ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS

MODELO DE ASIGNACIÓN ÓPTIMO DE PORTAFOLIO PARA GESTIÓN DE COBRANZA

TRABAJO DE TITULACIÓN PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE INGENIERA MATEMÁTICA

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

LUCÍA CAROLINA GRADOS VILLARROEL
gradoscarolina4@gmail.com

DIRECTORA: ADRIANA UQUILLAS ANDRADE, PHD
adriana.uquillas@epn.edu.ec

QUITO, DICIEMBRE 2018

DECLARACIÓN

Yo LUCÍA CAROLINA GRADOS VILLARROEL, declaro bajo juramento que el trabajo aquí escrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

A través de la presente declaración cedo mis derechos de propiedad intelectual, correspondientes a este trabajo, a la Escuela Politécnica Nacional, según lo establecido por la Ley de Propiedad Intelectual, por su reglamento y por la normatividad institucional vigente.

Lucía Carolina Grados Villarroel

CERTIFICACIÓN

Certifico que el presente trabajo fue desarrollado por LUCÍA CAROLINA GRADOS VILLARROEL, bajo mi supervisión.

Adriana Uquillas Andrade, PhD
Directora del Proyecto

AGRADECIMIENTOS

A todos quienes con su mano sostuvieron la mía para ayudarme a culminar este proyecto.

A mis papás gracias por tanto esfuerzo y sacrificio a lo largo de su vida, sus enseñanzas fueron el motor para emprender grandes retos en la mía.

A Miguel por su cariño y paciencia todos estos años. Gracias por no permitir que me rindiera en los momentos más difíciles que he vivido.

A Adriana Uquillas por el apoyo y tiempo dedicado para el desarrollo de este proyecto.

A Edgar Vargas, gracias amigo por tu ayuda en todo este tiempo. Me alegra mucho haber compartido momentos de risa y trabajo con una persona excepcional como tú.

A Diego Vargas por la idea para la realización de este modelo. Fue un gusto haber sido alumna de una persona tan brillante y un gran ser humano.

A mis amigos Danilo, Carlos y Edgar gracias por sus palabras de fuerza y motivación en los momentos en los que más los necesité.

DEDICATORIA

A mi papá, no hay un solo día que no te eche de menos.
Gracias por haberme tocado primero el corazón antes de tocar el cielo.

Índice general

Índice de figuras

Índice de cuadros

Resumen

En este trabajo nos enfocaremos en un modelo matemático que permita maximizar la recuperación de un determinado portafolio de una entidad financiera, puesto que los altos niveles de consumo en el mercado ecuatoriano junto a la gran oferta de crédito por parte de las entidades financieras han ocasionado en ciertos sectores de la población problemas de sobreendeudamiento.

La idea principal de este modelo es asignar un valor óptimo de portafolio a un número determinado de empresas de cobranza de manera que se garantice la máxima recuperación de cartera asumiendo un determinado nivel de riesgo. Para resolver este problema se utilizará el Modelo de Valoración de Activos Financieros (CAPM) el cual está sustentado en teoría de portafolios de inversión. La adaptación de nuestro problema de asignación de portafolio al CAPM dio como resultado dos modelos que convergen a una solucón óptima, en el primer modelo no se impuso ninguna restricción al momento de la asignación de portafolio y se obtiene un incremento en la recuperación de un 48 %, mientras que en el segundo modelo se impone un límite de asignación a una empresa, en este modelo se obtiene un incremento de 5 %.

Palabras clave: portafolio óptimo, teoría de portafolios de inversión, Modelo de Valoración de Activos Financieros (CAPM), riesgo de crédito.

Abstract

In this paper we will focus on a mathematical model that allows us to maximize the recovery of a certain portfolio of a financial institution, since the high levels of consumption in the Ecuadorian market along with the large supply of credit by financial institutions have led to certain sectors of the population problems of over-indebtedness.

The main idea of this model is to assign an optimal portfolio value to a specific number of collection companies in order to guarantee the maximum recovery of the portfolio assuming a certain level of risk. To solve this problem we will use the Capital Asset Pricing Model (CAPM), which is based on the theory of investment portfolios. The adaptation of our portfolio allocation problem to the CAPM resulted in two models that converge to an optimal solution, in the first model no restrictions were imposed at the time of the portfolio assignment and an increase in the recovery of a 48 %, while in the second model an allocation limit is imposed on a company, in this model an increase of 5 % is obtained.

Key words: optimal portfolio, theory of investment portfolios, Capital Asset Pricing Model (CAPM), credit risk.

Introducción

Durante los últimos años las instituciones financieras que otorgan crédito van incorporando dentro de sus estrategias de venta modelos matemáticos que les permitan aumentar su colocación, y por ende su participación en el mercado, estos modelos buscan predecir el comportamiento de un cliente con un alto nivel de confianza. Los modelos matemáticos desarrollados se han enfocado en mejorar las estrategias de ventas de crédito, sin embargo muchas instituciones financieras no han desarrollado un método de administración integral del ciclo de crédito, ya que todos los recursos se han enfocado en la venta del crédito. En general, la administración del ciclo de crédito consiste en evaluar cada etapa desde la concesión de un crédito hasta la recuperación total del mismo.

Los altos niveles de consumo en el mercado ecuatoriano junto a la gran oferta de crédito por parte de las instituciones financieras han ocasionado en ciertos sectores de la población problemas de sobreendeudamiento, debido a esto las instituciones otorgadoras de crédito han tenido problemas en la recuperación de los montos entregados y han contratado empresas de cobranza para que realicen el proceso de gestión y recuperación de la cartera.

El problema al que se enfrentan las Empresas de Cobranza surge al momento de realizar la asignación óptima de recursos que permita maximizar la recuperación de la cartera, por lo tanto se hace necesario crear un modelo matemático que nos permita garantizar el objetivo de la entidad financiera. Debido a la heterogeneidad de perfiles de los clientes deudores y a la cantidad de operaciones, los clientes deben ser segmentados de manera que la estrategia implementada permita mejorar la recuperación y a su vez disminuir la pérdida por riesgo crediticio.

Actualmente se cuentan con modelos de score que se utilizan para otorgar créditos, sin embargo el área de estudio de recuperación de la cartera aún no ha sido ampliamente explotada. Desarrollar una metodología que permita optimizar un proceso de cobranzas que utilicé técnicas matemáticas permitirá optimizar el uso de los recursos disponibles y a su vez mejorar la recuperación.

El objetivo de este nuevo modelo es asignar un valor óptimo de portafolio a un número determinado de empresas de cobranza de manera que se garantice la máxima recuperación de cartera a un nivel determinado de riesgo, los resultados del modelo permitirán usar de manera óptima los recursos y realizar una reasginación en caso de ser necesario.

Para resolver este problema de asignación de portafolio óptimo se utilizará teoría de portafolios de inversión la cual nos proporciona herramientas para realizar la selección óptima de los instrumentos de inversión.

Existen varios modelos matemáticos diseñados para la obtención de portafolios óptimos, el modelo más conocido es el de Markowitz cuyo planteamiento surgió a mediados del siglo pasado, en este se busca maximizar la rentabilidad de un portafolio a un nivel determinado de riesgo; con el paso de los años el modelo de Markowitz dio paso a la formulación del Capital Asset Pricing Model (CAMP) el cual será utilizado para resolver el problema de asignación de portafolio.

En primer lugar se revisará brevemente el concepto de administración integral del ciclo de crédito, indicadores financieros de rentabilidad de la cartera, estrategia de cobranza, entre otras. En el siguiente capítulo se revisará la teoría de portafolios de inversión: riesgo, rendimiento, correlación entre activos, planteamiento del modelo de Markowitz, modelo Capital Asset Pricing Model (CAMP). A partir de esta información se realizará el nuevo modelo de asignación de portafolio adaptando al CAMP las variables que se tienen de la entidad financiera por ejemplo: serie histórica de asignación de portafolio, indicadores de recuperación, riesgo de las empresas, rendimientos de las empresas, etc.; estas variables serán utilizadas para la construcción del nuevo modelo, en donde se evaluarán los beneficios de la implementación del mismo que permitan a la empresa la maximización de recuperación de la cartera asignada.

Una vez que se ha realizado la elección óptima del portafolio es necesario realizar un seguimiento del mismo con el objetivo de evaluar los resultados del modelo, realizar modificaciones en caso de que sea necesario, y cada cierto tiempo realizar una adecuada calibración del modelo para seguir obteniendo los resultados esperados.

Capítulo 1

Conceptos Preliminares

1.1. Administración integral de crédito

Durante los últimos años las instituciones que colocan crédito van incorporando dentro de sus estrategias de venta modelos matemáticos que les permitan aumentar su colocación, y por ende su participación en el mercado, estos modelos buscan predecir el comportamiento de un cliente con un alto nivel de confianza.

Una de las herramientas más utilizadas son los modelos de scoring, que se caracterizan por analizar y relacionar variables cuantitativas y cualitativas de los clientes para determinar el riesgo asociado con un posible deudor. Estos modelos han tenido gran impacto puesto que ninguna institución financiera quiere otorgar créditos que probablemente nunca sean cancelados, o proporcionar una oferta mínima a un cliente que podría asumir un riesgo más alto. Por tanto, este método permite clasificar de manera efectiva a los clientes dividiéndolos entre buenos y malos pagadores.

En la actualidad, como consecuencia del uso de modelos de scoring las instituciones financieras han generado ofertas bastante agresivas de colocación de crédito, por ejemplo: tarjetas de crédito, vivienda, autos, consumo, ofertas de aumento de cupo o realizar un avance en la tarjeta; en donde cada vez son más altos los montos y los plazos en los que el cliente puede endeudarse. Todo este panorama conlleva a que muchas instituciones financieras no hayan desarrollado un método de administración integral del ciclo de crédito, ya que todos los recursos se han enfocado en la venta del crédito.

El ciclo de crédito que se muestra en el gráfico 1.1 describe las etapas que se deberían considerar para administrar de manera integral el riesgo generado desde la concesión de un crédito hasta la recuperación total del mismo.

Figura 1.1: Ciclo de Crédito

Revisaremos brevemente cada una de las etapas del ciclo de crédito.

1. **Planificación:**

    - Definición del segmento de mercado a quien va dirigido el producto de crédito y de las características del mismo, por ejemplo: monto, plazo, tasa de interés, tipo de amortización, cupo máximo y pago mínimo para tarjeta, seguros, beneficios, etc.
    - Análisis de rentabilidad del producto.
    - Elaboración de políticas y manuales en donde se explica cómo se procederá con el producto desde su concesión hasta su recuperación.

2. **Adquisición**

    - Definición del proceso de evaluación y aprobación del producto.
    - Definición de procesos para la evaluación de perfiles, desarrollo de un modelo de score y elaboración de políticas y procedimientos para verificación de datos de clientes.
    - Desarrollo de modelos para determinar máximo endeudamiento del cliente.

3. **Mantenimiento**

- Actualización de datos, renovaciones de operación, incremento de cupo y/o avances para tarjeta de crédito.
- Campañas de fidelización por ejemplo: colocación masiva, venta cruzada.

4. **Recaudación**
   - Definición de estrategia de cobranza: asignación de recursos, definición de proceso de cobro de acuerdo a la edad de mora y tipo de cartera, metas e indicadores de efectividad de recuperación.
   - Elaboración de reportes para el control de proceso de recaudación que permitan medir eficiencia y calidad del mismo.

5. **Pérdida**
   Análisis de pérdida del producto en términos de provisiones, pérdida por castigos, pérdida por siniestros, pérdida por venta de cartera.

Una correcta administración de cada una de las etapas del ciclo de crédito permite a la entidad financiera tomar decisiones acertadas que permitan manejar los recursos de manera óptima, lo cual se refleja en la obtención de indicadores financieros de calidad.

1.2. La estrategia de cobranza y su impacto como indicador de rentabilidad

El desempeño de las entidades financieras en el mercado se mide a través de indicadores financieros. Los indicadores más importantes son: índice de morosidad, liquidez, rentabilidad y rentabilidad/patrimonio.

- **Índice de morosidad:** Mide el porcentaje de la cartera improductiva frente al total cartera.
- **Liquidez:** Este indicador relaciona el nivel de depósitos con el nivel de créditos. Mide la disponibilidad que tiene la entidad financiera para atender el pago de pasivos de mayor exibilidad.
- **Rentabilidad:** Mide el grado de retorno de la inversión de los accionistas en la empresa.

- **Rentabilidad/Patrimonio:** Mide el nivel de utilidad o pérdida que generó la gestión operativa de la entidad en relación al patrimonio. La relación entre más alta es mejor.

Debido a que en este trabajo se desarrollará un modelo que permitirá maximizar la recuperación de un determinado tipo de cartera, y esto a su vez permitirá mejorar los indicadores de cobranza en una entidad financiera es importante mencionar el impacto que tiene esta a nivel macro para la misma. Veamos como la cobranza impacta directamente en el indicador de morosidad.

La actividad crediticia tiene un comportamiento pro cíclico, es decir, en las fases expansivas del ciclo en las que el crédito crece fuertemente la morosidad es baja, es aquí cuando tienden a cometerse los errores de evaluación de riesgos que después se traducen en pérdidas durante la fase contractiva. El incremento de la cartera en mora obliga a que las entidades financieras realicen mayores provisiones por cartera lo cual reduce la expansión del crédito y probablemente el ritmo de crecimiento económico.

La Superintendencia de Bancos y Seguros del Ecuador mide el índice de morosidad como el porcentaje de la cartera improductiva frente a la cartera total. Los ratios de morosidad se calculan para el total de la cartera bruta y por línea de negocio. Cuando se incrementa la morosidad crediticia tiene un efecto negativo sobre la rentabilidad a la vez que se da una ruptura en la rotación de los fondos. Lo que trae consigo que la entidad financiera incremente sus provisiones por los créditos impagos, esto a su vez afecta inmediatamente a sus utilidades. Por lo que, un incremento importante en la morosidad, hace que el problema de incumplimiento se traduzca en rentabilidad, liquidez y finalmente en solvencia. (Guillén, 2002).

Para el cálculo de este índice se deben tomar en cuenta los siguientes conceptos:

- **Cartera de Crédito Bruta:** Se refiere al total de la Cartera de Crédito de una institución financiera (comercial, consumo, vivienda y microempresa) sin deducir la provisión para créditos incobrables.

- **Cartera de Crédito Neta:** Se refiere al total de la Cartera de Crédito de una institución financiera (comercial, consumo, vivienda y microempresa) deduciendo la provisión para créditos incobrables.

- **Cartera Improductiva:** Son aquellos préstamos que no generan renta financiera a la institución, están conformados por la cartera vencida y la cartera que no devenga intereses e ingresos[1].

$$\text{Indicador de Morosidad} = \frac{\text{Cartera Improductiva}}{\text{Cartera bruta}}$$

Por destino del crédito se tiene que al cierre de mayo, el saldo de la cartera bruta otorgado por la Banca Privada alcanzó un valor de USD 21.256 millones. Del total de financiamiento otorgado por la Banca Privada, USD 14.293 millones fueron destinados al crédito a la producción. El crédito destinado a sectores productivos, vivienda y microempresa se ubica en 67 % del total. Por otro lado, el crédito destinado al consumo y educación fue de 33 % del total que equivale a un saldo de USD 6.963 millones.

La tasa de morosidad de toda la Banca Privada al cierre de mayo de 2017, se ubicó en 3,59 %. De esta manera, la morosidad cae en 0,2 % en relación al mes anterior. La morosidad por segmentos cerró en mayo en 1,35 % para el segmento comercial, 6,62 % en consumo, 3,24 % en vivienda, 6,19 % en microcrédito y 6,24 % en el educativo[2]. En el caso de los créditos productivos el proceso de cobranza lo realiza un oficial de la entidad bancaria puesto que el cliente en este caso es una empresa, entonces se tiene un trato preferencial y de acuerdo a las características del sector productivo en el cual se desempeña dicha empresa. Nuestro estudio se enfoca en analizar créditos de cartera consumo y microcrédito los cuales representan el segundo grupo de mayor colocación dentro del portafolio total.

En la figura 1.2 se muestra el indicador de morosidad para la Banca Privada:

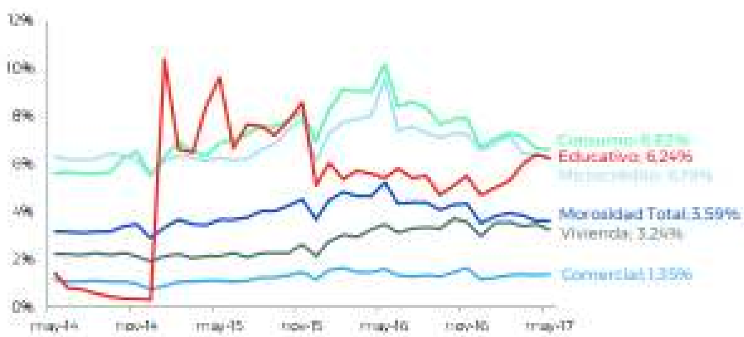

Figura 1.2: Indicador de Morosidad, Fuente SBS

[1]Superintendencia de Bancos y Seguros del Ecuador -SBS. Nota técnica 5. Boletines financieros
[2]Evolución de la Banca Privada Ecuatoriana, Fuente ASOBANCA, Mayo 2017.

Mientras más bajo es este indicador se tiene un mejor desempeño del tipo de la cartera en el mercado, por tanto el objetivo de las entidades financieras es controlar la tasa de morosidad para que se mantenga a niveles deseados, estos niveles fija cada entidad de acuerdo a su aversión al riesgo, en ocasiones hay Bancos que están dispuestos a asumir un mayor riesgo dependiendo del nicho de mercado que tiene o el tipo de garantía que exige. Por ejemplo, una entidad bancaria que otorga crédito con garantía prendaria puede que no se preocupe principalmente del nivel de riesgo sino mas bien mantener cobertura adecuada por las garantías. Es en este punto en donde se hace necesario formular un modelo que nos garantice la máxima recuperación de un tipo de cartera sin aumentar el nivel de riesgo y costos para la entidad financiera.

Dentro de la administración del ciclo de crédito la etapa de cobranza juega un papel crucial, puesto que una vez que se ha otorgado el crédito el objetivo de las empresas es recuperarlo, por tanto se debe contar con una estrategia que permita cumplir con la recaudación de manera efectiva para lo cual hay que diseñar un proceso ágil y amigable con el cliente.

Construir un proceso óptimo de cobranza permitirá disminuir y/o controlar pérdidas de los distintos productos, aumentar la tasa de recaudo, incrementar las utilidades para las instituciones financieras, reducir el nivel de deserción y fidelizar a los clientes.

En principio, cada entidad financiera puede encargarse de dar seguimiento a un proceso de recuperación de cartera, sin embargo el caso que vamos a analizar considera que la entidad contrata a empresas especializadas en cobranza para que realicen esta gestión. La definición de la estrategia a usar para realizar el cobro depende de los recursos de cada empresa de cobranza, por ejemplo: el número de gestores, el tipo de cartera que se va a cobrar, los canales de gestión, entre otras.

Usualmente las estrategias de cobranza se basan en la segmentación de la cartera a recuperar y la utilización de canales de contacto con los clientes. Generalmente, la segmentación se realiza tomando en cuenta el saldo de la operación, edad de mora, probabilidad de pago del cliente, tipo de operación, tipo de producto, entre otros factores.

Los canales que se utilizan para realizar la gestión de cobro pueden ser: llamadas telefónicas, envío de mensajes de texto, visitas domiciliarias, cartas, correos electrónicos, cada uno de estos canales implican costos para la empresa. Una correcta segmentación de cartera junto a un uso adecuado de canales de cobro pueden garantizar una estrategia eficaz de cobranza.

En la actualidad, las empresas diseñan este proceso basándose en algunas de las variables descritas anteriormente o en combinar alguna de estas con el fin de recuperar la cartera; sin embargo, una de las variables decisivas dentro de este proceso es la asignación de recursos ya sea por la capacidad de la empresa, por manejo de costos, entre otras.

Es importante notar que a medida que aumenta la edad de mora de una operación se vuelve más difícil la recuperación lo que puede significar para la empresa contratar más recursos o invertir en otros métodos que mejoren sus indicadores de recuperación.

Por su edad de mora el portafolio se puede dividir de la siguiente manera:

- **Cartera por vencer:** Es la cartera cuya fecha de vencimiento aún no ha llegado, es decir, tiene cero días mora.
- **Cartera en mora:** Es la cartera que sobrepasó su fecha de vencimiento, pero todavía no se vence un plazo establecido para pasar al estado vencido. Por ejemplo: una cartera de consumo puede estar 15 días en mora antes de pasar al estado vencido el día 16, sin embargo una cartera de vivienda puede estar 60 días en mora antes de pasar a vencido el día 61.
- **Cartera Vencida:** Es la cartera que ha sobrepasado el plazo en mora establecido por la Superintendencia de Bancos a partir de su fecha de vencimiento.
- **Cartera No devenga interés:** Todo el saldo restante de un crédito cuya cuota pasó a vencido se contabiliza como cartera que deja de generar interés para la institución financiera.
- **Cartera Castigada:** Este término hace referencia a provisión de cartera, que es el procedimiento contable por medio del cual se reconoce en el gasto operaciones que se consideran imposibles de recuperar, es decir, la institución financiera luego de agotar recursos para recuperar esta cartera procede a castigar la operación que se convierte en una pérdida para la institución y será tratada como un gasto.

En la tabla 1.1 podemos observar un diseño para una empresa que posee todo tipo de cartera y una variedad de canales para realizar el cobro.

Edad de Mora	Descripción	Canal de gestión
Preventiva	Campaña para realizar recordatorios de pago a clientes próximos a entrar en mora	Envío de SMS, llamadas telefónicas
Mora temprana	De 1 a 15 días mora	Envío de SMS, llamadas telefónicas, IVR
Mora intermedia	De 16 a 30 días de mora	Envío de SMS, llamadas telefónicas, visitas de campo
Mora avanzada	De 31 a 60 días	Envío de SMS, llamadas telefónicas, IVR, visitas de campo
Prejudicial	Operaciones que aún no entran en un proceso judicial para su cobro	Llamadas telefónicas, cartas prejudiciales, gestores especializados, abogados, visitas de campo
Judicial	Cartera que se encuentra en demanda	Visitas de campo, gestión legal, abogados
Cartera castigada	Créditos castigados	Visitas de campo, gestores externos especializados, gestión legal

Cuadro 1.1: Esquema de un modelo de cobranzas

A simple vista esta segmentación puede parecer intuitiva, sin embargo la tarea que tiene cada empresa al momento de definir su estrategia es decidir cuántos mensajes se van a enviar en la campaña preventiva, cuántas llamadas al día podemos realizar al mismo cliente de manera que esto nos garantice el pago de la deuda, cuántos abogados se debería contratar para ejecutar los juicios para la cartera demandada, cuántos gestores especializados debería contratar para cobrar la cartera castigada y un sin número más de preguntas. Las respuestas a estas preguntas son cruciales puesto que una mala decisión se refleja en una gestión poco efectiva y en generar costos elevados para la empresa.

La entidad financiera que vamos a analizar posee recursos económicos para contratar gestores externos especializados en cobranza de cartera castigada, el problema es determinar el número óptimo de gestores que debe contratar para garantizar la máxima recuperación y a su vez minimizar el riesgo que representa este tipo de cartera en el portafolio total. Para nuestro problema, un gestor especializado es una empresa experta en recuperación de este tipo de cartera.

Cada una de estas empresas ha desarrollado diferentes tipos de estrategias para persuadir a los clientes y obtener el pago, estas no reciben una remuneración fija cada mes ya sea por número de horas de trabajo o por número de clientes que visitados, su pago corresponde a un porcentaje del monto que han recuperado de su cartera asignada. Por tanto, nuestro problema consiste en asignar el monto óptimo a cada uno de estos gestores de manera que la recuperación sea máxima.

Para resolver este problema vamos a adaptarlo a la formulación de un modelo Capital Asset Pricing Model (conocido como modelo CAPM) el cual combina la relación riesgo-retorno de algunos instrumentos financieros y su correcta combinación indica cuánto riesgo se debe asumir en cada uno de estos de manera que la rentabilidad sea máxima asumiendo un determinado riesgo. Para ello, vamos a revisar con profundidad la teoría del modelo CAPM que más adelante será adaptada para la resolución de este problema de asignación de portafolio.

1.3. Introducción a la teoría de portafolios de inversión

Construir un portafolio eficiente implica identificar los activos específicos que lo integrarán, así como también se debe determinar la proporción con la cual cada activo participará en el portafolio.

Por ejemplo, una institución financiera desea conocer cual es proporción ideal en la cual debe invertir en cada uno de sus tipos de crédito de manera que se maximice la rentabilidad y se minimice el riesgo. En la figura 1.3 se puede observar cómo está compuesto un portafolio. En general, las ofertas de crédito son: comercial, consumo, vivienda, microempresa y educativa.

1.3.1. Elementos Básicos de una Inversión

Dentro de un portafolio existen varios elementos que intervienen al momento de realizar la inversión. Debido a la volatibilidad del mercado ya sea por efectos económicos, políticos y sociales, la rentabilidad esperada puede variar; por tanto en el peor escenario los beneficios esperados se pueden transformar en pérdidas.

A continuación se detallan los elementos básicos de una inversión:

1. **Rendimiento:** Es el porcentaje de ganancia que se obtiene de una inversión durante un cierto período de tiempo. Es importante aclarar que el valor del

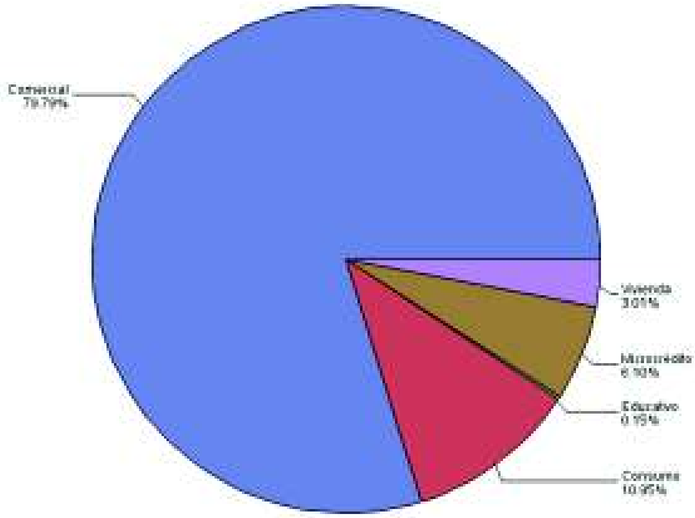

Figura 1.3: Composición de la cartera en la Banca, Mayo 2017. Fuente: Asobanca

rendimiento futuro no se puede predecir con certeza absoluta y que las inversiones que pagan una rentabilidad mayor de igual manera están sujetas a un mayor riesgo y volatibilidad.

2. **Riesgo:** Toda inversion tiene un riesgo asociado. El riesgo es la probabilidad de que el rendimiento sea menor que el esperado. El riesgo de una inversión se puede observar desde diferentes tipos de riesgo, entre ellos se tienen:

   - **Riesgo crediticio:** Es el riesgo de pérdidas por el incumplimiento de un cliente o contraparte de sus obligaciones o contractuales con el Banco. Con el fin de mitigar la pérdida por riesgo crediticio las instituciones han establecido esquemas de administración y control de cada tipo de cartera de acuerdo a características propias de los clientes, segmento de mercado, tipo de producto, entre otras variables.
   - **Riesgo de inflación:** Este riesgo surge como consecuencia de la pérdida del poder adquisitivo que se genera por aumentos en la inflación (alza del costo de mercancías y de servicios). Los factores que generalmente ocasionan un aumento en la inflación son: alta importación de productos a un precio muy alto, alta deuda externa, especulación e inmovilización de dinero a nivel mundial, llegada excesiva de capitales extranjeros, entre otras.
   - **Riesgo de divisas:** Es el riesgo que se origina por la variación en los tipos de cambio de las divisas cuando la inversion fue realizada en una moneda

diferente a la de la cuenta de origen.

3. **Plazo:** Es el período de tiempo determinado por el inversionista en el cual no podrá disponer del monto invertido hasta que llegue la fecha de vencimiento, es decir, es el período en el cual se quiere mantener invertido el instrumento.

4. **Liquidez:** La liquidez de un activo es la facilidad para convertirlo en dinero en efectivo a corto plazo sin sufrir pérdidas.

5. **Diversificación:** Es la elección de diferentes instrumentos de inversion que conforman el portafolio. Cada elemento que conformará el portafolio óptimo tiene sus propias características, lo óptimo es encontrar una combinación ideal entre ellos que permitan obtener el rendimiento esperado por el inversionista y al mismo tiempo se busca disminuir el riesgo total del portafolio.

   Para realizar la elección de los instrumentos que conformaran el portafolio óptimo es necesario considerar el nivel de correlación que existe entre ellos.

6. **Correlación:** El coeficiente de correlación es un índice estadístico que se utiliza para medir el grado de relación de dos variables cuantitativas i y j. Se define de la siguiente manera:

$$\rho = \frac{\sigma ij}{\sigma_i \sigma_j} = \frac{E[(I - \mu_i)(J - \mu_j)]}{\sigma_i \sigma_j}$$

   Se denota por ρ_{ij}, donde $-1 < \rho_{ij} < 1$.

   Para nuestro análisis vamos a utilizar este coeficiente para determinar el grado de correlación existente entre los rendimientos de los instrumentos de inversión que van a formar parte de nuestro portafolio. Cuando $\rho_{ij} = 1$ significa que los rendimientos de los instrumentos varían en forma directamente proporcional a lo largo del tiempo, es decir, ambos instrumentos aumentan o disminuyen en la misma proporción.

   Cuando $\rho_{ij} = -1$ se tiene que los rendimientos de los instrumentos varían de manera inversamente proporcional, esto quiere decir que cuando el rendimiento de un instrumento aumenta el rendimiento del otro disminuye, y viceversa.

   Finalmente, cuando $\rho_{ij} = 0$ no existe correlación entre los rendimientos de los instrumentos, es decir, los rendimiento de un instrumento varían de forma independiente al del otro instrumento.

En conclusión, para construir un portafolio eficiente se deben considerar instrumentos de inversion cuyo coeficiente de correlación sea $\rho_{ij} < 0$, en este punto se compensarían las disminuciones del rendimiento del activo i con los aumentos en el rendimiento del activo j, es decir, tenemos un escenario de total diversificación. Por otro lado, si consideramos únicamente instrumentos cuyo coeficiente de correlación sea mayor que cero, se podría presentar el peor escenario en que se tendrían pérdidas muy grandes, puesto que cuando disminuye el rendimiento del activo i también disminuye el rendimiento del activo j.

En esta parte se explicarán varios conceptos relacionados con la teoría de portafolios de inversión, los cuales son empleados en la formulación del Modelo de Markowitz, el cual más adelante dará lugar al desarrollo del modelo CAMP (Capital Asset Pricing Model) que será utilizado para resolver nuestro problema de asignación de portafolio óptimo.

Lo primero que necesitamos conocer es cuál es el rendimiento total del portafolio, debido a que el portafolio está compuesto de varios instrumentos de inversión y cada uno de ellos tiene un determinado riesgo y rendimiento, entonces el cálculo para obtener el rendimiento total se vuelve más complejo porque se deben considerar todo estos aspectos. Además, se debe considerar el coeficiente de correlación existente entre los distintos instrumentos de inversion que conforman el portafolio.

En la siguiente sección se explicará con detalle cual es el procedimiento para determinar el rendimiento total de un portafolio, y se explicará cuales son los parámetros necesarios para aplicar el modelo de Markowitz.

1.3.2. Cálculo del Rendimiento de un Instrumento de Inversión

La rentabilidad de un título de inversión es una variable aleatoria de carácter subjetivo, esto quiere decir que depende de la percepción del inversor, no es una medición exacta. La distribución de probabilidad para el período de referencia es conocido por el inversor. El valor promedio o esperanza matemática de esta variable aleatoria se acepta como medida de rentabilidad de la inversión.

El rendimiento de un activo i es el cambio de valor que registra en un período t con respecto a su valor inicial en el período $t-1$.

$$R_i = \frac{\Delta P}{P_t} = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_t}$$

Por ejemplo, podemos considerar que el día de ayer el valor de un activo i fue 80 dólares y el día de hoy su valor es de 120 dólares; el rendimiento de un día es de:

$$R_i = \frac{120 - 80}{80} = 0,5$$

Se puede definir al rendimiento del activo i en función del logaritmo de la razón de rendimientos de la siguiente manera:

$$R_i = \ln \frac{P_t}{P_{t-1}}$$

El rendimiento de un portafolio se define como la suma ponderada de los rendimientos individuales de los activos que componen el portafolio multiplicado por el peso que poseen estos activos en el portafolio:

$$R_p = \sum_{i=1}^{n} \omega_i R_i$$

donde:

ω_i : es el peso ponderado de cada activo i en el portafolio.

R_n : es el número de activos que componen el portafolio.

El rendimiento promedio se define como la suma de los rendimientos de cada uno de los activos, entre el número de activos:

$$R_{prom} = \frac{\sum_{i=1}^{n} R_i}{n}$$

Al momento de plantear el problema de maximizar la rentabilidad de un portafolio sujeto a un nivel determinado de riesgo entran en juego el rendimiento de cada activo, su riesgo y la correlación entre ellos. En la figura 2.1 se puede apreciar qué sucede con la rentabilidad a medida que se asume mayor nivel de riesgo. Como resultado de resolver el problema antes mencionado se va a obtener un conjunto de combinaciones rentabilidad-riesgo. Este conjunto se denomina frontera eficiente, este concepto se explicará con mayor detalle en el siguiente capítulo. Una vez conocida esta frontera eficiente, el inversor podrá elegir su cartera óptima de acuerdo a sus preferencias ya que en ésta se encuentran todas las carteras que proporcionan el máximo rendimiento con un riesgo mínimo.

Figura 1.4: Coeficiente de correlación igual a 0

1.3.3. Cálculo del Riesgo de un Instrumento de Inversión

En general, el riesgo surge como consecuencia de la incertidumbre en el resultado del valor y/o posición de un instrumento financiero. La incertidumbre es una situación general de desconocimiento del futuro, mientas que el riesgo, es la probabilidad de que ocurra un evento desfavorable.

Una forma de visualizar el riesgo individual utilizando una técnica estadística es por medio de una distribución de probabilidad.

Analicemos el caso sencillo en el cual la serie de retornos de un instrumento sigue una distribución normal. Los parámetros básicos de la distribución normal son: μ y σ. El primero corresponde a la media y el segundo a la desviación estándar. Dentro de un portafolio de inversión la media es simplemente su rendimiento promedio, y a la desviación estándar se la define como volatilidad.

La medición de riesgo para el rendimiento del instrumento de inversión la vamos a realizar calculando el valor de la desviación estándar. La desviación estándar es un medida de dispersión de los datos, esta nos indica qué tan dispersos están los datos con respecto a la media, por tanto mientras más alto es el valor de la desviación estándar esto representará mayor riesgo. Las fórmulas para el cálculo de estos parámetros son:

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{n} R_i}{n}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(R_i - \mu)^2}{n-1}}$$

donde: R_i es el rendimiento de cada activo i y n es el número de activos en el portafolio.

Finalmente, es necesario introducir el concepto de covarianza, esta es una medida de relación lineal entre dos variables aleatorias describiendo el movimiento conjunto entre éstas. Para nuestro caso de estudio las variables aleatorias a considerar son los rendimientos del portafolio.

La covarianza se determina de acuerdo a la siguiente expresión:

$$COV(R_i, R_j) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[R_i - \mu_i][R_j - \mu_j]$$

Capítulo 2

Teoría de Portafolios de Inversión

2.1. Introducción a la Teoría de Portafolios

La globalización económica es un conjunto de procesos que ha permitido la generalización del comercio mundial y el incremento de las inversiones en mercados internacionales, por tanto se puede visualizar que los hechos financieros de importancia impactan inmediatamente los mercados nacionales. Los precios de los activos financieros se ven directamente afectados por la volatibilidad de las variables macroeconómicas, como por ejemplo los cambios inesperados en el tipo de cambio, las variaciones en la tasa de interés y las caídas de los índices bursátiles de acciones en los mercados nacionales e internacionales; todo esto conlleva a que las empresas aprendan a gestionar el riesgo, con el objetivo de adoptar medidas y tomar acciones oportunas que permitan minimizarlo. En el problema que vamos a resolver, las entidades financieras deben estar a la vanguardia de modelos matemáticos que permitan obtener la máxima rentabilidad de un crédito desde su venta hasta su recuperación asumiendo un nivel de riesgo que no exponga a la entidad a la pérdida y desperdicio en la utilización de recursos.

En la práctica, el uso adecuado de los modelos que permitan un manejo adecuado del riesgo permiten aumentar la eficiencia y la competitividad empresarial. Los empresarios cada vez son más conscientes de la importancia del riesgo asociado a una decisión, por ello cada vez existen más modelos y técnicas cuantitativas que permitan obtener una rentabilidad máxima esperada dentro de un riesgo esperado. Durante los últimos cincuenta años se han venido desarrollando múltiples modelos y técnicas de administración de inversiones. En primer lugar, presentaré el trabajo desarrollado por Harry Markowitz sobre la teoría de portafolios y posteriormente las mejoras que se fue realizando a este modelo con el paso del tiempo.

2.2. Teoría de Selección de Carteras de Markowitz

En esta sección se explicará el inicio del estudio de los portafolios de inversión utilizando el trabajo de [Markowitz,1956]. Harry Markowitz (Premio Nobel en Economía en 1990) es el pionero en el desarrollo de la Teoría de Selección de Carteras, en 1952 publicó en la revista *Journal of Finance* un artículo basado en su tesis doctoral denominado *Portfolio Selection*. En este artículo se afirma que se puede reducir el riesgo de la inversión si se invierte en la combinación de dos o más activos financieros. A la combinación de dos o más activos se le denomina portafolio o cartera de inversiones.

El modelo de Markowitz dio lugar al desarrollo del Modelo de Valoración del Precio de los Activos Financieros o Capital Asset Pricing Model (conocido como modelo CAPM), esta es una de las herramientas más utilizadas en el área financiera para determinar la tasa de retorno requerida para un cierto activo. En la formulación de este modelo trabajaron tres economistas principales: William Sharpe, John Lintner y Jan Mossin, este modelo se estudiará detalladamente más adelante.

Markowitz desarrolla su modelo sobre la base del comportamiento racional del inversor, es decir, el inversor quiere rentabilidad de su portafolio pero rechaza el riesgo. Por tanto, para el inversor su portafolio será eficiente si le proporciona la máxima rentabilidad posible asumiendo un determinado riesgo. Los supuestos básicos de este modelo son:

1. El rendimiento de cualquier título o portafolio es descrito por una variable aleatoria subjetiva, cuya distribución de probabilidad para el período de referencia es conocida por el inversor. El rendimiento del título o portafolio será medido a través de su esperanza matemática como se mencionó en el capíulo anterior.

2. El riesgo de un título o cartera se mide por la varianza o desviación estándar de la variable aleatoria representativa de su rendimiento.

3. Se asume una *conducta racional* del inversor, es decir, el inversor preferirá aquellos activos que tengan mayor rendimiento para un riesgo dado, o un menor riesgo para un rendimiento conocido.

2.2.1. Rendimiento esperado de una cartera

Una vez estimados el riesgo y el rendimiento de cada activo, se determina el rendimiento esperado y el riesgo de una cartera de valores. El rendimiento esperado de una cartera se revisó en la sección 1.4.3 del Capítulo 1. El siguiente paso es calcular el riesgo del portafolio.

2.2.2. Riesgo de una cartera

El riesgo de una cartera depende de la relación entre los diversos rendimientos de activos, esta relación corresponde a la covarianza que se revisó en el Capítulo 1, este concepto es importante puesto que permite al inversor diversificar o reducir el riesgo de su cartera. El riesgo de una cartera p es:

$$\sigma_p^2 = E[(R_p - \bar{R}_p)^2] = E[(\sum_{i=1}^{n} w_i R_i - \sum_{i=1}^{n} w_i \bar{R}_i)^2]$$

$$= E[(\sum_{i=1}^{n} w_i R_i - \sum_{i=1}^{n} w_i \bar{R}_i)(\sum_{i=1}^{n} w_i R_i - \sum_{i=1}^{n} w_i \bar{R}_i)]$$

$$= E[\sum_{i=1}^{n} w_i (r_i - \bar{r}_i) \sum_{j=1}^{n} w_j (r_i - \bar{R}_j)]$$

$$= E[\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j (R_i - \bar{R}_i)(R_j - \bar{R}_j)]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j E[(R_i - \bar{R}_i)(R_j - \bar{R}_j)]$$

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma ij \tag{2.1}$$

donde i y j representan dos activos individuales del portafolio, w_i y w_j sus participaciones en el portafolio,R_p es la rentabilidad del portafolio p, n el número de activos en el portafolio, R_i es el rendimiento del activo i, y σ_{ij} la covarianza entre sus retornos.

2.2.3. Cartera eficiente

Una vez que se ha calculado la rentabilidad y el riesgo de los diferentes activos, el siguiente paso en el modelo de Markowitz es combinarlos, con el fin de obtener una cartera eficiente.

El conjunto eficiente de Markowitz es aquel que contiene las carteras que proporcionan una rentabilidad esperada máxima para diferentes riesgos y un riesgo mínimo, para diferentes índices de rentabilidad esperada.[1]

El objetivo de este modelo es determinar este conjunto de carteras eficientes. Para ello se debe resolver el siguiente problema cuadrático no paramétrico:

$$Min\ \sigma^2(R_p) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i \cdot x_j \cdot \sigma_{ij} \tag{2.2}$$

sujeto a:
$E(R_p) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot E(R_i) = E^*$
$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$
$x_i \geq 0, (i = 1, ..., n)$

donde x_i es la proporción del presupuesto de inversor destinado al activo financiero i, $\sigma^2(R_p)$ es el riesgo del portafolio p, y σ_{ij} es la covarianza entre los rendimientos de los valores i y j. $E(R_p)$ es el rendimiento esperado del portafolio p, por tanto a medida de que se realicen variaciones en el parámetro E^* cada vez que se resuelva el problema se obtendrá un nuevo conjunto de proporciones x_i que minimicen el riesgo de la cartera, así como también su valor correspondiente.

Otra forma de plantear el modelo de Markowitz es maximizar la rentabilidad en función de un riesgo dado. La formulación de este problema se tiene de esta manera:

$$Max\ E(R_p) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot E(R_i) \tag{2.3}$$

sujeto a:

$$F_R = (k - r_L)\sqrt{\sum_{i=1}^{6} \sum_{j=1}^{6} x_i \cdot x_j \cdot VaR_i \cdot VaR_j \cdot \rho_{ij}}$$

$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$
$x_i \geq 0, (i = 1, ..., n)$

donde: $k = 0,22$, es la exigencia de rentabilidad a los accionistas (coste de capital).

[1] La validación y aplicabilidad de la teoría de portafolio en el caso colombiano, 2005.

r_L es la tasa libre de riesgo, este valor es la rentabilidad de un bono emitido por el Departamento del Tesoro de los Estados Unidos.

VaR_i, = Valor en Riesgo del activo i

ρ_{ij}, es la correlación entre el i-ésimo y el j-ésimo activo.

como en el caso anterior x_i es la proporción del presupuesto de inversor destinado al activo financiero i, $E(R_p)$ es la rentabilidad esperada del portafolio, $E(R_i)$ es el rendimiento esperado de cada activo i y ρij es la correlación entre los activos i y j, de igual manera al resolver este problema cada vez que se varíe el parámetro F_r se obtendrá un conjunto de x_i que maximicen la rentabilidad de la cartera. La elección del problema que se va a resolver queda a elección del inversor dependiendo de lo que el desee en un momento dado, ya sea maximizar la rentabilidad dado un nivel de riesgo o en su defecto minimizar el riesgo del portafolio sujeto a un determinado nivel de rentabilidad.

El conjunto de combinaciones rentabilidad-riesgo $[E(R_p), \sigma^2(R_p)]$ de todas las carteras eficientes se denomina *frontera eficiente*[2]. Una vez conocida esta frontera eficiente, el inversor podrá elegir su cartera óptima de acuerdo a sus preferencias ya que en esta se encuentran todas las carteras que proporcionan el máximo rendimiento con un riesgo mínimo.

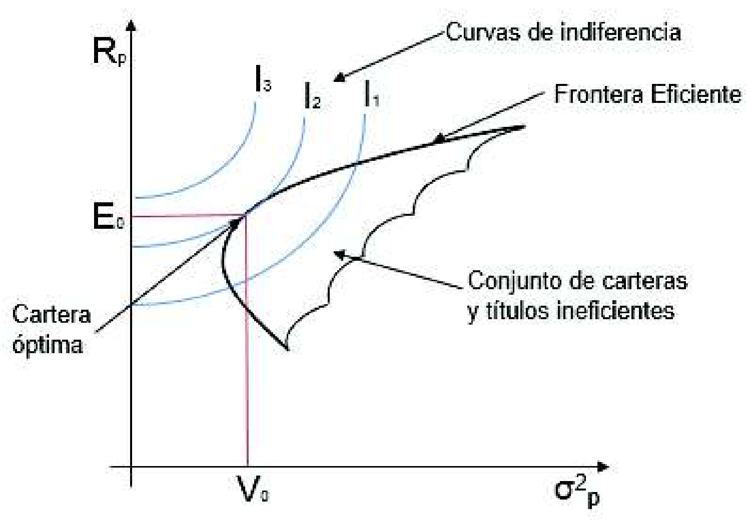

Figura 2.1: Frontera Eficiente

[2]Modelo de selección de portafolio óptimo de acciones mediante el análisis de Black-Litterman

Para entender el concepto del riesgo de una cartera, veamos en primera instancia lo que sucede con dos activos. El riesgo del portafolio para dos activos es:

$$\sigma_p^2 = W_A^2\sigma_A^2 + W_B^2\sigma_B^2 + 2W_AW_B\sigma_{AB} \tag{2.4}$$

donde σ_{AB} es la covarianza entre el retorno del activo A y del activo B, W_A y W_B son los porcentajes que se invierten los activos A y B, respectivamente. Para el caso de dos activos, $\sigma_{AB} = E[(R_{Aj} - \widehat{R}_A)((R_{Bj} - \widehat{R}_B)]$, de decir, es el valor esperado del producto de dos desviaciones est/'andar: las desviaciones estándar en los retornos de la acción A respecto de su media $(R_{Aj} - \widehat{R}_A)$ y el desvío de la acción B respecto de su media $(R_{Bj} - \widehat{R}_B)$. Como se puede observar el valor de la covarianza puede ser positiva o negativa. Como se había visto en el capítulo anterior si dividimos la covarianza para el producto de la desviación estándar del retorno de cada activo se obtiene la correlación existente entre ellos.

$$\rho = \frac{\sigma_{AB}}{\sigma_A\sigma_B} \tag{2.5}$$

A partir de las ecuaciones 2.4 y 2.4 podemos generar un gráfico en donde analizaremos el $\widehat{R}_P$ y la σ_p en función de ρ_{AB}.

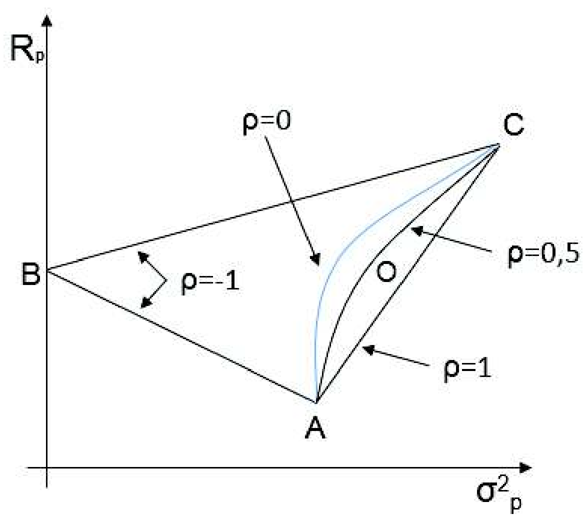

Figura 2.2: Representación de correlación de dos activos, Fuente: Elaboración Propia

Se puede observar que si $\rho = 1$ la relación entre los activos A y C es una línea recta. El otro caso extremo es cuando $\rho = -1$, esta es una combinación de los dos activos que tienen cero riesgo, en esta parte se puede evidenciar por qué es importante el resultado de la diversificación. Así pues, con un $\rho = 0,5$ se formará la curva AOC.

Partiremos del supuesto de que un inversor prefiere un retorno mayor que un menor, y un menor riesgo a un mayor, si se puede encontrar un conjunto de portafolios que ofrezcan un mayor retorno al mismo riesgo y menor riesgo al mismo retorno, entonces se puede identificar todos los posibles portafolios que el inversor podría considerar tener. En resumen, se va a asumir que:

- Entre dos portafolios con el mismo riesgo, el inversor preferirá el de mayor rentabilidad esperada.
- Entre dos portafolios con la misma rentabilidad esperada, se preferirá el de menor nivel de riesgo (aversión al riesgo).

En el gráfico 2.3 se puede observar si existe mayor o menor aversión al riesgo mediante las curvas de indiferencia, puesto que se pueden tener diferentes conjuntos de combinaciones rentabilidad-riesgo indiferentes para el inversor. La forma de estas curvas va a depender del comportamiento que tenga el inversor frente al riesgo. Mientras mayor sea la rentabilidad adicional exigida por el inversor por soportar una unidad adicional de riesgo, mayor es su aversión al riesgo, es decir, podemos concluir que mientras mayor sea la pendiente de la curva de indiferencia mayor será la aversión al riesgo del inversionista.

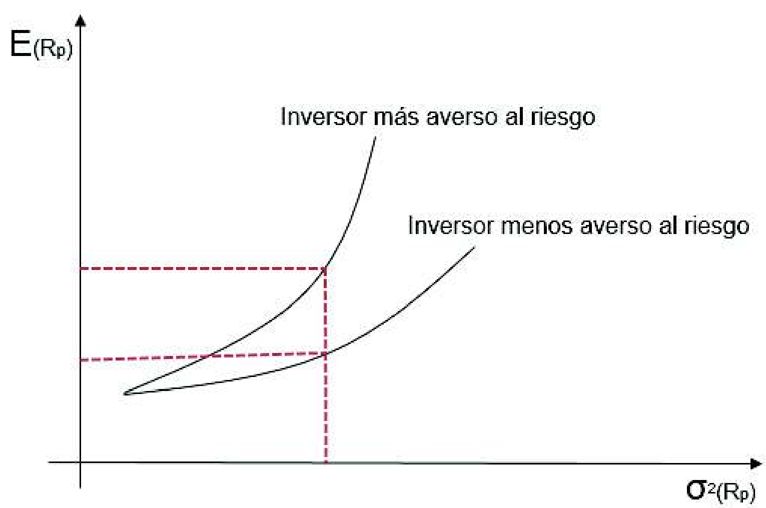

Figura 2.3: Representación de la aversión al riesgo, Fuente Elaboración propia

De esta manera el inversor forma un criterio de decisión que permite separar los "buenos"de los "malos"portafolios.

Vamos a utilizar el Valor en Riesgo (VaR) como indicador de riesgo del portafolio, para explicar este nuevo concepto el autor (Johnson, 2001) explica que el Valor en Riesgo (VaR), o valoración del riesgo, proviene de la necesidad de cuantificar con determinado nivel de significancia o incertidumbre el monto o porcentaje de pérdida que un portafolio enfrentará en un período predefinido de tiempo (Jorion 2000, Penza y Bansal 2001, Best 1998, y Dowd 1998). Su medición tiene fundamentos estadísticos y el estándar de la industria es calcular el VaR con un nivel de significancia del 5 %. Esto significa que solamente el 5 % de las veces, o 1 de 20 veces (es decir, una vez al mes con datos diarios, o una vez cada cinco meses con datos semanales) el retorno del portafolio caerá más de lo que señala el VaR, en relación con el retorno esperado.

Para nuestro caso de estudio, si la serie de retornos sigue una distribución normal se puede utilizar la desviación estándar como indicador de riesgo, caso contrario es necesario modelizar la serie de retornos y calcular el VaR. Para ello es necesario revisar los métodos que existen para su correcta estimación.

2.2.4. Métodos para la estimación del riesgo del mercado

De acuerdo con (Jorion, 2000) el VaR estima la pérdida máxima que puede tener una cartera de inversión en un intervalo de tiempo con un nivel de confianza dado, bajo condiciones normales del mercado. Para calcular el VaR se pueden emplear los siguientes métodos:

- **Método de valoración delta** En el método de medición delta el objetivo es estimar la variación del valor de un portafolio con una medida de sensibilidad de los factores de riesgo [3], utilizando la siguiente expresión

  Pérdida/Ganancia Potencial = sensibilidad de la posición (delta) * cambios potenciales en los factores de riesgo (tasas de interés, de cambio, y precios de activos.

  Esta técnica de valoración delta es fácil de utilizar, sin embargo se reduce a tomar una posición lineal; la linealidad es aquella que permite evaluar una cierta sensibilidad de un portafolio de activos a los cambios del mercado. Se

[3] La sensibilidad establece la relación entre los cambios en el valor del instrumento con un factor o índice relacionado, por ejemplo, la beta en el caso de las acciones, la duración de los títulos de renta fija o la delta de las opciones (Beltrán y Perilla, 2002).

trata de un método paramétrico, donde los parámetros son los promedios, las volatilidades (medidas a partir del cálculo de la desviación estándar) y las correlaciones de las correspondientes distribuciones de rendimientos por variación de precios.

Cuando se utiliza el método delta, se pueden emplear dos fuentes para la estimación de las volatilidades y correlaciones: observaciones históricas de tipos y precios, y precio de opciones en mercados organizados.

De manera general, en el primer caso se calculan las medias móviles exponenciales de las volatilidades históricas con un peso mayor a las observaciones más recientes (modelos GARCH); la segunda mas bien tiene ciertas limitaciones dada la menor amplitud de los mercados organizados. Según Hendricks (1966), este es el motivo principal por el cual la mayoría de los gestores de riesgo basan sus modelos en información histórica.

En resumen, la ventaja principal del método delta es que requiere calcular el valor del portafolio una sola vez, utilizando para este propósito el valor de mercado de los instrumentos financieros del portafolio.

- **Método de valoración global:** Los modelos que utilizan el método de valoración global son llamados de *valoración completa*, a diferencia del método anterior en este no se trata de encontrar una relación explícita entre el valor del portafolio y los factores de riesgo, sino se trata de estimar el valor del portafolio en distintos escenarios (distintos niveles de precios), utilizando la siguiente igualdad:

  pérdida/ganancia potencial= valor de la posición después del cambio potencial del mercado - valor de la posición actual.

  Al utilizar el método de valoración global es posible usar dos opciones: el uso de escenarios definidos por el gestor de riesgos o una simulación de escenarios obtenidos por el método de Montecarlo.

  Cuando se utilizan escenarios que son resultado de una simulación Montecarlo que están basados en volatilidades y correlaciones históricas se generan escenarios de rendimientos esperados que, cuando se aplican a precios y tipos corrientes o a plazo, producen escenarios de precios y tipos futuros; por otro lado cuando se utilizan escenarios propuestos por el gestor de riesgos se pueden asumir posiciones no lineales o se puede caer en el error de simular mercados no normales o inestables.

2.2.5. Metodologías para medir el riesgo de mercado

- **Método de varianzas-covarianzas** Este método supone que el comportamiento de la serie histórica de rendimientos sigue una distribución de probabilidad dada, en la mayoría de casos por simplicidad se supone una distribución normal, donde μ es el valor medio y σ es la desviación estándar, la cual se tomará como medida de volatibilidad de la rentabilidad de los activos como se mencionó en el capítulo anterior.

- **Método de simulación de Montecarlo** Este método consiste en crear escenarios de rendimientos de un activo mediante la generación de números aleatorios. Para la construcción de estos escenarios se supone que el cambio en los precio sigue un comportamiento proceso estocástico (movimiento browniano), específicamente se representa mediante la ecuación del modelo de Weiner:

$$\frac{dP}{P} = \mu dt + \sigma dz$$

$$dz = \varepsilon_t \sqrt{dt}$$

$$\frac{dP_t}{P_t} = \mu dt + \sigma \varepsilon_t \sqrt{dt}$$

donde $\varepsilon_t \sim N(0,1)$ sigue una distribución normal estándar (ruido blanco).

El modelo de Weiner indica que los rendimientos de un activos $\frac{dP}{P}$ están determinados por un componente determinístico μdt y un componente estocástico $\sigma \varepsilon_t \sqrt{dt}$. La técnica de simulación Montecarlo permite generar una gran cantidad de números aleatorios para la variable $\varepsilon_t \sim N(0,1)$, de esta manera se garantiza que se pueda tener igual cantidad de precios simulados del activo para diferentes horizontes de tiempo. El siguiente paso, es valorar el portafolio para cada escenario de precios (valoración global) y se muestran los resultados como distribución de los rendimientos del portafolio como una medida específica de riesgo.

Para simular los escenarios se utiliza la siguiente fórmula:

$$P_t = P_0 \exp^{\sigma \sqrt{t} \varepsilon_t}$$

donde: P_t : precio del activo en el día t
P_0 : precio del activo en el día inicial
σ : volatilidad diaria del precio del activo.
t : horizonte de tiempo en días.
ε_t : variables aleatoria normal estandarizada

Papageorgiue y Paskov (1999) consideran que los mejores métodos para estimar el riesgo de mercado son la simulación histórica y la simulación de Montecarlo; se puede decir que ambos métodos son similares, puesto que el primero se usan cambios historícos en los precios y en el segundo se usan cambios simulados basados en un modelo estocástico.

La simulación de Montecarlo posee la ventaja de probar muchos escenarios de potenciales cambios para las variables financieras. Además permite identificar la sensibilidad del VaR a los cambios en la composición del portafolio o a cambios en los valores de los parámetros estadísticos que se usaron en la simulación (Picout,1999).

Jorion (2000) considera al método de Montecarlo el más efectivo para medir el riesgo de mercado, puesto que es posible incluir el riesgo de precios no lineales y el riesgo de volatilidades, de esta manera se pueden incorporar variaciones de la volatilidad en el tiempo, la existencia de colas de distribuciones más altas de lo normal y simular escenarios extremos para el precio de los activos.

La simulación de Montecarlo en sí es un procedimiento bastante directo si el portafolio consta de un solo activo. Sin embargo, si la cartera de inversiones está compuesta por n activos, entonces se debe simular una secuencia de 5.000 a 10.000 realizaciones para cada uno de los n activos (Jonson,2000). Dependiendo de los escenarios que se van a simular y del número de activos en cuestión este método puede generar un alto costo computacional, y complejidad en su programación; además debido a que la simulación se basa en un modelo estocástico para generar el precio de los activos que componen el portafolio, los datos que se obtienen de la simulación se deberían complementar con un análisis de sensibilidad que nos permita asegurar que los datos obtenidos son fiables con respecto a cambios en los modelos (Martin el ál, 2000).

- **Método de simulación histórica:** Este método se basa en la serie histórica de precios de un portafolio para construir una serie de tiempo de rendimientos esperados simulados de donde se obtiene un vector de pérdidas o ganancias simuladas sobre el portafolio actual. A partir de estos valores finales se puede determinar el percentil asociado al nivel de confianza deseado y hallar el VaR de un conjunto de activos.

La siguiente formulación matemática corresponde a lo descrito anteriormente (Campos, 2002):

$$L_t = VR_t$$

donde: L_t : es la rentabilidad, medida en dinero, sobre V en la fecha t.
R_t : es la serie de retornos históricos ordenados de menor a mayor.
V : es el valor de mercado del activo.

De esta manera se puede encontrar la L_t mínima que corresponde al VaR del activo, utilizando un nivel de confianza 95 % o 99 % según se desee. En resumen, la simulación histórica permite determinar la máxima pérdida a cual podría exponerse un portafolio suponiendo que se repitiera el escenario más desfavorable en la historia de datos que se han considerado para hacer la simulación.

El método de simulación histórica se basa en los siguientes supuestos:

- La volatilidad en un futuro inmediato es esencialmente igual que en el reciente pasado.
- Es bastante probable que las distribuciones pasadas de cambios en las factores de riesgo del mercado mantengan su forma en un futuro cercano.
- Las distribuciones históricas se pueden usar para predecir la distribución de probabilidad en el futuro.

La aplicación de este método implica la elección de un período de tiempo que se considere representativo con el nivel actual de riesgo. Generalmente esta ventana de tiempo oscila entre 250 y 500 días[4]. Gómez (2003:106) manifiesta que si se toman observaciones muy antiguas pueden no ser relevantes en el momento actual, y si se tienen pocas, se pierde precisión en la estimación del VAR. Asimismo, indica que de acuerdo con el Comité de Basilea para aplicar el método de simulación histórica se deben tener observaciones de por lo menos una ventana de tiempo de un año.

[4]Cada día el VeR estimado sería actualizado usando los datos más recientes (por ejemplo, 250 o 500 datos), es decir que los valores de los factores de riesgo del primer día se eliminan, y de forma similar en los días siguientes (De Lara, 2002:67)

En conclusión, no existen indicadores estadísticos que permitan determinar de manera óptima el número exacto de observaciones que se deben incluir para realizar una simulación histórica, sin embargo mientras más amplio es el intervalo considerado, en principio es mejor la calidad de la estimación. Además, cabe mencionar que muchos autores critican este método puesto que al ser un método que usa valores históricos no considera factores que pueden ocurrir en el futuro; por ejemplo, la posibilidad de devaluación de la moneda local, esta crítica no le resta validez puesto que este método supone que comportamientos pasados ocurrirán en el futuro, por tanto mientras se evalúe constantemente su nivel de asertividad es bastante válido para la estimación del VAR.

2.3. Teoría de Equilibrio en el Mercado de Capitales

2.3.1. Riesgo Sistemático y Riesgo no Sistemático

Se van a introducir los conceptos de riesgo sistemático y no sistemático puesto que la formulación del CAMP propone una forma de predecir el riesgo dividiendo a este en dos: riesgo sistemático y riesgo no sistemático. Existen diversos tipos de riesgos cuando se realiza una inversión, al momento de invertir existe la posibilidad de no obtener el rendimiento esperado o en su defecto perder parte de la inversión realizada. Como se había mencionado en el capítulo anterior existen diferentes tipos de riesgos, entre ellos podemos mencionar a los riesgos de mercado, riesgo de crédito, riesgos tecnológicos u operativos.

El riesgo de mercado se puede dividir en dos: riesgo sistemático y el no sistemático. El riesgo sistemático se puede entender como un riesgo inherente a un mercado, es decir, no afecta a un sector particular, sino al mercado en su totalidad. Por ejemplo, en una crisis financiera todas las acciones tienden a bajar al mismo tiempo. Este tipo de riesgo es impredecible y es imposible de evitar en su totalidad.

En la teoría moderna de portafolios se dice que el riesgo sistemático es un riesgo no diversificable, sin embargo esto se refiere a que si una persona invierte únicamente en un mismo mercado accionario entonces este es un riesgo no diversificable; por otro lado, esta persona podría invertir en distintos mercados y se tendría un escenario de diversificación. De esta manera, el riesgo sistemático se puede mitigar mediante una estrategia de inversión en distintos activos.

El riesgo no sistemático se puede controlar o reducir con una diversificación adecuada. Por ejemplo, en un mercado podemos encontrar diferentes tipos de activos, algunos pueden tener un alto índice de correlación, es decir, que tienden a comportarse de manera similar, otros pueden tener una correlación negativa. Entonces al combinar los distintos activos se puede maximizar el rendimiento esperado y reducir el riesgo.

2.3.2. Desarrollo del CAPM

El Modelo de Valoración de Activos Financieros o Capital Asset Pricing Modelo (conocido como modelo CAPM) es una de las técnicas más utilizadas para determinar la tasa de retorno requerida para cierto activo. Este modelo es una extensión del modelo de Markowitz, en el desarrollo de esta teoría trabajaron de manera simultanéa, pero independiente, tres economistas principalmente: William Sharpe (1964), John Lintner (1965) y Jan Mossin(1966), cuyas investigaciones fueron publicadas en diferentes revistas especializadas entre 1964 y 1966. La principal motivación para realizar este trabajo surge por la teoría desarrollada por Markowitz anteriormente en la que se describe un modelo explicativo y predictivo para conocer el comportamiento de los activos financieros.

El modelo CAPM se plantea de una forma sencilla para predecir el riesgo de un activo separándolos en riesgo sistemático y riesgo no sistemático. Como se había visto en la sección anterior el riesgo sistematico se refiere a la incertidumbre económica general, al entorno, a lo exógeno, a aquello que no podemos controlar, mientras que el riesgo no sistemático, en cambio, es un riesgo específico de la empresa o de nuestro sector económico.

Markowitz en su teoría explica los beneficios de la diversificación de un portafolio, en la cual se prueba que mientras mejor se encuentre diversificado se obtiene una mayor rentabilidad. El CAPM usa este principio de diversificación de activos, sin embargo este modelo busca la maximización de cada retorno y a su vez obtener un portafolio aún más rentable, por tanto para un número dado de activos se puede verificar cuáles de estos ofrecen un mayor retorno esperado para cada nivel de riesgo dado; estos elementos en conjunto representan la frontera de riesgo-retorno eficiente de las alternativas de inversión. Más adelante se considerará una opción de inversión teóricamente libre de riesgo, que involucra una alternativas sin riesgo de pérdida.

La Teoría del Portafolio de Markowitz establece los beneficios de la diversificación y formula la línea del Mercado de Capitales. Esta línea tiene pendiente positiva por la relación directa entre el riesgo y el rendimiento (a mayor riesgo, mayor rendimiento). El punto donde se ubican el riesgo y el rendimiento de un activo individual está siempre por debajo de la línea del mercado de capitales (área sombreada de la gráfica). Invertir en un solo activo es ineficiente y la diversificación de cartera propuesta por Markowitz se hace cargo de esta falencia, sin embargo el retorno del portafolio, en conjunto, no alcanza el nivel óptimo.

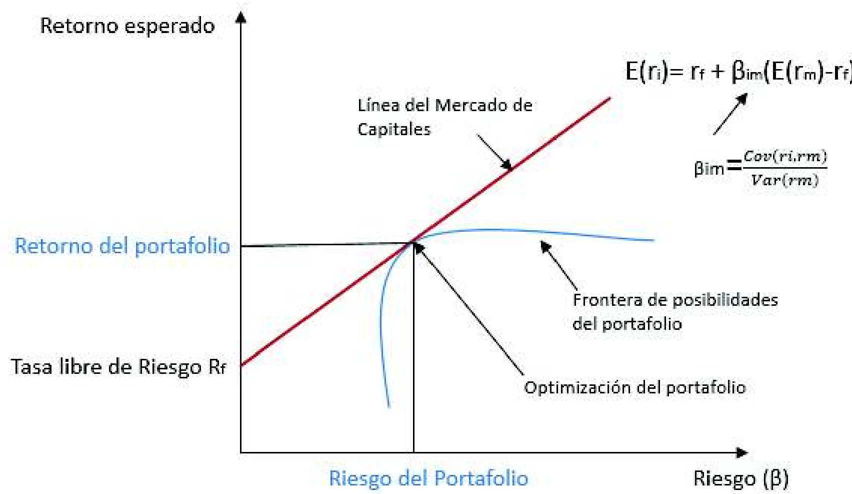

Figura 2.4: Frontera de Riesgo-Retorno Eficiente,

El CAMP indica cómo maximizar cada uno de los activos en forma separada para obtener de este modo el portafolio más rentable, es decir, el CAPM se ubica en la frontera del área de Markowitz (línea azul) y maximiza en la tangente a la línea del mercado de capitales (línea roja) donde el apalancamiento es igual a cero. Eso permite al CAPM construir el portafolio más óptimo al determinar con la mayor precisión los porcentajes de inversión en cada uno de los activos. Para determinar esta fórmula se debe encontrar la relación lineal entre los retornos de una acción determinada y el retorno que se habría obtenido si se hubiese invertido en el portafolio óptimo de mercado. Para ello introduce el parámetro Beta (ß), un índice de componente de riesgo de mercado, que es el protagonista central de este modelo.

La formulación de este modelo se tiene de la siguiente manera:

$$E(r_i) = r_f + \beta_{im}[E(r_m) - r_f] \tag{2.6}$$

donde: $E(r_i)$ es la tasa de rendimiento esperada de capital sobre el activo i.
$r_f =$ representa la tasa de retorno de inversión libre de riesgo
$\beta_{im} =$ representa el Beta de la inversión (o del sector), que indica la sensibilidad de la inversión i al riesgo sistémico (riesgo del mercado)
$E(r_m) =$ representa el retorno promedio esperado de los activos de riesgo disponibles en el mercado; típicamente se mide por la rentabilidad promedio del mercado accionario.
$E(r_m) - r_f$ es el exceso de rentabilidad del portafolio de mercado.

El ajuste de la relación riesgo-retorno se logra mediante la adecuación del precio de los activos relacionados con cada alternativa de inversión. De esta manera se obtiene la ecuación del modelo CAPM que se utiliza para determinar el retorno esperado de una alternativa de inversión dado el nivel de riesgo relativo del mercado.

De manera general, se utiliza el retorno de los títulos federales como *proxy* de la tasa libre de riesgo, pues, en teoría, el riesgo de insolvencia se anula por el hecho de que el gobierno puede fijar impuestos para aumentar sus ingresos y cumplir sus compromisos. Este hecho evidencia la rentabilidad media a largo plazo de esos títulos como la medida más adecuada para determinar la tasa libre de riesgo de una economía.

En resumen, la tasa libre de riesgo es un concepto que asumen que en la economía existe una alternativa de inversión que no tiene riesgo para el inversionista. En la práctica se puede tomar el rendimiento de los Bonos del Tesoro de Alemania o Estados Unidos como la inversión libre de riesgo, debido a que se considera que la probabilidad de no pago de un bono emitido por Estados Unidos es muy cercana a cero.

El coeficiente *beta* es utilizado para medir el riesgo no diversificable, que se expresa en un índice que mide la relación entre el retorno de un activo y el retorno del mercado. Este coeficiente se puede interpretar de la siguiente manera:

- Cuando $\beta > 1$, el riesgo no diversificable del activo es superior al del promedio del mercado.
- Cuando $\beta < 1$, el riesgo no diversificable del activo es inferior al del promedio del mercado.
- Finalmente, cuando $\beta = 1$, la variación del riesgo no diversificable del activo tiende a seguir al mercado.

Es importante destacar la importancia del factor β. Puesto que este factor es el riesgo no diversificable y que depende del riesgo de ese mercado. Este se calcula con la siguiente ecuación:

$$\beta = \frac{Cov(R_{it}, R_m)}{\sigma^2(R_m)}$$

donde: $Cov(R_{it}, Rm) =$ es la covarianza de los rendimientos de loas activos i con los del activo del mercado.
$(R_m) =$ es la rentabiliddad del activo en el mercado.
$\sigma^=$ es la varianza.

Si el β es cero, nuestro retorno esperado será solamente r_0, el valor del activo libre de riesgo, que sería su mínimo valor: por ejemplo, el valor de los Bonos del Tesoro de Estados Unidos. A medida que el β comienza a aumentar (desplazamiento hacia la derecha por la curva horizontal), aumenta también el retorno esperado. Por ejemplo, cuando β es igual a 1, nuestro retorno esperado será igual al retorno del mercado. Esta es la razón por la cual un β muy alto tiende a amplificar la respuesta del sistema. Si el β es 2, el retorno del portafolio aumentará mucho más rápidamente si el mercado sube, por ejemplo, un 10 %; pero también caerá más rápido si el mercado sufre una baja. Un β elevado amplifica la tendencia, mientras que un β menor a 1 la amortigua. En los períodos de bonanza económica es normal que los inversionistas operen con un β elevado. En los períodos de crisis buscan un β pequeño.

2.3.3. Supuestos del CAPM

Para la construcción del Modelo CAMP se asumen los siguientes supuestos:

- Los inversionistas son personas aversas al riesgo, es decir, para inversiones con mayor nivel de riesgo se exigirá mayor rentabilidad de las mismas.

- Es un modelo estático, no dinámico; es decir, los inversores solo se fijan en el próximo período. Por ejemplo: un trimestre, un ano, etc.

- La rentabilidad de los activos sigue una distribución normal. En el caso de que las series de los retornos no sigan una distribución normal es necesario modelar las series utilizando la metodología Box-Jenkins.

- El mercado es perfectamente competitivo. Cada inversor posee una función de utilidad y una dotación de riqueza inicial, es decir, los inversores optimizarán su utilidad en función de las desviaciones del activo con respecto a su mercado.

- Todos los inversores poseen la misma información acerca de los activos, por tanto sus expectativas de rentabilidad y riesgo para cada tipo de activo financiero son las mismas.

Capítulo 3

Modelización

3.1. Planteamiento del problema

Para la realización de este modelo se han utilizado datos mensuales de una institución financiera correspondientes a los años 2015 y 2016. Los datos que se van a utilizar corresponden a cinco empresas de cobranza que son contratadas por esta institución para realizar la gestión de recuperación de un determinado portafolio.

El método de asignación de portafolio actual funciona de la siguiente manera: cada mes se tiene un portafolio que necesariamente tiene que asignarse a gestión de cobranza puesto que ya ha entrado en etapa de mora y se tienen que utilizar distintas estrategias de cobranza para hacer lograr una recuperación efectiva y que de esta manera no genere una pérdida para la entidad bancaria. Como se revisó en el Capítulo 1 la asignación de portafolio depende de diferentes factores, por ejemplo: edad de mora de la cartera, riesgo de la operación (esto se refiere a la cantidad monetaria que representa el crédito) y tipo de crédito (tarjeta, vivienda, consumo, etc.).

Una vez que se ha identificado la cartera que se debe asignar a cobranza se identifica principalmente en qué etapa de mora se encuentra esta cartera; por lo general las operaciones que se encuentran en una etapa de mora temprana o media se distribuyen a personal de la misma institución, principalmente al call center, gestores que realizan visitas a domicilio para realizar el cobro o en el caso de que sea necesario al área legal para que inicie con un proceso legal para la recuperación de la deuda.

Tomando en cuenta los factores antes mencionados aproximadamente el 90 % de este portafolio se distribuye dentro de la misma institución; sin embargo el problema surge al momento de distribuir el 10 % restante, en este porcentaje se tiene cartera castigada, es decir, cartera que emepezó en una etapa temprana de mora pero al transcurrir el tiempo nunca se pudo recuperar pese a que se utilizaron varias estrategias de cobro y se llegó a la instancia de castigo. A pesar de que la entidad bancaria ya ha provisionado la pérdida de esta cartera y no representa un riesgo para la institución aún se puede recuperar pero para ello se deben utilizar estrategias más especializadas.

Actualmente, la empresa distribuye este porcentaje a seis empresas de cobranza especializada, de ahora en adelante a estas se les denominará comisionistas. Cada inicio de mes se reparte el monto de cartera castigada para cada comisionista en partes iguales, este método no garantiza que la recuperación al final del mes sea la máxima; sin embargo para evitar conflictos entre las empresas involucradas se realiza de esta manera. El objetivo de este trabajo es formular un modelo que permita asignar el portafolio a los comisionistas de manera que se garantice una máxima recuperación a un nivel determinado de riesgo. Para cumplir con este objetivo vamos a adaptar variables a la formulación del CAMP.

3.1.1. Desarrollo del modelo

La adaptación al CAMP se realizó siguiendo estos pasos:

1. Levantamiento de información mensual de cartera asignada para cada comisionista. Se han recopilado 23 datos para cada uno. Cada uno de estos datos es un valor monetario expresado en dólares. Con esta información se tendrá la serie de retornos para cada comisionista que se calculó de la siguiente manera:

$$R_{ij} = \frac{P_{ij+1} - P_{ij}}{P_{ij}} \tag{3.1}$$

   donde:

   R_{ij} : es el retorno para cada comisionista $i = 1, ..., 6$ y $j = 1, .., 23$

   P_j : es el monto asignado en el período j.

2. Levantamiento de información mensual del monto recuperado de la cartera asignada para cada comisionista.

3. Se calcula la matriz de correlaciones de las series de los retornos que se calculan en el punto 1, que más adelante nos servirá para calcular el riesgo del portafolio.

4. Se ha definido la rentabilidad como:

$$w_i = \frac{\text{Recuperación(i)}}{\text{Monto Asignado(i)}} \tag{3.2}$$

5. Se calcula la participación de cartera para cada comisionista como sigue:

$$x_i = \frac{\text{Monto asignado comisionista (ij)}}{\text{Total portafolio mensual (j)}} \tag{3.3}$$

   donde: i=1,...,6 y j=1,...,23.

6. En el paso 5 se ha realizado un estudio adicional ya que el modelo puede dar como solución participaciones muy por encima de lo que administrativamente podría manejar una empresa de cobranza, por ejemplo, se puede tener el caso que el modelo nos indique que se debe asignar el 30 % del portafolio a un determinado comisionista, sin embargo a este por su capacidad de gestión nunca se le ha asignado más de un 20 %. Se deben tomar en cuenta este tipo de consideraciones porque el modelo proporciona los resultados sin tomar en cuenta cotas superiores e inferiores.

   Para resolver nuestro problema se han realizado dos casos: uno en el cual no se imponga ningún tipo de restricción de cotas para la asignación de portafolio y otro en el cual se tenga una cota superior para uno de los comisionistas, esto no afecta en la formulación del modelo puesto que es una nueva restricción.

   Se definió una cota superior utilizando la siguiente fórmula de intervalo de confianza:

$$\overline{x} - Z\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{x} + Z\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{3.4}$$

   donde Z es el valor crítico, al 95 % de confianza le corresponde un valor α de 0,05. El valor crítico Z correspondiente al área acumulativa de 0,975 es 1,96 porque hay 0,025 en la cola superior de la distribución y el área acumulativa menor a $Z = 1,96$ es 0,975. Por tanto un nivel de confianza de 95 % lleva a un valor de Z de 1,96.

   De esta manera, la cota superior= $\mu(i) - Z_{95}\sigma(i)$, $i = 1, ..., 6$.
   donde: $Z_{95} \approx 1,64485$ es el nivel de confianza al 95 %.
   $\mu(i)$= promedio de participación en el portafolio de la empresa i en el periodo analizado.
   $\sigma(i)$= desviación estándar de la participación en el portafolio de la empresa de cobranza i en el periodo analizado.

En el paso 6 se debe validar que cada serie construida siga una distribución normal, puesto que esta es una de las hipótesis del modelo CAMP. En el caso de que las series de retornos no sigan una distribución normal se debe modelar la serie utilizando la metodología Box-Jenkins. En nuestro estudio ninguna de las series de retornos cumplen esta hipótesis, por tanto se hizo necesario modelar. Veamos el caso de la serie del comisionista 6.

En la figura 3.1 se tiene la serie de retornos del COM6. Se tienen en total 23 observaciones.

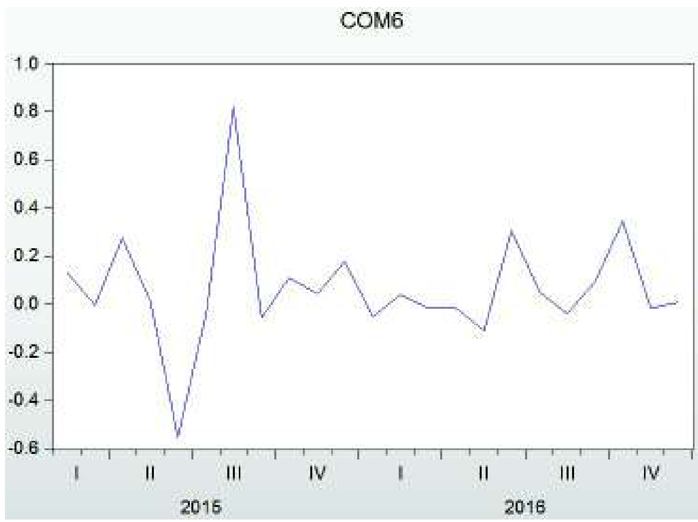

Figura 3.1: Serie de retornos COM6

- **Prueba de normalidad:** Uno de los supuestos del modelo es que las series de retornos sigan una distribución normal, para determinar si esta serie sigue dicha distribución se estudió el estadístico de Jarque-Bera, así como también la probabilidad de que este estadístico exceda (en valor absoluto) el valor observado sobre la hipótesis nula. En otras palabras, una probabilidad muy pequeña permitirá rechazar la hipótesis nula.

  En la figura 3.2 se muestra el histograma para esta serie:

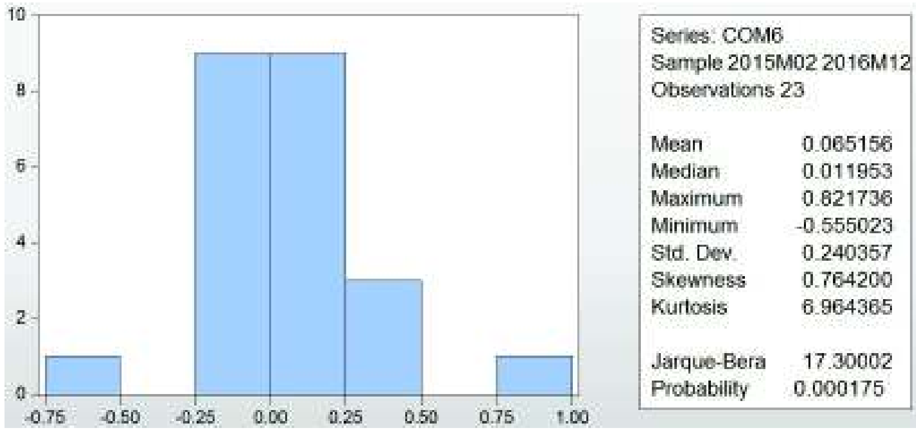

Figura 3.2: Histograma de COM6

Para considerar que la distribución de los retornos sigue una normal el p-value del test debería ser mayor 0.05. En este caso el p-value es menor al nivel de significancia de 0.05, por lo que los errores no cumplen el supuesto de normalidad. Por este motivo es necesario modelar la serie para calcular el VaR del portafolio.

Para estimar el VaR se utilizó el método de simulación histórica, el detalle del método lo revisamos en el capítulo 2. Se realizó la simulación con 23 observaciones, puesto que son pocas observaciones esto se podría considerar como una fragilidad en el modelo.

Para entender el método de cálculo revisemos un ejemplo, en el cuadro 3.1 tenemos 40 datos, que son los resultados que ha tenido un activo durante los últimos años.

Mes / Año	2015	2016	2017	2018
Enero	4,00%	5,06%	2,00%	10,15%
Febrero	6,05%	5,56%	-4,14%	-4,95%
Marzo	-4,84%	9,81%	6,69%	3,69%
Abril	8,25%	4,75%	4,25%	-9,35%
Mayo	5,00%	3,13%	3,88%	
Junio	5,50%	-9,75%	-7,02%	
Julio	-9,00%	6,81%	3,09%	
Agosto	3,45%	17,81%	11,49%	
Septiembre	14,65%	-12,19%	-8,11%	
Octubre	-10,15%	4,33%	4,33%	
Noviembre	5,10%	3,88%	3,40%	
Diciembre	4,50%	3,88%	3,40%	

Cuadro 3.1: Ejemplo de VaR histórico al 95 % de confianza

Para calcular el Var al 95 % de confianza debemos escoger el 5 % de los peores resultados, en el caso que estamos revisando son 2 (el 5 % de los 4 casos). Luego, se escoge el segundo peor resultado de todo el período que es -10.75 %.

Supongamos que la inversión en ese activo es de 1 millón de dólares, el VaR 5 % será 107.500 dólares, es decir, existe un 5 % de probabilidad de perder al menos 107.500 dólares y un 95 % de que esa pérdida sea menor.

Este método se siguió para las 6 series de retornos de los comisionistas. Los valores VaR para las series de retornos de los 6 comisionistas son los siguientes:

$$VaR_{com1} = USD108{,}404$$

$$VaR_{com2} = USD63{,}767$$

$$VaR_{com3} = USD70{,}552$$

$$VaR_{com4} = USD29{,}634$$

$$VaR_{com5} = USD32{,}888$$

$$VaR_{com6} = USD25{,}154$$

3.1.2. Programación en Matlab

La programación de este modelo se realizó en Matlab usando las herramientas Stadistics, Financial, Optimization Tool Boxes, en general se declaran las variables que vamos a utilizar de la siguiente forma:

1. **Módulo 1**

   - Introducimos la matriz de correlaciones declarada en la sección anterior. Esta matriz calcula las correlaciones de los retornos de los seis comisionistas.
   - Planteamiento de la función objetivo

     $$F = \sum_{i=1}^{6} x_i \cdot w_i$$

     donde x_i son los valores óptimos de asignación que nos proporcionará el modelo, y w_i son las rentabilidades de cada comisionista en el portafolio.
   - Declaración del nivel de riesgo

     $$F_R = (k - r_L)\sqrt{\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6} x_i \cdot x_j \cdot VaR_i \cdot VaR_j \cdot \rho_{ij}}$$

     donde: $k = 0,22$, es la exigencia de rentabilidad a los accionistas (coste de capital).
     r_L, es la tasa libre de riesgo, este valor es la rentabilidad de un bono emitido por el Departamento del Tesoro de los Estados Unidos.
     VaR_i, = Valor en Riesgo del comisionista i
     ρ_{ij}, es la correlación entre el i-ésimo y el j-ésimo comisionista.

2. **Módulo 2**

   Declaración de la función objetivo en Matlab, para utilizar la función fmincon la función objetivo debe declararse como una función que dependa de la variable x.

3. **Módulo 3**

   Para utilizar el solver con restricciones no lineales que ofrece el Optimization ToolBox de Matlab ingresamos la función de riesgo definida en el Módulo 1. Esta parte se puede visualizar en los Anexos puesto que el código es muy extenso.

4. **Módulo 4**

   La ejecución de este modelo recoge los resultados de los módulos 1, 2 y 3, se incluyen las restricciones de desigualdad no lineal, se utilizó la función fmincon. Los resultados del modelo son: un vector de parámetros óptimos de asignación de portafolio y F el valor de la función objetivo.

Para validar la convergencia del método el resultado muestra la variable exitflag en la que se tienen los posibles valores:

- exitflag=0, el método alcanzó el número máximo de iteraciones de la función fmincon, no se tiene un resultado de convergencia del modelo.
- exitflag<0, indica que el método no converge, es necesario evaluar las variables y restricciones que se plantean al inicio.
- exitflag>0, se tiene convergencia del método, es decir, este ha encontrado el vector óptimo que resuelve nuestro problema de asignación.

3.1.3. Resultados del modelo

Como se explicó en el apartado anterior se realizaron dos casos para resolver nuestro problema:

- Caso 1: modelo sin cotas superiores e inferiores al momento de asignación. Partimos de la premisa de que no existen restricciones por parte de la entidad financiera al momento de asignar portafolio a los distintos comisionistas, es decir, no existe un valor máximo o mínimo al momento de asignar. Se tiene el siguiente resultado:

Empresas	Participación actual	Participación histórica				Resultados	
	dic-16	Mínimo	Máximo	Promedio	Desviación estándar	Óptimo sin cotas	Actual vs óptimo
Comisionista 1	15,31%	8,09%	15,96%	11,30%	2,71%	7,85%	7,46%
Comisionista 2	8,81%	5,44%	8,81%	6,98%	0,83%	21,15%	-12,34%
Comisionista 3	30,36%	20,49%	32,68%	26,19%	3,91%	15,23%	15,13%
Comisionista 4	12,49%	12,49%	34,98%	26,81%	6,38%	19,44%	-6,95%
Comisionista 5	15,81%	11,74%	18,22%	14,73%	1,93%	14,95%	0,86%
Comisionista 6	17,22%	7,21%	18,03%	14,00%	2,67%	21,38%	-4,16%
Total	100,00%					100,00%	

Cuadro 3.2: Resultados del modelo: caso 1

- Caso 2: modelo con cota superior para el comisionista 2. En esta parte se supone que por política de la entidad financiera se debe asignar un máximo de 20 % al comisionista 2 y para los otros no existe limitación en la asignación. Para este caso los resultados fueron los siguientes:

Empresas	Participación actual	Participación histórica				Resultados	
	dic-16	Mínimo	Máximo	Promedio	Desviación estándar	Óptimo con cotas	Actual vs óptimo
Comisionista 1	15,31%	8,09%	15,96%	11,30%	2,71%	9,23%	6,08%
Comisionista 2	8,81%	5,44%	8,81%	6,98%	0,83%	**10,00%**	-1,19%
Comisionista 3	30,36%	20,49%	32,68%	26,19%	3,91%	23,45%	6,91%
Comisionista 4	12,49%	12,49%	34,98%	26,81%	6,38%	14,78%	-2,29%
Comisionista 5	15,81%	11,74%	18,22%	14,73%	1,93%	18,25%	-2,44%
Comisionista 6	17,22%	7,21%	18,03%	14,00%	2,67%	24,29%	-7,07%
Total	100,00%					100,00%	

Cuadro 3.3: Resultados del modelo: caso 2

Se evaluó el valor de la función objetivo que se planteó al inicio, para el primer modelo las nuevas participaciones del modelo de portafolio óptimo incrementan la recuperación en un 40 %, para la entidad financiera esto significó un aumento de USD 986.043,09 en la recuperación; en el segundo caso, en el cual se impone una cota máxima de asignación del 10 % para el segundo comisionista, con esta cota se incrementa la recuperación en un 8 %, esto significó un aumento de USD 205.281,62.

Finalmente, se realizaron dos modelos que permitan asignar un portafolio óptimo para dos períodos anteriores sin imponer ninguna restricción al momento de la asignación, esto con el objetivo de analizar el dinamismo del modelo y no solo obtener un resultado con un período en particular. En este tercer modelo, se obtuvo un incremento en la recuperación de un 36 %, y en el cuarto modelo un aumento de 31 %, esto en términos monetarios hubiese representado un aumento de recuperación de USD 797.593,59 y USD 824.741,74, respectivamente. En promedio, con el primero, tercero y cuarto modelo se hubiese tenido un incremento promedio de un 38 %, es decir, aproximadamente USD 1.000.000 en recuperación mensual.

Empresas	Participación actual	Resultados	
	nov-16	Óptimo sin cotas	Actual vs óptimo
Comisionista 1	14,00%	6,34%	7,66%
Comisionista 2	9,32%	20,09%	-10,77%
Comisionista 3	25,00%	12,24%	12,76%
Comisionista 4	16,00%	22,36%	-6,36%
Comisionista 5	16,34%	15,87%	0,47%
Comisionista 6	19,34%	23,10%	-3,76%
Total	100,00%	100,00%	

Cuadro 3.4: Resultados del modelo: caso 3

Empresas	Participación actual	Resultados	
	oct-16	Óptimo sin cotas	Actual vs óptimo
Comisionista 1	13,00%	7,11%	5,89%
Comisionista 2	10,00%	17,23%	-7,23%
Comisionista 3	30,36%	14,45%	15,91%
Comisionista 4	10,00%	16,87%	-6,87%
Comisionista 5	17,24%	20,05%	-2,81%
Comisionista 6	19,40%	24,29%	-4,89%
Total	100,00%	100,00%	

Cuadro 3.5: Resultados del modelo: caso 4

Capítulo 4

Conclusiones

El objetivo de este proyecto fue desarrollar un modelo de asignación de portafolio óptimo para una entidad financiera para ellos se adaptó la formulación del modelo CAPM al tipo de información que disponíamos de dicha institución. Las conclusiones más relevantes son las siguientes:

- El modelo CAMP usado correctamente en la optimización de portafolios es de gran utilidad para los analistas puesto que proporciona un portafolio más con mayor desempeño que los portafolios que se pueden construir de manera intuitiva; sin embargo es importante mencionar que el éxito de su aplicación depende de la correcta estimación de los retornos esperados, el nivel de riesgo que se va a asumir y el planteamiento de las restricciones. Además, debido a que los cálculos se realizan utilizando información histórica se debe establecer un período de ajuste del modelo para que no pierda nivel de asertividad.

- Optimización de recursos: el modelo nos proporciona los factores óptimos de asignación de portafolio a cada una de las empresas de cobranza para obtener la máxima rentabilidad, esto permite a la entidad financiera evaluar el desempeño de cada empresa de cobranza asignar un porcentaje mayor al mejor recurso y uno menor o prescindir del peor recurso.

- Evitar manipulación de información: puesto que antes se tenía un modelo intuitivo se podía asignar de acuerdo al criterio y experiencia de la persona de turno, esto en un futuro podría generar problemas legales con la entidad financiera, esto se posible porque todos los procesos son auditados y evaluados continuamente para evitar que se esté realizando una práctica indebida. La persona puede entrar en conflicto ya no cuenta con un respaldo técnico de su método.

- Se tiene convergencia del método utilizado para las dos situaciones analizadas: en el primer caso no incluir una cota máxima para los porcentajes de participación de las empresas de cobranza, y en el segundo caso incluir una cota máxima para una de las empresas de cobranza.

- Los porcentajes de asignación óptimos obtenidos de este modelo son a nivel macro, es decir, dado un portafolio inicial se tiene el porcentaje que se tiene que asignar cada empresa; sin embargo para un futuro trabajo se puede desarrollar un método que permita distinguir el tipo de cartera, por ejemplo: tarjetas de crédito, vivienda, autos, etc. Esto permitirá asignar con mayor nivel de precisión el portafolio ya que se identificaría si una empresa posee mejores estrategias de cobranza para recuperar un tipo de cartera en específico.

- Este modelo permite una asignación de metas de recuperación para cada empresa de acuerdo al nuevo porcentaje de asignación de portafolio lo cual se traduce en aumentar el nivel de productividad de cada empresa y a su vez que generar máxima ganancia para la entidad financiera y disminuir costos.

- El modelo CAMP demuestra en su fundamento teórico que la parte más importante para diversificar un portafolio no depende únicamente del número de acciones que lo componen, sino también de las correlaciones de las rentabilidades de las mismas. Se obtendrá mayor rentabilidad al combinar distintos activos siempre y cuando la correlación de estos activos entre sí sea inferior a 1. Además, es posible obtener mayor beneficio cuanto menor sea la correlación entre dichos activos ya que el riesgo será menor.

- Se realizó tres modelos de portafolio óptimo para diferentes períodos sin imponer ninguna cota al momento de la asignación para alguna empresa, en promedio la recuperación se hubiese incrementado en un 36 % con respecto a la recuperación real, es decir, esto en términos monetarios significa aproximadamente USD 850.000 en recuperación mensual.

Capítulo 5

Anexos

5.1. Código en Matlab

ASIGNACIÓN PORTAFOLIO ÓPTIMA DE PORTAFOLIO

COM(1)= COMISIONISTA 1

COM(2)= COMISIONISTA 2

COM(3)= COMISIONISTA 3

COM(4)= COMISIONISTA 4

COM(5)= COMISIONISTA 5

COM(6)= COMISIONISTA 6

Declaración vector inicial.

x0=ones(1,6);

Se crea matriz para restricción de igualdad.

x(1)+x(2)+x(3)+x(4)+x(5)+x(6)=1

Aeq=ones(1,6);

beq=1;

Matriz de restricciones de desigualdad lineal y el vector de constantes.

Ax<=b1;

A=-eye(6);

b1=zeros(6,1);

Límite inferior(a) y límite superior(b).

b=[1 0.1 1 1 1 1];

load cota

a=CI';

Función Fmincon: calcula el min o max de una función no lineal

format long

options = optimset('LargeScale','off');

Ejecución del modelo

$$x, fval, exitflag, output, lambda, grad, hessian$$

=fmincon(@objfun,x0,A,b1,Aeq,beq,a,b,@confuneq,options)

X=x'

F=-fval

S=sum(X);

Cargar la función objetivo.

load datos;

fecha=input('Ingrese el valor del mes actual: 24=12/1/2016 : ');

f1=-(RA(:,fecha))';

f2=sym('a',[6 1]);

f3= f1*f2;

f4=simplify(subs(f3,transpose(f2),'[x(1),x(2),x(3),x(4),x(5),x(6)]'));

f5=str2mat(f4);

save ('funcion', 'f5');

Cargar la restricción no lineal.

Monto asignado=datos varianza covarianza

Data estudio = Monto asignado(1:fecha,:);

Matriz de correlación.

C=corr(Data estudio);

Vector VaR: Contiene información relacionado al var individual de cada producto.

Vector VaR=RT';

Declaramos una matriz como simbólica.

M=f2;

V2= M.*transpose(Vector VaR);

V3=transpose(V2)*C*V2;

Cambio las variables a1...a14 por x(1)...x(6)

V4=simplify(subs(V3,transpose(M),'[x(1),x(2),x(3),x(4),x(5),x(6)]'));

Cálculo de pesos hasta la fecha de análisis.

T1=Monto asignado(fecha,:)/sum(Monto asignado(fecha,:));

T2=T1.*Vector VaR;

K=0.22;

r=0.1;

w=K-r;

format long;

Cálculo de la función de riesgo

R1=(sqrt(T2*C*T2'))*w;

Para cargar la función en módulo de cálculo

Igualamos a cero la ecuación

V5=(w*sqrt(V4))- R1;

Transformación de la ec. de simbólica a numérica.

V6=str2mat(V5);

function f = objfun(x)

load funcion;

f=copiar f5 resultado del código funciones.m

```
f = - (3804683294283579*x(1))/576460752303423488 - ...
    (2837706095389855*x(2))/72057594037927936 - ...
    (1040693306782439*x(3))/144115188075855872 - ...
    (7899989287711519*x(4))/1152921504606846976 - ...
    (10093095307281*x(5))/1125899906842624 - ...
    (8163286989562461*x(6))/1152921504606846976;
```

Resultados con cotas superiores todas al 100 por ciente, máximo

PORTAFOLIO ÓPTIMO

Local minimum found that satisfies the constraints.

Optimization completed because the objective function is non-decreasing in feasible directions,

to within the default value of the optimality tolerance,and constraints are satisfied to within t

he default value of the constraint tolerance.

<stopping criteria details>

x =

0.068338554016163
0.243998888403672
0.197652069513937
0.163195934230863
0.115532918875571
0.211281634959794

fval =

-0.015137195552623

exitflag =

1

output =

struct with fields:

iterations: 16

funcCount: 120

constrviolation: 4.284766985662714e-15

stepsize: 7.771188828221917e-07

algorithm: 'interior-point'

firstorderopt: 2.084913521393367e-07

cgiterations: 0

message: 'Local minimum found that satisfies the constraints.

Optimization completed because the objective function is non-decreasing in feasible directions,

to within the default value of the optimality tolerance, and constraints are satisfied to

within the default value of the constraint tolerance.

Stopping criteria details:Optimization completed:

The relative first-order optimality measure, 2.084914e-07,

is less than options.OptimalityTolerance = 1.000000e-06,

and the relative maximum constraint violation, 1.639374e-15,

is less than options.ConstraintTolerance = 1.000000e-06.

Optimization Metric Options relative first-order optimality = 2.08e-07

OptimalityTolerance = 1e-06 (default)?relative max(constraint violation) = 1.64e-15

ConstraintTolerance = 1e-06 (default)

lambda =

struct with fields:

eqlin: 0.074293506670997

eqnonlin: -1.009811938787569

ineqlin: 6x1 double

lower: 6x1 double

upper: 6x1 double

ineqnonlin: 0x1 double

grad =

-0.006600073422305
-0.039381083101034
-0.007221260457300
-0.006852148449980
-0.008964469423518
-0.007080522715114

hessian =

0.154100066	0.047237955	-0.080998329	-0.237476573	-0.015700854	0.246948414
0.047237955	0.050178878	0.060483546	0.054949807	0.054442501	0.064615868
-0.080998329	0.060483546	0.763715483	-0.083764119	-0.007977322	-0.327867356
-0.237476573	0.054949807	-0.083764119	1.875946865	0.155428505	-0.134716906
-0.015700854	0.054442501	-0.007977322	0.155428505	0.252777742	-0.039705549
0.246948414	0.064615868	-0.327867356	-0.134716906	-0.039705549	0.487167678

X =

0.068338554016163
0.243998888403672
0.197652069513937
0.163195934230863
0.115532918875571
0.211281634959794

F =

0.015137195552623

Resultados con cota del comisionista 2 al 10 por ciento

PORTAFOLIO ÓPTIMO

Local minimum found that satisfies the constraints.

Optimization completed because the objective function is non-decreasing in

feasible directions, to within the default value of the optimality tolerance,

and constraints are satisfied to within the default value of the constraint tolerance.

<stopping criteria details>

$$x = \begin{matrix} 0.068575439007801 \\ 0.099989611555160 \\ 0.197809640307764 \\ 0.163277081059693 \\ 0.228531034646592 \\ 0.241817193422989 \end{matrix}$$

fval =

-0.010698387482109

exitflag =

1

output =

struct with fields:

iterations: 22

funcCount: 162

constrviolation: 4.549312315749177e-13

stepsize: 8.219940010535613e-06

algorithm: 'interior-point'

firstorderopt: 8.454727382671209e-07

cgiterations: 0

message: Local minimum found that satisfies the constraints.

Optimization completed because the objective function

is non-decreasing in feasible directions,

to within the default value of the optimality tolerance,

and constraints are satisfied to within

the default value of the constraint tolerance.

Stopping criteria details:Optimization completed:

The relative first-order optimality measure, 8.454727e-07,is less than options.

OptimalityTolerance = 1.000000e-06,

and the relative maximum constraint violation, 2.147259e-13, is less than options.

ConstraintTolerance = 1.000000e-06.

Optimization Metric Options relative first-order optimality = 8.45e-07.

OptimalityTolerance = 1e-06 (default) relative max(constraint violation) = 2.15e-13.

ConstraintTolerance = 1e-06 (default)

lambda =

struct with fields:

eqlin: 0.010160921307894

eqnonlin: -0.046142318343096

ineqlin: 6x1 double

lower:6x1 double

upper: 6x1 double

ineqnonlin: 0x1 double

grad =

-0.006600073422305
-0.039381082984619
-0.007221260340884
-0.006852148449980
-0.008964469423518
-0.007080522715114

$$
\text{hessian} = \begin{matrix} 0.16424807 & 0.07301172 & -0.00312465 & -0.20130233 & 0.03199672 & 0.26740181 \\ 0.07301172 & 0.06017718 & 0.02749060 & -0.03372735 & 0.03534665 & 0.10342209 \\ -0.00312465 & 0.02749060 & 0.06514759 & 0.11762632 & 0.04533245 & -0.03398013 \\ -0.20130233 & -0.03372735 & 0.11762632 & 0.49748922 & 0.05113811 & -0.39426515 \\ 0.03199672 & 0.03534665 & 0.04533245 & 0.05113811 & 0.04061111 & 0.02851305 \\ 0.26740181 & 0.10342209 & -0.03398013 & -0.39426515 & 0.02851305 & 0.45619014 \end{matrix}
$$

X =

0.068575439007801
0.099989611555160
0.197809640307764
0.163277081059693
0.228531034646592
0.241817193422989

F =

0.010698387482109

Bibliografía

[1] S. A., *Decisiones óptimas de inversión y financiación en la empresa financiación en la empresa*, Ediciones Piramide, (2005).

[2] K. BACK, *Asset Pricing and Portfolio Choice Theory (Financial Management Associaton Survey and Synthesis Series)*, Oxford University Press, (2017).

[3] H. . G. L. BANDA, *Una aproximación de la teoría de portafolio a las siefores en México*, Pensamiento Gestión, (2014).

[4] R. BLACK, FISCHER Y LITTERMAN, *Global Portfolio Optimization*, Financial Analysts Journal, 15 (1992), pp. 1–7.

[5] H. CAPA, *Un primer curso de series temporales*, Escuela Politécnica Nacional, (2008).

[6] J. COCHRANE, *Asset Pricing*, Princeton University, (2005).

[7] W. DROBITZ, *How to avoid the pitfalls in portfolio optimization Putting the Black-Litterman aproach at work*, Financial Markets and Portfolio management, 15 (2001).

[8] I. DUBOVA, *La validación y aplicabilidad de la teoría de portafolio en el caso colombiano*, Scielo, (2005).

[9] F. . M. H. FABOZZI, *The Theory and Practice of Investment Management*, John Wiley, (2002).

[10] S. J., *Metodologías de medición del riesgo de mercado*, Innovar, (2009).

[11] P. JORION, *Value at risk : the new benchmark for managing financial risk*, McGraw-Hill, (2001).

[12] H. MARKOWITZ, *Portfolio Selection*, The Journal of Finance, (1952).

[13] ——, *Portfolio Selection*, Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investment, (1959).

[14] F. PÉREZ, *Introducción a las series de tiempo. Modelos paramétricos*, Universidad de Medellín, (2007).

[15] B. R. . M. S., *Principios de Finanzas Corporativas*, McGraw Hill, (2005).

[16] H. VEVY, *The Capital Asset Pricing Model in 21st century: analytical, empirical and behavioral perspectives*, Cambridge University Press, (2011).