



ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL



FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA

**“PROYECTO DE INVESTIGACIÓN MODELO DINÁMICO DE LOS
MOVIMIENTOS DE FLEXO EXTENSIÓN CERVICAL DEL CUELLO
HUMANO, BASADO EN PARES DE RODADURA.”**

**TRABAJO DE TITULACIÓN PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE
MAGÍSTER EN DISEÑO, PRODUCCIÓN Y AUTOMATIZACIÓN INDUSTRIAL.**

ING. MIGUEL ÁNGEL ESCOBAR GUACHAMBALA
maescobar@epoch.edu.ec

DIRECTOR: ING. WILLIAM VENEGAS M.Sc.
william.venegas@epn.edu.ec

CO-DIRECTOR: ING. IVÁN ZAMBRANO M.Sc.
ivan.zambrano.epn.edu.ec

Quito, marzo, 2017

CERTIFICACIÓN

Certifico que el presente trabajo fue desarrollado por MIGUEL ÁNGEL ESCOBAR GUACHAMBALA, bajo nuestra supervisión.

ING. WILLIAM VENEGAS M.Sc.

DIRECTOR DE PROYECTO

ING. IVÁN ZAMBRANO M.Sc.

CO-DIRECTOR DE PROYECTO

DECLARACIÓN

Yo, Miguel Ángel Escobar Guachambala, declaro bajo juramento que el trabajo aquí descrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y, que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

A través de la presente declaración cedo mis derechos de propiedad intelectual correspondiente a este trabajo, a la Escuela Politécnica Nacional, según lo establecido por la Ley de Propiedad Intelectual, por su Reglamento y por la normativa institucional vigente.

Miguel Ángel Escobar Guachambala

DEDICATORIA

A mis queridos padres Vicente y Piedad, a mi esposa Sofía, a mis hijos Miguel y Brian, hermanos y demás familiares, quienes me supieron dar su apoyo incondicional durante el desarrollo y ejecución de este trabajo investigativo.

Miguel Ángel Escobar

AGRADECIMIENTOS

Un agradecimiento a la Escuela Politécnica Nacional, a la Facultad de Ingeniería Mecánica, a todos los docentes que participaron activamente durante mi formación académica de cuarto nivel, a mis tutores que con sus conocimientos encaminaron de la mejor manera mi trabajo de titulación. Un agradecimiento especial a toda mi familia, esposa e hijos y amigos que nunca me hicieron faltar su apoyo incondicional durante el desarrollo y ejecución de este trabajo investigativo.

Miguel Ángel Escobar

ÍNDICE DE CONTENIDOS

Certificación	i
Declaración.....	ii
Dedicatoria	iii
Agradecimientos.....	iv
Índice de contenidos.....	v
Índice de figuras	viii
Índice de tablas.....	x
Resumen	xi
Abstract	xii
INTRODUCCIÓN.....	1
Pregunta de investigación.....	2
Objetivo general.....	2
Objetivos específicos.....	2
1 MARCO TEÓRICO	3
1.1 Métodos para la valoración del cuerpo humano.....	3
1.1.1 Métodos basados en la valoración de la estructura corporal.....	3
1.1.2 Métodos basados en la valoración funcional.....	3
1.2 Fisiología de raquis cervical.....	3
1.2.1 El raquis en conjunto	3
1.2.2 Raquis cervical	4
1.2.3 Rango fisiológico de movilidad de la columna cervical.....	5
1.3 El movimiento de raquis cervical depende de la edad y del sexo.....	7
1.4 Patología de la columna cervical	7
1.4.1 Latigazo cervical.....	7
1.5 Metodologías para la formulación del modelado dinámico.....	8
1.5.1 Modelización dinámica de sistemas mecánicos.....	8
1.5.2 Análisis dinámico mediante pares de rodadura.....	9

1.5.3	Método para determinar fuerzas y momentos en la columna cervical superior 10	
1.5.3.1	La segunda ley de Newton	11
1.5.3.2	Ecuación fundamental de la dinámica de rotación	11
1.6	Modelos Biomecánicos	14
1.7	Laboratorio de análisis de movimientos humanos	16
1.8	Software de análisis de video y modelado matemático Tracker	17
1.9	Tratamiento de datos experimentales	17
1.9.1	Técnicas de suavizado	17
1.9.1.1	Ajustes paramétricos	17
1.9.1.2	Ajustes no paramétricos	18
2	METODOLOGÍA	19
2.1	Cinemática del movimiento de flexo extensión cervical basado en análisis de video	19
2.1.1	Proceso de toma de datos experimentales en 2D del movimiento de flexo extensión de la columna cervical mediante análisis de video	20
2.1.1.1	Análisis del movimiento de flexo extensión del cuello mediante análisis de video.....	20
2.1.1.2	Análisis cinemático del movimiento de flexo extensión cervical para varios ciclos, en un periodo de tiempo $0 \leq t \leq 46.5[s]$, software Tracker	22
2.1.1.3	Diagrama de posiciones de dos marcadores ubicados estratégicamente sobre la cabeza, para varios ciclos durante un tiempo de $0 \leq t \leq 46.5[s]$, software Tracker	23
2.1.1.4	Diagramas cinemáticos de dos marcadores ubicados estratégicamente sobre la cabeza, para un ciclo de flexo extensión durante un tiempo de $28 \leq t \leq 39[s]$, software Tracker.....	25
2.1.1.5	Diagramas cinemáticos de dos marcadores ubicados estratégicamente sobre la cabeza, durante el movimiento de flexión cervical, en el periodo de tiempo $28 \leq t \leq 33[s]$, software Tracker.	26

2.1.1.6	Diagramas cinemáticos de dos marcadores ubicados estratégicamente sobre la cabeza, durante el movimiento de extensión cervical, en el periodo de tiempo $33 \leq t \leq 39[s]$, software Tracker	28
2.1.2	Suavizado, trayectorias del movimiento de flexo extensión cervical	29
2.1.2.1	Suavizado B-spline, trayectorias de flexo extensión cervical, varios ciclos	29
2.1.2.2	Suavizado, movimiento de extensión cervical, un ciclo	31
2.1.2.3	Cálculo de la aceleración del centro de gravedad de la cabeza.....	32
2.2	Modelo dinámico de los movimientos de flexo extensión cervical	35
2.2.1	Introducción.....	35
2.2.2	Diagrama de cuerpo libre de fuerzas y momento de la cabeza.....	38
2.2.3	El movimiento de la cabeza en el plano sagital (plano x y)	38
2.2.4	Consideraciones fundamentales para el análisis dinámico inverso.....	40
2.2.5	Resumen de datos importantes para el análisis dinámico inverso	41
2.2.6	Cálculo de las fuerzas y momento en los cóndilos occipitales	42
2.2.6.1	Fuerzas de reacción en los cóndilos occipitales	42
2.2.6.2	Momento generado en los cóndilos occipitales.....	44
3	RESULTADOS Y DISCUSIÓN.....	46
3.1	Resultados	46
3.2	Discusión.....	50
4	CONCLUSIONES	53
	Referencias bibliográficas.....	55
	Anexos	i

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.1 Grados de libertad del movimiento de la columna cervical	3
Figura 1.2 El Raquis, eje mantenido.	4
Figura 1.3. Columna cervical	4
Figura 1.4 Raquis cervical, lado superior e inferior.	5
Figura 1.5 (a) Flexión cervical. (b) Extensión cervical.	6
Figura 1.6. Flexión lateral.	6
Figura 1.7. Rotación cervical.....	6
Figura 1.8 Movimientos de la columna cervical durante la fase I, fase II	8
Figura 1.9 Lesiones producidas por latigazo suelen afectar al segmento C4-C5	8
Figura 1.10. Alternativas para determinar las ecuaciones del movimiento.	9
Figura 1.11 Centroides del cuello en el movimiento de flexión-extensión cervical.....	10
Figura 1.12 (a) Modelo del par de rodadura que corresponde a un movimiento de flexión-extensión real. (b) Modelo simplificado par de rodadura para la simulación del movimiento de la cabeza.	10
Figura 1.13 Origen del marco de referencia inerciales x, y, z.....	12
Figura 1.14 Modelo biomecánico del cuerpo humano representados como palancas.	14
Figura 1.15. Analogía brazo – palanca	15
Figura 1.16 Esquema de momentos y cargas en el codo.....	15
Figura 1.17 Medición de ángulos entre segmentos.....	15
Figura 1.18 Análisis de los movimientos humanos utilizando estereofotogrametría. ...	16
Figura 1.19 Interfaz software Tracker	17
Figura 2.1 Experimentación, movimiento de flexo extensión cuello.....	20
Figura 2.2 Sistema de referencia de coordenadas de la cabeza.	21
Figura 2.3 Análisis del movimiento flexo extensión cervical (análisis de video).....	22
Figura 2.4. Cabeza, trayectorias (x, y), flexo extensión, varios ciclos.....	23
Figura 2.5 Sistema de coordenadas de la cabeza.	36
Figura 2.6 Centro de gravedad de la cabeza	37

Figura 2.7 Diagrama de fuerzas y momento que actúan en el cuello – cabeza, posición normal.....	38
Figura 2.8. Diagrama de fuerzas y momento actúan en el sistema cuello – cabeza, posición de extensión cervical.	39
Figura 2.9 Flexión cervical (45°) y extensión cervical (-45°).	42
Figura 2.10 Diagrama de cuerpo libre, fuerzas y momentos en los cóndilos occipitales.	43
Figura 2.11 Fuerzas de reacción en los cóndilos occipitales.....	44
Figura 2.12.- Momento generado en el cóndilo occipital.	45
Figura 3.1.- Flexo extensión cervical, varios ciclos.	46
Figura 3.2. Posiciones (x, vs. y) flexión cervical, un ciclo.....	47
Figura 3.3 Ajuste posiciones en el eje x.....	47
Figura 3.4 Ajuste posiciones en el eje y.....	48
Figura 3.5. Velocidad angular.	48
Figura 3.6 Ajuste velocidad angular.	48
Figura 3.7 Aceleración angular.....	49
Figura 3.8 Ajuste aceleración angular.....	49
Figura 3.9 Fuerzas de reacción que se generan en los cóndilos occipitales.....	50
Figura 3.10.- Momento máximo generado en los cóndilos occipitales.....	50
Figura 3.11 Valores de fuerza medidos por isocinética cervical.	51
Figura 3.12. Valores de fuerza mediante análisis de video.	51
Figura 3.13 Momento del cuello en los cóndilos occipitales de un voluntario.	52
Figura 3.14 Momento calculado en los cóndilos occipitales mediante análisis de video.	52

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 2.1 Posiciones, velocidades, aceleraciones flexo extensión, varios ciclos, dos marcadores, mediante análisis de video (software Tracker).....	24
Tabla 2.2 Posiciones, velocidades, aceleraciones flexo extensión, un ciclo, dos marcadores.....	25
Tabla 2.3 Posiciones, velocidades, aceleraciones, flexión cervical, un ciclo, dos marcadores.....	26
Tabla 2.4 Posiciones, velocidades, aceleraciones, extensión cervical, un ciclo, dos marcadores.....	28
Tabla 2.5.- Ajuste de la posición, velocidad, aceleración, flexo extensión, varios ciclos, dos marcadores.....	30
Tabla 2.6.- Ajuste de la posición, velocidad, aceleración, flexo extensión, un ciclo, dos marcadores.....	31
Tabla 2.7 Velocidad y aceleración angular de la cabeza, sin filtrar los datos.	33
Tabla 2.8.Velocidad y aceleración angular de la cabeza, datos filtrados por B-spline.	34
Tabla 2.9 Aceleración del centro de gravedad de la cabeza	35
Tabla 2.10.- Resumen, variables para el análisis dinámico de la columna cervical.....	41

RESUMEN

Un modelo dinámico de los movimientos de flexo extensión cervical del cuello humano, ha sido propuesto en la presente investigación. Para el desarrollo de esta investigación se realizó un estudio dinámico inverso y analogía con los sólidos rígidos, se realizó el estado del arte para determinar y citar datos antropométricos relacionados con las propiedades físicas y geométricas de la cabeza, por ejemplo: masa, momento de inercia, posición de los cóndilos occipitales, centro de masa, el ángulo de giro y otros. Partiendo del principio de la dinámica inversa fue necesario obtener datos experimentales de aceleración instantánea del centro de gravedad de la cabeza mediante análisis de video, para lo cual fue necesario filmar un video a 30 fotogramas por segundo (fps), esta grabación muestra un individuo realizando movimientos de flexo extensión cervical en el plano sagital durante un periodo de tiempo determinado; la finalidad de realizar el análisis de video del movimiento de flexo extensión cervical es obtener las coordenadas (x, y) de la trayectoria que sigue la cabeza (marcadores) en función del tiempo, posteriormente se realizó un proceso de filtrado para la rectificación de los datos experimentales para eliminar en lo posible el ruido presente en los datos. Finalmente se realizó de ajuste de las trayectorias y el correspondiente cálculo de sus derivadas (velocidad instantánea y aceleración instantánea). Mediante algoritmos de cálculo generados en Matlab se pudo realizar los cálculos de las fuerzas de reacción y momento que se genera en los cóndilos occipitales para varios ciclos de movimiento de flexo extensión cervical.

Palabras clave: cóndilos occipitales, dinámica inversa, flexo extensión cervical.

ABSTRACT

The aim of this investigation was to design a dynamic model of the cervical flexion-extension movements of the human neck. A dynamic-inverse study and an analogy with rigid solid materials and the state of the art were carried out to determine and mention anthropometric data related to physical and geometrical properties of the head. For example: mass, moment of inertia, position of occipital condyles, center of mass, turning angle and so on. From the inverse dynamics, it was necessary to get experimental data of instantaneous acceleration of the gravity center of the head that is why it was necessary to record a video at 30 frames per second (FPS). This recording shows a person in motion cervical flexion- extension in a sagittal plane during a given time period. By analyzing the movements, the head trajectory coordinates (x,y) according to the time could be gotten. Later, we made a filtration process for rectification of experimental data in order to eliminate the noise in the data. Finally, we carried out trajectory settings and the calculation of its derivatives (instantaneous velocity and acceleration). The calculations of reaction forces and momentum generating in the occipital condyles for several movement cycles of cervical flexion extension have been carried by Matlab algorithms.

Keywords: Occipital condyles, inverse dynamics, flexion extension cervical.

INTRODUCCIÓN

El presente tema de investigación denominado modelado dinámico de los movimientos de flexo extensión cervical del cuello humano, trata de un enfoque que permite conjugar la simplicidad de modelos de un grado de libertad con la complejidad del movimiento real del cuello; este tema es de gran interés en la investigación biomecánica debido a sus importantes aplicaciones. Los resultados generados del análisis dinámico inverso, pueden servir como información técnica a considerarse durante el proceso de diseño de asientos de seguridad para automóvil, prevención de lesiones laborales, etc.

Generalmente el análisis de movimientos de segmentos corporales se los realiza mediante dinámica inversa, es decir se parte de la aceleración como información inicial para llegar a calcular las fuerzas que provocan el movimiento. Los datos de aceleración de los diferentes segmentos corporales que conforman en cuerpo humano, se las obtienen experimentalmente mediante prácticas en laboratorios de análisis de movimientos humanos.

El objetivo fundamental de esta investigación es el análisis dinámico del movimiento de flexo extensión cervical en el plano sagital (xy), tomando en cuenta un movimiento a baja velocidad. Para obtener las fuerzas y momento que producen el movimiento de la cabeza a partir de las aceleraciones, es necesario realizar una analogía entre la estructura compleja del sistema cuello - cabeza con los sólidos rígidos, de esta forma es posible aplicar las ecuaciones de la segunda ley de Newton y la ecuación fundamental de la dinámica rotacional

El cuello humano comprende una estructura compleja comprendida por vértebras, ligamentos, músculos, etc., debido a esto, la estimación de las fuerzas y momento que actúan sobre el cuello humano deberá ser analizado mediante dinámica inversa, es decir aplicando técnicas de análisis de video se puede obtener las posiciones de n marcadores de posición situados sobre puntos estratégicos de la cabeza durante el movimiento de flexo extensión cervical, de esta manera se podrá obtener posiciones (x y y) para cada instante, durante un determinado tiempo; los datos de posiciones de los marcadores se pueden tratar mediante funciones B-splines para disminuir el ruido en los datos experimentales, finalmente se puede obtener la velocidad y la aceleración del centro de gravedad de la cabeza.

Pregunta de investigación

¿Cuáles serán las magnitudes de las fuerzas y momentos actuantes durante el movimiento de flexo extensión cervical en el plano sagital?

Objetivo general

- Modelar la dinámica de los movimientos de flexo extensión cervical del cuello humano, basado en un par de rodadura.

Objetivos específicos

- Definir los movimientos permisibles en flexo extensión.
- Definir las cargas y momentos a las que está sometido el cuello.
- Definir la geometría del cuello para hacer analogía con los sólidos rígidos.
- Modelar la dinámica del cuello en flexo extensión, mediante la metodología más adecuada para este caso.

CAPÍTULO 1

1 MARCO TEÓRICO

1.1 Métodos para la valoración del cuerpo humano

1.1.1 Métodos basados en la valoración de la estructura corporal

Estos métodos de valoración de la estructura corporal son considerados como invasivos, al exponer a los pacientes a Rayos X, Tomografías, Resonancia Magnética, entre otros, mediante el uso de estas técnicas de última tecnología se crean imágenes computarizadas de órganos, esqueleto, etc., con la finalidad de detectar lesiones internas en el cuerpo humano.

1.1.2 Métodos basados en la valoración funcional

Estos métodos de valoración funcional son considerados como no invasivos y se emplean para evaluar las características de un individuo. Mediante la verificación de la correcta funcionalidad del segmento corporal según sus grados de libertad, se puede diagnosticar si el segmento corporal sufre de alguna lesión. En la figura 1.1, “se describen los métodos de apoyo al diagnóstico basados en el análisis de la funcionalidad cervical” (Baydal Bertomen, 2012))

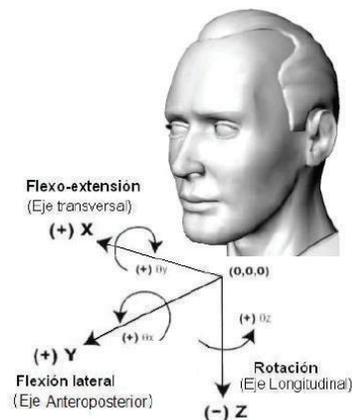


Figura 1.1 Grados de libertad del movimiento de la columna cervical
(Fuente: (Baydal Bertomen, 2012))

1.2 Fisiología de raquis cervical

1.2.1 El raquis en conjunto

La columna vertebral o raquis está comprendida por cinco secciones que son: cervical, dorsal, lumbar, sacra y coxis; además esta estructura debe combinar la rigidez y flexibilidad a la vez. “La flexibilidad del eje raquídeo se debe a su configuración de

múltiples piezas superpuestas unidas entre sí mediante elementos ligamentosos musculares. De este modo, esta estructura puede deformarse aun permaneciendo rígida bajo la influencia de tensores musculares” (Kapandji, 1998). En la figura 1.2 se puede observar diferentes curvaturas del raquis, dependiendo de la postura que adopte el individuo.

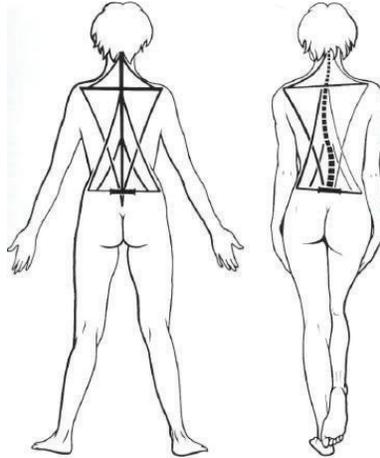


Figura 1.2 El Raquis, eje mantenido.
(Fuente: (Kapandji, 1998))

1.2.2 Raquis cervical

El raquis cervical se compone de siete vértebras que son C1 (atlas), C2 (axis), C3, C4, C5, C6, C7), “las vértebras cervicales son todas del mismo tipo, excepto el atlas y el axis, que difieren entre si y de las demás vértebras cervicales” (Kapandji, 1998).

En la figura 1.3 se puede observar las siete vértebras enunciadas anteriormente. La base del cráneo se conecta con la primera vértebra C1 (atlas) mediante los cóndilos occipitales, de forma similar la última vértebra C7 se articula a la parte superior del raquis dorsal.

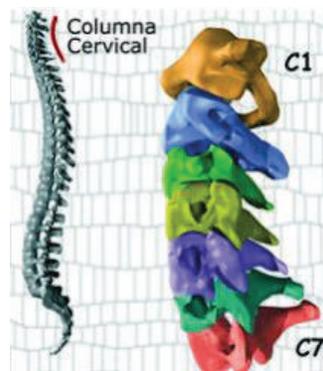


Figura 1.3. Columna cervical
Fuente: (Fernández Coca, 2009)

En la figura 1.4 se observa que la columna cervical a su vez se divide en dos partes anatómicamente y funcionalmente distintas que son:

El raquis cervical superior (1), que se compone de la primera y segunda vértebra (C1, C2 respectivamente), además estas vértebras se articulan con la cabeza mediante el occipital.

El raquis cervical inferior (2), se compone de la meseta inferior de la segunda vértebra (axis) hasta la meseta superior de la primera vértebra dorsal.

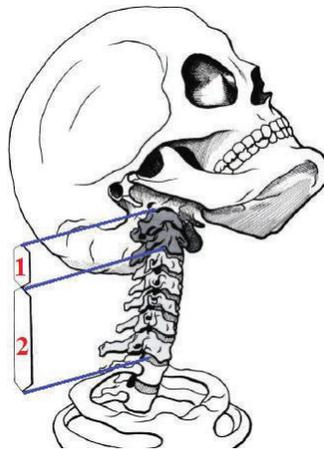


Figura 1.4 Raquis cervical, lado superior e inferior.
Fuente: (Kapandji, 1998)

1.2.3 Rango fisiológico de movilidad de la columna cervical

Flexo extensión cervical: “Se dice que el 50% de la flexión y extensión proviene de la articulación atlanto occipital y el 50 % de la rotación de la articulación atlanto axial. El resto se distribuye en toda la columna cervical.” (Vargas Sanabria, 2012)

En la figura 1.5 a, la paciente realiza el movimiento de flexión cervical tomando como punto de referencia la posición normal de la cabeza, para considerar una flexión total la paciente debe tocar el pecho con el mentón.

En la figura 1.5 b, la paciente realiza el movimiento de extensión cervical tomando como punto de referencia la posición normal de la cabeza, para considerar una extensión total el paciente debe mirar al techo.

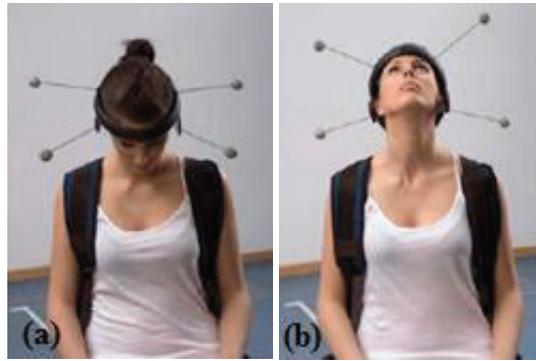


Figura 1.5 (a) Flexión cervical. (b) Extensión cervical.
(Fuente: (Baydal Bertomen, 2012))

Flexión Lateral: En la figura 1.6 se muestra una persona realizando movimientos de flexión lateral a la derecha e izquierda, este movimiento del raquis cervical se produce cuando el paciente toca el hombro con su oreja. Debe quedar el mentón casi alineado con el hombro de cada lado.



Figura 1.6. Flexión lateral.
(Fuente: (Baydal Bertomen, 2012))

Rotación: En la figura 1.7 se muestra una persona realizando movimientos de rotación de la columna cervical, que consiste en pedirle a la paciente que su mentón quede casi alineado con el hombro de cada lado.

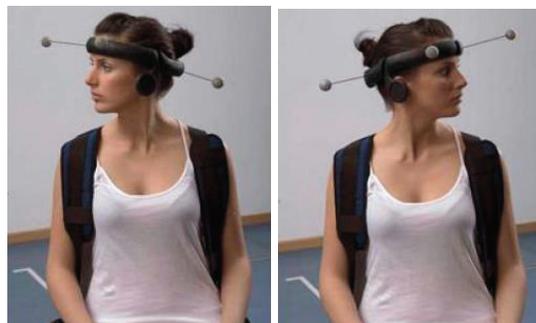


Figura 1.7. Rotación cervical.
(Fuente: (Baydal Bertomen, 2012))

1.3 El movimiento de raquis cervical depende de la edad y del sexo

Los rangos de movilidad de la columna cervical en sus diferentes grados de libertad de movimiento, dependen principalmente de varios factores entre los más importantes son la edad y el sexo. Esta afirmación se puede entender fácilmente si observamos los movimientos de un bebé de entre un año hasta cinco años, en donde todas sus articulaciones son muy flexibles; por otra parte si observamos los movimientos de una persona adulta son menos flexibles.

“En 1992, Youdas publicó información definitiva acerca de los rangos de movilidad de la columna cervical, medido mediante electrogonimetría y con pruebas de movilidad pasiva” (Baydal Bertomen, 2012))

1.4 Patología de la columna cervical

El raquis cervical puede padecer de múltiples lesiones y dolores, entre las que se puede tener enfermedades muy raras. Se clasifican los problemas de dolor cervical en función de la sintomatología clínica, entre las más comunes tenemos:

- Cervicalgias agudas.
- Torticollis aguda
- Nucaalgias musculares.
- Latigazo cervical, etc.

Los tratamientos y rehabilitación de la columna cervical son de mucho cuidado y complejidad; debido a que sobre la región cervical se asienta la cabeza que tiene un peso alrededor de los 6 kg según datos de investigaciones antropométricas.

1.4.1 Latigazo cervical

Son numerosos los estudios realizados acerca del síndrome de latigazo cervical, en lo referente al diagnóstico y su correspondiente tratamiento.

La lesión de la columna cervical conocida como latigazo cervical generalmente se produce en accidentes de automóviles, debido al impacto posterior en automóviles que produce la aceleración repentina de la cabeza del conductor, dando como consecuencia el sobre esfuerzo de vértebras y ligamentos que conforman el cuello humano.

En la siguiente figura 1.8 se muestra las curvaturas que adquiere el raquis cervical debido al impacto posterior en vehículos.

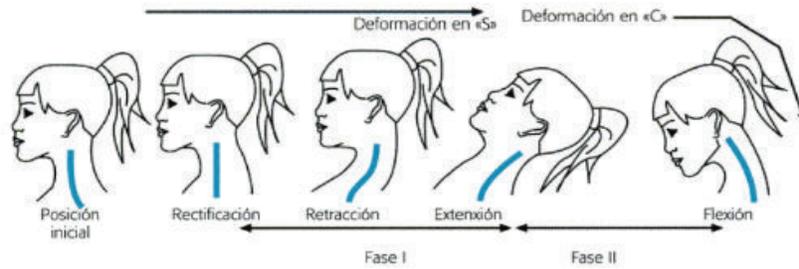


Figura 1.8 Movimientos de la columna cervical durante la fase I, fase II
(Fuente: (Torres Cueco, 2008))

“Durante una lesión en latigazo, las articulaciones cigapofisarias que sufren el máximo estrés corresponden al nivel C4-C5” (Imhof & Cols, 2011), ver figura 1.9.



Figura 1.9 Lesiones producidas por latigazo suelen afectar al segmento C4-C5
(Fuente: (Imhof & Cols, 2011))

1.5 Metodologías para la formulación del modelado dinámico

1.5.1 Modelización dinámica de sistemas mecánicos

Para dar solución al problema Biomecánico, la ingeniería hace uso de una herramienta fundamental denominada Mecánica Computacional, que es la disciplina que engloba los métodos de cálculo, programación, simulación numérica, control, verificación y ensayos requeridos para el estudio de la mecánica y sus aplicaciones mediante el uso del computador.

Los Objetivos de la Mecánica Computacional son:

- Procedimiento analítico para modelizar el comportamiento dinámico de sistemas mecánicos complejos.
- Empleo de coordenadas generalizadas.
- Aplicación de las ecuaciones de restricción.
- Obtención de las ecuaciones del movimiento del sistema mecánico.

En la figura 1.10 se observa las alternativas para determinar las ecuaciones de movimiento, para el caso específico del análisis dinámico de segmentos corporales lo más adecuado es realizar el cálculo mediante dinámica inversa, porque esta metodología nos permite calcular fuerzas, momentos mediante sistemas lineales simples de resolver, además porque se trata de segmentos corporales. (Mata, 2015)

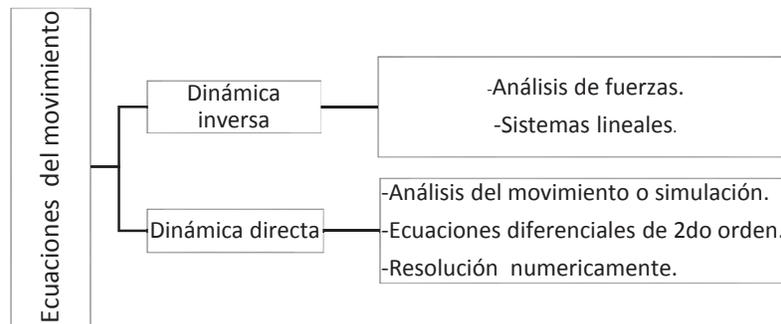


Figura 1.10. Alternativas para determinar las ecuaciones del movimiento.
(Fuente: (Mata, 2015))

1.5.2 Análisis dinámico mediante pares de rodadura

En la actualidad el estudio de la dinámica del movimiento humano, es decir el análisis del movimiento de cada uno de sus segmentos corporales es muy importante por sus diversas aplicaciones en campos clínicos y ergonómicos. Se han planteado modelos biomecánicos para diferentes segmentos corporales del cuerpo humano, se puede citar estructuras anatómicas complejas como el raquis lumbar, raquis cervical (cuello), hombros, estos segmentos corporales se han simplificado a sólo uno o dos pares de rodadura que facilitan el análisis de su movimiento.

El modelo biomecánico de la columna cervical propuesto “es un modelo de un grado de libertad en base a la rodadura sin deslizamiento de un par cinemático (par rodante) que se define por las axoides fijos y móviles que resultan de movimiento entre dos cuerpos” (Díaz Rodríguez, Valera, Page, Besa, & Mata, 2016). Los axoides fijos y móviles que se generan durante el movimiento de flexo extensión cervical en analogía con los pares de rodadura (un grado de libertad) se ilustra en la siguiente figura.

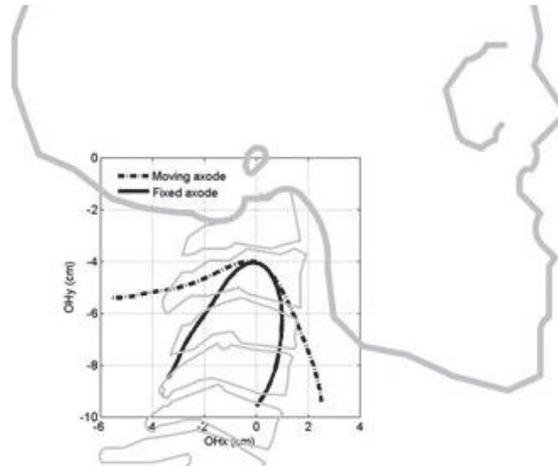


Figura 1.11 Centroides del cuello en el movimiento de flexión-extensión cervical.
(Fuente: (Díaz Rodríguez, Valera, Page, Besa, & Mata, 2016))

En las figura 1.11 y figura 1.12 se ilustra el modelo de par de rodadura que simplifica el movimiento de flexo extensión cervical a un grado de libertad funcional.

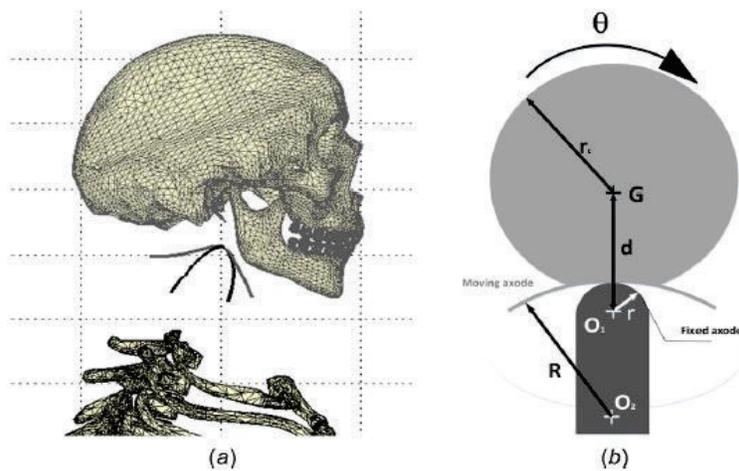


Figura 1.12 (a) Modelo del par de rodadura que corresponde a un movimiento de flexión-extensión real. (b) Modelo simplificado par de rodadura para la simulación del movimiento de la cabeza.

(Fuente: (Díaz Rodríguez, Valera, Page, Besa, & Mata, 2016))

1.5.3 Método para determinar fuerzas y momentos en la columna cervical superior

Laura Vila Giraut en el año 2010, propone una metodología para calcular fuerzas y momentos en la región superior del cuello humano, para lo cual determina que el punto de rotación de la cabeza durante el movimiento de flexo extensión cervical son los cóndilos occipitales. En la investigación desarrollada por la autora anteriormente citada, hace referencia a las propiedades físicas de la cabeza humana (masa, momento de inercia, posición del centro de gravedad y cóndilos occipitales), ya que son importantes

en el cálculo de las cargas del cuello. Para lograr este objetivo se realiza analogía con los sólidos rígidos, por lo tanto las fuerzas y los momentos en el cuello se encuentran aplicando la dinámica de un sólido rígido. La autora plantea determinar las fuerzas y momento actuantes en los cóndilos occipitales mediante la aplicación de la segunda ley de Newton en el plano y la ecuación fundamental de la rotación.

1.5.3.1 La segunda ley de Newton

La segunda ley de Newton establece que “cuando una fuerza desbalanceada actúa en una partícula ésta se acelera en la dirección de la fuerza con una magnitud que es proporcional a ésta” (Hibbeler, 2010).

La ecuación matemática que relaciona las fuerzas externas que actúan sobre un elemento y su correspondiente masa es la siguiente:

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}_{CG} \quad \text{Ec. (1)}$$

Donde:

\vec{F} : Fuerzas externas

m: masa.

\vec{a}_{CG} : Aceleración medida.

La ecuación anterior se la expresar específicamente para cada eje coordenado (x,y,z).

$$\sum F_x = m \cdot \vec{a}_{CGx}$$

$$\sum F_y = m \cdot \vec{a}_{CGy}$$

$$\sum F_z = m \cdot \vec{a}_{CGz}$$

1.5.3.2 Ecuación fundamental de la dinámica de rotación

Esta ecuación rige la rotación de un sólido rígido provocada por un momento M y está representada por la siguiente ecuación:

$$M = I \alpha$$

Donde:

I: Momento de inercia de la masa.

α : Aceleración angular

Para el análisis dinámico plano de cuerpos rígidos, las cargas se consideran simétricos respecto a un plano de referencia fijo. “Como el movimiento de un cuerpo se puede ver dentro del plano de referencia, todas las fuerzas que actúan en el cuerpo pueden proyectarse en el plano” (Hibbeler, 2010).

En la figura 1.13 se muestra el origen del marco de referencia inercial x, y, z que coincide con un punto arbitrario P en el cuerpo, además se puede observar las fuerzas externas, peso propio, momento, aceleración angular que actúan sobre este cuerpo rígido arbitrario.

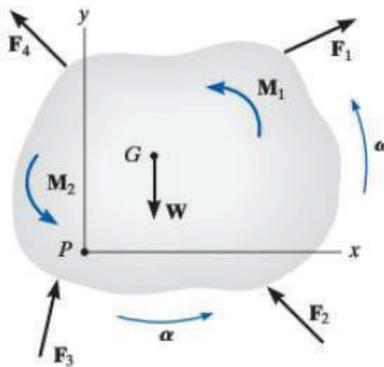


Figura 1.13 Origen del marco de referencia inerciales x, y, z.
(Fuente: (Hibbeler, 2010))

Ley de Euler: Este principio fundamental de la dinámica se refiere a la rotación de un cuerpo rígido a causa de un momento generado por una fuerza aplicada.

La rotación que puede adquirir un cuerpo rígido se la puede representar mediante la siguiente ecuación:

$$M_0 = \frac{d}{dt} L_0 \quad \text{Ec. (2)}$$

Donde:

M_0 : Momento generado por fuerzas externas respecto a un origen establecido.

L_0 : Momento angular; el momento angular se lo puede calcular mediante la siguiente ecuación:

$$L_0 = I_0 \cdot w$$

Donde:

I_0 : Matriz de momento de inercia con respecto al punto de origen O.

w: Es la velocidad angular del cuerpo.

A continuación se establece un sistema de coordenadas en movimiento y se considera que el momento de inercia (I_0) se mantiene constante, por lo que se simplifica los cálculos. Desarrollando la ecuación (2) resulta lo siguiente:

$$\vec{M}_0 = \frac{\partial L_0}{\partial t} + \vec{\omega}_R \times \vec{L}_0 \quad \text{Ec. (3)}$$

Donde:

ω_R : Velocidad angular de los ejes móviles. Si los ejes están fijos al cuerpo, $\vec{\omega}_R = \vec{\omega}$

Resolviendo la ecuación (3) se tiene:

$$\vec{M}_0 = \frac{\partial(I_0 \cdot \vec{\omega})}{\partial t} + \vec{\omega} \times (I_0 \cdot \vec{\omega}) = I_0 \cdot \vec{\alpha} + \vec{\omega} \times (I_0 \cdot \vec{\omega}) \quad \text{Ec. (4)}$$

Donde: $\frac{\partial(\vec{\omega})}{\partial t}$, fue reemplazado por $\vec{\alpha}$ (velocidad angular del cuerpo).

“El tensor de inercia I_0 es calculado con respecto al principal eje anatómico de la cabeza, con su origen en el centro de gravedad de la cabeza” (Vila Giraut, 2010), entonces se convierte en diagonal no cero:

$$I_0 = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix}$$

La ecuación (4) es ahora escrita en forma de vector:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} \quad \text{Ec. (5)}$$

Desarrollando la ecuación (5) al final resulta lo siguiente:

$$\begin{cases} \sum M_x = I_x \cdot \alpha_x + (I_z - I_y) \cdot \omega_y \cdot \omega_y \\ \sum M_y = I_y \cdot \alpha_y + (I_x - I_z) \cdot \omega_x \cdot \omega_z \\ \sum M_z = I_z \cdot \alpha_z + (I_y - I_x) \cdot \omega_x \cdot \omega_y \end{cases} \quad \text{Ec. (6)}$$

Las tres ecuaciones anteriores son conocidas como ecuaciones de Euler y son las ecuaciones de movimiento para los análisis cinéticos en tres dimensiones (3D).

Finalmente las ecuaciones anteriores se reducen, debido al hecho que se asumen que el movimiento de flexo extensión del cuello humano se realiza en el plano xy, por lo tanto las variables α_x , α_y , ω_y , $\omega_x = 0$. Así, las ecuaciones de Euler se escriben como:

$$\sum M_z = I_z \cdot \alpha_z \quad \text{Ec. (6)}$$

Esta última ecuación se utilizara para el cálculo del momento generado en los cóndilos occipitales debido al movimiento de flexo extensión en el plano sagital.

1.6 Modelos Biomecánicos

Los modelos biomecánicos desarrollados para representar los diferentes segmentos corporales que conforman un individuo, tienen la principal función de facilitar la aplicación de las leyes de la Mecánica, teoría de Máquinas y Mecanismos, mediante la consideración de analogías entre estructuras complejas del cuerpo humano con mecanismos sencillos como por ejemplo palancas, levas, rodillos, etc. Este método es muy utilizado para estudiar casos específicos de la motricidad humana. Actualmente se cuenta con programas creados especialmente para la simulación de la motricidad humana partir de modelos biomecánicos.

En la figura 1.14 muestra el cuerpo humano representado por palancas, estos elementos mecánicos tienen la finalidad de representar motricidad de la cabeza y de los miembros superiores e inferiores.



Figura 1.14 Modelo biomecánico del cuerpo humano representados como palancas.
(Fuente: (Vila Giraut, 2010))

En la figura 1.15 se plantea una analogía del brazo con una palanca, además se identifican la resistencia, palanca, punto de apoyo y potencia, todas estas variables hacen posible generar un movimiento del brazo en la vida diaria.

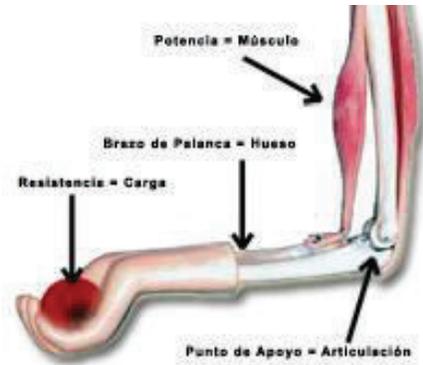


Figura 1.15. Analogía brazo – palanca
(Fuente: (Diego-Mas, 2015))

En la figura 1.16 se muestra los momentos y cargas en el codo.

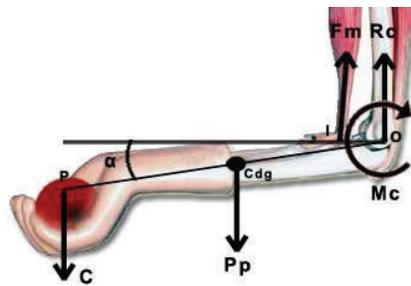


Figura 1.16 Esquema de momentos y cargas en el codo.
(Fuente: (Diego-Mas, 2015))

En la figura 1.17 se muestra la forma de medición de los ángulos entre segmentos

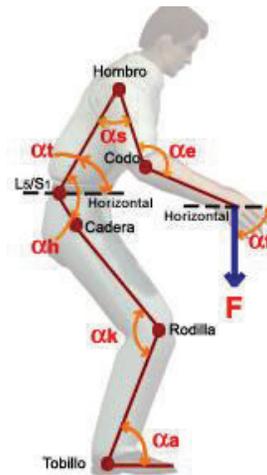


Figura 1.17 Medición de ángulos entre segmentos.
(Fuente: (Diego-Mas, 2015))

1.7 Laboratorio de análisis de movimientos humanos

En este tipo de laboratorios se analiza los movimientos corporales de un individuo durante la ejecución de actividades de la vida cotidiana. Los procedimientos de valoración funcional (valoración no invasiva) mediante las tecnologías de videogrametría, fotogrametría, en otros permiten medir de manera detallada y precisa los parámetros de cinemática, dinámica, etc.

Mediante el uso de esta tecnología se puede proporcionar al médico especialista los datos cuantitativos que permita diagnosticar y determinar el tratamiento adecuado para su rehabilitación.

En la figura 1.18 se muestra el equipo de análisis de videogrametría, que tiene la finalidad de capturar los movimientos en 3D de los diferentes segmentos corporales.

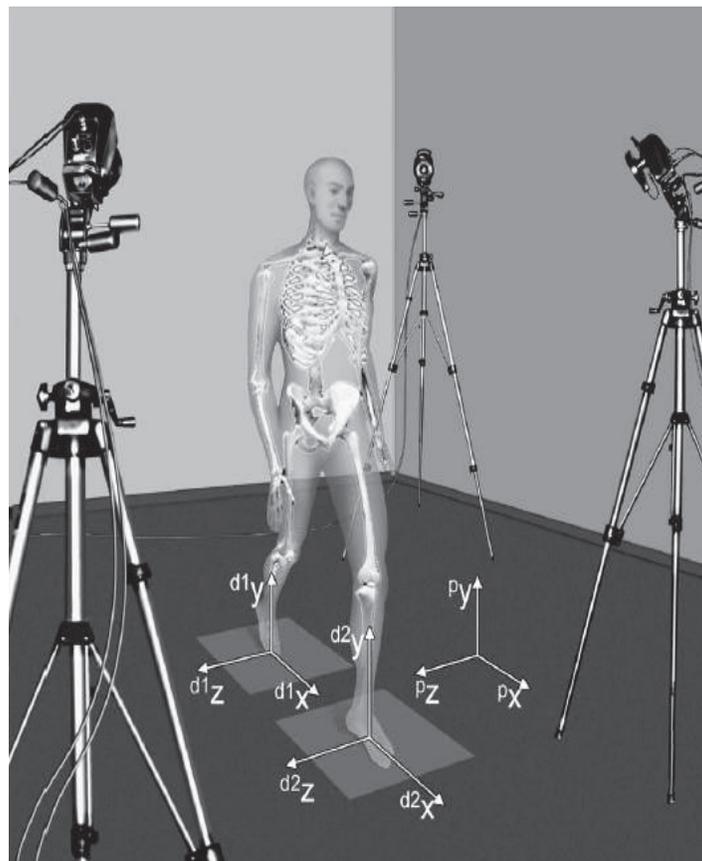


Figura 1.18 Análisis de los movimientos humanos utilizando estereofotogrametría.
(Fuente: (Cappozzo & Leardini, 2004))

1.8 Software de análisis de video y modelado matemático Tracker

“Tracker es una herramienta gratuita de análisis de video y herramienta de modelado matemático basada en framework Java de Open Source Physics (OSP). Está diseñado para ser utilizado en educación física. La biblioteca Digital AAPT ComPADRE es una red de colecciones de recursos gratuitos en línea que apoyan a profesores, estudiantes y profesores de Física y Astronomía” (ComPADRE Digital Library, 2009). En la figura 1.19 se muestra la interfaz del software Tracker.

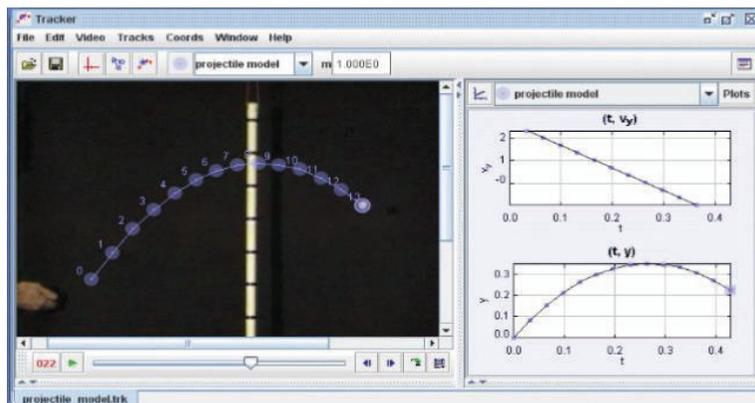


Figura 1.19 Interfaz software Tracker
(Fuente: (ComPADRE Digital Library, 2009))

1.9 Tratamiento de datos experimentales

El tratamiento de datos experimentales es un paso previo en el análisis de movimientos, además la transformación de series discretas a funciones continuas y derivables es imprescindible.

1.9.1 Técnicas de suavizado

1.9.1.1 Ajustes paramétricos

Matlab ofrece toolbox para el suavizado de funciones, por ejemplo:

- regress : para ajustes lineales
- polyfit : para ajustes polinómicos
- nlfite: ajuste no lineal (Gauss-Newton)
- lsqcurvefit: dentro del toolbox Optimization

“Sin embargo estos ajustes paramétricos no sirven en aplicaciones biomecánicas, además hay que considerar que no existe un modelo de ecuación conocida” (Page, 2015).

1.9.1.2 Ajustes no paramétricos

Ajustan las observaciones a una función continua y diferenciable, sin ecuación predeterminada:

- Promediados: media móvil, mediana móvil. Medias ponderadas con funciones Kernel.
- Filtrado: filtros paso bajo, filtros Butterworth
- Ajustes locales: regresión local
- Bases de funciones: polinómicos, Fourier, B-splines, Wavelets

Para realizar el ajuste de datos experimentales de los movimientos de segmentos corporales es recomendable tratar los datos mediante bases de funciones B-splines, por que con este tipo de ajuste se genera una curva que se construye uniendo trozos de polinomios definidos en los intervalos dados por una serie de puntos, llamados nodos (knots) (Page, 2015). Utilizando un ajuste B-spline se puede ajustar datos experimentales que comúnmente generan curvas irregulares que son difíciles de ajustar mediante un ajuste paramétrico.

CAPITULO II

2 METODOLOGÍA

2.1 Cinemática del movimiento de flexo extensión cervical basado en análisis de video

El análisis de video es una técnica de medida que extrae información métrica a partir de un video, mediante una sucesión de fotogramas (normalmente de 25 a 30 fotogramas por segundo), para este caso particular se configura la grabación del video a 30 fotogramas por segundo, porque el movimiento del raquis cervical para este caso de estudio es lento y no demanda de una grabadora de alta velocidad.

Para emplear la técnica del análisis de video mediante software de rastreo de uso libre denominado Tracker, se hace necesario grabar un video en el que contenga el movimiento de flexo extensión cervical en el plano sagital, previamente se debe preparar al voluntario con la colocación de una diadema con 4 marcadores (esferas de referencia) sobre su cabeza; de esta forma se puede estimar las trayectorias que siguen los marcadores solidarios a la cabeza durante el movimiento.

El análisis cinemático del sistema cabeza – cuello mediante análisis de video tiene el objetivo de obtener principalmente las posiciones, velocidades, aceleraciones de dos marcadores que están estratégicamente ubicados sobre la cabeza (posición del centro de gravedad de la cabeza y los cóndilos occipitales). Mediante el análisis de movimiento relativo en el plano sagital se puede obtener la velocidad angular (w) y aceleración angular (α) teniendo como datos las aceleraciones de dos puntos, a continuación se procede a calcular la aceleración del centro de gravedad de la cabeza para cada instante durante un ciclo de flexo extensión cervical.

Los marcadores anteriormente mencionados son muy importantes para poder hacer restitución 2D, para lo cual necesitamos algún tipo de característica que defina el objeto, por ejemplo puntos característicos, rectas o bordes, zonas (siluetas). En condiciones controladas del laboratorio de análisis de movimientos se recomienda usar marcadores por tener buena detección y buena precisión.

2.1.1 Proceso de toma de datos experimentales en 2D del movimiento de flexo extensión de la columna cervical mediante análisis de video

2.1.1.1 Análisis del movimiento de flexo extensión del cuello mediante análisis de video

Experimentación

- Para la toma de datos de posiciones en 2D, se ha preparado un individuo adulto masculino de 23 años, sobre su cabeza lleva una diadema con n marcadores (6 marcadores) como se muestra en la figura 2.1, con el objetivo de dar seguimiento al movimiento de los marcadores durante el movimiento de flexo-extensión de la columna cervical mediante el software de análisis de video y modelado matemático denominado Tracker.
- El individuo se sentó en una silla con la espalda recta y firmemente, para sostenerse en el respaldo, el sujeto en cuestión realizó varios ciclos de movimiento de flexión-extensión del cuello a una velocidad baja como lo es un movimiento natural de un humano durante su vida cotidiana, sin tensión en los músculos; se realizaron movimientos repetitivos durante 46.5 segundos a partir de una postura neutral.
- Para el análisis cinemático 2D (x, y) se realizó usando software de análisis de movimientos (Tracker), mediante la utilización de un video previamente grabado durante la experimentación del movimiento de flexo extensión de la columna cervical en el plano sagital.

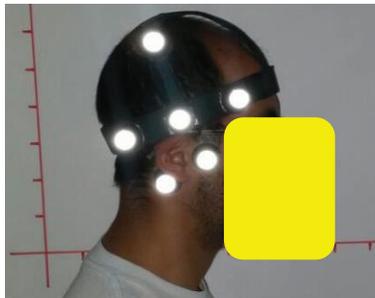


Figura 2.1 Experimentación, movimiento de flexo extensión cuello.
(Fuente: Escobar, 2017)

Las características del experimento fueron:

- Movimiento de la cabeza en plano sagital (x, y), ver figura 2.2.
- Sin tensión de los músculos del cuello - cabeza, en posición relajada
- Baja velocidad durante el movimiento de flexo extensión.

Las características del individuo voluntario masculino fueron:

- Edad: 23 años

-Sexo: Masculino.

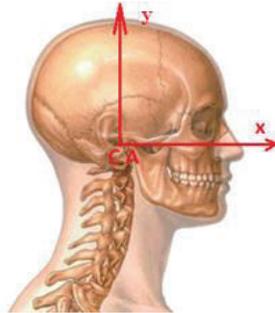


Figura 2.2 Sistema de referencia de coordenadas de la cabeza.
(Fuente: Escobar, 2017)

Análisis de video mediante el software Tracker

Para el procesamiento de las posiciones (coordenadas en 2D) del sistema cuello – cabeza obtenida mediante análisis de video, se hace necesario la utilización de software de rastreo de trayectorias denominado Tracker que es de uso libre, es una herramienta de análisis y modelado de vídeo. Las características incluyen el seguimiento de objetos con superposiciones de posición, velocidad y aceleración, además de gráficos, filtros de efectos especiales, marcos de referencia múltiples, puntos de calibración, perfiles de línea para el análisis de espectros, patrones de interferencia, modelos de partículas dinámicas, etc.

Para el análisis de movimiento del sistema cuello – cabeza, es necesario hacer una analogía entre la estructura compleja del sistema cuello cabeza con los sólidos rígidos, obviando movimientos que se producen entre las vértebras, variación del centro de gravedad de la cabeza debido al flujo sanguíneo del individuo, etc.

Procedimiento:

- Importar el video previamente grabado relacionado con el movimiento de flexo extensión de la columna cervical.
- Configurar las propiedades del video, específicamente el número de fotogramas a 30 por segundo.
- Configurar la vara de calibración, según el patrón de medida que se haya establecido en el escenario del movimiento de la cabeza.

- Configurar la trayectoria automática de cada uno de los marcadores que se consideran para el análisis de posiciones; cada marcador describirá una curva que se genera mediante la secuencia de posiciones que adquieren los marcadores durante un periodo de tiempo establecido. El software Tracker genera tablas de posiciones (x, y) en 2 dimensiones para cada uno de los marcadores estudiados.
- Cuando finalice el análisis de video en el software Tracker, se dispondrá de información relacionada con las posiciones (x, y) de cada uno de los marcadores.

Las posiciones (x,y) que se obtienen experimentalmente mediante análisis de video describen la trayectoria para cada marcador ubicado solidariamente sobre la cabeza, estas trayectorias tienen mucho ruido por lo que es recomendable tratarlas mediante técnicas de suavizado no paramétrico, por ejemplo funciones B-spline.

2.1.1.2 Análisis cinemático del movimiento de flexo extensión cervical para varios ciclos, en un periodo de tiempo $(0 \leq t \leq 46.5)[s]$, software Tracker

Para este caso de estudio en específico se ha centrado al rastreo de las posiciones (x,y) que adquieren dos marcadores posicionados estratégicamente sobre la cabeza como se puede observar en la figura 2.3; se decide analizar dos marcadores porque se necesita estimar las aceleraciones de al menos dos puntos que estén próximos al centro de gravedad de la cabeza; estas aceleraciones me ayudarán a calcular la aceleración del centro de gravedad de la cabeza mediante cinemática del sólido rígido, siendo la aceleración del centro de gravedad de la cabeza el objetivo principal del análisis cinemático.

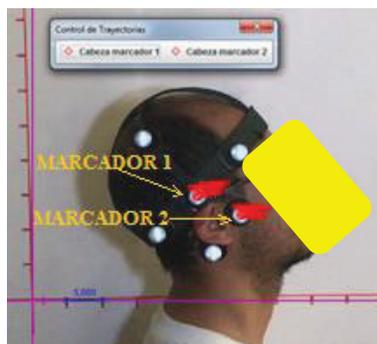


Figura 2.3 Análisis del movimiento flexo extensión cervical (análisis de video)
(Fuente: Escobar, 2017)

2.1.1.3 Diagrama de posiciones de dos marcadores ubicados estratégicamente sobre la cabeza, para varios ciclos durante un tiempo de $(0 \leq t \leq 46.5)[s]$, software Tracker

Como se puede observar en la figura 2.4, las trayectorias que describe los marcadores ubicados sobre la cabeza, tienen diferentes comportamientos de ciclo en ciclo del movimiento de flexo extensión del cuello, durante un periodo de tiempo, describiendo trayectorias similares a parábolas.

Donde:

x: posición en el eje x (cm)

y: posición en el eje y (cm)

v: velocidad (cm/s)

a: aceleración (cm/s²)

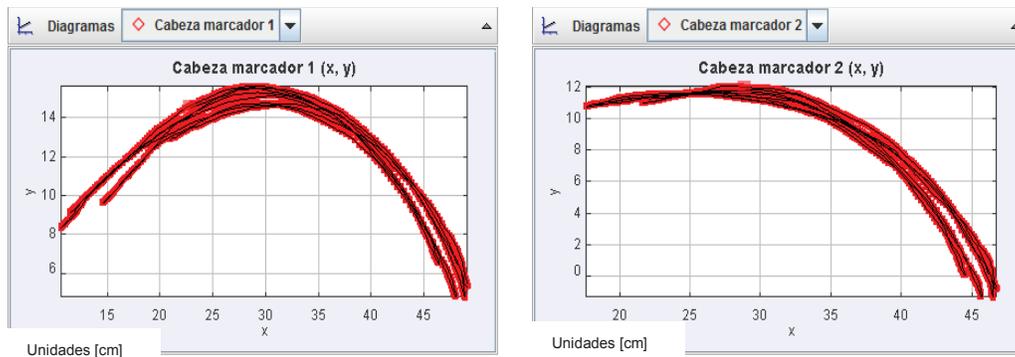
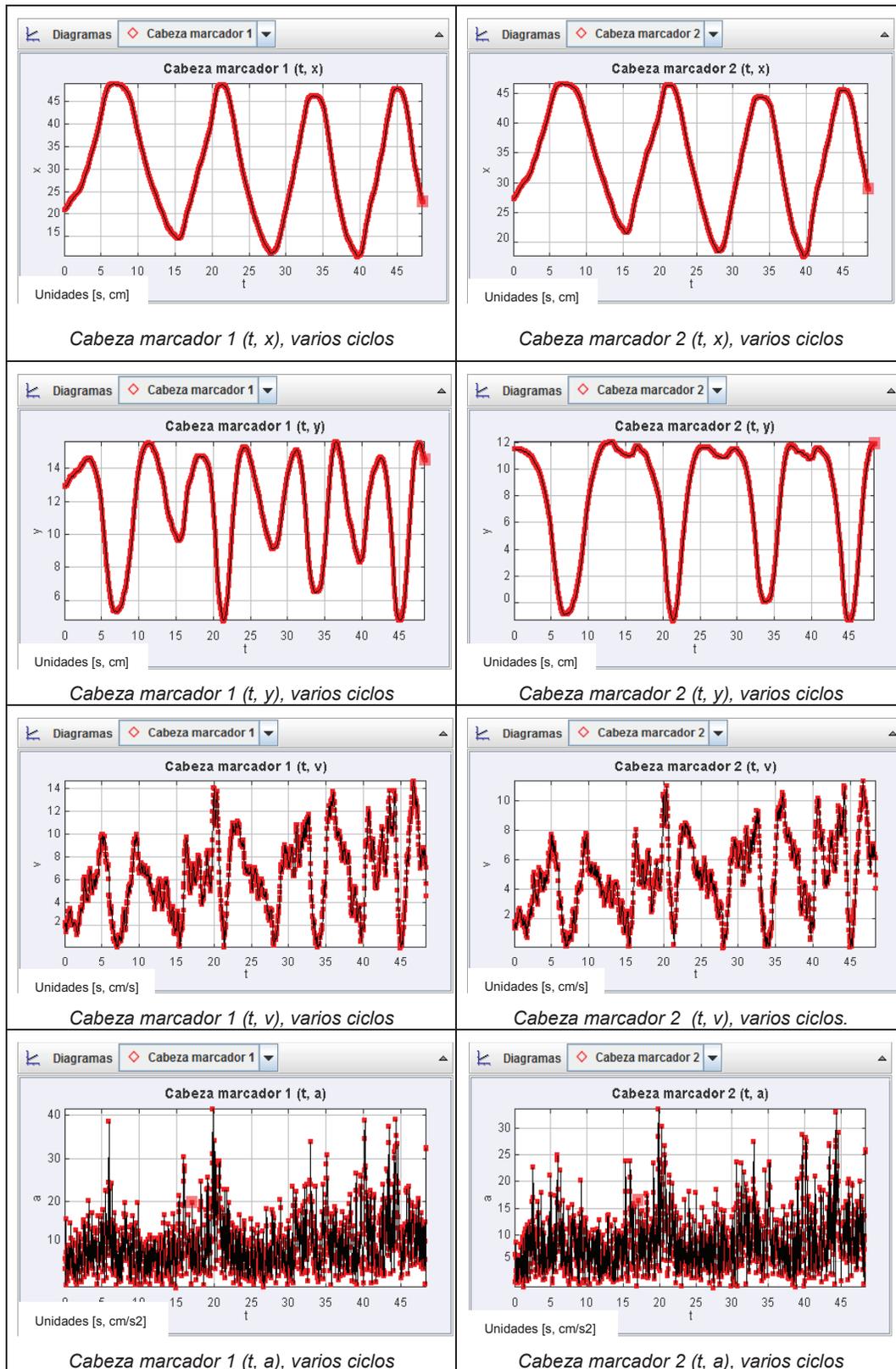


Figura 2.4. Cabeza, trayectorias (x, y), flexo extensión, varios ciclos.
(Fuente: Escobar, 2017)

En la tabla 2.1 se detalla las posiciones, velocidades, aceleraciones de dos marcadores durante varios ciclos de movimiento de flexo extensión cervical en un periodo de tiempo de 46.5 s, estas representaciones graficas son obtenidas del software de análisis de movimiento mediante video (Tracker).

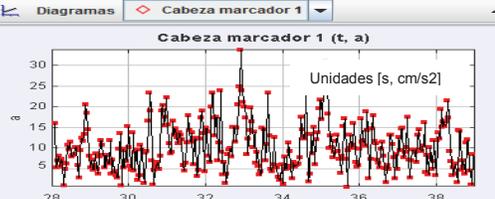
Tabla 2.1 Posiciones, velocidades, aceleraciones flexo extensión, varios ciclos, dos marcadores, mediante análisis de video (software Tracker).



(Fuente: Escobar, 2017)

2.1.1.4 Diagramas cinemáticos de dos marcadores ubicados estratégicamente sobre la cabeza, para un ciclo de flexo extensión durante un tiempo de $(28 \leq t \leq 39)[s]$, software Tracker

Tabla 2.2 Posiciones, velocidades, aceleraciones flexo extensión, un ciclo, dos marcadores.

 <p>Cabeza, marcador 1 (x, y), para un ciclo, flexo extensión.</p>	 <p>Cabeza, marcador 2 (x, y), para un ciclo, flexo extensión.</p>
 <p>Cabeza, marcador 1 (t, x), para un ciclo, flexo extensión.</p>	 <p>Cabeza, marcador 2 (t, x), para un ciclo, flexo extensión.</p>
 <p>Cabeza, marcador 1 (t, y), para un ciclo, flexo extensión.</p>	 <p>Cabeza, marcador 2 (t, y), para un ciclo, flexo extensión.</p>
 <p>Cabeza, marcador 1 (t, v), para un ciclo (flexo extensión).</p>	 <p>Cabeza, marcador 2 (t, v), para un ciclo (flexo extensión).</p>
 <p>Cabeza, marcador 1 (t, a), para un ciclo (flexo extensión).</p>	 <p>Cabeza, marcador 2 (t, a), para un ciclo (flexo extensión).</p>

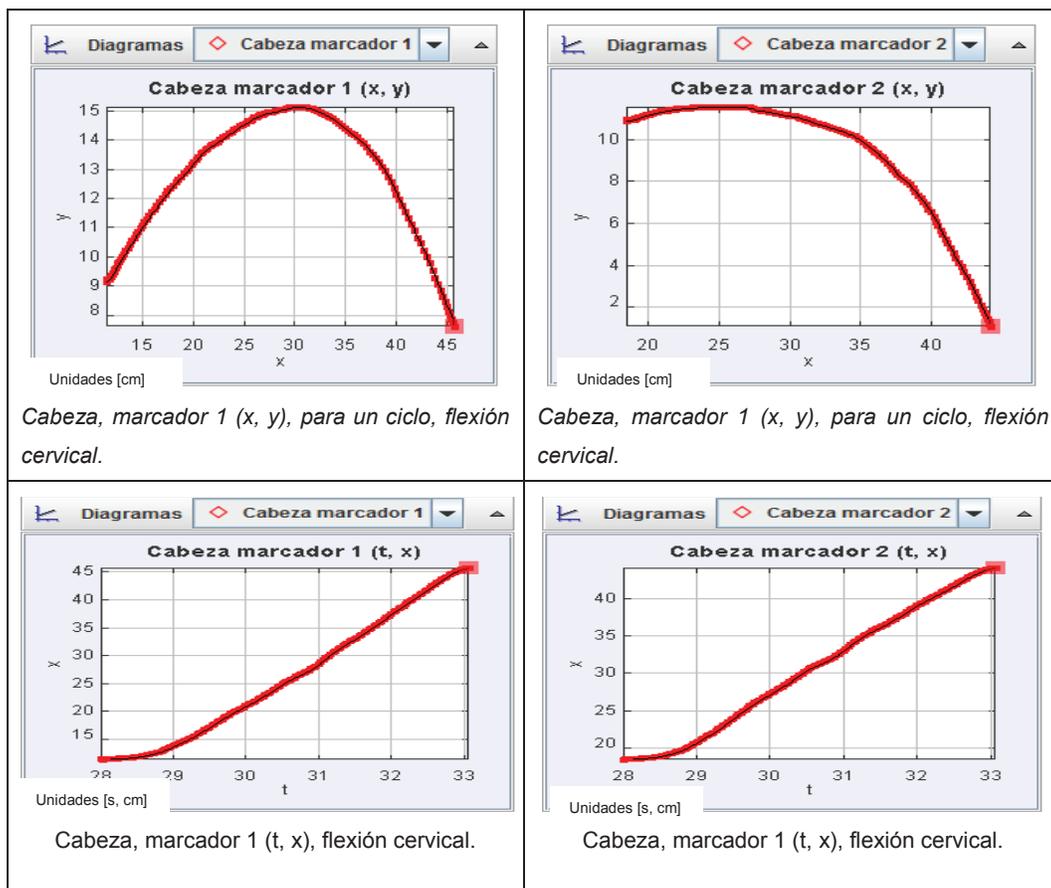
(Fuente: Escobar, 2017)

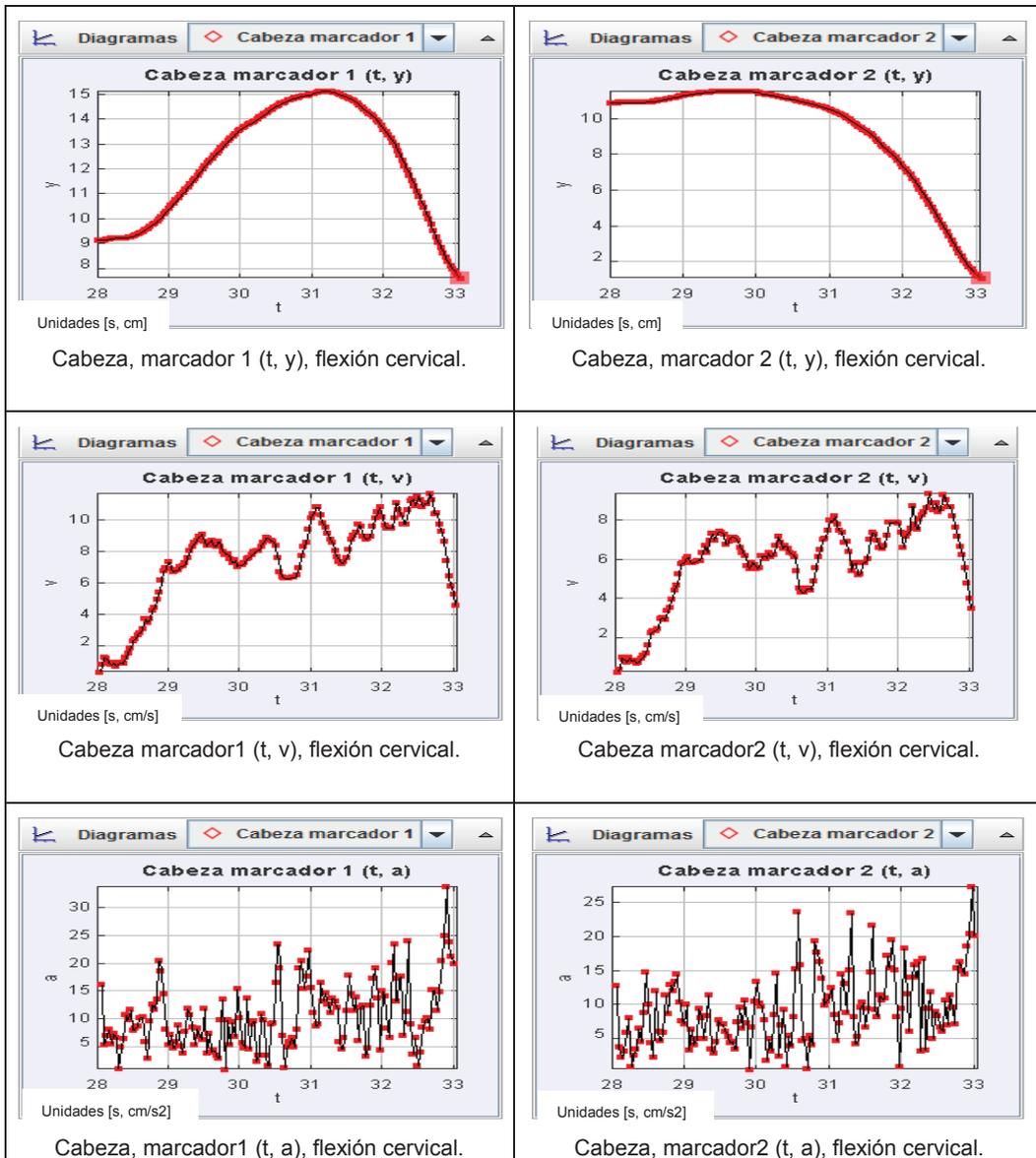
Como se puede observar en la figura 2.4 las trayectorias que generan los dos marcadores solidarios a la cabeza se desplazan de ciclo en ciclo, debido a esto se ha decidido restringir el movimiento a un ciclo de flexo extensión, esto facilita el estudio y la apreciación de las trayectorias. En la tabla 2.2 se detalla las posiciones, velocidades, aceleraciones de un ciclo de flexo extensión.

2.1.1.5 Diagramas cinemáticos de dos marcadores ubicados estratégicamente sobre la cabeza, durante el movimiento de flexión cervical, en el periodo de tiempo $(28 \leq t \leq 33)$ [s], software Tracker.

En la tabla 2.3 se detallan las posiciones, velocidades, aceleraciones de dos marcadores durante un ciclo de flexión cervical.

Tabla 2.3 Posiciones, velocidades, aceleraciones, flexión cervical, un ciclo, dos marcadores.



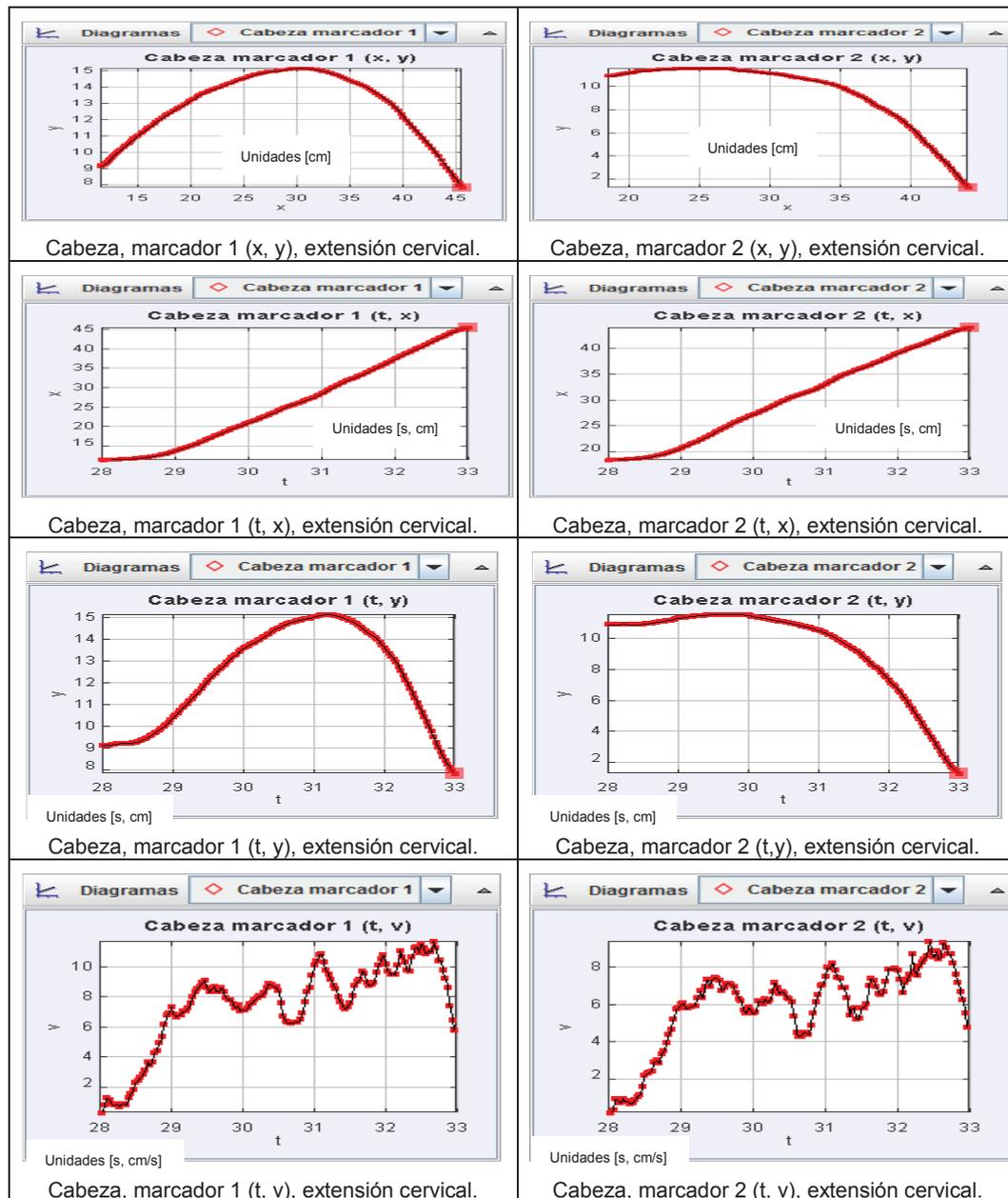


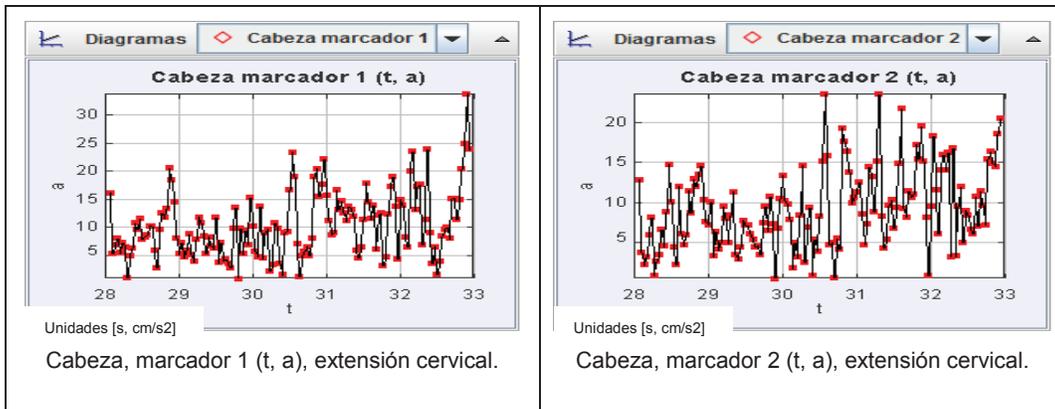
(Fuente: Escobar, 2017)

2.1.1.6 Diagramas cinemáticos de dos marcadores ubicados estratégicamente sobre la cabeza, durante el movimiento de extensión cervical, en el periodo de tiempo $(33 \leq t \leq 39)[s]$, software Tracker

En la tabla 2.4 se detallan las posiciones, velocidades, aceleraciones de dos marcadores durante un ciclo de flexión cervical.

Tabla 2.4 Posiciones, velocidades, aceleraciones, extensión cervical, un ciclo, dos marcadores.





(Fuente: Escobar, 2017)

2.1.2 Suavizado, trayectorias del movimiento de flexo extensión cervical

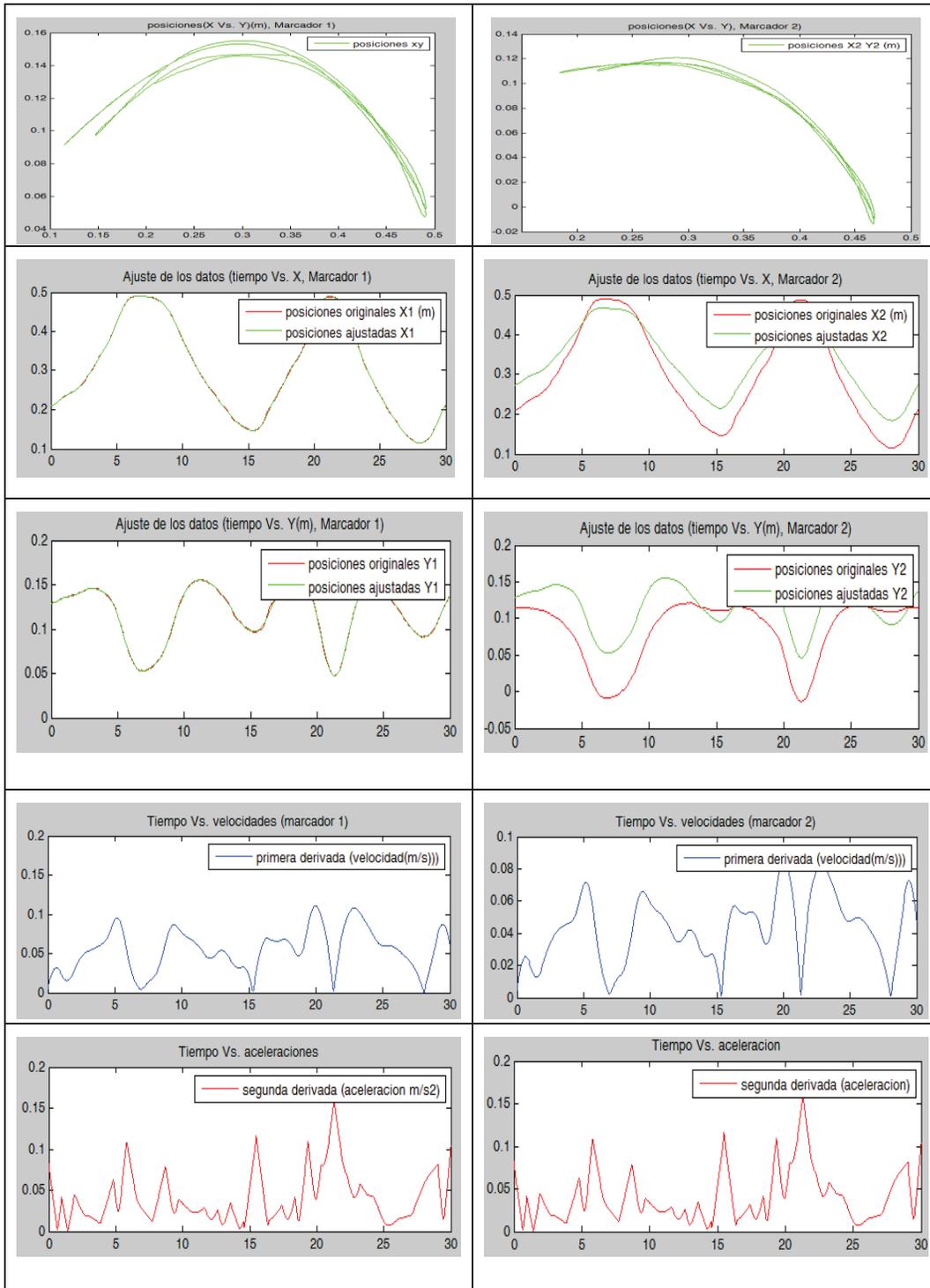
Los datos de aceleraciones proporcionadas por el software Tacker tienen mucho ruido (ver tabla 2.1), es decir los datos de aceleración tienden a ser singularidades. Para dar solución a este problema se ha planteado hacer uso únicamente las coordenadas de posición (x,y) de cada uno de los dos marcadores (coordenadas obtenidas mediante análisis de video). Las coordenadas de posición serán tratadas mediante un ajuste no paramétrico (funciones B-spline). El algoritmo de tratamiento de datos experimentales se lo puede ver detalladamente en anexos.

2.1.2.1 Suavizado B-spline, trayectorias de flexo extensión cervical, varios ciclos

Las coordenadas (x, y) de dos marcadores ubicados estratégicamente sobre la cabeza, fueron obtenidas mediante el software de rastreo de posiciones (Tracker), para de esta forma poder estimar las posiciones en x (paralelo a la línea de Frankfort) y las posiciones en "Y" (paralelo a la gravedad).

En la tabla 2.5 se puede observar las gráficas de posición, velocidad, aceleración, para un ciclo de flexo extensión; en este caso las posiciones (x, y) obtenidas mediante análisis de video fueron tratadas con un algoritmo de suavizado B-spline generado en Matlab; mediante el tratamiento previo de los datos de posición se ve una mejoría en los resultados de aceleración instantánea de cada uno de los marcadores, comparados con las aceleraciones de la tabla 2.1.

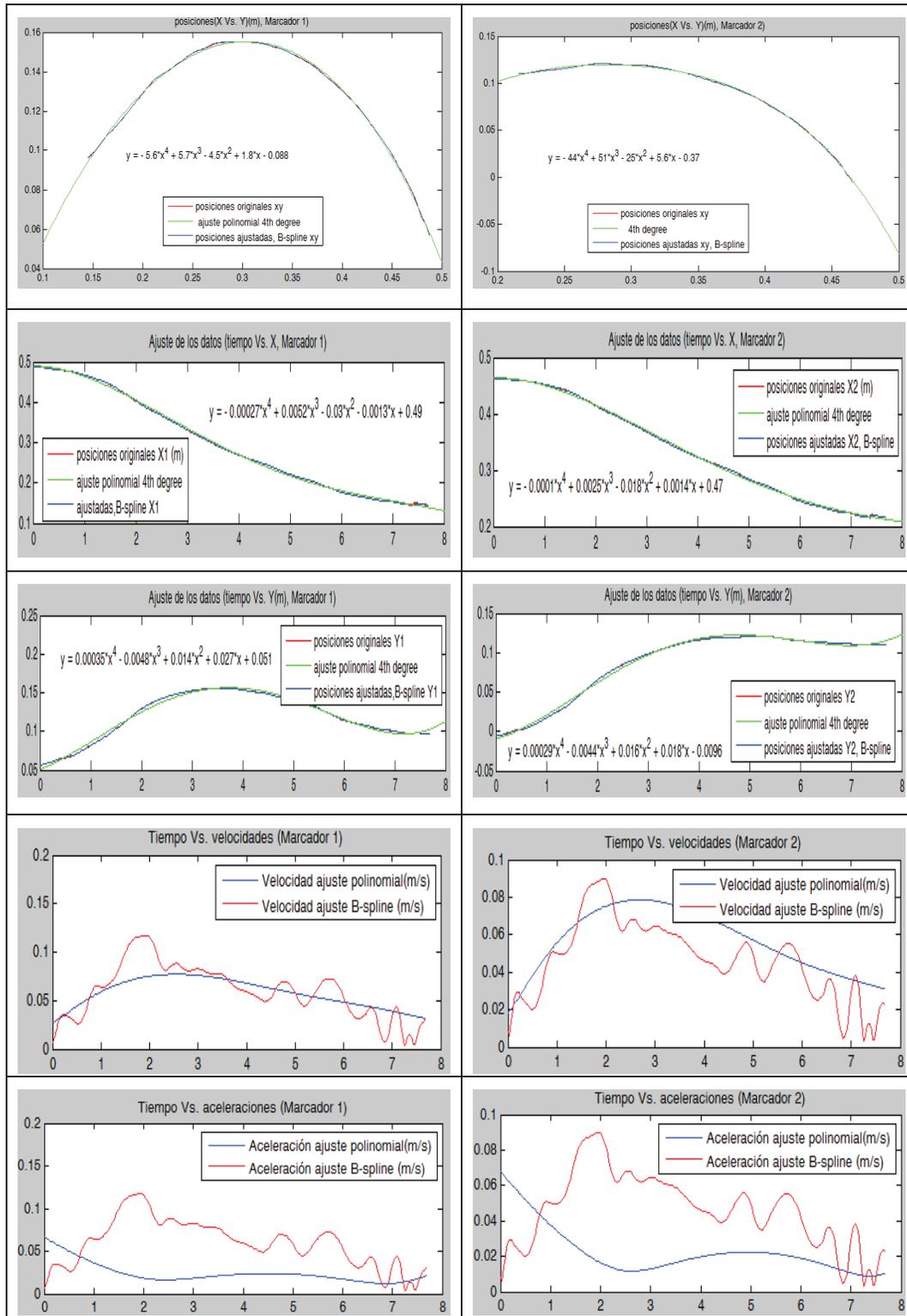
Tabla 2.5.- Ajuste de la posición, velocidad, aceleración, flexo extensión, varios ciclos, dos marcadores.



(Fuente: Escobar, 2017)

2.1.2.2 Suavizado, movimiento de extensión cervical, un ciclo

Tabla 2.6.- Ajuste de la posición, velocidad, aceleración, flexo extensión, un ciclo, dos marcadores.



(Fuente: Escobar, 2017)

Se ha extraído las posiciones (x, y) del movimiento de extensión cervical mediante el software Tracker, posteriormente se ha tratado los datos mediante el ajuste B-spline y finalmente se ha obteniendo las aceleraciones instantáneas de los dos marcadores considerados en el análisis de video.

En la tabla 2.6 se ha considerado realizar un análisis cinemático para un ciclo de extensión, es decir cuando el individuo mueve la cabeza en contra de la gravedad en el plano sagital, también se asume que el torque es mayor durante el movimiento de extensión cervical, considerando como partida del movimiento cuando el mentón toca el tórax y como punto final cuando el voluntario mira directamente al techo.

2.1.2.3 Cálculo de la aceleración del centro de gravedad de la cabeza

Mediante el uso de la técnica del análisis de video se mide y estima la aceleración de dos puntos diferentes de la cabeza. Para medir las aceleraciones del centro de gravedad de la cabeza, se utiliza la cinemática del sólido rígido.

La relación entre las aceleraciones de dos puntos diferentes que están sobre un mismo plano, por ejemplo P (marcador 2) y O (marcador 1) es:

$$\vec{a}(P) = \vec{a}(o) + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{OP}) + \vec{\alpha} \times \vec{OP} \quad \text{Ec. (7)}$$

La distancia entre los dos puntos (OP) es conocida (por análisis de video), la aceleración de ambos puntos (P y O) también son conocidas del análisis cinemático que se muestra en la tabla 2.6, los únicos vectores desconocidos son ω (la velocidad angular de la cabeza) y α (la aceleración angular de la cabeza). Entonces, considerando que la cabeza sólo tiene movimiento en el plano sagital (XY), los vectores desconocidos son:

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \quad \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

Reemplazando los vectores de la velocidad y aceleración angular en la ecuación vectorial (7) se obtiene lo siguiente:

$$\begin{pmatrix} a_{Px} \\ a_{Py} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{Ox} \\ a_{Oy} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} OP_x \\ OP_y \\ 0 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} OP_x \\ OP_y \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{Ec. (8)}$$

Desarrollando la ecuación (8), tenemos:

$$a_{Px} = a_{0x} - \omega^2 \cdot OP_x + \alpha \cdot OP_y \quad \text{Ec. (9)}$$

$$a_{Py} = a_y - \omega^2 \cdot OP_y - \alpha \cdot OP_x \quad \text{Ec. (10)}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones anterior, se puede calcular α y ω . A continuación se utiliza la relación cinemática entre el punto O (marcador 1) con la posición del centro de gravedad de la cabeza (CG), obteniendo finalmente las siguientes ecuaciones:

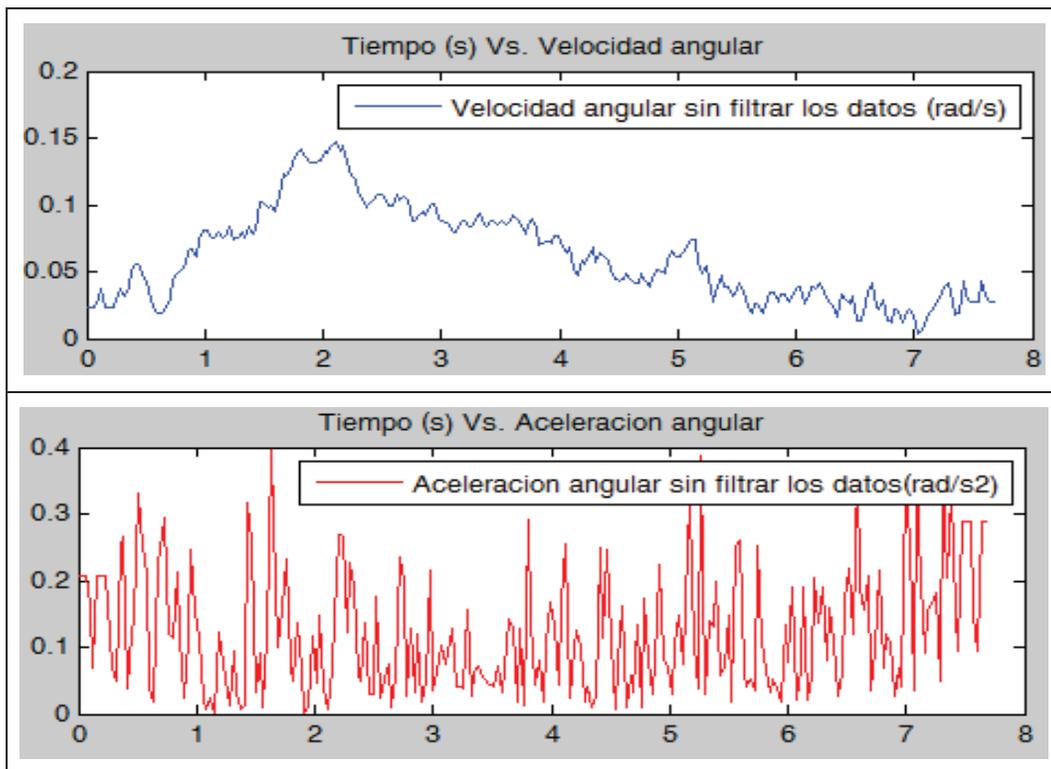
$$a_{CGx} = a_{0x} - \omega^2 \cdot OCG_x + \alpha \cdot OCG_y \quad \text{Ec. (11)}$$

$$a_{CGy} = a_{0y} - \omega^2 \cdot OCG_y - \alpha \cdot OCG_x \quad \text{Ec. (12)}$$

Hay que hacer notar que todos los cálculos matemáticos se los realizo mediante un algoritmo de cálculo en Matlab, que en la parte final de este trabajo se anexa.

En la tabla 2.7 se puede apreciar las gráficas de velocidad y aceleración angular en función del tiempo, los datos tienen mucho ruido por lo que fue necesario filtrar los datos mediante funciones B-spline.

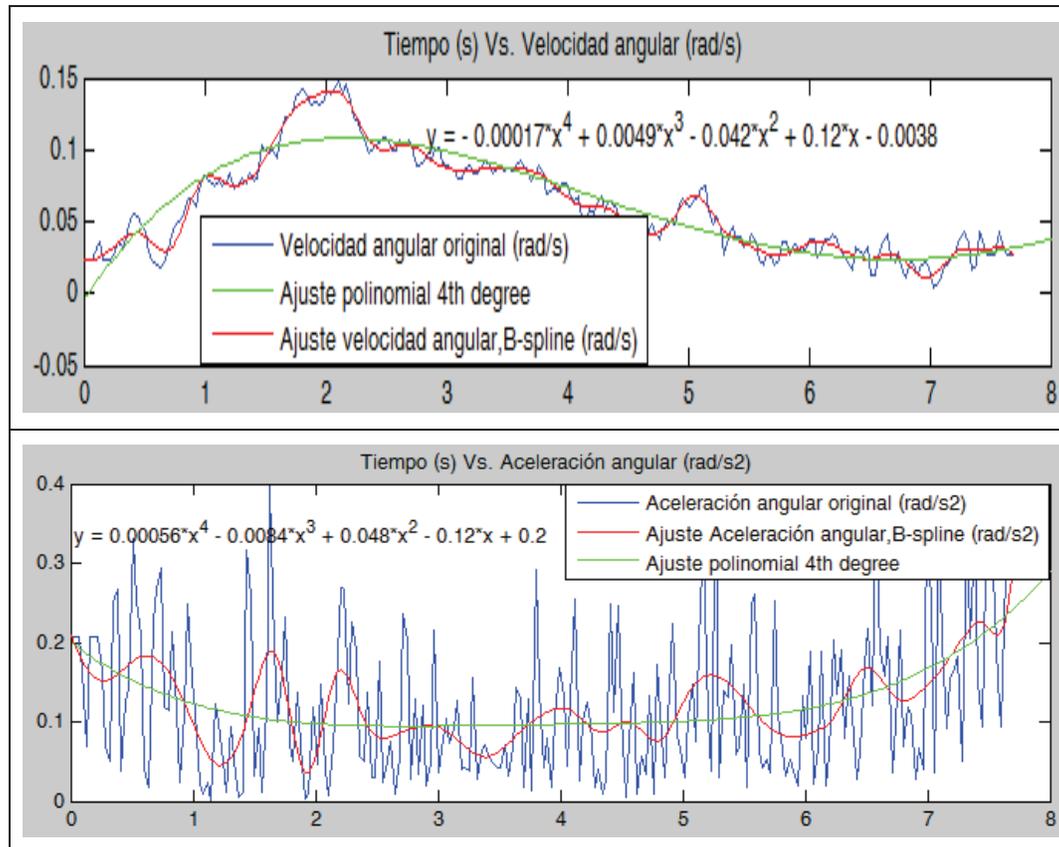
Tabla 2.7 Velocidad y aceleración angular de la cabeza, sin filtrar los datos.



(Fuente: Escobar, 2017)

En la tabla 2.8 se puede observar una mejor presentación de los datos de velocidad y aceleración angular mediante un filtrado mediante funciones B-spline.

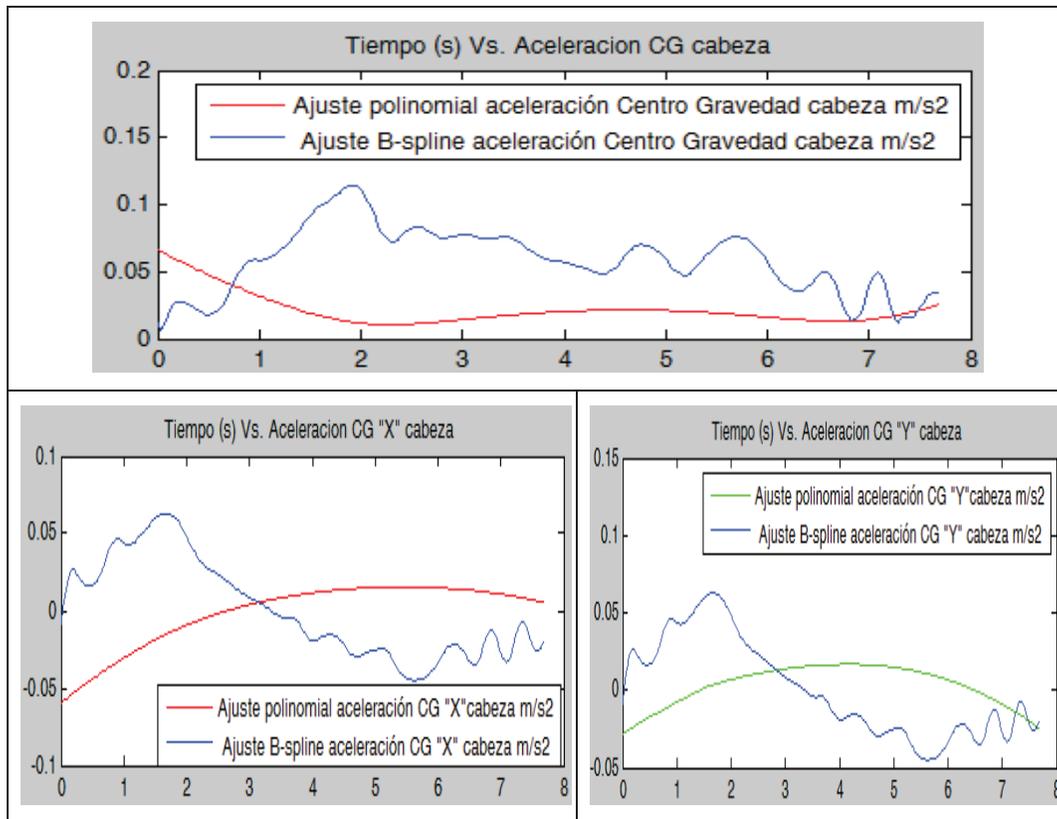
Tabla 2.8. Velocidad y aceleración angular de la cabeza, datos filtrados por B-spline.



(Fuente: Escobar, 2017)

Tomando en cuenta que los datos de aceleraciones (dos puntos sobre la cabeza), la velocidad angular, aceleración angular de la cabeza son conocidos, es posible calcular las componentes de la aceleración del centro de gravedad de la cabeza mediante la ecuación (11) y ecuación (12). En la tabla 2.9 se muestra las componentes de la aceleración del centro de gravedad de la cabeza y su correspondiente módulo.

Tabla 2.9 Aceleración del centro de gravedad de la cabeza



(Fuente: Escobar, 2017)

Los datos de aceleraciones obtenidas para los dos marcadores, nos sirve para obtener la velocidad angular (ω) y la aceleración angular (α), posteriormente se calcula la aceleración del centro de gravedad de la cabeza para cada instante de tiempo; los datos obtenidos en este análisis cinemático son de vital importancia para el análisis dinámico (fuerzas y torque que actúan sobre la cabeza).

Las gráficas de posiciones, velocidades, aceleraciones de dos marcadores son tratadas computacionalmente en el software Matlab. Los algoritmos utilizados para el análisis cinemático se anexan en la parte final del presente trabajo.

2.2 Modelo dinámico de los movimientos de flexo extensión cervical

2.2.1 Introducción

El movimiento del cuello a través de la columna cervical, es el sector de la columna que tiene mayor movimiento, por lo cual se ha propuesto hacer un análisis dinámico del movimiento de flexo extensión del cuello en el plano sagital (plano x y). Por tratarse de

segmentos corporales la estimación de las fuerzas y momento que actúan sobre el cuello humano deberán ser analizados mediante dinámica inversa.

Antes de establecer el diagrama de cuerpo libre de las fuerzas y momento que actúan sobre los cóndilos occipitales se debe tener muy claro los siguientes conceptos.

Sistema de coordenadas de referencia: Se considera como referencia del sistema de coordenadas al centro de gravedad de la cabeza (CG). Como se puede observar en la figura 2.5 el eje "x" es paralelo a la línea de Frankfort y eje "y" es perpendicular al eje x.

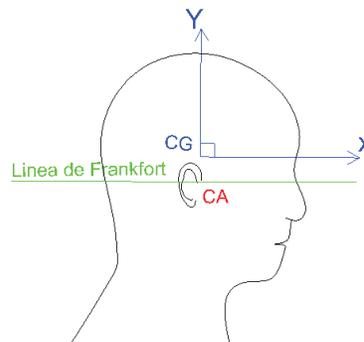


Figura 2.5 Sistema de coordenadas de la cabeza.
(Fuente: (Vila Giraut, 2010))

Línea Frankfort

Es la línea imaginaria que se forma al unir un punto ubicado en el conducto auditivo exterior con otro punto ubicado en el margen orbital inferior, como se puede observar en la figura 2.6.

Canal auditivo (CA)

El canal auditivo externo

Orbital

Es la cavidad ósea del cráneo que contiene el globo ocular.

Cóndilos occipitales (OC)

Situado en la parte posterior del cráneo, pertenece al hueso occipital y permite la articulación entre la cabeza y la primera vértebra C1 (también llamada atlas)

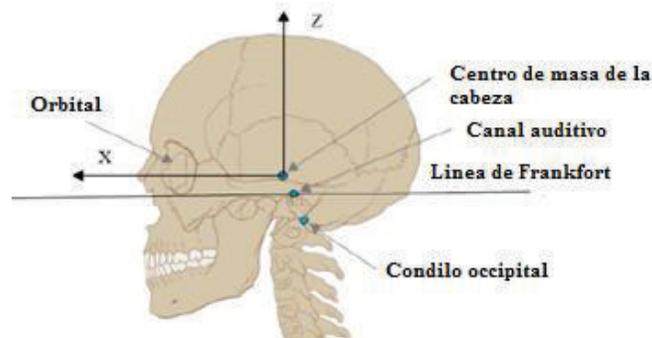


Figura 2.6 Centro de gravedad de la cabeza
(Fuente: (Vila Giraut, 2010))

Las coordenadas cartesianas de la ubicación del centro de gravedad de la cabeza y el cóndilo occipital, la masa y momento de inercia de la cabeza están establecidas por investigaciones antropométricas por parte de algunos profesores que a continuación se citarán. Además hay que recalcar que se hace origen absoluto del sistema cabeza – cuello, la ubicación del canal auditivo.

- Masa de la cabeza: 4,15 kg (Yount et al. 1983).
- Momento de inercia de la cabeza: 223.4 $kg \cdot cm^2$ (Beier et al. 1980).
- La posición del centro de gravedad de la cabeza (CG) con relación al sistema de coordenadas de referencia de la cabeza (CA), hace referencia al canal auditivo externo como se muestra en la figura 2.6. Las coordenadas del centro de gravedad de la cabeza (Walker et al. 1973) son las siguientes:

$$dx = 9.1 \text{ mm} = d_{CGx}$$

$$dy = 22.2 \text{ mm} = d_{CGy}$$

- La posición de los cóndilos occipitales (OC) en relación con el sistema de referencia de la cabeza (Wismans et al. 1986) son las siguientes:

$$dx = -8 \text{ mm} = doc_x$$

$$dy = -35 \text{ mm} = doc_y$$

2.2.2 Diagrama de cuerpo libre de fuerzas y momento de la cabeza

Todas las fuerzas y momentos se aplican en la cabeza del sujeto y las reacciones del cuello se muestran en la figura 2.7.

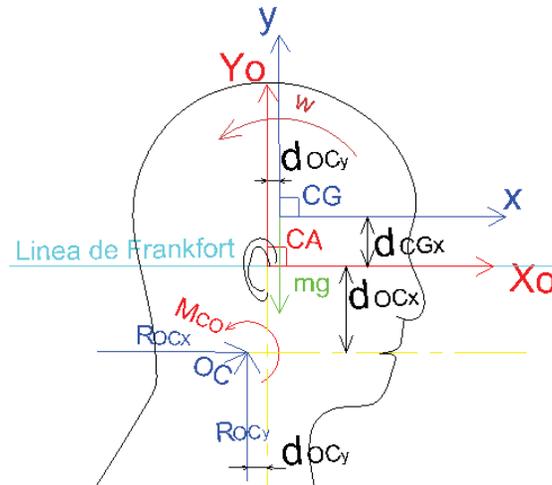


Figura 2.7 Diagrama de fuerzas y momento que actúan en el cuello – cabeza, posición normal.

(Fuente: (Vila Giraut, 2010))

2.2.3 El movimiento de la cabeza en el plano sagital (plano x y)

Considerando que tanto la estructura del cuello - cabeza se asumen como sólidos rígidos, se puede aplicar las siguientes ecuaciones fundamentales de la dinámica de sólidos rígidos.

Mediante la segunda ley de Newton se establece la siguiente ecuación:

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}_{CG} \quad \text{Ec. (13)}$$

Donde:

m : masa de la cabeza.

\vec{a}_{CG} : Aceleración medida.

Expresando para cada eje en el plano de movimiento (x y).

$$\sum \vec{F}_x = m \cdot \vec{a}_{CGx}$$

$$\sum \vec{F}_y = m \cdot \vec{a}_{CGy}$$

Ecuación fundamental de la dinámica de rotación.

$$\sum M_{CG} = I_z \cdot \alpha \quad \text{Ec. (14)}$$

Donde:

M_{CG} : Momento

α : Aceleración angular.

I_z : Momento de inercia de la masa respecto al eje z.

Como se ha dicho anteriormente, la cabeza se considera un cuerpo rígido, por lo cual las ecuaciones aplicadas para calcular las fuerzas y los momentos en el cuello son:

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}_{CG} \quad \text{Ec. (15)}$$

$$\sum M_{CG} = I_z \cdot \alpha \quad \text{Ec. (16)}$$

La ecuación 15 permite calcular las fuerzas cortantes y axiales que son causadas debido a la aceleración lineal del centro de gravedad de la cabeza, y con la ecuación 16 se puede calcular el momento provocado por dicha fuerza, alrededor del eje z.

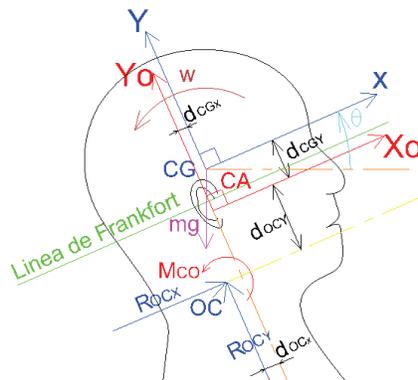


Figura 2.8. Diagrama de fuerzas y momento actuantes en el sistema cuello – cabeza, posición de extensión cervical.
(Fuente: (Vila Giraut, 2010))

Desarrollando la ecuación 15 en ambas direcciones “X” e “Y” (ver figura 2.8), las ecuaciones obtenidas son:

$$R_{OCx} - m \cdot g \cdot \text{sen}\theta = m \cdot a_{CGx}$$

$$R_{OCy} - m \cdot g \cdot \text{cos}\theta = m \cdot a_{CGy}$$

Por lo tanto, R_{OCx} (la fuerza cortante) se calcula a partir de:

$$R_{OCx} = m \cdot a_{CGx} + m \cdot g \cdot \text{sen}\theta \quad \text{Ec. (17)}$$

Y R_{OCy} (la fuerza axial) se calcula a partir de:

$$R_{OCy} = m \cdot a_{CGy} + m \cdot g \cdot \cos\theta \quad \text{Ec. (18)}$$

Desarrollando la ecuación (16) y realizando la sumatoria de momentos en el centro de masa de la cabeza, tenemos:

$$\sum M_{CG} = I_z \cdot \alpha$$

$$R_{OCx} \cdot (d_{COy} + d_{CGy}) - R_{OCy} \cdot (d_{COx} + d_{CGx}) + M_{0c} = I_z \cdot \alpha$$

Por lo tanto, M_{0c} se calcula a partir de:

$$M_{0c} = I_z \cdot \alpha - R_{OCx} \cdot (d_{COy} + d_{CGy}) + R_{OCy} \cdot (d_{COx} + d_{CGx}) \quad \text{Ec. (19)}$$

Las ecuaciones de equilibrio dinámico se aplican en el centro de gravedad de la cabeza porque el momento de inercia (I_z) puede encontrarse tabulado de investigaciones antropométricas ($I_z = 223.4 \text{ kg} \cdot \text{cm}^2$ estimado por Beier et al. 1980).

Hay que hacer notar que todos los cálculos matemáticos se los realizo mediante un algoritmo de cálculo en Matlab, que en la parte final de este trabajo se anexa.

2.2.4 Consideraciones fundamentales para el análisis dinámico inverso

Hay que recalcar que este análisis dinámico obedece a ciertas condiciones que a continuación se detalla:

- Movimiento de la cabeza en plano sagital (x y).
- Sin tensión de los músculos en el sistema cuello - cabeza, en posición relajada
- Baja velocidad durante el movimiento de flexo extensión.
- Edad del voluntario: 23 años
- Sexo del voluntario: Masculino.
- Condición de evaluación anatómica y funcional del individuo: condiciones normales (no sufre de patologías relacionadas con la columna cervical).

2.2.5 Resumen de datos importantes para el análisis dinámico inverso

En la tabla 2.1 se resumen los datos importantes para obtener las fuerzas de reacción y el momento en los cóndilos occipitales.

Tabla 2.10.- Resumen, variables para el análisis dinámico de la columna cervical.

Variable	Descripción.	Detalles.	Referencias.
m	Masa de la cabeza.	4,15 kg	Yount et al. 1983
I_z	Momento de inercia de la cabeza (respecto al eje z)	223.4 kg*cm ²	Beier et al. 1980
d_{CGx}	Distancia en el eje x (centro de masa), respecto al sistema de referencia CA.	9.1mm	Walker et al. 1973
d_{CGy}	Distancia en el eje y (centro de masa), respecto al sistema de referencia CA.	22.2mm	Walker et al. 1973
d_{OCx}	Distancia en el eje x (cóndilo occipital), respecto al sistema de referencia CA.	-8mm	Wismans et al. 1986
d_{OCy}	Distancia en el eje y (cóndilo occipital), respecto al sistema de referencia CA.	-35mm	Wismans et al. 1986
v	Velocidad absoluta instantánea del centro de masa de la cabeza	Vector de velocidades.	Experimentación del autor
a	Aceleración absoluta instantánea del centro de masa de la cabeza	Vector de aceleraciones.	Experimentación del autor
θ	Angulo entre el eje x del sistema de ejes de referencia y la línea horizontal.	Vector ángulo de rotación.	Experimentación del autor
ω	Velocidad angular absoluta instantánea de la cabeza.	Vector de velocidad angular	Ec. (9) y (10)
α	Velocidad angular absoluta instantánea de la cabeza.	Vector de aceleración angular	Ec. (9) y (10)
F_{OCx}	Fuerza en la dirección x, aplicado en OC	Vector de Fuerzas instantáneas en el eje x.	Ec. (17)
F_{OCy}	Fuerza en la dirección y, aplicado en OC	Vector de Fuerzas instantáneas en el eje y.	Ec. (18)
M_{OC}	Momento en el cuello, alrededor del eje z.	Vector de Momentos instantáneos	Ec. (19)

(Fuente: (Vila Giraut, 2010))

2.2.6 Cálculo de las fuerzas y momento en los cóndilos occipitales

Como ya se había mencionado anteriormente, se realizó una analogía entre los segmentos corporales (cabeza, cuello) con los sólidos rígidos, de esta manera se aplica la segunda ley de Newton y la ecuación fundamental de la dinámica de rotación, es importante aclarar que en función del análisis de cuerpo libre de las fuerzas y momentos que actúan sobre la cabeza en el plano sagital (x y), se asume como punto de pivote o rotación a los cóndilos occipitales; es decir se va a estimar las fuerzas (F_x , F_y) y momento (Moc) que se producen en mencionado punto, debido al peso propio de la cabeza y el momento de Inercia que ejerce la cabeza en el eje perpendicular al plano de movimiento.

En el capítulo anterior se realizó un análisis cinemático del movimiento de flexo extensión cervical, que arrojó principalmente los siguientes datos: aceleración angular y aceleración lineal del centro de gravedad de la cabeza de dos marcadores ubicados sobre la cabeza, estos datos son muy importantes a la hora de estimar las fuerzas de reacción en los cóndilos occipitales y el momento, cabe indicar que el ángulo de giro de la cabeza se consideró -45° en flexión cervical y 45° en extensión cervical, ver figura 2.9.

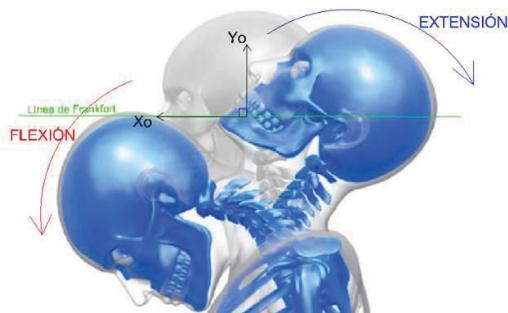


Figura 2.9 Flexión cervical (45°) y extensión cervical (-45°).
(Fuente: Escobar, 2017)

2.2.6.1 Fuerzas de reacción en los cóndilos occipitales

Datos:

Movimiento de flexión: -45 grados

Movimiento de extensión: 45 grados.

θ : Matriz del ángulo de rotación de la cabeza, desde -45° (posición en flexión cervical), 0° (posición normal de la cabeza) y 45° (posición en extensión cervical).

a_{CGx} : Matriz de aceleraciones en el eje x del centro de gravedad de la cabeza para cada instante de tiempo (valores determinados en el análisis cinemático del capítulo anterior).

a_{CGy} : Matriz de aceleraciones en el eje "y" del centro de gravedad de la cabeza para cada instante de tiempo.

R_{OCx} : Matriz de fuerzas de reacción en los cóndilos occipitales en el eje x, para cada instante de tiempo.

R_{OCy} : Matriz de fuerzas de reacción en los cóndilos occipitales en el eje y, para cada instante de tiempo.

$m = 4.15 \text{ kg}$ (Yount et al. 1983).

$g = 9.81 \text{ m/s}^2$

Fórmulas aplicadas:

En la figura 2.10 se puede observar el diagrama de cuerpo libre, fuerzas y momento en los cóndilos occipitales, a partir de este diagrama se puede encontrar las siguientes ecuaciones:

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}_{CG}$$

$$R_{OCx} = m \cdot a_{CGx} + m \cdot g \cdot \text{sen}\theta$$

$$R_{OCy} = m \cdot a_{CGy} + m \cdot g \cdot \text{cos}\theta$$

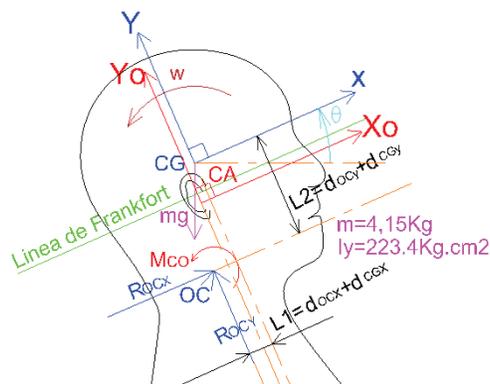


Figura 2.10 Diagrama de cuerpo libre, fuerzas y momentos en los cóndilos occipitales. (Fuente: Escobar, 2017)

Fuerza en función del tiempo

En la figura 2.11 se puede observar que el módulo de la fuerza es aproximadamente de 40.65N mediante un ajuste polinomial de las posiciones de la cabeza, mientras que mediante un ajuste no paramétrico B-spline se tiene una fuerza máxima de 41.1N.

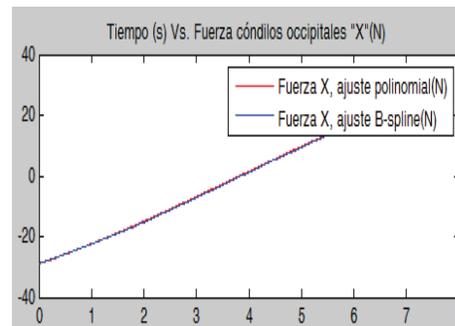
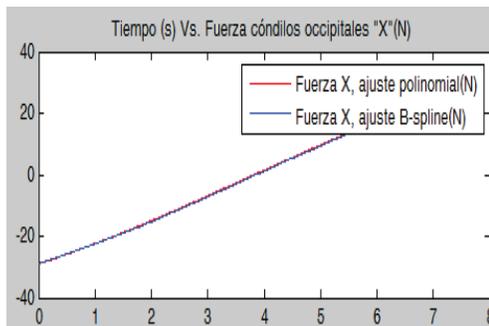
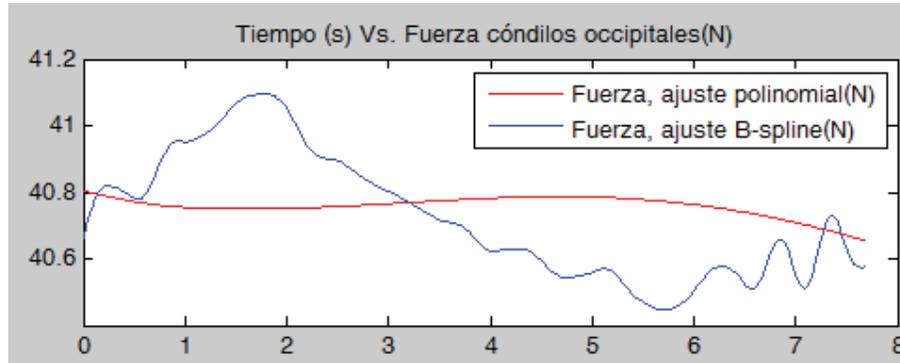


Figura 2.11 Fuerzas de reacción en los cóndilos occipitales.
(Fuente: Escobar, 2017)

2.2.6.2 Momento generado en los cóndilos occipitales

Datos:

$d_{COx} = -8\text{mm}$, distancia en el eje x desde el canal auditivo hasta los cóndilos occipitales (Wismans et al. 1986).

$d_{CGx} = 9.1\text{mm}$, distancia en el eje x desde el canal auditivo hasta el centro de gravedad de la cabeza (Walker et al. 1973).

$d_{COy} = -35\text{mm}$, distancia en el eje y desde el canal auditivo hasta los cóndilos occipitales (Wismans et al. 1986).

$d_{CGy} = 22.2\text{mm}$, distancia en el eje y desde el canal auditivo hasta el centro de gravedad de la cabeza (Walker et al. 1973).

$I_z = 223.4 \text{ kg} \cdot \text{cm}^2$ (Beier et al. 1980), inercia de la cabeza respecto al eje "z", dato citado de investigaciones antropométricas (se asume como constante).

α : Matriz de la aceleración angular respecto al centro de rotación de la cabeza (OC), este dato se obtuvo en el análisis cinemático del capítulo anterior.

$$L1 = d_{COx} + d_{CGx} = 17.1\text{mm} = 0.0171\text{m}$$

$$L2 = d_{COy} + d_{CGy} = 57.2\text{mm} = 0.0572\text{m}$$

Fórmulas aplicadas:

$$\sum M_{CG} = I_z \cdot \alpha$$

$$R_{OCx} \cdot (d_{COy} + d_{CGy}) - R_{OCy} \cdot (d_{COx} + d_{CGx}) + M_{Oc} = I_z \cdot \alpha$$

$$M_{Oc} = I_z \cdot \alpha - R_{OCx} \cdot (d_{COy} + d_{CGy}) + R_{OCy} \cdot (d_{COx} + d_{CGx})$$

Momento calculado en función del tiempo

En la figura 2.12 se puede observar un momento en el cóndilo occipital de 2.1N.m

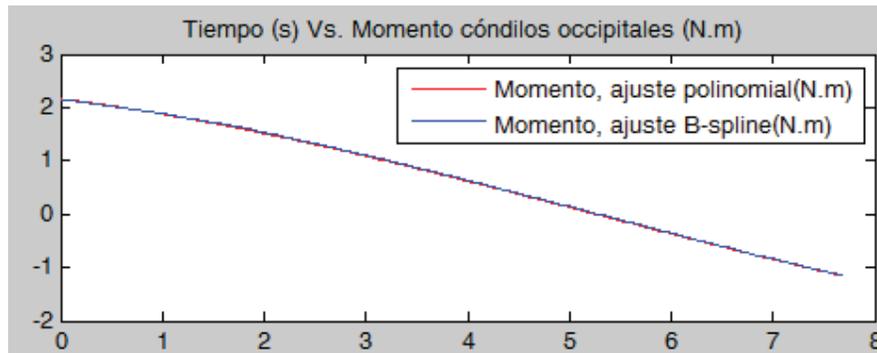


Figura 2.12.- Momento generado en el cóndilo occipital.
(Fuente: Escobar, 2017)

CAPITULO III

3 RESULTADOS Y DISCUSIÓN

3.1 Resultados

- **Análisis de posiciones flexo extensión cervical, varios ciclos, marcador 1**

En la gráfica 3.1, se puede observar las trayectorias que sigue la cabeza, las mismas que se desplazan de ciclo en ciclo, es decir no tiene un patrón de trayectoria establecido, esto es debido a diversos factores, como por ejemplo: equipo inadecuado para fijar el tronco del voluntario para garantizar que lo único que se mueva sea el sistema cuello – cabeza, el individuo estudiado se va fatigando de ciclo en ciclo, etc.

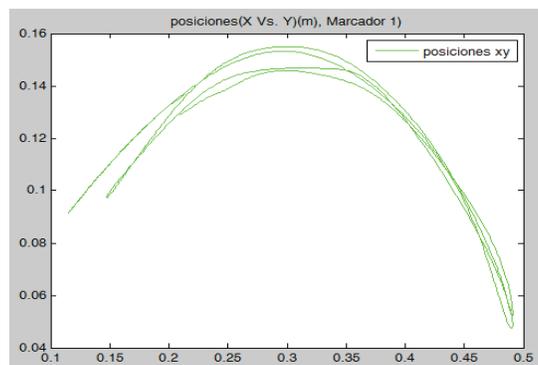


Figura 3.1.- Flexo extensión cervical, varios ciclos.
(Fuente: Escobar, 2017)

- **Análisis de posiciones (x vs. y) flexión cervical, un ciclo, marcador 1**

Las posiciones x, y que sigue un marcador ubicado sobre la cabeza durante el movimiento de flexión describe una curva similar a una parábola, para poder calcular las velocidades y aceleraciones instantáneas mediante una curva polinomial, se trató las posiciones (x, y) independientemente respecto al tiempo, sin embargo no es una curva que se ajuste a los datos reales. Por otra parte se ha suavizado la curva mediante funciones B-spline, obteniéndose buenos resultados como se puede ver en figura 3.2.

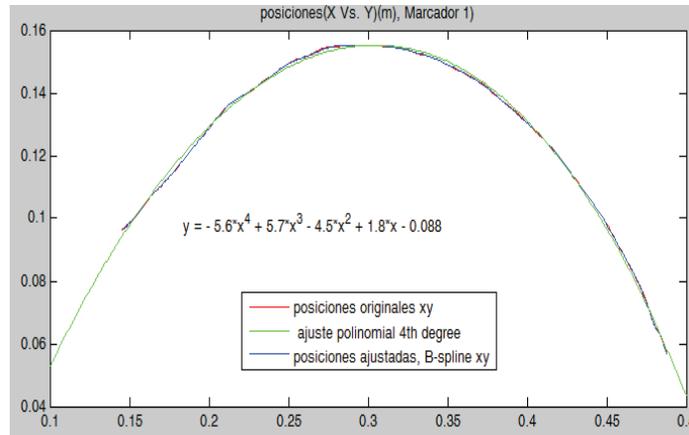


Figura 3.2. Posiciones (x, vs. y) flexión cervical, un ciclo (Fuente: Escobar, 2017)

- **Ajuste de las posiciones (t vs. x) flexión cervical, un ciclo, marcador 1**

En la figura 3.3 se observa la gráfica de las coordenadas 'x' en función del tiempo. Fue necesario realizar un tratamiento de los datos experimentales mediante funciones B-spline, además se realizó un ajuste polinomial de 4to grado en la curva (t vs. x) con el objetivo de determinar que método de ajuste se aproxima de mejor manera a los datos reales, determinando que el ajuste mediante funciones B-spline es el adecuado.

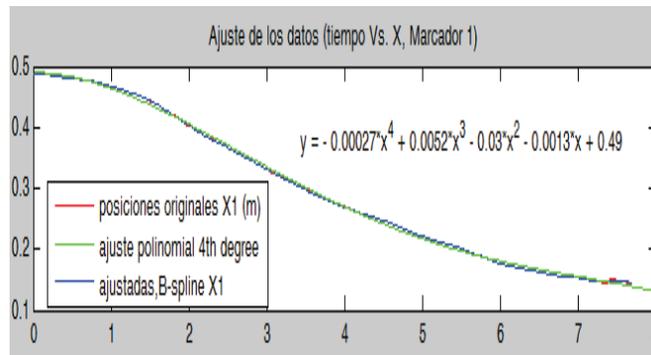


Figura 3.3 Ajuste posiciones en el eje x (Fuente: Escobar, 2017)

- **Ajuste de las posiciones (t vs. y) Flexión cervical, un ciclo, marcador 1**

En la figura 3.4 se puede apreciar de mejor manera que el ajuste de funciones B-spline es el adecuado, porque se aproxima a la curva original.

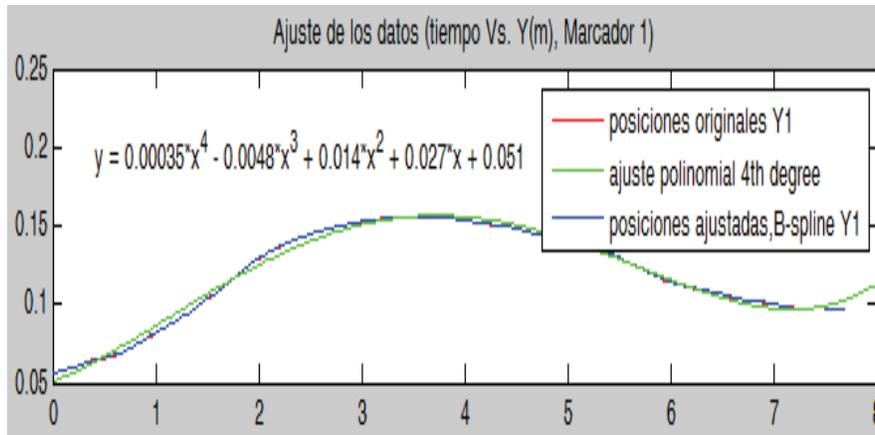


Figura 3.4 Ajuste posiciones en el eje y
(Fuente: Escobar, 2017)

- **Velocidad angular de la cabeza**

En la figura 3.5 se observa la curva de velocidad angular en función del tiempo, la cual tiene mucho ruido, por lo que se trató mediante funciones B-spline y ajuste polinómico como se observa en la figura 3.6. Igualmente el ajuste B-spline es el método que mejor se ajusta a los datos reales.

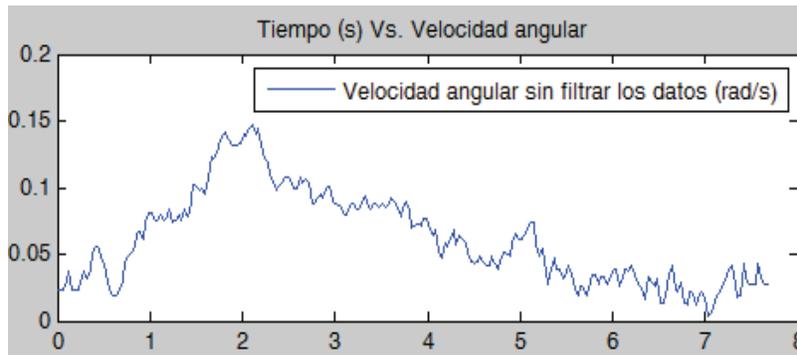


Figura 3.5. Velocidad angular.
(Fuente: Escobar, 2017)

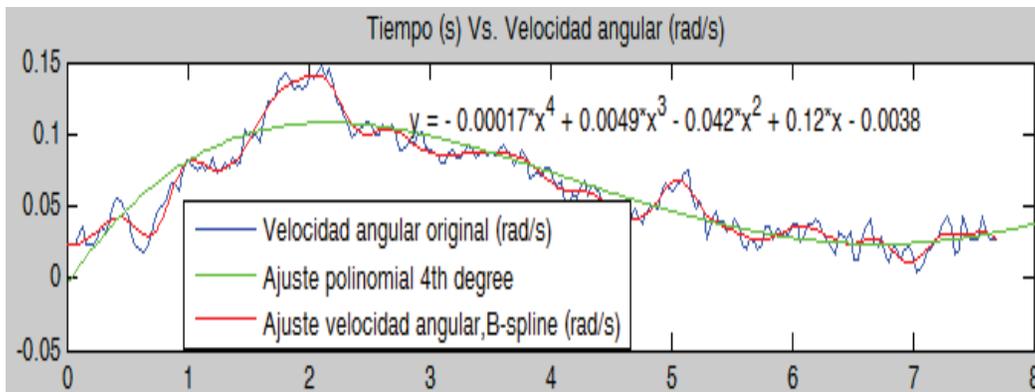


Figura 3.6 Ajuste velocidad angular.
(Fuente: Escobar, 2017)

- **Aceleración angular de la cabeza**

En la figura 3.7 se observa la curva de aceleración angular en función del tiempo, la cual tiene mucho ruido, por lo que se trató mediante funciones B-spline y ajuste polinómico, como se observa en la figura 3.8 se obtiene mejores resultados con el ajuste B-spline.

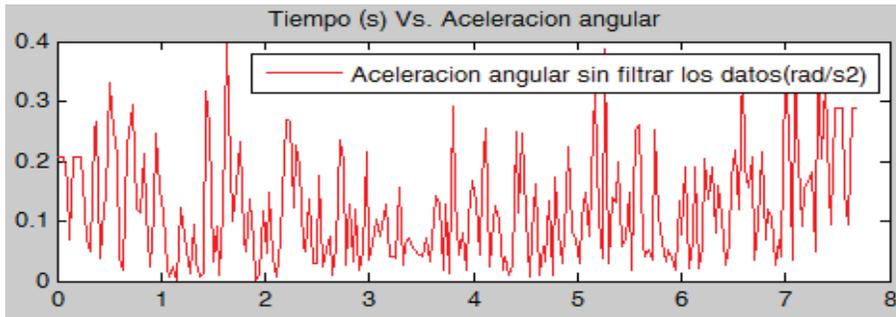


Figura 3.7 Aceleración angular
(Fuente: Escobar, 2017)

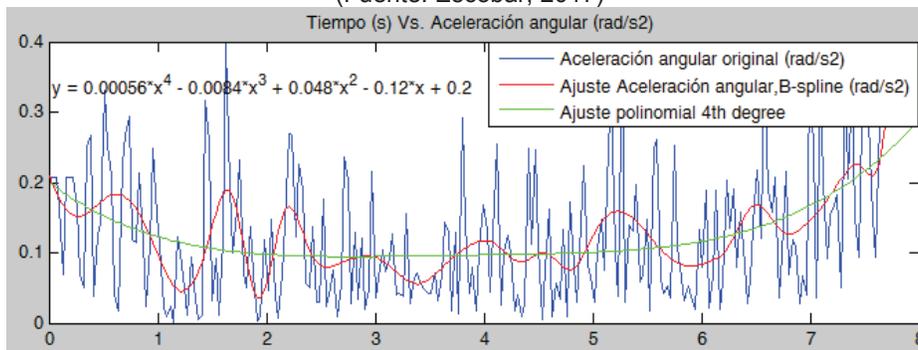


Figura 3.8 Ajuste aceleración angular
(Fuente: Escobar, 2017)

- **Fuerza de reacción en los cóndilos occipitales**

En la figura 3.9 se puede observar claramente la variación de los resultados al utilizar un ajuste polinomial o ajuste B-spline en los datos experimentales de posición obtenidos mediante análisis de video. Se determina que los resultados que más se aproximan a los valores reales de las fuerzas son los obtenidos mediante ajuste de funciones B-spline en las coordenadas de posición de los marcadores durante el movimiento de la cabeza.

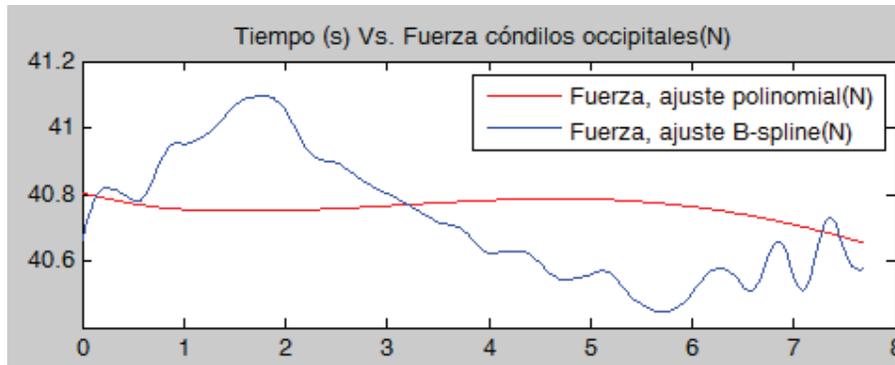


Figura 3.9 Fuerzas de reacción que se generan en los cóndilos occipitales
(Fuente: Escobar, 2017)

- **Momento en los cóndilos occipitales**

En la gráfica 3.10 se puede determinar un momento máximo de 2.1 N.m.

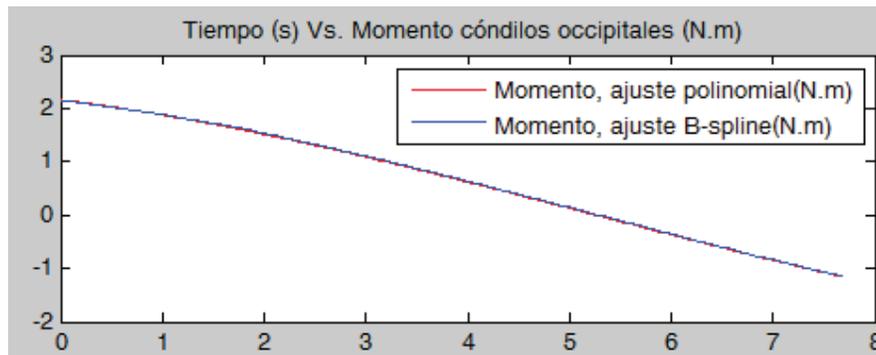


Figura 3.10.- Momento máximo generado en los cóndilos occipitales.
(Fuente: El Autor, 2017)

3.2 Discusión

Aplicado la investigación experimental cuantitativa, en base al planteamiento de la dinámica inversa y de los sólidos rígidos se aplicó con facilidad la segunda ley de Newton para el cálculo de las fuerzas de reacción en los cóndilos occipitales y el cálculo del momento mediante la ecuación fundamental de la dinámica rotacional en el plano sagital, para esto se realizó un estudio cinemático del movimiento de flexo extensión cervical, utilizando la técnica del análisis de video.

Análisis de fuerzas en los cóndilos occipitales

Como se puede observar en la figura 3.11 según Domínguez (2014), en su estudio isocinético cervical obtiene valores promedio de fuerza en la columna cervical para un grupo de hombres de entre 20 y 40 años con un valor de aproximado de 65N. En esta investigación se obtuvo una fuerza promedio en los cóndilos occipitales de 40.65 N

mediante ajuste polinomial de los datos de posición y 41.1N utilizando un ajuste de funciones B-spline, ver figura 3.12.

Se puede realizar comparaciones entre las fuerzas de la columna cervical citadas anteriormente solo para tener una idea de la confiabilidad de los resultados, ya que cada fuerza obedece a una anatomía compleja y distinta que tiene cada persona.

Se recomienda hacer experimentaciones de medición de fuerzas de la columna cervical para el individuo que se analizó en esta investigación, de esta manera se podrá comparar los resultados teóricos y experimentales.

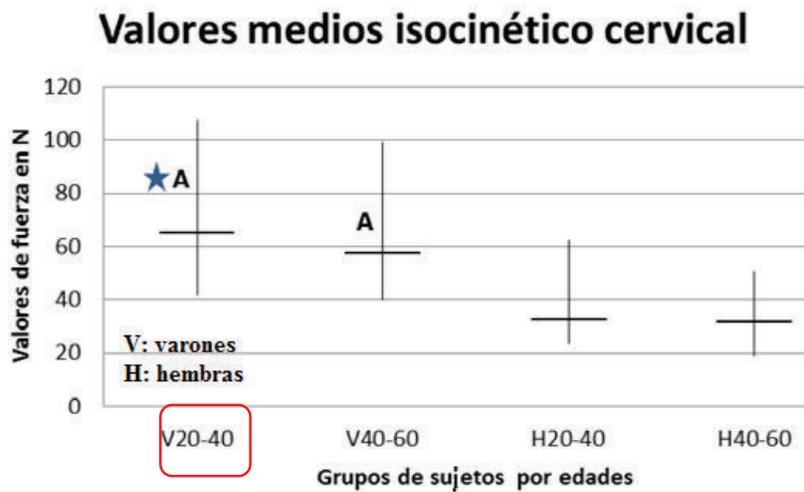


Figura 3.11 Valores de fuerza medidos por isocinética cervical.
Fuente: (Domínguez Domínguez, 2014)

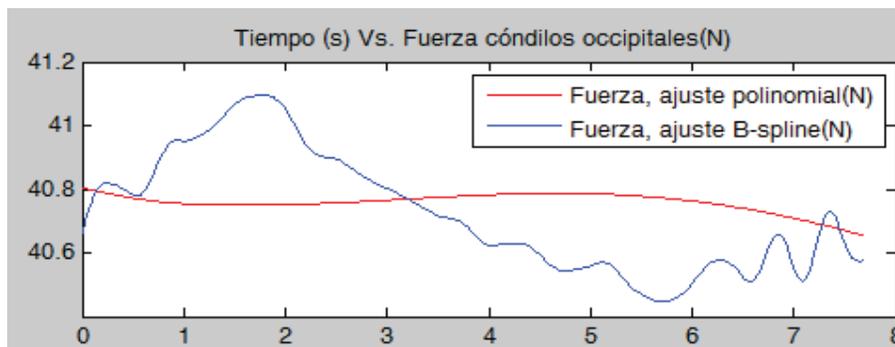


Figura 3.12. Valores de fuerza mediante análisis de video.
Fuente: (Escobar, 2017)

Análisis del momento en los cóndilos occipitales

Como se puede observar en la figura 3.13 según Vila Giraut (2010), en su estudio de las fuerzas y momento generados en los cóndilos occipitales obtiene un momento máximo de aproximadamente de 4.7N.m. En esta investigación se obtuvo un momento máximo en los cóndilos occipitales de 2.1 N.m, ver figura 3.14. Se consideró comparar

los resultados del cálculo del momento para poder establecer que los datos obtenidos en este trabajo están dentro de un rango de confiabilidad de resultados.

Se recomienda hacer experimentaciones de medición del momento en la columna cervical para el individuo que se analizó en esta investigación, de esta manera se podrá comparar los resultados teóricos y experimentales.

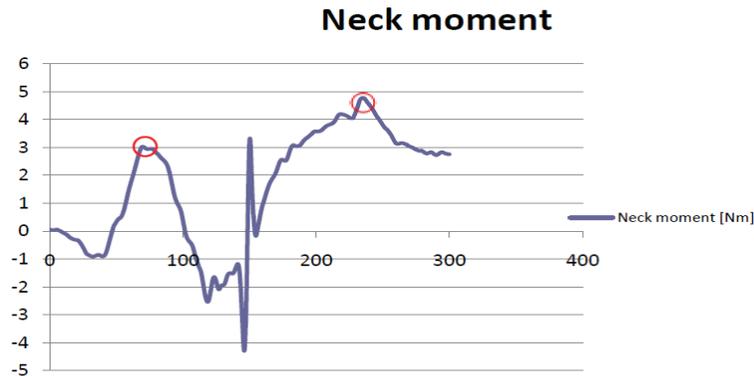


Figura 3.13 Momento del cuello en los cóndilos occipitales de un voluntario.
Fuente: (Vila Giraut, 2010)

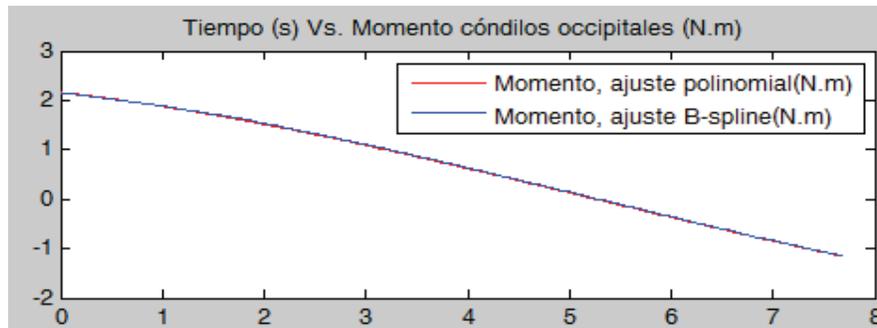


Figura 3.14 Momento calculado en los cóndilos occipitales mediante análisis de video.
Fuente: (Escobar, 2017)

Para mejorar las trayectorias de la cabeza durante la flexo extensión cervical se recomienda utilizar equipo adecuado para la fijación del tronco del voluntario experimentado, además se sugiere hacer un estudio de alternativas para el filtrado y suavizado de datos obtenidos experimentalmente con el fin de eliminar el ruido que contienen, de esta manera se puede obtener mejores resultados. La metodología que se emplea en esta investigación (análisis de video) hace uso de los recursos disponibles actualmente en el medio, por lo que los resultados son poco confiables, para mejorar los resultados de esta investigación se sugiere implementar un laboratorio de Biomecánica; además hago notar que este tipo de investigaciones demanda un grupo de profesionales multidisciplinario por ejemplo Traumatólogos, Ingenieros, Estadísticos, etc.; al juntar los criterios técnicos, científicos de cada uno de los profesionales se podrá llegar a resultados confiables.

CAPITULO IV

4 CONCLUSIONES

- Las trayectorias de los marcadores que se obtuvieron experimentalmente se los trato mediante una función B-spline para poder disminuir el ruido, además se analizó las trayectorias 'x' e 'y' individualmente y en función del tiempo, es decir se debe generar una trayectoria para el eje 'x' y otra para el eje 'y', estas curvas deben ser continuas y derivables en función del tiempo.
- Se realizó un proceso tratamiento de los datos de la velocidad y aceleración angular mediante funciones B-spline, debido a que presentaban un comportamiento inestable, que afectaba directamente al cálculo de las fuerzas y el momento en el cálculo dinámico.
- Las fuerzas de reacción en los cóndilos occipitales, se las calculó aplicando la ecuación de la segunda ley de Newton, las fuerzas se las restringió al plano sagital (xy), estos resultados no son confiables. Se debe realizar una práctica en un laboratorio especializado en el análisis de movimientos corporales para adquirir datos de fuerzas experimentalmente, de esta forma se podrá validar los resultados teóricos y experimentales para un individuo en particular.
- El momento generado en los cóndilos occipitales, provocados por el peso propio de la cabeza y su momento de inercia respecto al eje "z", se calculó aplicando la ecuación fundamental de la dinámica de rotación en el plano, mediante analogía con los sólidos rígidos, estos resultados se deben validar con datos experimentales obtenidos en un laboratorio de análisis de movimientos humanos en función de la misma persona experimentada en este trabajo investigativo.
- La técnica del análisis del movimiento mediante video, ha sido de mucha ayuda en este trabajo, porque ayudó a obtener con facilidad las trayectorias de los marcadores de posición, facilitándose el cálculo de la aceleración del centro de gravedad de la cabeza mediante la cinemática del sólido rígido. Además se concluye que esta técnica es muy fácil de implementar y de bajo coste, sin embargo no garantizan la confiabilidad necesaria en los resultados.
- Hay que dejar en constancia que los resultados del estudio dinámico de segmentos corporales varía dependiendo del sexo, edad, estado funcional del segmento corporal, entre otros; los resultados de fuerzas y momento obtenidos

en esta investigación no se pueden generalizar para todas las personas debido a que todos tenemos anatomías complejas y distintas.

- Finalmente se concluye que los resultados obtenidos en esta investigación puede considerarse como un cálculo preliminar, que servirá de apoyo en el estudio dinámico del cuello humano en futuras investigaciones. Además hago notar que este tipo de investigaciones demanda un grupo de profesionales multidisciplinario por ejemplo Traumatólogos, Ingenieros, Estadísticos, etc.; al juntar los criterios técnicos, científicos de cada uno de los profesionales se podrá llegar a resultados confiables.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Baydal Bertomen, J. M. (2012). *Cinemática del Raquis Cervical*. Valencia.
- Calvo, J. B. (s.f.). *Pilates Terapeutico*. Panamericana.
- Cappozzo, A., & Leardini, A. (2004). Human movement analysis using stereophotogrammetry. 3-12.
- ComPADRE Digital Library. (2009). *Tracker Video Analysis and Modeling Tool for Physics Education*. Obtenido de <http://physlets.org/tracker/>.
- Díaz Rodríguez, M., Valera, Á., Page, Á., Besa, A., & Mata, V. (2016). Dynamic Parameter Identification of Subject-Specific Body Segment Parameters Using Robotics Formalism: Case Study Head Complex. 1-8.
- Diego-Mas, J. A. (2015). Análisis biomecánico estático coplanar. *Ergonautas, Universidad Politécnica de Valencia*.
- Domínguez Domínguez, I. (2014). *Patrones de normalidad de la fuerza, rango de movimiento y activación neuro muscular del esguinse muscular*.
- Fernández Coca, M. M. (2009). Anatomía Columna Cervical. Huesos y Articulaciones. *Fisioterapia glogal*.
- Hibbeler, H. R. (2010). *Ingeniería Mecánica, Dinámica* (12 Ed. ed.). México: Pearson Educacion.
- Imhof, & Cols. (2011). *Diagnóstico por imagen de la Columna vertebral*. Panamericana.
- Kapandji, A. I. (1998). *Fisiología Articular, Tronco y Raquis* (5ta ed.). Panamericana.
- Leva, P. (1996). Adjustments to Zarsiorski - Seluyanov's Segment Inertia Parameters. 1-8.
- Marion, J. B. (2003). *Dinámica clásica de las partículas y sistemas*. Barcelona: REVERTE, S. A.
- Mata, V. (2015). Mecánica Computacional. *Formulaciones Dinámicas*. EPN. Quito. Obtenido de <http://www.upv.es/citv>
- McConville, J. T. (1980). *Anthropometric relationships of body and body segment moments of inertia*. Ohio.
- Page, A. (2015). Técnicas avanzadas de análisis de movimiento. *Suavizado, derivación numérica*, IBV. 14-15.

Torres Cueco, R. (2008). *La columna Cervical: Síndromes Clínicos y su tratamiento manipulativo*. Panamericana.

Vargas Sanabria, M. (2012). Anatomía y exploración física de la columna. *Scielo*, 29 (2), 77-92.

Vila Giraut, L. (2010). Test method – Upper neck force and moment. Goteborg, Sweden: CHALMERS UNIVERSITY OF TECHNOLOGY.

ANEXOS

ANEXO 1.

POSICIÓN DE LOS CÓNDILOS OCCIPITALES.

Table 14. Position of the OC relative to the coordinate reference system of the head

Author	x-axis [mm]	y-axis [mm]	z-axis [mm]
Wismans et al. 1986	-11	0	-26
Plaga et al. 2005	-8.89	0	-31.75
5 th percentile female dummy	-11	0	-25
BioRID II (50 th percentile male) (*)	-19	0	-51

(*) Position given with respect to the center of gravity instead of the auditory meatus

ANEXO 2.

CENTRO DE GRAVEDAD DE LA CABEZA.

Table 3. Center of gravity for 19 male + 2 female cadavers from Beier et al.1980

With respect to the AM	Range [cm]		Mean [cm]	SD (*) [cm]
x-axis	0.28	1.37	0.83	0.26
y-axis	-0.26	0.34	-0.03	0.14
z-axis	2.18	4.34	3.13	0.56

(*) SD (Standard Deviation): is a statistical measure the dispersion of a group. The formula to calculate it is $SD = \sqrt{\frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N (x_i - Mean)^2}$. A small SD indicates that all the values of the group are very compact to the mean value.

Data obtained from the paper from Yoganandan et al. 2009.

Table 4. Center of gravity for the 2 female cadavers from by Beier et al.1980

With respect to the AM	Range [cm]		Mean [cm]	SD [cm]
x-axis	0.28	0.66	0.47	0.27
y-axis	0.05	-0.17	-0.06	0.16
z-axis	2.96	2.87	2.92	0.06

Data obtained from the paper from Yoganandan et al. 2009.

Table 5. Center of gravity of the head from Walker et al. 1973

With respect to the AM	X-Ray [cm]	Photo [cm]
x-axis	0.91	1.49
z-axis	2.22	2.448

Table 6. Center of volume of the head of 46 female subjects from Young et al.1983

With respect to the AM	Range [cm]		Mean [cm]	SD [cm]
x-axis	-2.43	0.05	-1.08	0.53
y-axis	-0.6	0.84	0.01	0.35
z-axis	2.24	4.79	3.42	0.45

Table 7. Summary of the different studies for the location of the center of gravity relative to the AM [cm]

Author	x-axis	y-axis	z-axis
Beier et al. 1980 – 19 males + 2 females cadavers	0.83	-0.03	3.13
Beier et al. 1980 – 2 females cadavers	0.47	-0.06	2.92
Walker et al. 1973 – 20 males cadavers (Photo)	1.49	-	2.488
Walker et al. 1973 – 20 males (X-Ray)	0.91	-	2.22
Young et al. 1983 – 46 living females	-1.08	0.01	3.42
Ono – used in his studies (males)	0.5	0	2
5 th percentile female dummy	-0.2	0	3.3

ANEXO 3.

MASA DE LA CABEZA.

Table 8. Regression equations for the volume of the female head by Young et al. (1983) (See Section 3.3.1 for the anthropometric measurements)

	R (*)	SE EST (**)
$-1.25 * Stature + 4.45 * Weight + 3469$	0.450	6.3%
$147.05 * Head\ circ. - 4161.23$	0.661	5.2%
$108.73 * Head\ circ. + 137.28 * Head\ height - 4202.24$	0.754	4.6%
$132.85 * Head\ circ. + 163.75 * Head\ height - 13.73 * Stature - 3722.51$	0.799	4.3%

(*) R: Multiple correlation coefficient. It's a statistical measure which measure the strength between the predictive variable and the variable used in the regression equations. The closer R is to one, the stronger is the linear association.

(**) SE EST: Standard error of estimate. It's a measure of the accuracy of predictions given by a regression line. It is given as a percent of the predicted variable mean value.

Table 9. Regression equations for the mass of the female's head by Young et al. 1983 (See Section 3.3.1 for the anthropometric measurements)

	R	SE EST
$(-1.25 * Stature + 4.45 * Weight + 3469) * 1.066$	0.450	6.3%
$(147.05 * Head\ circ. - 4161.23) * 1.066$	0.661	5.2%
$(108.73 * Head\ circ. + 137.28 * Head\ height - 4202.24) * 1.066$	0.754	4.6%
$(132.85 * Head\ circ. + 163.75 * Head\ height - 13.73 * Stature - 3722.51) * 1.066$	0.799	4.3%

The units of the mass are [g]

The head mass for the Hybrid III 5th percentile female is 3.733 kg.

The head mass for the BioRID II (represents a 50th percentile male) is 4.54 kg.

Table 10. Summary of the different studies for mass of the female's head

Author	N (Females)	N (Males)	Subjects	Mean mass [kg]
Walker et al. (1973)	-	20	Cadavers	4.4
Beier et al. (1980)	2	19	Cadavers	4.324
Beier et al. (1980)	2	-	Cadavers	4.125
Young et al. (1983) (*)	46	-	Volunteers	4.15
Hybrid III 5 th percentile female	-	-	Dummy	3.733
BioRID II (50 th percentile male)	-	-	Dummy	4.54

(*) The mass is calculated from the volume of the head

ANEXO 4.

MOMENTO DE INERCIA DE LA CABEZA.

Table 11. Moments of inertia by Beier et al.1980

	Range [kg·cm ²]		Mean [kg·cm ²]	SD
I_x	136	274	205.9	34.6
I_y	159	298	223.4	34.4
I_z	110	198	148.4	25.5

Data from Beier indicate that exist a good correlation ($R^2=0.77, 0.93, 0.74$ for I_x, I_y, I_z respectively) between head mass and the principal moments of inertia of the head.

Table 12. Regression equations for the moment of inertia of the head in the x-axis from Young et al. 1983 (See Section 3.3.1 for the anthropometric measurements)

Head x-moment of inertia		R	SE EST
I_x	$-384 * Stature + 476 * Weight + 155137$	0.419	17.1%
	$21363 * Head height - 172855$	0.567	15.4%
	$16909 * Head height + 17129 * Head breadth - 353147$	0.609	14.9%
	$21363 * Head height + 17142 * Head breadth - 723 * Stature - 271345$	0.624	14.9%
Head y-moment of inertia		R	SE EST
I_y	$-25 * Stature + 357 * Weight + 143627$	0.409	11.8%
	$12704 * Head circ. - 505983$	0.635	9.9%
	$9784 * Head circ. + 10461 * Head height - 509109$	0.706	9.2%
	$11702 * Head circ. + 125666 * Head height - 1092 * Stature - 470950$	0.743	8.8%

Head z-moment of inertia		R	SE EST
I_z	$-220 * Stature + 88 * Weight + 92585$	0.154	15%
	$8746 * Head circ. - 338641$	0.503	13%
	$9985 * Head circ. - 9252 * Head breadth - 271640$	0.534	12.8%
	$11158 * Head circ. - 9089 * Head breadth - 521 * Stature - 254325$	0.550	12.8%

The units of the moments of inertia of the head are: g·cm²

ANEXO 5.

ALGORITMO DE CÁLCULO EN MATLAB DE LA CINEMÁTICA Y DINÁMICA MOVIMIENTO FLEJO EXTENSIÓN CERVICAL.

```
%////////////////////////////////////CÁLCULO CINEMÁTICO////////////////////////////////////
clear;clc;
format long
m=1;
numeromarcadores=2;
tabla=dlmread('DatosExpermPosicExtensionXYunCiclo.txt');
Tabla=tabla(:,1:4);
numeromarcadores=2 %como cada marcador tiene 2 columnas XY, tomara 4
%columnas, analisis en el plano sagital
n=numel(Tabla(1,:)); %
tsim=6.6 %tiempo que dura un ciclo de extensión.
nt=numel(Tabla(:,1));
dt=tsim/(nt-1);
t= linspace(0,tsim,nt);
for i=1:n;
    fdamat = suavizado_bspline_Cabeza(Tabla(:,i),t',35,4);
    posiciones(:,i)=fdamat(:, :, 1);
    VEL(:,i)=fdamat(:, :, 2);
    ACEL(:,i)=fdamat(:, :, 3);
End

%-----
% Posiciones, Velocidades, aceleraciones-----> Marcador 1
% Posicion x y
subplot(1,1,1);
plot(Tabla(:,1),Tabla(:,2),'-r');
hold on ;
plot(posiciones(:,1),posiciones(:,2),'-b');
title('posiciones(X Vs. Y) (m), Marcador 1')
legend('posiciones originales xy','posiciones ajustadas, B-spline xy')

% Posiciones x
figure
subplot(2,1,1);
plot(t(1,:),Tabla(:,1),'-r');
hold
plot(t(1,:),posiciones(:,1),'-b');
title('Ajuste de los datos (tiempo Vs. X, Marcador 1)')
legend('posiciones originales X1 (m)','posiciones ajustadas,B-spline X1')

% Posiciones y
subplot(2,1,2);
plot(t(1,:),Tabla(:,2),'-r');
hold on;
plot(t(1,:),posiciones(:,2),'-b');
title('Ajuste de los datos (tiempo Vs. Y(m), Marcador 1)')
legend('posiciones originales Y1','posiciones ajustadas,B-spline Y1')
%
% velocidades y aceleraciones -----> Marcador 1
syms T
% Velocidades
Px1=-0.00027*T.^4+0.0052*T.^3-0.03*T.^2-0.0013*T+0.49 % ecuación
trayectoria marcador 1 en x respecto al tiempo
```

```

Py1=-0.00035*T.^4+0.0048*T.^3-0.014*T.^2-0.027*T+0.051%          ecuación
%trayectoria marcador 1 en (y) respecto al tiempo
PX1=inline(Px1)
PY1=inline(Py1)
T=t;
PosAjustX1=PX1(T(1,:));
PosAjustY1=PY1(T(1,:));
syms T
Velx1=eval(diff(Px1,1))
Vely1=eval(diff(Py1,1))
VelocidX1=inline(Velx1)
VelocidY1=inline(Vely1)
T=t;
vx1=VelocidX1(T(1,:));
vy1=VelocidY1(T(1,:));
for i=1:nt
velocidadesM1(i,1)=sqrt(vx1(1,i).^2+vy1(1,i).^2)
end

% VELOCIDADES SUAVIZADO B-SPLINE
VELX1=VEL(:,1);
VELX2=VEL(:,3);
VELY1=VEL(:,2);
VELY2=VEL(:,4);

for i=1:nt
    VELM1(i,1)=sqrt(VELX1(i,1).^2+VELY1(i,1).^2)
end

% Aceleraciones
syms T
Acelx1=eval(diff(Px1,2))
Acely1=eval(diff(Py1,2))
AcelerX1=inline(Acelx1)
AcelerY1=inline(Acely1)
T=t
ax1=AcelerX1(T(1,:));
ay1=AcelerY1(T(1,:));

for i=1:nt
    aceleracionesM1(i,1)=sqrt(ax1(1,i).^2+ay1(1,i).^2)
end

% aceleración mediante B-spline
ACELX1=VEL(:,1);
ACELX2=VEL(:,3);
ACELY1=VEL(:,2);
ACELY2=VEL(:,4);

for i=1:nt
    ACELM1(i,1)=sqrt(ACELX1(i,1).^2+ACELY1(i,1).^2)
end

figure
subplot(2,1,1);
plot(t(1,:), velocidadesM1(:,1), '-b')
hold on
plot(t(1,:), VELM1(:,1), '-R')
title('Tiempo Vs. velocidades (Marcador 1)')

```

```

legend('Velocidad ajuste polinomial(m/s)', 'Velocidad ajuste B-spline
(m/s) ')

subplot(2,1,2);
plot(t(1,:),aceleracionesM1(:,1),'-b')
hold on
plot(t(1,:),ACELM1(:,1),'-r')
title('Tiempo Vs. aceleraciones (Marcador 1)')
legend('Aceleración ajuste polinomial(m/s)', 'Aceleración ajuste B-
spline (m/s)')
%-----
% Posiciones-----> Marcador 2
% Posición x y
% Posición x y
subplot(1,1,1);
plot(Tabla(:,3),Tabla(:,4),'-r');
hold on ;
plot(posiciones(:,3),posiciones(:,4),'-b');
title('posiciones(X Vs. Y) (m), Marcador 2')
legend('posiciones originales xy', 'posiciones ajustadas xy, B-spline ')

% Posiciones x
figure
subplot(2,1,1);
plot(t(1,:),Tabla(:,3),'-r');
hold on
plot(t(1,:),posiciones(:,3),'-b');
title('Ajuste de los datos (tiempo Vs. X, Marcador 2)')
legend('posiciones originales X2 (m)', 'posiciones ajustadas X2, B-
spline')

% Posiciones y
subplot(2,1,2);
plot(t(1,:),Tabla(:,4),'-r');
hold on;
plot(t(1,:),posiciones(:,4),'-b');
title('Ajuste de los datos (tiempo Vs. Y(m), Marcador 2)')
legend('posiciones originales Y2', 'posiciones ajustadas Y2, B-spline')

%
% velocidades y aceleraciones -----> Marcador 2
syms T
% Velocidades
Px2=-0.00027*T^4+0.0052*T^3-0.03*T^2-0.0013*T+0.49; % ecuación
%trayectoria marcador 1 en x respecto al tiempo
Py2=0.00029*T^4-0.0044*T^3+0.016*T^2+0.018*T-0.0096; % ecuación
%trayectoria marcador 1 en z respecto al tiempo
PX2=inline(Px2)
PY2=inline(Py2)
T=t;
PosAjustX2=PX2(T(1,:));
PosAjustY2=PY2(T(1,:));

syms T
Velx2=eval(diff(Px2,1));
Vely2=eval(diff(Py2,1));
VelocidX2=inline(Velx2);
VelocidY2=inline(Vely2);
T=t;
vx2=VelocidX2(T(1,:));

```

```

vy2=VelocidY2(T(1,:));
for i=1:nt
    velocidadesM2(i,1)=sqrt(vx2(1,i).^2+vy2(1,i).^2)
end

for i=1:nt
    VELM2(i,1)=sqrt(VELX2(i,1).^2+VELY2(i,1).^2)
end
% Aceleraciones
syms T
Acelx2=eval(diff(Px2,2));
Acely2=eval(diff(Py2,2));
AcelerX2=inline(Acelx2);
AcelerY2=inline(Acely2);
T=t;
ax2=AcelerX2(T(1,:));
ay2=AcelerY2(T(1,:));
for i=1:nt
    aceleracionesM2(i,1)=sqrt(ax2(1,i).^2+ay2(1,i).^2)
end
for i=1:nt
    ACELM2(i,1)=sqrt(ACELX2(i,1).^2+ACELY2(i,1).^2)
end
figure
subplot(2,1,1);
plot(t(1,:),velocidadesM2(:,1),'-b')
hold on
plot(t(1,:),VELM2(:,1),'-r')
title('Tiempo Vs. velocidades (Marcador 2)')
legend('Velocidad ajuste polinomial(m/s)','Velocidad ajuste B-spline
(m/s)')

subplot(2,1,2);
plot(t(1,:),aceleracionesM2(:,1),'-b')
hold on;
plot(t(1,:),ACELM2(:,1),'-r')
title('Tiempo Vs. aceleraciones (Marcador 2)')
legend('Aceleración ajuste polinomial(m/s)','Aceleración ajuste B-
spline (m/s)')

%//////////CÁLCULO DE LA ACELERACIÓN EN EL CENTRO DE GRAVEDAD//////////
% se debe considerar que análisis se lo realiza en el plano sagital
    %a (Px)=a (Ox)-w^2.(OPx)+alpha.(OPy)
    %a (Py)=a (Oy)-w^2.(OPy)-alpha.(OPx)

for i=1:nt;
    OPx(i,1)=abs(posiciones(i,3)-posiciones(i,1));
    OPy(i,1)=abs(posiciones(i,4)-posiciones(i,2));
    aPx(i,1)=ax2(1,i);
    aOx(i,1)=ax1(1,i);
    aPy(i,1)=ay2(1,i);
    aOy(i,1)=ay1(1,i);

    syms alfa
    w2(i,1)= aOy(i,1)-aPy(i,1)+(alfa*OPy(i,1))/OPy(i,1)
    Ec(i,1)=aOx(i,1)-w2(i,1)*OPx(i,1)-alfa*OPy(i,1)- aPx(i,1)
    Alfa(i,1)=eval(solve(Ec(i,1),alfa));
    W2(i,1)=(aOy(i,1)-aPy(i,1)+( Alfa(i,1)*OPy(i,1))/OPy(i,1))
    w_cab(i,1)=sqrt(abs(W2(i,1)))

```

```

    vel_angular(i,1)=eval();
end

%
%velocidad angular y aceleración angular.
format long
Vel_acel_ang=dlmread('VelAcelAng.txt');
Datos=Vel_acel_ang(:,1:2);
n=numel(Datos(1,:)); %
tsim=7.7 %tiempo que dura un ciclo de extensión.
nt=numel(Datos(:,1));
dt=tsim/(nt-1);
t= linspace(0,tsim,nt);

for i=1:n;
    fdamat = suavizado_bspline_VelAcelAng(Datos(:,i),t',35,4);
    VelAcelAng(:,i)=fdamat(:, :,1);
end

veloc_angularSinFilt=Datos(:,1);
acel_angularSinFilt=Datos(:,2);
veloc_angular=VelAcelAng(:,1);
acel_angular=VelAcelAng(:,2);

figure
subplot(2,1,1);
plot(t(1,:), veloc_angularSinFilt(:,1),'-b');
hold on
plot(t(1,:), veloc_angular(:,1),'-r');
title('Tiempo (s) Vs. Velocidad angular (rad/s) ')
legend('Velocidad angular original (rad/s)', 'Ajuste velocidad angular, B-
spline (rad/s)')
hold
subplot(2,1,2);
plot(t(1,:), acel_angularSinFilt(:,1),'-b')
hold on;
plot(t(1,:), acel_angular(:,1),'-r');
title('Tiempo (s) Vs. Aceleración angular (rad/s2) ')
legend('Aceleración angular original (rad/s2)', 'Ajuste Aceleración
angular, B-spline (rad/s2)')

% Ajuste de la velocidad angular
syms T
w_ajust=0.0022*T^3-0.029*T^2+0.1*T+0.0047; % ecuación trayectoria
%marcador 1 en x respecto al tiempo
%respecto al tiempo
W_ajust=inline(w_ajust)
T=t;
W_ajustada=W_ajust(T(1,:));
% Ajuste de la aceleración angular
syms T
alf_ajust=0.00021*T^3+0.0048*T^2-0.044*T+0.17; % ecuación trayectoria
%marcador 1 en x respecto al tiempo
Alf_ajust=inline(alf_ajust)
T=t;
Alfa__ajustada=W_ajust(T(1,:));

```

```

%
% Cálculo de la aceleración en el centro de gravedad.
% Mediante ajuste polinomial
for i=1:nt;
    OCGx(i,1)=abs(posiciones(i,3)-posiciones(i,1));
    OCGy(i,1)=abs(posiciones(i,4)-posiciones(i,2));
    aOx(i,1)=ax1(1,i);
    aOy(i,1)=ay1(1,i);
    w(i,1)= W_ajustada(1,i);
    alf(i,1)=Alfa_ajustada(1,i);
    acgx(i,1)=aOx(i,1)-(w(i,1)).^2*OCGx(i,1)+alf(i,1)*OCGy(i,1);
    acgy(i,1)=aOy(i,1)-(w(i,1)).^2*OCGy(i,1)-alf(i,1)*OCGx(i,1);
end

AcgX=acgx(:,1);
AcgY=acgy(:,1);
AceleCG=sqrt(AcgX(:,1).^2+AcgY(:,1).^2)

% Mediante B-spline
for i=1:nt;
    OCGx(i,1)=abs(posiciones(i,3)-posiciones(i,1));
    OCGy(i,1)=abs(posiciones(i,4)-posiciones(i,2));
    AOx(i,1)=ACELX1(i,1);
    AOy(i,1)=ACELY1(i,1);
    W(i,1)= veloc_angular(i,1);
    ALF(i,1)=acel_angular(i,1);
    ACgx(i,1)=AOx(i,1)-(W(i,1)).^2*OCGx(i,1)+ALF(i,1)*OCGy(i,1);
    ACgy(i,1)=AOy(i,1)-(W(i,1)).^2*OCGy(i,1)-ALF(i,1)*OCGx(i,1);
End

ACGX=ACgx(:,1);
ACGY=ACgy(:,1);
ACELECG=sqrt(ACGX(:,1).^2+ACGY(:,1).^2)

figure
subplot(2,1,1);
plot(t(1,:),acgx(:,1),'-r');
hold on
plot(t(1,:),ACgy(:,1),'-b');
title('Tiempo (s) Vs. Aceleracion CG "X" cabeza ')
legend('Ajuste polinomial aceleración CG "X" cabeza m/s2',' Ajuste B-
spline aceleración CG "X" cabeza m/s2')
hold
subplot(2,1,2);
plot(t(1,:),acgy(:,1),'-g');
hold on
plot(t(1,:),ACgy(:,1),'-b');
title('Tiempo (s) Vs. Aceleracion CG "Y" cabeza ')
legend('Ajuste polinomial aceleración CG "Y" cabeza m/s2',' Ajuste B-
spline aceleración CG "Y" cabeza m/s2')

figure
subplot(2,1,1);
plot(t(1,:),AceleCG(:,1),'-r');
hold on
plot(t(1,:),ACELECG(:,1),'-b');
title('Tiempo (s) Vs. Aceleracion CG cabeza ')
legend('Ajuste polinomial aceleración Centro Gravedad cabeza m/s2','
Ajuste B-spline aceleración Centro Gravedad cabeza m/s2')

```

```

% ////////////////////////////////////////////////////////////////////CÁLCULO DINÁMICO//////////////////////////////////////////////////////////////////

%-----Incrementos del Ángulo teta
Teta=dlmread('teta.txt');

%movimiento de flexión----> -45grados
%movimiento de extensión----> 45grados
% cálculo de las fuerzas.
m=4.15 % masa cabeza kg.
gv=9.81 % gravedad en (m/s2)

% ////////////////////////////////////////////////////////////////////CÁLCULO DE LAS FUERZAS//////////////////////////////////////////////////////////////////
%
% Cálculo de las fuerzas de reacción en los cóndilos occipitales.
for i=1:nt;
    Rcox(i,1)=m*acgx(i,1)+m*gv*sind(Teta(i,1))
    Rcoy(i,1)=m*acgy(i,1)+m*gv*cosd(Teta(i,1))
End

    Fx=Rcox(:,1);
    Fy=Rcoy(:,1);
    Fuerza=sqrt(Fx(:,1).^2+Fy(:,1).^2)

    % Mediante ajuste B-spline
for i=1:nt;
    REcox(i,1)=m*ACgx(i,1)+m*gv*sind(Teta(i,1))
    REcoy(i,1)=m*ACgy(i,1)+m*gv*cosd(Teta(i,1))
End

    FUX=REcox(:,1);
    FUY=REcoy(:,1);
    FUERZA=sqrt(FUX(:,1).^2+FUY(:,1).^2)

% ////////////////////////////////////////////////////////////////////CÁLCULO DEL MOMENTO//////////////////////////////////////////////////////////////////
%M0c=Iz.*-ROcx.(dCOx +dCGx)+ROCy.(dCOy+dCGy)
%dCOx= 8mm, dCGx=9.1mm
%dCOy= 35mm, dCGy=22.5mm
% L1=dCOx +dCGx=13mm
% L2=dCOz +dCGz=55mm
Iz=0.0222 %Inercia de la cabeza respecto al eje "z" (kg m2)
L1=0.0171
L2=0.0575

for i=1:nt;
    Moc(i,1)=Iz*alf(i,1)-Fx(i,1)*L2+Fy(i,1)*L1
End

% Mediante ajuste B-spline
for i=1:nt;
    MOC(i,1)=Iz*ALF(i,1)-FUX(i,1)*L2+FUY(i,1)*L1
end

figure
subplot(2,1,1);
plot(t(1,:),Fx(:,1),'-r');
hold on;
plot(t(1,:),FUX(:,1),'-b');
title('Tiempo (s) Vs. Fuerza cóndilos occipitales "X"(N) ')

```

```

legend('Fuerza X, ajuste polinomial(N)', 'Fuerza X, ajuste B-spline(N)')
hold
subplot(2,1,2);
plot(t(1,:),Fy(:,1),'-r');
hold on;
plot(t(1,:),FUy(:,1),'-b');
title('Tiempo (s) Vs. Fuerza cóndilos occipitales "Y"(N) ')
legend('Fuerza Y, ajuste polinomial(N)', 'Fuerza Y, ajuste B-spline(N)')

figure
subplot(2,1,1);
plot(t(1,:),Fuerza(:,1),'-r');
hold on;
plot(t(1,:),FUERZA(:,1),'-b');
title('Tiempo (s) Vs. Fuerza cóndilos occipitales(N) ')
legend('Fuerza, ajuste polinomial(N)', 'Fuerza, ajuste B-spline(N)')
hold
subplot(2,1,2);
plot(t(1,:),Moc(:,1),'-r');
hold on;
plot(t(1,:),MOC(:,1),'-b');
title('Tiempo (s) Vs. Momento cóndilos occipitales (N.m) ')
legend('Momento, ajuste polinomial(N.m)', 'Momento, ajuste B-
spline(N.m)')

```

%////////////////////////////////////FIN DE PROGRAMA////////////////////////////////////

ANEXO 6.

SUAVIZADO B-SPLINE

(Instituto de Biomecánica de Valencia- IBV)

```
function fdamat = suavizado_bspline(datos, tiempo, nfunctions, order,
varargin)

% suavizado_bspline : Ajuste por spline mediante datos funcionales
%
% Función MATLAB para suavizar datos funcionales mediante bases de
% funciones splines.
%
% Esta función sirve tanto de manera independiente como para un uso
% combinado con la función suavizado_optimo. Con esta función se
calcula
% el suavizado de la función objetivo a partir de la curva y de un
número
% dado de funciones para una base y del orden de estas. Como salida
ofrece
% la curva suavizada junto con las derivadas que se precisen, por
defecto
% 2. En el caso del uso combinado, el argumento necesario 'nfunctions'
% sería el que ofrece como salida la función suavizado_optimo.
%
% Además, en este uso combinados opcionales 'order' y 'knots' de la
función
% suavizado_optimo se convierten en los argumentos necesarios 'order'
y
% 'tiempo' de la función suavizado_bspline. Además, el argumento
'disc'
% debe coincidir en ambas funciones.
%
% Este uso combinado tiene el objetivo de ahorrar tiempo cuando se
trabaja
% con un banco de datos grande en el que las curvas son parecidas
entre sí
% y no va a haber grandes diferencias en el número de funciones
necesarias.
% De este modo, realizamos el cálculo de este óptimo una única vez y
lo
% tomamos como válido para todos los registros.
%
% Argumentos necesarios de entrada:
% - DATOS: Vector o matriz de tamaño m x n, donde n representa el
número de
% réplicas, o bien el número de variables, que contiene los datos a
ajustar.
% - TIEMPO: Vector columna que indica los puntos en los que se han
obtenido las
% medidas de DATOS. Evidentemente, la longitud del vector TIEMPO ha de
ser m.
% - NFUNCTIONS: Valor que indica que el suavizado se va a realizar con
un
% número determinado de funciones.
% - ORDER: Orden de los splines usados para realizar el ajuste. El
orden
% siempre es una unidad superior al grado máximo del polinomio que
define
% el spline y debe ser al menos dos grados superior al orden máximo de
```

```

% derivada requerido, para garantizar suavidad en el resultado.
%
% Argumentos opcionales (aparecen ligados a varargin; si no se pone
nada
% toma valores por defecto, ver ejemplos al final)
%
% 'knots' - Vector sobre el que se realizarán las estimaciones del
% suavizado. Por defecto, será el vector TIEMPO. Por ejemplo, para
interpolar en otros valores
% se debe definir un vector t0 con los instantes donde se quiere
calcular
%
% 'salida' - Variable dicotómica para indicar si queremos ver
representaciones
% gráficas de los valores ajustados. Un valor 0 indica que no se hará
ninguna
% representación gráfica, si vale 1 se mostrarán las siguientes
figuras
% * Representación gráfica comparativa de los datos ajustados y los
datos
% originales.
% * Representaciones de los valores ajustados para la velocidad y la
% aceleración de la partícula.
% * Representaciones de las velocidades y las aceleraciones frente a
los
% datos ajustados.
% Por defecto vale 0. Aunque su valor sea 0, en el caso de que no se
% solicite ningún argumento de salida, también se presentarán los
gráficos.
%
% 'nderiv' - Valor que indica el orden máximo de la derivada a
calcular.
% Por defecto, es 2.
%
% 'disc' - Matriz con dos columnas en las que podemos encontrar, por
un
% lado, en la primera columna, el conjunto de puntos que presentan
algún
% tipo de discontinuidad, bien en la función original, bien en alguna
de
% las derivadas superiores. Por otra parte, en la segunda columna
aparece
% el valor de la primera derivada discontinua en ese punto. Por
ejemplo, si
% en la primera fila apareciera (2, 1) significaría que la función
tiene en
% el instante t=2 una discontinuidad en la derivada 1, es decir, es
una
% función continua cuya primera derivada no es continua en t=2.
%
% Los argumentos de salida son:
% - FDAMAT: Vector o matriz en la que aparecen los valores ajustados
en los
% instantes de tiempo TIEMPO, tanto de la función como de las
derivadas que
% se soliciten.
%
% EJEMPLO
%
% Definimos una cierta función:
% f = sqrt(2);

```

```

% w = 2*pi*f;
% t = linspace(0,2.5,1000);
% alfa = 0.8;
% y = cos (w.*t) .* cosh (alfa.*sin(w.*t));
%
% % Introducimos un cierto error
% tamaño_error = 0.01;
% x = y + tamaño_error*randn(1,1000);
%
% % Y usamos la función suavizado_bspline para realizar un suavizado
con, por
% % ejemplo 35 funciones bsplines de orden 6:
%
% fdamat = suavizado_bspline(x, t', 35, 6);
%
% % Para ver los resultados dibujamos la función y sus derivadas:
%
% plot(fdamat(:,1,1))
% hold on
% plot(fdamat(:,1,2), '-r')
% plot(fdamat(:,1,3), '-g')
%
% % Podemos comparar los resultados obtenidos con los valores teóricos
de
% % la función y sus derivadas, calculados de manera analítica
mediante:
%
% vel_y = -w .* cosh(alfa .* sin(t.*w)) .* sin(t.*w) + alfa .* w .*
(cos(t.*w)).^2 .* sinh (alfa.* sin(t.*w));
% acel_y = -w.^2 .* cos (t .*w) .* cosh (alfa .* sin (t.*w)) + ...
%   alfa.^2 .* w.^2 .* cos (t .*w).^3 .* cosh (alfa .* sin(t.*w)) -
...
%   3 * alfa .* w.^2 .* cos (t.* w) .* sin (t.*w) .* sinh(alfa .*
sin(t.*w));
%
% figure
% plot(y)
% hold on
% plot(vel_y, '-r')
% plot(acel_y, '-g')

p = inputParser;
p.addRequired('datos', @isnumeric);
p.addRequired('tiempo', @isnumeric);
p.addRequired('nfunctions', @(x)x>0 && mod(x,1)==0);
p.addRequired('order', @(x)x>0 && mod(x,1)==0);
p.addOptional('knots', tiempo, @isnumeric);
p.addOptional('salida', 0, @(x)x==0 || x==1);
p.addOptional('nderiv', 2, @(x)x>0 && mod(x,1)==0);
p.addOptional('disc', [], @(x) size(x,2)==2)

p.parse(datos, tiempo, nfunctions, order, varargin{:});

datos = p.Results.datos;
tiempo = p.Results.tiempo;
tiempo_inicial = tiempo;
nfunction = p.Results.nfunctions;
order = p.Results.order;
salida = p.Results.salida;
knots_salida = p.Results.knots;

```

```

nderiv = p.Results.nderiv;
disc = p.Results.disc;

if nderiv > order-2
    disp('Se ha tenido que reducir el orden máximo de derivada a
    calcular.')
    nderiv = order-2;
end

knots=[];
knot=length(knots);

orden=order.*ones(knot);
if ~isempty(disc)
    if size(disc,2) ~= 2
        disc = disc';
        if size(disc,2) ~= 2
            error('El vector de discontinuidades no tiene las
dimensiones adecuadas')
        end
    end
    for i = 1:size(disc,1)
        indices_disc = find(tiempo == disc(i,1))
        repet=order-disc(i,2);
        adding_time = tiempo(indices_disc) .* ones(repet, 1);
        adding_data = datos(indices_disc) .* ones(repet, 1);
        tiempo = [tiempo; adding_time];
        datos = [datos; adding_datos];
    end
    [tiempo, cambios] = sort(tiempo);
    datos = datos(cambios);
end

newknots=[];
for j=1:knot
    nuevos=knots(j).*ones(repet(j),1);
    newknots=[newknots, nuevos];
end
knots=newknots;
knot=length(knots);
data=datos;
yd = size(data);

if yd(1) == 1
    if length(yd) == 2
        data = data';
        yd = size(data);
    else
        error(['data is an array and length of ', ...
            'first dimension = 1.']);
    end
end

if order > 2
    append_inic = ones(order-2, 1) * data(1, :);
    append_inic_time = ones(order-2, 1) * tiempo(1, :);
    append_final = ones(order-2, 1) * data(yd(1), :);
    append_final_time = ones(order-2, 1) * tiempo(yd(1), :);
    data = [append_inic; data; append_final];
    tiempo = [append_inic_time; tiempo; append_final_time];
end

```

```

        yd = size(data);
    end

    ndata = yd(1);
    replicas = yd(2);
    tot = ndata * replicas;
    data2 = reshape(data, tot, 1);

    if ndata ~= length(tiempo)
        error('Los datos de las variables no son de la misma longitud');
    end

    time=tiempo;
    sizetime = size(time);
    if sizetime(1) > 1 && sizetime(2) > 1
        error('Argument time is not a vector.');
```

```
    end
```

```

    extremo_inferior=min(time);
    extremo_superior=max(time);
    c=1;
    knots1 = knots;
```

```

    if size(knots1,1) > 1
        knots1 = knots1';
    end
```

```

    if size(knots1,1) > 1
        error('BREAKS debe ser un vector.');
```

```
    end
```

```

    rangeval = [extremo_inferior, extremo_superior];
    ydim = length(yd);
    if ydim > 3
        error('Too many dimensions for argument data.');
```

```
    end
```

```
    % set number of sampled values
```

```
    n = yd(1);
```

```
    if n == 1
```

```
        error('Only one value in time not allowed.');
```

```
    end
```

```
    % set number of replications
```

```
    if (ydim > 1)
```

```
        nrep = yd(2);
```

```
    else
```

```
        nrep = 1;
```

```
    end
```

```
    % set number of variables
```

```
    if (ydim > 2)
```

```
        nvar = yd(3);
```

```
    else
```

```
        nvar = 1;
```

```
    end
```

```
    % check argument value array
```

```
    argd = size(time);
```

```
    if length(argd) > 2
```

```

        error('Argument time has too many dimensions.');
```

end

```

if argd(1) == 1,
    time = time';
    argd = size(time);
end
nargd = length(argd);
if argd(nargd) == 1,
    nargd = nargd - 1;
end
if (argd(1) ~= n)
    error('Number of arg. values not equal to 1st dim. of data.');
```

end

```

if nargd == 2 && argd(2) ~= 1 && argd(2) ~= nrep
    error(['Matrix time must have same number of columns', ...
        'as the number of replicates.']);
end
% Issue a warning if arguments are outside of the range in the basis.

if nargd == 1
    temp = time;
else
    temp = reshape(time, n*nrep, 1);
end
temp = temp(~isnan(time));
if min(temp) < rangeval(1) || max(temp) > rangeval(2)
    warning('Widl:range', ...
        'Some arguments values are outside of the range in BASIS.');
```

if nargd == 1

```

    index = time < rangeval(1) || time > rangeval(2);
    time(index) = NaN;
else
    for irep=1:nrep
        index = time(:,irep) < rangeval(1) || ...
            time(:,irep) > rangeval(2);
        time(index,irep) = NaN;
    end
end
end
% check time

if min(diff(time)) < 0
    time = sort(time);
end

nfunc = nfunction;
nfunctions = nfunc;
nb = nfunctions - order + 2;
breaks = linspace(extremo_inferior, extremo_superior, nb);

% set some abbreviations

kml = order-1;
nx = length(time);           % number of argument values
ns = nb - 2 + order;        % number of splines to compute
onenx = ones(nx,1);
onenb = ones(order, 1);
onens = ones(ns,1);
```

```

% augment break sequence to get knots by adding a K-fold knot at each
end.

if size(breaks,1) > 1,
    breaks = breaks';
end
knots = [breaks(1)*ones(1,kml), breaks, breaks(nb)*ones(1,kml)'];
knotslower = knots(1:nfunctions);
[ignored,index] = sort([knotslower', time']);
pointer = find(index > nfunctions) - [1:length(time)];
left = max([pointer; order*onex']);

% initialize the b array.

temp = [1, zeros(1,kml)];
b = temp(ones(nx,1),:);
nxs = (1:nx);

% First, bring it up to the intended level:

for j=1:order-1
    saved = zeros(nx,1);
    for r=1:j
        leftpr = left + r;
        tr = knots(leftpr) - time;
        tl = time - knots(leftpr-j);
        term = b(nxs,r)./(tr+tl);
        b(nxs,r) = saved + tr.*term;
        saved = tl.*term;
    end
    b(nxs,j+1) = saved;
end

% set up output matrix basismat

width = max([ns,nfunctions]) + kml + kml;
cc = zeros(nx*width,1);
index = (1-nx:0).'*onenb' + nx*(left.*'onenb' + onex*(-kml:0));
cc(index) = b(1:nx,:);
basismat = reshape(cc((1-nx:0).'*onens' + nx*onex*((1:ns))), nx, ns);
basismat = sparse(basismat);

% La matriz basismat es la Phi del libro del Ramsay; aparece en la
% expresión de la resolución del sistema 4.2.

Cmat = basismat' * basismat;

% La matriz Dmat es el minuendo de la ecuación posterior a la 4.2 del
% libro del Ramsay.

Dmat = basismat' * data;

if max(max(abs(Cmat-Cmat')))/max(max(abs(Cmat))) > 1e-10
    error('First argument is not symmetric.');
```

```

else
    Cmat = (Cmat + Cmat')./2;
end
% Choleski decomposition Cmat = Rmat'*Rmat;

```

```

coef = Cmat\Dmat;

% check that arguments are within range

evaldim = size(time);

% get maximum number of evaluation values

n = evaldim(1);

% Set up coefficient array for FD

coefd = size(coef);
ndim = length(coefd);
if ndim <= 1
    nrep = 1;
else
    nrep = coefd(2);
end
if ndim <= 2
    nvar = 1;
else
    nvar = coefd(3);
end

% Set up array for function values

params = breaks(2:(nb-1));

tiempo = knots_salida;
tiempo = tiempo(:);

% check that arguments are within range

evaldim = size(tiempo);

% get maximum number of evaluation values

n = evaldim(1);

% Set up array for function values

if ndim <= 2
    fdamat = zeros(n,nrep,nderiv);
else
    fdamat = zeros(n,nrep,nderiv,nvar);
end

% Case where EVALARG is a vector of values to be used for all curves

nderivada = 0:nderiv;
clear nderiv
for i=1:length(nderivada)
    nderiv = nderivada(i);

    tiempo(tiempo < rangeval(1)-1e-10) = NaN;

```

```

tiempo(tiempo > rangeval(2)+1e-10) = NaN;

if isempty(params)
    basismat = monomial(tiempo, 0:nfunctions-1, nderiv);
else
    breaks = [rangeval(1), params, rangeval(2)];

    sizex = size(tiempo);
    if sizex(1) > 1 && sizex(2) > 1
        error('Argument X is not a vector.');
```

end

```

    nb = length(breaks);
    if nb < 2,
        error('Number of knots less than 2.');
```

end

```

    % set some abbreviations

    km1 = order-1;
    nx = length(tiempo);          % number of argument values
    nd = nderiv+1;                % ND is order of derivative plus one
    onenx = ones(nx,1);
    onenb = ones(order, 1);
    onens = ones(nfunctions,1);

    % augment break sequence to get knots by adding a K-fold knot
at each end.

    if size(breaks,1) > 1,
        breaks = breaks';
    end
    knots = [breaks(1)*ones(1,km1), breaks,
breaks(nb)*ones(1,km1)]';
    knotslower = knots(1:nfunctions);
    [ignored,index] = sort([knotslower', tiempo']);
    pointer = find(index > nfunctions) -
[1:length(tiempo)];
    left = max([pointer; order*onenx]);

    % initialize the b array.

    temp = [1, zeros(1,km1)];
    b = temp(ones(nd*nx,1),:);
    nxs = nd*(1:nx);

    % run the recurrence simultaneously for all x(i).

    % First, bring it up to the intended level:

    for j=1:order-nd
        saved = zeros(nx,1);
        for r=1:j
            leftpr = left + r;
            tr = knots(leftpr) - tiempo;
            tl = tiempo - knots(leftpr-j);
            term = b(nxs,r)./(tr+tl);
            b(nxs,r) = saved + tr.*term;
            saved = tl.*term;
        end
    end
end

```

```

        end
        b(nxs,j+1) = saved;
    end

    % save the B-spline values in successive blocks in b .

    for jj=1:nd-1
        j = order - nd + jj;
        saved = zeros(nx,1);
        nxn = nxs - 1;
        for r=1:j
            leftpr = left + r;
            tr = knots(leftpr) - tiempo;
            tl = tiempo - knots(leftpr-j);
            term = b(nxs,r)./(tr+tl);
            b(nxn,r) = saved + tr.*term;
            saved = tl.*term;
        end
        b(nxn,j+1) = saved;
        nxs = nxn;
    end

    % now use the fact that derivative values can be obtained by
    differencing:

    for jj=nd-1:-1:1
        j = order - jj;
        temp = (jj:nd-1).'*onenx' + ones(nd-jj,1)*nxn;
        nxs = reshape(temp, (nd-1-jj+1)*nx,1);
        for r=j:-1:1
            leftpr = left + r;
            temp = ones(nd-jj,1)*(knots(leftpr) -
knots(leftpr-j)).'/j;
            b(nxs,r) = -b(nxs,r)./temp(:);
            b(nxs,r+1) = b(nxs,r+1) - b(nxs,r);
        end
    end

    % Finally, zero out all rows of b corresponding to x outside
the basic
    % interval, [breaks(1) .. breaks(nb)] .

    index = find(tiempo < breaks(1) | tiempo > breaks(nb));
    if ~isempty(index)
        temp = (1-
nd:0).'*ones(1,length(index))+nd*ones(nd,1)*index(:).';
        b(temp(:),:) = zeros(nd*length(index),order);
    end

    % set up output matrix bsplinemat

    width = nfunctions + km1 + km1;
    cc = zeros(nx*width,1);
    index = (1-nx:0).'*onenb' + ...
        nx*(left.*'onenb' + onenx*(-km1:0));
    cc(index) = b(nd*(1:nx),:);
    % (This uses the fact that, for a column vector v and a
matrix A ,
    % v(A(i,j))=v(A(i,j)), all i,j.)

```

```
        bsplinemat = reshape(cc((1-nx:0).'*onens' + ...
            nx*onenx*((1:nfunctions))), nx, nfunctions);
        basismat = sparse(bsplinemat);
    end

    % evaluate the functions at arguments in EVALARG

    if ndim <= 2
        fdamat(:, :, i) = basismat*coef;
    else
        for ivar = 1:nvar
            fdamat(:, :, i, ivar) = basismat*coef(:, :, ivar);
        end
    end
end

end
```