ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS

PROPAGACIÓN ASINTÓTICA DE LA ECUACIÓN DE REACCIÓN-DIFUSIÓN CON CONDICIONES FISHER-KPP

TRABAJO DE TITULACIÓN PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE MATEMÁTICA

JHOSSELYNE ESTRELLA OSTAIZA GARCÍA

jhosselyne.ostaiza@epn.edu.ec

DIRECTOR: **MIGUEL ÁNGEL YANGARI SOSA, Ph.D.**

miguel.yangari@epn.edu.ec

Quito, enero 2019

DECLARACIÓN

Yo JHOSSELYNE ESTRELLA OSTAIZA GARCÍA, declaro bajo juramento que el trabajo aquí escrito es de mi autoría que no ha sido previamente presentado para ningún grado de calificación profesional; y que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

A través la presente declaración cedo mis derechos de propiedad intelectual, correspondientes a este trabajo, a la Escuela Politécnica Nacional, según lo establecido por la Ley de Propiedad Intelectual, por su reglamento y por la normatividad institucional vigente.

Jhosselyne Estrella Ostaiza García

CERTIFICACIÓN

Certifico que el presente trabajo fue desarrollado por JHOSSELYNE ESTRELLA OSTAIZA GARCÍA, bajo mi supervisión.

Miguel Ángel Yangari Sosa, Ph.D
Director del Proyecto

AGRADECIMIENTOS

A Dios, por rodearme de personas maravillosas y extraordinarias toda mi vida. A los dos seres más espectaculares que Dios me pudo dar, mis papis, por tanto esfuerzo, por tanta dedicación, por tanta entrega, por proyectarme y hacerme caer siempre que me salia del "conjunto del bien", por enseñarme con amor lecciones de vida que jamás habría aprendido sin su instrucción. Gracias por todo amados míos.

A mi hermano, por soportarme, por estar a mi lado en los tiempos más difíciles, en los que el mundo se nos caía, por ser perseverante.

A todos los profesores de la facultad de ciencias, por día a día impartir su conocimiento, porque a pesar de nuestra inmadurez saben llegar a nosotros, pero en especial quiero agradecer, al Dr. Miguel Yangari, por ser una persona de ideas y mostrarme desde el primer día, que uno puede llegar a ser un profesional y ser humano admirable a la par, por guiarme e invertir tiempo en el desarrollo de este trabajo. Mil y un gracias!. Al Dr. Manuel Cortez, por recordarme lo importante de un ¿por qué?, por el tiempo y paciencia que invirtió en leer y corregir cada una de estas páginas.

A mi tía Nancy García, por enseñarme que siempre se puede dar más, que no existe límites cuando se quiere ayudar, sobre todo, por estar allí siempre para cada uno de los que la hemos necesitado, también por mostrarme que no existe lazo más fuerte que el de la familia. Eternamente agradecida.

A mis amigos Mariuxi y José, porque en este tren de vida, me han dejado ser parte de su vagón, por todo lo que hemos vivido juntos, gracias por formar parte de mi familia.

A mis amigos de universidad: Jenny, Sofy, Karen, Ruth, Roque, Luis, Edwin Quizhpi, por compartir conmigo este amor por las matemáticas en sus diferentes ámbitos, por las risas, por cada momento compartido, y sobre todo, gracias por estar allí a tiempo.

A la personita tan inconmensurable en principios, valores y amor. Gracias por todo mi caramelito de finos dulces, por enseñarme que existe un rayo de luz al final del túnel,:*.

DEDICATORIA

A mi mamita Blanca, mi papito Marcos y a mi hermano Michael
¿A quién mejor que ustedes?
Los amo.

Índice general

Resumen

En el presente trabajo se estudia existencia, unicidad y comportamiento en tiempos grandes de soluciones del problema de Cauchy unidimensional de la ecuación de reacción-difusión, con no linealidades del tipo Fisher-KPP en el término de reacción y con la condición inicial uniformemente continua, que se comporta como un frente y que decae más lentamente que cualquier función exponencial cuando $x \to +\infty$.

Para el estudio de existencia y unicidad utilizaremos principio de Duhamel y teorema de punto fijo de Banach. Mientras que para el estudio del comportamiento asintótico espacial y temporal de las soluciones del problema, usaremos conjuntos de nivel, principio de comparación, sub y súper soluciones.

Abstract

In this paper we will study the existence, uniqueness and behavior of the solutions over large time of the one dimensional Cauchy problem for the reaction diffusion equation with Fisher-KPP non linearities on the reaction term and with a uniformly continuous and front-like initial conditions that decays more slowly than any other exponential function as $x- > \infty$.

To study the existence and uniqueness we will use the Duhamel's principle and Banach's fixed point theorem. On the other hand, to study the asymptotic behavior of the solutions for the problem, we will use level sets, comparison principle, sub and super solutions (mild).

Notación

Notaciones generales

$\mathbb{R}^n$	Espacio de números reales de dimensión n.
$\mathbb{R}_+$	$]0, \infty[$.
$\mathbb{N}$	Espacio de números naturales.
$\mathbb{Z}^*$	Espacio de los enteros positivos.
$B(x, r)$	Bola abierta en $\mathbb{R}$ con centro en x y radio r.
∂U	Frontera de U.
$\overline{U}$	Clausura de U.
U_T	Cilindro parabólico.
Γ_T	Frontera del cilindro parabólico U_T.
c.t.p	Casi todo punto.
f^+	Parte positiva de f.
f^-	Parte negativa de f.
$\lvert x \rvert$	Valor absoluto de x.
$\partial u(t, x)/\partial x = u_x$	Derivada parcial con respecto a x de u.
$\partial u(t, x)/\partial t = u_t$	Derivada parcial con respecto al tiempo t de u.
$f * g$	Producto de convolución de f con g.
$\rightharpoonup$	Convergencia débil.
$N_\lambda(t)$	Conjuntos de nivel .
$u_0^{-1}(A)$	Imagen inversa del conjunto A por u_0.
$\Phi(t, x)$	Solución fundamental de la ecuación de calor homogénea.

Espacios funcionales

Sean X, Y espacios de Banach

$\mathcal{L}(X,Y)$	Espacio de operadores lineales de X en Y.
$\mathcal{B}(X,Y)$	Espacio de operadores lineales y acotadas de X en Y.
$\mathcal{B}(X)$	$\mathcal{B}(X,X)$
D(A)	Dominio del operador A.
$C(U)$	Funciones en U continuas.
$C([a,b],Y)$	Espacio de funciones $h:[a,b]\to Y$ continuas.
$C^1([0,\infty[\times X,X)$	Espacio de funciones $F:0,\infty[\times X\to X$ continuamente diferenciables.
$C_c(U)$	Espacio de funciones continuas con soporte compacto en U.
$C^k(U)$	Espacio de funciones k-veces continuamente diferenciables sobre U.
$C^\infty(U)$	$\bigcap\limits_{k\geq 0} C^k(U)$.
$C^{k,\alpha}(U)$	Espacio de funciones Hölder k-veces continuamente diferenciable.
$C^1(U;C^2(V))$	$u(t,x),u_t(t,x),u_x(t,x),u_{xx}(t,x)\in C(U\times V)$.
$C_t^1C_x^2(U_T)$	$u(t,x),u_t(t,x),u_x(t,x),u_{xx}(t,x)\in C(U_T)$.
$C_{u,b}(\mathbb{R})$	Espacio de funciones uniformemente continuas y acotadas.
$L^p(U)$	Espacio de Lebesgue con $1\leq p\leq\infty$.
$L^1_{loc}(U)$	Espacio de funciones localmente integrables.

Normas

$\|\cdot\|$	Norma euclidiana en $\mathbb{R}^n$.
$\|\cdot\|_{L^p}$	Norma del espacio L^p.
$\|\cdot\|_{C^{k,\alpha}}$	Norma del espacio de Hölder $C^{k,\alpha}$.
$\|\cdot\|_X$	Norma del espacio X.

Introducción

Las ecuaciones en derivadas parciales juegan un papel importante en matemáticas, especialmente en geometría y análisis. Además, de que matemáticamente, gran parte de procesos naturales pueden ser descritos en ecuaciones en derivadas parciales, como por ejemplo, el esparcimiento de calor, modelos de proporción de enfermedades, la difusión de químicos, fenómenos de propagación de especies, radicación de ondas electromagnéticas, la pigmentación de manchas en ciertas especies de animales, entre otros.

Una ecuación diferencial parcial (EDP) de una función desconocida u, es una identidad que relaciona una o más variables independientes, la variable dependiente u y las derivadas parciales de u. Se puede escribir formalmente como:

DEFINICIÓN 0.1. *Sean $k \geq 1$ un número entero y U un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, la expresión*

$$F(D^k u(x), D^{k-1}u(x), ..., Du(x), u(x), x) = 0,$$

es llamada ecuación en derivadas parciales de orden k. Donde

$$F : \mathbb{R}^{n^k} \times \mathbb{R}^{n^{k-1}} \times \cdots \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times U \to \mathbb{R}$$

es una función dada y $u : U \to \mathbb{R}$ es desconocida.

Resolver una EDP es encontrar una función u que satisface la identidad dada en todo el dominio o al menos en alguna región de las variables. Es decir, al encontrar soluciones nos referimos, idealmente, a obtener soluciones simples, explícitas, o en su defecto, deducir la existencia y otras propiedades de la solución.
Y de hecho, la pregunta que surge es: ¿cuándo podemos asegurar que una EDP tiene solución?. Esta pregunta puede ser sutil, dependiendo de la estructura particular del problema que se esta estudiando y a qué denotaremos como solución.
Para ello en este trabajo diremos que un problema de EDP está bien planteado en un dominio, con un conjunto de condiciones iniciales y/o de frontera (o alguna otra

condición auxiliar) si cumple las siguientes propiedades fundamentales:

Existencia Existe al menos una solución u que satisface todas las condiciones.

Unicidad Existe una única solución.

Estabilidad La única solución u depende de manera estable de los datos del problema. Esto significa, que si los datos cambian un poco, la correspondiente solución también cambia un poco.

Ahora, claramente sería deseable resolver una EDP de tal manera que se tenga las tres propiedades anteriores, pero aún no hemos definido formalmente a qué llamamos "solución". Existen varias definiciones de soluciones (clásicas, débiles, *mild* y viscosas, etc.) dependiendo de la regularidad de los datos de la EDP.

Decimos que una solución clásica de una EDP de orden k, es una solución que al menos es k veces continuamente diferenciable aunque la derivadas de orden superior no existan, y satisface todas las condiciones.

Existen varias EDP que no se pueden resolver en el sentido clásico, es decir, obtener soluciones clásicas, pero están bien planteadas si definimos soluciones las cuales pueden no ser continuas e incluso diferenciables. Este tipo de soluciones se las conoce como soluciones generalizadas y existen varios ejemplos, como débiles, *mild*, viscosa, entre otras. En este trabajo usaremos el termino "soluciones *mild*", en vez de soluciones débiles, puesto que ya hemos empleado el nombre de soluciones débiles a aquellas soluciones que cumplen la formulación variacional del problema. Por otro lado las soluciones *mild* son soluciones con datos no tan regulares pero que hacen al problema bien planteado.

En este trabajo de investigación estamos interesados particularmente en la ecuación diferencial parcial

$$\begin{cases} u_t(t,x) &= u_{xx}(t,x) + f(u(t,x)) \quad \text{en} \ \ [0,\infty[\times\mathbb{R} \\ u(0,x) &= u_0 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad\ \ \text{en}\ \mathbb{R} \end{cases} \tag{1}$$

Para este tipo de ecuaciones (1) existen varias aplicaciones, donde según el comportamiento de f se pueden modelar diferentes fenómenos como: la difusión por conducción de calor en un cuerpo sólido, procesos bioquímicos, la propagación de excitación nerviosa o la transición de fase, entre otras. La ecuación (1) es conocida como ecuación de reacción-difusión y ha sido sujeta a varias investigaciones ([3], [4], [8], [9], [10], [15], [17], [24], entre otras), desde el trabajo seminal de Kolmogorov, Petrovski y Piskunov [21]. Se estudiaron este tipo de ecuación parabólico, por dos

razones fundamentales: primero explican como se representa la proporción (o invasión) de una especie y segundo con qué velocidad lo hacen.
La ecuación (1) es no lineal y al presentar no linealidades en un modelo matemático da lugar a muchos fenómenos interesantes que no pueden ocurrir en el caso lineal, como por ejemplo la velocidad finita o infinita de difusión, el tiempo finito de explosión o la existencia de soluciones especiales en forma de ondas viajeras. Este tipo de modelos con términos de reacción no lineales principalmente han sido estudiados en dinámica de población y química cinética, y fueron introducidos en los años 30 por Fisher en su investigación descrita en [10] y Kolomogorov, Petrovsky y Pisconuv en [21]. Entre los resultados que estos autores obtuvieron, fueron que en dimensión 1, la ecuación $u_t = u_{xx} + f(u)$, con datos iniciales u_0 como una función Heaviside y f una función no lineal de clase C^1 de la forma $f(u) = u(1-u)$ admite una familia de ondas viajeras con velocidad de propagación finita. Es decir, ellos demostraron que la ecuación de reacción- difusión admite soluciones de la forma $u(t,x) = q_\sigma(x - \sigma t)$ y

$$\begin{cases} \text{mín}_{x \leq \sigma t}\, u(t,x) \to 1 \quad \text{cuando } t \to +\infty \quad \text{si } \sigma < \sigma^* \\ \text{máx}_{x \geq \sigma t}\, u(t,x) \to 0 \quad \text{cuando } t \to +\infty \quad \text{si } \sigma > \sigma^*, \end{cases}$$

donde $\sigma^* = 2$. Resultados de convergencia semejantes fueron obtenidos por Aronson y Weinberger en [3], con f y u_0 más generales, los cuales nos muestran bajo qué condiciones las soluciones pueden o no converger a una solución en forma de onda viajera. Aronson y Weinberger, también mostraron que existe una velocidad crítica σ^* tal que para datos iniciales u_0 que son no negativos y son a soporte compacto, la tasa de invasión en la que el estado estable 1 invade al estado inestable 0 es lineal en el tiempo.

En este trabajo de investigación, nos concentraremos en el problema (1) donde f es no lineal y del tipo Fisher KPP, es decir: $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ es de clase $C^1([0,1])$ y satisface,

$$f(0) = f(1) = 0, \quad 0 \leq f(w) \leq f'(0)w \quad \forall\ w \in]0,1[\tag{2}$$

Ejemplos de tales no linealidades son $f(s) = s(1-s)$, $f(s) = s^2(1-s)$.
Asumimos que la condición inicial $u_0 : \mathbb{R} \to [0,1]$ es uniformemente continua y que satisface

$$u_0 > 0, \ \ \liminf_{x \to -\infty} u_0(x) > 0 \ \ y \ \ \lim_{x \to \infty} u_0(x) = 0. \tag{3}$$

Más aún, suponemos que la función u_0 decae más lentamente que cualquier función exponencial cuando $x \to +\infty$ en el sentido que

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists x_\epsilon \in \mathbb{R},\ \ u_0(x) \geq e^{-\epsilon x} \text{ en } [x_\epsilon, \infty[\tag{4}$$

o equivalentemente $u_0(x)e^{\epsilon x} \to \infty$ cuando $x \to \infty$.

Para estudiar este problema hemos dividido nuestra investigación en seis capítulos, conformados de la siguiente manera:

En el primer capítulo llamado "Definiciones y resultados preliminares"daremos las definiciones y teoremas del análisis real y análisis funcional que usaremos a lo largo de este trabajo, para luego solo nombrarlas.

Ya que en nuestro problema los datos no son tan regulares como lo exige la definición de solución clásica estudiares soluciones *mild* en el capítulo dos, analizando cada uno de los diferentes problemas de valor inicial en espacios de Banach y bajo qué condiciones las soluciones *mild* se convierten en clásicas. Usaremos teorema de punto fijo de Banach para demostrar existencia de soluciones *mild*. También demostraremos el principio de comparación para soluciones *mild*, el cual nos ayudará al análisis del comportamiento de las soluciones *mild* en el infinito en los siguientes capítulos.
En el capítulo tres deduciremos la solución fundamental de la ecuación de calor para, basándonos en está solución, encontrar soluciones clásicas y *mild* para el problema de Cauchy homogéneo y no homogéneo. Estudiaremos el principio de comparación, con el cual probaremos unicidad de soluciones en dominios acotados. También analizaremos unicidad de soluciones clásicas en dominios no acotados.

En el capítulo cuatro, analizaremos el hecho de por qué no existen soluciones en forma de onda viajera de la ecuación de reacción-difusión, veremos qué sucede con las soluciones cuando $x \to +\infty$, también demostraremos que los conjuntos de nivel de las soluciones se mueven infinitamente rápido cuando t tiende al infinito. Además veremos el comportamiento asintótico de los conjuntos de nivel en tiempo grandes.

Capítulo 1

Definiciones y resultados preliminares

En este capítulo se tratarán tópicos del análisis que son necesarios para nuestro estudio. Los resultados aquí presentados fueron tomados principalmente de [1], [5], [22], y [23].

1.1. Definiciones básicas

DEFINICIÓN 1.1. *Escribimos*

$$f(x) = o(g(x)) \ \ \textit{cuando } x \to x_0$$

siempre que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0$$

Por otro lado, escribimos

$$f(x) = O(g(x)) \ \ \textit{cuando } x \to x_0$$

siempre que, exista una constante C tal que $|f(x)| \leq C|g(x)|$.

DEFINICIÓN 1.2. *Una función* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es convexa, si*

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y).$$

Para todo $x, y \in \mathbb{R}$ *y* $0 \leq \alpha \leq 1$.

1.2. Espacios métricos

DEFINICIÓN 1.3 (Espacio métrico). *Un espacio métrico es un par (X, d), donde X es un conjunto y $d : X \times X \to \mathbb{R}$ es una métrica tal que, para todo $x, y, z \in X$ cumple las siguientes propiedades:*

1. $d(x, y) \geq 0$.
2. $d(x, y) = 0$ *si y solo si* $x = y$.
3. $d(x, y) = d(y, x)$.
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

EJEMPLO 1. El conjunto de todos los números reales, con métrica

$$d(x, y) = |x - y|,$$

es un espacio métrico.

DEFINICIÓN 1.4 (Convergencia de una sucesión). *Sea (X, d_X) un espacio métrico, decimos que una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X converge hacia un elemento $x \in X$, si para todo $\epsilon > 0$, existe un $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que*

$$n \geq N(\epsilon) \Rightarrow d_X(x_n, x) \leq \epsilon.$$

DEFINICIÓN 1.5 (Función continua). *Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) dos espacios métricos y $f : X \to Y$ una función, decimos que f es continua en $a \in X$ si para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in X$*

$$d_X(x, a) \leq \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(a)) \leq \epsilon.$$

TEOREMA 1.1 (Caracterización de funciones continuas). *Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) dos espacios métricos y $f : X \to Y$ una función. f es continua si y solo si para toda sucesión convergente $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de X se tiene*

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = f\left(\lim_{n\to+\infty} a_n\right).$$

Demostración. Para la demostración ver [22], pág. 31. □

DEFINICIÓN 1.6 (Uniformemente continua). *Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) dos espacios métricos y $f : X \to Y$ una función. Entonces f se dice que es uniformemente continua*

sobre $A \subset X$, si se tiene la siguiente condición:
Para todo $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que, si $x, y \in A$

$$d_X(x,y) \leq \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) \leq \epsilon.$$

DEFINICIÓN 1.7. *(Convergencia uniforme) Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) dos espacios métricos, $f : X \to Y$ una función, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones de X en Y y sea A un subconjunto de X. Se dice que la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente hacia f sobre el conjunto A, si para todo $\epsilon > 0$, existe un $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$, tal que $n \geq N(\epsilon)$ entonces para todo $x \in A$*

$$d_Y(f_n(x), f(x)) \leq \epsilon$$

TEOREMA 1.2. *Sea M un subconjunto no vació de un espacio métrico (X, d_X) y sea $\overline{M}$ su clausura, entonces*
M es cerrado si y solo si existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de puntos $x_n \in M$ tal que si $x_n \to x$ cuando $n \to +\infty$ implica que $x \in M$.

Demostración. Para la demostración ver [22], pág, 30. □

DEFINICIÓN 1.8 (Uniformemente acotada). *Una sucesión de funciones f_n es uniformemente acotada, si para todo $x \in D$ y todo n, existe una constante $C > 0$ tal que*

$$|f_n(x)| < C.$$

DEFINICIÓN 1.9 (Sucesión de Cauchy). *Sea (X, d_X) un espacio métrico. Se dice que una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X es de Cauchy, si para todo $\epsilon > 0$, existe un $N > 0$ tal que si*

$$n, m > N, \Rightarrow d_X(x_n, x_m) < \epsilon$$

DEFINICIÓN 1.10 (Espacio métrico completo). *Se dice que un espacio métrico es completo cuando toda sucesión de Cauchy es convergente.*

TEOREMA 1.3 (Teorema de punto fijo de Banach). *Sea (X,d) un espacio métrico completo, donde $X \neq \emptyset$ y sea $S : X \to X$ una contracción sobre X, es decir,*

$$d(Sx, Sy) \leq Kd(x,y), \ \forall \ x, y \in X, \ \text{con } K < 1.$$

Entonces S tiene un único punto fijo, $u = Su$.

Existen variantes de este teorema como lo es el siguiente

TEOREMA 1.4 (Teorema de punto fijo de Banach-Picard). *Sea (X,d) un espacio mé-*

trico completo. Sean $0 < K < 1$ *y* $S : X \to X$ *tal que*

$$d(S^m x, S^m y) \leq K d(x, y),$$

para algún $m \in \mathbb{N}$ *y para todo* $x, y \in X$*. Entonces S tiene un único punto fijo* $x_0 \in X$*, es decir,* $S x_0 = x_0$*.*

Demostración. Para el caso n=1 se tiene por el teorema anterior, esto es $d(Sx, Sy) \leq K d(x, y)$. y tendríamos que

$$\begin{aligned} d(S^2 x, S^2 y) &= d(S(Sx), S(Sy)) \\ &\leq K d(Sx, Sy) \\ &\leq K^2 d(x, y), \text{ para todo} x, y \in X \end{aligned}$$

Para todo $x \in X$, $\{S^m x\}_{m \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy, en efecto. Si $m, n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\begin{aligned} d(S^m x, S^{m+n} y) &= d(S^m x, S^m(S^n y)) \\ &\leq K^m d(x, S^n y) \end{aligned}$$

dado que m, n son arbitrarios, haciendo x=y y tendiendo n al infinito, se obtiene que $K^m d(x, S^n y) \to 0$. Como estamos en un espacio métrico completo, existe un $x_0 \in X$ tal que $S^m x \to x_0$ cuando $m \to +\infty$. Para la unicidad, si x_0 y x_1 son dos puntos fijos de S, entonces $d(x_0, x_1) = d(Sx_0, Sx_1) \leq \mathcal{K} d(x_0, x_1)$, de donde $x_1 = x_2$ □

DEFINICIÓN 1.11 (Espacio de funciones continuas)**.** *Sea* Ω *un subconjunto de* $\mathbb{R}$*. Definimos al espacio de las funciones continuas sobre* Ω

$$C(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} : u \textit{ es continua}\}$$

Si k *es un entero positivo, definimos*

$$C^k(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} : u \textit{ k-veces es continuamente diferenciable.}\}$$

1.3. Espacios normados

DEFINICIÓN 1.12 (Espacio normado)**.** *Un espacio normado es un par* $(X, \|\cdot\|)$ *, donde* X *es un espacio vectorial y* $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ *es una aplicación, llamada norma, con las siguientes propiedades:*

1. $\|x\| \geq 0$

2. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

3. $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$

4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

TEOREMA 1.5. *Sean X un espacio normado, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X . Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy que admite una subsucesión convergente hacia un punto x, entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge hacia x.*

Demostración. Para la demostración ver [22]. □

1.4. Espacios de Banach

DEFINICIÓN 1.13 (Espacio de Banach). *Un espacio de Banach es un espacio normado completo.*

DEFINICIÓN 1.14 (Función globalmente Lipschitz). *Sea I un intervalo, X un espacio de Banach. Decimos que una función $F : I \times X \to X$ es globalmente Lipschitz en la segunda variable con constante L, si para cada $t \in I$, se tiene*

$$|F(t, y_1) - F(t, y_2)|_X \leq L\|y_1 - y_2\|_X \ \ \forall y_1, y_2 \in X.$$

DEFINICIÓN 1.15 (Función localmente lipschitziana). *Sean X,Y dos espacios de Banach y $F : U \subset X \to Y$ una función, decimos que f es **localmente Lipschitz en la segunda variable** en el abierto U cuando, dado un punto arbitrario $y \in U$, existe una constante $k_0 > 0$ y una vecindad abierta $V_0 \subset U$ del punto y, tal que*

$$\|F(t, x) - F(t, y)\|_Y \leq k_0\|x - y\|_X, \ \forall x, y \in V_0.$$

Note que una función es localmente Lipschitz en un abierto U cuando podemos definir una constante de Lipschitz en torno a cualquier punto $y \in U$, es decir, es posible que la constante de Lipschitz se haga infinita si intentamos que el abierto V_0 cubra todo U.

DEFINICIÓN 1.16 (Tipos de convergencia en espacios de Banach). *Sean $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio vectorial normado, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X. Se dice que converge fuertemente a $x \in X$ si*

$$\|x_n - x\|_X \to 0.$$

Y a este tipo de convergencia se lo denota

$$x_n \to x.$$

Se dice que converge débilmente a $x \in X$, si para todo $f \in X^*$ se tiene que

$$f(x_n) \to f(x).$$

Y se lo denota

$$x_n \rightharpoonup x.$$

1.5. Espacios de Lebesgue

DEFINICIÓN 1.17. *Sea Γ un conjunto. Una colección $\mathfrak{F}$ de subconjuntos de Γ es llamado σ-álgebra si:*

1. *$\emptyset, \Gamma \in \mathfrak{F}$,*
2. *Si $A \in \mathfrak{F}$ entonces $A^c \in \mathfrak{F}$,*
3. *Si $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{F}$ entonces $\bigcup A_i$ y $\bigcap A_i$ pertenecen a $\mathfrak{F}$.*

OBSERVACIÓN. Si $\Gamma = \mathbb{R}^n$, podemos definir la más pequeña σ-álgebra que contiene todos los subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$, llamada la σ-álgebra de Borel.

DEFINICIÓN 1.18. *Dada una σ-álgebra $\mathfrak{F}$ en un conjunto Γ, una medida sobre $\mathfrak{F}$ es una función*

$$\mu : \mathfrak{F} \to \mathbb{R}$$

tal que

1. *$\mu(A) \geq 0$ para cada $A \in \mathfrak{F}$;*
2. *Si $A_1, A_2, ...$ son dos a dos disjuntos en $\mathfrak{F}$, entonces*

$$\mu\left(\bigcup_{i\geq 1} A_i\right) = \sum_{i\geq 1} \mu(A_i).$$

Los elementos de $\mathfrak{F}$ son llamados conjuntos medibles.

DEFINICIÓN 1.19. *Decimos que cierta propiedad se cumple en* **casi todo punto** *en $A \in \mathfrak{F}$ si se tiene para todo punto de A excepto en los subconjuntos de medida cero. Y lo denotamos por* **c.t.p** *en A.*

DEFINICIÓN 1.20. *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ medible y $f : A \to \mathbb{R}$. Decimos que f es medible si*

$$f^{-1}(C) \in \mathfrak{F},$$

para algún conjunto cerrado $C \subseteq \mathbb{R}$.

OBSERVACIÓN. A continuación varias propiedades

1. Si f es continua entonces es medible.
2. La suma y producto de un número finito de funciones medibles es medible.
3. El límite puntual de una sucesión de funciones medibles es medible.
4. Si $f : A \to \mathbb{R}$ es medible, se puede definir sus supremo esencial o el menor de las cotas superiores por la fórmula:

   $$esssupf = \text{ínf}\{K : f(x) \leq K \text{ c.t.p en } A\}.$$

   Note que si $f = \chi_{\mathbb{Q}}$, la función característica de los números racionales, tenemos que $\sup f = 1$ pero $esssupf = 0$, ya que $|\mathbb{Q}| = 0$.

DEFINICIÓN 1.21. *Definimos la integral de Lebesgue de una función medible sobre un conjunto medible $A \subset \mathbb{R}$. Por una función simple $s = \sum_{j=1}^{N} s_j \chi_{A_j}$, donde $A_j \subset A$ es medible, definimos:*

$$\int_A s = \sum_{j=1}^{N} s_j |A_j|,$$

con la convección que, si $s_j = 0$ y $|A_j| = +\infty$, entonces $s_j|A_j| = 0$. Si f es medible y no negativa, definimos

$$\int_A f = \sup \int_A s.$$

En general si f es medible, podemos escribir $f = f^+ - f^-$, donde $f^+ = \text{máx}\{f, 0\}$ y $f^- = \text{máx}\{-f, 0\}$, ambos son medibles y no negativas. Definimos

$$\int_A f = \int_A f^+ - \int_A f^-.$$

Si ambas integrales de la derecha son finitas, decimos que f es Lebesgue integrable sobre A. De lo anteriormente dicho, se sigue que una función f medible es integrable si y solo si $|f|$ es integrable.

DEFINICIÓN 1.22. *Al conjunto de todas las funciones integrables en A se lo notará por $L^1(A)$.*

DEFINICIÓN 1.23. *Sea $1 \leq p \leq \infty$ y $\Omega \subset \mathbb{R}$ abierto. Una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$ pertenece a $L^p_{loc}(\Omega)$ si $f \cdot 1_K \in L^p(\Omega)$ para todo compacto $K \subseteq \mathbb{R}$, en donde*

$$1_K(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in K \\ 0 & si\ no. \end{cases}$$

1.5.1. Algunos teoremas fundamentales

TEOREMA 1.6 (Teorema de convergencia dominada de Lebesgue en L^1)**.** *Sean Ω un abierto y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones en $L^1(\Omega)$ tal que*

1. *$f_n(x) \to f(x)$ c.t.p en Ω.*
2. *Si existe una función $g \in L^1$ tal que para todo n, $|f_n(x)| \leq g(x)$ c.t.p sobre Ω.*

Entonces

$$f \in L^1(\Omega)\ \ y\ \ \|f_n - f\|_{L^1} \to 0.$$

Demostración. Para la demostración ver ([20]). □

TEOREMA 1.7. *Sea $\{f_k\}$ una sucesión de funciones sumables en Ω tal que*

$$\|f_k - f\|_{L^1(A)} \to 0 \ \ cuando\ k \to +\infty.$$

Entonces existe una subsucesión $\{f_{k_j}\}$ tal que

$$f_{k_j} \to f \ \ c.t.p\ cuando\ j \to +\infty.$$

Demostración. Para la demostración ver ([20]). □

TEOREMA 1.8. *Sea $f \in L^1(\Omega)$. Entonces, para cada $\delta > 0$, existe una función continua $g \in C_0(\Omega)$ tal que*

$$\|f - g\|_{L^1(\Omega)} < \delta.$$

Demostración. Para la demostración ver ([20]). □

TEOREMA 1.9. *Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Entonces*

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)\ \ c.t.p\ x \in \mathbb{R}.$$

Demostración. Para la demostración ver ([20]). □

TEOREMA 1.10 (Derivación bajo el signo integral). *Sean X un espacio medido e I un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ y $F : X \times I \to \mathbb{K}$ una función tal que,*

1. *para todo $t \in I$, la función $x \mapsto F(x,t)$ es integrable.*
2. *para cada x, se tenga que $(\partial F/\partial t)(x,t)$ existe y es continua.*
3. *para todo $t \in I$ existe una función integrable $g : X \to \mathbb{K}$, se tiene*

$$\left|\frac{\partial F}{\partial t}(x,t)\right| \leq g(x).$$

Entonces, la función definida por

$$\begin{array}{rccc} G: & I & \to & \mathbb{K} \\ & t & \mapsto & \int_X F(x,t)dx. \end{array}$$

es derivable, y

$$G'(t) = \int_X \frac{d}{dt} F(x,t)dx.$$

Demostración. Para la demostración ver ([20]). □

TEOREMA 1.11 (Fubini). *Supongamos que $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Entonces para c.p.t $x \in \Omega_1$,*

$$F(x,y) \in L^1_y(\Omega_2) \text{ y } \int_{\Omega_2} F(x,y)d\mu_2 \in L^1_x(\Omega_1).$$

Similarmente, para c.t.p $y \in \Omega_2$

$$F(x,y) \in L^1_x(\Omega_1) \text{ y } \int_{\Omega_1} F(x,y)d\mu_1 \in L^1_y(\Omega_2).$$

Más aún

$$\int_{\Omega_1} d\mu_1 \int_{\Omega_2} F(x,y)d\mu_2 = \int_{\Omega_2} d\mu_2 \int_{\Omega_1} F(x,y)d\mu_1 = \int\int_{\Omega_1 \times \Omega 2} F(x,y)d\mu_1 d\mu_2.$$

Demostración. Para la demostración ver ([20]). □

DEFINICIÓN 1.24. *Sean $1 < p < \infty$ y $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto abierto , el espacio*

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} : f \text{ es medible }, |f|^p \in L^1(\Omega) \right\}.$$

con norma

$$\|f\|_{L^p} = \left[\int_\Omega |f(x)|^p \right]^{1/p}.$$

DEFINICIÓN 1.25. *El espacio*

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{l} f \text{ es medible y existe una constante } C \text{ tal que} \\ |f(x)| \leq C, \text{ c.t.p sobre } \Omega \end{array} \right\}.$$

con norma

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{C : |f(x)| \leq C \text{ c.t.p en } \Omega\}.$$

OBSERVACIÓN. Si $f \in L^\infty(\Omega)$ entonces

$$|f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)} \text{ c.t.p sobre } \Omega.$$

1.6. Espacios de Hölder

Sea $U \subset \mathbb{R}$ un conjunto cerrado y acotado y $0 < \alpha \leq 1$. Decimos que una función $u : U \to \mathbb{R}$ es Hölder continua con exponente α en U, si existe una constante C tal que

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x-y|^\alpha \text{ para todo } x, y \in U. \tag{1.1}$$

El más pequeño C para el cual (1.1) se cumple, lo llamaremos **coeficiente de Hölder**. Si U es no acotado y cuya intersección con cada conjunto cerrado y acotado B, es cerrado, entonces decimos que $u(x)$ es Hölder continua de exponente α en U.
Si u depende de un parámetro λ, es decir, $u = u(\lambda, x)$ y si el coeficiente de Hölder es independiente de λ, entonces decimos que u es Hölder continua en x y uniformemente con respecto a λ.

Decimos que $u : U \to \mathbb{R}$ es una función Lipschitz continua si satisface la siguiente estimación

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x-y|, \ (x, y \in U), \tag{1.2}$$

para alguna constante C. Podemos ver a las funciones Lipschitz como funciones Hölder continuas con exponente $\alpha = 1$.

DEFINICIÓN 1.26. *Sea $u : U \to \mathbb{R}$, una función acotada y continua, escribimos*

$$\|u\|_{C(\overline{U})} := \sup_{x \in U} |u(x)|.$$

La α-ésima seminorma de u esta dada por

$$[u]_{C^{0,\alpha}(\overline{U})} := \sup_{x \neq y \in U} \left\{ \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\alpha} \right\}.$$

Y la α-ésima norma

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\overline{U})} := \|u\|_{C(\overline{U})} + [u]_{C^{0,\alpha}(\overline{U})}.$$

DEFINICIÓN 1.27. *Denotamos a $C^{k,\alpha}(\overline{U})$ al espacio de Hölder, que consiste de todas las funciones $u \in C^k(\overline{U})$ con norma finita dada por*

$$\|u\|_{C^{k,\alpha}(\overline{U})} := \sum_{|\gamma|\leq k} \|D^\gamma u\|_{C(\overline{U})} + \sum_{|\gamma|=k} [D^\gamma u]_{C^{0,\alpha}(\overline{U})}.$$

OBSERVACIÓN. El espacio $C^{k,\alpha}(\overline{U})$ consiste de todas las funciones u que son k-veces continuamente diferenciable y cuyas k-ésimas derivadas parciales son Hölder continua con exponente α.

OBSERVACIÓN. Notaremos como $C^{0,\alpha}(U) = \left\{u \in C(U) : \sup_{x\neq y\in U} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty\right\}$, con $\alpha \in]0,1[$. Al espacio de funciones Hölder continuas

$$C^{k,\alpha}(U) = \{u \in C^k(U) : D^i u \in C^{0,\alpha} \ \forall |i| \leq k\}$$

Capítulo 2

Soluciones mild

2.1. Motivación de las soluciones *mild*

Las soluciones *mild* son un tipo de soluciones generalizadas, que podemos ver como una extensión de la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias, para ello veamos los siguientes ejemplos.
Consideremos el siguiente problema homogéneo de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + au &= 0 \\ u(0) &= u_0, \end{cases} \tag{2.1}$$

donde a es una constante. Resolviendo esté problema obtenemos que,

$$u(t) = e^{-ta}u_0,$$

es solución del problema (2.1). Por tanto, si definimos al operador $T(t)$ como $T(t)u_0 := e^{-ta}u_0$, tendríamos que

$$u(t) = T(t)u_0.$$

es solución del problema homogéneo (2.1).
Por otro lado, para el siguiente problema no homogéneo

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + au &= f(t) \\ u(0) &= u_0, \end{cases} \tag{2.2}$$

donde a es una constante, f y u_0 son dadas. Sabemos por el método de variación de parámetros, que la solución de (2.2) viene dada por

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds.$$

Para el caso no lineal existe un teorema que nos garantiza bajo que condiciones existen soluciones únicas.

TEOREMA 2.1. *Sea I un intervalo. Dada una función $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua en la primera variable y si existe una constante K tal que,*

$$|f(t,x_1) - f(t,x_2)| \leq K|x_1 - x_2| \quad \forall t \in I, \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Entonces, para cada $u_0 \in \mathbb{R}$ el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} &= f(t,u) \ t \in I \\ u(0) &= u_0, \end{cases}$$

tiene una única solución $u \in C^1(I,\mathbb{R})$.

Demostración. Para la demostración ver [18], pág.156. □

Para ver la importancia de tomar los datos de forma no arbitraria.

EJEMPLO 2. En este ejemplo veremos que no se garantiza unicidad de la solución, si el dato inicial u_0 es escogido arbitrariamente,

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} &= 3(u(t))^{2/3} \quad t \geq 0 \\ u(0) &= u_0, \end{cases}$$

donde la función $v \in \mathbb{R} \to v^{2/3} \in \mathbb{R}$ que aparece en el lado derecho es continua. Más específicamente, este problema tiene una solución y viene dada por

$$u(t) = (t + u_0^{1/3})^{1/3} \text{ para todo } t \geq 0, \text{ si } u_0 \neq 0,$$

mientras, si $u_0 = 0$, este tiene infinitas soluciones, dadas por

$$u(t) = 0 \text{ para todo } t \geq 0,$$
$$u(t) = t^3 \text{ para todo } t \geq 0.$$

En el siguiente ejemplo veremos que existen soluciones y estas son únicas pero localmente.

EJEMPLO 3. Consideremos el problema de valor inicial, el cual nos muestra la existencia local de las soluciones

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} &= -(u(t))^2, \quad t \geq 0 \\ u(0) &= u_0, \end{cases}$$

Comprobemos si este problema cumple las hipótesis del teorema 2.1, sea $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(t,u) = -(u(t))^2$, podemos ver que f es continua en la primera variable. Veamos si es globalmente Lipschitz

$$|f(t,u_1) - f(t,u_2)| = |-u_1^2 + u_2^2| = |u_1 + u_2||u_1 - u_2| \leq L|u_1 - u_2|.$$

No podemos encontrar un $L > 0$ tal que sea independiente de u_1, u_2. Queda analizar si existe solución por lo menos local, entonces la solución es única y viene dada por $u(t) = \frac{u_0}{1-u_0 t}$, esta definida para todo $t \geq 0$, si $u_0 \leq 0$, pero para $t \in [0,\tau]$, donde $\tau > 0$ es un número que $\tau < \frac{1}{u_0}$, si $u_0 > 0$.

TEOREMA 2.2 (Teorema de Cauchy-Lipschitz)**.** *Sean I un intervalo, $(t_0, u_0) \in I \times \mathbb{R}$ y $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua en la primera variable y que existen δ,L,$r > 0$ tal que*

$$|f(t,u_1) - f(t,u_2)| \leq L|u_1 - u_2|,$$

siempre que $u_1, u_2 \in [u_0 - r, u_0 + r]$ y $t \in I \bigcap [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$. Definamos por

$$M := \text{máx}\{|f(t,u)| : t \in I, |t - t_0| \leq \delta, |u - u_0| \leq r\},$$

$\delta_0 = \text{mín}\{\delta, r/M\}$ y $J = I \bigcap]t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0[$. Entonces existe una única solución local $u \in C^1(J)$ del problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} &= f(t,u) \\ u(t_0) &= u_0. \end{cases} \tag{2.3}$$

Para fines ilustrativos procedemos hacer la demostración.

Demostración. Sea $u_0(t) \equiv u_0$, supongamos que $u_k(t)$ ha sido definido en J, es continua y satisface

$$|u_k(t) - u_0| \leq r, \text{ para } k = 0, ..., n$$

Pero

$$u_{n+1}(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u_n(s))ds.$$

Entonces, ya que $f(t, u_n(t))$ esta definida y es continua sobre J, tenemos lo mismo para $u_{n+1}(t)$, en efecto

$$|u_{n+1}(t) - u_0| \leq \int_{t_0}^{t} |f(s, u_n(s))|ds \leq M\delta_0 \leq r.$$

Por tanto, $u_1(t), u_2(t), ...$ están definidas y son continuas sobre J y $|u_n - u_0| \leq r$.

Ahora por inducción verificaremos que

$$|u_{n+1}(t) - u_n(t)| \leq \frac{MK^n(t-t_0)^{n+1}}{(n+1)!} \text{ para } t \in J.$$

Claramente se tiene para $n = 0$. Supongamos que se tiene para n y demostremos que también se tiene para $n+1$.

$$|u_{n+1}(t) - u_n(t)| = \int_{t_0}^{t} [f(s, u_n(s)) - f(s, u_{n-1}(s))] ds.$$

Como f es Lipschitz con respecto a la segunda variable

$$|u_{n+1}(t) - u_n(t)| \leq K \int_{t_0}^{t} |u_n(s) - u_{n-1}(s)| ds,$$

y por hipótesis de inducción tenemos

$$|u_{n+1}(t) - u_n(t)| \leq K \frac{MK^{n-1}}{n!} \int_{t_0}^{t} (s-t_0)^n ds = \frac{MK^n(t-t_0)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Se sigue que

$$u_0 + \sum_{n=0}^{\infty} [u_{n+1}(t) - u_n(t)] = u(t),$$

es uniformemente convergente sobre J, es decir,

$$u(t) = \lim_{n\to\infty} u_n(t).$$

Ya que $f(t,u)$ es uniformemente continua, tenemos que $f(t, u_n(t)) \to f(t, u(t))$ cuando $n \to \infty$ uniformemente sobre J. Por tanto, así término a término se puede aplicar la integral y obtener

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s)) ds.$$

Para probar unicidad, sea $z(t)$ solución del problema de valor inicial sobre J. Entonces

$$z(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, z(s)) ds,$$

entonces

$$|u_n(t) - z(t)| \leq \frac{MK^n(t-t_0)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Si $n \to \infty$ se tiene que $|u(t) - z(t)| \leq 0$ $\square$

Este tipo de idea nos permitirá encontrar un tipo de solución "generalizada"de los diferentes problemas de la ecuación de calor. Pero para ello es necesario algunas definiciones previas, las cuales nos ayudan a formalizar estas ideas, las cuales fueron tomadas de [14] y [25].

DEFINICIÓN 2.1. *Sea X un espacio de Banach. Una familia* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *de operadores donde* $T \in \mathcal{B}(X)$ *es un semigrupo de operadores lineales acotados sobre X si:*

a) *T(0)=I, donde I es el operador identidad sobre X.*

b) *T(t+s)=T(t)T(s), para cada* $t, s \geq 0$*.*

DEFINICIÓN 2.2. *Un semigrupo de operadores lineales y acotados* $\{T(t)\}_{t>0}$ *sobre un espacio de Banach X, es* ***uniformemente continuo*** *si*

$$\lim_{t\to 0} \|T(t) - I\|_X = 0. \tag{2.4}$$

DEFINICIÓN 2.3. *El operador lineal* A *definido por*

$$D(A) = \left\{ u \in X : \exists \lim_{t\to 0} \frac{T(t)u - u}{t} \right\}, \tag{2.5}$$

y

$$Au = \lim_{t\to 0} \frac{T(t)u - u}{t} = \frac{d^+T(t)u}{dt}|_{t=0}, \quad \text{para } \; u \in D(A). \tag{2.6}$$

es el generador infinitesimal de el semigrupo $\{T(t)\}_{t>0}$ *y* $D(A)$ *es el dominio de* A*.*

TEOREMA 2.3. *Un operador lineal* A *es un generador infinitesimal de un semigrupo uniformemente continuo si y solamente si* A *es un operador lineal acotado.*

Demostración. Para la demostración ver [25], pág.2. □

COROLARIO 2.4. *Sea* $\{T(t)\}_{t>0}$ *un semigrupo uniformemente continuo con* $T \in \mathcal{B}(X)$*. Entonces*

a *Existe una constante* $\omega \geq 0$ *tal que* $\|T(t)\| \leq e^{\omega t}$*.*

b *Existe un único operador lineal y continuo tal que* $T(t) = e^{tA}$*.*

c *El operador A de la parte (b) es el generador infinitesimal de* $T(t)$*.*

d $t \to T(t)$ *es diferenciable en norma y*

$$\frac{dT(t)}{dt} = AT(t) = T(t)A.$$

Demostración. Para la demostración ver [25], pág.3. □

DEFINICIÓN 2.4. *Un semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, donde $T \in B(X)$ es un semigrupo fuertemente continuo de operadores lineales y acotados si*

$$\lim_{t\to 0} T(t)u = u, \quad \text{para cada} \quad u \in X.$$

*Un semigrupo fuertemente continuo de operadores lineales y acotados sobre X será llamado **semigrupo de clase** $\mathfrak{C}_0$*

EJEMPLO 4. Como ejemplo de semigrupo de clase $\mathfrak{C}_0$ es

$$[T(t)u](x) := \int_{\mathbb{R}} \Phi(t, x-y)u(y)dy, \tag{2.7}$$

Donde, $X = \{u : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : u$ es acotado y uniformemente continua en $\mathbb{R}\}$, al cual si lo dotamos de la norma $L^\infty(\mathbb{R})$ es un espacio de Banach, $u \in X$, $\Phi(t,y) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t}\right)$ y $\int_{\mathbb{R}} \Phi(t,y) = 1$[1] . En efecto,

$$\begin{aligned}
|[T(t)u](x) - u(x)| &= \left|\int_{\mathbb{R}} \Phi(t,y)u(x-y)dy - \int_{\mathbb{R}} \Phi(t,y)u(x)dy\right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \Phi(t,y)|u(x-y) - u(x)|dy \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{-y^2}{4t}}|u(x-y) - u(x)|dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_C e^{-z^2}|u(x-2\sqrt{t}z) - u(x)|dz + \\
&+ \int_{\mathbb{R}-C} e^{-z^2}|u(x-2\sqrt{t}z) - u(x)|dz.
\end{aligned}$$

Ambas integrales convergen a 0 cuando $t \to 0$.

OBSERVACIÓN. Note que el ejemplo anterior nos dice que para asegurar que $T(t)$ sea un operador fuertemente continuo, es suficiente trabajar en espacios donde u sea uniformemente continua y acotado en $\mathbb{R}$.

TEOREMA 2.5. *Sea $\{T(t)\}_{t>0}$ un semigrupo de clase $\mathfrak{C}_0$. Existe $\varpi \geq 0$ una constante y $Q \geq 1$ tal que*

$$\|T(t)\| \leq Qe^{\varpi t}, \;\; t \geq 0.$$

Demostración. Para la demostración ver [25], pág.4. □

TEOREMA 2.6. *Sea $\{T(t)\}_{t>0}$ un semigrupo de clase $\mathfrak{C}_0$ sobre un espacio de Banach*

[1] Este hecho lo veremos en el siguiente capítulo

X. Si A es el generador infinitesimal de $T(t)$ entonces

$$T(t)u = \lim_{n\to\infty} \left(I - \frac{t}{n} A \right)^{-n} u.$$

y el límite es uniforme en t sobre algún intervalo acotado.

Demostración. Para ver la demostración ver [25], pág.6. □

2.2. Problema de Cauchy homogéneo sobre espacio de Banach

Sea X un espacio de Banach y sea $A : D(A) \subset X \to X$ un operador lineal. En está sección estudiaremos el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} &= Au(t), \quad t > 0 \\ u(0) &= u_0, \end{cases} \tag{2.8}$$

donde $u_0 \in X$ es dado.

DEFINICIÓN 2.5. *Una solución clásica de (2.8) es una función $u : [0, \infty[\to X$ tal que $u(t) \in D(A)$, para todo $t \geq 0$, $u \in C^1([0, \infty[, X)$ y se cumple (2.8).*

DEFINICIÓN 2.6. *Sea A un generador de un semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ de clase $\mathfrak{C}_0$ en X. Entonces la solución $mild$ de (2.8) está dado por*

$$u(t) = T(t)u_0,$$

donde $u_0 \in X$ es dado.

2.3. Problema de Cauchy no homogéneo sobre espacios de Banach

En esta sección consideramos el siguiente problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} &= Au(t) + h(t), \quad t > 0 \\ u(0) &= u_0, \end{cases} \tag{2.9}$$

donde $\tau > 0$ y $h : [0, \tau[\to X$ es una función dada. En toda esta sección A un generador infinitesimal de un semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ de clase $\mathfrak{C}_0$ y X un espacio de Banach.

DEFINICIÓN 2.7. *Una función* $u : [0,\tau[\to X$ *es una solución clásica de (2.9) sobre* $[0,\tau[$, *si* $u \in C([0,\tau[,X) \bigcap C^1(]0,\tau[,X)$, $u(t) \in D(A)$ *para* $0 < t < \tau$ *y se cumple (2.9) sobre* $[0,\tau[$.

OBSERVACIÓN. Note que en la definición de solución clásica decimos que $u \in C^1(]0,\tau[,X)$ y no la definimos en $C^1([0,\tau[,X)$, ya que no necesariamente el dato inicial es diferenciable y continuo en el punto 0.

DEFINICIÓN 2.8. *Sean* $u_0 \in X$ *y* $h \in L^1([0,\tau[,X)$ *dadas. La función* $u \in C([0,\tau],X)$ *dada por el principio de Duhamel*

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)h(s)ds, \qquad 0 \le t \le \tau,$$

será llamada solución mild *del problema (2.9) sobre* $[0,\tau]$.

OBSERVACIÓN. Note que si estamos interesados en imponer condiciones sobre h de manera que para $u_0 \in D(A)$, la solución *mild* llegue a ser clásica. Ya que la continuidad de h, en general, no es suficiente. Para ver este hecho notemos el siguiente problema.
Sea $x \in X$ tal que $T(t)x \notin D(A)$ para algún $t \ge 0$ y sea $h(s) := T(s)x$. Entonces $h(s)$ es continua para $s \ge 0$. Pero si consideremos el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} &= Au(t) + T(t)x, \quad t > 0 \\ u(0) &= 0, \end{cases} \tag{2.10}$$

no tiene solución clásica, a pesar que $u(0) = 0 \in D(A)$. En efecto, la solución *mild* de (2.10) es

$$u(t) = \int_0^t T(t-s)T(s)xds = tT(t)x,$$

pero $tT(t)x$ no es diferenciable para $t > 0$ y por tanto, no puede ser solución clásica de (2.10). Así que para asegurar existencia de soluciones clásicas de (2.9) tenemos que exigir más que solo continuidad de h.

COROLARIO 2.7. *Sea* A *un generador infinitesimal de un semigrupo* $\{T(t)\}_{t\ge0}$ *de clase* $\mathfrak{C}_0$. *Si* $h(s) \in C^1([0,\tau],X)$ *entonces el problema de valor inicial (2.9) tiene una solución* u *sobre* $[0,\tau[$ *para cada* $u_0 \in D(A)$.

Demostración. Ver demostración [25], págs. 107-108. □

2.4. Problema de Cauchy no lineal sobre espacios de Banach

En esta sección estudiaremos la solución *mild* para el siguiente problema no lineal. Dado un $\tau > 0$

$$\left\{\begin{array}{rcll} \frac{du}{dt} + Au & = & F(t,u), &]0,\tau[\\ u(0) & = & u_0, & \end{array}\right. \tag{2.11}$$

donde $-A$ es un generador infinitesimal de un semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ de clase $\mathfrak{C}_0$, sobre un espacio de Banach X, $u_0 \in X$ dada y $F : [0,\infty[\times X \to X$, $F = F(t,u)$ una función tal que

$$\begin{array}{l} F \in C^1([0,\infty[\times X, X) \ y \\ F(t,\cdot) \text{ es globalmente Lipschitz en X y uniformemente continua en } t \geq 0 \end{array} \tag{2.12}$$

DEFINICIÓN 2.9. *Llamaremos a $u \in C([0,\tau], X)$ una solución mild de (2.11) si*

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)F(s,u(s))ds. \tag{2.13}$$

para todo $t \in [0,\tau]$.

Vamos a resolver el problema (2.11) mediante iteraciones sucesivas. Específicamente, la solución de

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{du^n}{dt} + Au^n(t) & = & F(t,u^{n-1}(t)), \ t > 0 \\ u(0) & = & u_0, \end{array}\right.$$

está dada por

$$u^n(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)F(s,u^{n-1}(s))ds,$$

donde, $u^0(t) = T(t)u_0$. Queremos hacer $n \to +\infty$ y ver que $u^n(t)$ converge a una solución $u(t)$ del problema (2.11), para $0 \leq t < \tau$ (posiblemente $\tau = \infty$), como sucede con los problemas de valor inicial de ecuaciones diferenciales ordinarias.

TEOREMA 2.8 (Teorema de existencia local). *Sea X un espacio de Banach, $\Omega \subset X$ un abierto y $u_0 \in \Omega$. Sea $F : [0,\infty[\times\Omega \to X$ una función continua en t y satisface la siguiente condición Lipschitz: Para todo $\tau > 0$, exista una constante $K = K(\tau)$ tal que*

$$\|F(t,x) - F(t,y)\| \leq K\|x-y\|, \ 0 \leq t \leq \tau, x, y \in \Omega.$$

Entonces, para $\tau > 0$ suficientemente pequeño, existe una única solución mild *de (2.11) definida en $[0, \tau[$.*

Demostración. Sean $\tau > 0$, $Y = C([0, \tau], X)$, con norma $\|h\|_Y = \sup\limits_{0 \le t \le \tau} \|h(t)\|_X$ y E una vecindad cerrada de u_0 en Ω. Definamos N como

$$(Nu)(t) := T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)F(s, u(s))ds, \quad 0 \le t \le \tau.$$

$u \in M = \{v \in Y : v(0) = u_0,\ v([0, \tau]) \subset E\}$. Note que M es un espacio métrico completo, ya que E es cerrado y Y es un espacio de Banach. Ahora como $T(t)$ es un semigrupo fuertemente continuo, tenemos $\|T(t)\| \le Qe^{\varpi t}$ para algún ϖ, Q. Entonces

$$\begin{aligned}
\|Nu - Nv\|_Y &= \sup_{0 \le t \le \tau} \|Nu(t) - Nv(t)\| \\
&= \sup_{0 \le t \le \tau} \left\| \int_0^t T(t-s)(F(s, u(s)) - F(s, v(s))) \right\| \\
&\le Qe^{\varpi \tau} \int_0^\tau \|F(s, u(s)) - F(s, v(s))\| ds \\
&\le Qe^{\varpi \tau} K(\tau) \int_0^\tau \|u(s) - v(s)\| ds \\
&\le Qe^{\varpi \tau} K(\tau) \cdot \tau \|u - v\|_Y.
\end{aligned}$$

Y $Qe^{\varpi \tau} K(\tau) \cdot \tau \to 0$ cuando $\tau \to 0^+$. Demostramos que $N(M) \subset M$, para usar el teorema de punto fijo de Banach. Finalmente para demostrar que N es una aplicación sobre M, entonces

$$\|Nu - u_0\|_Y \le \sup_{0 \le t \le \tau} \|T(t)u_0 - u_0\| + \sup_{0 \le t \le \tau} \left\| \int_0^t T(t-s)F(s, u(s))ds \right\|.$$

Si definimos como

$$\begin{aligned}
J_1(\tau) &:= \sup_{0 \le t \le \tau} \|T(t)u_0 - u_0\|_X, \\
J_2(\tau) &:= \sup_{0 \le t \le \tau} \left\| \int_0^t T(t-s)F(s, u(s))ds \right\|.
\end{aligned}$$

Ya que $T(0) = I$ se tiene $J_1(\tau) \to 0$ cuando $\tau \to 0$, mientras que

$$\begin{aligned}
J_2(t) &\le \tau Qe^{\varpi \tau} \sup_{0 \le t \le \tau} \|F(t, u(t))\| \\
&= \tau Qe^{\varpi \tau} \sup_{0 \le t \le \tau} \|F(t, u(t)) - F(t, u_0(t)) + F(t, u_0(t))\|
\end{aligned}$$

$$\leq \tau Q e^{\varpi\tau}\left\{\sup_{0\leq t\leq\tau}\|F(t,u_0(t))\| + K(\tau)\sup_{0\leq t\leq\tau}\|u(t)-u_0(t)\|\right\}$$
$$\to 0,\ \ \tau\to 0^+$$

Es decir, que

$$\|(Nu)(t)-u_0\| \leq \|Nu-u_0\|_Y \to 0, \qquad \tau\to 0^+.$$

Por tanto, si tomamos $\tau > 0$ suficientemente pequeño, tenemos que $Nu(0) = u_0$ y $Nu([0,\tau]) \subset E$ con lo cual $N(M) \subset M$, es decir, que para un $\tau > 0$, $N : M \to M$ es una contracción en un espacio métrico completo, por tanto, podemos aplicar el teorema de punto fijo de Banach y así obtener que N tiene un único punto fijo $u \in M$ tal que

$$u(t) = (Nu)(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)F(s,u(s))ds,\ \ 0\leq t\leq\tau.$$

□

TEOREMA 2.9 (Teorema de existencia global)**.** *Sean $u_0 \in X$, $F : \mathbb{R}_+ \times X \to X$ tal que cumpla (2.12). Entonces (2.11) tiene una única solución* mild *sobre $\mathbb{R}_+$.*

Demostración. Como F satisface (2.12), sabemos que para todo $\tau > 0$ existe una constante K tal que

$$\|F(t,u)-F(t,v)\|_X \leq K\|u-v\|_X,$$

donde $u, v \in X$ y $0 \leq t \leq \tau$. Y como $T(t)$ es un semigrupo fuertemente continuo, tenemos que existen Q, ϖ tal que $\|T(t)\| \leq Qe^{\varpi t}$ (ver Teorema 4.5), definamos a $M := \sup_{0\leq s\leq t}\|T(s)\|$. Sea

$$u^n(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)F(s,u^{n-1}(s))ds.$$

Definiremos

$$N^n(u)(t) := u^n(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)F(s,N^{n-1}(u)(s))ds,\ \ \forall n = 1,2,...$$

donde, $u^0(t) = T(t)u_0$. Verificaremos que

$$\|N^n(u)(t) - N^n(v)(t)\| \leq \frac{[MK\tau]^n}{n!}\sup_{0\leq s\leq t}\|u(s)-v(s)\|, \tag{2.14}$$

para todo t tal que $0 < t < \tau$, $u, v \in C([0,t],X)$. Por inducción, para $n = 1$ se tiene la desigualdad, ya que

$$\begin{aligned}\|Nu - Nv\|_Y &= \sup_{0\leq s\leq t} \|Nu(s) - Nv(s)\| \\ &= \sup_{0\leq s\leq t} \left\| \int_0^s T(s-r)(F(r,u(r)) - F(r,v(r)))dr \right\| \\ &\leq M \int_0^s \|F(r,u(r)) - F(r,v(r))\| dr \\ &\leq MK \int_0^t \|u(r) - v(r)\| dr \\ &\leq MK \cdot t \|u-v\|_Y.\end{aligned}$$

Supongamos que (2.14) es verdad para $n = m$ y demostremos para $n = m+1$, entonces

$$\begin{aligned}\|N^{m+1}(u)(t) - N^{m+1}(v)(t)\| &= \left\| \int_0^t T(t-s)(F(s,N^m(u)(s)) - F(s,N^m(v)(s)))ds \right\| \\ &\leq \int_0^t \|T(t-s)\| \|F(s,N^m(u)(s)] - F(s,N^m(v)(s))\| ds \\ &\leq M \int_0^t K \frac{[MKs]^m}{m!} \sup_{0\leq r\leq s} \|u(r) - v(r)\| ds \\ &\leq [MK]^{m+1} \sup_{0\leq r\leq t} \|u(r) - v(r)\| \int_0^t s^m ds/m! \\ &= \frac{[MKt]^{m+1}}{(m+1)!} \sup_{0\leq r\leq t} \|u(r) - v(r)\|,\end{aligned}$$

entonces (2.14) se tiene para $n = m+1$, y no solo para este n si no también para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $\tau > 0$ arbitrario pero fijo. Si elegimos n tan grande tal que

$$\alpha = [MK\tau]^n / n! < 1.$$

Entonces por (2.14) se tiene

$$\|N^n u - N^n v\|_Y \leq \alpha \|u - v\|_Y,$$

para todo $u, v \in Y = C([0,\tau], X)$. Entonces $N : Y \to Y$ es una contracción y por teorema de punto fijo de Banach-Picard tiene un único punto fijo en Y, como Y es un espacio de Banach

$$u(t) = \lim_{n\to+\infty} N^n(u)(t),$$

y entonces el problema (2.11) tiene una única solución *mild* continua para $\tau > 0$. Ahora como $\tau > 0$ es cualquiera, dado un τ' tal que $0 < \tau < \tau'$, la solución *mild* en $]0, \tau'[$ debe coincidir en $]0, \tau[$ con la solución *mild* en este intervalo (por unicidad).

Además como F satisface (2.12), la solución *mild* de (2.11) se extiende únicamente para todo $t \in [0, \infty[$, es decir es global en el tiempo. □

TEOREMA 2.10 (Regularidad). *Sean X un espacio de Banach, $-A$ un generador infinitesimal de un $\mathfrak{C}_0$ semigrupo $T(t)$ sobre X. Si $F \in C^1([0,\tau] \times X, X)$ entonces la solución mild del problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} + Au(t) &= F(t, u(t)), \ \ t > 0 \\ u(0) &= u_0, \end{cases}$$

con $u_0 \in D(A)$ es una solución clásica del problema de valor inicial.

Demostración. Para la demostración ver [25], pág.187-189. □

Ahora, si tomamos $F(t,u)(x) := f(u(x))$, para que se cumpla (2.12), es necesitamos que f' sea uniformemente continua para que $u \in C_{u,b}(\mathbb{R}) \mapsto f(u) \in C_{u,b}(\mathbb{R})$ sea continuamente diferenciable. Así por las consideraciones previas podemos decir que existe una única solución *mild* de

$$\begin{cases} u_t + Au &= f(u) \quad \text{en } [0, \infty[\times \mathbb{R} \\ u(0, \cdot) &= u_0, \quad \text{en } \mathbb{R} \end{cases} \tag{2.15}$$

para un $u(0, \cdot) \in C_{u,b}(\mathbb{R})$ y $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ definido en (2.7). Recordemos que en el problema que estamos estudiando f es no lineal. Y para poder utilizar lo anteriormente dicho necesitaremos extender f fuera de $[0, 1]$ para asegurar que

$$f \in C^1(\mathbb{R}) \text{ es globalmente Lipshitz y } f' \text{ sea uniformemente continua en } \mathbb{R}. \tag{2.16}$$

2.5. Principio de comparación para soluciones *mild*

Antes de enunciar y demostrar el principio de comparación para solución *mild*. Empezaremos demostrando un teorema que nos ayudara con la demostración del principio de comparación.

TEOREMA 2.11. *Si $u_0 \in X$, u es solución mild de (2.11) y $a \in \mathbb{R}$ entonces*

$$\tilde{u}(t) = e^{at} u(t). \tag{2.17}$$

es solución mild de

$$\begin{cases} \tilde{u}_t + A\tilde{u} &= \tilde{F}(t,\tilde{u}) \text{ en }]0,\tau[\\ \tilde{u}(0) &= u_0, \end{cases} \tag{2.18}$$

Donde

$$\tilde{F}(t,\tilde{u}) := a\tilde{u} + e^{at}F(t, e^{-at}\tilde{u}).$$

Demostración. Comenzaremos demostrando que $\tilde{F}$ es lipschitziana en la segunda variable, en efecto,

$$\begin{aligned} |\tilde{F}(t,\tilde{u}) - \tilde{F}(t,\tilde{v})| &= |a\tilde{u} + e^{at}F(t,e^{-at}\tilde{u}) - a\tilde{v} - e^{at}F(t,e^{-at}\tilde{v})| \\ &\leq a|\tilde{u}-\tilde{v}| + e^{at}|F(t,e^{-at}\tilde{u}) - F(t,e^{-at}\tilde{v})| \\ &\leq a|\tilde{u}-\tilde{v}| + e^{at}Lip(F)|e^{-at}\tilde{u} - e^{-at}\tilde{v}| \\ &= a|\tilde{u}-\tilde{v}| + lip(F)|\tilde{u}-\tilde{v}| \\ &= (a + Lip(F))|\tilde{u}-\tilde{v}|. \end{aligned}$$

Para verificar que (2.17) es solución de (2.18) hacemos

$$h(s) := F(s, u(s)),$$

con lo cual

$$u(s) = T(s)u_0 + \int_0^s T(s-r)h(r)dr.$$

Por lo tanto, para $0 \leq s \leq t$, tenemos

$$T(t-s)u(s) = T(t)u_0 + \int_0^s T(t-r)h(r)dr.$$

Ahora, si multiplicamos por ae^{as}, integramos en s y usando el hecho que $\int_0^s T(s-r)h(r)dr$ es diferenciable en s, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_0^t ae^{as}T(t-s)u(s)ds &= \int_0^t ae^{as}T(t)u_0 ds + \int_0^t ae^{as}\int_0^s T(t-r)h(r)drds \\ &= \int_0^t ae^{as}T(t)u_0 ds + e^{at}\int_0^t T(t-r)h(r)dr - \int_0^t e^{as}T(t-s)h(s)ds \\ &= (e^{at}-1)T(t)u_0 + e^{at}\int_0^t T(t-r)h(r)dr - \int_0^t e^{as}T(t-s)h(s)ds \\ &= e^{at}u(t) - T(t)u_0 - \int_0^t e^{as}T(t-s)h(s)ds. \end{aligned}$$

Despejando $e^{at}u(t)$ de esa última expresión tenemos que

$$\tilde{u}(t) := e^{at}u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)[a\tilde{u}(s) + e^{as}h(s)]ds.$$

que era lo que queríamos demostrar. $\square$

TEOREMA 2.12 (Principio de comparación). *Sean u,v dos soluciones mild del problema no lineal (2.15), con $u_t + Au = g(u)$, $u_t + Au = f(u)$, donde g y f funciones que satisfacen (2.16) . Entonces, si*

$$f \leq g \text{ en } \mathbb{R} \text{ y } v(0,\cdot) \leq u(0,\cdot) \text{ entonces } v(t,\cdot) \leq u(t,\cdot) \text{ para todo } t \geq 0.$$

Demostración. Tomando $a := \max\{Lip(f), Lip(g)\}$ y definiendo

$$\tilde{F}(t,\tilde{u}) := a\tilde{u} + e^{at} f(e^{-at}\tilde{u}) \tag{2.19}$$
$$\tilde{G}(t,\tilde{u}) := a\tilde{u} + e^{at} g(e^{-at}\tilde{u}). \tag{2.20}$$

podemos asegurar que $\tilde{F}$ y $\tilde{G}$ son no decrecientes en el segundo argumento, en efecto, haremos el caso para $\tilde{F}$, para el caso $\tilde{G}$ es similar, sea $\tilde{v} < \tilde{u}$

$$\begin{aligned}
\tilde{F}(t,\tilde{v}) &= a\tilde{v} + e^{at} f(e^{-at}\tilde{v}) \\
&= a\tilde{v} + e^{at} f(e^{-at}\tilde{v}) - e^{at} f(e^{-at}\tilde{u}) + e^{at} f(e^{-at}\tilde{u}) \\
&\leq a\tilde{v} + e^{at}|f(e^{-at}\tilde{v}) - f(e^{-at}\tilde{u})| + e^{at} f(e^{-at}\tilde{u}) \\
&\leq a\tilde{v} + e^{at} + Lip(f)|\tilde{v} - \tilde{u}| + e^{at} f(e^{-at}\tilde{u}) \\
&\leq a\tilde{v} - Lip(f)(\tilde{v} - \tilde{u}) + e^{at} f(e^{-at}\tilde{u}) \\
&\leq a\tilde{v} - Lip(f)\tilde{v} + Lip(f)\tilde{u} + e^{at} f(e^{-at}\tilde{u}) \\
&\leq \tilde{F}(t,\tilde{u}).
\end{aligned}$$

Además, ya que $f(\cdot) \leq g(\cdot)$ tenemos que $\tilde{F}(t,\cdot) \leq \tilde{G}(t,\cdot)$. Ahora consideremos

$$\left\{\begin{array}{rcl} \tilde{u}_t + A\tilde{u} &=& \tilde{G}(t,\tilde{u}) \\ \tilde{u}(0,\cdot) &=& u_0, \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rcl} \tilde{v}_t + A\tilde{v} &=& \tilde{F}(t,\tilde{v}) \\ \tilde{v}(0,\cdot) &=& v_0. \end{array}\right. \tag{2.21}$$

donde $u_0 = u(0,\cdot)$ y $v_0 = v(0,\cdot)$ estos problemas tiene como solución *mild* $\tilde{u}(t,x) = e^{at}u(t,x)$ y $\tilde{v}(t,x) = e^{at}v(t,x)$ respectivamente. Entonces para tener el teorema, bastaría con demostrar que $\tilde{v}(t,\cdot) \leq \tilde{u}(t,\cdot)$. Definamos las aplicaciones

$$N^n(\tilde{v})(t,\cdot) := \tilde{v}^n(t,\cdot) = T(t)v_0(\cdot) + \int_0^t T(t-s)\tilde{F}(s,\tilde{v}^{n-1}(s,\cdot))ds,$$
$$M^n(\tilde{u})(t,\cdot) := \tilde{u}^n(t,\cdot) = T(t)u_0(\cdot) + \int_0^t T(t-s)\tilde{G}(s,\tilde{u}^{n-1}(s,\cdot))ds,$$

tomando $\tilde{v}^0 := T(t)v_0$, sabemos que

$$\tilde{v} = \lim_{n\to+\infty} (N)^n(v_0).$$

Así usando inducción y suponiendo que $N^n(\tilde{v}) \leq M^n(\tilde{u})$, como $T(t)$ preserva el orden y $\tilde{v}^0 := T(t)v_0$ entonces $\tilde{v}^0 \leq \tilde{u}^0$, tenemos

$$\begin{aligned}
N^{n+1}(v_0) &= T(t)v_0(\cdot) + \int_0^t T(t-s)\tilde{F}(s, N^n\tilde{v}))ds \\
&\leq T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)\tilde{F}(s, M^n(\tilde{u}))ds \\
&\leq T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)\tilde{G}(s, M^n(\tilde{u}))ds \\
&= M^{n+1}(u_0).
\end{aligned}$$

Por tanto

$$N^{n+1}(v_0) \leq M^{n+1}(u_0) \;\; \forall \; (t,x) \in [0, \infty[\times \mathbb{R}$$

con lo cual se obtendría lo deseado. $\square$

Capítulo 3

Ecuación de calor

En este capítulo empezaremos estudiando la existencia de soluciones fundamentales de la ecuación del calor para, basándonos en esta solución y en hipótesis sobre f y u_0, encontrar soluciones clásicas y *mild* del problema unidimensional

$$\begin{cases} u_t(t,x) - u_{xx}(t,x) &= f(t,x), \;]0,\infty[\times\mathbb{R} \\ u(0,x) &= u_0(x). \end{cases}$$

Daremos una fórmula de representación de la solución mediante la solución fundamental, todos los resultados de este capítulo fueron estudiados de [5], [7], [11], [12], [13], [19], [30].

Sea $u :]0,+\infty[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, una función de dos variables $u = u(t,x)$ en donde t representa el tiempo y x es una variable espacial de $\mathbb{R}$, la ecuación homogénea de calor está dada por

$$u_t(t,x) - u_{xx}(t,x) = 0. \tag{3.1}$$

Y la ecuación de calor no homogénea

$$u_t(t,x) - u_{xx}(t,x) = f(t,x). \tag{3.2}$$

3.1. Solución fundamental

Para determinar la solución fundamental de la ecuación de calor (3.1) estudiaremos la estructura de la ecuación de calor, se tendrá en cuenta las siguientes propiedades de la ecuación de calor.

- **Invarianza por traslación**: si $u(t,x)$ es una solución de la ecuación de calor (3.1) entonces, para todo $\rho \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ se tiene que $u(t+\alpha, x+\rho)$ también es solución de la ecuación de calor.

- **Invarianza por dilatación**: si $u(t,x)$ es una solución de la ecuación (3.1), para todo $\rho \in \mathbb{R}_+$ se tiene que $u_\rho(t,x) = u(\rho t, \rho^{1/2} x)$ también es solución.

Las propiedades de invarianza por traslación y invarianza por dilatación de la ecuación de calor, nos sugieren buscar soluciones auto-semejantes[1]. Es decir, soluciones que permanecen invariantes frente a cambios de escala.
La propiedad de invarianza por traslación nos sugiere que la ecuación de calor puede ser radial en la variable espacio, es decir, que la solución de la ecuación de calor (3.1) se puede escribir

$$u(t,x) = \varphi(t, \|x\|), \tag{3.3}$$

donde $\varphi :]0,+\infty[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función de dos variables y $\|\cdot\|$ es la norma en $\mathbb{R}$.
Por otro lado, si también tenemos en cuenta la propiedad de dilatación con $\rho = t^{-1}$ para $t > 0$, se tiene que, si $u(t,x)$ es solución de la ecuación (3.1) escrita como en (3.3), entonces la función $\varphi(1, \|x\|/t^{1/2})$ también es solución. Por lo tanto, deberíamos buscar soluciones de la forma $\eta(\|x\|/t^{1/2})$ donde $\eta :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ es una función de una variable.
Este tipo de razonamientos permite pasar de una ecuación en derivadas parciales a una ecuación en derivadas ordinarias.
Usando lo anteriormente dicho, queremos ver qué pasa si las soluciones de la ecuación tienen la siguiente estructura

$$u(t,x) = \frac{1}{t^\alpha} w\left(\frac{x}{t^\beta}\right), \tag{3.4}$$

donde las constantes α, β y la función $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deben ser determinadas tal que cumplan con la ecuación de calor homogénea (3.1).
Es decir, estableceremos condiciones en α, β y $w : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, tal que la ecuación de calor sea satisfecha.
Si hacemos $y = \dfrac{x}{t^\alpha}$ y derivamos $u(t,x)$ definida en (3.4) con respecto a x, obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} u(t,x) =& \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{w(y)}{t^\alpha}\right) = \frac{1}{t^\alpha}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}\right) = \frac{1}{t^\alpha}\frac{1}{t^\beta} w'(y) \\
\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t,x) =& \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{t^{\alpha+\beta}} w'(y)\right) = \frac{1}{t^\alpha}\frac{1}{t^{2\beta}} w''(y).
\end{aligned}$$

[1]Una solución de un problema de evolución particular es auto semejante si su configuración espacial (gráfica) permanece similar a sí misma en todo momento durante la evolución.

Ahora derivando con respecto al tiempo y usando regla de la cadena, se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) &= \tfrac{\partial}{\partial t}\left(\tfrac{1}{t^{\alpha}}w(y)\right) \\
&= \frac{-\alpha}{t^{\alpha+1}}w(y)+\frac{1}{t^{\alpha}}\frac{\partial}{\partial t}w(y) \\
&= -\frac{\alpha}{t^{\alpha+1}}w\,(y)-\frac{x\beta}{t^{\alpha+1}t^{\beta}}w'\,(y) \\
&= -\frac{\alpha}{t^{\alpha+1}}w(y)-\beta\frac{y}{t^{\alpha+1}}w'(y).
\end{aligned}$$

Reemplazando las derivadas con respecto a x y con respecto a t en la ecuación (3.1), se tiene

$$-\frac{\alpha}{t^{\alpha+1}}w(y)-\beta\frac{y}{t^{\alpha+1}}w'(y)-\frac{1}{t^{\alpha}}\frac{1}{t^{2\beta}}w''\,(y)=0. \tag{3.5}$$

Si se hace $\beta=\frac{1}{2}$, entonces los términos con t son iguales y por tanto.

$$\alpha w(y)+\frac{1}{2}yw'(y)+w''(y)=0.$$

Si $\alpha=\frac{1}{2}$ entonces la ecuación anterior queda

$$\frac{1}{2}w(y)+\frac{1}{2}yw'(y)+w''(y)=0,$$

la cual es equivalente a

$$\left(\frac{1}{2}yw\right)'+w''=0,$$

que integrando se tiene

$$\frac{1}{2}yw+w'=K.$$

Suponiendo que $\lim_{y\to\infty} w=\lim_{y\to\infty} w'=0$, con lo cual se puede fijar $K=0$

$$\frac{1}{2}yw+w'=0,$$

la cual tiene como solución, para alguna constante C

$$w(y)=Ce^{-\frac{y^2}{4}}.$$

De donde finalmente, volviendo a las variables originales, tenemos

$$u(t,x)=\frac{C}{t^{1/2}}e^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

Esté cálculo motiva a la siguiente definición

DEFINICIÓN 3.1. *La función*

$$\Phi(t,x) = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{1/2}} e^{-\frac{x^2}{4t}} & (x \in \mathbb{R}, t > 0) \\ 0 & (x \in \mathbb{R}, t < 0). \end{cases}$$

es llamada ***solución fundamental de la ecuación de calor o núcleo de Gauss****.*

OBSERVACIÓN. Hay que notar

1. Φ es singular en el punto (0,0).

2. Usando transformada de Fourier también obtendríamos la solución fundamental de la ecuación de calor.

3. La elección de la constante de normalización $(4\pi)^{-1/2}$ es determinado mediante el siguiente lema.

LEMA 3.1 (Integral de la solución fundamental)**.** *Para cada tiempo $t > 0$*

$$\int_{\mathbb{R}} \Phi(t,x)dx = 1.$$

Demostración. Calculamos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \Phi(t,x)dx &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(4\pi t)^{1/2}} e^{-\frac{x^2}{4t}} dx \\ &= \frac{1}{\pi^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-v^2} dv \end{aligned}$$

Si definimos como

$$I := \int_{\mathbb{R}} e^{-v^2} dv$$

Tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}} \Phi(t,x)dx = \frac{1}{\pi^{1/2}} I$$

Entonces necesitamos calcular el valor de I y para ello usamos

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(y^2+v^2)} dy dv \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr d\theta \\ &= \pi \int_0^{\infty} e^{-r} dr \\ &= \pi \lim_{a \to \infty} (-e^{-a} + 1) \\ &= \pi. \end{aligned}$$

Por tanto, $I = \sqrt{\pi}$, con lo cual obtenemos que

$$\int_{\mathbb{R}} \Phi(t,x)dx = 1.$$

$\square$

TEOREMA 3.2 (Propiedades de la solución fundamental)**.** *Los siguientes enunciados son propiedades que cumple la solución fundamental de la ecuación de calor:*

1. $\Phi_t - \Phi_{xx} = 0$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$ *y* $t > 0$.

2. $\Phi(t,x) > 0$, *para* $t > 0$.

3. *Para* $t > 0$ *fijo,* $\Phi(t,x)$ *y sus derivadas tienden a cero exponencialmente rápido, cuando* $|x| \to +\infty$.

4. *Para algún* $\delta > 0$, $\lim_{t \to 0^+} \Phi(t,x) = 0$ *uniformemente para todo* $|x| \geq \delta$.

5. $\Phi \in C^\infty(]0,\infty[\times\mathbb{R})$.

6. $\Phi(t,\cdot) * \Phi(s,\cdot) = \Phi(t+s,\cdot)$.

Demostración. Las propiedades 1 y 2 se tiene por definición de solución fundamental. Las propiedades 3 y 5 se sigue del hecho que, si derivamos Φ con respecto a t y a x se obtiene una función racional y continua, la cual llamaremos $Q^{n,m}(t,x)$, tal que $\Phi_{x^n t^m}(t,x) = Q^{n,m}(t,x)\Phi(t,x)$. Para la propiedad 4 notemos que, si $|x| \geq \delta$ se tiene

$$0 < \Phi(t,x) \leq \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left\{-\frac{\delta^2}{4t}\right\},$$

y debido a que $\exp(-z) \leq \frac{1}{1+z}$ para $z > 0$, tenemos

$$\begin{aligned}
\Phi(t,x) &\leq \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \frac{4t}{4t+\delta^2} \\
&\leq \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}(4t+\delta^2)} \to 0, \text{ cuando } t \to 0^+.
\end{aligned}$$

para la propiedad 6, haciendo operaciones algebraicas obtenemos,

$$\begin{aligned}
(\Phi(t,\cdot) * \Phi(s,\cdot))(x) &= \frac{1}{4\pi\sqrt{ts}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{4t}\right\} \exp\left\{-\frac{y^2}{4s}\right\} dy \\
&= \frac{1}{4\pi\sqrt{ts}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4t} + \frac{2xy}{4t} - \frac{y^2}{4t} - \frac{y^2}{4s}\right\} dy \\
&= \frac{1}{4\pi\sqrt{ts}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4t} + \frac{2xy}{4t} - \frac{y^2}{4}\left(\frac{t+s}{ts}\right)\right\} dy
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{t+s}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4t} + xy\sqrt{\frac{s}{t(t+s)}} - y^2\right\} \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{t+s}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4(t+s)} - \left(y - \frac{x}{4}\sqrt{\frac{s}{t(t+s)}}\right)^2\right\} dy \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi(t+s)}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4(t+s)}\right\} \\
&= \Phi(t+s,\cdot)(x)
\end{aligned}
$$

□

3.2. Problema de valor inicial

En esta sección usaremos la solución fundamental de la ecuación de calor Φ, descrita en la sección anterior, para describir una solución clásica del problema de valor inicial o Cauchy

$$
\begin{cases}
u_t(t,x) - u_{xx}(t,x) = 0 & \text{en} \quad]0,\infty[\times\mathbb{R} \\
u(t,x) = u_0(x) & \text{sobre} \quad \{t=0\}\times\mathbb{R}.
\end{cases}
$$

Notemos que la función $(t,x) \mapsto \Phi(t,x)$ resuelve la ecuación de calor lejos de la singularidad (0,0), y por la propiedad de invarianza por traslación, tenemos que $(t,x) \mapsto \Phi(t,x-y)$ para cada $y \in \mathbb{R}$ también resuelve la ecuación de calor homogénea.

Consecuentemente un candidato para ser una solución del problema de Cauchy es la función

$$
u(t,x) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(t,x-y)u_0(y)dy = \frac{1}{(4\pi t)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} u_0(y)dy. \tag{3.6}
$$

TEOREMA 3.3 (Solución del problema de valor inicial)**.** *Sea $u_0 \in C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, y definamos u como en (3.6). Entonces*

1. $u \in C^\infty(]0,\infty[\times\mathbb{R})$.
2. $u(t,x) - u_{xx}(t,x) = 0$.
3. $\displaystyle\lim_{(t,x)\to(0,x_0)} u(t,x) = u_0(x_0)$, $x \in \mathbb{R}, t > 0$.

Demostración. 1. Ya que la función Φ es infinitamente diferenciable, con derivadas de todo orden uniformemente acotadas (ver Teorema 3.2) sobre $[T,+\infty[\times\mathbb{R}$, para

$T > 0$, se tiene que $u \in C^\infty(]0,\infty[\times\mathbb{R})$.

2. Usando el hecho que Φ resuelve la ecuación de calor y que $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ tenemos

$$u_t(t,x) - u_{xx}(t,x) = \int_{\mathbb{R}} (\Phi_t - \Phi_{xx})(t,x-y)u_0(y)dy = 0 \qquad (x \in \mathbb{R}, t > 0).$$

3. Ahora como u_0 es continua, para todo $x_0 \in \mathbb{R}$ fijo, existe $\delta > 0$ tal que, si $|y - x_0| < \delta$ entonces $|u_0(y) - u_0(x_0)| < \epsilon$, para todo $y \in \mathbb{R}$.

Por tanto, si $|x - x_0| < \frac{\delta}{2}$ y $C = B(x_0, \delta)$

$$\begin{aligned}
|u(t,x) - u_0(x_0)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} \Phi(t,x-y)[u_0(y) - u_0(x_0)]dy \right| \\
&\leq \int_C \Phi(t,x-y)|u_0(y) - u_0(x_0)|dy \\
&+ \textstyle\int_{\mathbb{R}-C} \Phi(t,x-y)|u_0(y) - u_0(x_0)|dy.
\end{aligned}$$

Definiendo

$$\begin{aligned}
L &:= \int_C \Phi(t,x-y)|u_0(y) - u_0(x_0)|dy. \\
M &:= \int_{\mathbb{R}-C} \Phi(t,x-y)|u_0(y) - u_0(x_0)|dy.
\end{aligned}$$

Pues bien, como Φ es una función positiva, se tiene

$$L = \int_C \Phi(t,x-y)|u_0(y) - u_0(x_0)|dy \leq \epsilon \int_{\mathbb{R}} \Phi(t,x-y)dy = \epsilon.$$

Además, si $|x - x_0| \leq \dfrac{\delta}{2}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}-C} \Phi(t,x-y)|u_0(y) - u_0(x_0)|dy &\leq 2\|u_0\| \int_{\mathbb{R}-C} \Phi(t,x-y)dy \\
&\leq 2\|u_0\| \frac{1}{(4\pi t)^{1/2}} \int_{\{|y-x_0| \geq \delta\}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}dy \\
&= \frac{2\|u_0\|}{(4\pi t)^{1/2}} \int_{\{|z| \geq \delta\}} e^{-\frac{|z-(x-x_0)|^2}{4t}}dz.
\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
|z| &= |z - (x - x_0) + (x - x_0)| \\
&\leq |z - (x - x_0)| + |x - x_0| \\
&\leq |z - (x - x_0)| + \frac{\delta}{2}.
\end{aligned}$$

Ya que $\{|z| \geq \delta\}$ y por la desigualdad anterior obtenemos $|z| \leq |z - (x - x_0)| + \frac{|z|}{2}$, es decir, $\frac{|z|}{2} \leq |z - (x - x_0)|$, por el teorema de convergencia dominada y propiedades del núcleo, se tiene

$$\int_{\mathbb{R}-C} \Phi(t, x-y)|u_0(y) - u_0(x_0)|dy \leq \frac{2\|u_0\|}{(4\pi t)^{1/2}} \int_{\{|z|\geq\delta\}} e^{-\frac{|z|^2}{16t}} dz \to 0, \qquad t \to 0^+$$

Si $|x - x_0| < \frac{\delta}{2}$ y $t > 0$ es suficientemente pequeña, tenemos que

$$|u(t,x) - u_0(x_0)| < L + M < 2\epsilon.$$

con lo que terminaríamos la demostración. □

3.3. Problema no homogéneo

Ahora consideremos el problema de valor inicial no homogéneo, donde la función $f : [0, +\infty[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, es tal que

$$\begin{cases} u_t(t,x) - u_{xx}(t,x) &= f(t,x) \quad \text{en} \quad]0,\infty[\times\mathbb{R} \\ u(t,x) &= 0, \quad \text{sobre} \quad \{t=0\}\times\mathbb{R}. \end{cases} \tag{3.7}$$

Para calcular la solución del problema (3.7) se utiliza el famoso principio de Duhamel (ver [28]), que permite encontrar una solución a la ecuación de calor no homogénea partiendo del problema homogéneo

$$\begin{cases} w_t(s;\cdot) - w_{xx}(s;\cdot) &= 0 \quad \text{en} \quad]s,\infty[\times\mathbb{R} \\ w(s;s,x) &= f(s,x), \quad \text{sobre} \quad \mathbb{R}. \end{cases} \tag{3.8}$$

que tiene como instante inicial $t = s$ y como dato inicial $f(s,\cdot)$. Como se había visto en la sección anterior, la solución del problema de valor inicial (3.8) es la función

$$w(s;t,x) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(t-s, x-y) f(s,y) dy.$$

Esta expresión tiene sentido ya que, por propiedad de invarianza bajo traslaciones de la ecuación de calor y fijando un $y \in \mathbb{R}$ y $s > 0$, se tiene que $\Phi(t-s, x-y)$ es también solución de la ecuación de calor homogénea en $]s,\infty[\times\mathbb{R}$.
El principio de Duhamel (ver [28]) asegura que podemos construir una solución para el problema no homogéneo (3.7) a partir de una solución de (3.8), integrando con respecto a s en el intervalo $]0,t[$. Este hecho lo definiremos formalmente en las siguientes líneas.

TEOREMA 3.4. *Sea $T > 0$ fijo, $f : [0,T[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función a soporte compacto, tal que $f \in C_t^1 C_x^2([0,\infty[\times\mathbb{R})$.*

Si se define una función $u(t,x)$ por medio de la expresión

$$u(t,x) = \int_0^t w(s;t,y)ds, \tag{3.9}$$

para $x \in \mathbb{R}$ y $t > 0$, entonces se tiene que

1. $u \in C_t^1 C_x^2([0,\infty[\times\mathbb{R})$.
2. $u_t(t,x) - u_{xx}(t,x) = f(t,x)$, *para* $x \in \mathbb{R}$ *y* $t > 0$.
3. *Para todo punto* $x_0 \in \mathbb{R}$ *se tiene el límite,* $x \in \mathbb{R}, t > 0$*:*

$$\lim_{(t,x)\to(0,x_0)} u(t,x) = 0.$$

Demostración. Ya que Φ tiene una singularidad en el punto (0,0), no se puede justificar directamente la derivación bajo el signo de integral. Este hecho sugiere que hagamos un cambio de variable de la siguiente forma

$$u(t,x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \Phi(t-s,x-y)f(s,y)dyds = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \Phi(s,y)f(t-s,x-y)dyds.$$

Probaremos que $u_x, u_{xx} \in C([0,\infty[\times\mathbb{R})$, debido a que $f \in C_t^1 C_x^2([0,\infty[\times\mathbb{R})$ tiene soporte compacto y Φ es lisa cerca a $s = t$, podemos asegurar

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \Phi(s,y)f_x(t-s,x-y)dyds.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x}(t,x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \Phi(s,y)f_{xx}(t-s,x-y)dyds.$$

Por tanto $u(t,\cdot) \in C^2(\mathbb{R})$.
Antes de ver si u es regular en el tiempo, notemos que

$$F(s,x) =: \int_{\mathbb{R}} \Phi(s,y)f(t-s,x-y)dy.$$

satisface las hipótesis del teorema de derivación bajo el signo integral (ver preliminares). En efecto, ya que $f \in C_t^1 C_x^2([0,\infty[\times\mathbb{R})$ y tiene soporte compacto, se tiene que f_s es continuo y $\Phi(s,y)$ como $\Phi_s(s,y)$ son funciones integrables (por Lema 3.1 y propiedades de la solución fundamental), entonces podemos concluir que F_s es integrable y así, escribir

$$u_t(t,x) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(t,y)f(0,x-y)dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \Phi(s,y)f_t(t-s,x-y)dyds.$$

y de esta manera se tiene que $u \in C_t^1 C_x^2([0,\infty[\times\mathbb{R})$.

2. Para ver que u es solución de la ecuación de Cauchy, notemos que

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} = &\int_{\mathbb{R}} \Phi(t,y) f(0,x-y)dy + \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \Phi(s,y)[f_t(t-s,x-y) - f_{xx}(t-s,x-y)]dyds, \end{aligned}$$

para poder estudiar estas integrales, es necesario aislar la singularidad que se tiene en el punto (0,0), para ello, sea $0 < \epsilon < t$ y

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} = &\int_{\mathbb{R}} \Phi(t,y) f(0,x-y)dy + \\ &+ \int_\epsilon^t \int_{\mathbb{R}} \Phi(s,y)[f_t(t-s,x-y) - f_{xx}(t-s,x-y)]dyds + \\ &+ \int_0^\epsilon \int_{\mathbb{R}} \Phi(s,y)[f_t(t-s,x-y) - f_{xx}(t-s,x-y)]dyds \end{aligned}$$

Por otro lado, se tiene que $f_t(t-s,\cdot) = -f_s(t-s,\cdot)$ y $f_{xx}(\cdot,x-y) = f_{yy}(\cdot,x-y)$ por lo que

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} = &\int_{\mathbb{R}} \Phi(t,y) f(0,x-y)dy + \\ &+ \int_\epsilon^t \int_{\mathbb{R}} \Phi(s,y)[-f_s(t-s,x-y) - f_{yy}(t-s,x-y)]dyds + \\ &+ \int_0^\epsilon \int_{\mathbb{R}} \Phi(s,y)[-f_s(t-s,x-y) - f_{yy}(t-s,x-y)])dyds. \end{aligned}$$

Si definimos como

$$\begin{aligned} K &:= \int_{\mathbb{R}} \Phi(t,y) f(0,x-y)dy. \\ I_\epsilon &:= \int_\epsilon^t \int_{\mathbb{R}} \Phi(s,y)[-f_s(t-s,x-y) - f_{yy}(t-s,x-y)]dyds. \\ J_\epsilon &:= \int_0^\epsilon \int_{\mathbb{R}} \Phi(s,y)[-f_s(t-s,x-y) - f_{yy}(t-s,x-y)])dyds. \end{aligned}$$

Usando integración por partes y el teorema de Fubini, tenemos que

$$\begin{aligned} I_\epsilon = &\int_\epsilon^t \int_{\mathbb{R}} \Phi(s,y)[-f_s(t-s,x-y) - f_{yy}(t-s,x-y)]dyds \\ = &\int_\epsilon^t \int_{\mathbb{R}} [\Phi_s(s,y) - \Phi_{yy}(s,y)] f(t-s,x-y)dyds \\ + &\int_{\mathbb{R}} \Phi(\epsilon,y) f(t-\epsilon,x-y)dy \\ - &\int_{\mathbb{R}} \Phi(t,y) f(0,x-y)dy. \end{aligned}$$

ya que Φ es solución de la ecuación de calor lejos de (0,0), tenemos que

$$I_\epsilon = \int_{\mathbb{R}} \Phi(\epsilon, y) f(t-\epsilon, x-y) dy - \int_{\mathbb{R}} \Phi(t, y) f(0, x-y) dy.$$

Mientras que

$$\begin{aligned}
|J_\epsilon| &= \left| \int_0^\epsilon \int_{\mathbb{R}} \Phi(s,y)[-f_s(t-s,x-y) - f_{yy}(t-s,x-y)] dyds \right| \\
&\leq \left(\|f_t\|_{L^\infty(]0,T[,L^\infty(\mathbb{R}))} + \|f_{xx}\|_{L^\infty(]0,T[,L^\infty(\mathbb{R}))} \right) \int_0^\epsilon \int_{\mathbb{R}} \Phi(s,y) dyds \leq \epsilon C.
\end{aligned}$$

Usando el teorema de convergencia dominada, tenemos que

$$\begin{aligned}
u_t - u_{xx} &= \lim_{\epsilon \to 0} (K + I_\epsilon + J_\epsilon) \\
&= \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}} \Phi(\epsilon, y) f(t-\epsilon, x-y) dy \\
&= \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}} \Phi(\epsilon, y)[f(t-\epsilon, x-y) - f(t, x-y)] dy + \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}} \Phi(\epsilon, y) f(t, x-y) dy \\
&= \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}} \Phi(1, 2\sqrt{\epsilon} y) f(t, x - 2\sqrt{\epsilon} y) dy = f(t,x).
\end{aligned}$$

Finalmente se tiene que

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \Phi(t-s, x-y) f(s,y) dyds \right| &\leq \int_0^t \int_{\mathbb{R}} |\Phi(t-s,x-y) f(s,y)| dyds \\
&\leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \Phi(t-s, x-y) dyds \\
&= t\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}
\end{aligned}$$

con lo cual $\|u(t,\cdot)\|_{L^\infty} \to 0$, cuando $t \to 0$. □

Ahora, si combinamos los Teoremas 3.3 y 3.4, podemos encontrar una solución clásica para el problema de valor inicial no homogéneo (3.10) enunciado en el siguiente teorema.

Teorema 3.5. *Sean $T > 0$ fijo, $f : [0, T[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función a soporte compacto, tal que $f \in C_t^1 C_x^2([0, +\infty[\times\mathbb{R})$ y $u_0 \in C(\mathbb{R}) \bigcap L^{\infty}(\mathbb{R})$. Y si consideramos el problema*

$$\begin{cases} u_t(t,x) - u_{xx}(t,x) = f(t,x) & \text{en} \quad]0,\infty[\times\mathbb{R} \\ u(t,x) = u_0(x), & \text{sobre} \quad \{t=0\} \times \mathbb{R}. \end{cases} \tag{3.10}$$

Entonces la función $u(t,x)$ definida por

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(t, x-y) u_0(y) dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \Phi(t-s, x-y) f(s,y) dy ds.$$

para $(t,x) \in]0,\infty[\times\mathbb{R}$, es solución del problema (3.10).

Demostración. Como $u_0 \in C(\mathbb{R}) \bigcap L^{\infty}(\mathbb{R})$ entonces

$$u_1(t,x) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(t, x-y) u_0(y) dy,$$

es solución del problema de Cauchy homogéneo, mientras que

$$u_2(t,x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \Phi(t-s, x-y) f(s,y) dy ds,$$

es solución del problema de Cauchy no homogéneo, entonces $u = u_1 + u_2$ definido por

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(t, x-y) u_0(y) dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \Phi(t-s, x-y) f(s,y) dy ds,$$

es solución del problema (3.10). $\square$

3.4. Unicidad de las soluciones en dominios acotados

Hasta ahora hemos hablado de existencia de las soluciones de los diversos problemas dados, pero no hemos hablado de unicidad dichas soluciones, este es el propósito de la presente sección. Los resultados aquí presentados fueron tomados de [7] y [27].

A menos que se diga lo contrario tomaremos $U \subset \mathbb{R}$ un conjunto abierto y acotado y fijamos un tiempo $T > 0$.

Definición 3.2. *Definimos el cilindro parabólico*

$$U_T :=]0, T] \times U,$$

la frontera parabólica de U_T es

$$\Gamma_T := \overline{U}_T - U_T.$$

DEFINICIÓN 3.3. *Para $t, x \in \mathbb{R}$, $r > 0$ definimos*

$$E(t, x; r) := \left\{ (s, y) \in \mathbb{R}^2 \mid s \leq t,\ \Phi(t-s, x-y) \geq \frac{1}{r} \right\}.$$

TEOREMA 3.6. *Sea $u \in C_t^1 C_x^2(U_T)$ solución de la ecuación de calor. Entonces*

$$u(t,x) = \frac{1}{4r} \int \int_{E(t,x;r)} u(s,y) \frac{|x-y|^2}{(t-s)^2} dyds,$$

para cada $E(t, x; r) \subset U_T$.

Demostración. Para la demostración, ver [7]. pág. 53. □

OBSERVACIÓN. Note que este teorema nos dice que la solución de la ecuación de calor, es generada por la integral de la solución de la ecuación en tiempos anteriores.

TEOREMA 3.7 (Principio del máximo fuerte para la ecuación de calor)**.** *Sea $u \in C_t^1 C_x^2(U_T) \bigcap C(\overline{U}_T)$ una solución clásica de la ecuación de calor en U_T. Entonces*

1. $\max\limits_{\overline{U}_T} u = \max\limits_{\Gamma_T} u.$
2. *Si U es convexo y si existe un punto $(t_0, x_0) \in U_T$ tal que*

$$u(t_0, x_0) = \max_{\overline{U}_T} u.$$

Entonces u es constante en $\overline{U}_{t_0}$.

En las siguientes líneas citaremos la demostración realizada en [7].

Demostración. 1. Supongamos que existe $(t_0, x_0) \in U_T$ tal que

$$u(t_0, x_0) = M = \max_{\overline{U}_T} u,$$

entonces para todo $r > 0$ suficientemente pequeño, $E(t_0, x_0; r) \subset U_T$ de modo que podemos usar la fórmula de promedio para escribir

$$M = u(t_0, x_0) = \frac{1}{4r} \int \int_{E(t_0, x_0; r)} u(s,y) \frac{(x_0-y)^2}{(t_0-s)^2} dyds \leq M.$$

Puesto que se tiene la identidad

$$1 = \frac{1}{4r}\int\int_{E(t_0,x_0;r)} \frac{(x_0-y)^2}{(t_0-s)^2}dyds.$$

Dado que la igualdad se tiene únicamente si u es constante e igual a M en el interior del dominio $E(t_0,x_0;r)$ tenemos que

$$u(s,y) = M \text{ para todo } (s,y) \in E(t_0,x_0;r).$$

Ahora deseamos ampliar este resultado en todo el conjunto U_T y para ello: Si L es un segmento dentro de U_T que conecta (t_0,x_0) con algún otro punto $(s_0,y_0) \in U_T$ con $s_0 < t_0$. Podemos considerar el conjunto

$$r_0 := \text{mín}\{s \geq s_0 | u(t,x) = M \ \text{ para todo}(t,x) \in L,\ s \leq t \leq t_0\}.$$

Como la función u es continua el mínimo se alcanza y podemos suponer que $r_0 > s_0$. Entonces $u(r_0,z_0) = M$ para algún punto (r_0,z_0) sobre $L\bigcap U_T$ y por tanto se tiene que $u = M$ sobre $E(r_0,z_0;r)$ para todo $r > 0$ suficientemente pequeño. Pero como se tiene que $E(r_0,z_0;r)$ contiene al conjunto $L\bigcap\{r_0-\sigma \leq t \leq r_0\}$ para algún $\sigma > 0$ pequeño, obtenemos una contradicción. Por tanto $r_0 = s_0$ de manera que $u = M$ sobre todo el segmento L.

2. Dado que el conjunto es convexo U y en las líneas anteriores pudimos ver que para cada segmento L, se tiene que $u = M$ sobre todo L, podemos repetir el mismo análisis y extenderlo a todo U. □

Teorema 3.8. *Sea $u_0 \in C(\Gamma_T)$, $f \in C(U_T)$. Entonces existe una única solución $u \in C_t^1C_x^2(U_T)\bigcap C(\overline{U}_T)$ del problema de valor inicial*

$$\begin{cases} u_t(t,x) - u_{xx}(t,x) = & f(t,x) \quad \text{en } U_T \\ \qquad\qquad u(t,x) = & u_0(x), \quad \text{sobre } \Gamma_T. \end{cases} \tag{3.11}$$

Demostración. Supongamos que existen u y v dos soluciones del problema de valor inicial (3.11) podemos considerar la función $w = \pm(u-v)$, la cual satisface

$$\begin{cases} w_t - w_{xx} = & 0 \quad \text{en } U_T \\ \qquad\quad w = & 0 \quad \text{sobre } \Gamma_T, \end{cases}$$

es decir, es el mismo problema pero con datos iniciales idénticamente nulos y aplicando el principio del máximo para w, se obtiene que su máximo es nulo, $w = 0$. Con lo cual obtenemos la unicidad de la solución. □

3.5. Análisis de unicidad de soluciones en los reales

En lo siguiente extenderemos al problema de Cauchy para $U = \mathbb{R}$, pero al trabajar en dominios no acotados será necesario para garantizar unicidad, introducir un control sobre el comportamiento de las soluciones para $|x|$ grande. Analizaremos qué pasa en nuestro problema de valor inicial homogéneo.

$$\begin{cases} u_t(t,x) - u_{xx}(t,x) &= 0, \ (t,x) \in]0,T[\times\mathbb{R} \\ u(0,x) &= u_0(x), \ \{t=0\}\times\mathbb{R} \end{cases} \tag{3.12}$$

En la Sección 3.2 vimos que si $u_0 \in C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ entonces

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(t,x-y)u_0(y)dy,$$

es solución continua del problema de valor homogéneo, también en la sección anterior vimos que podemos asegurar que el problema tiene solución única pero en espacios acotados, y debido a que las soluciones son continuas, alcanzaban su máximo, por ende, no dimos tanta importancia a la convergencia o divergencia de la integral. Pero ahora al trabajar sobre todo $\mathbb{R}$ necesitamos asegurar que la integral converge o diverge. Para ello usaremos la desigualdad de Cauchy con ϵ

$$2ab \leq \frac{a^2}{\epsilon} + \epsilon b^2, \ \epsilon > 0.$$

tenemos que

$$\exp\left\{-\frac{(1+\epsilon^{-1})x^2}{4t}\right\}\exp\left\{-\frac{(1+\epsilon)y^2}{4t}\right\} \leq \\ \exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{4t}\right\} \leq \exp\left\{-\frac{(1-\epsilon^{-1})x^2}{4t}\right\}\exp\left\{-\frac{(1-\epsilon)y^2}{4t}\right\}. \tag{3.13}$$

Para que la notación no sea tan engorrosa y debido a que estamos integrando con respecto a y, definiremos

$$F_1(t,x) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\exp\left\{-\frac{(1+\epsilon^{-1})x^2}{4t}\right\}.$$
$$F_2(t,x) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\exp\left\{-\frac{(1-\epsilon^{-1})x^2}{4t}\right\}.$$

tenemos que

$$F_1(t,x)\exp\left\{-\frac{(1+\epsilon)y^2}{4t}\right\} \leq \Phi(t,x-y) \leq F_2(t,x)\exp\left\{-\frac{(1-\epsilon)y^2}{4t}\right\}. \tag{3.14}$$

Vamos a analizar varios casos, primero veremos que pasa cuando

$$u_0(x) = C\exp\{c|x|^{2+\alpha}\},$$

donde $\alpha > 0$ y C, c son constantes positivas, para este caso, por (3.14) tenemos

$$\Phi(t, x-y)u_0(y) \geq F_1 \cdot C\exp\{c|y|^{2+\alpha} - (4t)^{-1}(1+\epsilon)y^2\},$$

para un y es suficientemente grande y si se tiene que

$$C|y|^{\alpha} > (4t)^{-1}(1+\epsilon).$$

entonces

$$\int_{\mathbb{R}} \Phi(t, x-y)u_0(y)dy = \infty,$$

por tanto, para toda función u_0 que sea asintótica a $C\exp\{c|x|^{2+\alpha}\}$ en $|x| \to +\infty$ para $\alpha > 0$, se tiene que no existe solución.
Ahora para el caso

$$u_0(x) = C\exp\{cx^2\},$$

y de (3.14), tenemos que

$$u_0(y)\Phi(t, x-y) \leq C \cdot F_2 \exp\{[c - (4t)^{-1}(1-\epsilon)]y^2\}.$$

Si

$$c - (4t)^{-1}(1-\epsilon) < 0.$$

para $0 < \epsilon < 1$ y

$$0 < t < \frac{1-\epsilon}{4c},$$

se sigue que, para $0 < t < (1/4c)$

$$\int_{\mathbb{R}} \Phi(t, x-y)u_0(y)dy < \infty.$$

El siguiente ejemplo nos muestra lo importante de este hecho.

EJEMPLO 5. Consideremos el problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t(t,x) - u_{xx}(t,x) &= 0 \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(0,x) &= 0, \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Este problema no necesariamente tiene solución única, ya que existen soluciones sobre alguna línea $t =$ constante. Como por ejemplo,

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} g^{(k)}(t) \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

donde

$$g(t) = \begin{cases} \exp\{-t^{-2}\} & t > 0 \\ 0 & t = 0, \end{cases}$$

es solución del problema y $u = 0$ también es solución del problema de valor inicial dado, y esto ocurre ya que $u(t,x)$ excede a la tasa de crecimiento $C\exp\{cx^2\}$. Para ver más detalles de la demostración sobre la convergencia y derivación en este caso de u sugerimos revisar [27] y [13] pág. 211.

EJEMPLO 6. También tenemos que

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \int_0^\infty g(t\alpha^2, x\alpha) a(\alpha) d\alpha \\ g(t,x) &= e^x \cos(x+2t) + e^{-x}\cos(x-2t) \\ a(\alpha) &= e^{\alpha^{4/3}} \cos(\sqrt{3}y^{4/3}). \end{aligned}$$

Es solución de la ecuación (3.12), ya que es integración de una solución con respecto a un parámetro.

Es decir, que no bastaría con exigir continuidad en u y en sus derivadas para obtener unicidad en todo $\mathbb{R}$. Para ello tenemos el siguiente teorema.

TEOREMA 3.9 (Principio del máximo). *Sea $u \in C_t^1 C_x^2(]0,T] \times \mathbb{R}) \bigcap C([0,T] \times \mathbb{R})$ solución del problema*

$$\begin{cases} u_t(t,x) - u_{xx}(t,x) = & 0 \qquad \text{en }]0,T[\times \mathbb{R} \\ u(t,x) = & u_0(x), \quad \text{sobre } \{t=0\} \times \mathbb{R} \end{cases}$$

donde $u_0 \in C(\mathbb{R})$ y que verifica la condición de crecimiento

$$u(t,x) \leq Ce^{c|x|^2} \ (0 \leq t \leq T, x \in \mathbb{R}),$$

con $C, c > 0$ dos constantes. Entonces se tiene

$$\max_{[0,T]\times\mathbb{R}} u = \sup_{x \in \mathbb{R}} u_0.$$

Demostración. Supongamos que $4cT < 1$, una vez que se tiene esta mayoración, para algún $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño también se tiene

$$4c(T+\epsilon) < 1 \tag{3.15}$$

Fijando $y \in \mathbb{R}$, $\mu > 0$ y definamos una función $v :]0,T[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por medio de la expresión

$$v(t,x) := u(t,x) - \frac{\mu}{(T+\epsilon-t)^{1/2}} e^{\frac{(x-y)^2}{4(T+\epsilon-t)}}.$$

Derivando v una vez con respecto a t y dos veces con respecto a x, tenemos que

$$v_t - v_{xx} = 0, \text{ sobre }]0,T] \times \mathbb{R}.$$

Sean $r > 0$, $U := B(y,r)$ y $U_T =]0,T] \times B(y,r)$, entonces aplicando los teoremas anteriores del principio de máximo sobre dominios acotados, tenemos

$$\max_{\overline{U}_T} v = \max_{\Gamma_T} v.$$

Ahora si $(t,x) \in \{t = 0\} \times \mathbb{R}$ y usando el hecho (3.15) tenemos

$$\frac{\mu}{(T+\epsilon)^{1/2}} e^{\frac{(x-y)^2}{4(T+\epsilon)}} \geq 0,$$

y con lo cual

$$v(0,x) = u(0,x) - \frac{\mu}{(T+\epsilon)^{1/2}} e^{\frac{(x-y)^2}{4(T+\epsilon)}} \leq u(0,x) = u_0(x).$$

si $|x-y| = r$ y $0 \leq t \leq T$, entonces

$$\begin{aligned} v(t,x) &= u(t,x) - \frac{\mu}{(T+\epsilon-t)^{1/2}} e^{\frac{r^2}{4(T+\epsilon-t)}} \\ &\leq Ce^{cx^2} - \frac{\mu}{(T+\epsilon-t)^{1/2}} e^{\frac{r^2}{4(T+\epsilon-t)}} \\ &\leq Ce^{c(|y|+r)^2} - \frac{\mu}{(T+\epsilon)^{1/2}} e^{\frac{r^2}{4(T+\epsilon)}}, \end{aligned}$$

pero, como se tiene que $\frac{1}{4(T+\epsilon)} = c + \gamma$ con $\gamma > 0$, podemos escribir

$$v(t,x) \leq Ce^{c(|y|+r)^2} - \mu(4(c+\gamma))^{1/2} e^{(c+\gamma)r^2} \leq \sup_{\mathbb{R}} u_0,$$

si $r > 0$ es suficientemente grande. De esta manera para todo $y \in \mathbb{R}$ y $0 \leq t \leq T$ hemos demostrado que

$$v(t,y) \leq \sup_{\mathbb{R}} u_0.$$

Para u es suficiente hacer $\mu \to 0$. Finalmente para relajar la hipótesis que $4cT < 1$, podemos proceder por segmentos más pequeños, es decir $[0, T_1]$ y luego $[T_1, 2T_1]$ con T_1 un tiempo que verifica esta estimación. $\square$

Podemos modificar el teorema anterior de tal forma que si garantizamos que la soluciones sean no negativas entonces tendremos unicidad, como lo mencionamos y demostramos en el siguiente teorema.

TEOREMA 3.10. *Sean* $u_0 \in C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ *y* $u(t,x) \in C_t^1 C_x^2(]0,T[\times\mathbb{R}) \cap C([0,T] \times \mathbb{R})$*, entonces existe una única solución* u *del problema de valor inicial*

$$\begin{cases} u_t(t,x) - u_{xx}(t,x) = & 0 \qquad \textit{en }]0,T[\times\mathbb{R} \\ u(0,x) = & u_0(x) \quad \textit{sobre } \mathbb{R} \\ u(t,x) \geq & 0 \qquad \textit{en }]0,T[\times\mathbb{R}, \end{cases}$$

y está representada por

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(t, x-y) u_0(y) dy.$$

Demostración. Para $a > 1$ definimos una función de corte G^a tal que

$$G^a(x) := \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |x| \leq a-1 \\ a - |x| & \text{si} \quad a-1 < |x| \leq a \\ 0 & \text{si} \quad |x| \geq a \end{cases}$$

Y consideremos la expresión

$$v^a(t,x) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(t, x-y) G^a(y) u_0(y) dy.$$

Ya que u_0, G^a son continuas y $G^a u_0$ es a soporte compacto, sabemos que $v^a(t,x) \in C([0,T] \times \mathbb{R})$ y satisface

$$\begin{cases} v_t^a(t,x) - v_{xx}^a(t,x) = & 0 \qquad\qquad\quad \text{en }]0,T[\times\mathbb{R} \\ v^a(t,x) = & G^a(x) u_0(x) \quad \text{sobre } \{t=0\} \times \mathbb{R} \end{cases}$$

Denotemos por

$$M := \max_{|x| \leq a} u_0(x)$$

Ya que G^a y u_0 son no negativas, $G^a \leq 1$ y $|x| \exp(-x^2) \leq 1$, tenemos que para

$|x| > a$

$$
\begin{aligned}
0 \leq v^a(t,x) &= \int_{\mathbb{R}} \Phi(t,x-y)G^a(y)u_0(y)dy \\
&= \int_{|y|\leq a-1} \Phi(t,x-y)u_0(y)dy + \int_{a-1<|y|\leq a} \Phi(t,x-y)(a-|y|)u_0(y)dy \\
&\leq \int_{|y|\leq a-1} \Phi(t,x-y)u_0(y)dy + \int_{a-1<|y|\leq a} \Phi(t,x-y)u_0(y)dy \\
&\leq \int_{|y|\leq a} \Phi(t,x-y)u_0(y)dy \\
&\leq M\int_{|y|\leq a} \Phi(t,x-y)dy \\
&\leq \frac{M}{\sqrt{\pi}}\int_{|y|\leq a} \frac{1}{|x-y|}dy \\
&\leq \frac{2aM}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{|x|-a}.
\end{aligned}
$$

Sea $\epsilon > 0$ y

$$\rho > a + \frac{2Ma}{\epsilon\sqrt{\pi}},$$

entonces

$$
\begin{aligned}
v^a(t,x) < \epsilon \leq \epsilon + u(t,x),\ \text{para } |x| = \rho,\ 0 < t < T \\
v^a(0,x) \leq u_0(x) \leq \epsilon + u(0,x),\ \text{para } |x| \leq \rho,\ 0 < t < T.
\end{aligned}
$$

Por el principio del máximo en dominios acotados tenemos que

$$v^a(t,x) \leq \epsilon + u(t,x) \text{ para } |x| < \rho,\ 0 \leq t < T.$$

Haciendo $\rho \to +\infty$, encontramos la misma desigualdad para todo $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq t < T$. Como ϵ es arbitrario, si $\epsilon \to 0$ tenemos

$$v^a(t,x) \leq u(t,x) \text{ para } x \in \mathbb{R},\ 0 \leq t < T.$$

Ya que G^a es una función acotada y no decreciente en a tenemos que

$$v(t,x) = \lim_{a\to\infty} v^a(t,x) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(t,x-y)u_0(y)dy,$$

existe para $x \in \mathbb{R}$ y $0 < t < T$ y

$$v(t,x) \leq u(t,x).$$

Finalmente de la desigualdad

$$v^a(t,x) \leq v(t,x) \leq u(t,x),$$

y los valores de $v^a(0,x)$ y $u(0,x)$ tenemos que $v(0,x) = u_0(x)$. Ahora, si definimos la función $w := u - v$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y $0 < t < T$, la cual es continua por resta de funciones continuas. Además,

$$\begin{cases} w_t(t,x) - w_{xx}(t,x) = & 0 \quad \text{en }]0,T[\times\mathbb{R} \\ w(t,x) = & 0 \quad \text{sobre } \{t=0\} \times \mathbb{R} \\ w(t,x) \geq & 0, \quad \text{en }]0,T[\times\mathbb{R}. \end{cases}$$

Solo quedaría demostrar que $w \equiv 0$ (es decir, hemos reducido el teorema al caso donde $f = 0$). Definamos

$$W(t,x) := \int_0^t w(s,x)ds.$$

Ver apéndice para mas detalle de por qué tomamos así esta función. Ya que $w(t,x) \geq 0$ tenemos que $W(t,x)$ es creciente como una función de t. Para comenzar sabemos que $W(t,x)$ y $W_t(t,x) = w(t,x)$ son no negativas y continuas para $x \in \mathbb{R}$ y $0 \leq t < T$ y $W(0,x) = 0$. Y

$$W_{xx}(t,x) = w(t,x) = W_t(t,x).$$

Ya que $W_{xx} = w \geq 0$, sabemos que W es una función convexa con respecto a x y por tanto

$$\begin{aligned} W(t,x) &= W\left(t, \frac{x-H}{2} + \frac{x+H}{2}\right) \\ &\leq \frac{1}{2}W(t,x-H) + \frac{1}{2}W(t,x+H), \end{aligned}$$

es decir,

$$2W(t,x) \leq W(t,x-H) + W(t,x+H). \tag{3.16}$$

Si integramos (3.16) con respecto a H de 0 a x, para $x > 0$ tenemos

$$2xW(t,x) \leq \int_0^{2x} W(t,y)dy. \tag{3.17}$$

Por otro lado, sea $0 \leq s < t < T$, con lo cual $W(s+t,x)$ es una solución no negativa de la ecuación de calor con datos iniciales $W(s,x)$

$$W(t,x) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(t-s,x-y)W(s,y)dy.$$

$$
\begin{aligned}
W(t,0) &\geq \int_{\mathbb{R}} \Phi(t-s,y)W(s,y)dy \geq \int_0^{2x} \Phi(t-s,y)W(y,x)dy \\
&\geq \frac{\exp(-x^2/(t-s))}{\sqrt{4\pi(t-s)}} \int_0^{2x} W(s,y)dy.
\end{aligned}
$$

Combinando esta desigualdad con (3.17) tenemos

$$
W(t,0) \geq \frac{\exp(-x^2/(t-s))}{\sqrt{4\pi(t-s)}} 2xW(s,x).
$$

con lo cual

$$
W(s,x) \leq \sqrt{\frac{\pi(t-s)}{x^2}} \exp(x^2/(t-s))W(t,0).
$$

Si tomamos un δ tal que $0 < \delta < T/2$ y $W(s,x)$ para $x \in \mathbb{R}, 0 \leq s \leq T-2\delta$ y usando el hecho que W es creciente con respecto a t, tendríamos que

$$
W(s,x) \leq W(T-2\delta,x) \leq \sqrt{\frac{\pi T}{x^2}} \exp(2x^2/T)W(T,0).
$$

Por tanto, W es acotado para $|x| < \sqrt{\pi T}$, mientras que si $t = T-\delta$ y $|x| > \sqrt{\pi T}$

$$
W(s,x) \leq e^{x^2/\delta} W(T-\delta,0).
$$

Es decir, W satisface las hipótesis del teorema de unicidad y con lo cual tendríamos que $W(s,x) = 0$, para $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq s \leq T-2\delta$ y por lo tanto también para $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq s \leq T$, ya que δ es arbitrario. Así

$$
u(t,x) = v(t,x).
$$

$\square$

TEOREMA 3.11. *Sea $u_0 \in C(\mathbb{R})$ y $f \in C([0,T] \times \mathbb{R})$ entonces existe una única solución $u \in C_t^1C_x^2(]0,T[\times\mathbb{R}) \bigcap C([0,T] \times \mathbb{R})$ del problema de valor inicial*

$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
u_t - u_{xx} &=& f \text{ en }]0,T[\times\mathbb{R} \\
u &=& u_0, \text{ sobre } \{t=0\} \times \mathbb{R}.
\end{array}
\right.
$$

y satisface la estima de crecimiento

$$
|u(t,x)| \leq A \exp\{a|x|^2\} \ (x \in \mathbb{R}, 0 \leq t \leq T).
$$

para constantes $A, a > 0$.

Demostración. Para la demostración ver [7]. $\square$

3.6. Problema no homogéneo no lineal

En esta sección veremos unicidad y existencia de las soluciones *mild* del problema no lineal no homogéneo

$$\begin{cases} u_t(t,x) - u_{xx}(t,x) = & f(u(t,x)) \quad \text{en }]0,+\infty[\times\mathbb{R} \\ u(t,x) = & u_0(x) \quad \text{sobre } \{t=0\}\times\mathbb{R}, \end{cases} \tag{3.18}$$

donde $u_0 : \mathbb{R} \to [0,1]$ es una función acotada y uniformemente continua, y $f \in C^1([0,1])$.
Para esto consideremos el espacio de Banach

$$X = C_{u,b}(\mathbb{R}) := \{u : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : u \text{ es acotada y uniformemente continua en } \mathbb{R}\},$$

dotado de la norma de $L^\infty(\mathbb{R})$. Note que X es un espacio de Banach. Si definimos la familia de operadores $\{T(t)\}_{t>0}$ dado por

$$[T(t)u](x) := \int_{\mathbb{R}} \Phi(t,x-y)u(y)dy,$$

para $u \in X$. Esta familia de operados verifica

1. Para cada $t > 0$, $T(t)X \subset X$.
2. Para cada $t > 0$, el operador $T(t)$ es lineal y continuo con $\|T(t)\| \leq 1$.
3. Para todo $t, s > 0$, $T(t+s) = T(t)T(s)$.
4. $\lim_{t\to 0^+} \|T(t)u - u\|_X = 0$.

Es decir, la familia de operadores es un semigrupo fuertemente continuo. Veremos que la solución de (3.18) se obtiene al iterar la siguiente expresión.

$$u^{n+1}(t,x) := \int_{\mathbb{R}} \Phi(t,x-y)u_0(y)dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \Phi(s-t,x-y)f(u^n(s,y))dyds,$$

donde Φ es el núcleo de calor y $u^0(t,x) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(t,x-y)u_0(y)dy$.
Empezamos demostrando la existencia y unicidad de una solución del problema (3.18). Note que si $u_0(x) = g(x)$ es uniformemente continua y acotada, entonces la solución de

$$\begin{cases} u_t(t,x) - u_{xx}(t,x) = & 0 \quad \text{en }]0,T[\times\mathbb{R} \\ u(t,x) = & g(x) \quad \text{sobre } \{t=0\}\times\mathbb{R}, \end{cases}$$

esta dada por

$$u^0(t,x) := \int_{\mathbb{R}} \Phi(t, x-y)g(y)dy.$$

Si reemplazamos $u^0(t,x)$ en el lado derecho de la ecuación (3.18) y usamos el principio de Duhamel tenemos que

$$\hat{u}^1(t,x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \Phi(t-s, x-y) f(u^0(s,y))dyds,$$

es solución de

$$\begin{cases} u_t(t,x) - u_{xx}(t,x) = & f(u^0(t,x)) \quad \text{en }]0,T] \times \mathbb{R} \\ u(t,x) = & 0, \qquad\qquad\quad \text{sobre } \{t=0\} \times \mathbb{R}. \end{cases}$$

Entonces como la suma de soluciones es una solución tenemos que

$$u^1(t,x) = u^0(t,x) + \hat{u}^1(t,x),$$

en solución

$$\begin{cases} u_t^1(t,x) - u_{xx}^1(t,x) = & f(u^0(t,x)) \quad \text{en }]0,T] \times \mathbb{R} \\ u^1(t,x) = & g(x), \qquad\quad \text{sobre } \{t=0\} \times \mathbb{R}. \end{cases}$$

En general para cada $i \in \mathbb{N}$, podemos demostrar que la función

$$u^{i+1}(t,x) = u^0(t,x) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \Phi(t-s, x-y) f(u^i(s,y))dyds,$$

es solución

$$\begin{cases} u_t^{i+1}(t,x) - u_{xx}^{i+1}(t,x) = & f(u^i(t,x)) \quad \text{en }]0,T] \times \mathbb{R} \\ u^{i+1}(t,x) = & g(x), \qquad\quad \text{sobre } \{t=0\} \times \mathbb{R}. \end{cases}$$

Para esto comencemos considerando el siguiente problema: Sea $T > 0$, $u_0 \in X$ y $h \in C([0,T], X)$, por facilidad escribiremos $A = (-\Delta)$, donde $\Delta u = u_{xx}$. Así el problema

$$\begin{aligned} u_t + Au &= h(t), \ \forall t \in]0,T[\\ u(0) &= u_0, \end{aligned}$$

como habíamos visto en el capitulo de soluciones *mild* tiene una única solución *mild* que está explícitamente determinada por el Principio de Duhamel

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)h(s)ds,$$

para todo $t \in [0,T]$. Y gracias a la regularidad de u_0 y h se deduce que $u \in C([0,T], X)$. Mientras que para probar la existencia de soluciones consideremos el siguiente problema de Cauchy abstracto. Sea $F : X \to X$ una función globalmente Lipschitz. En nuestro caso, $F(u)(x) := f(u(x))$ para $u \in X$. Así, para $T > 0$ arbitrario y fijo, estaríamos interesados en el problema no lineal

$$\begin{aligned} u_t + Au &= F(u), \ \forall t \in]0, T[\\ u(0) &= u_0. \end{aligned} \tag{3.19}$$

El cual vimos en el capítulo de soluciones *mild*, que si $u \in C([0, T], X)$ es tal que

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)F(u(s))ds,$$

entonces es solución *mild* de (3.19) en [0,T].
Ahora usaremos teorema de punto fijo de Banach, para demostrar que existe una única solución. Para ello definimos la aplicación $N : C([0, T]; X) \to C([0, T]; X)$ como

$$N(u(t)) := \int_{\mathbb{R}} \Phi(t, x-y)u_0(y)dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \Phi(t-s, x-y)F(u(s))dyds.$$

Afirmamos que N es Lipschitz en $C([0, T]; X)$, en efecto sea, $u, v \in C([0, T]; X)$, tenemos que

$$\begin{aligned} \|N(u(t)) - N(v(t))\|_X \leq & \int_0^\infty \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \Phi(t-s, x-y)\|F(u(s)) - F(v(s))\|_X dyds \\ & \int_0^t (Lip(F))\|u(s) - v(y)\|_X ds \\ & \leq t(Lip(F))\|u(s) - v(s)\|_(C([0, T]), X), \end{aligned}$$

donde $LipF$ es la constante de Lipschitz de G, que no depende del tiempo. Tomando el supremo en [0,T] en ambos lados de la desigualdad de arriba, tenemos que

$$\|N(u(t)) - N(v(t))\|_{C([0,T],X)} \leq T(Lip(F))\|u(y) - v(y)\|_{C([0,T]),X}.$$

Con lo cual hemos demostrado que N es Lipschitz con constante $TLip(F)$. Ahora por inducción tenemos que $(N)^k$ es Lipschitz en $C([0, T], X)$ con constante de Lipschitz

$$\frac{(T * Lip(F))^k}{k!}.$$

Esta constante es menor que 1 para un k suficientemente grande.Por tanto haciendo uso del teorema de punto fijo de Banach-Picard podemos concluir que N tiene un único punto fijo. Además

$$u(t) = \lim_{n \to +\infty} N^n(u(t)).$$

Ahora dado $0 < T < T'$, por unicidad , la solución *mild* en $]0, T'[$ debe coincidir en $]0, T[$ con la solución *mild* en ese intervalo y como F es globalmente Lipschitz. Así, la solución es global en el tiempo.

3.7. Principio de comparación

TEOREMA 3.12. *Sean $u, v \in C([0, T], C_{u,b}(\mathbb{R}))$ soluciones de*

$$u_t - u_{xx} = h(u), \;\; v_t - v_{xx} = g(v).$$

con $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones localmente Lipschitz. Si

$$h(\nu) \leq g(\nu), \;\nu \in \mathbb{R}.$$

y

$$u(0, x) \leq v(0, x), \;x \in \mathbb{R}.$$

Entonces

$$u(t, x) \leq v(t, x), \;\forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}.$$

Demostración. Se tiene por consideraciones de soluciones mild. □

Capítulo 4

Comportamiento asintótico

Una vez obtenido la existencia y unicidad de la ecuación de reacción y difusión estudiada en capítulos anteriores, nos proponemos estudiar el comportamiento de los conjuntos de nivel de soluciones *mild* en tiempos grandes. De nuestro problema

$$\begin{cases} u_t(t,x) - u_{xx}(t,x) & = & f(u(t,x)) \quad \text{en} \quad (0,\infty) \times \mathbb{R} \\ u(t,x) & = & u_0(x), \quad \text{sobre} \quad \{t=0\} \times \mathbb{R}. \end{cases} \tag{4.1}$$

donde f y u_0 satisfacen:
1. La función f es no lineal en la ecuación (4.1) y es del tipo Fisher KPP, es decir: $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ es de clase C^1 y satisface

$$f(0) = f(1) = 0, \quad 0 \leq f(s) \leq f'(0)s \ \forall s \in]0,1[, \tag{4.2}$$

la propiedad (4.2) significa que $f(w)$ es maximal en $w = 0$.
Más aún, podemos suponer que existen $\delta > 0$, $r_0 \in]0,1[$ y $M > 0$, tal que

$$f(r) \geq f'(0)r - Mr^{1+\delta}, \ \ \forall r \in [0, r_0].$$

2. La condición inicial $u_0 : \mathbb{R} \to [0,1]$ es uniformemente continua y satisface

$$u_0 > 0 \ \text{ en } \ \mathbb{R}, \ \liminf_{x \to -\infty} u_0(x) > 0 \ \ y \ \ \lim_{x \to \infty} u_0(x) = 0. \tag{4.3}$$

Además, suponemos que la función u_0 decae más lentamente que cualquier función exponencial cuando $x \to +\infty$, en el sentido que

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists x_\epsilon \in \mathbb{R}, \ \ u_0(x) \geq e^{-\epsilon x} \text{ para todo } x \in [x_\epsilon, \infty[. \tag{4.4}$$

o equivalentemente $u_0(x)e^{\epsilon x} \to \infty$ cuando $x \to \infty$. A este tipo de hipótesis (4.4) se la conoce como condiciones iniciales exponencialmente no acotadas y se verá qué pasa cuando se tiene este tipo de condiciones.

OBSERVACIÓN. Ya que u_0 satisface (4.3) y usando principio de comparación, tenemos que

$$0 < u(t,x) \leq 1, \quad \text{para todo } t > 0 \text{ y } x \in \mathbb{R}.$$

4.1. Soluciones tipo ondas viajeras

Cuando estudiamos ecuaciones diferenciales parciales es favorable buscar soluciones u, las cuales reflejen la simetría en la estructura de la ecuación diferencial parcial, en esta sección veremos las condiciones en las cuales la solución de la ecuación de reacción difusión que estamos estudiando, tiene la forma $u(t,x) = q(x - \sigma t)$, donde q y σ son desconocidas.

Como vimos en el capítulo anterior, la existencia de soluciones de la ecuación de reacción- difusión dependen de f y u_0, en esta sección usaremos los resultados demostrados en trabajos como [2], [3], [15], [21], los cuales nos muestren qué condiciones debemos exigir sobre f y u_0 para que las soluciones converjan a una solución en forma de onda viajera (en inglés *travelling wave*), ayudándonos así a analizar el comportamiento asintótico de nuestra ecuación diferencial parcial. Esto es debido a que si existen soluciones en forma de onda viajera son soluciones especiales de la ecuación estudiada, que no cambian de forma y que se propaga con velocidad finita. Y generalmente describen el proceso de transición de un estado de equilibrio a otro. En el caso lineal de una ecuación diferencial parcial, suele ser arbitrario y rara vez tiene un significado especial,es decir, no aporta mucho en el estudio, mientras que para ecuaciones diferenciales no lineales determinan una clase restringida de soluciones que a menudo juegan un papel importante en problemas de valor inicial cuando $t \to +\infty$, como lo veremos en las siguientes secciones.
De manera formal, para el caso que estamos estudiando.

DEFINICIÓN 4.1. *Diremos que la ecuación*

$$u_t = u_{xx} + f(u),$$

admite soluciones de la forma

$$u(t,x) = q(x - \sigma t) = q(z),$$

donde q, σ son desconocidas, y $z = x - \sigma t$. Si σ es finita y $q : \mathbb{R} \to [0,1]$ es una *función dos veces continuamente diferenciable, la cual satisface*

$$q'' + \sigma q' + f(q) = 0, \tag{4.5}$$

donde $' = \frac{d}{dz}$ *y tal que*

$$\lim_{z\to-\infty} q(z) = 1. \tag{4.6}$$

$$\lim_{z\to\infty} q(z) = 0. \tag{4.7}$$

A este tipo de soluciones se les conoce como soluciones en forma de onda viajera y a σ *como velocidad de propagación.*

OBSERVACIÓN. 1. Si q satisface (4.5), (4.6) y (4.7) entonces $r(z) = 1 - q(-z)$ también es una onda viajera, con velocidad $-\sigma$.
2. En realidad en la literatura se puede generalizar este tipo de definición a resultados mas débiles en el sentido de las distribución.
3. Note que (4.6) y (4.7) es un caso particular de *traveling wave*, que hemos tomado en este caso así por los datos iniciales.
4. También podemos notar que (4.6) y (4.7) nos están indicando que las soluciones estacionarias son conectadas de manera decreciente.

DEFINICIÓN 4.2. *Sea* u *solución del problema (4.1), se dice que converge a una solución en forma de onda viajera* $q_\sigma(x - \sigma t + \xi)$ *para algún* $\sigma \geq \sigma_{min}$ *y* $\xi \in \mathbb{R}$*, siempre y cuando*

$$\|u(t,\cdot) - q_\sigma(\cdot - \sigma t + \xi)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \to 0 \text{ cuando } t \to +\infty,$$

donde σ_{min} *es el valor mínimo que puede tomar* σ.

OBSERVACIÓN. Existen varias definiciones de convergencia a soluciones en forma de onda viajera, entre ellas esta la estabilidad orbital y asintótica.

OBSERVACIÓN. Con **estabilidad orbital** nos referimos que las soluciones son estable orbital si

$$\exists \hat{\epsilon}, C_0 > 0 \text{ tal que si } \|u_0 - q\|_\infty \leq \hat{\epsilon}\text{entonces} \sup_{t>0} |u(t) - q(t)| \leq C_0.$$

gracias a nuestras hipótesis tenemos que si existen q, estas son estables orbitalmente.

OBSERVACIÓN. Decimos que q es asintóticamente estable si existe $\epsilon_0 > 0$ tal que la condición inicial $u_0 \in B(q_0, \epsilon_0)$ entonces

$$\lim_{t\to\infty} \|u(t) - q(t)\| = 0.$$

En el paper de Kolmogorov, Petrovsky y Piskunov [21], probaron que para cierto f y condición inicial u_0, existe soluciones en forma de onda viajera que se propagan con una velocidad σ. Otra propiedad fundamental de esta ecuación fue establecida por Aronson y Weinberger en [3], se trata de la velocidad asintótica de propagación. Donde, si u_0 es una función continua no negativa en $\mathbb{R}^2$ con soporte compacto, entonces la solución u con estas condiciones iniciales u_0 se mueven con velocidad σ_{min} en todas la direcciones para tiempos grandes.
Por otro lado Larson, en [24], apoyándose en resultados obtenidos por Aronson y Weinberger en [2] demostró que la ecuación $u_t = u_{xx} + f(u)$ admite una familia de soluciones en forma de ondas viajeras tal que $u(t,x) = q_\sigma(x - \sigma t)$ para toda velocidad $\sigma \geq \sigma_{min} = 2\sqrt{f'(0)}$ donde para cada velocidad $\sigma \geq \sigma_{min}$, la función $q_\sigma : \mathbb{R} \to]0,1[$ satisface

$$q''_\sigma + \sigma q'_\sigma + f(q_\sigma) = 0 \text{ en } \mathbb{R}, \;\; q_\sigma(-\infty) = 1, \;\; q_\sigma(\infty) = 0,$$

donde q_σ es decreciente en $\mathbb{R}$ y única bajo saltos. Además, Larson demostró que si u_0 satisface las siguientes hipótesis

(H1) $u_0(x) = o(e^{-(\alpha-\delta)x})$ cuando $x \to \infty$, para $\alpha \in]0, \sqrt{f'(0)}[$ y $\delta > 0$.

(H2) $e^{-(\alpha+\delta)x} = o(u_0(x))$ cuando $x \to \infty$, para $\alpha \in]0, \sqrt{f'(0)}[$ y $\delta > 0$.

Entonces,

$$u(t, x + \sigma t) \to 1, \text{ cuando } t \to +\infty, \; \forall\, \sigma < \sigma_\alpha = \alpha + \frac{f'(0)}{\alpha}.$$

y

$$u(t, x + \sigma t) \to 0, \text{ cuando } t \to +\infty, \; \forall\, \sigma > \sigma_\alpha = \alpha + \frac{f'(0)}{\alpha}.$$

Es decir, que si $u_0(x) \equiv Ce^{-\epsilon x}$ cuando $x \to +\infty$, con $0 < \epsilon < \epsilon_{min} = 2\sqrt{f'(0)}$ entonces u converge a una solución en forma de onda viajera $q_\sigma(x - \sigma t)$ cuando $t \to +\infty$, con velocidad

$$\sigma = \epsilon + \frac{f'(0)}{\epsilon} > \sigma_{min}.$$

Es posible reformular los resultados encontrados arriba en términos de los conjuntos de nivel de la solución u del problema de Cauchy (4.1). Es decir, dada un condición inicial u_0 adecuada, definimos el conjunto de nivel de u para un valor $\lambda \in]0,1[$ en un tiempo $t > 0$, como

$$N_\lambda(t) := \{x \in \mathbb{R} : u(t,x) = \lambda\}.$$

Si $0 < m < \sigma_{\text{mín}}$, podemos decir,

$$\forall \lambda \in]0,1[, \quad \lim_{t \to +\infty} \frac{\text{mín}\, N_\lambda(t)}{t} = \sigma_m = m + \frac{f'(0)}{m}.$$

Por tanto, la "localización"de las soluciones u en tiempos grandes se mueven con velocidad finita, en el sentido que para algún $\lambda \in]0,1[$ y alguna familia de números reales $x_\lambda(t)$ tal que $u(t, x_\lambda(t)) = \lambda$, se tiene $x_\lambda(t)/t$ converge cuando $t \to +\infty$ a una constante positiva.
De vuelta a nuestro problema (4.1) con condiciones iniciales exponencialmente no acotadas, como lo enuncio Larson, no admiten soluciones en forma de ondas viajeras con velocidad finita, para tiempos grandes.
Nuestra investigación esta basada en el trabajo de Hamel y Roques [17], en el cual se muestra que la ecuación de reacción-difusión $u_t = u_{xx} + f(u)$, con condiciones iniciales exponencialmente no acotadas conducen a soluciones que se extienden a velocidades infinitas en el plano $[0,\infty[\times\mathbb{R}^+$.

4.2. Principales resultados

En esta sección hablaremos del comportamiento asintótico de las soluciones de las ecuación de reacción-difusión. Antes de empezar daremos algunas definiciones que nos ayudaran con nuestro propósito.
El conjunto de nivel de las soluciones u del problema de Cauchy (4.1) de valor $\lambda \in (0,1)$ en el tiempo $t \geq 0$, como

$$N_\lambda(t) := \{x \in \mathbb{R} : u(t,x) = \lambda\}. \tag{4.8}$$

Denotamos como

$$\liminf_{x \to -\infty} u(t,x) = \lim_{a \to -\infty} \inf_{x \leq a} u(t,x).$$

TEOREMA 4.1. *Sea u solución del problema (4.1), donde f satisface (4.2) y la condición inicial u_0 satisface (4.3) y (4.4), entonces*

$$\forall t > 0, \lim_{x \to +\infty} u(t,x) = 0 \text{ y } \liminf_{x \to -\infty} u(t,x) \to 1 \text{ cuando } t \to +\infty.$$

Demostración. Para demostrar comenzaremos analizando el límite de u cuando $x \to +\infty$. Dado un $\nu > 0$, debo encontrar un $L > 0$ tal que para $x > L$ se tenga $u(t,x) < \nu$. Para hacer esto, sea $\overline{u}$ solución de

$$\begin{cases} \overline{u}_t - \overline{u}_{xx} = f'(0)\overline{u} \\ \overline{u}(0,x) = u_0(x). \end{cases} \tag{4.9}$$

Si hacemos $w(t,x) := e^{-f'(0)t}\overline{u}(t,x)$, tenemos que w es solución de

$$\begin{cases} w_t(t,x) - w_{xx}(t,x) & = 0 \\ w(0,x) & = u_0(x), \end{cases}$$

debido a que u_0 es uniformemente continua y satisface (4.3), se tiene

$$w(t,x) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(t,x-y)u_0(y)dy = \int_{\mathbb{R}} \Phi(t,y)u_0(x-y)dy.$$

Donde Φ solución fundamental de la ecuación de calor homogénea, descrita anteriormente. Con lo cual

$$\overline{u}(t,x) = e^{f'(0)t} \int_{\mathbb{R}} \Phi(t,x-y)u_0(y)dy \tag{4.10}$$

es solución de la ecuación del problema (4.9). Ya que f satisface (4.2), se tiene que $\overline{u}$ descrita en (4.10) es una súper solución de $(4{,}1)$ y por el principio de comparación tenemos que

$$u(t,x) \leq \overline{u}(t,x) \text{ para todo } t \geq 0 \text{ y } x \in \mathbb{R}.$$

Luego haciendo cambio de variable y tomando $a \in \mathbb{R}$, tenemos

$$\begin{aligned} \overline{u}(t,x) &= e^{f'(0)t} \int_{\mathbb{R}} \Phi(t,y)u_0(x-y)dy \\ &= \frac{e^{f'(0)t}}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-z^2} u_0(x-2\sqrt{t}z)dz \\ &= \frac{e^{f'(0)t}}{\sqrt{\pi}} \left(\int_{-\infty}^{a} e^{-z^2} u_0(x-2\sqrt{t}z)dz + \int_{a}^{\infty} u_0(x-2\sqrt{t}z)e^{-z^2}dz \right) \end{aligned}$$

Definiendo

$$\begin{aligned} I &:= \int_{-\infty}^{a} e^{-z^2} u_0(x-2\sqrt{t}z)dz. \\ J &:= \int_{a}^{\infty} u_0(x-2\sqrt{t}z)e^{-z^2}dz. \end{aligned}$$

Como por hipótesis $u_0(x) \to 0$ cuando $x \to +\infty$, tenemos que, para todo $\mu > 0$, existe un $M > 0$ tal que $x > M$ entonces $u_0(x) < \mu$. Si hacemos $L := M + 2a\sqrt{t}$, entonces para $x \geq L$, estimaremos los valores de I y J por separado. Por tanto, si $z \leq a$ entonces $x - 2\sqrt{t}z \geq x - 2\sqrt{t}a \geq L - 2\sqrt{t}a = M$ y gracias a que $e^{-z^2} > 0$ podemos asegurar

$$I \leq \int_{-\infty}^{a} e^{-z^2} \mu dz \leq \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} \mu dz \leq \mu\sqrt{\pi}.$$

Mientras que para $z > a$ tenemos que $x - 2\sqrt{t}z < x - 2\sqrt{t}a$

$$J := \int_{a}^{\infty} u_0(x - 2\sqrt{t}z) e^{-z^2} dz \leq \|u_0\|_{L^\infty} \int_{a}^{\infty} e^{-z^2} dz \leq \int_{a}^{\infty} \frac{1}{1+z^2} dz \leq \mu.$$

Note que la última desigualdad se tiene, ya que $h(z) := \frac{1}{1+z^2}$ es continua, y debido a que la integral converge. Con lo cual,

$$\begin{aligned}
\overline{u}(t,x) &\leq \frac{e^{f'(0)t}}{\sqrt{\pi}} (I + J) \\
&= \frac{e^{f'(0)t}}{\sqrt{\pi}} \left(\mu\sqrt{\pi} + \mu\right) \\
&\leq \frac{1+\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}} e^{f'(0)t} \mu \\
&\leq 2e^{f'(0)t} \mu := \nu.
\end{aligned}$$

Para analizar el comportamiento de la solución u cuando $x \to -\infty$ usamos resultados de convergencia a soluciones tipo onda viajera.

Como habíamos visto en la sección anterior, para $\sigma > 2\sqrt{f'(0)}$ existen, una función uniformemente continua y decreciente $w : \mathbb{R} \to [0,1]$, un $A \in \mathbb{R}$ tal que $0 \leq w_0 \leq u_0$ en $\mathbb{R}$ y $w_0(x) = e^{-\alpha_\sigma x}$ para todo $x \geq A$, donde $\alpha_\sigma = (\sigma - \sqrt{\sigma^2 - 4f'(0)})/2 > 0$. Denotemos por w a la solución del problema de Cauchy (4.1) con datos iniciales w_0. Es decir,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} w_t &=& w_{xx} + f(u) \\ w(0,x) &=& w_0(x). \end{array} \right. \tag{4.11}$$

Por tanto, para algún $\eta \in \mathbb{R}$ existe una solución tipo onda viajera q_σ tal que

$$\|w(t,\cdot) - q_\sigma(\cdot - \sigma t + \eta)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \to 0 \ \text{ cuando } t \to +\infty. \tag{4.12}$$

Además, por el principio de comparación, tenemos $w(t,x) \leq u(t,x) \leq 1$ para todo $t \geq 0$ y $x \in \mathbb{R}$. Por tanto,

$$\liminf_{x\to-\infty} w(t,x) \leq \liminf_{x\to-\infty} u(t,x) \leq 1$$

debido a (4.12) y $q_\sigma(x) \to 1$ cuando $x \to -\infty$, para todo $\epsilon > 0$, existe $T > 0$ tal que

$t > T$ entonces

$$\left| \liminf_{x \to -\infty} w(t,x) - 1 \right| < \epsilon$$

con lo cual

$$1 = \lim_{t \to \infty} \liminf_{x \to -\infty} w(t,x) \leq \lim_{t \to \infty} \liminf_{x \to -\infty} u(t,x) \leq 1.$$

Por tanto,

$$\lim_{t \to \infty} \liminf_{x \to -\infty} u(t,x) = 1.$$

□

OBSERVACIÓN. Note que gracias al teorema (4.2) podemos asegurar que, para $\lambda \in]0,1[$, existe un tiempo $t_\lambda \geq 0$ tal que

$$\liminf_{x \to -\infty} u(t,x) > \lambda > 0 = u(t,+\infty).$$

TEOREMA 4.2. *Sea u, u_0, f como en el teorema anterior, entonces para un $\lambda \in]0,1[$, existe un numero real $t_\lambda \geq 0$ tal que $N_\lambda(t)$ es no vació y compacto,para todo $t \geq t_\lambda$ y*

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\min N_\lambda(t)}{t} = +\infty.$$

Demostración. Ya que existen soluciones u para la ecuación (4.1) y por la observación anterior tenemos, para $\lambda \in]0,1[$ existe un $t_\lambda \geq 0$ tal que $N_\lambda(t)$ es no vació. Ahora para demostrar que $N_\lambda(t)$ es acotado y cerrado. Para demostrar que es acotada argumentaremos por absurdo, es decir, que para todo $k \in \mathbb{N}$ y para todo $M > 0$ tal que $|x_k| > M$, además como $x_k \in N_\lambda$, se tiene que $u(t,x_k) = \lambda$, pero por Teorema , tenemos por unicidad de límite que

$$\lambda = \lim_{k \to \infty} u(t,x_k) = 0$$

lo cual es una contradicción a nuestra hipótesis $\lambda \neq 0$.
La segunda parte la haremos por el absurdo, como habíamos visto en la parte de ondas viajeras, si las soluciones convergen a una solución en forma de onda viajera lo hacen con una velocidad, que en este caso llamaremos σ y tendríamos

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\min N_\lambda}{t} = \sigma.$$

Ahora como, $u_0(x)e^{\epsilon x} \to \infty$ cuando $x \to +\infty$ para todo $\epsilon > 0$, si tomamos $\epsilon \in]0, \sigma_{min}[$ tenemos que

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\min N_\lambda}{t} = \sigma \geq \epsilon + \frac{f'(0)}{\epsilon}.$$

Haciendo $\epsilon \to 0^+$, se obtendría el resultado. $\square$

OBSERVACIÓN. El siguiente teorema fue enunciado y demostrado por Hamel y Roques en [17], lo que se hará es demostrar de forma detallada y usando soluciones *mild*.

TEOREMA 4.3. *Sea u solución del problema (4.1), donde f satisface (4.2) y la condición inicial u_0 satisface (4.3) y (4.4). Y si además, suponemos que existe un $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}$ tal que $u_0 \in C^2([\varepsilon_0, \infty[)$ y no creciente sobre $[\varepsilon_0, +\infty[$ y $u_0''(x) = o(u_0(x))$ cuando $x \to +\infty$. Entonces, para algún $\lambda \in]0,1[$, $\alpha \in]0, f'(0)[$, $\gamma, \Gamma > 0$, existe $T_{\lambda,\alpha,\gamma,\Gamma} \geq t_\lambda$ tal que*

$$\forall t \geq T_{\lambda,\epsilon,\gamma,\Gamma}, \quad N_\lambda(t) \subset u_0^{-1}\{[\gamma e^{-(f'(0)+\alpha)t}, \Gamma e^{-(f'(0)-\alpha)t}]\}. \tag{4.13}$$

Para demostrar este hecho lo haremos por partes, primero encontraremos cotas superiores del mín $N_\lambda(t)$ y después encontrando cotas inferiores para máx $N_\lambda(t)$.

OBSERVACIÓN. Note que, para $\lambda \in]0,1[$ y $t \mapsto x_\lambda(t)$ una función tal que $x_\lambda(t) \in N_\lambda(t)$, es decir, $u(t, x_\lambda(t)) = \lambda$. Si en (4.13) hacemos $\lambda = \Gamma = \gamma$, entonces

$$u_0(x_\lambda(t))e^{(f'(0)-\alpha)t} \leq u(t, x_\lambda(t)) \leq u_0(x_\lambda(t))e^{(f'(0)+\alpha)t}$$

Esto nos ayuda a ver que las soluciones $u(t, x_\lambda(t))$ pueden ser vista como la solución de la familia de edos,

$$\begin{cases} \frac{dv(t;x)}{dt} &= f'(0)v(t;x) \\ v(0;x) &= u_0(x), \end{cases}$$

parametrizada por $x \in \mathbb{R}$. En otras palabras, el comportamiento de u en tiempos grandes es dominado por el término de reacción, es decir, que el término de difusión juega en cierto sentido un papel insignificante en comparación con el crecimiento de reacción. Por tanto, usaremos este hecho para encontrar sub y súper soluciones.

4.3. Cota inferior

Para la demostración del teorema 4.3 necesitamos obtener una cota inferior para el conjunto de nivel N_λ para un t grande. En esta sección obtenemos esta cota inferior. Es importante notar que para obtener esta cota inferior solo requerimos que f en lugar de (4.2) cumpla,

F1 $f(0) = f(1) = 0$, $f(s) > 0$ $\forall s \in]0,1[$ y $f'(0) > 0$.

F2 Existe $\delta > 0$, $s_0 \in]0,1[$ y $M \geq 0$ tal que $f(s) \geq f'(0)s - Ms^{1+\delta}$, para todo $s \in [0, s_0]$.

Teorema 4.4. *Sea u solución del problema (4.1), donde f satisface (F1) y (F2), y la condición inicial u_0 satisface (4.3) y (4.4), si además suponemos que existe un $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}$ tal que $u_0 \in C^2([\varepsilon_0, \infty[)$, no creciente sobre $[\varepsilon_0, +\infty[$ y $u_0''(x) = o(u_0(x))$ cuando $x \to +\infty$. Entonces, para algún $\Gamma > 0$, $\lambda \in]0,1[$ y $\alpha \in]0, f'(0)[$, existe un tiempo $\underline{T}_{\lambda,\alpha,\Gamma} \geq t_\lambda$ tal que*

$$N_\lambda(t) \subset u_0^{-1}\{[0, \Gamma e^{-(f'(0)-\alpha)t}]\}, \ \forall t \geq \underline{T}_{\lambda,\alpha,\Gamma}. \tag{4.14}$$

Demostración. Note que gracias a que f satisface (F1) tenemos que para $u \in [0, s_0]$

$$u_t - u_{xx} - f(u) \leq u_t - u_{xx} - f'(0)u + Mu^{1+\delta}.$$

por tanto, si hacemos $w(t,x) = e^{f'(0)t}v(t,x)$, donde v es tal que

$$v_t - v_{xx} - f'(0)v + Mv^{1+\delta} = 0.$$

tenemos que,

$$w_t - w_{xx} = -Mw^{1+\delta}e^{\delta f'(0)t}.$$

Esto nos ayudará a encontrar subsoluciones. Antes de comenzar con la demostración, introduciremos un poco de notación. Elegimos un $\rho \in \mathbb{R}$ tal que

$$f'(0) - \alpha < \rho < f'(0) \text{ y } \rho(1+\delta) > f'(0).$$

Como u_0 es de clase C^2 sobre $[\varepsilon_0, \infty[$ y $u_0''(x) = o(u_0(x))$ cuando $x \to +\infty$, entonces podemos elegir un $R \in [\varepsilon_0, \infty[$ tal que

$$\forall x \geq R, \ |u_0''(x)| \leq \left(f'(0) - \rho, \frac{\rho(1+\delta) - f'(0)}{2(1+\delta)} \right) u_0(x). \tag{4.15}$$

Definimos

$$\nu = \inf_{]-\infty, R]} u_0 > 0, \ s_1 = \min(s_0, \nu), \ y \ B = \max\left(s_1^{-\delta}, \frac{2M}{\rho(1+\delta) - f'(0)} \right) > 0 \tag{4.16}$$

Sea G definida en $[0, \infty[$ como

$$G(s) = s - Bs^{1+\delta},$$

por tanto, tenemos que [1]

$$G(s) \leq 0 \text{ para todo } s \geq s_1 \;\; y \;\; G(s) \leq s_1 \text{ para todo } s \geq 0.$$

Denotemos

$$\underline{u}(t,x) := \text{máx}(G(u_0(x)e^{\rho t}), 0) \text{ para } (t,x) \in [0,\infty[\times \mathbb{R}.$$

demostraremos que esta función $\underline{u}$ es una subsolución de (4.1), observemos que

$$\underline{u}(0,x) = 0 \leq u_0(x) \;\; o \;\; \underline{u}(0,x) = u_0(x) - Bu_0^{1+\delta} \leq u_0(x) \;\text{ para todo }\; x \in \mathbb{R}.$$

Ahora si $u_0(x)e^{\rho t} \geq s_1$ tenemos que $\underline{u}(t,x) = 0$ ya que $G \leq 0$ sobre $[s_1, \infty[$, como $u \geq 0$ y $f(0) = 0$, es suficiente demostrar que $\underline{u}$ es una subsolución de (4.1) en la región donde $\underline{u} > 0$. Ahora como $u_0(x)e^{\rho t} \geq 0$ entonces $G(u_0 e^{\rho t}) < s_1$. Más aún

$$0 < \underline{u}(t,x) = G(u_0(x)e^{\rho t}) < s_1 = \text{mín}\{s_0, \nu\}.$$

Tenemos dos casos: cuando $s_1 \leq s_0$ o cuando $s_1 \leq \nu$. Comenzaremos analizando el caso $s_1 \leq s_0$.

$$0 < \underline{u}(t,x) \leq s_1 \leq s_0 < 1.$$

Para este caso se tiene

$$f(\underline{u}(t,x)) \geq f'(0)\underline{u}(t,x) - M\underline{u}(t,x)^{1+\delta}.$$

Usaremos los siguientes cálculos para demostrar que $\underline{u}$ es una subsolución

$$\begin{aligned} G'(y) &= 1 - B(1+\delta)y^{\delta} \\ yG'(y) &= y - B(1+\delta)y^{\delta+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G''(y) &= -B(1+\delta)\delta y^{\delta-1} \\ y^2 G''(y) &= -B(1+\delta)\delta y^{\delta+1}. \end{aligned}$$

Haciendo $y := u_0(x)e^{\rho t}$ se tiene que $\frac{dy}{dt} = \rho u_0(x)e^{\rho t}$ y $\frac{d^2y}{dx^2} = u_0''(x)e^{\rho t}$.

$$\begin{aligned} \underline{u}(t,x) &= G(y) \\ \underline{u}_t(t,x) &= G'(y)(\rho u_0(x)e^{\rho t}) = \rho y G'(y) \\ \underline{u}_x(t,x) &= G'(y)u_0'(x)e^{\rho t} \end{aligned}$$

[1] En efecto, sea $s \geq s_1$, por definición de B tenemos que $s_1 \geq B^{-1/\delta}$, con lo cual $Bs^{\delta} \geq 1$ y finalmente $s - Bs^{1+\delta} \leq 0$

$$
\begin{aligned}
\underline{u}_{xx}(t,x) &= G'(y)(u_0'(x)e^{\rho t})^2 + G'(y)u_0''(x)e^{\rho t} \\
&= y^2 G''(y)\left(\frac{u_0'(x)}{u_0(x)}\right)^2 + yG'(x)\left(\frac{u_0''(x)}{u_0(x)}\right)
\end{aligned}
$$

Además,

$$
f(\underline{u}(t,x)) \geq f'(0)G(y) - My^{1+\delta}. \tag{4.17}
$$

Usando (4.15) , (4.16) y (4.17)tenemos que

$$
\begin{aligned}
&\underline{u}_t(t,x) - \underline{u}_{xx}(t,x) - f(\underline{u}(t,x)) \leq \\
&\leq \rho y G'(y) - y^2 G''(y)\left(\tfrac{u_0'(x)}{u_0(x)}\right)^2 - yG'(x)\left(\tfrac{u_0''(x)}{u_0(x)}\right) - f'(0)G(y) + My^{1+\delta} \\
&\leq (y - B(1+\delta)y^{1+\delta})\left(\rho - \tfrac{u_0''(x)}{u_0(x)}\right) - f'(0)y + (f'(0)B - M)y^{\delta+1} \\
&\leq y\left(\rho - \tfrac{u_0''(x)}{u_0(x)} - f'(0)\right) + \left(f'(0)B - M - B(1+\delta)\left(\rho - \tfrac{u_0''(x)}{u_0(x)}\right)\right)y^{\delta+1} \\
&\leq \left(f'(0)B - M - B(1+\delta)\left(\rho - \tfrac{\rho(1+\delta)-f'(0)}{2(1+\delta)}\right)\right)y^{\delta+1} \\
&= \left(f'(0)B - M - B\left(\tfrac{\rho(1+\delta)+f'(0)}{2}\right)\right)y^{\delta+1} \\
&= \left(-M + \tfrac{B}{2}(\rho(1+\delta) - f'(0))\right)y^{\delta+1} \\
&\leq 0.
\end{aligned}
$$

Como consecuencia del principio de comparación tenemos que

$$
\underline{u}(t,x) \leq u(t,x) \text{ para todo } (t,x) \in [0,\infty[\times\mathbb{R}. \tag{4.18}
$$

Mientras que para el caso

$$
\underline{u}(t,x) \leq s_1 < \nu.
$$

Fijamos un número real ϖ suficientemente pequeño tal que

$$
0 < \varpi < B^{-1/\delta}.
$$

Recordemos que para un $t_\varpi \geq 0$ el conjunto $N_\varpi(t)$ es no vacío para todo $t \geq t_\varpi$. Como u_0 es uniformemente continua y satisface (4.3) tenemos que existe un $\bar{t}_\varpi > t_\varpi$ tal que para todo $t \geq \bar{t}_\varpi$, el conjunto

$$
F_\varpi(t) = \{y \in \mathbb{R} : u_0(y)e^{\rho t} = \varpi\},
$$

es no vació, cerrado y satisface $F_\varpi(t) \subset [R,\infty[$. Para todo $t \geq \bar{t}_\varpi$, denotamos

$$
y_\varpi(t) := \text{mín}\, F_\varpi(t).
$$

Ya que $0 < \varpi < B^{-1/\delta} \leq s_1 \leq \nu = \text{ínf}_{x \leq R}\, u_0(x)$, la función $y_\varpi : [\bar{t}_\varpi, +\infty[\to [R,\infty[$ es no decreciente y continua por izquierda. Además, ya que u_0 es no creciente en

$[R,+\infty[$, la función y_ϖ es discontinua en todos los puntos $t \geq \bar{t}_\varpi$ por lo cual existe $a < b \in [R,+\infty[$ tal que $u_0 = \varpi e^{\rho t}$ sobre $[a,b]$. Ahora, definamos Ω como el conjunto abierto tal que

$$\Omega := \{(t,x) \in (\bar{t}_\varpi, +\infty) \times \mathbb{R} : x < y_\varpi(t)\}.$$

Demostraremos que $\text{ínf}_{\overline{\Omega}}\, u > 0$. Observemos primero

$$\partial\Omega = \{\bar{t}_\varpi\}\times]-\infty, y_\varpi(\bar{t}_\varpi^+)] \cup \{(t,x) : t > \bar{t}_\varpi, x \in [y_\varpi(t), y_\varpi(t^+)]\}.$$

Entonces, si $t > \bar{t}_\varpi$ y $x \in [y_\varpi(t), y_\varpi(t^+)]$, tenemos que $u_0(x)e^{\rho t} = \varpi$, por tanto, como habíamos visto en (4.18) y a la elección de ϖ, tenemos que

$$u(t,x) \geq \underline{u}(t,x) \geq \varpi - B\varpi^{1+\delta} = G(\varpi) > 0.$$

Por otro lado, para $t = \bar{t}_\varpi$, la función $u(\bar{t}_\varpi, \cdot) > 0$ es continua y $\liminf\limits_{x\to-\infty} u(\bar{t}_\varpi, x) > 0$. Así,

$$\inf_{x\in]-\infty, y_\varpi(\bar{t}_\varpi^+)]} u(\bar{t}_\varpi, x) > 0.$$

Eventualmente, existe un $\theta \in]0,1[$ tal que $u \geq \theta$ sobre $\partial\Omega$. Y por hipótesis tenemos que $f(\theta) > 0$, el principio de comparación implica que

$$u(t,x) \geq \theta \text{ para todo } \ (t,x) \in \overline{\Omega}. \tag{4.19}$$

Así, si $\lambda \in (0,\theta)$ y si $x \in N_\lambda(t)$ para $t \geq \text{máx}(t_\lambda, \bar{t}_\varpi)$ entonces

$$x > y_\varpi(t^+) \geq y_\varpi(t) \geq R \geq \varepsilon_0. \tag{4.20}$$

En realidad, si suponemos que $x \leq y_\varpi(t)$ entonces $(t,x) \in \overline{\Omega}$ y por nuestras estimaciones anteriormente hechas, tendríamos que $u(t,x) \geq \theta$, por otro lado por definición de N_λ tenemos que $u(t,x) = \lambda$ para todo $t \geq 0$. Pero tendríamos una contradicción ya que $\lambda < \theta$. Por tanto (4.20) se tiene. Con lo cual, existe $\underline{T}_{\lambda,\alpha,\Gamma} \geq \text{máx}\{t_\lambda, \bar{t}_\varpi\}$ tal que

$$\forall t \geq \underline{T}_{\lambda,\alpha,\Gamma},\ \forall x \in N_\lambda(t),\ u_0(x) \leq u_0(y_\varpi(t)) = \varpi e^{-\rho t} \leq \Gamma e^{-(f'(0)-\epsilon)t}. \tag{4.21}$$

Para completar la demostración de nuestro teorema, daremos el mismo tipo de estimas cuando $\lambda \in [\theta, 1[$. Sea $\underline{u}_{\theta,0}$ una función definida por

$$\underline{u}_{\theta,0}(z) := \begin{cases} \theta & \text{si } z \leq -1 \\ -\theta z & \text{si } -1 < z < 0 \\ 0 & \text{si } z \geq 0 \end{cases}$$

y denotemos por $\underline{u}_\theta$ la solución el problema de Cauchy (4.1) con datos iniciales $\underline{u}_{\theta,0}$. Se sigue de (4.19) que

$$\forall (s,x) \in [\bar{t}_\varpi, +\infty[\times \mathbb{R}, \quad u(s,x) \geq \underline{u}_{\theta,0}(x - y_\varpi(s^+)).$$

y entonces, usando el principio de comparación tenemos

$$\forall t \geq 0,\ \forall (s,x) \in [\bar{t}_\varpi, +\infty[\times \mathbb{R}, \ \ u(s+t,x) \geq \underline{u}_\theta(t, x - y_\varpi(s^+)).$$

Debido a como es la condición inicial $\underline{u}_{\theta,0}$ y gracias al estudio de soluciones tipo onda viajera tenemos lo siguiente

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |\underline{u}_\theta(t,x) - q_{\sigma^*}(x - \sigma^* t - m_\theta(t))| \to 0 \text{ cuando } \ t \to +\infty.$$

donde $m_\theta(t) = o(t)$ cuando $t \to \infty$. En particular, dado un $\lambda \geq \theta$, existe T_λ el cual depende de θ y α, pero no depende de s, tal que

$$\underline{u}_\theta(T_\lambda, x) > \lambda.$$

para todo $x < 0$. Por tanto,

$$\forall s \geq \bar{t}_\varpi, \forall x < y_\varpi(s^+), \ \ u(s+T_\lambda, x) > \underline{u}_\theta(s + T_\lambda, x) > \lambda.$$

Como consecuencia, para todo $t \geq \text{máx}\{\bar{t}_\varpi + T_\lambda, t_\lambda\}$ y para todo $x \in N_\lambda$, tenemos que $x \geq y_\varpi((t - T_\lambda)^+)$, ya si $x < y_\varpi((t-T_\lambda)^+)$ llegaríamos a una contradicción. Por tanto,

$$u_0(x) \leq u_{y_\varpi}((t-T_\lambda)^+) = \varpi e^{\rho(t-T_\lambda)} \leq \Gamma e^{-(f'(0)-\alpha)t}.$$

para $t \geq \underline{T}_{\lambda,\alpha,\Gamma}$, donde $\underline{T}_{\lambda,\alpha,\Gamma} \in [\text{máx}(\bar{t}_\varpi + T_\lambda, t_\lambda), +\infty[$ es suficientemente grande. □

4.4. Cota superior

En esta sección analizaremos la cota superior del conjunto $N_\lambda(t)$. La demostración de esta cota superior es obtenida por construcción de una apropiada supersolución del problema (4.1).

Teorema 4.5. *Sea u solución de (4.1), donde f satisface (4.2) y la condición inicial u_0 satisface (4.3), (4.4) y si además suponemos que existe un $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}$ tal que $u_0 \in C^2([\varepsilon_0, \infty[)$, no creciente sobre $[\varepsilon_0, +\infty[$ y $u_0''(x) = o(u_0(x))$ cuando $x \to +\infty$.*

Entonces, para algún $\gamma > 0$, $\lambda \in]0,1[$ y $\alpha \in]0, f'(0)[$, existe un tiempo $\overline{T}_{\lambda,\alpha,\gamma} \geq t_\lambda$ tal que

$$N_\lambda(t) \subset u_0^{-1}\{[\gamma e^{-(\alpha+f'(0))t}, 1]\}, \ \forall t \geq \overline{T}_{\lambda,\alpha,\gamma}. \tag{4.22}$$

Demostración. Como habíamos visto anteriormente, debido a que f satisface (4.2), se tiene que

$$\overline{u}(t,x) = e^{f'(0)t} \int_{\mathbb{R}} \Phi(t, x-y) u_0(y) dy, \tag{4.23}$$

es una súper solución de $(4,1)$ y por el principio de comparación tenemos que

$$u(t,x) \leq \overline{u}(t,x) \text{ para todo } t \geq 0 \text{ y } x \in \mathbb{R}.$$

Por hipótesis tenemos que $u_0'(x) = o(u_0(x))$ cuando $x \to +\infty$, entonces podemos escoger $M \in [\varepsilon, \infty[$ tal que $|u_0'(x)| \leq 3\frac{\alpha}{2}u_0(x)$ para $x \geq M$. Sea $a \geq 0$, vamos a estimar el valor de $\overline{u}(t,x)$ para $x \geq M_t := M + 2\sqrt{t}a$, note que

$$\begin{aligned}
\overline{u}(t,x) &= e^{f'(0)t} \int_{\mathbb{R}} \Phi(t,y) u_0(x-y) dy \\
&= e^{f'(0)t} \int_{\mathbb{R}} \Phi(t,y) |u_0(x-y) - u_0(x) + u_0(x)| dy \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \Phi(t,y) |u_0(x-y) - u_0(x)| dy + e^{f'(0)t} u_0(x).
\end{aligned}$$

Denotaremos por

$$I_1 := \int_{\mathbb{R}} \Phi(t,y) |u_0(x-y) - u_0(x)| dy.$$

Y haciendo cambios de variable tenemos que

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{\mathbb{R}} \Phi(t,y) |u_0(x-y) - u_0(x)| dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp(-z^2) |u_0(x - 2\sqrt{t}z) - u_0(x)| dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\int_{-\infty}^{a} \exp(-z^2) |u_0(x - 2\sqrt{t}z) - u_0(x)| dz \right. \\
&\left. + \int_{a}^{\infty} \exp(-z^2) |u_0(x - 2\sqrt{t}z) - u_0(x)| dz \right)
\end{aligned}$$

Definamos

$$I_{11} := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{a} \exp(-z^2) |u_0(x - 2\sqrt{t}z) - u_0(x)| dz,$$

y

$$I_{12} := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{a}^{\infty} \exp(-z^2) |u_0(x - 2\sqrt{t}z) - u_0(x)| dz.$$

Calcularemos las integrales por separado, para el caso I_{11} tenemos $x - 2\sqrt{t}z \geq x -$

$2\sqrt{t}a \geq M$, como u_0 es no creciente en $[\varepsilon_0, \infty[$ tenemos

$$
\begin{aligned}
I_{11} &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{a} \exp(-z^2)|u_0(x - 2\sqrt{t}z) - u_0(x)|dz \\
&\leq 2u_0(M)\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{a} \exp(-z^2)dz \\
&\leq 2u_0(M)\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-z^2)dz \\
&\leq 2u_0(M).
\end{aligned}
$$

Mientras que para I_{12}

$$
\begin{aligned}
I_{12} &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{a}^{\infty} \exp(-z^2)|u_0(x - 2\sqrt{t}z) - u_0(x)|dz \\
&\leq \frac{2}{\sqrt{\pi}}\|u_0\|_{L^\infty} \int_{a}^{\infty} \exp(-z^2)dz \\
&\leq \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{a}^{\infty} \exp(-z^2)dz \\
&\leq \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{a}^{\infty} \frac{1}{1+z^2}dz \\
&\leq \frac{2}{\sqrt{\pi}}\mu.
\end{aligned}
$$

La última desigualdad se tiene debido a que la integral es convergente, entonces podemos escoger $\mu > 0$.
Por lo tanto, hemos obtenido que, para todo $x \geq M_t$

$$
\begin{aligned}
u(t,x) &\leq e^{f'(0)t}(2u_0(M) + 2\mu u_0(M)) + e^{f'(0)t}u_0(x) \\
&\leq 2e^{f'(0)t}u_0(M)(1+\mu) + e^{f'(0)t}u_0(x) \\
&\leq 2e^{f'(0)t}u_0(M) + e^{f'(0)t}u_0(x) \\
&= e^{f'(0)t}(2u_0(M) + u_0(x)).
\end{aligned}
$$

Ahora como en el Teorema 4.2 mostramos que para todo $t \geq t_\lambda$ el conjunto N_λ es no vacío, entonces para todo $y \in N_\lambda(t)$ y $y \geq M_t$ se tiene

$$
y \geq M, \ \lambda = u(t,y) \leq \frac{u_0(y)e^{\rho t}}{u_0(M)}.
$$

Sea $\eta = \inf_{]-\infty, M[} u_0$, se obtiene que

$$
\forall t \geq t_\lambda, \ \forall y \in N_\lambda(t), \ \ u_0(y) \geq \min(\eta, \lambda u_0(M)e^{-\rho t}).
$$

Como $\liminf_{x\to+\infty} u(t,x) > \lambda > 0$ y $\rho = f'(0) + \alpha/2$ existe un tiempo $\overline{T}_{\lambda,\alpha,\gamma} \geq t_\lambda$ tal que

$$\forall t \geq \overline{T}_{\lambda,\alpha,\gamma},\ \forall y \in N_\lambda(t),\ u_0(y) \geq \gamma e^{-(f'(0)+\alpha)t}.$$

□

Demostración del Teorema 4.3. Se sigue directamente de los Teoremas (4.5) y (4.4), tomando

$$T_{\lambda,\Gamma,\gamma,\alpha} = \text{máx}\,(\underline{T}_{\lambda,\alpha,\Gamma}, \overline{T}_{\lambda,\alpha,\gamma}).$$

□

Capítulo 5

Conclusiones

1. Dado el problema de Cauchy no homogéneo no lineal sobre espacios de Banach
$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} &= Au(t) + F(t,u), \;\; t > 0 \\ u(0) &= u_0, \end{cases}$$
Probamos que, si $-A$ es un generador infinitesimal de un semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ fuertemente continuo sobre un espacio de Banach X, $F \in C^1([0,\infty[\times X, X)$ y $F(t,\cdot)$ es uniformemente globalmente Lipschitz entonces existen soluciones *mild* locales y globales (Teoremas 2.8 y 2.9) de este problema mediante el uso de teorema de punto fijo de Banach-Picard.
También mostramos que si tomamos $F(t,u)(x) := f(u(x))$ tal que F sea uniformemente globalmente Lipschitz entonces
$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} &= Au(t) + f(u), \;\; t > 0 \\ u(0) &= u_0, \end{cases} \tag{5.1}$$
tiene solución mild.
Además, para demostrar que
$$[T(t)u](x) := \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp(-(x-y)^2/4t)u(y)dy,$$
es un operador fuertemente continuo, es suficiente trabajar en espacios donde u es uniformemente continuos y acotada.
También, como en teoría de ecuaciones diferenciales parciales no lineales una herramienta fundamental para el cálculo de soluciones es el principio de comparación, se enunció y demostró principio de comparación para soluciones *mild* del problema (5.1). El cual es utilizamos para encontrar sub y súper solu-

ciones del problema (5.1).

2. Se demostró, usando propiedades de invarianza por traslación e invarianza por dilatación, que la solución fundamental de $u_t - u_{xx} = 0$ está dada por

$$\Phi(t, x-y) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp(-(x-y)^2/4t).$$

Dicha solución fundamental permitió encontrar soluciones para los diferentes problemas de valor inicial.

3. Dada el problema

$$\begin{cases} u_t(t,x) &= u_{xx}(t,x) + f(u(t,x)) & \text{en } [0,\infty[\times\mathbb{R} \\ u(0,x) &= u_0 & \text{en } \mathbb{R}, \end{cases} \tag{5.2}$$

con u_0 que se comporta como un frente y f del tipo Fisher-KPP, probamos que debido a la poca regularidad de f y u_0 este problema tiene soluciones *mild* de la siguiente forma

$$u(t,x) := \int_{\mathbb{R}} \Phi(t, x-y) u_0(y) dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \Phi(s-t, x-y) f(u(s,y)) dy ds$$

estas soluciones se obtuvieron mediante el uso de la solución fundamental de la ecuación la ecuación de calor y teorema de punto fijo de Banach-Picard. Además de extender f fuera de [0,1] para asegurar que

$$f \in C^1(\mathbb{R}) \text{ es globalmente Lipschitz y } f' \text{ sea uniformemente continua en} \mathbb{R}.$$

y poder asegurar que las soluciones son globales en el tiempo.

4. Puesto que estamos trabajando en $[0,\infty[\times\mathbb{R}$ se mostró y se vio con varios ejemplos (Sección 3.5) cuan necesario es exigir que $|u(t,x)| \le C \exp cx^2$ para obtener unicidad. Se demostró que se puede modificar este hecho para obtener unicidad de soluciones clásicas (teorema 3.10), tan solo con exigir la no negatividad de las soluciones.

5. Dada la ecuación de reacción-difusión

$$u_t = u_{xx} + f(u)$$

Si eliminamos el término de difusión, ésta ecuación se reduce

$$u_t = f(u)$$

y podemos asegurar por la hipótesis sobre f, que 0 es un punto de equilibrio inestable, mientras que 1 es un punto de equilibrio estable. Debido a que $0 < u_0 < 1$ y del principio de comparación se obtuvo que $0 < u(t,x) < 1$.

Puesto que las condiciones iniciales u_0 del problema (5.2) son exponencialmente no acotadas, se uso resultados ya determinados por diferentes autores ([2],[3]) que estudiaron el caso donde u_0 es exponencialmente acotados, para determinar que no existe soluciones en forma de onda viajera con velocidad finita para nuestro problema.

El Teorema 4.2 se puede interpretar de la siguiente manera, existe una acción competitiva entre la difusión y reacción y esto es debido a que la difusión trata de extender y disminuir u_0, mientras que la reacción trata de hacer tender hacia un punto de equilibrio estable, que en este caso es 1. Como u_0 se comporta como un frente y a soluciones en forma de onda viajera, se demostro en este teorema que las soluciones del problema (5.2) en tiempos grandes tienden al estado estable 1. Y gracias al principio de comparación pudimos demostrar que si $u_0 \to 0$, para todo $x \to \infty$ entonces, para todo $t > 0$, las soluciones u del problema (5.2) tienden a 0.

6. En el Teorema 4.2 se demostró que los conjuntos de nivel de las soluciones del problema (5.2), son no vacíos y se mueven infinitamente rápido para tiempos suficientemente grandes,.

7. En el Teorema 4.3 mostramos usando sub y súper soluciones *mild*, construidas a partir de las condiciones sobre f del problema (5.2), que la localización de los conjuntos de nivel de las soluciones, pueden ser expresados en términos del decaimiento de la condición inicial. Obteniendo así un resultado análogo al problema de valor inicial donde las condiciones iniciales son a soporte compacto.

Capítulo 6

Anexos

6.1. Desigualdades

TEOREMA 6.1. *Para todo $x > 0$ se tiene que*

$$\exp(x) \geq 1 + x$$

Demostración. Sea $f(x) = e^x - (1+x)$ si nosotros logramos demostrar que f es siempre positiva para todo $x > 0$, se tendría el teorema, sabemos que $f(0) = 0$ y $f'(x) = e^x - 1$ es siempre no negativa para todo $x > 0$. Además si $f'(x) > 0$ sobre un intervalo entonces f es creciente sobre ese intervalo, por tanto podemos concluir que $f(x) > f(0)$ para $x > 0$, es decir

$$\exp(x) - (1+x) \geq 0 \text{ para } \ x > 0$$

□

TEOREMA 6.2 (Desigualdad de Cauchy)**.** *Para todo $a, b \in \mathbb{R}$*

$$ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$$

Demostración.

$$0 \leq (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

□

TEOREMA 6.3 (Desigualdad de Gronwall)**.** *Sea $q(\cdot)$ una función no negativa, continua sobre $[0, T]$ la cual satisface para c.t.p t la desigualdad diferencial*

$$q'(t) \leq \eta(t)q(t) + c(t)$$

donde $\eta(t)$ y $c(t)$ son funciones no negativas y sumables sobre [0,T]. Entonces

$$q(t) \leq \exp\left\{\int_0^t \eta(s)ds\right\}\left[q(0) + \int_0^t c(s)ds\right]$$

para todo $0 \leq t \leq T$.
En particular, si

$$\begin{aligned} q'(t) \leq \eta(t)q(t) \ \textit{sobre} \ [0,T] \\ q(0) = 0 \end{aligned}$$

entonces

$$q \equiv 0 \ \textit{sobre} \ [0,T]$$

6.2. Ecuaciones reducibles a la ecuación de calor homogénea

Estudiaremos varias ecuaciones en derivadas parciales que son reducibles a la ecuación de calor homogénea, mediante un cambio de variable.
Sea $u :]0,\infty[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de dos variables, la ecuación homogénea de calor viene dada por

$$u_t = u_{xx}$$

1. La ecuación

   $$u_t = \kappa u_{xx}, \ \kappa > 0$$

   pueden ser reducidas de la forma

   $$u_\tau = u_{xx}$$

   mediante el uso de cambio de variable $\tau = \kappa t$.

2. Para ecuaciones de la forma

   $$u_t = a(t)u_{xx}, \ \ a(t) > 0$$

   haciendo

   $$A(t) = \int_0^t a(\eta)d\eta$$

y

$$t = g(\tau)$$

donde g es la aplicación inversa de $\tau = A(t)$. Claramente

$$g'(\tau) = \frac{1}{a(g(\tau))} \equiv \frac{1}{a(t)}$$

si tomamos $U(\tau, x) = u(g(\tau), x)$ se tiene que

$$U_\tau = U_{xx}$$

3. Si tenemos una ecuación de la forma

$$u_t = u_{xx} - b(t)u_x$$

se puede hacer cambio de variable

$$x = \xi + \int_0^t b(\eta)d\eta$$

Haciendo $U(t, \xi) = u(t, \xi + \int_0^t b(\eta)d\eta)$ se obtiene que

$$U_t = U_{\xi\xi}$$

4. Ecuaciones de la forma

$$u_t = u_{xx} - c(t)u$$

pueden ser reducidas vía el uso del factor integrante

$$\exp\left\{\int_0^t c(\eta)d\eta\right\}$$

y el cambio de variable

$$v = u\exp\left\{\int_0^t c(\eta)d\eta\right\}$$

obteniendo

$$v_t = v_{xx}$$

5. Para reducir ecuaciones de la forma

$$u_t = a(t)u_{xx} - b(t)u_x - c(t)u,\ a(t) > 0$$

a ecuaciones de calor homogénea podemos usar sucesivamente los tres tipo de de transformaciones que se muestran arriba.

6. La ecuación no homogénea

$$a(u)u_t = (a(u)u_x)_x, \ a(\cdot) > 0$$

puede ser reducida a $v_t = v_{xx}$ mediante el cambio de variable dependiente

$$v = \int_0^u a(\epsilon)d\epsilon$$

6.3. Método de generación de soluciones a partir de soluciones de la ecuación de calor

La linealidad y homogeneidad de (3.1) permite dar a conocer una extensa lista de métodos de generación de soluciones basadas en la solución fundamental y en soluciones, en esta sección las enunciaremos, porque luego usaremos este tipo de soluciones, pero para mayor detalle y demostración de cada una, recomendamos ver [31], pág 10.

- **Soluciones exponenciales** Si α y β son dos constantes tal que $\exp(\alpha x + \beta t)$ es solución de la ecuación de calor, entonces $\beta = \alpha^2$. Así obtenemos una familia de soluciones de un parámetro α

$$u(t,x) = \exp(\alpha x + \alpha^2 t).$$

- **Derivada de la solución fundamental** Si hacemos

$$h(t,x) = \frac{x\Phi(t,x)}{t} = -2\Phi_x(t,x), \quad t > 0.$$

Claramente

$$h_{xx} - h_t = -2\frac{\partial}{\partial x}(\Phi_{xx} - \Phi_t) = 0.$$

- **Combinación lineal**: si u_1 y u_2 son soluciones de la ecuación de calor homogénea y α, β son constantes, entonces $\alpha u_1 + \beta u_2$ también es solución de la ecuación de calor homogénea.

- **Integración con respecto a un parámetro**

$$u(t,x,\lambda) \to \int_a^b u(t,x,\lambda)d\lambda.$$

- **Diferenciación con respecto a un parámetro**

$$u(t,x,\lambda) \to \frac{\partial}{\partial \lambda} u(t,x,\lambda).$$

- **Diferenciación con respecto a x o t**

$$u(t,x) \to u_x(t,x), \quad u(t,x) \to u_t(t,x).$$

Este es una consecuencia del hecho que la ecuación de calor es lineal y homogénea.

- **Integración con respecto a x o t**

$$\begin{aligned} u(t,x) \to v(t,x) &= \int_a^x u(t,y)dy, \quad \text{dado que} \qquad u_x(t,a) \equiv 0. \\ u(t,x) \to w(t,x) &= \int_b^t u(y,x)dy, \quad \text{dado que} \qquad u(b,x) \equiv 0. \end{aligned}$$

Esto se sigue de

$$v_{xx} = u_x, \; v_t = \int_a^x u_t(t,y)dy = \int_a^x u_{xx}(t,y)dy = u_x(t,x) - u_x(t,a).$$

$$w_t = u, \; w_{xx} = \int_b^t u_{xx}(y,x)dy = \int_b^t u_y(y,x)dy = u(t,x) - u(b,x).$$

6.4. Ecuación de Fisher

En la presente sección pretendemos dar ideas de lo que hizo Fisher [10] en 1937, para tener un poco mas claro el panorama, Fisher en 1937 presentó un modelo de propagación espacial de un gen favorable en una población, sobre un hábitat unidimensional infinitamente grande. La ecuación que planteo Fisher, con w como la concentración del gen, fue la siguiente

$$w_\tau = Dw_{yy} + rw\left(1 - \frac{w}{M}\right) \tag{6.1}$$

donde

1. r: representa la tasa neta de nacimiento y muerte.
2. M: representa la capacidad del hábitat.
3. D representa el índice de conductividad térmica.

Es decir, D, r y M son parámetros positivos, lo que quería determinar Fisher es, con qué velocidad se propaga el gen.

La ecuación (6.1) es una ecuación semilineal donde el término de difusión se combina con el crecimiento logístico a través del término de reacción

$$f(w) = rw\left(1 - \frac{w}{M}\right)$$

Si nosotros hacemos cambios de variables[1] de la siguiente forma

$$t = r\tau, \quad x = \sqrt{r/D}y, \quad u = w/M$$

Obtenemos que la ecuación (6.1) se puede escribir

$$u_t = u_{xx} + u(1-u), \quad t > 0 \tag{6.2}$$

En ausencia del término de difusión, la ecuación (6.2) se reduciría a

$$u_t = u(1-u)$$

y podemos asegurar que 0 es un punto de equilibrio inestable y 1 es un punto de equilibrio asintóticamente estable. Por otro lado si el dato inicial $u(0) = u_0 \in]0, 1[$ nosotros esperaríamos que $0 < u(t) < 1$.
Por tanto si

$$u(x, 0) = u_0(x), \; x \in \mathbb{R}$$

es un dato inicial para la ecuación (6.2), con $0 < u_0 < 1$, nosotros esperaríamos una acción competitiva entre la difusión y reacción, de la siguiente forma, la difusión tratará de extender y disminuir u_0 y la reacción tratará de hacer tender u hacia la solución de equilibrio estable 1.
Lo que se pretende a continuación es mostrar la existencia de soluciones en forma de ondas viajeras (en inglés traveling waves), que conectan los dos estados de equilibrio, es decir, soluciones de la forma

$$u(t, x) = q(x - \sigma t)$$

donde σ denota la velocidad de propagación, satisfaciendo las condiciones

$$0 < u(t, x) < 1, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}$$

[1] para ver más de este tipo de cambios de variable ver Anexos

y

$$\lim_{x\to-\infty} u(x,t) = 1 \;\; y \;\; \lim_{x\to\infty} u(x,t) = 0 \tag{6.3}$$

la primera condición en (6.3), indica que la concentración de genes se encuentra saturada al extremo izquierdo mientras que la segunda condición denota una concentración de cero al extremo derecho. Claramente, este tipo de soluciones comprenden un balance entre difusión y reacción.
Ya que la ecuación (6.2) es invariante a traslaciones $x \mapsto -x$, es suficiente considerar $\sigma > 0$, es decir, que las ondas solo se mueven al lado derecho.
Si hacemos $u(t,x) = q(\xi)$, donde $\xi = x - ct$ se tiene

$$u_t = -\sigma q', \;\; u_x = q', \;\; u_{xx} = q'', \;\; ('= d/d\xi)$$

sustituyendo $u(t,x) = q(\xi)$ en (6.2) se tiene para q, la ecuación diferencial

$$q'' + cq' + f(q) = 0 \tag{6.4}$$

con

$$\lim_{\xi\to-\infty} q(\xi) = 1 \;\; y \;\; \lim_{\xi\to\infty} q(\xi) = 0 \tag{6.5}$$

Haciendo $q' = p$, la ecuación (6.4) es equivalente al sistema

$$\begin{aligned} \frac{dq}{d\xi} &= p \\ \frac{dp}{d\xi} &= -\sigma p - f(q) \end{aligned}$$

en el plano de fase (q,p). Este sistema tiene dos puntos de equilibrio (0,0) y (1,0). Nuestra solución en forma de onda viajera corresponde a una órbita conectando (1,0) y (0,0) con $0 < q < 1$.
Primero analizaremos el comportamiento local de las órbitas cerca a los puntos de equilibrio.
Para el sistema lineal

$$z' = Jz$$

en el cual $z = (x,y)$ es un vector y J es una matriz constante de entradas constantes.
Supongamos que

$$\det J \neq 0$$

Sean λ_1, λ_2 los valores propios de J. Si $\lambda_1, \lambda_2 = \pm i\alpha$ con $\alpha \neq 0$, entonces $z = 0$ es un centro.
Si $\lambda_1, \lambda_2 = \beta \pm i\alpha$ entonces $z = 0$ es un foco. Si λ_1, λ_2 son reales y $\det J = \lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$,

entonces $z = 0$ es un atractor.
Si $\det J = \lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$ z=0 es un punto de silla.

Cuando tenemos sistemas de ecuaciones no lineales un método para analizar el comportamiento, consiste en buscar un sistema lineal que se aproxime en un entorno de un punto y que nos permita establecer el comportamiento de las soluciones del sistema no lineal cerca de dicho punto.
Así la linealización cerca al punto (0,0) sería

$$f(q) = f'(0)q + o(q)$$

Para el punto (1,0) hacemos g(q)=f(1-q) con lo cual

$$g(q) = -f'(1)q + o(q)$$

Las matrices de coeficientes en nuestro caso del sistema linealizado en (0,0) y (1,0) son respectivamente

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -f'(0) & -\sigma \end{pmatrix} \; y \; J(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ f'(1) & -\sigma \end{pmatrix}$$

los valores propios de $J(0,0)$ son

$$\lambda^{\pm}_{(0,0)} = \frac{1}{2}\left(-\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - 4f'(0)}\right)$$

Si $\sigma \geq 2f'(0)$ ambos valores propios son no negativos y si $\sigma < 2f'(0)$ son complejos.
Por tanto

$$(0,0) \text{ es un} \begin{cases} \text{es un nudo estable si } \sigma \geq 2\sqrt{f'(0)} \\ \text{es un foco estable si } \sigma < 2\sqrt{f'(0)} \end{cases}$$

Los valores propios de $J(1,0)$ son

$$\lambda^{\pm}_{(1,0)} = \frac{1}{2}\left(-\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + 4f'(1)}\right)$$

de signo opuesto, por tanto $(1,0)$ es un punto de silla. La restricción $0 < q < 1$, descarta el caso $\sigma < 2\sqrt{f'(0)}$, ya que en este caso q cambia de signo a lo largo de la órbita que se aproxima a $(0,0)$. Para $\sigma \geq 2\sqrt{f'(0)}$, todas las órbitas en una vecindad de (0,0) se aproximan a (0,0) para $\xi \to +\infty$ con pendiente λ_1^+. Por otro lado, la única órbita que va a (1,0) cuando $\xi \to -\infty$ y permanece en la región $0 < q < 1$ es la separatriz inestable L y del punto de silla. La conclusión es que para cada $\sigma \geq 2\sqrt{f'(0)}$ existe una única onda viajera solución de la ecuación (6.2) con velocidad σ. Más aún

q es estrictamente decreciente. Así tenemos algunas velocidades de propagación posibles. Resulta que la velocidad mínima $\sigma = \sigma_{min}$ es particularmente importante.

Bibliografía

[1] L. APOSTOL, *Analisis Real* , Instituto de Matemáticas y Ciencias Afines, 1997.

[2] D. ARONSON AND H. WEINBERGER, *Nonlinear Diffusion in Population Genetics, Combustion and Nerve Propagation*, Partial Differential Equations and Related Topics, Lecture notes in Mathematics. 446, (1975), pp. 5–49.

[3] D. ARONSON AND H. WEINBERGER, *Multidimensional nonlinear diffusion arising in population genetics*, Adv.Math.30, (1978), pp. 33–76.

[4] H. BERESTYCKI, F. HAMEL, AND L. ROQUES, *Équations de réaction- diffusion et modeless d'invasions biologiques dans les miliex périodiques* , Comptes Rendus Mathematique.339, (2004), pp. 549 – 554.

[5] H. BREZIS, *Funtional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, 2011.

[6] X. CABRE AND J. ROQUEJOFFRE, *The influence of fractional diffusion in Fisher-KKP equations* , Communications in Mathematical Physics. 320, (2013), pp. 679–722.

[7] C. EVANS, *Partial Differential*, Addison-Wesley, 1971.

[8] P. FELMER AND M. YANGARI, *Fast propagation for fractional KPP equations with slowly decaying initial conditions* , SIAM J.Math.Anal 45(2), (2013), pp. 662–678.

[9] P. FIFE AND J. MCLEOD, *The approach of solutions of nonlinear diffusion equations to travelling wave solutions* , Arch. Ration. Mech. Anal. 65, (1977), pp. 335–361.

[10] R. FISHER, *The wave od advance of advantageous gene* , Ann. Eugenics, 7, (1937), pp. 335–369.

[11] G. FOLLAND, *Introduction to Partial Differential Equations*, Princeton University Press, 1995.

[12] A. FRIEDMAN, *Partial Differential Equations of Parabolic Type*, Prentice Hall, 1964.

[13] J. FRITZ, *Partial Differential Equations*, New York, Springer-Verlag, 1982.

[14] J. GOLDSTEIN, *Semigroup of Linear Operators and Applications* , Oxford University Press, 1985.

[15] K. HADELER AND F. ROTHE, *Travelling fronts in nonlinear difusion equations* , J. Math. Biol.2, (1975), pp. 251–263.

[16] F. HAMEL AND G. NADIN, *Spreanding propieties and complex dynamics for monostable reaction-diffusion equations* , Communications in Partial Differential Equations. 37, (2012), pp. 511–537.

[17] F. HAMEL AND L. ROQUES, *Fast propagation for KPP equations with slowly decaying initial conditions* , Partiall Differential Equations 249, (2010), pp. 1726–1745.

[18] P. HARTMAN, *Ordinary Differential Equations*, SIAM, 1982.

[19] J. JOST, *Partial Differential Equations* , Springer, 2002.

[20] A. KOLMOGOROV AND S. FOMIN, *Introductory real analysis*, Dover Publications, INC, 1961.

[21] A. KOLMOGOROV, I. PETROVSKY, AND N. PISKUNOV, *Ètude de l'equation de a diffusion avec croissance de la quantité de matiére et son application à un problème biologique* , Bull. Univ. Ètat Moscu, Sér. Inter A1, (1937).

[22] E. KREYSZING, *Introductory Funtional Analysis with Applications*, John Wiley and Sons. Inc, 1978.

[23] L. LAGES, *Analisis Real* , Instituto de Matemáticas y Ciencias Afines, 1997.

[24] D. LARSON, *Transient bounds and time-asymptotic behavior of solutions to nonlinear equations of fisher tipe* , SIAM J. Appl. Math.34, (1978), pp. 93–103.

[25] A. PAZY, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, 1983.

[26] G. PHILIPPE, *Linear and Nonlinear Functional Analysis with Applications*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2013.

[27] J. ROZIER, *The one-dimensional heat equation* , Encyclopedia of mathematics and its applications, Vol 23, 1984.

[28] S. SALSA, F. VEGNI, A. ZARETTI, AND P. ZUNINO, *A Primer on PDEs models, Methods, Simulations*, Springer, 2013.

[29] D. SATTINGER, *Stability of waves of nonlinear parabolic systems* , Adv. Math. 22, (1976), pp. 312–355.

[30] W. STRAUSS, *Partial Differential Equations An Introduction*, John Wiley and Sons Inc., 1937.

[31] D. WIDDER, *The heat equation*, Pure and Applied Mathematics A Series of Monographs and Textbooks, 1970.