dos vectores se obtienen las expresiones de velocidades generalizadas.

$$\begin{aligned} \dot{q}_{21} = & \frac{(\dot{z}_m + \dot{\theta} R_m \cos \psi (\sin \beta \sin \psi - \cos \beta \cos \theta \cos \psi)) \cos q_{21}}{q_{23} \sin q_{22}} \\ & - \frac{\dot{\theta} R_m \sin \psi (\sin \beta \cos \psi - \cos \beta \cos \theta \sin \psi) \cos q_{21}}{q_{23} \sin q_{22}} \\ & + \frac{(\dot{x}_m - \dot{\psi} R_m (\sin \beta \cos \psi + \cos \beta \cos \theta \sin \psi) - \dot{\theta} R_m \cos \beta \cos \psi \sin \theta) \sin q_{21}}{q_{23} \sin q_{22}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{q}_{22} = & \frac{(\dot{x}_m - \dot{\psi} R_m (\sin \beta \cos \psi + \cos \beta \cos \theta \sin \psi) - \dot{\theta} R_m \cos \beta \cos \psi \sin \theta) \cos q_{21} \cos q_{22}}{q_{23} \cos 2q_{22}} \\ & + \frac{(\dot{z}_m + \dot{\theta} R_m \cos \psi (\sin \beta \sin \psi - \cos \beta \cos \theta \cos \psi)) \sin q_{21} \cos q_{22}}{q_{23} \cos 2q_{22}} \\ & - \frac{\dot{\theta} R_m \sin \psi (\sin \beta \cos \psi - \cos \beta \cos \theta \sin \psi) \sin q_{21} \cos q_{22}}{q_{23} \cos 2q_{22}} \\ & + \frac{\sin q_{22} (\dot{\psi} R_m (\sin \beta \sin \psi - \cos \beta \cos \theta \cos \psi) + \dot{\theta} R_m \cos \beta \sin \psi \sin \theta)}{q_{23} \cos 2q_{22}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{q}_{23} = & - \frac{(\dot{x}_m - \dot{\psi} R_m (\sin \beta \cos \psi + \cos \beta \cos \theta \sin \psi) - \dot{\theta} R_m \cos \beta \cos \psi \sin \theta) \cos q_{21} \sin q_{22}}{\cos 2q_{22}} \\ & - \frac{(\dot{z}_m + \dot{\theta} R_m \cos \psi (\sin \beta \sin \psi - \cos \beta \cos \theta \cos \psi)) \sin q_{21} \sin q_{22}}{\cos 2q_{22}} \\ & + \frac{\dot{\theta} R_m \sin \psi (\sin \beta \cos \psi - \cos \beta \cos \theta \sin \psi) \sin q_{21} \sin q_{22}}{\cos 2q_{22}} \\ & - \frac{\cos q_{22} (\dot{\psi} R_m (\sin \beta \sin \psi - \cos \beta \cos \theta \cos \psi) + \dot{\theta} R_m \cos \beta \sin \psi \sin \theta)}{\cos 2q_{22}} \end{aligned}$$

Para el brazo 3:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_m \\ 0 \\ \dot{z}_m \end{bmatrix} + \vec{\omega} \times ({}^f R_m \vec{r}_{O_f C_0}) = \begin{bmatrix} \dot{x}_m \\ 0 \\ \dot{z}_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\dot{\theta} \operatorname{sen} \psi \\ \dot{\theta} \cos \psi \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & -\operatorname{sen} \psi & \operatorname{sen} \theta \cos \psi \\ \cos \theta \operatorname{sen} \psi & \cos \psi & \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \psi \\ -\operatorname{sen} \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_m \cos \beta \\ -R_m \operatorname{sen} \beta \\ 0 \end{bmatrix}$$

Al igualar los dos vectores se obtienen las expresiones de velocidades generalizadas,

$$\begin{aligned} \dot{q}_{31} = & -\frac{(\dot{z}_m - \dot{\theta} R_m \cos \psi (\operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \psi + \cos \beta \cos \theta \cos \psi)) \cos q_{31}}{q_{33} \operatorname{sen} q_{32}} \\ & + \frac{\dot{\theta} R_m \operatorname{sen} \psi (\operatorname{sen} \beta \cos \psi - \cos \beta \cos \theta \operatorname{sen} \psi) \cos q_{31}}{q_{33} \operatorname{sen} q_{32}} \\ & + \frac{(\dot{x}_m - \dot{\psi} R_m (-\operatorname{sen} \beta \cos \psi + \cos \beta \cos \theta \operatorname{sen} \psi) - \dot{\theta} R_m \cos \beta \cos \psi \operatorname{sen} \theta) \operatorname{sen} q_{31}}{q_{33} \operatorname{sen} q_{32}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{q}_{32} = & \frac{(\dot{x}_m - \dot{\psi} R_m (-\operatorname{sen} \beta \cos \psi + \cos \beta \cos \theta \operatorname{sen} \psi) - \dot{\theta} R_m \cos \beta \cos \psi \operatorname{sen} \theta) \cos q_{31} \cos q_{32}}{q_{33} \cos 2q_{32}} \\ & + \frac{(\dot{z}_m - \dot{\theta} R_m \cos \psi (\operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \psi + \cos \beta \cos \theta \cos \psi)) \operatorname{sen} q_{31} \cos q_{32}}{q_{33} \cos 2q_{32}} \\ & - \frac{\dot{\theta} R_m \operatorname{sen} \psi (\operatorname{sen} \beta \cos \psi - \cos \beta \cos \theta \operatorname{sen} \psi) \operatorname{sen} q_{31} \cos q_{32}}{q_{33} \cos 2q_{32}} \\ & + \frac{\operatorname{sen} q_{32} (\dot{\psi} R_m (\operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \psi - \cos \beta \cos \theta \cos \psi) + \dot{\theta} R_m \cos \beta \operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \theta)}{q_{33} \cos 2q_{32}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{q}_{33} = & -\frac{(\dot{x}_m - \dot{\psi} R_m (-\operatorname{sen} \beta \cos \psi + \cos \beta \cos \theta \operatorname{sen} \psi) - \dot{\theta} R_m \cos \beta \cos \psi \operatorname{sen} \theta) \cos q_{31} \operatorname{sen} q_{32}}{\cos 2q_{32}} \\ & + \frac{(\dot{z}_m - \dot{\theta} R_m \cos \psi (\operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \psi + \cos \beta \cos \theta \cos \psi)) \operatorname{sen} q_{31} \operatorname{sen} q_{32}}{\cos 2q_{32}} \\ & - \frac{\dot{\theta} R_m \operatorname{sen} \psi (\operatorname{sen} \beta \cos \psi - \cos \beta \cos \theta \operatorname{sen} \psi) \operatorname{sen} q_{31} \operatorname{sen} q_{32}}{\cos 2q_{32}} \\ & - \frac{\cos q_{32} (\dot{\psi} R_m (\operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \psi - \cos \beta \cos \theta \cos \psi) + \dot{\theta} R_m \cos \beta \operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \theta)}{\cos 2q_{32}} \end{aligned}$$

Para el brazo central:

$$\vec{r}_{O_f O_m}(q_{41}, q_{42}) = [{}^f R_{A_0 0} {}^0 R_1(q_1) {}^1 R_2(q_2) {}^2 R_3(q_3)] = \begin{bmatrix} -q_{42} \operatorname{sen} q_{41} \\ 0 \\ q_{42} \operatorname{cos} q_{41} \end{bmatrix}$$

Y la derivada respecto al tiempo es,

$$\vec{v}_{O_m} = \frac{\partial \vec{r}_{O_f O_m}(q_{41}, q_{42})}{\partial q_{41}} \cdot \dot{q}_{41} + \frac{\partial \vec{r}_{O_f O_m}(q_{41}, q_{42})}{\partial q_{42}} \cdot \dot{q}_{42} = \begin{bmatrix} \dot{x}_m \\ 0 \\ \dot{z}_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -q_{42} \operatorname{cos} q_{41} \\ 0 \\ -q_{42} \operatorname{sen} q_{41} \end{bmatrix} \dot{q}_{41} + \begin{bmatrix} -\operatorname{sen} q_{41} \\ 0 \\ \operatorname{cos} q_{41} \end{bmatrix} \dot{q}_{42} = \begin{bmatrix} \dot{x}_m \\ 0 \\ \dot{z}_m \end{bmatrix}$$

Resolviendo las ecuaciones se tiene:

$$\dot{q}_{41} = -\frac{\dot{x}_m \operatorname{cos} q_{41} + \dot{z}_m \operatorname{sen} q_{41}}{q_{42}}$$

$$\dot{q}_{42} = -\dot{x}_m \operatorname{sen} q_{41} + \dot{z}_m \operatorname{cos} q_{41}$$

### 2.5.3 ACELERACIÓN

Se conoce la aceleración del origen del sistema de coordenadas de la plataforma móvil  $\ddot{x}_m, 0, \ddot{z}_m$  y las segundas derivadas de los ángulos RPY  $0, \ddot{\theta}, \ddot{\psi}$ , respecto al tiempo. La aceleración angular de la barra es:

$$\vec{\omega} = \begin{bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\ddot{\theta} \operatorname{sen} \psi - \dot{\theta} \dot{\psi} \operatorname{cos} \psi \\ \ddot{\theta} \operatorname{cos} \psi - \dot{\theta} \dot{\psi} \operatorname{sen} \psi \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix}$$

La aceleración de los puntos significativos de la plataforma móvil está dada por

$$\vec{a}_P = \begin{bmatrix} \ddot{x}_m \\ 0 \\ \ddot{z}_m \end{bmatrix} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times ({}^f R_m \cdot {}^m \vec{r}_{O_m P})) + \vec{\omega} \times ({}^f R_m \cdot {}^m \vec{r}_{O_m P}) \quad [2.5]$$

Además, a partir de las expresiones de la velocidad dadas en su forma general en la ecuación 2.2, derivando respecto al tiempo resulta:

$$\begin{aligned} \vec{a}_P &= \frac{\partial \vec{v}_P}{\partial q_1} \cdot \dot{q}_1 + \frac{\partial d\vec{r}_{P_0P}}{\partial q_1} \cdot \ddot{q}_1 + \frac{\partial \vec{v}_P}{\partial q_2} \cdot \dot{q}_2 + \frac{\partial d\vec{r}_{P_0P}}{\partial q_2} \cdot \ddot{q}_2 + \frac{\partial \vec{v}_P}{\partial q_3} \cdot \dot{q}_3 + \frac{\partial d\vec{r}_{P_0P}}{\partial q_3} \cdot \ddot{q}_3 \quad [2.6] \\ &= \begin{bmatrix} -q_3 \cos q_1 \sin q_2 \\ 0 \\ -q_3 \sin q_1 \sin q_2 \end{bmatrix} \dot{q}_1 + \begin{bmatrix} -q_3 \sin q_1 \sin q_2 \\ 0 \\ q_3 \cos q_1 \sin q_2 \end{bmatrix} \ddot{q}_1 + \begin{bmatrix} -q_3 \cos q_1 \sin q_2 \\ q_3 \cos q_2 \\ -q_3 \sin q_1 \sin q_2 \end{bmatrix} \dot{q}_2 \\ &\quad + \begin{bmatrix} q_3 \cos q_1 \cos q_2 \\ q_3 \sin q_2 \\ q_3 \sin q_1 \cos q_2 \end{bmatrix} \ddot{q}_2 + \begin{bmatrix} \cos q_1 \sin q_2 \\ \cos q_2 \\ \sin q_1 \sin q_2 \end{bmatrix} \dot{q}_3 \end{aligned}$$

Igualando ambas expresiones se obtienen tres ecuaciones con tres incógnitas  $\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \ddot{q}_3$  para los brazos 1, 2 y 3 y un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas  $\dot{q}_1, \dot{q}_2$  para el brazo 4.

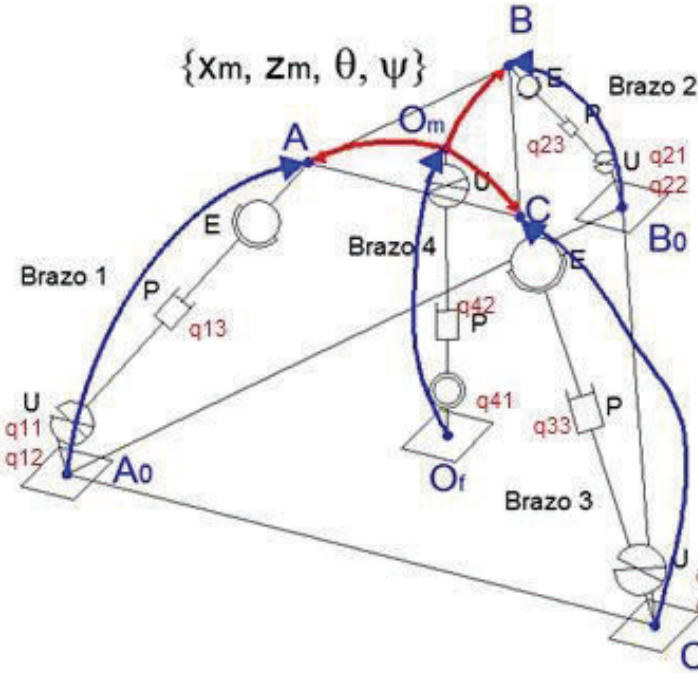
## 2.6 CINEMÁTICA DIRECTA DEL ROBOT

### 2.6.1 POSICIÓN

La cinemática directa establece las coordenadas generalizadas  $\{x_m, y_m, z_m, \phi, \theta, \psi\}$  de la plataforma móvil, conocidas la posición y la orientación de las articulaciones.  $\{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6\}$ .

Una vez obtenido los parámetros de Denavit – Hartenberg se procede a construir las matrices de transformación para cada parámetro, cuyo producto sucesivo representa la transformación homogénea de cada brazo.

La localización del sistema de referencia móvil está dado por las coordenadas  $x_m, z_m, \theta$  y  $\psi$ , y las coordenadas generalizadas de los grados de libertad, correspondientes a las tres cadena UPE y la RPU se observa en la Figura 2.27.



**Figura 2.27** Referencia del sistema móvil y cadenas para la cinemática directa

Elaborado por las autoras 2016

De cada cadena los grados de libertad se representan como  $q_{rs}$  donde  $r$  representa la cadena y  $s$  los parámetros de Denavit – Hartenberg.

**2.6.1.1 Ecuaciones de restricción**

Para obtener las ecuaciones de restricción de cada punto de unión con la plataforma móvil, se consideran las siguientes trayectorias de cierre, cada una de las cadenas tendrá las siguientes condiciones vectoriales.

Como se indicó anteriormente las articulaciones que se encuentran sujetas a la plataforma móvil dependen de las demás por lo que se obtienen 3 ecuaciones de restricción por cada cadena UPE y 2 por la cadena RPU, dando un total de 11 ecuaciones de restricción.

$$\vec{r}_{A_0A}(q_{11}, q_{12}, q_{13}) + \begin{bmatrix} -R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_m \\ 0 \\ z_m \end{bmatrix} + {}^f R_m(\theta, \psi) \begin{bmatrix} -R_m \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{r}_{B_0B} (q_{21}, q_{22}, q_{23}) + \begin{bmatrix} R \cos \beta \\ R \operatorname{sen} \beta \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_m \\ 0 \\ z_m \end{bmatrix} + {}^f R_m(\theta, \psi) \begin{bmatrix} R_m \cos \beta \\ R_m \operatorname{sen} \beta \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{r}_{C_0C} (q_{31}, q_{32}, q_{33}) + \begin{bmatrix} R \cos \beta \\ -R \operatorname{sen} \beta \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_m \\ 0 \\ z_m \end{bmatrix} + {}^f R_m(\theta, \psi) \begin{bmatrix} R_m \cos \beta \\ -R_m \operatorname{sen} \beta \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{r}_{O_f O_m} (q_{41}, q_{42}) = \begin{bmatrix} x_m \\ 0 \\ z_m \end{bmatrix}$$

Para analizar la rotación de la plataforma móvil se toma en cuenta los ángulos que giran en los diferentes ejes obteniendo la matriz dada en la ecuación 1.7.

El ángulo de giro  $\phi = 0^\circ$ , la matriz queda:

$${}^f R_m = R_Z(\psi) \cdot R_Y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & -\operatorname{sen} \psi & \operatorname{sen} \theta \cos \psi \\ \cos \theta \operatorname{sen} \psi & \cos \psi & \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \psi \\ -\operatorname{sen} \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Desarrollando las condiciones vectoriales descritas, se obtiene

$$\vec{r}_{A_0A} (q_{11}, q_{12}, q_{13}) = [{}^f R_{A_0} {}^0 R_1(q_{11}) {}^1 R_2(q_{12}) {}^2 R_3(q_{13})]$$

$$\vec{r}_{A_0A} (q_{11}, q_{12}, q_{13}) = \begin{bmatrix} q_{13} \operatorname{sen} q_{12} \cos q_{11} \\ -q_{13} \cos q_{12} \\ q_{13} \operatorname{sen} q_{12} \operatorname{sen} q_{11} \end{bmatrix}$$

Se procede de igual forma para los demás brazos UPE.

$$\vec{r}_{B_0B} (q_{21}, q_{22}, q_{23}) = \begin{bmatrix} q_{23} \operatorname{sen} q_{22} \cos q_{21} \\ -q_{23} \cos q_{22} \\ q_{23} \operatorname{sen} q_{22} \operatorname{sen} q_{21} \end{bmatrix}$$

$$\vec{r}_{C_0C} (q_{31}, q_{32}, q_{33}) = \begin{bmatrix} q_{33} \operatorname{sen} q_{32} \cos q_{31} \\ -q_{33} \cos q_{32} \\ q_{33} \operatorname{sen} q_{32} \operatorname{sen} q_{31} \end{bmatrix}$$



En el brazo RPU:

$$\vec{r}_{O_f O_m}(q_{41}, q_{42}) = [{}^f R_0 {}^0 R_1(q_{41}) {}^1 R_2(q_{42})]$$

$$\vec{r}_{O_f O_m}(q_{41}, q_{42}) = \begin{bmatrix} -q_{42} \operatorname{sen} q_{41} \\ 0 \\ q_{42} \operatorname{cos} q_{41} \end{bmatrix}$$

Desarrollando las ecuaciones se tiene:

$$\Phi_1 = q_{13} \operatorname{cos} q_{11} \operatorname{sen} q_{12} - R - x_m + R_m \operatorname{cos} \theta \operatorname{cos} \psi$$

$$\Phi_2 = -q_{13} \operatorname{cos} q_{12} - R_m \operatorname{cos} \theta \operatorname{sen} \psi$$

$$\Phi_3 = q_{13} \operatorname{sen} q_{12} \operatorname{sen} q_{11} - z_m + R_m \operatorname{sen} \theta$$

$$\Phi_4 = q_{23} \operatorname{cos} q_{21} \operatorname{sen} q_{22} + R \operatorname{cos} \beta - x_m - R_m \operatorname{cos} \beta \operatorname{cos} \theta \operatorname{cos} \psi + R_m \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \psi$$

$$\Phi_5 = -q_{23} \operatorname{cos} q_{22} - R \operatorname{sen} \beta - R_m \operatorname{cos} \beta \operatorname{cos} \theta \operatorname{sen} \psi - R_m \operatorname{sen} \beta \operatorname{cos} \psi$$

$$\Phi_6 = q_{23} \operatorname{sen} q_{22} \operatorname{sen} q_{21} - z_m + R_m \operatorname{cos} \beta \operatorname{sen} \theta$$

$$\Phi_7 = q_{33} \operatorname{cos} q_{31} \operatorname{sen} q_{32} + R \operatorname{cos} \beta - x_m - R_m \operatorname{cos} \beta \operatorname{cos} \theta \operatorname{cos} \psi - R_m \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \psi$$

$$\Phi_8 = -q_{33} \operatorname{cos} q_{32} - R \operatorname{sen} \beta - R_m \operatorname{cos} \beta \operatorname{cos} \theta \operatorname{sen} \psi + R_m \operatorname{sen} \beta \operatorname{cos} \psi$$

$$\Phi_9 = q_{33} \operatorname{sen} q_{31} \operatorname{sen} q_{32} - z_m + R_m \operatorname{cos} \beta \operatorname{sen} \theta$$

$$\Phi_{10} = -q_{42} \operatorname{sen} q_{41} - x_m$$

$$\Phi_{11} = q_{42} \operatorname{cos} q_{41} - z_m$$

Las ecuaciones obtenidas se las iguala a cero para tener un sistema homogéneo del cual se obtienen 11 ecuaciones no lineales con 11 incógnitas, las que se han definido para tener un sistema con solución única,  $\Phi_i(q_{11}, q_{12}, q_{21}, q_{22}, q_{31}, q_{32}, q_{41}, x_m, z_m, \theta, \psi) = 0, i = 1, 2, \dots, 11$ .

Los grados de libertad prismáticos  $q_{13}, q_{23}, q_{33}, q_{42}$  se los encuentra por la cinemática inversa y son considerados valores de entrada para la cinemática directa. La solución de la posición de la plataforma móvil y los grados de libertad rotacionales se obtiene utilizando software matemático.

## 2.6.2 VELOCIDAD

La obtención de las velocidades en la cinemática directa pretende, a partir de la posición y las velocidades en los actuadores prismáticos, determinar la velocidad de la plataforma móvil; esto es, conocidos  $\dot{q}_{13}, \dot{q}_{23}, \dot{q}_{33}, \dot{q}_{42}$  se va a obtener  $\dot{x}_m, \dot{z}_m, \dot{\theta}, \dot{\psi}$ .

Se inicia con las ecuaciones de restricción,  $\Phi_i(q_{11}, q_{12}, q_{13}, q_{21}, q_{22}, q_{23}, q_{31}, q_{32}, q_{33}, q_{41}, q_{42}, x_m, z_m, \theta, \psi) = 0, i = 1, 2, \dots, 11$ . Se recuerda la partición empleada en el problema directo de posición entre coordenadas generalizadas independientes  $q^i = [q_{13}, q_{23}, q_{33}, q_{42}]^T$  y las secundarias,  $q^s = [q_{11}, q_{12}, q_{21}, q_{22}, q_{31}, q_{32}, q_{41}, x_m, z_m, \theta, \psi]^T$  y las correspondientes velocidades generalizadas.

La ecuación  $v = J(q) \cdot \dot{q}$  es la relación de las velocidades de las articulaciones y las velocidades en la plataforma móvil. Donde  $v$  es un vector velocidad del movimiento de la plataforma móvil,  $J(q)$  es el vector velocidad de los grados de libertad del robot y es llamada matriz Jacobiana y es dependiente de la configuración del robot.

La matriz Jacobiana o Jacobiano permite obtener las singularidades de robot y analizar redundancia. Se obtiene derivando las ecuaciones de restricción por cada variable, obteniéndose una matriz cuadrada de orden 11.

$$\left[ \frac{\partial \Phi_i}{\partial q^s} \right] = J(q) \quad [2.7]$$

Un robot presenta una configuración singular cuando su Jacobiano tiene filas linealmente dependientes. Estas singularidades puede causar pérdida de movilidad del robot; pueden existir infinitas soluciones para la cinemática directa; cuando el manipulador se aproxima a una configuración singular, una pequeña velocidad del actuador final provoca grandes velocidades en el accionamiento del robot.

Derivando ahora las ecuaciones de restricción respecto al tiempo, teniendo en cuenta esta partición, se tendrá que,

$$\left[ \frac{\partial \Phi_i}{\partial q^s} \right] * [\dot{q}^s] = - \left[ \frac{\partial \Phi_i}{\partial q^i} \right] * [\dot{q}^i]$$

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial \Phi_i}{\partial q^s} \right]_{11 \times 11} \cdot [\dot{q}_{11}, \dot{q}_{12}, \dot{q}_{21}, \dot{q}_{22}, \dot{q}_{31}, \dot{q}_{32}, \dot{q}_{41}, \dot{x}_m, \dot{z}_m, \dot{\theta}, \dot{\psi}]^T \\ & = - \left[ \frac{\partial \Phi_i}{\partial q^i} \right]_{11 \times 4} \cdot [\dot{q}_{13}, \dot{q}_{23}, \dot{q}_{33}, \dot{q}_{42}]^T \end{aligned}$$

Al ser  $\left[ \frac{\partial \Phi_i}{\partial q^s} \right]_{11 \times 11}$  una matriz muy extensa se desarrolla por columnas:

$$\left[ \frac{\partial \Phi_i}{\partial q^s} \right]_{nx1} = \begin{bmatrix} -q_{13} \text{sen} q_{11} \text{sen} q_{12} \\ 0 \\ q_{13} \text{cos} q_{11} \text{sen} q_{12} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \left[ \frac{\partial \Phi_i}{\partial q^s} \right]_{nx2} = \begin{bmatrix} q_{13} \text{cos} q_{11} \text{cos} q_{12} \\ q_{13} \text{sen} q_{12} \\ q_{13} \text{sen} q_{11} \text{cos} q_{12} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[ \frac{\partial \Phi_i}{\partial q^s} \right]_{nx3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -q_{23} \text{sen} q_{21} \text{sen} q_{22} \\ 0 \\ q_{23} \text{cos} q_{21} \text{sen} q_{22} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \left[ \frac{\partial \Phi_i}{\partial q^s} \right]_{nx4} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ q_{23} \text{cos} q_{21} \text{cos} q_{22} \\ q_{23} \text{sen} q_{22} \\ q_{23} \text{sen} q_{21} \text{cos} q_{22} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_i}{\partial q^s} \end{bmatrix}_{nx5} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -q_{33} \text{sen} q_{31} \text{sen} q_{32} \\ 0 \\ q_{33} \text{cos} q_{31} \text{sen} q_{32} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_i}{\partial q^s} \end{bmatrix}_{nx6} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ q_{33} \text{cos} q_{31} \text{cos} q_{32} \\ q_{33} \text{sen} q_{32} \\ q_{33} \text{sen} q_{31} \text{cos} q_{32} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_i}{\partial q^s} \end{bmatrix}_{nx7} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -q_{42} \text{cos} q_{41} \\ -q_{42} \text{sen} q_{41} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_i}{\partial q^s} \end{bmatrix}_{nx8} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_i}{\partial q^s} \end{bmatrix}_{nx9} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_i}{\partial q^s} \end{bmatrix}_{nx10} = \begin{bmatrix} -R_m \text{sen} \theta \text{cos} \psi \\ R_m \text{sen} \theta \text{sen} \psi \\ R_m \text{cos} \theta \\ R_m \text{cos} \beta \text{sen} \theta \text{sen} \psi \\ R_m \text{cos} \beta \text{sen} \theta \text{sen} \psi \\ R_m \text{cos} \beta \text{cos} \theta \\ R_m \text{cos} \beta \text{sen} \theta \text{cos} \psi \\ R_m \text{cos} \beta \text{sen} \theta \text{sen} \psi \\ R_m \text{cos} \beta \text{cos} \theta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_i}{\partial q^s} \end{bmatrix}_{nx11} = \begin{bmatrix} -R_m \text{cos} \theta \text{sen} \psi \\ -R_m \text{cos} \theta \text{cos} \psi \\ 0 \\ R_m \text{cos} \beta \text{cos} \theta \text{sen} \psi + R_m \text{sen} \beta \text{cos} \psi \\ -R_m \text{cos} \beta \text{cos} \theta \text{cos} \psi + R_m \text{sen} \beta \text{sen} \psi \\ 0 \\ R_m \text{cos} \beta \text{cos} \theta \text{sen} \psi - R_m \text{sen} \beta \text{cos} \psi \\ -R_m \text{cos} \beta \text{cos} \theta \text{cos} \psi - R_m \text{sen} \beta \text{sen} \psi \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se procede de igual manera para obtener la matriz  $\left[ \frac{\partial \Phi_i}{\partial q^i} \right]_{11 \times 4}$  :

$$\left[ \frac{\partial \Phi_i}{\partial q^i} \right]_{nx1} = \begin{bmatrix} \cos q_{11} \operatorname{sen} q_{12} \\ -\cos q_{12} \\ \operatorname{sen} q_{12} \operatorname{sen} q_{11} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \left[ \frac{\partial \Phi_i}{\partial q^i} \right]_{nx2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cos q_{21} \operatorname{sen} q_{22} \\ -\cos q_{22} \\ \operatorname{sen} q_{22} \operatorname{sen} q_{21} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[ \frac{\partial \Phi_i}{\partial q^i} \right]_{nx3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cos q_{31} \operatorname{sen} q_{32} \\ -\cos q_{32} \\ \operatorname{sen} q_{31} \operatorname{sen} q_{32} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \left[ \frac{\partial \Phi_i}{\partial q^i} \right]_{nx4} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \operatorname{sen} q_{41} \\ \cos q_{41} \end{bmatrix}$$

Las componentes de la velocidad angular absoluta de la plataforma, expresada en el sistema de referencia fijo, se pueden obtener mediante la expresión,

$$\omega_x = -\operatorname{sen}(\psi) \cdot \dot{\theta}$$

$$\omega_y = \cos(\psi) \cdot \dot{\theta}$$

$$\omega_z = \dot{\psi}$$

### 2.6.3 ACELERACIÓN

Para resolver el problema directo de aceleraciones, se derivará respecto al tiempo la ecuación de velocidades,

$$\frac{d}{dt} \left[ \left[ \frac{\partial \Phi_i}{\partial q^s} \right] * [\dot{q}^s] \right] = \frac{d}{dt} \left[ - \left[ \frac{\partial \Phi_i}{\partial q^i} \right] * [\dot{q}^i] \right] \quad [2.8]$$

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\partial \Phi_i}{\partial q^s}\right] * [\ddot{q}^s] + \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \Phi_i}{\partial q^s}\right] \cdot [\dot{q}^s] &= - \left[\frac{\partial \Phi_i}{\partial q^i}\right] * [\ddot{q}^i] - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \Phi_i}{\partial q^i}\right] \cdot [\dot{q}^i] \\
\left[\frac{\partial \Phi_i}{\partial q^s}\right]_{11 \times 11} \cdot [\ddot{q}_{11}, \ddot{q}_{12}, \ddot{q}_{21}, \ddot{q}_{22}, \ddot{q}_{31}, \ddot{q}_{32}, \ddot{q}_{41}, \ddot{x}_m, \ddot{z}_m, \ddot{\theta}, \ddot{\psi}]^T & \\
+ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \Phi_i}{\partial q^s}\right]_{11 \times 11} \cdot [\dot{q}_{11}, \dot{q}_{12}, \dot{q}_{21}, \dot{q}_{22}, \dot{q}_{31}, \dot{q}_{32}, \dot{q}_{41}, \dot{x}_m, \dot{z}_m, \dot{\theta}, \dot{\psi}]^T & \\
= - \left[\frac{\partial \Phi_i}{\partial q^i}\right]_{11 \times 4} \cdot [\ddot{q}_{13}, \ddot{q}_{23}, \ddot{q}_{33}, \ddot{q}_{42}]^T - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \Phi_i}{\partial q^i}\right]_{11 \times 4} \cdot [\dot{q}_{13}, \dot{q}_{23}, \dot{q}_{33}, \dot{q}_{42}]^T &
\end{aligned}$$

El primer término de la ecuación  $\left[\frac{\partial \Phi_i}{\partial q^s}\right]_{11 \times 11}$  ya se desarrolló en 2.4.2, al igual que el término  $\left[\frac{\partial \Phi_i}{\partial q^i}\right]_{11 \times 4}$ , estas matrices se derivan para obtener los otros términos.

La matriz de la derivada de la velocidad de términos secundarios en función de estos es:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \Phi_i}{\partial q^s}\right]_{n \times 1} = \begin{bmatrix} -q_{13} \cos q_{11} \operatorname{sen} q_{12} - q_{13} \cos q_{11} \cos q_{12} \\ 0 \\ -q_{13} \operatorname{sen} q_{11} \operatorname{sen} q_{12} + q_{13} \cos q_{11} \cos q_{12} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{d\left[\frac{\partial\Phi_i}{\partial q^s}\right]_{nx2}}{dt} = \begin{bmatrix} -q_{13}\text{sen}q_{11}\text{cos}q_{12} - q_{13}\text{cos}q_{11}\text{sen}q_{12} \\ q_{13}\text{cos}q_{12} \\ q_{13}\text{cos}q_{11}\text{cos}q_{12} - q_{13}\text{sen}q_{11}\text{sen}q_{12} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\frac{\partial\Phi_i}{\partial q^s}\right]_{nx3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -q_{23}\text{sen}q_{21}\text{sen}q_{22} \\ 0 \\ q_{23}\text{cos}q_{21}\text{sen}q_{22} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\frac{\partial\Phi_i}{\partial q^s}\right]_{nx4} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ q_{23}\text{cos}q_{21}\text{cos}q_{22} \\ q_{23}\text{sen}q_{22} \\ q_{23}\text{sen}q_{21}\text{cos}q_{22} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\frac{\partial\Phi_i}{\partial q^s}\right]_{nx5} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -q_{33}\text{sen}q_{31}\text{sen}q_{32} \\ 0 \\ q_{33}\text{cos}q_{31}\text{sen}q_{32} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\frac{\partial\Phi_i}{\partial q^s}\right]_{nx6} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ q_{33}\text{cos}q_{31}\text{cos}q_{32} \\ q_{33}\text{sen}q_{32} \\ q_{33}\text{sen}q_{31}\text{cos}q_{32} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\frac{\partial\Phi_i}{\partial q^s}\right]_{nx7} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -q_{42}\text{cos}q_{41} \\ -q_{42}\text{sen}q_{41} \end{bmatrix}$$

$$\left[\frac{\partial\Phi_i}{\partial q^s}\right]_{nx8} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\frac{\partial\Phi_i}{\partial q^s}\right]_{nx9} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\left[ \frac{\partial \Phi_i}{\partial q^s} \right]_{nx10} = \begin{bmatrix} -R_m \text{sen} \theta \cos \psi \\ R_m \text{sen} \theta \text{sen} \psi \\ R_m \cos \theta \\ R_m \cos \beta \text{sen} \theta \text{sen} \psi \\ R_m \cos \beta \text{sen} \theta \text{sen} \psi \\ R_m \cos \beta \cos \theta \\ R_m \cos \beta \text{sen} \theta \cos \psi \\ R_m \cos \beta \text{sen} \theta \text{sen} \psi \\ R_m \cos \beta \cos \theta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \left[ \frac{\partial \Phi_i}{\partial q^s} \right]_{nx11} = \begin{bmatrix} -R_m \cos \theta \text{sen} \psi \\ -R_m \cos \theta \cos \psi \\ 0 \\ R_m \cos \beta \cos \theta \text{sen} \psi + R_m \text{sen} \beta \cos \psi \\ -R_m \cos \beta \cos \theta \cos \psi + R_m \text{sen} \beta \text{sen} \psi \\ 0 \\ R_m \cos \beta \cos \theta \text{sen} \psi - R_m \text{sen} \beta \cos \psi \\ -R_m \cos \beta \cos \theta \cos \psi - R_m \text{sen} \beta \text{sen} \psi \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La derivada de la matriz de velocidad de términos independientes es cero.

$$\frac{d \left[ \frac{\partial \Phi_i}{\partial q^i} \right]_{11x4}}{dt} = 0$$

La ecuación de aceleración queda:

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial \Phi_i}{\partial q^s} \right]_{11x11} \cdot [\ddot{q}_{11}, \ddot{q}_{12}, \ddot{q}_{21}, \ddot{q}_{22}, \ddot{q}_{31}, \ddot{q}_{32}, \ddot{q}_{41}, \ddot{x}_m, \ddot{z}_m, \ddot{\theta}, \ddot{\psi}]^T \\ & + \frac{d \left[ \frac{\partial \Phi_i}{\partial q^s} \right]_{11x11}}{dt} \cdot [\dot{q}_{11}, \dot{q}_{12}, \dot{q}_{21}, \dot{q}_{22}, \dot{q}_{31}, \dot{q}_{32}, \dot{q}_{41}, \dot{x}_m, \dot{z}_m, \dot{\theta}, \dot{\psi}]^T \\ & = - \left[ \frac{\partial \Phi_i}{\partial q^i} \right]_{11x4} \cdot [\ddot{q}_{13}, \ddot{q}_{23}, \ddot{q}_{33}, \ddot{q}_{42}]^T \end{aligned}$$

Las componentes de la aceleración angular absoluta de la plataforma, expresada en el sistema de referencia fijo, se pueden obtener mediante la expresión.

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_x &= -\cos(\psi) \cdot \dot{\psi} \cdot \dot{\theta} - \text{sen}(\psi) \cdot \ddot{\theta} \\ \dot{\omega}_y &= -\text{sen}(\psi) \cdot \dot{\psi} \cdot \dot{\theta} + \cos(\psi) \cdot \ddot{\theta} \\ \dot{\omega}_z &= \ddot{\psi} \end{aligned}$$



## 2.7 CARACTERÍSTICAS DEL ESPACIO DE TRABAJO

En forma general el espacio de trabajo de un robot es el espacio en el cual el mecanismo puede trabajar, en este caso es el volumen envolvente en el cual la plataforma móvil actúa para realizar la rehabilitación de la rodilla en forma correcta.

Para analizar el espacio de trabajo se consideró la tabla 3 de los movimientos de la extremidad inferior, además de los cuatro movimientos que puede realizar la plataforma móvil. Se considera que el paciente estará sentado de tal forma que el talón, la rodilla y la cadera formen un ángulo de 90 grados.

- **Movimiento de flexión de la cadera**  
Entonces el valor para que suba la pierna con respecto a la cadera es de  $30^\circ$ , lo que significa que el valor de  $Z_m$  es de 144.34 mm.
- **Movimiento de extensión de la cadera**  
Este movimiento no se realiza debido a que, para la rehabilitación, el paciente debe estar sentado.
- **Movimiento de abducción y aducción**  
Este movimiento es sobre el eje Y, sin embargo, por las características del robot no hay traslación en este eje.
- **Movimiento de flexión y extensión de la rodilla**  
Al tener un paciente sentado para realizar el movimiento, la pierna puede estar completamente extendida, pero para acciones de rehabilitación se considera en este trabajo que el ángulo máximo entre la cadera, rodilla y talón es de  $120^\circ$  con lo cual el valor de  $X_m$  es de - 288.7 mm.

- Movimiento de extensión y flexión del talón  
Gira en torno al eje Y por lo que su variable es  $\theta$  que varía desde  $-30^\circ$  a  $+50^\circ$ .
- Movimiento de supinación y pronación  
El giro de este movimiento se lo hace alrededor del eje X, el ángulo  $\phi$  no varía con este robot paralelo, por lo que no se le toma en cuenta.
- Movimiento de abducción y aducción del talón  
El giro que se realiza con este movimiento es en el eje Z, su ángulo  $\psi$  varía de  $-20^\circ$  a  $+10^\circ$ .
- Movimiento de rotación del talón  
Este giro no se lo puede realizar al ser una variante del giro de abducción

En la Tabla 2.5, se encuentra el resumen de los valores que puede tomar la plataforma móvil.

**Tabla 2.5** Rango de las variables de la plataforma móvil del robot paralelo

Variable	Xm	Zm	$\theta$	$\psi$
Rango	- 288.7 a 0 mm	0 a 144.34 mm	$-30^\circ$ a $+50^\circ$	$-20^\circ$ a $+10^\circ$

Elaborado por las autoras, 2016

## CAPÍTULO 3

### VALIDACIÓN DEL ROBOT PARALELO

#### 3.1 DETERMINACIÓN DE LOS PARÁMETROS FÍSICOS DEL ROBOT

Para seleccionar los parámetros físicos del robot se debe tomar en cuenta la extremidad inferior y en particular el pie, que estará en contacto directo con la plataforma.

Se dimensiona la plataforma móvil de acuerdo al tamaño del pie, tomando los valores de las tallas de zapatos con sus valores en centímetros.

**Tabla 3.1** Tabla de las correspondencias entre talla y medida del pie

TABLA PARA CALZADO CON ORIGEN INGLÉS O NORTEAMERICANO												
Medida del pie en actividad, en mm	228,88	233,33	237,77	242,22	246,66	251,11	255,55	260,00	264,44			
Talla	34 1/3	35	35 2/3	36 1/3	37	37 2/3	38 1/3	39	39 2/3			
Talla de mujer USA	5 B	5 1/2 B	6 B	6 1/2 B	7 B	7 1/2 B	8 B	8 1/2 B	9 B			
Talla de hombre USA	—	—	—	—	—	—	—	7	7 1/2			
Medida del pie en actividad, en mm	268,88	273,33	277,77	282,22	286,66	291,11	295,55	300,00	304,44			
Talla	40 1/3	41	41 2/3	42 1/3	43	43 2/3	44 1/3	45	45 2/3			
Talla de mujer USA	9 1/2 B	10 B	10 1/2 B	11 B	11 1/2 B	—	—	—	—			
Talla de hombre USA	8	8 1/2	9	9 1/2	10	10 1/2	11	11 1/2	12			
TABLA PARA CALZADO CON TALLAJE EUROPEO												
Medida del pie en actividad, en mm	233,33	240	246,66	253,33	260	266,66	273,33	280	286,66	293,33	300	306,66
Talla	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46

Fuente (Dinoso, 2016)

Para realizar este dimensionamiento de la Tabla 3.1, se escoge la talla 45 cuya medida en actividad es de 300 mm, se le llama medida de pie en actividad cuando este está completamente extendido.

Para encontrar las dimensiones se usa el método "Cipészipari Ismeretek", que es básicamente el método geométrico Knöfel.

A la medida del pie se le resta 20 mm, se divide para 3 y se suma 1, este es el valor

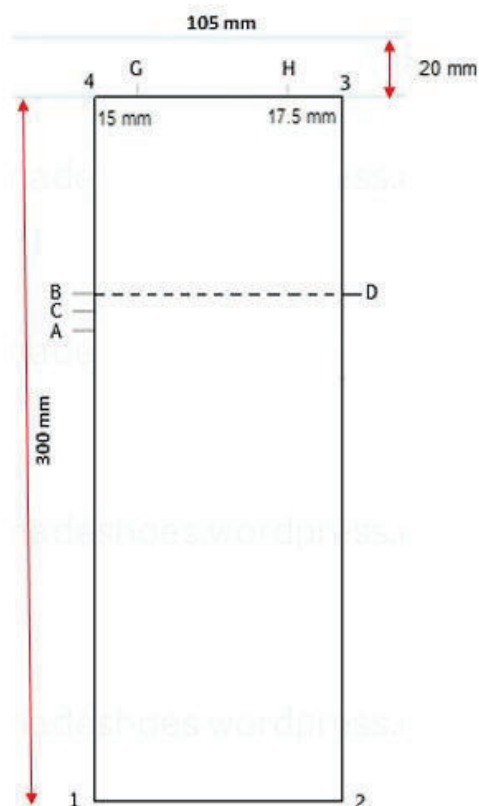
del ancho del rectángulo donde se coloca la plantilla del pie, por convención se añade medio centímetro a este valor.

$$\text{ancho del pie} = \left[ \frac{(\text{largo del pie} - 2)}{3} + 1 \right] + 5 \text{ mm} \quad [3.1]$$

$$\text{ancho del pie} = 100 \text{ mm} + 5 \text{ mm}$$

$$\text{ancho del pie} = 105 \text{ mm}$$

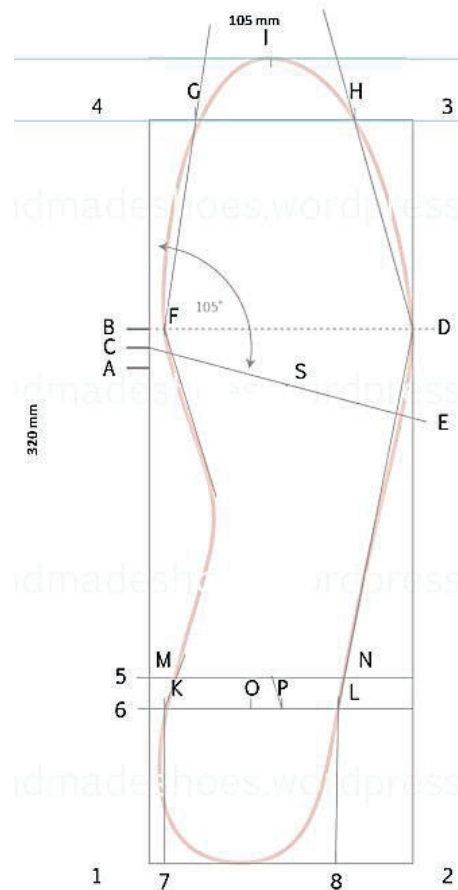
En la Figura 3.1 se aprecia el molde.



**Figura 3.1** Dimensiones mínimas de la plataforma móvil

Fuente (Sánchez, s.f.)

La parte más ancha está entre B y D, los dedos se colocan entre los puntos G y H, que se encuentran a 15 mm del punto 4 y a 17.5 mm del punto 3 respectivamente; la punta del zapato se encuentra a 20 mm de la recta 3-4, de tal manera que la base para obtener el molde se muestra en la Figura 3.2.

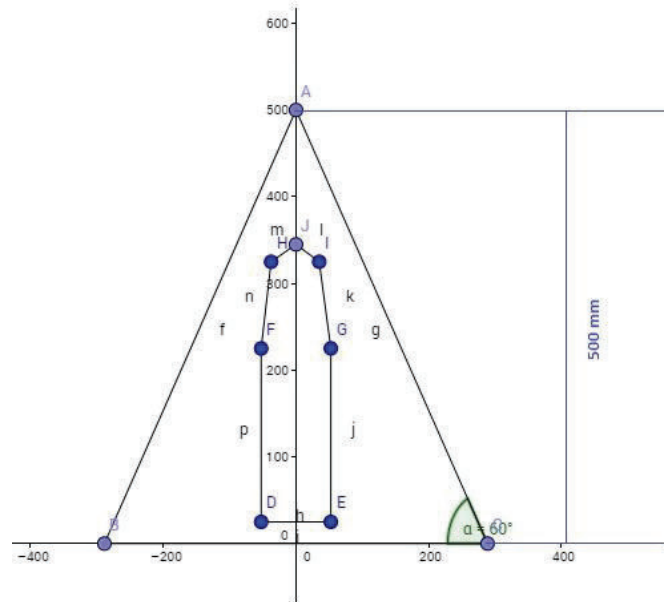


**Figura 3.2** Distribución del pie en la base

Fuente (Sánchez, s.f.)

Para el diseño de la plataforma móvil se alinea la recta B-D con el centro del triángulo, aumentando 50 mm por seguridad.

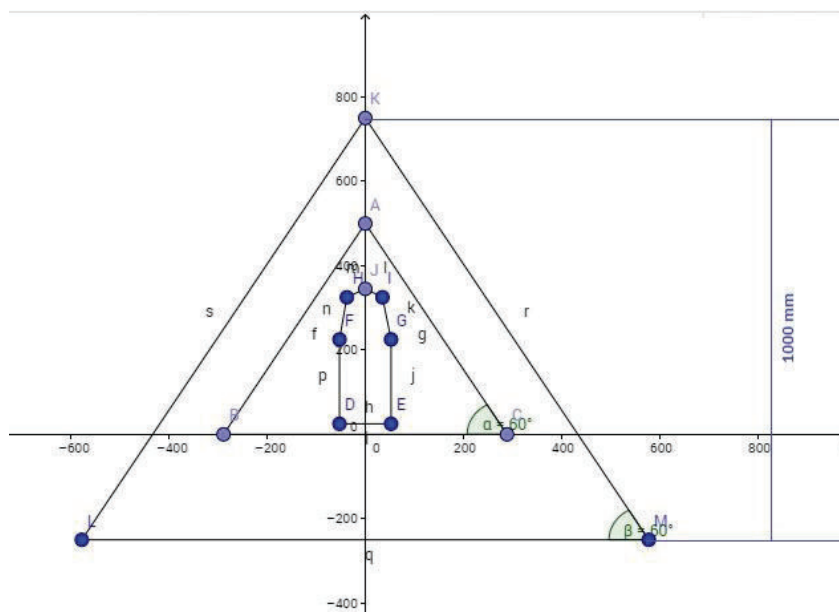
La primera elección es un triángulo equilátero cuya altura es de 500 mm, las dimensiones de sus lados se muestran en la Figura 3.3. Los puntos del triángulo ABC tienen coordenadas A (0, 500), B (288.68, 0), C (-288.68, 0), y las dimensiones de los lados son 577.35 mm. El valor de  $R_m$  es 333.33 mm.



**Figura 3.3** Dimensiones del triángulo equilátero de la plataforma móvil

Elaborado por las autoras, 2016

Para la base se asume un triángulo con dimensiones dos veces mayores al de la plataforma móvil, Figura 3.4; donde los lados miden 1154.7 mm y el valor de R es 666.66 mm.

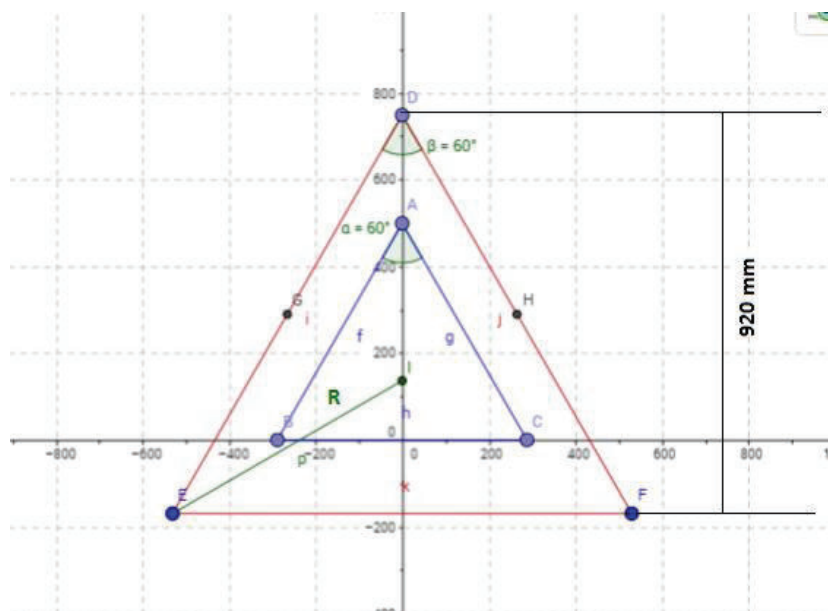


**Figura 3.4** Base fija y plataforma móvil del robot

Elaborado por las autoras, 2016

Como se puede ver en la Figura 3.4, la distancia entre la plataforma móvil y la fija es de 250 mm, lo que implica considerar un espacio amplio para la ubicación del robot, teniendo en cuenta que el paciente debe estar sentado en el momento de la rehabilitación. Por esta razón, se busca otra opción para dimensionar la plataforma fija que no afecte al funcionamiento del robot y que no represente mayor cantidad de elementos en su parte mecánica.

Para la segunda opción se disminuye la altura del triángulo base en 80 mm, haciendo que la plataforma fija tenga una longitud R de 613.33 mm y cuyos lados sean de 1062.32 mm como se puede ver en la Figura 3.5.



**Figura 3.5** Dimensiones de las plataformas con radio  $R = 613.33$  mm

Elaborado por las autoras, 2016

Se realizan las simulaciones con los valores de estos dos triángulos y se considera el ángulo  $\beta = 60^\circ$  por ser triángulos equiláteros.

## 3.2 SIMULACIÓN DEL ROBOT PARALELO

Para la simulación del robot paralelo 3UPE – RPU se utiliza el programa Matlab, ya que presenta características importantes como manejo de matrices, implementación de algoritmos, representación de funciones y datos, creación de interfaces de usuario y comunicación con otros programas y dispositivos. (Lema Caicedo, 2013)

Matlab en sus inicios estaba centrado en el cálculo matemático y en concreto al matricial; pero a medida que ha crecido, se ha ido extendiendo hasta abarcar prácticamente todos los ámbitos de la ingeniería, por lo que este programa es muy utilizado. Algunas de estas extensiones pertenecen al propio programa, mientras que otras han sido implementadas por terceros y actualmente siguen desarrollándose y adaptándose nuevas versiones.

### VRBUILD2

El concepto de “mundo virtual” generalmente recrea la idea de un entorno 3D que simula el mundo real, pero no existen limitaciones, salvo la imaginación. Los mundos virtuales también son llamados muchas veces metaversos.

El diseño de mundos virtuales, se desarrolla mediante herramientas o software diversos tanto comercial como de software o acceso libre. El problema que se debe resolver es ubicar mediante gráficos y programación la posición de los diferentes sistemas de coordenadas involucradas en los movimientos de un robot virtual cuya información se desconoce.

VRML son las siglas de *Virtual Reality Modelling Language*, que significa “Lenguaje de Modelado de Realidad Virtual”.



## **GUIDE**

La interfaz gráfica de usuario (GUI por sus siglas en inglés), es una pantalla para que el usuario interactúe con el programa o el sistema, contiene diferentes elementos gráficos que ayudan a esta interacción como: botones, campos de texto, menús, gráficos, entradas analógicas como deslizadores o sliders con los que se crea aplicaciones simples, dando respaldo al diseño y presentación de los elementos de control de la interfaz, disminuyendo el esfuerzo al nivel de seleccionar, tirar, arrastrar y personalizar propiedades.

Es usado para realizar y ejecutar programas que necesitan un ingreso continuo de datos, su lenguaje de programación es el BASIC.

### **3.2.1 DESCRIPCIÓN DE LA APLICACIÓN**

La aplicación fue desarrollada utilizando el programa MATLAB, el cual es una poderosa herramienta de cálculo y permite la interacción con otros programas e incluso con hardware. Las herramientas de MATLAB utilizadas son VRBUILD2 y GUIDE.

#### **3.2.1.1 Modelado 3D en VRBUILD2**

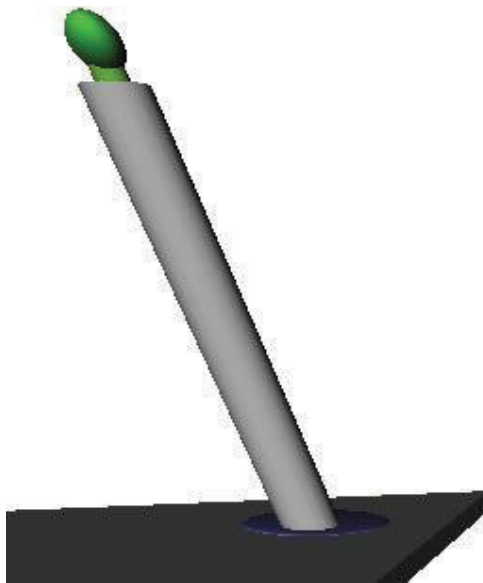
La herramienta VRBUILD2 de Matlab es utilizada para diseñar y crear modelos virtuales en 3D para simulación. El modelado se realiza utilizando una configuración jerárquica, relación padre - hijo, entre los objetos. Esta relación permite que, si el padre sufre alguna modificación respecto a su movimiento traslacional o rotacional, el hijo o hijos se muevan junto con él, de tal manera que la simulación es cercana a la realidad.

En el robot paralelo el objeto padre es la plataforma fija del robot, a la cual se relacionan como hijos los cuatro brazos. Asimismo, cada brazo consta de varios elementos en la relación padre hijo siendo los más importantes y en orden de

jerarquía: la articulación U, el cilindro prismático P y la articulación E, para los brazos UPE; para el RPU las relaciones son la articulación R, el cilindro prismático P y la articulación U, siendo esta última padre de la plataforma móvil.

Las dimensiones de las plataformas provienen del tamaño del triángulo equilátero cuyo radio de círculo circunscrito es R (0.613 m) y de la plataforma móvil de radio Rm (0.333 m).

Las entidades del modelado 3D del robot han sido construidas en su forma más básica, de tal manera que las articulaciones U y R están representadas por semiesferas; las prismáticas P por dos cilindros, un exterior y un interior; y las esféricas por esferas, tal como se muestra en la Figura 3.6.



**Figura 3.6** Brazo UPE con sus articulaciones

Elaborado por las autoras, 2016

El modelado del robot paralelo 3UPE – RPU se lo observa en la Figura 3.7. y se lo guarda con el nombre de **Robot\_Paralelop.wrl**. Los movimientos que se apliquen a cada una de las articulaciones se realizan cambiando las propiedades de cada objeto (rotación y traslación) mediante archivos de programación de Matlab, detallados en el Anexo 1.



Figura 3.7 Modelado en 3D del robot paralelo

Elaborado por las autoras, 2016

3.2.1.2 Interfaz en GUIDE

Se crea una interfaz principal interactiva **Robot\_Paralelo.fig** dividida en tres partes, la superior que contiene un gráfico de representación de los parámetros físicos del robot ( $R$ ,  $R_m$  y  $\beta$ ) y se ingresan sus valores, a la izquierda se coloca los datos y se presentan resultados de la cinemática inversa y en el lado derecho la cinemática directa, tal como se muestra en la Figura 3.8.

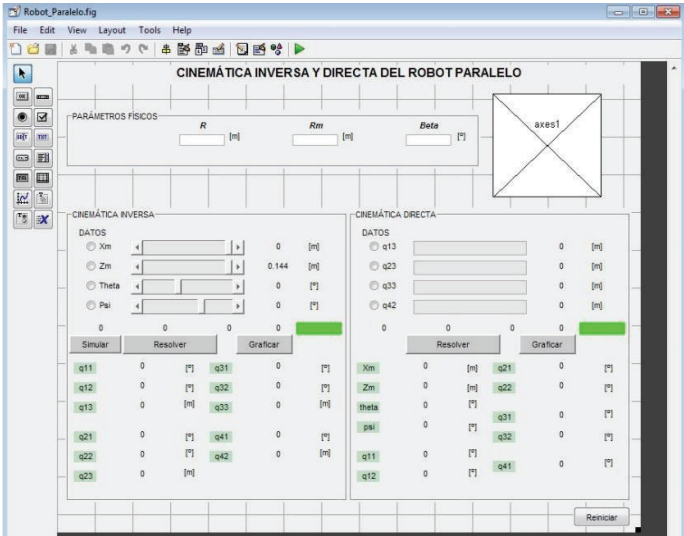
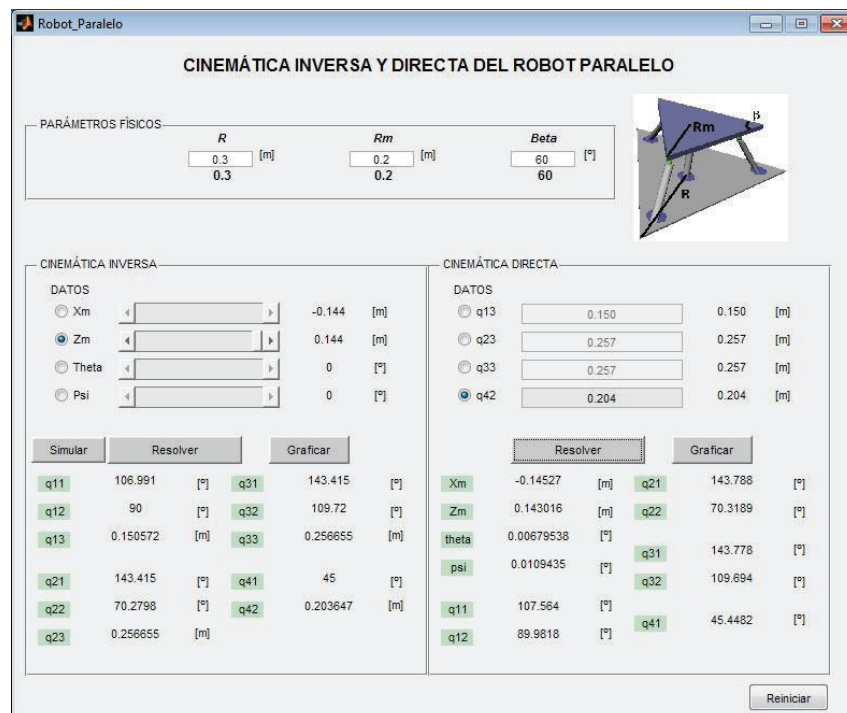


Figura 3.8 Pantalla principal de la simulación en GUIDE

Elaborado por las autoras, 2016

Para obtener los resultados, gráficos y tablas de valores de la posición del robot se han colocado botones que permiten el acceso a nuevas ventanas. Existe además el botón “Simular” para observar el comportamiento del mecanismo.

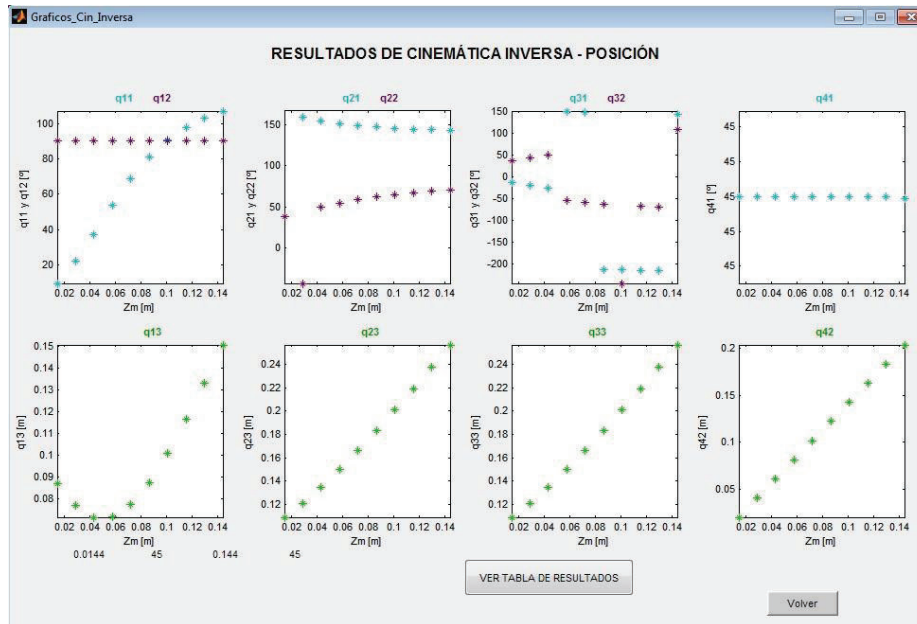
En la Figura 3.9 se observa una aplicación para verificar el funcionamiento de la aplicación con los programas de Matlab para el cálculo de la cinemática inversa.



**Figura 3.9** Ejercicio para comprobar el funcionamiento de Robot\_Paralelo.m

Elaborado por las autoras, 2016

En la Figura 3.10 se presenta la ventana con los gráficos de recorrido de las articulaciones para llegar a la posición final, se activará esta opción después de resolver las ecuaciones. Se ha tomado 10 datos para cada gráfica, que son suficientes para realizar un análisis.



**Figura 3.10** Gráficas de la posición de cada una de las articulaciones de las cadenas cinemáticas

Elaborado por las autoras, 2016

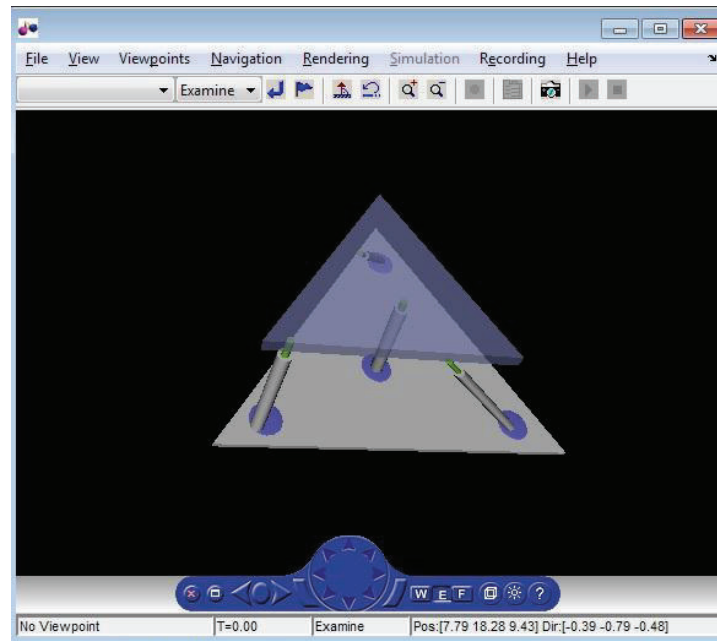
A través de la ventana de gráficos es posible acceder a la tabla de resultados de la Figura 3.11 donde se muestran los valores de las entradas y las salidas de la cinemática inversa.

	Xm	Zm	Theta	Psi	q11	q12
1	-0.0144	0.0144	0	0	9.5491	90
2	-0.0288	0.0288	0	0	22.0231	90
3	-0.0432	0.0432	0	0	37.2553	90
4	-0.0576	0.0576	0	0	53.6428	90
5	-0.0720	0.0720	0	0	68.7495	90
6	-0.0864	0.0864	0	0	81.0546	90
7	-0.1008	0.1008	0	0	90.4547	90
8	-0.1152	0.1152	0	0	97.5164	90
9	-0.1296	0.1296	0	0	102.8654	90
10	-0.1440	0.1440	0	0	106.9908	90.0000

**Figura 3.11** Tabla de datos de los movimientos de las articulaciones

Elaborado por las autoras, 2016

La simulación se realiza en base a los resultados de la cinemática inversa, por lo que se debe regresar a la pantalla principal y presionar el botón de Simulación, el cual presenta la ventana con el modelado 3D, como se puede ver en la Figura 3.12.



**Figura 3.12** Simulación del modelado con cinemática inversa

Elaborado por las autoras, 2016

Para validar los resultados obtenidos en la cinemática inversa se realiza el cálculo de la cinemática directa, colocando como datos los valores de las articulaciones prismáticas de los cuatro brazos. Los resultados de las variables deben coincidir con las de la cinemática inversa para determinar la efectividad del proceso.

Los resultados de la cinemática directa también se presentan mediante gráficas, como se muestra en la Figura 3.13.

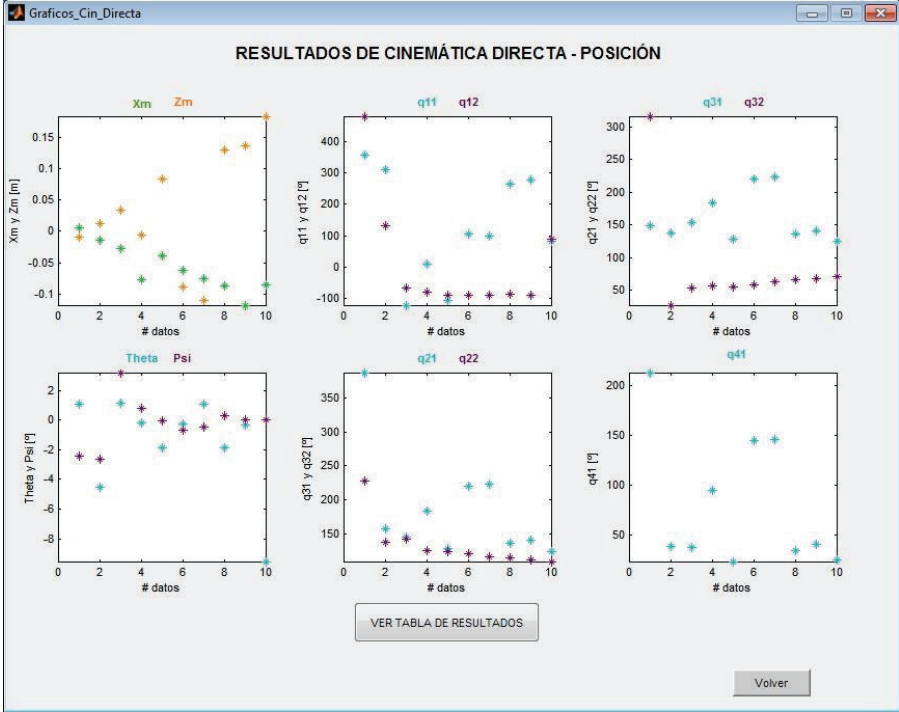


Figura 3.13 Gráfica de resultados cinemática directa

Elaborado por las autoras, 2016

Asimismo, es posible obtener los resultados numéricos a través de la tabla de resultados, que se presenta en la Figura 3.14.

	q13	q23	q33	q42	Xm	Zm
1	0.0151	0.0257	0.0257	0.0202	0.0059	-0.0087
2	0.0302	0.0514	0.0514	0.0404	-0.0139	0.0117
3	0.0453	0.0771	0.0771	0.0606	-0.0274	0.0344
4	0.0604	0.1028	0.1028	0.0808	-0.0777	-0.0065
5	0.0755	0.1285	0.1285	0.1010	-0.0385	0.0836
6	0.0906	0.1542	0.1542	0.1212	-0.0621	-0.0893
7	0.1057	0.1799	0.1799	0.1414	-0.0749	-0.1101
8	0.1208	0.2056	0.2056	0.1616	-0.0876	0.1288
9	0.1359	0.2313	0.2313	0.1818	-0.1175	0.1361
10	0.1510	0.2570	0.2570	0.2020	-0.0853	0.1831

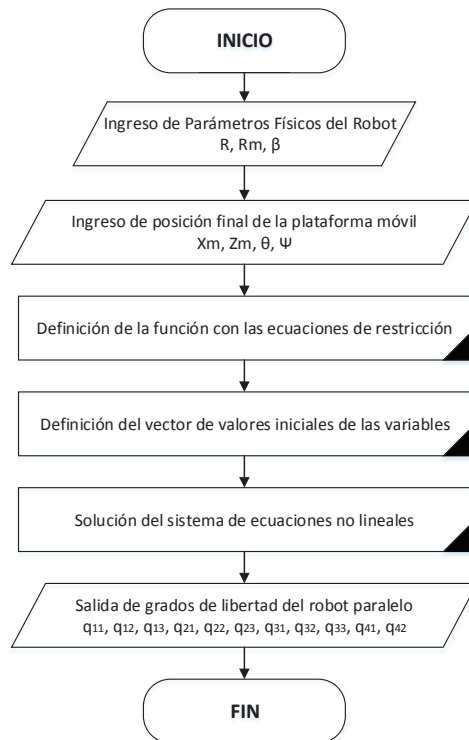
Figura 3.14 Tabla de resultados de la cinemática directa

Elaborado por las autoras, 2016

La aplicación tiene varias restricciones que proceden de los movimientos que el robot debe cumplir para realizar los ejercicios de rehabilitación. Por ejemplo, el valor de  $Z_m$  debe ser mayor a cero para que la plataforma móvil pueda realizar movimientos de traslación en X o giratorios sin dificultad, aunque en el rango de valores de la Tabla 2.1 si hay esta posibilidad. Otra restricción es que solamente se pueden variar dos parámetros simultáneamente, ya que los movimientos de la rodilla se hacen con el movimiento de un solo grado de libertad.

### 3.2.2 ALGORITMO DE LA CINEMÁTICA INVERSA DEL ROBOT PARALELO

Los datos en la cinemática inversa son la posición de la plataforma móvil  $\{x_m, z_m, \theta, \psi\}$ , se deben encontrar los grados de libertad de las articulaciones de las cuatro cadenas que lo conforman  $(q_{11}, q_{12}, q_{13}, q_{21}, q_{22}, q_{23}, q_{31}, q_{32}, q_{33}, q_{41}, q_{42})$ . La simulación de la cinemática inversa se la realizó en el programa **function cin\_inversa.m**, el cual sigue el diagrama de flujo de la Figura 3.15.



**Figura 3.15** Diagrama de flujo del programa para la cinemática inversa

Elaborado por las autoras, 2016



La equivalencia de las variables de Matlab con los grados de libertad a obtenerse en la cinemática inversa se presenta en la Tabla 3.2.

**Tabla 3.2** Equivalencia de grados de libertad con variables de Matlab

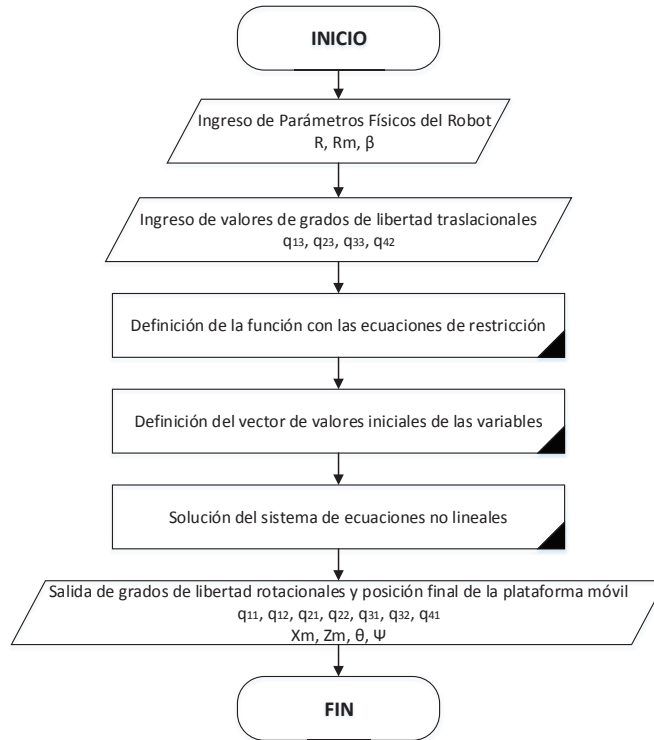
Grados de libertad	Variables de Matlab
q <sub>11</sub>	x(1)
q <sub>12</sub>	x(2)
q <sub>13</sub>	x(3)
q <sub>21</sub>	x(4)
q <sub>22</sub>	x(5)
q <sub>23</sub>	x(6)
q <sub>31</sub>	x(7)
q <sub>32</sub>	x(8)
q <sub>33</sub>	x(9)
q <sub>41</sub>	x(10)
q <sub>42</sub>	x(11)

Elaborado por las autoras, 2016

Se utiliza un método iterativo para hallar la solución de la cinemática inversa.

### 3.2.3 ALGORITMO DE LA CINEMÁTICA DIRECTA DEL ROBOT PARALELO

Para la resolución del problema de la cinemática directa, los datos que se colocan son los grados de libertad traslacionales (q<sub>13</sub>, q<sub>23</sub>, q<sub>33</sub>, q<sub>42</sub>) de cada brazo que conforman el robot 3UPE-RPU obteniéndose los grados de libertad rotacionales (q<sub>11</sub>, q<sub>12</sub>, q<sub>21</sub>, q<sub>22</sub>, q<sub>31</sub>, q<sub>32</sub>, q<sub>41</sub>) y la posición final de la plataforma móvil  $\{x_m, z_m, \theta, \psi\}$ . La simulación de la cinemática directa se la realizó en el programa **function cin\_directa.m**, visualizando en el diagrama de flujo de la Figura 3.16.



**Figura 3.16** Diagrama de flujo del programa para la cinemática directa

Elaborado por las autoras, 2016

En este caso, la equivalencia entre las incógnitas de la cinemática directa y las variables del Matlab se especifican en la Tabla 3.3.

**Tabla 3.3** Equivalencia entre variables de cinemática directa y Matlab

Incógnitas de Cinemática Directa	Variables de Matlab
$X_m$	x(1)
$Z_m$	x(2)
$\theta$	x(3)
$\psi$	x(4)
$q_{11}$	x(5)
$q_{12}$	x(6)
$q_{21}$	x(7)
$q_{22}$	x(8)
$q_{31}$	x(9)
$q_{32}$	x(10)
$q_{41}$	x(11)

Elaborado por las autoras, 2016

Al asumir como datos los grados de libertad traslacionales, la función FSOLVE de Matlab que usa un método iterativo y se obtiene una sola solución.

### 3.2.4 EJEMPLOS DE SIMULACIÓN DE CINEMÁTICA DIRECTA E INVERSA DEL ROBOT PARALELO

Para realizar el análisis de resultados se va a simular con los valores extremos de los rangos en el área de trabajo, que corresponden a la posición de la plataforma móvil para obtener los valores de la cinemática inversa. De los resultados obtenidos en esta primera parte se utilizan los valores de las articulaciones prismáticas para la cinemática directa y validar los resultados.

#### 3.2.4.1 Ejemplo 1

Se realiza el movimiento traslacional de la plataforma móvil respecto al eje X para simular el movimiento de flexo-extensión y se considera la longitud de la primera opción de la plataforma fija. Los valores máximos se aprecian en la Figura 3.17.

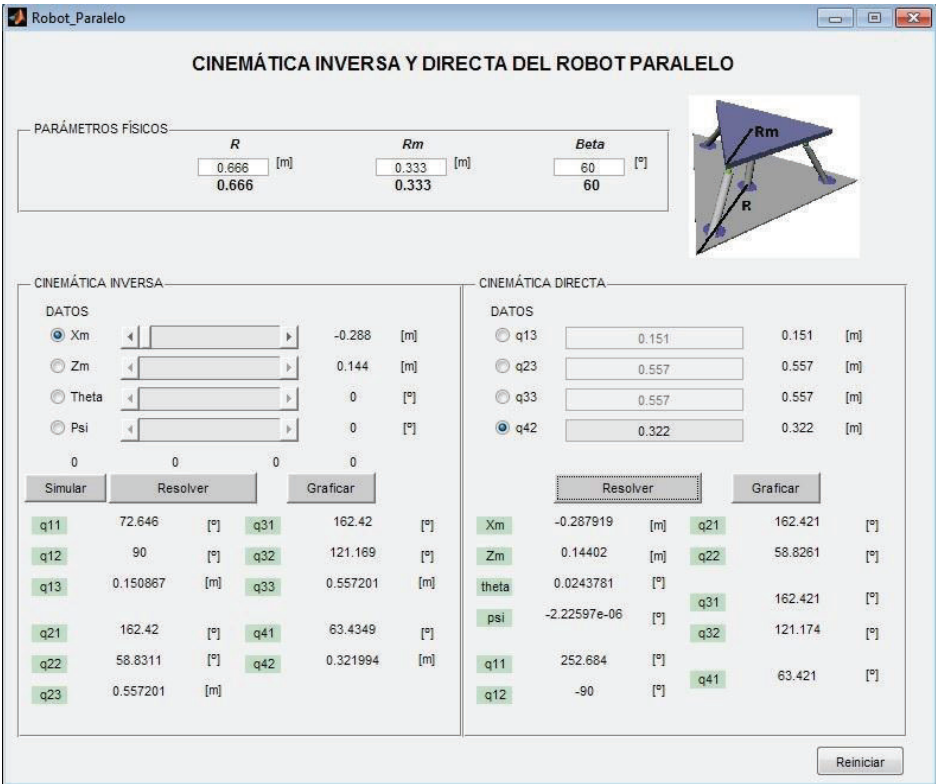


Figura 3.17 Resultados del ejemplo 1

Elaborado por las autoras, 2016

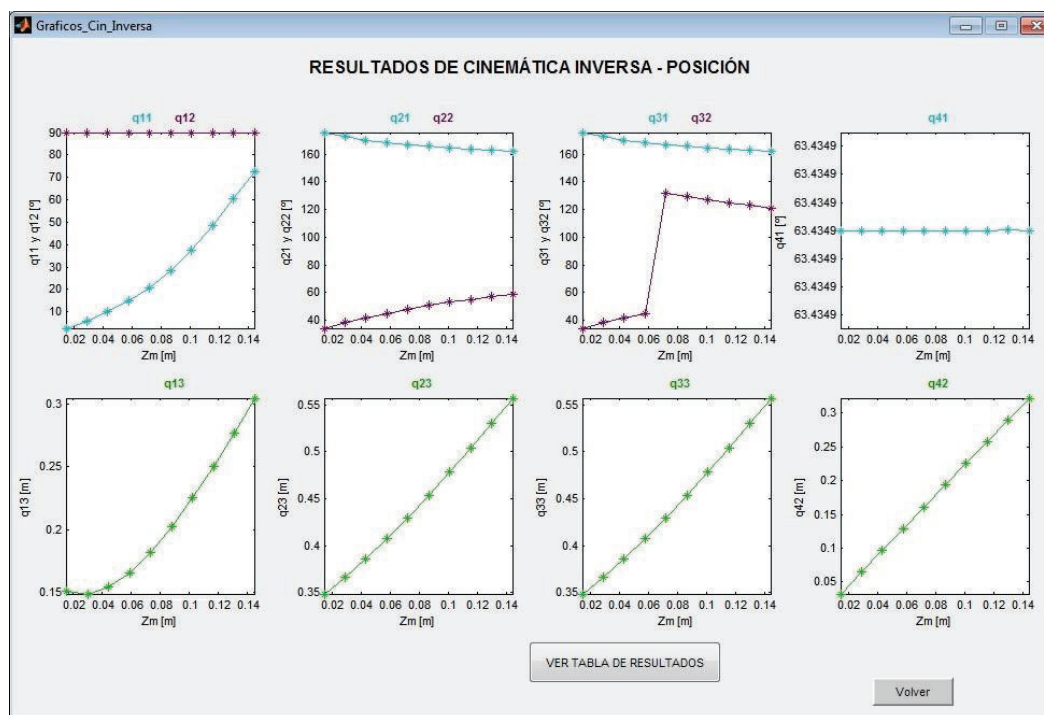
El valor de R es referente a la primera opción de triángulo para la base fija; al ser movimientos traslacionales. Los errores obtenidos en porcentaje se los puede observar en la Tabla 3.2.

**Tabla 3.4** Errores en porcentaje del Ejemplo 1

$X_m = 0.028 \%$	$Z_m = 0.0139 \%$	Offset $\theta = 0.0243^\circ$	$\psi = 0$
$q_{11} = 5.23 \times 10^{-2} \%$	$q_{21} = 6.15 \times 10^{-4} \%$	$q_{31} = 6.15 \times 10^{-4} \%$	$q_{41} = 0.0219 \%$
$q_{12} = 0\%$	$q_{22} = 8.49 \times 10^{-3} \%$	$q_{32} = 4.12 \times 10^{-3} \%$	

Elaborado por las autoras, 2016

Los valores de  $q_{11}$  y  $q_{12}$  están desfasados  $180^\circ$ , los valores quedan  $q_{11} = 72.684^\circ$  y  $q_{12} = 90^\circ$ . Los movimientos de las articulaciones se observan en las Figuras 3.18 y 3.19, en los movimientos de las articulaciones de la cinemática inversa son continuos, en cambio los movimientos de la cinemática directa tienen muchas variaciones con respecto al valor anterior, aunque al final llegan al valor deseado.



**Figura 3.18** Movimiento de las articulaciones de la cinemática inversa – posición

Elaborado por las autoras, 2016

Como se ha dicho en este trabajo, al ingresar datos de las articulaciones prismáticas, se obtiene múltiples soluciones lo que ocasiona este fenómeno en los movimientos.

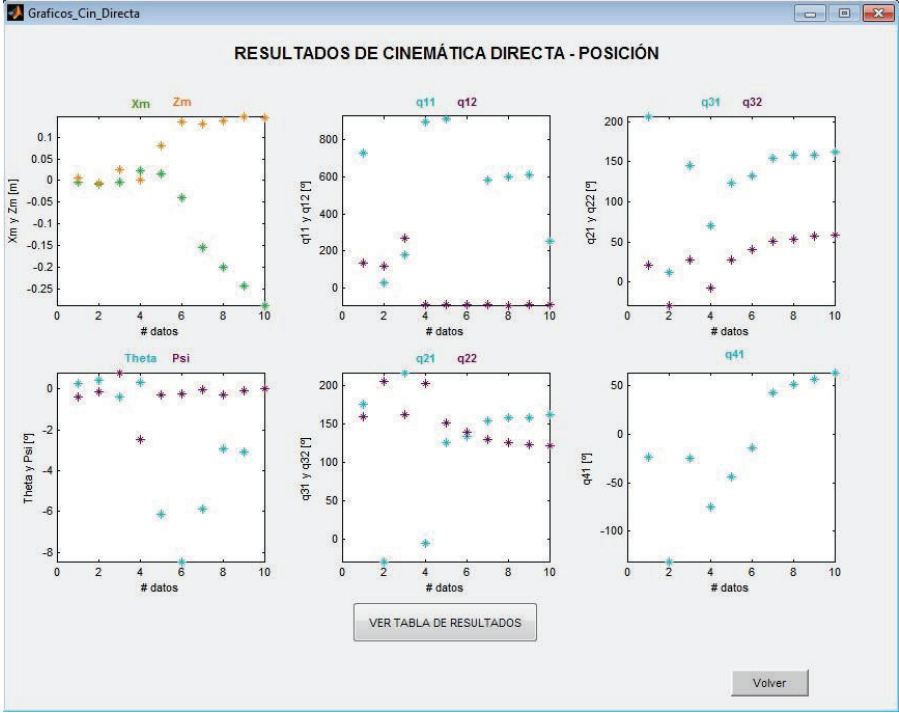
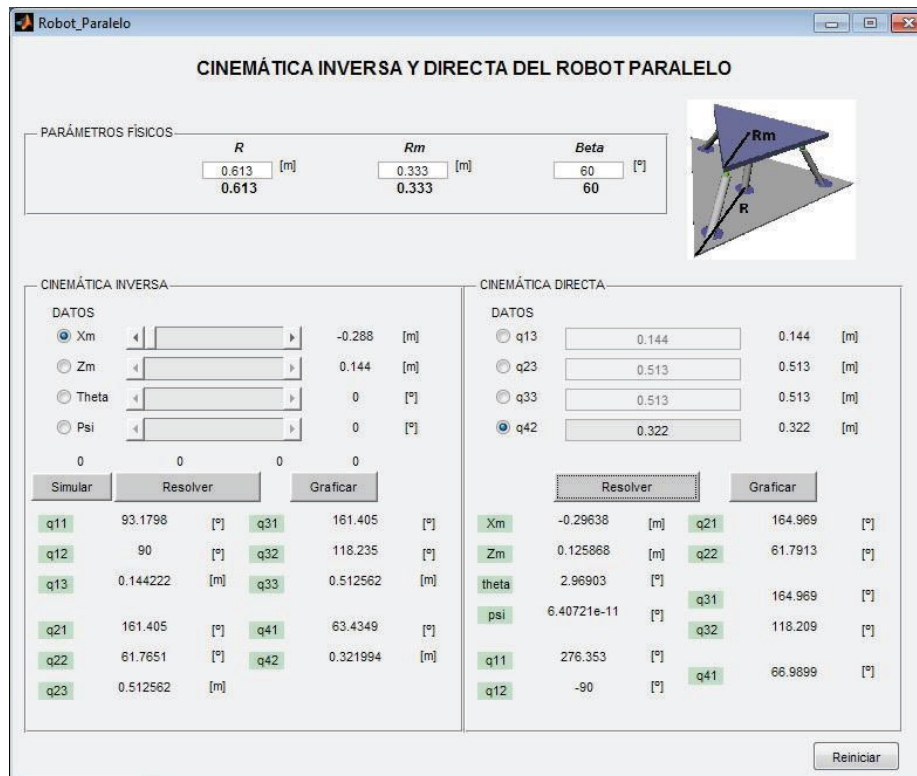


Figura 3.19 Movimiento de las articulaciones de la cinemática directa – posición

Elaborado por las autoras, 2016

3.2.4.2 Ejemplo 2

Utilizando la segunda opción geométrica y la traslación en los ejes X y Z, se cambia solo el valor de la R a 0. 613 m y se mantienen los valores máximos de X<sub>m</sub> y Z<sub>m</sub>. como se detalla en la Figura 3.20.



**Figura 3.20** Resultados del ejemplo 2

Elaborado por las autoras, 2016

Los errores obtenidos en porcentaje se indican en la Tabla 3.5. Como en el caso anterior los valores de  $q_{11} = 96.353^\circ$  y  $q_{12} = 90^\circ$ . En los movimientos de las articulaciones se tiene la misma tendencia que el ejemplo anterior.

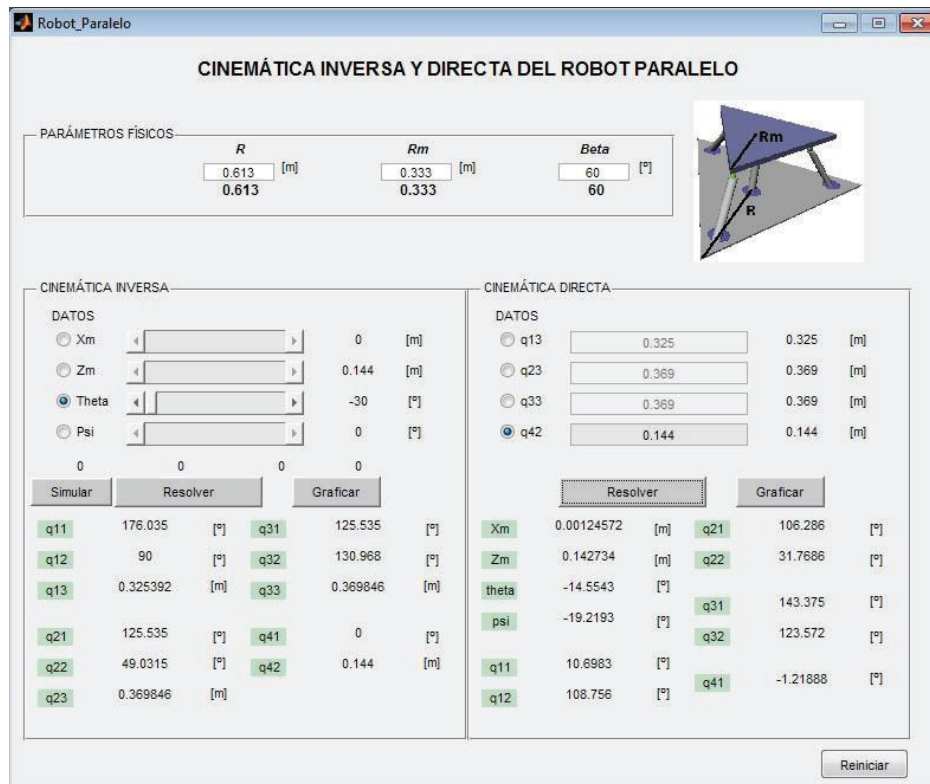
**Tabla 3.5** Errores en porcentaje del Ejemplo 2

$X_m = 2.9 \%$	$Z_m = 12.59 \%$	Offset $\theta = 2.969^\circ$	$\psi = 0$
$q_{11} = 3.4\%$	$q_{21} = 2.208 \%$	$q_{31} = 0.042 \%$	$q_{41} = 5.60 \%$
$q_{12} = 0 \%$	$q_{22} = 0.042 \%$	$q_{32} = 0.022 \%$	

Elaborado por las autoras, 2016

### 3.2.4.3 Ejemplo 3

Para este ejemplo se toma los datos del segundo modelo y el giro en Y de  $-30^\circ$ , que es el giro de la rodilla en flexión dato de la tabla 3, se debe tomar en cuenta que  $Z_m$  debe tener un valor diferente de cero, para que la plataforma gire, los resultados se observan en la Figura 3.21.



**Figura 3.21** Resultados del ejemplo 3

Elaborado por las autoras, 2016

Los valores de los errores son grandes debido a que en cinemática directa los datos son movimientos traslacionales, y las articulaciones rotacionales pueden alcanzar valores muy diferentes a los obtenidos en la cinemática inversa.

#### 3.2.4.4 Ejemplo 4

Para esta última simulación se toma los datos del segundo modelo en Z de 10 grados, que es el giro del talón en abducción dato de la Tabla 2.1. Mostrada en la Figura 3.20.

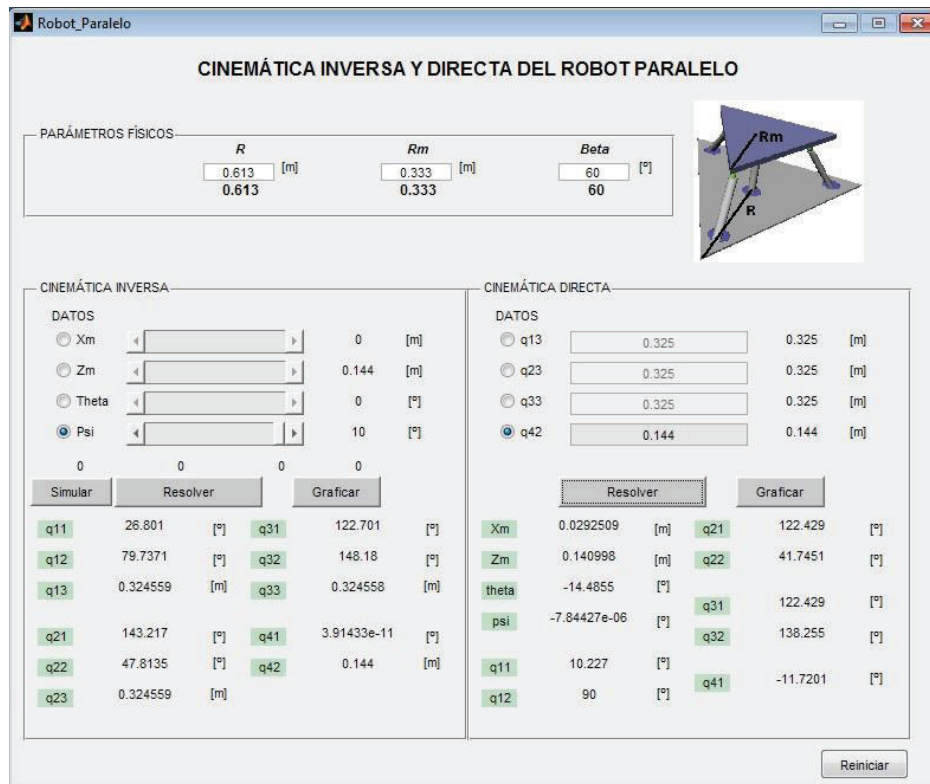


Figura 3.22 Resultados del ejemplo 4

Elaborado por las autoras, 2016

Al igual que en el Ejemplo 3 los errores son grandes, lo mismo sucede con las gráficas de posición de cada una de las articulaciones.

### 3.3 ANÁLISIS DE RESULTADOS

Las diferencias de valores entre la cinemática inversa y directa en los primeros ejemplos no es relevante, pero cuando se varia la posición angular de la plataforma móvil, en la cinemática inversa sus resultados son verdaderos, por el número de ecuaciones e incógnitas que se tiene; en cambio en la cinemática directa al tomar como datos solo las articulaciones traslacionales, las rotacionales pueden tomar cualquier valor y se puede obtener varios resultados, el Matlab arroja la primera solución.



Las gráficas de la variación de posición de cada una de las articulaciones en la cinemática inversa siguen una trayectoria definida en comparación con las diferentes trayectorias que se pueden generar en la cinemática directa.

En la simulación de la cinemática directa se hace necesario ingresar más datos para que la solución sea obtenida por el método geométrico y no por iteraciones, debido a que se tiene múltiples soluciones, en este caso la cinemática directa sirve para comprobar los resultados de la cinemática inversa solamente al realizar movimientos de traslación.

Al ingresar los datos de únicamente dos variables en la cinemática inversa se asegura que los movimientos del robot en la simulación en 3D se puedan visualizar de manera correcta, debido a que existe una sola solución.

## CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

De acuerdo a la simulación realizada se comprueba que el robot diseñado cumple con las trayectorias necesarias para el proceso de rehabilitación de rodilla.

Durante el proceso se analizaron diferentes valores geométricos para la plataforma fija, los resultados no cambian significativamente, pero con la segunda opción se optimiza el área de trabajo, optimizando los recursos y materiales cuando se realice la construcción.

En el análisis cinemático inverso y directo de posición se obtienen las mismas ecuaciones de restricción, pero no así las de velocidad y aceleración porque las incógnitas son diferentes en cada cinemática.

La aplicación realizada en Matlab permite visualizar los movimientos del robot paralelo tanto de la cinemática inversa como directa, lo que facilita su comprensión, ayudando a detectar posibles errores en el modelo.

La simulación permite comprobar que el robot puede acceder a todo el espacio de trabajo. Su forma y dimensión están limitadas por las articulaciones pasivas y activas, por la estructura geométrica y los grados de libertad total del robot.

Los resultados del modelo matemático deben ser validados posteriormente con un prototipo del robot, por lo cual es necesario realizar la dinámica y el control del sistema.

Es fundamental que este tipo de proyectos combinen diseño, tecnología, medicina y sean aplicados a pacientes en centros médicos y hospitales, para comprobar la efectividad de los sistemas mecatrónicos en la rehabilitación.

## BIBLIOGRAFÍA

- ABB. (s.f.). *ABB*. Recuperado el 05 de 2016, de catalogo robots industriales: <http://new.abb.com/products/robotics/industrial-robots/irb-360>
- adept. (2016). *adept*. Recuperado el 2016, de <http://www.adeptiberica.com/es/quattro-robot>
- Araujo, P., Díaz-Rodríguez, M., Mata, V., Page, À., & Valera, À. (2016). *Análisis cinemático inverso de un robot paralelo UPE+3RPU para la rehabilitación de extremidades inferiores*. Valencia: Universidad de Valencia.
- Asencio, Á. (s.f.). *Balance sport clinic*. Recuperado el 14 de 05 de 2016, de <http://balancesportclinic.com/>: <http://balancesportclinic.com/pie-estructura-y-funcion/>
- Barrientos, A. (2008). *Webs, Universidad de Murcia*. Recuperado el 15 de 11 de 2015, de [http://webs.um.es/jmz/roboticaenelaula/ponencias/Robots\\_medicina.pdf](http://webs.um.es/jmz/roboticaenelaula/ponencias/Robots_medicina.pdf)
- Barrientos, A., Peñin, L., Blaguer, C., & Aracil, R. (2007). *Fundamentos de robótica*. España: Mc Graw Hill.
- Baturone, A. O. (2001). *Robótica: Manipuladores y robots móviles*. Barcelona: Marcombo.
- Bernaldez, D. (10 de 02 de 2016). *clinica bernaldez*. Obtenido de <http://clinicabernaldez.com/blog/rehabilitacion-del-tobillo/>
- Briones, J. A. (2009). *Diseño, análisis y construcción de un robot paralelo traslacional*. Querétaro - Mejiro: Instituto Politécnico Nacional.
- Chang, A. N. (2014). *Diseño y simulación de un robot articular con seis grados de libertad utilizando el toolbox robotics de matlab para fortalecer las clases teóricas realizando prácticas de laboratorio con el software presentado en este proyecto*. Quito: Escuela Politécnica Nacional EPN.
- Cisneros León, R. (2006). *Modelo matemático de un robot paralelo de seis grados de libertad*. Puebla: Universidad de las Américas Puebla.
- Cook, D. (2009). *Robot building for beginners*. California.
- DeLamo, D. (25 de 01 de 2016). *Blog de podología*. Obtenido de <http://podologiaentuv vida.blogspot.com/2014/05/valoracion-del-rango->

articular-modo.html

- Díaz Rodríguez, M. Á., Mata Amela, V., & Provnzano Randazzo, S. E. (2009). *Identificación de los parámetros dinámicos de robota paralelos basado en un conjunto de parámetros significativos*. Valencia: Universidad Politécnica de Valencia.
- Dinoso. (2016). Recuperado el 06 de 2016, de <http://www.pinosos.es/tienda-online-diabetico/como-calcular-la-talla/>
- Esquivel Cárdenas, Jesús Aureliano; Ruiz Tello, Javier; Rincón Maltos, Gerardo. (2013). Metodología para encontrar matrices de transfformación para cinemàtica de mecanismos con matlab y VRML. *SCIELO*, 64 - 69.
- García, & Góngora. (s.f.). Obtenido de [http://bvs.sld.cu/revistas/san/vol7\\_2\\_03/san13203.pdf](http://bvs.sld.cu/revistas/san/vol7_2_03/san13203.pdf)
- Girard, L. M. (2008). *Diseño y construcción de prototipo de prótesis de rodilla*. Puebla: Universidad de las amèricas Puebla.
- González Alvarez, N. X., & Reinoso Mendoza, E. P. (2011). *Estudio, diseño y construcción de una plataforma robótica didáctica tipo Stewart aplicada al estudio de controladores difusos*. Cuenca: Universidad Politécnica Salesiana.
- Guilin Yang; I-Ming Chen; Wei Lin; Jorge Ángeles. (2001). Singularity analysis of three-legged parallel robots based on passive-joint velocities. *IEEE*, 2407 - 2413.
- Hernández Stengete, F. J. (2008). *Diseño y construcción de prototipo neumático de próteisi de pierna humana*. Puebla: Universidad de las Amèricas de Puebla.
- Lema Caicedo, O. G. (2013). *Actualización del Sistema Operativo, Manual de Operación y Guía de Prácticas para el Sistema Didáctico Robótico Móvil del Laboratorio de Mecatrónica de la FIMCP-ESPOL*. Guayaquil: Escuela Politécnica del Litoral.
- López Apostolovich, L. F. (2009). *Modelación y simulación dinámica de un brazo robotico de 4 grados de libertad para tareas sobre un plano horizontal*. Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú.
- Martínez, J. (07 de 07 de 2013). *Jau el ingeniero*. Obtenido de <https://jaueingeniero.wordpress.com/2013/07/07/bases-sobre-espacios-de-trabajo-en-robotica-parte-1/>

- Oramas, & Granja, M. V. (2014). *Modelación y análisis de la cinemática directa e inversa del manipulador Stanford de seis grados de libertad*. Quito: Escuela Politécnica Nacional.
- Pérez, F. (2011). Diseño, análisis y modelado cinemático de un exoesqueleto pasivo de extremidad inferior con propósito de rehabilitación. Puebla: Universidad de las Américas Puebla.
- Reyes, F. (2011). *Robótica: Control de robots manipuladores*. Mejioco: Alfaomega.
- Reyes-Cortés, F. (2015). Robótica área clave y estratégica. *Saberes y Ciencias*, 3-4.
- Rivas Gil, M. (2006). *Unidad de medida inercial, Algoritmo de estimación e implementación software*. Sevilla: Universidad de Sevilla.
- Rodríguez, S. (11 de 09 de 2011). *Ecotala*. Recuperado el 14 de 05 de 2016, de <http://ecotala.blogspot.com>: <http://ecotala.blogspot.com/2011/09/el-esqueleto-humano.html>
- Rueda, J. D. (2008). *Metodología para el diseño de un robot paralelo industrial tipo delta*. Bucaramanga: Universidad Pontificia Bolivariana.
- Ruiz García, L.E.; Navarro, R.; Ruiz Caballero, J.A.; Jiménez, J.R.; Brito, E. (2003). Biomecánica de la cadera. *Acceda*, 99 - 101.
- Saha, S. K. (2010). *Introducción a la robótica*. Mejioco: Mc Graw Hill.
- Sailvana, N. (10 de 01 de 2016). *monografias.com*. Obtenido de biomecánica articular del pie: <http://www.monografias.com/trabajos88/biomecanica-articular-del-pie/biomecanica-articular-del-pie.shtml>
- Sánchez, M. (s.f.). *styles america*. Obtenido de [www.styleinsumos.com/newsdetalle.php?id=113](http://www.styleinsumos.com/newsdetalle.php?id=113)
- Santamaría, A. B. (2011). *Metodología de rediseño de un robot paralelo tipo*. Queretaro: Instituto Politécnica nacional.
- Saravia, D., & López, M. (Agosto de 2009). REVISIÓN DEL ESTADO DEL ARTE DE MANIPULADORES PARALELOS. *Scientia et Technica Año XV, No 42*, 81-86.
- Sastre, S. (s.f.). *Nopainrun*. Recuperado el 24 de 06 de 2016, de [www.nopainrun.com/biomecanica-rodilla.html](http://www.nopainrun.com/biomecanica-rodilla.html)
- Shigley, J., & Uicker, J. (2001). *Teoría de máquinas y mecanismos*. México: McGraw-Hill.

- Silva, L. A. (2005). *Control visual de robots paralelos. Análisis, desarrollo y aplicación a la plataforma robotenis*. Madrid: Universidad Politécnica de Madrid.
- Urbina, P. (26 de Noviembre de 2013). *paulcienciaplic*. Obtenido de <http://paulcienciaplic.blogspot.com/2013/11/el-movimiento-del-cuerpo-humano.html>
- Vaca, D. S. (2012). *Diseño y simulación de un robot manipulador industrial tipo puma capaz de levantar 20 Kg*. Quito: EPN.
- Valles, M., Cazalilla, J., Valera, À., Mata, V., Page, À., & Díaz-Rodríguez, M. (2015). *Anàlisi cinemàtic inverso de un robor paralelo RPU3UPE para la rehabilitaciòn de extremidades inferiores*. Valencia: Universidad de Valencia.

## **ANEXOS**

## ANEXO 1

### PROGRAMA EN MATLAB

```

Robot_Paralelo.m
function varargout = Robot_Paralelo(varargin)

gui_Singleton = 1;
gui_State = struct('gui_Name',    mfilename, ...
                  'gui_Singleton', gui_Singleton, ...
                  'gui_OpeningFcn', @Robot_Paralelo_OpeningFcn, ...
                  'gui_OutputFcn', @Robot_Paralelo_OutputFcn, ...
                  'gui_LayoutFcn', [], ...
                  'gui_Callback', []);
if nargin && ischar(varargin{1})
    gui_State.gui_Callback = str2func(varargin{1});
end

if nargout
    [varargout{1:nargout}] = gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
else
    gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
end

% --- Executes just before Robot_Paralelo is made visible.
function Robot_Paralelo_OpeningFcn(hObject, eventdata, handles, varargin)

%Posición de la ventana en pantalla
scrsz = get(0,'ScreenSize');
pos_act = get(gcf,'Position');
%xr = scrsz(3) - pos_act(3);
xp = 0;
yr = scrsz(4) - pos_act(4);
yp = round(yr/2);
set(gcf,'Position',[xp yp pos_act(3) pos_act(4)]);

%Propiedades iniciales de los elementos de entrada de la Cinemática Inversa
set(handles.SL_Xm,'Enable','inactive')
set(handles.SL_Zm,'Enable','inactive')
set(handles.SL_Theta,'Enable','inactive')
set(handles.SL_Psi,'Enable','inactive')

%Propiedades iniciales de los elementos de entrada de la Cinemática Directa
set(handles.SL_q13,'Enable','inactive')
set(handles.SL_q23,'Enable','inactive')
set(handles.SL_q33,'Enable','inactive')
set(handles.SL_q42,'Enable','inactive')

%Propiedades iniciales de los botones de graficos
set(handles.PB_GrafI,'Enable','off')
set(handles.PB_GrafD,'Enable','off')

```



```
handles.output = hObject;
guidata(hObject, handles);
```

```
% UIWAIT makes Robot_Paralelo wait for user response (see UIRESUME)
% uiwait(handles.figure1);
```

```
% --- Outputs from this function are returned to the command line.
function varargout = Robot_Paralelo_OutputFcn(hObject, eventdata, handles)
varargout{1} = handles.output;
```

```
%-----INGRESO DE PARÁMETROS FÍSICOS-----
%-----R, Rm y Beta-----
```

```
function ET_R_Callback(hObject, eventdata, handles)
R = get(hObject, 'String');
set(handles.TX_R, 'string', R);
```

```
function ET_Rm_Callback(hObject, eventdata, handles)
Rm = get(hObject, 'String');
set(handles.TX_Rm, 'string', Rm);
```

```
function ET_Beta_Callback(hObject, eventdata, handles)
beta = get(hObject, 'String');
set(handles.TX_Beta, 'string', beta);
```

```
%////////////////////////////////CINEMÁTICA INVERSA////////////////////////////////
```

```
%----restringir ingreso de datos
```

```
function BG_Inversa_SelectionChangeFcn(hObject, eventdata, handles)
```

```
global ejeXI
```

```
if hObject == handles.RB_Xm
    set(handles.SL_Xm, 'Enable', 'on');
    set(handles.SL_Zm, 'Enable', 'off');
    set(handles.SL_Theta, 'Enable', 'off');
    set(handles.SL_Psi, 'Enable', 'off');
    ejeXI = 1;
elseif hObject == handles.RB_Zm
    set(handles.SL_Xm, 'Enable', 'off');
    set(handles.SL_Zm, 'Enable', 'on');
    set(handles.SL_Theta, 'Enable', 'off');
    set(handles.SL_Psi, 'Enable', 'off');
    ejeXI = 2;
elseif hObject == handles.RB_Theta
    set(handles.SL_Xm, 'Enable', 'off');
    set(handles.SL_Zm, 'Enable', 'off');
```

```

set(handles.SL_Theta,'Enable','on');
set(handles.SL_Psi,'Enable','off');
ejeXI = 3;
elseif hObject == handles.RB_Psi
set(handles.SL_Xm,'Enable','off');
set(handles.SL_Zm,'Enable','off');
set(handles.SL_Theta,'Enable','off');
set(handles.SL_Psi,'Enable','on');
ejeXI = 4;
end

```

```

%----INGRESO DE DATOS
%----Xm, Zm, theta, psi

```

```

function SL_Xm_Callback(hObject, eventdata, handles)
xm = get(hObject,'Value');
set(handles.TX_Xml,'String',xm);

```

```

function SL_Zm_Callback(hObject, eventdata, handles)
zm = get(handles.SL_Zm,'Value');
set(handles.TX_Zml,'String',zm);

```

```

function SL_Theta_Callback(hObject, eventdata, handles)
theta = get(handles.SL_Theta,'Value');
set(handles.TX_Thetal,'String',theta);

```

```

function SL_Psi_Callback(hObject, eventdata, handles)
psi = get(handles.SL_Psi,'Value');
set(handles.TX_Psil,'String',psi);

```

```

%----Llamar valores y resolver la Cinemática Inversa

```

```

function PB_Inversa_Callback(hObject, eventdata, handles)

```

```

%Definición de variables globales
global R Rm beta xm_dat zm_dat theta_dat psi_dat
global xm zm theta psi
global T_inversa
global rango

```

```

%Obtención de los valores de los datos
R=str2double(get(handles.TX_R,'String'));
Rm=str2double(get(handles.TX_Rm,'String'));
beta=str2double(get(handles.TX_Beta,'String'))*pi/180;
xm_dat=str2double(get(handles.TX_Xml,'String'));
zm_dat=str2double(get(handles.TX_Zml,'String'));
theta_dat=str2double(get(handles.TX_Thetal,'String'))*pi/180;
psi_dat=str2double(get(handles.TX_Psil,'String'))*pi/180;

```

```

%Comprobar el ingreso correcto de valores
if zm_dat == 0
    errorlg({'El valor de z debe ser mayor a 0';'Vuelva a ingresar datos'});
    set(handles.TX_Xml,'String','0');
    set(handles.TX_Zml,'String','0');
    set(handles.TX_Thetal,'String','0');
    set(handles.TX_Psil,'String','0');
    set(handles.SL_Xm,'Value','0');
    set(handles.SL_Zm,'Value','0');
    set(handles.SL_Theta,'Value','0');
    set(handles.SL_Psi,'Value','0');
else
    if xm_dat~=0
        if theta_dat~=0 || psi_dat~=0
            errorlg({'Máximo dos datos pueden ser diferentes de 0';'Vuelva a ingresar datos'});
            set(handles.TX_Xml,'String','0');
            set(handles.TX_Zml,'String','0');
            set(handles.TX_Thetal,'String','0');
            set(handles.TX_Psil,'String','0');
            set(handles.SL_Xm,'Value','0');
            set(handles.SL_Zm,'Value','0');
            set(handles.SL_Theta,'Value','0');
            set(handles.SL_Psi,'Value','0');
        end
    else
        if theta_dat~=0 && psi_dat~=0
            errorlg({'Máximo dos datos pueden ser diferentes de 0';'Vuelva a ingresar datos'});
            set(handles.TX_Xml,'String','0');
            set(handles.TX_Zml,'String','0');
            set(handles.TX_Thetal,'String','0');
            set(handles.TX_Psil,'String','0');
            set(handles.SL_Xm,'Value','0');
            set(handles.SL_Zm,'Value','0');
            set(handles.SL_Theta,'Value','0');
            set(handles.SL_Psi,'Value','0');
        end
    end
end
end

```

%Se crea un rango para dibujar gráficas, hacer tablas o simular en el robot

```

rango=10;
for i=1:rango

    xm_ran = xm_dat/rango*i;
    zm_ran = zm_dat/rango*i;
    theta_ran = theta_dat/rango*i;
    psi_ran = psi_dat/rango*i;

    xm = xm_ran;
    zm = zm_ran;
    theta = theta_ran;
    psi = psi_ran;

```

```
%Solución de las ecuaciones de la Cinemática Inversa
```

```
x0=[1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1];
```

```
x=fsolve(@c_inversa,x0);
```

```
Sol_inv=[x(1)*180/pi,x(2)*180/pi,x(3),x(4)*180/pi,x(5)*180/pi,x(6),x(7)*180/pi,x(8)*180/pi,abs(x(9)),x(10)*180/pi,x(11)];
```

```
for k=1:11
```

```
    if Sol_inv(k)>180
```

```
        Sol_inv(k) = Sol_inv(k)-180;
```

```
    end
```

```
end
```

```
%Generación de tabla de resultados de la cinemática inversa
```

```
T_inversa(i,1) = xm_ran;
```

```
T_inversa(i,2) = zm_ran;
```

```
T_inversa(i,3) = theta_ran;
```

```
T_inversa(i,4) = psi_ran;
```

```
for j=5:15
```

```
    T_inversa(i,j) = Sol_inv(j-4);
```

```
end
```

```
end
```

```
%Ubicación de los resultados en la plantilla
```

```
set(handles.TX_q11I,'String',Sol_inv(1));
```

```
set(handles.TX_q12I,'String',Sol_inv(2));
```

```
set(handles.TX_q13I,'String',Sol_inv(3));
```

```
set(handles.TX_q21I,'String',Sol_inv(4));
```

```
set(handles.TX_q22I,'String',Sol_inv(5));
```

```
set(handles.TX_q23I,'String',Sol_inv(6));
```

```
set(handles.TX_q31I,'String',Sol_inv(7));
```

```
set(handles.TX_q32I,'String',Sol_inv(8));
```

```
set(handles.TX_q33I,'String',Sol_inv(9));
```

```
set(handles.TX_q41I,'String',Sol_inv(10));
```

```
set(handles.TX_q42I,'String',Sol_inv(11));
```

```
%Habilitar el boton de graficos
```

```
set(handles.PB_Grafl,'Enable','on');
```

```
%-----Ecuaciones de Restricción de la Cinemática Inversa
```

```
function [f]=c_inversa(x)
```

```
%Definición de variables globales
```

```
global R Rm beta xm zm theta psi
```

```
%Ecuaciones de la cinemática inversa
```

```
    %Para el brazo UPE_1
```

```
f(1)=xm-Rm*cos(theta)*cos(psi)-x(3)*cos(x(1))*sin(x(2))+R;
```

```
f(2)=Rm*cos(theta)*sin(psi)-x(3)*cos(x(2));
```

```
f(3)=zm+Rm*sin(theta)-x(3)*sin(x(1))*sin(x(2));
```

```
    %Para el brazo UPE_2
```

```

f(4)=xm+Rm*cos(beta)*cos(theta)*cos(psi)-Rm*sin(beta)*sin(psi)-R*cos(beta)-x(6)*cos(x(4))*sin(x(5));
f(5)=Rm*cos(beta)*cos(theta)*sin(psi)+Rm*sin(beta)*cos(psi)-R*sin(beta)+x(6)*cos(x(5));
f(6)=zm-Rm*cos(beta)*sin(theta)-x(6)*sin(x(4))*sin(x(5));
%Para el brazo UPE_3
f(7)=xm+Rm*cos(beta)*cos(theta)*cos(psi)+Rm*sin(beta)*sin(psi)-R*cos(beta)-x(9)*cos(x(7))*sin(x(8));
f(8)=Rm*cos(beta)*cos(theta)*sin(psi)-Rm*sin(beta)*cos(psi)+R*sin(beta)+x(9)*cos(x(8));
f(9)=zm-Rm*cos(beta)*sin(theta)-x(9)*sin(x(7))*sin(x(8));
%Para el brazo RPU
f(10)=xm+x(11)*sin(x(10));
f(11)=zm-x(11)*cos(x(10));

```

%---Gráficos de Resultados de la Cinemática Inversa

```

function PB_Grafi_Callback(hObject, eventdata, handles)
Graficos_Cin_Inversa;

```

%/////////////////////////CINEMÁTICA DIRECTA////////////////////////////////////

%-----restringir ingreso de datos

```

function BG_Directa_SelectionChangeFcn(hObject, eventdata, handles)

```

```

global ejeXD

```

```

if hObject == handles.RB_q13
    set(handles.SL_q13,'Enable','on');
    set(handles.SL_q23,'Enable','off');
    set(handles.SL_q33,'Enable','off');
    set(handles.SL_q42,'Enable','off');
    ejeXD = 1;
elseif hObject == handles.RB_q23
    set(handles.SL_q13,'Enable','off');
    set(handles.SL_q23,'Enable','on');
    set(handles.SL_q33,'Enable','off');
    set(handles.SL_q42,'Enable','off');
    ejeXD = 2;
elseif hObject == handles.RB_q33
    set(handles.SL_q13,'Enable','off');
    set(handles.SL_q23,'Enable','off');
    set(handles.SL_q33,'Enable','on');
    set(handles.SL_q42,'Enable','off');
    ejeXD = 3;
elseif hObject == handles.RB_q42
    set(handles.SL_q13,'Enable','off');
    set(handles.SL_q23,'Enable','off');
    set(handles.SL_q33,'Enable','off');
    set(handles.SL_q42,'Enable','on');
    ejeXD = 4;
end

```

```
%----INGRESO DE DATOS
```

```
%----q13, q23, q33, q42
```

```
function SL_q13_Callback(hObject, eventdata, handles)
q13 = get(hObject,'Value');
set(handles.TX_q13D,'String',q13);
```

```
function SL_q23_Callback(hObject, eventdata, handles)
q23 = get(hObject,'Value');
set(handles.TX_q23D,'String',q23);
```

```
function SL_q33_Callback(hObject, eventdata, handles)
q33 = get(hObject,'Value');
set(handles.TX_q33D,'String',q33);
```

```
function SL_q42_Callback(hObject, eventdata, handles)
q42 = get(hObject,'Value');
set(handles.TX_q42D,'String',q42);
```

```
%----Llamar valores y resolver la Cinemática Directa
```

```
function PB_Directa_Callback(hObject, eventdata, handles)
```

```
%Definición de variables globales
```

```
global R Rm beta q13_dat q23_dat q33_dat q42_dat
```

```
global q13 q23 q33 q42
```

```
global T_directa
```

```
global rango
```

```
%Obtención de los valores de los datos
```

```
R=str2double(get(handles.TX_R,'String'));
Rm=str2double(get(handles.TX_Rm,'String'));
beta=str2double(get(handles.TX_Beta,'String'))*pi/180;
q13_dat=str2double(get(handles.TX_q13D,'String'));
q23_dat=str2double(get(handles.TX_q23D,'String'));
q33_dat=str2double(get(handles.TX_q33D,'String'));
q42_dat=str2double(get(handles.TX_q42D,'String'));
```

```
%Se crea un rango para dibujar gráficas, hacer tablas o simular en el robot
```

```
rango=10;
```

```
for i=1:rango
```

```
    q13_ran = q13_dat/rango*i;
```

```
    q23_ran = q23_dat/rango*i;
```

```
    q33_ran = q33_dat/rango*i;
```

```
    q42_ran = q42_dat/rango*i;
```

```
    q13 = q13_ran;
```

```
    q23 = q23_ran;
```

```
    q33 = q33_ran;
```

```
    q42 = q42_ran;
```

```
%Solución de las ecuaciones de la Cinemática Directa
```

```
xd0=[1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1];
xd=fsolve(@c_directa,xd0);
```

```
Sol_dir=[xd(1),xd(2),xd(3)*180/pi,xd(4)*180/pi,xd(5)*180/pi,xd(6)*180/pi,xd(7)*180/pi,xd(8)*180/pi,xd(9)*
180/pi,xd(10)*180/pi,xd(11)*180/pi];
```

```
%Generación de tabla de resultados de la cinemática directa
```

```
T_directa(i,1) = q13_ran;
T_directa(i,2) = q23_ran;
T_directa(i,3) = q33_ran;
T_directa(i,4) = q42_ran;
for j=5:15
    T_directa(i,j) = Sol_dir(j-4);
end
```

```
end
```

```
%Ubicación de los resultados en la plantilla
```

```
set(handles.TX_XmD,'String',Sol_dir(1));
set(handles.TX_ZmD,'String',Sol_dir(2));
set(handles.TX_ThetaD,'String',Sol_dir(3));
set(handles.TX_PsiD,'String',Sol_dir(4));
set(handles.TX_q11D,'String',Sol_dir(5));
set(handles.TX_q12D,'String',Sol_dir(6));
set(handles.TX_q21D,'String',Sol_dir(7));
set(handles.TX_q22D,'String',Sol_dir(8));
set(handles.TX_q31D,'String',Sol_dir(9));
set(handles.TX_q32D,'String',Sol_dir(10));
set(handles.TX_q41D,'String',Sol_dir(11));
```

```
%Habilitar el boton de graficos
```

```
set(handles.PB_GrafD,'Enable','on')
```

```
%-----Ecuaciones de Restricción de la Cinemática Directa
```

```
function [f]=c_directa(x)
```

```
%Definición de variables globales
```

```
global R Rm beta q13 q23 q33 q42
```

```
%Ecuaciones de la cinemática directa
```

```
    %Para el brazo UPE_1
```

```
f(1) = x(1) - Rm*cos(x(3))*cos(x(4)) - q13*cos(x(5))*sin(x(6)) + R;
```

```
f(2) = Rm*cos(x(3))*sin(x(4)) - q13*cos(x(6));
```

```
f(3) = x(2) + Rm*sin(x(3)) - q13*sin(x(5))*sin(x(6));
```

```
    %Para el brazo UPE_2
```

```
f(4) = x(1) + Rm*cos(beta)*cos(x(3))*cos(x(4)) - Rm*sin(beta)*sin(x(4)) - R*cos(beta) -
```

```
q23*cos(x(7))*sin(x(8));
```

```
f(5) = Rm*cos(beta)*cos(x(3))*sin(x(4)) + Rm*sin(beta)*cos(x(4)) - R*sin(beta) + q23*cos(x(8));
```

```
f(6) = x(2) - Rm*cos(beta)*sin(x(3)) - q23*sin(x(7))*sin(x(8));
```

```
    %Para el brazo UPE_3
```

```
f(7) = x(1) + Rm*cos(beta)*cos(x(3))*cos(x(4)) + Rm*sin(beta)*sin(x(4)) - R*cos(beta) -
```

```
q33*cos(x(9))*sin(x(10));
```

```
f(8) = Rm*cos(beta)*cos(x(3))*sin(x(4)) - Rm*sin(beta)*cos(x(4)) + R*sin(beta) + q33*cos(x(10));
f(9) = x(2) - Rm*cos(beta)*sin(x(3)) - q33*sin(x(9))*sin(x(10));
%Para el brazo RPU
f(10) = x(1) + q42*sin(x(11));
f(11) = x(2) - q42*cos(x(11));
```

```
%----Gráficos de Resultados de la Cinemática Inversa
```

```
function PB_GrafD_Callback(hObject, eventdata, handles)
Graficos_Cin_Directa;
```

```
%----Botón de reinicio
```

```
function PB_Reiniciar_Callback(hObject, eventdata, handles)
close(gcf);
Robot_Paralelo;
```

```
%//////////SIMULACIÓN DEL ROBOT PARALELO//////////
```

```
function PB_Simular_Callback(hObject, eventdata, handles)
```

```
global R world velocidad fig
global rango xm_dat theta_dat psi_dat
global T_inversa
```

```
axis off
i=0.19;
world=vrworld('Robot_Paralelo.wrl','new');
open(world);
close(fig);
fig=vrfigure(world);%cargando Mundo VRML
velocidad = 0.01;
R = 0;
```

```
for i=1:rango
```

```
    if i == 1
        pause(10);
    else
        pause(1);
    end
```

```
    %Traslación UPE_1
```

```
    Tras1=vrnode(world,'cil_int_central1');%cargando nodo de VRML
    Tras1.translation=[0 T_inversa(i,7) 0];
    vrdrawnow;
    drawnow;
```

```
    %Traslación UPE_2
```

```
    Tras1=vrnode(world,'cil_int_central2');%cargando nodo de VRML
    Tras1.translation=[0 T_inversa(i,10) 0];
    vrdrawnow;
    drawnow;
```



```

%Traslación UPE_3
Tras1=vrnode(world,'cil_int_central3');%cargando nodo de VRML
Tras1.translation=[0 T_inversa(i,13) 0];
vrdrawnow;
drawnow;

%Traslación RPU
Tras1=vrnode(world,'cil_int_central');%cargando nodo de VRML
Tras1.translation=[0 T_inversa(i,15) 0];
vrdrawnow;
drawnow;

%Traslación PLAT_MOVIL
Tras11=vrnode(world,'Plat_movil');%cargando nodo de VRML.. cambio de la variable en el constructor
Tras11.translation=[0 T_inversa(i,2)*10+23 -T_inversa(i,1)];
vrdrawnow;
drawnow;

%Giro PLAT_MOVIL
Giro1=vrnode(world,'Plat_movil');
if theta_dat ~=0
    Giro1.rotation=[1 0 0 -T_inversa(i,3)/20];
elseif psi_dat ~=0
    Giro1.rotation=[0 1 0 T_inversa(i,4)];
end

%Giro UPE_1
Giro1=vrnode(world,'upe1');
if xm_dat ~=0
    Giro1.rotation=[1 0 0 T_inversa(i,5)*0.0001];
else
    if theta_dat ~=0
        if theta_dat > 0
            Giro1.rotation=[1 0 0 -T_inversa(i,3)/100];
        else
            Giro1.rotation=[1 0 0 -T_inversa(i,3)/50];
        end
    elseif psi_dat ~=0
        Giro1.rotation=[0 1 0 -T_inversa(i,4)*2];
    end
end

%Giro UPE_2
Giro1=vrnode(world,'upe2');
if xm_dat ~=0
    Giro1.rotation=[1 0 0 T_inversa(i,8)*0.0001];
else
    if theta_dat ~=0
        if theta_dat > 0
            Giro1.rotation=[1 0 0 -T_inversa(i,3)/100];
        else
            Giro1.rotation=[1 0 0 -T_inversa(i,3)/50];
        end
    elseif psi_dat ~=0

```

```

        Giro1.rotation=[0 1 0 -T_inversa(i,4)*2];
    end
end

%Giro UPE_3
Giro1=vrnode(world,'upe3');
if xm_dat ~=0
    Giro1.rotation=[1 0 0 T_inversa(i,11)*0.0001];
else
    if theta_dat ~=0
        if theta_dat > 0
            Giro1.rotation=[1 0 0 -T_inversa(i,3)/100];
        else
            Giro1.rotation=[1 0 0 -T_inversa(i,3)/50];
        end
    elseif psi_dat ~=0
        Giro1.rotation=[0 1 0 -(T_inversa(i,4)+3*pi/3)*2];
    end
end

%Giro RPU
Giro1=vrnode(world,'piston_central');
if xm_dat ~=0
    Giro1.rotation=[1 0 0 T_inversa(i,14)*0.0001];
end

end

Graficos_Cin_inversa.m

function varargout = Graficos_Cin_Inversa(varargin)

gui_Singleton = 1;
gui_State = struct('gui_Name',    mfilename, ...
    'gui_Singleton',  gui_Singleton, ...
    'gui_OpeningFcn', @Graficos_Cin_Inversa_OpeningFcn, ...
    'gui_OutputFcn',  @Graficos_Cin_Inversa_OutputFcn, ...
    'gui_LayoutFcn',  [], ...
    'gui_Callback',   []);
if nargin && ischar(varargin{1})
    gui_State.gui_Callback = str2func(varargin{1});
end

if nargin
    [varargout{1:nargout}] = gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
else
    gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
end

function Graficos_Cin_Inversa_OpeningFcn(hObject, eventdata, handles, varargin)

global T_inversa ejeXI

%-----Definir eje X de todas las curvas y nombre y el valor máximo
x = (T_inversa(:,ejeXI))'
```

```

if ejeXI == 1
    tituloX = 'Xm [m]';
elseif ejeXI == 2
    tituloX = 'Zm [m]';
elseif ejeXI == 3
    tituloX = 'Theta [°]';
else
    tituloX = 'Psi [°]';
end

%Definir mínimo y máximo de X para los gráficos
minX=min(min(x));
maxX=max(max(x));

%----Definir eje Y y graficar

%---Brazo UPE_1
%Gráfico q11
y = (T_inversa(:,5))'

axes(handles.AX_q1112)
handles.x = x;
handles.h = plot(x,y);
set(handles.h,'Marker','*','Color',[0.0 0.8 0.8]);
xlabel(tituloX);
ylabel('q11 y q12 [°]');

minY1(1)=min(min(y))
maxY1(1)=max(max(y))

hold on;

%Gráfico q12
y = (T_inversa(:,6))'

handles.h = plot(x,y);
set(handles.h,'Marker','*','Color',[0.5 0 0.5]);

minY1(2)=min(min(y))
minY=min(min(minY1))
maxY1(2)=max(max(y))
maxY=max(max(maxY1))
axis([minX maxX minY maxY])
hold off;

%Gráfico q13
y = (T_inversa(:,7))'

axes(handles.AX_q13)
handles.x = x;
handles.h = plot(x,y);
set(handles.h,'Marker','*','Color',[0.0 0.8 0]);
xlabel(tituloX);
ylabel('q13 [m]');

```

```

minY=min(min(y))
maxY=max(max(y))
axis([minX maxX minY maxY])

%---Brazo UPE_2
%Gráfico q21
y = (T_inversa(:,8))'

axes(handles.AX_q2122)
handles.x = x;
handles.h = plot(x,y);
set(handles.h,'Marker','*','Color',[0.0 0.8 0.8]);
xlabel(tituloX);
ylabel('q21 y q22 [g]');

minY1(1)=min(min(y))
maxY1(1)=max(max(y))

hold on;

%Gráfico q22
y = (T_inversa(:,9))'

handles.h = plot(x,y);
set(handles.h,'Marker','*','Color',[0.5 0 0.5]);

minY1(2)=min(min(y))
minY=min(min(minY1))
maxY1(2)=max(max(y))
maxY=max(max(maxY1))
axis([minX maxX minY maxY])

hold off;

%Gráfico q23
y = (T_inversa(:,10))'

axes(handles.AX_q23)
handles.x = x;
handles.h = plot(x,y);
set(handles.h,'Marker','*','Color',[0.0 0.8 0]);
xlabel(tituloX);
ylabel('q23 [m]');

minY=min(min(y))
maxY=max(max(y))
axis([minX maxX minY maxY])

%---Brazo UPE_3
%Gráfico q31
y = (T_inversa(:,11))'

axes(handles.AX_q3132)
handles.x = x;

```

```

handles.h = plot(x,y);
set(handles.h,'Marker','*','Color',[0.0 0.8 0.8]);
xlabel(tituloX);
ylabel('q31 y q32 [°]');

minY1(1)=min(min(y))
maxY1(1)=max(max(y))

hold on;

%Gráfico q32
y = (T_inversa(:,12))'

handles.h = plot(x,y);
set(handles.h,'Marker','*','Color',[0.5 0 0.5]);

minY1(2)=min(min(y))
minY=min(min(minY1))
maxY1(2)=max(max(y))
maxY=max(max(maxY1))
axis([minX maxX minY maxY])

hold off;

%Gráfico q33
y = (T_inversa(:,13))'

axes(handles.AX_q33)
handles.x = x;
handles.h = plot(x,y);
set(handles.h,'Marker','*','Color',[0.0 0.8 0]);
xlabel(tituloX);
ylabel('q33 [m]');

minY=min(min(y));
maxY=max(max(y));
axis([minX maxX minY maxY])

%---Brazo RPU
%Gráfico q41
y = (T_inversa(:,14))';

axes(handles.AX_q41)
handles.x = x;
handles.h = plot(x,y);
set(handles.h,'Marker','*','Color',[0.0 0.8 0.8]);
xlabel(tituloX);
ylabel('q41 [°]');

minY=min(min(y))
maxY=max(max(y))
if minY == maxY
    minY = minY-minY*0.1;
    maxY = maxY+maxY*0.1;
end

```

```

set(handles.TX_1,'String',minX);
set(handles.TX_2,'String',minY);
set(handles.TX_3,'String',maxX);
set(handles.TX_4,'String',maxY);
axis([minX maxX minY maxY]);

```

```
%Gráfico q42
```

```
y = (T_inversa(:,15))'
```

```

axes(handles.AX_q42)
handles.x = x;
handles.h = plot(x,y);
set(handles.h,'Marker','*','Color',[0.0 0.8 0]);
xlabel(tituloX);
ylabel('q42 [m]');

```

```

minY=min(min(y))
maxY=max(max(y))
axis([minX maxX minY maxY])

```

```

handles.output = hObject;
guidata(hObject, handles);

```

```

function varargout = Graficos_Cin_Inversa_OutputFcn(hObject, eventdata, handles)
varargout{1} = handles.output;

```

```

function PB_Volver_Callback(hObject, eventdata, handles)
close(gcf);

```

```

function PB_TablaI_Callback(hObject, eventdata, handles)
Tabla_Cin_Inversa;

```

Tabla\_Cin\_Inversa.m

```
function varargout = Tabla_Cin_Inversa(varargin)
```

```

gui_Singleton = 1;
gui_State = struct('gui_Name',    mfilename, ...
    'gui_Singleton',  gui_Singleton, ...
    'gui_OpeningFcn', @Tabla_Cin_Inversa_OpeningFcn, ...
    'gui_OutputFcn',  @Tabla_Cin_Inversa_OutputFcn, ...
    'gui_LayoutFcn',  [], ...
    'gui_Callback',   []);
if nargin && ischar(varargin{1})
    gui_State.gui_Callback = str2func(varargin{1});
end

if nargout
    [varargout{1:nargout}] = gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
else
    gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});

```

```
end
```

```
function Tabla_Cin_Inversa_OpeningFcn(hObject, eventdata, handles, varargin)
```

```
global T_inversa
```

```
set(handles.TB_Inversa,'data',T_inversa);
```

```
handles.output = hObject;
guidata(hObject, handles);
```

```
function varargout = Tabla_Cin_Inversa_OutputFcn(hObject, eventdata, handles)
varargout{1} = handles.output;
```

```
function PB_Volver_Callback(hObject, eventdata, handles)
close(gcf);
```

```
Graficos_Cin_Directa.m
```

```
function varargout = Graficos_Cin_Directa(varargin)
```

```
gui_Singleton = 1;
gui_State = struct('gui_Name',    mfilename, ...
                  'gui_Singleton', gui_Singleton, ...
                  'gui_OpeningFcn', @Graficos_Cin_Directa_OpeningFcn, ...
                  'gui_OutputFcn', @Graficos_Cin_Directa_OutputFcn, ...
                  'gui_LayoutFcn', [], ...
                  'gui_Callback', []);
```

```
if nargin && ischar(varargin{1})
    gui_State.gui_Callback = str2func(varargin{1});
end
```

```
if nargin
    [varargout{1:nargout}] = gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
else
    gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
end
```

```
function Graficos_Cin_Directa_OpeningFcn(hObject, eventdata, handles, varargin)
```

```
global T_directa ejeXD rango
```

```
%-----Definir eje X de todas las curvas y nombre y el valor máximo
x = 1:1:10;
```

```
tituloX=('# datos');
maxX=max(max(x))
```

```
%-----Definir eje Y y graficar
```

```

%---Posición final del robot
%Gráfico Xm
y = (T_directa(:,5))'

axes(handles.AX_XmZm)
handles.x = x;
handles.h = plot(x,y);
set(handles.h,'Marker','*','Color',[0 0.8 0.2]);
xlabel(tituloX);
ylabel('Xm y Zm [m]');

minY1(1)=min(min(y))
maxY1(1)=max(max(y))
hold on;

%Gráfico Zm
y = (T_directa(:,6))'

handles.h = plot(x,y);
set(handles.h,'Marker','*','Color',[1 0.5 0]);

minY1(2)=min(min(y))
minY=min(min(minY1))
maxY1(2)=max(max(y))
maxY=max(max(maxY1))
axis([0 maxX minY maxY])
hold off;

%Gráfico Theta
y = (T_directa(:,7))'

axes(handles.AX_ThePsi)
handles.x = x;
handles.h = plot(x,y);
set(handles.h,'Marker','*','Color',[0 0.8 0.8]);
xlabel(tituloX);
ylabel('Theta y Psi [º]');

minY1(1)=min(min(y))
maxY1(1)=max(max(y))
hold on;

%Gráfico Psi
y = (T_directa(:,8))'

handles.h = plot(x,y);
set(handles.h,'Marker','*','Color',[0.5 0 0.5]);

minY1(2)=min(min(y))
minY=min(min(minY1))
maxY1(2)=max(max(y))
maxY=max(max(maxY1))
axis([0 maxX minY maxY])
hold off;

%---Brazo UPE_1

```



```

%Gráfico q11
y = (T_directa(:,9))'

axes(handles.AX_q1112)
handles.x = x;
handles.h = plot(x,y);
set(handles.h,'Marker','*','Color',[0.0 0.8 0.8]);
xlabel(tituloX);
ylabel('q11 y q12 [°]');

minY1(1)=min(min(y))
maxY1(1)=max(max(y))

hold on;

%Gráfico q12
y = (T_directa(:,10))'

handles.h = plot(x,y);
set(handles.h,'Marker','*','Color',[0.5 0 0.5]);

minY1(2)=min(min(y))
minY=min(min(minY1))
maxY1(2)=max(max(y))
maxY=max(max(maxY1))
axis([0 maxX minY maxY])
hold off;

%--Brazo UPE_2
%Gráfico q21
y = (T_directa(:,11))'

axes(handles.AX_q2122)
handles.x = x;
handles.h = plot(x,y);
set(handles.h,'Marker','*','Color',[0.0 0.8 0.8]);
xlabel(tituloX);
ylabel('q21 y q22 [°]');

minY1(1)=min(min(y))
maxY1(1)=max(max(y))
hold on;

%Gráfico q22
y = (T_directa(:,12))'

handles.h = plot(x,y);
set(handles.h,'Marker','*','Color',[0.5 0 0.5]);

minY1(2)=min(min(y))
minY=min(min(minY1))
maxY1(2)=max(max(y))
maxY=max(max(maxY1))
axis([0 maxX minY maxY])

hold off;

```

```

%---Brazo UPE_3
%Gráfico q31
y = (T_directa(:,13))'

axes(handles.AX_q3132)
handles.x = x;
handles.h = plot(x,y);
set(handles.h,'Marker','*','Color',[0.0 0.8 0.8]);
xlabel(tituloX);
ylabel('q31 y q32 [°]');

minY1(1)=min(min(y))
maxY1(1)=max(max(y))
hold on;

%Gráfico q32
y = (T_directa(:,14))'

handles.h = plot(x,y);
set(handles.h,'Marker','*','Color',[0.5 0 0.5]);

minY1(2)=min(min(y))
minY=min(min(minY1))
maxY1(2)=max(max(y))
maxY=max(max(maxY1))
axis([0 maxX minY maxY])

hold off;

%---Brazo RPU
%Gráfico q41
y = (T_directa(:,15))'

axes(handles.AX_q41)
handles.x = x;
handles.h = plot(x,y);
set(handles.h,'Marker','*','Color',[0.0 0.8 0.8]);
xlabel(tituloX);
ylabel('q41 [°]');

minY=min(min(y))
maxY=max(max(y))
axis([0 maxX minY maxY])

handles.output = hObject;
guidata(hObject, handles);

function varargout = Graficos_Cin_Directa_OutputFcn(hObject, eventdata, handles)
varargout{1} = handles.output;

```

```
function PB_Volver_Callback(hObject, eventdata, handles)
close(gcf);
```

```
function PB_TablaD_Callback(hObject, eventdata, handles)
Tabla_Cin_Directa;
```

Tabla\_Cin\_Directa.m

```
function varargout = Tabla_Cin_Directa(varargin)
```

```
gui_Singleton = 1;
gui_State = struct('gui_Name',    mfilename, ...
                  'gui_Singleton', gui_Singleton, ...
                  'gui_OpeningFcn', @Tabla_Cin_Directa_OpeningFcn, ...
                  'gui_OutputFcn', @Tabla_Cin_Directa_OutputFcn, ...
                  'gui_LayoutFcn', [], ...
                  'gui_Callback', []);
if nargin && ischar(varargin{1})
    gui_State.gui_Callback = str2func(varargin{1});
end
```

```
if nargout
    [varargout{1:nargout}] = gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
else
    gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
end
```

```
function Tabla_Cin_Directa_OpeningFcn(hObject, eventdata, handles, varargin)
```

```
global T_directa
```

```
set(handles.TB_Directa,'data',T_directa);
```

```
handles.output = hObject;
guidata(hObject, handles);
```

```
function varargout = Tabla_Cin_Directa_OutputFcn(hObject, eventdata, handles)
varargout{1} = handles.output;
```

```
function PB_Volver_Callback(hObject, eventdata, handles)
close(gcf);
```