ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS

HOMOTOPÍA DE CATEGORÍAS Y CARCAJES FINITOS Y SU RELACIÓN CON LA COHOMOLOGÍA DE HOCHSCHILD DE LAS ÁLGEBRAS DE CAMINOS

TRABAJO DE TITULACIÓN PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE MATEMÁTICO

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

CARLOS ALBERTO AJILA LOAYZA
carlos.ajila.epn@gmail.com

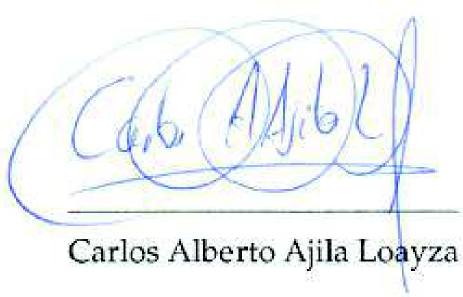
Director: MMATH. DAVID EMMANUEL PAZMIÑO PULLAS
david.pazmino@epn.edu.ec

QUITO, JUNIO 2018

DECLARACIÓN

Yo CARLOS ALBERTO AJILA LOAYZA, declaro bajo juramento que el trabajo aquí escrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

A través de la presente declaración cedo mis derechos de propiedad intelectual, correspondientes a este trabajo, a la Escuela Politécnica Nacional, según lo establecido por la Ley de Propiedad Intelectual, por su reglamento y por la normatividad institucional vigente.



Carlos Alberto Ajila Loayza

CERTIFICACIÓN

Certifico que el presente trabajo fue desarrollado por CARLOS ALBERTO AJILA LOAYZA, bajo mi supervisión.

MMath. David Emmanuel Pazmiño Pullas
Director del Proyecto

AGRADECIMIENTOS

A David Pazmiño, mi amigo y guía durante todo este proceso, quien me inició en el hermoso campo de la matemática teórica y supo hacer de mí un buen estudiante y matemático.

A mis padres y hermanos, por la paciencia, el amor, el apoyo y la espera. Gracias por motivarme cada día a convertirme en una mejor versión de mí mismo. En especial a José Nicolás, mi mayor fuente de fuerza y motivación y mi mayor razón para superarme.

A mis mejores amigos y colegas, Pablo y Paúl, a quienes estoy seguro de augurar un gran futuro en la matemática y en la vida, con quienes he aprendido, batallado, sufrido y vencido. Gracias por estar siempre a mi lado, por formar parte de mi carrera, de mis pasiones y de mi vida. Aquí también menciono a mis amigos y compañeros: Gabriela, Leonardo, Ana Julia, Milton, María de los Ángeles, Fabricio. Por estar presentes todo el tiempo (incluso a la distancia), ayudándome, brindándome compañía y dándome ánimos para salir adelante.

A los profesores que han estado junto a mí, siempre apoyándome y compartiendo sus enseñanzas, en especial a Juan Carlos Trujillo, Marco Calahorrano, Miguel Yangari, Hannes Bierwirth, Germán Rojas y, de manera muy especial por su tiempo y dedicación hacia mí, a Juan Pablo Roggiero y Andrés Merino. A más de ellos, quiero agradecer a Edgar Gordón, quien supo guiarme para tomar la decisión de estudiar matemática y a Servio Ramírez, por haber despertado en mí desde niño el sentido de que la matemática no es calcular, sino entender.

Debo agradecer a un grupo de personas que nunca conocí, pero que han estado tan presentes que es imposible no considerarlos. Me refiero a Henri Poincaré, David Hilbert, Oscar Zariski, J.P. Serre, J.H.C. Whitehead, Michael Atiyah, entre tantos otros, pero de manera especial a los dos matemáticos que más admiro y por quienes siento más devoción: Emmy Noether y Alexandre Grothendieck.

Gracias a todos quienes de una u otra forma han estado presentes a lo largo de esta etapa. Por fortuna son un gran número y, como diría Fermat, el margen de esta hoja muy reducido para incluir a todas. De lo que estoy seguro es que ¡son un grupo de muy alto orden!

DEDICATORIA

A mi hermano José Nicolas,
a mis amigos Pablo y Paúl.

Índice general

Resumen

En el presente trabajo se desarrolla una teoría para el estudio del primer grupo de homotopía de una categoría finita. Posteriormente para un carcaj ligado se construye una categoría finita y se analiza la relación entre el primer grupo de homotopía de dicha categoría y el del carcaj ligado, además de comparar ambos resultados con el primer grupo fundamental del espacio clasificador del carcaj ligado. Finalmente, se estudia si existe alguna relación entre el primer grupo de homotopía de un carcaj y el primer grupo de cohomología de Hochschild de su álgebra de caminos.

Abstract

In this paper we present a homotopy theory for the study of the first fundamental group of a finite category. Later, given a bound quiver we construct a category and study the relation between the first fundamental groups of this category and the bound quiver, contrasting both results with the first fundamental group of the classifying space of the bound quiver. Finally we study if there exists a relation between the first homotopy group of a quiver and the first Hochschild cohomology group of its path algebra.

Introducción

El estudio de carcajes ligados es importante desde muchos aspectos, tanto topológicos como algebraicos. Este trabajo se enfoca esencialmente es las particularidades topológicas de estos objetos, con la ayuda de las técnicas de la topología algebraica.

Motivados por los resultados presentados en [5] y [17], se plantea desarrollar una teoría para el estudio del primer grupo de homotopía de una categoría finita y aplicarla al estudio de la homotopía de un carcaj ligado vía la construcción de una categoría sobre tal carcaj. La filosofía que se sigue tiene su génesis no solamente en los trabajos estudiados, sino también en estudios realizados aparte en lo que respecta a la teoría de categorías de restricción mostradas en [7]. Sin embargo, el explicar cuál es esta conexión resulta increíblemente complicado e irrelevante para el objetivo de este proyecto. Pero, a manera de un bosquejo, en el capítulo 3 se presenta el concepto de categoría con vacuidad y son justamente las flechas vacías las que son una reminiscencia del resultado de componer dos funciones parciales que como funciones no tienen una composición bien definida en la categoría de funciones parciales.

El trabajo está desarrollado de la siguiente manera:

En el Capítulo 1 se presentan los preliminares algebraicos. Los temas referentes a grupos y anillos no se detallan, pues se espera que el lector esté familiarizado con ellos. Un tema que se ubica a continuación, pese a su alto nivel de abstracción, es el de colímites en grupos. Este tema se ubica aquí con el unico objetivo de poder demostrar a futuro el teorema de Seifert-van Kampen, vital en el desarrollo de este trabajo. Luego se pone énfasis en los conceptos de módulos y álgebras, siendo estos los pilares fundamentales para el estudio del Capítulo 4. El estudio de las sucesiones exactas y los productos tensoriales cierran este capítulo.

El Capítulo 2 se centra en el desarrollo de la topología algebraica básica. Se presentan los teoremas clásicos de la topología algebraica, específicamente sobre el primer grupo fundamental. Se enuncia y demuestra el teorema de Seifert-van Kampen. Este teorema será utilizado para legitimizar la definición del primer grupo de homotopía de un carcaj, así como para demostrar una serie de resultados a lo largo de este trabajo. A continuación, se presentan los complejos celulares, que también serán una herramienta clave en este estudio. Cabe recalcar que hasta este punto, los contenidos no son dotados de mucha variedad de ejemplos, pues estos se presentarán de manera más completa e involucrando una mayor cantidad de conceptos en los capítulos posteriores.

El corazón de este trabajo se encuentra en el Capítulo 3. Se inicia con la teoría clásica de carcajes, álgebras de caminos y de teoría de categorías. No se extiende innecesariamente estas teorías con objeto de no incrementar el volumen de este trabajo, sino que se presenta únicamente los conceptos más relevantes y aquellos que serán utilizados. Posterior a ello, se presenta una teoría que fue desarrollada conjuntamente con Pablo Rosero y David Pazmiño, cuyo objetivo es el de estudiar el primer grupo de homotopía de una categoría finita. Esta teoría puede ser encontrada en un estudio aún más detallado en [21]. Aquí se incluyen las demostraciones de todos los resultados, sin embargo no se maneja una notación similar a la utilizada en la cita referida. Luego de esto, sobre un carcaj ligado se construye una categoría, y se estudia la homotopía del carcaj ligado a través de esta categoría, ilustrando una fuerte relación entre ambas construcciones. Finalmente, en este capítulo se muestra el concepto de espacio clasificador y se demuestra que los grupos fundamentales de un carcaj ligado y su espacio clasificador son isomorfos (véase [5]).

El cuarto y último capítulo presenta la teoría básica sobre Álgebras de Lie y Álgebras diferenciales. El objetivo es estudiar la cohomología de Hochschild de un álgebra de caminos y buscar alguna relación entre esta y el primer grupo de homotopía. Se descrubre que a priori no existe una tal relación, para lo cual se caracteriza al primer grupo de cohomología de Hochschild de un álgebra de caminos a través del uso de derivaciones (véase [12]).

Capítulo 1

Preliminares Algebraicos

En este capítulo se presenta un breve resumen de las principales estructuras algebraicas que serán utilizadas en este trabajo. Los resultados simples se presentan sin demostración, pues fueron cubiertos en los cursos de estructuras algebraicas, y se remiten sus demostraciones a los libros [9], [16] y [22]. Los resultados importantes serán presentados con sus respectivas demostraciones debido a su relevancia y a la utilidad de las técnicas involucradas.

1.1. Magmas, monoides, semigrupos y grupos

Sea X un conjunto no vacío. Una *ley de composición interna* (también llamada operación o simplemente ley) sobre X es cualquier función $* : X \times X \to X$. Por notación, se escribe $x * y$ en lugar de $*(x, y)$. Al par $(X, *)$ se lo llama un *magma*. Abusando del lenguaje, se dice simplemente que X es un magma. Dado un magma $(X, *)$ se dice que $*$ es *asociativa* o que el magma es asociativo si para todo $x, y, z \in X$, se verifica que $x * (y * z) = (x * y) * z$. A un magma asociativo se lo llama *semigrupo*. Un elemento $e_i \in X$ se dice *neutro a izquierda* (para $*$) si para todo $x \in X$, $e_i * x = x$, y un elemento $e_d \in X$ se dice *neutro a derecha* si para todo $x \in X$, $x * e_d = x$. A $e \in X$ se le dice *neutro* si es a la vez neutro a izquierda y neutro a derecha. Si e_i es un neutro a izquierda y e_d es un neutro a derecha, entonces $e_i = e_d$. En efecto, como e_i es neutro a izquierda, entonces $e_i e_d = e_d$ y, puesto que e_d es neutro a derecha, $e_i e_d = e_i$. Así $e_i = e_d$. En particular esto implica que si un magma posee un neutro a izquierda y un neutro a derecha, entonces posee un neutro y además dicho neutro es único.

Un semigrupo con neutro se llama un *monoide*.

Dado un monoide $(S, *)$ con neutro e, se dice que un elemento $x \in S$ es *invertible* *por izquierda* si existe $x' \in S$ tal que $x' * x = e$, en cuyo caso a x' se la denomina una *inversa por izquierda* de x. De manera análoga se definen los conceptos de invertible por derecha y de inversa por derecha. Un elemento $x \in S$ se dice *invertible* si es invertible por derecha e izquierda. Dado $(S, *)$ con neutro e, si x es invertible, x' y x'' son las inversas por izquierda y derecha de x, respectivamente, entonces $x' = x''$. En efecto se tiene que

$$x' = x' * e = x' * (x * x'') = (x' * x) * x'' = e * x'' = x''.$$

Esto implica que si un elemento de un monoide es invertible por izquierda e invertible por derecha, sus inversas por izquierda y por derecha coinciden. Por ende si un elemento x de un monoide es invertible, existe un único elemento x' del monoide tal que $x * x' = x' * x = e$, siendo e el neutro. A dicho elemento se lo llama la *inversa* de x. Trivialmente e es su propia inversa, y si x es invertible con inversa x' también lo es x' con inversa x.

Un *grupo* es un monoide en el que todo elemento es invertible.

Sea $(X, *)$ un magma. Generalmente se escribe xy o $x \cdot y$ en lugar de $x * y$ para $x, y \in X$, y en ese caso a la ley de composición interna se la denomina una *multiplicación*, o se dice que la ley de composición interna se expresa multiplicativamente. En este caso, se define $x^1 = x$ y $x^n = xx^{n-1}$ para $n \geq 2$. En el caso de que X sea un monoide, se denota por 1 al neutro de X y lo se lo denomina *uno*, además se define $x^0 = 1$. Si X es un grupo, se notará por x^{-1} a la inversa de $x \in X$ y además se define $x^n = (x^{-1})^{-n}$ si $n < 0$.

Un magma $(X, *)$ se dice *conmutativo* o se dice que $*$ es conmutativa si $x * y = y * x$ para todo $x, y \in X$. En caso de que X sea un semigrupo conmutativo, es conveniente notar por $+$ a la ley de composición interna. En esta situación a $+$ se la llama la *suma* o se dice que la ley está escrita *aditivamente*. Si X es un monoide conmutativo, se notará por 0 al neutro de X y se lo llamará *cero*. Un grupo conmutativo se denomina un *grupo abeliano*.

Sea X un conjunto y $*, \circ$ dos leyes de composición interna para X. Se dice que $\circ$ se *distribuye a la derecha sobre* $*$ si

$$x \circ (y * z) = (x \circ y) * (x \circ z)$$

para todo $x, y, z \in X$. Similarmente, $\circ$ se *distribuye sobre* $*$ *a la izquierda* si

$$(x * y) \circ z = (x \circ z) * (y \circ z).$$

Finalmente, $\circ$ se distribuye sobre $*$ si $\circ$ se distribuye a la izquierda y derecha sobre $*$.

En lo que sigue, a menos que se indique lo contrario, los magmas considerados serán grupos y la ley será escrita multiplicativamente.

En un grupo se tiene trivialmente:

$$xz = yz \Rightarrow x = y$$
$$zx = zy \Rightarrow x = y.$$

Además de manera simple se verifica $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$.

Sea G un grupo. Un *subgrupo* de G es un subconjunto $H \subseteq G$ que es un grupo con la misma ley de composición interna de G. Se notará $H \leq G$ y si $H \leq G$ y $H \neq G$, se escribirá $H < G$.

Sea G un grupo y $H \subseteq G$. Entonces $H \leq G$ si y sólo si $H \neq \emptyset$ y para todo $x, y \in H$ se tiene que $xy^{-1} \in H$.

Dados dos grupos G y G', una función $f : G \to G'$ es un homomorfismo de grupos si $f(xy) = f(x)f(y)$ para todo $x, y \in G$. Se observa que

$$f(1)1 = f(1) = f(1^2) = f(1)f(1),$$

de donde

$$f(1) = 1.$$

Además

$$1 = f(1) = f(xx^{-1}) = f(x)f(x^{-1}) \quad \text{y} \quad 1 = f(1) = f(x^{-1}x) = f(x^{-1})f(x),$$

con lo cual

$$f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}.$$

Así, todo homomorfismo de grupos preserva neutros e inversos.

La *imagen* de f es el conjunto

$$\operatorname{im}(f) = f(G) = \{f(x) : x \in G\},$$

y el *núcleo* de f se define como el conjunto

$$\ker(f) = f^{-1}(\{1\}) = \{x \in G : f(x) = 1\}.$$

Se tiene que $\ker(f) \leq G$ y $\operatorname{im}(f) \leq G'$. Además, f es inyectiva si y sólo si $\ker(f) = 1$

(donde 1 representa al grupo con un sólo elemento). Un homomorfismo $f : G \to G'$ se dice un *isomorfismo* si es biyectivo. En dicho caso se dice que G y G' son isomorfos, lo que se escribe $G \cong G'$. Si $G \cong G'$ y $f : G \to G'$ es un isomorfismo se dice que G y G' son isomorfos vía f.

Si G es un grupo, $H \leq G$ y $g, g' \in G$, se define

$$gH = \{gh : h \in H\}, \quad Hg = \{hg : h \in H\}, \quad gHg' = \{ghg' : h \in H\}.$$

A los conjuntos gH y Hg se los llama *clases lateral izquierda* y *lateral derecha* de H en G, respectivamente, y a $g^{-1}Hg$ se le llama *clase de conjugación* de H por g en G.

Se define el *orden de G* como el número $|G|$. El grupo se dice finito o infinito según su orden sea finito o infinito.

Dado un grupo G y una familia $(G_i)_{i \in I}$ de subgrupos de G, su intersección es un subgrupo de G. Si $S \subseteq G$, a la intersección de todos los subgrupos de G que contienen a S se lo denomina el *subgrupo generado por S*, el cual es el subgrupo más pequeño (para el orden de la inclusión) de G que contiene a S. En símbolos:

$$\langle S \rangle = \bigcap_{\substack{H \leq G \\ S \subseteq H}} H.$$

Se tiene, además, que

$$\langle S \rangle = \{g_1^{n_1} \cdots g_k^{n_k} : k \in \mathbb{N}, n_i \in \mathbb{Z} \text{ y } g_i \in S, \forall i = 1, ..., k\}.$$

Si S es un conjunto finito, por ejemplo $S = \{g_1, ..., g_n\}$, se escribe $\langle g_1, ..., g_n \rangle$ para indicar el subgrupo generado por S.

Un grupo G se dice *finitamente generado* si existen $g_1, ..., g_n \in G$ tales que $G = \langle g_1, ..., g_n \rangle$. G se dice *cíclico* si $G = \langle g \rangle$ para algún $g \in G$.

Si G es un grupo, su *subgrupo conmutador* es el subgrupo $[G, G]$ de G generado por todos los elementos de la forma $ghg^{-1}h^{-1}$ con $g, h \in G$. Siendo más precisos:

$$[G, G] = \langle \{ghg^{-1}h^{-1} : g, h \in G\} \rangle.$$

Al elemento $ghg^{-1}h^{-1}$ se lo llama el *conmutador* de g y h y es notado usualmente como $[g, h]$. Si $S \subseteq G$, se define el *centralizador de S en G* como el subgrupo

$$C_G(S) = \{g \in G : gs = sg, \forall s \in S\}.$$

Si $S = \{s_1, ..., s_n\}$ se escribe $C_G(s_1, ..., s_n)$ para denotar al centralizador de S. Se define el *centro de* G como

$$Z(G) = \{g \in G : gx = xg, \forall x \in G\}.$$

Es claro de la definición que

$$Z(G) = C_G(G) = \bigcap_{g \in G} C_G(g).$$

Si $S \subseteq G$, el *normalizador de* S *en* G es el conjunto

$$N_G(S) = \{g \in G : gS = Sg\}.$$

Nótese que $N_G(S) \leq G$ y que $C_G(S) \leq N_G(S)$. Si $g \in N_G(S)$, se dice que g *normaliza a* S. Además, si $A \subseteq N_G(S)$, también se dice que A *normaliza* a S.

Sea G un grupo y $H \leq G$. Son equivalentes las siguientes proposiciones:

(i) $gH = Hg$ para todo $g \in H$;

(ii) $g^{-1}Hg = H$ para todo $g \in G$;

(iii) $g^{-1}Hg \subseteq H$ para todo $g \in G$;

(iv) Para todo $g \in G$ y todo $h \in H$, existe $h' \in H$ tal que $gh = h'g$;

(v) Para todo $g \in G$ y todo $h \in H$, existe $h' \in H$ tal que $hg = gh'$.

(vi) La operación $(gH)(g'H) = (gg')H$ dota al conjunto de las clases laterales izquierdas de una estructura de grupo.

(vii) La operación $(Hg)(Hg') = H(gg')$ dota al conjunto de las clases laterales derechas de una estructura de grupo.

(viii) Existe un grupo G' y un homomorfismo de grupos $f : G \to G'$ tal que $H = \ker(f)$.

(ix) G normaliza a H, es decir, $G = N_G(H)$.

Si $H \leq G$ verifica una de las condiciones equivalentes enlistadas arriba, se dice que H es un *subgrupo normal* de G y se lo nota por $H \trianglelefteq G$, y si $H \neq G$, por $H \triangleleft G$. Además, como $Hg = gH$ para todo $g \in G$, se define sin riesgo de ambigüedad el grupo G/H cuyos elementos son las clases laterales izquierdas (o equivalentemente las derechas) con la operación definida en el punto (vi) (o equivalentemente en el punto (vii)) de la proposición anterior. Al grupo G/H se lo llama el *grupo factor* de G por H o el *grupo cociente* de G por H.

La *proyección canónica* $\pi_H : G \to G/H$ definida por $g \mapsto gH$ es una sobreyección y un homomorfismo de grupos.

TEOREMA 1.1 (Emmy Noether[1]). *Sea $f : G \to G'$ un homomorfismo de grupos y sea $H \trianglelefteq G$ tal que $H \subseteq \ker(f)$. Entonces existe un único homomorfismo $\tilde{f} : G/H \to G'$ (llamado el homomorfismo inducido por f) tal que $\tilde{f}(gH) = f(g)$, para todo $g \in G$, o equivalentemente, tal que $f = \tilde{f} \circ \pi_H$, es decir, tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_H"'] & G' \\ G/H \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta. Además, $\tilde{f}$ es inyectiva si y sólo si $H = \ker(f)$.

TEOREMA 1.2 (Teoremas de isomorfismos de Noether).

(1) *Primer teorema de isomorfismos. Sea $f : G \to G'$ un homomorfismo de grupos y $\tilde{f} : G/\ker(f) \to G'$ el homomorfismo inyectivo inducido por f, entonces $G/\ker(f) \cong \operatorname{im}(f)$ vía $\tilde{f}$.*

(2) *Segundo teorema de isomorfismos. Sea G un grupo y sean $H, K \leq G$, tales que $H \leq C_G(K)$. Entonces*

$$HK := \{hk : h \in H, k \in K\} \leq G,$$

$K \trianglelefteq HK$, $H \cap K \trianglelefteq H$ *y* $HK/K \cong H/H \cap K$.

(3) *Sea G un grupo y $H, K \trianglelefteq G$ tales que $H \leq K$. Entonces $K/H \trianglelefteq G/H$ y*

$$\frac{G/H}{K/H} \cong G/K.$$

PROPOSICIÓN 1.3. *Sea G un grupo. Un elemento $u \in G$ pertenece al subgrupo conmutador $[G, G]$ si y sólo si existen $x_1, y_1, \dots x_n, y_n \in G$ tales que*

$$u = [x_1, y_1] \cdots [x_n, y_n].$$

Demostración. Si u se escribe en la forma mencionada, claramente pertenece a $[G, G]$. Recíprocamente, puesto que $[G, G]$ es generado por elementos de la forma $[x, y]$ con $x, y \in G$, entonces existen $u_1, v_1, \dots, u_m, v_m \in G$ tales que

$$u = [u_1, v_1]^{n_1} \cdots [u_m, v_m]^{n_m},$$

[1]Emmy Noether (1882-1935), matemática alemana.

con $n_i \in \mathbb{Z}$ para $i \in \{1, \ldots, m\}$. Se tiene que, para $x, y \in G$,

$$[x, y]^{-1} = [y, x].$$

Con esto, eliminando exponentes, se obtiene la representación deseada. $\square$

PROPOSICIÓN 1.4. *Sea G un grupo y $[G, G]$ su subgrupo conmutador, entonces $[G, G] \trianglelefteq G$.*

Demostración. Sea $H = [G, G]$ y $g \in G$. Para cada $x, y \in G$ se tiene que

$$g[x, y]g^{-1} = [x, y]^{-1}([x, y]g[x, y]^{-1}g^{-1}) = [x, y]^{-1}[[x, y], g],$$

y por ende $g[x, y]g^{-1} \in [G, G]$ para todo $x, y, g \in G$. Con esto, si $u \in G$, por la proposición anterior, existen $x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n \in G$ tales que

$$u = [x_1, y_1] \cdots [x_n, y_n],$$

y consecuentemente

$$gug^{-1} = (g[x_1, y_1]g^{-1}) \cdots (g[x_n, y_n]g^{-1}) \in [G, G].$$

Por lo tanto, $g[G, G]g^{-1} \subseteq [G, G]$ para todo $g \in G$, es decir; $[G, G] \trianglelefteq G$. $\square$

DEFINICIÓN 1.1. *Sea G un grupo. Al grupo factor*

$$G/[G, G]$$

se lo llama la abelianización de G.

La intersección de subgrupos normales es un subgrupo normal. Dado un conjunto $S \subseteq G$, la clausura normal de S en G es la intersección de todos los subgrupos normales que contienen a S. En símbolos

$$N_G(S) = \bigcap_{\substack{H \trianglelefteq G \\ S \subseteq H}} H$$

Se presentan algunas construcciones basadas en los grupos al igual que ciertos grupos especiales. Dada una familia de grupos $(G_i)_{i \in I}$, su *producto directo* es el conjunto

$$G = \prod_{i \in I} G_i$$

dotado de la operación

$$(x_i)(y_i) = (x_i y_i).$$

Se dice que un elemento $(x_i) \in G$ tiene *soporte finito* si $x_i = 1$ para todo $i \in I$, salvo quizás para un número finito de índices. Si todos los grupos G_i son abelianos, se define su *suma directa* como el conjunto

$$\bigoplus_{i \in I} G_i \subseteq \prod_{i \in I} G_i$$

de los elementos del producto directo con soporte finito. Si I es finito, la suma directa y el producto directo coinciden; además, es conveniente notar (tanto el caso abeliano como en el no abeliano) por

$$G_1 \times \cdots \times G_n \quad \text{y} \quad G_1 \oplus \cdots \oplus G_n$$

al producto directo y a la suma directa, respectivamente, cuando $I = \{1, ..., n\}$ es finito.

Un grupo G se dice *libre* sobre $X \subseteq G$ si verifica la siguiente *propiedad universal:* Para toda función $f : X \to G'$, siendo G' un grupo, existe un único homomorfismo de grupos $\tilde{f} : G \to G'$ tal que $f = \tilde{f} \circ \iota$, siendo $\iota : X \to G$ la inclusión canónica. Diagramáticamente, se tiene la conmutatividad de

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "f"'] & G \arrow[d, dashed, "\tilde{f}"] \\ & G'. \end{tikzcd}$$

Dado un conjunto $X \neq \emptyset$, el *grupo libre generado por* X es un grupo $G(X)$ que es libre sobre X.

Teorema 1.5. *Si $X \neq \emptyset$, existe el grupo libre sobre X, y este es único salvo isomorfismo.*

Demostración. Unicidad: Supóngase que G y G' son dos grupos libres sobre X, y sean $\iota : X \to G$ e $\iota' : X \to G'$. Se tienen los siguientes diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "\iota'"] \arrow[ddr, "\iota"'] & G \arrow[d, dashed, "\tilde{\iota}'"] \\ & G' \arrow[d, dashed, "\tilde{\iota}"] \\ & G \end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "\iota"'] & G \arrow[d, dashed, "\mathbb{1}_G"] \\ & G, \end{tikzcd}$$

siendo $\mathbb{1}_G$ el homomorfismo identidad sobre G. La propiedad universal provee la unicidad de la función dibujada con líneas entrecortadas, por ende $\tilde{\imath} \circ \tilde{\imath}' = \mathbb{1}_G$. De manera similar $\tilde{\imath}' \circ \tilde{\imath} = \mathbb{1}_{G'}$ y por ende $G \cong G'$.

Existencia: Se define X^{-1} como el conjunto de símbolos $S = \{x^{-1} | x \in S\}$. La escritura x^{-1} debe ser entendida, por el momento, como un símbolo. Ahora, sea $G(X)$ el conjunto de todas las palabras formadas por los símbolos de $X \cup X^{-1}$ con las siguientes reglas: Los símbolos x^{-1} y x, escritos consecutivamente en cualquier orden, se cancelan, la multiplicación está dada por concatenación de palabras y la palabra vacía es la identidad. Con esto, $G(X)$ es claramente un grupo que verifica $X \subseteq G(X)$. Sea ahora G' otro grupo y $f : X \to G'$ una función. Si $a_1 a_2 \cdots a_n$ es una palabra de $G(X)$, se define $\tilde{f}(a_1 \cdots a_n) = f(a_1) \cdots f(a_n)$. Así, claramente $\tilde{f}$ es el único homormofismo de grupos tal que $\tilde{f} \circ \iota = f$. □

A X se lo suele llamar la *base* del grupo libre G cuando G es libre sobre X. Usualmente se omite la base y se dice simplemente que G es libre.

TEOREMA 1.6. *Si $f : G \to F$ es un homomorfismo sobreyectivo de grupos y F es libre, entonces existe $g : F \to G$ tal que $f \circ g = \mathbb{1}_F$.*

Demostración. Sea X una base para F y sea $x \in X \subseteq F$. Como f es sobreyectiva, usando el axioma de elección es lícito escoger un elemento $x' \in G$ tal que $f(x') = x$, que está unívocamente determinado por x. Sea entonces $g' : X \to G$ definida por $g'(x) = x'$. Nótese que esta definición implica que $f(g'(x)) = f(x') = x$ para cada $x \in X$. Como F es libre sobre X, existe un único homomorfismo $g : F \to G$ tal que $g \circ \iota = g'$. Sea $a_1 \cdots a_n$ una palabra en F, con $a_i \in X$. Así

$$\begin{aligned} f(g(a_1 \cdots a_n)) &= f(g(a_1) \cdots g(a_n)) = f(g'(a_1) \cdots g'(a_n)) \\ &= f(g'(a_1)) \cdots f(g'(a_2)) = a_1 \cdots a_n, \end{aligned}$$

de modo que $f \circ g = \mathbb{1}_F$. □

De manera similar, se puede definir y construir el *monoide libre* simplemente sin incluir los inversos (y por ende sin la regla de cancelación).

1.2. Colímites de grupos

Esta sección tiene una importante repercusión futura para el estudio del teorema de Siefert-van Kampen y sus corolarios. Se inicia describiendo la terminología básica.

Un *conjunto dirigido* I es un conjunto con una relación de pre orden $\leq$ (es decir, una relación reflexiva y transitiva) tal que para todo $i, j \in I$ existe $k \in I$ que verifican $i \leq k$ y $j \leq k$. Un *sistema directo de grupos* indexado por I es una familia de grupos $(G_i)_{i \in I}$ tal que para cada $i \leq j$, existe un homomorfismo de grupos $\varphi_{ij} : G_i \to G_j$, con $\varphi_{ii} : G_i \to G_i$ el homomorfismo identidad, de tal modo que el diagrama

$$\begin{tikzcd} G_i \arrow[rr, "\varphi_{ij}"] \arrow[dr, "\varphi_{ik}"'] & & G_j \arrow[dl, "\varphi_{jk}"] \\ & G_k & \end{tikzcd}$$

conmuta siempre que $i \leq j \leq k$. Se nota al sistema directo por $\langle G_i, \varphi_{ij} \rangle$. Un *blanco* u *objetivo* del sistema directo $\langle G_i, \varphi_{ij} \rangle$ es grupo G junto con una familia de homomorfismos de grupos $\psi_i : G_i \to G$ para cada $i \in I$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} G_i \arrow[rr, "\varphi_{ij}"] \arrow[dr, "\psi_i"'] & & G_j \arrow[dl, "\psi_j"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

conmuta siempre que $i \leq j$. Se nota a este blanco del sistema directo por $\langle G, \psi_i \rangle$. Un *colímite* del sistema directo $\langle G_i, \varphi_{ij} \rangle$ es un blanco $\langle G, \psi_i \rangle$ que es *inicial* entre todos los blancos. Esto significa que se verifica la siguiente *propiedad universal:* Si $\langle H, \rho_i \rangle$ es otro blanco del sistema directo, entonces existe un *único* homomorfismo de grupos $\sigma : G \to H$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[dd, "\sigma"] \\ G_i \arrow[ur, "\psi_i"] \arrow[dr, "\rho_i"'] & \\ & H \end{tikzcd}$$

para todo $i \in I$. Se indicará que $\langle G, \psi_i \rangle$ es un colímite del sistema directo $\langle G_i, \varphi_{ij} \rangle$ mediante

$$\langle G, \psi_i \rangle \cong \varinjlim_{I} \langle G_i, \varphi_{ij} \rangle$$

El uso del símbolo $\cong$ se justifica a través del siguiente resultado:

Proposición 1.7. *El colímite de un sistema directo es único salvo un único isomorfismo. Esto significa que si dos blancos $\langle G, \psi_i \rangle$ y $\langle H, \rho_i \rangle$ son dos colímites de un* *sistema directo $\langle G_i, \varphi_{ij} \rangle$, entonces existe un único isomorfismo de grupos $\sigma : G \to H$.*

Demostración. Usando el hecho de que $\langle G, \psi_i \rangle$ es un colímite y $\langle H, \rho_i \rangle$ es un blanco del sistema directo, existe un único homomorfismo de grupos $\sigma : G \to H$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[dd, "\sigma"] \\ G_i \arrow[ur, "\psi_i"] \arrow[dr, "\rho_i"'] & \\ & H \end{tikzcd}$$

conmuta para todo $i \in I$. Invirtiendo los roles de G y H existe un único homomorfismo de grupos $\sigma' : H \to G$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} & H \arrow[dd, "\sigma'"] \\ G_i \arrow[ur, "\rho_i"] \arrow[dr, "\psi_i"'] & \\ & G \end{tikzcd}$$

conmuta para todo $i \in I$. De este modo se obtienen los siguientes diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[d, "\sigma"] \\ G_i \arrow[ur, "\psi_i"] \arrow[r, "\rho_i"'] \arrow[dr, "\psi_i"'] & H \arrow[d, "\sigma'"] \\ & G \end{tikzcd} \qquad \text{y} \qquad \begin{tikzcd} & G \arrow[dd, "\mathbb{1}_G"] \\ G_i \arrow[ur, "\psi_i"] \arrow[dr, "\psi_i"'] & \\ & G, \end{tikzcd}$$

y puesto que $\langle G, \psi_i \rangle$ es a la vez colímite y blanco, implica que $\mathbb{1}_G = \sigma' \circ \sigma$. Invirtiendo los roles de G y H se tiene que $\sigma \circ \sigma' = \mathbb{1}_H$, por lo que σ es un isomorfismo. La unicidad es consecuencia directa de la definición de colímite. □

En general, el cálculo del colímite de un sistema directo de grupos es una labor complicada. Aquí se presentarán casos particulares que serán utilizados a futuro.

Antes de continuar, se realizan dos construcciones abstractas. Sea $(G_i)_{i \in I}$ una familia de grupos, en donde no se asume que el conjunto I tenga alguna estructura. Sea $G = \ast_{i \in I} G_i$ el grupo descrito por la siguiente información:

- Un *símbolo* es un elemento de la unión disjunta de los conjuntos G_i. Una *palabra* es una secuencia finita de símbolos. Los elementos de G son *palabras reducidas* $a_1 a_2 \cdots a_n$, es decir, palabras tales que si a_j y a_{j+1} son dos símbolos consecutivos en dicha palabra, entonces $a_j \in G_i$ y $a_{j+1} G_{i'}$ para $i \neq i'$. Esto es, dos letras consecutivas de una palabra no pueden pertenecer a un mismo grupo G_i, necesariamente pertenecen a grupos distintos de la familia.

- El producto de dos palabras en G es su concatenación reducida. Es decir, si $a = a_1 \cdots a_n$ y $b = b_1 \cdots b_m$ son dos palabras en G, entonces: Si a_n, b_1 son elementos de un mismo grupo G_i, sea $c = a_n b_1$ su producto en G_i y así $ab = a_1 \cdots a_{n-1} c b_2 \cdots b_m$. Si por el contrario a_n y b_1 pertenecen a grupos distintos de la familia, entonces $ab = a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_m$.

- El elemento neutro es la *palabra vacía*, y los elementos neutros de los grupos G_i se interpretan como caracteres vacíos. Dicho de otro modo, si a, b son palabras reducidas, $a1b = ab$, siendo 1 el neutro de cualquier grupo G_i.

- Si $a = a_1 \cdots a_n$ es una palabra en G, su inverso está dado por la palabra $a^{-1} = a_n^{-1} \cdots a_1^{-1}$, donde a_j^{-1} es el inverso de a_j en el grupo al que pertenece tal símbolo.

PROPOSICIÓN 1.8. *Con lo descrito anteriormente, $\ast_{i \in I} G_i$ es un grupo.*

Demostración. Sólo hace falta probar la asociatividad. Para cada $i \in I$ y cada $a \in G_i$ se define $L_a : G \to G$ como la función $L_a(a_1 \cdots a_n) = aa_1 \cdots a_n$ (reduciendo aa_1 en caso de ser menester). Ahora, si $a, b \in G_i$, entonces

$$\begin{aligned} (L_a \circ L_b)(a_1 \cdots a_n) &= L_a(ba_1 \cdots a_n) \\ &= (ab)(a_1 \cdots a_n) \\ &= L_{ab}(a_1 \cdots a_n), \end{aligned}$$

de modo que $L_a \circ L_b = L_{ab}$. En particular $L_a \circ L_{a^{-1}} = L_1 = \mathbb{1}_G$. Con esto, para cada palabra $a = a_1 \cdots a_n$ se define $L(a) = L_{a_1} \circ \cdots \circ L_{a_n}$, de modo que se obtiene una función inyectiva $L : G \to S_G$, siendo S_G el grupo de permutaciones de G. Nótese que si a, b son dos palabras reducidas de G, entonces $L(ab) = L(a) \circ L(b)$. Además, L es inyectiva, pues si $L(a) = L(b)$ entonces aplicando $L(a)$ y $L(b)$ a la palabra vacía se obtiene que $a = b$. De este modo, si $a, b, c \in G$,

$$\begin{aligned} L((ab)c) &= L(ab) \circ L(c) \\ &= (L(a) \circ L(b)) \circ L(c) \\ &= L(a) \circ (L(b) \circ L(c)) \\ &= L(a) \circ L(bc) \\ &= L(a(bc)), \end{aligned}$$

y por inyectividad de L, $(ab)c = a(bc)$, lo que prueba la asociatividad. $\square$

Definición 1.2. *Sea $(G_i)_{i\in I}$ una familia de grupos. Al grupo $*_{i\in I}\, G_i$ se lo llama el producto libre de la familia $(G_i)_{i\in I}$.*

Ahora, nótese que la función $\psi_i : G_i \to G$ definida para cada $a_i \in G_i$ por $\psi_i(a_i) = a_i$ es un homomorfismo de grupos inyectivo, de modo que todo grupo G_i puede considerarse como un subgrupo de G.

Ahora, se considera la relación $i \leq j$ en I si y sólo si $i = j$ (es decir, la relación de igualdad). Con esto I es un conjunto directo. Más aún, como no es posible que $i \leq j$ para $i \neq j$, entonces trivialmente $\langle G_i, \varphi_{ii}\rangle$ es un sistema directo, siendo $\varphi_{ii} : G_i \to G_i$ el homomorfismo identidad. Se tiene entonces el siguiente resultado:

Teorema 1.9. *Con las convenciones anteriores, $\langle *_{i\in I}\, G_i, \psi_i\rangle \cong \varinjlim_I \langle G_i, \varphi_{ii}\rangle$.*

Demostración. Sea $\langle G, \rho_i\rangle$ un blanco del sistema directo $\langle G_i, \varphi_{ii}\rangle$ y $G = *_{i\in I}\, G_i$. Se define $\sigma : G \to H$ del siguiente modo: Dada una palabra reducida $a = a_1 \cdots a_n \in G$, con $a_j \in G_{i_j}$, entonces $\sigma(a) = \rho_{i_1}(a_1)\cdots\rho_{i_n}(a_n)$. Sean $a = a_1 \cdots a_n$ y $b = b_1 \cdots b_m$ dos palabras en G tales que $a_j \in G_{i_j}$ y $b_l \in G_{k_l}$. Se consideran dos posibilidades: Si $i_n = k_l$, sea $c = a_n b_1$ el producto de estos elementos en el grupo $G_{i_n} = G_{k_l}$, de modo que $ab = a_1 \cdots a_{n-1} c b_2 \cdots b_m$. Como ρ_{i_n} es un homomorfismo de grupos, se tiene que $\rho_{i_n}(c) = \rho_{i_n}(a)\rho_{k_1}(b)$, y por ende

$$\begin{aligned}
\sigma(ab) &= \sigma(a_1 \cdots a_{n-1} c b_2 \cdots b_n) \\
&= \rho_{i_1}(a_n)\cdots\rho_{i_{n-1}}(a_{n-1})\rho_{i_n}(c)\rho_{k_2}(b_2)\cdots\rho_{k_m}(b_m) \\
&= (\rho_{i_1}(a_n)\cdots\rho_{i_{n-1}}(a_{n-1})\rho_{i_n}(a_n))(\rho_{k_1}(b_1)\rho_{k_2}(b_2)\cdots\rho_{k_m}(b_m)) \\
&= \sigma(a)\sigma(b).
\end{aligned}$$

Si por el contrario $i_n \neq k_1$, entonces se tiene simplemente

$$\begin{aligned}
\sigma(ab) &= \sigma(a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_n) \\
&= (\rho_{i_1}(a_n)\cdots\rho_{i_n}(a_n))(\rho_{k_1}(b_1)\cdots\rho_{k_m}(b_m)) \\
&= \sigma(a)\sigma(b).
\end{aligned}$$

Así, σ es un homomorfismo de grupos. Ahora, por definición de $\psi_i : G_i \to G$, se tiene que

$$(\sigma \circ \psi_i)(a_i) = \sigma(\psi_i(a_i)) = \sigma(a_i) = \rho_i(a_i)$$

para todo $a_i \in G_i$, de modo que $\sigma \circ \psi_i = \rho_i$. Finalmente, la unicidad de σ es inmediata por este mismo razonamiento. $\square$

Manteniendo las notaciones anteriores, sea $I' = \{\infty\} \cup I$, siendo ∞ un símbolo que no es un elemento de I. A I' se lo dota de la siguiente relación: $i \leq j$ en I' si y sólo si $i = \infty$ o si $i, j \neq \infty$, entonces $i = j$. Sea $G_\infty = \{1\}$ el grupo trivial, y $\varphi_{\infty i} : G_\infty \to G_i$ el único homomorfismo de grupos posible, es decir, el que envía a 1 en el neutro de G_i y $\psi_\infty : G_\infty \to G$ igual. Por trivialidad, la misma demostración anterior muestra lo siguiente:

COROLARIO 1.10. $\langle *_{i\in I} G_i, \psi_i \rangle \cong \varinjlim_{I'} \langle G_i, \varphi_{ij} \rangle$.

Demostración. Las funciones $\varphi_{\infty i}$ y ψ_∞ conmutan con cualquier homomorfismo de grupos. $\square$

Sean G_1, G_2 dos grupos. Se nota por $G_1 * G_2$ a su producto libre. Sea H un tercer grupo y $\varphi_1 : H \to G_1$ y $\varphi_2 : H \to G_2$ dos homomorfismos de grupos inyectivos. Sea

$$N(H, \varphi_1, \varphi_2) = N_{G_1 * G_2}(\{\varphi_1(a)\varphi_2(a)^{-1} \in G_1 * G_2 : a \in H\}),$$

es decir, N es la clausura normal de todas las palabras en $G_1 * G_2$ de la forma $\varphi_1(a)\varphi_2(a)^{-1}$, con $a \in H$.

DEFINICIÓN 1.3. *Al grupo $G_1 * G_2 / N(H, \varphi_1, \varphi_2)$ se lo denomina el producto libre de G_1 y G_2 amalgamado por H vía φ_1 y φ_2, y se lo nota por $G_1 *_H G_2$, o por $G_1 \underset{H}{*} G_2$.*

Sea $G_0 = H$ e $I = \{0, 1, 2\}$ ordenado por la relación $i \leq j$ si y sólo si $i = 0$. Sea $\pi : G_1 * G_2 \to G_1 *_H G_2$ la proyección canónica. Sea $\psi_1 : G_1 \to G_1 *_H G_2$ el homomorfismo dado por la composición de π con la inclusión canónica $G_1 \hookrightarrow G_1 * G_2$, y ψ_2 definida análogamente. Sea $\psi_0 : H \to G_1 *_H G_2$ definido por $\psi_0 = \psi_1 \circ \varphi_1 = \psi_2 \circ \varphi_2$ de modo que se obtiene un blanco directo $\langle G_1 *_H G_2, \psi_i \rangle$ para el sistema directo $\langle G_i, \varphi_{ij} \rangle$, con φ_{ii} el homomorfismo indetidad, y $\varphi_{0i} = \varphi_i$, para $i \in \{1, 2\}$. Se tiene entonces:

TEOREMA 1.11. $\left\langle G_1 \underset{H}{*} G_2, \psi_i \right\rangle \cong \varinjlim_{I} \langle G_i, \varphi_{ij} \rangle$

Demostración. Es una consecuencia inmediata del teorema de Emmy Noether. $\square$

COROLARIO 1.12. *Si en la discusión anterior $H = \{1\}$ es el grupo trivial, entonces*

$$G_1 \underset{H}{*} G_2 \cong G_1 * G_2.$$

Demostración. Se obtiene directamente observando que el subgrupo normal N consta únicamente de la palabra vacía, o aplicando el Corolario 1.10 al Teorema 1.11. $\square$

1.3. Anillos

Una terna $(R, +, \cdot)$, donde R es un conjunto no vacío y $+, \cdot$ son dos leyes de composición interna, se dice un *anillo* si $(R, +)$ es un grupo abeliano y $(R, \cdot)$ un semigrupo, tal que $\cdot$ es distributiva respecto de $+$. Como es usual, se refiere a R como el anillo. Al grupo $(R, +)$ se lo llama el grupo aditivo de R y a $(R, \cdot)$ el semigrupo multiplicativo de R y se escribe esta operación multiplicativamente. Al neutro de la suma se lo nota por 0 y se lo llama *cero*, y al neutro de la multiplicación, si existe, por 1 y se lo denomina *uno*. En caso de existir el uno, se dice que R es un *anillo con unidad*. La multiplicación no requiere ser conmutativa, pero en caso de serlo se dice que R es un *anillo conmutativo*.

Si R es un anillo, su *centro* es el conjunto

$$Z(R) = \{x \in R : rx = xr, \forall r \in R\}.$$

Algunas notaciones importantes son las siguientes: Si $A, B \subseteq R$, siendo R un anillo, y $x \in R$, entonces

$$A \cdot B = \{ab : a \in A, b \in B\}, \quad A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$$

y se nota xA y Ax en lugar de $\{x\} \cdot A$ y $A \cdot \{x\}$, respectivamente.

Sea R un anillo. Un elemento $x \in R$ se dice *nilpotente* si $x^n = 0$ para algún $n \in \mathbb{N}$ y se dice *idempotente* si $x^2 = x$. Un *divisor de cero a derecha* es un elemento $a \in R$ tal que existe $b \in R$, con $b \neq 0$, tal que $ba = 0$. De manera análoga se define un divisor de cero a izquierda. Si R es anillo con unidad, un elemento x se dice invertible a izquierda (resp. invertible a derecha, invertible) si lo es en el monoide $(R, \cdot)$. Un elemento invertible se dice una *unidad*. Al conjunto de unidades de R se lo nota por $R^\times$ o por $U(R)$. $U(R)$ es un grupo multiplicativo. Un *dominio es un anillo con unidad que no posee divisores de cero*. Es decir, un dominio es un anillo R que verifica

$$ab = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ o } b = 0, \quad \forall a, b \in R.$$

Un *anillo de división* es un anillo con unidad en el que todo elemento distinto de cero es una unidad. Un dominio conmutativo se dice un *dominio íntegro* y un anillo de división conmutativo se llama un *campo*.

Si R es un anillo con unidad, se permite que $1 = 0$. En dicho caso

$$a = a1 = a0 = 0$$

para todo $a \in R$. Se escribe $R = 0$ y se llama a este el *anillo trivial*.

Sea R un anillo, y S un subgrupo del grupo aditivo de R. Se dice que S es un subanillo si es un anillo para la suma y multiplicación heredadas de R. Si R tiene unidad, se exige además que S tenga la misma unidad. El centro $Z(R)$ de un anillo es un subanillo de R. Por otro lado, un subgrupo I del grupo aditivo de R es un *ideal izquierdo* si $R \cdot I \subseteq I$, y se escribe $I \trianglelefteq_i R$. Se dice que I es *ideal derecho* de R si $I \cdot R \subseteq I$ y se escribe $I \trianglelefteq_r R$. Un *ideal* de R es un subgrupo del grupo aditivo que es a la vez ideal izquierdo e ideal derecho, y se nota por $I \trianglelefteq R$. Un ideal izquierdo, ideal derecho o ideal I de R se dice *propio* si $I \neq R$.

Dados R, S dos anillos, un homomorfismo de grupos abelianos $f : R \to S$ es un *homomorfismo de anillos* si $f(ab) = f(a)f(b)$. Si además R tiene unidad, se exige que $f(1) = 1$. El núcleo de f se define como

$$\ker(f) = f^{-1}(\{0\}) = \{x \in R : f(x) = 0\}.$$

Claramente $\ker(f) \trianglelefteq R$ y f es inyectivo si y sólo si $\ker(f) = (0)$, siendo (0) el ideal que contiene únicamente al cero del anillo. Si f es biyectivo, se dice que f es un isomorfismo, que R es isomorfo a S, y lo se escribe $R \cong S$. También se dirá que R es isomorfo a S vía f para indicar que $f : R \to S$ es un isomorfismo.

Sea R un anillo e I un ideal de R, entonces el grupo aditivo abeliano R/I puede dotarse de una estructura de anillo definiendo:

$$(a + I)(b + I) = ab + I.$$

Más aún, si R es un anillo con unidad, $1 + I$ es una unidad para R/I. En cualquier caso, la proyección $\pi_I : R \to R/I$ dada por $x \mapsto x + I$ es un homomorfismo de anillos sobreyectivo.

Un ideal izquierdo (resp. ideal derecho, ideal) I de R se dice *maximal* si $I \neq R$ y para todo ideal izquierdo (resp. ideal derecho, ideal) J, la inclusión $I \subseteq J$ implica que $I = J$ o $J = R$. De manera análoga se define la noción de ideal izquierdo (resp. ideal derecho, ideal) minimal.

La intersección de ideales izquierdos (resp. ideales derechos, ideales) es nuevamente un ideal izquierdo (resp. ideal derecho, ideal), y la intersección de subanillos es un subanillo. Dado un conjunto $X \subseteq R$, siendo R un anillo, el *ideal izquierdo* (resp. *ideal derecho, ideal*) generado por X es la intersección de todos los ideales izquierdos (resp. ideales derechos, ideales) que contienen a X. Se notará por RX (resp. XR, (X) o RXR). Cabe recalcar que RX y $R \cdot X$ son diferentes. RX es un ideal izquierdo, mientras que $R \cdot X$ solamente es el conjunto de los productos rx con $r \in R$ y $x \in X$. Si $X = \{x\}$ se escribe Rx, xR y (x) o RxR según corresponda. Un ideal izquierdo (resp. ideal derecho, ideal) I se dice *finitamente generado* si $I = RX$ (resp. $I = XR$, $I = (X)$) para algún conjunto finito X. Si X es finito, además, al ideal (X) se lo notará por $(x_1, ..., x_n)$ siendo x_i los elementos de X. Nótese que

$$\begin{aligned} RX &= \left\{ \sum_{i=1}^{n} r_i x_i : n \in \mathbb{N}, r_i \in R \text{ y } x_i \in X \right\}, \\ XR &= \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i r_i : n \in \mathbb{N}, r_i \in R \text{ y } x_i \in X \right\} \quad \text{y} \\ (X) &= \left\{ \sum_{i=1}^{n} r_i x_i s r_i : n \in \mathbb{N}, r_i, s_i \in R \text{ y } x_i \in X \right\}. \end{aligned}$$

Un ideal se dice *principal* si es generado por un solo elemento.

Dados dos ideales I, J en un anillo R, al ideal generado por todos los elementos de la forma ab con $a \in I$ y $b \in J$ se lo llama el *producto de I y J* y se lo nota por IJ. La suma $I + J = \{a + b | a \in I, b \in J\}$ es un ideal izquierdo (resp. ideal derecho, ideal) si I y J son ideales izquierdos (resp. ideales derechos, ideales)

Se presenta un teorema análogo a uno presentado en la sección de grupos:

TEOREMA 1.13 (Primer teorema de isomorfismos)**.** *Sea $f : R \to S$ un homomorfismo de anillos e $I \trianglelefteq R$ un ideal contenido en $\ker(f)$. Entonces f induce un único homomorfismo de anillos $\tilde{f} : R/I \to S$ tal que $\tilde{f}(x + I) = f(x)$ para todo $x \in R$. Más aún, si $I = \ker(f)$, entonces $\tilde{f}$ es inyectiva y*

$$\operatorname{im}(f) \cong R/\ker(f).$$

En este punto es importante recordar que si R es un dominio íntegro existe un campo K con la propiedad de ser *la más pequeña extensión* en la cual todo elemento no nulo de R es invertible. Esto es, existe un campo K y un homomorfismo de anillos $\iota : R \to K$ tal que si S es cualquier otro anillo y $f : R \to S$ es un homomorfismo tal que $f(r)$ es invertible para todo $r \in R^*$, entonces existe un único homomorfismo de anillos $f' : K \to S$ tal que $f' \circ \iota = f$. Si K' es otro campo con tal propiedad, entonces

$K \cong K'$ a través de un único isomorfismo. A K se lo llama el *campo de fracciones* de R. Un ejemplo de esta construcción es la obtención de $\mathbb{Q}$ como campo de fracciones de $\mathbb{R}$, o el campo de fracciones $k(X_1, \ldots, X_n)$ como campo de fracciones del anillo de polinomios $k[X_1, ..., X_n]$.

1.3.1. Característica y torsión

TEOREMA 1.14. *Sea R un anillo con unidad. Entonces existe un único homomorfismo de anillos $f : \mathbb{Z} \to R$.*

Demostración. Recordemos que a un homomorfismo de anillos con unidad se le exige verificar que la imagen de 1 es 1. Se define $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$. Sea $n \in \mathbb{Z}$ distinto de $0, 1$. Si $n > 1$ se define recursivamente $f(n) = f(1) + f(n-1)$ y si $n < 0$ se define $f(n) = -f(-n)$. Es claro que $f : \mathbb{Z} \to R$ es un homomorfismo de anillos y es el único, pues todo homomorfismo de anillos desde $\mathbb{Z}$ está definido de dicha manera. □

Sea R un anillo con unidad y $f : \mathbb{Z} \to R$ el único homomorfismo dado por el teorema precedente. Entonces $\ker(f)$ es un ideal de $\mathbb{Z}$. Los ideales de $\mathbb{Z}$ son de la forma $n\mathbb{Z}$ para algún $n \in \mathbb{Z}$, por ende $\ker(f) = n\mathbb{Z}$. Es lícito asumir que $n \geq 0$. Considérense dos casos:

(1) Si $n = 0$, entonces $\ker(f) = (0)$ y por ende f es inyectiva. Esto implica que R posee un subanillo isomorfo a $\mathbb{Z}$.

(2) Si $n \neq 0$, por el primer teorema de isomorfismos $\mathrm{im}(f) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, lo que significa que R tiene un subanillo isomorfo a $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

DEFINICIÓN 1.4. *Sea R un anillo con unidad. Al número entero $n \geq 0$ descrito anteriormente se lo llama la característica de R, y se lo nota por $\mathrm{char}(R) = n$.*

Si R es un anillo, $x \in R$ y $n \in \mathbb{Z}$, para $n = 0$ se denota $nx = 0$, si $n = 1$ en cambio $nx = x$. Si $n > 1$ recursivamente se define $nx = x + (n-1)x$ y si $n < 0$ entonces $nx = (-x)(-x)$.

PROPOSICIÓN 1.15. *Sea R un anillo con unidad con $\mathrm{char}(R) \neq 0$. Entonces*

$$\mathrm{char}(R) = \mathrm{mín}\{n \in \mathbb{N}^* : nx = 0, \forall x \in R\} = \mathrm{mín}\{n \in \mathbb{N}^* : n1 = 0\}.$$

Demostración. Sea $k = \operatorname{char}(R)$, y supóngase que $n1 = 0$, con $n \in \mathbb{N}^*$. Sea $f : \mathbb{Z} \to R$ el único homomorfismo desde $\mathbb{Z}$, entonces $n1 = f(n) = 0$, por ende $n \in \ker(f) = k\mathbb{Z}$, lo que significa que $k \mid n$, pero claramente $k1 = 0$ y por ende

$$\operatorname{char}(R) = \min\{n \in \mathbb{N}^* : n1 = 0\}.$$

Ahora asúmase que $n1 = 0$ y sea $x \in R$, entonces $nx = (n1)x = 0x = 0$, por lo tanto

$$\{n \in \mathbb{N}^* : n1 = 0\} \subseteq \{n \in \mathbb{N}^* : nx = 0, \forall x \in R\},$$

la inclusión contraria es trivial, tomando particularmente $x = 1$, por lo tanto

$$\{n \in \mathbb{N}^* : nx = 0, \forall x \in R\} = \{n \in \mathbb{N}^* : n1 = 0\}.$$

□

PROPOSICIÓN 1.16. *Si R es un dominio, entonces $\operatorname{char}(R) = 0$ o $\operatorname{char}(R)$ es un número primo.*

Demostración. Supóngase que $\operatorname{char}(R) \neq 0$ y sea $n = \operatorname{char}(R)$. Si $f : \mathbb{Z} \to R$ es homomorfismo de anillos, entonces $\ker(f) = n\mathbb{Z}$. Ahora, si $n = ab$ entonces $f(a)f(b) = f(ab) = 0$, y como R es íntegro, entonces $f(a) = 0$ o $f(b) = 0$. Se asume sin pérdida de generalidad que $f(a) = 0$, entonces $a \in n\mathbb{Z}$, por lo que $a = nk$ para algún $k \in \mathbb{Z}$. Pero entonces $n = nkb$, lo que implica que $kb = 1$ y por ende que $|b| = 1$. Consecuentemente n es primo. □

PROPOSICIÓN 1.17. *Sea F un campo de característica 0, entonces F posee un subcampo isomorfo a $\mathbb{Q}$.*

Demostración. Se sabe que F posee un subanillo isomorfo a $\mathbb{Z}$. Sea $f : \mathbb{Z} \to F$ el único homomorfismo desde $\mathbb{Z}$ y defínase $f(a/b) = f(a)/f(b)$ para $a, b \in \mathbb{Z}$, con $b \neq 0$. Así se ha extendido a f a todo $\mathbb{Q}$. Puesto que $f \neq 0$ y el único ideal propio de $\mathbb{Q}$ es (0), se sigue que f es inyectiva, lo que completa la demostración. □

DEFINICIÓN 1.5. *Sea R un anillo, $x \in R$, $x \neq 0$ y $n \in \mathbb{N}^*$. Se dice que x tiene* torsión n *si $nx = 0$.*

El anillo R se dice libre de torsión n *si ningún elemento no nulo de R tiene torsión n. Equivalentemente, R es libre de torsión n si para todo $x \in R$, $nx = 0 \Rightarrow x = 0$.*

Si R es un anillo con unidad libre de torsión n, es inmediato, por definición, que $\operatorname{char}(R) \neq n$. Además, si $\operatorname{char}(R) = 0$, entonces R es libre de torsión n para todo

$n \in \mathbb{N}^*$.

En general, un polinomio no constante sobre un campo F no siempre tiene raíces en dicho campo. Por ejemplo, el polinomio x^2+1 no tiene raíces en $\mathbb{R}$, pero sí las tiene en $\mathbb{C}$. Un campo en el que todo polinomio tiene raíces se dice *algebraicamente cerrado*. Todo campo algebraicamente es infinito. En efecto, si F fuese un campo finito, sean $a_1, \ldots, a_n$ sus elementos. Entonces $p(X) = (X-a_1)\cdots(X-a_n)+1 \in F[X]$, pero entonces para todo $a_i \in F$, $p(a_i) = 1 \neq 0$ y por ende p no tiene raíces, por lo que F no sería algebraicamente cerrado.

Dado un campo F, una extensión de F es un campo G tal que F es isomorfo a un subcampo de G. Esto se escribe por G/F. Para cualquier campo F existe (salvo isomorfismo) una única extensión $\overline{F}$ tal que $\overline{F}$ es algebraicamente cerrado y tal que dicha extensión es la más pequeña extensión algebraicamente cerrada. Esto significa que si G/F es otra extensión y G es algebraicamente cerrado, entonces $G/\overline{F}$ es también una extensión.

1.4. Módulos y Álgebras

1.4.1. Módulos

En esta sección, R será un anillo con unidad. Se denota por R^{op} al anillo cuyos elementos son los mismos de R y en donde las operaciones se definen como sigue: la suma $a+b$ en R^{op} es igual a la suma en R, mientras que $a \times^{op} y$, el producto en R^{op} es yx en R. Nótese que si R es conmutativo, entonces $R = R^{op}$.

DEFINICIÓN 1.6. *Un R-módulo izquierdo es un par (M, φ) donde M es un grupo abeliano y $\varphi : R \to \mathrm{End}(M)$ es un homomorfismo de anillos.*

Un R-módulo derecho es un par (M, ψ) donde M es un grupo abeliano y $\psi : R^{op} \to \mathrm{End}(M)$ es un homomorfismo de anillos.

Como es usual se dice que M es un R-módulo (izquierdo o derecho), sin hacer referencia a φ o ψ. Se nota por ${}_RM$ para indicar que M es un R-módulo izquierdo y por M_R para indicar que M es un R-módulo derecho. Nótese que si R es conmutativo, un módulo izquierdo es lo mismo que un módulo derecho.

Antes de proceder con ejemplos, se presenta una caracterización del concepto de módulo, para lo cual es necesaria una definición previa:

DEFINICIÓN 1.7. *Sea G un monoide y X un conjunto. Una acción a izquierda de G sobre X es una función $\cdot : G \times X \to X$ (en donde se escribe $g \cdot x$ en lugar de $\cdot(g, x)$ para todo $g \in G$ y todo $x \in X$) que verifica:*

(1) $1 \cdot x = x$, *para todo* $x \in X$;

(2) $g \cdot (g' \cdot x) = gg' \cdot x$ *para todo* $g, g' \in G$ *y todo* $x \in X$.

El concepto de acción a derecha de G sobre X se defube análogamente.

PROPOSICIÓN 1.18. *Sea (M, φ) un R-módulo izquierdo. Entonces para cada $r \in R$ y cada $m \in M$,*

$$r \cdot m = \varphi(r)(m)$$

define una acción a izquierda del monoide multiplicativo de R sobre M. Esta acción además verifica

(3) $(r + s) \cdot m = r \cdot m + s \cdot m$ *para todo* $r, s \in R$ *y todo* $m \in M$;

(4) $r \cdot (m + n) = r \cdot m + r \cdot n$ *para todo* $r \in R$ *y todo* $m, n \in M$.

Por simplicidad, se escribe rm en lugar de $r \cdot m$ para la acción descrita en la proposición anterior.

Demostración. Como φ preserva identidades, $\varphi(1)$ es la identidad sobre M, así

$$1m = \varphi(1)(m) = m,$$

para todo $m \in M$. Sean $r, s \in R$ y $m \in M$, entonces

$$r(sm) = \varphi(r)(\varphi(s)(m)) = (\varphi(r) \circ \varphi(s))(m) = \varphi(rs)(m) = (rs)m.$$

Sean $r, s \in R$ y $m \in M$, se sigue que

$$(r + s)m = \varphi(r + s)(m) = (\varphi(r) + \varphi(s))(m) = \varphi(r)(m) + \varphi(s)(m) = rm + sm.$$

Finalmente, si $r \in R$ y $m, n \in M$ se tiene

$$r(m + n) = \varphi(r)(m + n) = \varphi(r)(m) + \varphi(r)(n) = rm + rn.$$

□

De hecho, la acción definida en la proposición anterior caracteriza completamente a φ:

Proposición 1.19. *Sea M un grupo abeliano y $\cdot : R \times M \to M$ una acción del monoide multiplicativo de R sobre M que verifica* (3) *y* (4) *de la proposición anterior. Defínase $\varphi : R \to \mathrm{End}(M)$ como sigue: dado $r \in R$, y $m \in M$,*

$$\varphi(r)(m) = r \cdot m.$$

Entonces φ es un homomorfismo de anillos y consecuentemente (M, φ) es un R-módulo izquierdo.

Demostración. Nótese que si $m \in M$, entonces

$$\varphi(1)(r) = 1m = m,$$

por ende $\varphi(1)$ es el homomorfismo identidad sobre M. Que φ sea homomorfismo de grupos abelianos es consecuencia de (3), y que preserve productos es consecuencia de (2). Finalmente, que $\varphi(r)$ sea un endomorfismo es consecuencia de (4). □

Si (M, ψ) es un R-módulo derecho, entonces

$$m \cdot r = \psi(r)(m)$$

define una acción a derecha del monoide multiplicativo de R sobre M que, como en las proposiciones anteriores, caracteriza por completo a ψ, con sus respectivas formas análogas de (3) y (4).

De ahora en adelante, se escribirá $rm = \varphi(r)(m)$ para la acción descrita anteriormente, sin hacer énfasis en ello. Similarmente se hará para el caso de módulos derechos.

Definición 1.8. *Sean (M, φ) y (N, ψ) dos R-módulos izquierdos. Un homomorfismo de grupos abelianos $f : M \to N$ se dice un* homomorfismo de módulos *si para todo $r \in R$*

$$f \circ \varphi(r) = \psi(r) \circ f.$$

De manera análoga se define un homomorfismo de módulos cuando los módulos son derechos.

Proposición 1.20. *Una función $f : M \to N$ entre módulos izquierdos (M, φ) y (N, ψ) es un homomorfismo de módulos si y sólo si para todo $r \in R$ y todo $m, n \in M$*

$$f(m+n) = f(m) + f(n) \quad \text{y} \quad f(rm) = rf(m).$$

Demostración. La condición $f(m+n) = f(m) + f(n)$ es la definición de homomorfismo de grupos abelianos. Asúmase que f es un homomorfismo de módulos, y sean $r \in R$ y $m \in M$. Entonces

$$f(rm) = f(\varphi(r)(m)) = (f \circ \varphi(r))(m) = (\psi(r) \circ f)(m) = \psi(r)(f(m)) = rf(m).$$

Recíprocamente, sea $r \in R$ y $m \in M$, entonces

$$(f \circ \varphi(r))(m) = f(\varphi(r)(m)) = f(rm) = rf(m) = \psi(r)(f(m)) = (\psi(r) \circ f)(m),$$

y como m es arbitrario se concluye que $f \circ \varphi(r) = \psi(r) \circ f$. □

Esto motiva el hecho de llamar a un homomorfismo de R-módulos una *aplicación R-lineal*. El núcleo y la imagen de un homomorfismo de módulos se definen como su núcleo e imagen como homomofismo de grupos abelianos.

DEFINICIÓN 1.9. *Sea (M, φ) un R-módulo izquierdo (o derecho). Un subgrupo N de M se dice un R-submódulo de M si para todo $r \in R$, N es invariante bajo $\varphi(r)$, es decir, $\varphi(r)(N) \subseteq N$.*

Si (M, φ) es un R-módulo izquierdo, y N es un R-submódulo de M, se define $\varphi_N : R \to \operatorname{End}(N)$ como $\varphi_N(r) = \varphi(r)|_N$. Como N es invariante bajo $\varphi(r)$, entonces $\varphi_N(r)$ es un endomorfismo sobre N. Es claro entonces que (N, φ_N) es un R-módulo izquierdo. Gracias a esto, y a la acción inducida por φ_N que N es un R-submódulo de M si y sólo si $N \neq \emptyset$ y $rm + n \in N$ para todo $r \in R$ y todo $m, n \in N$. Se sigue trivialmente que el núcleo y la imagen de un homomorfismo de módulos son submódulos del módulo de salida y el módulo de llegada, respectivamente. Claramente un homomorfismo de módulos es inyectivo si y sólo si el núcleo es trivial.

EJEMPLO 1. R es un módulo sobre sí mismo: definiendo la acción $r \cdot x = rx$ entonces ${}_RR$ es un R-módulo izquierdo y con la acción $x \cdot r = xr$ R_R es un R-módulo derecho. A ${}_RR$ y R_R se los llama los *R-módulos regulares izquierdo y derecho*, respectivamente. Los R-submódulos de ${}_RR$ son los ideales izquierdos de R y los de R_R son los ideales derechos de R.

Más generalmente, R^n es un R-módulo izquierdo o derecho según la acción sea

$$r(r_1, ..., r_n) = (rr_1, ..., rr_n) \quad \text{o} \quad (r_1, ..., r_n)r = (r_1 r, ..., r_n r),$$

respectivamente.

EJEMPLO 2. Si k es un campo, un k-módulo es lo mismo que un k-espacio vectorial.

Ahora, sea E un k-espacio vectorial y sea $T : E \to E$ un operador lineal. Si $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in k[x]$, podemos asociar un operador $p(T) = a_0 I + a_1 T + \cdots T^n$, donde T^k se entiende como la composición de k veces T. Con esto, es posible dotar a E de una estructura de $k[x]$-módulo de la siguiente manera:

$$p(x) \cdot v = p(T)v,$$

para cada $v \in E$. Un $k[x]$-submódulo de E es un subespacio vectorial de E invariante bajo T.

EJEMPLO 3. Sean M, N dos R-módulos izquierdos. Se define $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ como el conjunto de todos los homomorfismos de R-módulos de M hacia N. Su estructura de R-módulo izquierdo está dada por

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{y} \quad (rf)(x) = rf(x).$$

Se denota por $\mathrm{End}_R(M) = \mathrm{Hom}_R(M, N)$. No debe confundirse $\mathrm{End}(M)$ con $\mathrm{End}_R(M)$. El primero es el anillo de homomorfismos del grupo M en sí mismo, el segundo es de los homomorfismos de módulos.

EJEMPLO 4. El anillo $\mathbb{M}_n(R)$ de matrices cuadradas $n \times n$, con entradas en el anillo R puede dotarse de una estructura de R-módulo izquierdo o derecho según la acción sea $r(a_{ij}) = (ra_{ij})$ o $(a_{ij})r = (a_{ij}r)$, respectivamente.

EJEMPLO 5. Sea S un anillo y $f : R \to S$ un homomorfismo de anillos. Entonces se puede dotar a S de una estructura de R-módulo izquierdo definiendo la acción

$$r \cdot s = f(r)s,$$

y análogamente se le da una estructura de R-módulo derecho.

DEFINICIÓN 1.10. *Sean R, S dos anillos con unidad y M un grupo abeliano. Se dice que M es un (R, S)-bimódulo si M es a la vez un R-módulo izquierdo y un S-módulo derecho y si verifican la siguiente condición de compatibilidad: Para todo $r \in R$, $m \in M$, $s \in S$,*

$$(rm)s = r(ms).$$

Se indicará que M es un (R, S)-bimódulo escribiendo ${}_R M_S$.

EJEMPLO 6. Sea M un R-módulo izquierdo. Si $f, g \in \mathrm{End}_R(M)$, se escribe xf en lugar de $f(x)$, y gf en lugar de $f \circ g$, y se define con esta composición el producto en $\mathrm{End}_R(M)$, dotándole así de una estructura de anillo. De este modo, M tiene una estructura de $(R, \mathrm{End}_R(M))$-bimódulo.

Análogamente, si M es un R módulo derecho, entonces M tiene una estructura de $(\mathrm{End}_R(M), R)$-bimódulo. Aquí el producto fg de dos elementos en $\mathrm{End}_R(M)$ está definido como $fg = f \circ g$.

Si M es un R-módulo izquierdo y N un R-submódulo de M, el grupo factor M/N puede dotarse de una estructura de R-módulo izquierdo al definir

$$r(x+N) = (rx) + N$$

para todo $x \in M$ y todo $r \in R$. Igual que antes, la proyección canónica $\pi : M \to M/N$ es un homomorfismo sobreyectivo de R-módulos.

Teorema 1.21 (Emmy Noether: Primer teorema de isomorfismos)**.** *Sea $f : M \to N$ un homomorfismo de R-módulos izquierdos (resp. derechos) y $M' \subseteq \ker(f)$ un R-submódulo de M. f induce un único homomorfismo de módulos $\tilde{f} : M/M' \to N$ tal que $\tilde{f}(x + M') = f(x)$ para todo $x \in M$. En particular*

$$M/\ker(f) \cong \mathrm{im}(f)$$

vía $\tilde{f}$.

Demostración. Similar al caso de grupos y anillos. □

Teorema 1.22 (Emmy Noether: Segundo teorema de isomorfismos)**.** *Sea M un R-módulo y N, P dos R-submódulos de M. Entonces*

$$N/(N \cap P) \cong (N+P)/P$$

Demostración. Se tiene el homomorfismo $f : N \to (N+P)/P$ definido por $f(x) = x + P$. Más aún, $x \in \ker(f)$ si y sólo si $x \in N \cap P$, por lo que $\ker(f) = N \cap P$. Más aún, si $x + P \in (N+P)/P$, existen $y \in N$, $z \in P$ tales que $x = y + z$ y por ende $x + P = (y+z) + P = y + P$, pues $z + P = 0 + P$. Así $f(y) = x + P$ y por ende f es sobreyectiva. Se sigue del primer teorema de isomorfismos que

$$N/\ker(f) = N/(N \cap P) \cong (N+P)/P,$$

como se deseaba. □

Sea $(M_i)_{i \in I}$ una familia de R-módulos izquierdos (o derechos). El *producto directo* de la familia $(M_i)_{i\in I}$ es por definición el conjunto

$$\prod_{i\in I} M_i,$$

con la suma y multiplicación por escalar definidos componente a componente:

$$(x_i) + (y_i) = (x_i + y_i), \quad r(x_i) = (rx_i).$$

La *suma directa* de la familia $(M_i)_{i\in I}$ es el subconjunto

$$\bigoplus_{i\in I} M_i \subseteq \prod_{i\in I} M_i$$

del producto directo formado por los elementos de la forma $(x_i)_{i\in I}$ tales que $x_i = 0$ para todos salvo un número finito de índices $i \in I$. Es claro que si I es finito, entonces

$$\bigoplus_{i\in I} M_i = \prod_{i\in I} M_i,$$

y para $I = \{1, ..., n\}$ se escribe

$$M_1 \oplus \cdots \oplus M_n, \quad M_1 \times \cdots \times M_n$$

para indicar la suma directa o el producto directo de estos.

Si todos los M_i son R-submódulos de un R-módulo M, la *suma* de dicha familia se define como

$$\sum_{i\in I} M_i = \operatorname{span}_R \left(\bigcup_{i\in I} M_i \right).$$

Si $I = \{1, ..., n\}$ se escribe

$$M_1 + \cdots + M_n$$

para indicar la suma.

PROPOSICIÓN 1.23. *Sea M un R-módulo izquierdo (o derecho), $(M_i)_{i\in I}$ una familia de R-submódulos de M y $N = \sum_{i\in I} M_i$. Son equivalentes*

(i) *$f : \bigoplus_{i\in I} M_i \to N$ definida por $f((x_i)) = \sum_{i\in I} x_i$ es un isomorfismo de R-módulos;*

(ii) *Para todo $i_0 \in I$, $M_{i_0} \cap \sum_{i\neq i_0} M_i = \{0\}$;*

(iii) *Para todo $x \in N$ existen únicos $i_1, ..., i_n \in I$ y únicos $x_{i_j} \in M_{i_j}$ no nulos ($j =$*

$1, ..., n)$ *tales que* $x = x_{i_1} + \cdots + x_{i_n}$.

Demostración. La demostración es similar al caso del álgebra lineal para espacios vectoriales, por lo que se omite. $\square$

Si se cumple alguno de los enunciados equivalentes de la proposición anterior, se dice que N es la suma directa de los submódulos M_i, y se escribe $N = \bigoplus_{i \in I} M_i$. Si M es un R-módulo, un R-submódulo N de M se dice un *sumando directo* de M si existe N' tal que $M = N \oplus N'$.

1.4.2. Módulos libres y finitamente generados

En este apartado se considera que todos los R-módulos son izquierdos y que R es un anillo con unidad. El tratamiento para el caso de R-módulos derechos es análogo.

DEFINICIÓN 1.11. *Sea M un R-módulo y $B \subseteq M$. M se dice libre sobre B, o que M es libre y B es una base para M si verifica la siguiente propiedad universal: Para toda función $f : B \to M'$, siendo M' un R-módulo, existe un único homomorfismo de R-módulos $\tilde{f} : M \to M'$ tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "f"'] & M \arrow[d, dashed, "\tilde{f}"] \\ & M' \end{tikzcd}$$

conmuta, donde $\iota : B \to M$ es la inclusión.

Sea X un conjunto. Se indica un procedimiento para construir un R-módulo libre con base X, $F(X)$. Sea $F(X)$ el conjunto de todas las funciones $\eta : X \to R$ tal que $\eta(x) = 0$ para todo salvo un número finito de $x \in X$. Dadas $\eta, \theta \in F(X)$, se define para cada $x \in X$ y cada $r \in R$

$$(\eta + \theta)(x) = \eta(x) + \theta(x) \quad \text{y} \quad (r\eta)(x) = r\eta(x).$$

Así $F(X)$ es un módulo izquierdo. Para cada $x \in X$ se define η_x como la función $\eta_x(y) = 1$ si $y = x$ y $\eta_x(y) = 0$ si $y \neq x$. Entonces $\eta_x \in F(X)$. La aplicación $\iota : x \mapsto \eta_x$ es inyectiva, por ende se puede considerar a X como un subconjunto de $F(X)$ al identificar a cada $x \in X$ con η_x. Nótese que si $\eta \in F(X)$, se puede escribir

$$\eta = \sum_{x \in X} \eta(x)\eta_x,$$

y dicha representación es única.

PROPOSICIÓN 1.24. *$F(X)$ es un R-módulo libre con base X.*

Demostración. Sea M un R-módulo y $f : X \to M$ una función. Se define $\tilde{f} : F(X) \to M$ como sigue: Para $\eta \in F(X)$,

$$\tilde{f}(\eta) = \sum_{x \in X} \eta(x) f(x).$$

Es claro que $\tilde{f}$ es un homomorfismo de módulos. Ahora, si $x \in X$, se tiene que

$$\tilde{f}(\eta_x) = \sum_{y \in X} \eta_x(y) f(y) = 1 f(x) = f(x),$$

de modo que $\tilde{f} \circ \iota = f$.

Claramente, $\tilde{f}$ es el único homomorfismo de R-módulos que verifica tal condición. □

COROLARIO 1.25. *Un R-módulo M es libre sobre $B \subseteq M$ si y sólo si $M \cong F(B)$.*

Sea M un R-módulo y $(M_i)_{i \in I}$ una familia de R-submódulos de M. La intersección $\bigcap_{i \in I} M_i$ es un R-submódulo de M. Si $S \subseteq M$, a la intersección de todos los R-submódulos de M que contienen a S se la denota por $\operatorname{span}_R(S)$ y se la llama el *R-submódulo generado por S*. Como es usual, se escribe $\operatorname{span}_R(s_1, ..., s_n)$ si $S = \{s_1, ..., s_n\}$. Una *combinación lineal* de elementos de $S \subseteq M$ es una suma finita de la forma

$$\sum_{i=1}^{n} r_i m_i = r_1 m_1 + \cdots + r_n m_n$$

donde $r_i \in R$ y $m_i \in S$ para todo $i = 1, ..., n$. Es claro que $\operatorname{span}_R(S)$ es el conjunto de todas las combinaciones lineales de elementos de S.

PROPOSICIÓN 1.26. *Sea M un R-módulo libre sobre B, entonces $M = \operatorname{span}_R(B)$ y ningún subconjunto propio de B genera a M. Más aún, B es linealmente independiente sobre R, es decir, para todo $b_1, ..., b_n \in B$ y todo $r_1, ..., r_n \in B$, se tiene que*

$$r_1 b_1 + \cdots + r_n b_n = 0 \Rightarrow r_1 = \cdots = r_n = 0.$$

Recíprocamente, si existe un conjunto linealmente independiente $B \subseteq M$ que genera a M, entonces M es libre con base B.

Demostración. Sin pérdida de generalidad, se asume que $M = F(B)$. Como para cada $\eta \in F(X)$ se puede escribir

$$\eta = \sum_{x \in B} \eta(x)\eta_x,$$

se sigue que $F(X) = \text{span}_R(B)$. Sean $b_1, ..., b_n \in B$ y $r_1, ..., r_n \in R$ tales que

$$r_1 b_1 + \cdots + r_n b_n = 0.$$

Entonces se tienen dos representaciones

$$0 = \sum_{i=1}^{n} r_i \eta_{b_i} = \sum_{i=1}^{n} 0 \eta_{b_i},$$

dado que dicha representación debe ser única, entonces $r_i = 0$ para todo índice i en el conjunto $\{1, ..., n\}$. Finalmente si un subconjunto $B' \subset B$ genera a $F(B)$, entonces $x \in B \setminus B'$ sería combinación lineal de elementos de B', en contradicción con la independencia lineal de B.

Recíprocamente, sea B un conjunto generador linealmente independiente para M. Sea $f : B \to N$ una función, siendo N un R-módulo. Para cada $x \in M$ existen únicos $r_1, ..., r_n \in R$ y $b_1, ..., b_n \in B$ tales que $x = r_1 b_1 + \cdots + r_n b_n$. Se define

$$\tilde{f}(x) = r_1 f(b_1) + \cdots + r_n f(b_n).$$

Es trivial verificar que $\tilde{f} : M \to N$ es un homomorfismo de R-módulos y que $\tilde{f} = f \circ \iota$, siendo $\iota : B \to M$ la inclusión. Así M es libre con base B. $\square$

DEFINICIÓN 1.12. *Un R-módulo M se dice finitamente generado si existen $x_1, ..., x_n$ tales que $M = \text{span}_R(x_1, ..., x_n)$.*

PROPOSICIÓN 1.27. *Un R-módulo M es libre y finitamente generado si y sólo si $M \cong A^n$ para cierto n. Además las n-uplas $e_i = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ son una base para A^n y por ende están en correspondencia con una base para M.*

Demostración. Claramente $e_1, ..., e_n$ generan a A^n y sin linealmente independientes, por lo que A^n es libre y finitamente generado. Recíprocamente, sea A un R-módulo libre finitamente generado. Sea $B = \{b_1, ..., b_n\}$ una base para M. Defínase $f : A^n \to M$ por

$$(r_1, ..., r_n) \longmapsto f((r_1, ..., r_n)) = r_1 b_1 + \cdots + r_n b_n.$$

Es trivial verificar que f es un homomorfismo de R-módulos. Sea $(r_1, ..., r_n)$ un elemento de $\ker(f)$, entonces $r_1 b_+ \cdots + r_n b_n = 0$ y como B es linealmente independiente, se sigue que $i_1 = \cdots = r_n = 0$. Así $\ker(f) = 0$. Ahora, si $x \in M$, existen únicos $r_1, ..., r_n \in R$ tales que $x = r_1 b_1 + \cdots + r_n b_n$, de donde $x = f(r_1, ..., r_n)$ y por ende f es un isomorfismo. □

PROPOSICIÓN 1.28. *Un R-módulo M es finitamente generado si y sólo si existe $n \in \mathbb{N}$ y un submódulo $N \subseteq A^n$ tal que $M \cong A^n/N$.*

Demostración. Si $M \cong A^n/N$, sean e_i como en la demostración anterior y sean $\overline{e_i}$ las imágenes de e_i en A^n/N. Las imágenes homomórficas de $\overline{e_i}$ en M claramente generan a M, así M es finitamente generado. Recíprocamente, sean $x_1, ..., x_n$ generadores de M y defínase $f : A^n \to M$ mediante

$$(r_1, ..., r_n) \longmapsto f(r_1, ..., r_n) = r_1 x_1 + \cdots + r_n x_n.$$

Es claro que f es un homomorfismo sobreyectivo de módulos, por ende, si $N = \ker(f)$, el primer teorema de isomorfismos permite concluir que $M \cong A^n/N$. □

DEFINICIÓN 1.13. *Un R-módulo M se dice cíclico si existe $m \in M$ tal que $M = \operatorname{span}_R(m)$, es decir, si M es generado por un solo elemento.*

PROPOSICIÓN 1.29. *M es un R-módulo cíclico si y sólo si $M \cong R/I$ para algún ideal I de R*

Demostración. Supóngase que M es cíclico y sea m un generador de M. Se define $f : R \to M$ mediante

$$r \longmapsto f(r) = rm.$$

Claramente f es un homomorfismo de módulos sobreyectivo. Sea $I = \ker(f)$, así por el primer teorema de isomorfismos, $R/I \cong M$.

Recíprocamente, sea $f : R/I \to M$ un isomorfismo y sea $m = f(1 + I)$. Para cada $x \in M$ existe $r + I \in R/I$ tal que $f(r + I) = x$. Notemos que

$$rm = rf(1 + I) = f(r(1 + I)) = f(r + I) = x,$$

de modo que m genera a M. □

1.4.3. Álgebras

Las estructuras de grupo, anillo y módulo se conjugan en una estructura llamada álgebra. Igual que antes, R será un anillo con unidad. Los R-módulos, a menos que se indique lo contrario, serán izquierdos.

DEFINICIÓN 1.14. *Sean M, N, P tres R-módulos. Una función $f : M \times N \to P$ se dice R-bilineal si para cada $m \in M$ la función $n \mapsto f(m, n)$ es R-lineal, y si para cada $n \in N$ la función $m \mapsto f(m, n)$ es R-lineal.*

Una forma bilineal $\varphi : M \times M \to M$ se dirá un producto sobre M. Nótese que en particular un producto es una ley de composición interna. Si φ es un producto sobre M, el centro de M se define como

$$Z(M) = \{m \in M : \varphi(m, x) = \varphi(x, m), \forall x \in M\}.$$

Dado que un producto es una ley de composición interna, podemos hablar de productos asociativos, conmutativos, con unidad, etc.

DEFINICIÓN 1.15. *Un R-álgebra (o un álgebra sobre R) es un R-módulo $\mathcal{A}$ equipado con un producto $\varphi : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$. Un R-álgebra se dice*

- *asociativa si su producto es asociativo;*
- *unital si su producto admite un neutro;*
- *conmutativa si su producto es conmutativo o, equivalentemente, si $Z(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$.*

  Una subálgebra de $\mathcal{A}$ es un R-submódulo $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ tal que $\varphi|_{\mathcal{B}\times\mathcal{B}}$ es un producto sobre $\mathcal{B}$.

Cuando no se especifica el producto, este se escribirá multiplicativamente.

EJEMPLO 7. Sea A un anillo y $f : R \to A$ un homomorfismo de anillos tal que $\operatorname{im}(f) \subseteq Z(A)$. Entonces, definiendo la acción $r \cdot a = f(r)a$, A es un R-módulo y además es un R-álgebra asociativa para el producto $\varphi(a, b) = ab$. En efecto, como $\operatorname{im}(f) \subseteq Z(A)$ se tiene para $r \in R$, $a, b, c \in A$ que

$$\begin{aligned}
&\varphi(ra + b, c) = (ra + b)c = rac + bc = r\varphi(a, c) + \varphi(bc) \\
&\varphi(a, rb + c) = a(rb + c) = arb + ac = rab + ac = r\varphi(a, b) + \varphi(a, c),
\end{aligned}$$

lo que muestra que φ es un producto.

En particular, si $f : Z(R) \to R$ es la inclusión de $Z(R)$ en R, se tiene que R es una $Z(R)$-álgebra.

EJEMPLO 8 (Álgebra de Lie de un álgebra asociativa)**.** Supóngase que R es conmutativo. Sea A un R-álgebra asociativa. Se define $[\cdot, \cdot] : A \times A \to A$ como la forma bilineal

$$[a, b] = ab - ba.$$

Al álgebra $(A, [\cdot,\cdot])$ se la nota por A^- y se la llama el *álgebra de Lie* de A. Este álgebra posee dos propiedades importantes:

(1) *Anticonmutatividad:* $[x,x] = 0$ para todo $x \in A$; y

(2) *Identidad de Jacobi:* $[[x,y],z] + [[y,z],x] + [[z,x],y] = 0$ para todo $x,y,z \in A$.

Más adelante se definirá en un contexto más general lo que es un *álgebra de Lie*, que generaliza a esta idea.

Nótese que si $A \neq 0$, por la identidad de Jacobi, el álgebra de Lie A^- no es asociativa, y por la anticonmutatividad, no es unital, pues si e fuese una unidad para el álgebra A^-, entonces

$$e = [e,e] = 0,$$

lo que implicaría que $A = 0$.

Ejemplo 9 (Álgebra de Jordan de un álgebra asociativa)**.** Sea R un anillo conmutativo y A un R-álgebra asociativa. Se define $\circ : A \times A \to A$ como la forma bilineal

$$x \circ y = xy + yx,$$

y se la llama el *producto de Jordan*. Al álgebra $(A, \circ)$ se la nota por A^+ y se la conoce como el *álgebra de Jordan del álgebra A*. Esta álgebra posee dos propiedades:

(1) *Conmutatividad:* $x \circ y = y \circ x$ para todo $x,y \in A^+$;

(2) *Identidad de Jordan:* Para todo $x,y \in A^+$, $(x \circ y) \circ (x \circ x) = x \circ (y \circ (x \circ x))$.

Si R es un anillo con unidad, y A tiene la misma unidad 1, se puede considerar el elemento $2 = 1 + 1$. Si 2 es una unidad en el álgebra A, entonces

$$x \circ 2^{-1} = x2^{-1} + 2^{-1}x = x,$$

de modo que 2^{-1} es una unidad para A^+. Una manera distinta de definir el producto de Jordan es la siguiente: Si $R = F$ es un campo con $\mathrm{char}(F) \neq 2$ y A es un F-álgebra que contiene a F, se define

$$x \circ y = \frac{xy + yx}{2}.$$

En este caso, 1 es una unidad para el álgebra A^+.

Ejemplo 10 (Álgebras de incidencia)**.** Sea X un conjunto preordenado por $\leq$, es decir, $\leq$ es una relación sobre X reflexiva y transitiva, pero no necesariamente antisimétrica. Supóngase además que X es *localmente finito*, es decir, para todo $x,y \in X$

el conjunto

$$[x,y] = \{z \in X | x \leq z \leq y\}$$

es finito. Dado un anillo conmutativo con unidad R, se define $\mathcal{I}(X,R)$ como el álgebra

$$\mathcal{I}(X,R) = \{f : X \times X \to R | f(x,y) = 0 \text{ cuando } x \not\leq y\},$$

dotado de las operaciones

$$\begin{aligned}
(f+g)(x,y) &= f(x,y) + g(x,y), \\
(rf)(x,y) &= rf(x,y), \\
(f*g)(x,y) &= \sum_{x \leq z \leq y} f(x,z)g(z,y).
\end{aligned}$$

Al producto $*$ se lo llama *producto de convolución*, o simplemente convolución, y se nota fg en lugar de $f*g$. Al álgebra $\mathcal{I}(X,R)$ se la llama el *álgebra de incidencia* de X sobre R. Se define $\delta : X \times X \to R$ como la función $\delta(x,y) = \delta_{xy}$, siendo δ_{xy} la delta de Kronecker. δ cumple el papel de elemento identidad de $\mathcal{I}(X,R)$. En efecto,

$$(f\delta)(x,y) = \sum_{x \leq z \leq y} f(x,z)\delta(z,y) = \sum_{x \leq z \leq y} f(x,z)\delta_{zy} = f(x,y),$$

de modo que $f\delta = f$ y similarmente $\delta f = f$.

El álgebra $\mathcal{I}(X,R)$ es asociativa. En efecto

$$\begin{aligned}
((fg)h)(x,y) &= \sum_{x \leq z \leq y} (fg)(x,z)h(z,y) = \sum_{x \leq z \leq y} \sum_{x \leq w \leq z} f(x,w)g(w,z)h(z,x) \\
&= \sum_{x \leq z \leq w \leq y} f(x,w)g(w,z)h(z,x) = \sum_{x \leq w \leq y} f(x,w) \sum_{w \leq z \leq y} g(w,z)h(z,x) \\
&= \sum_{x \leq w \leq y} f(x,w)(gh)(w,y) = (f(gh))(x,y).
\end{aligned}$$

Nótese que el conjunto

$$\mathfrak{B} = \{e_{xy} | x \leq y\},$$

donde

$$e_{xy}(u,v) = \begin{cases} 1, & \text{si } (u,v) = (x,y) \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

para cada $x \leq y$, forma una base para $\mathcal{I}(X,R)$ considerando a esta como un R-módulo izquierdo cuando X es un conjunto finito. En efecto, sean $x_1, y_1, ..., x_n, y_n$ tales que $x_i \leq y_i$ para todo i y $(x_i, y_i) \neq (x_j, y_j)$ cuando $i \neq j$ y sean $r_1, ..., r_n \in R$

tales que
$$\sum_{i=1}^{n} r_i e_{x_i,y_i} = 0,$$
entonces
$$r_j = r_j e_{x_j y_j}(x_j y_j) = \sum_{i=1}^{n} r_i e_{x_i,y_i}(x_j, y_j) = 0,$$
para todo j, de modo que $\mathfrak{B}$ es linealmente independiente. Por otro lado, si $f \in \mathcal{I}(X, R)$, se puede escribir
$$f = \sum_{x \leq y} f(x, y) e_{x,y},$$
por lo que $\mathfrak{B}$ genera a $\mathcal{I}(X, R)$.

Incluso cuando X es infinito, la identidad
$$f = \sum_{x \leq y} f(x, y) e_{x,y}$$
es válida si es entendida como una *suma formal* (este concepto no será utilizado en este trabajo, por lo cual no se precisará su significado). Además, se tiene la identidad
$$e_{xy} e_{uv} = \delta_{yu} e_{xv}. \tag{1.1}$$

EJEMPLO 11 (Álgebras de matrices)**.** Sea $X = \{1, ..., n\}$ y se define la relación de preorden $\leq$ en X, donde $x \leq y$ para todo $x, y \in X$, es decir, $\leq$ es la relación $X \times X$. Si R es un anillo conmutativo con unidad, nótese que, como anillos, $\mathbb{M}_n(R)$ coincide con el álgebra de incidencia $\mathcal{I}(X, R)$. Así $\mathbb{M}_n(R)$ es un R-álgebra con la suma, producto y producto por escalar usual de matrices.

Ahora considérese $X = \{1, ..., n\}$ con la relación de orden usual en los números naturales. Se identifica a $I(X, R)$ con el subconjunto de $\mathbb{M}_n(R)$ formado por matrices triangulares superiores. Esta R-álgebra será notada por $T_n(R)$ y es una subálgebra de $\mathbb{M}_n(R)$.

Finalmente, si se considera $X = \mathbb{N}^*$ con el orden usual, el álgebra $\mathcal{I}(X, R)$ coincide con el álgebra de *matrices infinitas* triangulares superiores, que se denota por $T_\infty(R)$.

TEOREMA 1.30. *Sea R un anillo conmutativo con unidad y $\mathcal{A}$ un R-módulo libre con base X. Dada una función $\varphi : X \times X \to \mathcal{A}$, existe una única función $\psi : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ que es un producto y que extiende a φ. Más aún, si φ verifica*
$$\varphi(\varphi(x, y), z) = \varphi(x, \varphi(y, z))$$

para todo $x, y, z \in X$, entonces $(\mathcal{A}, \psi)$ es un álgebra asociativa. Si φ verifica que $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$ para todo $x, y \in X$, entonces $(\mathcal{A}, \psi)$ es un álgebra conmutativa. Finalmente, si X es finito y $\varphi(x, x) = x$ para todo $x \in X$ y $\varphi(x, y) = 0$ para todo $x \neq y$, entonces el elemento

$$e = \sum_{x \in X} x$$

es un unidad para el producto ψ.

Demostración. Sean $u, v \in \mathcal{A}$. Existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, $\beta_1, \ldots, \beta_m \in R$ y elementos de la base X $x_1, \ldots, x_n$ y $y_1, \ldots, y_m$ tales que

$$u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, \quad v = \sum_{j=1}^{m} \beta_j y_j.$$

Se define entonces

$$\psi(u, v) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \beta_j \varphi(x_i, y_j).$$

Por construcción, ψ es R-bilineal. Ahora, suponiendo que

$$\varphi(\varphi(x, y), z) = \varphi(x, \varphi(y, z))$$

se probará que ψ es un producto asociativo. En efecto, para $u, v, w \in \mathcal{A}$, se consideran escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$,$\beta_1, \ldots, \beta_m$,$\gamma_1, \ldots, \gamma_p \in R$ y elementos de la base $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_m$ y $z_1, \ldots, z_p \in X$ tales que

$$u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, \quad v = \sum_{i=1}^{m} \beta_j y_j, \quad w = \sum_{k=1}^{p} \gamma_k z_k.$$

Así

$$\begin{aligned}
\psi(\psi(u, v), w) &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \beta_j \psi(\varphi(x_i, y_j), w) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \beta_j \sum_{k=1}^{p} \gamma_k \varphi(\varphi(x_i, y_j), z_k) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} \beta_j \gamma_k \varphi(x_i, \varphi(y_j, z_k)) \\
&= \psi(u, \psi(v, w)).
\end{aligned}$$

La conmutatividad es inmediata bajo la hipótesis dada, ya que R es conmutativo.

Finalmente, sea $u \in \mathcal{A}$ y $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in R$, $x_1, \ldots, x_n \in X$ tales que

$$u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i.$$

Entonces

$$\psi(u,e) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{x \in X} \alpha_i \varphi(x_i, x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi(x_i, x_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = u,$$

y de manera similar $\psi(e,u) = u$, por lo que e es un neutro para el producto. □

DEFINICIÓN 1.16. *Sea k un campo y $\mathcal{A}$ una k-álgebra. Se dice que $\mathcal{A}$ es un álgebra de dimensión finita si como k-espacio vectorial es de dimensión finita.*

OBSERVACIÓN 1. Puesto que toda forma bilineal en un espacio vectorial está completamente determinada por las imágenes de los elementos de una base, el teorema anterior muestra que el producto en una k-álgebra de dimensión finita está completamente determinado por los elementos del producto de una base.

DEFINICIÓN 1.17. *Sea $(\mathcal{A}, \varphi)$ un R-álgebra. Un idempotente es un elemento $e \in \mathcal{A}$ tal que $\varphi(e,e) = e$. Un idempotente e se dice idempotente central si $e \in Z(\mathcal{A})$. Una familia de idempotentes $\{e_i\}_{i \in I}$ se dice ortogonal si $\varphi(e_i, e_j) = 0$ para todo $i \neq j$.*

Dados $A, B \subseteq \mathcal{A}$, se define

$$\varphi(A,B) = \{\varphi(a,b) : a \in A, b \in B\}.$$

En el caso particular cuando $A = \{a\}$ o $B = \{b\}$ se escribe $\varphi(a,B)$ y $\varphi(A,b)$, respectivamente, para representar al conjunto $\varphi(A,B)$.

Un R-submódulo $\mathcal{I}$ de $\mathcal{A}$ se dice un ideal izquierdo del álgebra $\mathcal{A}$ si $\varphi(\mathcal{A}, \mathcal{I}) \subseteq \mathcal{I}$. En cambio $\mathcal{I}$ se dice un ideal derecho si $\varphi(\mathcal{I}, \mathcal{A}) \subseteq \mathcal{I}$. Finalmente, $\mathcal{I}$ se dice un ideal si $\mathcal{I}$ es a la vez ideal izquierdo e ideal derecho.

TEOREMA 1.31. *Sea $\mathcal{A}$ un R-álgebra asociativa unital y $B_1, \ldots, B_n$ una familia de ideales izquierdos de $\mathcal{A}$. Entonces $\mathcal{A} = B_1 \oplus \cdots \oplus B_n$ si y sólo si existe una familia de idempotentes ortogonales $e_1, \ldots, e_n$ tales que $B_i = \mathcal{A}e_i$ y $e_1 + \cdots + e_n = 1$.*

Demostración. Se supone para iniciar que $\mathcal{A} = B_1 \oplus \cdots \oplus B_n$, de modo que existen únicos $e_i \in B_i$ tales que $1 = e_1 + \cdots + e_n$. Se sigue entonces que $e_i = e_i e_1 + \cdots + e_i^2 + \cdots + e_i e_n$, lo que por unicidad de la descomposición en suma directa implica que $e_i e_j = 0$ si $j \neq i$ y que $e_i^2 = e_i$, ya que $e_i e_j \in B_j$ al ser los conjuntos B_j ideales izquierdos de $\mathcal{A}$. De este modo $e_1, \ldots, e_n$ es una familia de idempotentes ortogonales de $\mathcal{A}$. Puesto que B_i es un ideal izquierdo, entonces $\mathcal{A}e_i \subseteq B_i$. Recíprocamente, si $x \in B_i$, entonces

$$x = x1 = x(e_1 + \cdots + e_i + \cdots + e_n) = xe_1 + \cdots + xe_i + \cdots + xe_n,$$

de modo que $xe_j = 0$ para todo $i \neq j$ ya que la suma es directa, y consecuentemente $x = xe_i \in \mathcal{A}e_i$. Esto prueba que $B_i = \mathcal{A}e_i$.

Ahora se supone que existe una familia de idempotentes ortogonales $e_1, \ldots, e_n$ tales que $B_i = \mathcal{A}e_i$ y $e_1 + \cdots + e_n = 1$. Sea $x \in \mathcal{A}$, entonces

$$x = x1 = x(e_1 + \cdots + e_i + \cdots + e_n) = xe_1 + \cdots + xe_i + \cdots + xe_n,$$

con $xe_i \in B_i$, por lo que $\mathcal{A} = B_1 + \cdots + B_n$. Ahora, si $x = x_1 + \cdots x_n$ es otra descomposición con $x_i \in B_i$, se sigue que

$$xe_i = x_1e_i + \cdots + x_ie_i + \cdots + x_ne_i,$$

pero $x_j = a_je_j$ para algún $a_j \in \mathcal{A}$, de modo que

$$xe_i = a_1e_1e_i + \cdots + a_ie_ie_i + \cdots + a_ne_ne_i = a_ie_i = x_i,$$

por lo que la descomposición es única y por ende la suma es directa. $\square$

TEOREMA 1.32. *Sea $\mathcal{A}$ un R-álgebra asociativa unital y $B_1, \ldots, B_n$ una familia de ideales de $\mathcal{A}$. Entonces $\mathcal{A} = B_1 \oplus \cdots \oplus B_n$ si y sólo si existe una familia de idempotentes centrales ortogonales $e_1, \ldots, e_n$ tales que $B_i = \mathcal{A}e_i$ y $e_1 + \cdots + e_n = 1$. Más aún, en este caso cada B_i es un R-álgebra unital con unidad e_i.*

Demostración. Suponiendo que $\mathcal{A} = B_1 \oplus \cdots \oplus B_n$, en virtud del teorema anterior basta probar que los idempotentes e_i son centrales. Sea $x \in \mathcal{A}$, entonces $x = xe_1 + \cdots + xe_n$ y $x = e_1x + \cdots + e_nx$, de donde, por la unicidad de la descomposición y el hecho de que los B_i son ideales, se tiene que $e_ix = xe_i$, y así $e_i \in Z(\mathcal{A})$. El recíproco es inmediato.

Ahora, si $x \in B_i$, entonces $x = xe_i = e_ix$ por unicidad de la descomposición, de modo que e_i es un neutro para B_i, y por ende B_i es un R-álgebra unital con identidad e_i. $\square$

DEFINICIÓN 1.18. *Con la notación de los teoremas anteriores, a la descomposición $\mathcal{A} = B_1 \oplus \cdots \oplus B_n$ se la llama la* descomposición idempotente *del álgebra $\mathcal{A}$, y a la familia $e_1, \ldots, e_n$ una* familia de idempotentes primitivos *para el álgebra $\mathcal{A}$.*

TEOREMA 1.33. *Sea $\mathcal{A}$ un R-álgebra asociativa y $e_1, \ldots, e_n$ una familia de idempotentes primitivos para $\mathcal{A}$ tal que*

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{i,j=1}^{n} e_i \mathcal{A} e_j,$$

entonces

$$Z(\mathcal{A}) \subseteq \bigoplus_{i=1}^{n} e_i \mathcal{A} e_i.$$

Demostración. Sea $a \in Z(\mathcal{A})$, existen $a_{i,j} \in \mathcal{A}$ tales que

$$a = \sum_{i,j=1}^{n} e_i a_{ij} e_j.$$

Si $k \in \{1, \ldots, n\}$, se tiene que

$$e_k a = \sum_{i,j=1}^{n} e_k e_i a_{ij} e_j = \sum_{j=1}^{n} e_k a_{kj} e_j$$

y por otro lado

$$a e_k = \sum_{i,j=1}^{n} e_i a_{ij} e_j e_k = \sum_{i=1}^{n} e_i a_{ik} e_k.$$

Como a está en el centro de $\mathcal{A}$ se verifica

$$\sum_{j=1}^{n} e_k a_{kj} e_j = \sum_{i=1}^{n} e_i a_{ik} e_k,$$

y por ende

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} e_k a_{ki} e_i = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} e_i a_{ik} e_k.$$

Puesto que la suma es directa, los elementos $e_i a_{ij} e_j$ son linealmente independientes, lo que implica, por lo anterior, que para todo k y para todo $i \neq k \neq j$, entonces $e_i a_{ik} e_k = 0 = e_k a_{ki} e_i$, de donde en particular, para todo $i \neq j$ $e_i a_{ij} e_j = 0$, y por ende

$$a = \sum_{i=1}^{n} e_i a_{ii} e_i,$$

y, puesto que $a \in \mathcal{A}$ es arbitrario, se concluye que

$$Z(\mathcal{A}) \subseteq \bigoplus_{i=1}^{n} e_i \mathcal{A} e_i.$$

$\square$

Definición 1.19. *Sean $(\mathcal{A}, \varphi)$ y $(\mathcal{B}, \psi)$ dos R-álgebras. Un homomorfismo de módulos $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ se dice un* homomorfismo de R-álgebras *si para todo $x, y \in \mathcal{A}$*

$$f(\varphi(x,y)) = \psi(f(x), f(y)).$$

Las nociones de núcleo e imagen se aplican análogamente para los homomorfismos de R-álgebras. Igualmente las nociones de cociente de un álgebra por un ideal, y los teoremas de isomorfismos de módulos se extienden trivialmente al caso de álgebras, con las modificaciones obvias en las demostraciones.

1.5. Exactitud y productos tensoriales

Sea R un anillo con unidad y

$$\cdots \longrightarrow M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n+1} \longrightarrow \cdots \tag{1.2}$$

una sucesión de R-módulos izquierdos (o derechos) y homomorfismos de módulos. Dicha sucesión se dice *exacta* en M_n si $\ker(f_n) = \mathrm{im}(f_{n-1})$. La sucesión se dice *exacta* si es exacta en M_n para todo n. Una *sucesión exacta corta* es una sucesión exacta de la forma

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0.$$

La sucesión anterior es exacta si y sólo si f es inyectiva, $\ker(g) = \mathrm{im}(f)$ y g es sobreyectiva. Una sucesión de R-módulos y homomorfismos con infinitos términos no nulos se dice una *sucesión exacta larga*. Toda sucesión exacta larga de la forma (1.2) puede descomponerse en sucesiones exactas cortas del siguiente modo. Sean $K_n = \ker(f_n) = \mathrm{im}(f_{n-1})$ y $\iota_n : K_n \to M_n$ la inclusión. De este modo la sucesión corta

$$0 \longrightarrow K_n \xrightarrow{\iota_n} M_n \xrightarrow{f_n} K_{n+1} \longrightarrow 0$$

es exacta. El siguiente diagrama permite visualizar de mejor manera la situación:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & M_{n-1} \arrow[rr, "f_{n-1}"] & & M_n \arrow[rr, "f_n"] \arrow[dr, "f_n"'] & & M_{n+1} \arrow[r] & \cdots \\
& & K_n \arrow[ur, "\iota_n"'] & & K_{n+1} \arrow[dr] & & \\
0 \arrow[urr] & & & & & & 0
\end{tikzcd}$$

En lo que sigue, R será un anillo conmutativo con unidad.

DEFINICIÓN 1.20. *Sean $M_1, \dots, M_n$ una familia de R-módulos y N un R-módulo. Una aplicación n-lineal es una función $f : M_1 \times \cdots \times M_n \to N$ tal que f es R-lineal en cada componente.*

TEOREMA 1.34. *Sean $M_1, \dots, M_n$ una familia de R-módulos, entonces existe un par (T, t) siendo T un R-módulo y $t : M_1 \times \cdots \times M_n \to T$ una aplicación n-lineal tal que para todo R-módulo M y toda aplicación R-lineal $f : M_1 \times \cdots \times M_n \to M$ existe un único homomorfismo de R-módulos $f' : T \to M$ tal que $f' \circ t = f$. Más aún, si (T', t') es otro par con dicha propiedad, existe un único isomorfismo $g : T \to T'$ tal que $g \circ t = t'$.*

Demostración. Sea S el R-módulo libre sobre $M_1 \times \cdots M_n$, y sea U el R-submódulo de S generado por todos los elementos de la forma

$$\begin{aligned} &(x_1, \dots, x_i + x_i', \dots, x_n) - (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) - (x_1, \dots, x_i', \dots, x_n), \\ &\quad r(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) - (x_1, \dots, r x_i, \dots, x_n) \end{aligned}$$

donde $x_j, x_j' \in M_j$, para $j \in \{1, \dots, n\}$ y $r \in R$. Se considera entonces $T = S/U$. Si $(x_1, \dots, x_n) \in M_1 \times \cdots \times M_n$, se denota por $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$ a su imagen en T. Se tiene por construcción que

$$x_1 \otimes \cdots \otimes (x_i + x_i') \otimes \cdots \otimes x_n = (x_1 \otimes \cdots \otimes x_i \otimes \cdots \otimes x_n) + (x_1 \otimes \cdots \otimes x_i' \otimes \cdots \otimes x_n)$$

para todo $x_1 \in M_1, \dots, x_i, x_i' \in M_i, \dots, x_n \in M_n$ y

$$r(x_1 \otimes \cdots \otimes x_i \otimes \cdots \otimes x_n) = x_1 \otimes \cdots \otimes (r x_i) \otimes \cdots \otimes x_n$$

para todo $(x_1, \dots, x_n) \in M_1 \times \cdots \times M_n$ y todo $r \in R$. Por construcción, los elementos de T son sumas finitas de la forma

$$\sum_{k=1}^{m} r_k (x_1^k \otimes \cdots \otimes x_n^k)$$

donde $x_i^k \in M_i$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ y todo $k \in \{1, \dots, m\}$ y $r_k \in R$ para todo $k \in \{1, \dots, m\}$.

Ahora, se define $t : M_1 \times \cdots \times M_n \to T$ mediante $t(x_1, \dots, x_n) = x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$. Por lo anterior, es claro que t es n-lineal. Sea ahora $f : M_1 \times \cdots M_n \to M$ una aplicación n-lineal. Se define $f' : T \to M$ del siguiente modo: Dado

$$x = \sum_{k=1}^{m} r_k (x_1^k \otimes \cdots \otimes x_n^k) \in T$$

entonces

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{m} r_k f(x_1^k, \cdots, x_n^k).$$

Nótese que $f'(x)$ está bien definido, es decir, su definición no depende del representante elegido para x. Esto es consecuencia inmediata de las relaciones que definen al R-submódulo U y la n-linealidad de f. También es claro por construcción que $f' \circ t = f$ y que f' está únicamente determinado por f.

Para finalizar, supóngase que (T', t') es otro par con las propiedades requeridas. Sustituyendo (M, f) por (T', t') se obtiene un único homomorfismo de R-módulos $g : T \to T'$ tal que $g \circ t = t'$. Invirtiendo los roles de (T, t) y (T', t') se obtiene otro único homomorfismo de R-módulos $g' : T' \to T$ tal que $g' \circ t' = t$. Las composiciones $g \circ g'$ y $g' \circ g$ deben, por unicidad, ser las funciones identidad, lo que implica que g es el isomorfismo deseado. $\square$

DEFINICIÓN 1.21. *Con la notación del teorema anterior, T se denomina el* producto tensorial *de $M_1, \ldots, M_n$ sobre R, y se denota por $\bigotimes_R M_i$ o por $M_1 \otimes_R \cdots \otimes_R M_n$ (o incluso por $M_1 \otimes \cdots \otimes M_n$ si R es claro para el contexto). A los elementos de T se los llama* tensores*. Los tensores $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$ introducidos en la demostración son los generadores de T.*

OBSERVACIÓN 2. Una construcción similar puede emplearse para el caso cuando R es no conmutativo, o incluso cuando M_i es un $(R_i, R_{i+1}$-bimódulo, pero los detalles son un poco más tediosos, y tal generalidad no será utilizada en este trabajo.

Una mitad de la parte (2) de la demostración del siguiente resultado fue extraída de [2]. Sin embargo, como se evidencia, las técnicas involucradas son estándar.

PROPOSICIÓN 1.35. *Sean M, N, P tres R-módulos. Entonces existen isomorfismos únicos*

(1) $M \otimes N \to N \otimes M$

(2) $(M \otimes N) \otimes P \to M \otimes (N \otimes P) \to M \otimes N \otimes P$

(3) $(M \oplus N) \otimes P \to (M \otimes P) \oplus (N \otimes P)$

(4) $R \otimes M \to M$

tales que, respectivamente,

(a) $x \otimes y \mapsto y \otimes x$

(b) $(x \otimes y) \otimes z \mapsto x \otimes (y \otimes z) \mapsto x \otimes y \otimes z$

(c) $(x, y) \otimes z \mapsto (x \otimes z, y \otimes z)$

(d) $a \otimes x \mapsto ax$.

Demostración. (1) Considérense las aplicaciones $f : M \times N \to N \otimes M$ y $g : N \times M \to M \otimes N$ definidas por $f(x, y) = y \otimes x$ y $g(y, x) = x \otimes y$. f y g son R-bilineales, de modo que estas inducen únicos homomorfismos $f' : M \otimes N \to N \otimes M$ y $g' : N \otimes M \to M \otimes N$ tales que $f'(x \otimes y) = y \otimes x$ y $g'(y \otimes x) = x \otimes y$. Claramente $f' \circ g'$ y $g' \circ f'$ son identidades, por ende $x \otimes y \mapsto y \mapsto x$ es un isomorfismo.

(2) Se prueba la existencia del isomorfismo $M \otimes (N \otimes P) \to M \otimes N \otimes P$, la otra parte es similar. Se construyen homomorfismos

$$M \otimes (N \otimes P) \xrightarrow{f} M \otimes N \otimes P \xrightarrow{g} M \otimes (N \otimes P)$$

tales que $f(x \otimes (y \otimes z)) = o \otimes y \otimes z$ y $g(x \otimes y \otimes z) = x \otimes (y \otimes z)$.

Para construir f, fíjese un elemento $x \in M$, la aplicación $(x, y) \mapsto x \otimes y \otimes z$ es R-bilineal en y y z y por ende induce un homomorfismo $f_x : N \otimes P \to M \otimes N \otimes P$ tal que $f_x(y \otimes z) = x \otimes y \otimes z$. Ahora se considera la aplicación $(t, x) \mapsto f_x(t)$ de $M \times (N \otimes P)$ en $M \otimes N \otimes P$. Esta aplicación es bilineal en t y z y por ende induce un homomorfismo

$$f : M \otimes (N \otimes P) \to M \otimes N \otimes P$$

tal que $f(x \otimes (y \otimes z)) = x \otimes y \otimes z$.

Para construir g considérese la aplicación $(x, y, z) \mapsto x \otimes (y \otimes z)$ de $M \times N \times P$ en $M \otimes (N \otimes P)$. Esta aplicación es 3-lineal y por ende induce un homomorfismo

$$g : M \otimes N \otimes P \to M \otimes (N \otimes P)$$

tal que $g(x \otimes y \otimes z) = x \otimes (y \otimes z)$.

Claramente $f \circ g$ y $g \circ f$ son identidades, por ende $x \otimes (y \otimes z) \mapsto x \otimes y \otimes z$ es un isomorfismo.

(3) La aplicación $((x, y), z) \mapsto (x \otimes z, y \otimes z)$ de $(M \oplus N) \times P$ en $(M \otimes P) \oplus (N \otimes P)$ es R-bilineal, por ende induce un homomorfismo

$$f : (M \oplus N) \otimes P \to (M \otimes P) \oplus (N \otimes P)$$

tal que $f((x, y) \otimes z) = (x \otimes z, y \otimes z)$. Considérese ahora las asignaciones $(x, z) \mapsto$

$(x,0) \otimes z$ de $M \times P \to (M \oplus N) \otimes P$ y $(y,z) \mapsto (0,y) \otimes z$ de $N \times P \to (M \oplus N) \otimes P$, que son aplicaciones R-bilineales. Estas inducen homomorfismos $g_1 : M \times P \to (M \oplus N) \otimes P$ y $g_2 : N \otimes P \to (M \oplus N) \otimes P$ dados por $g_1(x \otimes z) = (x,0) \otimes z$ y $g_2(y,z) = (0,y) \otimes z$. Se define entonces

$$g : (M \otimes P) \oplus (N \otimes P) \to (M \oplus N) \otimes P$$

mediante $g(x \otimes z, y \otimes w) = g_1(x \otimes z) + g_2(y \otimes w) = (x,0) \otimes z + (0,y) \otimes w$. Se nota que

$$\begin{aligned}(g \circ f)((x,y) \otimes z) &= g((x \otimes z, y \otimes z)) \\ &= (x,0) \otimes z + (0,y) \otimes z \\ &= (x,y) \otimes z\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x \otimes z, y \otimes w) &= f((x,0) \otimes z) + f((0,y) \otimes z) \\ &= (x \otimes z, 0) + (0, y \otimes w) \\ &= (x \otimes z, y \otimes w),\end{aligned}$$

por lo que f es un isomorfismo.

(4) La aplicación $R \times M \to M$ dada por $(r,x) \mapsto ax$ es R-bilineal, por lo que induce un homomorfismo $f : R \otimes M \to M$ dado por $f(r \otimes x) = rx$. Por otro lado, $g : M \to R \otimes M$ definido por $g(x) = 1 \otimes x$ es claramente un homomorfismo. Además, claramente $f \circ g$ es la identidad, y

$$(g \circ f)(r \otimes x) = g(rx) = rg(x) = r(1 \otimes x) = r \otimes x$$

por lo que f es un isomorfismo. □

Proposición 1.36. *Sean $f : M \to M'$ y $g : N \to N'$ homomorfismos de R-módulos. Existe un único homomorfismo $f \otimes g : M \otimes N \to M' \otimes N'$ tal que*

$$(f \otimes g)(x \otimes y) = f(x) \otimes g(y)$$

para todo $x \in M$ y $y \in N$.

Demostración. La función $M \times N \to M' \otimes N'$ definida por $(x,y) \mapsto f(x) \otimes g(y)$ es R-bilineal y por ende induce un único homomorfismo $f \otimes g : M \otimes N \to M' \otimes N'$ con la propiedad requerida. □

Teorema 1.37. *Sean $(\mathcal{A}, \varphi)$ y $(\mathcal{B}, \psi)$ dos R-álgebras. Su producto tensorial $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ puede ser dotado con la estructura de R-álgebra tal que su producto η verifica*

$$\eta(x \otimes y, z \otimes w) = \varphi(x, z) \otimes \psi(y, w).$$

La R-álgebra $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ es asociativa (resp. unital, conmutativa) si lo son las álgebras $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$.

Más aún, si $f : (\mathcal{A}, \varphi) \to (\mathcal{A}', \varphi')$ y $g : (\mathcal{B}, \psi) \to (\mathcal{B}', \psi')$ son homomorfismos de R-álgebras, entonces el producto $f \otimes g : \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \to \mathcal{A}' \otimes \mathcal{B}'$ es un homomorfismo de R-álgebras.

Demostración. La aplicación $\mathcal{A} \times \mathcal{B} \times \mathcal{A} \times \mathcal{B} \to \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ definida por

$$(x, y, z, w) \mapsto \varphi(xz) \otimes \psi(yw)$$

es claramente 4-lineal (pues R es conmutativo), por lo que induce un homomorfismo de R-módulos $\mu : \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \to \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Ahora, sea $t : (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \times (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \to \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ la aplicación bilineal que define al producto tensorial, e indentifíquese a $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ con $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \otimes (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$, de modo que se obtiene una aplicación bilineal $\eta : (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \times (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \to \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ dada por $\eta = \mu \circ t$. Por construcción se sigue trivialmente que

$$\eta(x \otimes y, z \otimes w) = \varphi(x, z) \otimes \psi(y, w).$$

La asociatividad y conmutatividad son sencillas verificaciones bajo las correspondientes hipótesis, y si $e \in \mathcal{A}$ y $e' \in \mathcal{B}$ son neutros, entonces $e \otimes e'$ es un neutro para el álgebra $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. La verificación de que $f \otimes g$ es un homomorfismo de R-álgebras es trivial. $\square$

Ahora se relaja la condición de exactitud para una sucesión de R-módulos y homomorfismos.

Definición 1.22. *Una sucesión de R-módulos y homomorfismos*

$$\cdots \xrightarrow{\delta_3} M_2 \xrightarrow{\delta_2} M_1 \xrightarrow{\delta_1} M_0 \xrightarrow{\delta_0} 0$$

se dice un complejo de cadena si para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\delta_n \circ \delta_{n+1} = 0,$$

o, equivalentemente, si para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{im}(\delta_{n+1}) \subseteq \ker(\delta_n).$$

A los homomorfismos δ_n se los llama operadores de borde. Un elemento $x \in M_n$ se dice un ciclo si $\delta_{n-1}(x) = 0$, y se dice un borde si $x \in \mathrm{im}(\delta_n)$. Al complejo de cadena se lo denota por $(M_., \delta)$ o simplemente $(M_.)$.

De manera dual, un complejo de cocadena es una sucesión de R-módulos y homomorfismos

$$0 \xrightarrow{\partial^{-1}=0} M_0 \xrightarrow{\partial^0} M_1 \xrightarrow{\partial^1} M_2 \xrightarrow{\partial^2} \cdots$$

donde para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\partial^{n+1} \circ \partial^n = 0,$$

o, equivalentemente, si para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{im}(\partial^n) \subseteq \ker(\partial^{n+1}).$$

A los elementos de $\ker(\partial^n)$ se los llama cociclos y a los de $\mathrm{im}(\partial^n)$ se los denomina cobordes. Al complejo de cocadena se lo denota por $(M^\cdot, \partial)$ o simplemente $(M^\cdot)$.

DEFINICIÓN 1.23. *El n-ésimo grupo de homología de un complejo de cadena $(M_., \delta)$ se define como el R-módulo cociente*

$$H_n(M_.) = \ker(\delta_n)/\mathrm{im}(\delta_{n+1}).$$

A la sucesión $(H_n(M_.))_{n\in\mathbb{N}}$ se la llama la homología del complejo de cadena $(M_.)$.

El n-ésimo grupo de cohomología de un complejo de cocadena $(M^\cdot, \partial)$ se define como el R-módulo cociente

$$H^n(M^\cdot) = \ker(\partial^n)/\mathrm{im}(\partial^{n-1}).$$

A la sucesión $(H^n(M^\cdot))_{n\in\mathbb{N}}$ se la llama la cohomología del complejo de cadena $(M^\cdot)$.

Este trabajo presentará en su último capítulo una teoría de cohomología para álgebras asociativas, conocida como la *cohomología de Hochschild*[2]. El objetivo de presentar esta teoría es el de buscar un vínculo entre esta y la teoría que será desarrollada para estudiar la homotopía de categorías y carcajes finitos.

[2]Gerhard Paul Hochschild (1915-2010), matemático alemán-estadounidense

Capítulo 2

Preliminares Topológicos

2.1. Topología y continuidad

Sea X un conjunto. Una *topología* sobre X es una colección τ de subconjuntos de X tales que $\emptyset, X \in \tau$, si $U, V \in \tau$ entonces $U \cap V \in \tau$ y tal que para toda familia $(U_i)_{i \in I} \subseteq \tau$, se tiene que $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$. Al par (X, τ) se lo denomina un *espacio topológico* (por abuso de lenguaje también se dice que X es un espacio topológico), a los elementos de X *puntos* y a los de τ *conjuntos abiertos*. Un conjunto se dice *cerrado* si su complemento es abierto. Por paso al complemento, $\emptyset$ y X son cerrados, la unión finita de cerrados es cerrado y la intersección arbitraria de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.

Dado un punto $x \in X$, siendo X un espacio topológico, una *vecindad* de x es un conjunto V tal que existe un abierto U que verifica $x \in U \subseteq V$. Si V es abierto se dice una *vecindad abierta* de x, y si V es cerrado se denomina una *vecindad cerrada* de x.

Si X es un espacio topológico y $A \subseteq X$, la intersección de todos los conjuntos cerrados de X que contienen a A es el conjunto cerrado más pequeño que contiene a A y se denomina la *clausura* de A. Esta se notará por $\overline{A}$. Se tiene la siguiente caracterización: $x \in \overline{A}$ si y sólo si toda vecindad V de x interseca a A. Un conjunto A es cerrado si y sólo si $\overline{A} = A$.

Dado un conjunto A en un espacio topológico X, un punto $x \in A$ se dice un *punto interior* de A, si existe una vecindad U tal que $x \in U \subseteq A$. Al conjunto de todos los puntos interiores de A se lo llama el *interior* de A y se lo denota por $\mathring{A}$. Un conjunto A es abierto si y sólo si $\mathring{A} = A$.

Sea X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Un punto $x \in X$ se dice un *punto de frontera* de A si para toda vecindad U de x, $U \cap A \neq \emptyset$ y $U \setminus A \neq \emptyset$. Al conjunto de puntos de frontera de A se lo llama la *frontera* de A y se la denota por ∂A. Es claro que $\mathring{A} \cap \partial A = \emptyset$ y que $\partial A \subseteq \overline{A}$.

Una *base* para una topología τ es una subfamilia $\mathcal{B} \subseteq \tau$ que verifica la siguiente propiedad: Para todo abierto $U \in \tau$ existe $\mathcal{B}_U \subseteq \mathcal{B}$ tal que $U = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_U} B$. A los elementos de $\mathcal{B}$ se los llama *abiertos básicos*.

Una familia $\mathcal{B} \subseteq \mathscr{P}(X)$ es una base para una topología si y sólo $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$ y para todo $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ y todo $x \in B_1 \cap B_2$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq B_1 \cap B_1$. De ser el caso,

$$\tau_{\mathcal{B}} = \{U \subseteq X : (\forall x \in U)(\exists B \in \mathcal{B})(x \in B \subseteq U)\}$$

es la única topología que tiene por base a $\mathcal{B}$.

Una *subbase* para una topología es una familia $\mathcal{S} \subseteq \mathscr{P}(X)$ tal que la colección de todas las intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{S}$ forman una base para una topología.

Si X, Y son dos espacios topológicos, una función $f : X \to Y$ se dice *continua* si para todo abierto U de Y, $f^{-1}(U)$ es un abierto de X. Por paso al complemento, f es continua si y sólo si para todo cerrado F de Y, $f^{-1}(F)$ es cerrado de X. Si $\mathcal{B}$ es una base para Y, f es continua si y sólo si para todo abierto básico $B \in \mathcal{B}$, $f^{-1}(B)$ es abierto de X. Se dice que f es continua en $a \in X$ si para toda vecindad V de $f(a)$, $f^{-1}(V)$ es una vecindad de a. Una función es continua si y sólo si es continua en todos los puntos de su dominio. La composición de funciones continuas es continua.

Una función biyectiva, continua, con inversa continua se dice un *homeomorfismo*. Si X e Y son dos espacios topológicos y $f : X \to Y$ es un homeomorfismo, se dice que X y Y son *homeomorfos vía f*, o simplemente *homeomorfos* cuando f no es importante para el contexto. Esto se escribe $X \cong Y$.

Sea X un espacio topológico. X se dice T_0 o que verifica el *axioma* 0 *de separación* si para todo par de puntos x, y existe una vecindad U tal que $x \in U$ y $y \notin U$ o viceversa. X se dice T_1 o que verifica el *axioma* 1 *de separación* si para todo $x, y \in X$ existen vecindades U, V tales que $x \in U$, $y \in V$ pero $x \notin V$ y $y \notin U$. Esto equivale a decir que para todo $x \in X$, $\{x\}$ es cerrado. X se dice un *espacio de Hausdorff*[1], espacio T_2, *espacio separado* o que verifica el *segundo axioma de separación* si para todo $x, y \in X$ existen abiertos U, V tales que $U \cap V = \emptyset$ y $x \in U$ y $y \in V$.

[1]Felix Hausdorff (1868-1942), matemático alemán

Dado un espacio topológico $(X\tau)$ y $Y \subseteq X$, la colección

$$\tau_Y = \{U \cap Y : U \in \tau\}$$

es una topología sobre Y. Al par (Y, τ_Y) se lo llama un *subespacio topológico de* X y a τ_Y la *topología heredada* por Y de X. Nuevamente se abusará de lenguaje diciendo que Y es un subespacio topológico de X. La inclusión canónica $\iota : Y \to X$ es siempre una función continua, considerando en Y la topología heredada desde X.

EJEMPLO 12. Un espacio métrico es un par (X, d) donde X es un conjunto y $d : X \times X \to \mathbb{R}$ es una métrica, es decir, es una función tal que $d(x, y) \geq 0$ para todo $x, y \in X$ (no negatividad), $d(x, y) = d(y, x)$ para todo $x, y \in X$ (simetría), $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$ (separación) y $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$ para todo $x, y, z \in X$ (desigualdad triangular). Para todo $x \in X$ y todo $r > 0$ se definen

$$B_r(x) = \{y \in X : d(x, y) < r\}, \quad B_r[x] = \{y \in X : d(x, y) \leq r\},$$

y se denominan las bolas abiertas y cerradas de centro x y radio r, respectivamente. Entonces

$$\tau_d = \{U \subseteq X : (\forall x \in U)(\exists r > 0)(B_r(x) \subseteq U)\}$$

es una topología sobre X, denominada la topología inducida por la métrica d. La colección

$$\mathcal{B} = \{B_r(x) : x \in X, r > 0\}$$

es una base para τ_d. Todo espacio métrico es un espacio de Hausdorff. En particular se tienen los siguientes ejemplos de espacios métricos:

(1) Si X es un conjunto y $d(x, y) = 1$ si $x \neq y$ y $d(x, x) = 0$, entonces d es una métrica llamada la *métrica discreta*. El par (X, d) se dice un *espacio métrico discreto*. En este caso $\tau_d = \mathscr{P}(X)$ y X se dice un espacio topológico discreto.

(2) En $\mathbb{R}^n$ (o similarmente en $\mathbb{C}^n$) se definen

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} \quad \text{y} \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|,$$

donde $p \geq 1$ y $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ (o $\mathbb{C}^n$). Entonces las funciones

$$d_p(x, y) = \|x - y\|_p \quad \text{y} \quad d_\infty(x, y) = \|x - y\|_\infty$$

son métricas sobre $\mathbb{R}^n$ (o $\mathbb{C}^n$). Todas estas métricas inducen la misma topología, la que se denomina la topología usual sobre $\mathbb{R}^n$ (o $\mathbb{C}^n$). A menos que se indique lo contrario, $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$ siempre estarán equipadas con la topología usual, y sus subconjuntos con la topología heredada.

Si (X, d) y (Y, d') son espacios métricos, una función $f : X \to Y$ es continua en $a \in X$ si y sólo si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $d(x, y) < \delta$, entonces $d'(f(x), f(y)) < \epsilon$.

Si X es un espacio métrico y $A \subseteq X$ el diámetro de A se define como

$$\operatorname{diam}(A) = \sup_{x,y \in A} d(x, y).$$

Sea X un espacio topológico y $K \subseteq X$. Un *recubrimiento abierto de* K es una familia $(U_i)_{i \in I}$ de conjuntos abiertos de X tales que $K \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$. Un *subrecubrimiento* de $(U_i)_{i \in I}$ es una subfamilia $(U_i)_{i \in J}$ tal que $J \subseteq I$. El recubrimiento se dice finito si el conjunto que lo indexa es finito. K se dice *compacto* si de todo recubrimiento abierto de K se puede extraer un subrecubrimiento finito. Si $f : X \to Y$ es continua y X es compacto, entonces $f(X)$ es compacto. Más aún, si $f : X \to \mathbb{R}$ es continua y X es compacto, existen $a, b \in X$ tales que $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ para todo $x \in X$. Dicho de otro modo, toda función continua sobre un compacto a valores reales alcanza su máximo y su mínimo. Un importante resultado sobre espacios métricos relativos a la compacidad es el siguiente:

TEOREMA 2.1 (Número de Lebesgue[2])**.** *Sea X un espacio métrico compacto y $(U_i)_{i \in I}$ un recubrimiento abierto de X, entonces existe $\delta > 0$ tal que si $A \subseteq X$ verifica $\operatorname{diam}(A) < \delta$ entonces $A \subseteq U_i$ para algún $i \in I$. A δ se lo llama el* número de Lebesgue *del recubrimiento abierto $(U_i)_{i \in I}$.*

Sea X un espacio topológico. X se dice *disconexo* si existen abiertos no vacíos disjuntos U, V de X tales que $X = U \cup V$. Si X no es disconexo, X se dice *conexo*. Un subconjunto Y de X se dice conexo si es conexo en la topología heredada. Equivalentemente, Y es disconexo si existen A, B abiertos no vacíos de X tales que $A \cap B \cap Y = \emptyset$ y $Y \subseteq A \cup B$, caso contrario es conexo. Un espacio X es conexo si y sólo si toda función continua $f : X \to \{0, 1\}$ (con la topología discreta en la llegada) es constante. Si $f : X \to Y$ es una función continua entre dos espacios topológicos X e Y, y X es conexo, entonces $f(X)$ es conexo.

Si X es un espacio topológico, para $x, y \in X$ se define $x \sim y$ siempre y cuando

[2]Henri León Lebesgue (1875-1941), matemático francés.

exista $C \subseteq X$ conexo tal que $x, y \in X$. Esta es una relación de equivalencia. Las clases de equivalencia generadas por esta relación se denominan las *componentes conexas* de X. Un conjunto es una componente conexa si y sólo si es maximal para el orden de la inclusión en la colección de subconjuntos conexos de X. Más aún, las componentes conexas de X forman una partición de X.

Sea X un espacio topológico y $x, y \in X$. Un camino de x a y es una función continua $\alpha : [0,1] \to X$ tal que $\alpha(0) = a$ y $\beta(1) = y$. X se dice *conexo por caminos* si para todo $x, y \in X$ existe un camino de x a y. Si se define $x \sim y$ siempre y cuando exista un camino de x a y, se obtiene una relación de equivalencia. Las clases de equivalencia obtenidas por esta relación se denominan las *componente conexas por caminos* de X. Todo lo mencionado referenta a las componentes conexas sigue siendo válido para las componentes conexas por caminos. En la siguiente sección se estudiará con más detalle la noción de caminos.

Sea X un conjunto y $(f_i : X \to Y_i)_{i \in I}$ una familia de funciones donde que Y_i es un espacio topológico. Si X es equipado con la topología discreta, todas las familias f_i son continuas. Por ende, la colección de todas las topologías que vuelven a las funciones f_i continuas es no vacía. La intersección de esta colección es una topología, denominada la *topología inicial* o *topología débil* generada por la familia $(f_i)_{i \in I}$. Esta es la topología más pequeña en X tal que las familias $(f_i)_{i \in I}$ son continuas.

Sea ahora Y un conjunto y $(f_i : X_i \to Y)$ una familia de funciones, siendo (X_i, τ_i) espacios topológicos. Sea

$$\tau = \{U \subseteq Y : f_i^{-1}(U) \in \tau_i \quad \forall i \in I\}.$$

Esta es una topología sobre Y, denominada la *topología final* o *topología fuerte* generada por la familia $(f_i)_{i \in I}$ sobre Y. Esta es la topología más grande que vuelve continuas a todas las funciones f_i.

Sea ahora $(X_i)_{i \in I}$ una familia de espacios topológicos y $X = \prod_{i \in I} X_i$. Sean las funciones $p_i : X \to X_i$ las proyecciones canónicas $p_j(x_i) = x_j$. La topología débil τ generada por la familia $(p_i)_{i \in I}$ se denomina la *topología producto* sobre X y al par (X, τ) el *espacio producto*. Si $I = \{1, ..., n\}$ es finito, una base para esta topología está dada por la colección de todos los conjuntos de la forma $U_1 \times \cdots \times U_n$, siendo U_i un abierto de X_i.

TEOREMA 2.2 (Tychonoff[3]). *El producto de espacios compactos es compacto.*

[3] Andréi Nikoláievich Tíjonov (1906-1993), matemático ruso.

Sea X un espacio topológico y $\sim$ una relación de equivalencia sobre X. La proyección canónica $\pi : X \to X/\sim$ es una sobreyección. La topología fuerte generada por la función π se denomina la *topología cociente* sobre $X/\sim$, y al espacio obtenido el *espacio cociente*. En particular, si $A \subseteq X$ se define la relación de equivalencia $x \sim y$ si y sólo si $x = y$ o $x, y \in A$. En tal caso se escribe X/A en lugar de $X/\sim$. Si X es un espacio de Hausdorff y A es un subconjunto cerrado, entonces X/A es un espacio de Haudorff.

Para finalizar esta sección, se introduce un teorema que es de gran utilidad para las demostraciones a futuro.

TEOREMA 2.3 (Lema del pegado)**.** *Sean X, Y dos espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función. Si $X = F_1 \cup \cdots \cup F_n$, siendo cada F_i un conjunto cerrado y si $f|_{F_i}$ es continua para cada $i \in \{1, ..., n\}$ entonces f es continua.*

Demostración. Sea G un cerrado de Y. Se tiene que $(f|_{F_i})^{-1}(G) = F_i \cap f^{-1}(G)$ es un cerrado de X. Así

$$f^{-1}(G) = \bigcup_{i=1}^{n} F_i \cap f^{-1}(G),$$

lo que implica que $f^{-1}(G)$ es un cerrado de X y por ende f es continua. □

2.2. Homotopía

En esta sección se presentan los conceptos y principales resultados sobre homotopía. El objetivo principal es construir el grupo fundamental de un espacio topológico, estudiar sus propiedades y presentar ejemplos. Por notación, si X es un conjunto $\mathbb{1}_X$ será la función identidad sobre ese conjunto.

OBSERVACIÓN 3. Sea Y^X el conjunto de todas las funciones $f : X \to Y$. Nótese que

$$Y^X = \prod_{x \in X} Y_x,$$

donde $Y_x = Y$ para todo $x \in X$. De este modo, cuando X y Y son espacios topológicos se puede equipar a Y^X con la topología producto. Ahora, si $C(X, Y)$ es el subconjunto de Y^X formado por todas las funciones continuas, se puede equipar a $C(X, Y)$ con la topología heredada desde Y^X. En todo lo que sigue, a menos que se indique lo contrario, $C(X, Y)$ siempre estará equipado con dicha topología.

A menos que se indique lo contrario, todas las funciones en esta sección serán considera-

das continuas.

Definición 2.1. *Sean X, Y dos espacios topológicos y $f, g : X \to Y$ dos funciones. Una homotopía de f a g es una familia de funciones continuas $(f_t : X \to Y)_{t\in[0,1]}$ tal que $f_0 = f$, $f_1 = g$ y la aplicación $H : X \times [0,1] \to Y$ definida por $H(x,t) = f_t(x)$ es continua. También se dice que H es una homotopía de f a g. Si existe una homotopía de f a g, estas se dicen homotópicas y esto se denotará por $f \simeq g$.*

Observación 4. Nótese que una homotopía de f a g puede definirse equivalentemente como una función continua $H : X \times [0,1] \to Y$ tal que $H(x,0) = f(x)$ y $H(x,1) = g(x)$ para todo $x \in X$, pues en este caso, se considera la familia $f_t = H(x,t)$ para todo $t \in [0,1]$.

Lema 2.4. *$\simeq$ es una relación de equivalencia sobre $C(X,Y)$.*

Demostración. Sea $f \in C(X,Y)$, entonces si $f_t = f$ para todo $t \in [0,1]$, $(f_t)_{t\in[0,1]}$ es una homotopía de f a f, y por ende $f \simeq f$.

Sean ahora $f, g \in C(X,Y)$ tales que $f \simeq g$. Sea $H : X \times [0,1] \to Y$ una homotopía de f a g. Entonces la función $G : X \times [0,1] \to Y$ definida por

$$G(x,t) = H(x, 1-t)$$

es una homotopía de g a f. Así $g \simeq f$.

Finalmente, si $f \simeq g$ y $g \simeq h$, sean $H_1 : X \times [0,1] \to Y$ y $H_2 : X \times [0,1] \to Y$ homotopías de f a g y de g a h, respectivamente. Se define $H : X \times [0,1] \to Y$ como

$$H(x,t) = \begin{cases} H_1(x, 2t) & \text{si } x \in [0, 1/2] \\ H_2(x, 2t-1) & \text{si } x \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Esta función es continua gracias al lema del pegado y por ende una homotopía de f a h. Así $f \simeq h$. $\square$

Lema 2.5. *Sean X, Y, Z espacios topológicos, $f_1, f_2 : X \to Y$ y $g_1, g_2 : Y \to Z$ funciones continuas. Si $f_1 \simeq f_2$ y $g_1 \simeq g_2$, entonces $g_1 \circ f_1 \simeq g_2 \circ f_2$.*

Demostración. Sean $H_1 : X \times [0,1] \to Y$ y $H_2 : Y \times [0,1] \to Z$ homotopías de f_1 a f_2 y de g_1 a g_2. Se define $H : X \times [0,1] \to Z$ mediante

$$H(x,t) = H_2(H_1(x,t), t).$$

H es continua y verifica

$$H(x,0) = H_2(H_1(x,0)) = H_2(f_1(x),0) = g_1(f_1(x)) = g_1 \circ f_1(x)$$
$$H(x,1) = H_2(H_1(x,1)) = H_2(f_2(x),0) = g_2(f_2(x)) = g_2 \circ f_2(x).$$

Así $g_1 \circ f_1 \simeq g_2 \circ f_2$. □

DEFINICIÓN 2.2. *Sea X un espacio topológico y A un subespacio de X. Una retracción de X a A es una función $r : X \to X$ tal que $r|_A = \mathbb{1}_A$ y $r(X) \subseteq A$. En este caso, se dice que A es un retracto de X.*

Se dice que A es un retracto por deformación de X si $\mathbb{1}_X$ es homotópica a una retracción de X a A.

Nótese que si A es un retracto por deformación de X, $r : X \to X$ una retracción de X a A homotópica a $\mathbb{1}_X$ y si $\iota : A \to X$ es la inclusión canónica, entonces $r \circ \iota = \mathbb{1}_A$, pero $\iota \circ r = r \simeq \mathbb{1}_X$. Esto permite estudiar a los retractos por deformación como un caso particular del siguiente concepto:

DEFINICIÓN 2.3. *Sean X, Y dos espacios topológicos. X y Y se dicen del mismo tipo de homotopía si existen funciones $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ tales que $g \circ f \simeq \mathbb{1}_X$ y $f \circ g \simeq \mathbb{1}_Y$. Si X y Y son del mismo tipo de homotopía, se escribirá $X \simeq Y$. En este caso, f y g se dicen equivalencias homotópicas.*

Un espacio topológico se dice contractible si tiene el mismo tipo de homotopía de un punto.

LEMA 2.6. *$\simeq$ es una relación de equivalencia entre espacios topológicos.*

Demostración. $\simeq$ es claramente reflexiva y simétrica. Sean X, Y, Z tres espacios topológicos tales que $X \simeq Y$ y $Y \simeq Z$. Existen funciones $f : X \to Y$, $g : Y \to X$, $h : Y \to Z$ y $k : Z \to Y$ tales que $g \circ f \simeq \mathbb{1}_X$, $f \circ g \simeq \mathbb{1}_Y$, $k \circ h \simeq \mathbb{1}_Y$ y $h \circ k \simeq \mathbb{1}_Z$. Se definen $f' = h \circ f : X \to Z$ y $g' = g \circ k : Z \to X$. Por el Lema 2.5 se tiene que

$$f' \circ g' = (h \circ f) \circ (g \circ k) = h \circ (f \circ g) \circ k \simeq h \circ \mathbb{1}_Y \circ k = h \circ k \simeq \mathbb{1}_Z.$$

Del mismo modo se prueba que $g' \circ f' \simeq \mathbb{1}_X$. Así $X \simeq Z$. □

Se recalca la definición de camino, pues será estudiada a profundidad en esta sección.

DEFINICIÓN 2.4. *Sean X un espacio topológico y $x, y \in X$. Un camino de x a y es una función continua $\alpha : [0,1] \to X$ tal que $\alpha(0) = x$ y $\alpha(1) = y$.*

Si α es un camino de x a y, se define el camino inverso *de α como el camino $\overline{\alpha}$: $[0,1] \to X$ dado por*

$$\overline{\alpha}(t) = \alpha(1-t).$$

$\overline{\alpha}$ es entonces un camino de y a x.

Si $x \in X$, el camino constante *en x es el camino $\overline{x} : [0,1] \to X$ dado por $\overline{x}(t) = x$.*

Si α es un camino de x a y y β un camino de y a z, se define su producto $\alpha \cdot \beta$ *como el camino de x a z*

$$(\alpha \cdot \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ \beta(2t-1) & \text{si } t \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

OBSERVACIÓN 5. Gracias al lema del pegado, el producto de dos caminos es una función continua y por ende un camino.

DEFINICIÓN 2.5. *Sean α y β dos caminos de x a y. Una* homotopía de caminos *de α a β es una función $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ que verifica*

$$\begin{aligned} H(t,0) &= \alpha(t), \qquad & H(0,s) &= x \\ H(t,1) &= \beta(t), \qquad & H(1,s) &= y \end{aligned}$$

para todo $s, t \in [0,1]$. Si existe una homotopía de caminos de α a β, estos se dicen homotópicos *y se denota por $\alpha \simeq \beta$.*

OBSERVACIÓN 6. De manera análoga a los casos anteriores, se tiene que $\simeq$ es una relación de equivalencia entre caminos de x a y. Si α es un camino de x a y, se escribe $[\alpha]$ para representar a la clase de equivalencia de todos los caminos de x a y que son homotópicos a α y a esta clase se la llama la *clase de homotopía* de α.

DEFINICIÓN 2.6. *Sea α un camino de x a y. Una reparametrización de α es un camino $\alpha \circ \varphi$ donde $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ es una función continua tal que $\varphi(0) = 0$ y $\varphi(1) = 1$.*

LEMA 2.7. *Si α es un camino y $\alpha \circ \varphi$ es una reparametrización de α, entonces $\alpha \simeq \alpha \circ \varphi$.*

Demostración. Se define la función $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ mediante

$$H(t,s) = \alpha((1-s)\varphi(t) + st).$$

Entonces se tiene que $H(t,0) = \alpha(\varphi(t)) = \alpha \circ \varphi(t)$ y $H(t,1) = \alpha(t)$. Además como

$\varphi(0) = 0$,
$$H(0,s) = \alpha((1-s)\varphi(0) + 0) = \alpha(0)$$
y como $\varphi(1) = 1$, entonces
$$H(1,s) = \alpha((1-s)\varphi(1) + s) = \alpha(1),$$
por lo que H es una homotopía de caminos de $\alpha \circ \varphi$ a α. $\square$

PROPOSICIÓN 2.8. *Sean x, y, z, w puntos de un espacio topológico x y sean α, β, γ caminos de x a y, de y a z y de z a w, respectivamente. Entonces*

(1) $\alpha \cdot \overline{y} \simeq \alpha$.

(2) $\overline{x} \cdot \alpha \simeq \alpha$.

(3) $\alpha \cdot \overline{\alpha} \simeq \overline{x}$.

(4) $\overline{\alpha} \cdot \alpha \simeq \overline{y}$.

(5) $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) \simeq (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$.

Demostración. (1) Sea la función $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ definida por
$$\varphi(t) = \begin{cases} 2t & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ 1 & \text{si } t \in [1/2, 1]. \end{cases}$$
Entonces se ve que $\alpha \cdot \overline{y} = \alpha \circ \varphi$. En efecto, si $t \in [0, 1/2]$
$$(\alpha \cdot \overline{y})(t) = \alpha(2t) = \alpha \circ \varphi(t),$$
y si $t \in [1/2, 1]$,
$$(\alpha \cdot \overline{y})(t) = \overline{y}(2t-1) = y\alpha(1) = \alpha(\varphi(t)).$$
Por el Lema 2.7 se concluye que $\alpha \cdot \overline{y} \simeq \alpha$.

(2) Se define $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ mediante
$$\varphi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ 2t-1 & \text{si } t \in [1/2, 1]. \end{cases}$$
y similar al caso anterior, se tiene que $\overline{x} \cdot \alpha = \alpha \circ \varphi$, lo que implica que $\overline{x} \cdot \alpha \simeq \alpha$.

(3) Se define la siguiente homotopía:

$$H(t,s) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{si } t \in [0, s/2] \\ \alpha(s) & \text{si } t \in [s/2, 1-s/2] \\ \alpha(2-2t) & \text{si } t \in [1-s/2, 1]. \end{cases}$$

Se tiene que

$$H(t,0) = \alpha(0) = x = \overline{x}(t)$$

y

$$H(t,1) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{si } t \in [0,1/2] \\ \alpha(2-2t) & \text{si } t \in [1/2,1] \end{cases} = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{si } t \in [0,1/2] \\ \overline{\alpha}(1-2t) & \text{si } t \in [1/2,1] \end{cases} = \alpha \cdot \overline{\alpha}(t).$$

Además

$$H(0,s) = \alpha(0) = x \quad \text{ y } \quad H(1,s) = \alpha(0) = x.$$

H es continua por el lema del pegado, y por ende H es una homotopía de $\overline{x}$ a $\alpha \cdot \overline{\alpha}$. Esto muestra que $\alpha \cdot \overline{\alpha} \simeq \overline{x}$.

(4) Es inmediato de (3) intercambiando los roles de α y $\overline{\alpha}$, considerando que $\overline{\overline{\alpha}} = \alpha$ y cambiando x por y.

(5) Sea $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ la función definida por

$$\varphi(t) = \begin{cases} t/2 & \text{si } t \in [0,1/2] \\ t - 1/4 & \text{si } t \in [1/2,3/4] \\ 2t-1 & \text{si } t \in [3/4,1] \end{cases}$$

φ es continua y verifica que $\varphi(0) = 0$ y $\varphi(1) = 1$. Ahora, si $t \in [0,1/2]$, entonces

$$((\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma) \circ \varphi(t) = ((\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma)(t/2) = (\alpha \cdot \beta)(t) = \alpha(2t) = (\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma))(t).$$

Si $t \in [1/2, 3/4]$ se tiene que $t - 1/4 \in [1/4, 1/2]$ y

$$((\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma) \circ \varphi(t) = ((\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma)(t - 1/4) = (\alpha \cdot \beta)(2t - 1/2) = \beta(4t-2),$$

mientras que

$$(\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma))(t) = (\beta \cdot \gamma)(2t-1) = \beta(4t-2),$$

y así

$$((\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma) \circ \varphi(t) = (\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma))(t).$$

Finalmente, si $t \in [3/4, 1]$, entonces $2t - 1 \in [1/2, 1]$ y

$$((\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma) \circ \varphi(t) = ((\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma)(2t - 1) = \gamma(4t - 3),$$

mientras por otro lado

$$(\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma))(t) = (\beta \cdot \gamma)(2t - 1) = \gamma(4t - 3),$$

lo que implica que

$$((\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma) \circ \varphi(t) = (\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma))(t).$$

Se ha demostrado que

$$((\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma) \circ \varphi = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma),$$

de modo que por el Lema 2.7 se concluye que $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma \simeq \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$, como se deseaba. □

OBSERVACIÓN 7. La última propiedad en esta proposición, establece que *salvo homotopía*, los caminos $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$ y $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$ son el mismo. Esto permite, cuando el contexto lo permita, escribir simplemente $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma$ para indicar a cualquiera de estos dos caminos, sin que exista riesgo de ambigüedad.

DEFINICIÓN 2.7. *Sea $x_0 \in X$. Un* lazo sobre x_0 *o* lazo con base en x_0 *es un camino de x_0 a x_0. Al par (X, x_0) se lo llama* espacio topológico con punto de base*. Si (X, x_0) y (Y, y_0) son dos espacios topológicos con punto de base, un* morfismo *entre dichos espacios es una función continua $f : X \to Y$ tal que $f(x_0) = y_0$.*

PROPOSICIÓN 2.9. *Sea (X, x_0) un espacio topológico con punto de base. Sea el conjunto $\pi_1(X, x_0)$, cuyos elementos son todas las clases de homotopía de lazos en x_0. Dotado de la operación $[\alpha][\beta] = [\alpha \cdot \beta]$, $\pi_1(X, x_0)$ es un grupo.*

Demostración. Sean α, β, γ lazos sobre x_0, como $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) \simeq (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$, entonces

$$[\alpha]([\beta][\gamma]) = [\alpha][\beta \cdot \gamma] = [\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)] = [(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma] = [\alpha \cdot \beta][\gamma] = ([\alpha][\beta])[\gamma],$$

por lo que la operación es asociativa. Sea ahora α un lazo sobre x. Puesto que $\alpha \cdot \overline{x_0} \simeq \alpha$ y $\overline{x_0} \cdot \alpha \simeq \alpha$ se sigue que

$$[\alpha][\overline{x_0}] = [\alpha \cdot \overline{x_0}] = [\alpha]$$

y

$$[\overline{x_0}][\alpha] = [\overline{x_0} \cdot \alpha] = [\alpha],$$

por lo que la operación tiene neutro y es igual a $[\overline{x_0}]$. Finalmente, sea α un lazo sobre

x_0, entonces $\alpha \cdot \overline{\alpha} \simeq \overline{x_0}$ y $\overline{\alpha} \cdot \alpha \simeq \overline{x_0}$ por lo que

$$[\alpha][\overline{\alpha}] = [\alpha \cdot \overline{\alpha}] = [\overline{x_0}]$$

y

$$[\overline{\alpha}][\alpha] = [\overline{\alpha} \cdot \alpha] = [\overline{x_0}],$$

con lo que $[\alpha]$ tiene inverso y $[\alpha]^{-1} = [\overline{\alpha}]$. □

DEFINICIÓN 2.8. *El grupo $\pi_1(X, x_0)$ se llama el grupo fundamental o primer grupo de homotopía del espacio topológico con punto de base (X, x_0).*

PROPOSICIÓN 2.10. *Si X es conexo por caminos, para todo $x_0, y_0 \in X$ se tiene que los grupos $\pi_1(X, x_0)$ y $\pi_1(X, y_0)$ son isomorfos.*

Demostración. Sean $x_0, y_0 \in X$, y sea $\theta : [0,1] \to X$ un camino de x_0 a x_1. Se define $\Phi_\theta : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ para cada $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$ mediante

$$\Phi_\theta([\alpha]) = [\overline{\theta} \cdot (\alpha \cdot \theta)].$$

Nótese que Φ_θ está bien definida. En efecto, si α es un lazo en x_0, entonces $\overline{\theta} \cdot (\alpha \cdot \theta)$ es un lazo en y_0 pues $\overline{\theta}$ es un camino de y_0 a x_0 y θ un camino de x_0 a y_0. Ahora, si $\alpha \simeq \beta$ son dos lazos en x_0 homotópicos, sea $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ una homotopía de α a β. Entonces $G : [0,1] \times [0,1] \to X$ definida por

$$G(t,s) = \begin{cases} \overline{\theta}(2t) & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ H(4t-2, s) & \text{si } t \in [1/2, 3/4] \\ \theta(4t-3) & \text{si } t \in [3/4, 1] \end{cases}$$

es una homotopía de $\overline{\theta} \cdot (\alpha \cdot \theta)$ a $\overline{\theta} \cdot (\beta \cdot \theta)$. Por ende $[\overline{\theta} \cdot (\alpha \cdot \theta)] = [\overline{\theta} \cdot (\beta \cdot \theta)]$, lo que implica que Φ_θ no depende de la elección del representante para la clase de homotopía.

Ahora se debe verificar que Φ_θ es un homomorfismo de grupos. En efecto,

$$\Phi_\theta([\alpha][\beta]) = \Phi_\theta([\alpha \cdot \beta]) = [\overline{\theta} \cdot (\alpha \cdot \beta) \cdot \theta],$$

pero $\theta \cdot \overline{\theta} \simeq \overline{x_0}$, y por ende

$$\overline{\theta} \cdot (\alpha \cdot \beta) \cdot \theta \simeq (\overline{\theta} \cdot (\alpha \cdot \theta)) \cdot (\overline{\theta} \cdot (\beta \cdot \theta)),$$

lo que implica que

$$\Phi_\theta([\alpha][\beta]) = [\overline{\theta} \cdot (\alpha \cdot \theta)][\overline{\theta} \cdot (\beta \cdot \theta)] = \Phi_\theta([\alpha])\Phi_\theta([\beta]).$$

Finalmente, nótese que si β es un lazo en y_0

$$\Phi_\theta \circ \Phi_{\overline{\theta}}([\beta]) = [\overline{\theta} \cdot ((\theta \cdot (\beta \cdot \overline{\theta})) \cdot \theta)] = [\beta],$$

por lo que $\Phi_\theta \circ \Phi_{\overline{\theta}}$ es la identidad en $\pi_1(X, y_0)$. De manera análoga $\Phi_{\overline{\theta}} \circ \Phi_\theta$ es la identidad en $\pi_1(X, x_0)$, lo que muestra que Φ_θ es un isomorfismo de grupos. □

OBSERVACIÓN 8. Si X es conexo por caminos, la proposición anterior dictamina que realmente el punto de base es irrelevante, por ende en estos casos suele escribirse $\pi_1(X)$ en lugar de $\pi_1(X, x_0)$.

PROPOSICIÓN 2.11. *Sea $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ un morfismo de espacios topológicos con punto de base y sea $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ definida por*

$$f_*([\alpha]) = [f \circ \alpha].$$

Entonces f_* es un homomorfismo de grupos.

Demostración. Nótese que si α es un lazo en x_0, entonces $f \circ \alpha$ es un lazo en y_0. Gracias a esto, y por el Lema 2.5, f_* es una función bien definida. Ahora, sean α, β dos lazos en x_0, se tiene que

$$f_*([\alpha][\beta]) = f_*([\alpha \cdot \beta]) = [f \circ (\alpha \cdot \beta)].$$

Una simple verificación muestra que $f \circ (\alpha \cdot \beta) = (f \circ \alpha) \cdot (f \circ \beta)$, de modo que

$$f_*([\alpha][\beta]) = [(f \circ \alpha) \cdot (f \circ \beta)] = [f \circ \alpha][f \circ \beta] = f_*([\alpha])f_*([\beta]),$$

lo que completa la demostración. □

DEFINICIÓN 2.9. *Si $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ es un morfismo de espacios topológicos con punto de base, al homomorfismo de grupos $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ se lo denomina el* homomorfismo inducido *por f.*

PROPOSICIÓN 2.12. *Sean $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ y $g : (Y, y_0) \to (Z, z_0)$ dos morfismos es espacios topológicos con punto de base. Entonces*

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*.$$

Demostración. Sea α un lazo en x_0. Entonces

$$(g \circ f)_*([\alpha]) = [g \circ f \circ \alpha] = g_*([f \circ \alpha]) = g_*(f_*([\alpha])) = g_* \circ f_*([\alpha]),$$

lo que implica el resultado. $\square$

PROPOSICIÓN 2.13. *Sea (X, x_0) un espacio topológico con punto de base. Entonces*

$$(\mathbb{1}_X)_* = \mathbb{1}_{\pi_1(X,x_0)}.$$

Demostración. La demostración es inmediata. $\square$

LEMA 2.14. *Sean $f, g : X \to Y$ dos funciones homotópicas y $H : X \times [0,1] \to Y$ una homotopía de f a g. Sean $x_0 \in X$ y $\theta : [0,1] \to Y$ el camino de $f(x_0)$ a $g(x_0)$ definido por $\theta(t) = H(x_0, t)$. Entonces el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(Y, f(x_0)) \arrow[dd, "\Phi_{\overline{\theta}}"] \\
\pi_1(X, x_0) \arrow[ur, "f_*"] \arrow[dr, "g_*"'] & \\
 & \pi_1(Y, g(x_0))
\end{tikzcd}$$

conmuta, siendo $\Phi_{\overline{\theta}}$ el homomorfismo definido en la demostración de la proposición 2.10. Es decir,

$$f_* = \Phi_{\overline{\theta}} \circ g_*.$$

Demostración. Sea α un lazo en x_0. Se requiere probar que

$$f_*([\alpha]) = \Phi_{\overline{\theta}} \circ g_*([\alpha]),$$

es decir,

$$f \circ \alpha \simeq \theta \cdot ((g \circ \alpha) \cdot \overline{\theta}).$$

Con este fin, se define $G : [0,1] \times [0,1] \to Y$ del siguiente modo:

$$G(t,s) = \begin{cases} \theta(2st) & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ H(\alpha(4t-2), s) & \text{si } t \in [1/2, 3/4] \\ \theta(s(4-4t)) & \text{si } t \in [3/4, 1]. \end{cases}$$

G es continua gracias al lema del pegado. Por otro lado,

$$H(0,s) = \theta(0) = H(x_0, 0) = f(x_0) \quad \text{y} \quad H(1,s) = \theta(0) = f(x_0).$$

Además

$$H(t,0) = \begin{cases} \theta(0) & \text{si } t \in [0,1/2] \\ H(\alpha(4t-2),0) & \text{si } t \in [1/2,3/4] \\ \theta(0) & \text{si } t \in [3/4,1]. \end{cases} = \overline{f(x_0)} \cdot ((f \circ \alpha) \cdot \overline{f(x_0)}),$$

y

$$H(t,1) = \begin{cases} \theta(2s) & \text{si } t \in [0,1/2] \\ H(\alpha(4t-2),1) & \text{si } t \in [1/2,3/4] \\ \theta(4-4t) & \text{si } t \in [3/4,1]. \end{cases} = \theta \cdot ((g \circ \alpha) \cdot \overline{\theta}).$$

Entonces

$$f \circ \alpha \simeq \overline{f(x_0)} \cdot ((f \circ \alpha) \cdot \overline{f(x_0)}) \simeq \theta \cdot ((g \circ \alpha) \cdot \overline{\theta}),$$

como se quería probar. $\square$

TEOREMA 2.15. *Si $f : X \to Y$ es una equivalencia homotópica, es decir, X y Y tienen el mismo tipo de homotopía, entonces para todo $x_0 \in X$ el homomorfismo $f_* : \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ es un isomorfismo de grupos.*

Demostración. Sea $g : Y \to X$ tal que $g \circ f \simeq \mathbb{1}_X$ y $f \circ g \simeq \mathbb{1}_Y$. Considerando el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X,x_0) & & \pi_1(Y, f \circ g \circ f(x_0)) \\ {\scriptstyle f_*}\big\downarrow & & \big\uparrow{\scriptstyle f_*} \\ \pi_1(Y, f(x_0)) & \xrightarrow[g_*]{} & \pi_1(X, g \circ f(x_0)) \end{array}$$

se observa que como $g \circ f \simeq \mathbb{1}_X$, por el lema $g_* \circ f_* = \Phi_\theta$ para algún camino θ. Puesto que Φ_θ es un isomorfismo, entonces $g_* \circ f_*$ es un isomorfismo, de donde f_* es inyectiva y g_* es sobreyectiva. Repitiendo el mismo razonamiento se obtiene que $f_* \circ g_*$ es un isomorfismo y por ende f_* es sobreyectiva y g_* es inyectiva. En particular f_* es biyectiva y por ende un isomorfismo. $\square$

COROLARIO 2.16. *Si X, Y son dos espacios topológicos conexos por caminos y del mismo tipo de homotopía, entonces $\pi_1(X)$ y $\pi_1(Y)$ son isomorfos.*

COROLARIO 2.17. *Sea X un espacio topológico, A un retracto por deformación de X y $x_0 \in A$, entonces*

$$\pi_1(X,x_0) \cong \pi_1(A,x_0).$$

Un resultado más fuerte que el corolario anterior es el siguiente:

PROPOSICIÓN 2.18. *Si A es un retracto de X, e $\iota : A \to X$ es la inclusión canónica, entonces $\iota_* : \pi_1(A, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ es un homomorfismo inyectivo de grupos. Si A es retracto por deformación, ι_* es un isomorfismo.*

Demostración. En el primer caso, sea $r : X \to A$ una retracción, de tal modo que $r \circ \iota = \mathbb{1}_A$ y consecuentemente $r_* \circ \iota_* = \mathbb{1}_{\pi_1(A,x_0)}$, lo que implica que ι_0 es inyectiva. En el segundo caso se considera $\iota \circ r \simeq \mathbb{1}_X$ y se concluye que ι_* es sobreyectiva. $\square$

PROPOSICIÓN 2.19. *Sean $(X, x_0), (Y, y_0)$ dos espacios topológicos con punto de base. Entonces*

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$$

Demostración. Sean $p_1 : X \times Y \to X$ y $p_2 : X \times Y \to Y$ las proyecciones canónicas. p_1, p_2 son continuas por definición de topología producto. Si α es un lazo con base en (x_0, y_0), entonces $p_1 \circ \alpha$ es un lazo con base en x_0 y $p_2 \circ \alpha$ es un lazo con base en y_0. Se define $\varphi : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \to \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$ para $[\alpha] \in \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$ como

$$\varphi([\alpha]) = ([p_1 \circ \alpha], [p_2 \circ \alpha]).$$

Es claro por construcción que φ es un homomorfismo de grupos. Además, si

$$\varphi([\alpha]) = ([\overline{x_0}], [\overline{y_0}]),$$

entonces

$$p_1 \circ \alpha \simeq \overline{x_0} \quad \text{y} \quad p_2 \circ \alpha \simeq \overline{y_0}.$$

Esto implica que

$$\alpha = (p_1 \circ \alpha, p_2 \circ \alpha) \simeq (\overline{x_0}, \overline{y_0}) = \overline{(x_0, y_0)},$$

y por ende φ es inyectiva. La sobreyectividad es inmediata. $\square$

DEFINICIÓN 2.10. *Un espacio topológico X conexo por caminos se dice simplemente conexo si $\pi_1(X)$ es el grupo trivial.*

EJEMPLO 13. Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y α un lazo sobre x_0. La función

$$H(t, s) = s\overline{x_0}(t) + (1 - s)\alpha(t)$$

es una homotopía de α hacia el lazo constante $\overline{x_0}$. Por ende todos los lazos en $\mathbb{R}^n$ son homotópicos entre sí, lo que implica que

$$\pi_1(\mathbb{R}^n) = \pi_1(\mathbb{R}^n, x_0) \cong \{0\}.$$

Así, $\mathbb{R}^n$ es simplemente conexo.

Para cada $n \in \mathbb{Z}$ se define $\omega_n : [0,1] \to S^1$, siendo $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 | \|x\|_2 = 1\}$ la circunferencia con centro 0 y radio 1, como el lazo

$$\omega_n(t) = (\cos(2\pi n t), \sin(2\pi n t)),$$

que tiene base en el punto $(1,0)$. El siguiente resultado es clave, y caracteriza por completo a las clases de homotopía de lazos en S^1 a través de los lazos ω_n. Más aún, da una descripción completa de $\pi_1(S^1,(1,0))$.

TEOREMA 2.20. *La función $\Phi : \mathbb{Z} \to \pi_1(S^1)$ definida para cada $n \in \mathbb{Z}$ por*

$$\Phi(n) = [\omega_n]$$

es un isomorfismo de grupos.

Para probar este teorema se seguirá una demostración presentada en [13], para lo cual serán necesarios una serie de resultados previos. Primero, una notación: Sea $p : \mathbb{R} \to S^1$ definida por $p(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$. Dada una función $f : X \to S^1$, un *levantamiento* de f es una función $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ tal que $f = p \circ \tilde{f}$.

LEMA 2.21. *Existe un recubrimiento abierto (U_α) de S^1 tal que para todo α, cada componente conexa de $p^{-1}(U_\alpha)$ es homeomorfa a U_α vía p.*

Demostración. Sea $U^1 = S^1 \setminus \{(1,0)\}$ y $U_2 = S^1 \setminus \{(0,1)\}$. Así $\{U_1, U_2\}$ es un recubrimiento abierto de S^1. Nótese que

$$p^{-1}(U_1) = \mathbb{R} \setminus \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\},$$

por lo que las componentes conexas de $p^{-1}(U_1)$ son precisamente los intervalos abiertos $]2k\pi, 2(k+1)\pi[$, con $k \in \mathbb{Z}$, cada uno de los cuales es homeomorfo a $\mathbb{R}$. De manera similar

$$p^{-1}(U_2) = \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi : k \in \mathbb{Z}\},$$

cuyas componentes conexas son los intervalos abiertos $](2k+1)\pi, (2k+3)\pi[$, con $k \in \mathbb{Z}$, cada uno de los cuales es homeomorfo a $\mathbb{R}$. □

LEMA 2.22. *Sea $F : Y \times [0,1] \to S^1$ una función continua y $\tilde{f}$ un levantamiento de $f = F|_{Y\times\{0\}}$. Existe una única función $\tilde{F} : Y \times [0,1] \to \mathbb{R}$ que es un levantamiento de F tal que $\tilde{F}|_{Y\times\{0\}} = \tilde{f}$.*

Demostración. Sea $y_0 \in Y$ y (U_α) el recubrimiento abierto de S^1 dado por el Lema 2.21. Para cada $t \in [0,1]$, $F(y_0, t) \in U_\alpha$ par algún α. Como F es continua, para cada $t \in [0,1]$ existe una vecindad $N_t \subseteq Y$ de y_0 y un intervalo abierto $]a_t, b_t[$ que contiene a t, tal que

$$F(N_t \times]a_t, b_t[) \subseteq U_\alpha.$$

Ahora, el conjunto $\{y_0\} \times [0,1]$ es compacto y $(N_t,]a_t, b_t[)_{t\in[0,1]}$ es recubrimiento abierto de $\{y_0\} \times [0,1]$, de modo que es lícito extraer un subrecubrimiento finito. Sean $s_1, ..., s_k$ los índices de tal subrecubrimiento. Sin pérdida de generalidad, se puede asumir que $0 \in]a_{s_1}, b_{s_1}[$, luego que $b_{s_1} \in]a_{s_2}, b_{s_2}[$, y entonces se seleccionan $t_1 \in]a_{s_2}, b_{s_1}[$. Procediendo de manera recursiva, se tiene una partición

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = 1$$

tal que para cada $i \in \{0, \ldots, m-1\}$, $[t_i, t_{i+1}] \subseteq]a_j, b_j[$ para algún $j \in \{1, ..., k\}$. Así, si

$$N^0 = N_{s_1} \cap \cdots \cap N_{s_k}$$

se tiene que

$$F(N^0, [t_i, t_{i+1}]) \subseteq U_\alpha$$

para algún α, y por comodidad se nota $U_\alpha = U_i$. La función $\tilde{F}$ está definida sobre $Y \times \{0\}$ por $\tilde{f}$. Asumiendo que $\tilde{F}$ está definida en $N^i \times [0, t_i]$ donde $N^i \subseteq N_0$ es una vecindad de y_0, será extendida al conjunto $N^{i+1} \times [0, t_{i+1}]$ donde $N^{i+1} \subseteq N^i$ es también una vecindad de y_0. Puesto que $F(N^i \times [t_i, t_{i+1}]) \subseteq U_i$, existe una componente conexa $\tilde{U}_i \subseteq \mathbb{R}$ homeomorfa a U_i vía p tal que $\tilde{F}(y_0, t_i) \in \tilde{U}_i$. Sea N^{i+1} la vecindad de y_0 determinada por

$$N^{i+1} \times \{t_1\} = (\tilde{F}|_{N^i \times \{t_i\}})^{-1}(\tilde{U}_i) \cap (N^i \times \{t_i\}),$$

de modo que $\tilde{F}(N^{i+1} \times \{t_i\}) \subseteq \tilde{U}_i$. De este modo se define $\tilde{F}$ sobre $N^{i+1} \times [t_i, t_{i+1}]$ como la composición de F con el homeomorfismo $p^{-1} : U_i \to \tilde{U}_i$. Luego de $m-1$ pasos si $N = N^{m-1}$, se tiene una extensión

$$\tilde{F}_{y_0} : N \times [0,1] \to \mathbb{R},$$

siendo N una vecindad de y_0.

Ahora se prueba que $\tilde{F}_{y_0}|_{\{y_0 \times [0,1]\}}$ está unívocamente determinada por y_0 y $\tilde{f}$. Para ello se considera $\tilde{F}'_{y_0}$ otra extensión tal que $\tilde{F}'_{y_0}$ es un levantamiento de $F|_{y_0 \times [0,1]}$. De manera similar a la anterior, existe una partición $0 = t_0 < t_1 \cdots < t_m = 1$ de tal modo que $F(\{y_0\} \times [t_i, t_{i+1}]) \subseteq U_i$. Razonando recursivamente, se supone que

$$\tilde{F}_{y0}|_{\{y_0\}\times[0,t_i]} = \tilde{F}'_{y0}|_{\{y_0\}\times[0,t_i]}.$$

Puesto que los intervalos son conexos, y dado que por hipótesis de inducción

$$\tilde{F}_{y_0}(y_0, t_i) = \tilde{F}'_{y_0}(y_0, t_i),$$

existe una componente conexa $\tilde{U}_i$ de $p^{-1}(U_i)$ homeomorfa a U_i vía p tal que

$$\tilde{F}_{y_0}(\{y_0\} \times [t_1, t_{i+1}]) = \tilde{F}'_{y_0}(\{y_0\} \times [t_1, t_{i+1}]).$$

Dado que p es inyectiva sobre $\tilde{U}_i$ y

$$p \circ \tilde{F}_{y_0} = p \circ \tilde{F}'_{y_0}$$

se sigue que

$$\tilde{F}_{y0}|_{\{y_0\}\times[t_i,t_{i+1}]} = \tilde{F}'_{y0}|_{\{y_0\}\times[t_i,t_{i+1}]},$$

lo que completa el paso inductivo.

Para cada $y \in Y$ se nota por N_y a la vecindad de y tal que existe una extensión de $\tilde{f}$ hacia $N_y \times [0,1]$, y por $\tilde{F}_y$ a tal extensión. A continuación se prueba que

$$\tilde{F}_{y1}|_{N_{y_1}\cap N_{y_2}} = \tilde{F}_{y2}|_{N_{y_1}\cap N_{y_2}}$$

para todo $y_1, y_2 \in Y$. En efecto, sea $z \in N_{y_1} \cap N_{y_2}$, y sea

$$N = N_{y_1} \cap N_{y_2} \cap N_z.$$

Así $\tilde{F}_{y_1}|_{N\times[0,1]}$, $\tilde{F}_{y_2}|_{N\times[0,1]}$ y $\tilde{F}_z|_{N\times[0,1]}$ son tres extensiones que levantan a $F|_{y_0,[0,1]}$, lo que por el párrafo anterior implica que deben ser iguales. Como z es arbitrario, esto implica el resultado deseado. Esto permite definir $\tilde{F}(y,t) = \tilde{F}_y(y,t)$ sin riesgo de ambigüedad, y esta aplicación es única pues $\tilde{F}_y$ es única. □

Lema 2.23. *Para cada camino $\alpha : [0,1] \to S^1$ que inicia en un punto $x_0 \in S^1$ y para cada $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(\{x_0\})$, existe un único levantamiento $\tilde{\alpha} : [0,1] \to \mathbb{R}$ que inicia en $\tilde{x}_0$.*

Demostración. Sea Y un espacio consistente de un sólo punto. Así, se identifica a $Y \times [0,1]$ con $[0,1]$ y aplicando el Lema 2.22 se obtiene el resultado. □

Lema 2.24. *Sea $H : [0,1] \times [0,1] \to S^1$ una homotopía del camino α_0 al camino α_1 que inician en x_0. Para cada $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(\{x_0\})$ existe una única homotopía $\tilde{H}$:*

$[0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ *entre los caminos levantados* $\tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}_1$ *tal que para cada* s*,* $\tilde{H}(\cdot, s)$ *es el único levantamiento del camino* $H(\cdot, s)$ *al punto* $\tilde{x}_0$*.*

Demostración. Basta aplicar el Lema 2.22 con $Y = [0,1]$ y $f = H(\cdot, 0)$ a $F = H$. $\square$

Demostración del Teorema 2.20. Sea $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ un camino de 0 a n y $\tilde{f}_n$ un levantamiento de f_n. La función $(t,s) \mapsto (1-s)\tilde{f}_n(t) + s\tilde{\omega}_n(t)$ es una homotopía de $\tilde{f}_n$ hacia $\tilde{\omega}_n$, siendo $\tilde{\omega}_n(t) = nt$ un levantamiento de ω_n. Por ende $p \circ \tilde{f}_n$ es homotópico a $p \circ \tilde{\omega}_n = \omega_n$. De este modo $\Phi(n) = [p \circ \tilde{f}_n]$.

Para $m \in \mathbb{Z}$ sea $\tau_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la traslación $\tau_m(x) = x + m$. Así $\tilde{\omega}_m \cdot (\tau_m \circ \tilde{\omega}_n)$ es un camino de 0 hacia $m+n$, de modo que $\Phi(m+n) = [p \circ (\tilde{\omega}_m \cdot (\tau_m \circ \tilde{\omega}_n))]$. Ahora,

$$p \circ (\tilde{\omega}_m \cdot (\tau_m \circ \tilde{\omega}_n)) = \omega_m \cdot \omega_n,$$

de modo que

$$\Phi(m+n) = [\omega_m \cdot \omega_n] = [\omega_m][\omega_n] = \Phi(m)\Phi(n).$$

Esto prueba que Φ es un homomorfismo de grupos.

Sea $\alpha : [0,1] \to S^1$ un lazo con base en $(1,0)$ y sea $\tilde{\alpha}$ su único levantamiento que inicia en 0, en virtud del Lema 2.23. Ahora, como $p \circ \tilde{\alpha}(1) = \alpha(1) = (1,0)$ y $p^{-1}(\{(0,1)\}) = \mathbb{Z}$, se tiene que $\tilde{\alpha}$ termina en algún n. Por ende $\Phi(n) = [\alpha]$. Esto prueba que Φ es sobreyectiva.

Finalmente, si $\Phi(n) = 0$, entonces $\omega_n \simeq \omega_0$, lo que implica que existe una homotopía $H : [0,1] \times [0,1] \to S^1$ tal que $H(\cdot, 0) = \omega_0$ y $H(\cdot, 1) = \omega_n$. Sea $\tilde{H}$ el único levantamiento dado por el Lema 2.24. Por unicidad se tiene que $\tilde{H}(\cdot, 0) = \tilde{\omega}_0$ y $\tilde{H}(\cdot, 1) = \tilde{\omega}_n$. Ahora, se tiene que

$$0 = \tilde{\omega}_0(1) = \tilde{H}(1,0) = \tilde{H}(1,1) = \tilde{\omega}_n(1) = n,$$

de modo que $\ker(\Phi) = \{0\}$ y por ende Φ es inyectiva. $\square$

EJEMPLO 14. El *toro* es el espacio $S^1 \times S^1$. Se tiene entonces que

$$\pi_1(S^1 \times S^1) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

2.3. Teorema de Seifert-van Kampen

Para toda esta sección, a menos que se indique lo contrario, se consideran las siguientes hipótesis:

(1) X es un espacio topológico conexo por caminos y $x_0 \in X$.

(2) $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ es un recubrimiento abierto de X tal que $x_0 \in U_\lambda$ para todo $\lambda \in \Lambda$.

(3) La familia $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ es cerrada por intersecciones finitas. Es decir, para todo $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$, existe $\lambda \in \Lambda$ tal que $U_{\lambda_1} \cap U_{\lambda_2} = U_\lambda$.

Todos los grupos fundamentales considerados tendrán como punto base a $x_0 \in \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$.

Se define la relación $\geq$ en Λ como sigue: $\lambda \geq \mu$ si $U_\lambda \subseteq U_\mu$. Para cada $\lambda \geq \mu$ se denota por $\varphi_{\lambda\mu} : \pi_1(U_\lambda) \to \pi_1(U_\mu)$ al homomorfismo de grupos inducido por la inclusión canónica $U_\lambda \hookrightarrow U_\mu$. De igual manera se nota por $\psi_\lambda : \pi_1(U_\lambda) \to \pi_1(X)$ al homomorfismo de grupos inducido por las inclusiones $U_\lambda \hookrightarrow X$. Se tiene entonces que para todo $\lambda \geq \mu$ el diagrama

$$\begin{tikzcd} \pi_1(U_\lambda) \arrow[rr, "\varphi_{\lambda\mu}"] \arrow[dr, "\psi_\lambda"'] & & \pi_1(U_\mu) \arrow[dl, "\psi_\mu"] \\ & \pi_1(X) & \end{tikzcd}$$

conmuta, pues lo hacen las inclusiones. La hipótesis (3) implica que $\langle \pi_1(U_\lambda), \varphi_{\lambda\mu} \rangle$ es un sistema directo, y el diagrama conmutativo anterior que $\langle \pi_1(X), \psi_\lambda \rangle$ es un blanco del sistema. La pregunta natural que viene a lugar es si efectivamente este blanco es el colímite del sistema directo de grupos construido. Esta respuesta está dada en el siguiente resultado:

Teorema 2.25 (Seifert[4]-van Kampen[5]). *Con las hipótesis y notaciones anteriores,*

$$\langle \pi_1(X), \psi_\lambda \rangle \cong \varinjlim_{\Lambda} \langle \pi_1(U_\lambda), \varphi_{\lambda\mu} \rangle.$$

La demostración del teorema de Siefert-van Kampen que aquí se presenta es tomada de [19], y recae en dos lemas. El primero de ellos es simple:

Lema 2.26. $\pi_1(X) = \langle \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \psi_\lambda(\pi_1(U_\lambda)) \rangle$.

[4]Herbert Seifert (1907-1996), matemático alemán.
[5]Egbert van Kampen (1908-1942), matemático belga.

Demostración. Sea $[\alpha] \in \pi_1(X)$. La familia $(\alpha^{-1}(U_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$ es un recubrimiento abierto del espacio métrico compacto $[0,1]$, por lo que existe un número de Lebesgue $\epsilon > 0$ de tal recubrimiento. Sea n un número natural suficientemente grande tal que $1/n < \epsilon$. Sea $J_i = [(i-1)/n, i/n]$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, de modo que por definición de número de Lebesgue, existen índices $\lambda_i \in \Lambda$ tales que $\alpha(J_i) \subseteq U_{\lambda_i}$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Para cada $i \in \{2, \dots, n\}$, se elige un camino β_i en $U_{\lambda_{i-1}} \cap U_{\lambda_i}$ de x_0 hacia $\alpha((i-1)/n)$, y se define $\gamma_i : [0,1] \to X$ como el camino $\alpha|_{J_i} \circ h_i$, siendo $h_i : [0,1] \to J_i$ la biyección lineal

$$h_i(t) = \frac{i-1+t}{n}.$$

Con esto, sea

$$\alpha_1 = \gamma_1 \cdot \overline{\beta_2}, \quad \alpha_n = \beta_n \cdot \gamma_{n-1}$$

y para $i \in \{2, \dots, n-1\}$,

$$\alpha_i = \beta_i \cdot \gamma_i \cdot \overline{\beta_{i+1}}.$$

De este modo, cada α_i es un lazo con base en x_0, y por la hipótesis (3), cada lazo α_i es un camino en un conjunto U_λ para un cierto $\lambda \in \Lambda$. De este modo $[\alpha_i] \in \psi_{\lambda_i}(\pi_1(U_{\lambda_i}))$ para $i \in \{1, \dots, n\}$ y además por construcción

$$[\alpha] = [\alpha_1] \cdots [\alpha_n].$$

Así $[\alpha] \in \langle \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \psi_\lambda(\pi_1(U_\lambda)) \rangle$, lo que completa la demostración. □

LEMA 2.27. *Sea H un grupo y para cada $\lambda \in \Lambda$ el homomorfismo $\rho_\lambda : \pi_1(U_\lambda) \to H$. Suponga que para todo $\lambda \geq \mu$ el diagrama*

$$\begin{tikzcd} \pi_1(U_\lambda) \arrow[rr, "\varphi_{\lambda\mu}"] \arrow[dr, "\rho_\lambda"'] & & \pi_1(U_\mu) \arrow[dl, "\rho_\mu"] \\ & H & \end{tikzcd}$$

conmuta. Para cada $q \in \mathbb{N}^*$, si $[\beta_i] \in \pi_1(U_{\lambda_i})$ con $i \in \{1, \dots, q\}$ y si

$$\psi_{\lambda_1}([\beta_1]) \cdots \psi_{\lambda_q}([\beta_q]) = 1,$$

entonces

$$\rho_{\lambda_1}([\beta_1]) \cdots \rho_{\lambda_q}([\beta_q]) = 1.$$

Demostración. La demostración de este lema es extensa y tediosa, motivo por el cual será dividida en varias etapas:

(i) Para cada $i \in \{1,\ldots,q\}$ sea $h_i : [(i-1)/q, i/q] \to [0,1]$ la biyección lineal $h_i(t) = qt + 1 - i$. Puesto que cada β_i es un lazo con base en x_0, el lema del pegado implica que la función $\beta : [0,1] \to X$ dada por

$$\beta(t) = (\beta_1 \circ h_i)(t), \quad \frac{i-1}{q} \leq t \leq \frac{i}{q}, \quad i \in \{1,\ldots,n\}$$

es continua, y por ende es un lazo en x_0. Más aún, puesto que

$$\psi_{\lambda_1}([\beta_1]) \cdots \psi_{\lambda_q}([\beta_q]) = 1,$$

se tiene que $[\beta] = 1$, pues β es homotópica al producto $\beta_1 \cdot \cdots \cdot \beta_q$. Pero $1 = [\overline{x_0}]$, por lo que existe una homotopía $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ de β hacia $\overline{x_0}$. Con esto, se tiene que la familia $(H^{-1}(U_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$ es un recubrimiento abierto del espacio métrico compacto $[0,1] \times [0,1]$, de modo que es posible elegir un número de Lebesgue $\epsilon > 0$ para este recubrimiento.

Sea k un entero positivo suficientemente grande tal que $1/(kq) < \epsilon/\sqrt{2}$, y sea $n = kq$. Se define

$$s_i = t_i = \frac{i}{n}, \quad i \in \{0, 1, \ldots, n\}.$$

Para cada $i \in \{1,\ldots,n\}$ sea $J_i = [t_{i-1}, t_i]$, y para $i, j \in \{1, \cdots, n\}$ sea el conjunto $R_{ij} = J_i \times J_j$. A los conjuntos R_{ij} se los llama rectángulos. Nótese que por construcción se tienen las siguientes propiedades:

(a) $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = 1$ y $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$;

(b) $t_{ik} = \dfrac{ik}{n} = \dfrac{ik}{kq} = \dfrac{i}{q}$, para todo $i \in \{1, \cdots, q-1\}$; y,

(c) $diam(R_{ij}) = \sqrt{2(1/n)^2} = \sqrt{2}/(kq) < \epsilon$.

Esta última propiedad se debe a que los conjuntos R_{ij} son cuadrados con lados de longitud $1/n$. Para cada $i, j \in \{0,\ldots,n\}$ se define $v_{ij} = (t_i, s_j)$ y se llama a estos puntos vértices. Si $i \neq 0$, $a_{ij} = J_i \times \{s_j\}$ y a este conjunto se lo llama *lado horizontal*. Si $j \neq 0$, $b_{ij} = \{t_i\} \times J_j$ y se denomina *lado vertical*.

Sea la función $f_i : [0,1] \to J_i$ el homeomorfismo lineal

$$f_i(t) = \frac{i-1+t}{n} = t_i + \frac{t}{n}.$$

Se define $A_{ij} : [0,1] \to X$ como el camino $A_{ij}(t) = H(f_i(t), s_j)$ para todo $t \in [0,1]$. De manera análoga se define el camino $B_{ij} : [0,1] \to X$ mediante $B_{ij}(s) = H(t_i, f_j(s))$ para todo $t \in [0,1]$.

Por definición de número de Lebesgue, para cada rectángulo R_{ij} existe $\lambda_{ij} \in \Lambda$ tal que $H(R_{ij}) \subseteq U_{\lambda_{ij}}$, pues por (c) se tiene que $diam(R_{ij}) < \epsilon$. Ahora, se nota que los vértices v_{ij} son vértices de uno, dos o cuatro rectángulos R_{kl}. Sea $\mu_{ij} \in \Lambda$ tal que $U_{\mu_{ij}}$ es la intersección de los conjuntos abiertos $U_{\lambda_{kl}}$ correspondientes a tales rectángulos R_{kl}. Esto es posible por la hipótesis (3). Por ende $H(v_{ij}) \in U_{\mu_{ij}}$. Ahora, para cada ij, sea $\gamma_{ij} : [0,1] \to U_{\mu_{ij}}$ un camino de x_0 hacia $F(v_{ij})$, con la condición de que si $F(v_{ij}) = x_0$, entonces $\gamma_{ij} = \overline{x_0}$.

(ii) Ahora se demuestra lo siguiente: Sean $\lambda, \mu \in \Lambda$ y $\gamma : [0,1] \to U_\lambda \cap U_\mu$ un lazo con base en x_0. Si $[\alpha] \in \pi_1(U_\lambda)$ y $[\beta] \in \pi_1(U_\mu)$ son tales que $\alpha \simeq \gamma \simeq \beta$, entonces $\rho_\lambda([\alpha]) = \rho_\lambda([\beta])$.

En efecto, por la hipótesis (3) existe $\nu \in \Lambda$ tal que $U_\lambda \cap U_\mu = U_\nu$, y por ende $[\gamma] \in \pi_1(U_\nu)$. De este modo $[\alpha] = \varphi_{\nu\lambda}([\alpha])$ y $[\beta] = \varphi_{\nu\mu}([\gamma])$. Con esto

$$\rho_\lambda([\alpha]) = (\rho_\lambda \circ \varphi_{\nu\lambda})([\gamma]) = \rho_\nu([\gamma]) = (\rho_\mu \circ \varphi_{\nu\mu})([\gamma]) = \rho_\mu([\beta]),$$

como se deseaba.

Este resultado permite escribir $\rho(\gamma)$ en lugar de $\rho_\lambda([\alpha])$ o $\rho_\mu([\beta])$ sin riesgo de ambigüedad. Con esta convención se definen los elementos del grupo H siguientes:

$$\alpha_{ij} = \rho((\gamma_{i-1,j} \cdot A_{ij}) \cdot \overline{\gamma_{ij}}), \quad \text{y} \quad \beta_{ij} = \rho((\gamma_{i,j-1} \cdot B_{ij}) \cdot \overline{\gamma_{ij}}).$$

(iii) A continuación se prueba que, por cada rectángulo R_{ij}, se verifica la siguiente relación en el grupo H:

$$\alpha_{i,j-1}\beta_{ij} = \beta_{i-1,j}\alpha_{ij}. \tag{2.1}$$

Nótese en primer lugar que $A_{i,j-1} \cdot B_{ij} \simeq B_{i-1,j} \cdot A_{ij}$. En efecto $A_{i,j-1}$ es un camino de $v_{i-1,j-1}$ hacia $v_{i,j-1}$, $B_{i,j}$ es un camino de $v_{i,j-1}$ hacia v_{ij}, por lo que $A_{i,j-1} \cdot B_{ij}$ es un camino de $v_{i-1,j-1}$ hacia v_{ij}. De manera similar, $B_{i-1,j} \cdot A_{ij}$ es un camino de $v_{i-1,j-1}$ hacia v_{ij}. Esto implica que $(A_{i,j-1} \cdot B_{ij}) \cdot \overline{B_{i-1,j} \cdot A_{ij}}$ es un lazo con base en $v_{i-1,j-1}$. Más aún, por construcción, $(A_{i,j-1} \cdot B_{ij}) \cdot \overline{B_{i-1,j} \cdot A_{ij}} \simeq \overline{v_{i-1,j-1}}$, pues H es una homotopía de β hacia el camino constante $\overline{x_0}$, y así

$$\begin{aligned} A_{i,j-1} \cdot B_{ij} &\simeq (A_{i,j-1} \cdot B_{ij}) \cdot (\overline{B_{i-1,j} \cdot A_{ij}} \cdot (B_{i-1,j} \cdot A_{ij})) \\ &\simeq ((A_{i,j-1} \cdot B_{ij}) \cdot \overline{B_{i-1,j} \cdot A_{ij}}) \cdot (B_{i-1,j} \cdot A_{ij}) \\ &\simeq (B_{i-1,j} \cdot A_{ij}). \end{aligned}$$

Con esto se obtiene

$$\gamma_{i-1,j-1} \cdot A_{i,j-1} \cdot \overline{\gamma_{i,j-1}} \cdot \gamma_{i,j-1} \cdot B_{ij} \cdot \overline{\gamma_{ij}} \simeq \gamma_{i-1,j-1} \cdot B_{i-1,j} \cdot \overline{\gamma_{i-1,j}} \cdot \gamma_{i-1,j} \cdot A_{ij} \cdot \overline{\gamma_{ij}},$$

de donde

$$[\gamma_{i-1,j-1} \cdot A_{i,j-1} \cdot \overline{\gamma_{i,j-1}}][\gamma_{i,j-1} \cdot B_{ij} \cdot \overline{\gamma_{ij}}] = [\gamma_{i-1,j-1} \cdot B_{i-1,j} \cdot \overline{\gamma_{i-1,j}}][\gamma_{i-1,j} \cdot A_{ij} \cdot \overline{\gamma_{ij}}]$$

y consecuentemente, al aplicar $\rho_{\lambda_{ij}}$, se obtiene (2.1).

(iv) En esta etapa se demuestra que

$$\prod_{i=1}^{n} \alpha_{i0} = \prod_{j=1}^{q} \rho_{\lambda_j}([\beta_j]). \tag{2.2}$$

Para esto se probará más precisamente que para todo $j \in \{1, \ldots, q\}$ se verifica que

$$\prod_{i=1}^{k} \alpha_{(j-1)k+i,0} = \rho_{\lambda_j}([\beta_j]).$$

Se debe notar primero que $A_{(j-1)k+i,0}$ es un camino del vértice $v_{(j-1)k+i-1,0}$ hacia el vértice $v_{(j-1)k+i,0}$. En particular $A_{(j-1)k+1,0}$ inicia en

$$v_{(j-1)k,0} = (t_{(j-1)k,s_0}) = ((j-1)/q, 0)$$

y $A_{jk,0}$ termina en $v_{jk,0} = (j/q, 0)$. Ahora, puesto que

$$\begin{aligned}
[\gamma_{(j-1)k,0} \cdot A_{(j-1)k+1,0} \cdot \overline{\gamma_{(j-1)k+1,0}}] \cdots [\gamma_{jk-1,0} \cdot A_{jk,0} \cdot \overline{\gamma_{jk,0}}] \\
= [\gamma_{(j-1)k,0} \cdot A_{(j-1)k+1,0} \cdot A_{(j-1)k+2,0} \cdot \cdots \cdot A_{jk,0} \cdot \overline{\gamma_{jk,0}}] \\
= [\overline{x_0} \cdot A_{(j-1)k+1,0} \cdot A_{(j-1)k+2,0} \cdot \cdots \cdot A_{jk,0} \cdot \overline{x_0}] \\
= [A_{(j-1)k+1,0} \cdot A_{(j-1)k+2,0} \cdot \cdots \cdot A_{jk,0}] = [\beta_j]
\end{aligned}$$

se sigue la identidad (2.2).

(v) Recuérdese que $H(t,1) = H(0,s) = H(1,s) = x_0$, de modo que trivialmente se tienen las relaciones

$$\alpha_{in} = 1, \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\} \tag{2.3}$$

y

$$\beta_{0j} = \beta_{nj} = 1, \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}. \tag{2.4}$$

(vi) Ahora se prueba que

$$\prod_{i=1}^{n} \alpha_{i,j-1} = \prod_{i=1}^{n} \alpha_{ij} \tag{2.5}$$

para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$. En efecto, se tiene que

$$\begin{aligned}
\alpha_{1,j-1}\alpha_{2,j-1}\cdots\alpha_{n-1,j-1}\alpha_{n,j-1} &= \alpha_{1,j-1}\alpha_{2,j-1}\cdots\alpha_{n-1,j-1}\alpha_{n,j-1}\beta_{n,j} \\
&= \alpha_{1,j-1}\alpha_{2,j-1}\cdots\alpha_{n-1,j-1}\beta_{n-1,j}\alpha_{n,j}\beta_{n,j} \\
&= \alpha_{1,j-1}\alpha_{2,j-1}\cdots\alpha_{n-1,j-1}\beta_{n-2,j}\alpha_{n-1,j}\alpha_{n,j}\beta_{n,j} \\
&\;\;\vdots \\
&= \alpha_{1,j-1}\beta_{1j}\alpha_{2,j}\cdots\alpha_{n-1,j-1}\beta_{n-2,j}\alpha_{n-1,j}\alpha_{n,j}\beta_{n,j} \\
&= \beta_{0j}\alpha_{1,j}\alpha_{2,j}\cdots\alpha_{n-1,j-1}\beta_{n-2,j}\alpha_{n-1,j}\alpha_{n,j}\beta_{n,j} \\
&= \alpha_{1,j}\alpha_{2,j}\cdots\alpha_{n-1,j-1}\beta_{n-2,j}\alpha_{n-1,j}\alpha_{n,j}\beta_{n,j}.
\end{aligned}$$

Aquí, en la primera y última igualdad se hizo uso de la identidad (2.4), mientras que en todas las demás se hizo uso repetido de la relación (2.1).

(vii) Para terminar, nótese que (2.5) implica que

$$\prod_{i=1}^{n} \alpha_{i,0} = \prod_{i=1}^{n} \alpha_{in},$$

lo que por (2.2) y (2.4) significa que

$$\prod_{j=1}^{q} \rho_{\lambda_j}([\beta_j]) = \prod_{i=1}^{n} \alpha_{i0} = 1,$$

como se deseaba probar.

□

Demostración del Teorema 2.25. Solamente hace falta probar que el blanco $\langle \pi_1(X), \psi_\lambda \rangle$ verifica la propiedad universal del colímite. Para esto se considera un grupo H y una familia de homomorfismos de grupos $\rho_\lambda : \pi_1(U_\lambda) \to H$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(U_\lambda) \arrow[rr, "\varphi_{\lambda\mu}"] \arrow[dr, "\rho_\lambda"'] & & \pi_1(U_\mu) \arrow[dl, "\rho_\mu"] \\
& H &
\end{tikzcd}$$

conmuta siempre que $\lambda \geq \mu$. Se define $\sigma : \pi_1(X) \to H$ del siguiente modo: Si

$[\alpha] \in \pi_1(X)$, por el Lema 2.26 existen $[\alpha_1] \in \pi_1(U_{\lambda_1}), \dots, [\alpha_n] \in \pi_1(U_{\lambda_n})$ tales que

$$[\alpha] = \psi_{\lambda_1}([\alpha_1]) \cdots \psi_{\lambda_n}([\alpha_n]),$$

entonces se asigna

$$\sigma([\alpha]) = \rho_{\lambda_1}([\alpha_1]) \cdots \rho_{\lambda_n}([\alpha_n]).$$

Si se tuviera que

$$[\alpha] = \psi_{\mu_1}([\beta_1]) \cdots \psi_{\mu_m}([\beta_m])$$

es otra descomposición de $[\alpha]$, entonces

$$\psi_{\lambda_1}([\alpha_1]) \cdots \psi_{\lambda_n}([\alpha_n])\psi_{\mu_m}([\beta_m]^{-1}) \cdots \psi_{\mu_1}([\beta_1]^{-1}) = 1$$

y por el Lema (2.27) se sigue que

$$\rho_{\lambda_1}([\alpha_1]) \cdots \rho_{\lambda_n}([\alpha_n])\rho_{\mu_m}([\beta_m]^{-1}) \cdots \rho_{\mu_1}([\beta_1]^{-1}) = 1,$$

es decir,

$$\rho_{\lambda_1}([\alpha_1]) \cdots \rho_{\lambda_n}([\alpha_n] = \rho_{\mu_1}([\beta_1]) \cdots \rho_{\mu_m}([\beta_m]),$$

lo que implica que $\sigma([\alpha])$ es independiente de la descomposición elegida para $[\alpha]$, y por ende σ está bien definido. Por construcción es claro que σ es un homomorfismo de grupos y que $\sigma \circ \psi_\lambda = \rho_\lambda$ para todo $\lambda \in \Lambda$. Más aún, si $\sigma' : \pi_1(X) \to H$ es otro homomorfismo de grupos que verifica $\sigma' \circ \psi_\lambda = \rho_\lambda$, se tiene en particular que para todo $\lambda \in \Lambda$ y todo $[\alpha] \in \pi_1(U_\lambda)$

$$\sigma'(\psi_\lambda([\alpha])) = \rho_\lambda([\alpha]) = \sigma(\psi_\lambda([\alpha])),$$

de modo que σ y σ' coinciden sobre los generadores de $\pi_1(X)$ y por ende $\sigma' = \sigma$. Esto prueba la unicidad. □

COROLARIO 2.28 (van Kampen). *Sea X un espacio topológico conexo por caminos y $x_0 \in X$. Sean U, V dos abiertos conexos por caminos tales que $X = U \cup V$, $U \cap V$ es conexo por caminos y $x_0 \in U \cap V$. Entonces si los homomorfismos inducidos por las inclusiones canónicas $U \cap V \hookrightarrow U$ y $U \cap V \hookrightarrow V$ son inyectivos,*

$$\pi_1(X) \cong \pi_1(U) \underset{\pi_1(U\cap V)}{*} \pi_1(V),$$

donde la amalgama se realiza vía tales homomorfismos. En particular, si $U \cap V$ es *simplemente conexo, entonces*

$$\pi_1(X) \cong \pi_1(U) * \pi_1(V)$$

Demostración. La primera parte de este resultado es consecuencia inmediata del teorema de Seifert-van Kampen y el Teorema 1.11. La segunda parte es consecuencia de la primera parte y el Corolario 1.12. □

2.4. Complejos celulares

La noción de un complejo celular (conocido también como complejo CW, o CW-complejo) es el concepto que permitirá relacionar la teoría topológica con la categórica en lo que respecta al estudio de la homotopía. La idea fundamental detrás de la noción de un complejo celular es construir un espacio topológico de manera recursiva, "pegando" ciertos subespacios de $\mathbb{R}^n$ sobre subespacios de menores dimensiones. Esto será precisado a lo largo de esta sección.

DEFINICIÓN 2.11. *Sea $(X_i)_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos. Se define su unión disjunta o su coproducto como el espacio $X = \coprod_{i\in I} X_i$, que como conjunto es la unión disjunta de los espacios X_i, es decir, $\bigcup_{i\in I}(\{i\} \times X_i)$ y está dotado de la topología final generada por las inyecciones $\iota_i : X_i \to X$ tal que a cada $x_i \in X_i$ le asigna el par (i, x_i). Cuando $I = \{1, \ldots, n\}$ sea finito, se escribirá $X_1 \sqcup \cdots \sqcup X_n$ o $\coprod_{i=1}^n X_i$ en lugar de $\coprod_{i\in I} X_i$.*

Por un abuso de lenguaje, se identifica a un elemento $(j, x_j) \in \coprod_{i\in I} X_i$ con el elemento x_j y por ende se entiende también que $X_j \subseteq \coprod_{i\in I} X_i$.

Es conveniente recordar asuntos puntuales respecto a las relaciones de equivalencia. Dado un conjunto A y dos relaciones de equivalencia R_1, R_2 sobre A, se dice que R_1 es más fina que R_2 si $R_1 \subseteq R_2$. Dado un conjunto $S \subseteq A \times A$, entonces $A \times A$ es una relación de equivalencia que contiene a S. Así, la colección de todas las relaciones de equivalencia que contienen a S es no vacía, y por ende es posible formar su intersección. Esta intersección es una relación de equivalencia y por construcción es la relación de equivalencia más fina que contiene a S.

TEOREMA 2.29. *Sean X, Y, Z espacios topológicos y $f : Z \to X$, $g : Z \to Y$ dos funciones continuas. Existen, salvo homeomorfismo, un único espacio topológico P*

y un par de funciones continuas $p_1 : X \to P$ y $p_2 : Y \to P$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "p_1"] \\ Y \arrow[r, "p_2"'] & P \end{tikzcd}$$

conmuta y tal que P es universal *con respecto a esta propiedad, en el sentido de que si Q y $q_1 : X \to Q$ y $q_2 : Y \to Q$ es otra tripla que verifica $q_1 \circ f = q_2 \circ g$, entonces existe una única función continua $h : P \to Q$ tal que el diagrama siguiente conmuta:*

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "p_1"] \arrow[ddr, bend left, "q_1"] & \\ Y \arrow[r, "p_2"'] \arrow[drr, bend right, "q_2"'] & P \arrow[dr, dashed, "h"] & \\ & & Q \end{tikzcd}$$

P es, como conjunto, igual a $X \sqcup Y / \sim$ siendo $\sim$ la relación de equivalencia más fina tal que $f(z) \sim g(z)$ para todo $z \in Z$, y está equipado con la topología cociente. Las funciones p_1 y p_2 son las composiciones de la proyección canónica $\pi : X \sqcup Y \to P$ con las inyecciones canónicas $X \hookrightarrow X \sqcup Y$ y $Y \hookrightarrow X \sqcup Y$, respectivamente.

Demostración. Por construcción, es claro que p_1, p_2 son funciones continuas y que $p_1 \circ f = p_2 \circ g$, ya que las imágenes de dichas funciones se identifican punto a punto en el cociente. La verificación de la propiedad universal es más delicada. Para ello, es conveniente en primer lugar dar una descripción de la relación $\sim$. Sean $u, v \in X \sqcup Y$. Si u o v no pertenecen a $f(Z) \sqcup g(Z)$, entonces $u \sim v$ si y sólo si $u = v$ por la minimalidad de $\sim$. Si en cambio $u, v \in f(Z) \sqcup g(Z)$, se tienen varias posibilidades: En primer lugar que $u, v \in f(Z)$, en tal caso $u \sim y$ si y sólo si $u = v$, y sucede de manera similar si $u, v \in g(Z)$. El caso de interés es entonces cuando $u \in f(Z)$ y $v \in g(Z)$ (o viceversa). Puesto que la unión es disjunta, necesariamente $u \neq v$. Ahora, $u = f(z)$ y $v = g(w)$ para ciertos $z, w \in Z$. En este caso puesto que $f(z) \sim g(z)$ y $f(w) \sim g(w)$ por la minimalidad de $\sim$ debe tenerse que $f(z) = f(w)$ y $g(z) = g(w)$ para que $u \sim v$, y recíprocamente. Así se ha descrito completamente a $\sim$.

Sean Q, q_1 y q_2 como en el enunciado del teorema. Se escribe $[x]$ para los elementos de P (que son clases de equivalencia) que tienen a x como representante. Se define entonces

$$h([x]) = \begin{cases} q_1(x) & \text{si } x \in X \\ q_2(x) & \text{si } x \in Y. \end{cases}$$

h está bien definida. Para esto basta analizar el caso cuando $x \sim y$, $x \in f(Z)$ y $y \in g(Z)$. Sean $x = f(z)$ y $y = g(w)$ con $z, w \in Z$. Aquí, $f(z) = f(w)$ y $g(z) = g(w)$, por lo que

$$q_1(x) = q_1 \circ f(z) = q_2 \circ g(w) = q_2(y),$$

lo que muestra que h está bien definida. Puesto que q_1 y q_2 son continuas, h es continua por el lema del pegado. Por construcción, $h \circ p_1 = q_1$ y $h \circ p_2 = q_2$ y h es única por la minimalidad de $\sim$.

Finalmente, queda probar que si P', $p_1' : X \to P'$ y $p_2' : Y \to P'$ verifican las mismas condiciones que P, p_1, p_2, entonces P y P' son homeomorfos. Pero esto es simple, pues tomando $Q = P'$ existe una función $h : P \to P'$ que hace conmutar el diagrama. Ahora, tomando $Q = P$, la función identidad $\mathbb{1}_P : P \to P$ claramente hace conmutar el diagrama, de modo que si $h' : P' \to P$ es la función que se obtiene al invertir los roles de P y P', entonces $h' \circ h = \mathbb{1}_P$. De manera análoga $h \circ h' = \mathbb{1}_{P'}$, por lo que h es un homeomorfismo. $\square$

DEFINICIÓN 2.12. *Sean X, Y, Z, f, g y P, p_1, p_2 como en el teorema anterior. La tripleta (P, p_1, p_2) se llama el* pushout *de f y g. También se dice que P es el* pushout *de X y Y vía f y g.*

La idea tras el pushout de dos espacios topológicos es la de *pegar* los espacios X e Y identificando subespacios de estos. Esto se ilustra en el ejemplo a continuación.

DEFINICIÓN 2.13. *Sean X, Y dos espacios topológicos, A un subespacio de Y y $f : A \to X$ una función continua. Al pushout de X y Y vía f y la inclusión canónica $A \hookrightarrow Y$ se lo llama la* adjunción *de X sobre Y vía f y se la nota por $X \amalg_f Y$. A f se la llama una* aplicación de adjunción.

Más generalmente, dado un espacio topológico Y, (Y_α) una familia de copias de un espacio topológico Y, $A \subseteq Y$ un subespacio y $\varphi_\alpha : A \to X$ una familia de funciones continuas, se define la adjunción de (Y_α) sobre X vía (φ_α) como el cociente del espacio $X \sqcup \amalg_\alpha Y_\alpha$ módulo la relación de equivalencia más fina tal que $x \sim \varphi_\alpha(x)$ para todo $x \in A$.

Para definir la noción de complejo celular, se introduce una notación que será utilizada de aquí en adelante: El *n-disco* es el conjunto

$$D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \leq 1\}$$

con la topología heredada desde $\mathbb{R}^n$. A su frontera se la conoce como la $(n-1)$-esfera S^{n-1}, es decir

$$S^{n-1} = \partial D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = 1\}.$$

Existe una inyección canónica $S^{n-1} \hookrightarrow D^n$. Una n-célula e^n es el interior de un n-disco, es decir,

$$e^n = \mathring{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 < 1\}.$$

Dada una función continua $f : S^{n-1} \to X$, siendo X un espacio topológico, la *adjunción* de una n-célula e^n a f se entiende como la adjunción $X \amalg_f D^n$. De manera similar si en lugar de una n-célula se tiene una familia de n-células.

Con esto, se define el concepto de *n-esqueleto* de manera recursiva como sigue:

(1) El 0-esqueleto X^0 es un conjunto dotado de la topología discreta. Sus puntos serán considerados 0-células.

(2) Suponiendo construido del $n-1$-esqueleto X^{n-1}, se considera una familia de n-células (e^n_α) y funciones continuas $\varphi_\alpha : S^{n-1} \to X^{n-1}$. Entonces el n-esqueleto X^n es la adjunción de (e^n_α) sobre X^{n-1} vía (φ_α).

DEFINICIÓN 2.14. *Un complejo celular (también complejo CW o CW-complejo) es un espacio topológico X tal que $X = X^n$ siendo X^n un n-esqueleto o tal que*

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X^n$$

equipado con la topología siguiente: Un conjunto $A \subseteq X$ es abierto (cerrado) si y sólo si $A \cap X^n$ es abierto (cerrado) en X^n. Si $X = X^n$ entonces a n se lo llama la dimensión del complejo celular X, y en el otro caso, se dice que X es un complejo celular de dimensión infinita.

Por un abuso de notación, si e^n_α es una n-célula utilizada en la construcción de un complejo celular X, a su imagen homeomórfica en X también se la notará por e^n_α y se la llamará igualmente una n-célula.

Para cada n-célula e^n_α, sea $\Phi^n_\alpha : D^n_\alpha \to X$ la función definida como la composición

$$D^n_\alpha \hookrightarrow X^{n-1} \amalg_\beta D^n_\beta \to X^n \hookrightarrow X,$$

donde las flechas $\hookrightarrow$ representan inclusiones canónicas y la otra flecha es la aplicación cociente. A Φ^n_α se la llama la aplicación característica *de la n-célula e^n_α.*

OBSERVACIÓN 9. Los complejos celulares fueron definidos por J.H.C. Whitehead[6], en cuya definición él hacía énfasis en dos propiedades que poseen los complejos celulares:

(1) *Finitud de clausura* (*Closure-finiteness* en inglés): La clausura de una n-célula en el complejo interseca solamente a un número finito de n-células.

(2) *topología débil* (*Weak topology* en inglés): Un conjunto es cerrado si y sólo si interseca a la clausura de toda célula en un conjunto cerrado.

Puesto que estas propiedades no serán utilizadas en este trabajo, no se presentan sus demostraciones. Sin embargo, estas propiedades, justifican el nombre de CW-complejo, pues la C hace referencia a la finitud de la clausura y la W a la topología débil, según las siglas en inglés.

DEFINICIÓN 2.15. *Sea X un complejo celular. Un subespacio cerrado A de X se dice un* subcomplejo *de X si puede expresarse como unión de células de X. En este caso, al par (X, A) se lo llama un* par celular *o un* par *CW.*

TEOREMA 2.30. *Sean X, Y dos espacios topológicos y $A \subseteq X$ un subespacio cerrado. Son equivalentes:*

(i) *Para toda función continua $f : X \to Y$ y toda homotopía $H : A \times [0,1] \to Y$ que inicia en $f|_A$, existe una homotopía $\tilde{H} : X \times [0,1] \to Y$ que extiende a H, en el sentido de que para todo $t \in [0,1]$, las funciones $f_t : A \to Y$ y $\tilde{f}_t : X \to Y$ dadas por $x \mapsto H(x,t)$ y $x \mapsto \tilde{H}(x,t)$, respectivamente, verifican $\tilde{f}_t|_A = f_t$.*

(ii) *Para todo par de funciones continuas $H_1 : X \times \{0\} \to Y$ y $H_2 : A \times [0,1] \to Y$ tales que $H_1|_{A\times\{0\}} = H_2|_{A\times\{0\}}$ existe una función $H : X \times [0,1] \to Y$ tales que $H|_{X\times\{0\}} = H_1$ y $H_{A\times[0,1]} = H_2$.*

(iii) *El conjunto $X \times \{0\} \cup A \times [0,1]$ es un retracto de $X \times [0,1]$.*

Demostración. La equivalencia de (i) y (ii) es inmediata por la definición de homotopía.

[6]John Henry Constantine Whitehead (1904-1960), matemático británico.

(ii)⇒(iii): La función identidad $X \times \{0\} \cup A \times [0,1] \to X \times \{0\} \cup A \times [0,1]$ se extiende a una función $r : X \times [0,1] \to X \times \{0\} \cup A \times [0,1]$, y esta es la retracción buscada.

(iii)⇒(ii): Sean $H_1 : X \times \{0\} \to Y$ y $H_2 : A \times [0,1] \to Y$ tales que $H_1|_{A\times\{0\}} = H_2|_{A\times\{0\}}$ y $r : X \times [0,1] \to X \times \{0\} \cup A \times [0,1]$ una retracción. Por el lema del pegado (aquí se usa la hipótesis de que A es cerrado) H_1 y H_2 inducen una función $G : X \times \{0\} \cup A \times [0,1] \to Y$, de modo que $H = G \circ r$ es la función buscada. □

OBSERVACIÓN 10. Nótese que la hipótesis de que A es cerrado solamente se usa en la implicación (iii)⇒(ii), por ende todas las demás implicaciones probadas permanecen válidas sin tomar en cuenta esta hipótesis. Sin embargo, la hipótesis de que A sea cerrado no es vital: Puede demostrarse el resultado de manera más general, pero la demostración es mucho más delicada, y tal generalidad no será usada en este trabajo.

OBSERVACIÓN 11. La condición (i) puede expresarse equivalentemente de la siguiente manera:

(i′) Dada una función continua $f : X \to Y$ y una homotopía $(f_t : A \to Y)$ tal que $f_0 = f|_A$, existe una homotopía $(\tilde{f}_t : X \to Y)$ tal que $\tilde{f}_0 = f$ y $\tilde{f}_t|_A = f_t$ para todo $t \in [0,1]$.

DEFINICIÓN 2.16. *Dado un espacio topológico X y un subespacio A cerrado verifican cualquiera de las condiciones equivalentes del teorema anterior, se dice que el par (X, A) posee la* propiedad de extensión homotópica.

PROPOSICIÓN 2.31. *Si (X, A) posee la propiedad de extensión homotópica y X es Hausdorff, entonces A es cerrado.*

Demostración. Sea Y un espacio de Hausdorff y $f : Y \to Y$ una función continua. Se probará que el conjunto $F = \{y \in Y : f(y) = y\}$ es cerrado. En efecto, si $y \notin F$, existen vecindades abiertas disjuntas U de y y V de $f(y)$. Consecuentemente $f^{-1}(V)$ es una vecindad abierta de y, y por ende lo es $W = U \cap f^{-1}(V)$. Por construcción $W \subseteq U$ y $f(W) \subseteq V$, por ende $W \cap f(W) = \emptyset$. En particular esto significa que $W \subseteq Y \setminus F$, y por ende $Y \setminus F$ es abierto, es decir, F es cerrado.

Sea $r : X \times [0,1] \to X \times [0,1]$ una retracción de $X \times [0,1]$ hacia $X \times \{0\} \cup A \times [0,1]$, se tiene que un punto z pertenece a la imagen de r si y sólo si $r(z) = z$, por definición de retracción. Ahora, puesto que X es un espacio de Hausdorff, también lo es $X \times [0,1]$. Por el párrafo anterior, esto significa que la imagen de r, que es el conjunto $X \times \{0\} \cup A \times [0,1]$, es cerrado, y por ende lo es A. $\square$

TEOREMA 2.32. *Si el par (X, A) posee la propiedad de extensión homotópica y A es contratible, entonces la aplicación cociente $\pi : X \to X/A$ es una equivalencia homotópica.*

Demostración. Sea $f'_t : A \to X$ una homotopía de A a un punto $*$ tal que f'_0 es la inclusión de A en X, y sea $f_t : X \to X$ la extensión de tal homotopía dada por la propiedad de extensión homotópica, de modo que $f_0 = \mathbb{1}_X$. Por construcción, $f_t(A) \subseteq A$ para todo $t \in [0,1]$ y consecuentemente $\pi \circ f_t : X \to X/A$ verifica $(\pi \circ f_t)(A) = *$. Esto implica la existencia de funciones $\overline{f}_t : X/A \to X/A$ tal que $\pi \circ f_t = \overline{f}_t \circ \pi$ para todo $t \in [0,1]$, inducidas por las respectivas f_t. De la misma manera, f_1 induce una función $g : X/A \to X$ tal que $g \circ \pi = f_1$. Sea $x \in X$ y $\overline{x} = \pi(x)$. Entonces

$$\pi \circ g(\overline{x}) = \pi(g(\pi(x))) = \pi(f_1(x)) = \overline{f}_1(\pi(x)) = \overline{f}_1(\overline{x}),$$

lo que por la sobreyectividad de π implica que $\pi \circ g = \overline{f}_1$. De este modo

$$g \circ \pi = f_1 \simeq f_0 = \mathbb{1}_X \quad \text{y} \quad \pi \circ g = \overline{f}_1 \simeq \overline{f}_0 = \mathbb{1}_{X/A},$$

lo que implica que π es una equivalencia homotópica. $\square$

LEMA 2.33. *Para todo n, el par (D^n, S^{n-1}) posee la propiedad de extensión homotópica.*

Demostración. Sean Y un espacio topológico, $f : D^n \to Y$ una función continua y $H : S^{n-1} \times [0,1] \to Y$ una homotopía que inicia en $f|_{S^{n-1}}$. Sea $h : D_2 \to Y$, donde $D_2 = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 2\}$, la función definida por

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } \|x\| \leq 1 \\ H(x/\|x\|, 1 - \|x\|) & \text{si } 1 \leq \|x\| \leq 2, \end{cases}$$

que es continua por el lema del pegado. Se tiene entonces que la función $\tilde{H} : D^n \times [0,1] \to Y$ definida por

$$\tilde{H}(x,t) = h((1+t)x)$$

es la homotopía que extiende a H deseada. $\square$

TEOREMA 2.34. *Todo par celular (X, A) posee la propiedad de extensión homotópica.*

Demostración. Sea $f : X \to Y$ una función continua y $(f_t : A \to Y)$ una homotopía tal que $f|_A = f_0$. Se define para cada n una homotopía $(g_t^n : X^n \to Y)$, donde X^n es el n-esqueleto de X, de manera recursiva. Se denota por A^n al n-esqueleto de A.

Para $n = 0$, la construcción es trivial, pues X^0 es discreto. Asumiendo construida la homotopía $(g_t^{n-1} : X^{n-1} \to Y)$ tal que $g_t^{n-1} = f|_{X^{n-1}}$ y $g_t^{n-1}|_{A^{n-1}} = f_t|_{A^{n-1}}$, sean $\Phi_\alpha^n : D_\alpha^n \to X^n$ aplicaciones características para las n celdas e_α^n que conforman a X^n y $\phi_\alpha^n = \Phi_\alpha^n|_{S_\alpha^{n-1}}$ las aplicaciones de adjunción. Se tiene entonces el diagrama conmutativo de pushout siguiente

$$\begin{tikzcd}
\coprod_\alpha S_\alpha^{n-1} \arrow[r, hook] \arrow[d, "\phi"'] & \coprod_\alpha D_\alpha^n \arrow[d, "\Phi"] \\
X^{n-1} \arrow[r, hook] & X^n
\end{tikzcd}$$

donde Φ y ϕ se definen, por licencia del lema del pegado, mediante $\Phi|_{D_\alpha^n} = \Phi_\alpha^n$ y $\phi|_{S_\alpha^{n-1}} = \phi_\alpha^n$. Se considera ahora el diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
\coprod_\alpha S_\alpha^{n-1} \arrow[r, hook] \arrow[d, "\phi"'] & \coprod_\alpha D_\alpha^n \arrow[d, "\Phi"] \arrow[ddr, bend left, "\tau_t^n"] & \\
X^{n-1} \arrow[r, hook] \arrow[drr, bend right, "g_t^{n-1}"'] & X^n & \\
 & & Y,
\end{tikzcd}$$

donde la función $\tau_t^n : \coprod_\alpha D_\alpha^n \to Y$ está construida como sigue: Para cada α, asumiendo construida τ_t^{n-1}, se tiene una función $\tau_{t,\alpha}^{n-1} = \tau_t^{n-1}|_{D_\alpha^n}$. Si $e_\alpha^n \subseteq A$ y se define $\tau_{t,\alpha}^n|_{S_\alpha^{n-1}} = g_t^{n-1} \circ \phi_\alpha^n$, dado que el par (D^n, S^{n-1}) posee la propiedad de extensión homotópica (lema anterior), se extiende esta aplicación a una función $\tau_{t,\alpha}^n : D_\alpha^n \to Y$; en caso contrario, es decir, si e_α^n no es una célula de A, se define $\tau_{y,\alpha}^n = f_t \circ \Phi_\alpha$. Por el lema del pegado, se obtiene la función τ_t^n deseada. Haciendo uso de la propiedad universal del pushout, existe una única función $g_t^n : X^n \to Y$ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\coprod_\alpha S_\alpha^{n-1} \arrow[r, hook] \arrow[d, "\phi"'] & \coprod_\alpha D_\alpha^n \arrow[d, "\Phi"] \arrow[ddr, bend left, "\tau_t^n"] & \\
X^{n-1} \arrow[r, hook] \arrow[drr, bend right, "g_t^{n-1}"'] & X^n \arrow[dr, dashed, "g_t^n"] & \\
 & & Y.
\end{tikzcd}$$

Por conmutatividad y construcción, es inmediato que g_t^n es la homotopía deseada, lo que completa el paso inductivo.

Si $X = X^n$ para algún n, entonces se define $\tilde{f}_t = g_t^n$ para cada $t \in [0,1]$. Si $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X^n$, se define, usando el lema del pegado, $\tilde{f}_t|_{X^n} = g_t^n$ para todo $t \in [0,1]$. De este modo se ha construido la homotopía deseada. $\square$

Dado que para todo par (X, A) con la propiedad de extensión homotópica, donde A es contractible, se tiene que la proyección $\pi : X \to X/A$ es una equivalencia homotópica y que todo par celular posee la propiedad de extensión homotópica, trivialmente se obtiene el siguiente resultado.

COROLARIO 2.35. *La aplicación cociente $\pi : X \to X/A$ es una equivalencia homotópica para todo par celular (X, A) tal que A es contractible.*

La teoría aquí presentada tiene dos objetivos: El primero es servir como base para la construcción de una teoría similar pero en dos estructuras distintas: las categorías y los carcajes. La segunda es la de proporcionar un punto de vista topológico para el estudio de dichas estructuras. Los complejos celulares juegan un papel fundamental en este estudio: A cada categoría, carcaj y carcaj ligado le será asociado un complejo celular, que servirá como puente entre las distintas teorías de homotopía en consideración.

Algunos teoremas de este capítulo, como el de Seifert-van Kampen se han presentado con la mayor generalidad y rigurosidad posible. El precio a pagar fue elevado, pero esto permitirá a futuro obtener demostraciones mucho más simplificadas de otros teoremas.

Capítulo 3

Carcajes, Álgebras de Caminos y Teoría de Categorías

3.1. Carcajes

El objeto fundamental a ser estudiado en este trabajo son los carcajes. En esta sección se desarrolla la teoría básica de carcajes y sus propiedades topológicas. Para un estudio más profundo del tema se refiere a [15].

DEFINICIÓN 3.1. *Un carcaj es una cuadrupleta $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1, s, t)$ donde Γ_0 es un conjunto no vacío llamado conjunto de vértices, Γ_1 es un conjunto (posiblemente vacío) llamado conjunto de aristas y $s, t : \Gamma_1 \to \Gamma_0$ son dos funciones, llamadas respectivamente salida y llegada.*

A los elementos de Γ_0 se los llama vértices y a los de Γ_1 aristas. Dada una arista α, se dice que esta inicia en x si $s(\alpha) = x$ y que termina en y si $t(\alpha) = y$. Un lazo en $x \in \Gamma_0$ es una arista que inicia y termina en x.

En inglés un carcaj se conoce como *quiver*, y en combinatoria se denominan *multidigrafos*. En el primero de los ejemplos que se presentarán más adelante se entenderá el por qué de esta denominación.

En el idioma español, un carcaj es una bolsa tubular en la cual se llevan flechas. Esto se refleja en el nombre que aquí se utiliza, pues como se verá a continuación, un carcaj se representa por un diagrama con flechas.

Es útil representar un carcaj mediante diagramas como sigue: Dibujamos un punto en el plano por cada elemento de Γ_0, y si α es una flecha que inicia en a y termina en b, trazamos una arista que una los puntos correspondientes a a y b, ubicando una saeta que apunta hacia b. Los vértices y las aristas se etiquetan por sus nombres cuando es necesario identificarlas. Por ejemplo, dado el carcaj $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1, s, t)$, donde

$$\Gamma_0 = \{1, 2, 3\}, \quad \Gamma_1 = \{\alpha, \beta, \gamma\}$$

y

$$\begin{array}{rccc} s: & \Gamma_1 & \longrightarrow & \Gamma_0 \\ & \alpha & \longmapsto & 1 \\ & \beta & \longmapsto & 1 \\ & \gamma & \longmapsto & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} t: & \Gamma_1 & \longrightarrow & \Gamma_0 \\ & \alpha & \longmapsto & 2 \\ & \beta & \longmapsto & 2 \\ & \gamma & \longmapsto & 3 \end{array}$$

se obtiene el diagrama

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend left, "\alpha"] \arrow[r, bend right, "\beta"'] & 2 \arrow[r, "\gamma"] & 3. \end{tikzcd}$$

En cambio si

$$\begin{array}{rccc} s: & \Gamma_1 & \longrightarrow & \Gamma_0 \\ & \alpha & \longmapsto & 1 \\ & \beta & \longmapsto & 2 \\ & \gamma & \longmapsto & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} t: & \Gamma_1 & \longrightarrow & \Gamma_0 \\ & \alpha & \longmapsto & 1 \\ & \beta & \longmapsto & 1 \\ & \gamma & \longmapsto & 3 \end{array}$$

se obtiene

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop left, "\alpha"] & 2 \arrow[l, "\beta"'] \arrow[r, "\gamma"] & 3. \end{tikzcd}$$

EJEMPLO 15 (Digrafos)**.** Un *digrafo* (o *grafo dirigido*) es un par (V, E) donde V es un conjunto cuyos elementos son denominados *vértices* y $E \subseteq V \times V$. A los elementos de E se los denomina *aristas*. Si $\Gamma_0 = V$, $\Gamma_1 = E$ y definimos $s((a, b)) = a$ y $t((a, b)) = b$ para cada $(a, b) \in V$, entonces $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1, s, t)$ es un carcaj.

Recíprocamente, un digrafo puede definirse como un carcaj Γ en el cual para todo $a, b \in \Gamma_0$, con $a \neq b$, existe a lo más una arista que inicia en a y termina en b.

EJEMPLO 16 (Preórdenes)**.** Sea $(X, \leq)$ un conjunto preordenado (es decir, $\leq$ es una relación reflexiva y transitiva sobre X). Sea $\Gamma_0 = X$, $\Gamma_1 = \leq = \{(x, y) \in X \times X | x \leq y\}$ y $s((x, y)) = x$, $t((x, y)) = y$, entonces $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1, s, t)$ es un carcaj.

Nótese que todo preorden es un digrafo, pero el recíproco no es verdadero.

Un preorden tiene una propiedad que en general no comparte con los digrafos: *transitividad*. Esto significa que si α es una arista de a hacia b y β es una arista de b hacia c, entonces existe un arista γ de a hacia c. Esto se da pues la relación de preorden es transitiva.

Definición 3.2. *Sea $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1, s, t)$ un carcaj y sean $x, y \in \Gamma_0$. Un* camino orientado *de x a y es una secuencia finita $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \Gamma_1$ tal que*

(1) $s(\alpha_1) = x$*;*

(2) $t(\alpha_i) = s(\alpha_{i+1})$ *para todo* $i \in \{1, ..., n-1\}$*; y*

(3) $t(\alpha_n) = y$*.*

A n se lo llama la longitud *del camino orientado y se lo denota por $\ell(n)$. Por notación se escribirá $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ para representar al camino orientado, y se dirá que dicho camino inicia en x y termina en y.*

Un ciclo orientado *es un camino que inicia y termina en un mismo vértice. Si α es un ciclo orientado que inicia y termina en x, se dice que es un* ciclo orientado sobre x*. Un carcaj se dice* acíclico *si no posee ciclos orientados.*

Al conjunto de todos los caminos orientados de x a y lo notaremos por $\Gamma(x, y)$. Finalmente, el conjunto de todos los caminos orientados en Γ será notado por C_Γ.

Observación 12. Sea $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1, s, t)$ un carcaj.

(1) Si Γ es acíclico, no posee lazos. Más aún, Γ es acíclico si y sólo si $\Gamma(x, x) = \emptyset$ para todo $x \in \Gamma_0$.

(2) Se tiene que
$$C_\Gamma = \bigcup_{x,y \in \Gamma_0} \Gamma(x, y).$$

(3) Las funciones s, t pueden extenderse a C_Γ del siguiente modo: Si
$$\alpha = \alpha_1 \cdots \alpha_n \in C_\Gamma,$$
entonces se define
$$s(\alpha) = s(\alpha_1), \quad t(\alpha) = t(\alpha_n).$$
De este modo, un ciclo orientado es un elemento $\alpha \in C_\Gamma$ tal que $s(\alpha) = t(\alpha)$.

Ejemplo 17. En el carcaj

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[dd, "\alpha"'] & & \\
 & 3 \arrow[ul, "\gamma"'] \arrow[r, "\delta"] & 4 \arrow[ull, bend right, "\epsilon"'] \\
2 \arrow[ur, "\beta"'] & &
\end{tikzcd}$$

$\alpha\beta\gamma$ es un ciclo orientado que inicia y termina en 1, $\epsilon\alpha$ es un camino orientado de 4 a 2, y no existen ciclos orientados que inicien y terminen en 4. El camino orientado $\alpha\beta\gamma\alpha\beta\gamma$ es un ciclo orientado sobre 1.

DEFINICIÓN 3.3. *Sea* $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1, s, t)$ *un carcaj. Un subcarcaj es una cuadrupleta* $\Gamma' = (\Gamma_0', \Gamma_1', s', t')$ *tal que* $\Gamma_0' \subseteq \Gamma_0$*,* $\Gamma_1' \subseteq \Gamma_1$*,* $s' = s|_{\Gamma_1}$*,* $t' = t|_{\Gamma_1}$ *y tal que* $s(\Gamma_1') \subseteq \Gamma_0'$ *y* $t(\Gamma_1') \subseteq \Gamma_0'$*.*

Se notará $\Gamma' \subseteq \Gamma$ *para indicar que* Γ' *es un subcarcaj de* Γ *y* $\Gamma' \subset \Gamma$ *si* $\Gamma' \subseteq \Gamma$ *y* $\Gamma' \neq \Gamma$*.*

OBSERVACIÓN 13. Si Γ es un carcaj, la relación $\subseteq$ entre subcarcajes de Γ es una relación de orden parcial.

DEFINICIÓN 3.4. *Sea* Γ *un carcaj. Un partición de* Γ *es una familia* $(\Gamma^i)_{i \in I}$ *de subcarcajes de* Γ *tales que las familias* $(\Gamma_0^i)_{i \in I}$ *y* $(\Gamma_1^i)_{i \in I}$ *son particiones de los conjuntos* Γ_0 *y* Γ_1*, respectivamente.*

DEFINICIÓN 3.5. *Sean* $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1, s, t)$ *y* $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1, s', t')$ *dos carcajes. Un morfismo de carcajes* $\eta : \Gamma \to \Delta$ *es un par* $\eta = (\eta_0, \eta_1)$ *donde* $\eta_0 : \Gamma_0 \to \Delta_0$ *y* $\eta_1 : \Gamma_1 \to \Delta_1$ *son funciones tales que*

$$\eta_0 \circ s = s' \circ \eta_1 \quad y \quad \eta_0 \circ t = t' \circ \eta_1,$$

es decir, tales que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_1 & \xrightarrow{s} & \Gamma_0 \\ {\scriptstyle \eta_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \eta_0} \\ \Delta_1 & \xrightarrow[s']{} & \Delta_0 \end{array}, \qquad \begin{array}{ccc} \Gamma_1 & \xrightarrow{t} & \Gamma_0 \\ {\scriptstyle \eta_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \eta_0} \\ \Delta_1 & \xrightarrow[t']{} & \Delta_0 \end{array}.$$

De manera más intuitiva, un morfismo de carcajes es un par de funciones que "preservan la estructura de carcaj". Esto significa que una arista es enviada en otra arista preservando su orientación.

EJEMPLOS 18. (1) Si $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1, s, t)$ es un carcaj y $\Gamma' = (\Gamma_0', \Gamma_1', s', t')$ es un subcarcaj de Γ, entonces existen las inclusiones canónicas $\iota_0 : \Gamma_0' \to \Gamma_0$ y $\iota : \Gamma_1' \to \Gamma_1$. Entonces $\iota = (\iota_0, \iota_1) : \Gamma' \to \Gamma$ es un morfismo de carcajes.

(2) Si $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1, s, t)$ es un carcaj donde $\Gamma_1 = \emptyset$, y $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1, s', t')$ es otro carcaj, entonces toda función $\eta_0 : \Gamma_0 \to \Delta_0$ define un morfismo de carcajes al poner $\eta = (\eta_0, \emptyset)$, siendo $\emptyset$ la función vacía.

(3) Sea Δ el carcaj

$$\alpha \circlearrowright 1,$$

aquí $\Delta_0 = \{1\}$ y $\Delta_1 = \{\alpha\}$ y $s(\alpha) = t(\alpha) = 1$.

Dado un carcaj $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1, s, t)$, las funciones constantes $\eta_0 : \Gamma_0 \to \Delta_0$ y $\eta_1 : \Gamma_1 \to \Delta_1$ definen un morfismo de carcajes $\eta = (\eta_1, \eta_2) : \Gamma \to \Delta$.

DEFINICIÓN 3.6. *Sea $\eta = (\eta_0, \eta_1) : \Gamma \to \Delta$ un morfismo de carcajes. η se dice pleno si para todo par de vértices $x, y \in \Gamma_0$ y toda arista $\alpha \in \Delta_1$ de $\eta_0(x)$ a $\eta_0(y)$ existe una arista $\beta \in \Gamma_1$ de x a y tal que $\eta_1(\beta) = \alpha$.*

η se dice fiel si para todo par de vértices $x, x' \in \Gamma_0$ y todo par de aristas $\alpha, \alpha' \in \Gamma_1$ de x a x', la igualdad $\eta_1(\alpha) = \eta_1(\alpha')$ implica la igualdad $\alpha = \alpha'$.

Evidentemente la composición de morfismos plenos (respectivamente fieles) es un morfismo pleno (respectivamente fiel).

DEFINICIÓN 3.7. *Sean $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1, s, t)$ un carcaj y $x, y \in \Gamma_0$. Un camino de x a y es una secuencia finita $x = x_0, \ldots, x_n = y \in \Gamma_0$ tal que para cada $i \in \{1, ..., n\}$ el conjunto $\Gamma(x_{i-1}, x_i) \cup \Gamma(x_i, x_{i-1})$ es no vacío.*

Si para cada $i \in \{1, ..., n\}$ se elige $\alpha_i \in \Gamma(x_{i-1}, x_i) \cup \Gamma(x_i, x_{i-1})$, también se dice que $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ es un camino de x a y.

Un ciclo sobre x es un camino de x a x.

Al conjunto de los caminos $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ de x a y se lo nota por ${}_w\Gamma(x, y)$ y al de todos los caminos en Γ por W_Γ. Claramente

$$W_\Gamma = \bigcup_{x,y \in \Gamma_0} {}_w\Gamma(x, y).$$

OBSERVACIÓN 14. La terminología empleada no debe dar lugar a confusión: En un camino orientado se exige un *sentido* de orientación a las aristas, en la de camino (no orientado) no se exige esto. En particular, todo camino orientado es un camino. Más aún, si x, y son dos vértices en un carcaj Γ, entonces

$$\Gamma(x, y) \subseteq {}_w\Gamma(x, y).$$

EJEMPLO 19. Considérese nuevamente el carcaj del ejemplo 17. Aquí $1, 3, 4, 1$, o, equivalentemente, $\gamma\delta\epsilon$ es un ciclo sobre 1, y α y $\beta\gamma$ son caminos de 2 a 1. En cambio α y γ, β son caminos de 1 a 2.

DEFINICIÓN 3.8. *Un carcaj Γ se dice débilmente conexo (o conexo) si para todo par de* *vértices x, y el conjunto ${}_w\Gamma(x, y)$ es no vacío. Γ se dice* fuertemente conexo *si para todo par de vértices x, y el conjunto $\Gamma(x, y)$ es no vacío.*

OBSERVACIÓN 15. De la definición anterior y la observación 14 se sigue que todo carcaj fuertemente conexo es débilmente conexo.

EJEMPLO 20. Los carcajes

$$\begin{tikzcd} & 2 & & & 2 \arrow[dl, "\alpha"'] \\ 1 \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dr, "\beta"'] & & \text{y} & 1 \arrow[dr, "\beta"'] & \\ & 3 & & & 3 \end{tikzcd}$$

son débilmente conexos pero no fuertemente conexos. Por otro lado, los carcajes

$$\begin{tikzcd} & 2 \arrow[dl, "\alpha"'] & & & 2 \arrow[dl, bend right, "\alpha"'] \\ 1 \arrow[dr, "\beta"'] & & \text{y} & 1 \arrow[ur, bend right, "\gamma"'] \arrow[dr, bend right, "\beta"'] & \\ & 3 \arrow[uu, "\gamma"'] & & & 3 \arrow[ul, bend right, "\delta"'] \end{tikzcd}$$

son fuertemente conexos. El carcaj

$$\begin{tikzcd} & & 2 \arrow[dd, bend right, "\alpha"'] \\ 4 & 1 \arrow[l, "\gamma"'] & \\ & & 3 \arrow[uu, bend right, "\beta"'] \end{tikzcd}$$

no es débilmente conexo y por ende no es fuertemente conexo.

DEFINICIÓN 3.9. *Sea Γ un carcaj. Un subcarcaj Γ' se dice un* subcarcaj conexo maximal *si Γ' es conexo y si dado otro subcarcaj $\Gamma'' \subseteq \Gamma$ conexo tal que $\Gamma' \subseteq \Gamma''$, entonces $\Gamma' = \Gamma''$.*

LEMA 3.1. *Sea $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1, s, t)$ un carcaj. Para cada $x, y \in \Gamma_0$ definimos*

$$x \sim y \Leftrightarrow x = y \text{ o } {}_w\Gamma(x, y) \neq \emptyset.$$

Entonces $\sim$ es una relación de equivalencia sobre Γ_0.

Demostración. La relación es reflexiva por definición. Si $x \sim y$ existen dos posibilidades:

(i) Si $x = y$ entonces $y = x$ y por ende $y \sim x$.

(ii) Si ${}_w\Gamma(x, y) \neq \emptyset$, sea $x = x_0, \ldots, x_n = y$ un camino de x a y, entonces por definición existe $\alpha_i \in \Gamma(x_{i-1}, x_i) \cup \Gamma(x_i, x_{i-1})$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Se sigue que $y = y_n, y_{n-1}, \ldots, x_1, x_0 = x$ es un camino de y a x. Así $y \sim x$.

Esto prueba que $\sim$ es simétrica. Finalmente, supóngase que $x \sim y$ y $y \sim z$. Si $x = y$ o $y = z$, entonces claramente $x \sim z$. Por ende, se supone que ${}_w\Gamma(x, y) \neq \emptyset \neq {}_w\Gamma(y, z)$. Sea $x = x_0, \ldots, x_n = y$ un camino de x a y y $y = y_0, \ldots, y_m = z$ un camino de y a z. Entonces $x = x_0, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m = z$ es un camino de x a z y por ende $x \sim z$. $\square$

LEMA 3.2. *Sea Γ un carcaj, x un vértice de Γ y $[x]_0 \subseteq \Gamma_0$ la clase de equivalencia representada por x. Si*

$$[x]_1 = \{\alpha \in \Gamma_1 : s(\alpha) \in [x]_0\},$$

entonces $[x] = ([x]_0, [x]_1, s|_{[x]_1}, t|_{[x]_1})$ es un subcarcaj conexo maximal de Γ.

Demostración. Para probar que $[x]$ es un subcarcaj, basta probar que $t(\alpha) \in [x]_0$ para todo $\alpha \in [x]_1$. Sea $y = t(\alpha) \notin [x]_0$, con $\alpha \in [x]_1$, entonces α es un camino de x a y, es decir, $\alpha \in {}_w\Gamma(x, y)$, y por ende $x \sim y$, lo que implica que $y \in [x]_0$.

Ahora, nótese que

$$\Gamma(u, v) = [x](u, v)$$

para todo $u, v \in [x]_0$. En efecto, si $\alpha_1 \cdots \alpha_n \in \Gamma(u, v)$, como α_1 es un camino de u a algún punto x_1, entonces $\alpha_1 \in [x]_1$ y por ende $x_1 \in [x]_0$. Repitiendo el mismo argumento, α_2 es un camino de $x_1 \in [x]_0$ a algún punto x_2, por lo que $\alpha_2 \in [x]_1$ y $x_2 \in [x]_0$. Procediendo recursivamente se sigue que $\alpha_i \in [x]_1$ para todo $i \in \{1, ..., n\}$ y así $\alpha_1 \cdots \alpha_n \in [u](u, v)$. La inclusión contraria es trivial.

A continuación se verifica que $[x]$ es conexo. En efecto, si $u, v \in [x]_0$, entonces $u \sim x$ y $x \sim v$, por lo que $u \sim v$, pues la relación $\sim$ es transitiva. Con esto, ${}_w\Gamma(u, v) \neq \emptyset$, y por ende $[x]$ es conexo.

Finalmente, sea Δ un subcarcaj conexo de Γ tal que $[x] \subseteq \Delta$. Razonando por reducción al absurdo, sea $u \in \Delta_0 \setminus [x]_0$. Como $x \in [x]_0 \subseteq \Delta_0$ y Δ es conexo, se sigue que ${}_w\Delta(x, u) \neq \emptyset$, lo que implica que ${}_w\Gamma(x, u) \neq \emptyset$ y por lo tanto que $x \sim u$. Pero esto contradice que $u \notin [x]_0$, y por ende $\Delta_0 = [x]_0$. Sea ahora $\alpha \in \Delta_1$, como

$s(\alpha) \in \Delta_0 = [x]_0$ se sigue que $\alpha \in [x]_1$. Esto prueba que $\Delta = [x]_1$ y por ende que $[x] = \Delta$. $\square$

LEMA 3.3. *Si Δ es un subcarcaj conexo de Γ, entonces $\Delta \subseteq [x]$ para todo $x \in \Delta_0$.*

Demostración. Sea $x \in \Delta_0$. Para cada $y \in \Delta_0$ se tiene que ${}_w\Delta(x,y) \neq \emptyset$, por lo tanto ${}_w\Gamma(x,y) \neq \emptyset$, y esto implica que $x \sim y$. Así $y \in [x]_0$ y por ende $\Delta_0 \subseteq [x]_0$. Ahora, si $\alpha \in \Delta_1$, sea $y = s(\alpha) \in \Delta_0$. Como Δ es conexo, se tiene que ${}_w\Gamma(x,y) \supseteq {}_w\Delta(x,y) \neq \emptyset$, y por ende $x \sim y$, es decir, $y \in [x]_0$. Esto prueba que $\Delta \subseteq [x]$. $\square$

TEOREMA 3.4. *La colección de todos los subcarcajes conexos maximales de un carcaj Γ son una partición de Γ. Más aún, todo subcarcaj conexo de Γ está contenido en un subcarcaj conexo maximal.*

Demostración. El lema anterior implica que si Δ es un subcarcaj conexo maximal de Γ, entonces $\Delta \subseteq [x]$, y por maximalidad, $\Delta = [x]$. Así, la colección de todos los subcarcajes conexos maximales de Γ es $([x])_{x\in\Gamma_0}$. Puesto que $([x]_0)_{x\in\Gamma_0} = \Gamma_0/\sim$, se sigue que $([x]_0)_{x\in\Gamma_0}$ es una partición de Γ_0. Ahora, si $\alpha \in \Gamma$ y $x = s(\alpha)$, por definición $\alpha \in [x]_1$. Si $[x]_1 \cap [y]_1 \neq \emptyset$, sea $\alpha \in [x]_1 \cap [y]_1$, entonces $u = s(\alpha) \in [x]_0 \cap [y]_0$, lo que implica que $x \sim u$ y $y \sim u$, y por transitividad, $x \sim y$, es decir, $[x]_1 = [y]_1$. Esto prueba que $([x]_1)_{x\in\Gamma_0}$ es una partición de Γ_1. Así, $([x])_{x\in\Gamma_0}$ es una partición de Γ.

Que todo subcarcaj conexo está contenido en un subcarcaj conexo maximal es consecuencia inmediata del lema anterior y de la observación realizada al inicio de la demostración. $\square$

DEFINICIÓN 3.10. *Sea Γ un carcaj. A los subcarcajes conexos maximales de Γ los llamaremos las componentes conexas de Γ.*

COROLARIO 3.5. *Un carcaj es conexo si y sólo si posee una única componente conexa. Más aún, de ser el caso, el mismo carcaj es su única componente conexa.*

OBSERVACIÓN 16. Puesto que será útil a futuro, si Γ es un carcaj y α es una arista que inicia en x y termina en y, se escribirá $\alpha : x \to y$ o $x \xrightarrow{\alpha} y$.

A continuación, dado un carcaj $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1, s, t)$ se construirá un complejo celular $|\Gamma|$ de dimensión 1. Para cada $x \in \Gamma_0$, sea Δ^0_x una 0-célula, y para cada $\alpha \in \Gamma_1$, sea Δ^1_α una 1-célula.

(1) $X^0 = \coprod_{x\in\Gamma_0} \Delta^0_x$. Evidentemente X^0 está equipado con la topología discreta. Además se identifica a X^0 con Γ_0 como conjuntos.

(2) Si $\alpha : x \to y$ es una arista en Γ_1, sea $f_\alpha : \partial\Delta^1_\alpha \to X^0$ definida por $f_\alpha(s(\alpha)) = \Delta^0_{s(\alpha)}$ y $f_\alpha(t(\alpha)) = \Delta_{t(\alpha)}$. Entonces, si

$$Z = \coprod_{\alpha\in\Gamma_1} \partial\Delta^1_\alpha \subseteq \coprod_{\alpha\in\Gamma_1} \Delta^1_\alpha,$$

se tiene la existencia de una función $f : Z \to X^0$ que se obtiene aplicando el lema del pegado a las funciones f_α. Con esto

$$X^1 = \left(\coprod_{\alpha\in\Gamma_1} \Delta^1_\alpha\right) \amalg_f X^0$$

Se define entonces $|\Gamma| = X^1$.

Definición 3.11. *Dado un carcaj Γ, al complejo celular $|\Gamma|$ se lo llama la* realización geométrica *del carcaj Γ, o* grafo *asociado a Γ.*

Más generalmente, un grafo *es un complejo celular de dimensión 1; un grafo se dice* conexo *si es conexo como espacio topológico. Un* subgrafo *es un subcomplejo de un grafo. Un* árbol *es un subgrafo contractible. Finalmente, un árbol se dice* árbol generador *si contiene a todos los vértices del grafo.*

Lema 3.6. *Sea X un grafo conexo y X_0 un subgrafo de X, entonces existe un subgrafo Y de X que contiene a todos los vértices de X tal que X_0 es un retracto por deformación de Y.*

Demostración. Se construye una sucesión $X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq \cdots$ de subgrafos de X recursivamente: Construido X_n, el subgrafo X_{n+1} se obtiene como

$$X_{n+1} = X_n \cup \bigcup_{\substack{e_\alpha \subseteq X\setminus X_n \\ \partial e_\alpha \cap X_n \neq \emptyset}} \overline{e_\alpha},$$

siendo e_α las 1-células de X. Sea $X' = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$. X' es abierto en X pues si $x \in X_n$ para algún n, existe una vecindad suficientemente pequeña de x contenida en X_{n+1} gracias a la construcción. X' es cerrado gracias a que es unión de las clausuras de 1-células de X. Por ende, ya que X es conexo, $X = X'$.

Sea ahora $Y_0 = X_0$ y asumiendo construido Y_n, sea Y_{n+1} obtenido a partir de Y_n por la adjunción de una 1-célula por cada vértice de $X_{n+1} \setminus X_n$ tal que cada una de dichas células tiene a uno de sus vértices de frontera como un vértice en Y_n y al otro como un vértice en $X_{n+1} \setminus X_n$. De este modo, Y_{n+1} es un rectracto por deformación de Y_n. En efecto, dada una 1-célula e_α con las propiedades mencionadas, existe un homeomorfismo $\varphi_\alpha : [0,1] \to e_\alpha$. Se define entonces $f_t^n : Y_{n+1} \to Y_{n+1}$ del siguiente modo:

$$f_t^n|_{Y_n} = \mathbb{1}_{Y_n} \quad \text{y} \quad f_t|_{e_\alpha}(x) = \varphi_\alpha((1-t)\varphi_\alpha^{-1}(x)),$$

siendo e_α las 1-células mencionadas previamente. Por el lema del pegado, esta definición es legítima, y f_t^n es una homotopía que retracta por deformación a Y_{n+1} hacia Y_n. De este modo, se define para $x \in Y_{n+1} \setminus Y_n$

$$f_t(x) = f^n_{2^{n+1}t-1}(x), \quad \text{si } t \in [2^{-(n+1)}, 2^{-n}]$$

y si $x \in Y_0 = X_0$, $f_t(x) = x$. Con esto, se obtiene una homotopía que muestra que $Y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n$ se retracta por deformación hacia X_0. Además, por construcción, es claro que Y posee todos los vértices de X. Esto completa la demostración del lema. □

TEOREMA 3.7. *Todo árbol en un grafo conexo está contenido en un árbol maximal. En particular, todo grafo conexo posee un árbol maximal.*

Demostración. Sea X un grafo conexo y X_0 un árbol de X. Por el lema anterior, existe un subgrafo Y de X que contiene a todos los vértices de X tal que Y se retracta por deformación hacia X_0, pero como X_0 es contractible, se tiene que Y es contractible. Así Y es un árbol maximal que contiene a X_0.

La segunda afirmación se sigue de considerar X_0 conformado por un solo vértice del grafo. □

Si X es un grafo conexo y $T \subseteq X$ es un árbol maximal, se denotará por $F(X,T)$ al grupo libre con base el conjunto de todas las clases $[e_\alpha]$ donde e_α es una 1-célula que no está contenida en T.

TEOREMA 3.8. *Sea X un grafo conexo, x_0 un vértice y T un árbol maximal de X que se contrae a x_0. Entonces*

$$\pi_1(X, x_0) \cong F(X,T).$$

Demostración. Por el Corolario 2.35, la aplicación cociente $\pi : X \to X/T$ es una equivalencia homotópica. Esto implica que

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X/T, \overline{x_0}),$$

siendo $\overline{x_0}$ la imagen de x_0 en X/T, o equivalentemente, $\{\overline{x_0}\} = \pi(T)$. Por ende el problema se reduce a probar que

$$\pi_1(X/T, \overline{x_0}) \cong F(X, T).$$

Sea $\{e_\alpha\}$ la colección de todas las 1-células de X que no están en T. Para cada α, sea S^1_α una copia de S^1 y sean $f_\alpha : \{*\} \to S^1_\alpha$ funciones, donde $\{*\}$ es un espacio de un solo punto. Si X' es la adjunción de la familia S^1_α vía f_α, se tiene que los espacios X/T y X' son homeomorfos. Esto es claro pues la imagen de cada e_α en X/T se aplica homeomórficamente en S^1_α. Para cada α, sea x_α un punto distinto de la imagen de $\{*\}$ en X' que pertenece a la imagen de S^1_α en X', y sea $V = X' \setminus \{x_\alpha\}_\alpha$. Se tiene entonces que V es una vecindad abierta de la imagen de $\{*\}$ en X' y además V es contractible (pues geométricamente, V es la unión de copias de $[0,1]$ todas pegadas en un sólo extremo). Se sigue que $(S^1_\alpha \cup V, V)$ es un recubrimiento abierto de X'. De este modo, por el teorema de Seifert-van Kampen, se sigue que $\pi_1(X', *')$ es isomorfo al producto libre de tantas copias de $\mathbb{Z}$ como α's están en consideración. Esto claramente implica el resultado. □

Este teorema legitimiza la definición de primer grupo fundamental de un carcaj que se dará en breve. Antes, es importante recalcar unas nociones en los carcajes análogas al caso topológico: Un *árbol* en un carcaj es un subcarcaj que no contiene ciclos (ni orientados ni no orientados, estos últimos entendidos en la forma obvia). Un *árbol se dice maximal* si contiene a todos los vértices del carcaj.

DEFINICIÓN 3.12. *Sea Γ un carcaj conexo, T un árbol maximal de Γ y x_0 un vértice. Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ son aristas de Γ que no yacen en T, entonces se define $\pi_1(\Gamma, x_0)$ como el grupo libre con base $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.*

COROLARIO 3.9. *Sea Γ un carcaj conexo, x_0 un vértice de Γ y $|x_0|$ su imagen en $|\Gamma|$. Entonces*

$$\pi_1(\Gamma, x_0) \cong \pi_1(|\Gamma|, |x_0|).$$

EJEMPLO 21. Sea Γ el carcaj

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend left, "\alpha"] \arrow[r, bend right, "\beta"'] & 2 \end{tikzcd}$$

es claro que $|\Gamma| \cong S^1$, y por ende

$$\pi_1(\Gamma, 1) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}.$$

Ahora, si se considera el árbol maximal

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend right, "\beta"] & 2 \end{tikzcd}$$

entonces $\pi_1(\Gamma, 1)$ es el grupo libre generado por α, es decir

$$\pi_1(\Gamma, 1) = \{\ldots, \alpha^{-2}, \alpha^{-1}, 1, \alpha, \alpha^2, \ldots\}$$

y es claro que la función $n \mapsto \alpha^n$ de $\mathbb{Z}$ hacia $\pi_1(\Gamma, 1)$ es un isomorfismo de grupos, lo que corrobora la afirmación anterior.

Los mismos resultados se obtienen al sustituir el vértice 1 por 2 o la arista α por β.

EJEMPLO 22. Sea Γ el carcaj

$$\begin{tikzcd} & 3 \\ 1 \arrow[ur, bend left, "\beta"] \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, bend right, "\gamma"'] & 2 \arrow[u, "\delta"'] \arrow[d, "\epsilon"] \\ & 4 \end{tikzcd}$$

Dado que el subcarcaj

$$\begin{tikzcd} & 3 \\ 1 \arrow[r, "\alpha"] & 2 \arrow[u, "\delta"'] \arrow[d, "\epsilon"] \\ & 4 \end{tikzcd}$$

es un árbol maximal en Γ, se tiene que $\pi_1(\Gamma, 1)$ es el grupo libre con base β y γ, el mismo que es claramente isomorfo a $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.

Visto de otro modo, se tiene que $|\Gamma|$ es del mismo tipo de homotopía que el espacio con forma de 8, es decir, dos circunferencias pegadas en un punto. Se puede hacer uso del teorema de van Kampen para calcular su grupo de homotopía: Para ello se considera el recubrimiento $U, V, U \cap V$, donde U es la figura 8 salvo algún punto de la circunferencia inferior distinto del punto donde estas se pegan, V es la figura 8 salvo un punto situado en la circunferencia superior, nuevamente distinto del punto donde las circunferencias se pegan. De este modo $U \cap V$ es contractible y tanto U como V se retractan por deformación hacia S^1. De este modo el teorema de van Kampen implica que

$$\pi_1(|\Gamma|, 1) \cong \pi_1(U) * \pi_1(V) \cong \pi_1(S^1) * \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$$

PROPOSICIÓN 3.10. *Si x_0, y_0 son dos vértices de un carcaj conexo Γ, entonces*

$$\pi_1(\Gamma, x_0) \cong \pi_1(\Gamma, y_0).$$

Demostración. Es inmediato del Corolario 3.9. □

3.2. Álgebras de caminos

Durante toda esta sección $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1, s, t)$ será un carcaj finito y k un campo algebraicamente cerrado. Sea $k\Gamma$ el k-módulo libre (k-espacio vectorial) con base $W' = C_\Gamma \cup \{e_x : x \in \Gamma_0\}$, siendo e_x símbolos que no pertenecen a Γ_1. Se considera que e_x es una "arista" de x hacia x y se lo denomina el *camino orientado trivial sobre* x. Dados dos caminos orientados $\alpha, \beta \in C_\Gamma$ se define

$$\alpha\beta = \begin{cases} \alpha_1 \cdots \alpha_n \beta_1 \cdots \beta_m & \text{si } t(\alpha) = s(\beta) \\ 0 \text{ en caso contrario} \end{cases}$$

donde $\alpha = \alpha_1 \cdots \alpha_n$ y $\beta = \beta_1 \cdots \beta_m$ es la expresión de α y β como concatenación de aristas. También, si $\alpha \in C_\Gamma$ y $x \in \Gamma_0$, entonces

$$\alpha e_x = \begin{cases} \alpha & \text{si } t(\alpha) = x \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \qquad e_x\alpha = \begin{cases} \alpha & \text{si } s(\alpha) = x \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

y $e_x e_y = 0$ si $y \neq x$ y $e_x e_x = e_x$.

Esta operación se extiende, gracias al Teorema 1.30, a todo $k\Gamma$, dotándolo de una estructura de álgebra asociativa unital, donde

$$e = \sum_{x \in \Gamma_0} e_x$$

es el neutro para el producto del álgebra.

DEFINICIÓN 3.13. *A $k\Gamma$ se lo llama el álgebra de caminos del carcaj Γ sobre k.*

TEOREMA 3.11. *$k\Gamma$ es un álgebra finitamente generada si y sólo si Γ es (finito y) acíclico.*

Demostración. Supóngase que Γ es acíclico. Si Γ_1 posee n elementos, como C_Γ se inyecta en el conjunto de todos los subconjuntos de Γ_0, se tiene que $\dim_k(k\Gamma) \leq 2^n + |\Gamma_0|$ (el número $|\Gamma_0|$ se añade por la presencia de los caminos triviales e_x), lo que implica que $k\Gamma$ es de dimensión finita. Recíprocamente, Γ posee un ciclo orientado, digamos $\alpha = \alpha_1 \cdots \alpha_n$, entonces $\alpha, \alpha\alpha, \alpha\alpha\alpha, \ldots$ son elementos linealmente independientes, por lo que $\dim_k(k\Gamma) = +\infty$. $\square$

PROPOSICIÓN 3.12. *Se tiene la identidad*

$$k\Gamma = \bigoplus_{x,y \in \Gamma_0} e_x k\Gamma e_y.$$

A dicha expresión se la conoce como la descomposición de Peirce[1] *del álgebra $k\Gamma$. Dado $\alpha \in k\Gamma$, existen únicos elementos $\alpha_{xy} \in e_x k\Gamma e_y$ para cada $x, y \in \Gamma_0$ tales que*

$$\alpha = \sum_{x,y \in \Gamma_0} \alpha_{xy}.$$

A esta expresión se la llama la descomposición de Peirce de α.

Más aún, si $C_1, \ldots, C_n$ son los conjuntos de vértices de las componentes conexas de Γ, entonces los conjuntos

$$A_i = \bigoplus_{x,y \in C_i} e_x k\Gamma e_y$$

son ideales de $k\Gamma$ y verifican que

$$Z(k\Gamma) = \bigoplus_{i=1}^{n} Z(A_i).$$

Demostración. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, sea

$$e_i = \sum_{x \in C_i} e_x.$$

Se tiene que $e_1, \ldots, e_n$ conforman una familia de idempotentes centrales ortogonales y que $e = e_1 + \cdots + e_n$. Sea $\alpha \in k\Gamma$, es claro que

$$\alpha = e\alpha e = \sum_{x,y \in \Gamma_0}^{n} e_x \alpha e_y.$$

Ahora, sean $x_0, y_0 \in \Gamma_0$ y sea $\alpha \neq 0$ un camino en Γ tal que

$$\alpha \in e_{x_0} \mathcal{A} e_{y_0} \cap \sum_{\substack{x,y \in \Gamma_0 \\ (x,y) \neq (x_0,y_0)}} e_x \mathcal{A} e_y.$$

Entonces $s(\alpha) = x_0$ y $t(\alpha) = y_0$, lo que no es posible pues α también pertenece a la suma de la expresión anterior. Si $\alpha \neq 0$ no es un camino, se escribe $\alpha =$

[1] Benjamin Peirce (1809-1880), matemático estadounidense.

$a_1\alpha_1 + \cdots + a_m\alpha_m$, con α_i un camino para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, y se aplica el anterior razonamiento a cada α_i. De este modo

$$e_{x_0}\mathcal{A}e_{y_0} \cap \sum_{\substack{x,y\in\Gamma_0 \\ (x,y)\neq(x_0,y_0)}} e_x\mathcal{A}e_y = \{0\}$$

y consecuentemente

$$k\Gamma = \bigoplus_{x,y\in\Gamma_0} e_x k\Gamma e_y.$$

Sea $i \in \{1, \ldots, n\}$ fijo y $\alpha \in k\Gamma$. Por lo anterior existen únicos $\alpha_{xy} \in e_x k\Gamma e_y$ tales que

$$\alpha = \sum_{x,y\in\Gamma_0} \alpha_{xy}.$$

Si $\beta \in A_i$, existe únicos β_{uv} para cada $u, v \in C_i$ tales que

$$\beta = \sum_{u,v\in C_i} \beta_{uv}.$$

Se tiene que $\alpha_{xy} = e_x\gamma_{xy}e_y$ y $\beta_{uv} = e_u\delta_{uv}e_v$, con $\gamma_{x,y}, \delta_{uv} \in k\Gamma$.

$$\alpha\beta = \left(\sum_{x,y\in\Gamma_0} \alpha_{xy}\right)\left(\sum_{u,v\in C_i} \beta_{uv}\right) = \sum_{x,y}\sum_{u,v\in C_i} e_x\gamma_{xy}e_y e_u\delta_{uv}e_v.$$

Puesto que $e_y e_u = 0$ si $y \neq u$, y $e_x\gamma_{xy}e_y = 0$ si x e y no pertenecen a la misma componente conexa de Γ, se sigue que

$$\alpha\beta = \sum_{x,u,v\in C_i} e_x\gamma_{xu}e_u\delta_{uv}e_v \in A_i,$$

de modo que A_i es un ideal izquierdo. Del mismo modo se tiene que A_i es ideal derecho y por ende es un ideal de $k\Gamma$.

Nótese que si x e y pertenecen a distintas componentes conexas de Γ, entonces $e_x\mathcal{A}e_y = 0$. Esto permite concluir que

$$k\Gamma = \bigoplus_{i=1}^{n} A_i,$$

y consecuentemente que

$$Z(k\Gamma) = \bigoplus_{i=1}^{n} Z(A_i).$$

$\square$

COROLARIO 3.13. *Se tiene que*

$$Z(k\Gamma) \subseteq \bigoplus_{x\in\Gamma_0} e_x \mathcal{A} e_x.$$

Demostración. Es una consecuencia inmediata de la proposición anterior y del Teorema 1.33. $\square$

Gracias a este corolario, si $\alpha \in Z(k\Gamma)$, la descomposición de Peirce de α puede escribirse de manera única como

$$\alpha = \sum_{x\in\Gamma_0} \alpha_x$$

con $\alpha_x \in e_x\mathcal{A}e_x$ para cada $x \in \Gamma_0$.

DEFINICIÓN 3.14. *Al ideal $F = (C_\Gamma)$ generado por todos los caminos orientados de Γ se lo llama el ideal fundamental de $k\Gamma$. Un ideal I de $k\Gamma$ se dice un ideal admisible si existe un entero $m \geq 2$ tal que $F^m \subseteq I \subseteq F^2$. En este caso, al par (Γ, I) se lo llama un carcaj ligado.*

Si (Γ, I) es un carcaj ligado y $x, y \in \Gamma_0$, entonces $k\Gamma(x,y)$ denotará el k-módulo libre con base todos los caminos orientados de x a y, e $I(x,y) = I \cap k\Gamma(x,y)$. Un camino α de x a y se dice un camino no nulo si $\alpha \notin I(x,y)$.

Si $x, y \in \Gamma_0$, una combinación lineal $\rho = \sum_{i=1}^{m} a_i\alpha_i \in I(x,y)$, donde $a_i \in k$ y α_i son caminos orientados de x a y, se dice una relación minimal si $m \geq 2$ y si para todo $J \subsetneq \{1,\ldots,m\}$, $\sum_{i\in J} a_i\alpha_i \notin I(x,y)$.

En lo que resta de la sección, Γ será un carcaj conexo y (Γ, I) un carcaj ligado. A continuación se procede a definir una relación de equivalencia en el conjunto de caminos (no orientados) de Γ: Se denota por $\sim$ a la relación de equivalencia más pequeña que satisface:

(1) Para cada arista α de x hacia y, se verifica $\alpha\alpha^{-1} \sim e_x$ y $\alpha^{-1}\alpha \sim e_y$. (Aquí α^{-1} representa la arista α recorrida en sentido contrario, lo que es lícito pues se está lidiando con caminos no orientados).

(2) Para cada relación minimal $\sum_{i=1}^{m} a_i\alpha_i$ se verifica que $\alpha_i \sim \alpha_j$ para todo $i, j \in \{1,\ldots,m\}$.

(3) Si u, v, w, w' son caminos (no orientados) y si $u \sim v$, entonces $wuw' \sim wvw'$ siempre que las composiciones están definidas.

DEFINICIÓN 3.15. *Dos caminos u, v en carcaj ligado se dicen homotópicos si $u \sim v$. Se notará por $\tilde{w}$ a la clase de equivalencia de un camino w.*

A continuación se define una nueva relación $\sim_\circ$ entre caminos orientados. Dados dos caminos orientados paralelos α, β (i.e. $s(\alpha) = s(\beta)$ y $t(\alpha) = t(\beta)$), se tiene que $\alpha \sim_\circ \beta$ si $\alpha = \beta$ o si existe una secuencia finita $\alpha = \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_s = \beta$ de caminos paralelos tales que para cada $i \in \{1, \ldots, s\}$ existen caminos u_i, v_i, v_i' y w_i tales que $\alpha_i = u_i v_i w_i$ y $\alpha_{i+1} = u_i v_i' w_i$, de tal modo que v_i y v_i' pertenezcan a una misma relación minimal.

DEFINICIÓN 3.16. *Dados dos caminos orientados paralelos α, β, se dice que α es naturalmente homotópico a β si $\alpha \sim_\circ \beta$. Se denota por $\tilde{\alpha}^\circ$ a la clase de equivalencia de un camino orientado α.*

PROPOSICIÓN 3.14. *La relación $\sim_\circ$ es la relación de equivalencia más pequeña que satisface las condiciones (2) y (3) anteriores.*

Demostración. Se prueba primero que $\sim_\circ$ verifica (2). Para ello sean $x, y \in \Gamma_0$ y $\sum_{i=1}^{m} a_i \alpha_i \in I(x, y)$ una relación minimal en $k\Gamma$. Entonces, dados α_{i_0} y α_{j_0} con $i_0 < j_0$, se definen $u_i = e_x$, $w_i = e_y$, $v_i = \alpha_i$ y $v_i' = \alpha_{i+1}$, de tal modo que $\alpha_i = u_i v_i w_i$ y $\alpha_{i+1} = u_i v_i' w_i$ y $\alpha_{i_0}, \alpha_{i_0+1}, \ldots, \alpha_{j_0}$ es la secuencia deseada. Por ende $\alpha_{i_0} \sim_\circ \alpha_{j_0}$ para todo $i_0, j_0 \in \{1, \ldots, m\}$.

Sean α, β dos caminos orientados paralelos tales que $\alpha \sim_\circ \beta$ y γ, γ' dos caminos orientados tales que los productos $\gamma\alpha\gamma'$ y $\gamma\beta\gamma'$ están definidos. Se requiere probar que $\gamma\alpha\gamma' \sim_\circ \gamma\beta\gamma'$. Para ello se consideran dos casos: Primero, si $\alpha = \beta$ no hay nada que probar. Segundo, existe una secuencia finita e caminos $\alpha = \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_s = \beta$ y para cada $i \in \{1, \ldots, s\}$ caminos orientados u_i, v_i, v_i' y w_i tales que v_i, v_i' pertenecen a una misma relación minimal, $\alpha_i = u_i v_i w_i$ y $\alpha_{i+1} = u_i, v_i' w_i$. Se tiene entonces que $\gamma\alpha_i\gamma' = (\gamma u_i) v_i (w_i \gamma)$ y $\gamma\alpha_{i+1}\gamma' = (\gamma u_i) v_i' (w_i \gamma)$, con lo que $\gamma\alpha\gamma' = \gamma\alpha_0\gamma', \gamma\alpha_1\gamma', \ldots, \gamma\alpha_s\gamma' = \gamma\beta\gamma'$ es la secuencia finita buscada. Así, $\sim_\circ$ verifica la condición (3).

Queda probar que $\sim_\circ$ es la relación de equivalencia más pequeña que verifica estas dos propiedades. Sea $\sim'$ una relación de equivalencia sobre los caminos orientados de Γ que verifica (2) y (3) y sean α, β caminos orientados paralelos tales que $\alpha \sim_\circ \beta$. Se busca probar que $\alpha \sim' \beta$. Eliminando el caso trivial cuando

$\alpha = \beta$, se asume la existencia de una secuencia finita $\alpha = \alpha_0, \alpha_1 \ldots, \alpha_s = \beta$ y para cada $i \in \{1, \ldots, s\}$ caminos orientados u_i, v_i, v_i' y w_i tales que v_i, v_i' pertenecen a una misma relación minimal, $\alpha_i = u_i v_i w_i$ y $\alpha_{i+1} = u_i, v_i' w_i$. Puesto que v_i, vi' pertenecen a la misma relación minimal, se sigue que $v_i \sim' v_i'$, y por la condición (3), $u_i v_i w_i \sim' u_i v_i' w_i$, lo que implica que $\alpha_i \sim' \alpha_{i+1}'$. Puesto que la relación $\sim'$ es transitiva, de esto se deduce que $\alpha = \alpha_0 \sim' \alpha_s = \beta$, como se deseaba. □

COROLARIO 3.15. *La relación $\sim_\circ$ es más fina que $\sim$ sobre los caminos orientados de Γ. Es decir, si α, β son caminos, se verifica que $\alpha \sim_\circ \beta$ implica que $\alpha \sim \beta$.*

EJEMPLO 23. Considérese el carcaj Γ representado por el diagrama

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "\alpha"] & 2 \arrow[r, bend left, "\beta"] \arrow[r, bend right, "\gamma"'] & 3. \end{tikzcd}$$

Su ideal fundamental es

$$F = (\alpha, \beta, \gamma, \alpha\beta, \alpha\gamma),$$

y por ende

$$F^2 = (\alpha\beta, \alpha\gamma) \quad \text{y} \quad F^3 = (0).$$

Se tiene entonces que $I = (\alpha\beta - \alpha\gamma)$ es un ideal admisible, y por ende (Γ, I) es un carcaj ligado. Ahora, $\alpha\beta - \alpha\gamma$ es una relación minimal, por ende $\alpha\beta \sim \alpha\gamma$ y consecuentemente $\alpha^{-1}\alpha\beta \sim \alpha^{-1}\alpha\gamma$, de donde $\beta \sim \gamma$. Sin embargo, $\beta \not\sim_\circ \gamma$, pues de ser el caso, existiría una secuencia finita $\beta = \alpha_0, \alpha_1 \ldots, \alpha_s = \gamma$ y para cada $i \in \{1, \ldots, s\}$ caminos orientados u_i, v_i, v_i' y w_i tales que v_i, v_i' pertenecen a una misma relación minimal, $\alpha_i = u_i v_i w_i$ y $\alpha_{i+1} = u_i, v_i' w_i$. La única posibilidad es que $v_i, v_i' \in \{\beta, \gamma\}$ y consecuentemente u_i y w_i son triviales. Pero en tal caso, no hay relaciones minimales que contengan a β y γ, lo que es absurdo.

Este ejemplo ilustra que la relación $\sim_\circ$ puede ser estrictamente más fina que $\sim$.

OBSERVACIÓN 17. Una pregunta natural en este punto es determinar condiciones bajo las cuales las relaciones $\sim$ y $\sim_\circ$ coinciden. Una respuesta parcial es que esto sucede cuando el álgebra $A = k\Gamma/I$ es *schuriana*, es decir, para todo $x, y \in \Gamma_0$ se verifica $\dim_k(e_x A e_k) \leq 1$.

Tal resultado no será utilizado en este trabajo, por ende no se hace mayor énfasis ni se presenta una demostración de tal hecho.

PROPOSICIÓN 3.16. *Si α es una arista, entonces $\tilde{\alpha}^\circ = \{\alpha\}$.*

Demostración. Puesto que I es un ideal admisible, ninguna arista aparece en ninguna relación minimal. Si $\beta \neq \alpha$ es naturalmente homotópico a α, existe una secuencia finita de caminos paralelos $\alpha = \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_s = \beta$ y caminos u_i, v_i, v_i', w_i tales que v_i, v_i' aparecen en la misma relación minimal $\alpha_i = u_i v_i w_i$ y $\alpha_{i+1} = u_i v_i' w_i$. En particular $\alpha_0 = u_0 v_0 w_0$ y $\alpha_1 = u_0 v_0' w_0$, de modo que como $\alpha_0 = \alpha$ es una arista, se sigue que dos caminos en u_0, v_0, w_0 son triviales. v_0 no puede serlo pues aparece en una relación minimal, de modo que lo son u_0 y w_0. Entonces $\alpha_0 = v_0$ lo que nuevamente es imposible, pues las aristas no aparecen en relaciones minimales. Por ende la única posibilidad es que $\beta = \alpha$, es decir, $\tilde{\alpha}^\circ = \{\alpha\}$. □

DEFINICIÓN 3.17. *Sea x_0 un vértice de Γ y sea $\mathcal{W} \subseteq \pi_1(\Gamma, x_0)$ el conjunto de todos los elementos de la forma $w^{-1}u^{-1}vw$, siendo w un camino (no orientado) de x_0 a x y u, v dos caminos orientados homotópicos de x a y. Entonces se define*

$$N(\Gamma, I, x_0) = N_{\pi_1(\Gamma, x_0)}(\mathcal{W}),$$

es decir, $N(\Gamma, I, x_0)$ es la clausura normal en $\pi_1(\Gamma, x_0)$ del conjunto $\mathcal{W}$. Con esto, el primer grupo fundamental del carcaj ligado (Γ, I) se define como

$$\pi_1(\Gamma, I, x_0) = \pi_1(\Gamma, x_0)/N(\Gamma, I, x_0).$$

Nótese que como Γ es conexo, la definición es independiente de x_0, por lo que se notará $\pi_1(\Gamma, I)$ en lugar de $\pi_1(\Gamma, I, x_0)$.

Ejemplos de estas construcciones serán presentados más adelante, para tratarlos como ejemplos para toda la teoría desarrollada.

Para mayor información en lo que respecta a las álgebras de caminos, se tienen las referencias [6] y [8].

3.3. Teoría de Categorías

En esta sección se definen tres de las estructuras fundamentales de la Teoría de Categorías: las categorías, los funtores y las transformaciones naturales. No se extiende esta teoría ni se la explota en todo su potencial, pues no es este el objetivo de este trabajo.

Una categoría $\mathscr{C}$ se describe de la siguiente manera:

C1. Una colección de *objetos*, notada por $\mathcal{O}(\mathscr{C})$.

C2. Una colección de *flechas* o *morfismos*, notada por $\mathcal{A}(\mathscr{C})$.

C3. Dos operaciones: $\partial_0, \partial_1 : \mathcal{A}(\mathscr{C}) \to \mathcal{O}(\mathscr{C})$ llamadas respectivamente *dominio* y *codominio*.

Si $f \in \mathcal{A}(\mathscr{C})$, $A = \partial_0(f)$ y $B = \partial_1(f)$, se escribe $f : A \to B$ o $A \xrightarrow{f} B$.

C4. Si $f, g \in \mathcal{A}(\mathscr{C})$ son tales que $\partial_1(f) = \partial_0(g)$, existe una flecha h, con $\partial_0(h) = \partial_0(f)$ y $\partial_1(h) = \partial_1(g)$, notada por $h = g \circ f$, llamada la *composición* de f y g. En este caso, f y g se dice que es un *par de flechas componibles*.

C5. La composición es asociativa: Si $\partial_1(f) = \partial_0(g)$ y $\partial_1(g) = \partial_0(h)$ para cualquier tripleta de flechas $f, g, h \in \mathcal{A}(\mathscr{C})$, entonces

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

C6. Para cada objeto $A \in \mathcal{O}(\mathscr{C})$, una flecha $1_A : A \to A$, llamada la *identidad* sobre A, tal que si $f : A \to B$ y $g : C \to A$ son flechas, entonces

$$f \circ 1_A = f \quad \text{y} \quad 1_A \circ g = g.$$

Se suele cometer abusos de notación escribiendo $A \in \mathscr{C}$ o $f \in \mathscr{C}$ siendo A un objeto y f una flecha. Aquí se hará uso de dicho abuso de notación solamente para los objetos, es decir, se escribirá $A \in \mathscr{C}$ cuando realmente se quiere decir $A \in \mathcal{O}(\mathscr{C})$. Si $f \in \mathcal{A}(\mathscr{C})$, se dirá que f es una flecha de $\mathscr{C}$.

Dados dos objetos $A, B \in \mathscr{C}$, a la colección de todas las flechas $f : A \to B$ se la notará por $\mathrm{Hom}(A, B)$ o por $\mathscr{C}(A, B)$. Si $f, g \in \mathrm{Hom}(A, B)$, diremos que f y g son *flechas paralelas*.

OBSERVACIÓN 18. La descripción anterior realmente corresponde a la definición de una *metacategoría*. Una categoría, en un sentido muy riguroso, es una metacategoría en la que sus axiomas se interpretan dentro de la teoría de conjuntos. No se seguirá dicha terminología.

EJEMPLOS 24.

1. *Categoría de los conjuntos.* Esta categoría está dada por la siguiente información:

   - Objetos: conjuntos;
   - Flechas: funciones entre conjuntos;
   - composición: la composición usual de funciones;

- Identidades: las funciones identidad sobre un conjunto.

Es sabido que la composición de funciones es asociativa y que la composición de una función con la identidad devuelve la misma función, de modo que esta es una categoría, a la que se notará por **Set**.

2. *Preórdenes.* Sea X una clase y $\leq$ una relación reflexiva y transitiva sobre X. El par $(X, \leq)$ es llamado *preorden*. Se construye la categoría $X_{\leq}$ (a la que también se la llama preorden) mediante la siguiente información: Sus objetos son los elementos de X, y si $a, b \in X$, se dirá que hay una flecha $f : a \to b$ si $a \leq b$. La composición (así como la asociatividad) está dada por la transitividad del preorden y la identidad por la igualdad.

   Un preorden puede caracterizarse por la siguiente propiedad: Para todo par de objetos $a, b \in X$, $\mathrm{Hom}(a, b)$ tiene a lo más un elemento. En efecto, si $X_{\leq}$ es un preorden, claramente tiene dicha propiedad. Recíprocamente, si $\mathscr{C}$ es una categoría con dicha propiedad, entonces se define sobre $X = \mathcal{O}(\mathscr{C})$ la relación $a \leq b$ si y sólo si existe $f : a \to b$. Se sigue trivialmente que $(X, \leq)$ es un preorden, que como categoría coincide con $\mathscr{C}$.

3. *Monoides.* Sea M una clase y $\eta : M \times M \to M$ una función con las siguientes propiedades: Existe $e \in M$ tal que $\eta(e, m) = \eta(m, e) = m$ para todo $m \in M$ (e se denomina elemento neutro) y, si $m, n, p \in M$, entonces $\eta(m, \eta(n, p)) = \eta(\eta(m, n), p)$ (asociatividad). Al par (M, η) se lo llama un *monoide*. Por simplicidad se escribe mn en lugar de $\eta(m, n)$ y se dice simplemente que M es un monoide. Sea $*$ un símbolo que no es un elemento de M. Se define una categoría M^* cuyo único objeto es $*$ y cuyas flechas son los elementos de M. La flecha identidad es e y la composición de dos flechas m, n está dada por $m \circ n = mn$. Así M^* verifica todas las condiciones para ser una categoría.

   Recíprocamente, si $\mathscr{C}$ es una categoría con un sólo objeto $*$, sea $M = \mathcal{A}(\mathscr{C})$. Si $m, n \in M$, se define $mn = m \circ n$ (esto siempre está definido pues $\mathscr{C}$ posee un solo objeto), y se nota que 1_* cumple el papel del neutro. Entonces M es un monoide.

   De este modo, es lícito caracterizar a los monoides como categorías con un sólo objeto. Nótese que esta construcción concuerda con la presentada en el capítulo 1.

4. *Categoría de los espacios topológicos:* Sea **Top** la categoría cuyos objetos son espacios topológicos cuyas flechas son las funciones continuas. Aquí hay que

aclarar que si X es un conjunto y τ_1 y τ_2 son dos topologías diferentes sobre X, entonces (X, τ_1) y (X, τ_2) son objetos distintos de la categoría **Top**.

5. *Categorías de estructuras algebraicas:* Por **Grp** se representará a la categoría cuyos objetos son grupos y cuyas flechas son homomorfismos de grupos. Si los objetos son grupos abelianos y las flechas son homomorfismos de grupos, entonces se denota a esta categoría por **Ab**. La categoría cuyos objetos son anillos y sus flechas homomorfismos de anillos es la categoría **Ring**. Si R es un anillo con unidad, la categoría de R-módulos izquierdos y homomorfismos de módulos se denota por R-**Mod** y a la categoría de R-módulos derechos por **Mod**-R.

6. *Categoría de carcajes:* Esta es la categoría **Quiv** cuyos objetos son carcajes y sus flechas son morfismos de carcajes.

7. *Categoría uno.* Es la categoría con un solo objeto y una sola flecha, que es la identidad de dicho objeto.

$$\bullet \circlearrowleft 1_{\bullet}$$

   Esta categoría se denota por **1**.

8. *Categoría dos.* Esta categoría posee dos objetos, una identidad para cada uno de ellos y solamente una flecha entre estos dos objetos:

$$\bullet \longrightarrow \bullet$$

   (se omiten las identidades). Se denota por **2**.

9. *Categoría tres.* Está representada por el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & \bullet \arrow[dd] \\ \bullet \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & \bullet \end{tikzcd}$$

   Se nota por **3**.

OBSERVACIÓN 19. Se denotará a la composición $f \circ g$ simplemente como fg. Se debe tener precaución con esta notación, pues ciertos autores como [7] escriben la composición $f \circ g$ como gf.

DEFINICIÓN 3.18. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría y $f : A \to B$ una flecha de $\mathscr{C}$. f se dice*

- *monomorfismo si para todo objeto C y todo par de flechas $g_1, g_2 : C \to A$, la igualdad $fg_1 = fg_2$ implica que $g_1 = g_2$ (es decir, f es cancelable a izquierda).*

- *epimorfismo si para todo objeto C y todo par de flechas $g_1, g_2 : B \to C$, la igualdad $g_1 f = g_2 f$ implica que $g_1 = g_2$ (es decir, f es cancelable a derecha).*

- *isomorfismo si existe $g : B \to A$ tal que $fg = 1_B$ y $gf = 1_A$.*

- *sección si existe $g : B \to A$ tal que $gf = 1_A$. En este caso diremos que g es una inversa por izquierda de f.*

- *retracción si existe $h : B \to A$ tal que $fg = 1_B$. Diremos que g es una inversa por derecha de f.*

PROPOSICIÓN 3.17. *En una categoría cualquiera:*

1. *Toda sección es monomorfismo.*

2. *Toda retracción es epimorfismo.*

3. *Una flecha es isomorfismo si y sólo si es sección y retracción. En particular, todo isomorfismo es monomorfismo y epimorfismo.*

4. *La composición de monomorfismo (resp. epimorfismo, secciones, retracciones, isomorfismos) es un monomorfismo (resp. epimorfismo, sección, retracción, isomorfismo).*

Demostración. 1. Sea $f : A \to B$ una sección, entonces existe $g : B \to A$ tal que $gf = 1_A$. Sean $g_1, g_2 : C \to A$ tales que $fg_1 = fg_2$, entonces $gfg_1 = gfg_2$, por ende $1_A g_1 = 1_A g_2$, de donde $g_1 = g_2$, es decir, f es un monomorfismo.

2. Se prueba de manera similar a 1.

3. Si $f : A \to B$ es un isomorfismo, trivialmente es sección y retracción. Recíprocamente, supóngase que f es sección y retracción. Entonces existen $g, h : B \to A$ tales que $hf = 1_A$ y $fg = 1_B$. Pero tenemos que

$$g = 1_A g = (hf)g = h(fg) = h1_B = h,$$

de modo que $gf = 1_A$ y $fg = 1_B$, es decir, f es isomorfismo.

4. Sean $f : A \to B, g : B \to C$ dos monomorfismos, y sean $g_1, g_2 : D \to A$ dos flechas tales que $(gf)g_1 = (gf)g_2$, entonces $g(fg_1) = g(fg_2)$, pero g es monomorfismo, así $fg_1 = fg_2$, y como f es monomorfismo también, se tiene que $g_1 = g_2$, lo que significa que gf es monomorfismo. Similarmente se prueba para el caso de los epimorfismos.

Ahora supóngase que f y g son secciones, entonces existen $f', g' : B \to A$ tales que $f'f = 1_A$ y $g'g = 1_B$. Se sigue que

$$(f'g')(gf) = f'(g'g)f = f'1_B f = f'f = 1_A,$$

así gf es una sección. Similarmente se procede con las retracciones.

$\square$

EJEMPLOS 25.

1. En **Set** se tiene que f es monomorfismo si y sólo si f es sección si y sólo si f es inyectiva. En efecto, si $f : A \to B$ es inyectiva, para cada $x \in f(A)$ existe un único $y_x \in A$ tal que $f(y_x) = x$. Si $a \in A$ es un elemento fijo, se define $g : B \to A$ mediante

$$g(x) = \begin{cases} y_x & \text{si } x \in f(A) \\ a & \text{si } x \notin f(A). \end{cases}$$

entonces g es una inversa por izquierda para f. En efecto: $g(f(x)) = y_{f(x)}$, pero por definición $f(y_{f(x)}) = f(x)$ y como f es inyectiva, $x = y_{f(x)}$, así $g(f(x)) = x$. Recíprocamente, si g es una inversa a izquierda de f, se tiene que si $f(x) = f(y)$, entonces $gf(x) = gf(y)$, es decir, $1_A(x) = 1_A(y)$, pero por definición de función identidad, esto es $x = y$, con lo que f es inyectiva. Esto prueba que f es sección si y sólo si f es inyectiva.

Por la proposición precedente se sabe que toda sección es monomorfismo. Ahora se debe probar que en **Set** todo monomorfismo es sección. En efecto, sea $f : A \to B$ un monomorfismo. Sean $x, y \in A$, tales que $f(x) = f(y)$. Se define $\overline{x} : A \to A$ y $\overline{y} : A \to A$ mediante $\overline{x}(a) = x$ y $\overline{y}(a) = y$ para todo $a \in A$. Entonces la igualdad $f(x) = f(y)$ puede escribirse como $f\overline{x}(a) = f\overline{y}(a)$ para todo $a \in A$. Pero esto es $f\overline{x} = f\overline{y}$, y como f es monomorfismo, se tiene que $\overline{x} = \overline{y}$, con lo que $x = y$. Así, f es inyectiva, y por ende una sección.

2. En **Set** se tiene que f es un epimorfismo si y sólo si f es una retracción si y sólo si f es sobreyectiva. En efecto, si $f : A \to B$ es sobreyectiva, para cada $x \in B$ existe $y \in A$ tal que $f(y) = x$, pero dicho y no es necesariamente único. Sea $A_x = \{y \in A : f(y) = x\}$. Entonces se asegura que A_x es no vacío. Por el axioma de elección aplicado a la familia $\{A_x\}_{x \in B}$, existe una función $g : B \to \bigcup_{x \in B} A_x$ tal que $f(x) \in A_x$ para cada x. Pero $\bigcup_{x \in B} A_x \subseteq A$, así es posible considerar $g : B \to A$ como una función tal que $g(x) \in A_x$, es decir,

$f(g(x)) = x$. Con esto, ha sido construida una función g tal que $fg = 1_B$, lo que significa que f es una retracción. Recíprocamente, si f es una retracción, sea g su inversa por derecha. Sea $y \in B$, entonces $x = g(y) \in A$, y $f(x) = f(g(y)) = fg(y) = 1_B(y) = y$, de modo que f es sobreyectiva.

Ahora, como toda retracción es epimorfismo, basta probar que en **Set** un epimorfismo es una retracción. Sea $f : A \to B$ un epimorfismo. Defínase $g_1, g_2 : B \to \mathscr{P}(B)$ mediante $g_1(y) = \{y\} \cap f(A)$ y $g_2(y) = \{y\}$. Como $f(x) \in f(A)$ para todo $x \in A$

$$g_1 f(x) = g_1(f(x)) = \{f(x)\} \cap f(A) = \{f(x)\} = g_2(f(x)) = g_2 f(x),$$

y como f es epimorfismo, esto implica que $g_1 = g_2$. Entonces, si $y \in B$,

$$\{y\} = g_2(y) = g_1(y) = \{y\} \cap f(A),$$

de donde $\{y\} \subseteq f(A)$, es decir, $y \in f(A)$, lo que significa que f es sobreyectiva, y por ende una retracción.

3. Considérese a $\mathbb{N}$ como un preorden. Aquí todas las flechas entre objetos distintos son monomorfismos y epimorfismos, pero ninguna de ellas es sección ni retracción. En efecto, si $m, n \in \mathbb{N}$, con $m < n$, existe una única flecha $f : m \to n$. Así, para todo objeto p y flechas $g_1, g_2 : p \to m$ (lo que significa que necesariamente $p \leq m$), si $fg_1 = fg_2$, trivialmente se tiene que $g_1 = g_2$ pues $\mathrm{Hom}(p, m)$ tiene solamente un elemento. Así f es monomorfismo. Similarmente f es epimorfismo. Sin embargo, no existen flechas $n \to m$ pues $m < n$, de modo que f no puede ser sección ni retracción.

4. Como se vio en la proposición, una flecha es isomorfismo si y sólo si es sección y retracción. En particular, si f es isomorfismo, entonces f es monomorfismo y epimorfismo, pero el recíproco falla. Para ello basta considerar el mismo ejemplo anterior.

OBSERVACIÓN 20. En el ejemplo 2 arriba, se vio que el axioma de elección implica que toda sobreyección admita una inversa por derecha. De hecho se tiene la equivalencia: Que una función es sobreyectiva si y sólo admite una inversa por la derecha es equivalente al axioma de elección. En efecto, el recíproco se prueba como sigue: Si $(A_i)_{i \in I}$ es un conjunto no vacío de conjuntos no vacíos. Sea

$$X = \{(i, a) : i \in I, a \in A_i\}.$$

Defínase $\eta : X \to I$ mediante $\eta(i, a) = i$. η es claramente sobreyectiva, por ende existe una función $\sigma : I \to X$ tal que $\sigma\eta = 1_X$. Así, si $(i, a) \in X$, entonces $i \in I$ y $a \in A_i$, de modo que

$$(i, a) = 1_X(i, a) = \sigma(\eta(i, x)) = \sigma(i).$$

Definiendo $\rho : X \to \bigcup_{i \in I} A_i$ mediante $\rho(i, a) = a \in A_i$, se sigue que $\rho\sigma \in \prod_{i \in I} A_i$, por ende se cumple el axioma de elección.

Por este motivo, a una categoría en la que todo epimorfismo es una retracción se la llama una *categoría con elección*. El ejemplo precedente muestra que **Set** es una categoría con elección, pero en general un preorden no lo es.

DEFINICIÓN 3.19. *Dos objetos A, B de una categoría se dicen isomorfos si existe un isomorfismo $f : A \to B$. Eso se escribe como $A \cong B$. Un objeto A se dice que es único salvo isomorfismo en cumplir una propiedad P si todo objeto que verifica P es isomorfo a A.*

Es trivial que la relación $\cong$ entre los objetos de una categoría es una relación de equivalencia.

DEFINICIÓN 3.20. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría y $A \in \mathscr{C}$ un objeto. Se dice que A es un objeto inicial si para todo $B \in \mathscr{C}$ existe una única flecha $A \to B$. A se dice un objeto terminal si para todo objeto B, existe una única flecha $B \to A$. Un objeto que es a la vez objeto inicial y terminal se dice un objeto cero.*

PROPOSICIÓN 3.18. *Los objetos iniciales, terminales y ceros son únicos salvo isomorfismo.*

Demostración. Se prueba el resultado para objetos iniciales, pues en los otros casos la demostración es similar. Sean A y B dos objetos iniciales. Como A es inicial, existe una única flecha $f : A \to B$ e intercambiando los roles de A y B existe una única $g : B \to A$. Ahora, como A es inicial, la única flecha posible $A \to A$ es la identidad, y similarmente para B, por ende $fg = 1_B$ y $gf = 1_A$, lo que significa que f es un isomorfismo, y por ende A y B son isomorfos. □

EJEMPLO 26. En un preorden, un objeto es inicial si y sólo si es el mínimo de la clase para la relación de orden. Similarmente, un objeto es terminal si y sólo si es el máximo. Un preorden tiene elemento cero si y sólo si este consta de un solo objeto.

Un funtor, en un contexto más algebraico, es un "morfismo de categorías". Entonces, como es de esperarse, un funtor debe actuar tanto sobre objetos como sobre flechas, y debe preservar composiciones e identidades. Más específicamente:

Dadas dos categorías $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$, un *funtor covariante* $T : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ es un par $T = (T', T'')$ donde $T' : \mathcal{O}(\mathscr{C}) \to \mathcal{O}(\mathscr{D})$ y $T'' : \mathcal{A}(\mathscr{C}) \to \mathcal{A}(\mathscr{D})$ tal que si $f : A \to B$ es una flecha en $\mathscr{C}$, entonces $T''(f) : T'(A) \to T'(B)$ es una flecha en $\mathscr{D}$ y tal que

$$T''(f \circ g) = T''(f) \circ T''(g) \qquad \text{y} \qquad T''(1_A) = 1_{T'(A)},$$

para todo par de flechas componibles f, g y todo objeto A.

De manera similar, si para cada flecha $f : A \to B$, se corresponde una flecha $T''(f) : T'(B) \to T'(A)$, y si se verifica

$$T''(g \circ f) = T''(f) \circ T''(g) \qquad \text{y} \qquad T''(1_A) = 1_{T'(A)},$$

entonces se dice que T es un *funtor contravariante*.

Por simplicidad, y sin riesgo de confusión, se denota $T' = T$ y $T'' = T$.

Para no tener que realizar un estudio separado de los funtores covariantes y los contravariantes, es factible realizar una construcción: Dada una categoría $\mathscr{C}$, se define su *dual* como la categoría $\mathscr{C}^{op}$, cuyos objetos son los mismos objetos de $\mathscr{C}$ y donde existe una correspondencia biyectiva $f \leftrightarrow f^*$ entre flechas $f : A \to B$ en $\mathscr{C}$ y flechas $f^* : B \to A$ en $\mathscr{C}^{op}$. Es decir, las flechas de $\mathscr{C}^{op}$ son las mismas de $\mathscr{C}$ cambiadas de sentido. Nótese que $(\cdot)^*$ es trivialmente un funtor contravariante. Así, un funtor $T : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ es contravariante si visto como un funtor $T : \mathscr{C} \to \mathscr{D}^{op}$ es un funtor covariante. De este modo, toda la teoría que se desarrolle sobre funtores covariantes es también válida para funtores contravariantes, simplemente argumentando por dualidad.

EJEMPLOS 27.

1. Si X, Y son preórdenes, un funtor covariante $T : X \to Y$ es lo mismo que una función creciente, mientras que T es contravariante si y sólo si T es decreciente.

2. Si $\mathscr{C}$ es una categoría, $1_{\mathscr{C}} : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ definido por $1_{\mathscr{C}}(A) = A$ y $1_{\mathscr{C}}(f) = f$ para todo objeto A y toda flecha f es un funtor covariante, llamado el *funtor identidad* sobre $\mathscr{C}$.

3. Si $S : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ y $T : \mathscr{D} \to \mathscr{B}$ son dos funtores covariantes, entonces $T \circ S$ (notado también TS) definido por $T \circ S(A) = T(S(A))$ y $T \circ S(f) = T(S(f))$ para todo objeto A y toda flecha f es un funtor covariante. Si S y T son contra-

variantes, entonces TS es covariante. Si uno de ellos es covariante y el otro es contravariante, entonces TS es contravariante.

4. Cuando un categoría $\mathscr{C}$ está formada por objetos y flechas que tienen una característica más restrictiva que los objetos y flechas de una categoría $\mathscr{D}$ (por ejemplo $\mathscr{C}$ es la categoría de los espacios topológicos con las funciones continuas y $\mathscr{D}$ es solamente la categoría de los conjuntos con las funciones), un funtor $\mathscr{C} \to \mathscr{D}$ que verifica $T(A) = A$ y $T(f) = f$ para todo objeto A y toda flecha f se dice un *funtor olvidadizo*. No es posible definir formalmente un funtor olvidadizo, pero sí entender la idea intuitiva de que "olvida" cierta estructura correspondiente a los objetos y flechas de su categoría dominio.

5. Sea $\mathbf{Top}_*$ la categoría cuyos objetos son los espacios topológicos con punto de base y las flechas morfismos entre tales espacios. Entonces $\pi_1 : \mathbf{Top}_* \to \mathbf{Grp}$ tal que a cada espacio topológico con punto de base (X, x_0) le asigna su primer grupo fundamental $\pi_1(X, x_0)$ y a cada morfismo $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ el homomorfismo inducido $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$, es un funtor covariante.

Los ejemplos 3 y 4 arriba sugieren la construcción de una nueva categoría: **Cat**. Sus objetos son las categorías y sus flechas son los funtores covariantes entre estas categorías. Formalmente **Cat**, como se ha definido aquí, es una metacategoría. Su definición rigurosa requiere de conceptos de lógica matemática, pero ese no es un conflicto en este trabajo. Es fácil notar que un funtor es un isomorfismo (en **Cat**) si y sólo si es una biyección tanto en objetos como en flechas, sin embargo esta definición no es del todo relevante.

Más funtores y categorías aparecerán a lo largo de este trabajo.

Como suele ser costumbre, se escribe TA y Tf en lugar de $T(A)$ y $T(f)$ para cualquier objeto A y flecha f.

DEFINICIÓN 3.21. *Sea $T : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ un funtor covariante.*

- *T se dice un funtor pleno si para todo par de objetos $A, B \in \mathscr{C}$, y toda flecha $g : TA \to TB$ en $\mathscr{D}$, existe una flecha $f : A \to B$ en $\mathscr{C}$ tal que $g = Tf$.*

- *T se dice un funtor fiel si para todo par de flechas paralelas f_1, f_2, se tiene que $Tf_1 = Tf_2$ implica que $f_1 = f_2$.*

- *Un funtor que es a la vez pleno y fiel se dice plenamente fiel.*

EJEMPLO 28. Dada una categoría $\mathscr{C}$, una *subcategoría* de $\mathscr{C}$ es una colección $\mathscr{C}'$ de algunos objetos y flechas de $\mathscr{C}$ que es estable bajo las operaciones ∂_0, ∂_1, composición y unidades. En particular, $\mathscr{C}'$ es también una categoría. Existe un funtor canónico $\iota : \mathscr{C}' \to \mathscr{C}$ que es el de la inclusión. Este funtor es claramente fiel, pero no es en general pleno. Si ι es pleno (y por ende plenamente fiel), se dice que $\mathscr{C}'$ es una *subcategoría plena* de $\mathscr{C}$.

La idea detrás de una transformación natural es la de un "morfismo de funtores".

En lo que resta de esta sección, todos los funtores se asumen covariantes a menos que se explicite lo contrario.

DEFINICIÓN 3.22. *Sean $S, T : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ dos funtores. Una transformación natural $\tau : S \to T$ es una familia de flechas $\tau_A : SA \to TA$ en $\mathscr{D}$, una para cada objeto de $\mathscr{C}$, tal que si $f : A \to B$ es una flecha en $\mathscr{C}$, el cuadrado del diagrama*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] & SA \arrow[r, "\tau_A"] \arrow[d, "Sf"'] & TA \arrow[d, "Tf"] \\ B & SB \arrow[r, "\tau_B"'] & TB \end{tikzcd}$$

conmuta en $\mathscr{D}$, es decir, $Tf \circ \tau_A = \tau_B \circ Sf$.

EJEMPLO 29. Sea X un conjunto fijo. Se define el funtor $T_X : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ del siguiente modo: para cada conjunto A, $T_X(A) = X \times A^X$ donde A^X es el conjunto de todas las funciones $\phi : X \to A$; para cada flecha $f : A \to B$, $T_X(f) : X \times A^X \to X \times B^X$ se define para cada $(x, \phi) \in X \times A^X$ mediante $T_X(f)(x, \phi) = (x, f \circ \phi)$. Ahora, sea $e : T_X \to 1$, siendo 1 la identidad $1 : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$, para cada objeto $A \in \mathbf{Set}$ mediante $e_A : X \times A^X \to A$ dado por $e_A(x, \phi) = \phi(x)$. Entonces e es una transformación natural. En efecto, si $f : A \to B$ es una función, para $(x, \phi) \in T_X(A) = X \times A^X$,

$$1f \circ e_A(x, \phi) = f(e_A(x, \phi)) = f(\phi(x)) = f \circ \phi(x).$$

Por otro lado,

$$e_B \circ T_X(f)(x, \phi) = e_B(x, f \circ \phi) = f \circ \phi(x).$$

De este modo $1f \circ e_A = e_B \circ T_X(f)$, por ende e es transformación natural.

Si $\tau : S \to T$ y $\sigma : T \to U$ son dos transformaciones naturales entre funtores $S, T, U : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$, es posible definir $\sigma \circ \tau : S \to U$ para cada objeto $A \in \mathscr{C}$ mediante

$$(\sigma \circ \tau)_A = \sigma_A \circ \tau_A$$

donde la composición del lado derecho se realiza en la categoría $\mathscr{D}$. Más aún, existe una transformación natural indentidad: $1 : T \to T$ dada por $\tau_A = 1_{T(A)}$ para cada $A \in \mathscr{C}$. Esto permite definir la *categoría funtorial* $\mathbf{Cat}(\mathscr{C}, \mathscr{D})$ o $\mathscr{D}^{\mathscr{C}}$ cuyos objetos son los funtores $T : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ y sus flechas son las transformaciones naturales entre dichos funtores. Así, se puede hablar de transformaciones naturales que son monomorfismos, epimorfismos, isomorfismos, etc. Si $\tau : S \to T$ es isomorfismo, este será referido como un *isomorfismo natural* o *equivalencia natural*. Cuando dos funtores S y T sean isomorfos vía un isomorfismo natural se escribe, como debe ser, $S \cong T$.

DEFINICIÓN 3.23. *Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ dos categorías. Una equivalencia de categorías es un par de funtores $S : \mathscr{C} \to T$ y $T : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ tal que $ST \cong 1_{\mathscr{D}}$ y $TS \cong 1_{\mathscr{C}}$. También se suele decir que S o T es una equivalencia de categorías.*

3.4. Homotopía de categorías finitas

En esta sección se presenta una teoría de homotopía para categorías finitas. Las construcciones son, en cierto modo, paralelas a las que se realizan en [17], con las debidas modificaciones.

El motivo de utilizar las ideas de Larose y Tardiff es que en una categoría $\mathscr{C}$, la existencia de las flechas identidad dota a la categoría de una estructura binaria reflexiva, y por ende la teoría se extiende bastante bien al caso de las categorías.

Esta teoría ha sido desarrollada en un trabajo conjunto con David Pazmiño y Pablo Rosero y está también presentada en [21], sin embargo, el enfoque aquí presentado es distinto desde el punto de vista notacional, y las demostraciones son diferentes en forma (mas no de fondo), pues deben ajustarse a la notación aquí utilizada. Más aún, el objetivo de presentar aquí esta teoría es la de poder aplicarla al estudio de los carcajes ligados, que es el objetivo de la siguiente sección.

Una categoría conformada por un número finito de objetos y flechas se dice que es *finita*.

LEMA 3.19. *Se considera el conjunto $\mathbb{Z}$ equipado con la relación:*

$$n \preceq m \text{ si y sólo si } n = m \text{ o } n \text{ es par y } |n - m| = 1.$$

Entonces $(\mathbb{Z}, \preceq)$ es un preorden, y por ende una categoría.

Demostración. Puesto que por definición $n \preceq n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, se tiene que $\preceq$ es reflexiva. Si $n \preceq m$ y $m \preceq p$, los casos cuando $n = m$ o $m = p$ son triviales, por ende se puede asumir que $|n - m| = 1$ y $|n - p| = 1$. Se sigue que n y m son pares, lo que no es posible pues la diferencia de dos pares distintos es al menos 2. La transitividad se sigue por vacuidad. $\square$

DEFINICIÓN 3.24. *Se define a $\mathbf{\Lambda}$ como la categoría descrita en el Lema 3.19.*

Diagramáticamente, la categoría $\mathbf{\Lambda}$ luce así:

$$\ldots \longrightarrow -3 \longleftarrow -2 \longrightarrow -1 \longleftarrow 0 \longrightarrow 1 \longleftarrow 2 \longrightarrow 3 \longleftarrow \cdots,$$

en donde por simplicidad no se han dibujado las identidades.

OBSERVACIÓN 21. La demostración del Lema 3.19 muestra que salvo por las identidades, la categoría $\mathbf{\Lambda}$ no tiene flechas componibles. Esto, en particular, implica que una condición necesaria y suficiente para que una función de objetos y flechas $F : \mathbf{\Lambda} \to \mathscr{C}$ sea un funtor, es que $F(n \to n) = 1_{F(n)}$.

DEFINICIÓN 3.25. *Sea $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ dos categorías y $F, G : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ dos funtores. Una homotopía de F hacia G es un funtor $\mathcal{H} : \Lambda \times \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ tal que existen enteros pares $m \leq n$ que verifican:*

$$\mathcal{H}(i \to j, f) = F(f), \quad \forall i, j \leq m, i \preceq j, \forall f \in \mathscr{C}$$
$$\mathcal{H}(i \to j, f) = G(f), \quad \forall i, j \geq n, i \preceq j, \forall f \in \mathscr{C}.$$

Cuando sea necesario hacer énfasis en los enteros pares m y n, a $\mathcal{H}$ se la llamará una (m, n)-homotopía. En caso de existir una tal homotopía, se dice que F y G son homotópicos, y se escribirá $F \simeq G$.

PROPOSICIÓN 3.20. *Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ dos categorías. $\simeq$ es una relación de equivalencia en los objetos de la categoría funtorial $\mathscr{D}^{\mathscr{C}}$.*

Demostración. Si $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ es un funtor, entonces $\mathcal{H} : \mathbf{\Lambda} \times \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ dada por

$$\mathcal{H}(i \to j, f) = F(f), \quad \forall i \preceq j, \forall f \in \mathscr{C}$$

es una homotopía de F hacia F. Así $F \simeq F$.

Si $F, G : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ son funtores tales que $F \simeq G$ y $\mathcal{H}$ es una (m, n)-homotopía de F a G, entonces $\mathcal{H}' : \mathbf{\Lambda} \times \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ dada por

$$\mathcal{H}'(i \to j, f) = \mathcal{H}(-i \to -j, f), \quad \forall i \preceq j, \forall f \in \mathscr{C}$$

es una $(-n,-m)$-homotopía de G a F, y por ende $G \simeq F$.

Sean $F, G, H : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ funtores tales que $F \simeq G$ y $G \simeq H$ y sean $\mathcal{H}_1$ una (m,n)-homotopía de F y G y $\mathcal{H}_2$ una (p,q)-homotopía de G a H. Se define $\mathcal{H} : \mathbf{\Lambda} \times \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ mediante

$$\mathcal{H}(i,C) = \begin{cases} \mathcal{H}_1(i,C) & \text{si } i \leq n \\ \mathcal{H}_2(i-n+p,C) & \text{si } i \geq n \end{cases}$$

en objetos y por

$$\mathcal{H}(i \to j, f) = \begin{cases} \mathcal{H}_1(i \to j, f) & \text{si } i,j \leq n, i \preceq j \\ \mathcal{H}_2(i-n+p \to j-n+p, f) & \text{si } i,j \geq n, i \preceq j. \end{cases}$$

en flechas. Con esto, $\mathcal{H}$ es una $(m, n-p+q)$-homotopía y consecuentemente $F \simeq H$. $\square$

PROPOSICIÓN 3.21. *Sean $\mathscr{B}, \mathscr{C}, \mathscr{D}$ tres categorías, $F, G : \mathscr{B} \to \mathscr{C}$ y $F', G' : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ funtores tales que $F \simeq G$ y $F' \simeq G'$. Entonces $F' \circ F \simeq G' \circ G$.*

Demostración. Existen una (m,n)-homotopía $\mathcal{H}_1 : \mathbf{\Lambda} \times \mathscr{B} \to \mathscr{C}$ de F a G y una (p,q)-homotopía $\mathcal{H}_2 : \mathbf{\Lambda} \times \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ de F' a G'. Se define $\mathcal{H} : \mathbf{\Lambda} \times \mathscr{B} \to \mathscr{D}$ como sigue: Para un objeto $(i, B) \in \mathbf{\Lambda} \times \mathscr{B}$

$$\mathcal{H}(i,B) = \mathcal{H}_2(i-m+p, \mathcal{H}_1(i,B))$$

y para una flecha $(i \to j, f) \in \mathbf{\Lambda} \times \mathscr{B}$

$$\mathcal{H}(i \to j, f) = \mathcal{H}_2(i-m+p \to j-m+p, \mathcal{H}_1(i \to j, f)).$$

Si $r = \text{máx}\{n-m, q-p\}$, se sigue que $\mathcal{H}$ es una $(m, m+r)$-homotopía de $F' \circ F$ a $G' \circ G$. En efecto, si $i,j \leq m$ y $i \preceq j$ se tiene que $\mathcal{H}_1(i \to j, f) = F(f)$, además $i-m+p, j-m+p \leq p$ y $i-m+p \preceq j-m+p$ de modo que

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(i \to j, f) &= \mathcal{H}_2(i-m+p \to j-m+p, \mathcal{H}_1(i \to j, f)) \\ &= F'(\mathcal{H}_1(i \to j, f)) = F'(F(f)) = (F' \circ F)(f) \end{aligned}$$

Por otro lado, si $i,j \geq m+r$ y $j \preceq j$, entonces $i,j \geq m+(n-m) = n$, por lo que $\mathcal{H}_1(i \to j, f) = G(f)$. Por otro lado,

$$i-m+p \geq m+r-m+p = r+p \geq (q-p)+p = q,$$

por ende

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(i \to j, f) &= \mathcal{H}_2(i - m + p \to j - m + p, \mathcal{H}_1(i \to j, f)) \\ &= G'(\mathcal{H}_1(i \to j, f)) = G'(G(f)) = (G' \circ G)(f).\end{aligned}$$

Así $F' \circ F \simeq G' \circ G$. $\square$

DEFINICIÓN 3.26. *Dos categorías $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ se dicen del mismo tipo de homotopía si existen funtores $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ y $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ tales que $G \circ F \simeq 1_{\mathscr{C}}$ y $F \circ G \simeq 1_{\mathscr{D}}$. Se escribirá $\mathscr{C} \simeq \mathscr{D}$ y se dirá que F o G es una equivalencia homotópica de categorías.*

PROPOSICIÓN 3.22. *La relación $\simeq$ es una relación de equivalencia en los objetos de* **Cat**.

Demostración. La relación $\simeq$ es manifiestamente reflexiva y simétrica. Si $\mathscr{B} \simeq \mathscr{C}$ y $\mathscr{C} \simeq \mathscr{D}$, existen funtores $F : \mathscr{B} \to \mathscr{C}$, $G : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$, $F' : \mathscr{C} \to \mathscr{B}$ y $G' : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ tales que $F' \circ F \simeq 1_{\mathscr{B}}$, $F \circ F' \simeq 1_{\mathscr{C}}$, $G' \circ G \simeq 1_{\mathscr{C}}$ y $G \circ G' \simeq 1_{\mathscr{D}}$. Así

$$(G \circ F) \circ (F' \circ G') \simeq G \circ 1_{\mathscr{C}} \circ G' \simeq G \circ G' \simeq 1_{\mathscr{D}}$$

y de manera similar $(F' \circ G') \circ (G \circ F) \simeq 1_{\mathscr{B}}$, lo que significa que $\mathscr{B} \simeq \mathscr{D}$, y por ende la relación es transitiva. $\square$

DEFINICIÓN 3.27. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría y A, B dos objetos en $\mathscr{C}$. Un camino de A hacia B en $\mathscr{C}$ es un funtor $\alpha : \mathbf{\Lambda} \to \mathscr{C}$ junto con dos números enteros pares $m \leq n$ tales que*

$$\begin{aligned}\alpha(i \to j) &= 1_A \quad \forall i, j \leq m, i \preceq j \\ \alpha(i \to j) &= 1_B \quad \forall i, j \geq n, i \preceq j.\end{aligned}$$

Cuando sea necesario hacer énfasis en los enteros pares m y n, se dirá que α es un (m, n)-camino de A hacia B.

Un camino de A hacia A se dice un lazo sobre A o lazo con base en A.

La categoría $\mathscr{C}$ se dice conexa por caminos si para todo par de objetos $A, B \in \mathscr{C}$ existe un camino de A hacia B.

OBSERVACIÓN 22. Si α es un (m, n)-camino de A a B, entonces para todo entero par $m' \leq m$ y todo entero par $n' \geq n$, α es un (m', n')-camino de A a B. Esto es una consecuencia inmediata de la definición. Este hecho se usa libremente en lo que sigue, sin hacer énfasis en el mismo.

EJEMPLOS 30.

- Si A es un objeto en una categoría $\mathscr{C}$, el funtor $\widehat{A} : \mathbf{\Lambda} \to \mathscr{C}$ definido por $\widehat{A}(i \to j) = 1_A$ para todo $i \preceq j$ es un camino, llamado el *camino constante en* A.

- Si $f : A \to B$ es una flecha en una categoría $\mathscr{C}$, entonces el funtor $\widehat{f} : \mathbf{\Lambda} \to \mathscr{C}$ definido para cada objeto $i \in \mathbf{\Lambda}$ por

$$\widehat{f}(i) = \begin{cases} A & \text{si } i \leq 0 \\ B & \text{si } i \geq 1 \end{cases}$$

  y para cada flecha $i \to j \in \mathbf{\Lambda}$ por

$$\widehat{f}(i \to j) = \begin{cases} 1_A & \text{si } i, j \leq 0 \\ f & \text{si } i = 0, j = 1 \\ 1_B & \text{si } i, j \geq 1 \end{cases}$$

  es un camino de A hacia B llamado el *camino asociado a* f.

  Por simplicidad, dada una composición de flechas $f \circ g$, se notará por $\widehat{fg}$ en lugar de $\widehat{f \circ g}$ a su camino asociado.

- Si α es un (m, n)-camino de A a B en una categoría $\mathscr{C}$, el funtor $\overline{\alpha} : \mathbf{\Lambda} \to \mathscr{C}$ definido para cada objeto $i \in \mathbf{\Lambda}$ y para cada flecha $i \to j$ en $\mathbf{\Lambda}$ por

$$\overline{\alpha}(i) = \alpha(-i), \quad \overline{\alpha}(i \to j) = \alpha(-i \to -j)$$

  es un $(-n, -m)$-camino de B hacia A. A $\overline{\alpha}$ se lo llama el *camino inverso de* α.

Es conveniente hacer una ligera incursión en los funtores definidos sobre la categoría $\mathbf{\Lambda} \times \mathbf{\Lambda}$. Para iniciar, esta categoría está dada por el diagrama mostrado en la figura 3.1.

Para representar un funtor sobre esta categoría, $F : \mathbf{\Lambda} \times \mathbf{\Lambda} \to \mathscr{C}$ se procederá como sigue: Se omiten los objetos (i, j) y en su lugar se ubican sus imágenes respecto del funtor F, es decir $F(i, j)$, a las cuales (en el diagrama abajo) se las nota por $F_{i,j}$. Sobre la flecha $(i, j) \to (i', j')$ se ubica su imagen respecto del funtor F, que en este caso, por simplicidad se escribe por $F_{i,j}^{i',j'}$, y no se escribe en caso de ser una flecha identidad. Para ubicar al objeto $(0, 0)$ se colocará un $\bullet$ en su posición. Más aún, como en todos los funtores a considerarse, si en el diagrama no aparecen filas o columnas, esto significa que estas son copias de la última fila o columna más cercana. Esto se ve diagramáticamente como se ilustra en la figura 3.2.

$$
\begin{tikzcd}
\ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \iddots \\
\cdots & (-2,2) \arrow[l] \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d] \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[dl] \arrow[dr] & (-1,2) \arrow[u] \arrow[d] & (0,2) \arrow[l] \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d] \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[dl] \arrow[dr] & (1,2) \arrow[u] \arrow[d] & (2,2) \arrow[l] \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d] \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[dl] \arrow[dr] & \cdots \\
\cdots & (-2,1) \arrow[l] \arrow[r] & (-1,1) & (0,1) \arrow[l] \arrow[r] & (1,1) & (2,1) \arrow[l] \arrow[r] & \cdots \\
\cdots & (-2,0) \arrow[l] \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d] \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[dl] \arrow[dr] & (-1,0) \arrow[u] \arrow[d] & (0,0) \arrow[l] \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d] \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[dl] \arrow[dr] & (1,0) \arrow[u] \arrow[d] & (2,0) \arrow[l] \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d] \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[dl] \arrow[dr] & \cdots \\
\cdots & (-2,-1) \arrow[l] \arrow[r] & (-1,-1) & (0,-1) \arrow[l] \arrow[r] & (1,-1) & (2,-1) \arrow[l] \arrow[r] & \cdots \\
\cdots & (-2,-2) \arrow[l] \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d] \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[dl] \arrow[dr] & (-1,-2) \arrow[u] \arrow[d] & (0,-2) \arrow[l] \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d] \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[dl] \arrow[dr] & (1,-2) \arrow[u] \arrow[d] & (2,-2) \arrow[l] \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d] \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[dl] \arrow[dr] & \cdots \\
\iddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{tikzcd}
$$

Figura 3.1: Categoría $\mathbf{\Lambda} \times \mathbf{\Lambda}$

$$
\begin{tikzcd}
F_{-2,2} \arrow[r, "F^{-1,2}_{-2,2}"] \arrow[d, "F^{-2,1}_{-2,2}"'] \arrow[dr, "F^{-1,1}_{-2,2}" description] & F_{-1,2} \arrow[d, "F^{-1,1}_{-1,2}" description] & F_{0,2} \arrow[l, "F^{-1,2}_{0,2}"'] \arrow[r, "F^{1,2}_{0,2}"] \arrow[dl, "F^{-1,1}_{0,2}" description] \arrow[d, "F^{0,1}_{0,2}" description] \arrow[dr, "F^{1,1}_{0,2}" description] & F_{1,2} \arrow[d, "F^{1,1}_{1,2}"] \\
F_{-2,1} \arrow[r, "F^{-1,1}_{-2,1}" description] & F_{-1,1} & F_{0,1} \arrow[l, "F^{-1,1}_{0,1}" description] \arrow[r, "F^{1,1}_{0,1}"] & F_{1,1} \\
F_{-2,0} \arrow[u, "F^{-2,1}_{-2,0}"] \arrow[ur, "F^{-1,1}_{-2,0}" description] \arrow[r, "F^{-1,0}_{-2,0}" description] \arrow[d, "F^{-1,-1}_{-2,0}"'] \arrow[dr, "F^{-1,-1}_{-2,0}" description] & F_{-1,0} \arrow[u, "F^{-1,1}_{-1,0}" description] \arrow[d, "F^{-1,-1}_{-1,0}" description] & \bullet F_{0,0} \arrow[ul, "F^{-1,1}_{0,0}" description] \arrow[u, "F^{0,1}_{0,0}" description] \arrow[ur, "F^{1,1}_{0,0}" description] \arrow[l, "F^{-1,0}_{0,0}" description] \arrow[r, "F^{1,0}_{0,0}" description] \arrow[dl, "F^{-1,-1}_{0,0}" description] \arrow[d, "F^{0,-1}_{0,0}" description] \arrow[dr, "F^{1,-1}_{0,0}" description] & F_{1,0} \arrow[u, "F^{1,1}_{1,0}"'] \arrow[d, "F^{1,-1}_{1,0}"] \\
F_{-2,-1} \arrow[r, "F^{-1,-1}_{-2,-1}"'] & F_{-1,-1} & F_{0,-1} \arrow[l, "F^{-1,-1}_{0,-1}"] \arrow[r, "F^{1,-1}_{0,-1}"'] & F_{1,-1}
\end{tikzcd}
$$

Figura 3.2: Funtor $F : \mathbf{\Lambda} \times \mathbf{\Lambda} \to \mathscr{C}$

Definición 3.28. *Sean A, B y C tres objetos en una categoría $\mathscr{C}$, α un (m,n)-camino* *de A hacia B y β un (p,q)-camino de B hacia C. El* producto $\alpha \cdot \beta$ *se define como el $(m, n-p+q)$-camino de A hacia C definido para cada objeto $i \in \mathbf{\Lambda}$ por*

$$(\alpha \cdot \beta)(i) = \begin{cases} \alpha(i) & \text{si } i \leq n \\ \beta(i-n+p) & \text{si } i \geq n \end{cases}$$

y para cada flecha $i \to j \in \mathbf{\Lambda}$ por

$$(\alpha \cdot \beta)(i \to j) = \begin{cases} \alpha(i \to j) & \text{si } i, j \leq n \\ \beta(i-n+p \to j-n+p) & \text{si } i, j \geq n \end{cases}.$$

DEFINICIÓN 3.29. *Sean A, B dos objetos en una categoría $\mathscr{C}$, α un (m_1, n_1)-camino y β un (m_2, p_2)-camino de A hacia B. Sean $m = \text{mín}\{m_1, m_2\}$ y $n = \text{máx}\{n_1, n_2\}$. Una* homotopía de caminos *de α a β es un funtor $\mathcal{H} : \mathbf{\Lambda} \times \mathbf{\Lambda} \to \mathscr{C}$ junto con un entero par $p \geq 0$ tal que que $\mathcal{H}$ es una $(0,p)$-homotopía del funtor α al funtor β y tal que*

$$\mathcal{H}(i \to j, i' \to j') = \begin{cases} 1_A & \text{si } i', j' \leq m \\ 1_B & \text{si } i', j' \geq n \end{cases}$$

En este caso se dice que los caminos α y β son homotópicos *y se denota $\alpha \simeq \beta$. Se dice también que $\mathcal{H}$ es una* p-homotopía de caminos.

Nótese que en la definición anterior se puede asumir sin pérdida de generalidad que α y β son (m,n)-caminos de A hacia B.

Modificaciones obvias en la demostración de la Proposición 3.20 muestran el siguiente resultado:

PROPOSICIÓN 3.23. *Dados dos objetos A, B en una categoría $\mathscr{C}$, la relación $\simeq$ entre caminos de A hacia B en $\mathscr{C}$ es una relación de equivalencia. A la clase de equivalencia de un camino α se la denotará por $[\alpha]$.*

PROPOSICIÓN 3.24 (Teorema de concatenación)**.** *Sea $\mathscr{C}$ una categoría, α, α' dos caminos de A a B y β, β' dos caminos de B a C tales que $\alpha \simeq \alpha'$ y $\beta \simeq \beta'$. Entonces $\alpha \cdot \beta \simeq \alpha' \cdot \beta'$.*

Demostración. Se asume sin perder generalidad (gracias a la observación 22) que α, β son (m,n)-caminos y α', β' son (m', n')-caminos. Se considera una p_1-homotopía $\mathcal{H}_1$

de α a α' y una p_2-homotopía $\mathcal{H}_2$ de β a β'. Sea

$$\begin{array}{llll} \mathcal{H}: & \mathbf{\Lambda} \times \mathbf{\Lambda} & \longrightarrow & \mathscr{C} \\ & (i,i') & \longmapsto & \begin{cases} \mathcal{H}_1(i,i') & \text{si } i' \leq n \\ \mathcal{H}_2(i,i'-n+m') & \text{si } i' \geq n \end{cases} \\ & (i \to j, i' \to j') & \longmapsto & \begin{cases} \mathcal{H}_1(i \to j, i' \to j') & \text{si } i',j' \leq n \\ \mathcal{H}_2(i \to j, i'-n+m' \to j'-n+m') & \text{si } i',j' \geq n \end{cases} \end{array}$$

y sea $p = \max\{p_1, p_2\}$. Entonces $\mathcal{H}$ es una p-homotopía del camino $\alpha \cdot \beta$ al camino $\alpha' \cdot \beta'$. En efecto, primero nótese que $\alpha \cdot \beta$ y $\alpha' \cdot \beta'$ son $(m, n-m'+n')$-caminos de A hacia C. Ahora, si $i', j' \leq m$ y $i' \preceq j'$ se tiene que para todo $i \preceq j$

$$\mathcal{H}(i \to j, i' \to j') = \mathcal{H}_1(i \to j, i' \to j') = 1_A$$

y si $i', j' \geq n - m' + n'$ entonces $i' - n + m', j' - n + m' \geq n'$ y consecuentemente

$$\mathcal{H}(i \to j, i' \to j') = \mathcal{H}_1(i \to j, i' - n + m' \to j' - n + m') = 1_C.$$

Ahora, si $i, j \leq 0$ se tiene que

$$\mathcal{H}(i \to j, i' \to j') = \begin{cases} \mathcal{H}_1(i \to j, i' \to j') & \text{si } i',j' \leq n \\ \mathcal{H}_2(i \to j, i'-n+m' \to j'-n+m') & \text{si } i',j' \geq n \end{cases}$$

y dado que

$$\mathcal{H}_1(i \to j, i' \to j') = \alpha(i' \to j')$$

y

$$\mathcal{H}_2(i \to j, i'-n+m' \to j'-n+m') = \beta(i'-n+m' \to j'-n+m')$$

esto implica que

$$\mathcal{H}(i \to j, i' \to j') = \begin{cases} \alpha(i' \to j') & \text{si } i',j' \leq n \\ \beta(i'-n+m' \to j'-n+m') & \text{si } i',j' \geq n \end{cases}$$

por lo tanto $\mathcal{H}(i \to j, i' \to j') = \alpha \cdot \beta(i' \to j')$.

De manera análoga, si $i, j \geq p$, entonces $i, j \geq p_1$ y $i, j \geq p_2$ por lo que $\mathcal{H}(i \to j, i' \to j') = \alpha' \cdot \beta'(i' \to j')$. Esto prueba que $\mathcal{H}$ es una $(0, p)$-homotopía del funtor $\alpha \cdot \beta$ al funtor $\alpha' \cdot \beta'$ y por lo tanto completa la demostración. $\square$

PROPOSICIÓN 3.25 (Teorema de asociatividad). *Sean α un (m, n)-camino de A a B,*

β un (p,q)-camino de B a C y γ un (r,s)-camino de C a D, entonces

$$\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$$

Demostración. Nótese que el $(p, q - r + s)$ camino $\beta \cdot \gamma$ está dado para cada flecha $i \to j$ por

$$(\beta \cdot \gamma)(i \to j) = \begin{cases} \beta(i \to j) & \text{si } i,j \leq q \\ \gamma(i - q + r \to j - q + r) & \text{si } i,j \geq q \end{cases}$$

y consecuentemente se tiene el $(m, n - q + p - s + r)$-camino $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$ definido por

$$(\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma))(i \to j) = \begin{cases} \alpha(i \to j) & \text{si } i,j \leq n \\ (\beta \cdot \gamma)(i - n + p \to j - n + p) & \text{si } i,j \geq n \end{cases}$$

que puede expresarse como

$$\begin{aligned} &(\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma))(i \to j) \\ &\quad = \begin{cases} \alpha(i \to j) & \text{si } i,j \leq n \\ \beta(i - n + p \to j - n + p) & \text{si } n \leq i,j \leq n - p + q \\ \gamma(i - n + p - q + r \to j - i + p - q + r) & \text{si } i,j \geq n - p + q. \end{cases} \end{aligned}$$

Un cálculo completamente similar muestra que

$$\begin{aligned} &((\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma)(i \to j) \\ &\quad = \begin{cases} \alpha(i \to j) & \text{si } i,j \leq n \\ \beta(i - n + p \to j - n + p) & \text{si } n \leq i,j \leq n - p + q \\ \gamma(i - n + p - q + r \to j - i + p - q + r) & \text{si } i,j \geq n - p + q. \end{cases} \end{aligned}$$

y por consiguiente $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$. $\square$

Antes de continuar, se introduce una notación que será muy útil. Sea $\mathscr{C}$ una categoría y A, B dos objetos de dicha categoría. Si α es un (m,n)-camino de A hacia B, al notar por α_i^j a la flecha $\alpha(i \to j)$ y por A_i al objeto $\alpha(i)$, se tiene el diagrama siguiente:

$$\cdots \xleftarrow{1_A} A_m \xrightarrow{\alpha_m^{m+1}} A_{m+1} \xleftarrow{\alpha_{m+2}^{m+1}} \cdots \xrightarrow{\alpha_{n-2}^{n-1}} A_{n-1} \xleftarrow{\alpha_n^{n-1}} B \xrightarrow{1_B} \cdots$$

De este modo, llamando $\alpha_i = \alpha_i^{i+1}$ y $\beta_i = \alpha_i^{i-1}$, se denota al camino anterior por

$$[m]\alpha_m\overline{\beta_{m+2}}\alpha_{m+2}\overline{\beta_{m+4}}\cdots\alpha_{n-2}\overline{\beta_n}[n].$$

De un modo más general, para un entero par k tal que $0 < k < m-n$ la notación

$$[m](\cdot)\alpha_{m+k}\overline{\beta_{m+2+k}}\cdots\alpha_{n-2}\overline{\beta_n}[n]$$

indica el mismo (m,n)-camino, donde es sabido que existe una asignación para $\alpha(i \to j)$, con $i, j < m+k$, pero no es de interés conocer cual es. De manera análoga se tienen las notaciones

$$[m]\alpha_m\overline{\beta_{m+2}}\alpha_{m+2}\cdots\alpha_{n-k-2}\overline{\beta_{n-k}}(\cdot)[n] \quad \text{y} \quad [m](\cdot)\alpha_{m+k}\overline{\beta_{m+2+k}}\cdots\alpha_{n-j-2}\overline{\beta_{n-j}}(\cdot)[n].$$

PROPOSICIÓN 3.26 (Teorema de factorización)**.** *Se tiene la identidad entre los caminos*

$$[m]\alpha_m\overline{\beta_{m+2}}\alpha_{m+2}\overline{\beta_{m+4}}\cdots\alpha_{n-2}\overline{\beta_n}[n]$$

y

$$[m]\alpha_m\overline{\beta_{m+2}}[m+2]\cdot[m+2]\alpha_{m+2}\overline{\beta_{m+4}}[m+4]\cdot\cdots\cdot[n-2]\alpha_{n-2}\overline{\beta_n}[n].$$

Demostración. Basta notar que ambos caminos están dados por el diagrama

$$\cdots \xleftarrow{1_A} A_m \xrightarrow{\alpha_m} A_{m+1} \xleftarrow{\beta_{m+2}} A_{m+2} \xrightarrow{\alpha_{m+2}} \cdots \xleftarrow{\beta_n} A_n \xrightarrow{1_B} \cdots$$

donde $A = A_m$ y $B = A_n$. $\square$

La proposición anterior permite escribir $\alpha\cdot\beta\cdot\gamma$ en lugar de $\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)$ o $(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma$ sin riesgo de ambigüedad.

PROPOSICIÓN 3.27 (Teorema de traslación)**.** *Los caminos de A a B*

$$[m]\alpha_0\overline{\beta_2}\cdots\alpha_{n-m-2}\overline{\beta_{m-n}}[n] \quad y \quad [0]\alpha_0\overline{\beta_2}\cdots\alpha_{n-m-2}\overline{\beta_{m-n}}[m-n]$$

son homotópicos.

Demostración. Se prueba para empezar que dado un diagrama

$$A \xrightarrow{f} B \xleftarrow{g} C$$

entonces los caminos de A a B $[m]f\overline{g}[m+2]$ y $[m+2]f\overline{g}[m+4]$ son homotópicos. Para este fin considérese la homotopía dada por el diagrama mostrado en la figura 3.3, donde $\bullet$ indica la imagen del punto $(0,m)$ en dicha homotopía. Por recursividad se sigue que los cominos $[m]f\overline{g}[m+2]$ y $[m+k]f\overline{g}[m+2+k]$ son homotópicos para todo entero positivo k, y sustituyendo m por $m-k$ es claro que dicha equivalencia se da también para todo entero negativo k. En resumen

$$[m]f\overline{g}[m+2] \simeq [m+2]f\overline{g}[m+4] \quad \forall k \in 2\mathbb{Z}.$$

La demostración del resultado se sigue procede por inducción sobre $k = (m-n)/2$. En efecto, considerando $\alpha_m = f$ y $\beta_{m+2} = g$, el caso quedó probado para $k = 1$ en el párrafo precedente. Suponiendo el resultado válido para k se tiene que los caminos γ y γ' dados respectivamente por

$$[m]\alpha_0\overline{\beta_n}\cdots\alpha_{n-m-2}\overline{\beta_{m-n}}[n] \quad \text{y} \quad [0]\alpha_0\overline{\beta_n}\cdots\alpha_{n-m-2}\overline{\beta_{m-n}}[m-n]$$

son homotópicos. Escríbase

$$\begin{aligned}\delta &= [m]\alpha_0\overline{\beta_n}\cdots\alpha_{n-m-2}\overline{\beta_{m-n}}\alpha_{n-m}\overline{\beta_{m-n+2}}[n+2],\\ \delta' &= [0]\alpha_0\overline{\beta_n}\cdots\alpha_{n-m-2}\overline{\beta_{m-n}}\alpha_{n-m}\overline{\beta_{m-n+2}}[n-m+2]\end{aligned}$$

Por el teorema de factorización se puede escribir

$$\begin{aligned}\delta &= [m]\alpha_0\overline{\beta_2}[m+2]\cdot\cdots\cdot[n-2]\alpha_{n-m-2}\overline{\beta_{m-n}}[n]\cdot[n]\alpha_{n-m}\overline{\beta_{m-n+2}}[n+2]\\ &= \gamma\cdot[n]\alpha_{n-m}\overline{\beta_{m-n+2}}[n+2],\\ \delta' &= [0]\alpha_0\overline{\beta_2}[2]\cdot\cdots\cdot[n-m-2]\alpha_{n-m-2}\overline{\beta_{m-n}}[n-m]\cdot[n]\alpha_{n-m}\overline{\beta_{m-n+2}}[n-m+2]\\ &= \gamma'\cdot[n-m]\alpha_{n-m}\overline{\beta_{m-n+2}}[n-m+2].\end{aligned}$$

Ahora, por el primer párrafo de esta demostración se tiene que

$$[n]\alpha_{n-m}\overline{\beta_{m-n+2}}[n+2] \simeq [n-m]\alpha_{n-m}\overline{\beta_{m-n+2}}[n-m+2],$$

y por hipótesis de inducción $\gamma \simeq \gamma'$. De este modo, por el teorema de concatenación

$$\gamma\cdot[n]\alpha_{n-m}\overline{\beta_{m-n+2}}[n+2] \simeq \gamma'\cdot[n-m]\alpha_{n-m}\overline{\beta_{m-n+2}}[n-m+2],$$

lo que significa que $\delta \simeq \delta'$. □

La técnica utilizada anteriormente es estándar para este estudio. Usando el teorema de factorización, basta descomponer el camino en productos de "subcaminos" más simples y enfocarse únicamente en el subcamino en donde se requiera hacer un análisis. Esto quedará en evidencia en demostraciones posterior.

OBSERVACIÓN 23. En vista del teorema de traslación es suficiente considerar única-

$$
\begin{tikzcd}
B \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & B \arrow[d] & B \arrow[l] \arrow[d] \arrow[dl] \\
B \arrow[r] & B & B \arrow[l] \\
A \arrow[r, "f"] \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "f"] \arrow[d] \arrow[dr, "f"] & B \arrow[u] \arrow[d] & B \arrow[l] \arrow[u] \arrow[ul] \arrow[d] \arrow[dl] \\
A \arrow[r, "f"] & B & B \arrow[l] \\
\bullet A \arrow[r] \arrow[u] \arrow[ur, "f"] & A \arrow[u, "f"] & A \arrow[l] \arrow[ul, "f"] \arrow[u, "f"]
\end{tikzcd}
$$

Figura 3.3: Homotopía: teorema de cancelación.

mente $(0,k)$-caminos, pues todo (m,n)-camino será homotópico a un $(0,k)$-camino con $k = n - m$. Por este motivo es posible referirse únicamente a k-caminos en lugar de $(0,k)$-caminos.

Proposición 3.28 (Teorema de reducción)**.** *Se tienen las siguientes homotopías de caminos para cualquier entero par i tal que $0 \leq j \leq k$:*

$$
\begin{aligned}
[0]\alpha_0\overline{\beta_1}\cdots\alpha_{k-2}\overline{\beta_k}[k] &\simeq [0]\alpha_0\overline{\beta_1}\cdots\overline{\beta_i}1_{A_i}\overline{1_{A_i}}\alpha_i\cdots\alpha_{k-2}\overline{\beta_k}[k+2] \\
&\simeq [0]\alpha_0\overline{\beta_1}\cdots\alpha_i\overline{1_{A_{i+1}}}1_{A_{i+1}}\overline{\beta_{i+2}}\cdots\alpha_{k-2}\overline{\beta_k}[k+2],
\end{aligned}
$$

donde $\alpha_i : A_i \to A_{i+1}$.

Demostración. En virtud del teorema de factorización, es suficiente probar que para el diagrama

$$
A \xrightarrow{f} B \xleftarrow{g} C \xrightarrow{f'} D \xleftarrow{g'} E
$$

se verifican las identidades siguientes:

(1) $[0]f\overline{g}f'\overline{g'}[4] \simeq [0]f\overline{g}1_C\overline{1_C}f'\overline{g'}[6]$

(2) $[0]f\overline{g}[2] \simeq [0]f\overline{1_B}1_B\overline{g}[4]$.

Para probar (1) basta observar la homotopía dada en el diagrama mostrado en la figura 3.4 a la izquierda, y para probar (2) la homotopía dada en el diagrama de la derecha de la misma figura. $\square$

$$
\begin{tikzcd}
E \arrow[r] \arrow[d, "g'"'] \arrow[dr, "g'"] & E \arrow[d, "g'"] \arrow[dl, phantom] & E \arrow[l] \arrow[d] \arrow[dl, "g'"'] \\
D \arrow[r] & D & E \arrow[l, "g'"'] \\
C \arrow[u, "f'"] \arrow[ur, "f'"] \arrow[r, "f'"] \arrow[d] \arrow[dr, "f'"] & D \arrow[u] \arrow[d] & E \arrow[ul, "g'"'] \arrow[u] \arrow[l, "g'"'] \arrow[dl, "g'"'] \arrow[d, "g'"] \\
C \arrow[r, "f'"] & D & D \arrow[l] \\
C \arrow[u, "f'"] \arrow[ur, "f'"] \arrow[r] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, "g"] & C \arrow[u, "f'"] \arrow[d, "g"] & C \arrow[l] \arrow[ul, "f'"'] \arrow[u, "f'"'] \arrow[dl, "g"'] \arrow[d, "g"] \\
B \arrow[r] & B & B \arrow[l] \\
\bullet A \arrow[u, "f"'] \arrow[ur, "f"] \arrow[r] & A \arrow[u, "f"] & A \arrow[l] \arrow[ul, "f"'] \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
C \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, "g"] & C \arrow[d, "g"] & C \arrow[l] \arrow[dl, "g"'] \arrow[d, "g"] \\
C \arrow[r, "g"] & B & B \arrow[l] \\
C \arrow[u] \arrow[ur, "g"] \arrow[r, "g"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, "g"] & B \arrow[u] \arrow[d] & B \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[l] \arrow[dl] \arrow[d] \\
B \arrow[r] & B & B \arrow[l] \\
\bullet A \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "f"] \arrow[r] & A \arrow[u, "f"] & A \arrow[l] \arrow[ul, "f"'] \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}
$$

Figura 3.4: Homotopías: Teorema de reducción

Proposición 3.29 (Teorema de cancelación)**.** *Sea* $[0]\alpha_0\overline{\beta_2}\cdots\alpha_{k-2}\overline{\beta_k}[k]$ *un camino. Para* $i \in \{0,2,\dots,k\}$ *sea* A_i *la imagen de* i *en dicho camino. Sean* $h : A_i \to G$ *y* $h' : G' \to A_{i+1}$ *flechas. Entonces se tienen las siguientes homotopías:*

$$
\begin{aligned}
[0]\alpha_0\overline{\beta_2}\cdots\alpha_{k-2}\overline{\beta_k}[k] &\simeq [0]\alpha_0\overline{\beta_2}\cdots\overline{\beta_i}h\overline{h}\alpha_i\cdots\alpha_{k-2}\overline{\beta_k}[k+2] \\
&\simeq [0]\alpha_0\overline{\beta_2}\cdots\alpha_i\overline{h'}h'\beta_{i+2}\cdots\alpha_{k-2}\overline{\beta_k}[k+2]
\end{aligned}
$$

Demostración. Nuevamente, en virtud del teorema de factorización, basta considerar $A_i = C$ y $A_{i+1} = B$ el diagrama

$$
A \xrightarrow{f} B \xleftarrow{g} C \xrightarrow{f'} D \xleftarrow{g'} E
$$

y probar las dos afirmaciones siguientes:

(1) $[0]f\overline{g}f'\overline{g'}[4] \simeq [0]f\overline{g}h\overline{h}f'\overline{g'}[6]$;

(2) $[0]f\overline{g}[2] \simeq [0]f\overline{h'}h'\overline{g}[4]$.

Considérense los diagramas mostrados en la figura 3.5.

El diagrama de la izquierda es una homotopía de caminos desde $[0]f\overline{g}h\overline{h}f'\overline{g'}[6]$ hacia $[0]f\overline{g}1_C\overline{1_C}f'\overline{g'}[6]$, de modo que por el teorema de reducción se tiene

$$[0]f\overline{g}h\overline{h}f'\overline{g'}[6] \simeq [0]f\overline{g}1_C\overline{1_C}f'\overline{g'}[6] \simeq [0]f\overline{g}f'\overline{g'}[4],$$

lo que prueba (1).

El diagrama de la derecha es una homotopía de caminos desde $[0]f\overline{h'}h'\overline{g}[4]$ hacia el camino $[0]f\overline{1_B}1_B\overline{g}[4]$ y por lo tanto, nuevamente del teorema de reducción se obtiene

$$[0]f\overline{h'}h'\overline{g}[4] \simeq [0]f\overline{1_B}1_B\overline{g}[4] \simeq [0]f\overline{g}[2],$$

lo que prueba (2). □

DEFINICIÓN 3.30. *Sea α un (m,n)-camino de A hacia B en una categoría $\mathscr{C}$. α se dice*

- *centrado si $m = 0$;*
- *reducido si para todo entero par i tal que $m \leq i \leq n$ se tiene que*

$$\alpha(i \to i+1) \neq \alpha(i \to i-1) \quad y \quad \alpha(i \to i+1) \neq \alpha(i+2 \to i+1).$$

Una vez demostrados los resultados anteriores, se presenta un resultado que conjuga a todos los anteriores y que, a su vez, permitirá definir uno de los conceptos claves de esta sección.

TEOREMA 3.30. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría, A, B dos objetos y α un (m,n)-camino de A hacia B. Entonces existe un único ℓ-camino α' que es homotópico tal que ℓ es minimal en el conjunto de todos los enteros pares no negativos k tales que existe un k-camino de A hacia B. Más aún α' es centrado y reducido.*

Demostración. Sea K el conjunto de todos los enteros pares no negativos k tales que existe un k-camino homotópico a α. El teorema de traslación implica que K es no vacío y, por el teorema de buen orden de los números naturales, existe un elemento minimal ℓ de K. Esto proporciona la existencia de un ℓ-camino α' homotópico a α con las condiciones requeridas.

$$
\begin{tikzcd}
E \arrow[r] \arrow[d, "g'"'] \arrow[dr, "g'" description] & E \arrow[d, "g'" description] & E \arrow[l] \arrow[d, "g'"] \arrow[dl, "g'" description] \\
D \arrow[r] & D & D \arrow[l] \\
C \arrow[r] \arrow[u, "f'"] \arrow[ur, "f'" description] \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, "h" description] & C \arrow[u, "f'" description] \arrow[d, "h" description] & C \arrow[l] \arrow[u, "f'"'] \arrow[ul, "f'" description] \arrow[d] \arrow[dl, "h" description] \\
G \arrow[r] & G & C \arrow[l, "h" description] \\
C \arrow[r] \arrow[u, "h"] \arrow[ur, "h" description] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, "g" description] & C \arrow[u, "h" description] \arrow[d, "g" description] & C \arrow[l] \arrow[u] \arrow[ul, "h" description] \arrow[d, "g"] \arrow[dl, "g" description] \\
B \arrow[r] & B & B \arrow[l] \\
\bullet A \arrow[r] \arrow[u, "f"'] \arrow[ur, "f" description] & A \arrow[u, "f" description] & A \arrow[l] \arrow[u, "f"'] \arrow[ul, "f" description]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
C \arrow[r] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, "g" description] & C \arrow[d, "g" description] & C \arrow[l] \arrow[d, "g"] \arrow[dl, "g" description] \\
B \arrow[r] & B & B \arrow[l] \\
G' \arrow[r] \arrow[u, "h'"] \arrow[ur, "h'" description] \arrow[d, "h'"'] \arrow[dr, "h'" description] & G' \arrow[u, "h'" description] \arrow[d, "h'" description] & B \arrow[l, "h'" description] \arrow[u] \arrow[ul] \arrow[d] \arrow[dl] \\
B \arrow[r] & B & B \arrow[l] \\
\bullet A \arrow[r] \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "f" description] & A \arrow[u, "f" description] & A \arrow[l] \arrow[u, "f"'] \arrow[ul, "f" description]
\end{tikzcd}
$$

Figura 3.5: Homotopía: Teorema de cancelación

α' es centrado por construcción, y es reducido pues caso contrario los teoremas de cancelación o reducción permitirían hallar un $(\ell - 2)$-camino homotópico a α, contradiciendo la minimalidad de ℓ.

Del teorema de cancelación es claro que si un n-camino α y un m-camino β son homotópicos, con $m < n$, entonces existen pares de flechas en la imagen del funtor β que pueden cancelarse. En particular esto implica que $\hat{f} = \hat{g}$ si y sólo si $f = g$, y un razonamiento inductivo sobre la longitud de α' muestra que este es único. $\square$

Definición 3.31. *Con la notación del teorema anterior, al camino α' se lo llama el* representante homotópico minimal *de la clase $[\alpha]$.*

Proposición 3.31. *Sea A un objeto en una categoría $\mathscr{C}$. El conjunto $\kappa_1(\mathscr{C}, A)$ formado por todas las clases de equivalencia de lazos con base en A tiene una estruc-*

tura de grupo dada por el producto

$$[\alpha][\beta] = [\alpha \cdot \beta].$$

Demostración. El teorema de asociatividad implica que el producto es asociativo. Si $[\alpha] \in \kappa_1(\mathscr{C}, A)$ entonces $\alpha \cdot \widehat{A} = \alpha$ y gracias al teorema de traslación $\widehat{A} \cdot \alpha \simeq \alpha$. Por ende $[\widehat{A}]$ es la identidad para el grupo. Finalmente, dado $[\alpha] \in \mathscr{C}$, se asume sin pérdida de generalidad que α es un representante homotópico minimal para la clase $[\alpha]$. Se escribe entonces

$$\alpha = [0]\alpha_0\overline{\beta_2} \cdots \alpha_{k-2}\overline{\beta_k}[k].$$

Así, por los teoremas de factorización y cancelación se tiene que

$$\begin{aligned}
\alpha \cdot \overline{\alpha} &= [0]\alpha_0\overline{\beta_2} \cdots \alpha_{k-2}\overline{\beta_k}[k][0]\beta_k\overline{\alpha_{k-2}} \cdots \beta_2\overline{\alpha_0}[k] \\
&= [0]\alpha_0\overline{\beta_2}[2] \cdots [k-2]\alpha_{k-2}\overline{\beta_k}[k][0]\beta_k\overline{\alpha_{k-2}}[2] \cdots [k-2]\beta_2\overline{\alpha_0}[k] \\
&\simeq [0]\alpha_0\overline{\beta_2}[2] \cdots [k-4]\alpha_{k-4}\overline{\beta_{k-2}}[k-2][2]\beta_{k-2}\overline{\alpha_{k-4}}[4] \cdots [k-2]\beta_2\overline{\alpha_0}[k] \\
&\vdots \\
&\simeq [0]1_A\overline{1_A}[2]
\end{aligned}$$

lo que implica que $[\alpha][\overline{\alpha}] = [\widehat{A}]$ y de manera análoga se tiene que $[\overline{\alpha}][\alpha] = [\widehat{A}]$. Por ende $[\alpha]^{-1} = [\overline{\alpha}]$. □

Definición 3.32. *$\kappa_1(\mathscr{C}, A)$ es el primer grupo de homotopía o grupo fundamental de la categoría $\mathscr{C}$ con base en A.*

Proposición 3.32. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría conexa por caminos y A, B dos objetos de esta. Entonces*

$$\kappa_1(\mathscr{C}, A) \cong \kappa_1(\mathscr{C}, B).$$

Demostración. Sea β un camino de A hacia B y $\varphi_\beta : \kappa_1(\mathscr{C}, A) \to \kappa_2(\mathscr{C}, B)$ definida por

$$\varphi_\beta([\alpha]) = [\overline{\beta} \cdot \alpha \cdot \beta].$$

Por el teorema de cancelación se tiene que para todo $[\alpha], [\alpha'] \in \kappa_1(\mathscr{C}, A)$

$$\begin{aligned}
\varphi_\beta([\alpha][\alpha']) &= \varphi_\beta([\alpha \cdot \alpha']) \\
&= [\overline{\beta} \cdot \alpha \cdot \alpha' \cdot \beta] \\
&= [\overline{\beta} \cdot \alpha \cdot \beta \cdot \overline{\beta} \cdot \alpha' \cdot \beta] \\
&= [\overline{\beta} \cdot \alpha \cdot \beta][\overline{\beta} \cdot \alpha' \cdot \beta]
\end{aligned}$$

$$= \varphi_\beta([\alpha])\varphi_\beta([\alpha']),$$

de modo que φ_β es un homomorfismo de grupos.

Un cálculo similar muestra que

$$\varphi_\beta \circ \varphi_{\overline{\beta}} = \mathbb{1}_{\kappa_1(\mathscr{C},B)}$$

y que

$$\varphi_{\overline{\beta}} \circ \varphi_\beta = \mathbb{1}_{\kappa_1(\mathscr{C},A)},$$

por lo que φ_β es un isomorfismo de grupos. □

DEFINICIÓN 3.33. *Se denotará por* **FCat**$_*$ *a la categoría cuyos objetos son pares* $(\mathscr{C}, A)$*, siendo* $\mathscr{C}$ *una categoría finita y* A *un objeto de la misma. Las flechas* $F : (\mathscr{C}, A) \to (\mathscr{D}, B)$ *son funtores* $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ *tales que* $F(A) = B$*.*

Paralelamente, **FCat** *es la categoría cuyos objetos son categorías finitas y las flechas funtores entre estas.*

TEOREMA 3.33. $\kappa_1 : \mathbf{FCat}_* \to \mathbf{Grp}$ *es un funtor covariante, donde si* $F : (\mathscr{C}, A) \to (\mathscr{D}, B)$ *es una flecha de* **FCat**$_*$*, entonces* $F_* = \kappa_1(F) : \kappa_1(\mathscr{C}, A) \to \kappa_1(\mathscr{D}, B)$ *está determinada por*

$$F_*([\alpha]) = [F \circ \alpha].$$

Demostración. Sea $(\mathscr{C}, A)$ un objeto de **FCat**$_*$ y $[\alpha] \in \kappa_1(\mathscr{C}, A)$, entonces

$$(\mathbb{1}_A)_*([\alpha]) = [\mathbb{1}_A \circ \alpha] = [\alpha] = \mathbb{1}_{\kappa_1(\mathscr{C},A)}.$$

Si $F : (\mathscr{B}, B) \to (\mathscr{C}, C)$ y $G : (\mathscr{C}, C) \to (\mathscr{D}, D)$ son flechas componibles, entonces para todo $[\alpha] \in \kappa_1(\mathscr{B}, B)$

$$\begin{aligned}
(G \circ F)_*([\alpha]) &= [(G \circ F) \circ \alpha] \\
&= [G \circ (F \circ \alpha)] \\
&= G_*([F \circ \alpha]) \\
&= G_*(F_*([\alpha])) \\
&= (G_* \circ F_*)([\alpha]).
\end{aligned}$$

Por esto, κ_1 es un funtor covariante. □

3.5. Extendiendo un carcaj ligado a una categoría

El objetivo de esta sección es construir una función $\Xi : \mathbf{FBQuiv} \to \mathbf{FCat}$, siendo **FBQuiv** la clase de carcajes ligados finitos. Una vez construida, a través de una serie de ejemplos se presentará evidencia de la existencia de un isomorfismo

$$\pi_1(\Gamma, I) \cong \kappa_1(\Xi(\Gamma, I))$$

para cada carcaj ligado (Γ, I).

Durante toda esta sección se asumirá que Γ es un carcaj finito, conexo y acíclico, que k es un campo algebraicamente cerrado y que I es un ideal admisible de $k\Gamma$.

DEFINICIÓN 3.34. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría. Una familia de flechas vacías es una colección de flechas $(\uparrow_{AB}\colon A \to B)$, una por cada par de objetos A, B tales que para todo par de flechas $f : B \to C$ y $g : D \to A$ se verifica*

$$f \circ \uparrow_{AB} = \uparrow_{AC} \quad y \quad \uparrow_{AB} \circ g = \uparrow_{DB} .$$

Una flecha de tal colección se dice una flecha vacía. Una categoría con una familia de flechas vacías se dirá una categoría con vacuidad.

PROPOSICIÓN 3.34. *Si $\mathscr{C}$ posee una colección de flechas vacías, dicha colección es única.*

Demostración. Sean $(\uparrow_{AB})$ y $(\uparrow'_{AB})$ dos colecciones de flechas vacías. Entonces

$$\uparrow_{AB} = \uparrow_{AB} \circ \uparrow'_{BB} = \uparrow'_{AB}$$

para todo par de objetos A, B. □

OBSERVACIÓN 24. El concepto de categoría con vacuidad aquí definido es similar al de categoría con ceros (véase por ejemplo [18]) pero no son equivalentes. El concepto de categoría con ceros requiere la presencia de un objeto cero. Esto es, un objeto que es a la vez inicial y terminal. En este caso no se requiere de la presencia de un tal objeto, motivo por el cual no se utiliza la misma terminología.

La motivación para el nombre se expondrá más adelante al definir la extensión Ξ.

Ahora, dada una categoría $\mathscr{C}$ sin vacuidad, es posible extender esta categoría a una categoría con vacuidad $\mathscr{C}^{\uparrow}$ añadiendo una familia de flechas vacías. Existe un funtor obvio $\iota^{\uparrow} : \mathscr{C} \to \mathscr{C}^{\uparrow}$ que es la identidad en objetos y la inclusión canónica en flechas.

DEFINICIÓN 3.35. *Dada una categoría sin vacuidad $\mathscr{C}$, a la categoría con vacuidad $\mathscr{C}^{\uparrow}$ se la denomina la extensión por vacuidad de $\mathscr{C}$.*

OBSERVACIÓN 25. Toda categoría es un carcaj. Los vértices del carcaj son los objetos, las aristas son las flechas, y el dominio y codominio cumplen los papeles de las funciones s y t (como son usalmente notadas). Esto implica la existencia de un *funtor olvidadizo* de la categoría **Cat** hacia la categoría **Quiv** que "se olvida" de la operación de composición entre flechas.

DEFINICIÓN 3.36. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría con vacuidad. Un camino $\alpha : \mathbf{\Lambda} \to \mathscr{C}$ de A hacia B se dice un camino con vacío si existe una flecha $i \to j$ en $\mathbf{\Lambda}$ tal que*

$$\alpha(i \to j) = \uparrow_{\alpha(i)\alpha(j)} .$$

α se dice un camino lleno si no es un camino con vacío.

DEFINICIÓN 3.37. *El primer grupo de homotopía de una categoría con vacuidad $\mathscr{C}$ con base en A es el conjunto $\kappa_1^0(\mathscr{C}, A)$ cuyos elementos son clases de homotopía cuyos representantes homotópicos minimales son llenos, con la operación usual.*

OBSERVACIÓN 26. Dada una categoría con vacuidad $\mathscr{C}$, los dos grupos de homotopía $\kappa_1^0(\mathscr{C}, A)$ y $\kappa_1(\mathscr{C}, A)$ no coinciden en general. Además, a pesar de que $\kappa_1^0(\mathscr{C}, A)$ es efectivamente un grupo y como conjunto pudiese parecer un grupo más pequeño que $\kappa_1(\mathscr{C}, A)$, la realidad es muy distinta. Esto se debe a que en general no se tiene que $\kappa_1^0(\mathscr{C}, A)$ sea un subgrupo de $\kappa_1(\mathscr{C}, A)$. Para visualizar esto, considérese la categoría con vacuidad $\mathscr{C}$ dada por el diagrama

$$\begin{tikzcd}
& B \arrow[dr, "g"] \arrow[dr, dashed, bend left, "\uparrow_{BD}"] & \\
A \arrow[ur, "f"] \arrow[ur, dashed, bend left, "\uparrow_{AB}"] \arrow[dr, "h"'] \arrow[dr, dashed, bend right, "\uparrow_{AC}"'] \arrow[rr, dashed, "\uparrow_{AD}"] & & D \\
& C \arrow[ur, "k"'] \arrow[ur, dashed, bend right, "\uparrow_{CD}"'] &
\end{tikzcd}$$

donde $g \circ f = k \circ h = \uparrow_{AD}$. En este caso se obtiene que

$$\kappa_1(\mathscr{C}, A) \cong 1 \quad \text{y} \quad \kappa_1^0(\mathscr{C}, A) \cong \mathbb{Z},$$

lo que ejemplifica la situación.

DEFINICIÓN 3.38. *Sea* Γ *un carcaj. Se define la* categoría libre sobre Γ *como la categoría* $\mathscr{C}(\Gamma)$ *cuyos objetos son los vértices de* Γ *y donde* $\mathrm{Hom}(x,y) = \Gamma(x,y)$ *si* $x \neq y$, $\mathrm{Hom}(x,x) = \Gamma(x,x) \cup \{e_x\}$ *y la composición es el producto o concatenación de caminos en sentido inverso. Esto es, si* α, β *son caminos de* x *a* y *y de* y *a* z*, respectivamente, entonces* $\beta \circ \alpha = \alpha\beta$*. Más aún, las identidades están dadas por los caminos triviales* e_x *para cada vértice. Además, existe un evidente morfismo de carcajes* $\iota : \Gamma \to \mathscr{C}(\Gamma)$ *que es la identidad en objetos y en aristas.*

El nombre de categoría libre puede justificarse en el hecho de que $\mathscr{C}(\Gamma)$ verifica la siguiente *propiedad universal:* Dada cualquier categoría $\mathscr{D}$ y cualquier morfismo de carcajes $f : \Gamma \to \mathscr{D}$, existe un único funtor covariante $F : \mathscr{C}(\Gamma) \to \mathscr{D}$ tal que

$$F \circ \iota = f.$$

Esta propiedad no será utilizada en este trabajo, por lo que se omite su demostración y se la refiere a [3, págs. 20-23] o a [18, págs. 48-50].

PROPOSICIÓN 3.35. *Dada una categoría* $\mathscr{C}$ *y una función*

$$R : \mathcal{O}(\mathscr{C}) \times \mathcal{O}(\mathscr{C}) \to \bigcup_{A,B \in \mathcal{O}(\mathscr{C})} \mathscr{P}(\mathrm{Hom}(A,B) \times \mathrm{Hom}(A,B))$$

que a cada par de objetos A, B *en* $\mathscr{C}$ *le asigna una relación* $R_{A,B} := R(A,B)$ *sobre* $\mathrm{Hom}(A,B)$*, existen una categoría* $\mathscr{C}/R$ *y un funtor* $Q_R : \mathscr{C} \to \mathscr{C}/R$ *tales que*

(1) *Si* $fR_{A,B}g$ *en* $\mathrm{Hom}(A,B)$ *entonces* $Q_R(f) = Q_R(g)$*, para todo par de objetos* A, B*; y*

(2) *Se verifica la siguiente* propiedad universal: *Si* $Q : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ *es cualquier funtor tal que* $fR_{A,B}g$ *en* $\mathrm{Hom}(A,B)$ *implica que* $Q(f) = Q(g)$ *para todo par de objetos* A, B*, entonces existe un único funtor* $Q' : \mathscr{C}/R \to \mathscr{D}$ *tal que*

$$Q' \circ Q_R = Q.$$

La siguiente demostración es una extensión detallada del sketch presentado en [18, págs. 51-52].

Demostración. Una *congruencia* sobre $\mathscr{C}$ es una función

$$S : \mathcal{O}(\mathscr{C}) \times \mathcal{O}(\mathscr{C}) \to \bigcup_{A,B \in \mathcal{O}(\mathscr{C})} \mathscr{P}(\mathrm{Hom}(A,B) \times \mathrm{Hom}(A,B))$$

que a cada par de objetos A, B le asigna una relación

$$S_{A,B} \subseteq \mathrm{Hom}(A, B) \times \mathrm{Hom}(A, B)$$

que verifica

(i) $R_{A,B}$ es una relación de equivalencia para cada par de objetos A, B; y

(ii) Para todo par de flechas $f, f' \in \mathrm{Hom}(A, B)$ y toda flecha $g : A' \to A$ y $h : B \to B'$ se tiene que

$$f S_{A,B} f' \Rightarrow h \circ f \circ g S_{A',B'} h \circ f' \circ g.$$

Dadas dos funciones

$$R, R' : \mathcal{O}(\mathscr{C}) \times \mathcal{O}(\mathscr{C}) \to \bigcup_{A,B \in \mathcal{O}(\mathscr{C})} \mathscr{P}(\mathrm{Hom}(A, B) \times \mathrm{Hom}(A, B)),$$

se dice que $R \subseteq R'$ si para cada objeto A, B se verifica $R_{A,B} \subseteq R'_{A,B}$. Es claro que $\subseteq$ define una relación de orden parcial en la clase de tales funciones. La función

$$\begin{array}{rccl} S_{max} : & \mathcal{O}(\mathscr{C}) \times \mathcal{O}(\mathscr{C}) & \longrightarrow & \displaystyle\bigcup_{A,B \in \mathcal{O}(\mathscr{C})} \mathscr{P}(\mathrm{Hom}(A, B) \times \mathrm{Hom}(A, B)) \\ & (A, B) & \longmapsto & (S_{max})_{A,B} = \mathrm{Hom}(A, B) \times \mathrm{Hom}(A, B)) \end{array}$$

es trivialmente una congruencia tal que $R \subseteq S_{max}$. Esto implica que el conjunto Σ de congruencias S tales que $R \subseteq S$ es no vacío. Se define con esto una congruencia R', donde

$$R'_{A,B} = \bigcap_{S \in \Sigma} S_{A,B}.$$

Puesto que cada $S_{A,B}$ es una relación de equivalencia, se tiene que $R'_{A,B}$ también es relación de equivalencia y si $f R'_{A,B} f'$ y $g : A' \to A$ y $h : B \to B'$ son flechas, se tiene que $f S_{A,B} f'$ para todo $S \in \Sigma$ y consecuentemente, puesto que los elementos de Σ son congruencias,

$$h \circ f \circ g S_{A,B} h \circ f' \circ g,$$

de donde

$$h \circ f \circ g R'_{A,B} h \circ f' \circ g,$$

por lo que en efecto R' es una congruencia. Por construcción, $R' \in \Sigma$ y $R' \subseteq S$ para todo $S \in \Sigma$, de modo que R' es la congruencia más pequeña tal que $R \subseteq R'$.

Se define entonces $\mathscr{C}/R$ como la categoría cuyos objetos son los mismos objetos de $\mathscr{C}$ donde

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}/R}(A,B) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)/R'_{A,B}$$

para todo par de objetos A, B. Si se denota por $[f]_{A,B}$ a la clase de equivalencia de $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)$ con respecto a la relación de equivalencia $R'_{A,B}$, se define la composición

$$[g]_{B,C} \circ [f]_{A,B} = [g \circ f]_{A,C}.$$

Esta composición está bien definida, pues si $fR_{A,B}f'$ y $gR_{B,C}g'$, entonces

$$g \circ f = g \circ f \circ 1_A R'_{A,C} g \circ f' \circ 1_A = g \circ f' = 1_C \circ g \circ f' R'_{A,C} 1_C g' \circ f' = g' \circ f',$$

de modo que $[g \circ f]_{A,C} = [g' \circ f']_{A,C}$ y por ende la composición no depende del representante elegido para las clases de equivalencia.

Ahora, se construye el funtor $Q_R : \mathscr{C} \to \mathscr{C}/R$. Dicho funtor es la identidad en objetos y asigna a cada flecha $f : A \to B$ su clase de equivalencia $[f]_{A,B}$. Este es un funtor por las construcciones realizadas en esta demostración.

Finalmente, sea $Q : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ un funtor tal que

$$fR_{A,B}g \Rightarrow Q(f) = Q(g)$$

para todo par de objetos A, B y todo par de flechas $f, g \in \mathrm{Hom}(A,B)$. Sea

$$\begin{aligned} S : \quad \mathcal{O}(\mathscr{C}) \times \mathcal{O}(\mathscr{C}) &\longrightarrow \bigcup_{A,B \in \mathcal{O}(\mathscr{C})} \mathscr{P}(\mathrm{Hom}(A,B) \times \mathrm{Hom}(A,B)) \\ (A,B) &\longmapsto \{(f,g) \in (\mathrm{Hom}(A,B))^2 : Q(f) = Q(g)\}. \end{aligned}$$

Es claro que $S_{A,B} := S(A,B)$ es una relación de equivalencia sobre $\mathrm{Hom}(A,B)$ para todo par de objetos A, B en $\mathscr{C}$. Más aún, suponiendo que $fS_{A,B}f'$ y dadas $g : A' \to A$ y $h : B \to B'$ se tiene que $Q(f) = Q(f')$ y consecuentemente

$$\begin{aligned} Q(h \circ f \circ g) &= Q(h) \circ Q(f) \circ Q(g) \\ &= Q(h) \circ Q(f') \circ Q(g) \\ &= Q(h \circ f' \circ g), \end{aligned}$$

por lo que S es una congruencia. Se define entonces $Q' : \mathscr{C}/R \to \mathscr{D}$ del siguiente modo: si A es un objeto en $\mathscr{C}/R$, entonces $Q'(A) = Q(A)$, y si $[f]_{A,B}$ es una flecha en $\mathscr{C}/R$, entonces $Q'([f]_{A,B}) = Q(f)$. El funtor Q' está bien definido en flechas, pues si $[f]_{A,B} = [g]_{A,B}$, entonces $fR_{A,B}g$, pero $R' \subseteq S$ por la minimalidad de R', y consecuentemente $fS_{A,B}g$, lo que implica que $H(f) = H(g)$. La unicidad de Q' es inmediata. $\square$

Ahora se procede a construir la extensión Ξ, que es el objetivo de esta sección.

Dado el carcaj ligado (Γ, I), sea $\overline{\Gamma}_I = \mathscr{C}(\Gamma)^{\uparrow}$ la extensión por vacuidad de la categoría libre sobre Γ. Para cada par de objetos $x, y \in \Gamma_0$, se define la relación $R^I_{x,y}$ en $\mathrm{Hom}_{\overline{\Gamma}_I}(x, y)$ como la relación de equivalencia más pequeña tal que

(1) Si α y β son caminos de x a y tales que $\alpha \sim_{\circ} \beta$, entonces $\alpha R^I_{x,y} \beta$.

(2) Si $\alpha \in I$, entonces $\alpha R^I_{x,y} \uparrow_{xy}$.

Con esto se tiene la función

$$\begin{array}{rccl} R^I: & \mathcal{O}(\mathscr{C}(\Gamma)^{\uparrow}) \times \mathcal{O}(\mathscr{C}(\Gamma)^{\uparrow}) & \longrightarrow & \displaystyle\bigcup_{x,y \in \Gamma_0} \mathscr{P}(\mathrm{Hom}(x, y) \times \mathrm{Hom}(x, y)) \\ & (x, y) & \longmapsto & R^I_{x,y}. \end{array}$$

Nótese que R^I es una función que a cada par de vértices x, y en el carcaj Γ asigna una relación de equivalencia que extiende a la relación $\sim_{\circ}$.

DEFINICIÓN 3.39. *Se define la extensión Ξ del carcaj ligado (Γ, I) como la categoría*

$$\Xi(\Gamma, I) = (\mathscr{C}(\Gamma)^{\uparrow} / R^I).$$

Antes de pasar a presentar ejemplos, se muestran un par de propiedades.

PROPOSICIÓN 3.36. *La categoría $\Xi(\Gamma, I)$ es una categoría con vacuidad.*

Demostración. Por definición de la función R^I, se tiene que para todo par de vértices x, y,

$$[\uparrow_{xy}]_{x,y} = \{\uparrow_{xy}\},$$

y además, si $f : y \to z$ y $g : w \to x$ son flechas en $\mathscr{C}(\Gamma)^{\uparrow}$, entonces

$$[f]_{y,z} \circ [\uparrow_{xy}]_{x,y} = [f \circ \uparrow_{xy}]_{x,z} = [\uparrow_{xz}]_{x,z}$$

y similarmente $[\uparrow_{xy}]_{x,y} \circ [g]_{w,x} = [\uparrow_{wy}]_{w,y}$, de modo que la familia $([\uparrow_{xy}]_{x,y})$ es una familia de flechas vacías para la categoría $\Xi(\Gamma, I)$. $\square$

PROPOSICIÓN 3.37. *La categoría $\Xi(\Gamma, I)$ es finita cuando Γ es un carcaj finito y acíclico.*

Demostración. Puesto que Γ tiene tantos vértices como objetos tiene $\Xi(\Gamma, I)$, basta analizar la cardinalidad de la clase de flechas de $\Xi(\Gamma)$. Dado que Γ es finito y acíclico, existe un número finito de caminos en Γ. Por cada par de vértices, existe además una flecha vacía, por ende, la categoría $\mathscr{C}(\Gamma)^{\uparrow}$ tiene un número finito de flechas. Finalmente, como $Q_{R^I} : \mathscr{C}(\Gamma)^{\uparrow} \to \Xi(\Gamma, I)$ es una sobreyección en flechas, se sigue que $\Xi(\Gamma, I)$ tiene un número finito de flechas, lo que prueba que esta es una categoría finita. $\square$

La construcción de la categoría $\Xi(\Gamma, I)$ puede ser entendida de una manera más intuitiva, a la par que se entiende el porqué de su construcción. El objetivo principal de construir la categoría $\Xi(\Gamma, I)$ es de poder aplicar la teoría de homotopía construida en la sección anterior a dicha categoría, preservando las propiedades homotópicas del carcaj ligado (Γ, I). Para ilustrar la construcción se presenta una serie de ejemplos.

EJEMPLO 31. Considérese el carcaj Γ representado por el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & 3 \\
1 \arrow[r, "\alpha"] & 2 \arrow[ur, "\beta"] \arrow[dr, "\gamma"'] & \\
 & & 4
\end{tikzcd}$$

y ligado por el ideal $I = (\alpha\beta - \alpha\gamma)$. Nótese que en este caso no existen relaciones minimales. Ahora, la categoría libre $\mathscr{C}(\Gamma)$ es la siguiente (se omiten las identidades):

$$\begin{tikzcd}
 & & 3 \\
1 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[urr, bend left, "\alpha\beta"] \arrow[drr, bend right, "\alpha\gamma"'] & 2 \arrow[ur, "\beta"] \arrow[dr, "\gamma"'] & \\
 & & 4
\end{tikzcd}$$

Se tiene entonces que para todo par de vértices x, y, $R^I_{x,y}$ está formado únicamente por pares diagonales, es decir, pares del tipo (σ, σ), siendo σ un camino de x a y, y consecuentemente

$$\begin{tikzcd}
 & & 3 \\
1 \arrow[r, "{[\alpha]}"] \arrow[r, dashed, bend right] \arrow[urr, bend left=40, "{[\alpha\beta]}"] \arrow[urr, dashed, bend left=20] \arrow[drr, bend right=40, "{[\alpha\gamma]}"'] \arrow[drr, dashed, bend right=20] & 2 \arrow[ur, "{[\beta]}"] \arrow[ur, dashed, bend right] \arrow[dr, "{[\gamma]}"'] \arrow[dr, dashed, bend left] & \\
 & & 4
\end{tikzcd}$$

es la categoría $\Xi(\Gamma, I)$, donde las flechas punteadas representan a las flechas vacías y $[\cdot]$ es la clase de equivalencia en la correspondiente relación. Nótese que se han omitido también las flechas vacías $\uparrow_{xx}$ para todo vértice x, para no sobrecargar el diagrama.

Ahora, se procede a calcular los grupos $\pi_1(\Gamma, I)$ y $\kappa_0^1(\Xi(\Gamma, I))$. En el primer caso se tiene que

$$\pi_1(\Gamma, 1) = 1$$

pues mismo carcaj es un árbol maximal de sí mismo. Consecuentemente $N(\Gamma, I, 1) = \langle 1 \rangle$ y por ende

$$\pi_1(\Gamma, I, 1) = 1.$$

Ahora, todos los lazos llenos en la categoría $\Xi(\Gamma, I)$ son homotópicos al lazo trivial $\widehat{1}$. En efecto, se puede verificar esto trivialmente para el lazo $[0]\alpha\overline{1_2}\beta\overline{\alpha\beta}[4]$ usando el hecho de que $\alpha\beta = \beta \circ \alpha$ y el teorema de cancelación. Similarmente para su análogo sustituyendo β por γ. De este modo

$$\kappa_1^0(\Xi(\Gamma, I)) = 1 = \pi_1(\Gamma, I, 1).$$

EJEMPLO 32. Sea Γ el carcaj

$$\begin{tikzcd}
 & & 3 \arrow[dr, "\delta"] & \\
1 \arrow[r, "\alpha"] & 2 \arrow[ur, "\beta"] \arrow[dr, "\gamma"'] & & 5 \\
 & & 4 \arrow[ur, "\epsilon"'] &
\end{tikzcd}$$

ligado por el ideal $I = (\beta\delta - \gamma\epsilon)$. En este caso la categoría libre $\mathscr{C}(\Gamma)$ está dada por

$$\begin{tikzcd}
 & & 3 \arrow[drr, "\delta"] & & \\
1 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[urr, "\alpha\beta"] \arrow[drr, "\alpha\gamma"'] \arrow[rrrr, bend left=60, "\alpha\beta\delta"] \arrow[rrrr, bend right=60, "\alpha\gamma\epsilon"'] & 2 \arrow[ur, "\beta"] \arrow[dr, "\gamma"'] \arrow[rrr, shift left, "\beta\delta"] \arrow[rrr, shift right, "\gamma\epsilon"'] & & & 5 \\
 & & 4 \arrow[urr, "\epsilon"'] & &
\end{tikzcd}$$

Ahora, se tiene que $\beta\delta \sim_\circ \gamma\epsilon$, y consecuentemente $\alpha\beta\delta \sim_\circ \alpha\gamma\epsilon$, por lo que la categoría $\Xi(\Gamma, I)$ luce como se muestra (se omiten las flechas vacías para no sobrecargar el diagrama)

$$
\begin{tikzcd}
 & & 3 \arrow[dr, "{[\delta]}"] & \\
1 \arrow[r, "{[\alpha]}"] \arrow[urr, "{[\alpha\beta]}"] \arrow[drr, "{[\alpha\gamma]}"'] \arrow[rrr, bend left=60, "{[\alpha\beta\delta]=[\alpha\gamma\epsilon]}"] & 2 \arrow[ur, "{[\beta]}"] \arrow[dr, "{[\gamma]}"'] \arrow[rr, "{[\beta\delta]=[\gamma\epsilon]}"] & & 5 \\
 & & 4 \arrow[ur, "{[\epsilon]}"'] &
\end{tikzcd}
$$

en donde $[\cdot]$ indica la clase de equivalencia en de la flecha en su correspondiente relación.

Aquí se tiene fácilmente que $\pi_1(\Gamma, 1) = 1$ pues $\pi_1(\gamma, 1)$ es el grupo libre en un sólo generador, y el subgrupo normal $N(\Gamma, I, 1)$ está generado por el elemento $[\alpha]^{-1}[\beta\delta][\gamma\epsilon]^{-1}[\alpha]$ que también es generador de $\pi_1(\Gamma, 1)$. Por otro lado, una simple verificación muestra directamente que todos los lazos llenos en $\Xi(\Gamma, I)$ con base en 1 son homotópicos a $\widehat{1}$, y por ende

$$\pi_1(\Gamma, I, 1) = \kappa_1^0(\Xi(\Gamma, I), 1).$$

EJEMPLO 33. Los dos ejemplos anteriores no ilustran la necesidad de incluir las flechas vacías en la construcción. Sin embargo el siguiente ejemplo lo hará:

Considérese el carcaj Γ descrito por el diagrama

$$1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3$$

y ligado por el ideal $I = (\alpha\beta)$. En este caso no existen relaciones minimales. La categoría libre $\mathscr{C}(\Gamma)$ es

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[rr, bend left, "\alpha\beta"] & 2 \arrow[r, "\beta"'] & 3
\end{tikzcd}
$$

y la categoría $\Xi(\Gamma, I)$ está dada por

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "{[\alpha]}"] \arrow[r, dashed, bend right] \arrow[rr, dashed, bend left=60, "{[\alpha\beta]=[\uparrow_{13}]}"] & 2 \arrow[r, "{[\beta]}"] \arrow[r, dashed, bend right] & 3
\end{tikzcd}
$$

esto pues $\alpha\beta \in I$. Aquí, nuevamente $[\cdot]$ indica la clase de equivalencia en la respectiva relación y las líneas punteadas son flechas vacías.

Pero, ¿por qué es necesario que $[\alpha\beta]$ sea una flecha vacía? La respuesta está en el hecho de que $\alpha\beta$ pertenece al ideal admisible I, y por ende este es enviado hacia cero al pasar al cociente $k\Gamma/I$. Por ende, se desea que la información que contiene este ideal desaparezca también en la categoría $\Xi(\Gamma, I)$. Es por este motivo que es natural considerar el grupo $\kappa_1^0(\Gamma, I, x_0)$ en lugar del grupo $\kappa_1(\Gamma, I, x_0)$.

En este caso resulta sencillo observar que

$$\pi_1(\Gamma, I, 1) = 1 = \kappa_1^0(\Xi(\Gamma, I), 1).$$

EJEMPLO 34. Sea Γ nuevamente el carcaj

$$\begin{tikzcd}
 & & 3 \arrow[dr, "\delta"] & \\
1 \arrow[r, "\alpha"] & 2 \arrow[ur, "\beta"] \arrow[dr, "\gamma"'] & & 5 \\
 & & 4 \arrow[ur, "\epsilon"'] &
\end{tikzcd}$$

pero esta vez ligado por el ideal $I = (\alpha\beta, \beta\delta + \gamma\epsilon)$. La categoría $\Xi(\Gamma, I)$ es

$$\begin{tikzcd}
 & & 3 \arrow[dr, "{[\delta]}"] & \\
1 \arrow[r, "{[\alpha]}"] \arrow[urr, dashed, "{[\alpha\beta]}"] \arrow[drr, "{[\alpha\gamma]}"'] \arrow[rrr, dashed, bend left=60, "{[\alpha\beta\delta]=[\alpha\gamma\epsilon]}"] & 2 \arrow[ur, "{[\beta]}"] \arrow[dr, "{[\gamma]}"'] \arrow[rr, "{[\beta\delta]=[\gamma\epsilon]}"] & & 5. \\
 & & 4 \arrow[ur, "{[\epsilon]}"'] &
\end{tikzcd}$$

Aquí, puesto que $[\alpha\beta] = [\uparrow_{13}]$ se tiene que

$$[\alpha\beta\delta] = [\delta] \circ [\alpha\beta] = [\uparrow_{15}].$$

Este ejemplo es patológico para la construcción realizada, puesto que sucede lo siguiente: Se tiene que $\alpha\beta \in I$, pero además $\beta\delta \sim_\circ \gamma\epsilon$, por lo cual $\alpha\beta\delta \sim_\circ \alpha\gamma\epsilon$, en donde el segundo término de esta igualdad es no nulo, y esto va en contra de la idea de que debería ser cero, ya que $\alpha\beta\delta \in I$. Un cálculo directo muestra que en este caso

$$\pi_1(\Gamma, I, 1) = 1 = \kappa_1^0(\Xi(\Gamma, I), 1)$$

EJEMPLO 35. Considérese el carcaj

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] & 2. \end{tikzcd}$$

En este caso, $F = (\widehat{f}, \widehat{g})$ y por ende $F^2 = (0)$, lo que implica que el único ideal admisible es el ideal trivial, y consecuentemente la categoría $\Xi(\Gamma, (0))$ es solamente

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend left=40, "f"] \arrow[r, bend left=15, dashed] \arrow[r, bend right=15, dashed] \arrow[r, bend right=40, "g"'] & 2. \end{tikzcd}$$

Aquí se ha denotado por f y g a las imágenes de f y g en la categoría $\Xi(\Gamma, (0))$.

En este caso se tiene que $\pi_1(\Gamma, 1) = \langle f \rangle \cong \langle g \rangle \cong \mathbb{Z}$ y puesto que trivialmente $N(\Gamma, (0), 1) = 0$ se sigue que

$$\pi_1(\Gamma, (0), 1) \cong \mathbb{Z}.$$

Por otro lado se tiene que los representantes homotópicos minimales de los lazos con base en 1 son $\omega_0 := \widehat{1}$, $\omega_1 := [0]f\overline{g}[2]$, $\omega_2 := [0]f\overline{g}f\overline{g}[4], \ldots$ y $\omega_{-1} := [0]g\overline{f}[2]$, $\omega_{-2} := [0]g\overline{f}g\overline{f}[4] \ldots$. Se define entonces la función $\varphi : \mathbb{Z} \to \kappa_1^0(\Xi(\Gamma, (0)), 1)$ tal que $n \mapsto [\omega_n]$. Es claro entonces que φ es un isomorfismo de grupos, y así

$$\kappa_1^0(\Xi(\Gamma, (0)), 1) \cong \mathbb{Z} \cong \pi_1(\Gamma, (0), 1).$$

OBSERVACIÓN 27. Como se observa en los ejemplos, la construcción de la categoría puede ser entendida más cómodamente de manera informal. Nótese que lo que se hace es construir la categoría libre, extenderla por vacuidad e identificar flechas homotópicas entre sí, y aquellas que pertenecen al ideal identificarlas con flechas vacías. Esto equivale a trazar simplemente una flecha por cada clase de homotopía, sin considerar aquellas flechas que pertenecen al ideal, y luego extender el resultado obtenido por vacuidad. Las relaciones de conmutatividad están dadas según la concatenación de caminos y la relación de homotopía natural.

En la siguiente sección se dará un punto de vista geométrico para el cálculo del primer grupo de homotopía de un carcaj, y se exhibirá de manera más clara el por qué de la construcción aquí realizada.

3.6. Espacios clasificadores

Para terminar este capítulo, se presenta un vínculo de la teoría presentada con la teoría topológica. Un espacio clasificador es un complejo celular asociado a un carcaj ligado o a una categoría.

La siguiente construcción fue tomada de [5], al igual que la demostración de los resultados que se presentan.

Sea (Γ, I) un carcaj ligado, con $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1, s, t)$ un carcaj finito, conexo y acíclico. Se define la familia $(\mathcal{C}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como la familia siguiente:

(1) $\mathcal{C}_0 = \Gamma_0$;

(2) $\mathcal{C}_1 = \{\tilde{\sigma}^\circ : \sigma \in C_\Gamma, \sigma \notin I, \sigma \neq e_x, \forall x \in \Gamma_0\}$; y,

(3) $\mathcal{C}_n = \{(\tilde{\sigma}_1^\circ, \ldots, \tilde{\sigma}_n^\circ) : \sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_n \in C_\Gamma, \sigma \notin I, \sigma_i \neq e_x\}$ para todo $n \geq 2$.

Se define también una familia de operadores $\partial_i^n : \mathcal{C}_n \to \mathcal{C}_{n-1}$ para cada índice $i \in \{0, \ldots, n\}$ del siguiente modo:

(1) Si $\boldsymbol{\sigma} = \tilde{\sigma}^\circ$, con $\sigma : x \to y$, entonces $\partial_0^1(\boldsymbol{\sigma}) = y$ y $\partial_1^1(\boldsymbol{\sigma}) = x$.

(2) Si $n \geq 2$ y $\boldsymbol{\sigma} = (\tilde{\sigma}_1^\circ, \ldots, \tilde{\sigma}_n^\circ)$, se define

$$\begin{aligned}
\partial_0^n(\boldsymbol{\sigma}) &= (\tilde{\sigma}_2^\circ, \ldots, \tilde{\sigma}_n^\circ) \\
\partial_i^n(\boldsymbol{\sigma}) &= (\tilde{\sigma}_1^\circ, \ldots, \widetilde{\sigma_i\sigma}_{i+1}^\circ, \ldots, \tilde{\sigma}_n^\circ) \\
\partial_n^n(\boldsymbol{\sigma}) &= (\tilde{\sigma}_1^\circ, \ldots, \tilde{\sigma}_{n-1}^\circ).
\end{aligned}$$

Se escribe ∂_i en lugar de ∂_i^n cuando n es claro para el contexto, y para no sobrecargar la notación.

Se define ahora $\Delta_n = \operatorname{conv}(u_1, \ldots, u_{n+1})$ como la envolvente convexa de los vectores canónicos $u_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, u_{n+1}(0, 0, \ldots, 1)$ en $\mathbb{R}^{n+1}$. Para cada índice $i \in \{1, \ldots, n\}$ sea $\partial_i \Delta^n = \operatorname{conv}(u_1, \ldots, u_{i-1}, u_i, \ldots, u_n)$. Nótese que en particular los conjuntos Δ_n son n-células. La notación Δ_σ^n indica que este es una copia del espacio topológico Δ^n.

Se construye entonces, para (Γ, I), un complejo celular como se indica a continuación:

(1) *0-células:* Sea $\mathcal{B}_0 = \coprod_{x\in\Gamma_0} \Delta_x^0$, con la topología discreta.

(2) *1-células:* Para cada $\sigma \in \mathcal{C}_1$, sea $f_\sigma : \partial\Delta_\sigma \to \mathcal{B}_0$ definida por $f_\sigma(\partial_i \Delta^1_\sigma) = \Delta_{\partial^1_i \sigma}$. Sea

$$f_1 = \coprod_{\sigma \in \mathcal{C}_1} f_\sigma$$

y con ello se define

$$\mathcal{B}_1 = \left(\coprod_{\sigma \in \mathcal{C}_1} \Delta^1_\sigma \right) \amalg_{f_1} \mathcal{B}_0.$$

Sea

$$p_1 : \left(\coprod_{\sigma \in \mathcal{C}_1} \Delta^1_\sigma \right) \amalg \mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}_1$$

la proyección canónica.

(3) *n-células:* Para $n \geq 2$, asuma que ya se ha construido $\mathcal{B}_{n-1}$. Sea la función $q_{\partial^n_i \sigma} : \Delta^{n-1}_{\partial^n_i \sigma} \to \coprod_{\tau \in \mathcal{C}_{n-1}} \Delta^{n-1}_\tau$ la inclusión canónica y sea $f_\sigma : \partial\Delta^n_\sigma \to \mathcal{B}_{n-1}$ la función definida por

$$f_\sigma(\partial_j \Delta^n_\sigma) = (p_{n-1} \circ q_{\partial^n_i \sigma})(\Delta^{n-1}_{\partial_j \sigma}),$$

que es continua gracias al lema del pegado. Sea ahora

$$f_n = \coprod_{\sigma \in \mathcal{C}_n} f_\sigma$$

y con ello defínase

$$\mathcal{B}_n = \left(\coprod_{\sigma \in \mathcal{C}_n} \Delta^n_\sigma \right) \amalg_{f_n} \mathcal{B}_{n-1},$$

con

$$p_n : \left(\coprod_{\sigma \in \mathcal{C}_n} \Delta^n_\sigma \right) \amalg \mathcal{B}_{n-1} \to \mathcal{B}_n$$

la proyección canónica.

Ahora, puesto que el carcaj es finito y acíclico y el ideal I es ligado, se tiene que existe un m tal que $\mathcal{C}_n = \emptyset$ para todo $n \geq m$, de modo que el proceso anterior termina en cierta etapa.

DEFINICIÓN 3.40. *Al complejo celular construido en los párrafos precedentes se lo denomina el* espacio clasificador *(o espacio topológico asociado, aunque nunca se utilizará esta denominación) del carcaj ligado (Γ, I) y se lo denota por $\mathcal{B}(\Gamma, I)$.*

EJEMPLO 36. Sea Γ el carcaj

$$\begin{tikzcd}
 & & 3 \\
1 \arrow[r, bend left, "\alpha"] \arrow[r, bend right, "\beta"'] & 2 \arrow[ur, "\gamma"] \arrow[dr, "\delta"'] & \\
 & & 4
\end{tikzcd}$$

ligado por el ideal $I = (\alpha\gamma - \beta\gamma, \alpha\delta - \beta\delta)$. Las relaciones minimales en I son solamente $\alpha\gamma - \beta\gamma$ y $\alpha\delta - \beta\delta$, de modo que se tiene:

- 1-*células:* $\widetilde{\alpha}^\circ, \widetilde{\beta}^\circ, \widetilde{\gamma}^\circ, \widetilde{\delta}^\circ, \widetilde{\alpha\gamma}^\circ = \widetilde{\beta\gamma}^\circ$ y $\widetilde{\alpha\delta}^\circ = \widetilde{\beta\delta}^\circ$.

- 2-*células:* $(\widetilde{\alpha}^\circ, \widetilde{\gamma}^\circ) = (\widetilde{\beta}^\circ, \widetilde{\gamma}^\circ)$ y $(\widetilde{\alpha}^\circ, \widetilde{\delta}^\circ) = (\widetilde{\beta}^\circ, \widetilde{\delta}^\circ)$.

No existen células de mayores dimensiones. Con esto, el espacio clasificador obtenido, $\mathcal{B}(\Gamma, I)$, es un complejo celular homeomorfo a la esfera S^2.

EJEMPLO 37 (Suspensión)**.** Dado un espacio topológico X, su *suspensión* se define como el espacio topológico $S(X)$ dado por

$$S(X) = X \times [0,1]/\sim$$

siendo $\sim$ la relación de equivalencia más pequeña tal que $(x, 0) \sim (y, 0)$ y $(x, 1) \sim (y, 1)$ para todo $x, y \in X$. Nótese que la función

$$\begin{array}{rccc}
\varphi_n : & S^{n+1} & \longrightarrow & S(S^n) \\
 & (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) & \longmapsto & [((x_1, \ldots, x_n), (1 + x_{n+1})/2)]
\end{array}$$

es un homeomorfismo entre los espacios S^{n+1} y $S(S^n)$.

Dado un vértice x en un carcaj Γ, se dice que este es un *punto de ramificación* de Γ si existen al menos dos aristas distintas α y β tales que $s(\alpha) = s(\beta) = x$.

Dado un carcaj ligado y acíclico (Γ, I) se define su *suspensión* como el carcaj ligado $S(\Gamma, I) = (S(\Gamma), S(I))$, donde

- $S(\Gamma)_0 = \Gamma_0 \cup \{x_1, x_2\}$, siendo x_1, x_2 dos elementos que no pertenecen a Γ_0.

- Por cada vértice $x \in \Gamma_0$ tal que $s(\alpha) \neq x$ para todo $\alpha \in \Gamma_1$ se añade una arista $\alpha_x : x \to x_1$ y $\beta_x : x \to x_2$ y de este modo

$$S(\Gamma)_1 = \Gamma_1 \cup \{\alpha_x, \beta_x : x \in \Gamma_0, s(\alpha) \neq x, \forall \alpha \in \Gamma_1\}.$$

- $S(I)$ es el ideal de $kS(\Gamma)$ generado por:

  (1) Los elementos de I,

  (2) Las relaciones
  $$\sum_{\alpha\in\Gamma(x_0,x)} \alpha\alpha_x \quad \text{y} \quad \sum_{\alpha\in\Gamma(x_0,x)} \alpha\beta_x,$$
  donde $x_0 \neq x \in \Gamma_0$ son tales que $s(\alpha) \neq x$ para todo $\alpha \in \Gamma_1$ y x_0 es un punto de ramificación.

Nótese que puesto que Γ es finito y acíclico, existe un camino α_0 de longitud maximal, dígase n, y por ende $F_S^{n+1} \subseteq S(I) \subseteq F_S^2$, donde F_S es el ideal de $kS(\Gamma)$ generado por todos los caminos en $S(\Gamma)$, lo que implica que $S(I)$ es en efecto un ideal admisible, y por ende $S(\Gamma, I)$ es un carcaj ligado.

Más aún, puesto que Γ es finito y acíclico, existe al menos un vértice $x \in \Gamma_0$ tal que $s(\alpha) \neq x$ para todo $\alpha \in \Gamma_1$. En efecto, si esto fuese falso, dado un vértice $x_0 \in \Gamma_0$ existiría $\alpha_0 \in \Gamma_1$ tal que $s(\alpha) = x_0$. Luego, existe $\alpha_1 \in \Gamma_1$ tal que $s(\alpha_1) = t(\alpha_0)$, y procediendo recursivamente se tiene una sucesión $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de aristas de Γ tal que $s(\alpha_0) = x_0$ y $s(\alpha_{n+1}) = t(\alpha_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Puesto que Γ es finito, existen $m < n$ tales que $s(\alpha_m) = t(\alpha_n)$ y por ende $\alpha_m\alpha_{m+1}\cdots\alpha_n$ sería un ciclo orientado con base en $s(\alpha_m)$, lo que es imposible ya que Γ es acíclico.

Así, dado un carcaj ligado finito y acíclico (Γ, I) siempre es posible construir su suspensión $S(\Gamma, I)$. Más aún, omitiendo los ideales, dado un carcaj Γ siempre es posible construir el carcaj $S(\Gamma)$. Este será llamado, de igual manera, la *suspensión* de Γ.

Sea ahora Γ el carcaj

$$\begin{tikzcd}
 & 2 \arrow[dr, "\gamma"] & \\
1 \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dr, "\beta"'] & & 4 \\
 & 3 \arrow[ur, "\delta"'] &
\end{tikzcd}$$

ligado por el ideal $I = (\alpha\gamma, \beta\delta)$. No existen relaciones minimales en este caso, por ende el espacio clasificador es homeomorfo a S^1. Ahora, la suspensión de (Γ, I) es el carcaj

$$\begin{tikzcd}
 & 2 \arrow[dr, "\gamma"] & & x_1 \\
1 \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dr, "\beta"'] & & 4 \arrow[ur, "\alpha_4"] \arrow[dr, "\beta_4"'] & \\
 & 3 \arrow[ur, "\delta"'] & & x_2
\end{tikzcd}$$

ligado por el ideal

$$S(I) = (\alpha\gamma, \beta\delta, \alpha\gamma\alpha_4 + \beta\delta\alpha_4, \alpha\gamma\beta_4 + \beta\delta\beta_4).$$

El espacio clasificador $\mathcal{B}(S(\Gamma, I))$ es homeomorfo a S^2. Se tiene en este caso que

$$S(\mathcal{B}(\Gamma, I)) \cong \mathcal{B}(S(\Gamma, I)).$$

Resulta interesante plantearse la interrogante: Dado un carcaj ligado (Γ, I), donde Γ es finito y acíclico, ¿es verdad que $S(\mathcal{B}(\Gamma, I)) \cong \mathcal{B}(S(\Gamma, I))$? Esta pregunta no será analizada en este trabajo y se deja para investigaciones posteriores.

El resultado central de esta sección es el siguiente, y se encuentra en [5].

TEOREMA 3.38. *Sea (Γ, I) un carcaj ligado finito y acíclico. Entonces*

$$\pi_1(\Gamma, I) \cong \pi_1(\mathcal{B}(\Gamma, I)).$$

Demostración. Sean $x_0 \in \mathcal{B} = \mathcal{B}(\Gamma, I)$ (al que identificamos con su preimagen en el carcaj Γ), T un árbol maximal de Γ y M la imagen de T en $\mathcal{B}$. Por cada 2-célula e^2_λ de $\mathcal{B}$, sea α_e un lazo con base en alguna 0-célula $x \in \partial e^2_\lambda$ y que recorre ∂e^2_λ exactamente una vez. Sea β_x un camino contenido en M de x_0 a x (un tal camino existe pues T es maximal). Se escribe

$$\gamma_e = [\beta_x \cdot \alpha_e \cdot \overline{\beta_x}].$$

Sea G el grupo libre sobre la colección de 1-células de $\mathcal{B}$ y sea

$$N = N_G(\{e^n_\lambda : e^n_\lambda \text{ es una } n\text{-célula de } M\} \cup \{\gamma_e : e^2_\lambda \text{ es una 2-célula de } \mathcal{B}\}).$$

Se afirma entonces que $\pi_1(\mathcal{B}) \cong G/N$. El resultado se realiza por inducción sobre el número de 2-células de $\mathcal{B}$ (el cual es finito pues Γ es finito y acíclico e I es admisible). El paso inductivo es una aplicación del caso base, por ende basta demostrar el resultado para el caso de que $\mathcal{B}$ consta de solamente una 2-célula. Esta es una aplicación del teorema de Seifert-van Kampen: Sean $y \in e^2_\lambda$, $U = \mathcal{B} \setminus \{y\}$ y $V = e^2_\lambda$, de modo que $\{U, V\}$ es un recubrimiento abierto de $\mathcal{B}$, V es contractible y $\mathcal{B} \setminus e_\lambda^2$ es un retracto por deformación de U. Considérese el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
& \pi_1(U) \arrow[dr, "\psi_1"] & \\
\pi_1(U \cap V) \arrow[ur, "\varphi_1"] \arrow[rr, "\psi_3"] \arrow[dr, "\varphi_2"'] & & \pi_1(\mathcal{B}) \\
& \pi_1(V), \arrow[ur, "\psi_2"'] &
\end{tikzcd} \tag{3.1}$$

donde cada homomorfismo es inducido por las inclusiones canónicas. Ahora, puesto que V es contractible, $\pi_1(V) = 1$, de donde φ_2 y ψ_2 son homomorfismos triviales. Esto implica que $\psi_1 \circ \varphi_1 = \psi_3 = \psi_2 \circ \varphi_2$ es trivial y por ende

$$\operatorname{im}(\varphi_1) \subseteq \ker(\psi_1).$$

Más aún, por el Lema 2.26 se tiene que ψ_1 es una sobreyección y consecuentemente

$$\pi_1(\mathcal{B}) \cong \pi_1(U) / \ker(\psi_1).$$

Por el teorema de Seifert-van Kampen $\pi_1(\mathcal{B})$ es el colímite del sistema directo formado por los grupos

$$\pi_1(U \cap V), \quad \pi_1(U) \quad \text{y} \quad \pi_1(V).$$

Sea $H = \pi_1(U)/N_{\pi_1(U)}(\operatorname{im}(\varphi_1))$, sea $\rho_1 : \pi_1(U) \to H$ la proyección canónica y $\rho_2 : \pi_1(V) \to \pi_1(\mathcal{B})$ y $\rho_3 : \pi_1(U \cap V) \to \pi_1(\mathcal{B})$ homomorfismos triviales. Se tiene entonces que $\langle H, \rho_i \rangle$ es un blanco del sistema directo en consideración, por ende existe un homomorfismo de grupos $\sigma : \pi_1(\mathcal{B}) \to H$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
& \pi_1(\mathcal{B}) \arrow[dd, "\sigma"] \\
\pi_1(U) \arrow[ur, "\psi_1"] \arrow[dr, "\rho_1"] & \\
& H
\end{tikzcd}$$

conmuta. Esto implica que $\sigma \circ \psi_1 = \rho_1$. Consecuentemente, si $x \in \ker(\psi_1)$ entonces $1 = \sigma(\psi_1(x)) = \rho_1(x)$, y por ende

$$\ker(\psi_1) \subseteq \ker(\rho_1) = N_{\pi_1(U)}(\operatorname{im}(\varphi_1)).$$

Por otro lado, como $\operatorname{im}(\varphi_1) \subseteq \ker(\psi_1)$, entonces $N_{\pi_1(U)}(\operatorname{im}(\varphi_1)) \subseteq \ker(\psi_1)$ y por ende

$$N_{\pi_1(U)}(\operatorname{im}(\varphi_1)) = \ker(\psi_1).$$

Un razonamiento similar a la demostración del Teorema 3.8 muestra que

$$\pi_1(U) = G \quad \text{y} \quad \ker(\psi_1) = N.$$

Así $\pi_1(\mathcal{B}) \cong G/N$.

Sea ahora F el grupo libre sobre Γ_1 y $K \leq F$ el subgrupo normal de F generado por los elementos de T y por los elementos de la forma

$$(\alpha_1 \cdots \alpha_r)(\beta_1 \cdots \beta_s)^{-1}$$

donde $\alpha_1 \cdots \alpha_r$ y $\beta_1 \cdots \beta_s$ son dos caminos que aparecen en la misma relación minimal. Entonces $\pi_1(\mathcal{B}) \cong F/K$. En efecto, sea $\Phi : F \to G/N$ el homomorfismo definido por $\Phi(\alpha) = \widetilde{\alpha}^{\circ} N$ para cada generador $\alpha \in F$. Por construcción se tiene que $K \subseteq \ker(\Phi)$ y por el teorema de Emmy Noether se sigue que Φ induce un homomorfismo $\overline{\Phi} : F/K \to G/N$ tal que $\overline{\Phi}(\alpha K) = \widetilde{\alpha}^{\circ} N$. Ahora, sí $\widetilde{w}^{\circ}$ es una 1-célula en $\mathcal{B}$, existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in C_\Gamma$ tal que $w \sim_\circ \alpha_1 \cdots \alpha_r$ y $\alpha_1 \cdots \alpha_r \notin I$. Se define entonces $\Psi : G \to F/K$ mediante $\Psi(\widetilde{w}^{\circ}) = \alpha_1 \cdots \alpha_r K$. Nótese que si $\alpha_1 \cdots \alpha_r \sim_\circ \beta_1 \cdots \beta_s$, entonces por la definición de K se sigue que $\alpha_1 \cdots \alpha_r K = \beta_1 \cdots \beta_s K$, y por ende Ψ está bien definido. Más aún, por construcción se tiene que $N \subseteq \ker(\Psi)$. Nuevamente el teorema de Emmy Noether implica que Ψ induce un homomorfismo de grupos $\overline{\Psi} : G/N \to F/K$ tal que $\overline{\Psi}(\widetilde{w}^{\circ} N) = \alpha_1 \cdots \alpha_r K$. Con esto, es inmediato que $\overline{\Phi} \circ \overline{\Psi} = \mathbb{1}_{G/N}$ y $\overline{\Psi} \circ \overline{\Phi} = \mathbb{1}_{F/K}$, lo que implica que

$$\pi_1(\mathcal{B}) \cong G/N \cong F/K.$$

Finalmente, se sigue por construcción que $\pi_1(\Gamma, I) \cong F/K$ y así

$$\pi_1(\mathcal{B}(\Gamma, I)) \cong \pi_1(\Gamma, I),$$

como se deseaba. □

EJEMPLO 38. Sea γ el carcaj

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend left, "\alpha"] \arrow[r, bend right, "\beta"'] & 2 \arrow[r, bend left, "\gamma"] \arrow[r, bend right, "\delta"'] & 3 \end{tikzcd}$$

ligado por el ideal $I = (\alpha\gamma + \beta\delta, \alpha\delta + \beta\gamma)$. Se tiene que $\mathcal{B}(\Gamma, I)$ es homeomorfo a $\mathbb{R}P^2$, el plano proyectivo real, el mismo que está definido por

$$\mathbb{R}P^2 = [0,1] \times [0,1]/\sim$$

siendo $\sim$ la relación de equivalencia más pequeña tal que $(x,0) \sim (1-x,1)$ y $(0,x) \sim (1,1-x)$, para todo $x \in [0,1]$. Este homeomorfismo está dado de tal modo que α, β, γ y δ se aplican homeomórficamente sobre la imagen de los conjuntos $a' = \{0\} \times [0,1]$, $b' = \{1\} \times [0,1]$, $c' = [0,1] \times \{0\}$ y $d' = [0,1] \times \{1\}$, respectivamente. Esto implica que

$$\pi_1(\Gamma, I) \cong \pi_1(\mathbb{R}P^2).$$

Por ende, el cálculo de $\pi_1(\Gamma, I)$ se reduce al de $\pi_1(\mathbb{R}P^2)$. Para esto se hace uso del teorema de Siefert-van Kampen: Sean a, b, c, d las imágenes de a', b', c', d' en $\mathbb{R}P^2$, de modo que $a = b$ y $c = d$. Haciendo uso de la notación introducida en la demostración del Teorema 3.38, se tiene que G es el grupo libre con base $\{a, c\}$ y que N es el subgrupo normal generado por los elementos ac y ac^{-1}. De este modo, $\pi_1(\mathbb{R}P^2) \cong G/N$. Se define $\varphi : G \to \mathbb{Z}_2$ tal que $\varphi(a) = \varphi(c) = 1$. Entonces $\ker(\varphi) = N$ y por el primer teorema de isomorfismos se tiene que $G/N \cong \mathbb{Z}_2$, y por ende

$$\pi_1(\Gamma, I) \cong \pi_1(\mathbb{R}P^2) \cong \mathbb{Z}_2.$$

De manera similar, dada una categoría $\mathscr{C}$ se puede asociar a esta un espacio topológico. La única variante con la definición de carcaj ligado es que en este caso, las n-células son n-uplas $(f_1, \ldots, f_n)$ donde el dominio de f_i coincide con el codominio de f_{i-1} para todo i. Se denota por $\mathcal{N}(\mathscr{C})$ a este espacio topológico y se lo llama el *espacio clasificador de la categoría*.

Si $\mathscr{C}$ es una categoría con vacuidad, se consideran como n-células a las n-uplas $(f_1, \ldots, f_n)$ de flechas tales que el dominio de de f_i coincide con el codominio de f_{i-1} y tales que además ninguna flecha f_i es vacía. Al complejo celular construido a partir de esto se lo llama el *espacio clasificador de la categoría con vacuidad* $\mathscr{C}$ y se lo denota por $\mathcal{N}^0(\mathscr{C})$.

En los comentarios finales a este trabajo se plantean futuras investigaciones en lo referente a la relación entre los espacios $\mathcal{B}(\Gamma, I)$, $\mathcal{N}(\Xi(\Gamma, I))$ y $\mathcal{N}^0(\Xi(\Gamma, I))$ y a sus grupos fundamentales.

Capítulo 4

Álgebra Diferencial y Cohomología de Hochschild

El objetivo de este capítulo es comparar los resultados obtenidos en el capítulo anterior con la cohomología de Hochschild del álgebra de caminos de un carcaj.

Para ello, primero se desarrolla brevemente la teoría de álgebras de Lie y álgebras diferenciales, para posteriormente construir los grupos de cohomología de Hochschild y caracterizar a los dos primeros usando las técnicas del álgebra diferencial.

Para terminar, se presentan ejemplos que evidencian la ausencia de una relación natural o inmediata entre el grupo de homotopía de la extensión categorial ligada de un carcaj ligado finito acíclico y la cohomología de su álgebra de caminos.

4.1. Álgebras de Lie y derivaciones

En el ejemplo 8 a un álgebra asociativa A sobre un anillo conmutativo con unidad se le dotó de un nuevo producto, dándole una nueva estructura de álgebra, llamada el álgebra de Lie asociada a A y denotada por A^-. En esta sección se generaliza tal idea y se estudian las principales propiedades de esta generalización. Una fuente con información más extensa y detallada sobre álgebras de Lie es [10].

Durante toda esta sección, k será un campo.

Definición 4.1. *Sea L un k-espacio vectorial. Un* corchete de Lie *es una aplicación bilineal $[\cdot,\cdot] : L \times L \to L$ que verifica las condiciones siguientes:*

(1) Anticonmutatividad: Para todo $x \in L$, $[x, x] = 0$.

(2) *Identidad de Jacobi: Para todo $x, y, z \in L$ se tiene la igualdad*

$$[[x,y],z] + [[y,z],x] + [[z,x],y] = 0.$$

Al par $(L, [\cdot,\cdot])$ se lo llama una k-álgebra de Lie.

EJEMPLOS 39.

- Dada una k-álgebra asociativa A, el álgebra de Lie sobre A, A^-, es un álgebra de Lie.

- La forma bilineal $(x,y) \mapsto [x,y] = 0$ dota a cualquier k-espacio vectorial de una estructura de álgebra de Lie. En tal caso se dice que el álgebra de Lie es *conmutativa*.

- Considérese el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ con el corchete de Lie

  $$[x,y] = x \wedge y = (y_1 z_2 - y_2 z_1, x_3 z_1 - x_1 z_3, x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

  para vectores $x = (x_1, x_2, x_3)$ y $y = (y_1, y_2, y_3)$. Es conocido que tal producto (llamado también producto cruz o producto vectorial) verifica la anticonmutatividad y la identidad de Jacobi, dotando a $\mathbb{R}^3$ de una estructura de álgebra de Lie.

- Sea V un k-espacio vectorial. El espacio $\mathrm{End}(V)$ de aplicaciones lineales de V hacia V puede dotarse de una estructura de álgebra asociativa mediante el producto de composición. Esto es, si $S, T \in \mathrm{End}(V)$, entonces $ST = S \circ T$. Se tiene entonces el álgebra de Lie $(\mathrm{End}(V))^-$, con el corchete

  $$[S,T] = ST - TS = S \circ T - T \circ S.$$

OBSERVACIÓN 28. Como el caso de toda álgebra, para un álgebra de Lie se puede definir ideales, subálgebras, etc. En tal caso estas estructuras serán referidas con el calificativo "de Lie". Esto significa que se referirán como ideales de Lie, subálgebras de Lie, etc.

PROPOSICIÓN 4.1. *Sea L un álgebra de Lie con corchete de Lie $[\cdot,\cdot]$. Se verifican las siguientes propiedades:*

(1) *Para todo $x, y \in L$, $[x,y] = -[y,x]$;*

(2) *La identidad de Jacobi es equivalente a la identidad*

$$[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0.$$

Demostración. Sean $x, y \in L$. Entonces, de la anticonmutatividad se tiene que

$$0 = [x+y, x+y] = [x,x] + [x,y] + [y,x] + [y,y] = [x,y] + [y,x]$$

de donde se sigue la primera afirmación. La segunda afirmación es consecuencia inmediata de la primera. □

DEFINICIÓN 4.2. *Sea $(L, [\cdot,\cdot])$ un álgebra de Lie. Para cada $a \in L$ se define el adjunto de a como el operador lineal*

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{ad}_a : & L & \longrightarrow & L \\ & x & \longmapsto & \mathrm{ad}_a(x) = [a,x]. \end{array}$$

PROPOSICIÓN 4.2. *En un álgebra de Lie L con corchete de Lie $[\cdot,\cdot]$ se verifican las siguientes propiedades:*

(1) *Para todo $x, y, z \in L$*

$$\mathrm{ad}_x([y,z]) = [\mathrm{ad}_x(y), z] + [y, \mathrm{ad}_x(z)];$$

(2) *Para todo $x, y \in L$*

$$\mathrm{ad}_{[x,y]} = [\mathrm{ad}_x, \mathrm{ad}_y].$$

Más aún, cada una de estas identidades caracteriza a la identidad de Jacobi.

Demostración. (1) Sean $x, y, z \in L$. Entonces, por la identidad de Jacobi

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}_x([y,z]) = [x,[y,z]] &= -[y,[z,x]] - [z,[x,y]] = [[x,y],z] + [y,[x,z]] \\ &= [\mathrm{ad}_x(y), z] + [y, \mathrm{ad}_x(z)]. \end{aligned}$$

Recíprocamente se tiene que

$$\begin{aligned} [x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] &= \mathrm{ad}_x([y,z]) - [y,[x,z]] - [[x,y],z] \\ &= \mathrm{ad}_x([y,z]) - [\mathrm{ad}_x(y), z] - [y, \mathrm{ad}_x(z)] = 0. \end{aligned}$$

(2) Sean $x, y, z \in L$. Entonces

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}_{[x,y]}(z) &= [[x,y],z] = -[[y,z],x] - [[z,x],y] \\ &= [x,[y,z]] - [y,[x,z]] = \mathrm{ad}_x([y,z]) - \mathrm{ad}_y([x,z]) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathrm{ad}_x(\mathrm{ad}_y(z)) - \mathrm{ad}_y(\mathrm{ad}_x(z)) \\
&= (\mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_y - \mathrm{ad}_y \circ \mathrm{ad}_x)(z) \\
&= [\mathrm{ad}_x, \mathrm{ad}_y](z),
\end{aligned}
$$

de donde $\mathrm{ad}_{[x,y]} = [\mathrm{ad}_x, \mathrm{ad}_y]$.

La implicación recíproca se tiene deshaciendo los cálculos anteriormente realizados. □

DEFINICIÓN 4.3. *Sea A una k-álgebra. Una derivación u operador diferencial es un operador lineal $\delta : A \to A$ que verifica la regla de Leibniz:*

$$\delta(xy) = \delta(x)y + x\delta(y),$$

para todo $x, y \in A$. Si L es un álgebra de Lie, una derivación de Lie es un operador lineal $\delta : L \to L$ que verifica

$$\delta([x,y]) = [\delta(x), y] + [x, \delta(y)],$$

para todo $x, y \in L$

EJEMPLO 40. Sea $C^\infty[a,b]$ el álgebra de funciones infinitamente diferenciables sobre el intervalo $[a,b]$ a valores reales. Entonces el operador $\delta : C^\infty[a,b] \to C^\infty[a,b]$ definido por la derivada $\delta(x) = x'$ es una derivación. De manera más general, si $C^\infty(\Omega)$ es el espacio de funciones infinitamente diferenciables sobre un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, entonces los operadores $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ son derivaciones.

PROPOSICIÓN 4.3. *Toda derivación sobre un álgebra asociativa A es una derivación de Lie en el álgebra de Lie A^-.*

Demostración. La verificación es inmediata: Si $\delta : A \to A$ es una derivación, entonces

$$
\begin{aligned}
\delta([x,y]) &= \delta(xy - yx) = \delta(xy) - \delta(yx) \\
&= \delta(x)y + x\delta(y) - \delta(y)x - y\delta(x) \\
&= [\delta(x), y] + [x, \delta(y)]
\end{aligned}
$$

para todo $x, y \in A$. □

PROPOSICIÓN 4.4. *Sea A un álgebra asociativa. Para todo $a \in A$, ad_a es una derivación sobre A y por ende una derivación de Lie sobre A^-*

Demostración. Dados $x, y \in A$ se tiene

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}_a(xy) &= a(xy) - (xy)a \\ &= (ax)y - (xa)y + x(ay) - x(ya) \\ &= (ax - xa)y + x(ay - ya) \\ &= [a, x]y + x[a, y] \\ &= \mathrm{ad}_a(x)y + x\mathrm{ad}_a(y),\end{aligned}$$

como se deseaba. □

DEFINICIÓN 4.4. *Sea A un álgebra asociativa. Al álgebra de Lie de todas las derivaciones en A con el producto de Lie*

$$[\delta_1, \delta_2] = \delta_1 \circ \delta_2 - \delta_2 \circ \delta_1$$

la llamaremos álgebra de derivaciones *sobre A y será notada por $\mathrm{Der}(A)$.*

$\delta \in \mathrm{Der}(A)$ se dice una derivación interna *si existe $x \in A$ tal que $\delta = \mathrm{ad}_x$, caso contrario se dice una* derivación externa*. La subálgebra de derivaciones internas será notada por $\mathrm{InnDer}(A)$.*

Un álgebra diferencial *es una $(n+1)$-upla $(A, \delta_1, \dots, \delta_n)$ donde A es un álgebra asociativa y $\delta_1, \dots, \delta_n$ son derivaciones sobre A.*

PROPOSICIÓN 4.5. *Sea A un álgebra asociativa. La función*

$$\begin{array}{rccc}\mathrm{ad}: & A^- & \longrightarrow & \mathrm{Der}(A) \\ & a & \longmapsto & \mathrm{ad}_a\end{array}$$

es un homomorfismo de álgebras de Lie cuyo núcleo es $Z(A)$. Además, $\mathrm{InnDer}(A)$ es un ideal de Lie del álgebra de Lie $\mathrm{Der}(A)$.

Demostración. El hecho de que ad sea un homomorfismo de álgebras de Lie proviene de la caracterización de la identidad de Jacobi:

$$\mathrm{ad}_{[x,y]} = [\mathrm{ad}_x, \mathrm{ad}_y]$$

para todo $x, y \in A$. Ahora

$$x \in \ker(\mathrm{ad}) \Leftrightarrow \mathrm{ad}_x = 0 \Leftrightarrow (\forall y \in A) xy - yx = 0 \Leftrightarrow x \in Z(A).$$

Finalmente, sea $\delta \in \mathrm{Der}(A)$ y $a, x \in A$, entonces

$$[\mathrm{ad}_a, \delta](x) = \mathrm{ad}_a(\delta(x)) - \delta(\mathrm{ad}_a(x))$$

$$
\begin{aligned}
&= a\delta(x) - \delta(x)a - \delta(ax - xa) \\
&= a\delta(x) - \delta(x)a - \delta(a)x - a\delta(x) + \delta(x)a + x\delta(a) \\
&= \delta(a)x + x\delta(a) \\
&= \mathrm{ad}_{\delta(a)}(x).
\end{aligned}
$$

Esto implica que $[\mathrm{ad}_a, \delta] = \mathrm{ad}_{\delta(a)}$ y por ende InnDer es un ideal de Lie de A. □

Con esto, se puede hacer una nueva definición:

DEFINICIÓN 4.5. *Dada un álgebra asociativa A, su álgebra de derivaciones externas se define como el álgebra de Lie.*

$$\mathrm{OutDer}(A) = \mathrm{Der}(A)/\mathrm{InnDer}(A).$$

Para finalizar esta sección, se presenta un resultado que será de gran ayuda en la siguiente.

PROPOSICIÓN 4.6. *Sea A una k-álgebra asociativa y $\mathcal{B}$ una base para esta. Un operador lineal $\delta : A \to A$ es una derivación si y sólo si*

$$\delta(x, y) = \delta(x)y + x\delta(y)$$

para todo $x, y \in \mathcal{B}$.

Demostración. Evidentemente la condición es necesaria. La suficiencia es consecuencia de la linealidad. En efecto, sean $x, y \in A$, entonces existen $x_1, \ldots, x_n \in X$ y $a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n \in k$ tales que

$$x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i, \quad y = \sum_{i=1}^{n} b_i x_i.$$

Así

$$
\begin{aligned}
\delta(xy) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j \delta(x_i x_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j (\delta(x_i)x_j + x_i\delta(x_j)) \\
&= \delta\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j x_j\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right)\delta\left(\sum_{j=1}^{n} b_j x_j\right) \\
&= \delta(x)y + x\delta(y),
\end{aligned}
$$

lo que completa la demostración. □

4.2. Derivaciones sobre álgebras de caminos

Durante toda esta sección k será un campo y $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1, s, t)$ un carcaj, finito conexo y acíclico. Por notación, para cada $x \in \Gamma_0$, el camino trivial $e_x \in k\Gamma$ será denotado simplemente por x. De este modo $x^2 = x$ para todo $x \in \Gamma_0$ y $\ell(x) = 0$. Se denota entonces

$$\mathcal{P} = C_\Gamma \cup \Gamma_0$$

donde los elementos de Γ_0 son entendidos como caminos triviales. Puesto que $k\Gamma$ tiene como base a $\mathcal{P}$, dado un operador lineal $\delta : k\Gamma \to k\Gamma$ se tiene para cada $p \in \mathcal{P}$ que

$$\delta(p) = \sum_{q \in \mathcal{P}} C_q^p q,$$

para constantes $C_q^p \in k$ únicamente determinadas por p, por cada $q \in \mathcal{P}$ y por δ. Una suma sobre un conjunto vacío se entenderá, por convención, como el cero vector de $k\Gamma$.

Definición 4.6. *A los coeficientes C_q^p se los llama los coeficientes fundamentales de δ.*

A continuación se presenta una serie de resultados concernientes a las derivaciones en álgebras de caminos. Estas son, en algunos casos, simplificaciones de los resultados presentados en [12].

Teorema 4.7 (Guo-Li, 2014). *Un operador lineal $\delta : k\Gamma \to k\Gamma$ es una derivación si y sólo si se verifican las siguientes condiciones:*

(1) *Para todo $x \in \Gamma_0$*

$$\delta(x) = \sum_{\substack{q \in C_\Gamma \\ s(q) = x}} C_q^x q + \sum_{\substack{q \in C_\Gamma \\ t(q) = x}} C_q^x q \tag{4.1}$$

(2) *Para todo $p \in C_\Gamma$*

$$\delta(p) = \sum_{\substack{q \in C_\Gamma \\ t(q) = s(p)}} C_q^{s(p)} qp + \sum_{\substack{q \in C_\Gamma \\ s(q) = s(p) \\ t(q) = t(p)}} C_q^p q + \sum_{\substack{q \in C_\Gamma \\ s(q) = t(p)}} C_q^{t(p)} pq \tag{4.2}$$

donde los coeficientes fundamentales verifican las siguientes relaciones:

(i) *Para todo $q \in C_\Gamma$*

$$C_q^{t(q)} + C_q^{s(q)} = 0. \tag{4.3}$$

(ii) *Si* $p = p_1 p_2$, *con* $p_1, p_2 \in C_\Gamma$ *y si* $s(q) = s(p)$, $t(q) = t(p)$, *entonces*

$$C_q^p = \begin{cases} C_{q_1}^{p_1} + C_{q_2}^{p_2} & \textit{si } \exists q_1, q_2 \textit{ tales que } q = q_1 p_2 = p_1 q_2 \\ C_{q_1}^{p_1} & \textit{si } \exists q_1 \textit{ tal que } q = q_1 p_2 \textit{ y } \nexists q_2 \textit{ tal que } q = p_1 q_2 \\ C_{q_2}^{p_2} & \textit{si } \exists q_2 \textit{ tal que } q = p_1 q_2 \textit{ y } \nexists q_1 \textit{ tal que } q = q_1 p_2 \\ 0 & \textit{en otro caso.} \end{cases} \tag{4.4}$$

La demostración de este resultado es pesada, por lo que se pospondrá momentáneamente. Por ahora se presentan algunos comentarios referentes al teorema.

La idea de caracterizar a las derivaciones a través de los coeficientes fundamentales es estándar en el estudio del álgebra diferencial. En [23] se usa esta técnica para caracterizar a las derivaciones de Jordan en álgebras de incidencia (ver ejemplo 10). Una derivación de Jordan sobre una R-álgebra asociativa A, siendo R un anillo conmutativo con unidad, es un operador R-lineal $\delta : A \to A$ que verifica la identidad

$$\delta(x^2) = \delta(x)x + x\delta(x).$$

Xiao fue más allá en este trabajo y probó que si R es un anillo libre de torsión 2, entonces toda derivación de Jordan es una derivación. No es complicado observar que toda derivación es una derivación de Jordan. Para esto hace uso de los coeficientes fundamentales y también de las *aplicaciones transitivas*, concepto ideado por Nowicki, y presentado por primera vez en [20].

Posterior a esto, en [24] se realiza un trabajo similar para las derivaciones de Lie sobre álgebras de incidencia, y en [14] se realiza una caracterización de las derivaciones de Lie en el álgebra de matrices infinitas estrictamente triangulares superiores sobre un anillo conmutativo. En todos los casos, la búsqueda de relaciones entre los coeficientes fundamentales es la técnica estándar. En algunos casos, la deducción de las relaciones es más complicada que en otros, pero la técnica es similar. Esta similitud se debe a un hecho relevante: Las álgebras de matrices y las álgebras de incidencia son casos particulares de álgebras de caminos. Esto se debe a que todo conjunto preordenado define un carcaj, y resulta que las estructuras de álgebras de caminos y de álgebras de incidencia coinciden.

Con objeto de demostrar el Teorema 4.7, se presentan dos resultados previos.

LEMA 4.8. *Sean* $p_1, p_2 \in \mathcal{P}$ *tales que* $p_1 p_2 = 0$ *y tales que* p_1 *y* p_2 *verifican las ecuaciones* (4.1)-(4.2) *(según el caso). Entonces*

$$\delta(p_1 p_2) = \delta(p_1)p_2 + p_1\delta(p_2)$$

si y sólo si para todo $q \in \mathcal{P}$ tal que $s(q) = t(p_1)$ y $t(q) = s(p_2)$ se verifica la ecuación (4.3).

Demostración. δ es un operador lineal, y $p_1 p_2 = 0$, por ende es suficiente demostrar que

$$\delta(p_1)p_2 + p_1\delta(p_2) = 0.$$

Con este fin, se divide la demostración en cuatro casos:

Caso 1: Si $p_1, p_2 \in \Gamma_0$. Primero, gracias a la ecuación (4.1) se tiene que

$$\begin{aligned}\delta(p_1)p_2 + p_1\delta(p_2) = &\left(\sum_{\substack{q\in C_\Gamma\\ s(q)=p_1}} C_q^{p_1} q + \sum_{\substack{q\in C_\Gamma\\ t(q)=p_1}} C_q^{p_1} q\right) p_2 \\ &+ p_1 \left(\sum_{\substack{q\in C_\Gamma\\ s(q)=p_2}} C_q^{p_2} q + \sum_{\substack{q\in C_\Gamma\\ t(q)=p_2}} C_q^{p_2} q\right).\end{aligned}$$

Como $p_1 p_2 = 0$, necesariamente $p_1 \neq p_2$, lo que implica

$$\begin{aligned}\delta(p_1)p_2 + p_1\delta(p_2) &= \sum_{\substack{q\in C_\Gamma\\ s(q)=p_1\\ t(q)=p_2}} (C_q^{p_1} + C_q^{p_2}) q \\ &= \sum_{\substack{q\in C_\Gamma\\ s(q)=p_1\\ t(q)=p_2}} (C_q^{s(q)} + C_q^{t(q)}) q.\end{aligned}$$

Entonces $\delta(p_1)p_2 + p_1\delta(p_2) = 0$ si y sólo si $C_q^{s(q)} + C_q^{t(q)}$ para todo $q \in \mathcal{P}$ tal que $s(q) = t(p_1) = p_1$ y $t(q) = s(p_2) = p_2$, como se deseaba.

Caso 2: Si $p_1, p_2 \in C_\Gamma$. En este caso se invoca la igualdad (4.2) para obtener

$$\begin{aligned}\delta(p_1)p_2 + p_1\delta(p_2) = &\left(\sum_{\substack{q\in C_\Gamma\\ t(q)=s(p_1)}} C_q^{s(p_1)} q p_1 + \sum_{\substack{q\in C_\Gamma\\ s(q)=s(p_1)\\ t(q)=t(p_1)}} C_q^{p_1} q + \sum_{\substack{q\in C_\Gamma\\ s(q)=t(p_1)}} C_q^{t(p_1)} p_1 q\right) p_2 \\ &+ p_1 \left(\sum_{\substack{q\in C_\Gamma\\ t(q)=s(p_2)}} C_q^{s(p_2)} q p_2 + \sum_{\substack{q\in C_\Gamma\\ s(q)=s(p_2)\\ t(q)=t(p_2)}} C_q^{p_2} q + \sum_{\substack{q\in C_\Gamma\\ s(q)=t(p_2)}} C_q^{t(p_2)} p_2 q\right).\end{aligned}$$

Ahora se nota que como $p_1p_2 = 0$, entonces $t(p_1) \neq s(p_2)$, y por consiguiente

$$\begin{aligned}
\delta(p_1)p_2 + p_1\delta(p_2) &= \sum_{\substack{q\in C_\Gamma \\ s(q)=t(p_1) \\ t(q)=s(p_2)}} (C_q^{t(p_1)} + C_q^{s(p_2)})p_1qp_2 \\
&= \sum_{\substack{q\in C_\Gamma \\ s(q)=t(p_1) \\ t(q)=s(p_2)}} (C_q^{s(q)} + C_q^{t(q)})p_1qp_2
\end{aligned}$$

Entonces se tiene que $\delta(p_1)p_2 + p_1\delta(p_2) = 0$ si y sólo si $C_q^{s(q)} + C_q^{t(q)} = 0$ para todo $q \in \mathcal{P}$ tal que $s(q) = t(p_1)$ y $t(q) = s(p_2)$.

Caso 3: Si $p_1 \in \Gamma_0$ y $p_2 \in C_\Gamma$. En este caso se hace un uso paralelo de las igualdades 4.1 y 4.2 para obtener

$$\begin{aligned}
\delta(p_1)p_2+p_1\delta(p_2) = &\left(\sum_{\substack{q\in C_\Gamma \\ s(q)=p_1}} C_q^{p_1}q + \sum_{\substack{q\in C_\Gamma \\ t(q)=p_1}} C_q^{p_1}q\right)p_2 \\
&+ p_1\left(\sum_{\substack{q\in C_\Gamma \\ t(q)=s(p_2)}} C_q^{s(p_2)}qp_2 + \sum_{\substack{q\in C_\Gamma \\ s(q)=s(p_2) \\ t(q)=t(p_2)}} C_q^{p_2}q + \sum_{\substack{q\in C_\Gamma \\ s(q)=t(p_2)}} C_q^{t(p_2)}p_2q\right).
\end{aligned}$$

Se observa que $s(p_2) \neq p_1$ y por ende

$$\begin{aligned}
\delta(p_1)p_2 + p_1\delta(p_2) &= \sum_{\substack{q\in C_\Gamma \\ s(q)=p_1 \\ t(q)=s(p_2)}} (C_q^{p_1} + C_q^{s(p_2)})qp_2 \\
&= \sum_{\substack{q\in C_\Gamma \\ s(q)=p_1 \\ t(q)=s(p_2)}} (C_q^{s(q)} + C_q^{t(q)})qp_2,
\end{aligned}$$

de donde se sigue que $\delta(p_1)p_2 + p_1\delta(p_2) = 0$ si y sólo si $C_q^{s(q)} + C_q^{t(q)} = 0$ cuando $s(q) = t(p_1) = p_1$ y $t(q) = s(p_2)$.

Caso 4: Si $p_1 \in C_\Gamma$ y $p_2 \in \Gamma_0$. Este caso es consecuencia inmediata del anterior intercambiando los roles de p_1 y p_2. □

LEMA 4.9. *Sean $p_1, p_2 \in C_\Gamma$ tales que $p_1p_2 \neq 0$. Supóngase que p_1, p_2 y p_1p_2 verifican la ecuación* (4.2). *Entonces*

$$\delta(p_1p_2) = \delta(p_1)p_2 + p_1\delta(p_2)$$

si y sólo si para todo $q \in C_\Gamma$ tal que $s(q) = s(p_1)$ y $t(q) = t(q_2)$ se verifica la ecuación (4.4).

Demostración. Para iniciar, se escribe $p = p_1p_2$ y se considera el conjunto

$$\mathcal{P}_p = \{q \in C_\Gamma : s(q) = s(p) = s(p_1) \text{ y } t(q) = t(p) = t(p_2)\}.$$

Entonces se tiene una descomposición en subconjuntos dos a dos disjuntos

$$\mathcal{P}_p = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}_3 \cup \mathcal{P}_4,$$

donde

$$\begin{aligned}
&\mathcal{P}_1 = \{q \in \mathcal{P}_p : \text{ existen } q_1, q_2 \text{ tales que } q = q_1p_2 = p_1q_2\} \\
&\mathcal{P}_2 = \{q \in \mathcal{P}_p : \text{ existe } q_1 \text{ tal que } q = q_1p_2 \text{ pero no existe } q_2 \text{ tal que } q = p_1q_2\} \\
&\mathcal{P}_3 = \{q \in \mathcal{P}_p : \text{ existe } q_2 \text{ tal que } q = p_1q_2 \text{ pero no existe } q_1 \text{ tal que } q = q_1p_2\} \\
&\mathcal{P}_4 = \mathcal{P}_p \setminus (\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}_3).
\end{aligned}$$

Puesto que p_1p_2 verifica (4.2) se tiene que

$$\delta(p_1p_2) = \sum_{\substack{q \in C_\Gamma \\ t(q)=s(p_1)}} C_q^{s(p_1)} q p_1 p_2 + \sum_{\substack{q \in C_\Gamma \\ s(q)=s(p_1) \\ t(q)=t(p_2)}} C_q^{p_1p_2} q + \sum_{\substack{q \in C_\Gamma \\ s(q)=t(p_2)}} C_q^{t(p_2)} p_1 p_2 q. \tag{4.5}$$

Ahora

$$\delta(p_1)p_2 = \left(\sum_{\substack{q \in C_\Gamma \\ t(q)=s(p_1)}} C_q^{s(p_1)} q p_1 + \sum_{\substack{q \in C_\Gamma \\ s(q)=s(p_1) \\ t(q)=t(p_1)}} C_q^{p_1} q + \sum_{\substack{q \in C_\Gamma \\ s(q)=t(p_1)}} C_q^{t(p_1)} p_1 q \right) p_2,$$

de donde, notando que $t(q) \neq s(q) = t(p_1) = s(p_2)$ (pues Γ es acíclico) se obtiene

$$\delta(p_1)p_2 = \sum_{\substack{q \in C_\Gamma \\ t(q)=s(p_1)}} C_q^{s(p_1)} q p_1 p_2 + \sum_{\substack{q_1 \in C_\Gamma \\ s(q_1)=s(p_1) \\ t(q_1)=t(p_1)}} C_{q_1}^{p_1} q_1 p_2. \tag{4.6}$$

De manera similar se obtiene

$$p_1\delta(p_2) = \sum_{\substack{q_1 \in C_\Gamma \\ s(q_2)=s(p_2) \\ t(q_2)=t(p_2)}} C_{q_2}^{p_2} p_1 q_2 + \sum_{\substack{q \in C_\Gamma \\ s(q)=t(p_2)}} C_q^{t(p_2)} p_1 p_2 q. \tag{4.7}$$

Comparando la ecuación (4.5) con las ecuaciones (4.6) y (4.7) se tiene que

$$\delta(p_1p_2) = \delta(p_1)p_2 + p_1\delta(p_2)$$

si y sólo si

$$\sum_{\substack{q\in C_\Gamma \\ s(q)=s(p_1) \\ t(q)=t(p_2)}} C_q^{p_1p_2}q = \sum_{\substack{q_1\in C_\Gamma \\ s(q_1)=s(p_1) \\ t(q_1)=t(p_1)}} C_{q_1}^{p_1}q_1p_2 + \sum_{\substack{q_1\in C_\Gamma \\ s(q_2)=s(p_2) \\ t(q_2)=t(p_2)}} C_{q_2}^{p_2}p_1q_2.$$

Esto puede reescribirse como

$$\sum_{q\in\mathcal{P}_p} C_q^{p_1p_2}q = \sum_{\substack{q\in\mathcal{P}_1 \\ q=q_1p_2=p_1q_2}} (C_{q_1}^{p_1} + C_{q_2}^{p_2})q + \sum_{\substack{q\in\mathcal{P}_2 \\ q=p_1q_2}} C_{q_2}^{p_2}q + \sum_{\substack{q\in\mathcal{P}_3 \\ q=q_1p_2}} C_{q_1}^{p_1}q,$$

de donde se obtiene la equivalencia con (4.4). □

Con esto, se tiene la capacidad de demostrar el Teorema 4.7.

Demostración del Teorema 4.7. Supóngase que δ es una derivación. Para $x \in \Gamma$ se tiene que $\delta(x) = \delta(x^2) = \delta(x)x + x\delta(x)$, de donde

$$\delta(x) = \left(\sum_{q\in\mathcal{P}} C_q^x q\right) x + x\left(\sum_{q\in\mathcal{P}} C_q^x q\right) = \sum_{\substack{q\in\mathcal{P} \\ t(q)=x}} C_q^x q + \sum_{\substack{q\in\mathcal{P} \\ s(q)=x}} C_q^x q. \tag{4.8}$$

$x^3 = x$, por lo tanto

$$\begin{aligned}\delta(x) &= \delta(x^3) = \delta(x)x^2 + x\delta(x^2) \\ &= \delta(x)x + x(\delta(x)x + x\delta(x)) \\ &= \delta(x)x + x\delta(x)x + x\delta(x),\end{aligned}$$

de donde se obtiene

$$\delta(x) = \sum_{\substack{q\in\mathcal{P} \\ t(q)=x}} C_q^x q + \sum_{\substack{q\in\mathcal{P} \\ s(q)=x=t(q)}} C_q^x q + \sum_{\substack{q\in\mathcal{P} \\ s(q)=x}} C_q^x q.$$

Esta última igualdad, junto con (4.8) implican que $C_q^x = 0$ para todo $q \in \mathcal{P}$ tal que $s(q) = x = t(q)$, pero como Γ es acíclico, el único elemento de $\mathcal{P}$ que verifica esto es $q = x$, lo que implica que $C_x^x = 0$ y por ende

$$\delta(x) = \sum_{\substack{q\in C_\Gamma \\ t(q)=x}} C_q^x q + \sum_{\substack{q\in C_\Gamma \\ s(q)=x}} C_q^x q,$$

lo que prueba la ecuación (4.1).

Ahora, sea $p \in C_\Gamma$. Se tiene que $p = s(p)pt(p)$ y por ende

$$\begin{aligned}\delta(p) &= \delta(s(p))pt(p) + s(p)\delta(p)t(p) + s(p)p\delta(t(p)) \\ &= \delta(s(p))p + s(p)\delta(p)t(p) + p\delta(t(p)).\end{aligned}$$

Usando (4.1) se puede escribir

$$\delta(s(p))p = \left(\sum_{\substack{q\in C_\Gamma \\ t(q)=s(p)}} C_q^{s(p)} q + \sum_{\substack{q\in C_\Gamma \\ s(q)=s(p)}} C_q^{s(p)} q \right) p = \sum_{\substack{q\in C_\Gamma \\ t(q)=s(p)}} C_q^{s(p)} qp.$$

Aquí nuevamente se ha hecho uso de la inexistencia de ciclos orientados en Γ, ya que si $qp \neq 0$ cuando $s(q) = s(p)$, necesariamente $t(q) = s(p) = s(q)$, lo que implicaría que q es un ciclo orientado.

Un razonamiento análogo prueba que

$$p\delta(t(p)) = \sum_{\substack{q\in C_\Gamma \\ s(q)=t(p)}} C_q^{t(p)} pq.$$

Finalmente, se tiene que

$$s(p)\delta(p)t(p) = s(p) \left(\sum_{q\in\mathcal{P}} C_q^p q \right) t(p) = \sum_{\substack{q\in C_\Gamma \\ s(q)=s(p) \\ t(q)=t(p)}} C_q^p q,$$

que junto con lo anterior proporcionan la ecuación (4.2).

Sea $q \in C_\Gamma$. Como Γ es acíclico, $s(q) \neq t(q)$ y por ende $s(q)t(q) = 0$. Aplicando el lema 4.8 a $p_1 = s(q)$ y $p_2 = t(q)$ se obtiene, dado que δ es una derivación, la ecuación (4.3).

Finalmente, Si $p = p_1p_2$, con $p_1, p_2 \in C_\Gamma$, el lema 4.9 implica que se verifica la ecuación (4.4).

Recíprocamente, sea $\delta : k\Gamma \to k\Gamma$ un operador lineal que verifica las ecuaciones (4.1) y (4.2), sujeto a las condiciones (4.3) y (4.4). Se probará que δ es una derivación. Para ello se hace uso de la Proposición 4.6, lo que implica es suficiente probar la igualdad

$$\delta(xy) = \delta(x)y + x\delta(y) \tag{4.9}$$

cuando $x, y \in \mathcal{P} = \Gamma_0 \cup C_\Gamma$. Nuevamente, se separa la demostración en los 4 posibles casos que pueden suscitarse.

Caso 1: $x, y \in \Gamma_0$. Si $x = y$ entonces $xy = x$ y se tiene, gracias a la ecuación (4.1), que

$$\begin{aligned}\delta(xy) =& \delta(x) = \sum_{\substack{q\in C_\Gamma\\ s(q)=x}} C_q^x q + \sum_{\substack{q\in C_\Gamma\\ t(q)=x}} C_q^x q\\ =& \left(\sum_{\substack{q\in C_\Gamma\\ s(q)=x}} C_q^x q + \sum_{\substack{q\in C_\Gamma\\ t(q)=x}} C_q^x q\right) x + x\left(\sum_{\substack{q\in C_\Gamma\\ s(q)=x}} C_q^x q + \sum_{\substack{q\in C_\Gamma\\ t(q)=x}} C_q^x q\right)\\ =& \delta(x)x + x\delta(x) = \delta(x)y + x\delta(y).\end{aligned}$$

Si $x \neq y$, entonces $xy = 0$ y en este caso la ecuación (4.9) es consecuencia del Lema 4.8.

Caso 2: $x, y \in C_\Gamma$. Si $t(x) = s(y)$, entonces $xy \neq 0$, y la ecuación (4.9) es consecuencia del Lema 4.9. Si en cambio $t(x) \neq s(y)$, entonces $xy = 0$ y el resultado se sigue del Lema 4.8.

Caso 3: $x \in \Gamma_0$ y $y \in C_\Gamma$. Si $s(y) \neq x$, entonces $xy = 0$ y el resultado se sigue del Lema 4.8. Si $s(y) = x$ se tiene $xy = y$ y entonces de las ecuaciones (4.1) y (4.2) se obtiene

$$\begin{aligned}\delta(x)y + x\delta(y) =& \left(\sum_{\substack{q\in C_\Gamma\\ s(q)=x}} C_q^x q + \sum_{\substack{q\in C_\Gamma\\ t(q)=x}} C_q^x q\right) y\\ &+ x\left(\sum_{\substack{q\in C_\Gamma\\ t(q)=s(y)}} C_q^{s(y)} qy + \sum_{\substack{q\in C_\Gamma\\ s(q)=s(y)\\ t(q)=t(y)}} C_q^y q + \sum_{\substack{q\in C_\Gamma\\ s(q)=t(y)}} C_q^{t(y)} yq\right).\end{aligned}$$

Ahora, si $s(q) = x = s(y)$ entonces $qy = 0$ pues caso contrario $t(q) = s(y) = s(q)$ y q sería un ciclo. Del mismo modo, si $t(q) = s(y) = x$ entonces $xq = 0$ pues caso contrario $s(q) = x = t(q)$. Esto implica que

$$\delta(x)y + x\delta(y) = \sum_{\substack{q\in C_\Gamma\\ t(q)=s(y)}} C_q^x qy + \sum_{\substack{q\in C_\Gamma\\ s(q)=s(y)\\ t(q)=t(y)}} C_q^y q + \sum_{\substack{q\in C_\Gamma\\ s(q)=t(y)}} C_q^{t(y)} yq = \delta(y) = \delta(xy)$$

y por ende se verifica la ecuación (4.9).

Caso 4: $x \in C_\Gamma$ y $y \in \Gamma_0$. Este caso es completamente similar al anterior. □

Nótese que la ecuación (4.3) implica que $C_q^{t(q)} = -C_q^{s(q)}$ para todo $q \in C_\Gamma$. Entonces, el Teorema 4.7 implica trivialmente el siguiente resultado:

COROLARIO 4.10. *Un operador lineal $\delta : k\Gamma \to k\Gamma$ es una derivación si y sólo si verifica las siguientes condiciones:*

(1) *Para todo $x \in \Gamma_0$,*

$$\delta(x) = \sum_{\substack{q\in C_\Gamma \\ s(q)=x}} C_q^{s(q)} q - \sum_{\substack{q\in C_\Gamma \\ t(q)=x}} C_q^{s(q)} q. \tag{4.10}$$

(2) *Para todo $p \in C_\Gamma$,*

$$\delta(p) = \sum_{\substack{q\in C_\Gamma \\ s(q)=t(p)}} C_q^{s(q)} pq + \sum_{\substack{q\in C_\Gamma \\ s(q)=s(p) \\ t(q)=t(p)}} C_q^{p} q - \sum_{\substack{q\in C_\Gamma \\ t(q)=s(p)}} C_q^{s(q)} qp, \tag{4.11}$$

donde los coeficientes fundamentales están sujetos a la condición (4.4).

DEFINICIÓN 4.7. *Sean $u\Gamma_1$ y $v \in \mathcal{P}$ tales que $s(u) = s(v)$ y $t(u) = t(v)$. Se construye un operador lineal $\delta_{u,v} : k\Gamma \to k\Gamma$ definiendo $\delta_{u,v}(p)$ para $p \in \mathcal{P}$ por inducción sobre $n = \ell(p)$: Si $\ell(p) = 0$, entonces*

$$\delta_{u,v}(p) = 0.$$

Si $\delta_{u,v}(q)$ ha sido definido para todo q con $\ell(q) = n$, sea p con $\ell(p) = n+1$, de modo que puede escribirse $p = p_1 q$, donde $\ell(p_1) = 1$ y $\ell(q) = n$. Entonces

$$\delta_{u,v}(p) = \begin{cases} vq + p_1\delta_{u,v}(q) & \text{si } p_1 = u \\ p_1\delta_{u,v}(q) & \text{si } p_1 \neq u. \end{cases}$$

TEOREMA 4.11. *El operador $\delta_{u,v}$ es una derivación sobre $k\Gamma$.*

Demostración. Por la Proposición 4.6 basta probar la igualdad

$$\delta_{u,v}(pq) = \delta_{u,v}(p)q + p\delta_{u,v}(q), \quad \forall p, q \in \mathcal{P}. \tag{4.12}$$

Esto se realiza por inducción sobre $n = \ell(p)$. Para $n = 0$ se tiene que $p \in \Gamma_0$ y en este caso $\delta_{u,v}(p) = 0$. Por ende, en este caso debe probarse que $\delta_{u,v}(pq) = p\delta_{u,v}(q)$. Esto es evidente si $s(q) = p$ pues en tal caso $pq = q$ y $p\delta_{u,v}(q) = \delta_{u,v}(q)$. Si en cambio $s(q) \neq p$ se tiene que $pq = 0$ y así $\delta_{u,v}(pq) = 0$ por linealidad. Por otro lado $p\delta_{u,v}(q) = 0$ pues $s(\delta_{u,v}(q)) \neq p$.

Suponiendo que la fórmula (4.12) ha sido probada para todo $p \in \mathcal{P}$ con $\ell(p) = n$, supóngase que $\ell(p) = n+1$, y escríbase $p = p_1\tilde{p}$, con $\ell(\tilde{p}) = n$ y $\ell(p_1) = 1$. Así,

$$\delta_{u,v}(\tilde{p}q) = \delta_{u,v}(\tilde{p})q + \tilde{p}\delta_{u,v}(q)$$

por hipótesis de inducción, y se consideran dos casos:

Caso 1: Si $p_1 = u$. En este caso

$$\begin{aligned}\delta_{u,v}(pq) &= \delta_{u,v}(p_1\tilde{p}q) = v\tilde{p}q + p_1\delta_{u,v}(\tilde{p}q) = v\tilde{p}q + p_1\delta_{u,v}(\tilde{p})q + p_1\tilde{p}\delta_{u,v}(q)\\ &= (v\tilde{p} + p_1\delta_{u,v}(\tilde{p}))q + p\delta_{u,v}(q) = \delta_{u,v}(p)q + p\delta_{u,v}(q).\end{aligned}$$

Caso 2: Si $p_1 \neq u$. Aquí

$$\begin{aligned}\delta_{u,v}(pq) &= \delta_{u,v}(p_1\tilde{p}q) = p_1\delta_{u,v}(\tilde{p}q)\\ &= p_1\delta_{u,v}(\tilde{p})q + p_1\tilde{p}\delta_{u,v}(q) = \delta_{u,v}(p)q + p\delta_{u,v}(q).\end{aligned}$$

Esto completa el paso inductivo y por ende la demostración. □

Proposición 4.12. *Sean $u \in \Gamma_1$ y $v \in C_\Gamma$ tales que $s(u) = s(v)$ y $t(u) = t(v)$, entonces $\delta_{u,v}(u) = v$. Además, si $p \in \Gamma_1$ es tal que $p \neq u$, entonces $\delta_{u,v}(p) = 0$.*

Demostración. Como $\ell(u) = 1$, entonces $u = ut(u)$ y por ende

$$\delta_{u,v}(u) = vt(u) + u\delta_{u,v}(t(u)) = v$$

pues $\ell(t(u)) = 0$.

Para la segunda afirmación, sea p con las propiedades mencionadas. Se tiene que $p = pt(p)$ y como $\ell(t(p)) = 0$ y $\ell(p) = 1$ se sigue que

$$\delta_{u,v}(p) = p\delta_{u,v}(t(p)) = 0$$

pues $p \neq u$. □

Definición 4.8. *Se definen los conjuntos*

$$\mathfrak{B}_0 = \{\mathrm{ad}_x : x \in \Gamma_0\}, \quad \mathfrak{B}_1 = \{\mathrm{ad}_p : p \in C_\Gamma\},$$

y

$$\mathfrak{B}_2 = \{\delta_{u,v} : u \in \Gamma_1, v \in \mathcal{P}, s(u) = s(v) \text{ y } t(u) = t(v)\},$$

y los subespacios vectoriales

$$\mathfrak{D}_i = \mathrm{span}_k(\mathfrak{B}_i), \quad i \in \{0,1,2\}.$$

con la estructura de álgebra heredada desde $\mathrm{Der}(k\Gamma)$.

TEOREMA 4.13 (Guo-Li, 2014). *El conjunto* $\mathfrak{B} := \mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2$ *es una base para el álgebra de Lie* $\mathrm{Der}(k\Gamma)$. *Más aún, se tiene la descomposición*

$$\mathrm{Der}(k\Gamma) = \mathfrak{D}_1 \oplus \mathfrak{D}_2.$$

Demostración. Se inicia probando que $\mathfrak{B}$ es una familia linealmente independiente. Para ello supóngase que existen escalares $b_p, c_{u,v} \in k$ tales que

$$\sum_{p \in C_\Gamma} b_p \mathrm{ad}_p + \sum_{\substack{u \in \Gamma_1, v \in \mathcal{P} \\ s(u)=s(v) \\ t(u)=t(v)}} c_{u,v} \delta_{u,v} = 0.$$

Sea $q \in C_\Gamma$, entonces $t(q) \in \Gamma_0$ y por ende $\delta_{u,v}(t(q)) = 0$ para todo $\delta_{u,v} \in \mathfrak{B}_2$. De este modo

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{p \in C_\Gamma} b_p \mathrm{ad}_p(t(q)) + \sum_{\substack{u \in \Gamma_1, v \in \mathcal{P} \\ s(u)=s(v) \\ t(u)=t(v)}} c_{u,v} \delta_{u,v}(t(q)) = \sum_{p \in C_\Gamma} b_p [p, t(q)] \\
&= \sum_{p \in C_\Gamma} b_p (pt(q) - t(q)p) = \sum_{\substack{p \in C_\Gamma \\ t(p)=t(q)}} b_p p - \sum_{\substack{p \in C_\Gamma \\ s(p)=t(q)}} b_p p.
\end{aligned}$$

Puesto que Γ es acíclico, se tiene que $b_q = 0$ para todo $p \in C_\Gamma$ tal que $t(p) = t(q)$ o $s(p) = t(q)$. En particular, tomando $q = p$ se sigue que $b_p = 0$ para todo $p \in C_\Gamma$. Con esto

$$\sum_{\substack{u \in \Gamma_1, v \in \mathcal{P} \\ s(u)=s(v) \\ t(u)=t(v)}} c_{u,v} \delta_{u,v} = 0.$$

Ahora, sean $p \in \Gamma_1$ y $q \in C_\gamma$ tales que $s(p) = s(q)$ y $t(p) = t(q)$. Entonces por la Proposición 4.12 se tiene

$$0 = \sum_{\substack{q \neq v \in \mathcal{P} \\ s(p)=s(v) \\ t(p)=t(v)}} c_{p,v} v + c_{p,q} q,$$

de donde $c_{p,q} = 0$ para todo p, q.

A continuación se prueba que $\mathfrak{B}$ es una familia generadora de $\mathrm{Der}(k\Gamma)$. Para ello sea $\delta \in \mathrm{Der}(k\Gamma)$. Por el Corolario 4.10 se tiene que para $p \in \Gamma_1$

$$\delta(p) = \sum_{\substack{q \in C_\Gamma \\ s(q)=t(p)}} C_q^{s(q)} pq + \sum_{\substack{q \in C_\Gamma \\ s(q)=s(p) \\ t(q)=t(p)}} C_q^p q - \sum_{\substack{q \in C_\Gamma \\ t(q)=s(p)}} C_q^{s(q)} qp. \tag{4.13}$$

Con los mismos coeficientes se define una nueva derivación

$$\delta' = -\sum_{v\in C_\Gamma} C_v^{s(v)}\mathrm{ad}_v + \sum_{\substack{u\in\Gamma_1, v\in\mathcal{P}\\ s(u)=s(v)\\ t(u)=t(v)}} C_v^u \delta_{u,v}.$$

Sea $p\in\Gamma_0$, entonces $\ell(p)=0$ y por ende

$$\delta'(p) = -\sum_{v\in C_\Gamma} C_v^{s(v)}\mathrm{ad}_v(p) = -\sum_{v\in C_\Gamma} C_v^{s(v)}(vp-pv) = \sum_{\substack{v\in C_\gamma\\ s(v)=p}} C_v^{s(v)} v - \sum_{\substack{v\in C_\gamma\\ t(v)=p}} C_v^{s(v)} v$$

lo que por el Corolario 4.10 implica que $\delta'(p)=\delta(p)$.

Sea ahora $p\in\Gamma_1$, entonces por la Proposición 4.12 se tiene que

$$\begin{aligned}\delta'(p) &= -\sum_{v\in C_\Gamma} C_v^{s(v)}\mathrm{ad}_v(p) + \sum_{\substack{u\in\Gamma_1, v\in\mathcal{P}\\ s(u)=s(v)\\ t(u)=t(v)}} C_v^u \delta_{u,v}(p)\\ &= -\sum_{v\in C_\Gamma} C_v^{s(v)}(vp-pv) + \sum_{\substack{v\in C_\Gamma\\ s(p)=s(v)\\ t(p)=t(v)}} C_v^p v\\ &= \sum_{v\in C_\Gamma} C_v^{s(v)} pv + \sum_{\substack{v\in C_\Gamma\\ s(p)=s(v)\\ t(p)=t(v)}} C_v^p v - \sum_{v\in C_\Gamma} C_v^{s(v)} vp,\end{aligned}$$

lo que, nuevamente por el Corolario 4.10, significa que $\delta'(p)=\delta(p)$.

Ahora sea $p\in C_\Gamma$. Se probará que $\delta'(p)=\delta(p)$ por inducción sobre $n=\ell(p)$. Los casos $n=0$ y $n=1$ ya han sido probados en los párrafos precedentes. Supóngase entonces que $\delta'(p)=\delta(p)$ para todo $p\in C_\Gamma$ tal que $\ell(p)=n$. Sea p tal que $\ell(p)=n+1$, entonces se puede escribir $p=p_1q$ con $\ell(q)=n$ y $p_1\in\Gamma_1$. Así $\delta'(q)=\delta(q)$ por hipótesis de inducción y $\delta'(p_1)=\delta(p_1)$ por el párrafo anterior, de modo que, ya que δ' y δ son derivaciones,

$$\delta'(p)=\delta'(p_1q)=\delta'(p_1)q+p_1\delta'(q)=\delta(p_1)q+p_1\delta(q)=\delta(p_1q)=\delta(p),$$

lo que completa el paso inductivo.

Se ha probado que $\delta=\delta'$, pero como $\delta'\in\mathrm{span}_k(\mathfrak{B})$, se sigue que $\delta\in\mathrm{span}_k(\mathfrak{B})$ y por ende $\mathrm{span}_k(\mathfrak{B})=\mathrm{Der}(k\Gamma)$. □

DEFINICIÓN 4.9. *Sea $p\in\Gamma_1$ y $\sum_{i=1}^{n} a_iq_i\in k\Gamma$, donde $a_i\in k$ y $q_i\in\mathcal{P}$ para $i\in\{1,\ldots,n\}$.*

Se define la derivación

$$\delta_{p,\sum_{i=1}^n a_i q_i} := \sum_{\substack{1\le i\le n\\ s(q_i)=s(p)\\ t(q_i)=t(p)}} a_i \delta_{p,q_i}.$$

PROPOSICIÓN 4.14. *Para todo $p \in \mathcal{P}$ y todo $u \in \Gamma_1$, $v \in C_\Gamma$ tales que $s(u) = s(v)$ y $t(u) = t(v)$ se verifica la identidad*

$$[\mathrm{ad}_p, \delta_{u,v}] = -\mathrm{ad}_{\delta_{u,v}(p)}.$$

En particular, $\mathfrak{D}_1$ es un ideal de Lie del álgebra de Lie $\mathrm{Der}(k\Gamma)$.

Demostración. Sea $q \in \mathcal{P}$, entonces

$$\begin{aligned}
[\mathrm{ad}_p, \delta_{u,v}](q) &= \mathrm{ad}_p(\delta_{u,v}(q)) - \delta_{u,v}(\mathrm{ad}_p(q)) \\
&= p\delta_{u,v}(q) - \delta_{u,v}(q)p - \delta_{u,v}(pq) + \delta_{u,v}(qp) \\
&= p\delta_{u,v}(q) - \delta_{u,v}(q)p - \delta_{u,v}(p)q - p\delta_{u,v}(q) + \delta_{u,v}(q)p + p\delta_{u,v}(q) \\
&= -[\delta_{u,v}(p)q - p\delta_{u,v}(q)] \\
&= -\mathrm{ad}_{\delta_{u,v}(p)}(q),
\end{aligned}$$

de donde se sigue la identidad deseada.

En particular esto muestra que

$$[\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2] \subseteq \mathfrak{D}_1.$$

Por otro lado, de la caracterización de la identidad de Jacobi

$$\mathrm{ad}_{[p,q]} = [\mathrm{ad}_p, \mathrm{ad}_q]$$

y bajo la hipótesis de que Γ es acíclico, se sigue que

$$[\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_1] \subseteq \mathfrak{D}_1.$$

En efecto, basta notar que $\mathrm{ad}_{[p,q]} \in \mathfrak{B}_1$, y para esto es suficiente observar lo siguiente: Si $t(p) = s(q)$, necesariamente $t(q) \neq s(p)$, pues caso contrario $t(pq) = t(q) = s(p) = s(pq)$, lo que implicaría que pq es un ciclo orientado. Por ende, si $t(p) = s(q)$, se tiene que $pq \in \mathcal{P}$ y $qp = 0$, lo que implica que $\mathrm{ad}_{[p,q]} \in \mathfrak{B}_1 \subseteq \mathfrak{D}_1$. De manera análoga, si $t(q) = s(p)$ se tiene que $pq = 0$ y por ende $-\mathrm{ad}_{[p,q]} \in \mathfrak{B}_1 \subseteq \mathfrak{D}_1$.

Finalmente, $\mathrm{Der}(k\Gamma) = \mathfrak{D}_1 \oplus \mathfrak{D}_2$ se sigue que

$$[\mathfrak{D}_1, \mathrm{Der}(k\Gamma)] = [\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_1 \oplus \mathfrak{D}_2] \subseteq [\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_1] + [\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2] \subseteq \mathfrak{D}_1 + \mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}_1,$$

y por ende $\mathfrak{D}_1$ es un ideal de Lie de $\mathrm{Der}(k\Gamma)$. $\square$

PROPOSICIÓN 4.15. *Para todo $u, p \in \Gamma_1$ y todo $v, q \in C_\Gamma$ tales que $s(u) = s(v)$, $t(u) = t(v)$, $s(p) = s(q)$ y $t(p) = t(q)$ se verifica la identidad*

$$[\delta_{u,v}, \delta_{p,q}] = \delta_{p,\delta_{u,v}(q)} - \delta_{u,\delta_{p,q}(v)}.$$

En particular, $\mathfrak{D}_2$ es una subálgebra de Lie de $\mathrm{Der}(k\Gamma)$.

Demostración. Sea $w \in \mathcal{P}$. Se probará por inducción sobre $n = \ell(w)$ la igualdad

$$[\delta_{u,v}, \delta_{p,q}](w) = \delta_{p,\delta_{u,v}(q)}(w) - \delta_{u,\delta_{p,q}(v)}(w).$$

Para $n = 0$ esto se reduce a $0 = 0$. Suponiendo que la identidad ha sido probada para todo w que verifica $\ell(w) \leq n$, supóngase que $\ell(w) = n + 1$, y escríbase $w = w_1\tilde{w}$, con $\ell(\tilde{w}) = n$. Por hipótesis de inducción se tiene que

$$[\delta_{u,v}, \delta_{p,q}](\tilde{w}) = \delta_{p,\delta_{u,v}(q)}(\tilde{w}) - \delta_{u,\delta_{p,q}(v)}(\tilde{w}).$$

Ahora, w_1 se tiene la igualdad

$$[\delta_{u,v}, \delta_{p,q}](w_1) = \delta_{p,\delta_{u,v}(q)}(w_1) - \delta_{u,\delta_{p,q}(v)}(w_1)$$

por una verificación directa y similar a las realizadas en las demostraciones anteriores. Entonces el paso inductivo es resultado de aplicar la regla de Leibniz a $w = w_1\tilde{w}$. $\square$

Nótese que el subconjunto $\mathfrak{B}_1$ de derivaciones internas asociadas a caminos es un subconjunto de la base $\mathfrak{B}$, según se probó en 4.13. Es natural entonces cuestionarse sobre el papel de las derivaciones asociadas a los vértices, es decir, qué sucede en el conjunto $\mathfrak{B}_0$. El siguiente resultado caracteriza a tales derivaciones.

PROPOSICIÓN 4.16. *Sea $x \in \Gamma_0$, entonces*

$$\mathrm{ad}_x = \sum_{\substack{p \in \Gamma_1 \\ s(p) = x}} \delta_{p,p} - \sum_{\substack{q \in \Gamma_1 \\ t(q) = x}} \delta_{q,q}$$

Demostración. Similar a casos anteriores, la demostración procede por inducción sobre la longitud de los caminos a ser evaluados. Gracias a la regla de Leibniz, basta verificar el resultado para caminos de longitud 0 y 1. Pero en cambos casos la verificación es inmediata, dado el hecho de que x es vértice y gracias a la Proposición 4.12. $\square$

Ahora, considérese el homomorfismo de álgebras de Lie

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{ad}: & (k\Gamma)^- & \longrightarrow & \mathrm{Der}(k\Gamma) \\ & p & \longmapsto & \mathrm{ad}_p. \end{array}$$

Por definición se tiene que

$$\mathrm{InnDer}(k\Gamma) = \mathrm{ad}(k\Gamma) = \mathfrak{D}_0 \oplus \mathfrak{D}_1,$$

ya que la imagen de ad es el conjunto de derivaciones internas, y por la proposición anterior $\mathfrak{D}_0 \cap \mathfrak{D}_1 = \{0\}$, ya que $\mathrm{Der}(k\Gamma) = \mathfrak{D}_1 \oplus \mathfrak{D}_2$. Con esto

$$\mathrm{InnDer}(k\Gamma) = \mathrm{InnDer}(k\Gamma) \cap (\mathfrak{D}_1 \oplus \mathfrak{D}_2) = \mathfrak{D}_1 \oplus (\mathrm{InnDer}(k\Gamma) \cap \mathfrak{D}_2).$$

La última proposición muestra que $\mathrm{InnDer}(k\Gamma) \cap \mathfrak{D}_2 = \mathfrak{D}_0$, de modo que se obtiene

$$\begin{aligned} \mathrm{OutDer}(k\Gamma) &= \mathrm{Der}(k\Gamma)/\mathrm{InnDer}(k\Gamma) \\ &= (\mathfrak{D}_1 \oplus \mathfrak{D}_2)/\mathrm{InnDer}(k\Gamma) \\ &= (\mathrm{InnDer}(k\Gamma) + \mathfrak{D}_2)/\mathrm{InnDer}(k\Gamma). \end{aligned}$$

Aplicando el segundo teorema de isomorfismos se obtiene

$$\mathrm{OutDer}(k\Gamma) \cong \mathfrak{D}_2/(\mathrm{InnDer}(k\Gamma) \cap \mathfrak{D}_2) = \mathfrak{D}_2/\mathfrak{D}_0.$$

Esto prueba el siguiente teorema:

TEOREMA 4.17. *Existe un isomorfismo de álgebras*

$$\mathrm{OutDer}(k\Gamma) \cong \mathfrak{D}_2/\mathfrak{D}_0.$$

4.3. Cohomología de Hochschild

Esta es la última sección de este trabajo y está dedicada a presentar la cohomología de Hochschild de manera general para un álgebra asociativa, al igual que estudiar la relación entre la cohomología de Hochschild de las álgebras de caminos con los grupos de homotopía de los carcajes ligados. Se toman en cuenta las observaciones del Dr. Juan Carlos Bustamante en lo que respecta al planteamiento del estudio de la relación entre ambas estructuras.

Se considera A como una k-álgebra asociativa, se denota por $A^{\otimes n}$ el producto tensorial sobre el campo k de n-copias de A.

Sea M un (A, A)-bimódulo y sea $\mathrm{Hom}_A(A^{\otimes n}, M)$ el A-módulo de homomorfismos de A-módulos de $A^{\otimes n}$ hacia M. Se define un operador A-lineal

$$\partial^n : \mathrm{Hom}_A(A^{\otimes n}, M) \to \mathrm{Hom}_A(A^{\otimes(n+1)}, M)$$

como sigue:

(1) Para $n = 0$, puesto que $A^{\otimes 0} \cong (0)$, se tiene que $\mathrm{Hom}_A(A^{\otimes 0}, M) \cong M$, por lo que

$$\partial^0(u)(x) = xu - ux$$

para todo $u, x \in M$.

(2) Para cada $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(A^{\otimes n}, M)$ y cada $x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n+1} \in A^{\otimes(n+1)}$, se tiene

$$\begin{aligned}\partial^n(\varphi)(x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n+1}) =& x_1\varphi(x_2 \otimes \cdots \otimes x_{n+1})\\ &+ \sum_{i=1}^{n}(-1)^i \varphi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_i x_{i+1} \otimes \cdots \otimes x_{n+1})\\ &+ (-1)^{n+1}\varphi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n)x_{n+1}.\end{aligned}$$

Como el objetivo es construir una cohomología, se probará que $(\mathrm{Hom}_A(A^{\otimes \cdot}, M), \partial)$ es un complejo de cocadena.

Proposición 4.18. *Para todo $n \in \mathbb{N}$, se verifica*

$$\partial^{n+1} \circ \partial^n = 0.$$

En particular se tiene que $\mathrm{im}(\partial^n) \subseteq \ker(\partial^{n+1})$.

Demostración. Sea $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(A^{\otimes n}, M)$ y $x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n+2} \in A^{\otimes(n+2)}$, entonces

$$\begin{aligned}\partial^{n+1}\partial^n(\varphi)(x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n+2}) =& x_1\partial^n\varphi(x_2 \otimes \cdots \otimes x_{n+2})\\ &+ \sum_{i=1}^{n+1}(-1)^i \partial^n\varphi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_i x_{i+1} \otimes \cdots \otimes x_{n+2})\\ &+ (-1)^{n+2}\partial^n\varphi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n+1})x_{n+2}.\end{aligned}$$

Se trabaja cada término por separado:

$$\begin{aligned}\partial^n(\varphi)(x_2 \otimes \cdots \otimes x_{n+2}) =& x_2\varphi(x_3 \otimes \cdots \otimes x_{n+2})\\ &+ \sum_{i=1}^{n+1}(-1)^i \varphi(x_2 \otimes \cdots \otimes x_{i+1} x_{i+2} \otimes \cdots \otimes x_n)\\ &+ (-1)^{n+1}\varphi(x_2 \otimes \cdots \otimes x_{n+1})x_{n+2}.\end{aligned}$$

Por otro lado, para $i \in \{1, \dots, n+1\}$

$$\begin{aligned}
\partial^n \varphi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_i x_{i+1} \otimes \cdots \otimes x_{n+2}) = {}& x_1 \varphi(x_2 \otimes \cdots \otimes x_i x_{i+1} \otimes \cdots \otimes x_{n+2}) \\
&+ \sum_{j<i-1} (-1)^j \varphi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_j x_{j+1} \otimes \cdots \otimes x_i x_{i+1} \otimes \cdots \otimes x_{n+2}) \\
&+ (-1)^{i-1} \varphi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_{i-1} x_i x_{i+1} \otimes \cdots \otimes x_{n+2}) \\
&+ (-1)^i \varphi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_i x_{i+1} x_{i+2} \otimes \cdots \otimes x_{n+2}) \\
&+ \sum_{j>i} (-1)^j \varphi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_i x_{i+1} \otimes \cdots \otimes x_j x_{j+1} \otimes \cdots \otimes x_{n+2}) \\
&+ \varphi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_i x_{i+1} \otimes \cdots \otimes x_{n+1}) x_{n+2}
\end{aligned}$$

El desarrollo del término restante es

$$\begin{aligned}
\partial^n \varphi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n+1}) = {}& x_1 \varphi(x_2 \otimes \cdots \otimes x_{n+1}) \\
&+ \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \varphi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_i x_{i+1} \otimes \cdots \otimes x_{n+1}) \\
&+ (-1)^{n+1} \varphi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) x_{n+1}.
\end{aligned}$$

Sustituyendo se observa que cada sumando aparece dos veces, una vez multiplicado por el factor 1 y otra vez multiplicado por el factor -1, lo que implica que

$$\partial^{n+1} \partial^n(\varphi)(x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n+2}) = 0$$

para todo generador $x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n+2} \in A^{\otimes(n+2)}$, y por ende $\partial^{n+1}\partial^n(\varphi)$ para todo φ, lo que implica el resultado deseado cuando $n \geq 1$.

Para $n = 0$ es necesaria una verificación por separado. Nótese que si $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(A, M)$ y si $x_1 \otimes x_2 \in A \otimes_k A$, entonces

$$\partial^1 \varphi(x_1 \otimes x_2) = x_1 \varphi(x_2) - \varphi(x_1) x_2,$$

de este modo, para $u \in M$ y $x_1 \otimes x_2 \in A \otimes A$, se tiene

$$\begin{aligned}
\partial^1 \partial^0 u(x_1 \otimes x_2) &= x_1 \partial^0 u(x_2) - \partial^0 u(x_1 x_2) + \partial^0 u(x_1) x_2 \\
&= x_1(x_2 u - u x_2) - x_1 x_2 u + u x_1 x_2 + (x_1 u - u x_1) x_2 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

La demostración ahora está completa. □

COROLARIO 4.19. *La sucesión* $(\mathrm{Hom}_A(A^{\otimes n}, M))_{n \in \mathbb{N}}$ *de* A*-módulos y homomorfismos es un complejo de cocadena.*

DEFINICIÓN 4.10. *A la cohomología del complejo de cocadena* $(\mathrm{Hom}_A(A^{\otimes \cdot}, M), \partial)$ *se la llama la* cohomología de Hochschild *del álgebra asociativa* A *con coeficientes en el* (A, A)*-bimódulo* M*. Se denota*

$$HH^n(A, M) = H^n(\mathrm{Hom}_A(A^{\otimes \cdot}, M)).$$

En particular, cuando $M = A$*, se escribe* $HH^n(A)$ *en lugar de* $HH^n(A, A)$*, y se llama a la cohomología simplemente como* cohomología de Hochschild *del álgebra* A*.*

La tarea que se emprende a continuación es la de caracterizar los grupos de cohomología de Hochschild $HH^0(A)$ y $HH^1(A)$. Para ello las técnicas desarrolladas en lo que respecta al álgebra diferencial serán de vital importancia.

TEOREMA 4.20. *Para un álgebra asociativa* A *y un* (A, A)*-bimódulo se verifica*

$$HH^0(A, M) = \{x \in M : ax = xa, \quad \forall a \in A\}.$$

Demostración. Puesto que $\partial^{-1} = 0$ se tiene que $\mathrm{im}(\partial^{-1}) = 0$ y por ende

$$HH^0(A, M) = \ker(\partial^1)/\mathrm{im}(\partial^0) = \ker(\partial^1).$$

Ahora,

$$\begin{aligned}
\ker(\partial^1) &= \{x \in M : \partial^1(x) = 0\} \\
&= \{x \in M : ax - xa = 0, \quad \forall a \in A\} \\
&= \{x \in M : ax = xa, \quad \forall a \in A\},
\end{aligned}$$

como se deseaba. □

COROLARIO 4.21. *Se tiene que*

$$HH^0(A) = Z(A).$$

Antes de proceder, se realiza una ligera generalización del concepto de derivación.

DEFINICIÓN 4.11. *Sea* A *un álgebra asociativa y* M *un* (A, A)*-bimódulo. Una derivación sobre* M *es un homomorfismo de* A*-módulos* $\delta : A \to M$ *que verifica la* regla de Leibniz:

$$\delta(ab) = a\delta(b) + \delta(a)b$$

para todo $a, b \in A$*. Al conjunto de todas las derivaciones* $\delta : A \to M$ *se lo denota* *por* $\operatorname{Der}(A, M)$*. Una derivación* δ *si dice* interna *si existe* $u \in M$ *tal que*

$$\delta(x) = \operatorname{ad}_u(x) := ux - xu$$

para todo $x \in A$*. Caso contrario se dice una* derivación externa*. Al módulo de derivaciones internas se lo denota por* $\operatorname{InnDer}(A, M)$*. Se define el módulo de derivaciones externas como*

$$\operatorname{OutDer}(A, M) = \operatorname{Der}(A, M)/\operatorname{InnDer}(A, M).$$

Nótese que, similar al caso estudiado con anterioridad, se tiene un homomorfismo de A-módulos

$$\begin{array}{rccc} \operatorname{ad}: & M & \longrightarrow & \operatorname{Der}(A, M) \\ & u & \longmapsto & \operatorname{ad}_u \end{array}$$

y, por lo visto, se verifica que

$$\ker(\operatorname{ad}) = HH^0(A, M).$$

Consecuentemente, $\operatorname{InnDer}(A, M) = \operatorname{ad}(M)$ es un A-submódulo de $\operatorname{Der}(A, M)$ y, por ende, $\operatorname{OutDer}(A, M)$ está bien definido.

TEOREMA 4.22. *Para toda álgebra asociativa* A *y todo* (A, A)*-bimódulo* M *se tiene que*

$$HH^1(A, M) = \operatorname{OutDer}(A, M).$$

Demostración. Se debe estudiar los A-módulos $\operatorname{im}(\partial^0)$ y $\ker(\partial^1)$. Por definición es claro que $\operatorname{im}(\partial^0) = \operatorname{InnDer}(A, M)$. Ahora, se tiene que $\varphi \in \ker(\partial^1)$ si y sólo si para todo $x_1 \otimes x_2 \in A \otimes_k A$

$$0 = \partial^1\varphi(x_1 \otimes x_2) = x_1\varphi(x_2) - \varphi(x_1x_2) + \varphi(x_1)x_2,$$

lo que equivale a

$$\varphi(x_1x_2) = \varphi(x_1)x_2 + x_1\varphi(x_2).$$

Esto implica que $\ker(\partial^1) = Der(A, M)$ y, consecuentemente,

$$HH^1(A, M) = \ker(\partial^1)/\operatorname{im}(\partial^0) = \operatorname{Der}(A, M)/\operatorname{InnDer}(A, M) = \operatorname{OutDer}(A, M),$$

como se deseaba. □

COROLARIO 4.23. *Si* A *es un álgebra asociativa, entonces*

$$HH^1(A) = \operatorname{OutDer}(A).$$

Sea ahora Γ un carcaj finito acíclico. Es claro que $Z(k\Gamma) = k\sum_{x\in\Gamma_0} e_x \cong k$. Más aún, por el Teorema 4.17 se tiene el siguiente resultado:

TEOREMA 4.24. *Para un álgebra de caminos se tiene que*

$$HH^0(k\Gamma) \cong k \quad y \quad HH^1(k\Gamma) \cong \mathfrak{D}_2/\mathfrak{D}_0.$$

EJEMPLO 41. Considérese nuevamente el carcaj Γ dado por el diagrama

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] & 2. \end{tikzcd}$$

Es necesario calcular las derivaciones $\delta_{f,f}, \delta_{f,g}, \delta_{g,f}$ y $\delta_{g,g}$. Cualquiera de ellas toma el valor 0 en los vértices 1 y 2. Por ende, basta determinar su acción sobre los caminos f y g. Esto se resume en la siguiente tabla:

	$\delta_{f,f}$	$\delta_{f,g}$	$\delta_{g,f}$	$\delta_{g,g}$
f	f	g	0	0
g	0	0	f	g

Resulta inmediato que $\delta_{f,f}, \delta_{f,g}, \delta_{g,f}$ y $\delta_{g,g}$ son una familia linealmente independiente sobre k. Por otro lado, se tienen las derivaciones ad_1 y ad_2 que están dadas por 0 sobre los vértices y

	ad_1	ad_2
f	f	$-f$
g	g	$-g$

Nótese que

$$\mathrm{ad}_1 = \delta_{f,f} + \delta_{g,g} = -\mathrm{ad}_2.$$

Con esto, puesto que para todo $a, b, c, d \in k$ se tiene la identidad

$$a\delta_{f,f} + b\delta_{f,g} + c\delta_{g,f} + d\delta_{g,g} = a(\delta_{f,f} + \delta_{g,g}) + b\delta_{f,g} + c\delta_{g,f} + (d-a)\delta_{g,g},$$

se sigue que

$$\mathfrak{D}_2 = \mathrm{span}_k(\delta_{f,f} + \delta_{g,g}, \delta_{f,g}, \delta_{g,f}, \delta_{g,g})$$

y también

$$\mathfrak{D}_0 = \mathrm{span}_k(\delta_{f,f} + \delta_{g,g}),$$

de modo que

$$HH^1(k\Gamma) \cong \mathfrak{D}_2/\mathfrak{D}_0$$

$$
\begin{aligned}
&= \operatorname{span}_k(\delta_{f,f} + \delta_{g,g}, \delta_{f,g}, \delta_{g,f}, \delta_{g,g}) / \operatorname{span}_k(\delta_{f,f} + \delta_{g,g}) \\
&\cong \operatorname{span}_k(\delta_{f,g}, \delta_{g,f}, \delta_{g,g}) \\
&\cong k^3.
\end{aligned}
$$

Nótese que en el ejemplo 35 se vio que

$$\pi_1(\Gamma, x_0) \cong \mathbb{Z},$$

el cual es un grupo abeliano. Por ende, incluso si se considera $k \otimes_{\mathbb{Z}} \pi_1(\Gamma, x_0) \cong k$, se tiene que no existe una relación aparente entre el primer grupo de homotopía de un carcaj y la cohomología de Hochschild de su álgebra de caminos.

EJEMPLO 42. Considérese el carcaj Γ a continuación:

$$
\begin{tikzcd}
& 2 \arrow[dr, "g"] & \\
1 \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "h"'] & & 3.
\end{tikzcd}
$$

Se calculan las derivaciones $\delta_{f,f}, \delta_{g,g}, \delta_{h,fg}$ y $\delta_{h,h}$ en la siguiente tabla:

	$\delta_{f,f}$	$\delta_{g,g}$	$\delta_{h,fg}$	$\delta_{h,h}$
f	f	0	0	0
g	0	g	0	0
h	0	0	fg	h
fg	fg	fg	0	0

En cambio, las derivaciones internas asociadas a los vértices están dadas por

	ad_1	ad_2	ad_3
f	f	$-f$	0
g	0	g	$-g$
h	h	0	$-h$
fg	fg	0	$-fg$

Se nota que

$$
\begin{aligned}
\mathrm{ad}_1 &= \delta_{f,f} + \delta_{h,h} \\
\mathrm{ad}_3 &= -\delta_{g,g} - \delta_{h,h} \\
\mathrm{ad}_2 &= -\mathrm{ad}_1 - \mathrm{ad}_3.
\end{aligned}
$$

Con esto, se tiene que

$$\begin{aligned} HH^1(k\Gamma) &\cong \operatorname{span}_k(\delta_{f,f}+\delta_{h,h},\delta_{g,g}+\delta_{h,h},\delta_{h,fg},\delta_{h,h})/\operatorname{span}_k(\delta_{f,f}+\delta_{h,h},\delta_{g,g}+\delta_{h,h}) \\ &\cong \operatorname{span}_k(\delta_{h,fg},\delta_{h,h}) \cong k^2. \end{aligned}$$

La realización geométrica de Γ es claramente un espacio homeomorfo a S^1, de modo que $\pi_1(\Gamma) \cong \mathbb{Z}$. Nuevamente, no se encuentra relación entre $\pi_1(\Gamma) \cong \mathbb{Z}$ y $HH^1(k\Gamma)$.

EJEMPLO 43. Sea Γ el carcaj

$$1 \xrightarrow{f} 2 \xrightarrow{g} 3 \xrightarrow{h} 4.$$

Se tiene que

$$\mathrm{ad}_1 = \delta_{f,f}, \quad \mathrm{ad}_2 = \delta_{g,g} - \delta_{f,f}, \quad \mathrm{ad}_3 = \delta_{h,h} - \delta_{g,g}, \quad \mathrm{ad}_4 = -\delta_{h,h}.$$

De este modo, resulta claro ver que $\mathfrak{D}_0$ es un subespacio vectorial de dimensión 3 de $\mathfrak{D}_2$, que también tiene dimensión 3, y por ende $\mathfrak{D}_2 = \mathfrak{D}_0$, por lo que

$$HH^1(k\Gamma) = 0.$$

En este caso, puesto que $|\Gamma| \cong \mathbb{R}$ es contractible, se tiene que $\pi_1(k\Gamma) = 0$.

Los tres ejemplos presentados anteriormente muestran (salvo en el último) que incluso en casos sencillos no existe una relación a prior entre el primer grupo de homotopía de un carcaj y el primer grupo cohomología de Hochschild de su álgebra de caminos. En lo que respecta a la relación entre el primer grupo de homotopía de un carcaj ligado (Γ, I), cabe plantearse la pregunta de si existe alguna relación entre los grupos $\pi_1(\Gamma, I)$ y $HH^1(k\Gamma/I)$. Esto ha sido ampliamente discutido en varios artículos. En este caso, se hace referencia a [1] y [4], por ejemplo, para una incursión en este estudio.

Comentarios y trabajo futuro

1. Existe una manera distinta, pero esencialmente igual, de definir un lazo en una categoría a la manera en que se han definido aquí. Siendo precisos, se considera la categoría $\mathbf{\Lambda}_n$, siendo n un número par cuyos objetos son las clases de congruencias de números enteros módulo n (es decir $\mathcal{O}(\mathbf{\Lambda}_n) = \mathbb{Z}_n$) cuyas flechas son de la forma $i \to j$ siendo i una clase de congruencia par y j una clase impar tal que $|j - i| = 1$. Entonces un n-lazo con base en A en la categoría $\mathscr{C}$ es un funtor $F : \mathbf{\Lambda}_n \to \mathscr{C}$ tal que $F(0) = A$. En este caso el producto de lazos es más complicado de definir: Si F y G son un n-lazo y un m-lazo, respectivamente, con base en A, entonces su producto $F \cdot G$ es el $(m+n)$-lazo definido por $(F \cdot G)(i) = F(i)$ si $i \leq n$ y por $(F \cdot G)(i) = G(i-n)$ si $i > n$ y de manera similar para las flechas.

2. Una estrategia para probar que dado un carcaj ligado (Γ, I), se tiene un isomorfismo $\pi_1(\Gamma, I) \cong \kappa_1(\Xi(\Gamma, I))$ es la de probar que los espacios clasificadores $\mathcal{B}(\Gamma, I)$ y $\mathcal{N}^0(\Xi(\Gamma, I))$ son del mismo tipo de homotopía. De hecho, se tiene evidencia (que no se presentó en este trabajo por no formar parte del mismo) de que el espacio $\mathcal{N}^0(\Xi(\Gamma, I))$ es un retracto por deformación del espacio $\mathcal{B}(\Gamma, I)$. Más aún, se espera demostrar que los grupos $\kappa_1(\Xi(\Gamma, I))$ y $\pi_1(\mathcal{N}^0(\Xi(\Gamma, I)))$ son isomorfos, lo que permitiría concluir que, con la construcción realizada, se obtienen los mismos grupos de homotopía.

3. Una posibilidad para orientar este trabajo es buscar la manera de generalizar la teoría presentada para grupos de homotopía de orden mayor.

4. En [11] se muestra una teoría de homología para carcajes. Esta teoría es en esencia muy similar a la que se ha desarrollado en este trabajo. Se propone a futuro estudiar a fondo la relación entre ambas construcciones.

5. Un tópico que no pudo ser analizado en profundidad en este trabajo es el de estudiar una manera diferente de vincular la homotopía de un carcaj ligado

con la cohomología de Hochschild de su álgebra de caminos. La abelianización no resultó ser un elemento vinculante. Sin embargo, el estudio de los caracteres del primer grupo fundamental sobre $\mathbb{Z}$ han sido ya estudiados y se ha probado que existe relación entre ellos y el primer grupo de cohomología de Hochschild para el caso de las álgebras de incidencia (ver [1]). Se pretende realizar un estudio similar referente al grupo de homotopía κ_1^0, vinculándolo a la cohomología de Hochschild.

6. De igual manera, puesto que se encontraba entre los objetivos de este proyecto, se plantea seguir la sugerencia del Dr. Juan Carlos Bustamante y realizar este estudio desde el punto de vista de las categorías k-lineales.

Bibliografía

[1] I. ASSEM AND J. A. DE LA PEÑA, *The fundamental groups of a triangular algebra*, Comm. Algebra, 24 (1996), pp. 187–208.

[2] M. F. ATIYAH AND I. G. MACDONALD, *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley, Estados Unidos, 1969.

[3] S. AWODEY, *Category Theory*, Oxford logic guides, Estados Unidos, 2010.

[4] J. C. BUSTAMANTE, *On the fundamental group of a schurian algebra*, Comm. Algebra, 30 (2002), pp. 5305–5327.

[5] ——, *The classifying space of a bound quiver*, Journal of Algebra, 277 (2004), pp. 431–455.

[6] ——, *Homotopy and Bound Quivers*, Annales des Sciences Mathámatiques du Québec, 30 (2006).

[7] R. COCKETT, *Categories and Computability*, Course notes, University of Calgary, Canada, 2014.

[8] W. CRAWLEY-BOEVEY, *Lectures on Representations of Quivers*, Course notes, Oxford, 1992.

[9] S. DUMMIT AND R. FOOTE, *Abstract Algebra*, John Wiley & Sons, Estados Unidos, 2004.

[10] A. ELDUQUE, *Lie Algebras*, Course notes, Universidad de Zaragoza, España, 2005.

[11] A. GRIGOR'YAN, V. V. MURANOV, Y., AND Y. S. T., *Path homology theory of quivers*, Pre-print, (2017).

[12] L. GUO AND F. LI, *Structure of Hochschild cohomology of path algebras and differential formulation of Euler's polyhedron formula*, Asian Journal of Mathematics, 18 (2014), pp. 545–572.

[13] A. HATCHER, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, Estados Unidos, 2002.

[14] W. HOŁUBOWSKI, I. KASHUBA, AND S. ŻUREK, *Derivations of the Lie Algebra of infinite strictly upper triangular matrices over a commutative ring*, Communications in Algebra, 45 (2017), pp. 4679–4685.

[15] A. KIRILLOV, *Quiver Representations and Quiver Varieties*, AMS, Estados Unidos, 2010.

[16] S. LANG, *Algebra*, Springer-Verlag, Estados Unidos, 2002.

[17] D. LAROSE AND C. TARDIF, *A discrete homotopy theory for binary reflexive structures*, Advances in mathematics, 189 (2004), pp. 268–300.

[18] S. MAC LANE, *Categories for the Working Mathematician, second edition*, Springer, Estados Unidos, 1998.

[19] W. MASSEY, *A Basic Course in Algebraic Topology*, Springer-Verlag, Estados Unidos, 1991.

[20] A. NOWICKI, *Derivations of special subrings of matrix rings and regular graphs*, Tsukuba J. Math., 7 (1983), pp. 281–297.

[21] P. ROSERO AND D. PAZMIÑO, *Una teoría de homotopía para categorías finitas*, Trabajo de titulación previo a la obtención del título de Matemático, Escuela Politécnica Nacional, (2018).

[22] W. J. WICKLESS, *A first graduate course in abstract algebra*, Marcel Dekker, Estados Unidos, 2004.

[23] Z. XIAO, *Jordan Derivations of Incidence Algebras*, Rocky Mountain Journal of Mathematics, 45 (2015), pp. 1357–1368.

[24] X. ZHANG AND M. KHRYPCHENKO, *Lie derivations of incidence algebras*, Linear Algebra and its Applications, 513 (2017), pp. 69–83.