

# **ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL**

## **FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA**

### **ESTUDIO, ANÁLISIS Y SIMULACIÓN DE ESQUEMAS DE CONTROL TIPO PID, SMC Y LQR PARA REACTORES QUÍMICOS TIPO CSTR.**

**TRABAJO DE TITULACIÓN PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE  
INGENIERO EN “ELECTRÓNICA Y CONTROL”**

**CARGUA ABRIL WALTER ANDRÉS**

**elcargua@hotmail.com**

**GALLEGOS HERRERA MARCELO XAVIER**

**chelogae@gmail.com**

**DIRECTOR: ING. OSCAR EDUARDO CAMACHO QUINTERO, PhD**

**oscar.camacho@epn.edu.ec**

**CODIRECTOR: ING. PAULO CÉSAR LEICA ARTEAGA, PhD**

**paulo.leica@epn.edu.ec**

**Quito, Diciembre 2017**

## **AVAL**

Certificamos que el presente trabajo fue desarrollado por Walter Andrés Cargua Abril y Marcelo Xavier Gallegos Herrera, bajo nuestra supervisión.

---

**Ing. Oscar Eduardo Camacho Quintero, PhD**  
**DIRECTOR DEL TRABAJO DE TITULACIÓN**

---

**Ing. Paulo César Leica Arteaga, PhD**  
**CODIRECTOR DEL TRABAJO DE TITULACIÓN**

## **DECLARACIÓN DE AUTORÍA**

Nosotros, Walter Andrés Cargua Abril y Marcelo Xavier Gallegos Herrera, declaramos bajo juramento que el trabajo aquí descrito es de nuestra autoría; que no ha sido previamente presentada para ningún grado o calificación profesional; y, que hemos consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

A través de la presente declaración cedemos nuestros derechos de propiedad intelectual correspondientes a este trabajo, a la Escuela Politécnica Nacional, según lo establecido por la Ley de Propiedad Intelectual, por su Reglamento y por la normatividad institucional vigente.

---

Walter Andrés Cargua Abril

---

Marcelo Xavier Gallegos Herrera

## DEDICATORIA

El presente proyecto se lo dedico a mi madre Lastenia y a mi padre Freddy, quienes con su amor y apoyo han hecho que todo esto fuera posible.

A mis hermanos Diego, Oswaldo y Geovanny que han sido un ejemplo de trabajo y dedicación a lo largo de mi vida.

A mis sobrinos, espero enorgullecerlos y ser un buen ejemplo a seguir.

A mi estrella SOL, quien ha sido un motivo más para lograr grandes cosas.

Todo esto es un logro familiar que está realizado con esfuerzo y amor para todos ustedes.

Walter,

## **DEDICATORIA**

Este trabajo se lo dedico a mis padres que con su apoyo incondicional durante toda mi vida me han permitido poseer un deseo de superación personal, siendo un ejemplo de amor y perseverancia que siempre ha estado presente en los momentos de dificultad.

A mis hermanos Raúl y Daniel, cuyo ejemplo me ha permitido llegar a donde me encuentro en este momento, gracias a su cariño y apoyo constante que siempre ha sido una fortaleza para mí.

Marcelo,

## AGRADECIMIENTO

Primeramente, agradezco a Dios, por darme la sabiduría para cumplir esta meta.

A mi madre, mi padre y mis hermanos quienes me han apoyado a lo largo de mi vida brindándome educación, consejos y amor.

A mis amigos, Diego, David, Johnny y Verita, los cuales me han brindado enseñanzas y palabras de ánimo para culminar mis metas.

A mi compañero y amigo Marcelo, quien no solo en este proyecto, sino a lo largo de la carrera estudiantil me ha dado su confianza y ha puesto todo su conocimiento y ganas en lo que hemos hecho.

A los amigos de la universidad, quienes me han brindado conocimiento y buenos momentos durante estos años, en especial a Víctor, Jorge, Darío, César, John, Nelson y Juanky.

A SOL, quien es una de las personas más inteligentes y maravillosas que conocí en la universidad, y que con su amor y apoyo, me motivó a dar lo mejor de mí en cada momento, gracias por estar en mi vida.

Finalmente, un agradecimiento especial al Dr. Oscar Camacho, Dr. Paulo Leica y MSc. Marco Herrera por sus enseñanzas a lo largo de este proyecto y a los investigadores del Departamento de Ingeniería Química liderados por la Ing. Liliana Guzmán, los cuales fueron parte fundamental en el inicio de este proyecto.

Walter,

## **AGRADECIMIENTO**

Agradezco primeramente a Dios que ha sido un apoyo espiritual constante durante mi vida.

Agradezco a mis padres y hermanos quienes, con su amor y apoyo, me han enseñado el camino de la superación con su ejemplo de amor y perseverancia.

A mi compañero Walter quien durante muchos años ha sido un gran amigo, por la confianza que generamos entre nosotros durante la carrera, y en especial al realizar este trabajo el cual es fruto de nuestro esfuerzo conjunto.

A mis amigos de la universidad, con los cuales hemos tenido momentos inolvidables durante estos años.

A la Escuela Politécnica Nacional y sus docentes, que durante estos años de estudio me han brindado su conocimiento para llegar a donde me encuentro en este momento.

Por último, un especial agradecimiento al Dr. Oscar Camacho y Dr. Paulo Leica y MSc. por su apoyo para la elaboración de este trabajo.

Marcelo,

# ÍNDICE DE CONTENIDO

AVAL.....	I
DECLARACIÓN DE AUTORÍA .....	II
DEDICATORIA .....	III
DEDICATORIA .....	IV
AGRADECIMIENTO .....	V
AGRADECIMIENTO .....	VI
ÍNDICE DE CONTENIDO.....	VII
RESUMEN.....	IX
ABSTRACT.....	X
1. INTRODUCCIÓN .....	1
1.1. Objetivos .....	2
1.2. Alcance .....	2
1.3. Marco teórico .....	3
Definiciones generales.....	3
Reactores continuos tipo tanque agitado .....	6
Aproximación lineal de modelos matemáticos no lineales y representación en variables de estado.....	9
Técnicas de control .....	15
Índice de desempeño IAE.....	22
2. METODOLOGÍA.....	23
2.1. Modelo matemático del reactor CSTR .....	23
Reactor con dinámica lenta .....	25
Reactor con respuesta inversa .....	28
Reactor con varios puntos de operación .....	31
2.2. Modelamiento empírico de los reactores .....	37
Reactor con dinámica lenta .....	37
Reactor con respuesta inversa .....	41
Reactor con varios puntos de operación .....	45

2.3.	Representación en variables de estado de los reactores tipo CSTR.....	49
	Reactor con dinámica lenta .....	49
	Reactor con respuesta inversa .....	51
	Reactor con varios puntos de operación .....	52
2.4.	Diseño de técnicas de control en reactores tipo CSTR. ....	54
	Controlador proporcional integral derivativo PID.....	54
	Controlador por modo deslizante SMC.....	55
	Regulador lineal cuadrático LQR.....	56
	Regulador lineal cuadrático más parte integral LQI. ....	63
2.5.	Diseño de la interfaz gráfica. ....	67
3.	RESULTADOS Y DISCUSIÓN .....	70
3.1.	Pruebas en reactor con dinámica lenta.....	71
	Prueba 1: cambios de referencia.....	72
	Prueba 2: respuesta ante perturbaciones. ....	74
	Prueba 3: errores de modelado de la planta. ....	82
3.2.	Reactor con respuesta inversa.....	88
	Prueba 1: cambios de referencia.....	89
	Prueba 2: respuesta ante perturbaciones. ....	91
	Prueba 3: errores de modelado de la planta .....	94
3.3.	Reactor con varios puntos de operación.....	98
	Prueba 1: cambios de referencia.....	98
	Prueba 2: respuesta ante perturbaciones. ....	101
	Prueba 3: errores de modelado de la planta. ....	110
4.	CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES .....	117
4.1.	Conclusiones.....	117
4.2.	Recomendaciones .....	118
5.	REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	120
6.	ANEXOS.....	I

## RESUMEN

El presente proyecto tuvo como objetivo estudiar, analizar y comparar tres diferentes técnicas de control aplicadas a tres reactores continuos tipo tanque agitado (CSTR) por medio del índice de desempeño IAE y una interfaz gráfica creada por medio de las herramientas Simulink-Matlab® y Guide-Matlab®.

Los reactores estudiados se clasificaron según su respuesta, teniendo así un reactor con dinámica lenta, uno con respuesta inversa y uno con varios puntos de operación. Para esto, se estudió los modelos no lineales y se obtuvo una representación lineal de estos sistemas en dos formas diferentes, una empírica sistema de primer orden con retardo por medio de su curva de reacción y una en variables de estado por medio de series de Taylor.

Entre los esquemas de control estudiados para estas plantas se encuentran: el controlador proporcional integral derivativo (PID), control por modo deslizante (SMC) y el regulador lineal cuadrático más parte integral (LQI).

Para todos los sistemas de control se realizaron las simulaciones correspondientes con cambios de referencia, perturbaciones y errores de modelado para comparar su desempeño, dando mayor importancia a la regulación, que es la tarea principal del control en reactores químicos.

## ABSTRACT

The objective of this project is to study, analyze and compare three different control techniques applied to three continuous stirred tank reactors models by means of the IAE performance index and a graphical interface created through the Simulink-Matlab® and Guide tools -Matlab®.

The studied reactors were classified according to their response, thus having a reactor with slow dynamics, other with inverse response and another with several points of operation. For this, the linear models were studied and a linear representation of these systems was obtained in two different forms, an empirical system of first order with delay by means of its reaction curve and one in state variables by means of Taylor series.

This project study three different control techniques to be applied for this kind systems, like it is the proportional integral derivative controller (PID), sliding mode control (SMC), and the quadratic linear regulator plus integral part (LQI).

For all control systems the corresponding simulations were performed with reference changes, perturbations and modeling errors to compare their performance, considering regulation as the most important task, which is the main objective of control in chemical reactors.

# 1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo se presenta una revisión bibliográfica de aspectos relacionados con reactores químicos y el desarrollo matemático necesario para la sintonización de técnicas de control a aplicarse en estos dispositivos, los cuales son esenciales en muchos procesos y su mal funcionamiento puede limitar la calidad, rendimiento y rentabilidad de los productos obtenidos, e incluso comprometer la seguridad del personal a cargo del manejo de la planta.

En la industria existen diferentes tipos de reactores químicos, entre los cuales se tiene los reactores continuos de tanque agitado (CSTR), los cuales son unidades de proceso importantes en ciertas plantas industriales, como por ejemplo en procesos de polimerización, producción de plásticos, explosivos, hule sintético, etc.

Dado que estos reactores presentan una agitación eficiente y el fluido en el recipiente está mezclado de forma uniforme, se tiene homogeneidad de presión, composición y temperatura, esta última suele ser la variable más importante, ya que de ella depende el posible disparo (run-away), grado de conversión, la aparición de reacciones secundarias, la distribución de subproductos, grado de polimerización, etc. Por esta razón la transferencia de calor es importante, y se requiere de técnicas de control que nos ayuden a mantener la temperatura deseada fija y rechazar perturbaciones que podría sufrir el sistema [1], ya que son procesos que trabajan solos durante periodos prolongados de tiempo [2], es por esto que la regulación es lo primordial en este tipo de plantas, para garantizar que estos dispositivos trabajen de manera estable en un punto de operación que garantice la máxima conversión de productos.

En muchos de estos procesos, los CSTR pueden operar en zonas cercanas a los puntos de operación inestables, que corresponden a una producción óptima del proceso. Por este motivo, el control de estos sistemas ha sido de interés a lo largo de los años, planteando así el uso de numerosas técnicas de control en busca de aprovechar al máximo las características de estas plantas [1].

En este estudio se analizarán modelos matemáticos de tres diferentes reactores químicos CSTR (uno de dinámica lenta, uno de respuesta inversa y uno con varios puntos de operación), y se utilizarán controladores clásicos como el proporcional integral derivativo (PID), así como controladores robustos como el esquema por Modo Deslizante (SMC) y óptimos como el Regulador Lineal Cuadrático (LQR), los cuales se comparan por medio de una interfaz gráfica, manipulando ciertos parámetros de la planta, como por ejemplo flujos y concentraciones de los reactivos, y se evaluarán su desempeño por medio del

índice IAE (Integral del Error Absoluto), lo cual nos indica que controlador actúa de mejor manera en cada uno de los reactores, tanto para el seguimiento de trayectorias deseadas, como para el rechazo a perturbaciones o errores de modelado [1], además se realizará una sintonización de los controladores diseñados para garantizar el mejor desempeño de estos en cuanto a la regulación que como se mencionó anteriormente es la principal tarea de un controlador en este tipo de plantas.

En la siguiente sección de este capítulo se presentan los objetivos, tanto generales como específicos, y el alcance del actual proyecto de titulación.

## **1.1. Objetivos**

El objetivo general de este trabajo es:

Estudiar, analizar y simular esquemas de control PID, SMC y LQR para reactores químicos tipo CSTR.

Los objetivos específicos de este trabajo son:

- Realizar una revisión bibliográfica para analizar la estructura de los modelos matemáticos de al menos tres reactores químicos tipo CSTR (dinámica lenta, respuesta inversa y con varios puntos de operación) y obtener un modelo de orden reducido de los mismos.
- Estudiar tres diferentes tipos de controladores, PID, SMC y LQR y determinar la estructura de los mismos, para su aplicación en reactores tipo CSTR.
- Diseñar los controladores PID, SMC y LQR, para al menos tres diferentes reactores tipo CSTR: uno con dinámica lenta, otro con respuesta inversa y otro con diferentes puntos de operación.
- Diseñar e implementar una interfaz gráfica, para visualizar el comportamiento de los tres tipos de controladores aplicados a los reactores seleccionados.
- Realizar la simulación y pruebas de los tres esquemas de control y compararlos por medio del índice IAE.

## **1.2. Alcance**

- En este estudio se analizarán los modelos matemáticos de al menos tres reactores químicos tipo CSTR (uno de dinámica lenta, uno de respuesta inversa y uno con varios puntos de operación) y se obtendrá un modelo de orden reducido de los mismos.

- En la investigación se realizará el estudio de tres diferentes tipos de controladores, PID, SMC y LQR, para aplicarlos en los reactores anteriores.
- Con los modelos de orden reducido, obtenidos anteriormente, se diseñará los controladores PID, SMC y LQR, para los reactores previamente mencionados.
- Para la interacción con los parámetros de los controladores, se diseñará e implementará una interfaz gráfica, que permita apreciar los diseños simulados.
- Finalmente, se aplicará un índice de desempeño a los controladores diseñados, para poder realizar una comparación entre ellos, y determinar cuál de estos es mejor para cada uno de los reactores a estudiarse.

### **1.3. Marco teórico**

En esta sección se inicia con una revisión de definiciones generales relacionados con reactores químicos y aspectos matemáticos necesarios para el desarrollo y comparación de los controladores a estudiarse.

#### **Definiciones generales**

##### **Reacción química**

Una reacción química es un proceso que resulta en la conversión de sustancias químicas. La sustancia o sustancias inicialmente involucradas en una reacción química se denominan sustancias reactantes o reactivos. Estos reactantes se caracterizan por un cambio químico y producen uno o más productos, que son generalmente diferentes a los reactantes originales [3].

Las reacciones químicas pueden ser de diferente naturaleza dependiendo del tipo de reactantes, del tipo de productos deseados, de las condiciones y del tiempo de la reacción [3].

##### **Reactor químico**

Los reactores químicos son recipientes diseñados para contener reacciones químicas, son parte esencial en la industria porque transforman las materias primas en productos químicos valiosos. Gran parte de la sociedad moderna se basa en la operación económica consistente y segura de los reactores químicos [4].

En la industria petrolera, por ejemplo, una gran fracción del combustible se produce dentro de las unidades de proceso de una refinería que involucran reacciones.

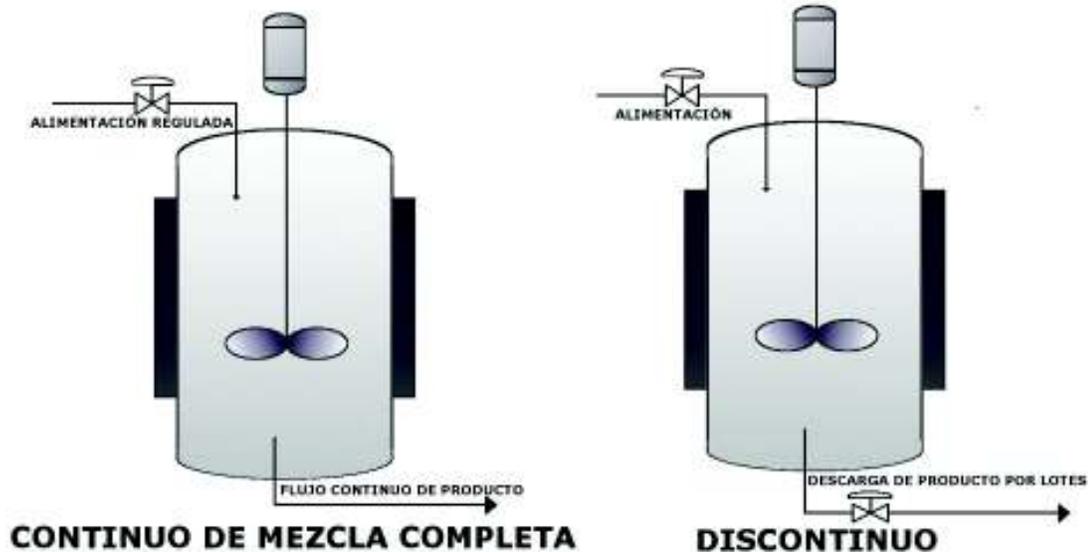
Las industrias de productos químicos y materiales utilizan reactores en casi todas las plantas para convertir materias primas en productos. Materiales que se utilizan para la vivienda, la ropa, los automóviles, la construcción, la electrónica, los electrodomésticos, y la asistencia sanitaria vienen de procesos que utilizan reactores. Debe quedar claro en cualquier análisis razonable que la sociedad moderna, para bien o para mal, hace uso extensivo de reactores químicos [4].

### Clasificación de reactores químicos

Dado al gran uso de reactores químicos en todo tipo de procesos industriales, su clasificación puede ser muy variada, teniendo así una clasificación por su geometría, tipo de flujo, catalizador tipo de fases que albergan, tipo de operación, etc [5].

Dentro de la clasificación de los reactores, la más básica es aquella que trata el intercambio de materia entre un sistema y el exterior, por su tipo de operación, Figura 1.1, teniendo así dos tipos de reactores:

- Discontinuo, por lotes o Batch
- Continuo



**Figura 1.1** Tipos de reactores según su operación.

Cuando un reactor discontinuo está operando, el intercambio de materia con el exterior no existe. Se alimentan inicialmente los reactantes, y se extrae todo el contenido una vez finalizado el proceso. En este tipo de sistemas la presión, temperatura y composición pueden variar a lo largo del tiempo de operación.

**Tabla 1.1** Comparación de reactores químicos [4].

<b>Tipo de Reactor</b>	<b>Principio de Funcionamiento</b>	<b>Ventajas</b>	<b>Limitaciones</b>	<b>Área de aplicación</b>
<b>Reactor Batch</b>	<p>Todos los reactivos se añaden al comienzo y el producto se retira al final de la reacción.</p> <p>Se realizan en depósitos unidos con agitadores o bombas.</p>	<p>Adecuados para producción a pequeña escala, procesos en los que se obtiene una gama de diferentes productos y para reacciones que requieren largos tiempos de reacción.</p>	<p>No es adecuado para lotes grandes, ya que es un sistema cerrado en el que una vez que los reactantes se agregan en el reactor, saldrán como productos sólo después de la finalización de la reacción.</p>	<p>Se utilizan en productos químicos (tinta, polímeros e industria alimenticia)</p>
<b>CSRT</b>	<p>Uno o más fluidos reactantes se introducen en un reactor de tanque equipado con un impulsor mientras se recupera el efluente del reactor.</p> <p>Existe un gradiente de concentración incrementado.</p>	<p>Son dispositivos muy flexibles y algunos productos pueden retirarse durante la reacción.</p> <p>Es económico operar varios CSTRs en serie o en paralelo.</p> <p>La reacción puede llevarse a cabo tanto en reactores horizontales como verticales.</p>	<p>En todos los cálculos que se realizan para los CSTR se asumen una mezcla perfecta.</p> <p>En estado estacionario el flujo de entrada debe ser igual al flujo de salida, caso contrario el tanque se desbordará o se vaciará.</p>	<p>Industria Química especialmente la que involucra reacciones líquido/gas.</p>

En la operación del reactor continuo, la alimentación de los reactantes y la salida de los productos se realizan en forma ininterrumpida. El modelo ideal de este proceso, supone que la reacción alcanza la máxima conversión al momento en que se alimenta al reactor, teniendo así, que cuando este tipo de reactores alcanzan su estado estacionario, sus propiedades no varían con el tiempo. De esto se deduce que el reactor continuo permite tener un mejor control sobre la calidad de los productos, lo cual los hace ideales en el caso de que se desee lograr grandes producciones.

Los costos de construcción e instalación de los reactores continuos son altos porque se requieren, entre otras cosas un gran sistema de control, pero sus costos de operación son bajos. Por estos motivos este tipo de reactores se utilizan en las industrias con grandes volúmenes de producción como la refinación de petróleo, como se aprecia en la

Una comparación detallada de los dos tipos de reactores se muestra en la Tabla 1.1.

Dado que este proyecto aborda exclusivamente el desarrollo y comparación de técnicas de control en reactores continuos tipo tanque agitado, en la siguiente sección se hace hincapié en las características y modelamiento de este tipo de reactores.

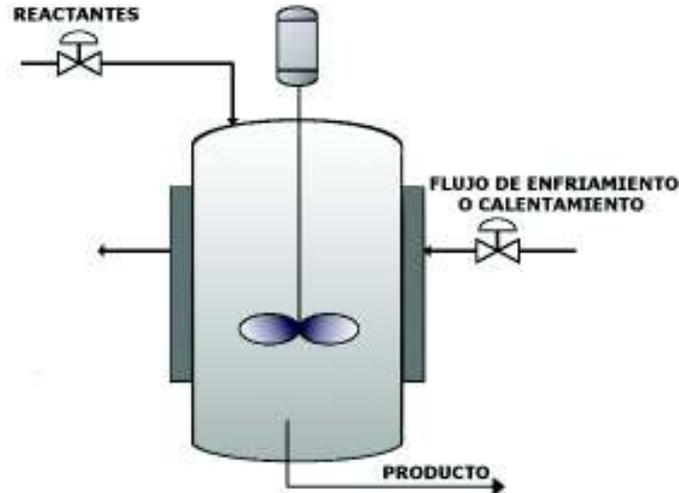
### **Reactores continuos tipo tanque agitado**

Los reactores más utilizados dentro de la industria química y alimenticia, son aquellos que tienen un tanque con agitación que trabaja de manera continua CSTR, llamados así por sus siglas en inglés (Continuos Stirred Tank Reactor) [6].

En el CSTR los reactivos se introducen y los productos se retiran de manera simultánea y en forma continua, poseen un dispositivo (tanque) diseñado para que dentro de este se produzca una o diversas reacciones químicas, producto del ingreso del flujo de alimentación, esto con el fin de descargar productos con flujos volumétricos de la sustancia que ha reaccionado, de modo que el volumen de reacción permanece fijo.

Por lo general, se considera que un CSTR es homogéneo, dado que los reactantes son sometidos a una agitación continua en el interior del tanque, y por lo tanto se modela sin alteraciones espaciales en la temperatura, concentración o velocidad de reacción en todo el recipiente. De hecho, una consideración notable respecto a la dinámica del CSTR es que se produce un mezclado perfecto dentro del reactor. Esto significa que las propiedades de la mezcla reactante se consideran uniformes en cualquier sitio dentro del tanque e iguales a las propiedades del fluido de salida. Otra consideración que se debe tener en cuenta, es que el fluido de entrada se mezcla instantáneamente con la mezcla

presente dentro del reactor. En la práctica, si un elemento de material reactante que ingresa, se distribuye de manera uniforme por todo el tanque en un tiempo más corto que el tiempo de residencia promedio en el tanque, entonces el tanque se puede considerar bien mezclado. La Figura 1.2 muestra un esquema general de un CSTR [1].



**Figura 1.2** Esquema del reactor CSTR [1].

Dentro de los CSTR se dan reacciones exotérmicas o endotérmicas, por lo que es necesario remover o adicionar el calor de reacción, esto se obtiene al rodear el reactor por una camisa a través de la cual fluye un líquido refrigerante o calefactor, dependiendo el caso [2]. Es por esto que, para efectos de estudio en este proyecto de titulación, se realizarán las siguientes suposiciones:

- Las pérdidas de calor adyacentes son despreciables.
- Las propiedades termodinámicas, densidades y capacidades calóricas de los reactantes y productos son iguales y constantes.
- Temperatura uniforme en la camisa de enfriamiento o calentamiento.
- Los volúmenes del tanque del reactor y la camisa son constantes.

Desde el punto de vista de control, los CSTR tienen propiedades desafiantes, debido a sus problemas potenciales de seguridad, la posibilidad de comportamiento exótico tales como múltiples estados estacionarios y estar corrompido por diversas incertidumbres, que surgen de parámetros variables o no exactamente conocidos como las constantes de velocidad de reacción, las entalpías de reacción, los coeficientes de transferencia de calor, etc. Todas estas pueden causar un mal rendimiento o incluso la inestabilidad de los sistemas de control en lazo cerrado [6]. Es por este motivo que en este trabajo se busca aplicar distintas técnicas de control que busquen solucionar dichos problemas, para esto es importante conocer un modelo matemático que indique el comportamiento de estos.

## Modelo matemático de reactores CSTR

Dependiendo del grado de exactitud y de las circunstancias específicas, el modelo matemático de un sistema puede tomar muchas formas diferentes y algunos modelos pueden ser más convenientes que otros [7].

Por estas razones, una de las tareas más importantes en el análisis y diseño de esquemas de control, es el modelamiento matemático de los procesos, que en el caso de sistemas no lineales, los algoritmos de control son generalmente complejos.

Además de describir de forma matemática un sistema hay que tomar en cuenta cómo hacer aproximaciones y suposiciones correctas, para que el proceso sea caracterizado de mediante un modelo matemático lineal [8].

En el caso de procesos químicos las relaciones matemáticas que se toman en cuenta generalmente, son las relacionadas con las leyes de termodinámica, leyes de conservación de masa y energía y condiciones de diseño y de control [2].

Existen complejas interacciones entre los fenómenos de transporte y las cinéticas de reacción que caracterizan los CSTR y determinan su desempeño. El modelado matemático de los mecanismos cinéticos y los fenómenos de transferencia de calor han sido un área de investigación en la ingeniería química en años recientes y se tiene que la dependencia exponencial de la velocidad de reacción respecto a la temperatura del reactor es una de las principales no linealidades del CSTR, como se muestra en la Ecuación 1.1, llamada ecuación de Arrhenius [1].

$$k(T) = k_0 e^{\frac{-E}{RT}}$$

### Ecuación 1.1 Arrhenius

Donde:

- $k(T)$ : Constante cinética (dependiente de la temperatura).
- $k_0$ : Factor de frecuencia, indica la frecuencia de las oscilaciones.
- $E$ : Energía de activación, generalmente expresada en [J/mol].
- $R$ : Constante universal de los gases. Su valor es 8.3143 [J/Kmol].
- $T$ : Temperatura absoluta [K].

Como una consecuencia de la no linealidad de la cinética de reacción, el CSTR puede desplegar una gran variedad de comportamientos dinámicos, desde multiplicidad de

estados estacionarios u oscilaciones sostenidas, e incluso el CSTR bajo esquemas de control realimentado podría conducir a inestabilidades del proceso en lazo cerrado [1].

En el caso de estudio de este proyecto de titulación, para realizar el diseño de las técnicas de control, Proporcional Integral Derivativo (PID), Control por Modo Deslizante (SMC) y Regulador Cuadrático Lineal (LQR), es necesario conocer el modelo matemático del reactor tipo CSTR que se utilizará, tanto el modelo lineal representado en variables de estado, como el modelo no lineal, el cual se obtiene a partir de las ecuaciones diferenciales que describen su funcionamiento dinámico.

El desarrollo de las diferentes técnicas para la representación lineal de estos sistemas, se presentan en la siguiente sección.

### **Aproximación lineal de modelos matemáticos no lineales y representación en variables de estado.**

Existen diferentes formas de representar un sistema, cuyo comportamiento es no lineal, en un modelo matemático lineal, sea por medio de su curva de reacción (método empírico), por su aproximación lineal en base del desarrollo directo de series de Taylor sobre las ecuaciones diferenciales del sistema o por variables de estado. En este proyecto es necesario hacer uso de todas estas técnicas de representación lineal, comenzando así con el método empírico.

#### **Método empírico**

Los métodos de identificación, en ingeniería de control, son técnicas de modelado matemático de sistemas a partir de datos experimentales, que ayudan a obtener modelos apropiados para estudios de simulación, diseño de algoritmos de predicción y detección de fallas. Estos métodos utilizan diferentes tipos de pruebas donde se introduce un estímulo predeterminado al sistema para luego adquirir la información necesaria para la estimación del modelo, siendo la prueba de respuesta escalón en lazo abierto una de las más antiguas y utilizada en procesos industriales, para obtener modelos basados en funciones de transferencia.

Una práctica común es la aproximación a modelos de primer orden con tiempo de retardo o FOPDT por sus siglas en inglés (first order plus deadtime), ya que son capaces de representar la dinámica de muchos procesos en un rango de interés para el diseño de controladores por medio de su curva de reacción, la cual proporciona modelos adecuados para muchas aplicaciones [9] y que su representación está dada por la Ecuación 1.2.

$$\frac{X(s)}{U(s)} = \frac{Ke^{-t_0s}}{\tau s + 1}$$

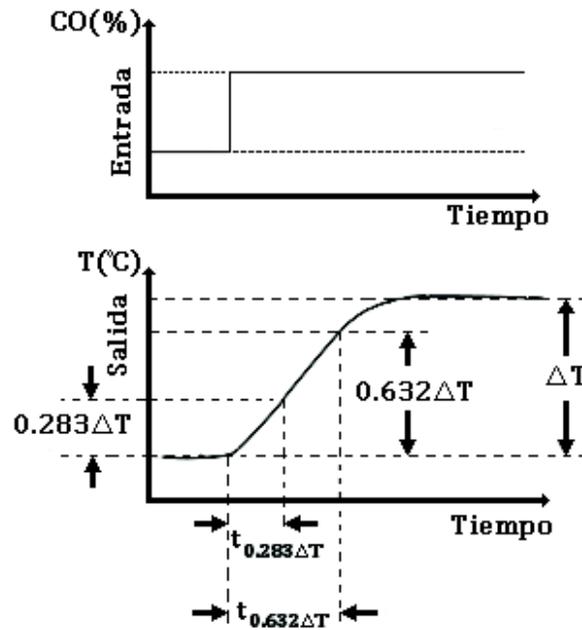
**Ecuación 1.2 FOPDT.**

Donde:

- $X(s)$  : Transformada de Laplace de la variable controlada (salida del transmisor).
- $U(s)$  : Transformada de Laplace de la variable manipulada (salida del controlador).
- $K$  : Ganancia estática.
- $t_0$  : Tiempo muerto.
- $\tau$  : Constante de tiempo.

Tanto  $X(s)$  como  $U(s)$  son variables de desviación.

En el caso de un reactor químico, la curva de reacción se obtiene introduciendo un cambio de paso en la salida del controlador (posición de la válvula) y registrando la salida del transmisor.



**Figura 1.3** Curva de reacción usando el método de los dos puntos [10].

Como se muestra de ejemplo en la Figura 1.3, en el cual CO, es la entrada que representa el porcentaje de apertura de una válvula de control, y la temperatura es la salida del proceso  $T(^{\circ}\text{C})$ , se toma como datos, los tiempos en los que la salida ha alcanzado el 28,3% y el 63,2% de su valor en estado estable, para obtener la constante de tiempo ( $\tau$ ) y el tiempo muerto ( $t_0$ ) por medio de las siguientes ecuaciones.

$$\tau = 1.5(t|_{0.632\Delta T} - t|_{0.283\Delta T})$$

**Ecuación 1.3** Constante de tiempo.

$$t_0 = t|_{0.632\Delta T} - \tau$$

**Ecuación 1.4** Tiempo muerto.

$$K = \frac{\Delta T}{\Delta CO}$$

**Ecuación 1.5** Ganancia estática.

En la mayoría de los casos, los modelos de primer orden con retardo son adecuados para el análisis y diseño del control de procesos, sin embargo, estos modelos de orden reducido prevén incertidumbres derivadas del conocimiento imperfecto del modelo, y los procesos no lineales contribuyen a la degradación del rendimiento de los controladores.

El objetivo de este trabajo es diseñar los controladores PID, SMC basados en un modelo de primer orden más tiempo muerto o de retardo (FOPDT) del proceso real y compararlos para concluir en cuál de los dos controladores actúa mejor y compararlos a su vez con el controlador LQR. Los parámetros del modelo, que se pueden apreciar en la Ecuación 1.2, la ganancia estática del proceso  $K$ , la constante de tiempo de proceso,  $\tau$ , y el tiempo muerto del proceso,  $t_0$ , se utilizan para obtener las estimaciones iniciales de los términos de ajuste de los controladores [10].

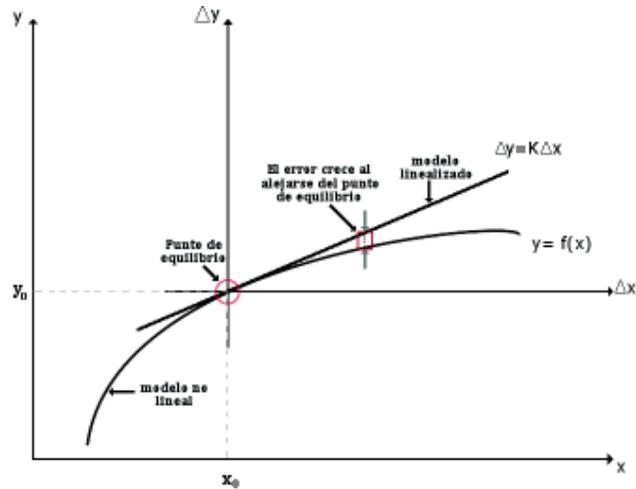
#### **Aproximación lineal por series de Taylor**

En ingeniería de control, el punto de equilibrio de un sistema dinámico representa las condiciones de las variables del sistema, en donde se encuentra estático. Por ejemplo, en el caso de una partícula si se encuentra en reposo sin alguna fuerza externa que representa una entrada ( $u$ ), entonces se dice que se encuentra en un punto de equilibrio, entonces el punto de equilibrio está dado por la Ecuación 1.6:

$$x = f(x^0, u^0) = 0$$

**Ecuación 1.6** Punto de equilibrio.

Las ecuaciones de los sistemas no lineales se pueden entender de manera similar al comportamiento gráfico de una curva. La interpretación gráfica de una linealización es encontrar la forma de la línea tangente en un punto de la función de una curva, Figura 1.4. Este punto se toma en cuenta como el punto de operación o el punto de equilibrio.



**Figura 1.4** Representación gráfica de linealización.

Con el fin de obtener un modelo matemático lineal para un sistema no lineal, se supone que las variables sólo se desvían ligeramente de alguna condición de operación [3].

Se toma como punto de partida las siguientes expresiones:

$$y = f(x_0)$$

**Ecuación 1.7** Función de una sola variable.

$$y_0 = f(x_0)$$

**Ecuación 1.8** Punto de funcionamiento de la función.

Al desarrollar en serie de Taylor la función alrededor de dicho punto se tiene:

$$y = f(x_0) + \left[ \frac{df}{dx} \right]_0 (x - x_0) + \left[ \frac{d^2f}{dx^2} \right]_0 (x - x_0)^2 + \dots + \left[ \frac{d^n f}{dx^n} \right]_0 (x - x_0)^n$$

**Ecuación 1.9** Desarrollo en serie de Taylor.

Y al tomar los dos primeros términos del desarrollo:

$$y \approx f(x_0) + \left[ \frac{df}{dx} \right]_0 (x - x_0)$$

**Ecuación 1.10** Dos primeros términos de la serie de Taylor.

Que, dado que se cumple la ecuación del equilibrio  $y_0 = f(x_0)$ , se transforma en:

$$y - y_0 \approx f(x_0) + \left[ \frac{df}{dx} \right]_0 (x - x_0)$$

**Ecuación 1.11** Reemplazo del punto de equilibrio.

Es decir:

$$\Delta y \approx K \Delta x$$

**Ecuación 1.12** Función linealizada.

Donde  $K$  es la derivada de la función con respecto a la variable particularizada para el punto de funcionamiento elegido.

En la Figura 1.4 se ve la interpretación gráfica de la linealización, que consiste en llevar los ejes al punto de funcionamiento, sustituir la función y la variable por sus incrementos respecto a dicho punto, y sustituir la función por su tangente.

En el caso de que la función a linealizar dependa de  $n$  variables, bastará con sustituir las derivadas por las derivadas parciales con respecto a cada una de las variables.

Dada  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , que cumple  $y_0 = f(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$

Desarrollando en serie y eliminando los términos de segundo orden, se obtiene:

$$y_0 = f(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}) + \left[ \frac{df}{dx_1} \right] (x_1 - x_{10}) + \left[ \frac{df}{dx_2} \right] (x_2 - x_{20}) + \dots + \left[ \frac{df}{dx_n} \right] (x_n - x_{n0})$$

**Ecuación 1.13** Serie de Taylor de función con  $n$  variables.

Es decir:

$$\Delta y \approx K_1 \Delta x_1 + K_2 \Delta x_2 + \dots + K_n \Delta x_n$$

**Ecuación 1.14** Función de  $n$  variables linealizada.

Que es la ecuación de un hiperplano que pasa por el origen.

**Representación en variables de estado**

Un sistema o proceso puede tener varias entradas y varias salidas que se relacionan entre sí de una forma compleja. Para analizar este tipo de procesos, se debe reducir la complejidad de las expresiones matemáticas. El enfoque en el espacio de estados para el análisis de sistemas es el más conveniente desde este punto de vista [3].

La teoría de control moderno se basa en el conocimiento del comportamiento interno de los sistemas, reflejado en las variables que afectan en su dinámica. Estas variables constituyen el concepto de estado del sistema [11].

El estado de un sistema dinámico es el conjunto más pequeño de variables (denominadas variables de estado) tal que el conocimiento de esas variables en  $t = 0$ ,

conjuntamente con el conocimiento de la entrada  $t \geq 0$ , determinan completamente el comportamiento del sistema en cualquier tiempo  $t \geq 0$ .

El conocimiento de la evolución de todas las variables que influyen en la dinámica del sistema permite realizar un mejor control de ésta y abordar el control de sistemas más complejos [11].

La ventaja del uso de la representación en espacios de estado es que éste puede en su modelado representar sistemas tanto continuos como discretos, lineales o no lineales variables o invariantes en el tiempo y generalmente usados en forma matricial.

Todos estos sistemas se caracterizan porque pueden ser representados por una ecuación que incluya información del estado de la forma:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

**Ecuación 1.15** Ecuación de estado.

La Ecuación 1.15, representa la dinámica de la evolución del estado del sistema, siendo  $\dot{x}$  el vector derivada en el tiempo de las variables de estado de dimensión  $n$  por uno, teniendo que:

- $u$ : Vector de entrada (también denominado de control) de dimensión.
- $A$ : Matriz de dimensiones de estado  $n \times n$ .
- $B$ : Matriz de entrada de dimensiones  $m \times n$ .

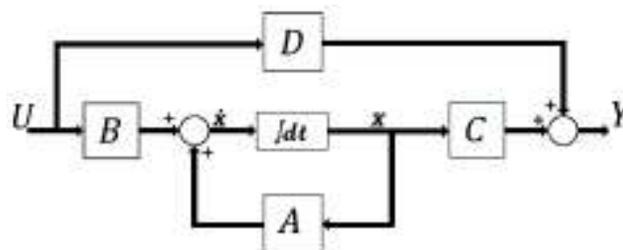
Se tiene de igual manera el vector de salida del sistema de dimensión  $r \times n$ :

$$y = Cx + Du$$

**Ecuación 1.16** Ecuación de salida.

Donde:

- $C$  : matriz de salida de dimensión  $r \times n$ .
- $D$  : matriz de transmisión directa de dimensión  $r \times m$ .



**Figura 1.5** Sistema en variables de estado representado en diagrama de bloques.

Si se considera que para cada entrada del sistema, se tiene una salida, se tendrá una función de transferencia, la que se puede obtener si se aplica Transformada de Laplace y se consideran condiciones iniciales nulas, teniendo así:

$$Y(s) = C[sI - A]^{-1}BU + DU$$

**Ecuación 1.17** Relación entre función de transferencia y variables de estado.

Como se puede notar, todas estas técnicas de representación lineal poseen ciertos parámetros que describen el comportamiento del sistema, los cuales ayudaran a diseñar las diferentes técnicas de control a emplear en este proyecto.

## Técnicas de control

En esta sección se estudiarán los fundamentos básicos de cada una de las estrategias de control a ser implementadas sobre los tres diferentes reactores tipo CSTR.

### Controlador proporcional integral derivativo PID

El controlador Proporcional – integral - derivativo (PID) está conformado por tres componentes tradicionales del control: componente proporcional, integral y derivativo, cada uno realiza una acción específica sobre el error [12].

La ley de control tiene la siguiente forma.

$$u_c(t) = K_p e(t) + K_d \frac{de(t)}{dt} + K_i \int_0^t e(t) dt$$

**Ecuación 1.18** Ley de control PID.

- La acción proporcional obtiene el valor de error y lo multiplica por una constante, lo que provoca la disminución del error en estado estable del sistema, pero no lo limita.
- La acción integral elimina el error en estado estable, integrando el error en el tiempo hasta alcanzar la referencia, si el error es nulo la salida del controlador se mantiene en el último valor que provocó que el error sea cero.
- La acción diferencial deriva la variación del error, esta acción es válida cuando el sistema a controlar es lento frente a los cambios de referencia.

Las constantes  $K_p$ ,  $K_i$  y  $K_d$  son parámetros sintonizables o ganancias. Estas constantes son ajustadas dependiendo de los requerimientos o características del sistema [12].

### Sintonización del controlador PID a partir del modelo FOPDT del proceso

Existen varias maneras de sintonizar los controladores PID a partir de los términos característicos de una función de primer orden con retardo, en este caso optó por el uso de las ecuaciones de Dahlin para ajustar los parámetros del controlador.

$$K_c = \frac{1}{2K} \left( \frac{t_0}{\tau} \right)^{-1}$$

**Ecuación 1.19** Ganancia PID Dahlin.

$$\tau_d = \frac{t_0}{2}$$

**Ecuación 1.20** Tiempo derivativo PID Dahlin.

$$\tau_i = \tau$$

**Ecuación 1.21** Tiempo integral PID Dahlin.

En la ley de control del PID se emplea los términos de ganancia que son equivalentes a los términos anteriores de la siguiente manera:

$$K_p = K_c$$

**Ecuación 1.22** Ganancia proporcional PID.

$$K_d = K_c \tau_d$$

**Ecuación 1.23** Ganancia derivativa PID.

$$K_i = K_c \frac{1}{\tau_i}$$

**Ecuación 1.24** Ganancia integral PID.

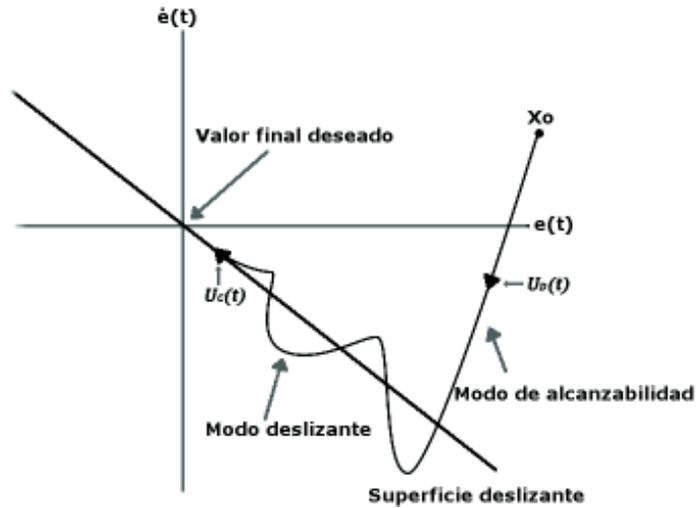
Teniendo de esta manera todos los términos necesarios para la sintonización de nuestro controlador PID.

### Control por modo deslizante SMC

El control por modo deslizante SMC, por sus siglas en inglés (Sliding Mode Control) es una estrategia de control robusto, la cual se deriva del control de estructura variable (VSC por sus siglas en inglés), que es eficiente para el control complejo de plantas dinámicas no lineales que operan bajo condiciones inciertas, un problema común para muchos procesos de tecnología moderna [10].

La estructura de este controlador consta de dos partes como se muestra en la Ecuación 1.25, una función continua y una función discontinua. La idea del SMC es establecer una superficie a lo largo de la cual el proceso pueda deslizarse a su valor deseado, teniendo

en cuenta que la parte continua del controlador (Ecuación 1.26) es diseñada en base a la superficie de deslizamiento, la cual contiene la dinámica deseada del sistema. La parte discontinua (Ecuación 1.27) es la que lleva al error hacia la superficie de deslizamiento, presentando rápidas conmutaciones de alta frecuencia denominadas “chattering” [12].



**Figura 1.6** Representación gráfica de un SMC [12].

En la Figura 1.6 se tiene la representación gráfica del controlador por modo deslizante, en la cual  $e(t)$  es el error del sistema y  $x_o$  es el estado inicial del sistema, el cual debe deslizarse por una superficie para llegar al valor final deseado, haciendo que el error sea nulo.

La acción de control de la técnica SMC está dada por la siguiente ecuación.

$$U(t) = U_C(t) + U_D(t)$$

**Ecuación 1.25** Ley de control SMC.

Donde:

- $U(t)$  : Salida del controlador.
- $U_D(t)$  : Función discontinua del controlador, responsable de que la variable  $x_o$  alcance la superficie deslizante.
- $U_C(t)$  : Función continua del controlador, responsable de mantener a la variable  $x_o$  en la superficie deslizante.

La parte continua está dada por:

$$U_C(t) = f(X(t), R(t))$$

**Ecuación 1.26** Parte continua SMC.

Donde  $f(X(t), R(t))$  se encuentra en función de la variable controlada  $X(t)$ , y el valor de referencia  $R(t)$ .

La parte discontinua  $U_D(t)$  incorpora un elemento no lineal que incluye el elemento de variación de la ley de control. Esta parte del controlador es discontinua a través de la superficie deslizante.

$$U_D(t) = K_D \frac{S(t)}{|S(t)| + \delta}$$

**Ecuación 1.27** Parte discontinua SMC.

Donde:

- $K_D$  : Parámetro de ajuste responsable del modo de alcance.
- $\delta$  : Parámetro utilizado para reducir el problema de chattering.
- $S(t)$  : Es el término seleccionado para determinar el rendimiento del sistema en la superficie deslizante.

#### **Sintonización de SMC a partir del modelo FOPDT del proceso**

Las ecuaciones desarrolladas para la sintonización de un SMC a partir del modelo de primer orden con tiempo muerto de un sistema están desarrolladas en [10], teniendo como resultado de esa investigación que la ley de control completa de un SMC para una salida del proceso  $X(t)$  (salida del transmisor) es la siguiente:

$$U(t) = \left(\frac{t_0\tau}{K}\right) \left[\frac{X(t)}{t_0\tau} + \lambda_0 e(t)\right] + K_D \frac{S(t)}{|S(t)| + \delta}$$

**Ecuación 1.28** Ley de control completa SMC.

Teniendo que:

$$S(t) = \text{sign}(K) \left[ -\frac{dX(t)}{dt} + \lambda_1 e(t) + \lambda_0 \int_0^t e(t) dt \right]$$

**Ecuación 1.29** Superficie SMC.

Donde,  $\text{sign}(K)$  representa a la función signo aplicado a la ganancia estática  $K$ .

Para el ajuste de los parámetros de la parte continua, discontinua y deslizante del controlador, se tienen las siguientes equivalencias de la Tabla 1.2 dependiendo del tipo de sistema.

**Tabla 1.2** Ecuaciones de sintonización SMC [13].

	<b>Auto Regulación</b>	<b>Respuesta Inversa</b>
$\lambda_1 [time]^{-1}$	$\frac{t_0 + \tau}{t_0 \tau}$	$\frac{t_0 + \tau}{t_0 \tau}$
$\lambda_0 [time]^{-2}$	$\frac{1}{4} \left( \frac{t_0 + \tau}{t_0 \tau} \right)^2$	$\frac{1}{4} \left( \frac{t_0 + \tau}{t_0 \tau} \right)^2$
$K_D [fracción CO]$	$\frac{0.51}{ K } \left( \frac{\tau}{t_0} \right)^{0.76}$	$\frac{0.064}{ K } \left( \frac{\tau}{t_0} \right)^{0.76}$
$\delta \left[ \frac{fracción TO}{time} \right]$	$0.68 + 0.12 K K_D\lambda_1$	$0.68 + 0.12 K K_D\lambda_1$

Las ecuaciones 1.28 y 1.29, constituyen las ecuaciones del controlador a utilizar, las cuales poseen ventajas desde el punto de vista del control de procesos, ya que tienen una estructura de acuerdo con los parámetros característicos del modelo FOPDT, y se considera la acción del controlador en la ecuación de la superficie deslizante [10].

Los parámetros  $K_D$  y  $\delta$ , son usados cuando las salidas del transmisor y controlador son en fracción de (0-1). En el caso de que el sistema de control trabaje con porcentajes, tal que, las señales están en % (0-100) de rango, se debe multiplicar los valores de  $K_D$  y  $\delta$  por cien [10].

### **Regulador lineal cuadrático LQR**

El Regulador Cuadrático Lineal (LQR por sus siglas en inglés), es un controlador que se basa en la realimentación de estados, el cual por medio de criterios de optimización puede obtener una entrada para que el parámetro J (funcional cuadrático o índice de coste), que puede ser encontrado por la Ecuación 1.30, sea mínimo, y así obtener el mejor comportamiento del sistema [12], [14].

$$J = \int_{t_1}^{t_2} [((x(t) - X_2)^T Q (x(t) - X_2)) + u(t)^T R u(t)] dt$$

**Ecuación 1.30** Índice de coste.

Donde:

- $x(t)$  : Estados del sistema.
- $u(t)$  : Acción de control.
- $Q$  : Matriz de ponderación simétrica semidefinida positiva.
- $R$  : Matriz simétrica de entrada definida positiva.

- $X_2$ : Estado final del sistema.

Si se considera un estado final nulo, el índice de coste se reduce a:

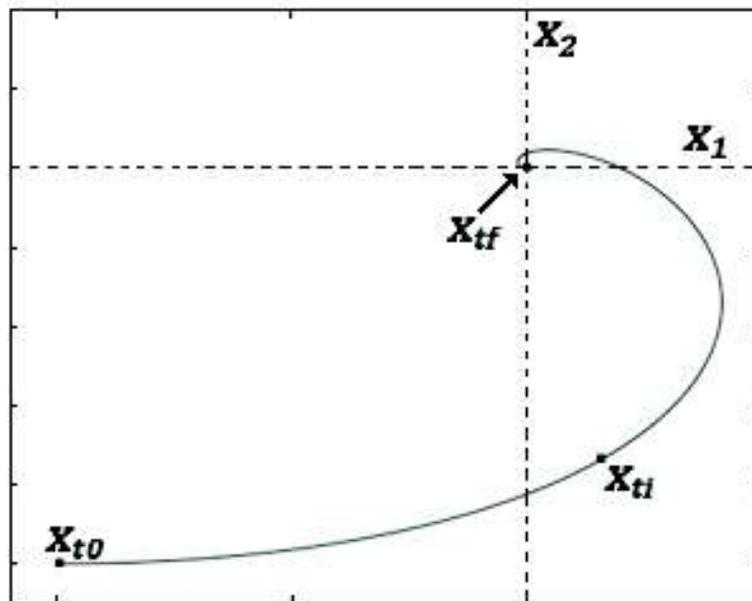
$$J = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \left( x(t) \right)^t Q x(t) + u(t)^t R u(t) \right] dt$$

**Ecuación 1.31** Índice de coste en estado final nulo.

En cualquier condición de perturbación, donde el sistema se desplaza a otro punto de estado, el controlador LQR puede llevar el sistema a las condiciones de estado cero donde el parámetro  $J$  es minimizado de nuevo [14]. Para encontrar un control  $u(t)$  que minimice este parámetro, se utiliza el Principio de Optimalidad de Bellman que plantea una solución iterativa en orden inverso [12].

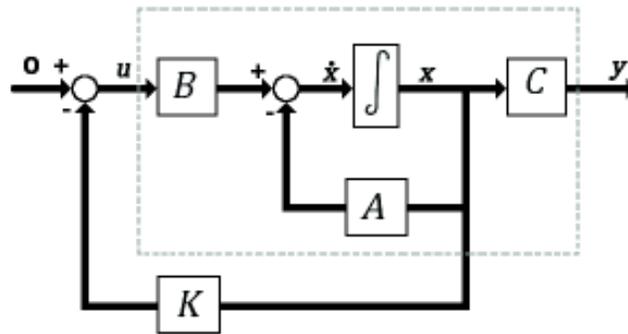
### Principio de optimalidad de Bellman

Cuando se aplica una ley de control cualquiera sobre un proceso, el sistema a controlar tendrá una evolución de estados que define una trayectoria. Teniendo en cuenta esto, se considera que una trayectoria es óptima si el valor de dicha ley de control  $u(t)$  minimiza  $J$ , como se mencionó en la sección anterior. De este modo el Principio de Optimalidad de Bellman nos dice que [12], "Si una trayectoria entre dos estados  $x_{t_0}$  y  $x_{t_f}$  es óptima, entonces cualquier tramo de esta trayectoria, definido desde un punto  $x_{t_i}$  (perteneciente a dicha trayectoria) y el punto  $x_{t_0}$ , es en sí una trayectoria óptima", Figura 1.7.



**Figura 1.7** Trayectoria en el espacio de estados [12].

En la Figura 1.8 se muestra el esquema de control del LQR.



**Figura 1.8** Esquema de control de un LQR [12].

Del esquema anterior se tiene que la entrada  $u$  esta dada por:

$$u(t) = -Kx(t)$$

**Ecuación 1.32** Ley de control LQR.

Donde  $K$  es una matriz de realimentación lineal de ganancias que se describe de la siguiente manera [14]:

$$K = R^{-1}B^T P(t)$$

**Ecuación 1.33** Matriz de realimentación lineal.

Teniendo que  $P(t)$  es la solución de la ecuación diferencial de Riccati, la cual es matricial y no lineal:

$$\frac{dP^T}{dt} = -Q - A^T P(t) - P(t)A + P(t)BR^{-1}B^T P(t)$$

**Ecuación 1.34** Ecuación diferencial de Riccati.

En un sistema invariante las matrices  $A, B$  son constantes, se considera que  $Q$  y  $R$  también lo son y se busca un estado estacionario nulo en el tiempo infinito ( $t_2 \rightarrow \infty$ ), dando así que, la ecuación algebraica de Riccati es [14]:

$$0 = -Q - A^T P(t) - P(t)A + P(t)BR^{-1}B^T P(t)$$

**Ecuación 1.35** Ecuación algebraica de Riccati.

De donde se obtiene finalmente los parámetros de la matriz  $K$  para el controlador LQR.

Todas estas técnicas de control aplicadas a los diferentes tipos de reactores CSTR se comparan tomando como referencia el índice de desempeño como el IAE, del cual se presenta una definición más amplia a continuación.

## Índice de desempeño IAE

La mayoría de ecuaciones de sintonización para controladores, se basan en criterios de minimización del error, o también conocidos como índices de desempeño tales como el IAE (Integral del valor Absoluto del Error) como una función de costo que es capaz de medir el rendimiento de una respuesta del sistema. Dicho índice IAE les da igual importancia a todos los errores independientemente de su signo y del momento en que se presenten.

$$IAE = \int_0^{\infty} |e(t)| dt$$

**Ecuación 1.36** Índice IAE.

A medida que el valor de IAE es más pequeño, teóricamente la respuesta que se está midiendo es mejor. Aunque en general el IAE es muy utilizado debido a su sencillez, existen casos donde las respuestas que presentan el valor más bajo de IAE no necesariamente son las mejores [15].

## 2. METODOLOGÍA

Para el diseño de leyes de control, es siempre necesario conocer las características y el funcionamiento de la planta o proceso a controlar, se debe realizar una investigación básica de los parámetros y respuesta de dicho sistema.

En este capítulo se presenta una descripción de las características y del modelo matemático de cada uno de los tres reactores CSTR, dichos modelos no lineales serán implementados mediante software de simulación Simulink-Matlab®. Posteriormente, se mostrarán los modelos lineales y sus representaciones en variables de estado, se realizarán los diseños de cada una de las tres técnicas de control: PID, Control por Modo Deslizantes y Regulador Cuadrático Lineal, y por último para la visualización de los resultados se diseñará una interfaz gráfica de usuario en Guide-Matlab®.

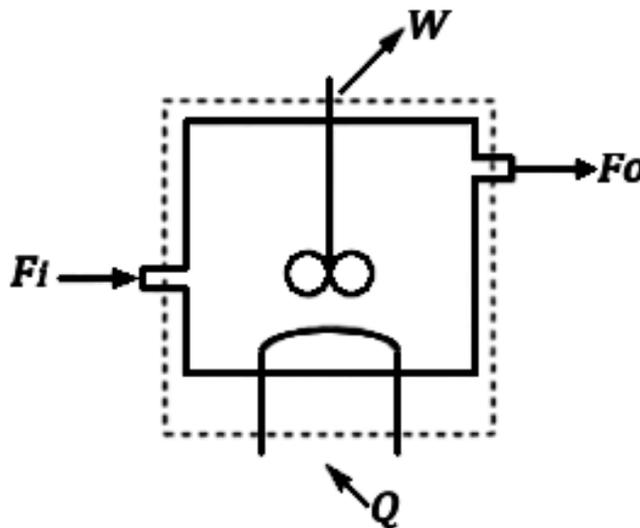
### 2.1. Modelo matemático del reactor CSTR

Como se mencionó en el capítulo anterior, en el caso de procesos químicos las relaciones matemáticas que se toman en cuenta generalmente para el desarrollo de modelos matemáticos, son las que tienen que ver con leyes de termodinámica, leyes de conservación o balance de masa y energía y condiciones de diseño y de control [2].

Los balances de conservación a menudo se escriben como en la Ecuación 2.1, para el sistema mostrado en la Figura 2.1 [16].

$$[Acumulación] = [entrada] - [salida] + [generación]$$

**Ecuación 2.1** Balance de conservación



**Figura 2.1** Sistema general de un CSTR [16].

Donde:

- $F_i$ : Flujo de entrada.
- $F_o$ : Flujo de salida.
- $Q$ : Calor transferido al sistema desde el entorno.
- $W$ : Trabajo realizado por el sistema en el entorno.

Para un sistema bien mezclado, este equilibrio dará lugar a una ecuación diferencial ordinaria cuando el término de acumulación no es cero y en una ecuación algebraica cuando el término de acumulación es cero. En cuanto a balance de masa, se tiene dos interpretaciones, el balance de masa en general, expresado en la Ecuación 2.2 y el balance de masa de componentes, expresado en la Ecuación 2.3 [16].

$$[\text{Acumulación de masa}] = [\text{masa entrante}] - [\text{masa de salida}]$$

**Ecuación 2.2** Balance de masa general.

$$[\text{Acumulación de masa de componentes}] = [\text{masa de componentes de entrada}] - [\text{masa de componentes de salidas}] + [\text{generación de masa de componentes}]$$

**Ecuación 2.3** Balance de masa de componentes.

Mientras que el balance de energía, tiene la siguiente forma,

$$[\text{Acumulación de } U + PE + KE] = [U + PE + KE \text{ entrante debido a la convección}] - [U + PE + KE \text{ de salida debido a la convección}] + Q - W$$

**Ecuación 2.4** Balance de energía.

Que en el caso de que el sistema sea de volumen constante, como en los reactores CSTR, la Ecuación 2.4 se expresa de la siguiente manera:

$$[\text{Acumulación de } U + PE + KE] = [H + PE + KE \text{ entrante debido a la convección}] - [U + PE + KE \text{ de salida debido a la convección}] + Q - W_s$$

**Ecuación 2.5** Balance de energía a volumen constante.

Donde:

- $H = U + \rho v$ : entalpía.
- $KE$ : energía cinética.
- $PE$ : energía potencial.
- $U$ : energía interna.

- $\rho v$  : presión, volumen (flujo de trabajo).
- $W_s$  : trabajo realizado por el agitador en el entorno.

Los modelos matemáticos pueden desarrollarse para predecir el comportamiento de ciertas variables dependientes. Se debe tratar de predecir el comportamiento de todas las variables importantes utilizando sólo balances fundamentales. Sin embargo, a menudo existe un número insuficiente de balances para determinar todas las variables. Cuando este es el caso, se incluyen ecuaciones constitutivas adicionales para proporcionar suficientes expresiones para un modelo completamente específico, como son las de transferencia de calor, velocidad de reacción, ecuaciones de estado, etc [16].

Para los tres reactores se asume ciertos factores, como que las pérdidas de calor de la camisa hacia su entorno son insignificantes, las densidades y capacidades térmicas de los reactivos y productos son iguales y constantes, así como el calor de reacción y el nivel de líquido en el tanque, motivo por el cual los flujos de entrada y salida son iguales [10].

### Reactor con dinámica lenta

El primer reactor que se aborda en este trabajo, es un CSTR en el cual tiene lugar una reacción exotérmica de  $A \rightarrow B$ . Para eliminar el calor provocado por la reacción, el reactor está rodeado por una camisa a través de la cual fluye un líquido refrigerante como se muestra en la Figura 2.2 [10].

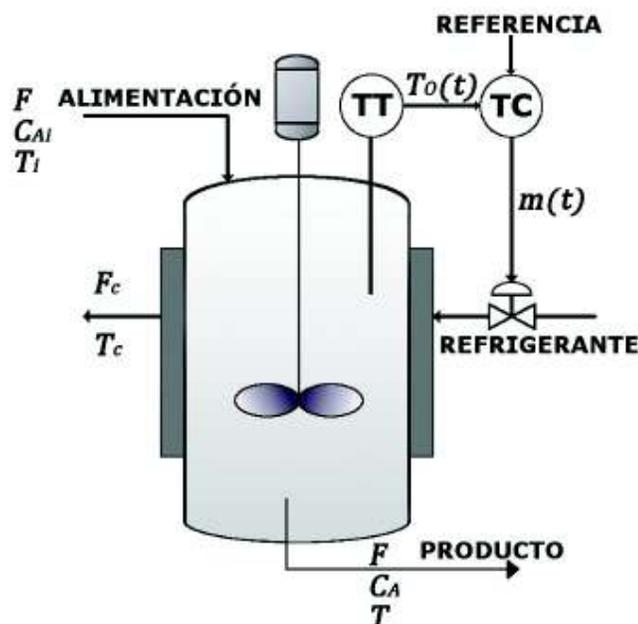
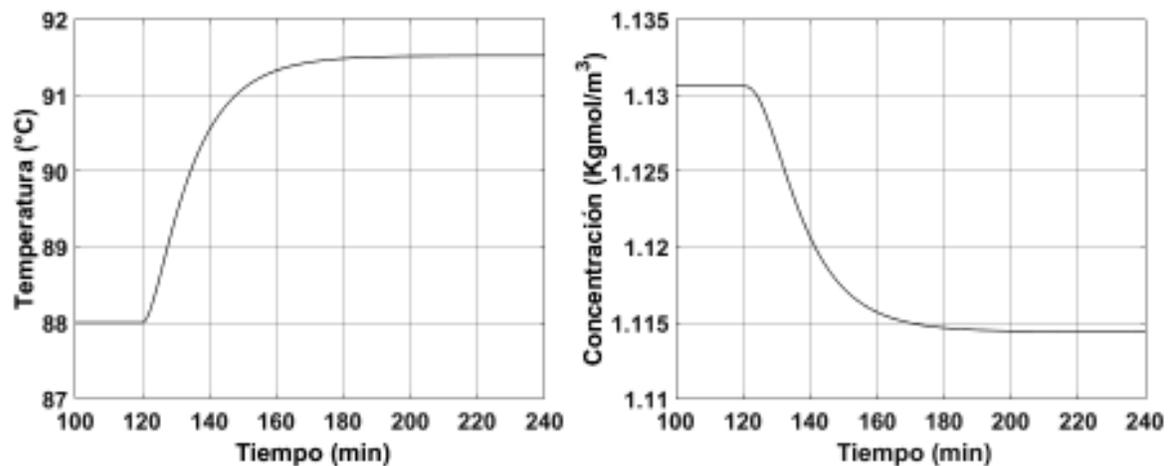


Figura 2.2 Esquema del reactor de dinámica lenta [10].

Este reactor posee una dinámica lenta en comparación con los otros dos abordados en este trabajo, como se puede apreciar en la Figura 2.3, debido a características propias de la planta que se ven reflejadas en su modelo.

En lazo abierto, al realizar un cambio en la apertura de la válvula de 0.1, la temperatura que influye directamente sobre la concentración, se estabiliza aproximadamente después de 80 minutos.

La Figura 2.3 muestra la respuesta de la planta en lazo abierto, ante una entrada escalón que actúa directamente sobre la válvula, este reactor tiene un rango de trabajo de 80 a 100°C, obtenida a partir de la simulación realizada del modelo no lineal del sistema.



**Figura 2.3** Respuesta en lazo abierto de temperatura y concentración del reactor con dinámica lenta.

Las siguientes ecuaciones constituyen el modelo matemático del proceso:

$$\frac{dC_A(t)}{dt} = \frac{F(t)}{V} (C_{Ai}(t) - C_A(t)) - kC_A^2(t)$$

**Ecuación 2.6** Balance de masa del reactante A del reactor con dinámica lenta.

$$\frac{dT(t)}{dt} = \frac{F(t)}{V} (T_i(t) - T(t)) - kC_A^2(t) \frac{\Delta H_R}{\rho C_p} - \frac{UA}{V\rho C_p} (T(t) - T_c(t))$$

**Ecuación 2.7** Balance de energía del contenido del reactor del reactor con dinámica lenta.

$$\frac{dT_c(t)}{dt} = \frac{UA}{V_c \rho_c C_{pc}} (T(t) - T_c(t)) - \frac{F_c(t)}{V_c} (T_c(t) - T_{ci}(t))$$

**Ecuación 2.8** Balance de energía en la chaqueta del reactor con dinámica lenta.

$$k = k_0 e^{-\frac{E}{R(T+273)}}$$

**Ecuación 2.9** Coeficiente de velocidad de reacción del reactor con dinámica lenta.

$$\frac{dT_O(t)}{dt} = \frac{1}{\tau_T} \left( \frac{T(t) - 80}{20} - T_O(t) \right)$$

**Ecuación 2.10** Transmisor de temperatura del reactor con dinámica lenta.

$$F_c(t) = F_{c\max} \propto^{-m(t)}$$

**Ecuación 2.11** Válvula de control equiporcentual (air to close) del reactor con dinámica lenta.

**Tabla 2.1** Parámetros de diseño y valores en estado estable del reactor con dinámica lenta [10].

Variable	Valor	Variable	Valor
$C_A$	$1.133 \text{ kgmol/m}^3$	$V_C$	$1.82 \text{ m}^3$
$C_{Ai}$	$2.88 \text{ kgmol/m}^3$	$F(t)$	$0.45 \text{ m}^3/\text{min}$
$T$	$88^\circ\text{C}$	$F_{c\max}$	$1.2 \text{ m}^3/\text{min}$
$T_i$	$66^\circ\text{C}$	$\alpha$	50
$T_{ci}$	$27^\circ\text{C}$	$\tau_T$	$0.33 \text{ min}$
Set point	$88^\circ\text{C}$	$E$	$1.182 \times 10^7 \text{ J/kgmol}$
$\Delta H_R$	$-9.6 \times 10^7 \text{ J/kgmol}$	$T_c$	$50.5^\circ\text{C}$
$\rho_c$	$1000 \text{ kg/m}^3$	$\bar{m}$	$0.254 \text{ pu}$
$A$	$5.4 \text{ m}^2$	$V$	$7.08 \text{ m}^3$
$\rho$	$19.2 \text{ kgmol/m}^3$	$C_{Pc}$	$4184 \frac{\text{J}}{\text{kg} - ^\circ\text{C}}$
$C_p$	$1.815 \times 10^5 \frac{\text{J}}{\text{kgmol} - ^\circ\text{C}}$	$U$	$3550.0 \frac{\text{J}}{\text{seg} - \text{m}^2 - ^\circ\text{C}}$
$k_0$	$0.0744 \frac{\text{m}^3}{\text{seg} - \text{kgmol}}$		

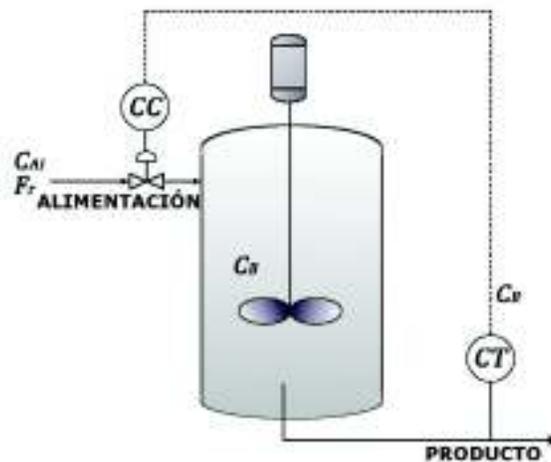
Donde:

- $C_A(t)$  = Concentración del reactivo dentro del reactor [ $\text{kgmol/m}^3$ ].
- $C_{Ai}(t)$  = Concentración del reactivo en la alimentación [ $\text{kgmol/m}^3$ ].
- $T(t)$  = Temperatura dentro del reactor [ $^\circ\text{C}$ ].
- $T_i(t)$  = Temperatura inicial [ $^\circ\text{C}$ ].
- $T_c(t)$  = Temperatura de la chaqueta [ $^\circ\text{C}$ ].
- $T_{ci}(t)$  = Temperatura de entrada del refrigerante [ $^\circ\text{C}$ ].
- $T_O(t)$  = Señal del transmisor en la escala de 0 a 1 por unidad [pu].
- $F(t)$  = Flujo del proceso [ $\text{m}^3/\text{min}$ ].

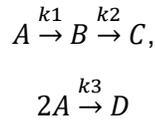
- $V$  = Volumen del Reactor [ $m^3$ ].
- $k$  = Coeficiente de reacción [ $m^3/kgmol\cdot min$ ].
- $\Delta H_R$  = Entalpía de la reacción, se asume constante [ $J/kgmol$ ].
- $\rho$  = Densidad del contenido del reactor [ $kgmol/m^3$ ].
- $C_p$  = Capacidad calorífica de los reactantes y productos [ $J/kgmol\cdot ^\circ C$ ].
- $U$  = Coeficiente global de transferencia de Calor [ $J/min\cdot m^2\cdot ^\circ C$ ].
- $V_c$  = Volumen de la chaqueta [ $m^3$ ].
- $\rho_c$  = Densidad del refrigerante [ $kg/m^3$ ].
- $C_{pc}$  = Calor específico del refrigerante [ $J/kg\cdot ^\circ C$ ].
- $F_c(t)$  = Flujo del refrigerante [ $m^3/min$ ].
- $\tau_T$  = Constante de tiempo del sensor de temperatura [ $min$ ].
- $F_{c\ max}$  = Flujo máximo a través de la válvula de control [ $m^3/min$ ].
- $\alpha$  = Rangeabilidad de la válvula.
- $k_0$  = Factor de frecuencia de Arrhenius [ $m^3/min - kgmol$ ].
- $E$  = Energía de activación de la reacción [ $J/kgmol$ ].
- $R$  = Constante universal de los gases, 8314.39 [ $J/kgmol\cdot K$ ].
- $m(t)$  = Posición de la válvula en la escala de 0 a 1 en por unidad [pu].

## Reactor con respuesta inversa

En este caso se analiza un reactor isotérmico tipo Van de Vusse, Figura 2.4, el cual presenta una respuesta inversa, la reacción que se da se la puede describir con el siguiente esquema:



**Figura 2.4** Reactor Van de Vusse, respuesta con respuesta inversa.



**Ecuación 2.12** Esquema de reacción del reactor con respuesta inversa.

Dónde:

- $k_1, k_2, k_3$  : Tasas de reacción.
- $A$  : Producto de entrada.
- $B$  : Producto deseado.
- $C, D$  : Productos adicionales no deseados.

El sistema puede ser descrito por el balance molar o de masa del componente A representado en la Ecuación 2.13 y el balance molar del componente B descrito en la Ecuación 2.14, debido a que es deseado conocer el modelo que relaciona componente B con respecto a la entrada al reactor el cual es el componente A, los componentes C y D no influyen dentro del modelo, por lo cual no se los considera dentro del mismo [17].

$$\frac{dC_A(t)}{dt} = \frac{F_r(t)}{V} [C_{Ai}(t) - C_A(t)] - k_1 C_A(t) - k_3 C_A^2(t)$$

**Ecuación 2.13** Balance de masa del reactante A del reactor con respuesta inversa [17].

$$\frac{dC_B(t)}{dt} = -\frac{F_r(t)}{V} C_B(t) + k_1 C_A(t) - k_2 C_B(t)$$

**Ecuación 2.14** Balance de masa del reactante B del reactor con respuesta inversa [17].

Dónde:

- $C_A(t)$  : Concentración del reactivo A [ $\text{mol.l}^{-1}$ ].
- $C_B(t)$  : Concentración del reactivo B [ $\text{mol.l}^{-1}$ ].
- $F_r(t)$  : Flujo del proceso [ $\text{l.mol}^{-1}$ ].
- $V$  : Volumen del reactor [l].

En este caso la variable de interés será la concentración del componente B en el reactor, la cual se busca controlar a través del flujo  $F_r(t)$ , las tasas de reacción se encuentran representadas por  $k_1, k_2$  y  $k_3$  respectivamente.

Para la medición de parámetros el reactor modelado cuenta con un transmisor de concentración el cual se lo puede representar por medio de la Ecuación 2.15, este transmisor tiene la particularidad de ser lineal y dar una medida representada en porcentaje. Para el control se cuenta con una válvula representada por la Ecuación 2.16 que regula la salida del flujo  $F_r(t)$ .

Cabe indicar que para esta planta los cambios máximos de alimentación del reactante A deben ser de  $\pm 10\%$ , y las perturbaciones en  $C_{Ai}$  deberán estar entre  $\pm 10\%$ , las ecuaciones de estos dispositivos son tomados de [17].

$$y(t)\% = \left(\frac{100}{1.5714}\right) C_B(t)$$

**Ecuación 2.15** Transmisor de concentración del reactor con respuesta inversa [17].

$$F_r(t) = \left(\frac{634.1719}{100}\right) u(t)\%$$

**Ecuación 2.16** Válvula de control lineal del reactor con respuesta inversa [17].

Donde  $u(t)\%$  representa el porcentaje de apertura de la válvula de control.

En la Tabla 2.2, se presentan los valores característicos del sistema en estado estable, como particularidad se tiene que el flujo tendrá una variación entre 0 y  $634.1719 \text{ l. mol}^{-1}$ .

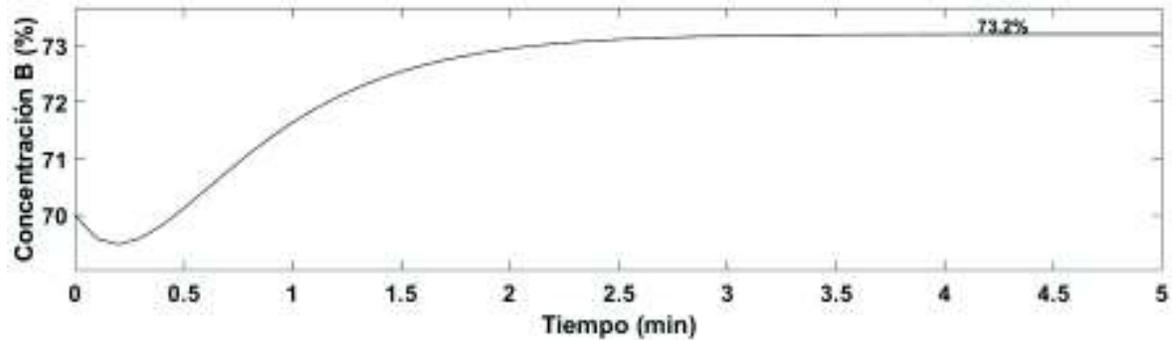
**Tabla 2.2** Valores en estado estable del reactor con respuesta inversa [17].

Variable	Valor	Variable	Valor
$k_1$	$\frac{5}{6} \text{ min}^{-1}$	$C_{Ao}$	$2.9175 \text{ mol. l}^{-1}$
$k_2$	$\frac{5}{3} \text{ min}^{-1}$	$C_{Bo}$	$1.10 \text{ mol. l}^{-1}$
$k_3$	$\frac{1}{6} \text{ l. mol. min}^{-1}$	$u_o(t)$	60 %
$C_{Ai}$	$10 \text{ mol. l}^{-1}$	$V$	700 l

Donde:

- $C_{Ao}$  : Concentración del componente A en el punto de operación.
- $C_{Bo}$  : Concentración del componente B en el punto de operación.
- $u_o(t)$  : Porcentaje de apertura de la válvula en el punto operación.

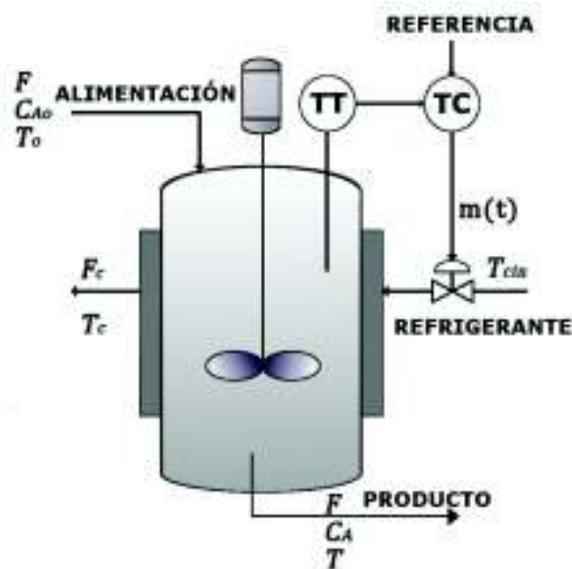
Con los valores de la Tabla 2.2, la respuesta del proceso en lazo abierto ante un cambio en la apertura de la válvula del 10% será el que se observa en la Figura 2.5, en la cual se puede ver claramente la respuesta inversa que presenta el sistema.



**Figura 2. 5** Respuesta dinámica del reactor con respuesta inversa.

### Reactor con varios puntos de operación

Como se vio anteriormente, un estado estacionario se define como una condición en la que todos los balances se satisfacen cuando los términos de acumulación son cero. Para las ecuaciones lineales, esta situación (si existe) ocurriría cuando se tiene un conjunto de condiciones operativas. Sin embargo, las ecuaciones que describen la mayoría de los procesos químicos son no lineales, y son posibles soluciones múltiples [16].



**Figura 2.6** Reactor con varios puntos de operación [16].

Tomando en cuenta las consideraciones previamente establecidas, se tiene un modelo del sistema de la Figura 2.6, dado por las siguientes ecuaciones:

$$V \frac{dC_A}{dt} = F(C_{A0} - C_A) - V k_0 e^{\frac{-E}{RT}} C_A$$

**Ecuación 2.17** Balance de masa del reactante A del reactor con varios puntos de operación.

$$V\rho C_P \frac{dT}{dt} = \rho C_P F(T_0 - T) - \frac{aF_c^{b+1}}{F_c + \frac{aF_c^b}{2\rho C_{Pc}}}(T - T_{cin}) + (-\Delta H_{r \times n})Vk_0 e^{\frac{-E}{RT}} C_A$$

**Ecuación 2.18** Balance de energía del contenido del reactor con varios puntos de operación.

$$\frac{dT_O(t)}{dt} = \frac{1}{\tau_T} \left( \frac{T(t) - 300}{200} - T_O(t) \right)$$

**Ecuación 2.19** Transmisor de temperatura del reactor con varios puntos de operación.

$$F_c(t) = F_{c \max} \alpha^{-m(t)}$$

**Ecuación 2.20** Válvula de control equiporcentual (air to close) del reactor con varios puntos de operación.

Donde:

- $C_A$  = Concentración del reactivo dentro del reactor [kgmol/m<sup>3</sup>].
- $C_{A0}$  = Concentración del reactivo en la alimentación [kgmol/m<sup>3</sup>].
- $T$  = Temperatura dentro del reactor [°K].
- $T_0$  = Temperatura inicial [°K].
- $T_{cin}$  = Temperatura de entrada del refrigerante [°K].
- $T_O(t)$  = Señal del transmisor en la escala de 0 a 1 en por unidad [pu].
- $F$  = Flujo del proceso [m<sup>3</sup>/min].
- $V$  = Volumen del Reactor [m<sup>3</sup>].
- $a$  = Conductancia térmica [cal/m<sup>3</sup>-K].
- $-\Delta H_R$  = Entalpía de la reacción, se asume constante [cal/kgmol].
- $\rho$  = Densidad del contenido del reactor [g/m<sup>3</sup>].
- $C_p$  = Capacidad calorífica de los reactantes y productos [cal/g°C].
- $\rho_c$  = Densidad del refrigerante [g/m<sup>3</sup>].
- $C_{Pc}$  = Calor específico del refrigerante, [cal/gK].
- $(F_c)_s$  = Flujo del refrigerante [m<sup>3</sup>/min].
- $\tau_T$  = Constante de tiempo del sensor de temperatura [min].
- $F_{c \max}$  = Flujo máximo a través de la válvula de control [m<sup>3</sup>/min].
- $\alpha$  = Rangeabilidad de la válvula.
- $k_0$  = Factor de frecuencia de Arrhenius [min<sup>-1</sup>].
- $E$  = Energía de activación de la reacción [J/kgmol].
- $R$  = Constante universal de los gases [J/kgmol-K].

- $m(t)$  = Posición de la válvula en la escala de 0 a 1 en por unidad [pu].

Como se puede notar en la Ecuación 2.18, el balance de energía de la chaqueta está incluido dentro del balance de energía del contenido del reactor, teniendo así el balance de energía total en estado estacionario, el cual se puede separar en dos términos,  $Q_T$  para la transferencia de energía y  $Q_R$  para la energía liberada debido a la reacción, las cuales suman cero en estado estacionario.

$$0 = Q_T + Q_R$$

**Ecuación 2.21** Balance de energía total en estado estacionario del reactor con varios puntos de operación.

Donde:

$$Q_T = \rho C_p F (T_0 - T) - \frac{a F_c^{b+1}}{F_c + \frac{a F_c^b}{2 \rho C_{pc}}} (T - T_{cin})$$

**Ecuación 2.22** Transferencia de energía del reactor con varios puntos de operación.

$$Q_R = (-\Delta H_{r \times n}) V k_0 e^{\frac{-E}{RT}} C_A$$

**Ecuación 2.23** Energía liberada debido a la reacción del reactor con varios puntos de operación.

**Tabla 2.3** Parámetros generales del reactor con varios puntos de operación [16].

Variable	Valor	Variable	Valor
$F$	$1 \text{ m}^3/\text{min}$	$E/R$	$8330.1 \text{ K}^{-1}$
$V$	$1 \text{ m}^3$	$-\Delta H_{r \times n}$	$130 \times 10^6 \text{ cal}/(\text{kgmol})$
$C_{A0}$	$2 \text{ kgmol}/\text{m}^3$	$(F_c)_s$	$15 \text{ m}^3/\text{min}$
$C_p$	$1 \text{ cal}/(\text{g}^\circ\text{C})$	$C_{pc}$	$1 \text{ cal}/(\text{gK})$
$\rho$	$10^6 \text{ g}/\text{m}^3$	$\rho_c$	$10^6 \text{ g}/\text{m}^3$
$k_0$	$1 \times 10^{10} \text{ min}^{-1}$	$b$	0.5
$F_{c \text{ max}}$	$30 \text{ m}^3/\text{min}$	$m$	0.177 pu
$\alpha$	50	$\tau_T$	0.33 min

La solución en estado estacionario se logra cuando los dos términos,  $Q_T$  y  $Q_R$ , son iguales. Sin embargo, puede existir más de una solución para este sistema (en donde las curvas de  $Q_T$  y  $Q_R$  se intersecan), teniendo así ciertos valores de temperatura para sus respectivos valores de concentración, que se darán a partir de la solución de la Ecuación 2.17.

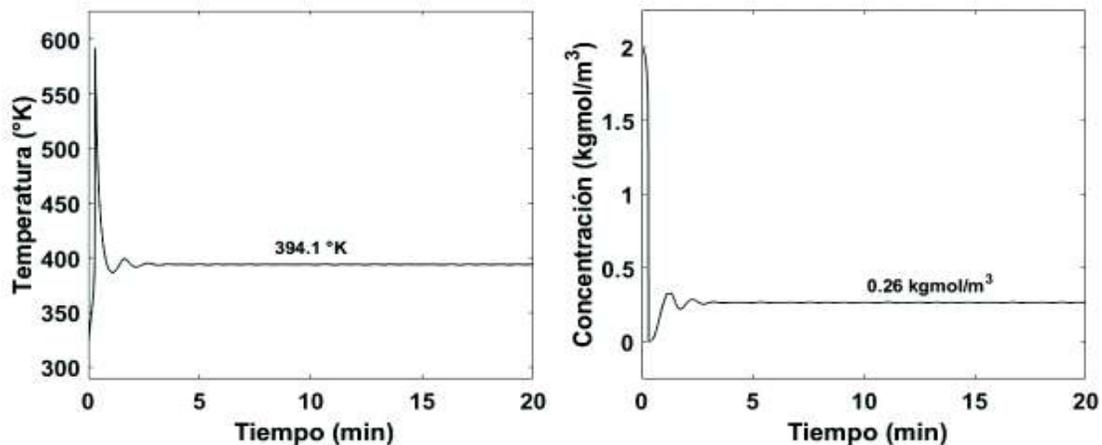
Teniendo así tres casos para este reactor, los cuales poseen valores comunes de sus parámetros dados por la Tabla 2.3, difiriendo sólo en los valores de la temperatura de alimentación y en el sistema de refrigeración, cuyos valores están dados en la Tabla 2.4.

En la Tabla 2.4, se presentan los valores de las variables de salida en estado estacionario,  $C_{As}$  y  $T_S$ , el análisis de estabilidad linealizado, en forma de los polos del sistema (sin control) en cada estado estacionario.

**Tabla 2.4** Datos específicos para los tres casos del reactor con varios puntos de operación [16].

Variables	Caso I	Caso II			Caso III
$T_0(^{\circ}K)$	323	343			323
$T_{cin}(^{\circ}K)$	365	310			340
$a \left( \frac{\text{cal}}{\text{min}^{\circ}K} \right) \left( \frac{\text{m}^3}{\text{min}} \right)$	$1.678 \times 10^6$	$0.516 \times 10^6$			$1.291 \times 10^6$
$C_A \left( \frac{\text{kgmol}}{\text{m}^3} \right)$	0.26	1.79	1.37	0.16	1.06
$T(^{\circ}K)$	393.9	330.9	350	404.7	360
Polos ( $\text{min}^{-1}$ )	$-0.89 \pm 5.92j$	$-0.96 \pm 0.47j$	$1.94, -0.71$	$-1.6 \pm 4.6j$	$0.34 \pm 1.41j$

Para el primer caso se tiene un solo estado estacionario, el cual es estable, dado que las partes reales de los polos son negativas, además se puede ver que el comportamiento de la respuesta es sub-amortiguado dado que los polos son complejos, Figura 2.7.

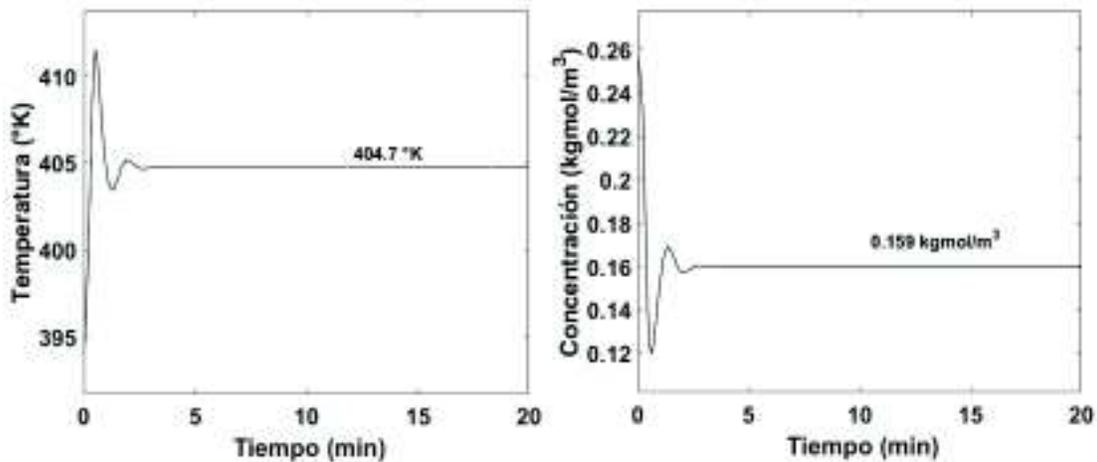


**Figura 2.7** Respuesta dinámica del caso I [16].

En el segundo caso, el cual se va a estudiar en este trabajo de titulación, tiene múltiples estados estacionarios, como se muestra en la Tabla 2.4, donde los términos (negativos) de transferencia de calor ( $Q_T$ ) y energía liberada a la reacción ( $Q_R$ ) son iguales a tres temperaturas. Por lo tanto, este reactor químico puede operar en tres conjuntos distintos de concentración y temperatura para los mismos valores de todas las variables y parámetros de entrada.

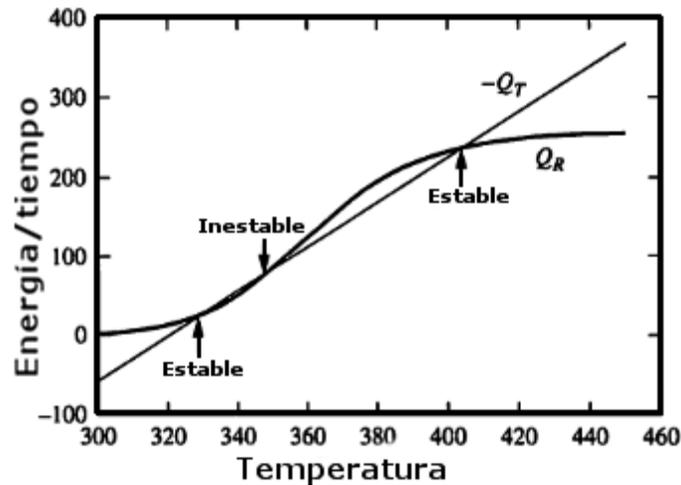
Los resultados en la Tabla 2.4, los cuales son tomados de [16], indican que dos estados son estables, mientras que el estado estacionario con la temperatura intermedia es (localmente) inestable, porque tiene un polo que es real y positivo.

El estado final alcanzado depende de las condiciones iniciales del reactor. Si se toman como condiciones iniciales 393.9 K y 0.26 kmole/m<sup>3</sup> (valores del caso uno) para el segundo caso, su estado no se aproxima al estado estacionario inestable, sino que se aproxima al estado estacionario a la temperatura más alta, como se muestra en la Figura 2.8.



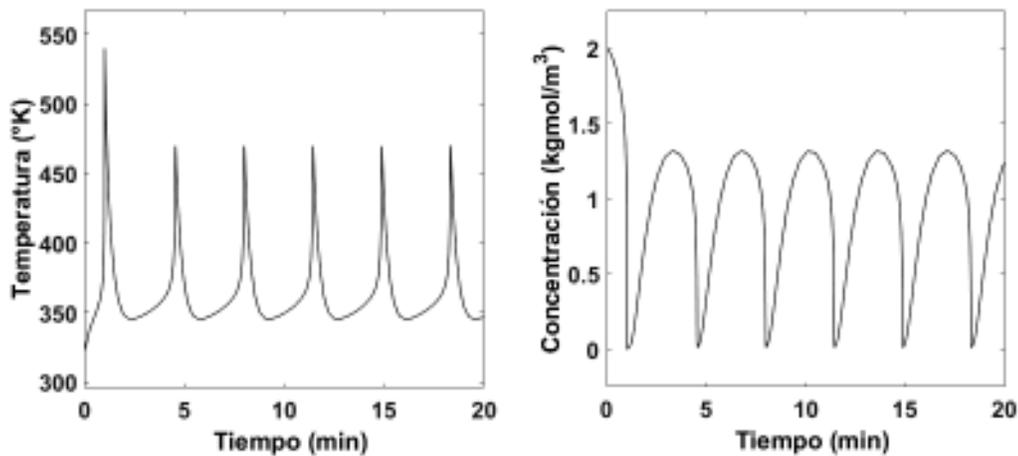
**Figura 2.8** Respuesta dinámica del caso II [16].

La inestabilidad de la temperatura intermedia en el segundo caso se puede entender a partir de argumentos de estado estacionario. Puede determinarse a partir de la Figura 2.9, que a medida que la temperatura aumenta ligeramente desde el estado estacionario intermedio, la magnitud de  $Q_R$  aumenta más rápidamente que la magnitud de  $Q_T$ ; es decir,  $\frac{d(-Q_T)}{dT} < \frac{d(Q_R)}{dT}$ . Por lo tanto, cualquier desviación de la temperatura intermedia creará una tendencia a aumentar o disminuir aún más dicha temperatura, haciendo que este punto sea inestable.



**Figura 2.9** Análisis de estado estacionario del caso II [16].

Algunos sistemas fuertemente no lineales pueden presentar un comportamiento dinámico bastante sorprendente cuando se encuentran por primera vez: oscilaciones continuas en las variables de salida, aunque las variables de entrada son absolutamente constantes.



**Figura 2.10** Respuesta dinámica del caso III [16].

En el caso III de este sistema se presenta un comportamiento dinámico oscilatorio continuo en las variables de salida, a pesar de que las variables de entrada son constantes, esto se debe en que este caso tiene una característica fuertemente no lineal y su sistema tiene un único estado estacionario que es inestable, como lo demuestra la parte real positiva de sus polos. En la Figura 2.10 se puede observar claramente que la concentración y la temperatura nunca alcanzan sus valores de estado estacionario, porque tienen un comportamiento periódico que continúa indefinidamente sin amortiguación.

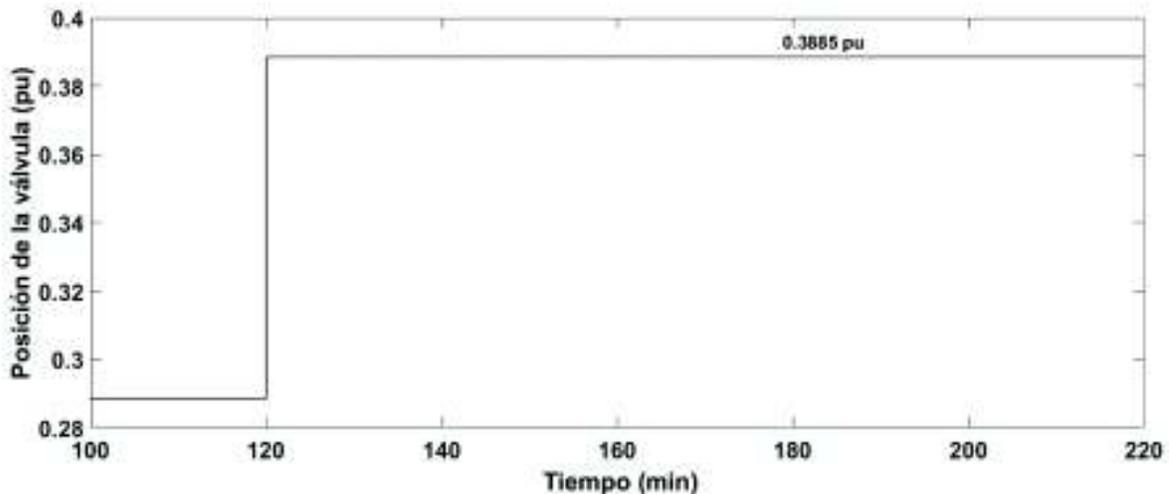
## 2.2. Modelamiento empírico de los reactores.

Para el diseño de los controladores PID y SMC se realiza una aproximación a un sistema de primer orden con retardo en base a las Ecuaciones 1.2, 1.3, 1.4 y 1.5 del capítulo anterior, llamado también método empírico, motivo por el cual se aplica un cambio tanto positivo como negativo en la entrada del sistema (válvula de control), para tomar los tiempos en el que la respuesta del sistema alcanza el 28.3 y el 63.2 por ciento del valor en estado estable de la salida del sistema, es decir, la salida del transmisor de temperatura para el Reactor 1 y el Reactor 3 y del transmisor de concentración para el Reactor 2 y así posteriormente calcular los valores promedios de  $\tau$ ,  $t_0$  y  $K$ , y así, finalmente obtener el modelo lineal del sistema FOPDT.

### Reactor con dinámica lenta

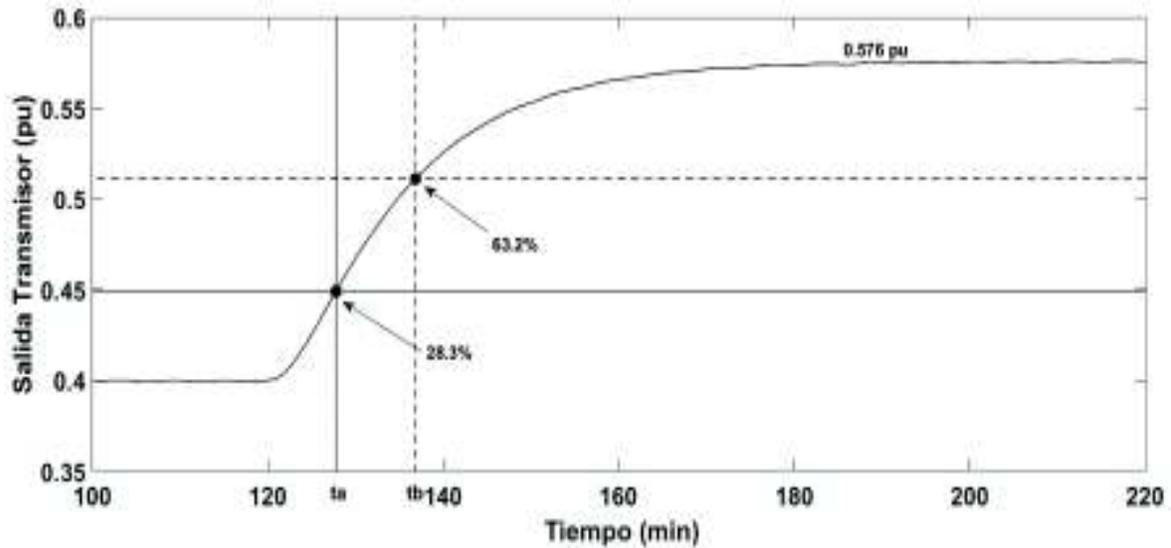
En este reactor se toma como salida del sistema la señal del transmisor de temperatura del tanque, cuyo comportamiento se describe por medio de la Ecuación 2.10, ante un cambio tanto positivo como negativo en la posición de la válvula (Ecuación 2.11), o salida del futuro controlador de 0.1 al minuto 120, para realizar la aproximación a un sistema de primer orden con retardo.

#### Cambio positivo



**Figura 2.11** Cambio positivo de la válvula.

Como se puede observar en la Figura 2.11, el cambio en la válvula se dio a los 120 minutos teniendo valores de  $t_a$  y  $t_b$  de 127.741 y 136.806 minutos, respectivamente (Figura 2.12), los cuales son los tiempos a los que la respuesta del sistema alcanza un valor de 28.3% y 63.2% de su valor en estado estable.



**Figura 2.12** Respuesta en lazo abierto ante cambio positivo de la válvula.

Por esta razón se toma como referencia los 120 minutos, para poder aplicar las Ecuaciones 1.3, 1.4 y 1.5., teniendo así los siguientes valores para  $t_{1+}$  y  $t_{2+}$ :

$$t_{1+} = t_a - 120 = 127.741 - 120 = 7.741 \text{ (min)}$$

**Ecuación 2.24** Valor de  $t_{1+}$ .

$$t_{2+} = t_b - 120 = 136.806 - 120 = 16.806 \text{ (min)}$$

**Ecuación 2.25** Valor de  $t_{2+}$ .

Con estos valores de  $t_{1+}$  y  $t_{2+}$  se obtiene los valores de  $\tau_+$ ,  $t_{0+}$  y  $K_+$  para el cambio positivo en la entrada utilizando las Ecuaciones 1.3, 1.4 y 1.5.

$$\tau_+ = 1.5(t_{2+} - t_{1+}) = 1.5(16.806 - 7.741) = 13.598 \text{ (min)}$$

**Ecuación 2.26** Valor de  $\tau_+$ .

$$t_{0+} = |\tau_+ - t_{2+}| = |13.598 - 16.806| = 3.209 \text{ (min)}$$

**Ecuación 2.27** Valor de  $t_{0+}$ .

$$K_+ = \frac{|\Delta Y_+|}{|\Delta X_+|} = \frac{0.576 - 0.4}{0.1} = 1.76$$

**Ecuación 2.28** Valor de  $K_+$ .

## Cambio negativo

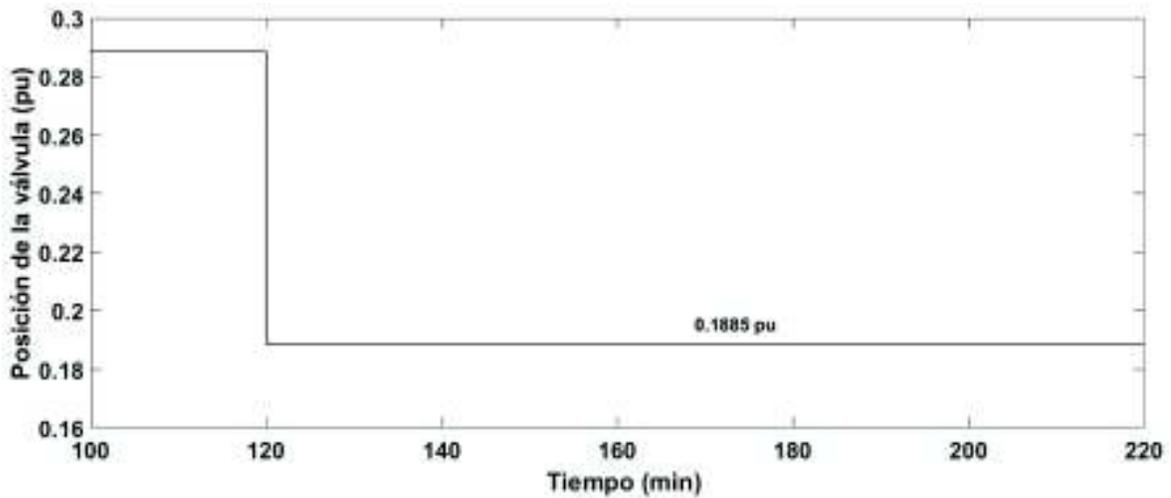


Figura 2.13 Cambio negativo de la válvula.

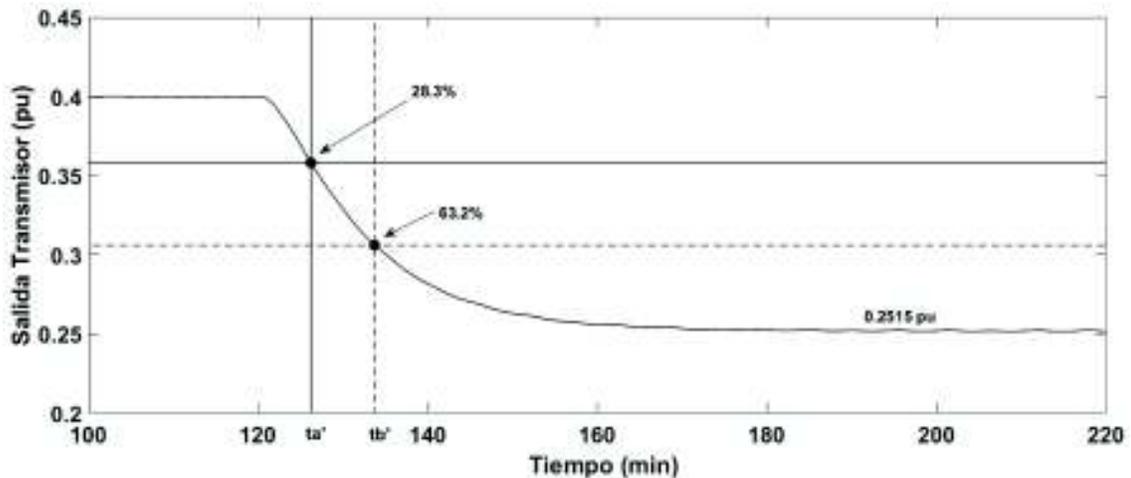


Figura 2.14 Respuesta en lazo abierto ante cambio negativo de la válvula.

Se realiza el mismo procedimiento anterior, pero con una excitación hacia abajo, es decir se reduce en un 0.1 al valor inicial de la válvula (Figura 2.13) para obtener una nueva curva de reacción, tomando en cuenta que en este caso se dará una curva decreciente (Figura 2.14), debido a la naturaleza del sistema, la cual tiene un valor en estado estable de 0.1885 y valores de  $t_a'$  y  $t_b'$  de 126.228 y 133.722, respectivamente, los cuales son los tiempos en el que el sistema alcanza el 28.3 y 63.2 por ciento de su valor en estado estable, de esta manera realizando un procedimiento similar al anterior se obtienen los siguientes resultados:

$$t_{1-} = t_a' - 120 = 126.228 - 120 = 6.228 \text{ (min)}$$

**Ecuación 2.29** Valor de  $t_{1-}$ .

$$t_{2-} = t_b' - 120 = 133.722 - 120 = 13.722 \text{ (min)}$$

**Ecuación 2.30** Valor de  $t_{2-}$ .

Con estos valores de  $t_{1-}$  y  $t_{2-}$  se obtiene los valores de  $\tau_-$ ,  $t_{0-}$  y  $K_-$  para el cambio negativo en la entrada utilizando las Ecuaciones 1.3, 1.4 y 1.5.

$$\tau_- = 1.5(t_{2-} - t_{1-}) = 1.5(13.722 - 6.228) = 11.241 \text{ (min)}$$

**Ecuación 2.31** Valor de  $\tau_-$ .

$$t_{0-} = |\tau_- - t_{2-}| = |11.241 - 13.722| = 2.481 \text{ (min)}$$

**Ecuación 2.32** Valor de  $t_{0-}$ .

$$K_- = \frac{|\Delta Y_-|}{|\Delta X_-|} = \frac{0.2515 - 0.4}{-0.1} = 1.485$$

**Ecuación 2.33** Valor de  $K_-$ .

A partir de los valores obtenidos en los dos casos anteriores se procede a calcular los promedios de  $\tau$ ,  $t_0$  y  $K$ .

$$\tau = \frac{\tau_+ + \tau_-}{2} = \frac{13.598 + 11.241}{2} = 12.419 \text{ (min)}$$

**Ecuación 2.34** Valor de  $\tau$ .

$$t_0 = \frac{t_{0+} + t_{0-}}{2} = \frac{3.209 + 2.481}{2} = 2.845 \text{ (min)}$$

**Ecuación 2.35** Valor de  $t_0$ .

$$K = \frac{K_+ + K_-}{2} = \frac{1.76 + 1.485}{2} = 1.623$$

**Ecuación 2.36** Valor de  $K$ .

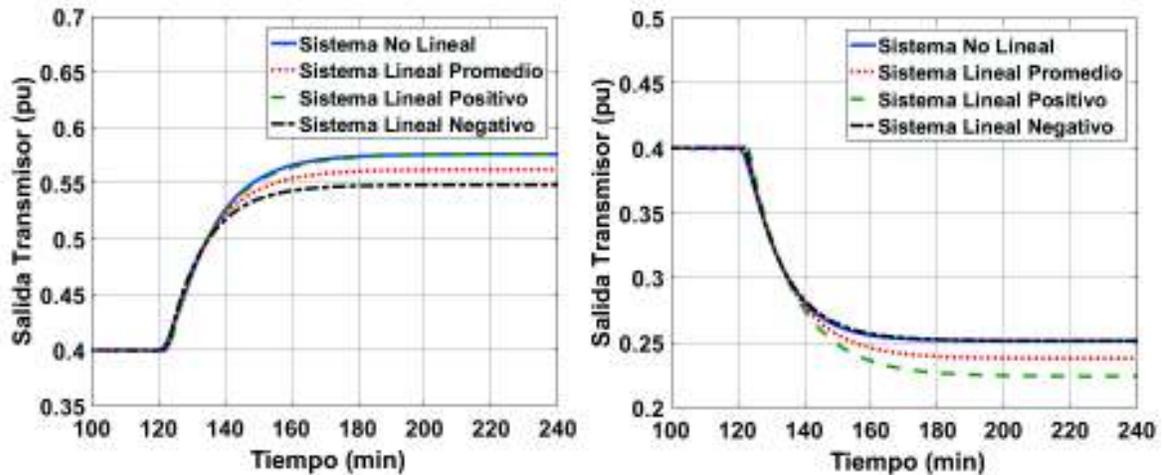
Finalmente, se obtiene el modelo lineal en base de la Ecuación 1.2.

$$G(s) = \frac{1.623 e^{-2.845 s}}{12.419 s + 1}$$

**Ecuación 2.37** FOPDT promedio del reactor con dinámica lenta.

En la Figura 2.15 se observa una comparación entre los sistemas lineales y el no lineal, a partir de un cambio tanto positivo como negativo de 0.1 en la posición de la válvula, estos sistemas lineales se modelan con los valores obtenidos anteriormente, donde el Sistema Lineal Positivo se refiere al sistema modelado con los valores de  $K$ ,  $\tau$  y  $t_0$  ante un cambio positivo en la entrada del sistema, el Sistema Lineal Negativo con dichos valores ante un

cambio negativo en la entrada del sistema y el Sistema Lineal Promedio es el obtenido a partir de los valores promedios de  $K$ ,  $\tau$  y  $t_0$  representado por medio de la Ecuación 2.37.



**Figura 2.15** Comparación entre los sistemas lineales y el modelo no lineal.

Como se observa en la Figura 2.15, el Sistema Lineal Promedio es el que representa de mejor manera al Sistema no Lineal ante cambios positivos y negativos en la entrada del sistema, dado que los otros modelos responden adecuadamente solo cuando el cambio es exclusivamente negativo o positivo, dependiendo de la forma en que se obtuvo sus parámetros de modelación. El Sistema Lineal Promedio tiene un error del 2.45% ante un cambio positivo y un error del 5.45% ante un cambio negativo con respecto al valor final alcanzado por el transmisor del Sistema No Lineal.

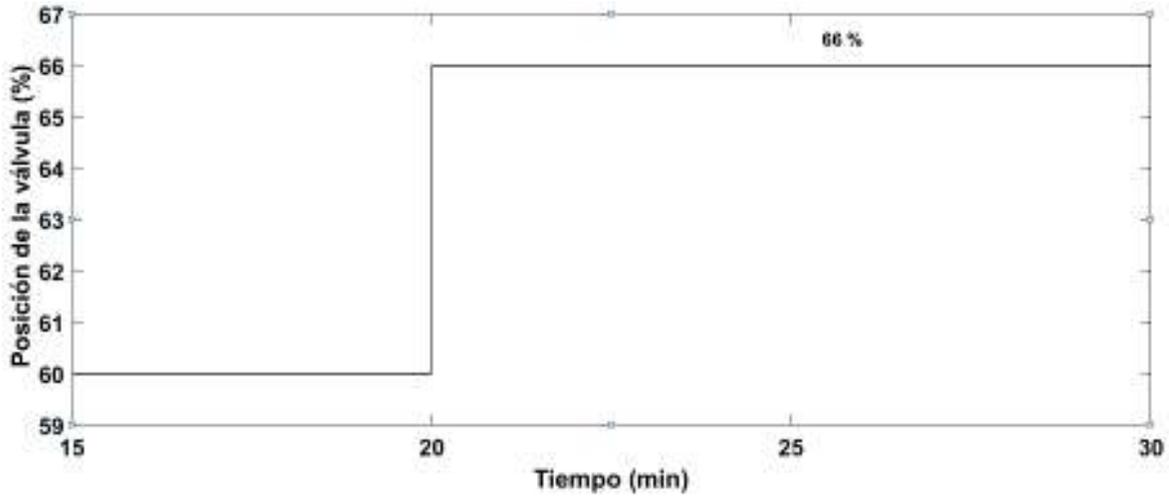
### Reactor con respuesta inversa

En este reactor, igual que en el reactor anterior, se realiza un cambio del 10% tanto positivo como negativo en la posición de la válvula descrita por la Ecuación 2.16 y se analiza la curva dada por la salida del transmisor de concentración descrito por la Ecuación 2.15 para tener la aproximación del sistema no lineal a un sistema de primer orden con retardo FOPDT.

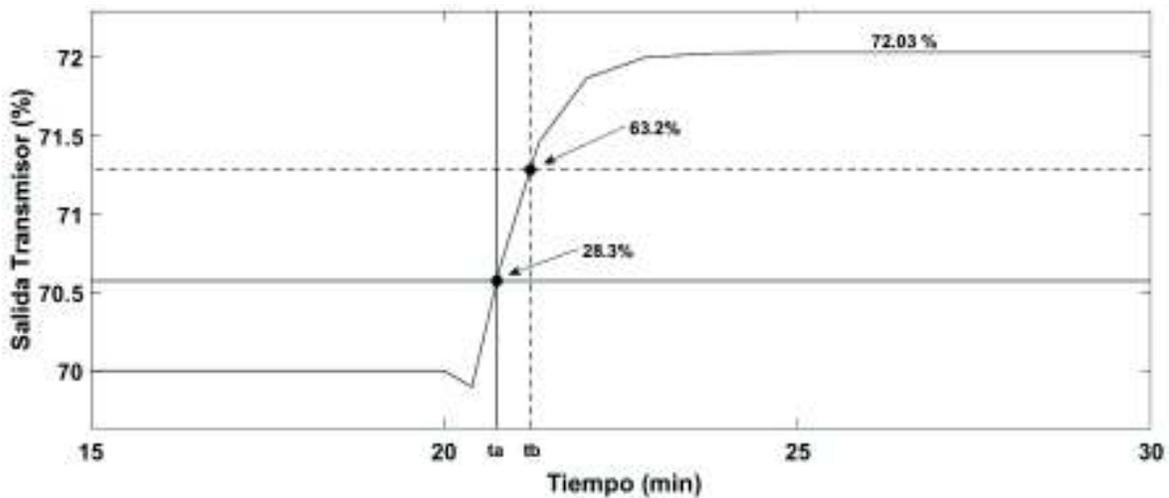
#### Cambio positivo

Como se observa en la Figura 2.16, se realiza un cambio positivo en la posición de la válvula al minuto 20, lo cual nos da una curva de reacción del transmisor de concentración como se muestra en la Figura 2.17, la cual tiene un valor en estado estable de 72.03% por medio de la cual se obtiene valores de  $t_a$ (28.3%) y  $t_b$ (63.2%) de 20.746 y

21.220 minutos respectivamente, con los cuales se precede de manera similar que en los reactores anteriores a calcular los valores de  $t_1$  y  $t_2$  a partir de los 20 minutos.



**Figura 2.16** Cambio positivo de la válvula.



**Figura 2.17** Respuesta a lazo abierto ante cambio positivo de la válvula.

$$t_{1+} = t_a - 20 = 20.746 - 20 = 0.747 \text{ (min)}$$

**Ecuación 2.38** Valor de  $t_{1+}$ .

$$t_{2+} = t_b - 20 = 21.220 - 20 = 1.220 \text{ (min)}$$

**Ecuación 2.39** Valor de  $t_{2+}$ .

Con estos valores de  $t_{1+}$  y  $t_{2+}$  se obtiene los valores de  $\tau_+$ ,  $t_{0+}$  y  $K_+$  para el cambio positivo en la posición de la válvula, utilizando las Ecuaciones 1.3, 1.4 y 1.5.

$$\tau_+ = 1.5(t_{2+} - t_{1+}) = 1.5(1.220 - 0.747) = 0.709 \text{ (min)}$$

**Ecuación 2.40** Valor de  $\tau_+$ .

$$t_{0+} = |\tau_+ - t_{2+}| = |0.709 - 1.220| = 0.511 \text{ (min)}$$

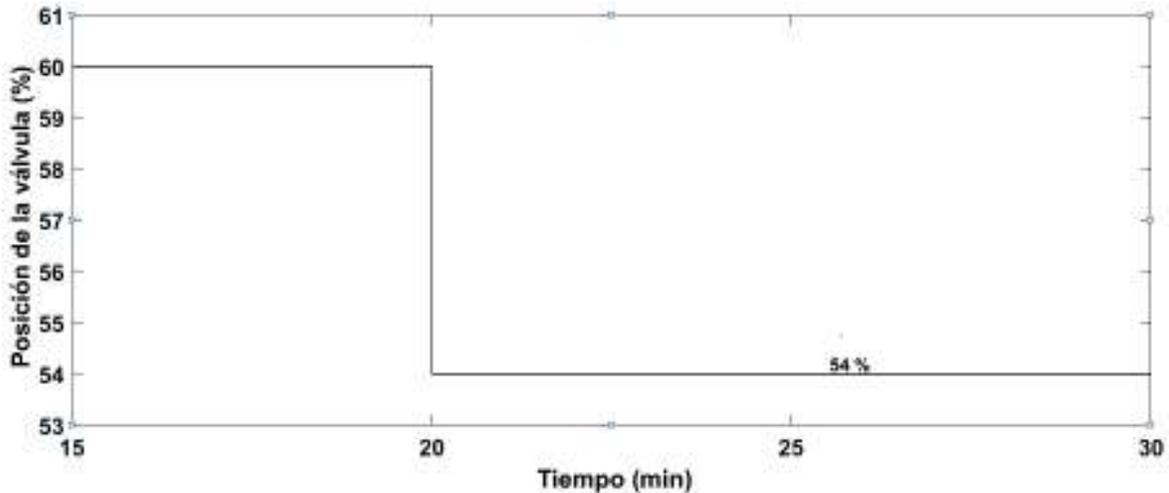
**Ecuación 2.41** Valor de  $t_{0+}$ .

$$K_+ = \frac{|\Delta Y_+|}{|\Delta X_+|} = \frac{72.03 - 70}{66 - 60} = 0.338$$

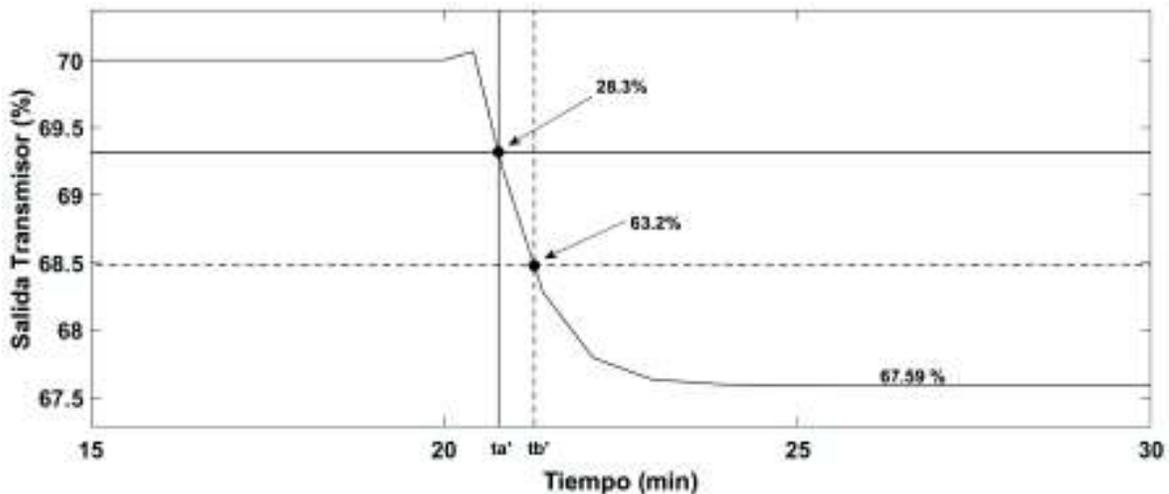
**Ecuación 2.42** Valor de  $K_+$ .

### Cambio negativo

En este caso, se analiza al reactor a un cambio en la posición de la válvula de -10%, dando así una apertura de 54% (Figura 2.18), teniendo así un valor en estado estable del transmisor de concentración de 67.59 % (Figura 2.19), con valores de  $t'_a$  (28.3%) y  $t'_b$  (63.2%) de 20.767 y 21.275 minutos, respectivamente, y de forma similar que en el caso anterior se calcula los valores de  $t_{1-}$  y  $t_{2-}$  a partir de los 20 minutos.



**Figura 2.18** Cambio negativo de la válvula.



**Figura 2.19** Respuesta en lazo abierto ante cambio negativo de la válvula.

$$t_{1-} = t_a' - 20 = 20.767 - 20 = 0.767 \text{ (min)}$$

**Ecuación 2.43** Valor de  $t_{1-}$ .

$$t_{2-} = t_b' - 20 = 21.275 - 20 = 1.275 \text{ (min)}$$

**Ecuación 2.44** Valor de  $t_{2-}$ .

Con estos valores de  $t_{1-}$  y  $t_{2-}$  se obtiene los valores de  $\tau_-$ ,  $t_{0-}$  y  $K_-$  para el cambio negativo en la entrada utilizando las Ecuaciones 1.3, 1.4 y 1.5.

$$\tau_- = 1.5(t_{2-} - t_{1-}) = 1.5(1.275 - 0.767) = 0.762 \text{ (min)}$$

**Ecuación 2.45** Valor de  $\tau_-$ .

$$t_{0-} = |\tau_- - t_{2-}| = |0.762 - 1.275| = 0.513 \text{ (min)}$$

**Ecuación 2.46** Valor de  $t_{0-}$ .

$$K_- = \frac{|\Delta Y_-|}{|\Delta X_-|} = \frac{67.59 - 70}{54 - 60} = 0.402$$

**Ecuación 2.47** Valor de  $K_-$ .

A partir de los valores obtenidos en los dos casos anteriores, cambio positivo y negativo en la entrada, se procede a calcular los promedios de  $\tau$ ,  $t_0$  y  $K$ .

$$\tau = \frac{\tau_+ + \tau_-}{2} = \frac{0.709 + 0.762}{2} = 0.736 \text{ (min)}$$

**Ecuación 2.48** Valor de  $\tau$ .

$$t_0 = \frac{t_{0+} + t_{0-}}{2} = \frac{0.511 + 0.513}{2} = 0.512 \text{ (min)}$$

**Ecuación 2.49** Valor de  $t_0$ .

$$K = \frac{K_+ + K_-}{2} = \frac{0.338 + 0.402}{2} = 0.37$$

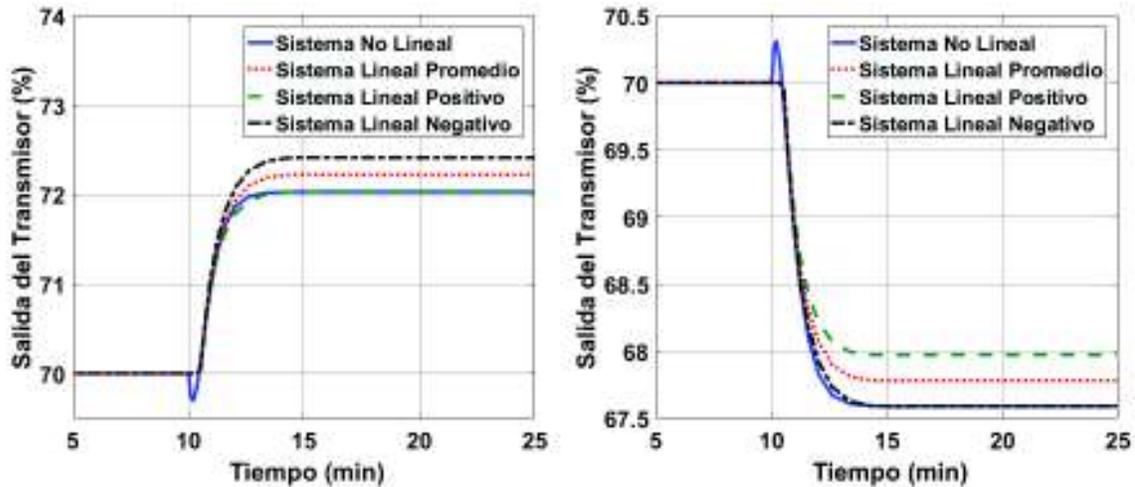
**Ecuación 2.50** Valor de  $K$ .

Finalmente se obtiene el modelo lineal en base de la Ecuación 1.2.

$$G(s) = \frac{0.37 e^{-0.512 s}}{0.736 s + 1}$$

**Ecuación 2.51** FOPDT promedio del reactor con respuesta inversa.

En la Figura 2.20 se observa una comparación entre los sistemas lineales y el no lineal, igual que se lo hizo en el reactor anterior, pero a partir de un cambio tanto positivo como negativo del 10% en la posición de la válvula.



**Figura 2.20** Comparación entre los sistemas lineales y el modelo no lineal.

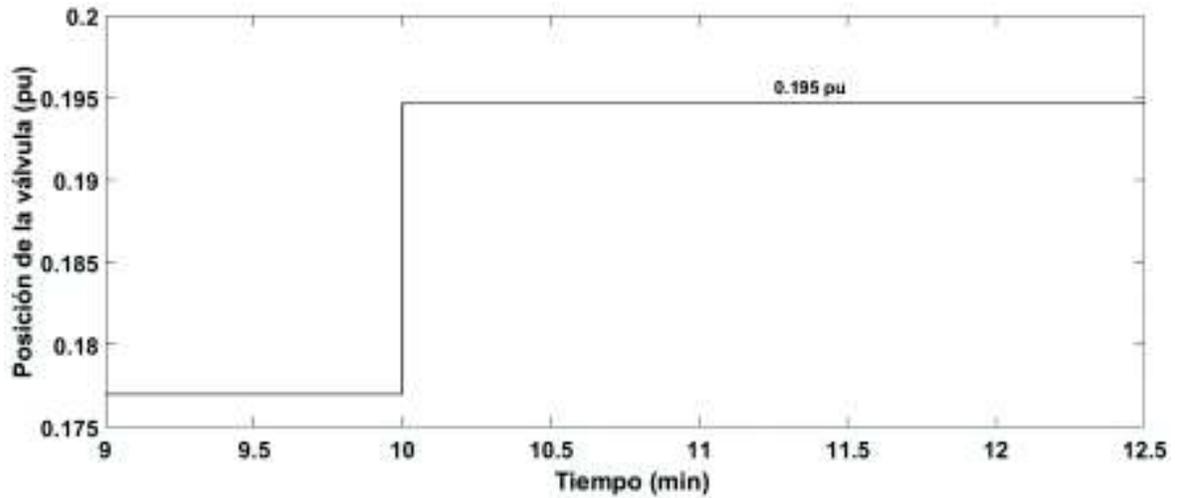
Igual que en el reactor anterior, el Sistema Lineal Promedio es el que mejor responde a la vez ante cambios positivos y negativos en la entrada del sistema, teniendo así un error del 0.28% ante un cambio negativo y un error del 0.26% ante un cambio positivo con respecto a la salida del transmisor del Sistema No Lineal.

### Reactor con varios puntos de operación

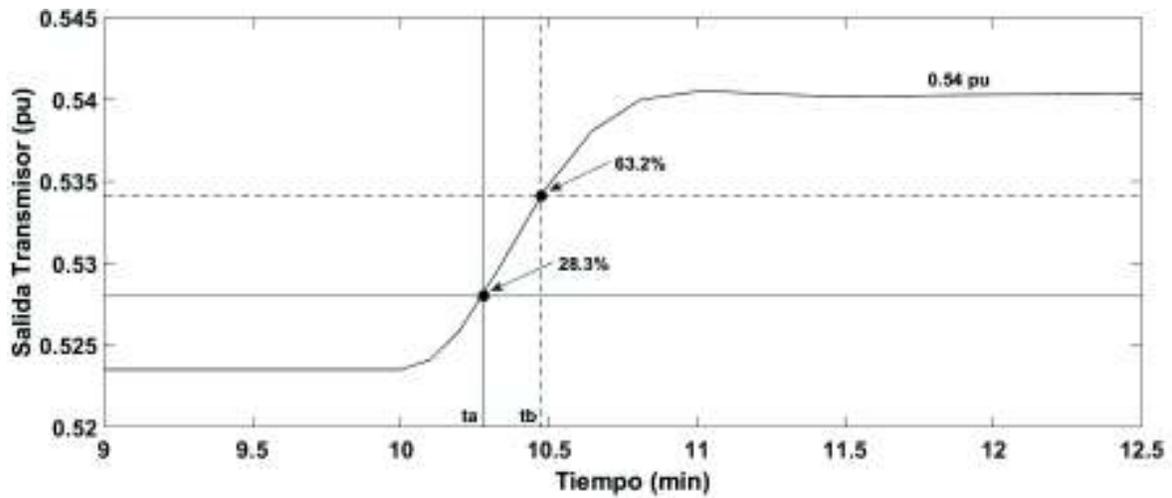
Para el desarrollo del FOPDT de este sistema que posee varios puntos de operación, se toma en cuenta un solo punto de operación estable el cual es a los 404.7°C, motivo por el cual se realiza el mismo procedimiento que en reactor anterior, pero alrededor de esta zona de trabajo, aplicando un cambio del 10% tanto positivo como negativo en la entrada del sistema, posición de la válvula descrita por la Ecuación 2.20, debido a que no se puede hacer una gran variación de este parámetro dado la sensibilidad del proceso en lazo abierto, el cual ingresa en una zona de inestabilidad por cambios bruscos en la temperatura, y se toma como respuesta del sistema la salida del transmisor de temperatura descrito por la Ecuación 2.19.

#### Cambio positivo

En este reactor, como se ve en la Figura 2.21, el cambio en la válvula se dio a los 10 minutos, teniendo como resultados valores de  $t_a$  (28.3%) y  $t_b$  (63.2%) de 10.280 y 10.475 minutos, respectivamente (Figura 2.22), por este motivo el cálculo de los parámetros hay que hacerlos tomando en cuenta este punto como referencia.



**Figura 2.21** Cambio positivo de la válvula.



**Figura 2.22** Respuesta en lazo abierto ante cambio negativo de la válvula.

$$t_{1+} = t_a - 10 = 10.280 - 10 = 0.280 \text{ (min)}$$

**Ecuación 2.52** Valor de  $t_{1+}$ .

$$t_{2+} = t_b - 10 = 10.475 - 10 = 0.475 \text{ (min)}$$

**Ecuación 2.53** Valor de  $t_{2+}$ .

$$\tau_+ = 1.5(t_{2+} - t_{1+}) = 1.5(0.475 - 0.280) = 0.293 \text{ (min)}$$

**Ecuación 2.54** Valor de  $\tau_+$ .

$$t_{0+} = |\tau_+ - t_{2+}| = |0.293 - 0.475| = 0.183 \text{ (min)}$$

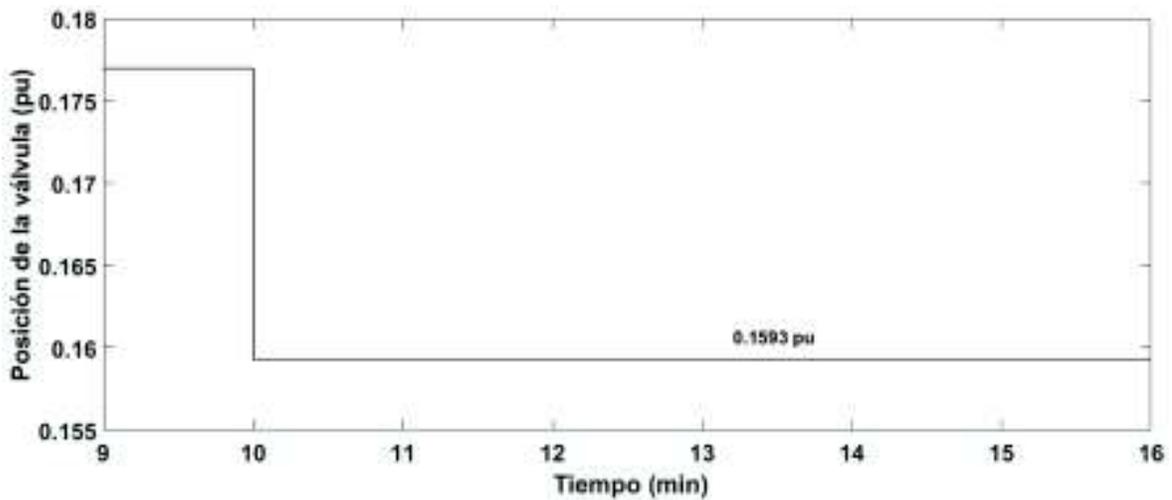
**Ecuación 2.55** Valor de  $t_{0+}$ .

$$K_+ = \frac{|\Delta Y_+|}{|\Delta X_+|} = \frac{0.540 - 0.524}{0.195 - 0.177} = 0.889$$

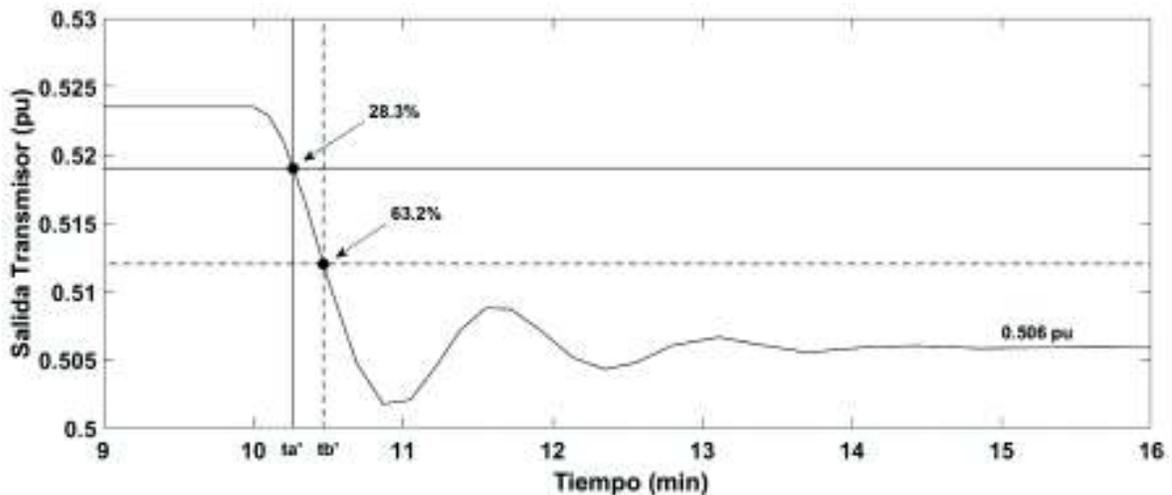
**Ecuación 2.56** Valor de  $K_+$ .

### Cambio negativo

Igual que en el primer reactor, al realizar un cambio negativo en la posición de la válvula (Figura 2.23) se obtiene una curva decreciente de respuesta del transmisor de temperatura la cual alcanza un valor en estado estable de 0.506 como se puede observar en la Figura 2.24 y se obtiene valores de  $t_a'$ (28.3%) y  $t_b'$ (63.2%) de 10.267 y 10.469 minutos, respectivamente.



**Figura 2.23** Cambio negativo de la válvula.



**Figura 2.24** Respuesta en lazo abierto ante cambio negativo de la válvula.

$$t_{1-} = t_a' - 10 = 10.267 - 10 = 0.267 \text{ (min)}$$

**Ecuación 2.57** Valor de  $t_{1-}$ .

$$t_{2-} = t_b' - 10 = 10.469 - 10 = 0.469 \text{ (min)}$$

**Ecuación 2.58** Valor de  $t_{2-}$ .

Con estos valores de  $t_{1-}$  y  $t_{2-}$  se obtiene los valores de  $\tau_-$ ,  $t_{0-}$  y  $K_-$  para el cambio negativo en la entrada utilizando las Ecuaciones 1.3, 1.4 y 1.5.

$$\tau_- = 1.5(t_{2-} - t_{1-}) = 1.5(0.469 - 0.267) = 0.303 \text{ (min)}$$

**Ecuación 2.59** Valor de  $\tau_-$ .

$$t_{0-} = |\tau_- - t_{2-}| = |0.303 - 0.469| = 0.166 \text{ (min)}$$

**Ecuación 2.60** Valor de  $t_{0-}$ .

$$K_- = \frac{|\Delta Y_-|}{|\Delta X_-|} = \frac{0.506 - 0.524}{0.159 - 0.177} = 1$$

**Ecuación 2.61** Valor de  $K_-$ .

De igual manera que en el primer reactor, a partir de los valores obtenidos se procede a calcular los promedios de  $\tau$ ,  $t_0$  y  $K$ .

$$\tau = \frac{\tau_+ + \tau_-}{2} = \frac{0.293 + 0.303}{2} = 0.298 \text{ (min)}$$

**Ecuación 2.62** Valor de  $\tau$ .

$$t_0 = \frac{t_{0+} + t_{0-}}{2} = \frac{0.183 + 0.166}{2} = 0.175 \text{ (min)}$$

**Ecuación 2.63** Valor de  $t_0$ .

$$K = \frac{K_+ + K_-}{2} = \frac{0.889 + 1}{2} = 0.945$$

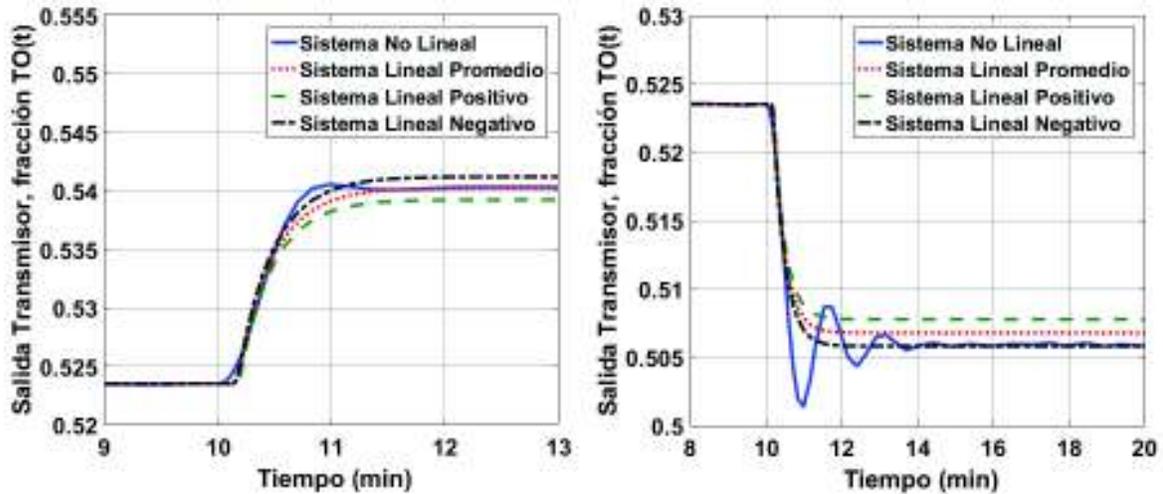
**Ecuación 2.64** Valor de  $K$ .

Finalmente se obtiene el modelo lineal en base de la Ecuación 1.2.

$$G(s) = \frac{0.945 e^{-0.175 s}}{0.298 s + 1}$$

**Ecuación 2.65** FOPDT promedio del reactor con varios puntos de operación.

En la Figura 2.25 se observa una comparación entre los sistemas lineales y el no lineal, igual que se lo hizo en los reactores anteriores, a partir de un cambio tanto positivo como negativo del 10% en la posición de la válvula.



**Figura 2.25** Comparación entre los sistemas lineales y el modelo no lineal.

De igual manera que en los reactores anteriores, el Sistema Lineal Promedio es el que mejor responde a la vez ante cambios positivos y negativos en la entrada del sistema como se ve en la Figura 2.25, teniendo así un error del 0.19% ante un cambio negativo y un error del 0.06% ante un cambio positivo con respecto a la salida del transmisor del Sistema No Lineal.

### 2.3. Representación en variables de estado de los reactores tipo CSTR.

Para poder diseñar el controlador LQR es necesario obtener el modelo de los sistemas representado en variables de estado (Ecuación 1.15 y 1.16), motivo por el cual se realiza la linealización de los sistemas por medio de series de Taylor mediante la Ecuación 1.13 revisada en el capítulo anterior en la Sección 1.3.3, teniendo así las ecuaciones linealizadas del modelo matemático de cada reactor.

#### Reactor con dinámica lenta

Para poder realizar de forma práctica la linealización de las ecuaciones de este reactor, se reemplaza la Ecuación 2.9 del coeficiente de reacción en las Ecuaciones 2.6 y 2.7 de balances de masa y de energía, respectivamente, obteniendo de esta manera las siguientes expresiones del modelo matemático lineal del sistema.

$$\Delta \dot{C}_A = -0.26\Delta C_A - 0.0012\Delta T$$

**Ecuación 2.66** Balance de masa linealizado del reactante A.

$$\Delta \dot{T} = 5.43\Delta C_A - 0.076\Delta T + 0.046\Delta T_c$$

**Ecuación 2.67** Balance de energía linealizado.

$$\Delta\dot{T}_c = 0.15\Delta T - 0.36\Delta T_c - 12.91\Delta F_c$$

**Ecuación 2.68** Balance de energía en la chaqueta linealizado.

$$\Delta\dot{T}_O = 0.15\Delta T - 3.03\Delta T_O$$

**Ecuación 2.69** Transmisor de temperatura linealizado.

$$0 = -1.51\Delta m - \Delta F_c$$

**Ecuación 2.70** Válvula de control equiporcentual (air to close) linealizada.

Puesto que se va a controlar el flujo de refrigerante a través de una válvula, se reemplaza el término  $\Delta F_c$  de la Ecuación 2.70 en la Ecuación 2.68, de esta manera se obtiene una nueva ecuación linealizada, Ecuación 2.71, para el balance energético en la camisa, que nos permite tener la posición de la válvula,  $\Delta m$ , como la entrada de nuestro sistema.

$$\Delta\dot{T}_c = 0.15\Delta T - 0.36\Delta T_c + 19.60\Delta m$$

**Ecuación 2.71** Nuevo balance de energía en la chaqueta linealizado.

Por último, gracias a la obtención de estas expresiones, se representa al sistema en variables de estado de la siguiente manera:

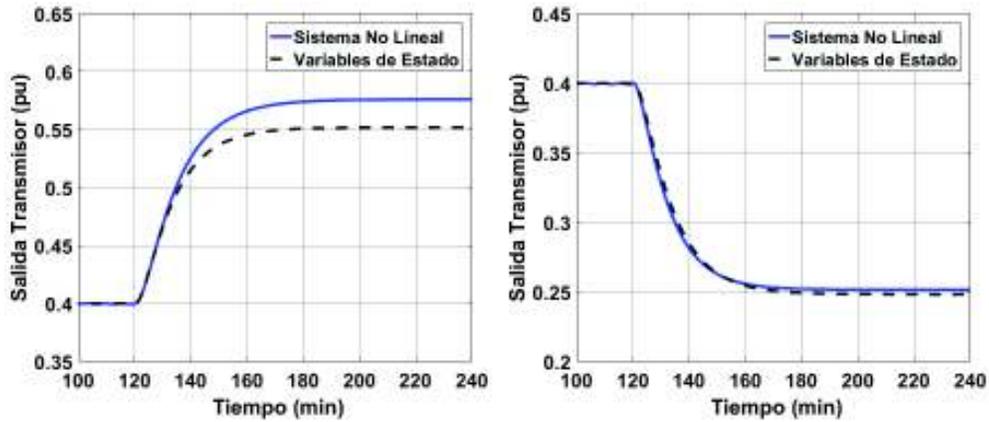
$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \Delta\dot{C}_A \\ \Delta\dot{T} \\ \Delta\dot{T}_c \\ \Delta\dot{T}_O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.26 & -0.0012 & 0 & 0 \\ 5.43 & -0.076 & 0.046 & 0 \\ 0 & 0.15 & -0.36 & 0 \\ 0 & 0.15 & 0 & -3.03 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta C_A \\ \Delta T \\ \Delta T_c \\ \Delta T_O \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 19.60 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta m$$

$$y = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} \Delta C_A \\ \Delta T \\ \Delta T_c \\ \Delta T_O \end{bmatrix}$$

**Ecuación 2.72** Representación del reactor con dinámica lenta en variables de estado.

La Figura 2.26 presenta la comparación entre el sistema no lineal y su representación lineal en variables de estado, ante un cambio de 0.1 tanto positivo como negativo en la apertura de la válvula de control.

El sistema representado en variables de estado tiene un error de 4.2% cuando se aplica un cambio positivo en la entrada de la válvula de control, mientras que tiene un error con valor de 1.31% cuando dicho cambio en la entrada de la válvula es negativo, todo esto se ve reflejado en la Figura 2.26.



**Figura 2.26** Comparación entre la representación en variables de estado y el modelo no lineal del reactor con dinámica lenta.

### Reactor con respuesta inversa

En el modelo matemático de este reactor, no solamente se toma en cuenta el reemplazo del nivel de apertura de la válvula,  $u(t)$ , de la Ecuación 2.16 en la Ecuación 2.13 como entrada del sistema, sino que por simplicidad se realiza el reemplazo del término de Concentración de B,  $C_B(t)$ , de la Ecuación 2.15 dentro de la Ecuación 2.14, para tener como salida del sistema la señal del transmisor de concentración del producto B, por lo tanto las ecuaciones linealizadas del proceso nos quedarían de la siguiente manera.

$$\Delta \dot{C}_A = -2.37 \Delta C_A + 0.064 \Delta u$$

**Ecuación 2.73** Balance de masa linealizado del reactante A.

$$\Delta \dot{y} = 53.03 \Delta C_A - 2.21 \Delta y - 0.634 \Delta u$$

**Ecuación 2.74** Balance de masa linealizado del reactante B.

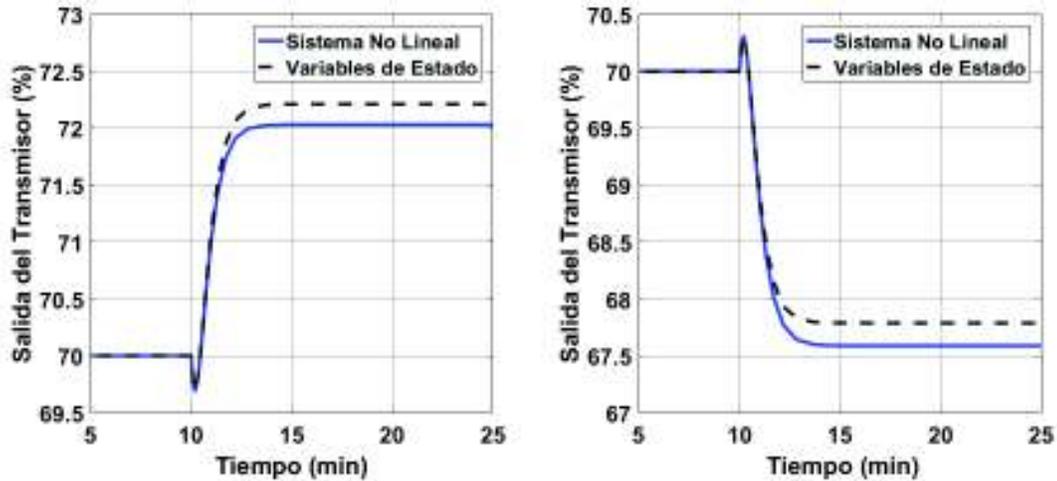
A partir de las Ecuaciones 2.73 y 2.74 se puede representar el tercer reactor en variables de estado.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \Delta \dot{C}_A \\ \Delta \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.37 & 0 \\ 53.03 & -2.21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta C_A \\ \Delta y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.064 \\ -0.634 \end{bmatrix} \Delta u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta C_A \\ \Delta y \end{bmatrix}$$

**Ecuación 2.75** Representación del reactor con respuesta inversa en variables de estado.

Al igual que en el reactor anterior, en la Figura 2.27 se observa la comparación del sistema no lineal con el sistema lineal representado en variables de estado, ante un cambio en la apertura de la válvula del 10%, tanto positivo como negativo.



**Figura 2.27** Comparación entre la representación en variables de estado y el modelo no lineal del reactor con respuesta inversa.

La representación en variables de estado de este reactor nos da un error del 0.25% en relación con su valor alcanzado por el Sistema No Lineal ante un cambio positivo en la apertura de la válvula, mientras que posee un error del 0.29% ante un cambio negativo en la misma como se observa en la Figura 2.27.

### Reactor con varios puntos de operación

Para la linealización de las ecuaciones que describen el comportamiento del segundo reactor, se procede de forma análoga que en el primer reactor, tomando nuevamente en cuenta que la señal de entrada del sistema va a ser el porcentaje de apertura de la válvula,  $\Delta m$ , el cual regula el flujo de refrigerante que se encarga de mantener al reactor en la temperatura deseada del caso II de la Tabla 2.4, el cual tiene un valor de 404.7°C (Figura 2.9).

$$\Delta \dot{C}_A = -12.5 \Delta C_A - 0.093 \Delta T$$

**Ecuación 2.76** Balance de masa linealizado del reactante A.

$$\Delta \dot{T} = 1495.16 \Delta C_A + 10.89 \Delta T + 62.78 \Delta m$$

**Ecuación 2.77** Balance de energía linealizado del contenido.

$$\Delta \dot{T}O = 0.015 \Delta T - 3.03 \Delta T O$$

**Ecuación 2.78** Transmisor de temperatura linealizado.

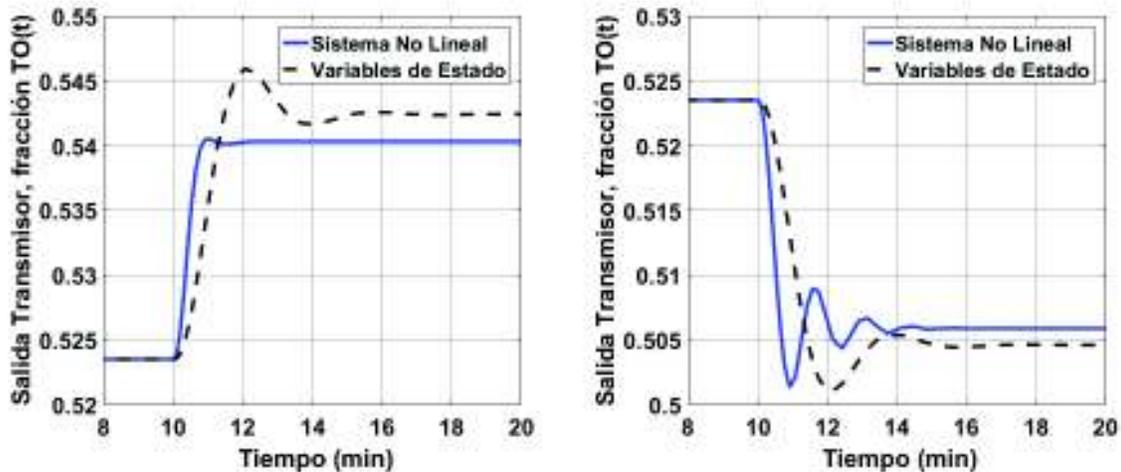
A partir de estas ecuaciones se obtienen las matrices para su representación en variables de estado.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \Delta \dot{C}_A \\ \Delta \dot{T} \\ \Delta \dot{T}_O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12.5 & -0.093 & 0 \\ 1495.16 & 10.89 & 0 \\ 0 & 0.015 & -3.03 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta C_A \\ \Delta T \\ \Delta T_O \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 62.78 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta m$$

$$y = [0 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} \Delta C_A \\ \Delta T \\ \Delta T_O \end{bmatrix}$$

**Ecuación 2.79** Representación del reactor con varios puntos de operación en variables de estado.

En la Figura 2.28 se observa la comparación del sistema no lineal con el sistema lineal representado en variables de estado, ante un cambio en la apertura de la válvula del 10%, tanto positivo como negativo. La representación en Variables de Estado tiene un error de 0.35% ante un cambio positivo en la apertura de la válvula y tiene un error de 0.24% ante un cambio negativo en la misma, con respecto al Sistema No Lineal.



**Figura 2.28** Comparación entre la representación en variables de estado y el modelo no lineal del reactor con varios puntos de operación.

Como se puede observar en las Figuras 2.26, 2.27 y 2.28 el modelo expresado en variables de estado de cada uno de los reactores sigue de forma aproximada al modelo no lineal, teniendo un pequeño error debido a que son aproximaciones realizadas en un solo punto de operación.

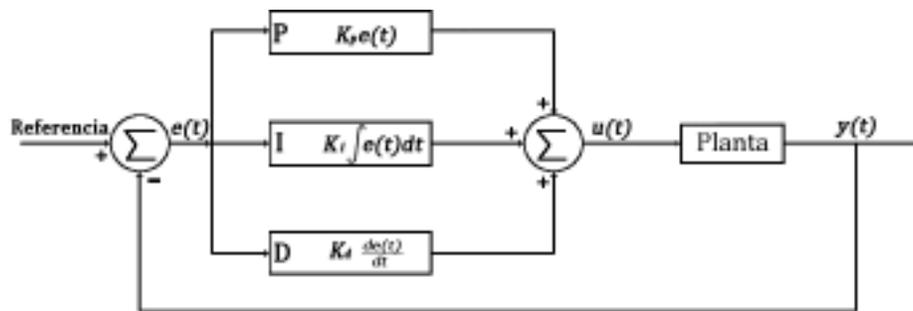
Estas técnicas de aproximación lineal de los sistemas: la empírica y la de series de Taylor, proporcionan información necesaria para aplicar las técnicas de control a comparar en cada reactor.

## 2.4. Diseño de técnicas de control en reactores tipo CSTR.

En esta sección se abordará el diseño de las técnicas de control planteadas para su comparación en los tres reactores mencionados anteriormente, así que se emplea el modelo FOPDT para el diseño de los controladores tipo PID y SMC, y para el diseño del controlador tipo LQR se realiza la linealización de los modelos matemáticos no lineales de los reactores por medio del uso de series de Taylor para obtener la representación del sistema en variables de estado.

### Controlador proporcional integral derivativo PID

Para el diseño de este controlador, el cual tiene el esquema de la Figura 2.29 y que en el caso del primer y segundo reactor, tanto la referencia  $R(t)$  y la salida  $y(t)$  son valores que representan la temperatura dentro del reactor y que en el caso del tercer reactor son valores relacionados con el porcentaje de concentración del componente B, ya que para cada planta estas son las variables de interés en el proceso.



**Figura 2.29** Esquema del controlador PID.

En cada uno de los reactores se hace uso de las Ecuaciones 1.19, 1.20 y 1.21 para poder obtener los valores de tiempos y ganancias de sintonización por medio de Dahlin que se muestran en la Tabla 2.5.

**Tabla 2.5** Parámetros de Dahlin para los tres reactores.

	Reactor 1	Reactor 2	Reactor 3
$K_c$	1.345	1.943	0.901
$\tau_d$	1.423	0.256	0.088
$\tau_i$	12.453	0.736	0.298

Una vez obtenidos los parámetros de la Tabla 2.5, se debe hallar las ganancias Proporcional, Derivativa e Integral por medio de las Ecuaciones 1.22, 1.23 y 1.24 con lo

cual se tiene los valores mostrados en la Tabla 2.6 y así poder implementar los controladores a partir de la Ecuación 1.18 para cada uno de los reactores.

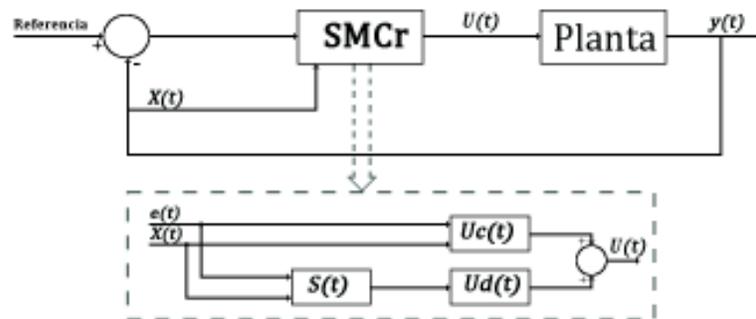
**Tabla 2.6** Parámetros del controlador PID para los tres reactores.

	Reactor 1	Reactor 2	Reactor 3
$K_p$	1.345	1.943	0.901
$K_d$	1.914	0.497	0.079
$K_i$	0.108	2.639	3.023

### Controlador por modo deslizante SMC

Para el diseño de este controlador, el cual tiene la estructura de la Figura 2.30, en el que el valor de la Referencia y la salida  $y(t)$  depende de la variable de interés en cada proceso, que en el primer y segundo reactor es el valor del transmisor de temperatura y en el tercer reactor es la concentración del componente B, se tiene en cuenta las equivalencias dadas en la Tabla 1.2, donde se toma las fórmulas de auto regulación para el primer y segundo reactor y las fórmulas de respuesta inversa para el tercer reactor, en el cual se multiplica los valores de  $K_D$  y  $\delta$  por cien debido a que el transmisor nos da un valor en porcentaje.

De esta manera se tiene los valores de sintonización para este controlador mostrados en la Tabla 2.7.



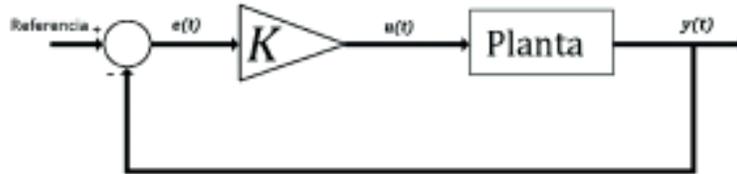
**Figura 2. 30** Esquema del controlador SMC.

**Tabla 2.7** Parámetros del controlador SMC para los tres reactores.

	Reactor 1	Reactor 2	Reactor 3
$\lambda_1$	0.423	3.31	9.06
$\lambda_0$	0.047	2.74	20.56
$K_D$	0.963	22.79	0.809
$\delta$	0.761	71.35	1.51

## Regulador lineal cuadrático LQR

En el LQR, representado por la Figura 2.31, se considera que todas las salidas son medibles, para que de esta manera sean realimentadas al sistema y compararlas con el valor de referencia deseado, de esta forma se obtiene el error que al multiplicar por la matriz de ganancias  $K$  nos da la ley de control  $u(t)$ .



**Figura 2.31** Esquema del controlador LQR.

Para el cálculo de la matriz  $K$  se hace uso de las Ecuaciones 1.33 y 1.34, de las matrices  $A$  y  $B$  de las representaciones en variables estado de los sistemas, y de las matrices  $Q$  y  $R$ , las cuales nos dan una ley de control óptima y que dependen del diseñador. El valor de cada elemento diagonal de la matriz  $Q$  y los valores de los elementos de  $R$ , vienen dado por la importancia de cada variable de estado y las entradas del sistema, respectivamente. Con estas consideraciones se tiene los siguientes valores para el cálculo de cada una de las matrices de ganancia de los tres reactores estudiados.

### Reactor con Dinámica Lenta

El sistema en variables de estado está representado por la Ecuación 2.72, donde los estados, la entrada y las salidas de la planta vienen dados por:

$$X = [\Delta C_A \quad \Delta T \quad \Delta T_c \quad \Delta T O]^T = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4]^T$$

**Ecuación 2.80** Estados del reactor con dinámica lenta.

$$U = [\Delta m] = [u_1]$$

**Ecuación 2.81** Entrada del reactor con dinámica lenta.

$$y = f(\Delta C_A, \Delta T, \Delta T_c, \Delta T O) = f(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

**Ecuación 2.82** Función de Salida del reactor con dinámica lenta.

Como se observa en la Ecuación 2.80 los estados del sistema son la concentración, la temperatura del contenido del reactor, la temperatura del refrigerante de la chaqueta y el transmisor de temperatura; mientras que la entrada del sistema es única y está dada por el nivel de apertura de la válvula de control, Ecuación 2.81.

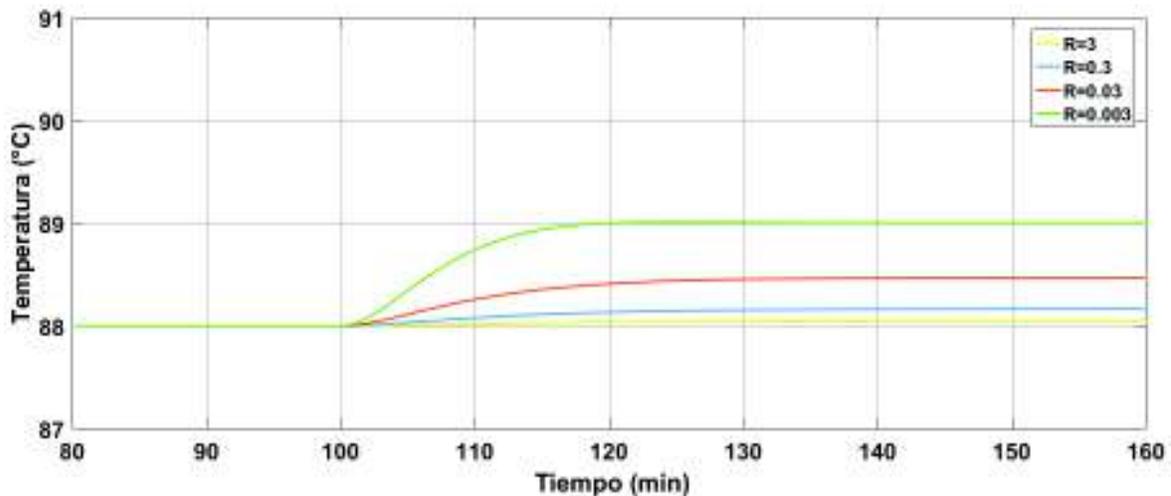
La variable de estado más importante en este sistema es la temperatura en el interior del reactor, ya que esta afectará directamente al valor de la concentración, debido a la velocidad de reacción del proceso, Ecuación 2.9, por esta razón se considera que tanto esta variable como la variable que representa a su transmisor son las que más peso tienen en el sistema, motivo por el cual sus valores correspondientes en la matriz diagonal de ponderación  $Q$  son de mayor valor.

Mientras que la matriz  $R$  tiene un valor correspondiente a una óptima acción de control, es decir la que proporcione el menor gasto de energía para obtener la mejor respuesta en la planta, como se puede apreciar en las Figuras 2.32 y 2.33 donde se realiza un cambio de referencia al minuto 100 de la simulación, y en las Figuras 2.34 y 2.35 donde se realiza una perturbación en el flujo de entrada al minuto 100 de la simulación. De esta manera se observa que al asignar el valor de 0.003 a la matriz  $R$  se obtiene una mejor respuesta del sistema a pesar de que la acción de control alcanza un valor más alto. Teniendo así los siguientes valores de sintonización:

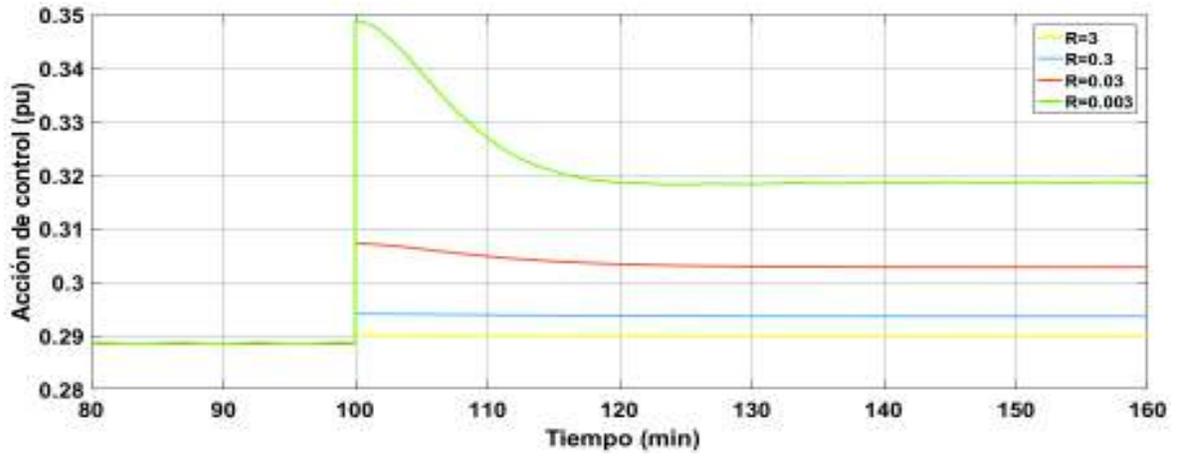
$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \end{bmatrix}$$

$$R = 0.003$$

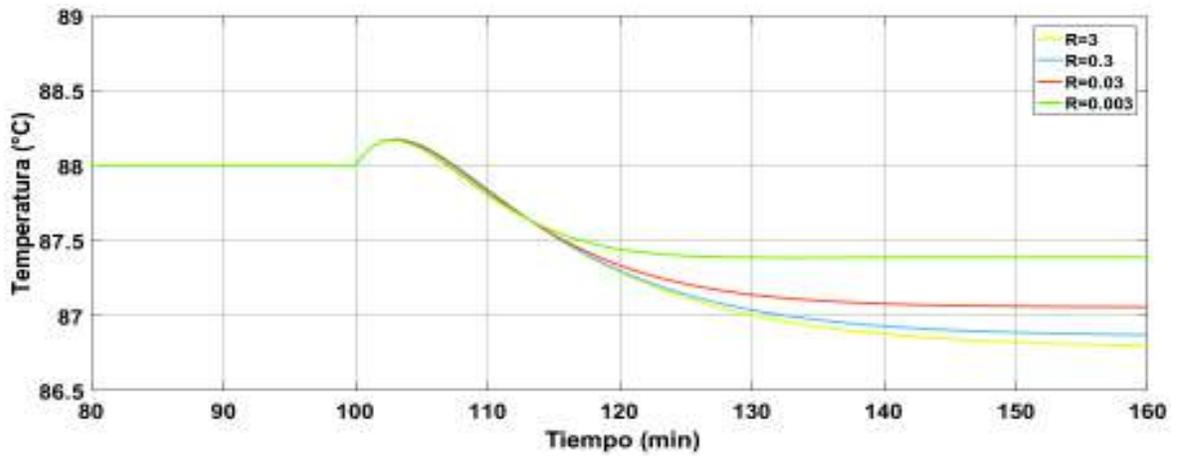
**Ecuación 2.83** Matrices  $Q$  y  $R$  del reactor con dinámica lenta.



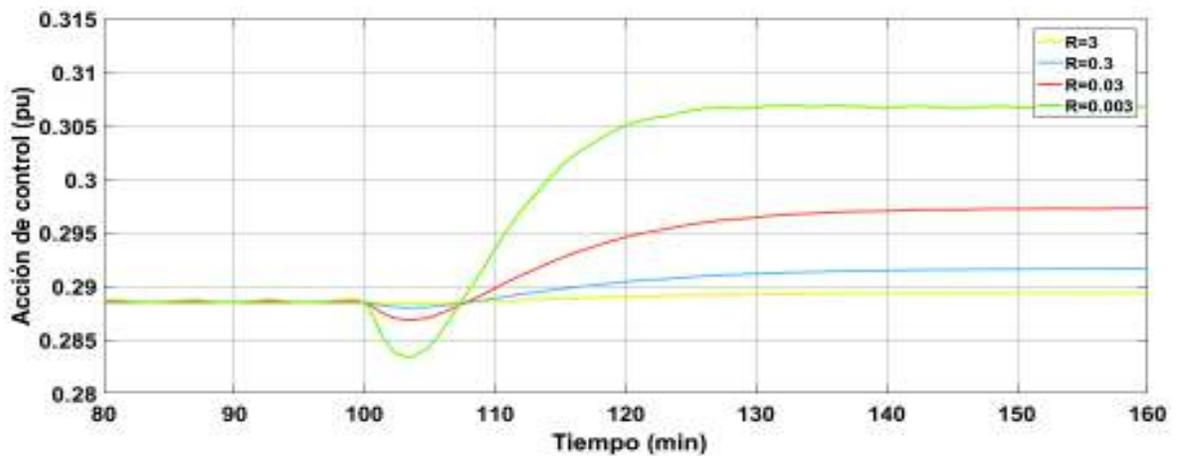
**Figura 2.32** Respuesta del sistema ante cambio de referencia a 90°C asignando distintos valores a la matriz  $R$  del LQR.



**Figura 2.33** Salida del controlador LQR ante cambio de referencia a 90°C asignando distintos valores a la matriz R.



**Figura 2.34** Respuesta del sistema ante perturbación del -10% en el flujo asignando distintos valores a la matriz R del LQR.



**Figura 2.35** Salida del controlador LQR ante perturbación del -10% en el flujo asignando distintos valores a la matriz R.

Por medio de todas estas expresiones y haciendo uso de la metodología sobre LQR de la Sección 1.3.4 del Capítulo 1 se obtiene la matriz de ganancias  $K$ .

$$K = [1112.6 \quad 152.3 \quad 18.3 \quad 0.6]$$

**Ecuación 2.84** Matriz de ganancia  $K$  del reactor con dinámica lenta.

**Reactor con respuesta inversa.**

La representación en variables de estado de este sistema, Ecuación 2.75, muestra que los dos únicos estados son la concentración del componente A y el transmisor de concentración del componente B, debido a las consideraciones que se tomaron anteriormente en la sección 2.3, y consta de una única salida la que al igual en los otros dos reactores es el nivel de apertura de la válvula, teniendo así las siguientes expresiones:

$$X = [\Delta C_A \quad \Delta y]^T = [x_1 \quad x_2]^T$$

**Ecuación 2.85** Estados del reactor con respuesta inversa.

$$U = [\Delta m] = [u_1]$$

**Ecuación 2.86** Entrada del reactor con respuesta inversa.

$$y = f(\Delta C_A, \Delta y) = f(x_1, x_2)$$

**Ecuación 2.87** Función de salida del reactor con respuesta inversa.

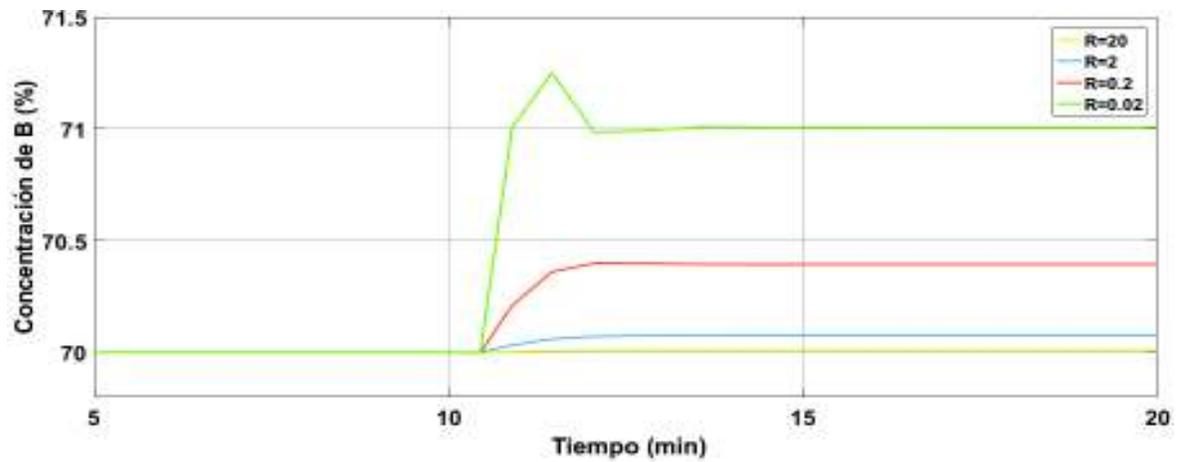
En este caso la variable de importancia es la relacionada con el porcentaje de concentración del componente B, motivo por el cual el elemento de la matriz  $Q$  relacionado con dicha concentración tiene mayor valor.

De igual manera que en el reactor anterior, se realizó una comparación entre distintos valores asignados para la matriz  $R$ , ante cambios de referencia como ante perturbaciones a los 10 minutos de simulación (Figura 2.36, 2.37, 2.38, 2.39), para finalmente escoger el valor de 0.02, teniendo así los siguientes valores para la sintonización:

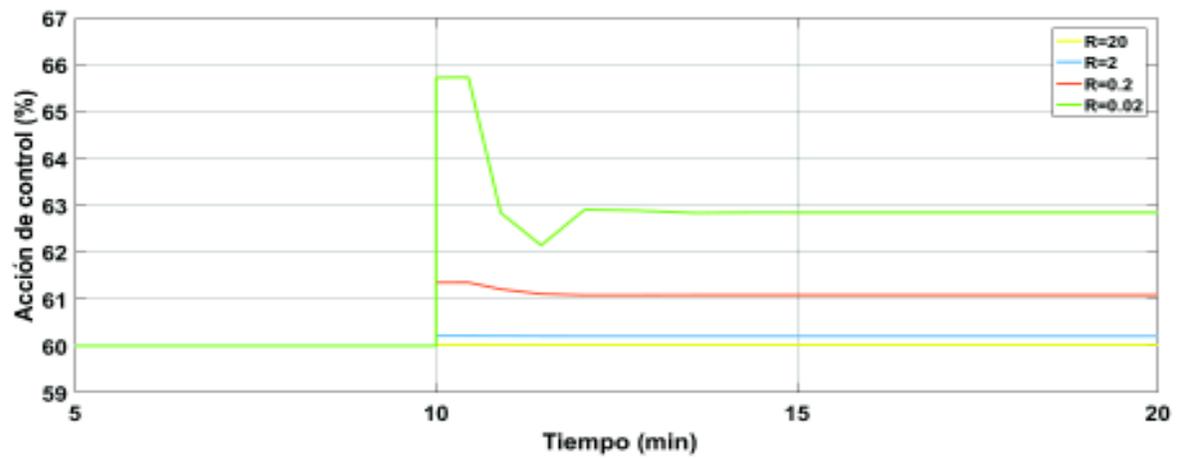
$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

$$R = 0.02$$

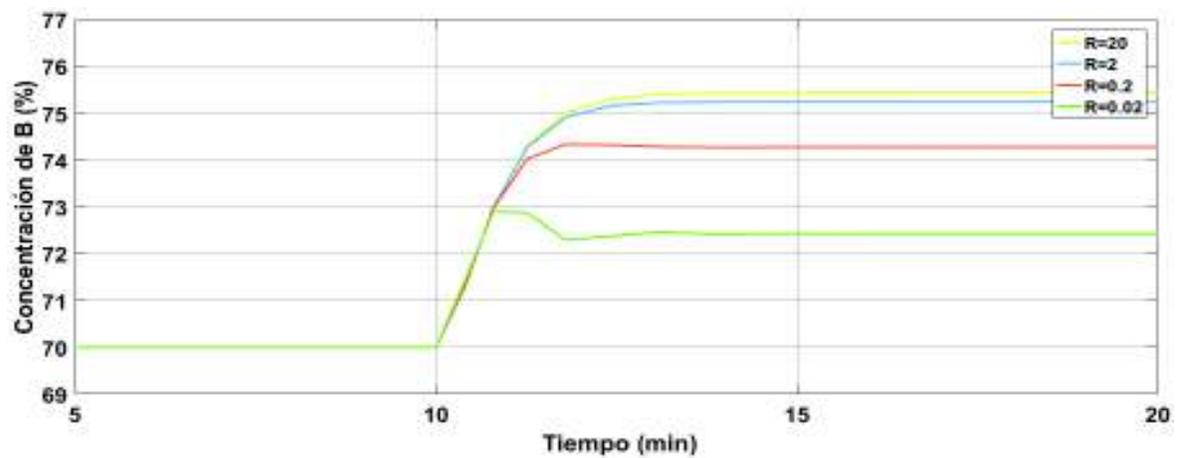
**Ecuación 2.88** Matrices  $Q$  y  $R$  del reactor con respuesta inversa.



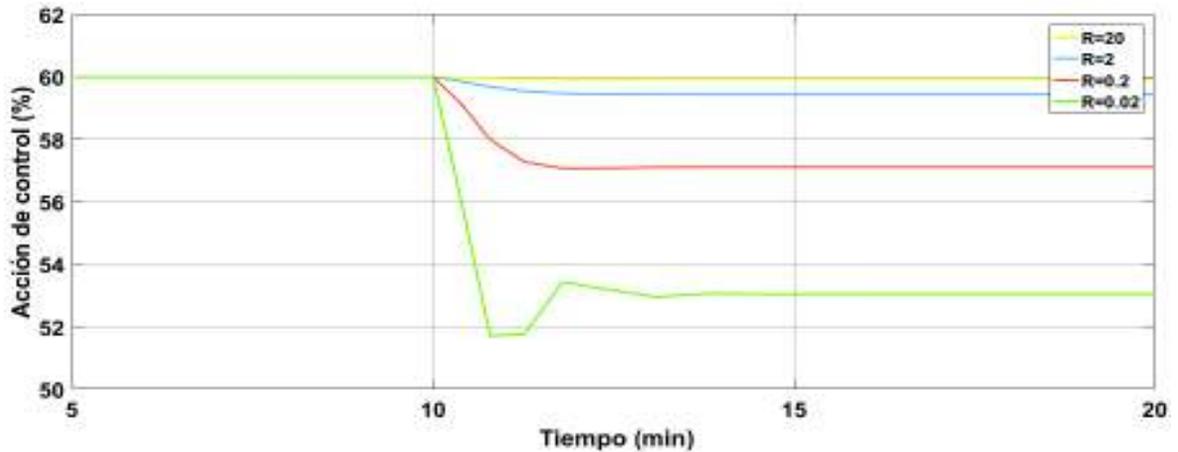
**Figura 2.36** Respuesta del sistema ante cambio de referencia a 72% de la concentración de B asignando distintos valores a la matriz R del LQR.



**Figura 2.37** Salida del controlador LQR ante cambio de referencia a 72% de la concentración de B asignando distintos valores a la matriz R.



**Figura 2.38** Respuesta del sistema ante perturbación del 10% en la concentración de A asignando distintos valores a la matriz R del LQR.



**Figura 2.39** Salida del controlador LQR ante perturbación del 10% en la concentración de A asignando distintos valores a la matriz R.

Con estas consideraciones se puede obtener finalmente la matriz de ganancias  $K$ .

$$K = [226.0523 \quad 2.8636]$$

**Ecuación 2.89** Matriz de Ganancia  $K$  del reactor con respuesta inversa.

**Reactor con varios puntos de operación.**

En este reactor se puede notar que su representación en variables de estado, Ecuación 2.79, tiene menos elementos debido a que el balance de energía en la chaqueta está incluido dentro del balance de energía del contenido del reactor, teniendo así las siguientes expresiones:

$$X = [\Delta C_A \quad \Delta T \quad \Delta TO]^T = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]^T$$

**Ecuación 2.90** Estados del reactor con varios puntos de operación.

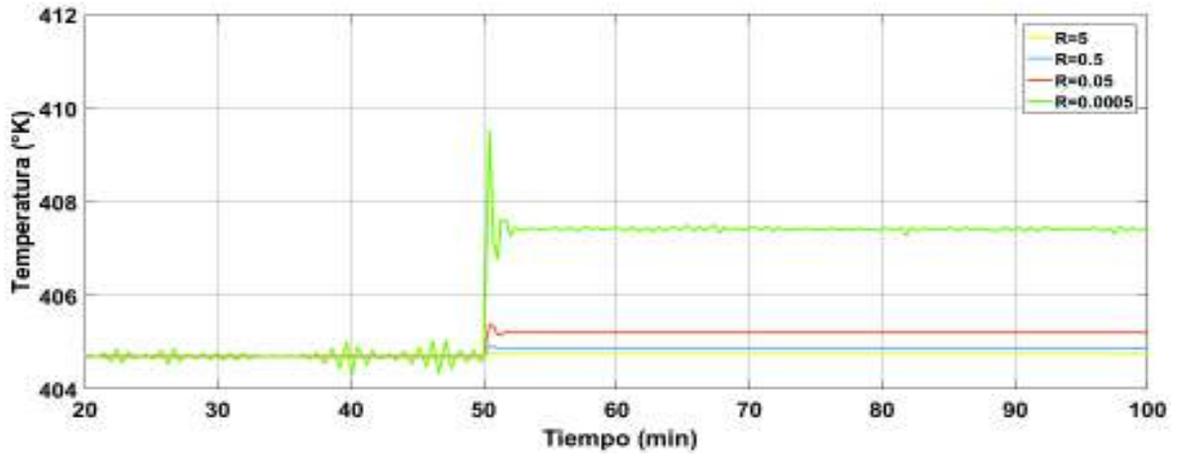
$$U = [\Delta m] = [u_1]$$

**Ecuación 2.91** Entrada del reactor con varios puntos de operación.

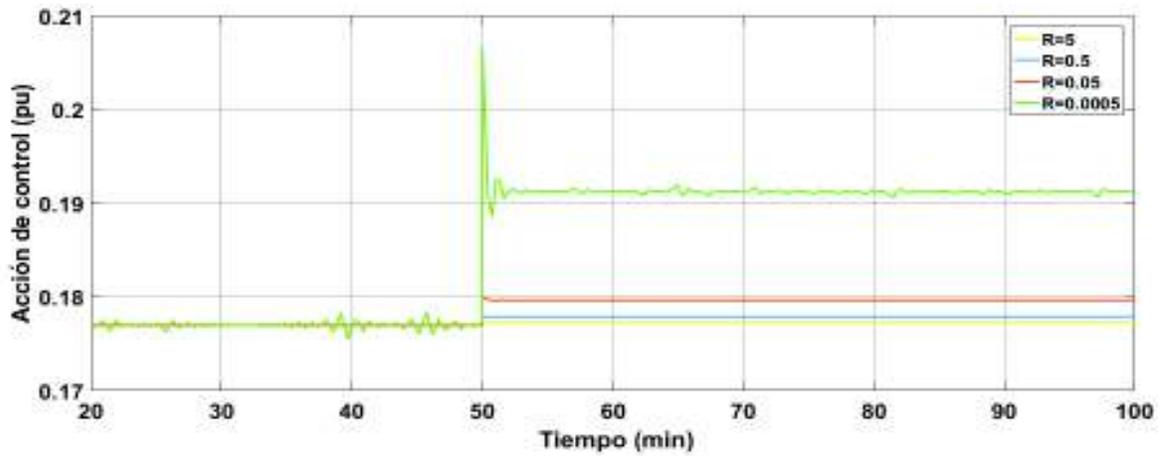
$$y = f(\Delta C_A, \Delta T, \Delta TO) = f(x_1, x_2, x_3)$$

**Ecuación 2.92** Función de salida del reactor con varios puntos de operación.

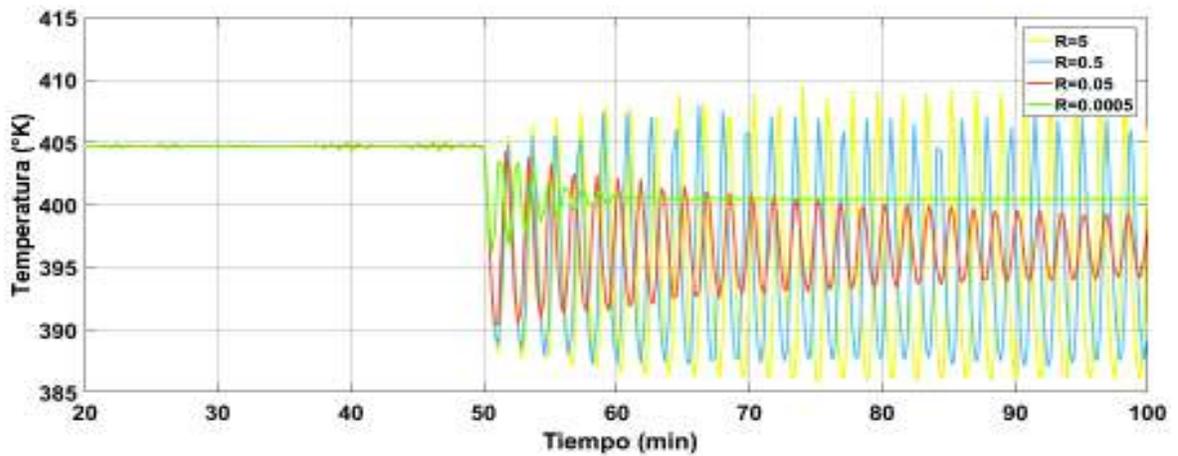
De igual manera que en el primer reactor, las variables de mayor peso son las relacionadas con la temperatura del reactor y su transmisor, mientras que el valor de  $R$  se lo obtiene de manera similar que en los reactores anteriores (Figura 2.40, 2.41, 2.42, 2.43) realizando la simulación del sistema y aplicando un cambio de referencia y una perturbación a los 5454 minutos.



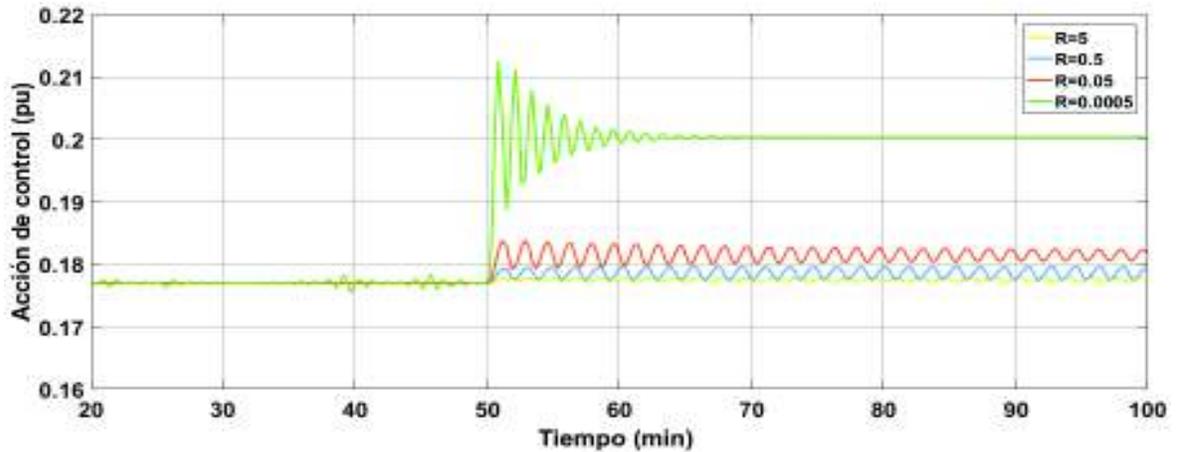
**Figura 2.40** Respuesta del sistema ante cambio de referencia a 410°K asignando distintos valores a la matriz R del LQR.



**Figura 2.41** Salida del controlador LQR ante cambio de referencia a 410°K asignando distintos valores a la matriz R.



**Figura 2.42** Respuesta del sistema ante perturbación del -10% en el flujo asignando distintos valores a la matriz R del LQR.



**Figura 2.43** Salida del controlador LQR ante perturbación del -10% en el flujo asignando distintos valores a la matriz R.

De esta manera se tiene los siguientes valores para la matriz  $Q$  y la matriz  $R$ :

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{bmatrix}$$

$$R = 0.0005$$

**Ecuación 2.93** Matrices  $Q$  y  $R$  del reactor con varios puntos de operación.

Se aplica la misma metodología utilizada en el reactor anterior para finalmente obtener la matriz de ganancia  $K$ .

$$K = [23.79 \quad 447.36 \quad 1.11]$$

**Ecuación 2.94** Matriz de ganancia  $K$  del reactor con varios puntos de operación.

Como se observa en todos los reactores, el LQR no consta de una parte integral que ayude a eliminar el error en estado estable, por lo cual a continuación se muestra una alternativa para solucionar este problema.

### Regulador lineal cuadrático más parte integral LQI.

Las técnicas de realimentación de estado consiguen la respuesta de estado estable correcta a las señales de referencia mediante un cuidadoso cálculo de la entrada de referencia, pero esto requiere un modelo perfecto del proceso para asegurar que se satisfaga la dinámica del proceso, cosa que en la mayoría de ocasiones no se puede obtener y esto hace que se produzcan errores de posición o de estado estacionario.

La alternativa para solucionar este problema es añadir una realimentación integral, creando un estado dentro del controlador que calcula la integral de la señal de error,

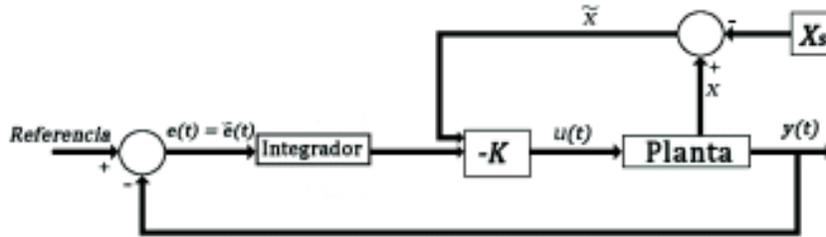
$e(t) = Referencia - y(t)$ , que se utiliza entonces como un término de realimentación, esto se logra aumentando la descripción del sistema con un nuevo estado [18].

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}(t) \\ \dot{\tilde{e}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{e}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{u}(t)$$

**Ecuación 2.95** Ampliación de variables de estado LQI.

Donde  $\tilde{x}(t)$ ,  $\tilde{e}(t)$  y  $\tilde{u}(t)$  son las variables que se obtienen restando sus valores de estado estacionario  $X_s$ , de sus valores temporales, pero que en el caso de  $\tilde{e}(t)$  se los considera igual que  $e(t)$  dado que el valor en estado estacionario del error debe ser igual a cero, y el valor de  $C$  es la matriz de salida del respectivo sistema, que en el caso de los reactores, es la fila correspondiente al transmisor de temperatura o de concentración.

De esta manera, se obtiene un diagrama de LQR nuevo, con una parte integral como se muestra en la Figura 2.44, que en el caso de los dos primeros reactores, la salida de realimentación  $y(t)$ , es la que está relacionada con el transmisor de temperatura y en el caso del tercer reactor es la que se relaciona con el transmisor de concentración del componente B.



**Figura 2.44** Esquema del controlador LQI.

Con estas nuevas consideraciones se logra el cálculo de los nuevos elementos de la matriz de ganancia  $K$  para cada uno de los sistemas.

### Reactor con dinámica lenta

Para este reactor los nuevos valores de las matrices  $A$  y  $B$  en su representación en variables de estado vienen dado por la Ecuación 2.96.

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{\tilde{C}}_A \\ \Delta \dot{\tilde{T}} \\ \Delta \dot{\tilde{T}}_c \\ \Delta \dot{\tilde{T}}_O \\ \dot{\tilde{e}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.26 & -0.0012 & 0 & 0 & 0 \\ 5.43 & -0.076 & 0.046 & 0 & 0 \\ 0 & 0.15 & -0.36 & 0 & 0 \\ 0 & 0.15 & 0 & -3.03 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \tilde{C}_A \\ \Delta \tilde{T} \\ \Delta \tilde{T}_c \\ \Delta \tilde{T}_O \\ \tilde{e}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 19.60 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta m$$

**Ecuación 2.96** Representación en variables de estado del reactor con dinámica lenta para desarrollo del LQI.

Como se puede observar se añadió un nuevo estado, el cual es el valor negativo de la salida del transmisor de temperatura, con el cual se comparará la referencia del sistema para obtener el error; esto provoca que la matriz  $Q$  tenga un nuevo elemento que tiene un valor mayor que las demás variables relacionadas y el valor de  $R$  se asigna de manera similar que en el diseño del LQR, observando la respuesta del sistema y la acción de control favorable ante perturbaciones y ante cambios de referencia.

$$Q = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 44.44 \end{bmatrix}$$

$$R = 250$$

**Ecuación 2.97** Valores de  $Q$  y  $R$  para LQI del reactor con dinámica lenta.

Finalmente, con estos nuevos elementos se realiza el cálculo de la matriz de ganancias  $K$  de forma similar que en el LQR, teniendo de esta manera un nuevo elemento relacionado al error en la señal del transmisor de temperatura.

$$K = [2.03 \quad 0.14 \quad 0.019 \quad 0.139 \quad -0.421]$$

**Ecuación 2.98** Matriz de ganancia  $K$  del LQI del reactor con dinámica lenta.

### Reactor con respuesta inversa

Para este último sistema se tiene que la señal que se realimenta no es la salida de un transmisor de temperatura, sino que es la salida del sensor de concentración del componente B.

$$\begin{bmatrix} \Delta \tilde{C}_A \\ \Delta \dot{y} \\ \dot{\tilde{e}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.37 & 0 & 0 \\ 53.03 & -2.21 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \tilde{C}_A \\ \Delta \tilde{y} \\ \tilde{e}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.064 \\ -0.634 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta u$$

**Ecuación 2.99** Representación en variables de estado del reactor con respuesta inversa para desarrollo del LQI.

Como se aprecia en este caso el valor de la matriz  $q$  relacionado con la señal de error del transmisor de concentración es mayor que los demás valores:

$$Q = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 400 \end{bmatrix}$$

$$R = 100$$

**Ecuación 2.100** Valores de  $Q$  y  $R$  para LQI del reactor con respuesta inversa.

De igual manera con toda esta información se pudo obtener la matriz de ganancias  $K$ .

$$K = [18.50 \quad 0.89 \quad -2]$$

**Ecuación 2.101** Matriz de ganancia  $K$  del LQI del reactor con respuesta inversa.

### Reactor con varios puntos de operación

En este segundo reactor, de igual manera que en el anterior, se introdujo el nuevo elemento de error en su representación en variables de estado, teniendo así las siguientes matrices en el sistema:

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{\tilde{C}}_A \\ \Delta \dot{\tilde{T}} \\ \Delta \dot{\tilde{T}O} \\ \dot{\tilde{e}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12.5 & -0.093 & 0 & 0 \\ 1495.16 & 10.89 & 0 & 0 \\ 0 & 0.015 & -3.03 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \tilde{C}_A \\ \Delta \tilde{T} \\ \Delta \tilde{T}O \\ \tilde{e}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 62.78 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta m$$

**Ecuación 2.102** Representación en variables de estado del reactor con varios puntos de operación para desarrollo del LQI.

De forma similar se tiene que la variable de mayor peso en la matriz  $Q$  es la que está relacionada con el error del transmisor de temperatura, teniendo así los siguientes valores:

$$Q = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \end{bmatrix}$$

$$R = 3000$$

**Ecuación 2.103** Valores de  $Q$  y  $R$  para LQI del reactor con varios puntos de operación.

Finalmente, con estas nuevas matrices se calcula la matriz de ganancias  $K$  con un nuevo valor que se multiplicará por la integral del error del transmisor de temperatura del tanque.

$$K = [3.704 \quad 0.034 \quad 0.06 \quad -0.182]$$

**Ecuación 2.104** Matriz de ganancia  $K$  del LQI del reactor con varios puntos de operación.

Como se puede observar en este capítulo los controladores PID y SMC se realizaron a partir del modelo de primer orden con retardo de los sistemas, y el controlador LQR se lo diseñó a partir de las representaciones de las plantas en variables de estado.

De igual manera cabe notar que en el PID y en el SMC todos los valores obtenidos para su desarrollo vienen dados directamente de las ecuaciones planteadas anteriormente,

mientras que para el LQR los valores de las matrices Q y R se los tomaron teniendo en cuenta el grado de importancia de las variables involucradas y las entradas del sistema, en base a criterios propios de los diseñadores.

Además se diseñó una interfaz gráfica mediante Guide-Matlab®, para realizar un mejor manejo de los parámetros de cada uno de los sistemas en los que se harán diferentes tipos de pruebas.

## 2.5. Diseño de la interfaz gráfica.

Esta Interfaz permite manipular tanto los parámetros de sintonización de los controladores PID, SMC y LQR con parte integral; además da la facilidad de observar la respuesta del sistema en presencia de perturbaciones de flujo de entrada y de concentración, dependiendo del caso, y el valor del índice IAE de cada controlador. Teniendo así el diseño de una pantalla principal de interacción para poder escoger el reactor en el que se desea trabajar, Figura 2.45.



**Figura 2.45** Diseño de pantalla principal de la interfaz.

A partir de la pantalla de la Figura 2.45, donde se escoge el reactor a trabajar, se realiza el diseño del siguiente nivel de navegación de la interfaz, Figura 2.46, en el cual se puede escoger la técnica de control a manipular o comparar el desempeño de los controladores entre sí.

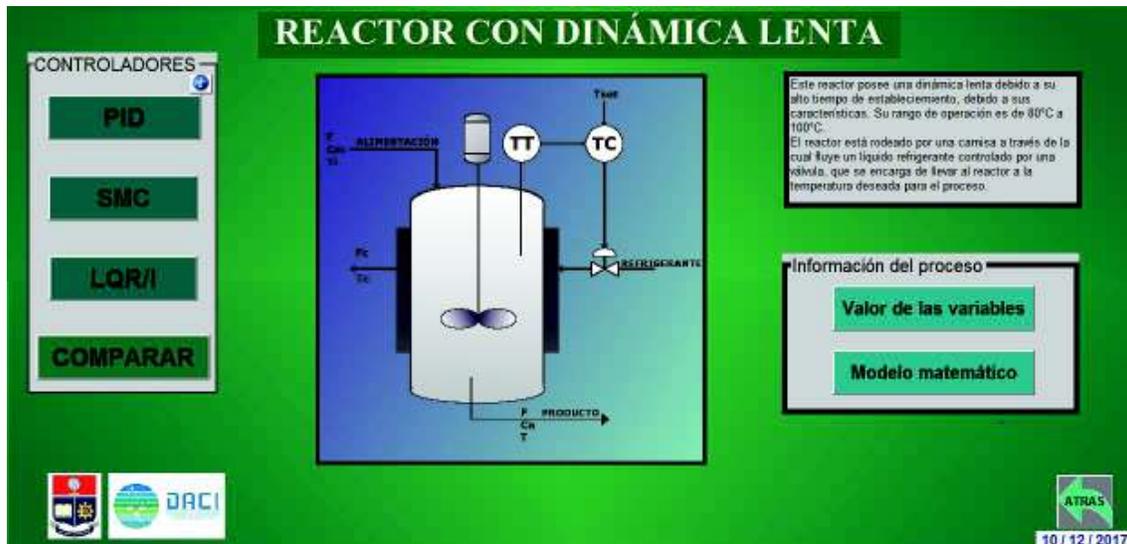


Figura 2.46 Diseño del nivel II de la interfaz del reactor con dinámica lenta.

Los diferentes parámetros de sintonización de los controladores pueden ser modificados por medio de un panel en el siguiente nivel de la interfaz, Figura 2.47, donde también se visualiza su índice de desempeño IAE. Este nivel posee un panel con botones sliders para fijar un porcentaje en las perturbaciones que podrían afectar al sistema, así como los Axes para presentar imágenes y los resultados de dicha sintonización de parámetros.

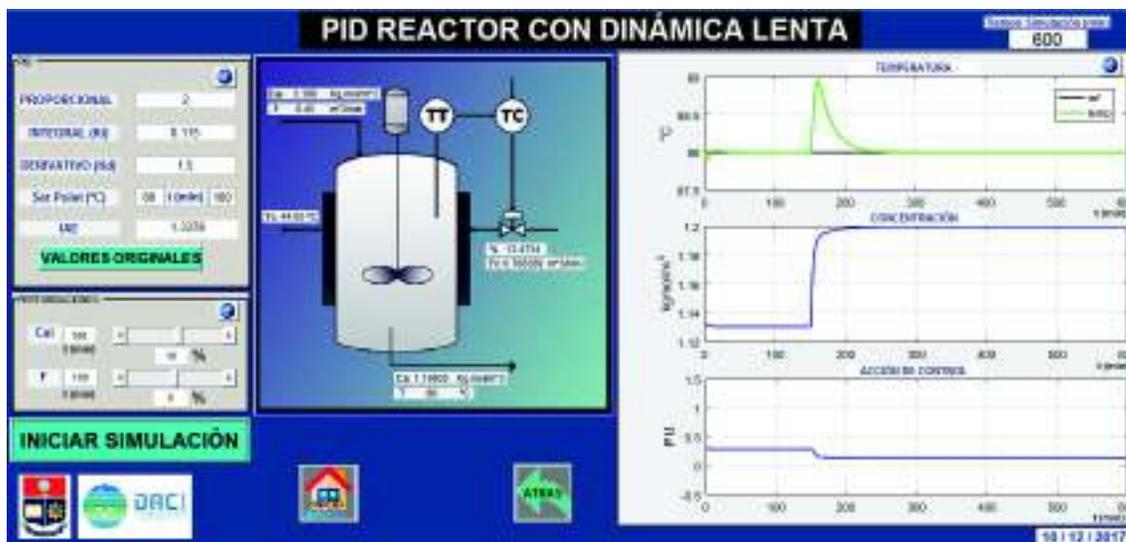
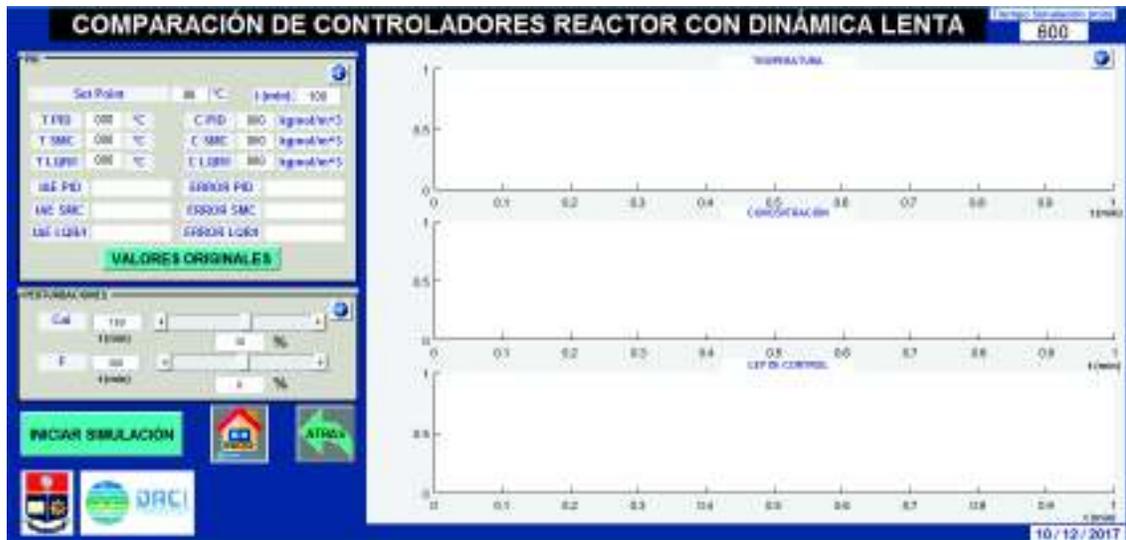


Figura 2.47 Diseño nivel III PID de la interfaz del reactor con dinámica lenta.

El nivel III cuenta con una pantalla de comparación de los controladores, Figura 2.48, con lo cual se pretende visualizar los resultados de las tres técnicas de control a la vez, su error y su índice de desempeño; así como su respuesta ante las perturbaciones.



**Figura 2.48** Diseño nivel III comparación controladores del reactor con dinámica lenta. El diagrama de flujo de la interfaz se encuentra adjunto en el Anexo II, en el cual se explica la lógica empleada para la programación de la interfaz gráfica.

### 3. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Los controladores diseñados en el Capítulo 2 son puestos a prueba en los modelos no lineales de los sistemas, mediante software de simulación Simulink-Matlab®, con el fin de observar su comportamiento ante distintos eventos que puedan darse durante el funcionamiento de estas plantas, como los son:

- Pruebas con cambios de referencia en temperatura o concentración dependiendo del reactor: el objetivo de esta prueba es el de comprobar el desempeño de los controladores en cuanto a cambios en la entrada del sistema, algo que es útil si el reactor se utiliza para el trabajo con diferentes tipos de reacciones y condiciones de funcionamiento como es el caso de análisis de procesos en laboratorio.
- Pruebas ante perturbaciones o regulación: la finalidad de esta prueba es demostrar la robustez de los controladores al aplicarse un cambio instantáneo no deseado en los parámetros de los sistemas, como es el caso de una variación de la concentración o del flujo de los reactantes que ingresan al reactor por la alimentación. Esta prueba es la más importante, dado que generalmente este tipo de procesos en la industria requieren actuar en un solo punto de operación, para que el producto de la reacción posea las características deseadas, es decir se requiere que el controlador garantice mantener al sistema en dicho punto de operación.
- Pruebas de error en el modelo del sistema: la finalidad de esta prueba es demostrar la robustez de los controladores al variar los parámetros  $\tau$ ,  $t_0$  y  $K$  en el modelo FOPDT o en la matriz  $A$  de su representación en variables de estado, según sea el caso, obteniendo así una nueva representación lineal de los sistemas y por ende nuevos parámetros de sintonización en los controladores. Esto nos permite simular una variación en los parámetros que definen al modelo, lo cual puede darse por utilizar un reactor modelado específicamente para una reacción, en otra distinta, por desgaste físico de los elementos del sistema o por falla al momento de obtener el modelo lineal.

En todas estas pruebas se medirá el índice de desempeño IAE de cada controlador aplicado al sistema tomando como referencia en el que se dé el primer cambio en el sistema.

En las simulaciones se obvió el uso de elementos no lineales como saturadores a la salida de los controladores, ya que esto modificaría a la estructura de los controladores a

compararse, dado que no todas las técnicas de control implementadas entregan una acción de control que supera los límites físicos de los actuadores, mientras que otras si lo hacen, como es el caso específico del controlador PID, ya que este controlador, por sus características propias tiende a generar esfuerzos de control al someterse a las pruebas realizadas en este trabajo. El saturador limita la respuesta del controlador, haciendo que el índice IAE en estos casos sea significativamente distinto al que se obtiene sin el uso de este.

En todas las pruebas se usaron los valores originales de diseño de los controladores y para que los sistemas tengan un mejor desempeño ante perturbaciones (regulación), se realizó un reajuste de los parámetros de sintonización de los controladores dado que esta es la prueba más importante en este tipo de plantas.

### **3.1. Pruebas en reactor con dinámica lenta**

Como se observó en el capítulo 2, este reactor tiene una respuesta lenta en comparación de los otros dos abordados en este trabajo y su rango de operación es de 80°C a 100 °C debido al transmisor de temperatura usado, por esto todas las pruebas a las que se somete a este reactor deben encontrarse dentro de este rango, además la válvula que es el elemento final de control, trabaja en por unidad por lo que el controlador debe entregar valores entre 0 y 1 para no generar un esfuerzo de control en la misma.

En este reactor se realizaron tres pruebas:

- Prueba 1: Se realizó un análisis de la respuesta de la planta ante cambios en la referencia en la temperatura del reactor, hacia arriba y hacia abajo del punto de operación (88°C), a partir de que el sistema se encuentra en estado estable, para esto se tomó en cuenta el rango del transmisor de temperatura.
- Prueba 2: En esta prueba se analizó el comportamiento de los controladores ante perturbaciones, las que en este reactor pueden estar presentes en dos parámetros específicamente, como lo son la concentración a la entrada y el flujo de ingreso al tanque reactor.
- Prueba 3: Para esta prueba se realizó un análisis de las respuestas de los controladores ante cambios de referencia y perturbaciones con errores de modelamiento del -10% y del 100%, los cuales se los obtuvo al multiplicar los parámetros ( $\tau, t_0, K$ ) del modelo FOPDT o la matriz A de su representación en variables de estado por un factor que represente el error en el modelado.

### Prueba 1: cambios de referencia.

- Cambio de referencia a 85°C.

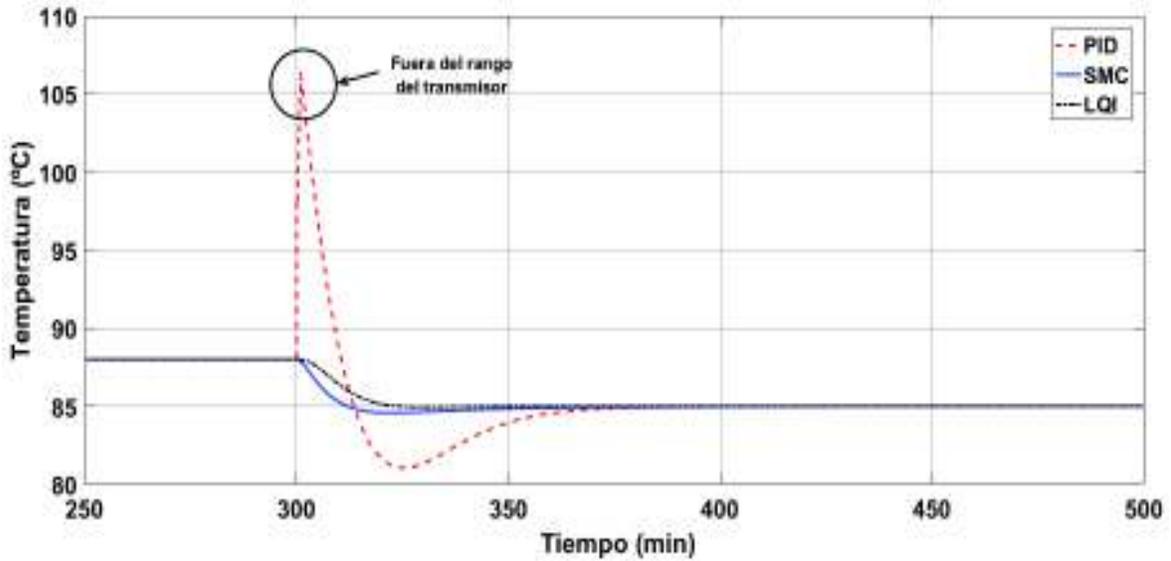


Figura 3.1 Respuesta ante cambio de referencia a 85°C.

En este caso se observa que el controlador PID tiene una respuesta con un sobre-pico que supera los límites del transmisor, lo que se refleja en la acción de control, la cual presenta un esfuerzo de control muy alto y que no podría ser manejado sin la ayuda de un saturador en la válvula de control del sistema, ya que sobrepasa los límites de operación de la misma.

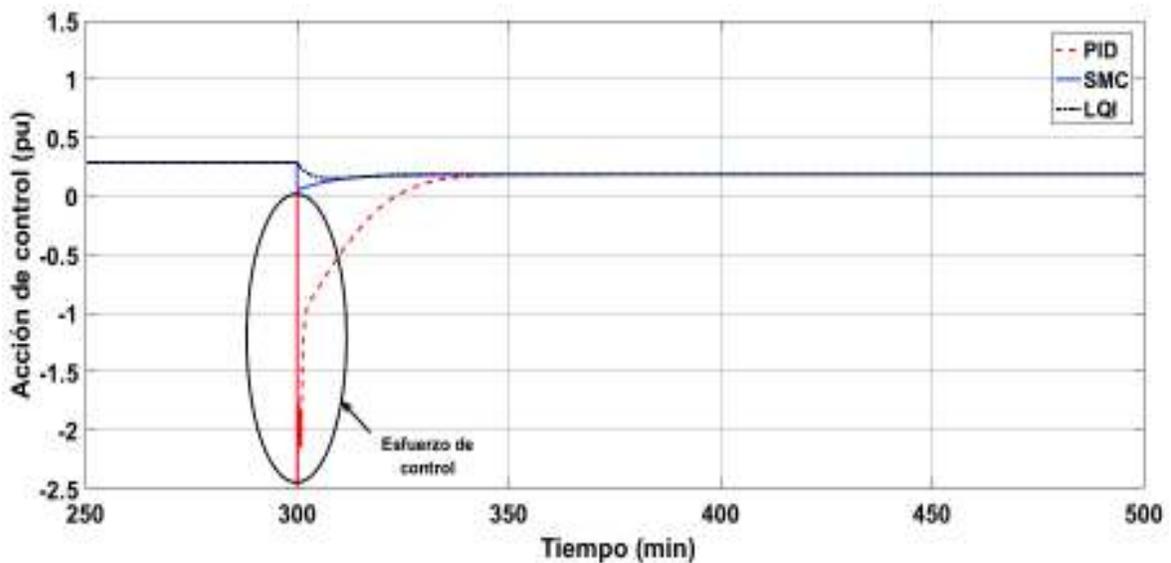


Figura 3.2 Salidas de los controladores ante cambio de referencia a 85°C.

En el caso de los otros controladores, Figura 3.2, se observa un comportamiento más suave sin sobre-picos, además se puede decir que en el caso del SMC a pesar de usar la superficie PID, no conserva el comportamiento brusco del mismo, por lo cual el sistema trabaja dentro de los parámetros permitidos para la válvula y el transmisor de temperatura.

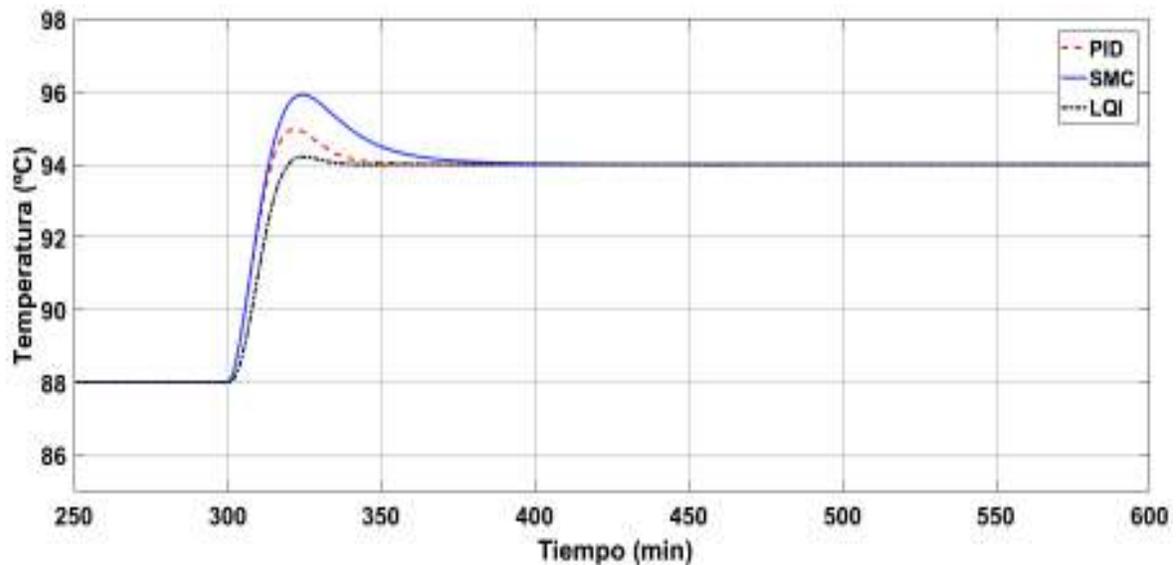
**Tabla 3.1** Índice IAE para cambio de referencia a 85°C.

Controlador	IAE
PID	14.67
SMC	1.55
LQI	1.60

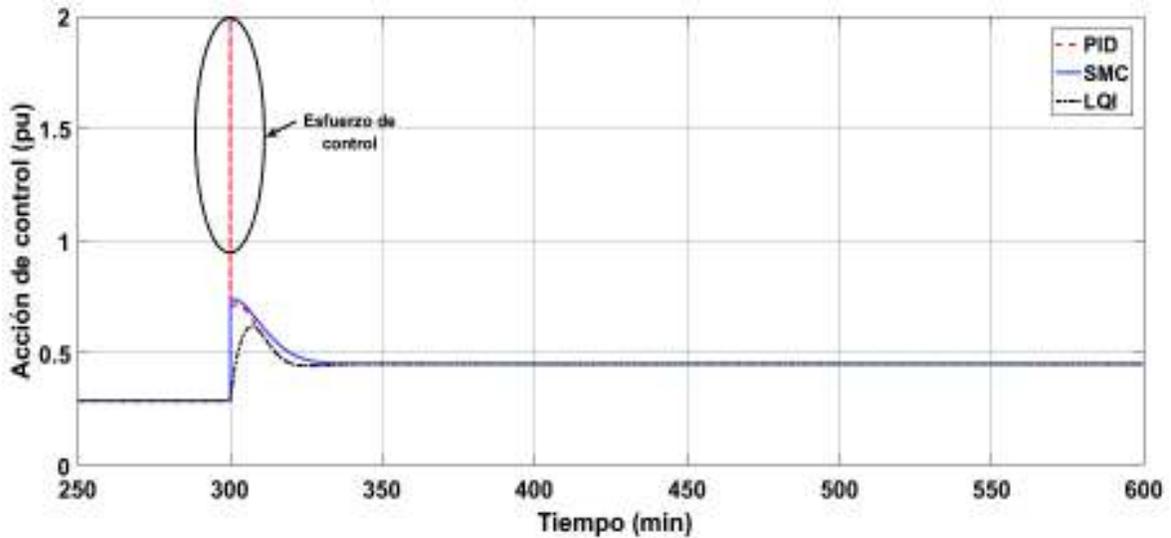
Como se ve en la Tabla 3.1, en el caso del controlador PID el índice IAE es elevado como se esperaba al observar su respuesta, en el caso del SMC tiene el mejor índice, esto es debido a que en esta prueba posee una respuesta más rápida que el LQI lo que permite que el sistema llegue antes al nuevo valor de referencia.

A continuación, se realizó un cambio de referencia mayor al valor de operación de la planta de 94°C para apreciar la respuesta de los controladores cuando se alejan del punto en el cual se realizó la linealización.

- Cambio de referencia a 94°C.



**Figura 3.3** Respuesta ante cambio de referencia a 94°C.



**Figura 3.4** Salidas de los controladores ante cambio de referencia a 94°C.

En el caso de un cambio de referencia hacia arriba, se observa que los tres controladores responden de buena manera, el SMC es el que mayor sobre pico presenta como se ve en la Figura 3.3, en el caso de su acción de control se ve que el PID presenta un esfuerzo de control en el punto en el cual se le da un escalón de cambio de referencia, lo cual el SMC a pesar de usar el PID como superficie no lo conserva.

**Tabla 3.2** Índice IAE para cambio de referencia a 94°C.

Controlador	IAE
PID	3.20
SMC	4.92
LQI	3.23

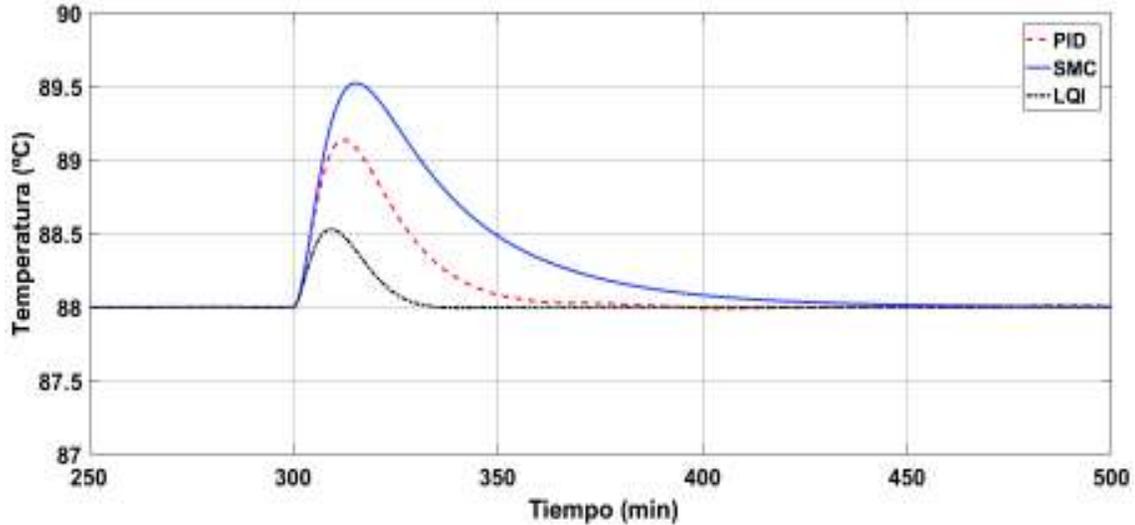
Para esta prueba el controlador SMC es el que posee el índice IAE más elevado, esto se debe al sobre-pico que presenta al darse el cambio de referencia, sin embargo, se puede considerar que es un comportamiento mejor que el del PID ya que no presenta esfuerzo de control. Por otro lado, el LQI es el que mejor respuesta presenta, lo cual explica que su índice IAE sea el menor de los tres controladores.

## **Prueba 2: respuesta ante perturbaciones.**

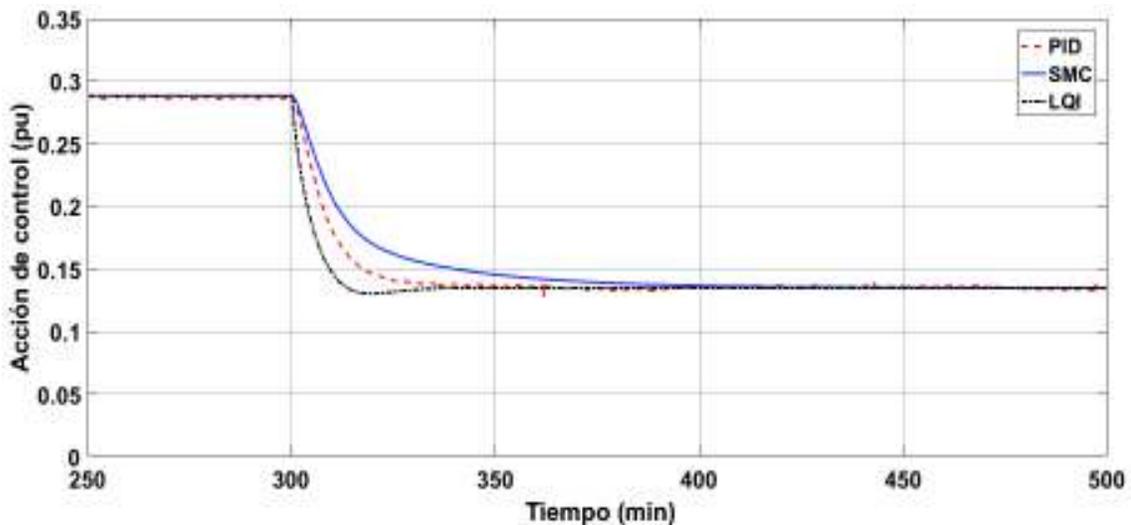
- **Perturbación del 10% de la concentración de A en la entrada**

En el caso de manejar perturbaciones en la concentración, se puede observar que los tres controladores logran mantener al sistema en su referencia, la mayor diferencia se encuentra en su tiempo de establecimiento.

Se observa que el controlador tipo LQI es el que mejor responde, seguido del PID, en el caso del SMC se nota un comportamiento similar al del PID, pero con un pico mayor además de ser más lento, este comportamiento lo tiene ya que el SMC usa al PID como superficie deslizante.



**Figura 3. 5** Respuesta ante una perturbación del 10% de la concentración de A en la entrada.



**Figura 3.6** Salidas de los controladores ante una perturbación del 10% de la concentración de A en la entrada.

Los parámetros sintonizados de los tres controladores, para este reactor se presentan en las Ecuaciones 3.1, 3.2 y 3.3.

$$K_p = 2$$

$$K_i = 0.115$$

$$K_d = 1.5$$

**Ecuación 3.1** Parámetros sintonizados del controlador PID.

$$\lambda_1 = 0.423 [\text{min}]^{-1}$$

$$\lambda_0 = 0.098 [\text{min}]^{-2}$$

$$K_D = 1.58 [\text{fracción CO}]$$

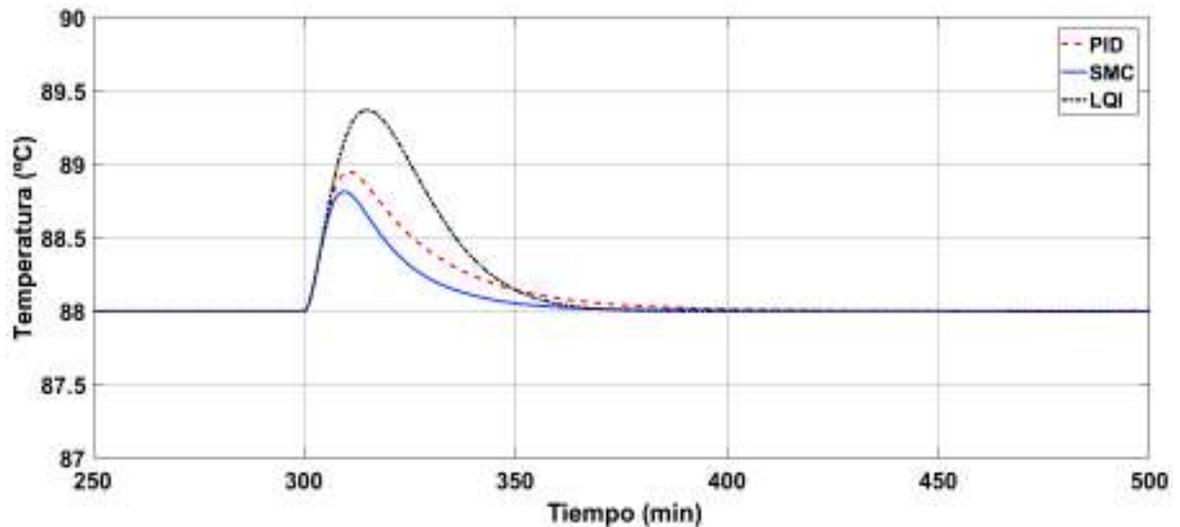
$$\delta = 0.79 [\text{fracción TO/min}]$$

**Ecuación 3.2** Parámetros sintonizados del controlador SMC.

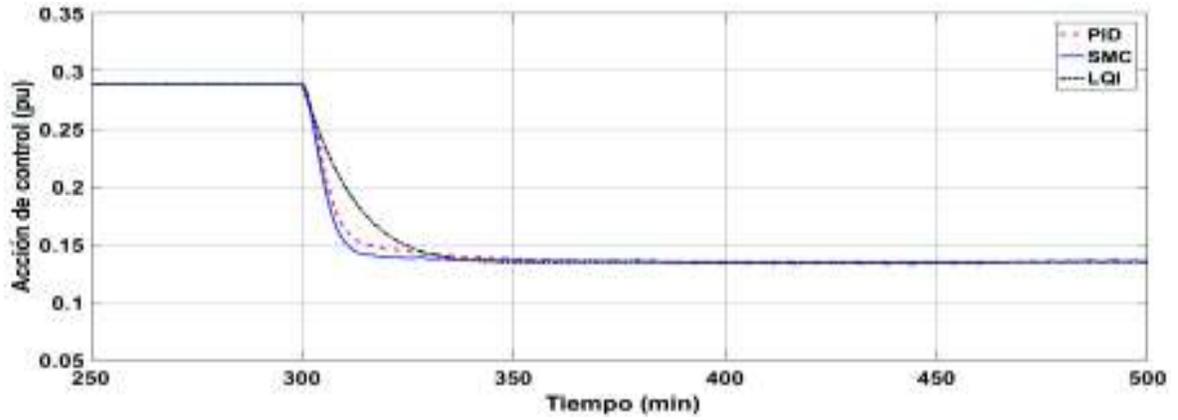
$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 30 \end{bmatrix}$$

$$R = 5000$$

**Ecuación 3.3** Parámetros sintonizados del controlador LQI.



**Figura 3. 7** Respuesta ante una perturbación del 10% de la concentración de A en la entrada con controladores sintonizados.



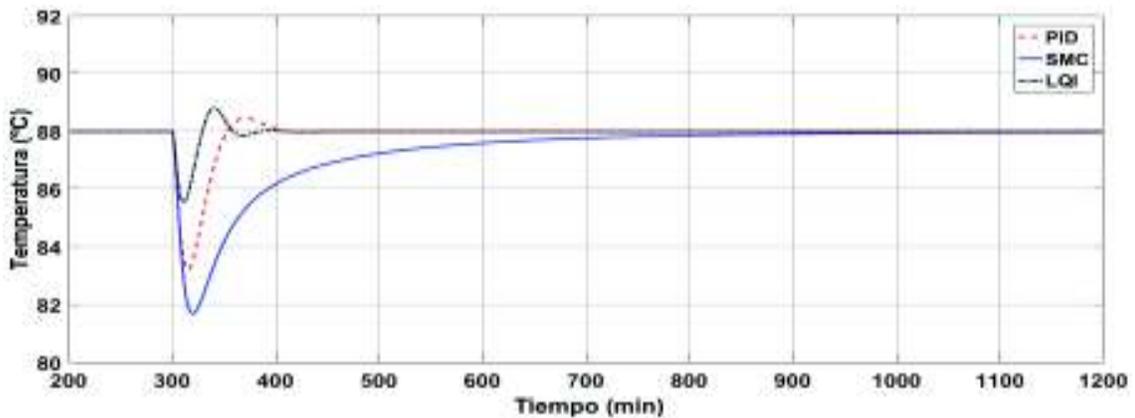
**Figura 3.8** Salidas de los controladores ante una perturbación del 10% de la concentración de A en la entrada con controladores sintonizados.

**Tabla 3.3** Índice IAE para perturbación del 10% de la concentración de A en la entrada.

Controlador	IAE controladores sin sintonizar	IAE controladores sintonizados
PID	1.44	1.34
SMC	3.07	0.89
LQI	0.41	1.91

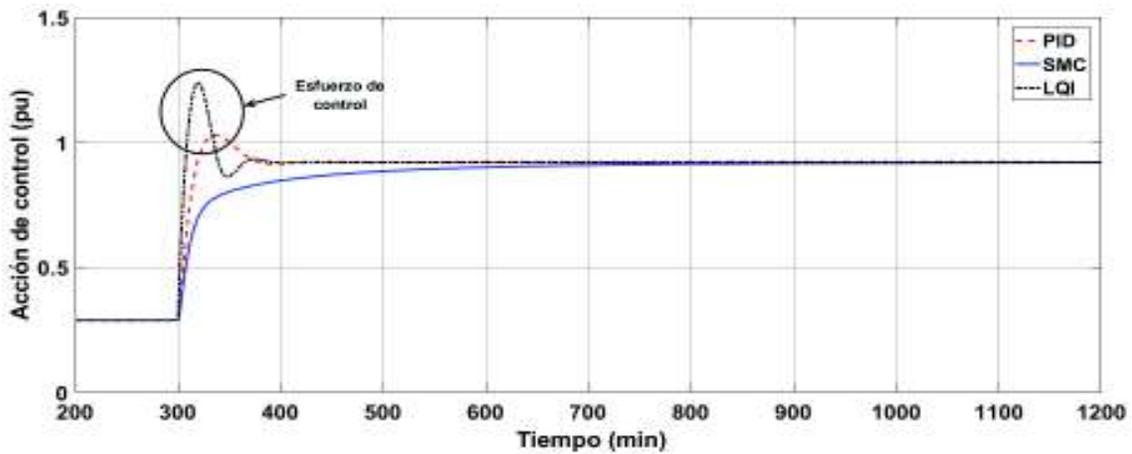
En la Tabla 3.3, se observa que cuando los controladores no son sintonizados el índice IAE del controlador LQI es el más bajo, seguido del PID tal como se esperaba, el SMC presenta un índice de desempeño elevado a comparación de los otros dos controladores, esto debido a su respuesta lenta, a pesar de esto se puede decir que los tres controladores son buenas opciones para el manejo de esta clase de perturbaciones en caso de no estar sintonizados.

- **Perturbación del menos 37% de la concentración de A en la entrada.**

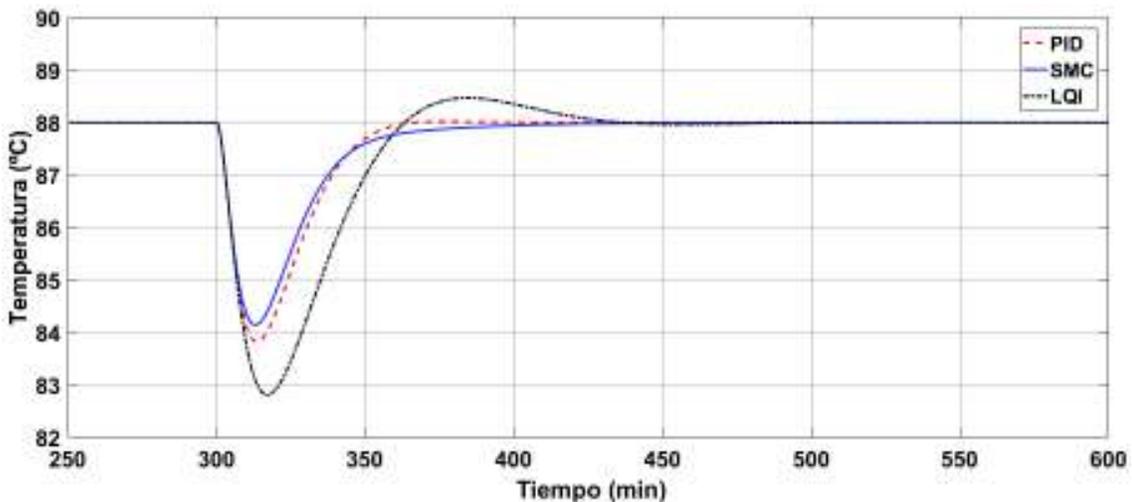


**Figura 3.9** Respuesta ante una perturbación del menos 37% de la concentración de A en la entrada.

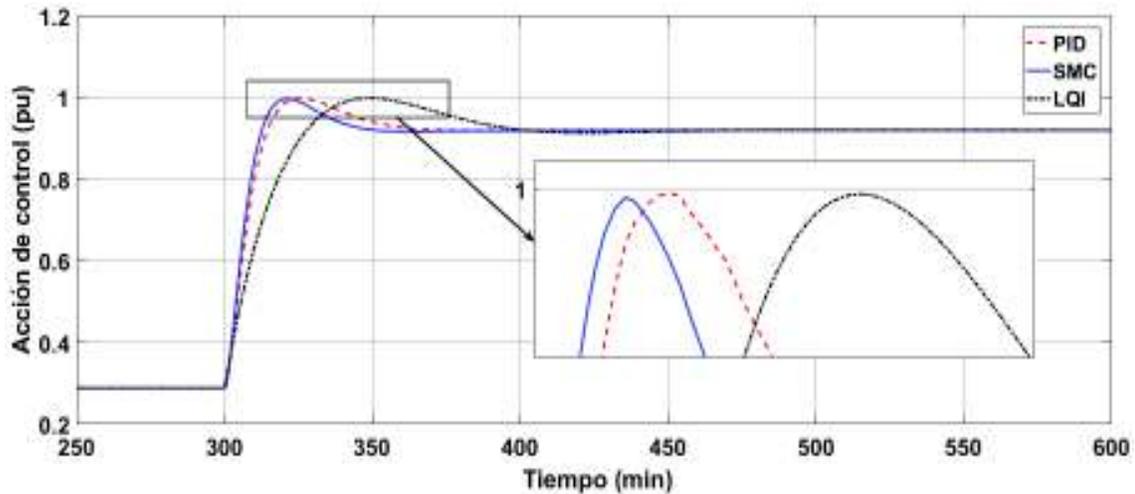
En esta prueba se aplicó al sistema una perturbación del -37% a la concentración, como resultado de dicha prueba se observa que los 3 controladores pueden realizar el rechazo a perturbaciones de esta magnitud Figura 3.9, sin embargo, en la acción de control (Figura 3.10), se tiene que el SMC es el único de los tres controladores que puede manejar este tipo de perturbaciones elevadas sin generar un esfuerzo de control en la válvula, por este motivo, se descartarían tanto el PID como SMC para este sistema en caso de presentar eventos que lleven a manejar esta magnitud de perturbaciones en el proceso.



**Figura 3.10** Salidas de los controladores ante una perturbación del menos 37% de la concentración de A en la entrada.



**Figura 3.11** Respuesta ante una perturbación del menos 37% de la concentración de A en la entrada con controladores sintonizados.



**Figura 3.12** Salidas de los controladores ante una perturbación del menos 37% de la concentración de A en la entrada con controladores sintonizados.

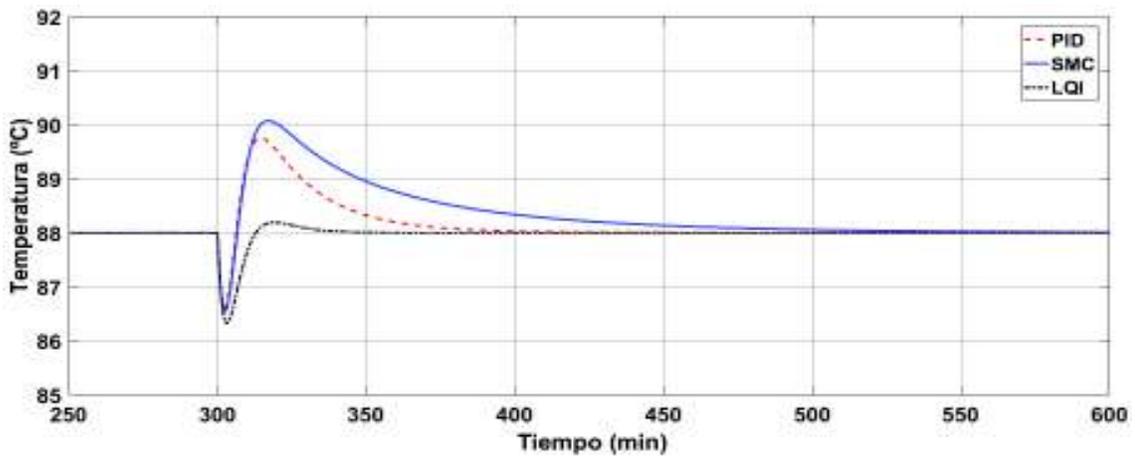
**Tabla 3.4** Índice IAE para perturbación del menos 37% de la concentración de A en la entrada.

Controlador	IAE controladores sin sintonizar	IAE controladores sintonizados
PID	7.36	5.55
SMC	30.6	5.42
LQI	2.91	9.38

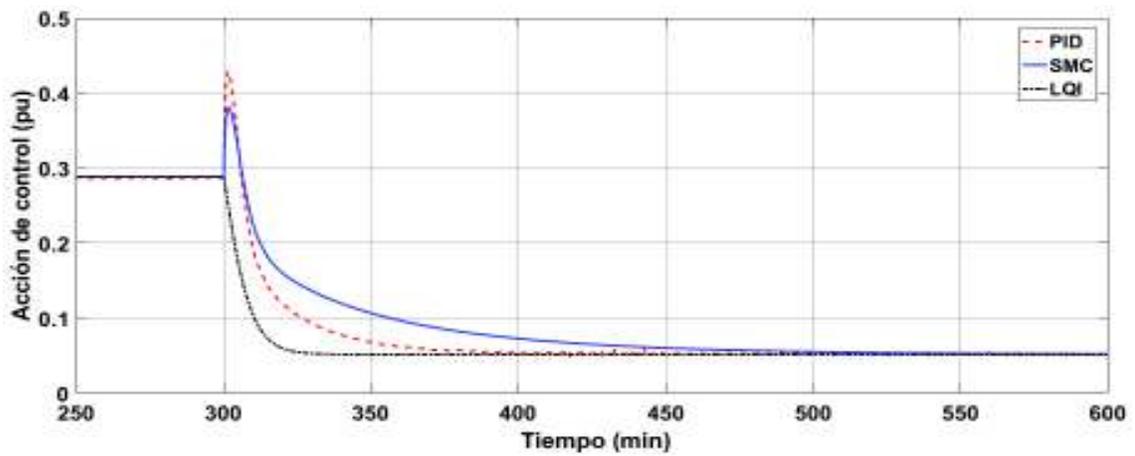
En el caso del reactor con dinámica lenta, se puede observar que al ser sometido a una perturbación del menos 37% de la concentración de A en la entrada al tanque, el único controlador que logra regular al sistema sin generar esfuerzos de control es el SMC, por lo cual se tomó como referencia este caso para la sintonización de los tres controladores tratando de que estos logren regular al sistema para trabajar con ese tipo de perturbaciones, sin generar esfuerzos de control en la válvula y teniendo la mejor respuesta posible.

En la Tabla 3.4, se observa que en el caso de no estar sintonizados los controladores, nuevamente el SMC tiene el índice IAE más elevado, esto debido a que su respuesta es lenta a comparación de los otros dos controladores, sin embargo de tener esta desventaja este sería la mejor opción para el manejo de perturbaciones elevadas en este reactor.

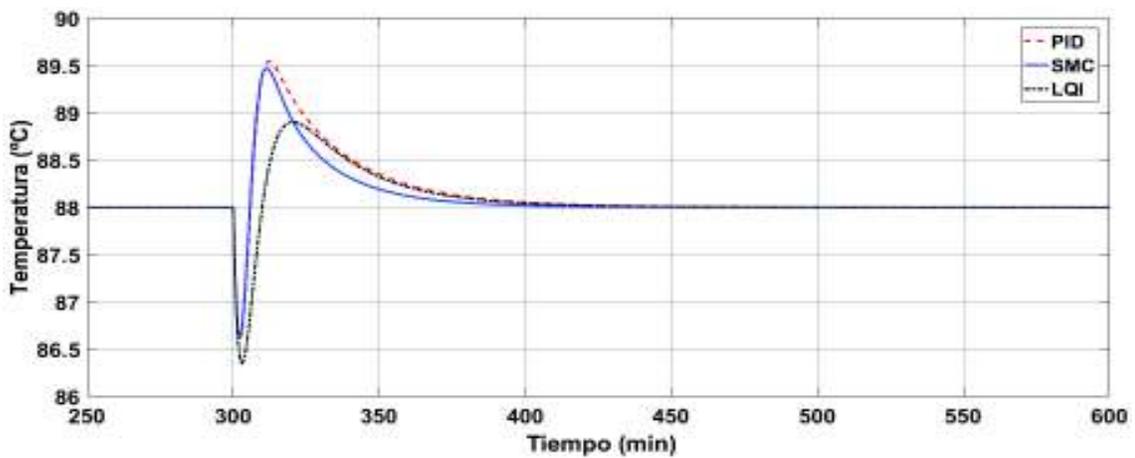
- Perturbación del 100% de flujo de entrada.



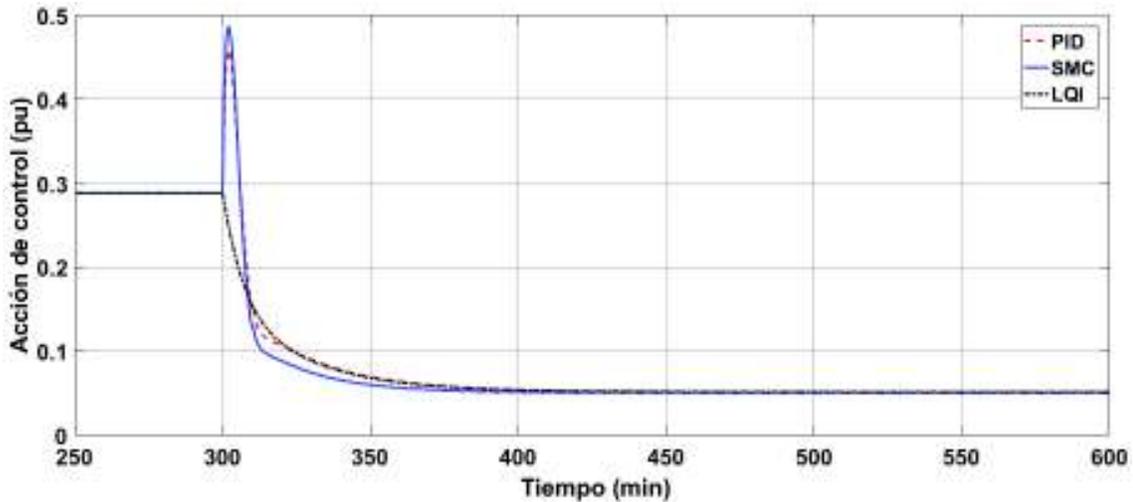
**Figura 3.13** Respuesta ante una perturbación del 100% de flujo de entrada.



**Figura 3.14** Salidas de los controladores ante una perturbación del 100% del flujo de entrada.



**Figura 3.15** Respuesta ante una perturbación del 100% de flujo de entrada con controladores sintonizados.



**Figura 3.16** Salidas de los controladores ante una perturbación del 100% del flujo de entrada con controladores sintonizados.

En este caso se observa que, el sistema es capaz de manejar perturbaciones de un 100% del flujo de ingreso con los tres controladores diseñados, nuevamente se ve que el SMC tiene un comportamiento lento ante perturbaciones, y que el LQI es el que regresa el sistema a su referencia con mayor rapidez, lo cual es un comportamiento muy similar a cuando se dan perturbaciones de concentración.

**Tabla 3.5** Índice IAE para perturbación del 100% del flujo de entrada.

Controlador	IAE controladores sin sintonizar	IAE controladores sintonizados
PID	2.88	2.59
SMC	5.90	1.95
LQI	0.72	2.13

Tal como se espera al observar las respuestas, el controlador más adecuado usando el índice de desempeño IAE ante este tipo evento sería el LQI, seguido del PID y finalmente el SMC.

Observando el comportamiento del sistema ante perturbaciones tanto en concentración como en flujo, se puede decir que la concentración es el parámetro más crítico entre los dos ya que, con menores variaciones en porcentaje genera reacciones más críticas en el sistema.

A partir del análisis de los resultados obtenidos a partir de la sintonización de los parámetros de los controladores, se puede concluir que el SMC es el controlador que mejor trabaja en regulación en este reactor.

### Prueba 3: errores de modelado de la planta.

En la Figura 3.17 se observa los efectos del error de modelado en el sistema al usar la FOPDT, tanto en un cambio hacia arriba como hacia abajo de 0.1 en la apertura de la válvula, en donde:

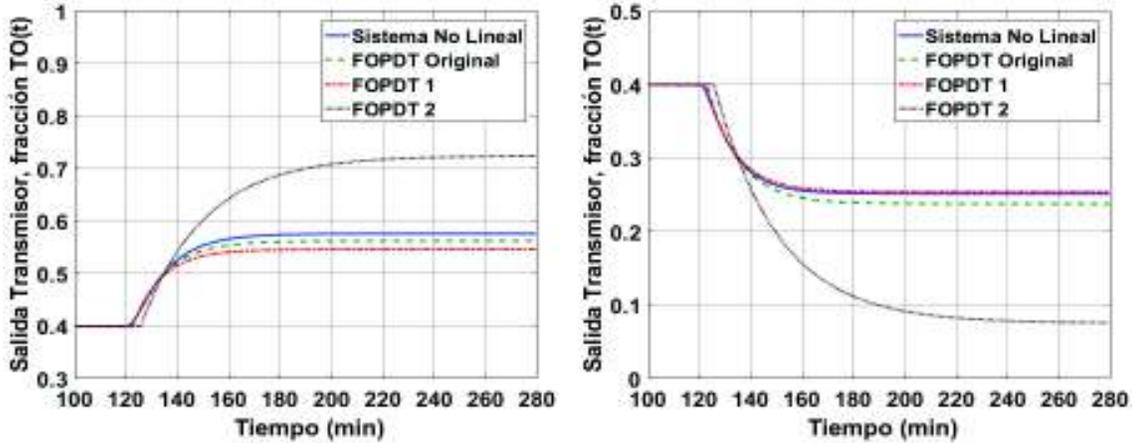


Figura 3.17 Efecto del error de modelado con FOPDT.

- **Sistema No Lineal:** Respuesta de la planta en lazo abierto.
- **FOPDT Original:** Respuesta del modelo FOPDT de la planta sin error de modelado.
- **FOPDT 1:** Respuesta del modelo FOPDT de la planta con error de modelado del menos 10%.
- **FOPDT 2:** Respuesta del modelo FOPDT la planta con error de modelado del 100%.

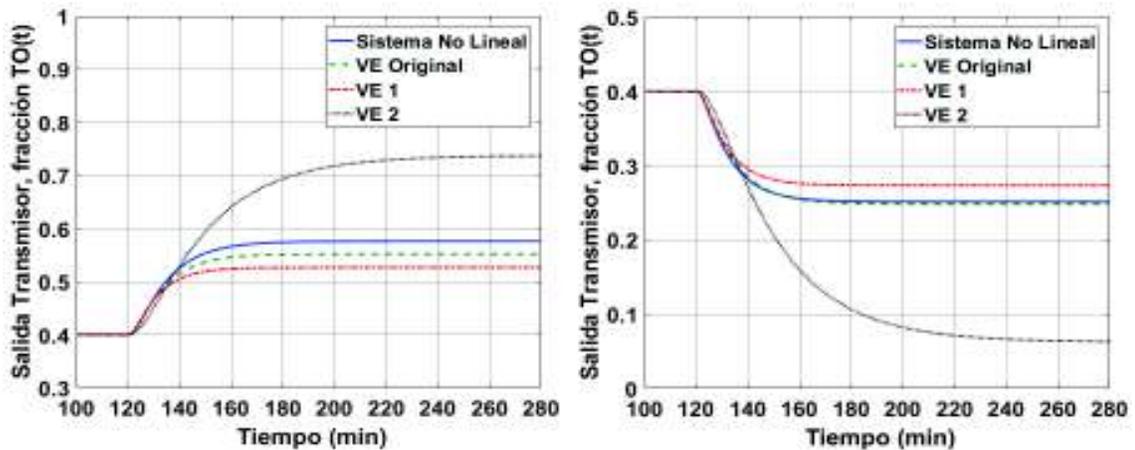
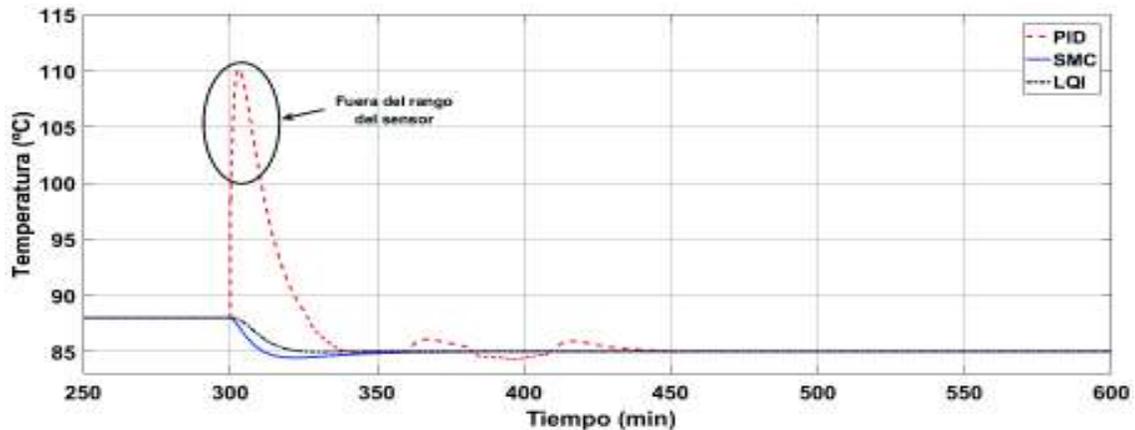


Figura 3.18 Efecto del error de modelado con variables de estado.

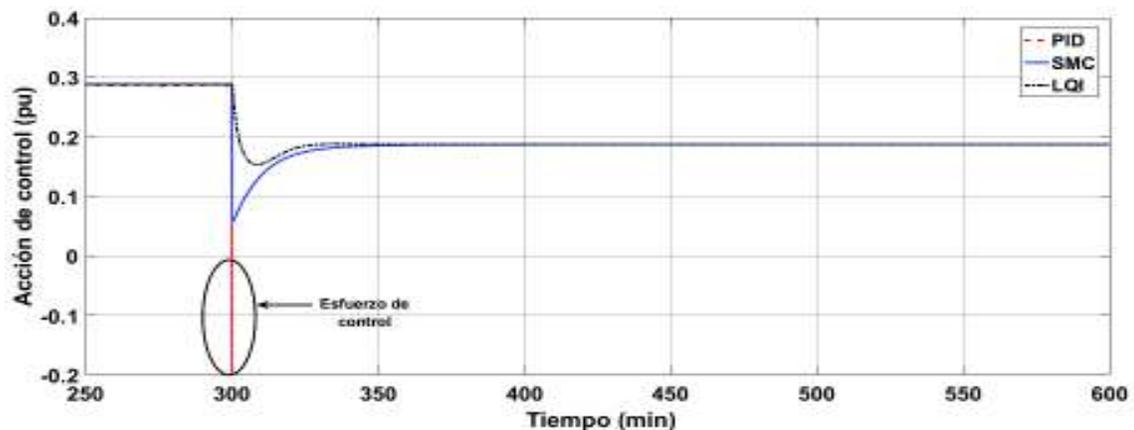
En la Figura 3.18 se observa los efectos del error de modelado en el sistema al usar el modelo en Variables de estado del sistema, tanto en un cambio hacia arriba como hacia debajo de 0.1 en la apertura de la válvula, en donde:

- **Sistema No Lineal:** Respuesta de la planta en lazo abierto.
- **VE Original:** Respuesta del modelo en variables de estado de la planta sin error de modelado.
- **VE 1:** Respuesta del modelo de la planta en variables de estado con error de modelado del -10%.
- **VE 2:** Respuesta del modelo de la planta en variables de estado con error de modelado del 100%.

- **Error de modelado del menos 10% más cambio de referencia a 85°C.**



**Figura 3.19** Respuesta ante un cambio de referencia a 85 °C con un error de modelado del menos 10%.



**Figura 3.20** Salidas de los controladores con error en el modelado del menos 10%, ante un cambio de referencia a 85°C.

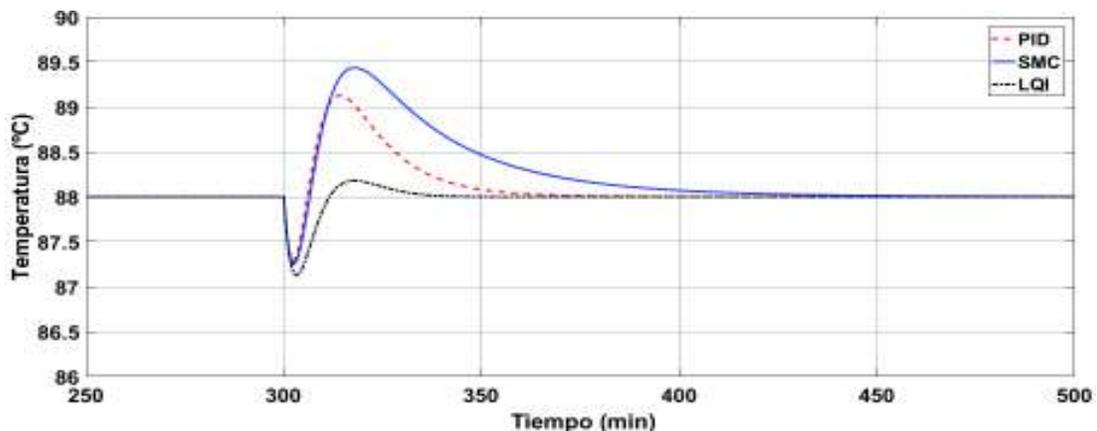
Como se observa en la Figura 3.19, los tres controladores llevan al sistema a su nueva referencia; sin embargo, el PID muestra una respuesta que no es posible manejar por el sensor utilizado en la planta. Además, su tiempo de establecimiento es mucho mayor que el de los otros dos controladores, esto también se traduce en un esfuerzo de control que se observa claramente en la Figura 3.20, en el caso del PID y el SMC se ve que a pesar de existir el error de modelado estos responden sin problemas.

**Tabla 3. 6** Índice IAE para error de modelado del menos 10% más cambio de referencia a 85°C.

Controlador	IAE
PID	20.15
SMC	1.68
LQI	1.62

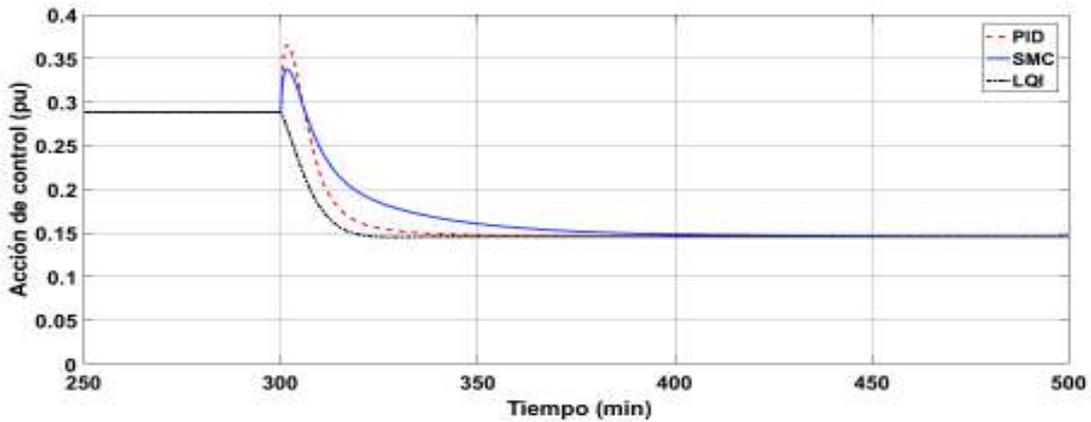
Como se espera al observar las respuestas de los controladores sobrepuestos, el PID presenta el IAE mas elevado de los tres, indicandonos que no es un controlador adecuado para este sistema cuando existe un error de modelado, por otro lado el SMC y el LQI presentan valores bajos y muy similares de IAE.

- **Error de modelado del menos 10% más perturbación del 50% del flujo de entrada.**



**Figura 3.21** Respuesta ante una perturbación del 50% del flujo de entrada con un error en el modelado del menos 10%.

En el caso de perturbaciones con error de modelado, se puede ver en la figura 3.21 que los tres controladores llevan al sistema de buena manera a su referencia, la diferencia se encuentra en la rapidez con la que se estabiliza el sistema siendo claramente el LQI el más rápido de los tres en este caso.



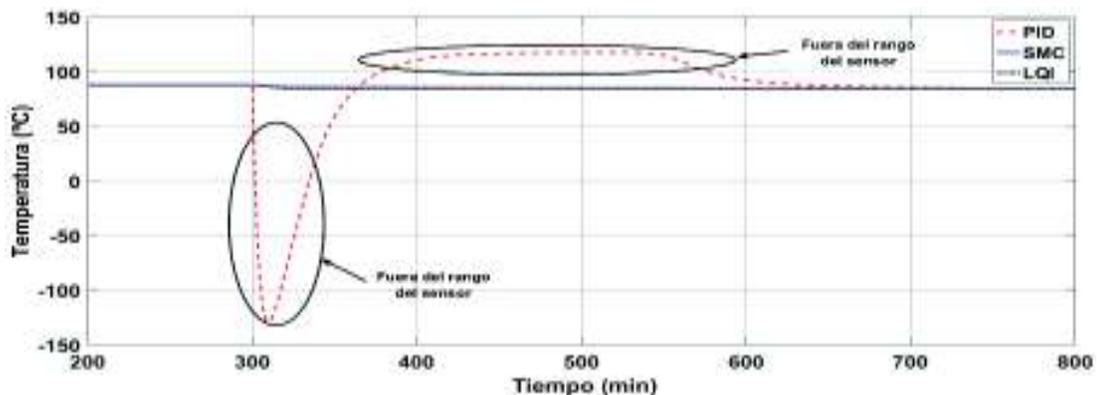
**Figura 3.22** Salidas de los controladores con error de modelado del menos 10%, ante una perturbación del 50% del flujo de entrada.

**Tabla 3.7** Índice IAE para error de modelado del menos 10% más perturbación del 50% del flujo de entrada.

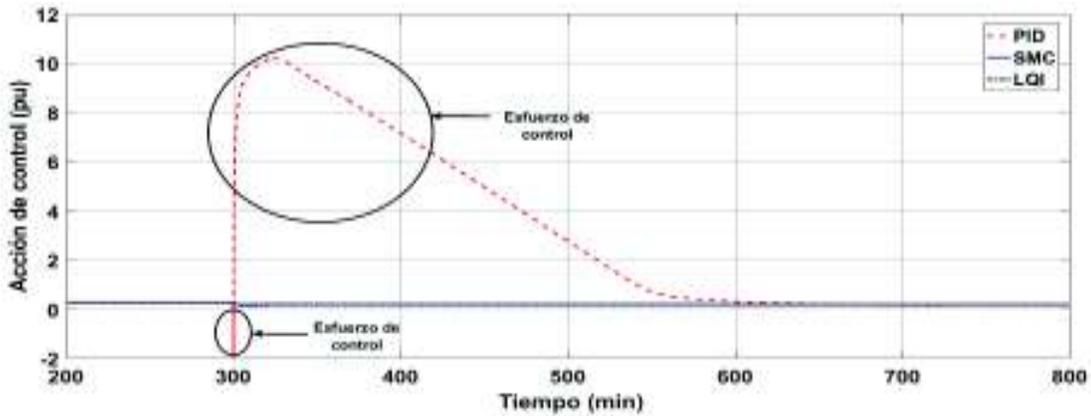
Controlador	IAE
PID	1.45
SMC	2.82
LQI	0.40

El índice IAE en este caso se presenta en la Tabla 3.7 e indica que el LQI es el que mejor responde ante perturbaciones cuando se tiene error de modelado, lo que comprueba lo visto en los gráficos obtenidos en la simulación, en el caso del SMC presenta un valor de IAE más elevado que los otros dos controladores, se puede ver que la respuesta de este es similar a la del PID, algo entendible debido a que el controlador PID es usado como superficie para el diseño del controlador SMC .

- **Error de modelado del 100% más cambio de referencia a 85°C.**

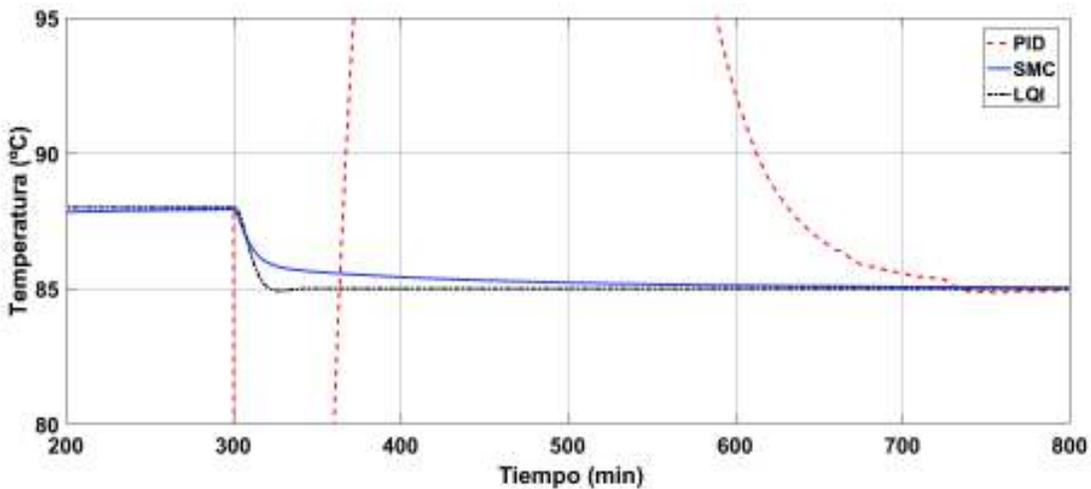


**Figura 3.23** Respuesta ante un cambio de referencia a 85°C, con error de modelado del 100%.



**Figura 3.24** Salidas de los controladores con error de modelado del 100%, ante un cambio de referencia a 85°C.

Para poder observar de mejor manera como se da el cambio de referencia a los 85°C haciendo uso del PID y el SMC cuando existe un error de modelado del 100%, se realiza un acercamiento en la Figura 3.23 que se observa en la Figura 3.25.



**Figura 3.25** Acercamiento de la Figura 3.23.

En este caso se observa que el error de modelado afecta principalmente al controlador tipo PID, haciendo que su respuesta no sea buena a pesar de llevar el sistema a la referencia, esto debido a que como se ve en la Figura 3.23 el sistema llega a trabajar fuera de los rangos del sensor, además en la Figura 3.24 se ve que este controlador genera esfuerzos de control severos en la válvula.

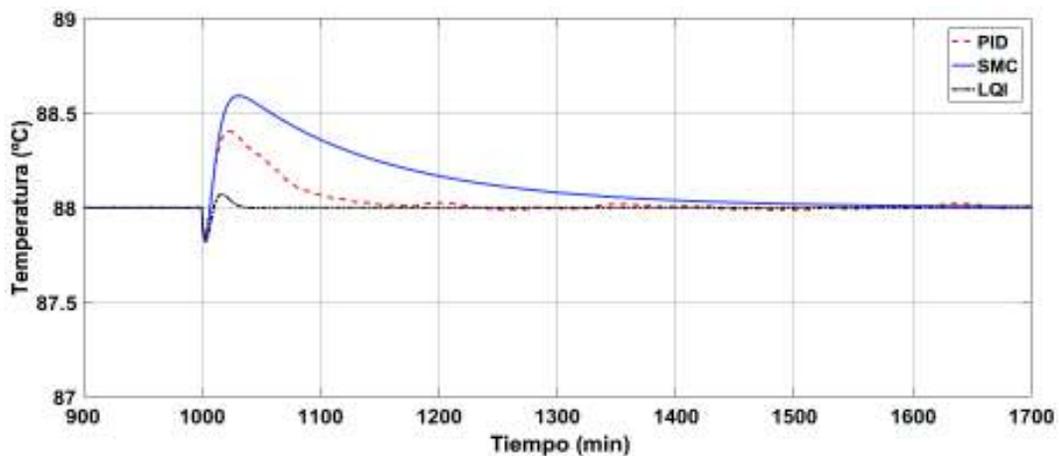
Por otra parte, tanto el SMC como el LQI llegan satisfactoriamente a la referencia siendo el LQI el más rápido de los dos, lo que se aprecia de mejor manera en la Figura 3.25.

**Tabla 3.8** Índice IAE para cambio de referencia a 85°C, con error de modelado del 100%.

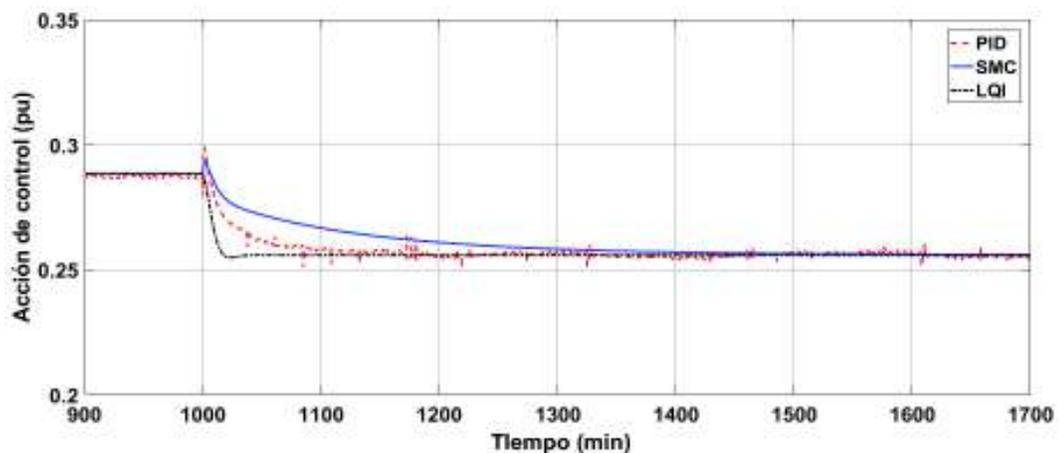
Controlador	IAE
PID	637
SMC	7.43
LQI	1.58

El índice IAE en este caso indica que el PID no es un buen controlador para manejar errores de modelado en esta planta. El controlador LQI es el que posee menor índice IAE por lo que se puede decir que es el mejor de los tres en esta prueba, el SMC muestra un valor mayor que del LQI debido a que es más lento al momento de tomar la referencia, sin embargo, sigue siendo una buena opción para el control de la planta.

- **Error de modelado de 100% más perturbación del 10% del flujo de entrada.**



**Figura 3.26** Respuesta ante una perturbación del 10% del flujo de entrada, con error de modelado del 100%.



**Figura 3.27** Salidas de los controladores con error de modelado del 100%, ante una perturbación del 10% del flujo de entrada.

En cuanto al rechazo de perturbaciones cuando se trabaja con errores de modelado, en la Figura 3.26 se observa que los tres controladores rechazan satisfactoriamente las mismas, siendo la diferencia el tiempo de establecimiento que poseen, es así que el LQI es el más rápido seguido del PID teniendo en último lugar al SMC. Se puede ver en la Figura 3.27 que la acción de control del PID tiene ciertos picos, que se hacen que la respuesta del sistema para este controlador presente pequeñas oscilaciones que no le permiten mantenerse fijo en la referencia una vez compensado el efecto de la perturbación.

**Tabla 3.9** Índice IAE para perturbación del 10% del flujo de entrada, con error de modelado del 100%.

Controlador	IAE
PID	1.55
SMC	4.57
LQI	0.11

Como se espera al observar las figuras de las respuestas, el controlador con el IAE más bajo es el LQI lo que da la idea que es el mejor ante este tipo de eventos, en el caso del PID y el SMC se ve valores mucho más elevados con respecto al LQI; sin embargo, se ve que logran contrarrestar el efecto de la perturbación, por lo cual los tres son buenas opciones para contrarrestar este tipo de eventos en la planta al tener un error de modelado del 100%.

### 3.2. Reactor con respuesta inversa

Este reactor presenta la particularidad de poseer una respuesta inversa como se estudió en los capítulos anteriores, en este caso se tiene una válvula y un transmisor porcentuales con rangos de trabajo de 0% a 100%.

En reactor se realizaron tres pruebas:

- Prueba 1: Se realizó un análisis del comportamiento de los controladores ante cambios en la referencia en la concentración de B, hacia arriba y hacia abajo del punto de operación (70%), a partir de que el sistema se encuentra en estado estable.
- Prueba 2: En esta prueba se analizó el comportamiento de los controladores ante perturbaciones en la concentración del componente A en la alimentación del reactor.

- Prueba 3: Para esta prueba se realizó un análisis de las respuestas de los controladores ante cambios de referencia y perturbaciones con errores de modelamiento del -10% y del 100%, los cuales se los obtuvo al multiplicar los parámetros  $(\tau, t_0, K)$  del modelo FOPDT o la matriz A de su representación en variables de estado por un factor que represente el error en el modelado.

### Prueba 1: cambios de referencia.

- Cambio de referencia al 67% de la concentración de B.

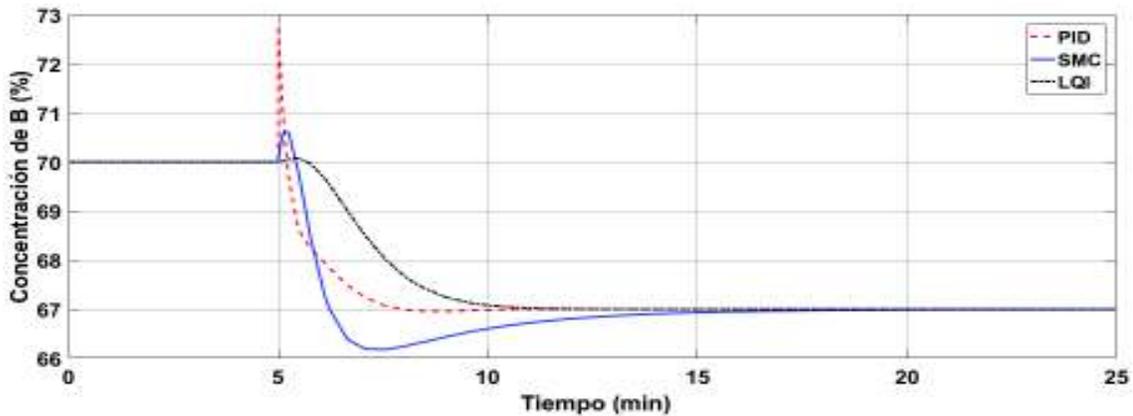


Figura 3.28 Respuesta ante un cambio de referencia al 67% de la concentración de B.

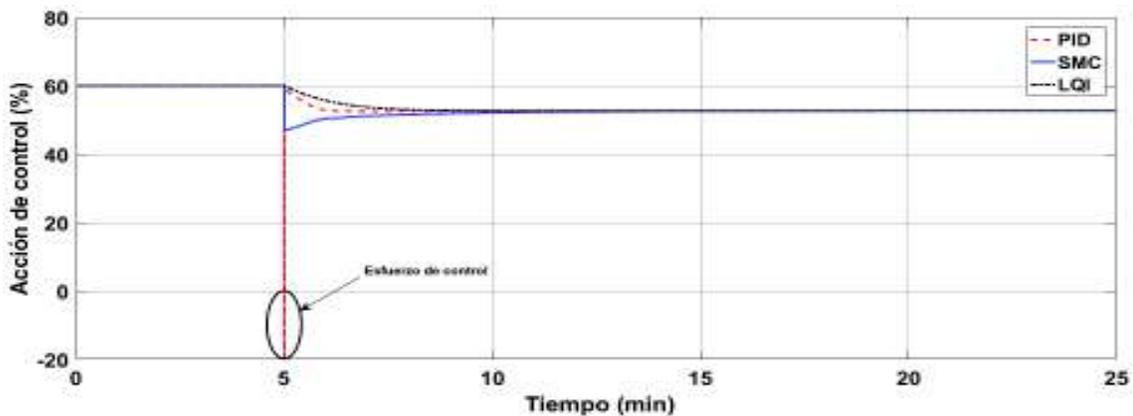


Figura 3.29 Salidas de los controladores ante un cambio de referencia al 67% de la concentración de B.

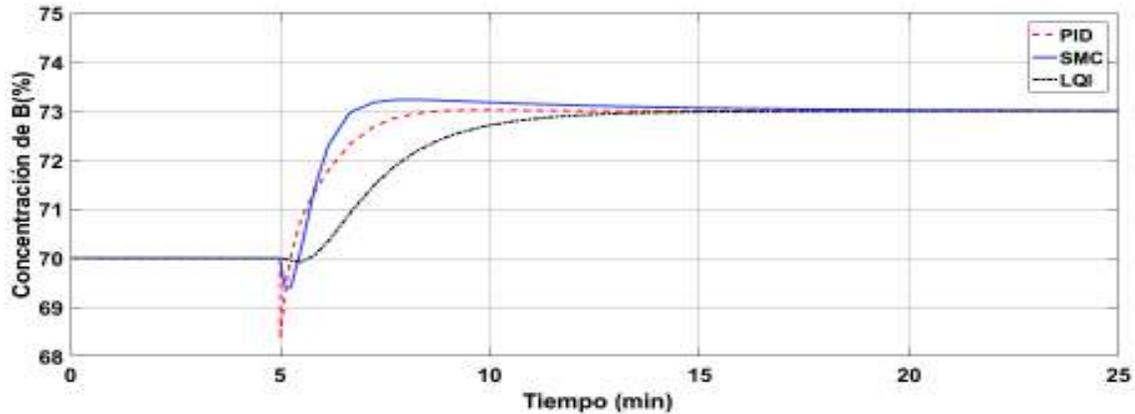
Como se observa en la Figura 3.28, los tres controladores diseñados llevan al sistema a la nueva referencia, la diferencia se encuentra en la rapidez en la que lo hacen, además se ve que el SMC presenta un sobre-pico mayor entre los tres. En la Figura 3.29 se encuentran representadas las acciones de control, entre las cuales destaca la del PID ya que presenta un esfuerzo de control al momento de realizar el cambio de referencia, este comportamiento no lo presenta el SMC a pesar de usar el PID como superficie.

**Tabla 3.10** Índice IAE para cambio de referencia al 67% de la concentración de B.

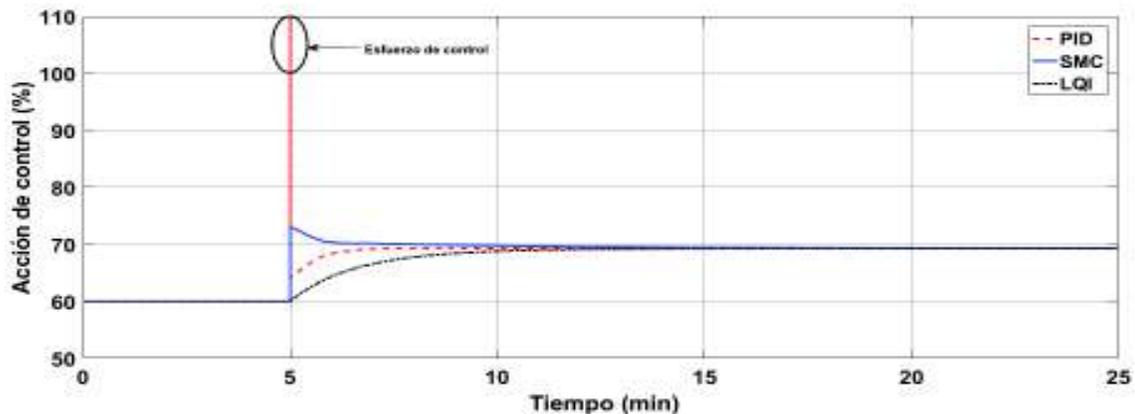
Controlador	IAE
PID	2.92
SMC	5.99
LQI	6.93

En la Tabla 3.10 se observan los índices IAE correspondientes al cambio de referencia a 67% de CB, se puede ver que las diferencias no son muy grandes entre los tres controladores, en especial entre el SMC y el LQI, es importante notar que el PID es el con un mejor índice a pesar de presentar un esfuerzo de control al momento del cambio de referencia, sin embargo, esto no garantiza que sea el mejor de los tres.

- **Cambio de referencia al 73% de la concentración de B.**



**Figura 3.30** Respuesta ante un cambio de referencia al 73% de la concentración de B.



**Figura 3.31** Salidas de los controladores ante un cambio de referencia al 73% de la concentración de B.

Como se ve en la Figura 3.30 los tres controladores llevan al sistema a la nueva referencia sin problemas, además se ve que en el caso del LQI la influencia de la

respuesta inversa es menor que en los otros controlares, sin embargo, su respuesta es más lenta. En la Figura 3.31 se observa que al igual que en el cambio de referencia hacia abajo, el PID presenta un esfuerzo de control al momento de realizar el cambio e referencia, algo que es una desventaja para este controlador.

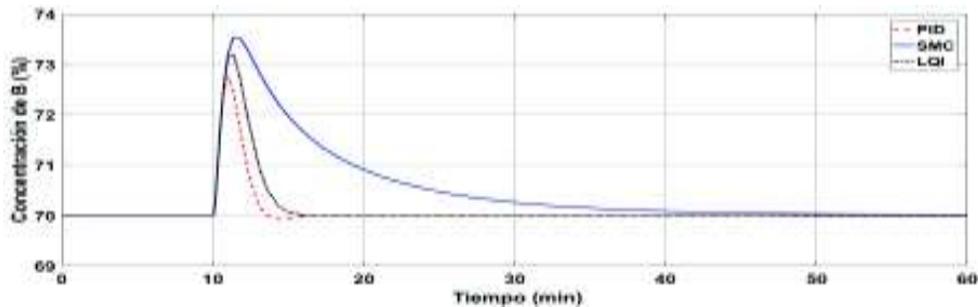
**Tabla 3.11** Índice IAE para cambio de referencia al 73% de la concentración de B.

Controlador	IAE
PID	3.59
SMC	4.35
LQI	8.20

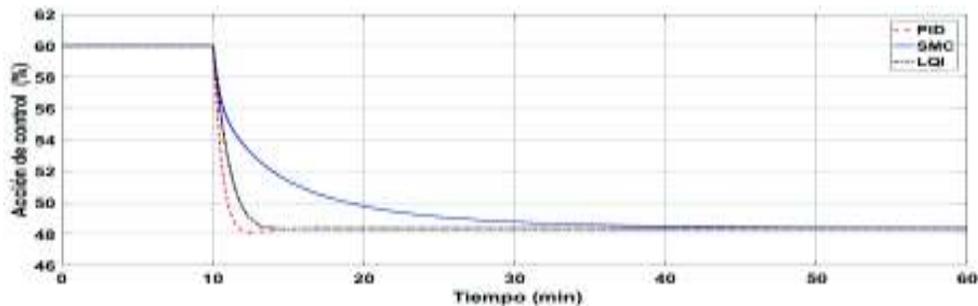
Los índices IAE para esta prueba nos indican que el PID es el mejor seguido del SMC, sin embargo, se debe tomar en cuenta que el PID nuevamente presenta problemas de esfuerzo de control en la válvula, en el caso del LQI este índice presenta un valor elevado que se debe a su respuesta lenta ante el cambio de referencia.

### Prueba 2: respuesta ante perturbaciones.

- **Perturbación 10% de la concentración de A en la entrada.**



**Figura 3.32** Respuesta ante una perturbación del 10% en la concentración de A en la entrada.



**Figura 3.33** Salidas de los controladores ante una perturbación del 10% de la concentración de A en la entrada.

Los parámetros sintonizados de los tres controladores, para este reactor se presentan en las Ecuaciones 3.4, 3.5 y 3.6.

$$K_p = 3.5$$

$$K_i = 4$$

$$K_d = 0.6$$

**Ecuación 3.4** Parámetros sintonizados del controlador PID.

$$\lambda_1 = 4 \text{ [min]}^{-1}$$

$$\lambda_0 = 2 \text{ [min]}^{-2}$$

$$K_D = 90 \text{ [fracción CO]}$$

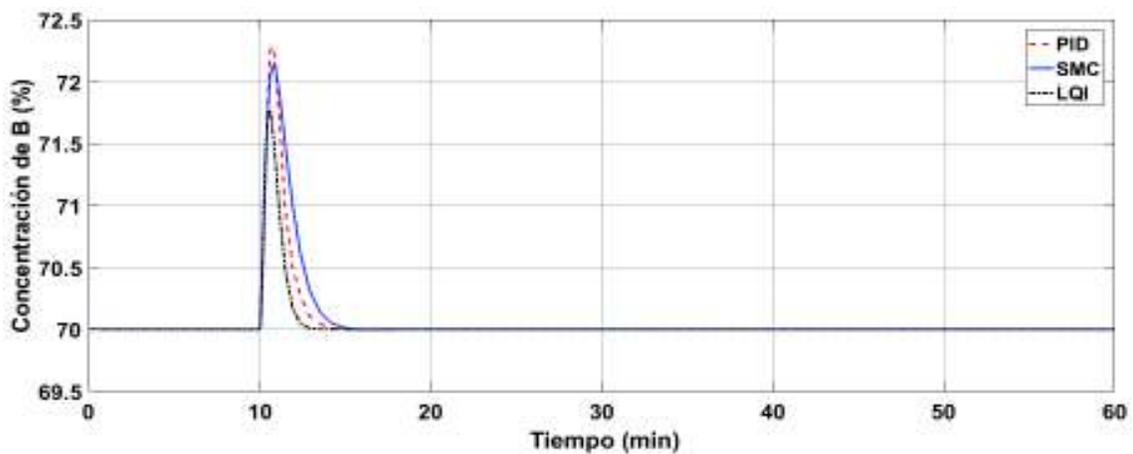
$$\delta = 100 \text{ [fracción TO/min]}$$

**Ecuación 3.5** Parámetros sintonizados del controlador SMC.

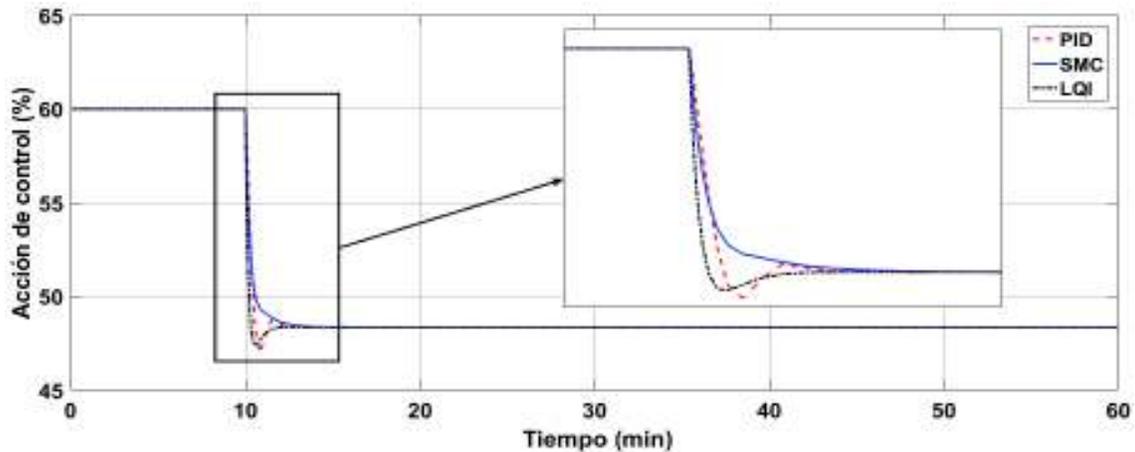
$$Q = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 150 & 0 \\ 0 & 0 & 1000 \end{bmatrix}$$

$$R = 3$$

**Ecuación 3.6** Parámetros sintonizados del controlador LQI.



**Figura 3.34** Respuesta ante una perturbación del 10% en la concentración de A en la entrada con controladores sintonizados.



**Figura 3.35** Salidas de los controladores ante una perturbación del 10% de la concentración de A en la entrada con controladores sintonizados.

Como se observa en la Figura 3.32, los tres controladores llevan al sistema a su referencia, después de haber sufrido una perturbación en la concentración, en este caso es notable que el SMC tiende a ser lento por lo cual su tiempo de establecimiento luego de la perturbación es elevado, esto también se ve reflejado en su acción de control la cual se puede observar en la Figura 3.33.

Como se espera el índice IAE del controlador SMC para esta prueba es muy elevado con respecto a los otros dos controladores cuando no están sintonizados, lo que nos indica que la respuesta ante perturbaciones en este caso es demasiado lenta, cabe indicar que esto se puede mejorar si se sintonizan los controladores diseñados.

**Tabla 3.12** Índice IAE para una perturbación del 10% de la concentración de A en la entrada.

Controlador	IAE controladores sin sintonizar	IAE controladores sintonizados
PID	4.72	2.91
SMC	27.18	3.73
LQI	7.13	1.87

Cuando se realiza la sintonización de los controladores, se observa que el controlador LQI tiene un mejor índice de desempeño (Tabla 3.12), además se puede notar por las Figuras 3.34 y 3.35, que existe una mejora importante en el desempeño de los controladores, en especial del SMC, lo cual se confirma en su índice IAE.

### Prueba 3: errores de modelado de la planta

En la Figura 3.36 se observa los efectos del error de modelado en el sistema al usar la FOPDT, tanto en un cambio hacia arriba como hacia debajo del 10% en la apertura de la válvula, en donde:

- **Sistema No Lineal:** respuesta de la planta en lazo abierto.
- **FOPDT Original:** Respuesta del modelo FOPDT de la planta sin error de modelado.
- **FOPDT 1:** Respuesta del modelo FOPDT de la planta con error de modelado del menos 10%.

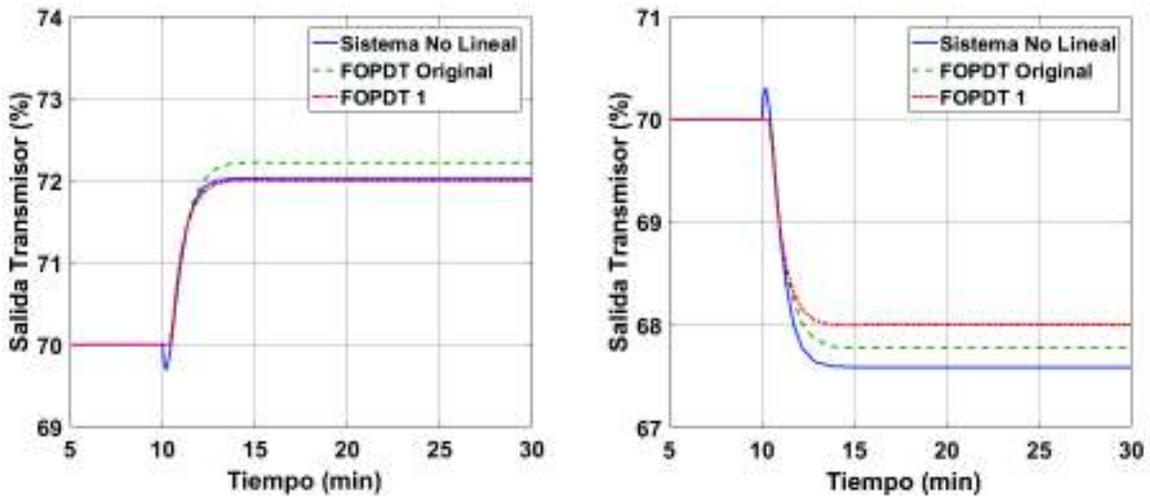


Figura 3.36 Efecto del error de modelado con FOPDT.

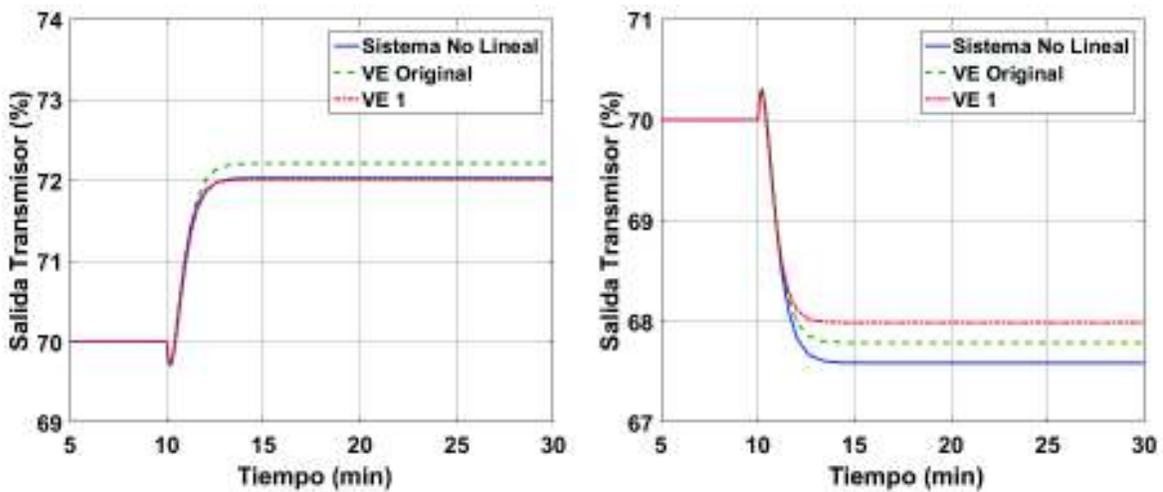
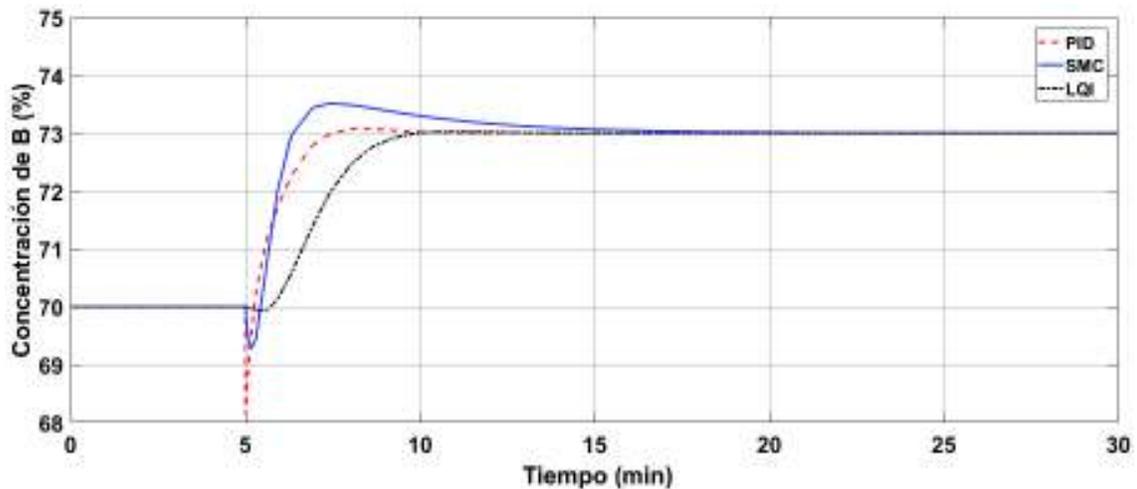


Figura 3.37 Efecto del error de modelado con variables de estado.

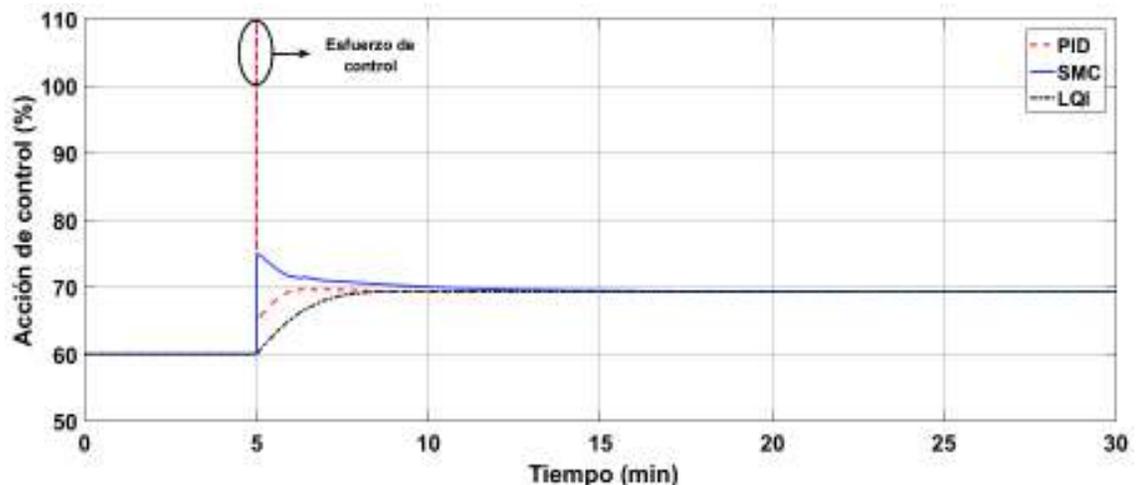
En la Figura 3.37 se observa los efectos del error de modelado en el sistema al usar el modelo en Variables de estado del sistema, tanto en un cambio hacia arriba como hacia debajo del 10% en la apertura de la válvula, en donde:

- **Sistema No Lineal:** respuesta de la planta en lazo abierto.
- **VE Original:** Respuesta del modelo en variables de estado de la planta sin error de modelado.
- **VE 1:** Respuesta del modelo de la planta en variables de estado con error de modelado del -10%.

- **Error de modelado del menos 10% más cambio de referencia a 73%.**



**Figura 3.38** Respuesta ante un cambio de referencia a 73%, con error de modelado del menos 10%.



**Figura 3.39** Salidas de los controladores con error de modelado del menos 10%, ante un cambio de referencia a 73%.

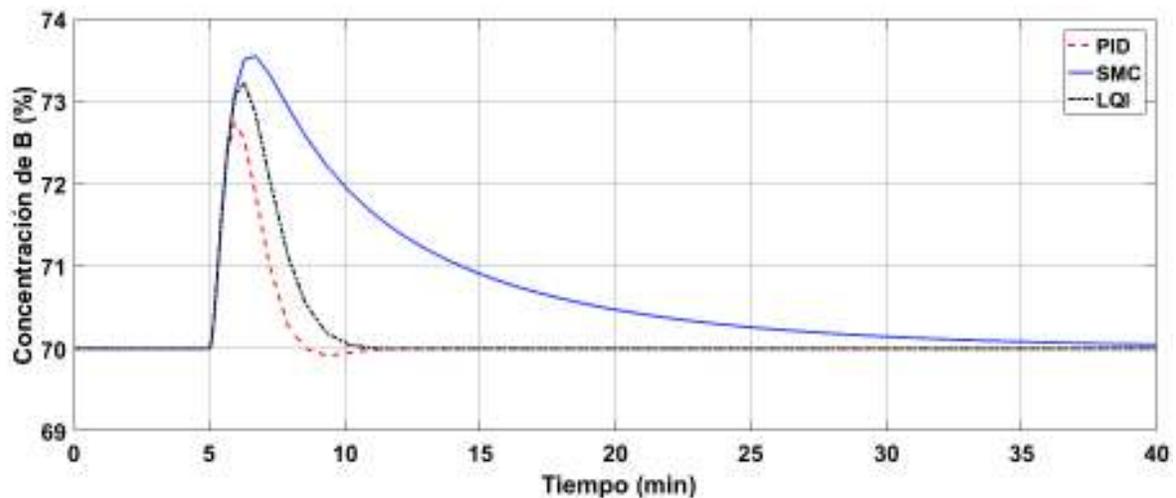
Se puede apreciar en la Figura 3.38 que el controlador PID provoca un pico inverso de mayor amplitud que los otros controladores en la respuesta del sistema, mientras que el controlador SMC hace que el sistema tarde más en alcanzar su valor deseado. La Figura 3.39 refleja que la acción de control del PID excede el 100% de la apertura de la válvula, lo cual hace que esta tenga un esfuerzo de control, por otra parte, la acción de control del SMC a pesar de poseer una superficie PID tiene una respuesta menos brusca y la acción de control del LQI tiene un comportamiento más suave que los otros dos controladores.

**Tabla 3.13** Índice IAE para error de modelado del menos 10% más cambio de referencia a 73% de la concentración de B.

Controlador	IAE
PID	3.58
SMC	4.37
LQI	8.20

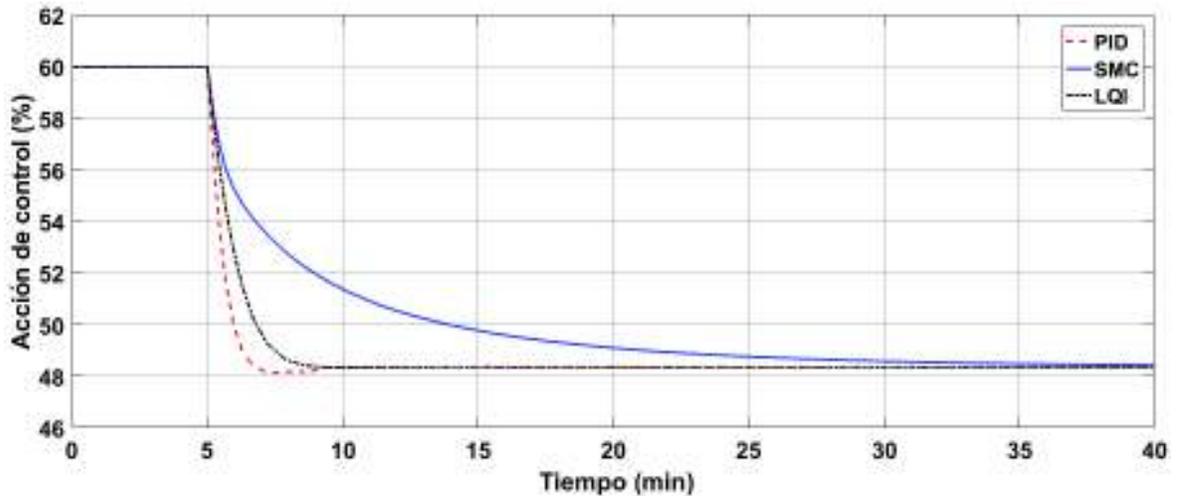
La Tabla 3.13 indica que el controlador con menor índice IAE es el PID, el cual hace que el sistema alcance su valor deseado más rápido que los otros controladores, ya que su acción de control es más brusca. El controlador SMC posee un índice IAE intermedio, pero su acción de control no supera el 100% de apertura de la válvula, lo que hace que el elemento de control no sufra mayor esfuerzo, por último, el LQI es el controlador con mayor índice IAE debido a que su respuesta es menos brusca, pero a su vez más lenta.

- **Error de modelado del menos 10% más perturbación del 10% de la concentración de A en la entrada.**



**Figura 3.40** Respuesta ante una perturbación del 10% de la concentración de A en la entrada con error de modelado del menos 10%.

La Figura 3.40 nos indica que el controlador que tiene una respuesta más suave en esta prueba pero que a su vez tarda más tiempo en estabilizar al sistema, es el controlador SMC, por otro lado, se puede notar que los controladores PID y LQI provocan un pequeño pico inverso antes de lograr estabilizar al sistema, los mismos que se puede notar en sus acciones de control, Figura 3.41.



**Figura 3.41** Salidas de los controladores con error de modelado del 10%, ante una perturbación del 10% de la concentración de A en la entrada.

**Tabla 3.14** Índice IAE para error de modelado del menos 10% más perturbación del 10% en la concentración de A en la entrada.

Controlador	IAE
PID	4.71
SMC	26.77
LQI	7.13

En la Tabla 3.14 se tiene que el controlador con mayor índice IAE resulta el SMC, esto es debido a que le toma más tiempo que a los otros controladores en hacer que el sistema alcance la estabilidad, esto se da gracias a problemas de sintonización de sus parámetros, lo cuales no se han modificado para lograr una comparación lo más justa posible con los otros controladores. Por otra parte, el controlador con menor índice IAE es el PID, en el cual la respuesta del sistema no tiene un sobre pico tan alto como los otros dos controladores e incluso su acción de control es más rápida que las acciones de control del SMC y LQI.

### 3.3. Reactor con varios puntos de operación

El tercer reactor abordado en este trabajo posee múltiples estados estacionarios, dos estables y uno inestable, para condiciones iniciales específicas vistas en la Tabla 2.3 del capítulo anterior. Para el desarrollo de este trabajo se consideró que este reactor debe operar a los 404.7°K, el cual es una de los puntos de operación estables del sistema (Figura 2.7), el transmisor de temperatura usado en esta planta tiene un rango de 300°K a 500°K, por esto todas las pruebas deben encontrarse dentro de este rango, además la válvula que es el elemento final de control, trabaja en por unidad por lo que el controlador debe entregar valores entre 0 y 1 para no generar un esfuerzo de control en la misma.

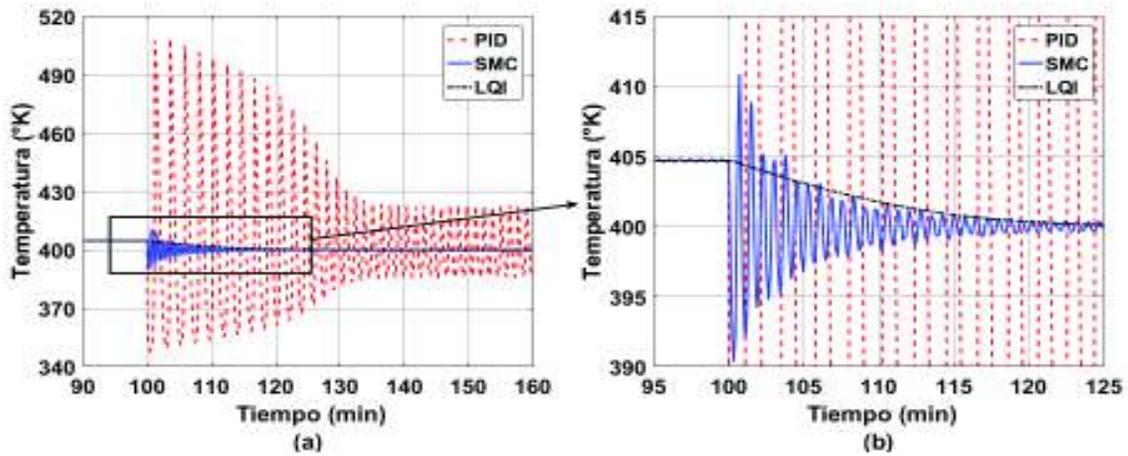
En este reactor se realizaron tres pruebas:

- Prueba 1: Se realizó un análisis de la respuesta de la planta ante cambios en la referencia en la temperatura del reactor, hacia arriba y hacia abajo del punto de operación (404.7°K), a partir de que el sistema se encuentra en estado estable, para esto se tomó en cuenta el rango del transmisor de temperatura.
- Prueba 2: En esta prueba se analizó el comportamiento de los controladores ante perturbaciones, las que en este reactor pueden estar presentes en dos parámetros específicamente, como lo son la concentración a la entrada y el flujo de ingreso al tanque reactor.
- Prueba 3: Para esta prueba se realizó un análisis de las respuestas de los controladores ante cambios de referencia y perturbaciones con errores de modelamiento del -10% y del 100%, los cuales se los obtuvo al multiplicar los parámetros ( $\tau, t_0, K$ ) del modelo FOPDT o la matriz A de su representación en variables de estado por un factor que represente el error en el modelado.

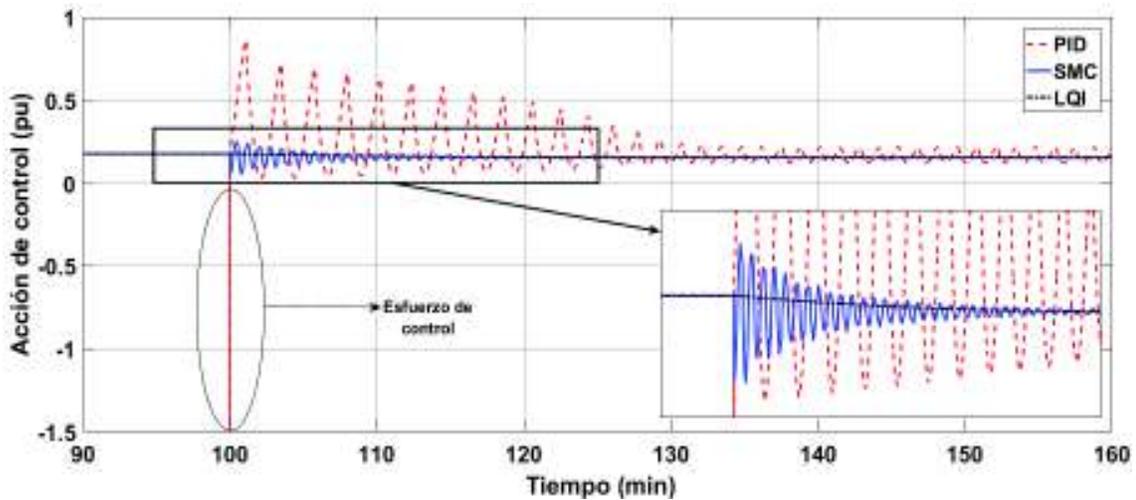
#### Prueba 1: cambios de referencia.

- Cambio de referencia a 400°K.

La Figura 3.42 se divide en dos partes, la parte (a) presenta la respuesta del sistema ante el cambio de referencia a 400°K en escala normal y la parte (b), la cual muestra una ampliación de escala del recuadro indicado en la parte (a), esto se lo realiza para observar de mejor manera el comportamiento del sistema.



**Figura 3.42** Respuesta ante cambio de referencia a 400°K.



**Figura 3.43** Salidas de los controladores ante cambio de referencia a 400°K.

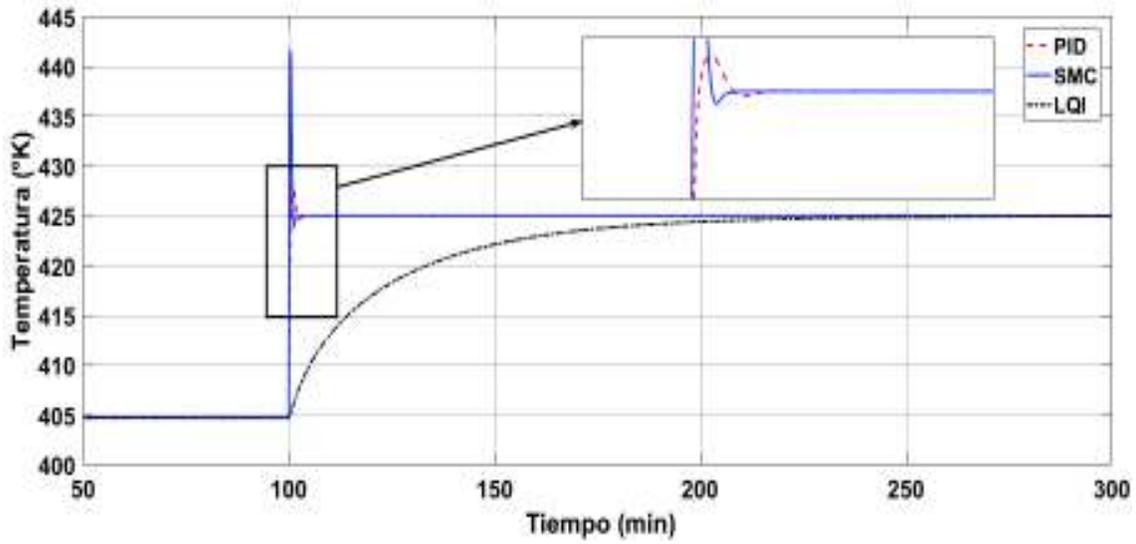
En este caso se observa que el controlador PID tiene una respuesta oscilatoria y su acción de control posee un esfuerzo de control que estaría forzando físicamente a la válvula de control. En el caso de los otros controladores se observa un mejor comportamiento, el SMC por un lado tiene una respuesta oscilatoria la cual es de menor amplitud que en el controlador PID y que se estabiliza aproximadamente a los 20 minutos, mientras que en el controlador LQI la respuesta de sistema es menos brusca, sin oscilaciones, de igual manera lo es su acción de control.

**Tabla 3.15** Índice IAE para cambio de referencia a 400°K.

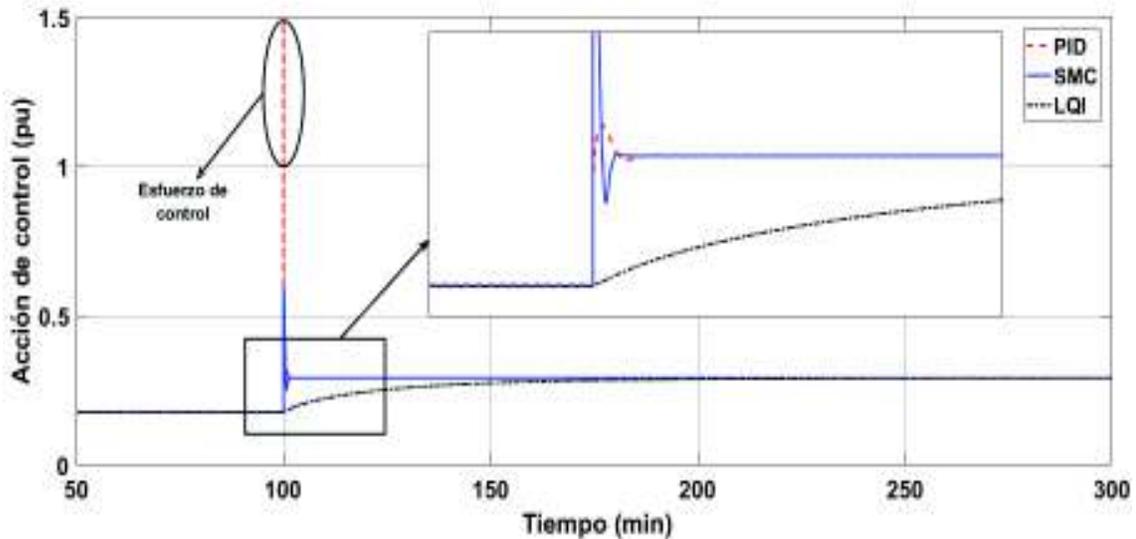
Controlador	IAE
PID	3.46
SMC	0.07
LQI	0.21

Como se observa en la Tabla 3.15, en el caso del controlador PID el índice IAE es elevado como se esperaba al observar su respuesta, en el caso del SMC tiene el mejor índice de los tres controladores, esto es debido a que en esta prueba posee una respuesta más rápida que el LQI lo que permite que el sistema llegue antes al nuevo valor de referencia.

- Cambio de referencia a 425°K.



**Figura 3.44** Respuesta ante cambio de referencia a 425°K.



**Figura 3.45** Salidas de los controladores ante un cambio de referencia a 425°K.

Para el caso de un cambio de referencia mayor a los 404.7°K las respuestas del sistema son menos bruscas y no oscilatorias, ya que en estos puntos el sistema se encuentra en una zona lejana a la de inestabilidad. Como se observa en la Figura 3.45 La salida del

controlador PID sobrepasa el rango de operación de la válvula de control, lo que provoca que la respuesta de temperatura tenga un sobre pico más alto que los otros controladores, por otro lado, en el controlador SMC, a pesar de poseer la superficie PID, no se obtiene una respuesta tan agresiva y su acción de control no excede al valor máximo de operación de la válvula de control. Por último, el controlador LQI posee nuevamente una respuesta más suave que los controladores anteriores, pero eso hace que el sistema alcance su valor deseado (425°K) de una manera más lenta, aproximadamente 150 minutos más tarde que los controladores anteriormente mencionados.

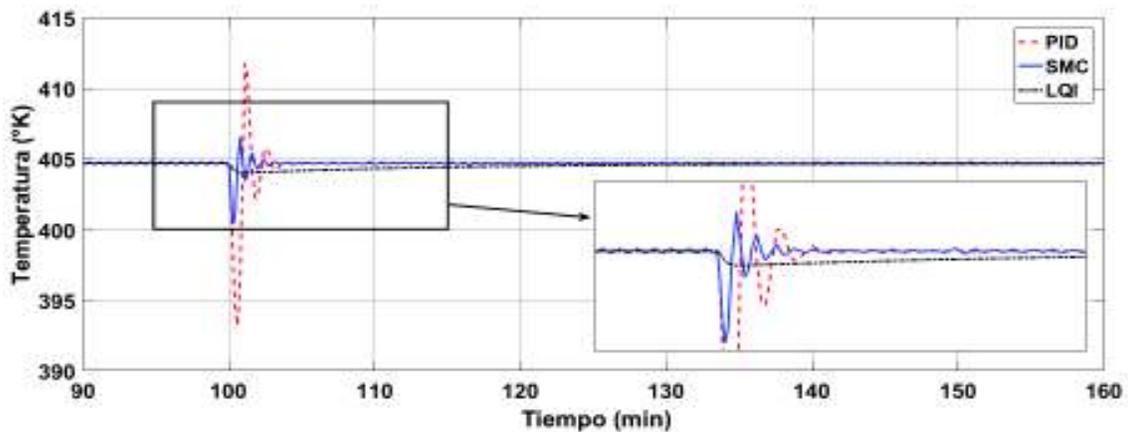
**Tabla 3.16** Índice IAE para cambio de referencia a 425°K.

Controlador	IAE
PID	0.056
SMC	0.048
LQI	2.495

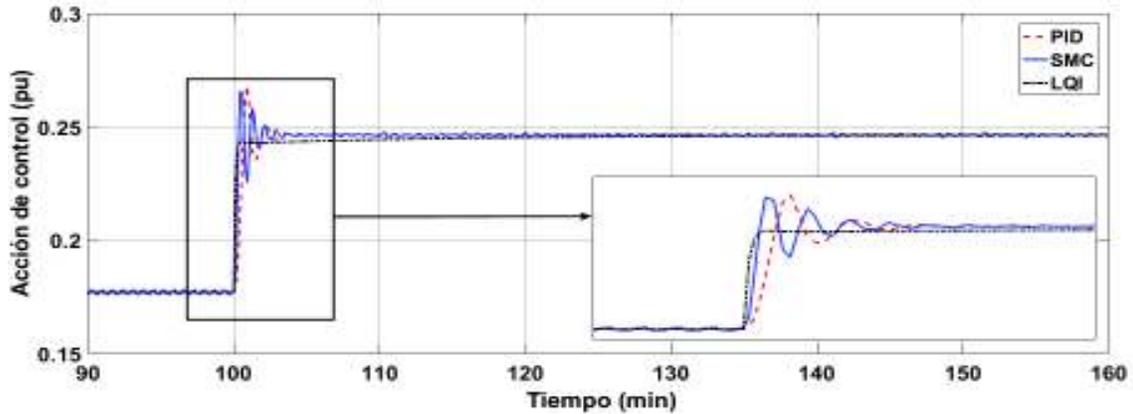
La Tabla 3.16 nos indica que el controlador que tiene mayor valor de IAE es el LQI debido a que su respuesta es más lenta que los otros dos y su error con respecto a la nueva referencia se mantiene mayor por mucho más tiempo. En el caso del SMC y el PID se obtienen valores pequeños y similares dado a que el SMC tiene superficie PID.

### Prueba 2: respuesta ante perturbaciones.

- Perturbación del menos 10% en la concentración de A en la entrada.



**Figura 3.46** Respuesta ante perturbación de menos 10% en la concentración de A en la entrada.



**Figura 3.47** Salidas de los controladores ante una perturbación de menos 10% en concentración de A en la entrada.

Como se observa en las Figuras 3.46 las respuestas debido a los controladores PID y el SMC tienen un comportamiento inicial oscilatorio ante este tipo de perturbación en los cinco primeros minutos, y que en el caso del PID estas oscilaciones alcanzan amplitudes más altas que en el SMC, cuando no están sintonizados. Por otro lado, el regulador LQI sin sintonizar da una respuesta más suave, pero que actúa de manera más lenta que los dos controladores mencionados anteriormente. De igual manera la acción de control que da el LQI, Figura 3.47, no posee oscilaciones mientras que las acciones de control del PID y SMC si las tienen.

Los parámetros sintonizados de los tres controladores, para este reactor se presentan en las Ecuaciones 3.7, 3.8 y 3.9.

$$K_p = 1$$

$$K_i = 5$$

$$K_d = 0.3$$

**Ecuación 3.7** Parámetros sintonizados del controlador PID.

$$\lambda_1 = 24 \text{ [min]}^{-1}$$

$$\lambda_0 = 3.5 \text{ [min]}^{-2}$$

$$K_D = 4 \text{ [fracción CO]}$$

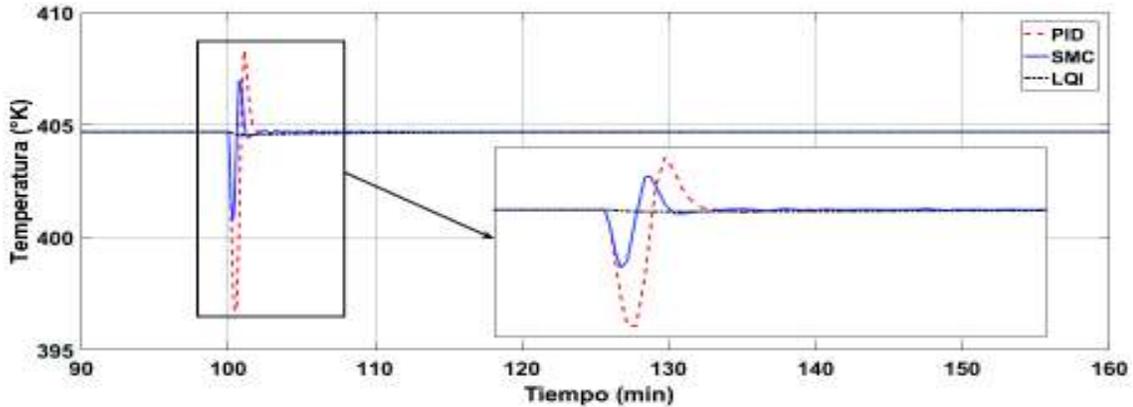
$$\delta = 5 \text{ [fracción TO/min]}$$

**Ecuación 3.8** Parámetros sintonizados del controlador SMC.

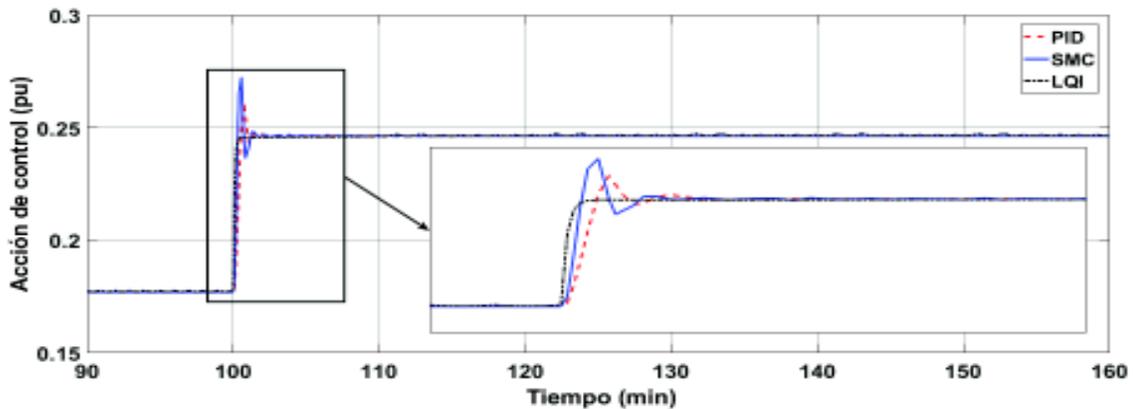
$$Q = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1000 \end{bmatrix}$$

$$R = 8500$$

**Ecuación 3.9** Parámetros sintonizados del controlador LQI.



**Figura 3.48** Respuesta ante perturbación de menos 10% en la concentración de A en la entrada con controladores sintonizados.



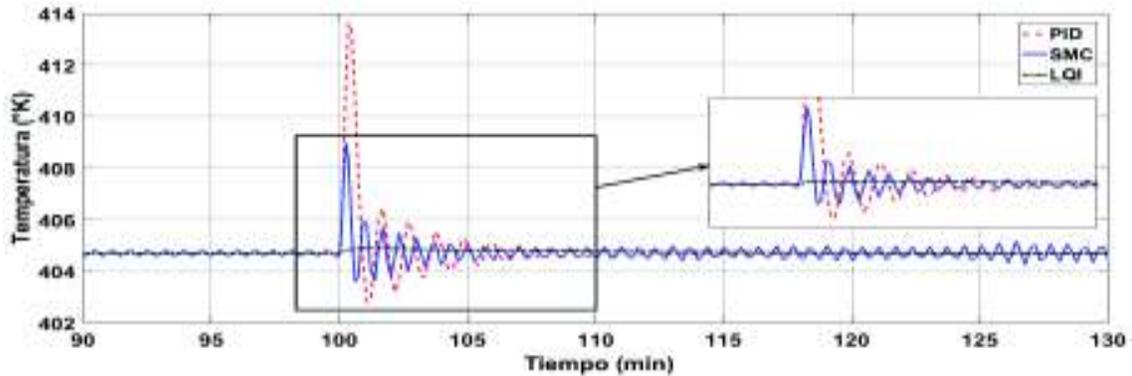
**Figura 3.49** Salidas de los controladores ante una perturbación de menos 10% en concentración de A en la entrada con controladores sintonizados.

**Tabla 3.17** Índice IAE ante una perturbación del menos 10% de la concentración de A en la entrada.

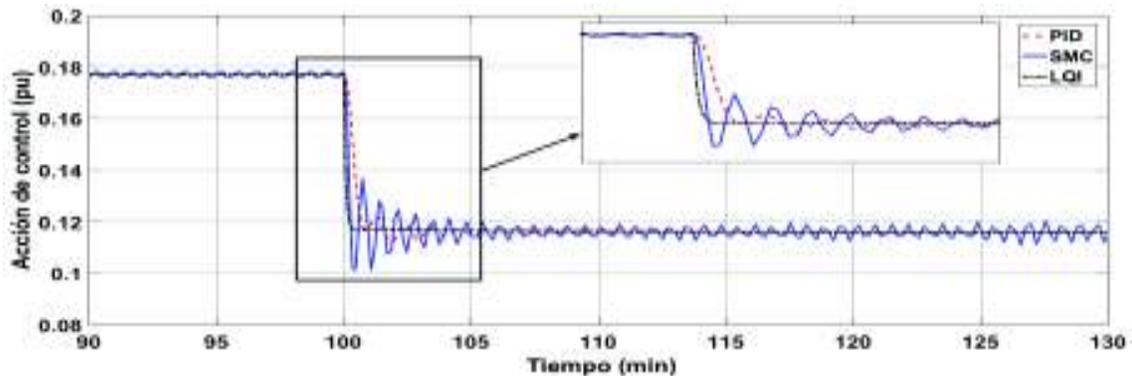
Controlador	IAE controladores sin sintonizar	IAE controladores sintonizados
PID	0.035	0.0213
SMC	0.008	0.0066
LQI	0.054	0.0062

Como se observa en la Tabla 3.17, que cuando los controladores no están sintonizados, el controlador SMC es el que posee el menor valor, seguido del controlador PID y el controlador LQI posee el mayor índice IAE, esto debido a que el SMC y el PID logran estabilizar al sistema en menor tiempo que el LQI, pero el SMC no tiene valores tan altos de error durante este tiempo dado que sus oscilaciones no poseen amplitudes altas como en el PID.

- **Perturbación de más 10% en la concentración de A en la entrada.**



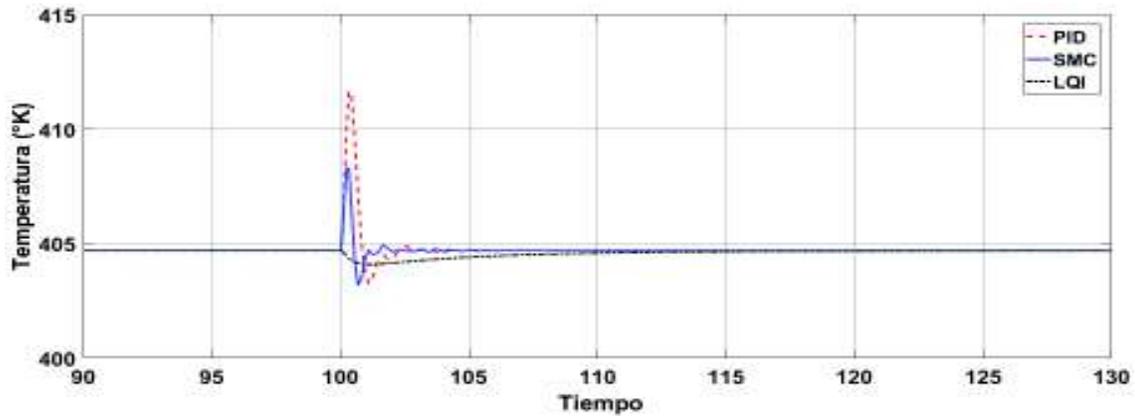
**Figura 3.7** Respuesta ante perturbación de más 10% en concentración de A en la entrada.



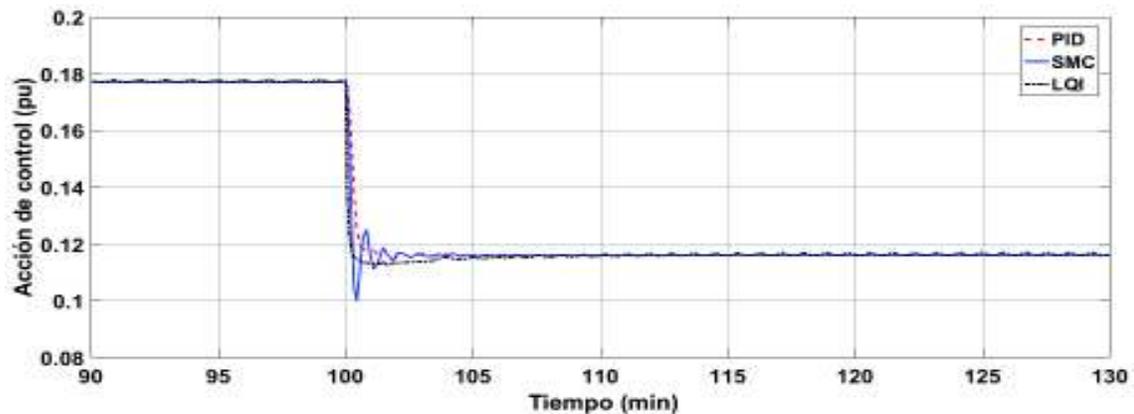
**Figura 3.8** Salidas de los controladores ante perturbación de más 10% en concentración de A en la entrada.

En la Figuras 3.50, cuando los controladores no están sintonizados, se observa que tanto el controlador PID y SMC hacen que el sistema tenga una respuesta oscilatoria ante la perturbación del 10% de concentración inicial, en el caso del controlador SMC estas oscilaciones a pesar que disminuyen en amplitud no desaparecen a lo largo del tiempo (chattering) como en el caso del PID que, a los 10 minutos aproximadamente, dichas oscilaciones desaparecen. Por otro lado, el controlador LQI no provoca dichas

oscilaciones en el sistema y logra alcanzar la estabilidad ante la perturbación de concentración del 10% de una forma más suave.



**Figura 3.52** Respuesta ante perturbación de más 10% en la concentración de A en la entrada con controladores sintonizados.



**Figura 3.53** Salidas de los controladores ante una perturbación de más 10% en concentración de A en la entrada con controladores sintonizados.

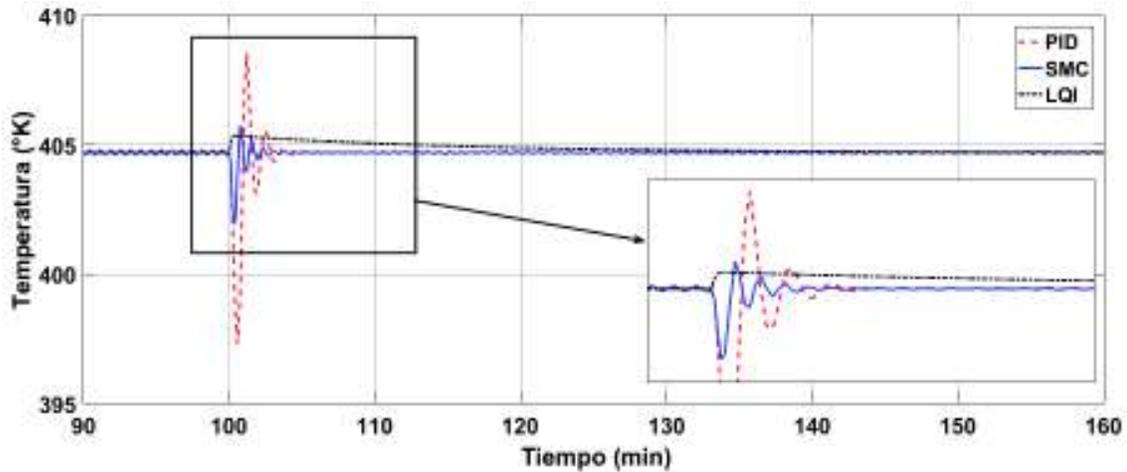
Las gráficas de las acciones de control que se observan en la Figura 3.51, cuando los controladores no están sintonizados, nos indican que las oscilaciones que se tienen en la respuesta de temperatura se reflejan en las leyes de control del PID y del SMC, mientras que la acción de control del LQI tiene un mejor comportamiento ante esta perturbación de concentración inicial.

**Tabla 3.18** Índice IAE ante perturbación de 10% en concentración de A en la entrada.

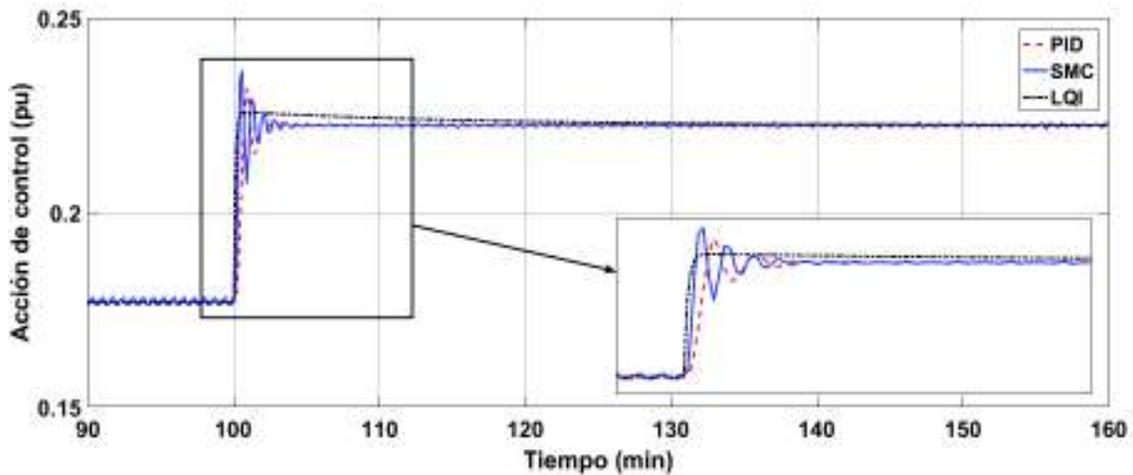
Controlador	IAE controladores sin sintonizar	IAE controladores sintonizados
PID	0.0277	0.0157
SMC	0.0096	0.0049
LQI	0.0092	0.0180

El índice IAE del controlador LQI es el de menor valor de los tres controladores cuando se encuentran sin sintonizar, seguido del SMC y por último el PID, esto se debe a que el controlador LQI tiene una mejor acción de control, más suave a los otros dos controladores, lo que provoca que la respuesta de temperatura con este controlador tenga menor error mientras el sistema trata de estabilizarse de la acción de perturbación.

- **Perturbación de menos 10% en el flujo de entrada.**



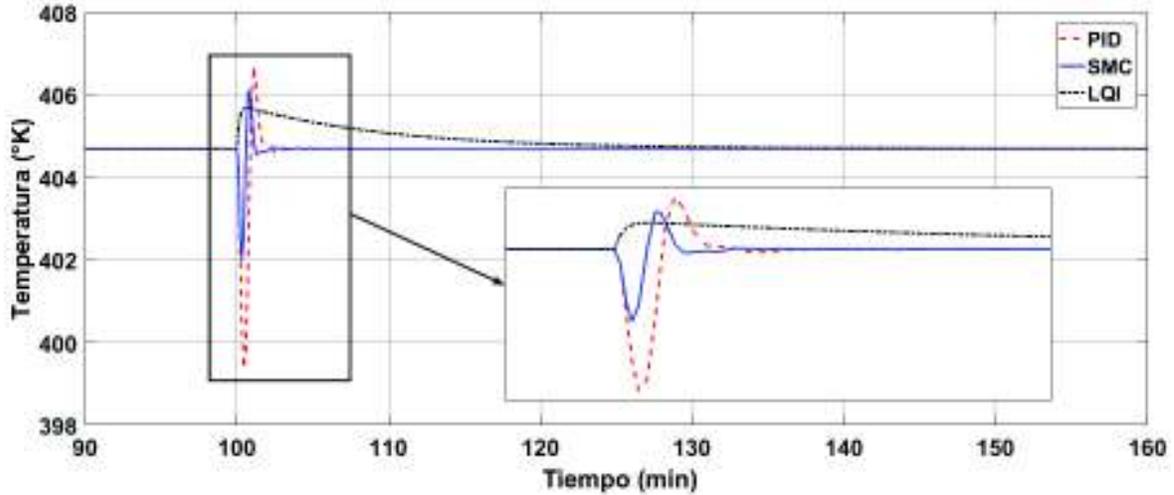
**Figura 3.54** Respuesta ante una perturbación del menos 10% en el flujo de entrada.



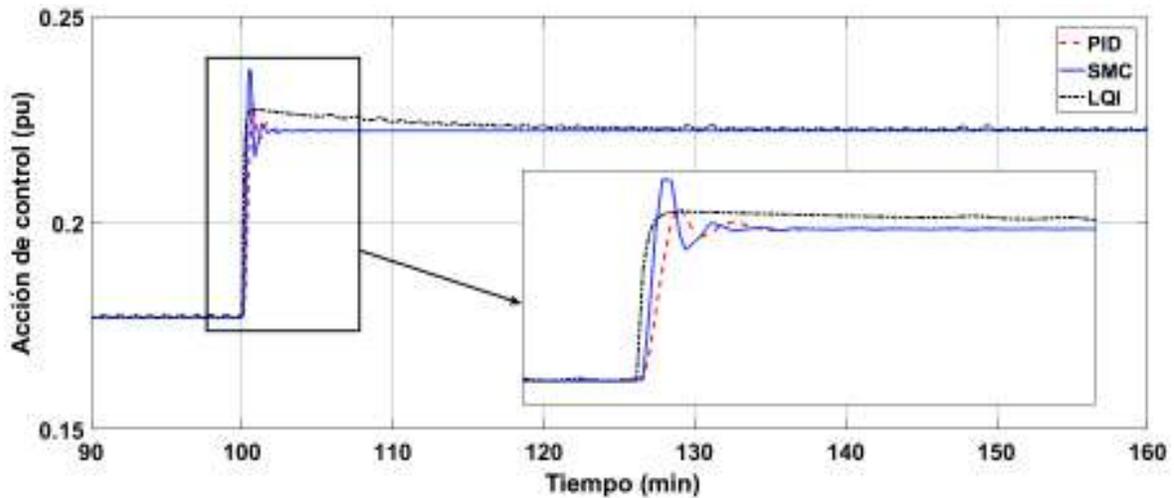
**Figura 3.55** Salidas de los controladores ante perturbación de menos 10% en el flujo de entrada.

Las respuestas en la temperatura dadas por los controladores PID y SMC, Figura 3.54, son similares a las que se da cuando ocurre una perturbación del -10% en la concentración inicial mientras que en el caso del LQI la respuesta es diferente y actúa de manera más lenta que en el caso anterior. Las acciones de control de los controladores

PID y SMC son similares a las de la perturbación de -10% en concentración inicial, estabilizándose en menos de 10 minutos, aproximadamente; y la acción de control del LQI actúa de manera más lenta, estabilizándose 30 minutos después que haya ocurrido la perturbación, aproximadamente.



**Figura 3.56** Respuesta ante una perturbación del menos 10% en el flujo de entrada con controladores sintonizados.



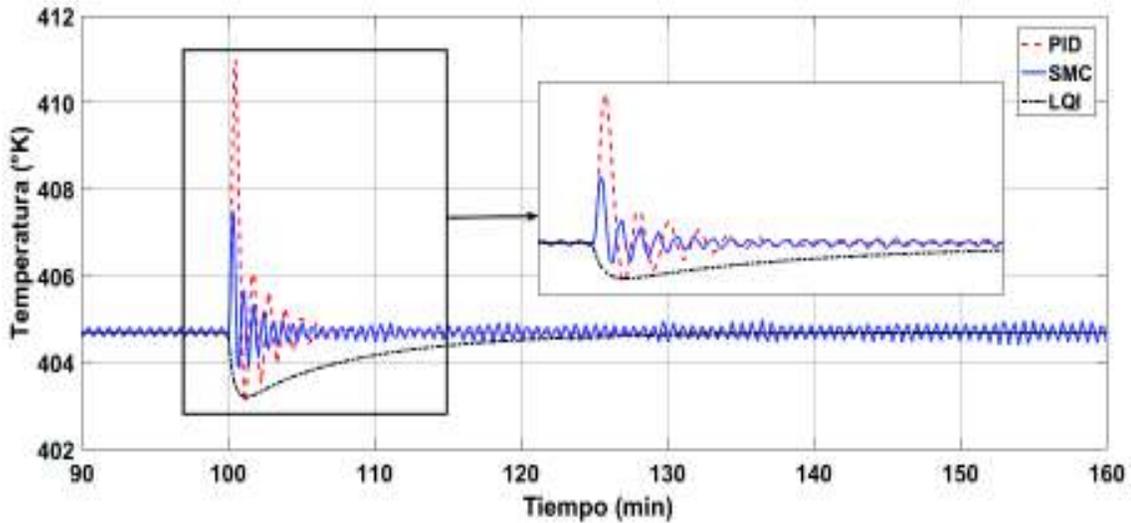
**Figura 3.57** Salidas de los controladores ante perturbación de menos 10% en el flujo de entrada con controladores sintonizados.

**Tabla 3.19** Índice IAE ante perturbación de menos 10% en el flujo de entrada.

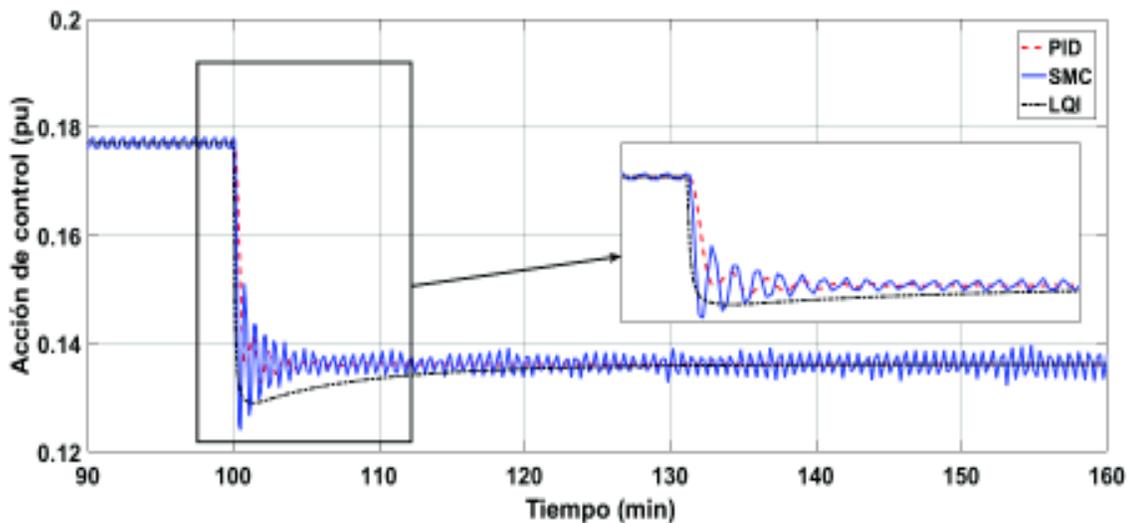
Controlador	IAE controladores sin sintonizar	IAE controladores sintonizados
PID	0.0209	0.0132
SMC	0.0051	0.0041
LQI	0.0514	0.0494

En la Tabla 3.19, se tiene que el índice IAE del controlador LQI tiene mayor valor dado que su respuesta es menos brusca pero más lenta, seguido del índice IAE del controlador PID el cual se debe a que tiene oscilaciones en la temperatura de mayor amplitud que el SMC, siendo este último controlador el de menor índice IAE.

- **Perturbación de más 10% en el flujo de entrada.**



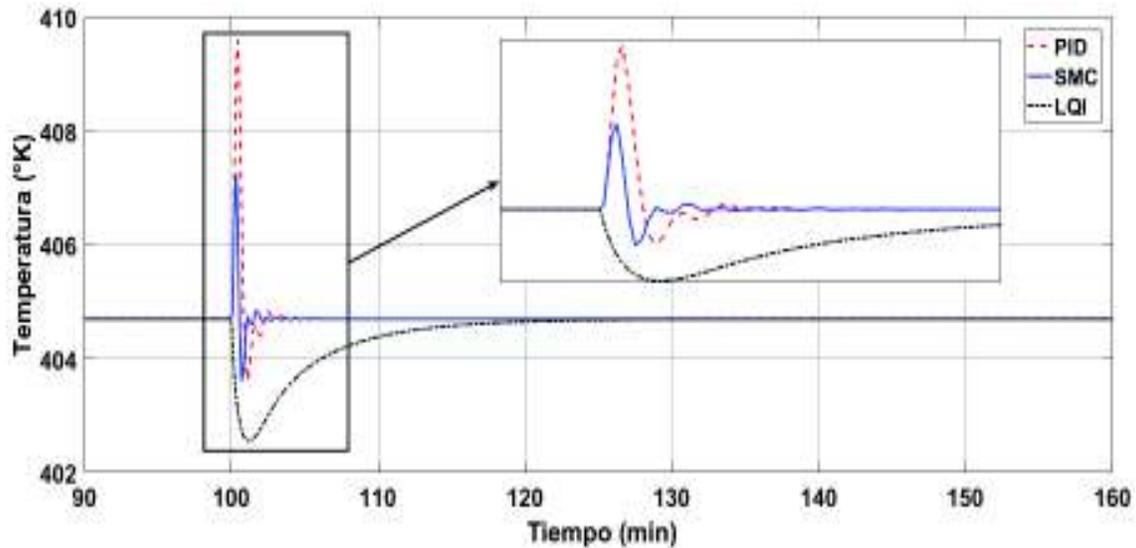
**Figura 3.58** Respuesta ante perturbación de más 10% en el flujo de entrada.



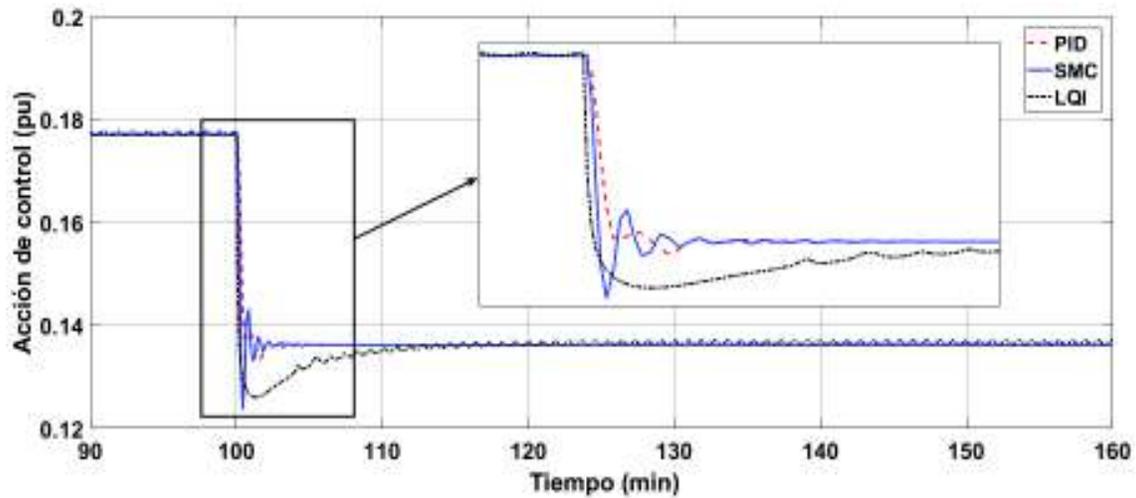
**Figura 3.59** Salida controladores ante perturbación de más 10% en el flujo de entrada.

La Figura 3.58, muestra que los controladores PID y SMC tienen un comportamiento oscilatorio, que en el caso del PID es de mayor amplitud y en el caso del SMC estas oscilaciones son menores, pero no logran ser nulas a medida que pasa el tiempo, cuando los controladores no se encuentran sintonizados. Por otro lado, el LQI una vez más tiene la respuesta menos brusca, pero esto provoca que a su vez sea más lenta que los otros

controladores. Todos estos comportamientos se ven reflejados en sus acciones de control, Figura 3.59, las cuales actúan de forma análoga a la respuesta de temperatura del sistema a lo largo del tiempo.



**Figura 3.60** Respuesta ante perturbación de más 10% en el flujo de entrada con controladores sintonizados.



**Figura 3.61** Salida controladores ante perturbación de más 10% en el flujo de entrada con controladores sintonizados.

**Tabla 3.20** Índice IAE ante perturbación de 10% en el flujo de entrada.

Controlador	IAE controladores sin sintonizar	IAE controladores sintonizados
PID	0.018	0.011
SMC	0.008	0.003
LQI	0.073	0.060

Nuevamente cuando los controladores no se encuentran sintonizados, el controlador con mayor índice IAE es el LQI como se observa en la Tabla 3.20, esto se debe a que le toma mayor tiempo el alcanzar la estabilidad al sistema ante la perturbación aplicada, mientras que el controlador con menor índice IAE es el SMC debido a que es más rápido que el LQI y con oscilaciones de menor amplitud que el controlador PID, oscilaciones que en el SMC no desaparecen completamente a lo largo del tiempo, pero que son pequeñas como para provocar un gran error con la referencia establecida en el sistema.

Al momento de realizar la sintonización de todos los controladores, se obtienen mejoría en los valores de sus índices IAE en la mayoría de perturbaciones, teniendo que en el controlador SMC, se eliminan los problemas de chattering y es el que mejor responde en la mayoría de casos de esta prueba.

### Prueba 3: errores de modelado de la planta.

Para esta prueba se realizó un cambio en los parámetros de modelación del modelo FOPDT del sistema ( $\tau, t_0, K$ ) y en la matriz A de su representación en variables de estado, teniendo de esta manera las gráficas de las Figuras 3.62 y 3.63 en las cuales se compara estos cambios en los modelos del sistema.

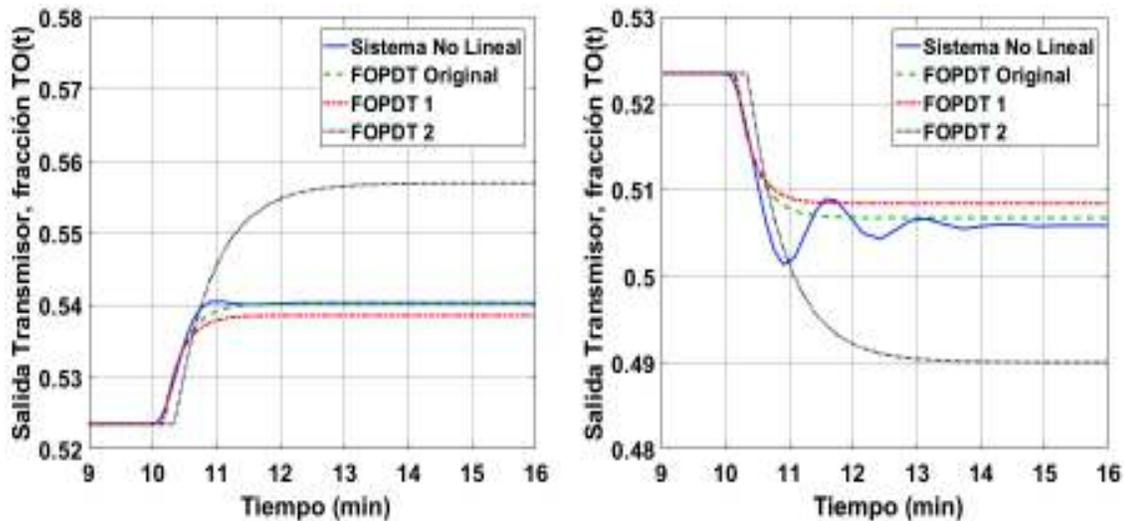
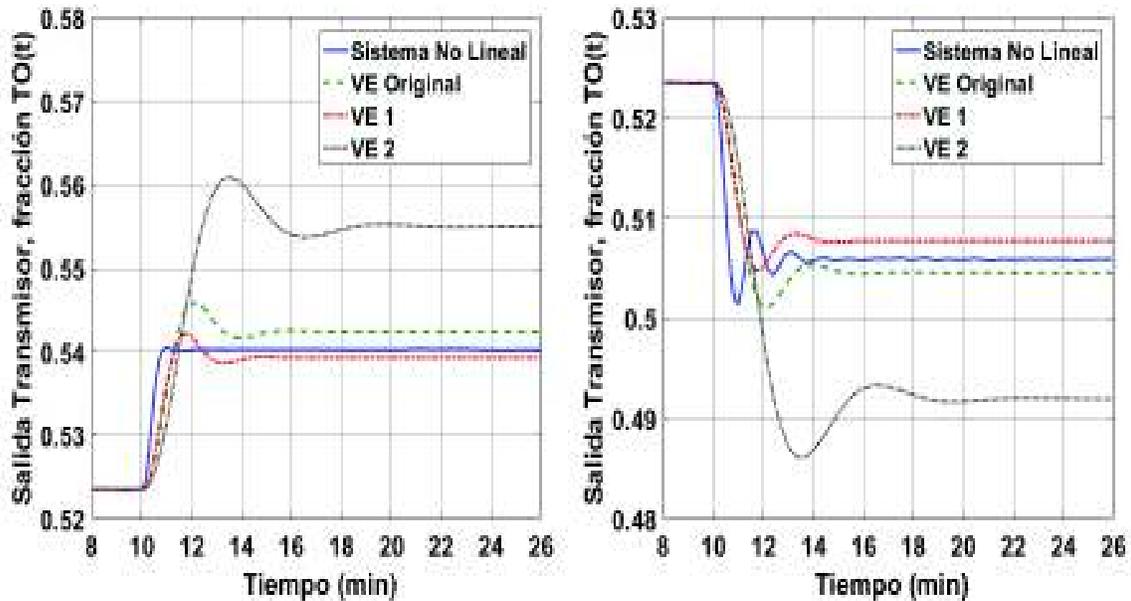


Figura 3.62 Comparación de los modelos FOPDT.

En la Figura 3.63 se observa los efectos del error de modelado en el sistema al usar el modelo en Variables de Estado del sistema, tanto en un cambio hacia arriba como hacia debajo del 10% en la apertura de la válvula, en donde:

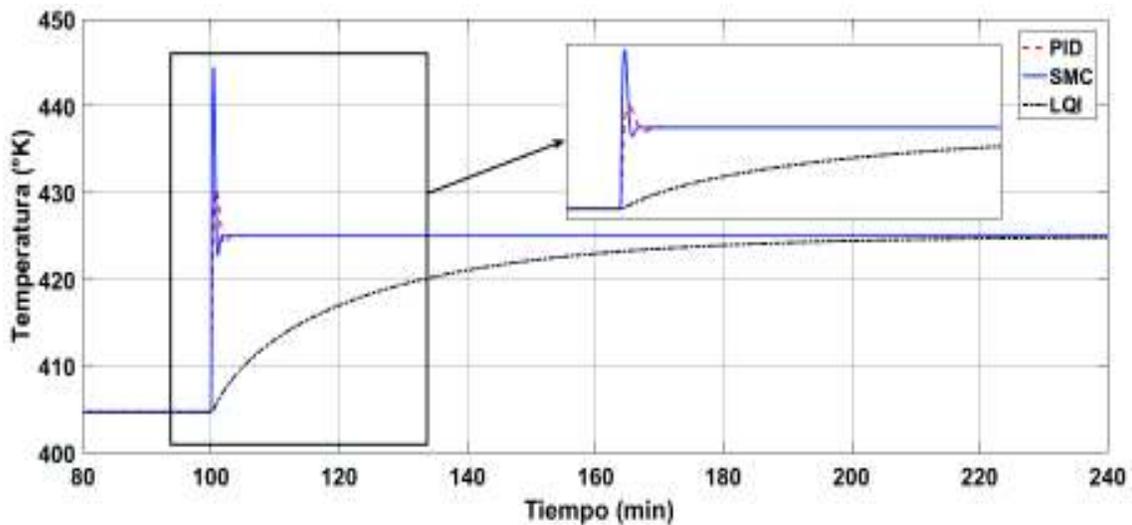
- **Sistema No Lineal:** Respuesta de la planta en lazo abierto.

- **VE Original:** Respuesta del modelo en variables de estado de la planta sin error de modelado.
- **VE 1:** Respuesta del modelo de la planta en variables de estado con error de modelado del menos 10%.
- **VE 2:** Respuesta del modelo de la planta en variables de estado con error de modelado del 100%.

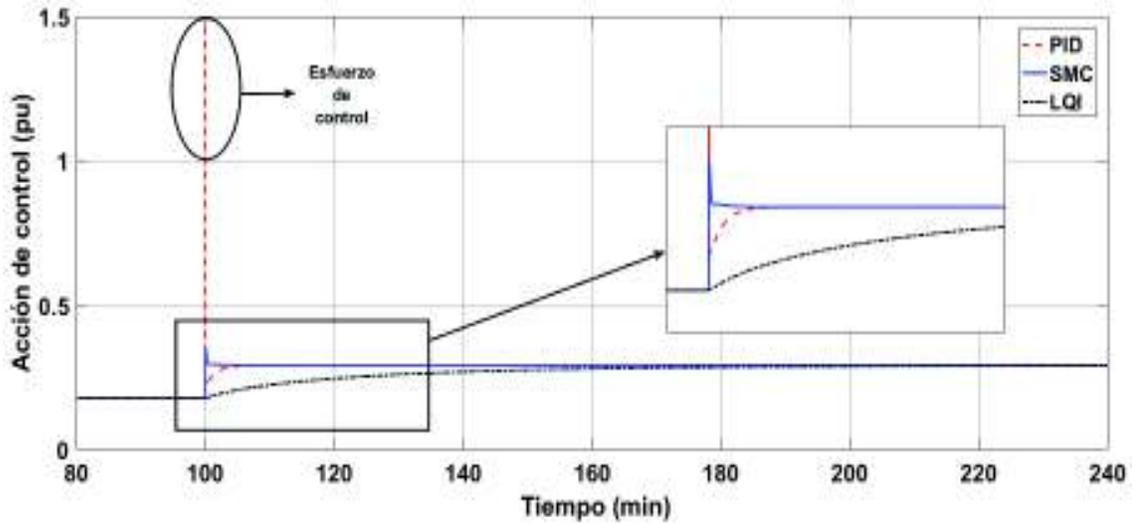


**Figura 3.63** Comparación de los modelos en variables de estado.

- **Error de modelado del menos 10% con cambio de referencia a 425 °K.**



**Figura 3.64** Respuesta con error de modelado del menos 10% y cambio de referencia de 425°K.



**Figura 3.65** Salidas de los controladores con error de modelado del menos 10% y cambio de referencia de 425°K.

Las respuestas del sistema con error de modelado del -10%, Figura 3.64, son parecidas a las respuestas del sistema con el modelo original, lo mismo se puede decir de las acciones de control entregadas por los controladores, en donde se puede notar que en la acción del PID existe un esfuerzo de control igual que en el modelo original.

**Tabla 3.21** Índice IAE con error de modelado del menos 10% y cambio de referencia de 425°K.

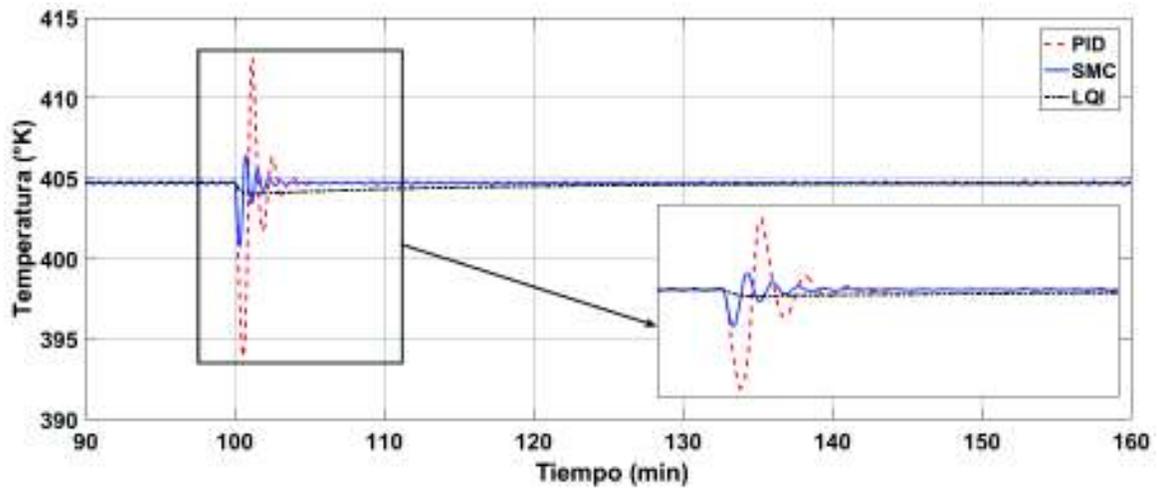
Controlador	IAE
PID	0.057
SMC	0.046
LQI	2.499

El índice IAE de cada controlador aplicado al sistema con error de modelado del -10% y cambio de referencia a 425°K es similar a los índices IAE del modelo original como se puede notar en la Tabla 3.21. Todas estas similitudes se deben a que el modelo con errores de modelado del -10% no varía demasiado en su respuesta que el modelo original. En este caso se puede observar al hacer una comparación a través del índice IAE, que el controlador tipo SMC es el que tiene una mejor respuesta ya que posee el IAE más bajo de los 3 controladores.

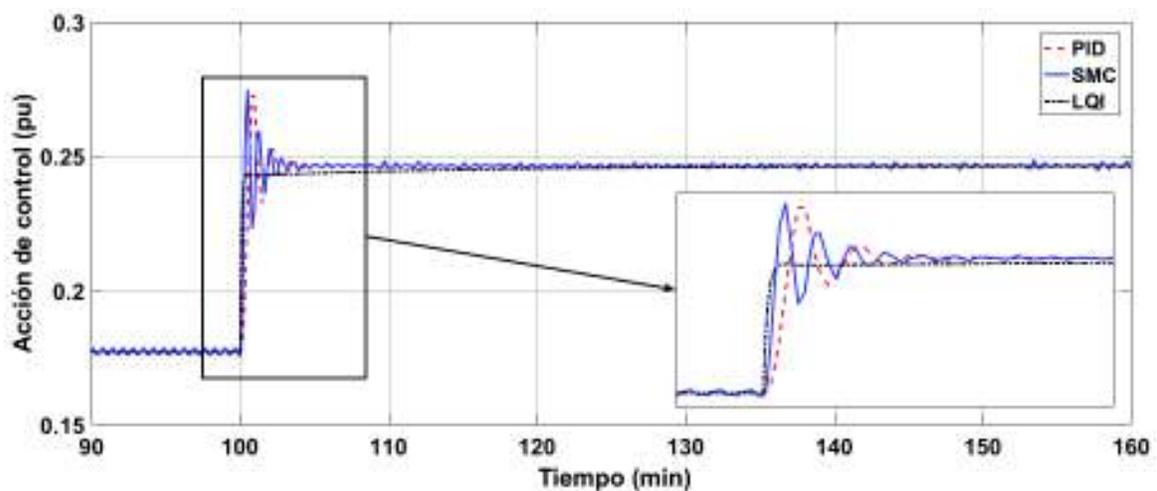
- **Error de modelado del menos 10% con perturbación del menos 10% en la concentración de A en la entrada.**

En este caso al aplicar una perturbación del menos 10% en la concentración inicial las respuestas de temperatura, Figura 3.66, y las acciones de control en los tres controladores, Figura 3.67, son similares a sus gráficas dadas por su modelo original.

Los controladores presentan valores similares de su índice IAE (Tabla 3.22) a los que se tienen en su modelo original, por lo tanto, se estudia el comportamiento de dichos controladores ante un error de modelado del 100%.



**Figura 3.66** Respuesta con error de modelado del menos 10% y perturbación del menos 10% en la concentración de A en la entrada.

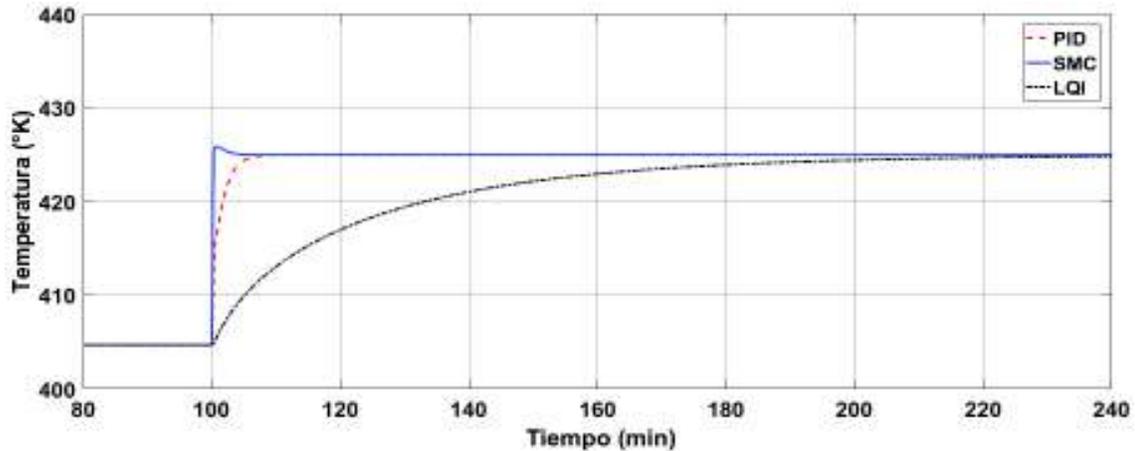


**Figura 3.67** Salidas de los controladores con error de modelado del menos 10% y perturbación del menos 10% en la concentración de A en la entrada.

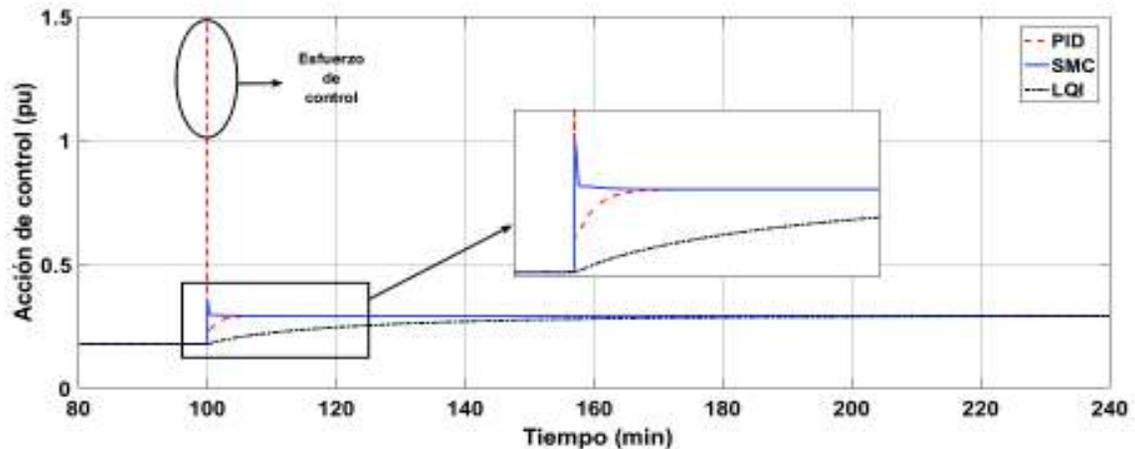
**Tabla 3.22** Índice IAE con error de modelado del menos 10% y perturbación de menos 10% en la concentración de A en la entrada.

Controlador	IAE
PID	0.035
SMC	0.007
LQI	0.040

- Error de modelado del 100% con cambio de referencia.



**Figura 3.68** Respuesta con error de modelado del 100% y cambio de referencia de 425°K.



**Figura 3.69** Salidas de los controladores con error de modelado del 100% y cambio de referencia de 425°K.

Se puede observar que la respuesta de temperatura dada por los controladores PID y SMC, Figura 3.68, tienen menor sobre pico que en el modelo original, esto se debe a que sus valores de sintonización han cambiado más bruscamente y en el caso del LQI se mantiene prácticamente igual que en los casos anteriores, por otro lado la acción de

control del SMC mostrada en la Figura 3.69, tienen mejor comportamiento que los otros controladores PID y LQI e incluso con el SMC sintonizado con su modelo original.

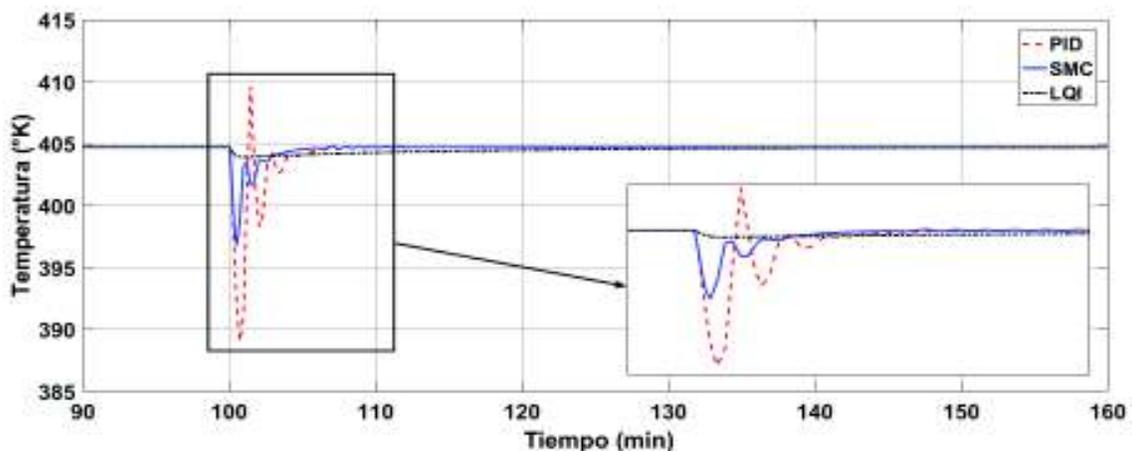
**Tabla 3.23** Índice IAE con error de modelado del 100% y cambio de referencia de 425°K.

Controlador	IAE
PID	0.15
SMC	0.05
LQI	2.50

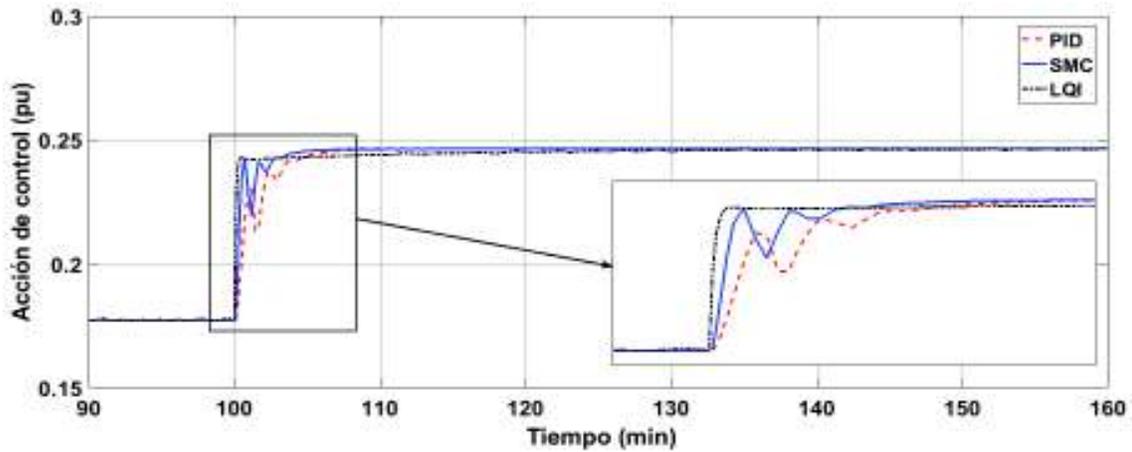
Como se observa en la Tabla 3.23, los valores de los índices IAE de los controladores SMC y LQI en el caso del error de modelado del 100%, tienen un valor similar que en su diseño con el modelo original, por otro lado, el índice IAE en el controlador PID aumenta con este error de modelado, debido a que tarda un más en alcanzar la referencia deseada que con sus valores del modelo original.

- **Error de modelado del 100% con perturbación del menos 10% en la concentración de A en la entrada.**

Las respuestas de temperatura de los controladores ante esta prueba, Figura 3.70, tienen una forma similar que las respuestas con la sintonización de sus modelos originales, sin embargo, el controlador PID y SMC tienen un sobre pico un poco más alto hacia abajo que en las pruebas anteriores. Las acciones de control de los controladores, Figura 3.69, poseen menores oscilaciones, todo esto debido a que sus valores de sintonización cambian notoriamente con este error de modelado al 100%.



**Figura 3.70** Respuesta con error de modelado del 100% y perturbación del menos 10% en concentración de A en la entrada.



**Figura 3.71** Salidas de los controladores con error de modelado del 100% y perturbación del menos 10% en la concentración de A en la entrada.

**Tabla 3.24** Índice IAE con error de modelado del 100% y perturbación del menos 10% en la concentración de A en la entrada.

Controlador	IAE
PID	0.092
SMC	0.044
LQI	0.040

Los controladores con menor índice IAE son el SMC y el LQI, siendo el LQI el que tiene menor valor debido a que no posee oscilaciones al estabilizar el sistema, por otro lado, el controlador PID tiene un índice IAE de casi el doble de valor que los otros controladores ya que su respuesta posee oscilaciones con mayor amplitud las cuales provocan que exista mayor error antes de que el sistema vuelva a ser estable.

Como se pudo observar mediante estas pruebas, el controlador con mejor desempeño en este reactor es el controlador SMC, ya que ante cambios de referencia el controlador PID necesita de una saturación en su acción de control para poder funcionar, dado que su acción de control tiende al infinito debido a que sus valores de sintonización tratan de hacer que el sistema se estabilice en el menor tiempo posible. Por otra parte, el controlador LQI tiene una respuesta menos brusca que los otros controladores, pero su problema radica en su naturaleza lenta, la cual se da debido a que este controlador trata de usar la acción de control más óptima para el proceso, haciendo que el esfuerzo efectuado por la válvula de control sea la mínima para todas estas pruebas. De igual manera que en los reactores anteriores, el desempeño y respuesta de cada controlador puede ser mejorados modificando sus parámetros de sintonización.

## 4. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

### 4.1. Conclusiones

- Fue posible obtener un modelo de orden reducido de los tres reactores estudiados, además se comprobó que la aproximación de primer orden con retardo FOPDT, es una buena opción para el diseño de controladores para reactores químicos, tomando en cuenta que esta aproximación nos permite tener una relación directa entre la entrada y la salida, con lo cual se puede realizar el diseño de esquemas de control.
- De los resultados obtenidos se puede concluir que los controladores tipo PID, SMC y LQI, pueden ser aplicados a reactores químicos tipo CSTR, sin embargo, se puede notar que cada uno tiene características distintas que les permite trabajar de mejor manera en ciertos casos, por lo cual no se puede decir que existe un controlador en específico que sea el adecuado para todos los reactores existentes, por esto es necesario el realizar una comparación de su funcionamiento en cada planta que se desee controlar.
- El controlador PID es una buena opción cuando se desea mantener los reactores trabajando en un solo punto de operación, cuando se tienen cambios de referencia este controlador tiende a generar esfuerzos de control en las plantas, para mitigar esto se puede agregar saturadores, que permitan al controlador mantenerse funcionando en zonas de trabajo adecuadas sin forzar los componentes de la planta.
- Para poder desarrollar el controlador LQI, es necesario conocer el modelo matemático de la planta que en muchos casos es difícil de obtener. Además, este controlador requiere de la instalación de varios sensores o transmisores, lo cual lo hace una técnica de control costosa a su hora de implementar. Sin embargo, el controlador LQI proporciona al sistema una acción de control suave, sin picos u oscilaciones.
- El controlador SMC usado en este trabajo, a pesar de que tiene una superficie tipo PID, no presenta cambios tan bruscos como el controlador PID al momento de realizar cambios de referencias o existir perturbaciones, dando así una respuesta más suave. Este controlador es una opción favorable en plantas en las que se tenga incertidumbres en sus parámetros, que sean altamente no lineales o que

sean sub-amortiguadas ya que proporciona un control más robusto al sistema como se comprobó en el reactor con varios puntos de operación.

- Es importante realizar una comparación del funcionamiento de distintos controladores cuando se desea implementar un sistema de control en reactores químicos como se ha visto en los resultados de este trabajo, no se puede decir que un controlador en específico es el mejor para todo tipo de reactor, si no que esto depende de cada planta, su respuesta y su funcionamiento particular, para esto es importante manejar un factor de comparación entre las técnicas de control, como lo es un índice de desempeño, que en nuestro caso es el IAE, además se debe realizar este análisis a partir de las respuestas de los controladores y sus acciones de control.
- El índice de desempeño IAE es una herramienta que permite evaluar el funcionamiento de los controladores dentro de la planta, sin embargo, no se puede decir que es una referencia absoluta para la elección del controlador más adecuado, ya que es necesario también hacer un análisis cualitativo de los controladores y su funcionamiento dentro de las plantas.
- El uso de una interfaz gráfica amigable con el usuario facilita la comprensión del proceso y como se desarrollan sus variables, además permite la manipulación de manera sencilla de los parámetros del proceso y de los controladores diseñados, lo cual es útil para encontrar la mejor sintonización posible para la planta, y para comprender como afecta cada parámetro de un controlador determinado en la respuesta del proceso.

## **4.2. Recomendaciones**

- Es importante manejar un modelo que logre representar de la manera lo más real al sistema, por lo que es recomendable considerar la mayor cantidad de parámetros y características del proceso para la obtención del modelo matemático del reactor, para de esta manera tener un modelo lo más fiel posible con la planta física.
- Al momento de desarrollar el modelo FOPDT de sistemas con no linealidades, como lo son los reactores, es recomendable hacerlo a partir de los valores obtenidos de las respuestas positivas como negativas del sistema al realizar un cambio en la entrada de la planta y promediar estos valores obtenidos (alrededor de un punto de operación), ya que dichas no linealidades hacen que el proceso

responda de diferente manera en cada caso, lo que provoca problemas en la planta si solo se modela a partir de un cambio positivo o negativo en la entrada del sistema y que en tal caso se tendría que desarrollar controladores adaptativos para cada respuesta.

- Las respuestas dadas por todos los controladores estudiados en este trabajo pueden ser mejoradas variando sus parámetros de sintonización dependiendo de su acción de control. Pero en el caso del SMC se puede utilizar otras superficies para su desarrollo, no solamente la PID, teniendo así controladores SMC que utilizan superficies PI (Proporcional Integral) e incluso se podría desarrollar un controlador SMC con superficie LQI lo cual nos daría un control óptimo y robusto del sistema.

## 5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] A. Velasco, J. Álvarez and R. Solar, "CONTROL MÚLTIPLE ENTRADA UNA SALIDA (MISO) DE UN CSTR", Revista Mexicana de Ingeniería Química, vol. 10, no. 2, pp. 321-331, 2011.
- [2] I. Carrera, "DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL PARA PROCESOS APLICADOS A REACTORES CONTINUOS TIPO TANQUE AGITADO (CSTR)", Ingeniería, Escuela Politécnica Nacional, 2014.
- [3] S. Nanda, PHARMACEUTICAL ENGINEERING, 1st ed. Haryana: M.D. University, 2008, pp. 2-4.
- [4] W. Luyben, Chemical reactor design and control, 1st ed. [New York]: AIChE, 2007.
- [5] C. Giler, "TIPOS DE REACTORES INDUSTRIALES", Ceciliagilertapia.blogspot.com, 2017. [Online]. Available: <http://ceciliagilertapia.blogspot.com/2016/04/tipos-de-reactores-industriales.html>. [Accessed: 22- May- 2017].
- [6] M. Bakošová and J. Oravec, "MPC BASED ROBUST STABILIZATION OF A CHEMICAL REACTOR", in 39th International Conference of SSCHE, Bratislava, Slovakia, 2012.
- [7] K. Ogata, Ingeniería de Control Moderna, 5th ed. [S.l.]: Prentice Hall, 2010.
- [8] B. Kuo and J. Aranda Pérez, Sistemas de control automático, 7th ed. México: Prentice Hall Hispanoamericana, 1996.
- [9] L. Mora and J. Amaya, "Un Nuevo Método de Identificación Basado en la Respuesta Escalón en Lazo Abierto de Sistemas Sobre-amortiguados", Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial RIAI, vol. 14, no. 1, pp. 31-43, 2017.
- [10] O. Camacho and C. Smith, "Sliding mode control: an approach to regulate nonlinear chemical processes", ISA Transactions, vol. 39, no. 2, pp. 205-218, 2000.
- [11] S. Dominguez, P. Campoy, J. Sebastian and A. Jimenez, Control en el Espacio de Estado, 2nd ed. Madrid: Pearson Educación S.A., 2006, pp. 3-10.
- [12] J. Villacrés and M. Viscaíno, "Diseño e implementación de tres esquemas de control: PID, LQR y Modos Deslizantes para la estabilidad del péndulo invertido sobre dos ruedas MINDSTORMS con aplicación de un planificador de rutas mediante el algoritmo RRT", Ingeniería, Escuela Politécnica Nacional, 2016.

- [13] Instrument Engineers' Handbook, 4th ed. Boca Raton: Taylor and Francis, 2005, pp. 356-358.
- [14] F. Poyen, D. Mukherjee and D. Banerjee, "Implementation Of Linear Quadratic Regulator For CSTR Tank", UACEE International Journal of Advancements in Electronics and Electrical Engineering, vol. 2, no. 2, pp. 174-178, 2013.
- [15] E. Iglesias, J. García, O. Camacho, S. Calderón and A. Rosales, "Ecuaciones de Sintonización para Controlador por Modos Deslizantes y Control de Matriz Dinámica a partir de un Módulo Difuso", Axioma, vol. 1, no. 14, pp. 14-24, 2015.
- [16] T. Marlin, Process control, 2nd ed. Boston, Mass. [u.a.]: McGraw-Hill, 2015.
- [17] V. Alfaro, P. Balaguer and O. Arrieta, "Robustness Considerations on PID Tuning for Regulatory Control of Inverse Response Processes", Brescia (Italia), 2017.
- [18] Z. Feng, Z. Jimao and A. Robert, "Design of LQI Control Systems with Stable Inner Loops", 2016.

## 6. ANEXOS

### ANEXO I

#### INTERFAZ DE USUARIO PARA EL MANEJO DE LOS CONTROLADORES

La interfaz de usuario desarrollada en este proyecto consta de tres niveles, que se describen a continuación.

**Nivel 1: Pantalla principal de la interfaz de usuario.**



Figura I.1 Pantalla principal de la interfaz de usuario.

En este nivel, Figura I.1, se presentan el título, el nombre de los desarrolladores del proyecto y los botones para poder ingresar al siguiente nivel correspondiente a uno de los tres reactores (1).

**Nivel 2: Menú y comparación de las técnicas de control.**

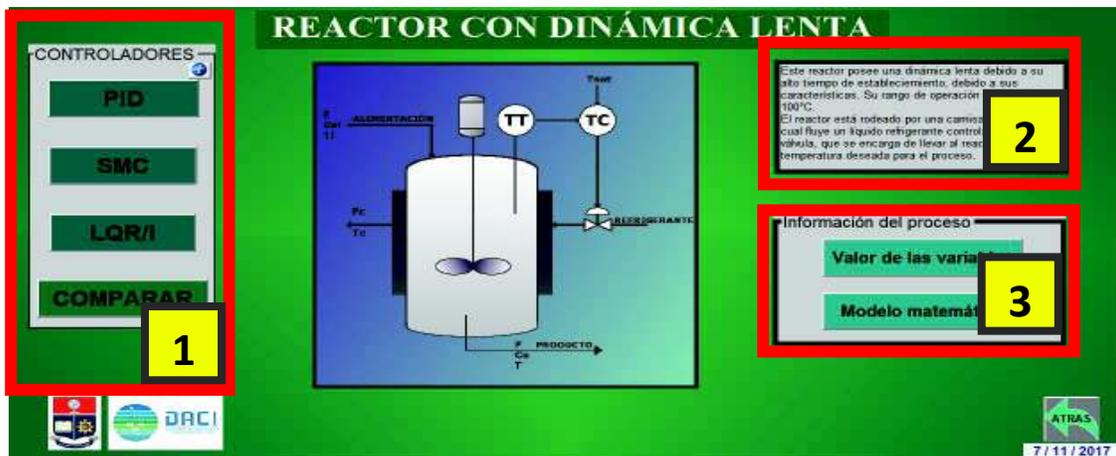
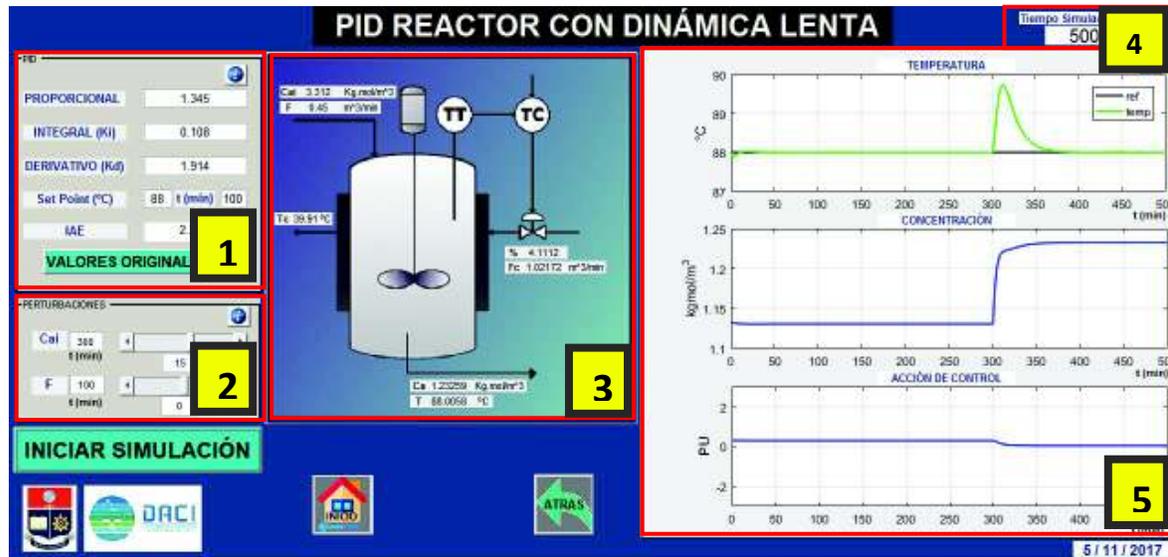


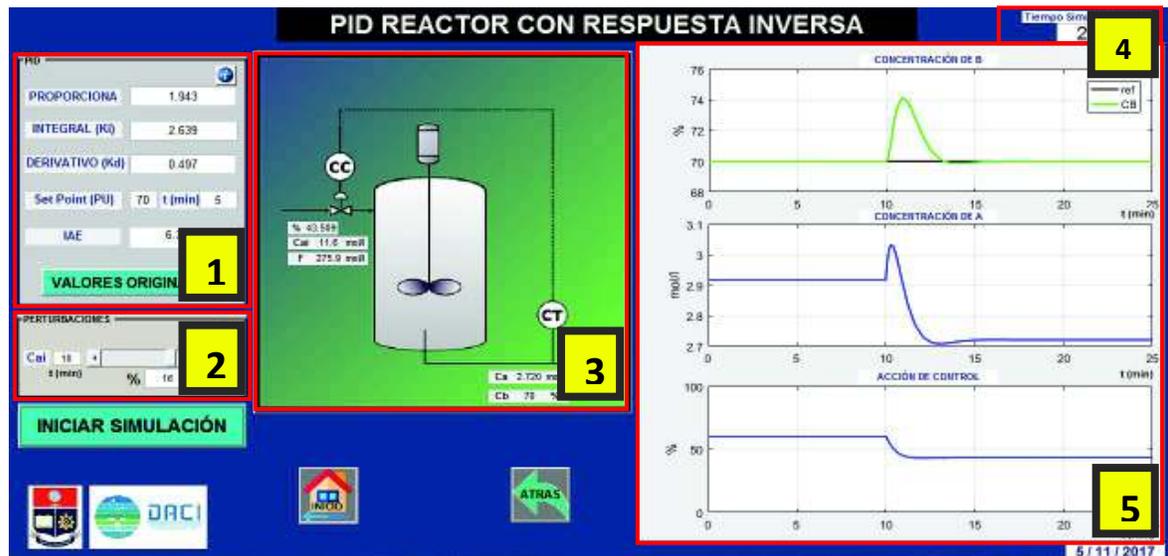
Figura I. 2 Menú nivel II del reactor con dinámica lenta.

En esta pantalla, Figura I.2, se puede escoger la opción para sintonizar los diferentes controladores en el reactor 1, y consta de una opción para comparar dichas técnicas de control (1). Esta ventana consta también de un panel con una breve descripción de la planta (2), y de un panel con dos botones que presentan el valor de las variables y el modelo matemático del proceso (3).

**Nivel 3: Presentación de resultados de la simulación.**



**Figura I. 3** Pantalla de sintonización de controlador PID del reactor con dinámica lenta.



**Figura I. 4** Pantalla de sintonización de controlador PID del reactor con respuesta inversa.

En las pantallas de la Figura I.3 y la Figura I.4, se tienen los menús en donde se puede sintonizar los controladores, realizar cambios de referencia y observar el índice IAE (1),

fijar perturbaciones a tiempos determinados de la simulación (2), visualizar el estado de las variables de relevancia en el proceso (3), fijar el tiempo de simulación (4) y observar las gráficas de temperatura, concentración y acción de control (5) que se obtienen por medio de la simulación del sistema para el reactor de dinámica lenta y el reactor con varios puntos de operación. Para el caso del reactor con respuesta inversa, Figura 6.4, se visualiza las gráficas de la concentración del componente B, concentración del componente A y acción de control del sistema (5).

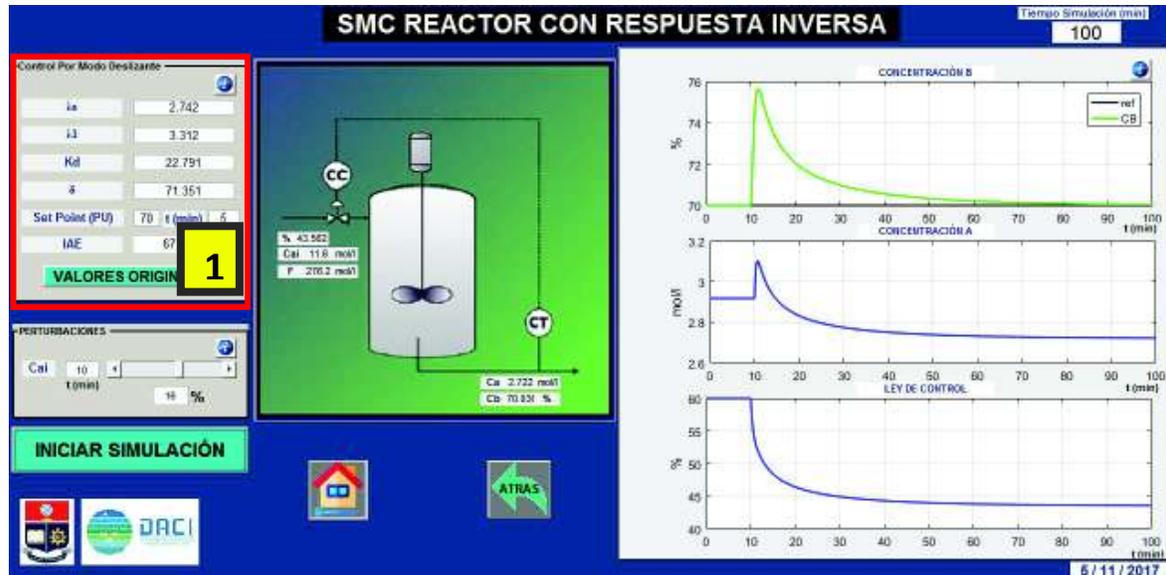


Figura I. 5 Pantalla de sintonización de controlador SMC del reactor con respuesta inversa.

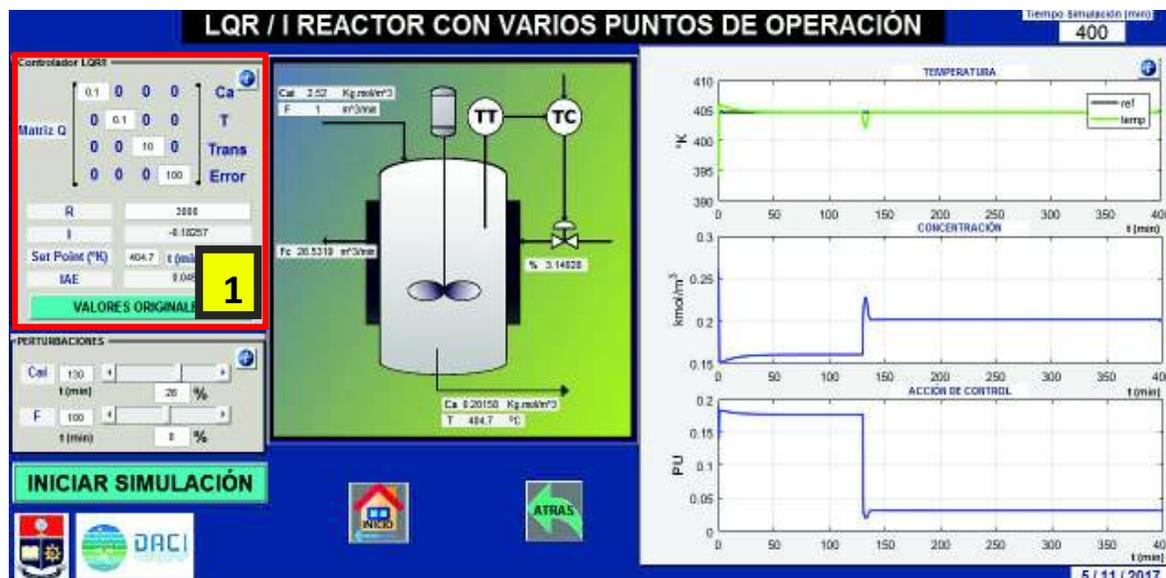
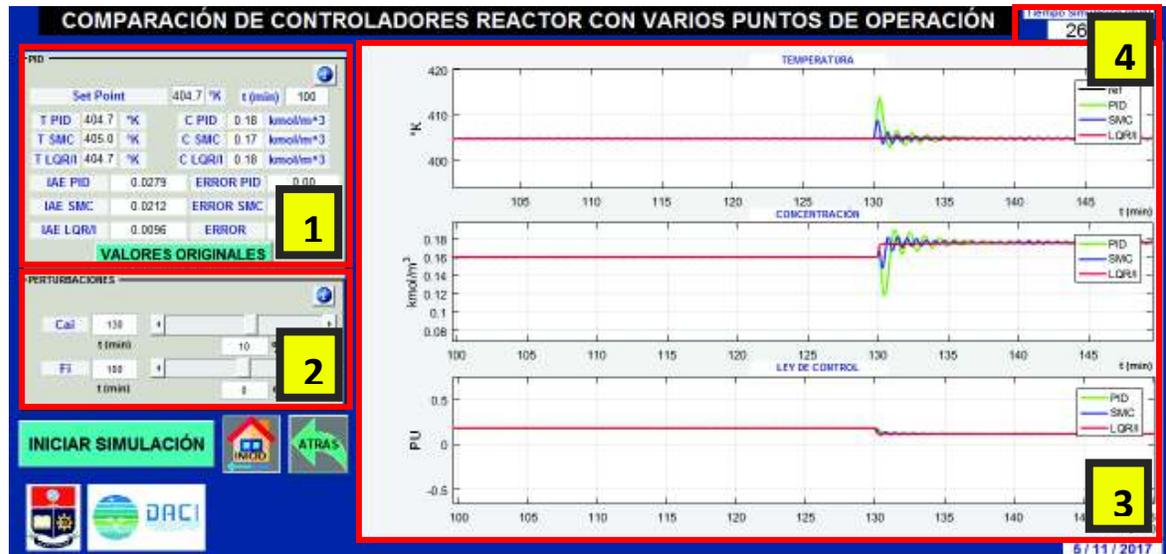


Figura I. 6 Pantalla de sintonización de controlador LQR/I del reactor con varios puntos de operación.

De igual manera que en el controlador PID, los controladores SMC y LQR/I tienen su sección para poder sintonizar sus parámetros, como se observa en las Figuras I.5 y I.6, en donde se tienen los paneles de configuración de cada controlador (1).



**Figura I. 7** Pantalla de comparación de los controladores del reactor con varios puntos de operación.

En la Figura I.7 se puede observar la pantalla de comparación para evaluar los controladores sintonizados, en esta opción del nivel III de la interfaz se tiene un cuadro donde se puede realizar el cambio de referencia del sistema y visualizar el error que produce cada controlador y su índice IAE (1). De manera similar que en la ventana de sintonización de controladores se tiene un cuadro para introducir perturbaciones al sistema (2), otro donde se puede ver la respuesta gráfica de las variables del sistema (3) y una ventana donde se puede introducir el tiempo de simulación (4).

# ANEXO II

## DIAGRAMA DE FLUJO DE LA INTERFAZ GRÁFICA.

