

**ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL**

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**ANÁLISIS DE UN PROBLEMA DE CONTROL ÓPTIMO DE  
FLUIDOS DILATANTES**

**TRABAJO DE TITULACIÓN PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE  
MATEMÁTICA**

**PROYECTO DE INVESTIGACIÓN**

**PAOLA NATHALY QUILOANGO CHIMARRO**  
paola.quiloango@gmail.com

**Director: DR. JUAN CARLOS DE LOS REYES BUENO**  
juan.delosreyes@epn.edu.ec

**QUITO, SEPTIEMBRE 2018**

## DECLARACIÓN

Yo PAOLA NATHALY QUILOANGO CHIMARRO, declaro bajo juramento que el trabajo aquí escrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

A través de la presente declaración cedo mis derechos de propiedad intelectual, correspondientes a este trabajo, a la Escuela Politécnica Nacional, según lo establecido por la Ley de Propiedad Intelectual, por su reglamento y por la normatividad institucional vigente.

---

Paola Nathaly Quiloango Chimarro

## CERTIFICACIÓN

Certifico que el presente trabajo fue desarrollado por PAOLA NATHALY QUILOANGO CHIMARRO, bajo mi supervisión.

---

Dr. Juan Carlos De los Reyes Bueno  
Director del Proyecto

## AGRADECIMIENTOS

Al finalizar este trabajo de titulación quiero agradecer, en primer lugar, a mis padres, por su amor y apoyo incondicional. Gracias por el esfuerzo que han hecho por darme una educación, aquí están sus frutos.

Gracias al Centro de Modelización Matemática (MODEMAT), por el financiamiento otorgado a este trabajo de titulación a través del proyecto de investigación *Modelización matemática y control de fluidos magneto- y electro-reológicos. Aplicación al control de amortiguadores sísmicos* (PIMI-16-04).

Agradezco a mi director, Dr. Juan Carlos De los Reyes, por su guía y disponibilidad para resolver cualquier duda que tuve durante el desarrollo de este trabajo. Asimismo, agradezco a los lectores de este trabajo de titulación, sus observaciones y sugerencias fueron muy útiles para mejorar la versión final de mi trabajo.

A mis amigos y compañeros de la universidad: muchas gracias por compartir conmigo esta etapa. De manera especial, agradezco a quienes me ayudaron con cualquier aspecto de este trabajo. A mis mejores amigos, Pris y Cristian: gracias compañeros del camino. Gracias a mis profesores y compañeros de clown y teatro, las enseñanzas y experiencias compartidas en estos últimos meses son muy valiosas para mí.

Agradezco también a quienes fueron mis profesoras y profesores en el transcurso de la carrera, por impartirme sus conocimientos y experiencia. En especial, gracias, a aquellos cuya dedicación y pasión me inspiraron a perseverar en el estudio de la matemática.

*Paola*

**DEDICATORIA**

*A mi hermana Gladys*

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Conceptos de la Mecánica de fluidos</b>	<b>3</b>
2.1. Nociones básicas de los fluidos . . . . .	3
2.2. Ecuaciones básicas de la dinámica de fluidos . . . . .	5
2.3. Relaciones constitutivas para fluidos newtonianos . . . . .	8
2.4. Las ecuaciones de Navier-Stokes . . . . .	9
2.5. Las ecuaciones de Stokes . . . . .	10
2.6. Fluidos no newtonianos . . . . .	10
<b>3. Notaciones y resultados útiles</b>	<b>12</b>
<b>4. Planteamiento del problema</b>	<b>23</b>
<b>5. Existencia de soluciones para el problema de control óptimo</b>	<b>29</b>
<b>6. Diferenciabilidad del operador solución</b>	<b>35</b>
6.1. Diferenciabilidad de Gâteaux . . . . .	35
6.2. Diferenciabilidad de Fréchet . . . . .	38
<b>7. Sistema de optimalidad y multiplicadores de Lagrange</b>	<b>47</b>
<b>8. Análisis asintótico del problema de control óptimo</b>	<b>52</b>
<b>9. Conclusiones</b>	<b>62</b>

# Resumen

En el presente trabajo nos enfocamos en el análisis matemático de un problema de control óptimo con un funcional objetivo de tipo *tracking* y cuya ecuación de estado constituye una versión regularizada de un modelo no diferenciable que describe el comportamiento de un fluido de tipo dilatante. Analizamos la existencia de soluciones para la ecuación de estado y posteriormente investigamos la existencia de soluciones para el problema de control óptimo. A continuación, estudiamos la diferenciabilidad de Gâteaux y de Fréchet del operador solución asociado a la ecuación de estado. Adicionalmente, caracterizamos las soluciones del problema mediante el planteamiento de un sistema de optimalidad. Finalmente, realizamos un análisis asintótico del problema considerado, cuando el parámetro de regularización converge a cero.

# Abstract

This paper deals with the mathematical analysis of an optimal control problem consisting of a tracking type objective function and a state equation which is a regularized version of a nonsmooth model for shear-thickening fluids. First, we study the existence of solutions of the state equation. Then, we establish the existence of minimizers for the optimal control problem. Later, we analyze the Gâteaux and Fréchet differentiability of the solution map associated to the state equation. Afterwards, we characterize the solutions of the optimal control problem by deriving an optimality system. Finally, we study the asymptotic behaviour of the considered optimal control problem as the parameter of the regularization goes to zero.



# Capítulo 1

## Introducción

Los fluidos dilatantes son fluidos cuya viscosidad aumenta dramáticamente cuando la velocidad de corte está por encima de un valor crítico. Para velocidades de corte bajas, el fluido tiene una viscosidad baja, actúa como un lubricante y fluye con facilidad, sin embargo, cuando se aplica un impacto (velocidades de corte más altas), el fluido adopta un estado parecido al estado sólido y debido al rápido incremento de la viscosidad, se vuelve menos penetrable.

El control óptimo de fluidos tiene importantes aplicaciones en las ciencias de la ingeniería. Las propiedades únicas de los fluidos dilatantes los hacen ideales para muchas aplicaciones industriales tales como estructuras inteligentes, armaduras líquidas que no limitan el movimiento del usuario, implementos deportivos y ropa de protección [13]. De este modo, existe una creciente necesidad de entender todos los aspectos de los fluidos dilatantes, modelar su comportamiento y mejorar las aplicaciones existentes. Es esencial controlar estos fluidos cuando se quiere explotar sus propiedades para propósitos prácticos.

En todo problema de control podemos distinguir cuatro elementos básicos: un control, un estado del sistema, una ecuación de estado y una función a ser minimizada que depende del control y del estado. El propósito de estudiar un problema de control es determinar un control admisible, llamado control óptimo, que nos proporcione un estado adecuado y que minimice el valor de la función objetivo [6]. Las principales cuestiones que se estudian acerca de los problemas de control óptimo son la existencia de una solución al problema y el cálculo de esta. Además de la existencia de soluciones, usualmente se estudian las condiciones de optimalidad de

primer y segundo orden con el objetivo de realizar aproximaciones numéricas de la solución del problema.

En el presente trabajo estudiaremos un problema de control óptimo asociado a un fluido dilatante, en el cual ocurre un incremento de la viscosidad cuando la velocidad de corte excede un parámetro positivo  $g$ . Se considera una ecuación de estado que constituye una versión regularizada de un modelo de un fluido dilatante. En el Capítulo 2 se presentan algunas nociones generales sobre los fluidos así como las ecuaciones que se usan para describir su movimiento. En el Capítulo 3, se presentan algunas notaciones, definiciones y resultados que se usarán en los capítulos siguientes. A continuación, en el Capítulo 4, se plantea el problema de control óptimo a estudiar. El Capítulo 5 trata sobre la existencia de soluciones para el problema planteado. Posteriormente, en el Capítulo 6 se estudia la diferenciabilidad del operador solución asociado a la ecuación de estado. En el Capítulo 7, se plantea un sistema de optimalidad que caracteriza las soluciones del problema. Finalmente, en el Capítulo 8 se realiza un análisis asintótico del problema de control óptimo considerado cuando el parámetro de regularización tiende a cero.

# Capítulo 2

## Conceptos de la Mecánica de fluidos

### 2.1. Nociones básicas de los fluidos

Un fluido se define como una sustancia que se mueve y se deforma cuando se le aplica una tensión tangencial (cortante) [16, p. 3]. Este movimiento se mantiene mientras se le aplique dicha tensión. Los fluidos se caracterizan principalmente por deformarse con facilidad y no tener rigidez. La compresibilidad es la propiedad mecánica más significativa que permite diferenciar el tipo de movimiento de líquidos y gases. El resto de propiedades mecánicas determina que el movimiento en escala macroscópica de los líquidos y los gases sea muy similar. Por ello, líquidos y gases son considerados fluidos y su movimiento se describe usando las mismas ecuaciones en la disciplina denominada Mecánica de fluidos.

#### La hipótesis del continuo

A simple vista un fluido se ve como una sustancia continua, cuando en realidad está compuesto de una enorme cantidad de moléculas que se mueven continuamente, interactúan y chocan entre sí. Aunque se puede usar las leyes del movimiento para describir el movimiento de cada molécula, se acostumbra pensar en el fluido como si estuviera compuesto de un número muy grande de *partículas de fluido*, lo cual nos permite concentrarnos en las propiedades macroscópicas del flujo del fluido. Como una idealización matemática podemos considerar que el tamaño de estas partículas de fluido tiende a cero, con lo cual el número de partículas será infinito. En esta idealización se calculan valores medios sobre muchas moléculas, y por tanto, el fluido es tratado como un *continuo*, esto es, como si fuera un volumen ho-

homogéneo y uniforme en el cual las entidades no continuas tales como las moléculas o los átomos no existen. A esta suposición se le conoce como la *Hipótesis del continuo*. Una forma de interpretar esta hipótesis es decir que se ha reemplazado el fluido real por un modelo matemático que es tan continuo como el fluido parece ser a simple vista.

## Descripción Euleriana y Lagrangiana

La mayoría de problemas de flujo se tratan con más facilidad mediante la denominada descripción Euleriana, la cual consiste en que las cantidades básicas tales como la presión y la velocidad están dadas por funciones del tiempo y de la posición para cada punto del espacio. Existe una segunda descripción denominada Lagrangiana, que complementa a la descripción Euleriana, y consiste en asociar cada magnitud a puntos materiales<sup>1</sup>.

Si  $u$  es una magnitud escalar se nota su derivada temporal en sentido Lagrangiano, o derivada total, como  $\frac{du}{dt}$  y su derivada temporal en sentido euleriano, o derivada local, se nota por  $\frac{\partial u}{\partial t}$ . Si  $P$  es un punto material, desde el punto de vista Lagrangiano la magnitud  $u$  es una función del tiempo  $t$  y de las coordenadas del punto  $P$  que notaremos por  $x_P$ ,  $y_P$  y  $z_P$ . Estas coordenadas también son funciones del tiempo, entonces, la derivada total se relaciona con la derivada temporal de la siguiente manera:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x_P} \frac{dx_P}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y_P} \frac{dy_P}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z_P} \frac{dz_P}{dt}.$$

Esta ecuación también puede ser escrita como:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla u,$$

donde  $\mathbf{v}$  es la velocidad del punto material  $P$  en el instante  $t$  y  $\nabla u$  es el gradiente del escalar  $u$  calculado en  $(x_i, t)$ . El último término de la ecuación anterior se denomina *derivada convectiva*. En el caso de un campo estacionario tenemos que  $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$  y por tanto la derivada total es igual a la derivada convectiva.

Si  $\mathbf{u}$  es una magnitud vectorial, se puede efectuar los mismos cálculos para cada

---

<sup>1</sup>Un punto material se puede imaginar como un volumen material infinitamente pequeño. Se denomina *volumen material* a un volumen de fluido limitado por una superficie formada por puntos que se desplazan con la velocidad del fluido (exactamente como si fueran arrastrados por el fluido).

una de las componentes de  $\mathbf{u}$ , con lo cual se obtiene la siguiente relación entre la derivada local y la derivada total:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{u},$$

donde  $\mathbf{v}$  es la velocidad del punto material  $P$  en el instante  $t$  y  $\nabla \mathbf{u}$  es la matriz jacobiana de  $\mathbf{u}$  calculada en  $(x_i, t)$ .

## 2.2. Ecuaciones básicas de la dinámica de fluidos

Las ecuaciones básicas que describen el movimiento de los fluidos se deducen de las leyes de conservación de la masa, el momento y la energía. La deducción de estas ecuaciones se basa en tres principios:

1. La masa no se crea ni se destruye.
2. La segunda Ley de Newton: la tasa de cambio de la cantidad de movimiento de una porción de fluido es igual a la fuerza que se le aplica.
3. La energía no se crea ni se destruye.

Sea  $D$  una región en el espacio bidimensional o tridimensional que contiene un fluido. Sea  $\mathbf{x} \in D$  un punto en la región  $D$  y consideremos una partícula de fluido que pasa por el punto  $\mathbf{x}$  en el tiempo  $t$ . Denotamos por  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  a las coordenadas euclidianas usuales en el espacio. Sea  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  la velocidad de la partícula de fluido que pasa por el punto  $\mathbf{x}$  al tiempo  $t$ . Luego, fijando el tiempo  $t$ ,  $\mathbf{u}$  es un campo vectorial en  $D$ , que denominaremos el *campo de velocidades del fluido*. Asumimos que para cada tiempo  $t$  el fluido tiene una densidad definida  $\rho(\mathbf{x}, t)$ . Por tanto, si  $W$  es una subregión de  $D$ , la masa del fluido contenida en  $W$  en el tiempo  $t$  está dada por

$$m(W, t) = \int_W \rho(\mathbf{x}, t) dV,$$

donde  $dV$  es el elemento de volumen en el plano o en el espacio. En adelante, asumimos que las funciones  $\mathbf{u}$  y  $\rho$  son lo suficientemente suaves como para efectuar los cálculos necesarios.

## Conservación de la masa (ecuación de continuidad)

Sea  $W$  una subregión fija de  $D$ . Notamos por  $\partial W$  al borde de  $W$  y se asume que es una superficie suave. Notamos por  $\mathbf{n}$  a la normal unitaria exterior definida en puntos de  $\partial W$ . Además, notamos por  $dA$  a un elemento de área sobre la superficie  $\partial W$ .

La tasa de cambio de la masa en  $W$  es

$$\frac{d}{dt}m(W, t) = \frac{d}{dt} \int_W \rho(\mathbf{x}, t) dV = \int_W \frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{x}, t) dV.$$

El *principio de conservación de la masa* puede enunciarse de forma más precisa como: la tasa de crecimiento de la masa en  $W$  es igual a la tasa con la cual la masa ingresa a  $W$  a través de  $\partial W$ . Este principio se expresa mediante la ecuación siguiente, conocida como la *forma integral de la ley de conservación de la masa*:

$$\frac{d}{dt} \int_W \rho dV = - \int_{\partial W} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dA.$$

Gracias al teorema de la divergencia, esta ecuación equivale a

$$\int_W \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) \right) dV = 0. \quad (2.1)$$

Puesto que (2.1) se verifica para toda subregión  $W$ , la ecuación (2.1) es equivalente a

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (2.2)$$

La ecuación (2.2) es la forma diferencial del principio de conservación de la masa o *ecuación de continuidad* [7, p. 3].

## Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento

La ecuación de movimiento de un fluido expresa la Segunda Ley de Newton, esto es, que la tasa de cambio de la cantidad de movimiento de una porción dada de fluido es igual a la resultante de las fuerzas que actúan sobre esta porción.

Existen dos tipos de fuerzas que pueden actuar sobre cualquier porción de material de un medio continuo: las *fuerzas superficiales de tensión (stress)* y las *fuerzas externas* (o volumétricas). Las fuerzas superficiales de tensión son fuerzas que actúan en la porción del medio continuo a través de su superficie y son ejercidas por

el resto del medio continuo. La distribución espacial de estas fuerzas en un instante se define mediante el tensor de esfuerzos en un punto, que será notado por  $\sigma$ . Las fuerzas externas son fuerzas que se ejercen sobre todos los elementos de volumen del medio continuo y actúan a distancia, por ejemplo la fuerza de gravedad o un campo magnético.

Si  $W$  es una subregión fija de  $D$ , la cantidad de movimiento del fluido contenido en  $W$  es

$$\int_W \rho \mathbf{u} dV,$$

y su derivada total respecto del tiempo está dada por

$$\frac{d}{dt} \int_W \rho \mathbf{u} dV = \int_W \frac{d}{dt} (\rho \mathbf{u}) dV + \int_W \rho \mathbf{u} (\nabla \cdot \mathbf{u}) dV = \int_W \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} dV.$$

La resultante de las fuerzas superficiales de tensión y las fuerzas volumétricas que actúan sobre una porción de fluido debe ser igual a la derivada temporal de la cantidad de movimiento.

Notando por  $\mathbf{b}$  a la resultante de las fuerzas volumétricas por unidad de masa, tenemos que

$$\int_W \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} dV = \int_W \rho \mathbf{b} dV + \int_{\partial W} \sigma \cdot \mathbf{n} dA. \quad (2.3)$$

El último término de (2.3) puede escribirse como una integral de volumen mediante el Teorema de Green:

$$\int_{\partial W} \sigma \cdot \mathbf{n} dA = \int_W \nabla \cdot \sigma dV.$$

Luego, la ecuación (2.3) se expresa de la siguiente manera:

$$\int_W \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} dV = \int_W (\rho \mathbf{b} + \nabla \cdot \sigma) dV. \quad (2.4)$$

Puesto que la relación (2.4) es válida para cualquier región  $W$ , para todos los puntos del fluido se satisface la siguiente ecuación, conocida como la forma diferencial Lagrangiana de la *ecuación de movimiento*:

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \rho \mathbf{b} + \nabla \cdot \sigma. \quad (2.5)$$

La ecuación del movimiento puede tomar varias formas de acuerdo a la forma que tome el tensor de los esfuerzos. De acuerdo con la hipótesis del equilibrio termodinámico local, en un fluido en movimiento el tensor de los esfuerzos toma la

forma

$$\sigma = -p\mathbf{I} + \mathbf{T}. \quad (2.6)$$

Aquí  $p$  denota la presión y el tensor  $-p\mathbf{I}$  se define como si el fluido estuviera en reposo, es decir, la presión está determinada por la densidad y la temperatura. El tensor  $\mathbf{T}$  es la parte del tensor de los esfuerzos que describe los efectos del movimiento. Este tensor depende del estado de movimiento en el entorno de cada punto del fluido (movimiento relativo), expresado por el tensor  $\nabla\mathbf{u}$ .

Cuando las fuerzas debidas a  $\nabla \cdot \mathbf{T}$  son pequeñas en comparación a las fuerzas debidas al gradiente de la presión, como una primera aproximación, podemos ignorar el efecto del tensor  $\mathbf{T}$ , con lo cual el tensor de los esfuerzos sería el correspondiente a un fluido en reposo:

$$\sigma = -p\mathbf{I},$$

y la ecuación de movimiento del fluido sería

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \rho\mathbf{b} - \nabla p. \quad (2.7)$$

La ecuación (2.7) es conocida como *Ecuación de Euler*. Los fluidos descritos por esta ecuación se conocen como *fluidos ideales*.

### 2.3. Relaciones constitutivas para fluidos newtonianos

Cuando el tensor  $\mathbf{T}$  no es despreciable se requieren *relaciones constitutivas* para su cálculo. En el caso de los fluidos denominados *newtonianos*, se considera una relación constitutiva en la cual se asume las siguientes hipótesis respecto al tensor  $\mathbf{T}$ :

1. La parte antisimétrica del tensor  $\nabla\mathbf{u}$  no interviene en la definición del tensor  $\mathbf{T}$ . Esto significa que una rotación pura alrededor de un punto no contribuye al tensor de los esfuerzos.
2. Las componentes del tensor  $\mathbf{T}$  se relacionan linealmente con las componentes del tensor velocidad de deformación notado  $\varepsilon$ .
3. La parte isótropa y la parte anisótropa del tensor  $\varepsilon$ , contribuyen con coeficientes distintos al tensor  $\mathbf{T}$ .



Luego, podemos escribir

$$T = 2\eta\boldsymbol{\varepsilon}' + \omega(\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I},$$

donde  $\boldsymbol{\varepsilon}'$  es la parte anisótropa del tensor velocidad de deformación y los parámetros  $\eta$  y  $\omega$  se denominan *coeficientes de viscosidad* y son positivos. Estos parámetros son funciones del estado termodinámico del fluido y por ello dependen de la temperatura y de la presión del fluido. Si agrupamos los dos términos isótropos del tensor de deformación obtenemos

$$\boldsymbol{\sigma} = (-p + \omega \nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I} + 2\eta\boldsymbol{\varepsilon}'. \quad (2.8)$$

## 2.4. Las ecuaciones de Navier-Stokes

Para obtener la ecuación del movimiento de un fluido newtoniano, se debe reemplazar la expresión del tensor de los esfuerzos dada por (2.8) en la ecuación de movimiento (2.5). Puesto que en general los parámetros  $\eta$  y  $\omega$  dependen de la temperatura y la presión, no pueden salir del operador divergencia, sin embargo, en muchos casos estos parámetros no varían de forma apreciable y pueden ser considerados constantes. Entonces, la ecuación del movimiento del fluido está dada por

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{b} + \omega \nabla(\operatorname{div} \mathbf{u}) + \eta \Delta \mathbf{u},$$

donde

$$\Delta \mathbf{u} = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \mathbf{u}$$

es el Laplaciano de  $\mathbf{u}$ .

En el caso de un flujo incompresible (con  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ ) y homogéneo (con densidad constante  $\rho = \rho_0$ ), se obtienen las *ecuaciones de Navier-Stokes* que describen los flujos viscosos incompresibles de fluidos newtonianos:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\operatorname{grad} p' + \mathbf{b} + \nu \Delta \mathbf{u}, \quad (2.9)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (2.10)$$

donde  $\nu = \frac{\eta}{\rho_0}$  es el coeficiente de viscosidad cinemática<sup>2</sup> y  $p' = \frac{p}{\rho_0}$ .

Las ecuaciones (2.9) y (2.10) nos permiten determinar la velocidad y la presión

---

<sup>2</sup>La viscosidad cinemática es una medida de la resistencia de un fluido a fluir bajo la influencia de la gravedad.

del fluido. Esto significa que el estado mecánico del fluido está determinado por la presión y la velocidad.

## 2.5. Las ecuaciones de Stokes

Para flujos viscosos con número de Reynolds bajo, es decir flujos con muy baja velocidad o con muy alta viscosidad, o flujos alrededor o dentro de objetos muy pequeños, la solución de las ecuaciones de Stokes constituyen una buena aproximación para la solución de las ecuaciones de Navier-Stokes [24, p. 197]. En un dominio tridimensional, las *ecuaciones de Stokes* son la versión lineal de las ecuaciones de Navier-Stokes y se obtienen al eliminar el término convectivo de la ecuación (2.9):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} &= -\text{grad } p' + \mathbf{b} + \nu \Delta \mathbf{u}, \\ \text{div } \mathbf{u} &= 0. \end{aligned}$$

## 2.6. Fluidos no newtonianos

Existen muchos fluidos que no pueden ser descritos de forma adecuada mediante relaciones constitutivas lineales e independientes del tiempo, como la relación (2.8). En tales casos, se requiere determinar relaciones constitutivas adecuadas, es decir, se requiere hallar, en cada punto del medio, la relación entre el tensor de esfuerzos  $\sigma$  y el estado de deformación, el cual está determinado por el tensor velocidad de deformación  $\varepsilon$ .

Para un fluido newtoniano existe una relación lineal entre  $\sigma$  y  $\varepsilon$ . Sin embargo, otros fluidos cuyo peso molecular es del orden de medio millón o superior, o que son suspensiones no disueltas, presentan comportamientos diferentes y se denominan *fluidos no newtonianos*. Estos fluidos no pueden ser descritos por las ecuaciones de Navier-Stokes, sino que se describen mediante una ecuación del tipo:

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{b} + 2\nabla \cdot (\eta \varepsilon'),$$

donde la relación entre  $\eta$  y  $\varepsilon$  se determina empíricamente. A diferencia de los fluidos newtonianos, la viscosidad de muchos fluidos no newtonianos varía con la velocidad de corte. Los fluidos no Newtonianos presentan comportamientos no típicos, en el sentido de que difieren del comportamiento del líquido más común que es el

agua. En ciertas condiciones, estos fluidos fluyen como líquidos y en otras condiciones, exhiben propiedades parecidas a las de los sólidos. Estas características son de gran importancia práctica pues el entendimiento de ellas contribuye al desarrollo de aplicaciones tecnológicas para otras disciplinas científicas. A continuación describiremos algunas clases de fluidos no newtonianos que han sido clasificados tomando en cuenta cómo varía su viscosidad en respuesta a la magnitud de la velocidad de corte aplicada.

### **Tipos de fluidos no newtonianos**

Entre las clases más típicas de fluidos no newtonianos se encuentran las siguientes:

1. **Fluidos pseudoplásticos.** En estos fluidos la viscosidad  $\eta$  decrece con  $\varepsilon$ . Esto significa que para esfuerzos mayores existe menor resistencia del flujo. Algunos ejemplos de este tipo de fluidos son la sangre, el barro, el ketchup y las soluciones de polímeros.
2. **Fluidos de Bingham.** Estos fluidos poseen una pequeña rigidez que les permite soportar esfuerzos de corte mientras estos no superen un umbral específico, pero si se someten a esfuerzos grandes, estos fluidos fluyen con facilidad. Algunos ejemplos de fluidos de Bingham son la pasta de dientes, la masa de pan, la manteca y la gelatina.
3. **Fluidos dilatantes.** Es este tipo de fluidos la viscosidad  $\eta$  se incrementa con  $\varepsilon$ , esto quiere decir que para esfuerzos mayores el fluido presenta una mayor resistencia a fluir. Algunos ejemplos de fluidos dilatantes son la arena impregnada de agua y la solución de almidón en agua.

# Capítulo 3

## Notaciones y resultados útiles

Notamos por  $A = (a_{ij})$  a una matriz de tamaño  $m \times n$  cuya  $(i, j)$ -ésima entrada es  $a_{ij}$ , y por  $A^T$  a su matriz transpuesta. Si  $A = (a_{ij})$  y  $B = (b_{ij})$  son matrices de tamaño  $m \times n$ , definimos el producto escalar de Frobenius

$$A : B = \text{tr} \left( A^T B \right) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ij}.$$

Este producto escalar induce una norma matricial denominada norma de Frobenius y que se define por

$$|A| = (A : A)^{\frac{1}{2}} = \left( \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Si  $a = (a_1, \dots, a_N)$  y  $b = (b_1, \dots, b_N)$  son elementos de  $\mathbb{R}^N$ , notamos por “ $\cdot$ ” al producto escalar

$$a \cdot b = \sum_{i=1}^N a_i b_i,$$

y su respectiva norma inducida se define como

$$|a| = \left( \sum_{i=1}^N a_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Sea  $N \in \{2, 3\}$ . Si  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_N)$  es un campo vectorial en  $\mathbb{R}^N$ , notamos por  $\nabla \mathbf{y} = (\nabla y_{ij})$  al tensor de segundo orden en  $\mathbb{R}^{N \times N}$  definido por

$$\nabla y_{ij} = \frac{\partial y_i}{\partial x_j},$$

con  $i, j \in \{1, \dots, N\}$ . Notamos por  $\varepsilon y = (\varepsilon y_{ij})$  al tensor definido por

$$\varepsilon y_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial y_i}{\partial x_j} + \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \right),$$

con  $i, j \in \{1, \dots, N\}$ . Además si  $T = (t_{ij})$  es un tensor de segundo orden en  $\mathbb{R}^{N \times N}$ ,  $\text{Div } T$  nota al campo vectorial en  $\mathbb{R}^N$  definido por

$$\text{Div } T_i = \sum_{j=1}^N \frac{\partial t_{ji}}{\partial x_j},$$

con  $i \in \{1, \dots, N\}$ . Esto significa que la divergencia de un tensor de segundo orden es un vector cuya  $i$ -ésima componente es la divergencia del respectivo vector columna del tensor.

Si  $X$  es un espacio normado, notamos por  $\|\cdot\|_X$  a la norma definida sobre  $X$ . Si  $X$  es un espacio de Banach, notamos por  $X'$  a su espacio dual, que está definido por

$$X' = \{T : X \rightarrow \mathbb{R} : T \text{ es lineal y continuo}\}.$$

Los elementos de  $X'$  se denominan funcionales lineales sobre  $X$ . Notamos por  $\langle y, x \rangle$  al valor de un funcional lineal  $y \in X'$  evaluado en un elemento  $x \in X$ . Notamos por  $X''$  al espacio bidual de  $X$ , esto es el espacio dual del dual de  $X$ . El espacio  $X$  puede ser identificado con un subespacio de  $X''$  y el espacio  $X$  se dice reflexivo si  $X = X''$ .

En un espacio de Banach reflexivo, por ejemplo un espacio de Hilbert, es posible extraer de una sucesión acotada una subsucesión débilmente convergente, como lo expresa el resultado siguiente:

**PROPOSICIÓN 3.1** (Banach-Alaoglu) *Sea  $X$  un espacio de Banach reflexivo. Si  $B \subset X$  es acotado, entonces es relativamente compacto en la topología débil de  $X$ .*

Ahora enunciaremos las definiciones y resultados más importantes respecto a los espacios de funciones que se usarán a lo largo de este trabajo.

Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un subconjunto abierto, acotado y con frontera Lipschitz. Aquí  $dx$  denota la medida de Lebesgue estándar sobre  $\mathbb{R}^N$ .

Si  $1 \leq p < \infty$ ,  $L^p(\Omega)$  denota el conjunto de funciones medibles  $p$ -integrables. Si

$u \in L^p(\Omega)$ , se define su norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Si  $p = \infty$ ,  $L^\infty(\Omega)$  es el espacio de las funciones esencialmente acotadas. Si  $u \in L^\infty(\Omega)$ , su norma se define como

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \operatorname{ess\,sup}_{\Omega} |u(x)|.$$

Para  $p = 2$ ,  $L^2(\Omega)$  es un espacio de Hilbert con el producto escalar

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x)v(x) dx.$$

El espacio de Sobolev  $W^{k,p}(\Omega)$  es el espacio de funciones  $u \in L^p(\Omega)$ , tales que para todos los multi-índices  $\alpha$  con  $|\alpha| \leq k$ , la derivada débil  $D^\alpha u$  existe y  $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$ :

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq k\}.$$

El espacio  $W^{k,p}(\Omega)$  es un espacio de Banach con la norma

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left( \sum_{|j| \leq k} \|D^j u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty$$

y

$$\|u\|_{W^{k,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \operatorname{ess\,sup}_{\Omega} |D^\alpha u|.$$

Notamos por  $H^k(\Omega)$  al espacio  $W^{k,2}(\Omega)$ . El espacio  $H^k(\Omega)$  es un espacio de Hilbert con el producto escalar

$$(u, v)_{H^k(\Omega)} = \sum_{|j| \leq k} (D^j u, D^j v).$$

Sea  $\mathcal{D}(\Omega)$  el espacio de funciones de clase  $\mathcal{C}^\infty$  con soporte compacto contenido en  $\Omega$ . La clausura de  $\mathcal{D}(\Omega)$  en la norma de  $W^{k,p}(\Omega)$  se denota  $W_0^{k,p}(\Omega)$ . Si  $p = 2$ , se nota  $H_0^k(\Omega)$ .

El espacio dual de  $W_0^{k,p'}(\Omega)$  donde  $p'$  es el exponente conjugado de  $p \in [1, \infty[$ , es decir,  $p'$  verifica  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ , será denotado por  $W^{-k,p}(\Omega)$ . Equipamos a este espacio

de la norma dual

$$\|u\|_{W^{-k,p}(\Omega)} := \sup \{ \langle u, v \rangle : v \in W_0^{k,p'}(\Omega), \|v\|_{W^{k,p'}(\Omega)} = 1 \}.$$

Para más información sobre los espacios funcionales utilizados referimos por ejemplo a [23], [19] o [8].

Usaremos con frecuencia funciones cuyos valores son vectores  $n$ -dimensionales con componentes en uno de los espacios antes definidos.

Sea  $E$  un espacio euclídeo de dimensión finita dotado de un producto escalar que será notado por “ $\cdot$ ” y su correspondiente norma inducida será notada por  $|\cdot|_E$ . El espacio  $\mathbb{R}^N$  y el espacio de tensores simétricos de segundo orden en  $\mathbb{R}^{N \times N}$  constituyen ejemplos usuales de los espacios euclídeos de dimensión finita,

Escribimos  $L^p(\Omega; E)$  para denotar el espacio de clases de funciones de  $\Omega$  en  $E$  que son  $p$ -integrables respecto a la medida de Lebesgue. Este es un espacio de Banach con la norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega; E)} = \left( \int_{\Omega} |u(x)|_E^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

si  $1 \leq p < \infty$ , y si  $p = \infty$ , usamos la norma

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega; E)} = \text{ess sup}_{\Omega} |u(x)|_E.$$

Cuando  $E = \mathbb{R}^N$ , escribimos  $L^p(\Omega; E) = L^p(\Omega)^N$ .

Las desigualdades siguientes se usarán a menudo en las demostraciones de este trabajo.

**PROPOSICIÓN 3.2** (Desigualdad de Korn) *Sea  $y \in W_0^{1,p}(\Omega)^N$ , con  $1 < p < \infty$ . Entonces existe una constante  $C$  que depende de  $\Omega$  tal que*

$$C(\Omega) \|y\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq \|\varepsilon y\|_{L^p}.$$

*Demostración.* Ver [20, Teorema 1.10]. □

**PROPOSICIÓN 3.3** (Desigualdad de Cauchy-Schwarz) *Para todo  $x, y \in \mathbb{R}^N$ , se tiene*

$$|x \cdot y| \leq |x| |y|.$$

Recordemos que este es un caso particular de la desigualdad de Cauchy-Schwarz para espacios vectoriales con producto escalar. Sea  $H$  un espacio vectorial y sea  $(\cdot, \cdot)$

un producto escalar sobre  $H$ , esto es una forma bilineal definida sobre  $H \times H$  que toma valores en  $\mathbb{R}$  simétrica y definida positiva. Entonces,

$$|(u, v)| \leq (u, u)^{\frac{1}{2}}(v, v)^{\frac{1}{2}}, \forall u, v \in H.$$

Se nota por  $|u|$  a la cantidad  $(u, u)^{\frac{1}{2}}$  y gracias a la desigualdad de Cauchy-Scwarz  $|\cdot|$  es una norma sobre  $H$ .

**PROPOSICIÓN 3.4** (Desigualdad de Hölder) *Sean  $p$  y  $q$  tales que  $1 \leq p, q \leq \infty$  y  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Entonces si  $f \in L^p(\Omega)$  y  $g \in L^q(\Omega)$ , tenemos que*

$$\int_{\Omega} |fg| dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

*Demostración.* Ver [14, Apéndice B.2]. □

En seguida enunciamos los resultados más importantes sobre inyecciones para los espacios de Sobolev. Usualmente estos resultados se resumen en un solo teorema denominado Teorema de inyección de Sobolev. Definimos primero las inyecciones continuas y compactas.

**DEFINICIÓN 3.5** (Inyección continua) *Un espacio de Banach  $X$  se inyecta continuamente en un espacio de Banach  $Y$ , notado  $X \hookrightarrow Y$  si*

1.  $X \subseteq Y$ ,
2. *la inyección canónica  $j : X \rightarrow Y$  es un operador lineal y continuo. Esto significa que existe una constante  $C > 0$  tal que  $\|j(u)\|_Y \leq C \|u\|_X$ , que se escribe  $\|u\|_Y \leq \|u\|_X$ , para todo  $x \in X$ .*

**DEFINICIÓN 3.6** (Inyección compacta) *Un espacio de Banach  $X$  se inyecta compactamente en un espacio de Banach  $Y$  si  $X$  se inyecta continuamente en  $Y$  y la inyección canónica  $j$  es un operador compacto.*

Para referirnos a un operador compacto, seguimos la definición de [18].

**PROPOSICIÓN 3.7** (Teorema de inyección de Sobolev) *Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto acotado y que satisface la condición de cono. Sea  $1 \leq p < \infty$ . Entonces,*

1.  $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ , donde  $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}$  si  $n > mp$  y si  $n = mp$ , esta inyección se verifica para todo  $q \geq 1$ .



2.  $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ , si  $\frac{n}{p} + k < m \leq \frac{n}{p} + k + 1$  y  $k$  es cualquier entero no negativo.

La inyección de  $W^{m,p}(\Omega)$  en  $L^q(\Omega)$  es compacta para cualquier  $q$  que satisfice  $1 \leq q < \frac{np}{n-mp}$  si  $n > mp$ , y para cualquier  $q \geq 1$  si  $n \leq mp$ .

Aquí se ha considerado la definición de condición de cono dada en [1, p. 82]. Estas inyecciones también se verifican para los espacios de Sobolev de funciones vectoriales que usaremos en este trabajo.

Ahora definimos algunos conceptos acerca de funciones definidas sobre un espacio vectorial y que toman valores en  $\mathbb{R}$ . Estas funciones se denominan funcionales.

**DEFINICIÓN 3.8** (Funcional convexo) *Un funcional  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  definido sobre un espacio vectorial  $E$  se dice convexo si para todo  $x, y \in E$  y todo  $\lambda \in [0, 1]$  se tiene que*

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y). \quad (3.1)$$

*El funcional  $f$  se dice estrictamente convexo si la desigualdad (3.1) se cumple de forma estricta, esto es,*

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Respecto a la diferenciabilidad en espacios de Banach es necesario precisar las siguientes definiciones.

**DEFINICIÓN 3.9** (Derivada de Gâteaux) *Sean  $U$  y  $V$  dos espacios de Banach reales y  $F : U \rightarrow V$  una función de  $U$  en  $V$ . Si para algún  $u \in U$  y todo  $h \in U$ , existe el siguiente límite*

$$\delta F(u)(h) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (F(u + th) - F(u))$$

*y  $\delta F(u)$  es una aplicación lineal y continua de  $U$  en  $V$ , entonces  $\delta F(u)$  es notada  $F'_G(u)$  y se denomina la derivada de Gâteaux de  $F$  en  $u$ .  $F$  se dice Gâteaux diferenciable en  $u$ .*

**DEFINICIÓN 3.10** (Derivada de Fréchet) *Sean  $U$  y  $V$  dos espacios de Banach reales y  $F : U \rightarrow V$  una función de  $U$  en  $V$ . Sea  $\tilde{U}$  un subconjunto abierto de  $U$ . Decimos que  $F$  es Fréchet diferenciable en  $u \in \tilde{U}$  si existe un operador  $A \in \mathcal{L}(U, V)$  tal que*

$$\lim_{\|h\|_U \rightarrow 0} \frac{\|F(u + h) - F(u) - Ah\|_V}{\|h\|_U} = 0.$$

Aquí  $\mathcal{L}(U, V)$  denota el espacio de Banach de las aplicaciones lineales y acotadas de  $U$  en  $V$ , con norma dada por

$$\|L\| = \sup_{u \in U, u \neq 0} \frac{\|Lu\|_V}{\|u\|_U}.$$

El operador  $A$  se dice la derivada de Fréchet de  $F$  en  $u$  y se escribe  $A = F'(u)$ . Si  $F$  es Fréchet diferenciable en todo  $u \in \tilde{U}$ , entonces se dice que  $F$  es Fréchet diferenciable en  $\tilde{U}$ .

Los funcionales convexos y diferenciables pueden caracterizarse de acuerdo a la siguiente proposición.

**PROPOSICIÓN 3.11** *Sea  $X$  un espacio de Banach, y sea  $I : X \rightarrow \mathbb{R}$  un funcional diferenciable. Suponga que para todo  $u, v \in X$ ,*

$$(I'(u) - I'(v))(u - v) \geq 0.$$

*Entonces  $I$  es convexo. Si la desigualdad estricta se satisface cuando  $u \neq v$ , entonces  $I$  es estrictamente convexo.*

*Demostración.* La demostración de este teorema se encuentra en [2, Proposición 1.5.10].

□

También se cumple el recíproco de la proposición anterior, es decir, que la derivada de un funcional diferenciable es un operador monótono [4]. Aquí utilizamos la definición de operador monótono dada en la Definición 3.12.

El siguiente teorema es útil para demostrar la existencia de soluciones para ecuaciones diferenciales no lineales de tipo monótono, y su demostración se encuentra en [10]. Para enunciar este teorema, es necesario precisar algunas definiciones respecto al operador involucrado en este tipo de ecuaciones.

Sea  $A$  un operador que actúa de  $E$  en  $E'$ , con  $E$  un espacio de Banach.

**DEFINICIÓN 3.12** (Operador monótono) *El operador  $A : E \rightarrow E'$  se dice monótono si*

$$\langle A(x_1) - A(x_2), x_1 - x_2 \rangle \geq 0,$$

*para todo  $x_1, x_2 \in E$ . El operador  $A$  se dice estrictamente monótono si la desigual-*

dad anterior se verifica de forma estricta, esto es, para todo  $x_1, x_2 \in E$

$$\langle A(x_1) - A(x_2), x_1 - x_2 \rangle > 0.$$

**DEFINICIÓN 3.13** (Operador hemicontinuo) *El operador  $A : E \rightarrow E'$  se dice hemicontinuo si la función*

$$t \mapsto \langle A(x_1 + tx_2), x_3 \rangle$$

es continua para todo  $t \in [0, 1]$  y todo  $x_1, x_2, x_3 \in E$ .

**DEFINICIÓN 3.14** (Operador coercivo) *El operador  $A : E \rightarrow E'$  se dice coercivo si*

$$\lim_{\|x\|_E \rightarrow \infty} \frac{\langle A(x), x \rangle}{\|x\|_E} = +\infty.$$

**PROPOSICIÓN 3.15** (Teorema de Minty-Browder) *Sea  $A : E \rightarrow E'$  un operador monótono, hemicontinuo y coercivo y sea  $l \in E'$ . Entonces existe una solución para la ecuación variacional*

$$\langle A(y), v \rangle = \langle l, v \rangle, \quad v \in E.$$

*Si el operador  $A$  es estrictamente monótono, entonces la solución es única.*

El siguiente teorema constituye el inicio de los métodos directos del Cálculo de Variaciones.

**PROPOSICIÓN 3.16** *Sea  $X$  un espacio de Banach reflexivo y sea  $I : X \rightarrow \mathbb{R}$  un funcional débilmente semicontinuo inferior y coercivo, esto es, para toda sucesión  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  en  $X$  tal que  $x_n \rightharpoonup x$  en  $X$  se tiene que  $I(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} I(x_n)$ , y  $\lim_{\|y\| \rightarrow \infty} I(y) = +\infty$ . Entonces  $I$  tiene un mínimo global.*

Para enunciar el siguiente teorema cuya demostración puede ser encontrada en [3], requerimos definir algunas propiedades de las formas bilineales.

Sea  $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  una forma bilineal definida sobre un espacio de Hilbert  $H$

**DEFINICIÓN 3.17** (Forma bilineal continua) *La forma  $a(\cdot, \cdot)$  se dice continua si para todo  $u, v \in H$  existe una constante  $C > 0$  tal que*

$$a(u, v) \leq C \|u\|_H \|v\|_H.$$

**DEFINICIÓN 3.18** (Forma bilineal coerciva) *La forma  $a(\cdot, \cdot)$  se dice coerciva si para*

todo  $u \in H$  existe una constante  $\alpha > 0$  tal que

$$a(u, u) \geq \alpha \|u\|_H^2.$$

El siguiente teorema es una herramienta para demostrar la existencia y unicidad de soluciones para ecuaciones diferenciales elípticas de tipo lineal.

**PROPOSICIÓN 3.19** (Teorema de Lax-Milgram) *Sean  $a(\cdot, \cdot)$  una forma bilineal continua y coerciva sobre  $H$  un espacio de Hilbert y  $F(\cdot)$  una forma lineal continua sobre  $H$ . Entonces existe un único  $u \in H$  tal que*

$$a(u, v) = F(v), \quad \forall v \in H.$$

Usaremos el siguiente teorema para conmutar un límite con una integral. Referimos a [5] para la demostración de este resultado.

**PROPOSICIÓN 3.20** (Teorema de convergencia dominada de Lebesgue) *Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un abierto y sea  $(u_k)_k \in \mathbb{N}$  una sucesión en  $L^1(\Omega)$  tal que*

1.  $u_k(x) \rightarrow u(x)$  c.t.p.  $x \in \Omega$  si  $k \rightarrow \infty$ ,
2. existe  $v \in L^1(\Omega)$  tal que para todo  $k \in \mathbb{N}$ ,  $|u_k(x)| \leq v(x)$  c.t.p.  $x \in \Omega$ .

Entonces  $u \in L^1(\Omega)$  y  $u_k \rightarrow u$  en la norma de  $L^1(\Omega)$ , esto es  $\int_{\Omega} |u_k - u| dx \rightarrow 0$ .

Para obtener resultados sobre la diferenciabilidad del operador solución asociado a la ecuación de estado del problema de control óptimo se requiere usar algunos resultados de la diferenciabilidad de los operadores de superposición. Los operadores de superposición son también llamados operadores de Nemytskii. Sea  $S$  un subconjunto medible de  $\mathbb{R}^N$  y sean  $X$  y  $Y$  espacios de Banach reales. Dada una aplicación  $a : S \times X \rightarrow Y$ , el operador de Nemytskii  $A$  se define como  $A(x)(t) = a(t, x(t))$ ,  $t \in S$ . El operador  $A$  asigna a la función  $x(\cdot) : S \rightarrow X$  una función abstracta  $y(\cdot) : S \rightarrow Y$ . En este trabajo usaremos propiedades de diferenciabilidad de los operadores de Nemytskii de  $L^p(S; X)$  en  $L^q(S; Y)$ , con  $1 \leq p, q \leq \infty$ .

Recordemos que para  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $L^p(S; X)$  está definido como el espacio de las funciones medibles  $f : S \rightarrow X$  tales que  $\|f(\cdot)\| \in L^p(S; \mathbb{R})$  y la norma en este espacio se define mediante  $\|f\|_{L^p(S; X)} = \|\|f\|\|_{L^p(S; \mathbb{R})}$ .

Introducimos las siguientes condiciones:

**Condición de Carathéodory.** La función  $a(\cdot, x) : S \rightarrow Y$  es medible (en el sentido de Bochner) para todo  $x \in X$  fijo y  $a(t, \cdot) : X \rightarrow Y$  es continua para casi todo  $t \in S$ .

**Condición de crecimiento.** Sean  $1 \leq p, q < \infty$ . Existen  $\beta \geq 0$  y  $\gamma \in L^q(S)$  tales que  $\|a(t, x)\|_Y \leq \gamma(t) + \beta \|x\|_X^{p/q}$  para casi todo  $t \in S$  y para todo  $x \in X$ .

**Acotación uniforme.** Existe una constante  $k \geq 0$  tal que

$$\|a(t, x)\|_Y \leq k$$

para casi todo  $t \in S$  y para todo  $x \in X$ .

El siguiente teorema, cuya demostración se encuentra en [15, Teorema 7], nos da condiciones para la diferenciabilidad de los operadores de superposición. Suponemos que  $A$ , el operador de Nemytskii definido por  $a : S \times X \rightarrow Y$ , envía todo  $L^p(S; X)$  en  $L^q(S; Y)$ , donde  $1 \leq p, q \leq \infty$ .

**PROPOSICIÓN 3.21** *Sea  $1 \leq q < p < \infty$  o  $p = q = \infty$ . Suponga que  $a : S \times X \rightarrow Y$  es Fréchet diferenciable con respecto a  $x \in X$  y que la derivada de Fréchet  $a_x : S \times X \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$  satisface la condición de Carathéodory. Suponga que el operador de Nemytskii  $B$  definido por  $B(x)(t) = a_x(t, x(t))$ , con  $t \in S$  y  $x(\cdot) : S \rightarrow X$ , es continuo de  $L^p(S; X)$  en  $L^r(S; \mathcal{L}(X, Y))$  donde  $r = \frac{pq}{p-q}$  si  $p < \infty$  y  $r = \infty$  si  $p = \infty$ . Entonces  $A$  es continuamente Fréchet diferenciable y la derivada de Fréchet  $A' : L^p(S; X) \rightarrow \mathcal{L}(L^p(S; X), L^q(S; Y))$  está dada por*

$$(A'(x)h)(t) = B(x)(t)h(t), \quad t \in S \text{ y } x, h \in L^p(S; X)$$

En particular, estos resultados nos permitirán deducir la diferenciabilidad del operador de superposición asociado a una función  $g \in C^2(\mathbb{R}^{N \times N}, \mathbb{R}^{N \times N})$ . Para ello, suponemos que la función  $g$  satisface las hipótesis que se describen a continuación. Asumimos que existen constantes  $m, M > 0$  tales que para todo  $z, y \in \mathbb{R}^{N \times N}$  las condiciones siguientes se satisfacen

$$(g(z) - g(y)) : (z - y) \geq m |z - y|^2 \tag{3.2}$$

$$|g(z) - g(y)| \leq M |z - y| \tag{3.3}$$

y que  $g(0) = 0$ .

Suponemos que  $g$  y  $g'$  no dependen de la variable espacial  $x \in \Omega$ , entonces, la condición de Carathéodory se reduce a la continuidad con respecto a  $z \in \mathbb{R}^{N \times N}$ . Luego  $g$  y su derivada  $g'$  satisfacen la condición de Carathéodory.

Definimos el operador de Nemytskii  $G$  que a la función  $f \in L^p(\Omega; \mathbb{R}^{N \times N})$  asocia la función  $G(f)(x) = g(f(x))$ .

Notemos que (3.3) implica la condición de crecimiento. Por tanto,  $G$  envía  $L^p(\Omega; \mathbb{R}^{N \times N})$  continuamente en sí mismo para todo  $p \in [1, \infty]$ .

De manera similar definimos el operador de Nemytskii  $H : L^p(\Omega; \mathbb{R}^{N \times N}) \rightarrow L^q(\Omega; \mathbb{R}^{N \times N \times N})$  asociado a  $g'$ . Debido a (3.3), se tiene que  $g'$  satisface la condición de acotación uniforme. Entonces  $H$  es continua de  $L^p(\Omega; \mathbb{R}^{N \times N})$  en  $L^q(\Omega; \mathbb{R}^{N \times N \times N})$  para  $p \in [1, \infty]$  y  $q \in [1, \infty[$ .

Usando las propiedades de los operadores  $G$  y  $H$ , y gracias a la Proposición 3.21, se tiene que si  $1 \leq q < p < \infty$ ,

$$G : L^p(\Omega; \mathbb{R}^{N \times N}) \rightarrow L^q(\Omega; \mathbb{R}^{N \times N})$$

es continuamente Fréchet diferenciable y su derivada está dada por

$$(G'(f)h)(x) = (H(f)(x))h(x), \quad G'(f)h \in L^q(\Omega; \mathbb{R}^{N \times N})$$

para casi todo  $x \in \Omega$ , y todo  $f, h \in L^p(\Omega; \mathbb{R}^{N \times N})$ .

# Capítulo 4

## Planteamiento del problema

Realizaremos el análisis matemático de un problema de control óptimo asociado a un fluido dilatante. El control se efectúa a través de una fuerza mecánica distribuida y al minimizar el funcional objetivo, el campo de velocidades del fluido se aproximará a un campo de velocidades deseado. Los controles y los estados deben satisfacer un sistema de ecuaciones diferenciales que modela el comportamiento del fluido dilatante. Primero nos enfocaremos en la formulación de la ecuación de estado para el problema.

Consideramos las ecuaciones de conservación del momento y la masa junto con una relación constitutiva que se detallará más adelante. Las ecuaciones de conservación del momento y la masa están dadas por

$$-\text{Div } \sigma = u \quad \text{en } \Omega, \quad (4.1)$$

$$\nabla \cdot y = 0 \quad \text{en } \Omega, \quad (4.2)$$

donde  $\Omega$  es un dominio acotado bidimensional o tridimensional,  $\sigma$  es el tensor de esfuerzos, definido en (2.6),  $y$  es la velocidad del fluido y  $u$  es una fuerza externa. Para especificar la relación constitutiva notamos por  $\varepsilon$  a la aplicación que asocia la velocidad de deformación por corte a la velocidad, y  $|\varepsilon \cdot |$  denota la raíz cuadrada del segundo invariante del tensor de velocidad de deformación por corte:

$$\varepsilon y := \frac{1}{2} \left( \nabla y + \nabla y^T \right),$$

$$|\varepsilon y| = (\varepsilon y : \varepsilon y)^{\frac{1}{2}}.$$

Aquí “ : ” denota el producto escalar entre tensores de segundo orden.

La relación constitutiva, que relaciona el tensor de esfuerzos del fluido con la presión y el tensor de velocidad de deformación por corte, está dada por

$$\sigma = \begin{cases} 2\mu \varepsilon y - pI & \text{si } |\varepsilon y| \leq g, \\ 2 \left( \mu + \nu - \frac{\nu g}{|\varepsilon y|} \right) \varepsilon y - pI & \text{si } |\varepsilon y| > g, \end{cases} \quad (4.3)$$

donde  $\mu > 0$  y  $\nu \geq 0$  son viscosidades,  $g > 0$  es el parámetro en el cual la viscosidad se incrementa, y  $p$  es una función escalar que denota la presión. La relación (4.3) corresponde a un fluido en el cual ocurre un brusco incremento de la viscosidad cuando la velocidad de corte excede  $g$ .

En [12], para el estudio de las ecuaciones (4.1), (4.2) y (4.3), se establece una formulación de optimización usando el siguiente funcional de energía:

$$\min_{y \in Y} I(y) = \frac{\mu}{2} \int_{\Omega} \varepsilon y : \varepsilon y \, dx + \frac{\nu}{2} \int_{\Omega} \max(0, |\varepsilon y| - g)^2 \, dx - \int_{\Omega} u \cdot y \, dx, \quad (4.4)$$

donde

$$Y := \{y \in H^1(\Omega)^N : \nabla \cdot y = 0 \text{ en } \Omega, y = 0 \text{ sobre } \Gamma\}, \quad (4.5)$$

$\Gamma \subset \partial\Omega$  es un subconjunto abierto de la frontera de  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ,  $N \in \{2, 3\}$ ,  $\Omega$  es un subconjunto abierto y acotado de  $\mathbb{R}^N$  con frontera Lipschitz, y  $u \in L^2(\Omega)^N$ . Por simplicidad consideramos condiciones Dirichlet homogéneas sobre  $\Gamma = \partial\Omega$ .

El espacio  $Y$  es un subespacio cerrado de  $H_0^1(\Omega)^N$ , con  $N \in \{2, 3\}$ , [21, p. 298], dotado de la norma heredada de  $H^1(\Omega)^N$ . Consideramos la norma en  $H^1(\Omega)^N$  siguiente:

$$\|v\|_{H^1(\Omega)^N} = \left( \|v\|_{L^2}^2 + \|\nabla v\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

donde

$$\|v\|_{L^2} := \left( \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N |v^i(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

y

$$\|\nabla v\|_{L^2} := \left( \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left| \frac{\partial v^i(x)}{\partial x_j} \right|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Además en  $H^1(\Omega)^N$  se verifica la estimación trivial detallada en la siguiente proposición.



**PROPOSICIÓN 4.1** Si  $w \in H^1(\Omega)^N$ , se tiene la estimación

$$\int_{\Omega} |\varepsilon w|^2 dx \leq \|w\|_{H^1(\Omega)^N}^2. \quad (4.6)$$

*Demostración.* Sea  $w \in H^1(\Omega)^N$ , de la definición de  $\varepsilon \cdot$  se sigue que

$$\begin{aligned} |\varepsilon w|^2 &= \varepsilon w : \varepsilon w \\ &= \frac{1}{2} (\nabla w + \nabla w^T) : \frac{1}{2} (\nabla w + \nabla w^T) \\ &= \frac{1}{4} (\nabla w : \nabla w + 2 \nabla w : \nabla w^T + \nabla w^T : \nabla w^T). \end{aligned}$$

En esta expresión se puede usar la desigualdad de Cauchy-Schwarz para obtener

$$|\varepsilon w|^2 \leq \frac{1}{4} (|\nabla w| |\nabla w| + 2 |\nabla w| |\nabla w^T| + |\nabla w^T| |\nabla w^T|).$$

Además  $|\nabla w| = |\nabla w^T|$ , entonces, la desigualdad anterior se convierte en

$$|\varepsilon w|^2 \leq |\nabla w|^2.$$

En consecuencia,

$$\int_{\Omega} |\varepsilon w|^2 dx \leq \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx \leq \|w\|_{H^1(\Omega)^N}^2, \quad \forall w \in H^1(\Omega)^N. \quad (4.7)$$

□

Una condición necesaria y suficiente para que  $y \in Y$  sea el minimizador de (4.4) es que  $y$  satisfaga la siguiente ecuación variacional [12, p. 578]:

$$\mu \int_{\Omega} \varepsilon y : \varepsilon v dx + \nu \int_{\Omega} \max(0, |\varepsilon y| - g) \frac{\varepsilon y}{|\varepsilon y|} : \varepsilon v dx = \int_{\Omega} u \cdot v dx, \quad \text{para todo } v \in Y. \quad (4.8)$$

De acuerdo a la siguiente definición,  $y \in Y$  es un minimizador de (4.4) si y solamente si  $y$  es una solución débil de las ecuaciones (4.1)-(4.3).

**DEFINICIÓN 4.2** Sea  $u \in L^2(\Omega)^N$ . Una solución débil de (4.1) - (4.3) es una función  $y \in Y$  que verifica la ecuación (4.8).

Notemos que la función  $\max(0, \cdot)$  involucrada en el funcional de energía  $I$  no es diferenciable. Luego, si definimos un operador solución correspondiente a la ecuación (4.8), este operador tampoco será diferenciable. Por esta razón, en lugar de

tomar la ecuación (4.8) como ecuación de estado del problema de control óptimo, consideramos una ecuación proveniente de una versión regularizada del problema (4.4):

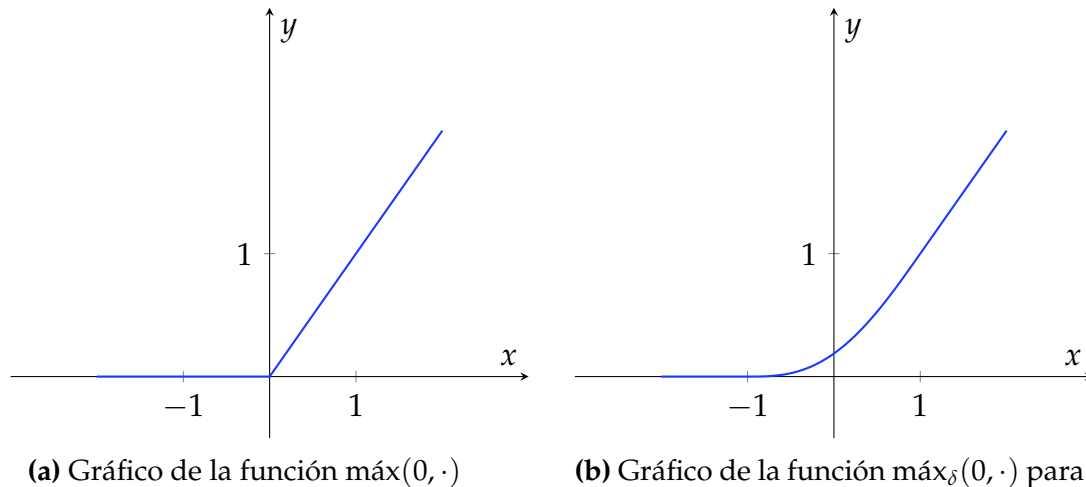
$$\min_{y \in Y} K(y) = \frac{\mu}{2} \int_{\Omega} \varepsilon y : \varepsilon y \, dx + \frac{\nu}{2} \int_{\Omega} \text{máx}_{\delta}(0, |\varepsilon y| - g)^2 \, dx - \int_{\Omega} u \cdot y \, dx, \quad (4.9)$$

donde  $\text{máx}_{\delta}$  es una aproximación dos veces continuamente diferenciable de la función máximo, definida por

$$\text{máx}_{\delta}(0, x) = \begin{cases} x & \text{si } x > \delta, \\ -\frac{1}{16\delta^3}x^4 + \frac{3}{8\delta}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3\delta}{16} & \text{si } |x| \leq \delta, \\ 0 & \text{si } x < -\delta, \end{cases} \quad (4.10)$$

con  $\delta > 0$ .

En la Figura 4.1 podemos observar las gráficas de la función máximo y su versión aproximada. Alrededor de  $x = 0$ , se ha definido la versión aproximada de la función máximo mediante un polinomio de tercer grado de tal manera que esta función sea continuamente diferenciable en todos los reales, a diferencia de la función  $\text{máx}(0, \cdot)$  que no es diferenciable en cero.



**Figura 4.1:** Gráficos de las funciones  $\text{máx}(0, x)$  y su aproximación diferenciable  $\text{máx}_{\delta}(0, \cdot)$ .

Una condición necesaria y suficiente para que una función  $y \in Y$  sea un minimizador del funcional  $K$  definido en (4.9) es que  $y$  verifique la ecuación

$$\mu \int_{\Omega} \varepsilon y : \varepsilon v \, dx + \nu \int_{\Omega} \text{máx}_{\delta}(0, |\varepsilon y| - g) 1_{\delta}(|\varepsilon y| - g) \frac{\varepsilon y}{|\varepsilon y|} : \varepsilon v \, dx = \int_{\Omega} u \cdot v \, dx, \quad (4.11)$$

para todo  $v \in Y$ , donde  $1_\delta$  es la derivada de la función  $\text{máx}_\delta(0, \cdot)$ :

$$1_\delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq \delta, \\ -\frac{1}{4\delta^3}x^3 + \frac{3}{4\delta}x + \frac{1}{2} & \text{si } |x| \leq \delta, \\ 0 & \text{si } x \leq -\delta. \end{cases} \quad (4.12)$$

En efecto, si  $y \in Y$  es un minimizador del funcional  $K$ , entonces  $K'(y)v = 0$ , para todo  $v \in Y$ . Recíprocamente, supongamos que  $y \in Y$  verifica la ecuación (4.11). Siguiendo la definición de punto crítico de un funcional dada en [2, Sección 1.3], tenemos que  $y$  es un punto crítico del funcional  $K$ . De la Proposición 4.3, a continuación, se sigue que  $K$  tiene un mínimo global que es su único punto crítico.

**PROPOSICIÓN 4.3** *El funcional definido por*

$$K(y) = \frac{\mu}{2} \int_{\Omega} \varepsilon y : \varepsilon y \, dx + \frac{\nu}{2} \int_{\Omega} \text{máx}_\delta(0, |\varepsilon y| - g)^2 \, dx - \int_{\Omega} u \cdot y \, dx, \quad \forall y \in Y,$$

*es estrictamente convexo, continuo y coercivo.*

*Demostración.* El funcional  $K$  es Fréchet diferenciable de  $Y$  en  $\mathbb{R}$ , y en consecuencia continuo. La derivada del funcional  $K$  en  $y \in Y$  está dada por

$$K'(y)v = \mu \int_{\Omega} \varepsilon y : \varepsilon v \, dx + \nu \int_{\Omega} \text{máx}_\delta(0, |\varepsilon y| - g) 1_\delta(|\varepsilon y| - g) \frac{\varepsilon y}{|\varepsilon y|} : \varepsilon v \, dx - \int_{\Omega} u \cdot v \, dx, \quad \forall v \in Y.$$

Entonces para todo  $y, w \in Y$ ,

$$(K'(y) - K'(w))(y - w) \geq \mu \int_{\Omega} \varepsilon(y - w) : \varepsilon(y - w) \, dx \quad (4.13)$$

$$\geq \mu \|y - w\|_Y^2. \quad (4.14)$$

La desigualdad (4.13) se obtiene notando que el funcional  $M$  definido por

$$M(y) = \frac{\nu}{2} \int_{\Omega} \text{máx}_\delta(0, |\varepsilon y| - g)^2 \, dx, \quad \forall y \in Y$$

es convexo, entonces su derivada  $M'$  es un operador monótono. La desigualdad (4.14), obtenida usando la desigualdad de Korn, indica que el funcional  $K$  es estrictamente convexo.

Ahora, probaremos que el funcional  $K$  es coercivo en  $Y$ . Sea  $y \in Y$ , tenemos que

$$K(y) \geq \frac{\mu}{2} \int_{\Omega} \varepsilon y : \varepsilon y \, dx - \int_{\Omega} u \cdot y \, dx \quad (4.15)$$

$$\geq C_1 \|y\|_Y^2 - \|u\|_{L^2(\Omega)^N} \|y\|_{L^2(\Omega)^N} \quad (4.16)$$

$$\geq C_1 \|y\|_Y^2 - C_2 \|u\|_{L^2(\Omega)^N} \|y\|_Y \quad (4.17)$$

La desigualdad (4.15) se tiene porque  $\text{máx}_{\delta} (0, |\varepsilon y| - g) 1_{\delta} (|\varepsilon y| - g) \geq 0$  y por tanto

$$\nu \int_{\Omega} \text{máx}_{\delta} (0, |\varepsilon y| - g) 1_{\delta} (|\varepsilon y| - g) \frac{\varepsilon y}{|\varepsilon y|} : \varepsilon y \, dx \geq 0.$$

Para obtener (4.16) se usó la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la desigualdad de Korn, que provee la constante  $C_1$ . Finalmente la desigualdad (4.17), se obtiene usando la inyección  $Y \hookrightarrow L^2(\Omega)^N$  [9]. Esta desigualdad implica que el funcional  $K$  es coercivo.  $\square$

Se tomará la ecuación (4.11) como ecuación de estado del problema de control óptimo que se plantea de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \min_{(y,u) \in Y \times U} \quad & J(y, u) = \frac{1}{2} \|y - z_d\|_{L^2(\Omega)^N}^2 + \frac{\alpha}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)^N}^2 \\ \text{sujeto a} \quad & \\ \mu \int_{\Omega} \varepsilon y : \varepsilon v \, dx + \int_{\Omega} \tau : \varepsilon v \, dx = \int_{\Omega} u \cdot v \, dx, \quad & \text{para todo } v \in Y \\ \tau - \nu \text{máx}_{\delta} (0, |\varepsilon y| - g) 1_{\delta} (|\varepsilon y| - g) \frac{\varepsilon y}{|\varepsilon y|} = 0, \quad & \text{c.t.p. en } \Omega. \end{aligned} \quad (\text{P})$$

Aquí  $\tau$  es un tensor simétrico dual. En el funcional objetivo  $z_d \in L^2(\Omega)^N$  es el estado ideal del sistema y  $\alpha$  es un parámetro mayor o igual a cero. El espacio de estado será el espacio de los campos con divergencia cero y condiciones de borde tipo Dirichlet homogéneas sobre  $\Gamma = \partial\Omega$ , que fue definido en (4.5) y el espacio de control será  $U = L^2(\Omega)^N$ .

# Capítulo 5

## Existencia de soluciones para el problema de control óptimo

Primero estudiaremos la existencia de soluciones para la ecuación de estado del problema (P). Notaremos por  $(\cdot, \cdot)$  al producto interno en  $L^2(\Omega)$ . En caso de que las funciones dentro de este producto tengan valores de vectores o tensores,  $(\cdot, \cdot)$  será la suma de los productos componente a componente del vector o tensor.

Definimos el operador

$$\begin{aligned} T : Y &\longrightarrow Y' \\ y &\longmapsto T(y) \end{aligned}$$

$$\langle T(y), v \rangle_{Y', Y} = \mu(\varepsilon y, \varepsilon v) + v(m(\varepsilon y), \varepsilon v) \quad \forall v \in Y,$$

donde  $m : \mathbb{R}^{N \times N} \rightarrow \mathbb{R}^{N \times N}$  está definida por

$$m(z) = \text{máx}_\delta(0, |z| - g) 1_\delta(|z| - g) \frac{z}{|z|}, \quad (5.1)$$

para todo  $z \in \mathbb{R}^{N \times N}$ . Usando el operador  $T$ , la ecuación de estado (ecuación (4.11)) puede ser escrita como

$$\langle T(y), v \rangle_{Y', Y} = \langle l, v \rangle_{Y', Y}, \quad \text{para todo } v \in Y. \quad (5.2)$$

En este caso, dado  $u \in L^2(\Omega)^N$ ,  $l$  se define mediante

$$\langle l, v \rangle_{Y', Y} = \int_{\Omega} u \cdot v \, dx, \quad \text{para todo } v \in Y.$$

**PROPOSICIÓN 5.1** Dado  $l \in Y'$  existe un único  $y \in Y$  que resuelve la ecuación (5.2).

*Demostración.* Usaremos el Teorema de Minty-Browder para demostrar este resultado. Para ello se requiere mostrar que  $T$  es un operador monótono, hemicontinuo y coercivo. Notemos que  $m$  es la derivada de la función convexa y diferenciable  $z \mapsto \frac{1}{2} \text{máx}_\delta(0, |z| - g)^2$ , entonces se tiene que  $(m(z) - m(w), z - w) \geq 0$ , para todo  $z, w \in \mathbb{R}^{N \times N}$ . Luego, el operador  $T$  es monótono, pues

$$\begin{aligned} \langle T(y) - T(w), y - w \rangle_{Y', Y} &= \mu (\varepsilon(y - w), \varepsilon(y - w)) + \nu (m(\varepsilon y) - m(\varepsilon w), \varepsilon y - \varepsilon w) \\ &\geq \mu \|\varepsilon(y - w)\|_{L^2}^2 \\ &\geq C \|y - w\|_Y^2 \\ &\geq 0, \quad \text{para todo } y, w \in Y. \end{aligned} \tag{5.3}$$

En (5.3) se usó la desigualdad de Korn. Un caso particular de la monotonía del operador  $T$ , tomando  $w = 0$ , implica que el operador  $T$  es coercivo en  $Y$ .

Ahora, para probar que el operador  $T$  es hemicontinuo se verificará que la función  $t \mapsto \langle T(y + tw), v \rangle_{Y', Y}$  es continua para todo  $t \in [0, 1]$  y todo  $y, w, v \in Y$ . Sea  $(t_n)$  una sucesión en  $[0, 1]$  tal que  $t_n \rightarrow t$  para algún  $t \in [0, 1]$ . Tenemos que

$$\mu(\varepsilon y + t_n \varepsilon w : \varepsilon v) + \nu \left( \text{máx}_\delta(0, |\varepsilon y + t_n \varepsilon w| - g) 1_\delta(|\varepsilon y + t_n \varepsilon w| - g) \frac{\varepsilon y + t_n \varepsilon w}{|\varepsilon y + t_n \varepsilon w|} : \varepsilon v \right)$$

converge a

$$\mu(\varepsilon y + t \varepsilon w : \varepsilon v) + \nu \left( \text{máx}_\delta(0, |\varepsilon y + t \varepsilon w| - g) 1_\delta(|\varepsilon y + t \varepsilon w| - g) \frac{\varepsilon y + t \varepsilon w}{|\varepsilon y + t \varepsilon w|} : \varepsilon v \right)$$

c.t.p.  $x \in \Omega$  si  $n \rightarrow \infty$ . Además, para todo  $z \in \mathbb{R}^{N \times N}$ ,

$$\text{máx}_\delta(0, |z| - g) \leq |z|, \tag{5.4}$$

$$1_\delta(|z| - g) \leq 1, \tag{5.5}$$

de donde, para cada  $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} |\mu(\varepsilon y + t_n \varepsilon w : \varepsilon v) + \nu(m(\varepsilon y + t_n \varepsilon w) : \varepsilon v)| &\leq (\mu + \nu) (|\varepsilon y : \varepsilon v| + t_n |\varepsilon w : \varepsilon v|) \\ &\leq (\mu + \nu) (|\varepsilon y| |\varepsilon v| + |\varepsilon w| |\varepsilon v|). \end{aligned}$$

La función  $|\varepsilon y| |\varepsilon v| + |\varepsilon w| |\varepsilon v| \in L^1(\Omega)$ , pues

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |\varepsilon y| |\varepsilon v| + |\varepsilon w| |\varepsilon v| dx &\leq \left( \int_{\Omega} |\varepsilon y|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega} |\varepsilon v|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + \left( \int_{\Omega} |\varepsilon w|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega} |\varepsilon v|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left\{ \left( \int_{\Omega} \varepsilon y : \varepsilon y dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \int_{\Omega} \varepsilon w : \varepsilon w dx \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \left( \int_{\Omega} \varepsilon v : \varepsilon v dx \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Notemos que el valor de esta integral es finito porque si  $y \in H^1(\Omega)^N$ , tenemos que  $\varepsilon y \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^{N \times N})$ , [22].

Así, del teorema de convergencia dominada de Lebesgue se obtiene que

$$\langle T(y + t_n w), v \rangle_{Y', Y} \rightarrow \langle T(y + tw), v \rangle.$$

Puesto que  $l \in Y'$  y el operador  $T$  es monótono, hemicontinuo y coercivo, del Teorema de Minty-Browder, se sigue que existe  $y \in Y$  tal que verifica (5.2).

Además, el operador  $T$  es estrictamente monótono. En efecto, si en la desigualdad (5.3) consideramos  $y \neq w$ , se obtiene la desigualdad estricta:

$$\langle T(y) - T(w), y - w \rangle_{Y', Y} \geq C \|y - w\|_Y^2 > 0.$$

Se concluye que la solución de la ecuación (5.2) es única.  $\square$

De acuerdo a la Proposición 5.1, la ecuación de estado tiene una solución única para cada  $l \in Y'$ . Entonces se puede definir el operador  $\mathcal{S}$ , que a cada  $l \in Y'$  asocia la solución  $y \in Y$  correspondiente:

$$\begin{aligned}
\mathcal{S} : Y' &\longrightarrow Y \\
l &\longmapsto \mathcal{S}(l) = y.
\end{aligned} \tag{5.6}$$

El siguiente lema, referente a este operador, es útil para demostrar la existencia de soluciones del problema de control óptimo (P).

**LEMA 5.2** *El operador  $\mathcal{S} : Y' \rightarrow Y$ , definido en (5.6), es Lipschitz continuo.*

*Demostración.* Sean  $l_1, l_2 \in Y'$ . Notando  $y_1 = \mathcal{S}(l_1)$  y  $y_2 = \mathcal{S}(l_2)$  tenemos que para

todo  $v \in Y$ :

$$\mu(\varepsilon y_1, \varepsilon v) + \nu(m(\varepsilon y_1), \varepsilon v) = \langle l_1, v \rangle_{Y', Y}, \quad (5.7)$$

$$\mu(\varepsilon y_2, \varepsilon v) + \nu(m(\varepsilon y_2), \varepsilon v) = \langle l_2, v \rangle_{Y', Y}. \quad (5.8)$$

Luego, restando (5.8) de (5.7) obtenemos

$$\mu(\varepsilon y_1 - \varepsilon y_2, \varepsilon v) + \nu(m(\varepsilon y_1) - m(\varepsilon y_2), \varepsilon v) = \langle l_1 - l_2, v \rangle_{Y', Y}, \quad \forall v \in Y.$$

En particular, para  $v = y_1 - y_2$

$$\mu(\varepsilon(y_1 - y_2), \varepsilon(y_1 - y_2)) + \nu(m(\varepsilon y_1) - m(\varepsilon y_2), \varepsilon y_1 - \varepsilon y_2) = \langle l_1 - l_2, y_1 - y_2 \rangle_{Y', Y}.$$

Luego, de la monotonía de  $m$ , se sigue que

$$\begin{aligned} \mu \|\varepsilon(y_1 - y_2)\|^2 &\leq \langle l_1 - l_2, y_1 - y_2 \rangle_{Y', Y} \\ &\leq \|l_1 - l_2\|_{Y'} \|y_1 - y_2\|_Y. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Usando la desigualdad de Korn en (5.9), obtenemos

$$C \|y_1 - y_2\|_Y^2 \leq \|l_1 - l_2\|_{Y'} \|y_1 - y_2\|_Y$$

para alguna constante  $C > 0$ . Finalmente,

$$\|\mathcal{S}(l_1) - \mathcal{S}(l_2)\|_Y \leq \frac{1}{C} \|l_1 - l_2\|_{Y'}, \quad \forall l_1, l_2 \in Y'.$$

□

Ahora precisaremos las definiciones de soluciones globales y locales para problemas de minimización generales. Consideramos problemas con la siguiente estructura:

$$\begin{aligned} &\min_{w \in W} I(w) \\ &\text{sujeto a} \\ &w \in W_{ad} \end{aligned} \quad (5.10)$$

donde  $W$  es un espacio de Banach,  $I : W \rightarrow \mathbb{R}$  es un funcional acotado inferiormente y  $W_{ad}$  es un subconjunto no vacío de  $W$ .

**DEFINICIÓN 5.3** (Solución global) *Sea  $\bar{w} \in W_{ad}$ . Se dice que  $\bar{w}$  es solución óptima*



global (o mínimo global) del problema (5.10) sobre  $W_{ad}$ , si

$$I(\bar{w}) \leq I(w), \quad \forall w \in W_{ad}.$$

**DEFINICIÓN 5.4** (Solución local) Sea  $w^* \in W_{ad}$ . Se dice que  $w^*$  es solución óptima local (o mínimo local) del problema (5.10) sobre  $W_{ad}$ , si para alguna vecindad  $V(w^*)$  de  $w^*$  en  $W$ , se tiene que

$$I(w^*) \leq I(w), \quad \forall w \in V(w^*) \cap W_{ad}.$$

En adelante, para referirnos a soluciones globales o locales de problemas de control óptimo consideramos las definiciones 5.3 o 5.4.

Ahora probaremos que existe una solución global para el problema (P).

**PROPOSICIÓN 5.5** El problema de control óptimo (P) tiene una solución global.

*Demostración.* Dado que el funcional  $J$  está acotado inferiormente por cero, existe una sucesión minimizante  $(y_k, u_k)$  en

$$F_{ad} := \{(y, u) \in Y \times U : \mu(\varepsilon y, \varepsilon v) + v(m(\varepsilon y), \varepsilon v) = (u, v), \forall v \in Y\},$$

con  $m$  definido en (5.1). Entonces, para  $k \rightarrow \infty$ ,  $J(y_k, u_k) \rightarrow J^* = \inf_{(y,u) \in F_{ad}} J(y, u)$ .

Además, existe una constante positiva  $c$  tal que

$$\frac{\alpha}{2} \|u_k\|_{L^2(\Omega)^N}^2 \leq J(y_k, u_k) \leq c$$

para  $k \in \mathbb{N}$  suficientemente grande. Esto implica que la sucesión  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  está acotada en  $L^2(\Omega)^N$ . Luego, existe una subsucesión de  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  notada de la misma forma tal que  $u_k \rightharpoonup u$  en  $L^2(\Omega)^N$ . De la inyección de Sobolev compacta  $Y \hookrightarrow L^2(\Omega)^N \hookrightarrow Y'$  [9, Sección 6.6], tenemos que

$$u_k \rightarrow u \text{ en } Y'. \quad (5.11)$$

Ahora, del Lema 5.2 se sigue que

$$\|\mathcal{S}(u_k) - \mathcal{S}(u)\|_Y \leq \frac{1}{C} \|u_k - u\|_{Y'}, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

lo cual junto a (5.11) implica que  $y_k = \mathcal{S}(u_k) \rightarrow y := \mathcal{S}(u)$  en  $Y$ . Por tanto,  $(y, u) \in F_{ad}$ . De la convexidad y continuidad de  $J$ , se tiene que  $J$  es débilmente semicontinuo

inferior, de donde

$$J(y, u) \leq \liminf_k J(y_k, u_k) = J^*.$$

Es decir,  $(y, u)$  es una solución global del problema (P).

□

# Capítulo 6

## Diferenciabilidad del operador solución

### 6.1. Diferenciabilidad de Gâteaux

Dado  $u \in L^2(\Omega)^N$ , la ecuación

$$\mu(\varepsilon y, \varepsilon v) + \nu(m(\varepsilon y), \varepsilon v) = (u, v) \quad \forall v \in Y, \quad (6.1)$$

con  $m$  definido en (5.1), tiene una solución única  $y \in Y$ . La existencia de tal  $y \in Y$  solución de la ecuación (6.1), se puede obtener de la misma manera que en la Proposición 5.1. Entonces, se define el operador  $\mathcal{S} : U \rightarrow Y$  que a cada  $u \in U$  asocia la correspondiente solución de la ecuación (6.1),  $\mathcal{S}(u) \in Y$ .

En la siguiente Proposición se establece la Gâteaux diferenciabilidad de este operador.

**PROPOSICIÓN 6.1** *El operador  $\mathcal{S} : U \rightarrow Y$  es débilmente Gâteaux diferenciable.*

*Demostración.* Sean  $u, h \in U$ . Notemos por  $y_t$  a la solución de la ecuación (6.1) asociada a  $u + th$ , con  $t > 0$ , y notemos por  $y$  a la solución asociada de la ecuación (6.1) asociada a  $u$ . Entonces, tenemos que

$$\mu(\varepsilon y, \varepsilon v) + \nu(m(\varepsilon y), \varepsilon v) = (u, v) \quad \forall v \in Y, \quad (6.2)$$

$$\mu(\varepsilon y_t, \varepsilon v) + \nu(m(\varepsilon y_t), \varepsilon v) = (u + th, v) \quad \forall v \in Y. \quad (6.3)$$

Restando (6.2) de (6.3), obtenemos

$$\mu(\varepsilon(y_t - y), \varepsilon v) + \nu(m(\varepsilon y_t) - m(\varepsilon y), \varepsilon v) = t(h, v) \quad \forall v \in Y. \quad (6.4)$$

En particular, para  $v = y_t - y$  se tiene que

$$\mu(\varepsilon(y_t - y), \varepsilon(y_t - y)) + \nu(m(\varepsilon y_t) - m(\varepsilon y), \varepsilon(y_t - y)) = t(h, y_t - y). \quad (6.5)$$

Considerando la monotonía de la función  $m$  y la desigualdad de Cauchy-Schwarz, (6.5) se transforma en

$$\mu \|\varepsilon(y_t - y)\|_{L^2}^2 \leq t \|h\|_{L^2(\Omega)^N} \|y_t - y\|_{L^2(\Omega)^N}. \quad (6.6)$$

Luego, usando la desigualdad de Korn y la inyección  $Y \hookrightarrow L^2(\Omega)^N$  en (6.6), obtenemos que

$$C \|y_t - y\|_Y^2 \leq t \|h\|_{L^2(\Omega)^N} \|y_t - y\|_Y, \quad (6.7)$$

para alguna constante positiva  $C$ . Entonces,

$$\left\| \frac{y_t - y}{t} \right\|_Y \leq \frac{1}{C} \|h\|_U. \quad (6.8)$$

Notando  $w_t := \frac{y_t - y}{t}$ , tenemos que la sucesión  $(w_t)_{t>0}$  está acotada en  $Y$ , y por tanto existen una subsucesión, notada de la misma manera, y  $w \in Y$  tales que

$$w_t \rightharpoonup w, \quad \text{en } Y. \quad (6.9)$$

Probaremos que  $w \in Y$  es la única solución de la ecuación linealizada (6.15). La existencia y unicidad de las soluciones para la ecuación linealizada se demostrará más adelante en el Lema 6.2. Restando (6.2) de (6.3), se obtiene que

$$\mu(\varepsilon(w_t), \varepsilon v) + \frac{\nu}{t}(m(\varepsilon y_t) - m(\varepsilon y), \varepsilon v) = (h, v) \quad \forall v \in Y. \quad (6.10)$$

Luego, aplicando el teorema del valor medio en (6.10), se sigue que

$$\begin{aligned} \mu(\varepsilon w_t, \varepsilon v) + \frac{\nu}{t}(m'(z_t) : (\varepsilon y_t - \varepsilon y), \varepsilon v) &= \mu(\varepsilon(w_t), \varepsilon v) + \nu(m'(z_t) \varepsilon w_t, \varepsilon v) \\ &= (h, v) \quad \forall v \in Y, \end{aligned} \quad (6.11)$$

donde  $z_t(x) = \varepsilon y(x) + \beta_t(x)(\varepsilon y_t(x) - \varepsilon y(x))$  depende de  $v$  y  $\beta_t(x) \in [0, 1]$ . La ecua-

ción (6.11) se puede expresar como:

$$\begin{aligned}
& \mu(\varepsilon w_t, \varepsilon v) + \nu \int_{\Omega} 1_{\delta}^2(|z_t| - g) \frac{z_t}{|z_t|} : \varepsilon w_t \frac{z_t}{|z_t|} : \varepsilon v \, dx \\
& \quad + \nu \int_{\Omega} \frac{\text{máx}_{\delta}(0, |z_t| - g)}{|z_t|} 1_{\delta}(|z_t| - g) \varepsilon w_t : \varepsilon v \, dx \\
& + \nu \int_{\Omega} \text{máx}_{\delta}(0, |z_t| - g) \chi_{\delta} \left( -\frac{3}{4\delta^3} (|z_t| - g)^2 + \frac{3}{4\delta} \right) \frac{z_t}{|z_t|^2} : \varepsilon w_t z_t : \varepsilon v \, dx \\
& - \nu \int_{\Omega} \text{máx}_{\delta}(0, |z_t| - g) 1_{\delta}(|z_t| - g) \frac{z_t}{|z_t|^3} : \varepsilon w_t z_t : \varepsilon v \, dx = (h, v), \quad \forall v \in Y,
\end{aligned} \tag{6.12}$$

donde  $\chi_{\delta} = 1$ , si  $||z_t| - g| \leq \delta$  y  $\chi_{\delta} = 0$ , si  $||z_t| - g| > \delta$ .

Puesto que  $w_t \rightharpoonup w$  en  $Y$ , tenemos que para todo  $v \in Y$ ,  $\mu(\varepsilon w_t, \varepsilon v) \rightarrow \mu(\varepsilon w, \varepsilon v)$ . Además, de (6.7) se tiene que  $y_t \rightarrow y$  en  $Y$  y por tanto  $z_t \rightarrow \varepsilon y$  en  $L^2(\Omega; \mathbb{R}^{N \times N})$ .

Consideremos el operador  $\Psi$  definido de  $\mathbb{R}^{N \times N}$  en  $\mathbb{R}^{N \times N}$ , mediante

$$\begin{aligned}
\Psi(\eta) = & \nu 1_{\delta}^2(|\eta| - g) \left( \frac{\eta}{|\eta|} : \xi \right) \frac{\eta}{|\eta|} + \nu \frac{\text{máx}_{\delta}(0, |\eta| - g)}{|\eta|} 1_{\delta}(|\eta| - g) \xi \\
& + \nu \text{máx}_{\delta}(0, |\eta| - g) (\eta : \xi) \chi_{\delta} \left( -\frac{3}{4\delta^3} (|\eta| - g)^2 + \frac{3}{4\delta} \right) \frac{\eta}{|\eta|^2} \\
& - \nu (\eta : \xi) \text{máx}_{\delta}(0, |\eta| - g) 1_{\delta}(|\eta| - g) \frac{\eta}{|\eta|^3},
\end{aligned}$$

con  $\xi \in \mathbb{R}^{N \times N}$ ,  $\chi_{\delta} = 1$ , si  $||\eta| - g| \leq \delta$  y  $\chi_{\delta} = 0$ , si  $||\eta| - g| > \delta$ . El operador  $\Psi$  considerado de  $L^p(\Omega; \mathbb{R}^{N \times N})$  en  $L^p(\Omega; \mathbb{R}^{N \times N})$  es un operador de superposición continuo para todo  $p \in [1, \infty]$ . Luego, pasando al límite en (6.12), cuando  $t \rightarrow 0$ , la continuidad del operador  $\Psi$  y (6.9) implican que

$$\begin{aligned}
& \mu(\varepsilon w, \varepsilon v) + \nu \int_{\Omega} 1_{\delta}^2(|\varepsilon y| - g) \frac{\varepsilon y}{|\varepsilon y|} : \varepsilon w \frac{\varepsilon y}{|\varepsilon y|} : \varepsilon v \, dx \\
& \quad + \nu \int_{\Omega} \frac{\text{máx}_{\delta}(0, |\varepsilon y| - g)}{|\varepsilon y|} 1_{\delta}(|\varepsilon y| - g) \varepsilon w : \varepsilon v \, dx \\
& + \nu \int_{\Omega} \text{máx}_{\delta}(0, |\varepsilon y| - g) \chi_{\delta} \left( -\frac{3}{4\delta^3} (|\varepsilon y| - g)^2 + \frac{3}{4\delta} \right) \frac{\varepsilon y}{|\varepsilon y|^2} : \varepsilon w \varepsilon y : \varepsilon v \, dx \\
& - \nu \int_{\Omega} \text{máx}_{\delta}(0, |\varepsilon y| - g) 1_{\delta}(|\varepsilon y| - g) \frac{\varepsilon y}{|\varepsilon y|^3} : \varepsilon w \varepsilon y : \varepsilon v \, dx = (h, v), \quad \forall v \in Y.
\end{aligned} \tag{6.13}$$

Concluimos que  $S$  es débilmente Gâteaux diferenciable y  $w = S'_G(u)$ .  $\square$

## 6.2. Diferenciabilidad de Fréchet

Dado  $u \in L^\infty(\Omega)^N$ , la ecuación

$$\mu(\varepsilon y, \varepsilon v) + \nu(m(\varepsilon y), \varepsilon v) = (u, v) \quad \forall v \in Y, \quad (6.14)$$

con  $m$  definido en (5.1), tiene una solución única  $y \in Y$ . La existencia de tal  $y \in Y$  solución de la ecuación (6.14), se puede obtener de la misma manera que en la Proposición 5.1, si tomamos el operador del lado derecho de la ecuación (5.2) como

$$l(v) = \int_{\Omega} u \cdot v \, dx \quad \text{para todo } v \in Y,$$

con  $u \in L^\infty(\Omega)^N$ . El operador  $l$  es lineal y además acotado pues para todo  $v \in Y$

$$|l(v)| = \left| \int_{\Omega} u \cdot v \, dx \right| \leq \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq C \|u\|_{L^\infty} \|v\|_Y,$$

para alguna constante positiva  $C$ .

Entonces podemos definir el operador solución, también llamado operador control-a-estado,  $S : L^\infty(\Omega)^N \rightarrow Y$  que a cada  $u \in L^\infty(\Omega)^N$  asocia la solución correspondiente  $S(u) = y_u \in Y$ .

El siguiente Lema es útil para la demostración de la Proposición 6.3.

**LEMA 6.2** Sean  $h, u \in L^\infty(\Omega)^N$  y  $y_u = S(u)$ . Entonces existe un único  $w_u^h \in Y$  tal que

$$\mu(\varepsilon w_u^h, \varepsilon v) + \nu(m'(\varepsilon y_u) \varepsilon w_u^h, \varepsilon v) = (h, v) \quad \forall v \in Y, \quad (6.15)$$

donde

$$\nu(m'(\varepsilon y_u) \varepsilon w_u^h, \varepsilon v) = \nu \int_{\Omega} 1_\delta^2 (|\varepsilon y_u| - g) \frac{\varepsilon y_u}{|\varepsilon y_u|} : \varepsilon w_u^h \frac{\varepsilon y_u}{|\varepsilon y_u|} : \varepsilon v \, dx \quad (6.16)$$

$$+ \nu \int_{\Omega} \frac{\text{máx}_\delta(0, |\varepsilon y_u| - g)}{|\varepsilon y_u|} 1_\delta (|\varepsilon y_u| - g) \varepsilon w_u^h : \varepsilon v \, dx \quad (6.17)$$

$$+ \nu \int_{\Omega} \text{máx}_\delta(0, |\varepsilon y_u| - g) \chi_\delta \left( -\frac{3}{4\delta^3} (|\varepsilon y_u| - g)^2 + \frac{3}{4\delta} \right) \frac{\varepsilon y_u}{|\varepsilon y_u|^2} : \varepsilon w_u^h \varepsilon y_u : \varepsilon v \, dx \quad (6.18)$$

$$- \nu \int_{\Omega} \text{máx}_\delta(0, |\varepsilon y_u| - g) 1_\delta (|\varepsilon y_u| - g) \frac{\varepsilon y_u}{|\varepsilon y_u|^3} : \varepsilon w_u^h \varepsilon y_u : \varepsilon v \, dx, \quad (6.19)$$

aquí  $\chi_\delta = 1$ , si  $||\varepsilon y_u| - g| \leq \delta$  y  $\chi_\delta = 0$ , si  $||\varepsilon y_u| - g| > \delta$ . Además existe una

constante  $C > 0$  que no depende de  $u$  tal que

$$\|w_u^h\|_Y \leq C \|h\|_{L^\infty}.$$

*Demostración.* Veamos que la ecuación (6.15) en efecto tiene solución.

Se define la forma  $a : Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ , que depende de  $(w_u^h, v) \in Y \times Y$ , de la siguiente manera:

$$a(w_u^h, v) = \mu \left( \varepsilon w_u^h, \varepsilon v \right) + \nu \left( m'(\varepsilon y_u) \varepsilon w_u^h, \varepsilon v \right), \forall (w_u^h, v) \in Y \times Y.$$

Luego, la ecuación (6.15) puede ser escrita como

$$a(w_u^h, v) = (h, v), \forall v \in Y. \quad (6.20)$$

Notemos que el lado derecho de (6.20) es una función lineal y acotada sobre  $Y$  por definición. Entonces se puede usar el teorema de Lax-Milgram para probar que existe un único  $w_u^h \in Y$  que verifica la ecuación linealizada (6.20). Para ello mostraremos que  $a(\cdot, \cdot)$  es una forma bilineal, continua y coerciva.

Claramente, de su definición,  $a(\cdot, \cdot)$  es bilineal. Probaremos la coercividad de  $a(\cdot, \cdot)$ , es decir, que existe una constante positiva  $c$  tal que

$$a(w_u^h, w_u^h) \geq c \|w_u^h\|_Y^2, \text{ para todo } w_u^h \in Y. \quad (6.21)$$

Sea  $w_u^h \in Y$ , tenemos que

$$a(w_u^h, w_u^h) = \mu \int_{\Omega} \varepsilon w_u^h : \varepsilon w_u^h dx + \nu \int_{\Omega} 1_{\delta}^2 (|\varepsilon y_u| - g) \left( \frac{\varepsilon y_u}{|\varepsilon y_u|} : \varepsilon w_u^h \right)^2 dx \quad (6.22)$$

$$+ \nu \int_{\Omega} \frac{\text{máx}_{\delta}(0, |\varepsilon y_u| - g)}{|\varepsilon y_u|} 1_{\delta} (|\varepsilon y_u| - g) \varepsilon w_u^h : \varepsilon w_u^h dx \quad (6.23)$$

$$+ \nu \int_{\Omega} \text{máx}_{\delta}(0, |\varepsilon y_u| - g) \chi_{\delta} \left( -\frac{3}{4\delta^3} (|\varepsilon y_u| - g)^2 + \frac{3}{4\delta} \right) \frac{\varepsilon y_u}{|\varepsilon y_u|^2} : \varepsilon w_u^h \varepsilon y_u : \varepsilon w_u^h dx \quad (6.24)$$

$$- \nu \int_{\Omega} \text{máx}_{\delta}(0, |\varepsilon y_u| - g) 1_{\delta} (|\varepsilon y_u| - g) \frac{\varepsilon y_u}{|\varepsilon y_u|^3} : \varepsilon w_u^h \varepsilon y_u : \varepsilon w_u^h dx. \quad (6.25)$$

Puesto que  $1_{\delta}^2 (|\varepsilon y_u| - g) \left( \frac{\varepsilon y_u}{|\varepsilon y_u|} : \varepsilon w_u^h \right)^2 \geq 0$ , el segundo término de la suma en

(6.22) es no negativo:

$$\nu \int_{\Omega} 1_{\delta}^2 (|\varepsilon y_u| - g) \left( \frac{\varepsilon y_u}{|\varepsilon y_u|} : \varepsilon w_u^h \right)^2 dx \geq 0. \quad (6.26)$$

Agrupando en una sola expresión las integrales en (6.23) y (6.25), obtenemos que

$$\nu \int_{\Omega} \frac{\max_{\delta}(0, |\varepsilon y_u| - g)}{|\varepsilon y_u|} 1_{\delta} (|\varepsilon y_u| - g) \left\{ \varepsilon w_u^h : \varepsilon w_u^h - \left( \frac{\varepsilon y_u}{|\varepsilon y_u|} : \varepsilon w_u^h \right)^2 \right\} dx \geq 0, \quad (6.27)$$

pues  $\left( \frac{\varepsilon y_u}{|\varepsilon y_u|} : \varepsilon w_u^h \right)^2 \leq |\varepsilon w_u^h|^2$  y  $\frac{\max_{\delta}(0, |\varepsilon y_u| - g)}{|\varepsilon y_u|} 1_{\delta} (|\varepsilon y_u| - g) \geq 0$ .

Ahora, analicemos la expresión en (6.24). Si  $||\varepsilon y_u| - g| > \delta$ , tenemos que  $\chi_{\delta} = 0$ , y por lo tanto la integral en (6.24) es igual a cero. Si  $||\varepsilon y_u| - g| \leq \delta$ ,  $\chi_{\delta} = 1$  y además  $(|\varepsilon y_u| - g)^2 \leq \delta^2$ . Luego,

$$-\frac{3}{4\delta^3} (|\varepsilon y_u| - g)^2 + \frac{3}{4\delta} \geq 0.$$

Como  $\max_{\delta}(0, |\varepsilon y_u| - g) \geq 0$ , se obtiene

$$\nu \int_{\Omega} \max_{\delta}(0, |\varepsilon y_u| - g) \left( -\frac{3}{4\delta^3} (|\varepsilon y_u| - g)^2 + \frac{3}{4\delta} \right) \left( \frac{\varepsilon y_u}{|\varepsilon y_u|} : \varepsilon w_u^h \right)^2 dx \geq 0. \quad (6.28)$$

Entonces, combinando (6.26), (6.27) y (6.28), tenemos que

$$a(w_u^h, w_u^h) \geq \mu \int_{\Omega} |\varepsilon w_u^h|^2 dx = \mu \left\| \varepsilon w_u^h \right\|_{L^2}^2, \quad \forall w_u^h \in Y. \quad (6.29)$$

Finalmente, usando la desigualdad de Korn en (6.29), tenemos que existe una constante  $c > 0$  tal que (6.21) se verifica.

Ahora probaremos que la forma  $a(\cdot, \cdot)$  es continua, esto es, que existe una constante  $C_1 > 0$  tal que

$$|a(w_u^h, v)| \leq C_1 \left\| w_u^h \right\|_Y \|v\|_Y, \quad \forall (w_u^h, v) \in Y \times Y. \quad (6.30)$$

Sean  $w_u^h, v \in Y$ . En (6.16), usando (5.5) y la desigualdad de Cauchy-Schwarz, tenemos que

$$\left| 1_{\delta}^2 (|\varepsilon y_u| - g) \frac{\varepsilon y_u}{|\varepsilon y_u|} : \varepsilon w_u^h \frac{\varepsilon y_u}{|\varepsilon y_u|} : \varepsilon v \right| \leq \left| 1_{\delta}^2 (|\varepsilon y_u| - g) \right| \left| \frac{\varepsilon y_u}{|\varepsilon y_u|} : \varepsilon w_u^h \right| \left| \frac{\varepsilon y_u}{|\varepsilon y_u|} : \varepsilon v \right|$$



$$\begin{aligned}
&\leq \left| \frac{\varepsilon y_u}{|\varepsilon y_u|} \right| \left| \varepsilon w_u^h \right| \left| \frac{\varepsilon y_u}{|\varepsilon y_u|} \right| |\varepsilon v| \\
&\leq |\varepsilon w_u^h| |\varepsilon v|.
\end{aligned}$$

Luego,

$$\left| \nu \int_{\Omega} 1_{\delta}^2 (|\varepsilon y_u| - g) \frac{\varepsilon y_u}{|\varepsilon y_u|} : \varepsilon w_u^h \frac{\varepsilon y_u}{|\varepsilon y_u|} : \varepsilon v \, dx \right| \leq \nu \int_{\Omega} |\varepsilon w_u^h| |\varepsilon v| \, dx. \quad (6.31)$$

En (6.17), usando (5.4) y (5.5), tenemos que

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\text{máx}_{\delta} (0, |\varepsilon y_u| - g)}{|\varepsilon y_u|} 1_{\delta} (|\varepsilon y_u| - g) \varepsilon w_u^h : \varepsilon v \right| &\leq \frac{|\varepsilon y_u|}{|\varepsilon y_u|} |1_{\delta} (|\varepsilon y_u| - g)| \left| \varepsilon w_u^h : \varepsilon v \right| \\
&\leq |\varepsilon w_u^h| |\varepsilon v|,
\end{aligned}$$

de donde

$$\left| \nu \int_{\Omega} \frac{\text{máx}_{\delta} (0, |\varepsilon y_u| - g)}{|\varepsilon y_u|} 1_{\delta} (|\varepsilon y_u| - g) \varepsilon w_u^h : \varepsilon v \, dx \right| \leq \nu \int_{\Omega} |\varepsilon w_u^h| |\varepsilon v| \, dx. \quad (6.32)$$

En la expresión de (6.18), si  $||\varepsilon y_u| - g| > \delta$ , tenemos que  $\chi_{\delta} = 0$ , y por lo tanto la integral en (6.18) es cero. Si  $||\varepsilon y_u| - g| \leq \delta$ , tenemos que  $\chi_{\delta} = 1$  y

$$\text{máx}_{\delta} (0, |\varepsilon y_u| - g) \leq \delta. \quad (6.33)$$

Además  $(|\varepsilon y_u| - g)^2 \leq \delta^2$  implica que

$$\begin{aligned}
\left| -\frac{3}{4\delta^3} (|\varepsilon y_u| - g)^2 + \frac{3}{4\delta} \right| &\leq \frac{3}{4\delta^3} (|\varepsilon y_u| - g)^2 + \frac{3}{4\delta} \\
&\leq \frac{3}{4\delta^3} \delta^2 + \frac{3}{4\delta} \\
&= \frac{3}{2\delta}.
\end{aligned} \quad (6.34)$$

Entonces, usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y las desigualdades (6.33) y (6.34), obtenemos que

$$\begin{aligned}
\left| \chi_{\delta} \text{máx}_{\delta} (0, |\varepsilon y_u| - g) \left( -\frac{3}{4\delta^3} (|\varepsilon y_u| - g)^2 + \frac{3}{4\delta} \right) \frac{\varepsilon y_u}{|\varepsilon y_u|} : \varepsilon w_u^h \frac{\varepsilon y_u}{|\varepsilon y_u|} : \varepsilon v \right| \\
\leq \delta \frac{3}{2\delta} \left| \frac{\varepsilon y_u}{|\varepsilon y_u|} : \varepsilon w_u^h \right| \left| \frac{\varepsilon y_u}{|\varepsilon y_u|} : \varepsilon v \right| \\
\leq \frac{3}{2} \left( \left| \frac{\varepsilon y_u}{|\varepsilon y_u|} \right| \right)^2 |\varepsilon w_u^h| |\varepsilon v|
\end{aligned}$$

$$= \frac{3}{2} \left| \varepsilon w_u^h \right| |\varepsilon v|.$$

Luego,

$$\left| \nu \int_{\Omega} \chi_{\delta} \max_{\delta} (0, |\varepsilon y_u| - g) \left( -\frac{3}{4\delta^3} (|\varepsilon y_u| - g)^2 + \frac{3}{4\delta} \right) \frac{\varepsilon y_u}{|\varepsilon y_u|} : \varepsilon w_u^h \frac{\varepsilon y_u}{|\varepsilon y_u|} : \varepsilon v \, dx \right| \leq \frac{3\nu}{2} \int_{\Omega} \left| \varepsilon w_u^h \right| |\varepsilon v| \, dx. \quad (6.35)$$

En la expresión (6.19), tenemos que

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\max_{\delta} (0, |\varepsilon y_u| - g)}{|\varepsilon y_u|} \mathbf{1}_{\delta} (|\varepsilon y_u| - g) \frac{\varepsilon y_u}{|\varepsilon y_u|} : \varepsilon w_u^h \frac{\varepsilon y_u}{|\varepsilon y_u|} : \varepsilon v \right| \\ & \leq \frac{|\varepsilon y_u|}{|\varepsilon y_u|} |\mathbf{1}_{\delta} (|\varepsilon y_u| - g)| \left| \frac{\varepsilon y_u}{|\varepsilon y_u|} : \varepsilon w_u^h \right| \left| \frac{\varepsilon y_u}{|\varepsilon y_u|} : \varepsilon v \right| \\ & \leq \left| \varepsilon w_u^h \right| |\varepsilon v|, \end{aligned}$$

y por tanto,

$$\left| \nu \int_{\Omega} \frac{\max_{\delta} (0, |\varepsilon y_u| - g)}{|\varepsilon y_u|} \mathbf{1}_{\delta} (|\varepsilon y_u| - g) \frac{\varepsilon y_u}{|\varepsilon y_u|} : \varepsilon w_u^h \frac{\varepsilon y_u}{|\varepsilon y_u|} : \varepsilon v \, dx \right| \leq \nu \int_{\Omega} \left| \varepsilon w_u^h \right| |\varepsilon v| \, dx. \quad (6.36)$$

En resumen, combinando las desigualdades (6.31), (6.32), (6.35) y (6.36), tenemos que

$$|a(w_u^h, v)| \leq \mu \int_{\Omega} \left| \varepsilon w_u^h \right| |\varepsilon v| \, dx + \frac{9\nu}{2} \int_{\Omega} \left| \varepsilon w_u^h \right| |\varepsilon v| \, dx, \quad \forall (w_u^h, v) \in Y \times Y. \quad (6.37)$$

Usando la desigualdad de Hölder en (6.37) obtenemos

$$|a(w_u^h, v)| \leq \left( \mu + \frac{9\nu}{2} \right) \left( \int_{\Omega} |\varepsilon w_u^h|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega} |\varepsilon v|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall (w_u^h, v) \in Y \times Y.$$

Finalmente, esta desigualdad junto a la Proposición 4.1, implican (6.30) (continuidad de la forma  $a$ ), tomando  $C_1 = \mu + \frac{9\nu}{2}$ .

Se concluye que existe un único  $w_u^h \in Y$  que resuelve la ecuación (6.20).

Además, si en (6.20) tomamos  $v = w_u^h$ , obtenemos que

$$a(w_u^h, w_u^h) = (h, w_u^h) \leq \|h\|_{L^2} \|w_u^h\|_{L^2} \leq C \|h\|_{L^\infty} \|w_u^h\|_Y,$$

gracias a la inyección  $L^\infty(\Omega)^N \hookrightarrow L^2(\Omega)^N$ . Luego, de la coercividad de  $a$  se tiene

que

$$c \left\| w_u^h \right\|_Y^2 \leq C \|h\|_{L^\infty} \left\| w_u^h \right\|_Y,$$

para las constantes positivas  $c$  y  $C$ . De aquí,

$$\left\| w_u^h \right\|_Y \leq \frac{C}{c} \|h\|_{L^\infty},$$

donde la constante  $\frac{C}{c}$  no depende de  $u$ . □

En la demostración de la Proposición 6.3 usaremos los resultados de diferenciabilidad del operador de superposición definido por la no linealidad de la ecuación (5.2), es decir, la función definida por  $\mathbf{g}(z) = \nu \max_\delta(0, |z| - g) 1_\delta(|z| - g) \frac{z}{|z|}$ , para todo  $z \in \mathbb{R}^{N \times N}$ .

**PROPOSICIÓN 6.3** *El operador solución  $S : L^\infty(\Omega)^N \rightarrow Y$  es Fréchet diferenciable.*

*Demostración.* Para demostrar esta proposición seguiremos la idea dada en [11, Teorema 2.4]. Sean  $u \in L^\infty(\Omega)^N$  y  $h \in L^\infty(\Omega)^N$  y sean  $y_{u+h}$  y  $y_u$  las soluciones de la ecuación (6.14) asociadas a  $u + h$  y a  $u$  respectivamente.

Notemos por  $w_u^h$  a la única solución de la ecuación linealizada siguiente:

$$\mu \left( \varepsilon w_u^h, \varepsilon v \right) + \nu \left( m'(\varepsilon y_u) \varepsilon w_u^h, \varepsilon v \right) = (h, v) \quad \forall v \in Y. \quad (6.38)$$

De acuerdo al Lema 6.2 se tiene además la estimación

$$\left\| w_u^h \right\|_Y \leq C \|h\|_{L^\infty},$$

con  $C$  una constante positiva que no depende de  $u$ .

Notemos que para todo  $v \in Y$

$$\begin{aligned} \mu \left( \varepsilon y_{u+h} - \varepsilon y_u - \varepsilon w_u^h, \varepsilon v \right) &= (u + h, v) - \nu \left( m(\varepsilon y_{u+h}), \varepsilon v \right) - (u, v) + \nu \left( m(\varepsilon y_u), \varepsilon v \right) \\ &\quad - (h, v) + \nu \left( m'(\varepsilon y_u) \varepsilon w_u^h, \varepsilon v \right) \\ &= -\nu \left( m(\varepsilon y_{u+h}) - m(\varepsilon y_u) - m'(\varepsilon y_u) \varepsilon w_u^h, \varepsilon v \right). \end{aligned}$$

Luego  $\xi := y_{u+h} - y_u - w_u^h$  resuelve la ecuación variacional

$$\mu(\varepsilon \xi, \varepsilon v) + \nu \left( m(\varepsilon y_{u+h}) - m(\varepsilon y_u) - m'(\varepsilon y_u) \varepsilon w_u^h, \varepsilon v \right) = 0, \quad \forall v \in Y. \quad (6.39)$$

Además usando (6.39), tenemos que

$$\begin{aligned} \mu(\varepsilon\zeta, \varepsilon v) + \nu \left( m'(\varepsilon y_u) \varepsilon\zeta, \varepsilon v \right) &= -\nu \left( m(\varepsilon y_{u+h}) - m(\varepsilon y_u) - m'(\varepsilon y_u) \varepsilon w_u^h, \varepsilon v \right) \\ &+ \nu \left( m'(\varepsilon y_u) (\varepsilon y_{u+h} - \varepsilon y_u), \varepsilon v \right) - \nu \left( m'(\varepsilon y_u) \varepsilon w_u^h, \varepsilon v \right), \quad \forall v \in Y. \end{aligned} \quad (6.40)$$

La ecuación (6.40) equivale a

$$\begin{aligned} \mu(\varepsilon\zeta, \varepsilon v) + \nu \left( m'(\varepsilon y_u) \varepsilon\zeta, \varepsilon v \right) &= -\nu \left( m(\varepsilon y_{u+h}) - m(\varepsilon y_u) \right. \\ &\left. - m'(\varepsilon y_u) (\varepsilon y_{u+h} - \varepsilon y_u), \varepsilon v \right), \quad \forall v \in Y. \end{aligned}$$

Tomando  $v = \zeta$ , gracias a (6.21) y la desigualdad de Cauchy-Schwarz, obtenemos que

$$c \|\zeta\|_Y^2 \leq \left\| m(\varepsilon y_{u+h}) - m(\varepsilon y_u) - m'(\varepsilon y_u) (\varepsilon y_{u+h} - \varepsilon y_u) \right\|_{L^2} \|\varepsilon\zeta\|_{L^2}.$$

La Proposición 4.1 implica que

$$\|\zeta\|_Y^2 \leq \frac{1}{c} \left\| m(\varepsilon y_{u+h}) - m(\varepsilon y_u) - m'(\varepsilon y_u) (\varepsilon y_{u+h} - \varepsilon y_u) \right\|_{L^2} \|\zeta\|_Y.$$

Adicionalmente, de la diferenciabilidad de los operadores de superposición, se concluye que para todo  $p > 2$

$$\|\zeta\|_Y \leq \frac{1}{c} o \left( \|\varepsilon(y_{u+h} - y_u)\|_{L^p} \right).$$

De forma similar a la Proposición 4.1, gracias a la definición de la norma en  $W^{1,q}(\Omega)^N$ , se puede obtener la estimación

$$\|\varepsilon z\|_{L^q} \leq \|z\|_{W^{1,q}(\Omega)^N}, \quad \forall z \in W^{1,q}(\Omega)^N, \quad q \geq 1.$$

De donde,

$$\|\zeta\|_Y \leq \frac{1}{c} o \left( \|y_{u+h} - y_u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)^N} \right) \quad (6.41)$$

para todo  $p > 2$ . Ahora, usando el Teorema 1 de [17], tenemos que para  $p \in [2, p_0]$  con  $p_0$  y una constante positiva  $C_1$  dados en dicho Teorema, se obtiene

$$\|y_{u+h} - y_u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)^N} \leq C_1 \|u + h - u\|_{W^{-1,p}(\Omega)^N}.$$

Así, (6.41) se transforma en

$$\|\xi\|_Y = o\left(\|h\|_{W^{-1,p}(\Omega)^N}\right).$$

Gracias a la inyección  $L^\infty(\Omega)^N \hookrightarrow W^{-1,p}(\Omega)^N$ , con  $p \geq 1$  concluimos que

$$\|\xi\|_Y = o\left(\|h\|_{L^\infty(\Omega)}\right)$$

En conclusión, el operador solución  $S$  es Fréchet diferenciable y  $w_u^h = S'(u)h$ .  $\square$

**OBSERVACIÓN 6.4** *Notemos que para usar el Teorema 1 de [17] y los resultados sobre diferenciabilidad de los operadores de superposición, se requiere que la función definida por  $\mathbf{g}(z) = \nu \max_\delta(0, |z| - g) 1_\delta(|z| - g) \frac{z}{|z|}$ , para todo  $z \in \mathbb{R}^{N \times N}$  verifique las hipótesis (3.2) y (3.3).*

*La hipótesis (3.2) se verifica porque la función  $m$  es monótona (ver la demostración de la Proposición 5.1). Ahora, para verificar que  $\mathbf{g}$  satisface la hipótesis (3.3) basta probar que  $m$  definida en (5.1) es una función Lipschitz continua. Sean  $z, y \in \mathbb{R}^{N \times N}$ , tenemos que*

$$\begin{aligned} m(z) - m(y) &= (\max_\delta(0, |z| - g) 1_\delta(|z| - g) - \max_\delta(0, |y| - g) 1_\delta(|y| - g)) \frac{z}{|z|} \\ &\quad + \max_\delta(0, |y| - g) 1_\delta(|y| - g) \left( \frac{z}{|z|} - \frac{y}{|y|} \right). \end{aligned}$$

*Luego, usando la Lipschitz continuidad de la función  $\max_\delta(0, \cdot) 1_\delta(\cdot)$  y las estimaciones (5.4) y (5.5) se sigue que*

$$\begin{aligned} |m(z) - m(y)| &\leq \left| |z| - g - (|y| - g) \right| \frac{|z|}{|z|} + |y| \left| \frac{z|y| - y|z|}{|z||y|} \right| \\ &\leq |z - y| + |y| \left| \frac{z|y| - z|z| + z|z| - y|z|}{|z||y|} \right| \\ &\leq |z - y| + \frac{|z(|y| - |z|)|}{|z|} + \frac{|z|(z - y)|}{|z|} \\ &= |z - y| + ||y| - |z|| + |z - y| \\ &\leq 3|z - y|, \end{aligned}$$

para todo  $z, y \in \mathbb{R}^{N \times N}$ .

**OBSERVACIÓN 6.5** *La ecuación en 6.14 es una ecuación de tipo quasilineal cuya no-linealidad depende de  $\epsilon y$ . En este caso, no se puede aplicar el teorema de la función*

*implícita para deducir la diferenciabilidad del operador solución asociado a esta ecuación. Una discusión sobre las dificultades que surgen cuando se intenta aplicar este teorema se encuentra en [25, Sección 1].*

# Capítulo 7

## Sistema de optimalidad y multiplicadores de Lagrange

En este capítulo hallaremos un sistema de optimalidad que caracterice la condición necesaria de optimalidad que verifican las soluciones del problema de control óptimo (P) y estableceremos la existencia de multiplicadores de Lagrange que junto a las soluciones óptimas de (P) satisfacen dicho sistema.

El problema de control óptimo (P) tiene la siguiente estructura:

$$\begin{aligned} & \min_{(y,u) \in Y \times U} J(y, u) \\ & \text{sujeto a} \\ & e(y, u) = 0 \end{aligned} \tag{P1}$$

con  $J$  y  $e$  definidos por

$$\begin{aligned} J : Y \times U &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (y, u) &\longmapsto J(y, u) = \frac{1}{2} \|y - z_d\|_{L^2(\Omega)^N}^2 + \frac{\alpha}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)^N}^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e : Y \times U &\longrightarrow Y' \\ (y, u) &\longmapsto e(y, u) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle e(y, u), v \rangle_{Y', Y} &= \mu \int_{\Omega} \varepsilon y : \varepsilon v \, dx + v \int_{\Omega} \max_{\delta} (0, |\varepsilon y| - g) 1_{\delta} (|\varepsilon y| - g) \frac{\varepsilon y}{|\varepsilon y|} : \varepsilon v \, dx \\ &\quad - \int_{\Omega} u \cdot v \, dx, \quad \forall v \in Y. \end{aligned}$$

La siguiente proposición caracteriza la condición de optimalidad necesaria para el problema (P).

**PROPOSICIÓN 7.1** (Existencia de multiplicadores de Lagrange) *Sea  $(\bar{y}, \bar{u})$  una solución óptima local del problema (P). Entonces existe  $p \in Y$ , llamado estado adjunto, tal que verifica el siguiente sistema de optimalidad*

$$\begin{aligned} e(\bar{y}, \bar{u}) &= 0, \\ e_y(\bar{y}, \bar{u})^* p &= J_y(\bar{y}, \bar{u}), \\ e_u(\bar{y}, \bar{u})^* p &= J_u(\bar{y}, \bar{u}). \end{aligned} \tag{7.1}$$

*Demostración.* Puesto que  $(\bar{y}, \bar{u})$  es una solución óptima local de (P), tenemos que  $e(\bar{y}, \bar{u}) = 0$ . Además, de forma análoga a lo demostrado en el Lema 6.2, se obtiene que el operador  $e_y(\bar{y}, \bar{u}) \in \mathcal{L}(Y, Y')$  es biyectivo. Entonces, el operador adjunto  $e_y(\bar{y}, \bar{u})^* \in \mathcal{L}(Y, Y')$  también es biyectivo. Notar que aquí se ha hecho la identificación  $Y = (Y')'$ . Luego, existe un único  $p \in Y$  que resuelve

$$e_y(\bar{y}, \bar{u})^* p = J_y(\bar{y}, \bar{u}). \tag{7.2}$$

Considerando el operador  $\mathcal{S} : U \rightarrow Y$  que a cada  $u \in U$  asocia la solución de la ecuación de estado,  $y = \mathcal{S}(u)$ , definimos el funcional objetivo reducido de la siguiente manera:

$$T(u) = J(\mathcal{S}(u), u), \quad \forall u \in U.$$

Puesto que  $\bar{u}$  es solución óptima local del problema reducido

$$\min_{u \in U} T(u),$$

tenemos que  $\bar{u}$  satisface la siguiente condición de optimalidad [10, Corolario 3.1]:

$$T'_G(\bar{u})h = 0, \quad \forall h \in U,$$

que se expresa como

$$T'_G(\bar{u})h = J_y(\mathcal{S}(\bar{u}), \bar{u}) \mathcal{S}'_G(\bar{u})h + J_u(\mathcal{S}(\bar{u}), \bar{u})h = 0, \quad \forall h \in U. \tag{7.3}$$

Usando la ecuación (7.2), esta expresión se puede escribir como

$$T'_G(\bar{u})h = \langle e_y(\bar{y}, \bar{u})^* p, \mathcal{S}'_G(\bar{u})h \rangle_{Y', Y} + J_u(\mathcal{S}(\bar{u}), \bar{u})h$$



$$= \langle p, e_y(\bar{y}, \bar{u}) \mathcal{S}'_G(\bar{u})h \rangle_{Y', Y} + J_u(\mathcal{S}(\bar{u}), \bar{u})h = 0, \quad \forall h \in U \quad (7.4)$$

Notemos que si en la ecuación de estado

$$e(\mathcal{S}(\bar{u}), \bar{u}) = 0$$

derivamos con respecto a  $\bar{u}$ , obtenemos

$$e_y(\mathcal{S}(\bar{u}), \bar{u}) \mathcal{S}'_G(\bar{u})h + e_u(\mathcal{S}(\bar{u}), \bar{u})h = 0, \quad \forall h \in U,$$

lo cual equivale a

$$e_y(\mathcal{S}(\bar{u}), \bar{u}) \mathcal{S}'_G(\bar{u})h = -e_u(\mathcal{S}(\bar{u}), \bar{u})h = 0, \quad \forall h \in U. \quad (7.5)$$

Reemplazando (7.5) en (7.4) obtenemos

$$T'_G(\bar{u})h = \langle p, -e_u(\mathcal{S}(\bar{u}), \bar{u})h \rangle_{Y', Y} + J_u(\mathcal{S}(\bar{u}), \bar{u})h = 0, \quad \forall h \in U.$$

Esta ecuación equivale a

$$T'_G(\bar{u})h = -\langle e_u(\mathcal{S}(\bar{u}), \bar{u})^* p, h \rangle_{U', U} + J_u(\mathcal{S}(\bar{u}), \bar{u})h = 0, \quad \forall h \in U,$$

de donde finalmente,

$$e_u(\bar{y}, \bar{u})^* p = J_u(\bar{y}, \bar{u}).$$

El sistema (7.1) puede ser obtenido mediante técnicas estándar, por ejemplo la aproximación Lagrangiana.  $\square$

Ahora hallaremos una expresión explícita para el sistema (7.1). Para calcular  $e_y(\bar{y}, \bar{u})^* \in \mathcal{L}((Y')', Y')$  y  $e_u(\bar{y}, \bar{u})^* \in \mathcal{L}((Y')', U')$ , se usará la aproximación Lagrangiana [10, p. 33-34]. Definimos el funcional Lagrangiano asociado al problema (P1) mediante:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : Y \times U \times (Y')' &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (y, u, p) &\longmapsto \mathcal{L}(y, u, p) = J(y, u) - \langle p, e(y, u) \rangle_{(Y')', Y'}. \end{aligned}$$

Luego el sistema de optimalidad (7.1) también puede ser escrito como:

$$e(\bar{y}, \bar{u}) = 0, \quad (7.6)$$

$$\mathcal{L}_y(\bar{y}, \bar{u}, p) = 0, \quad (7.7)$$

$$\mathcal{L}_u(\bar{y}, \bar{u}, p) = 0. \quad (7.8)$$

En este caso el funcional Lagrangiano está dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(y, u, p) = & \frac{1}{2} \|y - z_d\|_{L^2(\Omega)^N}^2 + \frac{\alpha}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)^N}^2 - \mu \int_{\Omega} \varepsilon y : \varepsilon p \, dx \\ & - \nu \int_{\Omega} \text{máx}_{\delta}(0, |\varepsilon y| - g) 1_{\delta}(|\varepsilon y| - g) \frac{\varepsilon y}{|\varepsilon y|} : \varepsilon p \, dx \\ & + \int_{\Omega} u \cdot p \, dx, \quad \forall (y, u, p) \in Y \times U \times (Y')' \end{aligned} \quad (7.9)$$

En los siguientes cálculos, todas las derivadas mencionadas son derivadas en el sentido de Gâteaux.

Derivando (7.9) con respecto a  $y$  obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_y(y, u, p)h = & (y - z_d, h)_{L^2(\Omega)^N} - \mu \int_{\Omega} \varepsilon h : \varepsilon p \, dx \\ & - \nu \int_{\Omega} 1_{\delta}^2(|\varepsilon y| - g) \frac{\varepsilon y}{|\varepsilon y|} : \varepsilon h \frac{\varepsilon y}{|\varepsilon y|} : \varepsilon p \, dx - \nu \int_{\Omega} \frac{\text{máx}_{\delta}(0, |\varepsilon y| - g)}{|\varepsilon y|} 1_{\delta}(|\varepsilon y| - g) \varepsilon h : \varepsilon p \, dx \\ & - \nu \int_{\Omega} \text{máx}_{\delta}(0, |\varepsilon y| - g) \chi_{\delta} \left( -\frac{3}{4\delta^3} (|\varepsilon y| - g)^2 \frac{\varepsilon y}{|\varepsilon y|^2} : \varepsilon h + \frac{3}{4\delta} \frac{\varepsilon y}{|\varepsilon y|^2} : \varepsilon h \right) \varepsilon y : \varepsilon p \, dx \\ & + \nu \int_{\Omega} \text{máx}_{\delta}(0, |\varepsilon y| - g) 1_{\delta}(|\varepsilon y| - g) \frac{\varepsilon y}{|\varepsilon y|^3} : \varepsilon h \varepsilon y : \varepsilon p \, dx, \quad \forall h \in Y, \end{aligned}$$

donde  $\chi_{\delta} = 1$ , si  $||\varepsilon y| - g| \leq \delta$  y  $\chi_{\delta} = 0$ , si  $||\varepsilon y| - g| > \delta$ . La derivada de (7.9) con respecto a  $u$  es

$$\mathcal{L}_u(y, u, p)w = \alpha(u, w)_{L^2(\Omega)^N} + \int_{\Omega} w \cdot p \, dx \quad \forall w \in U$$

Finalmente, el sistema de optimalidad dado por (7.6), (7.7) y (7.8) es:

$$\mu \int_{\Omega} \varepsilon y : \varepsilon v \, dx + \nu \int_{\Omega} \text{máx}_{\delta}(0, |\varepsilon y| - g) 1_{\delta}(|\varepsilon y| - g) \frac{\varepsilon y}{|\varepsilon y|} : \varepsilon v \, dx = \int_{\Omega} u \cdot v \, dx, \quad \forall v \in Y. \quad (7.10)$$

$$\begin{aligned}
& \mu \int_{\Omega} \varepsilon h : \varepsilon p \, dx + \nu \int_{\Omega} 1_{\delta}^2 (|\varepsilon y| - g) \frac{\varepsilon y}{|\varepsilon y|} : \varepsilon h \frac{\varepsilon y}{|\varepsilon y|} : \varepsilon p \, dx \\
& \quad + \nu \int_{\Omega} \frac{\text{máx}_{\delta}(0, |\varepsilon y| - g)}{|\varepsilon y|} 1_{\delta} (|\varepsilon y| - g) \varepsilon h : \varepsilon p \, dx \\
& + \nu \int_{\Omega} \text{máx}_{\delta}(0, |\varepsilon y| - g) \chi_{\delta} \left( -\frac{3}{4\delta^3} (|\varepsilon y| - g)^2 + \frac{3}{4\delta} \right) \frac{\varepsilon y}{|\varepsilon y|^2} : \varepsilon h \varepsilon y : \varepsilon p \, dx \\
& - \nu \int_{\Omega} \text{máx}_{\delta}(0, |\varepsilon y| - g) 1_{\delta} (|\varepsilon y| - g) \frac{\varepsilon y}{|\varepsilon y|^3} : \varepsilon h \varepsilon y : \varepsilon p \, dx = \int_{\Omega} (y - z_d) \cdot h \, dx, \quad \forall h \in Y
\end{aligned} \tag{7.11}$$

$$\alpha u + p = 0, \quad \text{c.t.p. } x \in \Omega \tag{7.12}$$

En la ecuación (7.11),  $\chi_{\delta} = 1$ , si  $|\varepsilon y| - g \leq \delta$  y  $\chi_{\delta} = 0$ , si  $|\varepsilon y| - g > \delta$ .

Vemos que en este sistema la ecuación (7.10) es la ecuación de estado. La ecuación (7.11) es conocida como ecuación adjunta y la ecuación (7.12) se denomina ecuación del gradiente.

## Capítulo 8

# Análisis asintótico del problema de control óptimo

En este capítulo estudiaremos el comportamiento del problema (P), cuya ecuación de estado constituye una regularización de una ecuación que modela un fluido dilatante, cuando el parámetro de regularización  $\delta$  tiende a cero. Analizaremos la convergencia de las soluciones de la ecuación de estado regularizada hacia la solución de la ecuación original planteada en [12]. Además, se estudiará la convergencia de las soluciones globales del problema de control óptimo (P) hacia una solución global del problema de control óptimo con ecuación de estado sin regularizar. Finalmente, se obtendrá un sistema de optimalidad para el problema sin regularizar.

Consideramos el siguiente problema de control óptimo que llamaremos problema sin regularizar. Se considera la ecuación (4.8) como ecuación de estado.

$$\begin{aligned} \min_{(y,u) \in Y \times U} J(y,u) &= \frac{1}{2} \|y - z_d\|_{L^2(\Omega)^N}^2 + \frac{\alpha}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)^N}^2 \\ \text{sujeto a} & \\ \mu \int_{\Omega} \varepsilon y : \varepsilon v \, dx + \int_{\Omega} \tau : \varepsilon v \, dx &= \int_{\Omega} u \cdot v \, dx, \quad \text{para todo } v \in Y \\ \tau - \nu \max(0, |\varepsilon y| - g) \frac{\varepsilon y}{|\varepsilon y|} &= 0, \quad \text{c.t.p. en } \Omega. \end{aligned} \tag{\hat{P}}$$

Aquí se han considerado los espacios de estado y control, así como las notaciones del Capítulo 4. De manera análoga a lo demostrado en la Proposición 5.1 se puede obtener que dado  $l \in Y'$  existe un único  $y \in Y$  solución de la ecuación (4.8). Además de manera similar a la Proposición 5.5, se obtiene que el problema de control óptimo

$(\hat{P})$  tiene solución.

Llamamos ecuación de estado original a la ecuación (4.8) y ecuación de estado regularizada a la ecuación (4.11). En la siguiente Proposición se establece la convergencia de las soluciones de la ecuación regularizada hacia la solución de la ecuación variacional original.

**PROPOSICIÓN 8.1** *Sea  $(l_\delta)_{\delta>0}$  una sucesión en  $Y'$  tal que  $l_\delta \rightarrow l$  en  $Y'$  si  $\delta \rightarrow 0$ . Entonces, cuando  $\delta \rightarrow 0$ , las soluciones  $y_\delta$  de las ecuaciones variacionales regularizadas*

$$\mu \int_{\Omega} \varepsilon y_\delta : \varepsilon v \, dx + \nu \int_{\Omega} \max_\delta(0, |\varepsilon y_\delta| - g) 1_\delta (|\varepsilon y_\delta| - g) \frac{\varepsilon y_\delta}{|\varepsilon y_\delta|} : \varepsilon v \, dx = \langle l_\delta, v \rangle, \quad (8.1)$$

para todo  $v \in Y$ , convergen fuertemente en  $Y$  hacia la solución  $y$  de la ecuación variacional original

$$\mu \int_{\Omega} \varepsilon y : \varepsilon v \, dx + \nu \int_{\Omega} \max(0, |\varepsilon y| - g) \frac{\varepsilon y}{|\varepsilon y|} : \varepsilon v \, dx = \langle l, v \rangle \quad \text{para todo } v \in Y. \quad (8.2)$$

*Demostración.* Consideramos la diferencia entre las ecuaciones (8.2) y (8.1).

$$\begin{aligned} \mu \int_{\Omega} (\varepsilon y - \varepsilon y_\delta) : \varepsilon v \, dx + \nu \int_{\Omega} \left[ \max(0, |\varepsilon y| - g) \frac{\varepsilon y}{|\varepsilon y|} \right. \\ \left. - \max_\delta(0, |\varepsilon y_\delta| - g) 1_\delta (|\varepsilon y_\delta| - g) \frac{\varepsilon y_\delta}{|\varepsilon y_\delta|} \right] : \varepsilon v \, dx = \langle l_\delta, v \rangle \quad \text{para todo } v \in Y. \end{aligned}$$

Tomando  $v = y - y_\delta$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \mu \int_{\Omega} (\varepsilon y - \varepsilon y_\delta) : (\varepsilon y - \varepsilon y_\delta) \, dx + \nu \int_{\Omega} \left[ \max(0, |\varepsilon y| - g) \frac{\varepsilon y}{|\varepsilon y|} \right. \\ \left. - \max_\delta(0, |\varepsilon y_\delta| - g) 1_\delta (|\varepsilon y_\delta| - g) \frac{\varepsilon y_\delta}{|\varepsilon y_\delta|} \right] : (\varepsilon y - \varepsilon y_\delta) \, dx = \langle l - l_\delta, y - y_\delta \rangle_{Y', Y}. \end{aligned}$$

Esta ecuación equivale a

$$\begin{aligned} \mu \int_{\Omega} |\varepsilon(y - y_\delta)|^2 \, dx + \nu \int_{\Omega} \left[ \max(0, |\varepsilon y| - g) \frac{\varepsilon y}{|\varepsilon y|} - \max(0, |\varepsilon y_\delta| - g) \frac{\varepsilon y_\delta}{|\varepsilon y_\delta|} \right. \\ \left. + \max(0, |\varepsilon y_\delta| - g) \frac{\varepsilon y_\delta}{|\varepsilon y_\delta|} - \max_\delta(0, |\varepsilon y_\delta| - g) 1_\delta (|\varepsilon y_\delta| - g) \frac{\varepsilon y_\delta}{|\varepsilon y_\delta|} \right] : (\varepsilon y - \varepsilon y_\delta) \, dx \\ = \langle l - l_\delta, y - y_\delta \rangle_{Y', Y}. \quad (8.3) \end{aligned}$$

Luego, en la ecuación (8.3) usamos la monotonía de la función  $z \mapsto \max(0, |z| - g) \frac{z}{|z|}$ ,

definida para todo  $z \in \mathbb{R}^{N \times N}$ , y obtenemos

$$\begin{aligned} \mu \int_{\Omega} |\varepsilon(y - y_{\delta})|^2 dx &\leq \nu \int_{\Omega} [\text{máx}_{\delta}(0, |\varepsilon y_{\delta}| - g) 1_{\delta}(|\varepsilon y_{\delta}| - g) \\ &\quad - \text{máx}(0, |\varepsilon y_{\delta}| - g)] \frac{\varepsilon y_{\delta}}{|\varepsilon y_{\delta}|} : (\varepsilon y - \varepsilon y_{\delta}) dx + \langle l - l_{\delta}, y - y_{\delta} \rangle_{Y', Y}. \end{aligned}$$

Ahora, usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz en la desigualdad anterior, se obtiene

$$\begin{aligned} \mu \int_{\Omega} |\varepsilon(y - y_{\delta})|^2 dx &\leq \nu \int_{\Omega} |\text{máx}(0, |\varepsilon y_{\delta}| - g) \\ &\quad - \text{máx}_{\delta}(0, |\varepsilon y_{\delta}| - g) 1_{\delta}(|\varepsilon y_{\delta}| - g)| \left| \frac{\varepsilon y_{\delta}}{|\varepsilon y_{\delta}|} \right| |\varepsilon y - \varepsilon y_{\delta}| dx + \|l - l_{\delta}\|_{Y'} \|y - y_{\delta}\|_Y. \end{aligned}$$

Esta desigualdad equivale a

$$\begin{aligned} \mu \int_{\Omega} |\varepsilon(y - y_{\delta})|^2 dx &\leq \nu \|\text{máx}(0, |\varepsilon y_{\delta}| - g) - \text{máx}_{\delta}(0, |\varepsilon y_{\delta}| - g) 1_{\delta}(|\varepsilon y_{\delta}| - g)\|_{L^2(\Omega)} \|\varepsilon y - \varepsilon y_{\delta}\|_{L^2} \\ &\quad + \|l - l_{\delta}\|_{Y'} \|y - y_{\delta}\|_Y. \end{aligned} \tag{8.4}$$

En (8.4) podemos usar la desigualdad de Korn para obtener

$$\begin{aligned} \mu \|\varepsilon(y - y_{\delta})\|_{L^2}^2 &\leq \nu \|\text{máx}(0, |\varepsilon y_{\delta}| - g) - \text{máx}_{\delta}(0, |\varepsilon y_{\delta}| - g) 1_{\delta}(|\varepsilon y_{\delta}| - g)\|_{L^2(\Omega)} \|\varepsilon y - \varepsilon y_{\delta}\|_{L^2} \\ &\quad + c \|l - l_{\delta}\|_{Y'} \|\varepsilon(y - y_{\delta})\|_{L^2}, \end{aligned}$$

donde  $c$  es una constante positiva. La desigualdad anterior se convierte en

$$\begin{aligned} \mu \|\varepsilon(y - y_{\delta})\|_{L^2} &\leq \text{máx}\{\nu, c\} \left( \|\text{máx}(0, |\varepsilon y_{\delta}| - g) - \text{máx}_{\delta}(0, |\varepsilon y_{\delta}| - g) 1_{\delta}(|\varepsilon y_{\delta}| - g)\|_{L^2(\Omega)} \right. \\ &\quad \left. + \|l - l_{\delta}\|_{Y'} \right). \end{aligned} \tag{8.5}$$

Notemos que si  $\delta \rightarrow 0$ ,  $|\text{máx}(0, x) - \text{máx}_{\delta}(0, x) 1_{\delta}(x)| \rightarrow 0$  uniformemente en  $x \in \mathbb{R}$  [12, Lema 4.4], lo cual implica que

$$\|\text{máx}(0, |\varepsilon y_{\delta}| - g) - \text{máx}_{\delta}(0, |\varepsilon y_{\delta}| - g) 1_{\delta}(|\varepsilon y_{\delta}| - g)\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0.$$

Además  $l_{\delta} \rightarrow l$  en  $Y'$ , entonces, tomando el límite cuando  $\delta \rightarrow 0$  en (8.5) obtenemos

que

$$\|\varepsilon(y - y_\delta)\|_{L^2} \rightarrow 0.$$

Finalmente, gracias a la desigualdad de Korn se concluye que  $y_\delta \rightarrow y$  en la norma de  $Y$ , cuando  $\delta \rightarrow 0$ .  $\square$

En la siguiente proposición se establece la convergencia de las soluciones de los problemas de control regularizados hacia una solución del problema de control original.

**PROPOSICIÓN 8.2** *Sea  $(y_\delta, u_\delta)_{\delta>0}$  una sucesión de soluciones globales para el problema (P). Entonces, la sucesión  $(y_\delta, u_\delta)_{\delta>0}$  contiene una subsucesión que converge fuertemente en  $Y \times U$  hacia una solución óptima global  $(\bar{y}, \bar{u}) \in Y \times U$  del problema  $(\hat{P})$ .*

*Demostración.* Sean  $S_\delta : U \rightarrow Y$  el operador que a cada  $u \in U$  asocia la solución de la ecuación (4.11) y  $S : U \rightarrow Y$  el operador que a cada  $u \in U$  asocia la solución de la ecuación (4.8). Sean  $(\bar{y}, \bar{u})$  una solución global del problema  $(\hat{P})$  y  $(y_\delta, u_\delta)_{\delta>0}$  una sucesión de soluciones globales para el problema (P), donde  $y_\delta := S_\delta(u_\delta)$ .

Por la forma del funcional objetivo, existe una constante positiva  $c$  tal que para todo  $\delta > 0$

$$\frac{\alpha}{2} \|u_\delta\|_{L^2(\Omega)^N}^2 \leq J(y_\delta, u_\delta) \leq J(0, 0) = c. \quad (8.6)$$

Si en la ecuación de estado del problema (P), tomamos  $v = y_\delta$  obtenemos que

$$\mu (\varepsilon y_\delta, \varepsilon y_\delta) + \nu (m(\varepsilon y_\delta), \varepsilon y_\delta) = (u_\delta, y_\delta),$$

y luego gracias a la monotonía de la función  $m$  y la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene que

$$\begin{aligned} \mu \|\varepsilon y_\delta\|_{L^2}^2 &\leq \|u_\delta\|_{L^2(\Omega)^N} \|y_\delta\|_{L^2(\Omega)^N} \\ &\leq C \|u_\delta\|_{L^2(\Omega)^N} \|y_\delta\|_Y. \end{aligned} \quad (8.7)$$

En la desigualdad (8.7) se ha usado la inyección  $Y \hookrightarrow L^2(\Omega)^N$ . Además, (8.7) junto a la desigualdad de Korn implican que

$$c_1 \|y_\delta\|_Y^2 \leq C \|u_\delta\|_{L^2(\Omega)^N} \|y_\delta\|_Y,$$

para alguna constante positiva  $c_1$ , de donde

$$\|y_\delta\|_Y \leq \frac{C}{c_1} \|u_\delta\|_{L^2(\Omega)^N}.$$

La desigualdad (8.6) nos indica que la sucesión  $(u_\delta)_{\delta>0}$  está uniformemente acotada en  $U$  y de acuerdo a la desigualdad anterior también la sucesión  $(y_\delta)_{\delta>0}$  está uniformemente acotada en  $Y$ . En resumen, la sucesión  $(y_\delta, u_\delta)_{\delta>0}$  está uniformemente acotada en  $Y \times U$ . Luego, existe una subsucesión de  $(y_\delta, u_\delta)_{\delta>0}$ , notada de la misma forma, que converge débilmente en  $Y \times U$  hacia un elemento  $(\tilde{y}, \tilde{u}) \in Y \times U$ , es decir:

$$\begin{aligned} y_\delta &\rightharpoonup \tilde{y} \text{ en } Y, \\ u_\delta &\rightharpoonup \tilde{u} \text{ en } U, \end{aligned}$$

cuando  $\delta \rightarrow 0$ . Gracias a la inyección compacta  $L^2(\Omega)^N \hookrightarrow Y'$ , se tiene que

$$u_\delta \rightarrow \tilde{u} \text{ en } Y'.$$

y de acuerdo a la Proposición 8.1 tenemos que

$$S_\delta(u_\delta) = y_\delta \rightarrow S(\tilde{u}) = \tilde{y} \text{ en } Y. \quad (8.8)$$

Puesto que  $(S_\delta(u_\delta), u_\delta)$  es una solución óptima del problema (P), se sigue que

$$J(S_\delta(u_\delta), u_\delta) \leq J(S_\delta(\bar{u}), \bar{u}), \quad \forall \delta > 0,$$

de donde

$$\limsup_{\delta \rightarrow 0} J(S_\delta(u_\delta), u_\delta) \leq \limsup_{\delta \rightarrow 0} J(S_\delta(\bar{u}), \bar{u}). \quad (8.9)$$

Notemos que  $\limsup_{\delta \rightarrow 0} J(S_\delta(\bar{u}), \bar{u}) = J(S(\bar{u}), \bar{u})$ . Además, dado que el funcional  $J$  es débilmente semicontinuo inferior, se tiene que

$$J(S(\tilde{u}), \tilde{u}) \leq \liminf_{\delta \rightarrow 0} J(S_\delta(u_\delta), u_\delta). \quad (8.10)$$

Entonces, combinando (8.10) y (8.9), se obtiene

$$J(S(\tilde{u}), \tilde{u}) \leq \liminf_{\delta \rightarrow 0} J(S_\delta(u_\delta), u_\delta) \leq \limsup_{\delta \rightarrow 0} J(S_\delta(u_\delta), u_\delta) \leq J(S(\bar{u}), \bar{u}). \quad (8.11)$$



Como  $(\bar{y}, \bar{u})$  es una solución óptima del problema  $(\hat{P})$ , tenemos que  $J(S(\bar{u}), \bar{u}) = J(S(\tilde{u}), \tilde{u})$ . Esto significa que  $(S(\tilde{u}), \tilde{u})$  es una solución óptima global del problema  $(\hat{P})$ . Notemos que de (8.11) se deduce que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} J(S_\delta(u_\delta), u_\delta) = J(S(\tilde{y}), \tilde{u}). \quad (8.12)$$

Además, gracias a (8.8) tenemos

$$S_\delta(u_\delta) \rightarrow S(\tilde{u}) \quad \text{en } L^2(\Omega)^N, \quad (8.13)$$

si  $\delta \rightarrow 0$ .

Considerando (8.12) y (8.13), tomamos el límite cuando  $\delta \rightarrow 0$  en la siguiente expresión:

$$\|u_\delta\|_{L^2(\Omega)^N}^2 = \frac{2}{\alpha} \left( J(S_\delta(u_\delta), u_\delta) - \frac{1}{2} \|S_\delta(u_\delta) - z_d\|_{L^2(\Omega)^N}^2 \right), \quad (8.14)$$

con lo cual se obtiene que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \|u_\delta\|_{L^2(\Omega)^N}^2 = \frac{2}{\alpha} \left( J(S(\tilde{u}), \tilde{u}) - \frac{1}{2} \|S(\tilde{u}) - z_d\|_{L^2(\Omega)^N}^2 \right) = \|\tilde{u}\|_{L^2(\Omega)^N}^2.$$

La convergencia de la expresión anterior junto a la convergencia débil de  $(u_\delta)_{\delta > 0}$  hacia  $\tilde{u}$ , implican que

$$u_\delta \rightarrow \tilde{u} \quad \text{en } U,$$

cuando  $\delta \rightarrow 0$ . □

Ahora, usando el sistema de optimalidad del problema regularizado (P), obtenido en el Capítulo 7, hallaremos un sistema de optimalidad para el problema sin regularizar  $(\hat{P})$ . Sea  $(y_\delta, u_\delta)$  una solución local del problema (P). Notemos por  $p_\delta$  a la solución única de la ecuación adjunta (7.11) y de la ecuación del gradiente (7.12). El sistema de optimalidad del problema (P) también puede expresarse de la siguiente manera:

$$\mu(\varepsilon y_\delta, \varepsilon h) + \nu(q_\delta, \varepsilon v) = (u_\delta, v), \quad \forall v \in Y \quad (8.15)$$

$$q_\delta = \max_\delta(0, |\varepsilon y_\delta| - g) 1_\delta(|\varepsilon_\delta| - g) \frac{\varepsilon y_\delta}{|\varepsilon y_\delta|} \quad \text{c.t.p } x \in \Omega. \quad (8.16)$$

$$\mu(\varepsilon p_\delta, \varepsilon h) + (\lambda_\delta, \varepsilon h) = (y_\delta - z_d, h), \quad \forall h \in Y, \quad (8.17)$$

$$(\lambda_\delta, \varepsilon h) = \nu \int_\Omega 1_\delta^2(|\varepsilon y_\delta| - g) \frac{\varepsilon y_\delta}{|\varepsilon y|} : \varepsilon h \frac{\varepsilon y_\delta}{|\varepsilon y_\delta|} : \varepsilon p_\delta dx \quad (8.18)$$

$$\begin{aligned}
& + \nu \int_{\Omega} \frac{\text{máx}_{\delta}(0, |\varepsilon y_{\delta}| - g)}{|\varepsilon y_{\delta}|} 1_{\delta} (|\varepsilon y_{\delta}| - g) \varepsilon h : \varepsilon p_{\delta} dx \\
& + \nu \int_{\Omega} \text{máx}_{\delta}(0, |\varepsilon y_{\delta}| - g) \chi_{\delta} \left( -\frac{3}{4\delta^3} (|\varepsilon y_{\delta}| - g)^2 + \frac{3}{4\delta} \right) \frac{\varepsilon y_{\delta}}{|\varepsilon y_{\delta}|^2} : \varepsilon h \varepsilon y_{\delta} : \varepsilon p_{\delta} dx \\
& - \nu \int_{\Omega} \text{máx}_{\delta}(0, |\varepsilon y_{\delta}| - g) 1_{\delta} (|\varepsilon y_{\delta}| - g) \frac{\varepsilon y_{\delta}}{|\varepsilon y_{\delta}|^3} : \varepsilon h \varepsilon y_{\delta} : \varepsilon p_{\delta} dx \quad \forall h \in Y.
\end{aligned}$$

$$\alpha(u_{\delta}, w) + (w, p_{\delta}) = 0, \quad \forall w \in U. \quad (8.19)$$

**PROPOSICIÓN 8.3** Sea  $(\bar{y}, \bar{u}) \in Y \times U$  una solución óptima local del problema  $(\hat{P})$  y sea  $(y_{\delta}, u_{\delta})_{\delta>0}$  una sucesión de soluciones locales para el problema  $(P)$  tal que  $(y_{\delta}, u_{\delta})_{\delta>0} \rightarrow (\bar{y}, \bar{u})$  en  $Y \times U$  cuando  $\delta \rightarrow 0$ . Sean  $(p_{\delta})_{\delta>0}$  una sucesión en  $Y$  y  $(\lambda_{\delta})_{\delta>0}$  una sucesión en  $L^2(\Omega; \mathbb{R}^{N \times N})$  tales que satisfacen el sistema (8.15) - (8.19). Entonces existen subsucesiones de  $(p_{\delta})_{\delta>0}$  y  $(\lambda_{\delta})_{\delta>0}$ , notadas de la misma forma,  $\bar{p} \in Y$  y  $\bar{\lambda} \in W'$ , donde  $W = \{w \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^{N \times N}) : \exists v \in Y, w = \varepsilon v\}$ , tales que

$$\begin{aligned}
p_{\delta} & \rightharpoonup \bar{p} \quad \text{en } Y, \\
Ap_{\delta} & \rightharpoonup A\bar{p} \quad \text{en } Y', \\
\lambda_{\delta} & \rightharpoonup \bar{\lambda} \quad \text{en } W'.
\end{aligned}$$

Aquí el operador  $A$  es un operador lineal y acotado de  $Y$  en  $Y'$  que para cada  $w \in Y$  se define por

$$\langle Aw, v \rangle_{Y', Y} = \mu(\varepsilon w, \varepsilon v), \quad \forall v \in Y. \quad (8.20)$$

Los multiplicadores  $\bar{p}$  y  $\bar{\lambda}$  junto a  $(\bar{y}, \bar{u}) \in Y \times U$ , la solución óptima del problema  $(\hat{P})$ , y un multiplicador dual  $\bar{q} \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^{N \times N})$ , satisfacen el siguiente sistema de optimalidad:

$$\mu(\varepsilon \bar{y}, \varepsilon v) + \nu(\bar{q}, \varepsilon v) = (\bar{u}, v), \quad \forall v \in Y, \quad (8.21)$$

$$\bar{q} = \text{máx}(0, |\varepsilon \bar{y}| - g) \frac{\varepsilon \bar{y}}{|\varepsilon \bar{y}|} \quad \text{c.t.p } x \in \Omega, \quad (8.22)$$

$$\mu(\varepsilon \bar{p}, \varepsilon v) + \nu \langle \bar{\lambda}, \varepsilon v \rangle_{W', W} = (\bar{y} - z_d, v), \quad \forall v \in Y, \quad (8.23)$$

$$\alpha(\bar{u}, w) + (w, \bar{p}) = 0, \quad \forall w \in U. \quad (8.24)$$

*Demostración.* Sea  $(y_{\delta}, u_{\delta})_{\delta>0}$  una sucesión de soluciones locales para el problema  $(P)$  y sean  $(p_{\delta})_{\delta>0}$  una sucesión en  $Y$  y  $(\lambda_{\delta})_{\delta>0}$  una sucesión en  $L^2(\Omega; \mathbb{R}^{N \times N})$  tales que satisfacen el sistema (8.15) - (8.19). Entonces, gracias a la estructura del funcional objetivo  $J$ , tenemos que  $(u_{\delta})_{\delta>0}$  está uniformemente acotada en  $U$  y por tanto

$(y_\delta)_{\delta>0}$  está uniformemente acotada en  $Y$ . Tomando  $h = p_\delta$  en la ecuación (8.17), obtenemos

$$\mu(\varepsilon p_\delta, \varepsilon p_\delta) \leq (y_\delta - z_d, p_\delta), \quad (8.25)$$

pues de acuerdo a las estimaciones (6.26), (6.27) y (6.28), obtenidas en la demostración del Lema 6.2, tenemos que  $(\lambda_\delta, \varepsilon p_\delta) \geq 0$ . Ahora, la desigualdad (8.25) implica que

$$\mu \|\varepsilon p_\delta\|^2 \leq \|y_\delta - z_d\|_{L^2(\Omega)^N} \|p_\delta\|_{L^2(\Omega)^N}, \quad (8.26)$$

de donde, gracias a la desigualdad de Korn y la inyección de Sobolev  $Y \hookrightarrow L^2(\Omega)^N$ , tenemos que

$$c \|p_\delta\|_Y^2 \leq C \left( \|y_\delta\|_{L^2(\Omega)^N} + \|z_d\|_{L^2(\Omega)^N} \right) \|p_\delta\|_Y, \quad (8.27)$$

para algunas constantes  $c > 0$  y  $C > 0$ . Luego,

$$\|p_\delta\|_Y \leq \frac{C}{c} \left( \|y_\delta\|_Y + \|z_d\|_{L^2(\Omega)^N} \right),$$

y por tanto

$$\|p_\delta\|_Y \leq C_1,$$

para alguna constante positiva  $C_1$  que no depende de  $\delta$ . Esto significa que la sucesión  $(p_\delta)_{\delta>0}$  está uniformemente acotada en  $Y$ . Entonces, existen una subsucesión de  $(p_\delta)_{\delta>0}$ , notada de la misma manera, y  $\bar{p} \in Y$  tales que

$$p_\delta \rightharpoonup \bar{p} \quad \text{en } Y. \quad (8.28)$$

Puesto que el operador  $A$  es lineal y acotado, tenemos que

$$Ap_\delta \rightharpoonup A\bar{p} \quad \text{en } Y'.$$

Siguiendo el mismo procedimiento usado para obtener las estimaciones en la demostración del Lema 6.2, se tiene que para todo  $h \in Y$

$$|(\lambda_\delta, \varepsilon h)| \leq \frac{9\nu}{2} \|\varepsilon p_\delta\| \|\varepsilon h\|.$$

Entonces,

$$|(\lambda_\delta, \varepsilon h)| \leq \frac{9\nu}{2} \|p_\delta\|_Y \|\varepsilon h\|, \quad \forall h \in Y.$$

Como la sucesión  $(p_\delta)_{\delta>0}$  está uniformemente acotada en  $Y$ , tenemos que

$$|(\lambda_\delta, \varepsilon h)| \leq C_2 \|\varepsilon h\|, \quad \forall h \in Y,$$

con  $C_2 > 0$  una constante que no depende de  $\delta$ . Esto implica que

$$\|\lambda_\delta\|_{W'} = \sup_{\|\varepsilon h\|_W=1} |(\lambda_\delta, \varepsilon h)| \leq C_2, \quad (8.29)$$

es decir que la sucesión  $(\lambda_\delta)$  está uniformemente acotada en  $W'$ , y entonces existen una subsucesión de  $(\lambda_\delta)$ , que se nota de la misma forma, y  $\bar{\lambda} \in W'$ , tales que

$$\lambda_\delta \rightharpoonup \bar{\lambda} \quad \text{en } W'. \quad (8.30)$$

Ahora probaremos que  $(q_\delta, \varepsilon v) \rightarrow (\bar{q}, \varepsilon v)$ , para todo  $v \in Y$ , cuando  $\delta \rightarrow 0$ . Aquí  $q_\delta$  y  $\bar{q}$  están definidos en (8.16) y (8.22), respectivamente. Sea  $v \in Y$ , entonces

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (q_\delta - \bar{q}) : \varepsilon v \, dx &= \int_{\Omega} \left( \text{máx}_\delta(0, |\varepsilon y_\delta| - g) 1_\delta(|\varepsilon_\delta| - g) \frac{\varepsilon y_\delta}{|\varepsilon y_\delta|} \right. \\ &\quad \left. - \text{máx}(0, |\varepsilon \bar{y}| - g) \frac{\varepsilon \bar{y}}{|\varepsilon \bar{y}|} \right) : \varepsilon v \, dx. \end{aligned} \quad (8.31)$$

Esta ecuación equivale a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (q_\delta - \bar{q}) : \varepsilon v \, dx &= \int_{\Omega} \left( \text{máx}_\delta(0, |\varepsilon y_\delta| - g) 1_\delta(|\varepsilon_\delta| - g) \frac{\varepsilon y_\delta}{|\varepsilon y_\delta|} \right. \\ &\quad \left. - \text{máx}(0, |\varepsilon y_\delta| - g) \frac{\varepsilon y_\delta}{|\varepsilon y_\delta|} + \text{máx}(0, |\varepsilon y_\delta| - g) \frac{\varepsilon y_\delta}{|\varepsilon y_\delta|} - \text{máx}(0, |\varepsilon \bar{y}| - g) \frac{\varepsilon \bar{y}}{|\varepsilon \bar{y}|} \right) : \varepsilon v \, dx. \end{aligned} \quad (8.32)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} |(q_\delta - \bar{q}, \varepsilon v)| &\leq \left| \int_{\Omega} (\text{máx}_\delta(0, |\varepsilon y_\delta| - g) 1_\delta(|\varepsilon_\delta| - g) - \text{máx}(0, |\varepsilon y_\delta| - g)) \frac{\varepsilon y_\delta}{|\varepsilon y_\delta|} : \varepsilon v \, dx \right| \\ &\quad + \left| \int_{\Omega} \left( \text{máx}(0, |\varepsilon y_\delta| - g) \frac{\varepsilon y_\delta}{|\varepsilon y_\delta|} - \text{máx}(0, |\varepsilon \bar{y}| - g) \frac{\varepsilon \bar{y}}{|\varepsilon \bar{y}|} \right) : \varepsilon v \, dx \right|. \end{aligned} \quad (8.33)$$

Analicemos cada uno de los términos de esta suma. Respecto al primer término tenemos que

$$\left| \int_{\Omega} (\text{máx}_\delta(0, |\varepsilon y_\delta| - g) 1_\delta(|\varepsilon_\delta| - g) - \text{máx}(0, |\varepsilon y_\delta| - g)) \frac{\varepsilon y_\delta}{|\varepsilon y_\delta|} : \varepsilon v \, dx \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_{\Omega} |\text{máx}_{\delta}(0, |\varepsilon y_{\delta}| - g) 1_{\delta}(|\varepsilon_{\delta}| - g) - \text{máx}(0, |\varepsilon y_{\delta}| - g)| |\varepsilon v| \, dx \\
&\leq \|\text{máx}(0, |\varepsilon y_{\delta}| - g) - \text{máx}_{\delta}(0, |\varepsilon y_{\delta}| - g) 1_{\delta}(|\varepsilon y_{\delta}| - g)\|_{L^2(\Omega)} \|\varepsilon v\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

Luego, este término converge a 0, cuando  $\delta \rightarrow 0$ , debido a [12, Lema 4.4].

Gracias a que la función definida por  $z \mapsto \text{máx}(0, |z| - g) \frac{z}{|z|}$ , para todo  $z \in \mathbb{R}^{N \times N}$ , es Lipschitz continua [12, p. 579], se obtiene que

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{\Omega} \left( \text{máx}(0, |\varepsilon y_{\delta}| - g) \frac{\varepsilon y_{\delta}}{|\varepsilon y_{\delta}|} - \text{máx}(0, |\varepsilon \bar{y}| - g) \frac{\varepsilon \bar{y}}{|\varepsilon \bar{y}|} \right) : \varepsilon v \, dx \right| \\
&\leq \int_{\Omega} \left| \text{máx}(0, |\varepsilon y_{\delta}| - g) \frac{\varepsilon y_{\delta}}{|\varepsilon y_{\delta}|} - \text{máx}(0, |\varepsilon \bar{y}| - g) \frac{\varepsilon \bar{y}}{|\varepsilon \bar{y}|} \right| |\varepsilon v| \, dx \\
&\leq \int_{\Omega} |\varepsilon y_{\delta} - \varepsilon \bar{y}| |\varepsilon v| \, dx \\
&\leq \|\varepsilon(y_{\delta} - \bar{y})\|_{L^2} \|\varepsilon v\|_{L^2} \\
&\leq \|y_{\delta} - \bar{y}\|_Y \|\varepsilon v\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

Puesto que  $y_{\delta} \rightarrow \bar{y}$  fuertemente en  $Y$ , cuando  $\delta \rightarrow 0$ , tenemos que el término analizado converge a 0, si  $\delta \rightarrow 0$ . En resumen,

$$(q_{\delta}, \varepsilon v) \rightarrow (\bar{q}, \varepsilon v), \quad \forall v \in Y. \quad (8.34)$$

Sabemos que  $(y_{\delta})_{\delta > 0}$  converge fuertemente hacia  $\bar{y} \in Y$  y  $(u_{\delta})_{\delta > 0}$  converge fuertemente hacia  $\bar{u} \in U$  y además se tiene (8.34), cuando  $\delta \rightarrow 0$ . Entonces, tomando el límite cuando  $\delta \rightarrow 0$  en ambos lados de la ecuación (8.15), obtenemos que  $\bar{y} \in Y$ ,  $\bar{u} \in U$  y  $\bar{q} \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^{N \times N})$  satisfacen la ecuación (8.21).

Tomando en cuenta (8.30), al tomar el límite cuando  $\delta \rightarrow 0$  en la ecuación (8.17) obtenemos que  $\bar{p} \in Y$ ,  $\bar{\lambda} \in W'$  y  $\bar{y} \in Y$ , satisfacen la ecuación (8.23). La ecuación (8.24) se obtiene al tomar el límite cuando  $\delta \rightarrow 0$  a ambos lados de la ecuación (8.19).

□

# Capítulo 9

## Conclusiones

1. Se obtuvo un resultado de existencia y unicidad de soluciones para la ecuación de estado del problema de control óptimo (P). Usando este resultado se definió un operador que asocia a cada control la solución correspondiente de la ecuación de estado. Aprovechando la propiedad de Lipschitz continuidad de este operador y la estructura del funcional objetivo del problema (P) se demostró la existencia de un mínimo global para este problema.
2. Se demostró la existencia y unicidad de soluciones para la ecuación linealizada. Este resultado fue fundamental para mostrar que el operador solución asociado a la ecuación de estado, definido de  $U = L^2(\Omega)^N$  en el espacio de estado  $Y$ , es débilmente Gâteaux diferenciable. Adicionalmente, se probó que el operador solución definido de  $L^\infty(\Omega)^N$  en  $Y$ , es Fréchet diferenciable.
3. Usando el resultado de que el operador diferencial que define la ecuación linealizada es biyectivo se demostró la existencia de multiplicadores de Lagrange en el espacio de estado  $Y$ , que junto a las soluciones óptimas locales del problema (P), satisfacen un sistema de optimalidad que caracteriza a la condición de optimalidad de primer orden para el problema (P).
4. Puesto que la ecuación de estado del problema de control óptimo (P) es una regularización de una ecuación que describe el comportamiento de un fluido dilatante, fue necesario investigar el comportamiento del problema (P) cuando el parámetro de la regularización tiende a cero. Se demostró que una sucesión de soluciones de la ecuación de estado regularizada convergen hacia la solución de la ecuación de estado original planteada en [12]. Además, se probó que, bajo subsucesiones, las soluciones globales del problema de control óptimo re-

regularizado (P) convergen fuertemente hacia una solución global del problema de control óptimo con ecuación de estado sin regularizar denominado ( $\hat{P}$ ). Finalmente, se obtuvo un sistema de optimalidad para el problema ( $\hat{P}$ ), el cual es satisfecho por los límites de sucesiones de multiplicadores que verifican el sistema de optimalidad del problema regularizado (P).

# Bibliografía

- [1] Robert A Adams y John JF Fournier. *Sobolev spaces*, volume 140. Academic press, 2003.
- [2] Marino Badiale y Enrico Serra. *Semilinear Elliptic Equations for Beginners: Existence Results via the Variational Approach*. Springer Science & Business Media, 2010.
- [3] Haim Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Springer Science & Business Media, 2010.
- [4] E Browder. Nonlinear functional analysis and nonlinear partial differential equations. *Differential Equations and Their Applications*, pgs. 45–64, 1967.
- [5] Neal L Carothers. *Real analysis*. Cambridge University Press, 2000.
- [6] Eduardo Casas. Optimal control of pde theory and numerical analysis. 2006.
- [7] Alexandre Joel Chorin y Jerrold E Marsden. *A mathematical introduction to fluid mechanics*, volume 3. Springer, 1990.
- [8] PG Ciarlet. *Mathematical elasticity, volume I : Three-dimensional elasticity*, 1988.
- [9] Philippe G Ciarlet. *Linear and nonlinear functional analysis with applications*, volume 130. Siam, 2013.
- [10] Juan Carlos De los Reyes. *Numerical PDE-constrained optimization*. Springer, 2015.
- [11] Juan Carlos De Los Reyes y Vili Dhamo. Error estimates for optimal control problems of a class of quasilinear equations arising in variable viscosity fluid flow. *Numerische Mathematik*, 132(4):691–720, 2016.



- [12] Juan Carlos De los Reyes y Georg Stadler. A nonsmooth model for discontinuous shear thickening fluids: Analysis and numerical solution. *Interfaces and Free Boundaries*, 16(4):575–602, 2014.
- [13] Jie Ding, Phillip Tracey, Weihua Li, Gangrou Peng, Philip G Whitten, y Gordon G Wallace. Review on shear thickening fluids and applications. *Textiles and Light Industrial Science and Technology*, 2(4):161–173, 2013.
- [14] Lawrence C. Evans. *Partial differential equations*. American Mathematical Society, Providence, R.I., 2010.
- [15] Helmuth Goldberg, Winfried Kämpowsky, y Fredi Tröltzsch. On Nemytskij operators in  $L_p$ -spaces of abstract functions. *Mathematische Nachrichten*, 155(1):127–140, 1992.
- [16] William Graebel. *Engineering fluid mechanics*. CRC Press, 2001.
- [17] Konrad Gröger. A  $W^{1,p}$ -estimate for solutions to mixed boundary value problems for second order elliptic differential equations. *Mathematische Annalen*, 283(4):679–687, 1989.
- [18] Erwin Kreyszig. *Introductory functional analysis with applications*, volume 1. Wiley New York, 1978.
- [19] Olga A Ladyzhenskaya. *The mathematical theory of viscous incompressible flow*, volume 12. Gordon & Breach New York, 1969.
- [20] J Nečas, J Málek, Mirko Rokyta, y Michael Růžička. *Weak and measure-valued solutions to evolutionary PDEs*, volume 13. CRC Press, 1996.
- [21] Alfio Quarteroni y Alberto Valli. *Numerical Approximation of Partial Differential Equations*. Springer Series in Computational Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 2009.
- [22] Roger Temam. *Mathematical problems in plasticity*. Paris, 1985.
- [23] Roger Temam. *Navier-Stokes equations: theory and numerical analysis*, volume 343. American Mathematical Soc., 2001.
- [24] José Rafael Toro Gómez. *Problemas variacionales y elementos finitos en Ingeniería Mecánica*. Ediciones Uniandes, Bogotá, 2007.

- [25] Gerd Wachsmuth. Differentiability of implicit functions: Beyond the implicit function theorem. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 414(1):259–272, 2014.