ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS

COMPARACIÓN Y CONTRASTE DE LOS ENFOQUES CLÁSICO (AMBROSSETI Y RABINOWITZ) Y TOPOLÓGICO (KATRIEL) DEL TEOREMA DE MOUNTAIN PASS (PASO DE MONTAÑA)

TRABAJO DE TITULACIÓN PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE MATEMÁTICO

ENSAYOS

MIGUEL ALEJANDRO AGUILAR ENRÍQUEZ

miguel.aguilar@epn.edu.ec

Director: MARCO VINICIO CALAHORRANO RECALDE

marco.calahorrano@epn.edu.ec

QUITO, ENERO 2019

DECLARACIÓN

Yo MIGUEL ALEJANDRO AGUILAR ENRÍQUEZ, declaro bajo juramento que el trabajo aquí escrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

A través de la presente declaración cedo mis derechos de propiedad intelectual, correspondientes a este trabajo, a la Escuela Politécnica Nacional, según lo establecido por la ley de Propiedad Intelectual, por su reglamento y por la normativa institucional vigente.

Miguel Alejandro Aguilar Enríquez

CERTIFICACIÓN

Certifico que el presente trabajo fue desarrollado por MIGUEL ALEJANDRO AGUILAR ENRÍQUEZ, bajo mi supervisión.

Marco Vinicio Calahorrano Recalde

Director del Proyecto

AGRADECIMIENTOS

A lo largo de mi experiencia universitaria muchas han sido las personas que de una u otra manera han inspirado mi desempeño estudiantil en general y la redacción de este Trabajo de Titulación en específico. Por su cariño incondicional, su respetuoso apoyo a mis decisiones y sobre todo por su paciencia frente a mis indecisiones, agradezco infinitamente a Verónica y Jorge. Por escucharme en los momentos de desahogo frente a lo que parecía una carga excesiva en determinados momentos de la carrera, agradezco a todas y todos mis amigas y amigos, en especial a Camila y Geremy. A Sofía, mi hermana favorita, le agradezco por ser la número uno. A las decenas de profesoras y profesores que, desde propedéutico a último semestre, han nutrido mi curiosidad por las Matemáticas con su trabajo no puedo dejar de agradecerles; en especial a Marco, además de por aquello, por su amable confianza y profesional guía. Por último, agradezco a Patty Jenkins y Greg Rucka ya que por su inspirador arte, más que por cualquier otra cosa, recordaré a la etapa universitaria como una buena época.

DEDICATORIA

A mi madre y a mi padre

ERRATA

En el título del presente trabajo el apellido del matemático Antonio Ambrosetti se encuentra erróneamente escrito. Este error tipográfico no fue detectado en el proceso de aprobación del Plan de Trabajo de Titulación y debido a problemas con las fechas límite de entrega de anillados y ciertas adversidades administrativas no pudo corregirse. El autor ofrece una sincera disculpa a los lectores y sobre todo al Profesor Ambrosetti.

Índice

1. Prólogo

El primer momento que tuve contacto académico relacionado con el Teorema de Paso de Montaña ocurrió durante el último año de mis estudios universitarios al finalizar el curso optativo llamado *Ecuaciones Diferenciales Parciales Semilineales Elípticas para Principiantes* que fue dictado por el matemático Marco Calahorrano. Como parte de la calificación final de aquel curso precisaba exponerle a la clase lo que había entendido sobre un artículo del matemático brasileño Djairo Guedes de Figueiredo [11] referido a problemas de tipo Ambrosetti-Prodi. El artículo había sido escogido a propósito por el profesor para abarcar temas que expandían ampliamente a aquellos revisados durante el semestre para, entre otras cosas, evidenciar que el término *principiantes* en el nombre del curso no estaba de más: aunque la clase haya resultado avanzada en el contexto de la malla curricular, leyendo el artículo uno podía darse cuenta de la variedad de técnicas que quedaron por estudiar y de la notable dificultad de las mismas.

Una de estas técnicas era precisamente el Teorema de Paso de Montaña —o Teorema de «Mountain Pass», si se decide no traducirlo— y aunque podría decir que lo entendí en aquella ocasión, mentiría si lo hiciera. Capté muy superficialmente el contenido del problema que planteaba el artículo y mucho más superficialmente la técnica que se utilizaba para resolverlo; afortunadamente pude verificar un par de ecuaciones integrales que reproducí en la pizarra el día de la exposición y que bastaron para evidenciar que había hecho un gran esfuerzo para tratar de comprender lo que Djairo quería comunicar; pero una vez finalizada la presentación olvidé casi por completo lo poco que había entendido sobre el referido teorema. Sin embargo, de aquel curso me llevé un buen recuerdo y un modesto entendimiento de los *métodos directos del Cálculo de Variaciones.*

Para aquel entonces ya había estudiado ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (lineales) desde hace un par de semestres atrás y en específico recordaba el método para garantizar la existencia de soluciones débiles en las ecuaciones elípticas: la aplicación directa del teorema de Lax-Milgram (ver Evans [14]). Cuando en la clase de *Semilineales* el primer ejemplo de resolución de una EDP que estudiamos fue la demostración de existencia y unicidad del mismo tipo de ecuaciones elípticas pero estrenando el uso de los métodos directos (una herramienta distinta a la aplicación del teorema de Lax-Milgram), una gran sonrisa debió dibujarse en mi rostro: escribo esto porque, tras un lustro estudiando matemáticas, una de las características que más me llama la atención de esta noble ciencia es la capacidad que tiene para resolver problemas a través de diferentes metodologías. Es lo que me gusta llamar el *Síndrome del Teorema Fundamental del Álgebra*: he estudiado detalladamente al menos tres formas de demostrar dicho teorema: utilizando Análisis Complejo, a través del Álgebra Abstracta y, mi favorita personal, gracias a la Topología Algebraica. Si se me pregunta diría que la relación entre dichas ramas de la matemática no resulta para nada intuitiva y aún así, de manera totalmente independiente, sus métodos logran demostrar un mismo teorema que, por otro lado es, como su nombre bien lo indica, fundamental en la matemática.

Ahora bien, no es que el método de Lax-Milgram y el del Cálculo Variacional (ver Badiale y Serra [5]) difieran sustancialmente, pero resulta de todas formas interesante el hecho de poder hacer acopio en la mente de tantas herramientas como se pueda para resolver problemáticas puntuales. Tuvo un gran impacto en mi este hecho: supe que mi proyecto de titulación tendría que ver con problemas que se pudiesen resolver a través de más de un método, o con el análisis de resultados afines y sus aplicaciones en común pero sobre todo con aquellas características que los hacen independientes entre sí. Cuando le comuniqué esta idea a mi director de proyecto, él me recordó ese viejo teorema que ya había olvidado: el Teorema de Paso de Montaña.

En primera instancia la idea era discurrir sobre las variantes del teorema en su versión clásica —versión famosísima y de utilidad notable— pero una vez me adentré a recopilar bibliografía encontré unas cuantas versiones menos conocidas en campos alejados al que se suele situar la mencionada versión. Cuando me encontré con el Teorema de Paso de Montaña Topológico supe que debía estudiarlo porque además, otro de los aspectos que pensaba debían estar necesariamente en mi proyecto era un análisis multi-disciplinar que me permitiera ahondar en más de una rama de la matemática. Y resulta que el Análisis Funcional y la Topología General estaban entre mis opciones predilectas. Así, finalmente llegué a delimitar la temática y pude empezar la redacción de este ensayo que presento a continuación.

2. Introducción

En el ámbito académico matemático la denominación *Teorema de Paso de Montaña* suele asociarse automáticamente a un resultado de los matemáticos Antonio Ambrosetti y Paul Rabinowitz [3] enmarcado en la rama del Análisis no-lineal. La razón de esta asociación automática se debe a la popularidad de sus aplicaciones al campo de las Ecuaciones Diferenciales Parciales, campo de amplio interés para investigadores e investigadoras. Sin embargo, bajo el mismo nombre existen otros resultados considerablemente menos populares pero de igual interés teórico. El presente es un trabajo en el que se realiza un análisis de comparación y contraste entre el famoso Teorema de Paso de Montaña de Ambrosetti y Rabinowitz, que se conoce como teorema *clásico*, y uno de esos resultados menos conocidos, el Teorema de Paso de Montaña *topológico*, introducido por el matemático Guy Katriel [17]. Más allá de la obvia conexión que se intuye por su nombre, entre los dos teoremas existen similitudes teóricas y prácticas que en este ensayo se propone investigar profundamente.

El objetivo principal radica en descubrir las motivaciones, relaciones —de índole teórico y lógico— y alcances prácticos de ambos enfoques, con el fin de enriquecer la discusión académica sobre estas diferentes aproximaciones. Específicamente se busca identificar las motivaciones subyacentes en los distintos autores para llegar a la formulación de sus respectivas versiones del teorema, relacionar cada una de éstas para identificar sus similitudes y diferencias y recrear ejemplos de aplicación que amplíen el marco referencial de cada enfoque; no menos importante es el hecho de querer comunicar de manera precisa y amena todas estas cuestiones.

Para lograr los objetivos expuestos se ha dividido el ensayo en cinco capítulos; en el primero se hace un recuento de los elementos teóricos necesarios para la demostración del teorema clásico, que a su vez se desmenuza con cuidado poniendo especial atención a su estructura; en el segundo se recrea con lujo de detalle una aplicación del teorema con algunos aportes originales. El tercero comprende la demostración del teorema topológico, para lo cual nuevamente se hace un repaso de la teoría necesaria para entenderla completamente; el cuarto capítulo repasa sus aplicaciones. Las demostraciones de ambas versiones están adaptadas por quien escribe para el ejercicio de comparación y contraste posterior, ejercicio que es precisamente el contenido del quinto y último capítulo, en el cual se introducen los elementos que permiten ver con claridad los puntos en común y los puntos de diversificación entre ambas versiones poniendo especial énfasis a las relaciones entre aplicaciones afines, elementos teóricos de las demostraciones y relaciones lógicas entre los teoremas. Finalmente, las conclusiones son presentadas.

Como la definición de "ensayo" suele ser muy vaga incluso en el panorama académico y queriendo evitar confusiones con la posibilidad de que este trabajo pueda resultar muy 'libre' en su estructura, se aclara que la elección de esta modalidad de Proyecto de Titulación únicamente está motivada por la naturaleza comparativa en el tema planteado, manteniendo la rigurosidad matemática y formal que se precisa sin afectación alguna.

3. El Teorema de Paso de Montaña Clásico

En el año de 1973 el matemático italiano Antonio Ambrosetti y el matemático estadounidense Paul Rabinowitz escribieron un artículo (Ambrosetti y Rabinowits [3]) de especial relevancia en la historia del Análisis no-lineal y la Teoría de puntos críticos, así como en la de sus aplicaciones al campo de las Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDPs). Su trabajo, titulado "Dual Variational Methods in Critical Point Theory and Applications" y publicado en el Journal of Functional Analysis 14, constituye uno de los esfuerzos científicos más celebrados de la matemática aplicada contemporánea, afirmación que se evidencia en la cantidad de citas que posee tanto a nivel de referencias como reseñas en el portal web MathSciNet de la American Mathematial Society, sobrepasando las 1800 al momento en que se imprime este trabajo. Comunicado por el reputado investigador francés Jacques-Louis Lions, el artículo introduce por vez primera el teorema que da nombre al presente ensayo prácticamente sin cambios con respecto a las versiones que en la literatura más actualizada se puede encontrar. Más adelante fue el propio Paul Rabinowitz [25], en una monografía que ampliaba sus charlas para la CBMS [1] dictadas en enero de

[1]Conference Board of the Mathematical Sciences. Organización estadounidense consistente en diecisiete sociedades profesionales, cada una de las cuales tiene como principal objetivo el incremento y difusión del conocimiento en una o varias de las ciencias matemáticas. Su propósito radica en promover el entendimiento y cooperación entre estas sociedades para que trabajen juntas y se respalden las unas a las otras en sus esfuerzos por promover la investigación, mejorar la educación y expandir los usos de la matemática. Una de sus principales actividades es la organización

1984, quien condensó el enunciado y detalló aquellos elementos teóricos que en el artículo original se dejaron sin pormenorizar.

Con el tiempo, varios autores y autoras (de quienes se hablará a lo largo de este ensayo) han investigado una gran cantidad de aspectos teóricos pero sobre todo prácticos del teorema, haciendo de éste una parte fundamental de cualquier curso avanzado de EDPs. A grandes rasgos el Teorema de Paso de Montaña Clásico es un teorema que brinda las características necesarias que debe poseer un funcional diferenciable, con dominio definido en un espacio de Banach y con imagen en los números reales, para asegurar la existencia de puntos críticos del mismo. Para poder entenderlo en su totalidad resulta necesario introducir todo el bagaje Análisis Funcional en espacios de Banach que sirve como base del teorema en cuestión, así como otras herramientas matemáticas de especial importancia en la construcción de las demostraciones que permitirán concluir el resultado.

3.1. Requisitos

3.1.1. Análisis funcional en espacios de Banach

Varios elementos del Análisis Funcional en espacios de Banach resultan de vital trascendencia en el estudio del Teorema de Paso de Montaña (abreviado TPM de aquí en adelante) en su versión clásica. La estructura diferencial que caracteriza

de las Conferencias Regionales de Investigación (National Research Confereces), que junto con la National Science Foundation ha llevado a cabo a lo largo de 48 años, siendo al momento 358 las conferencias dictadas (Traducido de la página web de la CBMS: https://www.cbmsweb.org/).

a dichos espacios supone un ingrediente preponderante a tener en cuenta para la edificación de los bloques que componen la demostración del mismo, por lo que a continuación se presentan las definiciones básicas de diferenciabilidad de Fréchet (referida simplemente como diferenciabilidad) así como algunos resultados que atañen a esta propiedad.

A lo largo de este trabajo los espacios de Banach que aparecen poseen escalares reales y su norma se representa como se hace usualmente con $\|\cdot\|$ (exceptuando en los espacios euclídeos donde la norma euclidiana se representa por $|\cdot|$) y el producto escalar en los espacios de Hilbert se denota con $(\cdot|\cdot)$.

Dado E un espacio de Banach, se define su espacio dual topológico E', como el conjunto de las aplicaciones lineales y continuas con dominio E y recorrido en $\mathbb{R}$, es decir:

$$E' = \{A : E \to \mathbb{R} \mid A \text{ es una aplicación lineal y continua}\}.$$

E' es un espacio de Banach —inclusive si E no lo fuese— mientras se le dote de la norma:

$$\|A\|_{E'} = \sup_{\substack{u \in E \\ \|u\|=1}} |Au|,$$

hecho que se puede encontrar demostrado por Erwin Kreyszig [19].

Para $U \subset E$, se llama funcional a cualquier aplicación $I : U \to \mathbb{R}$, no necesariamente lineal y/o continua. Con esto en mente se da paso a la definición de un concepto presente a lo largo de la totalidad de este ensayo.

Definición 3.1.1 (Diferenciabilidad de Fréchet)**.** Sea E un espacio de Banach, U un abierto de E, e $I : U \to \mathbb{R}$ un funcional. Se dice que I es Fréchet diferenciable en $u \in U$ si existe $A \in E'$ tal que

$$\lim_{\|v\| \to 0} \frac{I(u+v) - I(u) - Av}{\|v\|} = 0, \tag{3.1}$$

que utilizando las notación "o minúscula" de Landau se puede escribir de la siguiente forma:

$$I(u+v) - I(u) = Av + o(\|v\|)$$

cuando $\|v\| \to 0$.

Mariano Badiale y Enrico Serra [5] detallan una demostración que evidencia que el funcional A que satisface la definición precedente, de existir, es único. De esta forma para cada funcional $I : U \to \mathbb{R}$ que sea diferenciable en $u \in U$, el único elemento $A \in E'$ que satisface (3.1) es llamado diferencial de Fréchet (o simplemente diferencial) de I en u, y es denotado por $I'(u)$. Por lo tanto se tiene que

$$I(u+v) = I(u) + I'(u)v + o(\|v\|) \tag{3.2}$$

cuando $\|v\| \to 0$.

Es importante recalcar que si I es diferenciable en u entonces es continuo en ese mismo punto.

Si para cualquier $u \in U$, $I'(u)$ existe, entonces se dice que I es diferenciable en

U. Cuando esto ocurre, la aplicación

$$I' : U \to E'$$
$$u \mapsto I'(u)$$

es llamada la derivada de Fréchet de I, y en general puede ser no lineal y discontinua. Si I' es continua, como aplicación de U a E', entonces se dice que I es de clase C^1 en U, que se escribe $I \in C^1(U)$.

La diferencial de Fréchet en un punto dado cumple con propiedades básicas de linealidad y una regla del producto análoga a la clásica que se cumple en derivadas de funciones reales de variable real, así como particulares reglas de la cadena, una de las cuales se presenta a continuación al ser especial relevancia para el TPM. Su demostración se puede encontrar en el Capítulo 1 de Badiale y Serra [5].

Proposición 3.1.1 (Regla de la cadena)**.** *Sean E un espacio de Banach y $U \subset E$ un abierto. Supóngase que el funcional $I : U \to \mathbb{R}$ es Fréchet diferenciable en $u \in U$; además sea $\eta : \mathbb{R} \to U$ una aplicación diferenciable en t_0 y $u = \eta(t_0)$; entonces la composición $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $\gamma(t) = I(\eta(t))$ es diferenciable en t_0 y*

$$\gamma'(t_0) = I'(\eta(t_0))\eta'(t_0). \tag{3.3}$$

El TPM es un resultado que garantiza la existencia de puntos críticos en funcionales diferenciables pero, ¿qué es un punto crítico?

Definición 3.1.2 (Punto crítico de un funcional diferenciable)**.** Sean E un espacio de Banach, $U \subset E$ un abierto e $I : U \to \mathbb{R}$ un funcional diferenciable. Un punto crítico de I es un punto $u \in U$ tal que

$$I'(u) = 0.$$

Como $I'(u)$ es un funcional, esto significa que $I'(u)v = 0$, $\forall\, v \in E$. Si además $I(u) = c \in \mathbb{R}$, se dice que u es un punto crítico de I al nivel c.

A parte de éstas características de los espacios de Banach, existen algunos resultados que no precisan de la estructura diferencial de los mismos mas si de su completitud; se recuerda el Teorema de Punto Fijo de Banach —muy necesario en lo subsiguiente— y cuya demostración se puede encontrar en el Capítulo 5 de Kreyszig [19].

Teorema 3.1.1 (Punto fijo de Banach)**.** *Sea E un espacio de Banach no vacío (el teorema funciona para espacios métricos completos en general) e $I : E \to E$ una contracción en E, es decir, existe una constante L tal que* $0 < L < 1$ *y*

$$\|I(u) - I(v)\| \leq L\|u - v\| \quad \forall\, u, v \in E.$$

Entonces la aplicación I posee un único punto fijo, es decir,

$$\exists!\, u \in E,\ \textit{ tal que } I(u) = u.$$

La siguiente proposición también juega un papel importante en seguida. Se puede encontrar su demostración pormenorizada por Lawrence Evans [14].

Proposición 3.1.2 (Desigualdad integral de Grönwall)**.** *Sea $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función no negativa, integrable en* $[\,0, +\infty\,[$ *y que satisface en casi todo punto t la desigualdad* *integral*

$$\psi(t) \leq C_1 \int_0^t \psi(s)\, ds + C_2,$$

para constantes $C_1, C_2 \geq 0$. *Entonces*

$$\psi(t) \leq C_2(1 + C_1 t e^{C_1 t}),$$

en casi todo punto $t \in [\,0, +\infty\,[$. *En particular si* $C_2 = 0$, $\psi(t) = 0$ *en casi todo punto* $t \in [\,0, +\infty\,[$.

3.1.2. Existencia y unicidad de soluciones para ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs)

Como se podrá ver a su debido tiempo, la construcción de un resultado fundamental en la demostración del TPM precisa de la existencia de un *flujo diferencial*, entendido esto como una función continua y diferenciable que depende del cambio en una variable asociada al "tiempo". La correcta construcción de EDOs con valores iniciales brindará la existencia de estos flujos. La siguiente es una generalización de un clásico teorema de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales que se puede demostrar a partir de las ideas de Haim Brezis [6].

Teorema 3.1.2. *Sea* E *un espacio de Banach y* $F : E \to E$ *una aplicación Lipschitz continua, es decir, existe una constante* $L > 0$ *tal que*

$$\|F(\eta_1) - F(\eta_2)\| \leq L\|\eta_1 - \eta_2\| \quad \forall\, \eta_1, \eta_2 \in E.$$

Entonces para cada $u \in E$, el problema de Cauchy:

$$\begin{cases} \eta'(t) = F(\eta(t)), \\ \\ \eta(0) = u. \end{cases} \tag{3.4}$$

tiene solución única $\eta \in C^1([\,0, +\infty\,[, E)$.

El teorema precedente necesita como hipótesis el hecho de que F sea una función *globalmente* Lipschitz continua. ¿Se puede obtener un resultado similar si se relaja esta necesidad y se plantea que la función debe ser localmente Lipschitz continua únicamente? Hay que recordar qué significa esto en primer lugar.

Definición 3.1.3 (Aplicación localmente Lipschitz continua)**.** Sea E un espacio de Banach. Una aplicación $F : E \to E$ se dice localmente Lipschitz continua si para todo $x_0 \in E$ existen $\delta_0 > 0$ y $L_0 > 0$, dependientes de x_0, tales que,

$$(\|x - x_0\| < \delta_0 \wedge \|y - x_0\| < \delta_0) \;\Rightarrow\; (\|F(x) - F(y)\| \leq L_0 \|x - y\|)\,.$$

Recuérdese que la bola abierta de centro $x_0 \in E$ y radio $\delta > 0$ es el conjunto

$$B_\delta(x_0) = \{x \in E \;\mid\; \|x - x_0\| < \delta\};$$

y que la bola cerrada de centro $x_0 \in E$ y radio $\delta > 0$ es el conjunto

$$\overline{B_\delta(x_0)} = \{x \in E \;\mid\; \|x - x_0\| \leq \delta\}.$$

El resultado de existencia y unicidad para EDOs tomando en cuenta únicamente Lipschitz continuidad local es válido, pero se precisa de una hipótesis extra. La versión para espacios de dimensión finita es muy popular y puede encontrarse detallada por Philip Hartman [15]; se hacen a continuación las respectivas acotaciones tomando en cuenta espacios de Banach de cualquier dimensión.

Teorema 3.1.3. *Sea E un espacio de Banach y $F : E \to E$ una aplicación localmente Lipschitz continua y uniformemente acotada, es decir existe $C > 0$ tal que $\|F(x)\| \leq C$ para todo $x \in E$. Entonces para cada $u \in E$, el problema de Cauchy:*

$$\begin{cases} \eta'(t) = F(\eta(t)), \\ \\ \eta(0) = u. \end{cases} \tag{3.5}$$

tiene solución única para $t \geq 0$.

Demostración. Sea $u \in E$. Como F es localmente Lipschitz continua existen $\delta_0 > 0$ y $L > 0$ tales que si $\eta \in B_{\delta_0}(u)$ y $\mu \in B_{\delta_0}(u)$ entonces $\|F(\eta) - F(\mu)\| \leq L\,\|\eta - \mu\|$. Sea $\delta < \delta_0$, entonces $\overline{B_\delta(u)} \subset B_{\delta_0}(u)$. Se llamará únicamente B a la bola cerrada $\overline{B_\delta(u)}$, que es un subconjunto cerrado de un espacio de Banach y por lo tanto es completo. Sean $T < \text{mín}\{1/L, \delta/C\}$, $J = [\,0, T\,]$ y el espacio

$$X = \left\{ \eta \in C(J, B) \;\middle|\; \sup_{t \in J} \|\eta(t)\| < +\infty \right\},$$

dotado de la norma usual del supremo

$$\|\eta\|_\infty = \sup_{t \in J} \|\eta(t)\|.$$

Gracias a que B es completo, X también lo es. La idea es utilizar el teorema de punto fijo de Banach. Se define

$$\begin{aligned} \Phi : X &\to X \\ \eta &\mapsto \Phi(\eta), \end{aligned}$$

con

$$\Phi(\eta)(t) = u + \int_0^t F(\eta(s))\, ds, \quad \forall\, t \in J.$$

Es preciso probar que $\Phi(\eta) \in X$. Su continuidad se obtiene directamente del Teorema Fundamental del Cálculo; hace falta evidenciar que su imagen se encuentra en B. Para ello es necesario que $\|\Phi(\eta)(t) - u\| \leq \delta$, lo cual se puede mostrar fácilmente de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \|\Phi(\eta)(t) - u\| &= \left\| \int_0^t F(\eta(s))\, ds \right\| \\ &\leq \int_0^t \|F(\eta(s))\|\, ds \\ &\leq Ct < \delta. \end{aligned}$$

Así $\Phi(\eta) \in C(J, B)$. Asimismo, se puede ver que

$$\begin{aligned} \|\Phi(\eta)\|_\infty &= \sup_{t\in J} \left\| u + \int_0^t F(\eta(s))\, ds \right\| \\ &\leq \|u\| + \sup_{t\in J} \int_0^t \|F(\eta(s))\|\, ds \\ &\leq \|u\| + \sup_{t\in J} Ct \\ &\leq \|u\| + CT < \|u\| + \delta < +\infty. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\Phi(\eta) \in X$.

Ahora, sean $\eta, \mu \in X$. Entonces para todo $t \in J$,

$$\begin{aligned}
\|\Phi(\eta)(t) - \Phi(\mu)(t)\| &= \left\| \int_0^t F(\eta(s))\, ds - \int_0^t F(\mu(s))\, ds \right\| \\
&= \left\| \int_0^t (F(\eta(s)) - F(\mu(s)))\, ds \right\| \\
&\leq \int_0^t \|F(\eta(s)) - F(\mu(s))\| \; ds \\
&\leq L \int_0^t \|\eta(s) - \mu(s)\| \; ds \\
&\leq Lt \, \|\eta - \mu\|_\infty \\
&\leq LT \, \|\eta - \mu\|_\infty
\end{aligned}$$

Como $L_1 = LT < 1$ y lo anterior se cumple para todo $t \in J$, entonces

$$\|\Phi(\eta) - \Phi(\mu)\|_\infty \leq L_1 \, \|\eta - \mu\|_\infty \, ,$$

obteniéndose la contracción. Por lo tanto existe una única solución η para (3.5) definida en J, por ahora. En el Capítulo 2 de Hartman [15] se puede apreciar un teorema de extensión del intervalo de definición de las soluciones η hasta un intervalo de definición maximal $J = [\,0, T_m\,[$, en el sentido de que no existen soluciones en intervalos del tipo $[\,0, \tau\,[$ con $\tau > T_m$. Lo que se desea probar es que $T_m = +\infty$, con lo que se tendría el resultado. Por contradicción supóngase que no, es decir que $T_m < +\infty$; así, existe una sucesión $(t_n)_n \subset [\,0, T_m\,[$ tal que $t_n \to T_m$. Al cumplirse (3.5) para cada $t_j, t_i \in (t_n)_n$, se tiene:

$$\eta(t_j) - \eta(t_i) = \int_{t_i}^{t_j} \frac{d}{dt}\eta(s)\, ds = \int_{t_i}^{t_j} F(\eta(s))\, ds,$$

y por tanto,

$$\begin{aligned}\|\eta(t_j)-\eta(t_i)\| &= \left\|\int_{t_i}^{t_j} F(\eta(s))\,ds\right\| \\ &\leq \int_{t_i}^{t_j} \|F(\eta(s))\|\;ds \\ &\leq C|t_j-t_i|.\end{aligned}$$

Como $(t_n)_n$ es una sucesión de Cauchy (por ser convergente en $\mathbb{R}$), la última desigualdad implica que $(\eta(t_n))_n$ también lo es. De esta forma al estar en un espacio completo converge, es decir existe $v \in E$ tal que $\lim\limits_{n\to+\infty} \eta(t_n) = v$ o equivalentemente $\lim\limits_{t\nearrow T_m} \eta(t) = v$. Sin embargo, esto no puede pasar pues genera la siguiente contradicción, expuesta y detallada por Antonio Ambrosetti y Andrea Malchiodi [1]:

si existiera $v = \lim\limits_{t\nearrow T_m} \eta(t)$, se podría definir el problema

$$\begin{cases} \beta'(t) = F(\beta(t)), \\ \beta(T_m) = v. \end{cases} \tag{3.6}$$

que tendría una solución β definida en su propio intervalo maximal $[T_m, T_m+\epsilon[$, con $\epsilon > 0$. Pero con esto la función

$$\tilde{\eta}(t) = \begin{cases} \eta(t), & \text{si } t \in [0, T_m[, \\ \beta(t), & \text{si } t \in [T_m, T_m+\epsilon[\end{cases} \tag{3.7}$$

resolvería (3.5) en $[0, T_m+\epsilon[$, contradiciendo la maximalidad del intervalo $[0, T_m[$. De tal forma que se puede concluir que $T_m = +\infty$, obteniéndose la solución de (3.5) para todo $t \geq 0$. En este punto se puede pensar que como el Teorema de punto fijo de Banach entrega un único punto fijo entonces se obtienen existencia y unicidad directamente; sin embargo el puto fijo aquí presentado está en X y esto no implica necesariamente que haya un único $\eta \in C([\,0, +\infty\,[, B)$ que resuelva (3.5), que es lo que se necesita. Se procede entonces suponiendo la existencia de otra solución $\tilde{\eta}$ y se define

$$\phi(t) = \|\eta(t) - \tilde{\eta}(t)\|\,.$$

Pero,

$$\|\eta(t) - \tilde{\eta}(t)\| = \left\| \int_0^t F(\eta(s)) - F(\tilde{\eta}(s)\, ds \right\| \leq L \int_0^t \|\eta(s)) - \tilde{\eta}(s)\| = L \int_0^t \phi(s)\, ds.$$

Así que se tiene,

$$\phi(t) \leq L \int_0^t \phi(s)\, ds, \quad \forall\, t \geq 0,$$

con lo cual, gracias a la desigualdad integral de Grönwall de la Proposición 3.1.2, $\phi = 0$, garantizando la unicidad. □

Los teoremas 3.1.2 y 3.1.3 entregan el mismo resultado pero precisan de distintas hipótesis. Serán utilizados en lo posterior, en demostraciones de crucial importancia, al igual que las proposiciones detalladas en la siguiente sección. Antes de esto es preciso fijarse en que ambos resultados entregan la posibilidad usual de ver a η como una función de (t, u), es decir

$$\begin{aligned} \eta : [\,0, +\infty\,[\times E &\to E \\ (t, u) &\mapsto \eta(t, u). \end{aligned}$$

continua en t.

Gracias a la continuidad de las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias con respecto a las condiciones iniciales (resultado que se puede encontrar en el Capítulo 5 de Hartman [15]) se aprecia que la continuidad de η también es en la variable u, con lo cual se concluye que para el problema

$$\begin{cases} \eta'(t,u) = F(\eta(t,u)), \\ \eta(0,u) = u \end{cases} \tag{3.8}$$

se puede encontrar una solución $\eta : [\,0, +\infty\,[\times E \to E$ continua en todo (t,u).

3.1.3. Lipschitz continuidad

La necesidad de condiciones de Lipschitz continuidad para la generación de soluciones de los problemas de Cauchy precedentes hace que sea preciso revisar la teoría que rodea a este concepto. Recuérdese que la Lipschitz continuidad implica continuidad y que toda función globalmente Lipschitz lo es localmente.

Una función en particular que será de gran utilidad en lo subsiguiente es la que a cada punto de un espacio de Banach le asigna su distancia hacia un subconjunto fijo del mismo espacio. Dicha función es Lipschitz continua, aseveración que se resume en la siguiente proposición cuya demostración se puede encontrar en Palais [23].

Proposición 3.1.3. *Sea E un espacio de Banach y $F \subset E$. Entonces la función* *distancia,*

$$\rho_F : E \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \rho_F(x) = dist(x, F) = \inf_{u \in F} \|x - u\|,$$

es Lipschitz continua.

A continuación se presentan algunos resultados referentes a las propiedades algebraicas de las funciones global y localmente Lipschitz continuas en espacios de Banach. Las ideas Eriksson, Estep y Johnson [13], aunque restringidas a aplicaciones en $\mathbb{R}$, pueden ser de gran ayuda para elaborar sus demostraciones que no se detallarán.

Proposición 3.1.4. *Sean E y F dos espacios de Banach y $f, g : E \to F$ dos aplicaciones Lipschitz continuas. Entonces la aplicación suma $f + g$ es Lipschitz continua.*

Proposición 3.1.5. *Sea E un espacio de Banach y sean $f, g : E \to \mathbb{R}$ dos aplicaciones Lipschitz continuas. Entonces la aplicación producto fg es localmente Lipschitz continua. Si además existe $m > 0$ tal que $|g(x)| \geq m, \ \forall x \in E$. Entonces la aplicación cociente ${}^f/_g$ es también localmente Lipschitz continua.*

Proposición 3.1.6. *Sean E, F y G tres espacios de Banach; y sean $f : E \to F$ y $g : F \to G$ dos aplicaciones localmente Lipschitz continuas. Entonces la aplicación composición $h = g \circ f : E \to G$ es localmente Lipschitz continua.*

Para usos posteriores se muestra a continuación un resultado de Lipschitz continuidad válido en espacios de Hilbert, empezando por un resultado de sencilla demostración en estos espacios.

Lema 3.1.1. *Sea H un espacio de Hilbert. Para todo $x, y \in H$ y para todo α, β, γ constantes no negativas tales que $\alpha \leq \gamma$ y $\beta \leq \gamma$ se tiene que*

$$\|\alpha x + \beta y\| \leq \gamma \|x + y\|.$$

Demostración. Al ser espacio de Hilbert, la norma proviene de un producto escalar y por lo tanto

$$\|\alpha x + \beta y\| = (\alpha x + \beta y | \alpha x + \beta y)^{1/2}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \|\alpha x + \beta y\|^2 &= \alpha^2 (x|x) + 2\alpha\beta(x|y) + \beta^2(y|y) \\ &\leq \gamma^2((x|x) + 2(x|y) + (y|y)) \\ &= \gamma^2 \|x + y\|^2. \end{aligned}$$

Al tomar la raíz cuadrada se llega a lo buscado. $\square$

Proposición 3.1.7. *Sea H un espacio de Hilbert y $F : H \to H$ una aplicación Lipschitz continua. Entonces la aplicación*

$$\begin{aligned} G : H &\to H \\ u &\mapsto Gu = \frac{Fu}{1 + \|Fu\|} \end{aligned}$$

es también Lipschitz continua.

Demostración. Sean $u, v \in H$;

$$\begin{aligned}
\|Gu - Gv\| &= \left\| \frac{Fu}{1+\|Fu\|} - \frac{Fv}{1+\|Fv\|} \right\| \\
&= \left\| \frac{Fu + Fu\,\|Fv\| - Fv - Fv\,\|Fu\|}{(1+\|Fu\|)(1+\|Fv\|)} \right\| \\
&\leq \frac{1}{a}(\|Fu - Fv\| + \|Fu\,\|Fv\| - Fv\,\|Fu\|\|)
\end{aligned}$$

con $a = (1+\|Fu\|)(1+\|Fv\|) = 1 + \|Fu\| + \|Fv\| + \|Fu\|\,\|Fv\|$. Usando el Lema 3.1.1 con $x = Fu,\ \ y = -Fv,\ \ \alpha = \|Fv\|,\ \ \beta = \|Fu\|$ y $\gamma = \text{máx}\{\|Fu\|, \|Fv\|\}$, se obtiene que

$$\begin{aligned}
\|Gu - Gv\| &\leq \frac{1}{a}(\|Fu - Fv\| + \text{máx}\{\|Fu\|, \|Fv\|\}\,\|Fu - Fv\|) \\
&\leq \frac{1}{a}(L\,\|u - v\| + L\,\text{máx}\{\|Fu\|, \|Fv\|\}\,\|u - v\|)) \\
&= L\,\|u - v\| \left(\frac{1 + \text{máx}\{\|Fu\|, L\,\|Fv\|\}}{a} \right).
\end{aligned}$$

Como $a \geq 1 + \|Fu\|$ y $a \geq 1 + \|Fv\|$, entonces $a \geq 1 + \text{máx}\{\|Fu\|, L\,\|Fv\|\}$, con lo cual

$$\left(\frac{1 + \text{máx}\{\|Fu\|, L\,\|Fv\|\}}{a} \right) \leq 1.$$

Se concluye así que

$$\|Gu - Gv\| \leq L\,\|u - v\|,$$

con L la constante de Lipschitz de F. □

3.2. Sucesiones de Palais-Smale

A los matemáticos estadounidenses Richard Palais y Stephen Smale se les debe las primeras aproximaciones a condiciones que buscaran introducir nociones de compacidad en funcionales continuamente diferenciables. Desde la publicación de la primera de aquellas llevado a cabo por Palais [22] en 1963 hasta las más actualizadas han existido ciertas modificaciones, sin embargo la idea subyacente se mantiene; a continuación se presentan dos de éstas, estrechamente relacionadas, y que son las de usual empleo en el TPM clásico.

Considérese E un espacio de Banach y sea $I : E \to \mathbb{R}$ un funcional diferenciable. Una sucesión $(u_k)_k \subset E$ tal que,

$$\begin{aligned} &(I(u_k))_k \text{ es una sucesión acotada en } \mathbb{R}, \text{ e} \\ &I'(u_k) \to 0 \text{ (en } E') \end{aligned}$$

es llamada sucesión de Palais-Smale para I.

Para cualquier $c \in \mathbb{R}$, si

$$\begin{aligned} I(u_k) &\to c \text{ (en } \mathbb{R}), \text{ e} \\ I'(u_k) &\to 0 \text{ (en } E') \end{aligned}$$

entonces $(u_k)_k$ es una sucesión de Palais-Smale para I al nivel c.

El concepto de sucesión de Palais-Smale, como se puede ver, es simple. El poder de estas sucesiones radica en la definición de lo que se conoce como condición de Palais-Smale, que se expone a continuación.

Definición 3.2.1 (Condición de Palais-Smale)**.** Sean E un espacio de Banach e $I : E \to \mathbb{R}$ un funcional diferenciable. Se dice que I satisface la condición de Palais-Smale (abreviando: I satisface (PS)) si toda sucesión de Palais-Smale para I tiene una subsucesión convergente (en E). Asimismo, se dice que I satisface la condición de Palais-Smale al nivel $c \in \mathbb{R}$ (abreviando: I satisface $(PS)_c$) si toda sucesión de Palais-Smale para I al nivel c posee una subsucesión convergente (de igual forma en E).

Resulta inmediato evidenciar que si un funcional satisface (PS), entonces satisface $(PS)_c$ para todo $c \in \mathbb{R}$, ya que toda sucesión convergente (en $\mathbb{R}$) es acotada. Sin embargo, el recíproco no es cierto en general.

La condición de Palais-Smale es también conocida como condición de *compacidad* de Palais-Smale, pues resulta una forma muy interesante de construir cierta especie de compacidad sobre el funcional I, en el sentido de que el conjunto de los puntos críticos de I a cualquier nivel es compacto, dando lugar al siguiente lema.

Lema 3.2.1. *Sean E un espacio de Banach, $I : E \to \mathbb{R}$ un funcional de clase C^1 en E y $c \in \mathbb{R}$. Si I satisface (PS), el conjunto $K_c = \{u \in E \mid I(u) = c \text{ e } I'(u) = 0\}$ es compacto.*

Demostración. Esta demostración está basada en la caracterización por sucesiones de la compacidad. Sea $(u_n)_n$ una sucesión en K_c, es decir que para todo $n \in \mathbb{N}$, $I(u_n) = c$ e $I'(u_n) = 0$. Claramente esto significa que la sucesión $(I(u_n))_n$ está acotada (al ser constante) y que $I'(u_n) \to 0$. Por (PS) existen una subsucesión $(u_{n_j})_j$ de $(u_n)_n$ y $u \in E$ tales que $u_{n_j} \to u$. Hace falta evidenciar que $u \in K_c$. La continuad de I e I' hacen posible que $I(u_{n_j}) \to I(u)$ e $I'(u_{n_j}) \to I'(u)$. Por la unicidad de los límites de estas sucesiones constantes, se sigue que $I(u) = c$ e

$I'(u) = 0$ y por ende K_c es compacto.

$\square$

Este hecho resultará de vital importancia en la construcción del primer eslabón que atañe al TPM clásico, el *Teorema de Deformación*; sin embargo no es la única conexión de las sucesiones de Palais-Smale con los puntos críticos de un funcional, ya que tan sólo con estas simples definiciones es posible probar un lema, que a pesar de su simplicidad, resulta bastante revelador.

Lema 3.2.2. *Sea E un espacio de Banach e $I : E \to \mathbb{R}$ un funcional de clase C^1 en E. Si existe una sucesión de Palais-Smale para I e I satisface (PS), entonces I posee un punto crítico. Si existe una sucesión de Palais-Smale para I al nivel c e I satisface $(PS)_c$, entonces I tiene un punto crítico al nivel c.*

Demostración. Sea $(u_n)_n$ una sucesión de Palais-Smale para I. Como I satisface (PS) entonces existen $(u_{n_j})_j$ una subsucesión de $(u_n)_n$ y $u \in U$ tales que

$$u_{n_j} \to u,$$

y como $I \in C^1(E)$, entonces

$$I'(u_{n_j}) \to I'(u).$$

Por otro lado, al ser $(u_n)_n$ sucesión de Palais-Smale, se sabe que

$$\begin{aligned} &(I(u_n))_n \text{ es una sucesión acotada e} \\ &I'(u_n) \to 0 \end{aligned}$$

y por tanto

$$(I(u_{n_j}))_j \text{ es una sucesión acotada e}$$
$$I'(u_{n_j}) \to 0$$

Gracias a la unicidad del límite, se obtiene que $I'(u) = 0$, con lo cual u es un punto crítico de I. Para cuando la sucesión satisface $(PS)_c$ la demostración es análoga, tomando en cuenta que en este caso se usa el hecho de que I es continua (por ser diferenciable) y así

$$I(u_{n_j}) \to I(u).$$

Y además,

$$I(u_{n_j}) \to c,$$

con lo cual $I(u) = c$, a más de que $I'(u) = 0$. $\square$

Este resultado muestra un asunto muy interesante en la búsqueda de puntos críticos: que ésta puede separarse en dos problemas independientes; por un lado la existencia de sucesiones de Palais-Smale y por otro la convergencia de dichas sucesiones. Esta idea se explorará más adelante.

La siguiente sección empieza la construcción del TPM clásico en s/i; en primer instancia se recuerda algo de Topología.

3.3. El Teorema de Deformación

Las deformaciones son un concepto angular en el estudio de la Topología Algebraica, sin embargo para el Análisis no lineal también resultan ser sumamente importantes.

Definición 3.3.1 (Deformación)**.** Sean E un espacio de Banach y $A \subset B \subset E$. Se dice que B es deformable en A si existe una función continua $\eta : [\,0,1\,] \times B \to B$ tal que cumple con las siguientes tres características:

$$\eta(0,u) = u, \qquad \forall\, u \in B, \tag{3.9}$$

$$\eta(t,u) \in A, \qquad \forall\, u \in A \text{ y } \forall\, t \in [\,0,1\,], \tag{3.10}$$

$$\eta(1,u) \in A, \qquad \forall\, u \in B. \tag{3.11}$$

Observación 3.3.1. En general, para $B \subset E$, se le llama deformación de B a cualquier función continua $\eta : [\,0,1\,] \times B \to B$ tal que $\eta(0,u) = u$ para todo $u \in B$.

¿Qué es lo que comunican estas definiciones? Al visualizar la variable t como representante del tiempo, se puede interpretar estos conceptos como la evolución de ciertos puntos en el espacio E a través de éste. Al tiempo inicial 0, $\eta(0,\cdot)$ no es más que la identidad en B. Con el paso del tiempo, algunos puntos se mueven hasta que al final del intervalo, en el tiempo $t = 1$, todo punto de B se ha trasladado hacia A (es lo que nos indica (3.11)). Pero la información más importante la aporta (3.10), que expresa que durante la deformación, sea cual sea ésta, los puntos de A pueden moverse pero jamás salir de A.

El Teorema de Deformación involucra deformaciones entre subniveles de funcionales diferenciables, definidos de la siguiente forma.

Definición 3.3.2 (Subniveles de un funcional)**.** Sea E un espacio de Banach e $I : E \to \mathbb{R}$ un funcional. Para cualquier $a \in \mathbb{R}$ se define,

$$I^a = \{u \in E \mid I(u) \leq a\}.$$

Estos conjuntos son conocidos como los subniveles del funcional I.

En el artículo original de Ambrosetti y Rabinowitz [3], el Teorema de Deformación es tomado de un artículo de Clark [7]. Rabinowitz [25] dedica uno de sus apéndices a detallar una demostración propia del resultado. A continuación, con base principalmente en Rabinowitz [25], así como en Clark [7], pero tomando en cuenta el trabajo de Patrizia Pucci y James Serrin [24] que analizan el teorema nuevamente y, en opinión de quien escribe *desencriptan* los razonamientos de Rabinowitz [25], se redacta una demostración plenamente detallada. La tarea es técnicamente compleja, ya que se necesita definir en primera instancia lo que es un vector pseudo-gradiente, concepto útil pero pesado, introducido por Richard Palais [23].

Definición 3.3.3 (Pseudo-gradiente)**.** Sea E un $\mathbb{R}$-espacio de Banach, $U \subset E$ e $I : U \to \mathbb{R}$ de clase C^1; $v \in E$ es llamado vector pseudo-gradiente (abreviando p.g.) para I en $u \in U$ si,

(i) $\|v\| \leq 2 \|I'(u)\|_{E'}$ y

(ii) $I'(u)v \geq \|I'(u)\|_{E'}^2$

Observación 3.3.2. En general un vector p.g. no es único. De hecho se puede probar que la combinación convexa de cualquier conjunto finito de vectores pseudo-gradientes es también un vector p.g.:

Sean $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ un conjunto de $n \in \mathbb{N}$ vectores p.g. para I en $u \in U$ y $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$, un conjunto de números reales no negativos tales que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. El objetivo es mostrar que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$ es un vector p.g. para I en $u \in U$.

Comenzando por (i):

$$\begin{aligned}\left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \right\| &\leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \|v_i\| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} 2\lambda_i \|I'(u)\|_{E'} \\ &= 2 \|I'(u)\|_{E'} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \\ &= 2 \|I'(u)\|_{E'} ;\end{aligned}$$

y finalizando por (ii):

$$\begin{aligned}I'(u) \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \right) &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i I'(u) v_i \\ &\geq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \|I'(u)\|_{E'}^2 . \\ &= \|I'(u)\|_{E'}^2 \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \\ &= \|I'(u)\|_{E'}^2 .\end{aligned}$$

Aunque fácil de demostrar este es un hecho muy importante en la demostración del siguiente lema de esta sección. Antes, se presentan algunas definiciones y resultados no tan elementales que ayudarán en la construcción de ésta.

Definición 3.3.4 (Refinamiento de un recubrimiento)**.** Sea X un espacio topológico y $\{K_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento de X. Un refinamiento $\{J_i\}_{i\in I}$ de $\{K_i\}_{i\in I}$ es un recubrimiento de X tal que todo elemento $J \in \{J_i\}_{i\in I}$ es subconjunto de algún elemento $K \in \{K_i\}_{i\in I}$.

Definición 3.3.5 (Familia localmente finita)**.** Una familia de subconjuntos de un espacio topológico X se dice localmente finita si todo elemento de X posee una vecindad que interseca sólo a un número finito de los subconjuntos de la familia. Por lo tanto, cualquier elemento $x \in X$ sólo puede estar en un número finito de subconjuntos de una familia localmente finita

Definición 3.3.6 (Espacio Paracompacto)**.** Se llama espacio paracompacto al espacio Hausdorff (T_2) en el que todo recubrimiento abierto posee un refinamiento localmente finito.

Observación 3.3.3. La propiedad de paracompacidad la cumplen todos los espacios métricos. Aunque existen varias formas de mostrar esto se recomienda revisar el trabajo de Mary Ellen Rudin [27] para una prueba asequible.

Definición 3.3.7 (Campo vectorial pseudo-gradiente)**.** Sea $I : E \to \mathbb{R}$ de clase C^1 y $\tilde{E} = \{u \in E \mid I'(u) \neq 0\}$. La aplicación $V = \tilde{E} \to E$ es llamada campo vectorial p.g. sobre $\tilde{E}$ si es localmente Lipschitz continua y si $V(x)$ es un vector p.g. para I para todo $x \in \tilde{E}$.

La existencia de campos vectoriales p.g. para funcionales continuamente diferenciables es el contenido del siguiente resultado.

Lema 3.3.1 (Existencia de campos vectoriales p.g.)**.** *Para todo funcional* $I \in C^1(E)$ *existe un campo vectorial p.g. sobre* $\tilde{E}$.

Demostración. Sea $u \in \tilde{E}$, por lo tanto $I'(u) \neq 0$, con lo cual $\|I'(u)\|_{E'} > 0$. Se recuerda que

$$\|I'(u)\|_{E'} = \sup_{\substack{v \in E \\ \|v\|=1}} |I'(u)v|.$$

La caracterización del supremo de un conjunto de números reales acotado superiormente A expresa que para todo $\epsilon > 0$ existe $\tilde{w} \in A$ tal que $\sup A - \epsilon < \tilde{w}$. Luego, como $\frac{1}{6} \|I'(u)\|_{E'} > 0$ entonces existe $\tilde{w} \in E$ con $\|\tilde{w}\| = 1$ tal que

$$\|I'(u)\|_{E'} - \frac{1}{6} \|I'(u)\|_{E'} < |I'(u)\tilde{w}|$$

es decir

$$\frac{5}{6} \|I'(u)\|_{E'} < |I'(u)\tilde{w}|$$

En el caso de que $I'(u)\tilde{w} > 0$, entonces se puede afirmar que existe $w \in E$ con $\|w\| = 1$ tal que

$$\frac{5}{6} \|I'(u)\|_{E'} < I'(u)w,$$

tomando $w = \tilde{w}$.

Por otro lado si $I'(u)\tilde{w} < 0$, entonces

$$\frac{5}{6} \|I'(u)\|_{E'} < -I'(u)\tilde{w} = I'(u)(-\tilde{w}).$$

Como $\|-\tilde{w}\| = 1$, se puede afirmar que existe $w \in E$ con$\|w\| = 1$ tal que

$$\frac{5}{6} \|I'(u)\|_{E'} < I'(u)w,$$

tomando $w = -\tilde{w}$.

El caso en que $I'(u)\tilde{w} = 0$ lleva a una contradicción con la positividad de $\|I'(u)\|_{E'}$.

De ésta forma se ha probado que $\forall\, u \in \tilde{E},\ \exists\, w \in E$ tal que $\|w\| = 1$ e $I'(u)w > \frac{5}{6} \|I'(u)\|_{E'}$. Con ello el vector $v = \frac{6}{5} \|I'(u)\|_{E'} w$ es un vector p.g. para I en u. De hecho, se cumple (i):

$$\begin{aligned} \|v\| &= \left\| \frac{6}{5} \|I'(u)\|_{E'} w \right\| \\ &= \frac{6}{5} \|I'(u)\|_{E'} \|w\| \\ &\leq 2 \|I'(u)\|_{E'}; \end{aligned}$$

y (ii):

$$\begin{aligned} I'(u)v &= I'(u) \left(\frac{6}{5} \|I'(u)\|_{E'} w \right) \\ &= \frac{6}{5} \|I'(u)\|_{E'} I'(u)w \\ &> \frac{6}{5} \|I'(u)\|_{E'} \frac{5}{6} \|I'(u)\|_{E'} \\ &= \|I'(u)\|_{E'}^2. \end{aligned}$$

Gracias a la continuidad de I' existe una vecindad N_u de u, tal que

$$\forall\, z \in N_u,\ \ \|v\| \leq 2 \|I'(z)\|_{E'} \text{ e } I'(z)v \geq \|I'(z)\|_{E'}^2,$$

es decir v es vector p.g. para I para todo $z \in N_u$. Sea la familia $\{N_i\}_{i \in I} = \{N_{u_i} \mid u_i \in \tilde{E}\}$. Esta es un recubrimiento abierto de $\tilde{E}$ y como $\tilde{E}$ es un espacio métrico, es paracompacto y se puede garantizar la existencia de un refinamiento $\{M_i\}_{i\in I}$ localmente finito. Se define para cada $i \in I$

$$\rho_i : E \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \rho_i(x) = dist(x, E \backslash M_i),$$

que por la Proposición 3.1.3 se sabe que es Lipschitz continua. Por cómo está definida la distancia de un punto a un conjunto, $\rho_i(x) = 0$ si $x \notin M_i$. Ahora, sea la función

$$\beta_i : E \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \beta_i(x) = \frac{\rho_i(x)}{\displaystyle\sum_j \rho_j(x)},$$

Ya que x se encuentra únicamente en un número finito de subconjuntos de $\{M_i\}_{i\in I}$ sólo se podrá calcular finitas distancias ρ_i y por tanto la sumatoria en el denominador es finita y positiva. Por otro lado cada uno de los subconjuntos M_i están en algún subconjunto de $\{N_i\}_{i\in I} = \{N_{u_i} \mid u_i \in E\}$ y entonces se puede hallar $z_i = \dfrac{6}{5} \|I'(u_i)\|_{E'} w_i$ un vector p.g. para I en cada M_i. Por último se define $V(x) = \displaystyle\sum_i z_i \beta_i(x)$. Como para cada i, $0 \leq \beta_i \leq 1$ y $\displaystyle\sum_i \beta_i(x) = 1$, entonces para cada $x \in \tilde{E}$, $V(x)$ es una combinación convexa de vectores p.g. para I en x, y por tanto un vector p.g. para I en x. Para probar que V es localmente Lipschitz continua, se tiene en cuenta que cada ρ_i es Lipschitz continua y por tanto la suma de varias de ellas también lo es (Proposición 3.1.4); así, usando la Proposición 3.1.5 se obtiene que cada cociente β_i es localmente Lipschitz. Luego, para todo $x_0 \in E$ existen $\delta_i > 0$ y $L_i > 0$ - dependientes de x_0 - tales que para cada $x \in B_{\delta_i}(x_0)$ se tiene que

$$|\beta_i(x) - \beta_i(x_0)| \leq L_i \|x - x_0\|, \quad \forall\, i \in I.$$

Recuérdese que es finito el conjunto de subíndices i donde la función β_i es distinta de cero para cada argumento $x \in E$. Luego, se puede tomar $\delta = \text{mín}\{\delta_i\}_i$ y $\delta > 0$; de esta forma para $x \in B_\delta(x_0)$,

$$\begin{aligned}
\|V(x) - V(x_0)\| &= \left\| \sum_i z_i \beta_i(x) - \sum_i z_i \beta_i(x_0) \right\| \\
&= \left\| \sum_i (\beta_i(x) - \beta_i(x_0)) z_i \right\| \\
&\leq \sum_i |\beta_i(x) - \beta_i(x_0)| \, \|z_i\| \\
&\leq \|x - x_0\| \sum_i L_i \|z_i\| .
\end{aligned}$$

Se debe tener en cuenta que la sumatoria final es finita desde un principio por las características de β_i así que tomando la constante de Lipschitz $L = \displaystyle\sum_i L_i \|z_i\|$ se obtiene el resultado. □

Es momento de enunciar y demostrar el referido Teorema de Deformación.

Teorema 3.3.1 (de Deformación)**.** *Sea E un espacio de Banach e $I \in C^1(E)$ un funcional que satisface (PS). Sea $c \in \mathbb{R}$, $\bar{\epsilon} > 0$, y N una vecindad abierta del conjunto*

$$K_c = \{u \in E \mid I(u) = c \text{ e } I'(u) = 0\}.$$

Entonces existen $\epsilon \in (0, \bar{\epsilon})$ y $\eta \in C([\,0,1\,] \times E, E)$ tales que

(1) $\eta(0, u) = u, \ \forall\, u \in E$.

(2) $\eta(t,u)=u,\ \ \forall\, t\in[\,0,1\,]$ *y* $\forall\, u\in E\backslash I^{-1}([\,c-\bar{\epsilon},c+\bar{\epsilon}\,])$.

(3) $\|\eta(t,u)-u\|\leq 1,\ \ \forall\, t\in[\,0,1\,]$ *y* $\forall\, u\in E$.

(4) $I(\eta(t,u))\leq I(u),\ \ \forall\, t\in[\,0,1\,]$ *y* $\forall\, u\in E$.

(5) $\eta(1,I^{c+\epsilon}\backslash N)\subset I^{c-\epsilon}$.

(6) Si $K_c=\varnothing$, $\eta(1,I^{c+\epsilon})\subset I^{c-\epsilon}$

Demostración. En primer lugar, y como ya fue demostrado en el Lema 3.2.1, se debe tener en cuenta que gracias a (PS) el conjunto K_c es compacto. Al ser N una vecindad abierta de K_c, N es abierto y $K_c\subset N$. Sea el conjunto de la forma

$$N_\delta=\{u\in E\ \mid\ \rho_{K_c}(u)<\delta\},$$

para algún δ positivo. Como N es abierto, su complemento $E\backslash N$ es cerrado, y ya que la distancia entre un conjunto cerrado y un compacto es siempre positiva se tiene que

$$\delta=dist(E\backslash N,K_c)=\inf_{\substack{u\in E\backslash N\\ v\in K_c}}\|u-v\|>0.$$

Para este δ se tiene que $N_\delta\subset N$, lo cual se puede demostrar evidenciando que $E\backslash N\subset E\backslash N_\delta$: tomando arbitrariamente $x\in E\backslash N$, se calcula su distancia con K_c:

$$\rho_{K_c}(x)=\inf_{v\in K_c}\|x-v\|\geq\inf_{u\in E\backslash N}\inf_{v\in K_c}\|u-v\|=\inf_{\substack{u\in E\backslash N\\ v\in K_c}}\|u-v\|=\delta.$$

Por lo tanto $x\in E\backslash N_\delta$. La continencia $N_\delta\subset N$ implica que $I^{c+\epsilon}\backslash N\subset I^{c+\epsilon}\backslash N_\delta$, lo que a su vez se traduciría en $\eta(I^{c+\epsilon}\backslash N)\subset\eta(I^{c+\epsilon}\backslash N_\delta)$; es decir que si se prueba que

$\eta(I^{c+\epsilon}\backslash N_\delta) \subset I^{c-\epsilon}$ se obtendría *(5)*; además si $K_c = \varnothing$ entonces $N_\delta = \varnothing$ y se tendría *(6)* automáticamente.

Considérese esta primera conjetura:

$$(\exists\, \hat{\epsilon} > 0) \text{ y } (\exists\, b > 0) \;\; (\forall\, u \in I^{c+\hat{\epsilon}}\backslash(I^{c-\hat{\epsilon}} \cup N_{\delta/8})) \text{ tal que } \|I'(u)\|_{E'} \geq b. \tag{3.12}$$

Para demostrarla, por contradicción supóngase que

$$(\forall\, \hat{\epsilon} \geq 0) \text{ y } (\forall\, b \geq 0) \;\; (\exists\, u \in I^{c+\hat{\epsilon}}\backslash(I^{c-\hat{\epsilon}} \cup N_{\delta/8})) \text{ tal que } \|I'(u)\|_{E'} < b.$$

Como para todo $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{2^n} > 0$, entonces $\exists\, u_n \in I^{c+\frac{1}{2^n}}\backslash(I^{c-\frac{1}{2^n}} \cup N_{\delta/8}))$ tal que

$$\|I'(u_n)\|_{E'} < \frac{1}{2^n}, \tag{3.13}$$

lo que significa encontrar sucesiones $\hat{\epsilon}_n \to 0$, $b_n \to 0$ (en realidad son la misma) y $(u_n)_n \subset I^{c+\hat{\epsilon}_n}\backslash(I^{c-\hat{\epsilon}_n} \cup N_{\delta/8})$ tales que $\|I'(u_n)\|_{E'} < b_n$. Claramente $u_n \in I^{c+\hat{\epsilon}_n}\backslash(I^{c-\hat{\epsilon}_n} \cup N_{\delta/8})$ se traduce en $c - \hat{\epsilon}_n < I(u_n) \leq c + \hat{\epsilon}_n$ y $\rho_{K_c}(u_n) \geq \delta/8$ para todo $n \in \mathbb{N}$, con lo cual $I(u_n) \to c$; como $\|I'(u_n)\|_{E'} < b_n$ implica que $I'(u_n) \to 0$, en definitiva se tiene que $I(u_n)$ es acotada (puesto que converge) y que $I'(u_n) \to 0$. La condición (PS) brinda entonces la existencia de una subsucesión $(u_{n_j})_j$ y $u \in E$ tales que $u_{n_j} \to u$. Se puede ver fácilmente que $I(u) = c$ e $I'(u) = 0$ ($u \in K_c$), pero además cómo $\rho_{K_c}(u_{n_j}) \geq \delta/8$ y ρ_{K_c} es continua se sigue que $\rho_{K_c}(u) \geq \delta/8$, lo cual es una contradicción pues al estar u en K_c, $\rho_{K_c}(u) = 0$. De estar forma se concluye (3.12).

Sea $\tilde{\epsilon} \leq \hat{\epsilon}$, luego $c + \tilde{\epsilon} \leq c + \hat{\epsilon}$ y $c - \tilde{\epsilon} \geq c - \hat{\epsilon}$. Sea $u \in I^{c+\tilde{\epsilon}}\backslash(I^{c-\tilde{\epsilon}} \cup N_{\delta/8})$, es decir $c-\tilde{\epsilon} < I(u) \leq c+\tilde{\epsilon}$; esto implica que $c-\hat{\epsilon} < I(u) \leq c+\hat{\epsilon}$, o sea $u \in I^{c+\hat{\epsilon}}\backslash(I^{c-\hat{\epsilon}} \cup N_{\delta/8})$.

Entonces gracias a (3.12), $\|I(u)\|_{E'} \geq b$. Como $\tilde{\epsilon}$ y u fueron elegidos arbitrariamente se concluye que sin importar que tan pequeño sea $\tilde{\epsilon}$,

$$\|I'(u)\|_{E'} \geq b \quad \forall\, u \in I^{c+\tilde{\epsilon}} \backslash (I^{c-\tilde{\epsilon}} \cup N_{\delta/8}). \tag{3.14}$$

En particular se toma,

$$0 < \tilde{\epsilon} < \text{mín} \left\{ \bar{\epsilon}, \frac{b\delta}{32}, \frac{b^2}{2}, \frac{1}{8} \right\}. \tag{3.15}$$

Eligiendo $\epsilon \in]\,0, \tilde{\epsilon}\,[$, se definen los conjuntos:

$$A = \{u \in E \ \mid \ I(u) \leq c - \tilde{\epsilon}\} \cup \{u \in E \ \mid \ I(u) \geq c + \tilde{\epsilon}\}$$

y

$$B = \{u \in E \ \mid \ c - \epsilon \leq I(u) \leq c + \epsilon\}.$$

Las relacones entre ϵ y $\tilde{\epsilon}$ determinan que $A \cap B = \varnothing$. Considérese la función

$$g(x) = \frac{\rho_A(x)}{\rho_A(x) + \rho_B(x)}.$$

Por razones ya expuestas anteriormente esta función es localmente Lipschitz continua y además $g = 0$ en A, $g = 1$ en B y $0 \leq g(x) \leq 1$ para todo $x \in E$.

Análogamente sea

$$f(x) = \frac{\rho_{N_{\delta/8}}(x)}{\rho_{N_{\delta/8}}(x) + \rho_{E \backslash N_{\delta/4}}(x)};$$

se tiene a su vez una función localmente Lipschitz continua tal que $f = 0$ en $N_{\delta/8}$, $f = 1$ en $E \backslash N_{\delta/4}$ y $0 \leq f(x) \leq 1$ para todo $x \in E$.

Por último, considérese la función

$$\begin{aligned} h : [\,0,+\infty\,[&\to [\,0,1\,] \\ s \mapsto h(s) &= \begin{cases} 1, & \text{si} \quad 0 \leq s \leq 1, \\ \\ {}^{1}\!/_{s}, & \text{si} \quad s > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

que es localmente Lipschitz continua pues en efecto toda constante lo es y $s \mapsto \dfrac{1}{s}$ lo es en $]\,1,+\infty\,[$. Como $I \in C^1(E)$, por el Lema 3.3.1, existe V un campo vectorial p.g. sobre $\tilde{E}$. Finalmente se define

$$\begin{aligned} W : E &\to E \\ x \mapsto W(x) &= \begin{cases} -f(x)g(x)h(\|V(x)\|)V(x), & \text{si} \quad x \in \tilde{E}, \\ \\ 0, & \text{si} \quad x \notin \tilde{E}. \end{cases} \end{aligned}$$

Por combinar composiciones y productos de funciones localmente Lipschitz continuas, W es Lipschitz continua (tómense en cuenta las proposiciones de la Sección 3.1.3) y claramente $0 \leq \|W(x)\| \leq 1$ para todo $x \in E$. Luego, si se considera el siguiente problema de Cauchy:

$$\begin{cases} \eta'(t,u) = W(\eta(t,u)), \\ \\ \eta(0,u) = u; \end{cases} \tag{3.16}$$

el Teorema 3.1.3 asegura la existencia de un único $\eta \in C([\,0,+\infty\,[\times E, E)$ que resuelve el problema. Restringiendo el dominio se tiene $\eta \in C([\,0,1\,] \times E, E)$ tal que $\eta(0,u) = u$, es decir, se cumple *(1)*. Para abreviar, denótese por $A_{c,\bar{\epsilon}}$ al conjunto

$E\backslash I^{-1}([\,c-\bar{\epsilon},c+\bar{\epsilon}\,])$; Si $u\in A_{c,\bar{\epsilon}}$, entonces $u\notin I^{-1}([\,c-\bar{\epsilon},c+\bar{\epsilon}\,])$ y por tanto $I(u)\notin[\,c-\bar{\epsilon},c+\bar{\epsilon}\,]$. De ésta forma, como $A_{c,\bar{\epsilon}}\subset A$ (pues $\bar{\epsilon}>\tilde{\epsilon}$) y como $g=0$ en A, se tiene que $g=0$ en $A_{c,\bar{\epsilon}}$, con lo cual $W(u)=0$ para todo $u\in A_{c,\bar{\epsilon}}$; así, en este conjunto $\eta(t,u)=u$ es solución única para (3.16), obteniéndose *(2)*. Integrando la ecuación diferencial se puede obtener *(3)*: sea $t\in[\,0,1\,]$, entonces,

$$\|\eta(t,u)-u\|=\left\|\int_0^t W(\eta(s,u))\,ds\right\|\leq\int_0^t\|W(\eta(s,u))\|\,ds\leq\int_0^t 1\,ds=t\leq 1.$$

Para verificar *(4)*, en primer lugar, si $W=0$ entonces $\eta(t,u)=u$ es la solución al problema (por la condición inicial y la unicidad) y por lo tanto la propiedad se verifica trivialmente. En el caso de que $W\neq 0$ entonces $\eta(t,u)\in\tilde{E}$ y $V(\eta(t,u))$ está definido. Ahora, utilizando la regla de la cadena de la Proposición 3.1.1, y las propiedad (ii) de vector p.g. de $V(\eta(t,u))$ se tiene,

$$\begin{aligned}\frac{dI(\eta(t,u))}{dt}&=I'(\eta(t,u))\eta'(t,u)\\&=-I'(\eta(t,u))f(\eta(t,u))g(\eta(t,u))h(\|V(\eta(t,u))\|)V(\eta(t,u))\\&=f(\eta(t,u))g(\eta(t,u))h(\|V(\eta(t,u))\|)[-I'(\eta(t,u))V(\eta(t,u))]\\&\leq -I'(\eta(t,u))V(\eta(t,u))\\&\leq -\|I'(V(\eta(t,u)))\|^2_{E'}\leq 0.\end{aligned}$$

Esto significa que $I(\eta(t,u))$ es decreciente en t, así que para $t\geq 0$, $I(\eta(t,u))\leq I(\eta(0,u))=I(u)$, obteniéndose lo buscado.

La propiedad *(5)* resulta la más difícil de demostrar. Se había mostrado que sólo hacía falta probar que $\eta(I^{c+\epsilon}\backslash N_\delta)\subset I^{c-\epsilon}$. Téngase en cuenta que si $u\in I^{c-\epsilon}$ entonces

$I(u) \leq c - \epsilon$ y por *(4)*, $\eta(t,u) \in I^{c-\epsilon}$ para todo t, especialmente para 1, es decir, $\eta(1,u) \in I^{c-\epsilon}$; se pueden descartar entonces los elementos u de $I^{c-\epsilon}$ en la prueba pues para ellos siempre se cumplirá que $\eta(1,u) \in I^{c-\epsilon}$ y entonces solo hace falta probar que para $u \in M = I^{c+\epsilon} \backslash (I^{c-\epsilon} \cup N_\delta)$, $\eta(1,u) \in I^{c-\epsilon}$; bastaría probar que existe $t \in]\,0,1\,[$ tal que $\eta(t,u) \in I^{c-\epsilon}$, es decir que $I(\eta(t,u)) \leq c - \epsilon$. Como $I \circ \eta$ es decreciente esto implicaría que $I(\eta(1,u)) \leq c - \epsilon$, o en otras palabras $\eta(1,u) \in I^{c-\epsilon}$, lo que terminaría con la demostración. Así que por contradicción se asume que

$$\forall\, t \in]\,0,1\,[, \quad \eta(t,u) \notin I^{c-\epsilon}. \tag{3.17}$$

Por un lado *(4)* garantiza que $I(\eta(0,u)) - I(\eta(t,u)) \geq 0$. Se sabe que $g = 0$ en $I^{c-\tilde{\epsilon}} \subset A$. Entonces, ya que $I(\eta(0,u)) \geq c - \epsilon > c - \tilde{\epsilon}$, por continuidad y monotonía podría ser que para cierto $t_0 > 0$ se tenga que $I(\eta(t_0,u)) = c - \tilde{\epsilon}$. Así, para todo $t > t_0$, $\eta(t,u) \in I^{c-\tilde{\epsilon}}$, con lo cual $\eta'(t,u) = 0$ y por tanto

$$\frac{dI(\eta(t,u))}{dt} = I'(\eta(t,u))\eta'(t,u) = 0;$$

lo que implica que $I(\eta(t,u))$ es constante para $t > t_0$, es decir $I(\eta(t,u)) = c - \tilde{\epsilon}$. Luego, para todo $t > 0$, $I(\eta(t,u)) \geq c - \tilde{\epsilon}$, o, multiplicando por -1,

$$- I(\eta(t,u)) \leq \tilde{\epsilon} - c. \tag{3.18}$$

Por otro lado, $u \in M$ implica $u \in I^{c+\epsilon}$; luego, $I(u) \leq c + \epsilon$, que por *(1)* significa

$$I(\eta(0,u)) \leq c + \epsilon. \tag{3.19}$$

Sumando (3.18) y (3.19) se obtiene

$$0 \leq I(\eta(0,u)) - I(\eta(t,u)) < \epsilon + \tilde{\epsilon} < 2\tilde{\epsilon} \tag{3.20}$$

Ahora, si $u \in M$, $\rho_{K_c}(u) = \rho_{K_c}(\eta(0,u)) \geq \delta > \dfrac{\delta}{2}$. Para cada $u \in E$, la función

$$\rho_{K_c} \circ \eta(\,\cdot\,,u) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

es continua, por tanto se puede encontrar $t > 0$ suficientemente pequeño tal que $\rho_{K_c}(\eta(s,u)) > \dfrac{\delta}{2}$ para $s \in [\,0,t\,[$. Hay dos posibilidades para tal t. La primera es que sea menor que 1 y que eventualmente se alcance la igualdad $\rho_{K_c}(\eta(t,u)) = {}^{\delta}\!/_{2}$, es decir que $\eta(t,u)$ esté en la frontera del complemento de $N_{\delta/2}$ $(\partial(E \backslash N_{\delta/2}))$. Entonces se tendría que $\eta(s,u) \in L = I^{c+\epsilon} \backslash (I^{c-\epsilon} \cup N_{\delta/2})$ para $s \in [0,t]$. En este caso, para tales s, $\eta(s,u) \in \tilde{E}$, ya que $N_{\delta/8} \subset N_{\delta/2}$ y por tanto $\eta(s,u) \in I^{c+\epsilon} \backslash (I^{c-\epsilon} \cup N_{\delta/8})$, que gracias a (3.14) implica que $\|I(\eta(s,u))\| \geq b > 0$. Además $f(\eta(s,u)) = g(\eta(s,u)) = 1$. Con ello en mente y utilizando sucesivamente la desigualdad (3.20), el Teorema Fundamental del Cálculo, la Proposición 3.1.1, la linealidad de I' y la propiedad (ii) del vector p.g., se tiene:

$$\begin{aligned}
2\tilde{\epsilon} &> I(\eta(0,u)) - I(\eta(t,u)) \\
&= \int_t^0 \frac{d}{ds} I(\eta(s,u))\, ds \\
&= \int_t^0 -I'(\eta(s,u)) f(\eta(s,u)) g(\eta(s,u)) h(\|V(\eta(s,u))\|) V(\eta(s,u))\, ds \\
&= \int_0^t h(\|V(\eta(s,u))\|) I'(\eta(s,u)) V(\eta(s,u))\, ds \\
&\geq \int_0^t h(\|V(\eta(s,u))\|)\, \|I'(\eta(s,u))\|_{E'}^2\, ds.
\end{aligned}$$

Ahora, gracias a la conjetura probada (3.14) y la propiedad (i) del vector p.g., se puede continuar con la desigualdad para obtener:

$$\begin{aligned}
2\tilde{\epsilon} &\geq b\int_0^t h(\|V(\eta(s,u))\|)\,\|I'(\eta(s,u))\|_{E'}\,ds \\
&\geq \frac{b}{2}\int_0^t h(\|V(\eta(s,u))\|)\,\|V(\eta(s,u))\|\,ds \\
&\geq \frac{b}{2}\left\|\int_0^t h(\|V(\eta(s,u))\|)V(\eta(s,u))\,ds\right\| \\
&= \frac{b}{2}\left\|\int_0^t W(\eta(s,u))\,ds\right\| \\
&= \frac{b}{2}\,\|\eta(t,u)-u\|\,.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, y gracias a como se escogió $\tilde{\epsilon}$,

$$\|\eta(t,u)-u\| < \frac{4\tilde{\epsilon}}{b} < \frac{\delta}{8} < \frac{\delta}{2}. \tag{3.21}$$

Por otro lado y gracias a que en un espacio métrico con métrica d, la distancia ρ_A entre puntos x, y y un conjunto no vacío A cumple la 'desigualdad triangular':

$$\rho_A(x) \leq d(x,y) + \rho_A(y),$$

se tiene para $u \in E\backslash N_\delta$ y $\eta(t,u) \in \partial(E\backslash N_{\delta/2})$:

$$\begin{aligned}
\|\eta(t,u)-u\| &= \|u-\eta(t,u)\| \\
&\geq \rho_{K_c}(u) - \rho_{K_c}(\eta(t,u)) \\
&\geq \delta - \frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{2}.
\end{aligned}$$

La contradicción con (3.21) implica que la primera opción para t no es plausible; entonces se toma la segunda, es decir que t sea mayor o igual que 1 alcanzando la función a $\frac{\delta}{2}$ como anteriormente o que de plano $t = +\infty$; en cualquier caso y gracias a (3.17) se tiene $\eta(t,u) \in L$ para todo $t \in \,]\,0,1\,[$; de esta forma, usando los mismos razonamientos que llevaron a (3.21), se obtendría

$$\frac{d}{dt} I(\eta(t,u)) \leq -h(\|V(\eta(t,u))\|) \, \|I'(\eta(t,u))\|_{E'}^{2} \,, \tag{3.22}$$

que permite analizar dos casos.

Por un lado, si para algún $t \in \,]\,0,1\,[$, $\|V(\eta(t,u))\| \leq 1$, entonces $h(\|V(\eta(t,u))\|) = 1$, con lo cual

$$\frac{d}{dt} I(\eta(t,u)) \leq - \|I'(\eta(t,u))\|_{E'}^{2} \leq -b^2 \tag{3.23}$$

Por otro lado, si para algún $t \in \,]\,0,1\,[$, $\|V(\eta(t,u))\| > 1$, entonces $h(\|V(\eta(t,u))\|) = \dfrac{1}{\|V(\eta(t,u))\|}$, con lo cual, manipulando un poco la propiedad (ii),

$$\frac{d}{dt} I(\eta(t,u)) \leq -\frac{\|I'(\eta(t,u))\|_{E'}^{2}}{\|V(\eta(t,u))\|} \leq -\frac{\|V(\eta(t,u))\|^{2}}{4\,\|V(\eta(t,u))\|} = -\frac{\|V(\eta(t,u))\|}{4} < -\frac{1}{4}. \tag{3.24}$$

En cualquier caso se obtiene que para todo $t \in \,]\,0,1\,[$

$$\frac{d}{dt} I(\eta(t,u)) \leq - \text{mín} \left\{ b^2, \frac{1}{4} \right\}, \tag{3.25}$$

que al integrar implica que

$$I(\eta(t,u)) - I(\eta(0,u)) \leq - \text{mín} \left\{ b^2, \frac{1}{4} \right\} t < - \text{mín} \left\{ b^2, \frac{1}{4} \right\},$$

que a su vez, junto con (3.20) implica que,

$$2\tilde{\epsilon} > I(\eta(0,u)) - I(\eta(t,u)) > \text{mín} \left\{ b^2, \frac{1}{4} \right\}.$$

Luego

$$\tilde{\epsilon} > \text{mín} \left\{ \frac{b^2}{2}, \frac{1}{8} \right\},$$

que contradice (3.15). En los dos casos posibles analizados se pueden encontrar contradicciones que resultan de haber asumido en principio (3.17).

$\square$

El teorema precedente es un resultado muy general puesto que hace uso de cualquier vecindad abierta N de K_c, en la propiedad *(5)*; es el resultado que Ambrosetti y Rabinowitz utilizaron y por eso se ha expuesto con lujo de detalle en este trabajo. El resultado que se usará lo subsiguiente se puede resumir así:

Teorema 3.3.2. *Sea E un espacio de Banach, $I \in C^1(E)$ un funcional que satisface (PS), $c \in \mathbb{R}$ y $\bar{\epsilon} > 0$. Si no existe un punto crítico de I al nivel c, entonces existe $\epsilon \in (0, \bar{\epsilon})$ tal que $I^{c+\epsilon}$ es deformable a $I^{c-\epsilon}$. Además, la deformación fija el conjunto $A_{c,\bar{\epsilon}}$.*

Demostración. Del teorema anterior, ya que $K_c = \varnothing$, se sigue que existe $\epsilon \in]\,0, \bar{\epsilon}\,[$ y una función continua $\eta : [\,0,1\,] \times E \to E$ tal que

(1) $\eta(0,u) = u, \;\; \forall\, u \in E.$

(2) $I(\eta(t,u)) \leq I(u), \;\; \forall\, t \in [\,0,1\,]$ y $u \in E.$

(3) $\eta(1, I^{c+\epsilon}) \subset I^{c-\epsilon}.$

(4) $\eta(t,u) = u, \;\; \forall\, t \in [\,0,1\,]$ y $\forall\, u \in A_{c,\bar{\epsilon}}.$

La propiedad *(1)* implica que $\eta(0,u) = u, \;\; \forall\, u \in I^{c+\epsilon}$, primera característica de la deformación buscada. Si $u \in I^{c-\epsilon}$ entonces $I(u) \leq c - \epsilon$ y por *(2)*, $\eta(t,u) \in I^{c-\epsilon}$, es decir $\eta(t,u) \in I^{c-\epsilon}$ para todo $u \in I^{c-\epsilon}$ y todo $t \in [\,0,1\,]$, segunda característica de la deformación. La propiedad *(3)* se traduce directamente en que $\eta(1,u) \in I^{c-\epsilon}$ para todo $u \in I^{c+\epsilon}$, completando la triada necesaria para establecer la existencia de la deformación $\eta : [\,0,1\,] \times I^{c+\epsilon} \to I^{c+\epsilon}$, de $I^{c+\epsilon}$ a $I^{c-\epsilon}$, que fija a $A_{c,\bar{\epsilon}}$ debido a *(4)*. $\square$

Este resultado es excepcional; en esencia se puede resumir en que para un funcional diferenciable, se tiene la siguiente alternativa exclusiva: **o** existe una punto crítico al nivel $c \in \mathbb{R}$ **o** para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño existe una deformación del subnivel $I^{c+\epsilon}$ al subnivel $I^{c-\epsilon}$.

3.4. El Principio de Minimax *Clásico*

El Principio de Minimax presentado a continuación es un resultado abstracto que resulta muy flexible para producir una gran variedad de herramientas que pueden ser adaptadas a muchos contextos incluyendo el objetivo de demostrar el Teorema de Paso de Montaña en su versión clásica. Resulta muy interesante su construcción, que empieza desde unas cuantas definiciones

Definición 3.4.1 (Familia invariante)**.** Sea E un espacio de Banach y sea η una deformación en E. Una familia Γ de subconjuntos de E se dice invariante para η si

$$\forall\, A \in \Gamma \text{ y } \forall\, t \in [\,0,1\,],\ \ \eta(t,A) \in \Gamma.$$

Definición 3.4.2 (Clase de minimax)**.** Sea E un espacio de Banach e $I : E \to \mathbb{R}$ un funcional. Cualquier familia Γ de subconjuntos de E es llamada una clase de minimax, y el valor

$$c = \inf_{A \in \Gamma} \sup_{u \in A} I(u)$$

es llamado el nivel de minimax de Γ.

Definición 3.4.3 (Familia α-admisible)**.** Sea E un espacio de Banach, $I : E \to \mathbb{R}$ un funcional, $\alpha > 0$ un número real, Γ una clase de minimax y c su nivel de minimax. Se dice que Γ es α-admisible con respecto a I si

1. $c \in \mathbb{R}$

2. Γ es invariante con respecto a todas las deformaciones que fijan $A_{c,\bar{\epsilon}}$ para algún $\bar{\epsilon} \in \mathbb{R}$ tal que $0 < \bar{\epsilon} < \alpha$.

Teorema 3.4.1 (Principio de Minimax)**.** *Sea E un espacio de Banach, $I \in C^1(E)$ un funcional que satisface (PS) y $\alpha > 0$. Sea Γ una clase de minimax al nivel c, α-admisible para I. Entonces I posee un punto crítico al nivel c.*

Demostración. Por contradicción, al asumir que no existe punto crítico al nivel c, gracias al Teorema 3.3.2 se puede elegir $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño (formalmente se sabe que es menor que el $\bar{\epsilon}$ que hace a Γ α-admisible) tal que el conjunto $I^{c+\epsilon}$ es deformable a $I^{c-\epsilon}$ con una deformación η que fija $A_{c,\bar{\epsilon}}$; así, Γ es invariante respecto a dicha η. Por la definición de c como nivel de minimax, usando la caracterización del ínfimo se puede afirmar que existe un conjunto $A \in \Gamma$ tal que

$$\sup_{u \in A} I(u) \leq c + \epsilon;$$

es decir que $\forall\, u \in A$, $I(u) \leq c + \epsilon$. En otras palabras $u \in I^{c+\epsilon}$, $\;\forall\, u \in A$. O lo que es lo mismo $A \subset I^{c+\epsilon}$, que aplicando la deformación resulta en $\eta(1, A) \subset \eta(1, I^{c+\epsilon})$. Ahora, por definición de deformación se conoce que $\eta(1, I^{c+\epsilon}) \subset I^{c-\epsilon}$; por lo tanto

$$\eta(1, A) \subset I^{c-\epsilon}.$$

Así $I(u) \leq c - \epsilon$, $\;\forall\, u \in \eta(1, A)$, con lo cual

$$\sup_{u \in \eta(1,A)} I(u) \leq c - \epsilon < c. \tag{3.26}$$

Por otro lado como Γ es invariante para η, se tiene que $\eta(1, A) \in \Gamma$, y por lo tanto

$$\sup_{u \in \eta(1,A)} I(u) \geq \inf_{B \in \Gamma} \sup_{u \in B} I(u) = c. \tag{3.27}$$

Las desigualdades(3.26) y (3.27) representan la contradicción que permite afirmar que I posee un punto crítico al nivel c. $\square$

Observación 3.4.1. El Principio de Minimax, que lleva este nombre porque garantiza la existenia de un punto crítico con imagen justamente en el nivel de minimax de una clase de minimax determinada, es en realidad *un* pincipio de minimax, en el sentido de que existen más proposiciones de este tipo, basadas en distintas hipótesis que tienen que ver con las características de la clase Γ. En este caso, es la $\alpha-$admisibilidad de ésta la que garantiza el resultado, cuestión que podría modificarse de ser necesario.

3.5. El Teorema de Paso de Montaña *Clásico*

Ha llegado el momento de probar el Teorema de Paso de Montaña para funcionales definidos en espacios de Banach, utilizando lo investigado hasta ahora. El objetivo de este teorema es dar las condiciones bajo los cuales estos funcionales poseen al menos un punto crítico.

Teorema 3.5.1 (Teorema de Paso de Montaña Clásico)**.** *Sea E un espacio de Banach e $I \in C^1(E)$ un funcional que satisface (PS) y tal que $I(0) = 0$. Además sean ρ y α números reales positivos tales que cumplen:*

1. *Si $\|u\| = \rho$ entonces $I(u) \geq \alpha$,*

2. *Existe $v \in H$ tal que $\|v\| > \rho$ e $I(v) \leq 0$.*

Entonces I posee al menos un punto crítico a un nivel $c \geq \alpha$.

Demostración. En primer lugar se define la siguiente clase de minimax, es decir una familia de subconjuntos de E:

$$\Gamma = \{\gamma([\,0,1\,]) \mid \gamma : [\,0,1\,] \to E \text{ es función continua }, \gamma(0) = 0 \text{ y } \gamma(1) = v.\}$$

Cada elemento de Γ es un camino continuo en E que conecta el origen 0 con el vector v. El nivel de minimax c de esta clase está definido por:

$$c = \inf_{\gamma([\,0,1\,]) \in \Gamma} \sup_{u \in \gamma([\,0,1\,])} I(u).$$

Sin embargo,

$$\begin{aligned}
\sup_{u\in\gamma([\,0,1\,])} I(u) &= \sup\{I(u) \mid u \in \gamma([\,0,1\,])\} \\
&= \sup\{I(u) \mid \exists t \in [\,0,1\,],\ \text{tal que } \gamma(t) = u\} \\
&= \sup\{I(\gamma(t)) \mid t \in [\,0,1\,]\} \\
&= \sup_{t\in[\,0,1\,]} I(\gamma(t)).
\end{aligned}$$

Ahora, como tanto I como γ son continuas, entonces $I \circ \gamma$ lo es y así $\sup\limits_{t\in[\,0,1\,]} I(\gamma(t))$ es alcanzado al ser $[\,0,1\,]$ compacto. Por lo tanto,

$$c = \inf_{\gamma([\,0,1\,])\in\Gamma} \max_{t\in[\,0,1\,]} I(\gamma(t)).$$

Lo que se necesita probar para poder aplicar el Principio de Minimax es que Γ sea una clase $\alpha-$admisible, para esto, en primera instancia se debe verificar que $c \in \mathbb{R}$. Por un lado, se sabe que $\max\limits_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)) < +\infty$, por lo tanto, al tomar el ínfimo sobre los $\gamma([0,1]) \in \Gamma$ no queda otra alternativa que éste también cumpla aquello, es decir $c \leq +\infty$. Ahora, para todo $\gamma([\,0,1\,]) \in \Gamma$ se tiene que $\|\gamma(0)\| = \|0\| = 0$ y $\|\gamma(1)\| = \|v\| > \rho$. El hecho de que tanto γ como la norma $\|\cdot\|$ sean continuas se traduce en el hecho de que existe $t_\gamma \in [\,0,1\,]$ tal que $\|\gamma(t_\gamma)\| = \rho$. Gracias a la primera hipótesis, esto implica que $I(\gamma(t_\gamma)) \geq \alpha$, y por lo tanto

$$\max_{t\in[\,0,1\,]} I(\gamma(t)) \geq \alpha$$

Como esto se cumple para todo $\gamma([\,0,1\,]) \in \Gamma$ y el ínfimo es la mayor de las cotas inferiores entonces $c \geq \alpha > 0 > -\infty$.

Queda por demostrar que Γ es invariante con respecto a todas las deformaciones que fijan $A_{c,\bar{\epsilon}}$ para algún $\bar{\epsilon} < \alpha$.

Si se toma $\bar{\epsilon} = \alpha/2$, entonces $c - \bar{\epsilon} > 0$. Y con ello se tiene

$$I(0) = 0 < c - \bar{\epsilon} \text{ e } I(v) \leq 0 < c - \bar{\epsilon}. \tag{3.28}$$

Sea η cualquier deformación que fija $A_{c,\bar{\epsilon}}$ y se toma cualquier $\gamma([\,0,1\,]) \in \Gamma$ y $t \in [\,0,1\,]$. Es preciso mostrar que

$$\eta(t, \gamma([\,0,1\,])) \in \Gamma,$$

lo que significa mostrar que $\eta(t, \gamma([\,0,1\,])) = \tilde{\gamma}([\,0,1\,])$ para cierto $\tilde{\gamma} : [\,0,1\,] \to E$ continuo tal que $\tilde{\gamma}(0) = 0$ y $\tilde{\gamma}(1) = v$. Se define

$$\begin{aligned} \gamma : [\,0,1\,] &\to E \\ s &\mapsto \tilde{\gamma}(s) = \eta(t, \gamma(s)). \end{aligned}$$

Debido a que γ es continua y η lo es para la segunda variable entonces $\tilde{\gamma}$ lo es. Ahora, debido a (3.28) es claro que $0, v \in A_{c,\bar{\epsilon}}$. Luego,

$$\tilde{\gamma}(0) = \eta(t, \gamma(0)) = \eta(t, 0) = 0$$

y

$$\tilde{\gamma}(1) = \eta(t, \gamma(1)) = \eta(t, v) = v.$$

De esta forma $\tilde{\gamma}([\,0,1\,]) \in \Gamma$ con lo cual Γ es una clase de minimax α-admisible. En virtud del Teorema 3.4.1 se concluye la existencia de un punto crítico para I al nivel $c > 0$. $\square$

Las propiedades *1* y *2* del TPM clásico son conocidas como la geometría del funcional. A cualquier funcional que posea esas características se le llama un funcional con *geometría de paso de montaña*. Se puede apreciar en lo mostrado que esta geometría es la responsable de que el funcional posea una familia $\alpha-$admisible, mientras que la condición (PS) es necesaria para garantizar existencia de un punto crítico justo al nivel de minimax de dicha familia.

A continuación se resume la demostración del TPM con el siguiente esquema de pasos.

1. En primer lugar es necesario mostrar que para todo funcional I continuamente diferenciable en un espacio de Banach, que satisface (PS), dados un número real c y un positivo cualesquiera $\bar{\epsilon}$, se tiene la siguiente alternativa exclusiva: **o** existe una sucesión de Palais-Smale al nivel c para el funcional I **o** el subnivel $I^{c+\epsilon}$ se deforma al subnivel $I^{c-\epsilon}$, para cierto $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño $(\epsilon < \bar{\epsilon})$.

2. Se define lo que es una clase de minimax para el funcional I y su nivel de minimax c, que de ser real y poseer otra característica (definida a posteriori a sabiendas de las características de la deformación precedente) se dice α-admisible.

3. Se muestra que si una clase de minimax es α-admisible con respecto a un funcional I que satisface (PS), entonces posee un punto crítico al nivel c (justamente el nivel de minimax). Esto se hace suponiendo lo contrario lo que

lleva a una contradicción con las características de la deformación que existe desde un principio, gracias a la mencionada alternativa.

4. Por último bajo ciertas hipótesis geométricas para el funcional I se construye una clase de minimax para dicho funcional, y se prueba que ésta es α-admisible, lo que implica que existe el punto crítico.

Las siguientes observaciones revelan cuestiones de gran importancia en el estudio del TPM clásico.

Observación 3.5.1. Resulta muy interesante conocer la razón por la cual el Teorema de Paso de Montaña lleva este nombre. Si el espacio de Banach E es $\mathbb{R}^2$, se puede pensar a I como la superficie de una montaña muy regular en la cual los puntos 0 y v son dos valles o fosas (v a lo más de igual profundidad que 0). Si al analizar todos los caminos continuos que unen estos dos puntos, se toma el punto más alto de cada uno de ellos, el TPM clásico garantiza que en el camino en el cual este punto tenga menor altitud, existirá un lugar por el cual se puede cruzar de un valle a otro, un paso de montaña. La Figura 3.1 ilustra esta situación.

Observación 3.5.2. Es necesario llamar la atención al hecho de que ni en el artículo original ni en la monografía de Rabinowitz se utiliza el esquema aquí presentado con la separación entre Principio de Minimax y TPM para llegar al resultado final. Las definiciones de familia invariantes y clase de minimax se han tomado de [5] y se ha definido el concepto de familia α-admisible como herramienta para su utilización.

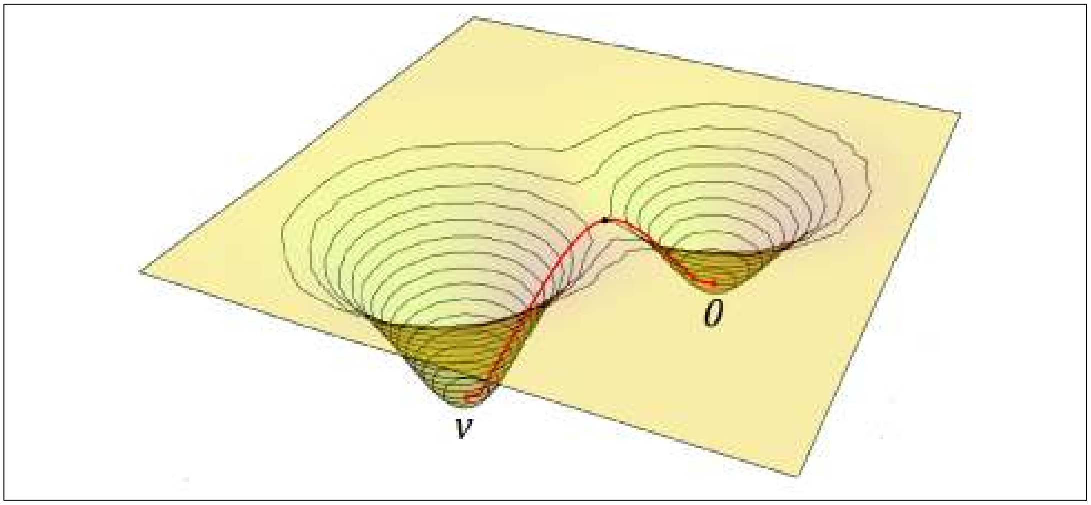

Figura 3.1: (realizada con la ayuda de Wolfram Mathematica) Gráfica de una función con geometría de paso de montaña. En el punto más alto del camino en rojo, que une los puntos $I(0) = 0$ e $I(v) < 0$, se encuentra un paso de montaña.

El TPM en su demostración original es alcanzado directamente sin mediar dicha separación que, más allá de ser meramente pedagógica, resulta útil para ver al mismo como una aplicación del Principio de Minimax, herramienta que, por otro lado, puede ser maleable y utilizarse en más de un contexto.

Observación 3.5.3. Como se puede apreciar, la existencia de la deformación entre subniveles, está dada por el hecho de que no exista un punto crítico al nivel c. La mayoría de esquemas y reproducciones del TPM clásico, parten de este hecho: al querer demostrar que en determinado real c, un punto crítico existe a ese nivel, se asume que no es así, y se llega a que la deformación que obligatoriamente existe contradice las características de la geometría de paso de montaña. Sin embargo a continuación se muestra que no es la no existencia de punto crítico la que determina la contradicción y que no es necesaria la condición (PS) hasta cierto punto para encontrar deformaciones.

Teorema 3.5.2. *Sea E un espacio de Banach, $I \in C^1(E)$ un funcional, $c \in \mathbb{R}$ y $\bar{\epsilon} > 0$. Si no existe una sucesión de Palais-Smale de I al nivel c, entonces existe $\epsilon \in]\,0, \bar{\epsilon}\,[$ tal que $I^{c+\epsilon}$ es deformable a $I^{c-\epsilon}$. Además, la deformación fija $A_{c,\bar{\epsilon}}$.*

Demostración. La presente demostración, es análoga a la del Teorema 3.3.1, con las respectivas acotaciones que se harán a continuación. Considérese la primera conjetura:

$$(\exists\, \hat{\epsilon} > 0) \text{ y } (\exists\, b > 0) \;\; (\forall\, u \in I^{c+\hat{\epsilon}} \backslash I^{c-\hat{\epsilon}}) \text{ tal que } \|I'(u)\|_{E'} \geq b. \tag{3.29}$$

Para demostrarla, por contradicción supóngase que

$$(\forall\, \hat{\epsilon} \geq 0) \text{ y } (\forall\, b \geq 0) \;\; (\exists\, u \in I^{c+\hat{\epsilon}} \backslash I^{c-\hat{\epsilon}}) \text{ tal que } \|I'(u)\|_{E'} < b.$$

Como para todo $k \in \mathbb{N}$, $\;\hat{\epsilon}_k = b_k = \dfrac{1}{2^k} > 0$ entonces $\exists\, u_k \in I^{c+\hat{\epsilon}_k} \backslash I^{c-\hat{\epsilon}_k}$ tal que

$$\|I'(u_k)\|_{E'} < b_k. \tag{3.30}$$

Así, para todo $k \in \mathbb{N}$, $c - \hat{\epsilon}_k \leq I(u_k) \leq c + \hat{\epsilon}_k$ y $\|I'(u_k)\| < b_k$. Como $\hat{\epsilon}_k = b_k$ es una sucesión que converge a cero, entonces,

$$I(u_k) \to c, \;\text{ y }, e$$

$$I'(u_k) \to 0.$$

Es decir, la sucesión $(u_k)_k$ es una sucesión de Palais- Smale al nivel c, contradiciendo la hipótesis. Luego, se tiene por cierta la conjetura (3.29). Exactamente de la misma forma que en el Teorema 3.3.1 se puede mostrar que tal conjetura se tiene para $\tilde{\epsilon} > 0$ tan pequeño como se desee; en este caso tómese

$$\tilde{\epsilon} < \text{mín}\left\{\bar{\epsilon}, \frac{b^2}{4}, \frac{b}{4}\right\}.$$

Una vez más se toma $\epsilon \in]\,0, \tilde{\epsilon}\,[$ y se definen los conjuntos A y B, así como las funciones g y h como antes. Si V es el campo vectorial p.g. para I, entonces al definir

$$\begin{aligned} W &: E \to E \\ x \mapsto W(x) &= \begin{cases} -g(x)h(\|V(x)\|)V(x), & \text{si} \quad x \in \tilde{E}, \\ 0, & \text{si} \quad x \notin \tilde{E}. \end{cases} \end{aligned}$$

se tiene una función Lipschitz continua y acotada, gracias a lo cual el problema

$$\begin{cases} \eta'(t,u) = W(\eta(t,u)), \\ \eta(0,u) = u \end{cases} \tag{3.31}$$

posee una única solución $\eta \in C([\,0, +\infty\,[\times E, E)$. Restringiendo el dominio se tiene que $\eta \in C([\,0,1\,]\times E, E)$ tal que $\eta(0,u) = u$ (Primera condición para la deformación). Una vez más, utilizando la regla de la cadena de la Proposición 3.1.1 se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{dI(\eta(t,u))}{dt} &= I'(\eta(t,u))\eta'(t,u) \\ &= -I'(\eta(t,u))g(\eta(t,u))h(\|V(\eta(t,u))\|)V(\eta(t,u)) \\ &= g(\eta(t,u))h(\|V(\eta(t,u))\|)[-I'(\eta(t,u))V(\eta(t,u))]. \end{aligned}$$

Luego, gracias propiedad (ii) de vector p.g. de $V(\eta(t,u))$ se obtiene que

$$\begin{aligned}\frac{dI(\eta(t,u))}{dt} &\leq -I'(\eta(t,u))V(\eta(t,u))\\ &\leq -\left\|I'(V(\eta(t,u)))\right\|_{E'}^2 \leq 0,\end{aligned}$$

que implica que $I(\eta(t,u))$ es decreciente en t. Así $\eta(t,u) \in I^{c-\epsilon}$ para todo $u \in I^{c-\epsilon}$ y todo $t \in [\,0,1\,]$ (segunda característica de la deformación). Como $\bar{\epsilon} > \tilde{\epsilon}$ entonces $A_{c,\bar{\epsilon}} \subset A$ y como $g = 0$ en A, $g = 0$ en $A_{c,\bar{\epsilon}}$, con lo cual $W(u) = 0$ para todo $u \in A_{c,\bar{\epsilon}}$; así, en este conjunto $\eta(t,u) = u$ es solución única para (3.31), obteniéndose que η fija a $A_{c,\bar{\epsilon}}$. Para la tercera y última característica de la deformación es preciso mostrar que $\eta(1, I^{c+\epsilon}) \subset I^{c-\epsilon}$, que se demostrará, en esta ocasión, con un argumento directo, a diferencia del teorema previo. En primer lugar si existe $t \in [0,1]$ tal que $u \in I^{c-\epsilon}$, no hay nada que mostrar; por tanto se asume que $\eta(t,u) \in I^{c+\epsilon} \backslash I^{c-\epsilon}$ para todo $t \in [\,0,1\,]$; con ello $g(\eta(t,u)) = 1$ y

$$\frac{dI(\eta(t,u))}{dt} \leq -h(\|V(\eta(t,u))\|)\left\|I'(V(\eta(t,u)))\right\|_{E'}^2.$$

Si para algún $t \in]\,0,1\,[$, $\|V(\eta(t,u))\| \leq 1$, entonces $h(\|V(\eta(t,u))\|) = 1$, y por tanto

$$\frac{d}{dt}I(\eta(t,u)) \leq -\left\|I'(\eta(t,u))\right\|_{E'}^2 \leq -b^2 \leq -\frac{b^2}{2} \leq -2\epsilon \tag{3.32}$$

Por otro lado si para algún $t \in]0,1[$, $\|V(\eta(t,u))\| > 1$, entonces $h(\|V(\eta(t,u))\|) = \dfrac{1}{\|V(\eta(t,u))\|}$, con lo cual, manipulando un poco la propiedad (ii),

$$\frac{d}{dt}I(\eta(t,u)) \leq -\frac{\|I'(\eta(t,u))\|_{E'}^2}{\|V(\eta(t,u))\|} \leq -\frac{\|I'(\eta(t,u))\|_{E'}^2}{2\|I'(\eta(t,u))\|_{E'}} = -\frac{\|I'(\eta(t,u))\|_{E'}}{2} < -\frac{b}{2} \leq -2\epsilon. \tag{3.33}$$

En cualquier caso, gracias al Teorema Fundamental del Cálculo, se tiene

$$I(\eta(1,u)) \leq I(u) - 2\epsilon \leq c + \epsilon - 2\epsilon \leq c - \epsilon,$$

la propiedad deseada. $\square$

Puede apreciarse que el precedente resultado no precisa de la propiedad (PS) para el funcional I y, aunque podría incluirse, es de gran interés es dejar en claro que este teorema de deformación ofrece, por contraposición con el primer teorema de este tipo ya estudiado, una alternativa exclusiva diferente: **o** existe una sucesión de Palais-Smale a un nivel $c \in \mathbb{R}$ **o** para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño existe una deformación del subnivel $I^{c+\epsilon}$ al subnivel $I^{c-\epsilon}$.

Lo que se puede implicar gracias a este teorema de deformación, es el Principio de Minimiax y el propio TPM, con el siguiente cambio de forma:

Teorema 3.5.3. *Sea E un espacio de Banach, $I \in C^1(E)$ y $\alpha > 0$. Sea Γ una clase de minimax al nivel c, α-admisible para I. Entonces I posee una sucesión de Palais-Smale al nivel c.*

La demostración de éste teorema es análoga a la del Teorema 3.4.1, sólo que se parte de la no existencia de la sucesión de Palais-Smale, brindando esto la existencia de la deformación y concluyendo en la contradicción, exactamente como se hizo en ese momento. La siguiente observación es de suma importancia.

Observación 3.5.4. Si el funcional I satisface además (PS) o $(PS)_c$ entonces gracias al Lema 3.2.2, la existencia de un punto crítico al nivel c es garantizada. Esto permite enunciar el TPM clásico de la siguiente manera.

Teorema 3.5.4 (TPM Clásico)**.** *Sea E un espacio de Banach e $I \in C^1(E)$ un funcional que satisface $I(0) = 0$. Además sean ρ y α números reales positivos tales que cumplen:*

1. *Si $\|u\| = \rho$ entonces $I(u) \geq \alpha$,*

2. *Existe $v \in H$ tal que $\|v\| > \rho$ e $I(v) \leq 0$.*

Entonces I posee una sucesión de Palais-Smale a un nivel $c \geq \alpha$. Si además I satisface $(PS)_c$ entonces posee un punto crítico a ese nivel.

La demostración de éste teorema es análoga a la del Teorema 3.5.1, ya que en aquella fue la geometría de paso de montaña la que permitió definir la clase de minimax $\alpha-$admisible, que usando el Teorema 3.5.3 deriva en la existencia de la sucesión de Palais-Smale al nivel de minimax c. $(PS)_c$ sólo funciona una vez encontrada tal sucesión, para hallar el punto crítico, gracias al Lema 3.2.2.

Observación 3.5.5. La razón por la que en este trabajo se escoge esta forma de presentar el TPM, por encima de la usual, es que muestra una característica fundamental en la búsqueda de puntos críticos: que ésta puede separarse en dos problemas independientes; por un lado la existencia de sucesiones de Palais-Smale y por otro la convergencia de dichas sucesiones, o de alguna de sus subsucesiones, es decir que el funcional cumpla (PS). Del primer problema es del cual se encarga el Teorema de Paso de Montaña y se reduce a verificar que el funcional cumpla con la geometría de paso de montaña. Al segundo, que resulta igual de importante, se lo revisará en las sección de aplicaciones, y se verá que para uno u otro funcional, diferentes condiciones pueden hacer que se cumpla (PS) o $(PS)_c$.

En algunos libros de introducción a las EDPs no lineales (Ambrosetti y Malchiodi [1], Badiale y Serra [5] o Evans [14]) el TPM es demostrado en espacios de Hilbert en vez de en espacios de Banach. Como colofón al presente capítulo se ilustra a grandes rasgos como la estructura de los espacios de Hilbert repercute en la demostración del TPM. No por estar definido para espacios de Hilbert este resultado deja de ser importante o sus aplicaciones irrelevantes. Con este repaso se cumplen tres objetivos: revisar los conceptos que enriquecen a un espacio de Hilbert con respecto a uno de Banach en el contexto del TPM, ilustrar la diferencia en la aproximación a la demostración del teorema (que se encuentra básicamente en el Teorema de Deformación), y honrar la forma en la que el autor aprendió el teorema en cuestión, dando crédito a los profesores Marino Badiale y Enrico Serra, que en [5] introducen de una forma muy sencilla y didáctica, para principiantes, el TPM.

En primer lugar se presenta el *resultado por excelencia* de los espacios de Hilbert: aquel archiconocido teorema debido a los inigualables Maurice Fréchet y Frigyes Riesz, que se cita en su forma más conocida y cuya demostración se puede encontrar en el Capítulo 3 de Kreyszig [19].

Teorema 3.5.5 (Representación de Fréchet-Riesz)**.** *Sea H un espacio de Hilbert y H' su dual topológico. Entonces para todo $A \in H'$ existe un único $u_A \in H$ depen-*

diente únicamente de A tal que

$$Av = (u_A|v), \qquad \forall\, v \in H.$$

Además $\|u_A\|_H = \|A\|_{H'}$.

Gracias a este teorema se puede definir el conocido isomorfismo de Riesz R:

$$R : H' \to H$$
$$A \mapsto RA = u_A$$

¿Dónde se fusiona este resultado con la teoría de funcionales diferenciables? La siguiente definición brinda la respuesta.

Definición 3.5.1 (Gradiente)**.** Sea H un espacio de Hilbert, $U \subset H$ un un subconjunto abierto y $R : H' \to H$ el isomorfismo de Riesz. Sea $I : U \to \mathbb{R}$ un funcional Fréchet diferenciable en u. Al elemento $RI'(u) \in H$ se le conoce como el gradiente de I en u y se denota por $\nabla I(u)$. Por lo tanto,

$$I'(u)v = (\nabla I(u)|v), \qquad \forall\, v \in H.$$

En otras palabras si I es Fréchet diferenciable en H cada elemento $u \in H$ tiene asociado su gradiente, que de igual forma es un elemento de H :

$$\nabla I : H \to H$$
$$u \mapsto \nabla I(u).$$

donde claramente, $\nabla I = R \circ I'$.

He aquí la primera estructura exclusiva de un espacio de Hilbert que hace su aparición para facilitar la demostración del Teorema de Deformación. En los espacios de Banach, no es posible definir el gradiente, por lo cual se hizo uso del pseudo gradiente que, como se pudo ver en su construcción, necesita de un aparataje técnico no menor, al menos comparado con el que necesita la construcción del gradiente. Es esta la principal razón por la cual la mayoría de autores que presentan el TPM, lo hacen en espacios de Hilbert. Se recalca una vez más que no por estar definido para espacios de Hilbert el resultado venidero deja de ser importante o sus aplicaciones irrelevantes. De hecho la primera aplicación que Ambrosetti y Rabinowitz proponen para el TPM en su célebre artículo sólo precisa de espacios de Hilbert.

El gradiente por si sólo no será útil en el proceso de construcción de deformaciones, pues es necesario que posea una característica más.

Definición 3.5.2. Sea H un espacio de Hilbert e $I : H \to \mathbb{R}$ un funcional. Se dice que que $I \in C^{1,1}(H)$ si $I \in C^1(H)$ y el gradiente $\nabla I : H \to H$ es Lipschitz continuo.

Esta condición garantizará la existencia de deformaciones en un contexto que se estudiará en breve, y es la condición teórica más simple que se necesita para tal garantía.

Lema 3.5.1. *Sea H un espacio de Hilbert e $I : H \to \mathbb{R}$ un funcional de clase $C^1(H)$. Si el gradiente $\nabla I : H \to H$ es Lipschitz continuo, entonces,*

$$\begin{aligned} J :& H \to H \\ & u \mapsto J(u) = -\frac{\nabla I(u)}{1 + \|\nabla I(u)\|}, \end{aligned}$$

también lo es.

Demostración. El resultado se deriva de la aplicación directa de la Proposición 3.1.7 y del hecho de que si una aplicación F es Lipschitz continua, entonces $-F$ también lo es. $\square$

Estos resultados servirán para probar un especial Lema de Deformación, análogo a los Teoremas de Deformación antes vistos pero que se ha incluido por que a diferencia de los anteriores, propone dilucidar cuando un subnivel de un funcional $I \in C^{1,1}(H)$ es deformable en otro subnivel, en general, no de forma local, a partir de un $c \in \mathbb{R}$ dado. Además, su demostración dista de ser idéntica a las ya presentadas y vislumbra que hay un sinnúmero de maneras de encontrar deformaciones. Asimismo se verá la diferencia entre utilizar el gradiente en vez del p.g.

Lema 3.5.2 (de Deformación)**.** *Sea H un espacio de Hilbert y sea $I \in C^{1,1}(H)$. Sean $a < b$. Si se asume que en el intervalo compacto $[\,a, b\,]$ no existe sucesión de Palais-Smale para I, es decir, para todo $c \in [\,a, b\,]$ no existe sucesión de Palais-Smale para I al nivel c, entonces I^b es deformable en I^a.*

Demostración. Sea el problema de Cauchy,

$$\begin{cases} \eta'(t,u) = -\dfrac{\nabla I(\eta(t,u))}{1 + \|\nabla I(\eta(t,u))\|}, \\ \\ \eta(0,u) = u \end{cases}$$

Si se llama $J(\eta)$ al lado derecho de la ecuación, por el Lema 3.5.1, se sabe que $J(\eta)$ es Lipschitz continuo, y se puede aplicar el Teorema 3.1.2 para obtener una única solución $\eta(t,u)$ para todo $u \in H$, definida en $[\,0,+\infty\,[\times E$. Nótese que si la hipótesis hubiera sido que el gradiente sea localmente Lipzchitz continuo, como J está acotado por 1, entonces también se podría haber utilizado el Teorema 3.1.3 para obtener $\eta(t,u)$.

Por definición $\eta(0,u) = u$ para todo $u \in H$. Ahora, utilizando la Proposición 3.1.1, y la representación de funcionales en espacios de Hilbert, se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}I(\eta(t,u)) &= I'(\eta(t,u))\eta'(t,u) \\
&= (\nabla I(\eta(t,u))|\eta'(t,u)) \\
&= \left(\nabla I(\eta(t,u))\middle| -\frac{\nabla I(\eta(t,u))}{1+\|\nabla I(\eta(t,u))\|}\right) \\
&= -\frac{\|\nabla I(\eta(t,u))\|^2}{1+\|\nabla I(\eta(t,u))\|} \leq 0.
\end{aligned}$$

Es importante llamar la atención a este punto de la demostración: aquí se usa la estructura de espacio de Hilbert para obtener que $t \mapsto I(\eta(t,u))$ es decreciente; puede ayudar a entender como se necesita que sea el pseudo-gradiente para garantizar esta monotonía en el caso de los espacios de Banach. Continuando, sea u en I^c para algún c, entonces $I(u) \leq c$, o $I(\eta(0,u)) \leq c$. Como $0 \leq t$ para todo $t \geq 0$, entonces, $I(\eta(0,u)) \geq I(\eta(t,u))$ para todo $t \geq 0$. Y así $I(\eta(t,u)) \leq c$. En resumen si $u \in I^c$ entonces $\eta(t,u) \in I^c$ para todo $t \geq 0$. Lo que se necesita ahora es construir una deformación de I^b a I^a, usando η.

Para cada $u \in I^b \backslash I^a$ se define,

$$T(u) = \sup\{t \geq 0 \mid \eta(t,u) \in I^b \backslash I^a\},$$

que podría ser infinito. Se sabe que

$$0 \in \{t \geq 0 \mid \eta(t,u) \in I^b \backslash I^a\},$$

puesto que $\eta(0,u) = u \in I^b \backslash I^a$. Entonces

$$a < I(\eta(0,u))) \leq b.$$

Por la continuidad de $I \circ \eta$ en t y ya que es decreciente $\forall\, t$, necesariamente existe $t_0 > 0$ tal que $a < I(\eta(t_0,u))) \leq b$, es decir $\eta(t_0,u) \in I^b \backslash I^a$, con lo cual $T(u) > 0$ y $\forall\, t \in [\,0, T(u)\,[,\;\; \eta(t,u) \in I^b \backslash I^a$. La conjetura que se desea probar es que $T(u)$ no es sólo finita sino que de hecho es uniformemente acotada, es decir,

$$\sup\{T(u) \mid u \in I^b \backslash I^a\} < \infty \tag{3.34}$$

Para ver esto en primer lugar hay que tener en cuenta que,

$$(\exists\, \delta > 0)\;\; (\forall\, u \in I^b \backslash I^a) \text{ tal que } \|\nabla I(u)\| \geq \delta, \tag{3.35}$$

conjetura que por lo visto en los tres resultados de deformación estudiados hasta este momento siempre se encuentra presente y de hecho resulta angular. Una vez más, si se asume como cierto que

$$(\forall\, \delta \geq 0)\;\; (\exists\, u \in I^b \backslash I^a) \text{ tal que } \|\nabla I(u)\| < \delta.$$

Se genera una sucesión $(u_k)_k$ tal que $u_k \in I^b \backslash I^a\;\; \forall k \in \mathbb{N}$ y tal que

$$\nabla I(u_k) \to 0 \text{ en } H.$$

Pero $a < I(u_k) \leq b$, muestra que $(I(u_k))_k$ es una sucesión acotada y por tanto, gracias al teorema de Bolzano-Weierstrass, poseedora una subsucesión convergente $(I(u_{k_j}))_j$; así,

$$J(u_{k_j}) \to c \in [a,b], \text{ y}$$

$$\nabla I(u_{k_j}) \to 0 \text{ en } H,$$

con lo cual $(u_{k_j})_j$ es una sucesión de Palais-Smale para I al nivel $c \in [a,b]$, lo que contradice la hipótesis. De esta forma se concluye (3.35).

Continuando con la prueba de (3.34), sea $u \in I^b \backslash I^a$ fijo pero arbitrario y $t \in [\,0, T(u)\,[$. Luego $\forall\, s \in [\,0,t\,]$ se tiene $\eta(s,u) \in I^b \backslash I^a$, con lo cual,

$$\|\nabla I(\eta(s,u))\| \geq \delta \quad \forall\, s \in [\,0,t\,].$$

Ahora, como la función real $x \mapsto -\dfrac{x^2}{1+x}$ es decreciente cuando $x \geq 0$, entonces,

$$-\frac{\|\nabla I(\eta(t,u))\|^2}{1+\|\nabla I(\eta(t,u))\|} \leq -\frac{\delta^2}{1+\delta}.$$

Lo cual se sigue $\forall\, s \in [\,0,t\,]$. Utilizando el Teorema Fundamental del Cálculo, se tiene:

$$\begin{aligned}
I(\eta(t,u)) - I(\eta(0,u)) &= \int_0^t \frac{d}{ds} I(\eta(s,u))\, ds \\
&= \int_0^t \left(-\frac{\|\nabla I(\eta(t,u))\|^2}{1+\|\nabla I(\eta(t,u))\|} \right) ds \\
&\leq \int_0^t \left(-\frac{\delta^2}{1+\delta} \right) ds \\
&= -t\frac{\delta^2}{1+\delta}.
\end{aligned}$$

De esta forma $\forall\, t \in [\,0, T(u)\,[$

$$a < I(\eta(t,u)) \leq I(\eta(0,u)) - t\frac{\delta^2}{1+\delta} = I(u) - t\frac{\delta^2}{1+\delta} \leq b - t\frac{\delta^2}{1+\delta}.$$

Es decir,

$$t < \frac{b-a}{\delta}(1+\delta)$$

Llamando $\mu = \dfrac{b-a}{\delta}(1+\delta)$, se ha demostrado que $\forall\, t \in [\,0, T(u)\,[$, se tiene que $t < \mu$, lo cual implica que $T(u) \leq \mu < +\infty$. Como u se escogió arbitrariamente, se cumple (3.34). Antes de definir la deformación buscada hay que tener en cuenta que por continuidad $I(\eta(T(u),u)) = a$. Ahora si, basta definir la deformación $\tilde{\eta}$ de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \tilde{\eta} : [\,0,1\,] \times I^b &\to I^a \\ (t,u) \ &\mapsto \tilde{\eta}(t,u) = \eta(\mu t, u). \end{aligned}$$

A continuación se evidenciará que cumple con las propiedades que la hacen deformación:

- $\tilde{\eta}(0,u) = \eta(0,u) = u, \quad \forall\, u \in I^b$ por definición de η
- $\tilde{\eta}(t,u) = \eta(\mu t,u) \in I^a, \quad \forall\, u \in I^a$, lo cual se ve fácilmente pues

$$\forall\, u \in I^a \quad I(\mu t, u) \leq I(0,u) = I(u) \leq a.$$

- $\tilde{\eta}(1,u) \in I^a, \quad \forall\, u \in I^b$, puesto que

$$I(\tilde{\eta}(1,u)) = I(\eta(\mu,u)) \leq I(\eta(T(u),u)) \leq a$$

Como $\tilde{\eta}$ es continua, $\tilde{\eta}$ es una deformación de I^b en I^a

$\square$

Como consecuencia del resultado precedente se puede obtener una deformación local en el mismo estilo que las ya repasadas, que además fija cierto conjunto, distinto a $A_{c,\bar{\epsilon}}$, y que por tanto precisa un cambio en la definición de familia admisible para el principio de minimax y el correspondiente TPM. Todo esto, que no se mostrará pues redunda en los temas ya estudiados, se puede encontrar en el Capítulo 4 de Badiale y Serra[5]. Lo realmente interesante es comparar el Teorema 3.5.2 con el Lema 3.5.2, contenido de la siguiente observación.

Observación 3.5.6. Aparte de que la deformación que brinda el primero es una deformación (local) entre subniveles alrededor de c y la deformación que se obtiene gracias al segundo existe entre cualquier par de subniveles en el borde de un intervalo compacto, dentro de la demostración de uno y otro puede verse utilizados al menos dos principios motores: el hecho de que $I \circ \eta$ es decreciente en t y las conjeturas del estilo de (3.29) y (3.35), que se muestran por contradicción haciendo uso de la hipótesis de no existencia de sucesiones de Palais-Smale a determinados niveles; claro está que si se cambia esta hipótesis por la no existencia de puntos críticos a dichos niveles y se agrega el cumplimiento de (PS) se llegará al mismo resultado. Es sin embargo la construcción del problema de Cauchy a resolver lo que diferencia ampliamente a ambos resultados: mientras en el primero, la inclusión de las funciones g y h redunda en la obtención de la tercera característica de la deformación, en el segundo son las propiedades menos abstractas de la función $x \mapsto -\dfrac{x^2}{1+x}$ las que dotan a la deformación de aquella característica.

Como se ha indicado previamente, existen una gran variedad de resultados análogos, englobados en el grupo de 'lemas o teoremas de deformación'; Youssef Jabri [16] hace un repaso de algunos de ellos, entre los que destacan el de Michel Willem, Haim Brezis y Louis Nirenberg o Itai Shafrir. Al final, todos buscan poder garantizar la existencia de una deformación entre subniveles que fije cierto conjunto para con ello poder probar, haciendo uso de algún principio de minimax, el TPM clásico. La proliferación de resultados que garantizan deformaciones en la ausencia de puntos críticos a ciertos niveles (o de sucesiones de Palais-Smale) evidencia por un lado que este es un concepto de relevancia mayúscula en el TPM: si uno se fija, la forma en como se define la $\alpha-$admisibilidad está basada en las características de la deformación, cuya existencia por otro lado, es el hecho más difícil de probar a comparación del Principio de Minimax o el Propio TPM, a partir de la geometría de paso de montaña; de hecho, prácticamente todos los requisitos que se presentaron al inicio de este capítulo fueron fundamentos teóricos para aplicar en la demostración de Teorema de Deformación, mientras que para las demostraciones de los otros dos resultados motores del capítulo —el Principio de Minimax y el TPM clásico en sí— no fue necesaria mayor introspección teórica; más bien, estos están acomodados para poder utilizar en Teorema de Deformación en determinado momento.

4. Aplicaciones del Teorema de Paso de Montaña Clásico

4.1. Ecuaciones Diferenciales Parciales

La principal aplicación que posee el TPM clásico es como herramienta para garantizar la existencia de soluciones débiles de ecuaciones diferenciales parciales semilineales y elípticas. De hecho, fue con la motivación de encontrar soluciones de dichos problemas semilineales que Ambrosetti y Rabinowitz lo estudiaron en primer lugar.

La intención de este capítulo es repasar en detalle un ejemplo de resolución de un caso específico de este tipo de problemas, para lo cual es preciso tener en cuenta los elementos teóricos que permitirán lograrlo: la teoría básica para entender la formulación variacional de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. En primer lugar, recuérdese que para un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, con cualquier $n \in \mathbb{N}^*$, el espacio

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \;\middle|\; u \text{ es función medible e } \int_\Omega |u(x)|^p \, dx < +\infty \right\},$$

es un espacio de Banach dotado de la norma $\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$. Para $p = 2$, es un espacio de Hilbert para el producto escalar,

$$(u|v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)v(x) \, dx;$$

del mismo modo el espacio (de Sobolev)

$$H^2(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \;\middle|\; \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \;\; \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\} \right\},$$

dónde las derivadas $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ son en el sentido de las distribuciones, es un espacio de Hilbert para el producto escalar,

$$(u|v)_{H^2(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\, dx + \int_\Omega u(x)v(x)\, dx.$$

Por último, se define al espacio $H_0^1(\Omega)$ como la clausura de $C_0^\infty(\Omega)$ [2] en $H^1(\Omega)$.

Para mayor información sobre la teoría de las funciones medibles e integrables se recomienda revisar lo expuesto por Royden [26], mientras que para los los fundamentos teóricos de los espacios de Sobolev se sugiere la lectura de Brezis [6] y Evans[14]. Lo necesario en cuanto a la Teoría de Distribuciones lo detalla Chemin [8]. A continuación se enuncian algunos resultados importantes en lo subsiguiente y sin los cuales sería imposible entender el ejemplo de resolución de la problemática que plantea este capítulo. Se indica donde puede encontrarse su demostración.

Teorema 4.1.1 (Teorema de la Divergencia, cap. 12, Apostol [4])**.** *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, acotado, suave y orientado. Si $F = (F_1, F_2, \ldots, F_n)$ es un campo vectorial en Ω tal que $F_i \in C^1(\Omega)$, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, entonces,*

$$\int_\Omega \nabla \cdot F(x)\, dx = \int_{\partial\Omega} F(x) \cdot \nu\, d\sigma,$$

donde $\nu = \nu(x)$ es el vector normal hacia afuera de $\partial\Omega$ en x y σ representa a la medida de superficie de $\partial\Omega$ (la frontera de Ω).

[2] Espacio de funciones —con dominio en Ω y recorrido en $\mathbb{R}$— infinitas veces continuamente diferenciables con soporte compacto.

Teorema 4.1.2 (Fórmula de Green)**.** *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, acotado, suave y orientado. Si $u \in C^2(\overline{\Omega})$ y $v \in C^1(\overline{\Omega})$, entonces*

$$\int_\Omega (\Delta u) v \, dx = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} v \, d\sigma,$$

donde $\nu = \nu(x)$ es el vector normal hacia afuera de $\partial\Omega$ en x, $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla u(x) \cdot \nu(x)$ y σ representa a la medida de superficie de $\partial\Omega$.

Demostración. Sea F el campo vectorial en Ω definido por:

$$F(x) = v(x)\nabla u(x) = v(x)\left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial u(x)}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u(x)}{\partial x_n}\right).$$

La divergencia de este campo está dada por:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot F(x) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i(x)}{\partial x_i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(v(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial v(x)}{\partial x_i}\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + \left(v(x)\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2}\right)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\frac{\partial v(x)}{\partial x_i} + v(x)\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2} \\
&= \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) + v(x)\Delta u(x).
\end{aligned}$$

Así, aplicando el Teorema de la Divergencia para F, se obtiene el resultado. $\square$

Teorema 4.1.3 (Desigualdad de Hölder, cap. 6, Royden [26])**.** *Sean un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y p y q dos números no negativos en los reales extendidos tales que $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q} = 1$. Si $u \in L^p(\Omega)$ y $v \in L^q(\Omega)$, entonces $uv \in L^1(\Omega)$ y*

$$\int_\Omega |uv| \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

Teorema 4.1.4 (Convergencia Dominada de Lebesgue, cap. 4, Royden [26]). *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $(u_n)_n$ una sucesión de funciones en $L^1(\Omega)$ tal que*

- $u_n(x) \to u(x)$ *c.t.p en* Ω;
- *Existe* $v \in L^1(\Omega)$ *tal que para todo* $n \in \mathbb{N}$, $|u_n(x)| \leq v(x)$ *c.t.p. en* Ω.

Entonces $u \in L^1(\Omega)$ *y* $u_n \to u$ *en* $L^1(\Omega)$, *es decir* $\displaystyle\int_\Omega |u_n - u|\, dx \to 0$.

Teorema 4.1.5 (Recíproco parcial del Teorema de Lebesgue, cap, 4, Brezis [6]). *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $(u_n)_n$ una sucesión de funciones en $L^p(\Omega)$ para $p \in [1, +\infty]$ tal que $u_n \to u$ en $L^p(\Omega)$. entonces existe una subsucesión $(u_{n_k})_k$ de $(u_n)_n$ y $v \in L^p(\Omega)$ tal que*

- $u_{n_k} \to u(x)$ *c.t.p en* Ω;
- *Para todo* $k \in \mathbb{N}$, $|u_{n_k}| \leq v(x)$ *c.t.p. en* Ω.

Teorema 4.1.6 (Inyecciones de Sobolev, Rellich-Kondrachov, cap. 9, Brezis [6]). *Sea un conjunto abierto y acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ con $n \geq 3$. Entonces*

$$H_0^1(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega), \quad \forall\, q \in \left[1, \frac{2n}{n-2}\right[.$$

Observación 4.1.1. $X \overset{c}{\hookrightarrow} Y$ significa que $X \subset Y$ y que la inyección canónica $j : X \to Y$ es un operador (lineal) continuo (existe $C > 0$ tal que $\|j(u)\|_Y \leq C\,\|u\|$ para todo $u \in X$) y compacto (para todo subconjunto acotado $M \subset X$, el conjunto $\overline{j(M)}$ es compacto en Y).

Observación 4.1.2. El número $\dfrac{2n}{n-2}$ es denotado usualmente por 2^* y es conocido como exponente crítico de Sobolev (para el caso $p = 2$) por el hecho que únicamente antes de él las inyecciones de Sobolev son compactas; se tiene que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ pero no compactamente.

Teorema 4.1.7 (Propiedad de los operadores compactos, cap. 8, Kreyszig [19])**.** *Sean X e Y dos espacios normados y $T : X \to Y$ un operador lineal compacto. Si $(x_n)_n$ es una sucesión débilmente convergente a x en X, entonces la sucesión $(Tx_n)_n$ es fuertemente convergente a Tx en Y.*

Teorema 4.1.8 (Desigualdad de Poincaré, cap. 9, Brezis [6])**.** *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado. Entonces existe una constante $C_P > 0$ dependiente únicamente del dominio Ω tal que:*

$$\int_\Omega u^2\,dx \le C_P \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx, \quad \forall\, u \in H_0^1(\Omega).$$

Teorema 4.1.9 (Caracterización de H_0^1, cap. 9, Brezis [6])**.** *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado, con frontera suave (C^1). Si $u \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Entonces $u \in H_0^1(\Omega)$ si y solo si $u = 0$ en $\partial\Omega$.*

Teorema 4.1.10 (Banach-Alaoglu, cap. 3, Brezis [6])**.** *Sea X un espacio de Banach reflexivo. Si $(x_n)_n$ es una sucesión acotado en X, entonces existe una subsucesión de $(x_n)_n$ que converge en la topología débil de X.*

Con todos estos preliminares, es momento de abordar el ejemplo de aplicación del TPM clásico.

Considérense $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado para $n \geq 3$, $q \in L^\infty(\Omega)$[3], $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y el problema de hallar $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ tal que resuelva

$$\begin{cases} -\Delta u + q(x)u = f(u) & \text{en } \Omega, \\ \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.1}$$

Antes que todo es preciso definir la noción de solución débil para este problema. Se dice que u es solución débil del problema (4.1) si

1. $u \in H_0^1(\Omega)$,
2. $\displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega q(x)uv \, dx = \int_\Omega fv \, dx, \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega).$

Esta definición contempla el hecho de que toda solución clásica de (4.1) es una solución débil; para ver esto, en primer lugar, téngase en cuenta que si u es una solución en el sentido clásico, entonces $u \in C^2(\overline{\Omega})$, así como $u \in H^1(\Omega)$; como además $u = 0$ en $\partial\Omega$, entonces $u \in H_0^1(\Omega)$, cumpliéndose la primera parte de la definición. Para la segunda, tómese $v \in C_0^\infty(\Omega)$ y multiplíquese por (4.1). Así

$$-\Delta uv + q(x)uv = fv.$$

Integrando en Ω,

$$\int_\Omega -\Delta uv \, dx + \int_\Omega q(x)uv \, dx = \int_\Omega fv \, dx.$$

Gracias a la Fórmula de Green,

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} v \, d\sigma + \int_\Omega q(x)uv \, dx = \int_\Omega fv \, dx,$$

[3] Espacio de funciones esencialmente acotadas.

y por lo tanto, ya que v se anula en la frontera de Ω, se tiene

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega q(x) u v \, dx = \int_\Omega f v \, dx, \quad \forall \, v \in C_0^\infty(\Omega). \tag{4.2}$$

Como $C_0^\infty(\Omega)$ es denso en $H_0^1(\Omega)$ por definición, para cada $v \in H_0^1(\Omega)$ existe una sucesión $(v_n)_n \subset C_0^\infty(\Omega)$ tal que $v_n \to v$ en la topología de H_0^1. Luego para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v_n \, dx + \int_\Omega q(x) u v_n \, dx = \int_\Omega f v_n \, dx.$$

Haciendo $n \to +\infty$, se tiene que (4.2) se cumple para todo $v \in H_0^1(\Omega)$, que es precisamente lo que se deseaba.

El procedimiento variacional consiste en encontrar un funcional $I : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ continuamente diferenciable para el cual

$$I'(u)v = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega q(x) u v \, dx - \int_\Omega f v \, dx.$$

Una vez logrado esto, basta probar que I posee un punto crítico para obtener la existencia de la solución débil deseada. Si $F(t) = \int_0^t f(s) \, ds$, se probará que el funcional

$$\begin{aligned} I : H_0^1(\Omega) &\to \mathbb{R} \\ u &\mapsto \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx + \frac{1}{2} \int_\Omega q(x) u^2 \, dx - \int_\Omega F(u) \, dx, \end{aligned}$$

posee esa derivada precisamente. Para empezar téngase en cuenta la siguiente definición:

Definición 4.1.1. Se dice que $\lambda \in \mathbb{R}$ es un valor propio del operador $L = -\Delta + q(x)$ bajo condiciones de frontera Dirichlet si existe $\varphi \in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\}$ tal que

$$\begin{cases} -\Delta\varphi + q(x)\varphi = \lambda\varphi & \text{en } \Omega \\ \varphi = 0 & \text{sobre } \Omega. \end{cases} \tag{4.3}$$

Interpretando esto en el sentido variacional (débil). La función φ es llamada función propia asociada a λ.

Tanto en el Capítulo 9 de Brezis [6] como en el Capítulo 6 de Evans [14] se prueba que para $\Omega \subset \mathbb{R}$ abierto y acotado y para $q \in L^\infty(\Omega)$ tal que $q \geq 0$, existe una sucesión de valores propios $(\lambda_n)_n \subset \mathbb{R}$ y una subsucesión de funciones propias $(\varphi_n)_n \subset H_0^1(\Omega)$ tales que $\lambda_n \to +\infty$ y $\{\varphi_n\}_n$ forma una base ortonormal de $L^2(\Omega)$. Esto se logra probando que el operador L^{-1} es un operador compacto y autoadjunto y utilizando la teoría espectral para dichos operadores. Es usual, por otro lado, enlistar los valores propios en una sucesión creciente: $\lambda_1 < \lambda_2 \leq \cdots$. El primer valor propio λ_1 es conocido como valor propio principal y puede caracterizarse de la siguiente manera, demostrada en [14]:

$$\lambda_1 = \min_{u \in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + \int_\Omega q(x)u^2\,dx}{\int_\Omega u^2\,dx}. \tag{4.4}$$

Ahora, es fácil ver que para todo $u \in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + \int_\Omega q(x)u^2\,dx &\leq \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + \|q\|_\infty \int_\Omega u^2\,dx \\ &\leq \text{máx}\{1, \|q\|_\infty\}\,\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

y por otro lado, como $\lambda_1 > 0$ (puesto que $q \geq 0$), gracias a (4.4), se tiene que para todo $u \in H_0^1(\Omega)$

$$\lambda_1 \int_\Omega u^2 \, dx \leq \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx + \int_\Omega q(x) u^2 \, dx,$$

con lo cual

$$\lambda_1 \int_\Omega u^2 \, dx + \lambda_1 \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \leq (1+\lambda_1) \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx + \int_\Omega q(x) u^2 \, dx,$$

y así

$$\frac{\lambda_1}{1+\lambda_1} \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx + \int_\Omega q(x) u^2 \, dx.$$

En definitiva se han encontrado constantes $a > 0$ y $b > 0$ tales que

$$a \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx + \int_\Omega q(x) u^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq b \|u\|_{H_0^1(\Omega)},$$

lo que implica que

$$(u|v) = \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx + \int_\Omega q(x) u^2 \, dx.$$

es un producto escalar en $H_0^1(\Omega)$, cuya norma inducida, denotada por $\|\cdot\|$, es equivalente a la norma usual. Se trabajará con esta norma en lo subsiguiente.

Considérense las siguientes hipótesis:

h_1: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es abierto y acotado y $q(x) \geq 0$ c.t.p $x \in \Omega$.

h_2: f es continua y existen $p \in]2, 2^*[$ y $K > 0$ tales que

$$|f(t)| \leq K(|t|^{p-1} + 1), \;\; \forall \, t \in \mathbb{R}.$$

h_3: $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(t)}{t} = 0.$

h_4: Existen $M > 0$ y $\mu > 2$ tales que si $|t| \geq M$, $f(t)t \geq \mu F(t)$.

h_5: Existe $t_0 \in \mathbb{R}$ con $|t_0| \geq M$ tal que $F(t_0) > 0$.

Si $G(u) = \int_\Omega F(u)\,dx$, entonces las soluciones débiles del problema en cuestión son los puntos críticos del funcional

$$\begin{aligned} I : H_0^1(\Omega) &\to \mathbb{R} \\ u &\mapsto \frac{1}{2}\|u\|^2 - G(u), \end{aligned}$$

Se empleará a continuación el TPM para garantizar la existencia del punto crítico. En primer lugar es preciso mostrar que I es continuamente diferenciable. La teoría de derivadas de formas bilineales simétricas expuesta en el Capítulo 1 de [5], muestra que para el funcional $J(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2$,

$$J'(u)v = (u|v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,dx + \int_\Omega q(x)uv\,dx.$$

Además,

$$\begin{aligned} J' : H_0^1(\Omega) &\to (H_0^1(\Omega))' \\ u &\mapsto J'(u), \end{aligned}$$

es un operador continuo. Para ver esto, tómense $(u_k)_k \subset H_0^1(\Omega)$ y $u \in H_0^1(\Omega)$ tales que $u_k \to u$ en $H_0^1(\Omega)$. Así para todo $v \in H_0^1(\Omega)$, tal que $\|v\| = 1$ se tiene:

$$\begin{aligned} |J'(u_k)v - J'(u)v| &= |(u_k|v) - (u|v)| \\ &= |(u_k - u|v)| \\ &\leq \|u_k - u\|\,\|v\| = \|u_k - u\| \to 0, \end{aligned}$$

con lo cual

$$\begin{aligned}\|J'(u_k) - J'(u)\|_{(H_0^1(\Omega))'} &= \sup_{\substack{v\in E\\ \|v\|=1}} |J'(u_k)v - J'(u)v| \\ &\leq \|u_k - u\| \to 0,\end{aligned}$$

que significa que $J'(u_k) \to J'(u)$, obteniéndose la continuidad para concluir que $J \in C^1(H_0^1(\Omega))$.

Se mostrará que $G' \in C^1(H_0^1(\Omega))$. En efecto se verá que $G'(u)v = \displaystyle\int_\Omega f(u)v\,dx$, obteniéndose, por un lado la correspondencia de la búsqueda de puntos críticos con las soluciones débiles del problema en cuestión, y por otro la verificación de la hipótesis del TPM. En primer lugar, sin embargo, se precisa ver que $G : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ esté bien definida. Debido a h_2, se tiene que

$$\begin{aligned}|F(t)| &= \left|\int_0^t f(s)\,ds\right| \\ &\leq \int_0^t |f(s)|\,ds \\ &\leq \int_0^t K + K|s|^{p-1}\,ds \\ &\leq K|t| + \frac{K}{p}|t|^p \\ &\leq K|t| + \frac{K}{p}|t|^{2^*}\end{aligned}$$

En definitiva, se puede decir que existen $a > 0$ y $b > 0$ tales que

$$|F(t)| \leq a|t| + b|t|^{2^*}, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

De esta forma, si $u \in H_0^1(\Omega)$, gracias a las inyecciones de Sobolev,

$$
\begin{aligned}
G(u) = \int_\Omega F(u)\,dx &\leq a\int_\Omega |u|\,dx + b\int_\Omega |u|^{2^*}\,dx \\
&\leq \tilde{a}\,\|u\|_{H_0^1(\Omega)} + \tilde{b}\,\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^{2^*} < +\infty.
\end{aligned}
$$

Para mostrar que $G'(u)v = \displaystyle\int_\Omega f(u)v\,dx$ se necesita definir un nuevo concepto de derivada y una propiedad acerca de su relación con la derivada de Fréchet.

Definición 4.1.2 (Gâteaux diferenciabilidad)**.** Sea E un espacio de Banach, U un abierto de E, e $I : E \to \mathbb{R}$ un funcional. Se dice que I es Gâteaux diferenciable en $u \in U$ si existe $A \in E'$ tal que para todo $v \in E$,

$$
\lim_{t\to 0} \frac{I(u+tv) - I(u)}{t} = Av, \tag{4.5}
$$

Si I es Gâteaux diferenciable en u, entonces existe un único funcional $A \in E'$ que satisface (4.5), denotado por $I'_G(u)$. Si para cualquier $u \in U$, $I'_G(u)$ existe, entonces se dice que I es Gâteaux diferenciable en U. Cuando esto ocurre, la aplicación

$$
\begin{aligned}
I'_G : U &\to E' \\
u &\mapsto I'_G(u)
\end{aligned}
$$

es llamada la derivada de Gâteaux de I, y en general puede ser no lineal y discontinua. Aunque todo funcional Fréchet diferenciable es Gâteaux diferenciable, el recíproco no siempre se cumple, sin embargo se tiene el siguiente resultado, cuya demostración puede ser hallada gracias a Ambrosetti y Prodi [2]:

Proposición 4.1.1. *Sea $U \subset E$ un abierto e I un funcional Gâteaux diferenciable en U. Si I'_G es continuo en $u \in U$, entonces también es Fréchet diferenciable y además $I'(u) = I'_G(u)$.*

Se precisa mostrar que G es Gâteaux diferencianle. Sean $u, v \in H_0^1(\Omega)$; defínase $g(\alpha) = F(u(x) + \alpha v(x))$. Por un lado, por definición,

$$\frac{dg}{d\alpha} = \lim_{t\to 0} \frac{g(\alpha+t) - g(\alpha)}{t} = \lim_{\omega\to 0} \frac{F(u(x) + (\alpha+t)v(x)) - F(u(x) + \alpha v(x))}{t},$$

Con lo cual

$$\left.\frac{dg}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = \lim_{t\to 0} \frac{F(u(x) + tv(x)) - F(u(x))}{t}. \tag{4.6}$$

Por otro lado, gracias a la regla de la cadena,

$$\frac{dg}{d\alpha} = F'(u(x) + \alpha v(x)) \cdot \frac{d}{d\alpha}(u(x) + \alpha v(x)) = f(u(x) + \alpha v(x))v(x),$$

con lo cual

$$\left.\frac{dg}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = f(u(x))v(x). \tag{4.7}$$

Las ecuaciones (4.6) y (4.7) implican que

$$\lim_{t\to 0} \frac{F(u(x) + tv(x)) - F(u(x))}{t} = f(u(x))v(x), \tag{4.8}$$

convergencia que es c.t.p. $x \in \Omega$. Ahora, gracias al Teorema de Lagrange (generalización del Teorema del Valor Medio) existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $|\theta| \leq |t|$ y

$$\left|\frac{g(t) - g(0)}{t}\right| \leq |g'(\theta)|,$$

es decir

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(u(x)+tv(x))-F(u(x))}{t}\right| &\leq |f(u(x)+\theta v(x))v(x)| \\
&\leq (K+K|u(x)+\theta v(x)|)^{p-1}|v(x)| \\
&\leq C_1(K^{p-1}+K^{p-1}|u(x)+\theta v(x)|^{p-1})|v(x)| \\
&\leq C_2(1+C_3(|u(x)|^{p-1}+\theta^{p-1}|v(x)|^{p-1}))|v(x)| \\
&\leq C(|v(x)|+|u(x)|^{p-1}|v(x)|+|v(x)|^{p}) \\
&\leq C(|v(x)|+|u(x)|^{2^*-1}|v(x)|+|v(x)|^{2^*}).
\end{aligned}$$

Aquí, se fueron agrupando las contantes hasta llegar a C, utilizando h_2 y la elemental propiedad que postula que para todo $q > 0$ existe una constante $C_q > 0$ tal que

$$|a+b|^q \leq c_q(|a|^q+|b|^q), \quad \forall\, a,b \in \mathbb{R}.$$

Ahora, gracias a las inmersiones de Sobolev, $|v(x)|$ y $|v(x)|^{2^*}$ están en $L^1(\Omega)$. ¿Qué pasa por su parte con $|u(x)|^{2^*-1}|v(x)|$? Recordando que $2^* = \dfrac{2n}{n-2}$ y que gracias a que $u \in L^{2^*}(\Omega)$ por las inmersiones de Sobolev, se tiene que

$$\int_\Omega |u|^{(2^*-1)\cdot\frac{2n}{n+2}}\,dx = \int_\Omega |u|^{\frac{n+2}{n-2}\cdot\frac{2n}{n+2}}\,dx = \int_\Omega |u|^{\frac{2n}{n+2}}\,dx = \int_\Omega |u|^{2^*} < +\infty,$$

es decir $|u|^{2^*-1} \in L^{\frac{2n}{n+2}}$. Como

$$\frac{1}{\frac{2n}{n+2}}+\frac{1}{2^*} = \frac{n+2}{2n}+\frac{n-2}{2n} = 1,$$

gracias a la desigualdad de Hölder, $|u(x)|^{2^*-1}|v(x)| \in L^1(\Omega)$. En definitiva $C(|v(x)|+|u(x)|^{2^*-1}|v(x)|+|v(x)|^{2^*}) \in L^1(\Omega)$ con lo cual se puede aplicar el Teorema de

Convergencia de Lebesgue para obtener que

$$\lim_{t\to 0}\int_\Omega \frac{F(u+tv)-F(v)}{t}\,dx = \int_\Omega f(u)v\,dx,$$

que precisamente significa

$$\lim_{t\to 0}\frac{G(u+tv)-G(v)}{t}\,dx = \int_\Omega f(u)v\,dx, \tag{4.9}$$

obteniendo la derivada de Gâteaux deseada pues el lado derecho de (4.9) es un funcional lineal en $H_0^1(\Omega)$. Bastaría probar, para obtener el resultado deseado, que la función

$$G'_G : H_0^1(\Omega) \to (H_0^1(\Omega))'$$
$$u \mapsto G'_G(u),$$

con $G'_G(u)v = \int_\Omega f(u)v\,dx$, es continua. Para ver esto, tómense nuevamente $(u_k)_k \subset H_0^1(\Omega)$ y $u \in H_0^1(\Omega)$ tales que $u_k \to u$ en $H_0^1(\Omega)$. La inmersión de Sobolev hace que $u_k \to u$ en $L^{2^*}(\Omega)$, así que, por la el recíproco parcial del Teorema de Lebesgue se sabe que existen una subsucesión $(u_{k_j})_j$ y $w \in L^{2^*}(\Omega)$ tales que

- $u_{k_j} \to u(x)$ c.t.p en Ω;
- Para todo $j \in \mathbb{N}$, $|u_{k_j}| \leq w(x)$ c.t.p. en Ω.

Es sencillo probar, gracias a h_2, que $|f(u_k)-f(u)| \in L^{\frac{2n}{n+2}}$, puesto que $|u_k|^{2^*-1}$ y $|u|^{2^*-1}$ lo están. Así, usando la desigualdad de Hölder como anteriormente, se tiene que para todo $v \in H_0^1(\Omega)$, tal que $\|v\| = 1$

$$
\begin{aligned}
|G'(u_{k_j})v - G'(u)v| &= \left| \int_\Omega (f(u_{k_j}) - f(u))v \, dx \right| \\
&\leq \int_\Omega |f(u_{k_j}) - f(u)||v| \, dx \\
&\leq \left(\int_\Omega |f(u_{k_j}) - f(u)|^{\frac{2n}{n+2}} \, dx \right)^{\frac{n+2}{2n}} \left(\int_\Omega |v|^{2^*} \, dx \right)^{\frac{1}{2^*}} \\
&\leq C \left(\int_\Omega |f(u_{k_j}) - f(u)|^{\frac{2n}{n+2}} \, dx \right)^{\frac{n+2}{2n}} \|v\| \\
&= C \left(\int_\Omega |f(u_{k_j}) - f(u)|^{\frac{2n}{n+2}} \, dx \right)^{\frac{n+2}{2n}}.
\end{aligned}
$$

Además, por un lado,

$$
\begin{aligned}
|f(u_{k_j}) - f(u)|^{\frac{2n}{n+2}} &= |f(u_{k_j}) - f(u)|^{\frac{2^*}{2^*-1}} \\
&\leq C_1(1 + |u_{k_j}|^{2^*-1} + |u|^{2*-1})^{\frac{2^*}{2^*-1}} \\
&\leq C_1(1 + |w|^{2^*-1} + |u|^{2*-1})^{\frac{2^*}{2^*-1}} \\
&\leq C_2(1 + |w|^{2^*} + |u|^{2^*}) \in L^1(\Omega).
\end{aligned}
$$

Por otro lado, ya que f es continua, $\lim\limits_{j\to\infty} |f(u_{k_j}) - f(u)|^{\frac{2n}{n+2}} = 0$ c.t.p. $x \in \Omega.$, con lo cual gracias al Teorema de convergencia Dominada

$$
\lim_{j\to 0} \int_\Omega |f(u_{k_j}) - f(u)|^{\frac{2n}{n+2}} \, dx = 0.
$$

Por cuanto se ha mostrado hasta aquí

$$
\begin{aligned}
\|G'_G(u_k) - G'_G(u)\|_{(H_0^1(\Omega))'} &= \sup_{\substack{v\in E \\ \|v\|=1}} |G'_G(u_k)v - G'_G(u)v| \\
&\leq C \left(\int_\Omega |f(u_{k_j}) - f(u)|^{\frac{2n}{n+2}} \, dx \right)^{\frac{n+2}{2n}} \to 0.
\end{aligned}
$$

que significa que $G'_G(u_{k_j}) \to G'_G(u)$. En resumen se tiene que para toda sucesión $(u_k)_k$ tal $u_k \to u$ en $H_0^1(\Omega)$, existe una subsucesión $(u_{k_j})_j$ tal que $G'_G(u_{k_j}) \to G'_G(u)$. De aquí es un ejercicio elemental recuperar la convergencia para $(u_k)_k$, es decir que $G'_G(u_k) \to G'_G(u)$, obteniéndose la continuidad de la diferencial de Gâteaux, que gracias a la Proposición 4.1.1 permite concluir que la derivada de Fréchet existe y $G' = G'_G$, es decir $G \in C^1(H_0^1(\Omega))$.

Si se piensa que hasta aquí el ejercicio ha sido extenuante, prepárese para probar las restantes hipótesis del TPM.

Por como se ha definido I, $I(0) = 0$; es preciso demostrar que el funcional posee geometría de paso de montaña, es decir que existen ρ y α números reales positivos tales que verifican:

1. *Si* $\|u\| = \rho$ entonces $I(u) \geq \alpha$,
2. Existe $v \in H$ tal que $\|v\| > \rho$ e $I(v) \leq 0$.

Para la primera condición tómese en primer lugar $\epsilon \in \mathbb{R}$ tal que $0 < \epsilon \leq \dfrac{\lambda_1}{4}$, con lo cual,

$$\frac{1}{2} - \frac{\epsilon}{\lambda_1} \geq \frac{1}{4}.$$

Gracias a h_3 y la regla de l'Hôpital se tiene

$$\lim_{t \to 0} \frac{F(t)}{t^2} = \frac{1}{2} \lim_{t \to 0} \frac{F'(t)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{2} \frac{f(t)}{t} = 0,$$

con lo cual se sabe que existe $\delta > 0$ tal que si $|t| < \delta$, entonces,

$$|F(t)| \leq \epsilon t^2. \tag{4.10}$$

Por otro lado, recuérdese que existen $a > 0$ y $b > 0$ tales que

$$|F(t)| \le a|t| + b|t|^{2^*} \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Si $|t| \ge 1$ entonces $|t| \le |t|^{2^*}$, con lo cual, si $C = a + b$,

$$|F(t)| \le C|t|^{2^*}.$$

Por otro lado, si $|t| < 1$, entonces $|t| \ge |t|^{2^*}$, y se tendría

$$|F(t)| \le C|t|.$$

El caso a tomar en cuenta es cuando además $|t| \ge \delta$, con lo cual $|t|^{2^*-1} \ge \delta^{2^*-1}$,. Así, si se toma $C_1 \ge \dfrac{C}{\delta^{2^*-1}}$, entonces

$$|F(t)| \le C|t| \le C_1\delta^{2^*-1}|t| \le C_1|t|^{2^*-1}|t| = C_1|t|^{2^*}.$$

En cualquier caso y ya que δ depende de ϵ, para $|t| \ge \delta$, existe $C_\epsilon > 0$ tal que

$$|F(t)| \le C_\epsilon|t|^{2^*}. \tag{4.11}$$

Juntando las ecuaciones (4.10) y (4.11), se sigue que para todo $t \in \mathbb{R}$

$$|F(t)| \le \epsilon t^2 + C_\epsilon|t|^{2^*}. \tag{4.12}$$

Con ello en mente, se tiene,

$$\begin{aligned}
I(u) &= \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_\Omega F(u)\,dx \\
&\ge \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_\Omega \epsilon u^2 + C_\epsilon|u|^{2^*}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\|u\|^2 - \epsilon\int_\Omega |u|^2 - C_\epsilon\int_\Omega |u|^{2^*}\,dx.
\end{aligned}$$

Ahora, ya que

$$\lambda_1 \cdot \frac{\epsilon}{\epsilon} = \lambda_1 \leq \frac{\|u\|^2}{\int_\Omega |u|^2\,dx}, \quad \forall\, u \in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\},$$

entonces

$$\epsilon \int_\Omega |u|^2\,dx \leq \frac{\epsilon}{\lambda_1}\|u\|^2.$$

Por otro lado gracias a las inmersiones de Sobolev, se conoce que existe $C_2 > 0$ tal que

$$\int_\Omega |u|^{2^*}\,dx \leq C_2 \|u\|^{2^*}.$$

Juntando estás dos desigualdades se tiene que

$$\begin{aligned} I(u) &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\epsilon}{\lambda_1}\|u\|^2 - C\|u\|^{2^*} \\ &\geq \frac{1}{4}\|u\|^2 - C\|u\|^{2^*}, \end{aligned}$$

con $C = C_\epsilon C_2$. Así, si se toma

$$0 < \rho < \sqrt[2^*-2]{\frac{1}{4C}},$$

entonces

$$\begin{aligned} \rho < \sqrt[2^*-2]{\frac{1}{4C}} &\Rightarrow \rho^{2^*-2} < \frac{1}{4C}, \\ &\Rightarrow \frac{\rho^{2^*}}{\rho^2} < \frac{1}{4C}, \\ &\Rightarrow C\rho^{2^*} < \frac{1}{4}\rho^2, \\ &\Rightarrow \frac{1}{4}\rho^2 - C\rho^{2^*} > 0. \end{aligned}$$

Así que para $\|u\| = \rho$, se tiene $I(u) = \alpha > 0$, demostrándose la propiedad.

Para la segunda propiedad tómese en cuenta la siguiente función:

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t \mapsto g(t) &= \frac{F(t)}{|t|^\mu}. \end{aligned}$$

Para el caso en que $t \geq M$, $|t|^\mu = t^\mu$, y su derivada se obtiene de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{F'(t)t^\mu - F(t)\mu t^{\mu-1}}{(t^\mu)^2} \\ &= \frac{f(t)t^\mu - F(t)\mu t^{\mu-1}}{t^{2\mu}} \\ &= \frac{t^{\mu-1}(f(t)t - F(t)\mu)}{t^{2\mu}}. \end{aligned}$$

Para el caso en que $t \leq -M$, $|t|^\mu = (-t)^\mu$, y su derivada se obtiene de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{F'(t)(-t)^\mu + F(t)\mu(-t)^{\mu-1}}{((-t)^\mu)^2} \\ &= \frac{f(t)(-t)^\mu + F(t)\mu(-t)^{\mu-1}}{((-t)^\mu)^2} \\ &= \frac{(-t)^{\mu-1}(-f(t)t + F(t)\mu)}{((-t)^\mu)^2}. \end{aligned}$$

En ambos casos, $|t| \geq M$, por tanto, por h_4, $f(t)t \geq \mu F(t)$, que a su vez implica que g es creciente cuando $t \geq M$ y decreciente cuando $t \leq -M$.

Ahora, sea $t \geq t_0 > M$, entonces $\dfrac{F(t)}{t^\mu} \geq \dfrac{F(t_0)}{t_0^\mu} > 0$, (por h_5). Así se asegura que existe $C_0 > 0$ tal que

$$F(t) \geq C_0|t|^\mu \tag{4.13}$$

para todo $t \geq t_0$, si $t_0 > M$. Por otro lado si $t \leq t_0 < -M$, entonces también $\dfrac{F(t)}{t^\mu} \geq \dfrac{F(t_0)}{t_0^\mu} > 0$, (por h_5) y se asegura que existe $C_0 > 0$ tal que

$$F(t) \geq C_0 |t|^\mu \tag{4.14}$$

para todo $t \leq t_0$, si $t_0 < -M$. Considérese este último caso en que $t_0 < -M$ (para $t_0 > M$ la estructura es análoga). Sea $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ una función test tal que, para cierto radio $r > 0$ y cierto centro $x_0 \in \Omega$, cumpla

$$\begin{cases} \varphi(x) \geq 0, & \forall\, x \in \Omega \\ \varphi(x) \geq 1, & \forall\, x \in B = B_r(x_0) \subset \Omega. \end{cases}$$

Tómese $t \leq t_0$. Sea x in B; luego $\varphi(x) \geq 1$ y por tanto $t\varphi(x) \leq t_0$. Esto muestra por un lado que $B \subset \{x \in \Omega \mid \varphi(x) \geq {}^{t_0}/_{t}\}$, y por otro lado que, gracias a (4.14), se tendría $F(t\varphi(x)) \geq C_0 |t\varphi(x)|^\mu = C_0 |t|^\mu \varphi^\mu(x) \geq C_0 t^\mu \varphi^\mu(x)$. Mientras tanto, para $t_0 < t\varphi(x) \leq 0$,

$$|F(t\varphi(x))| \leq a|t\varphi(x)| + b|t\varphi(x)|^{2^*} \leq -at_0 - bt_0^{2^*} = C_4. \tag{4.15}$$

Con esto, es preciso separar Ω de la siguiente forma:

$$\Omega = \Omega_1 \uplus \Omega_2,$$

donde

$$\Omega_1 = \{x \in \Omega \mid \varphi(x) < {}^{t_0}/_{t}\} = \big\{x \in \Omega \mid t_0 < t\varphi(x) \leq 0\big\},$$

y

$$\Omega_2 = \{x \in \Omega \mid \varphi(x) \geq {}^{t_0}/_{t}\} = \big\{x \in \Omega \mid t\varphi(x) \leq t_0\big\}.$$

Con lo cual,

$$\begin{aligned}\int_\Omega F(t\varphi(x))\,dx &= \int_{\Omega_1} F(t\varphi(x))\,dx + \int_{\Omega_2} F(t\varphi(x))\,dx\\ &\geq -C_4|\Omega_1| + C_0\int_{\Omega_2} t^\mu\varphi^\mu(x)\,dx\\ &\geq -C_4|\Omega_1| + C_0\int_{B} t^\mu\varphi^\mu(x)\,dx\\ &\geq -C_4|\Omega_1| + C_0|B|t^\mu.\end{aligned}$$

En definitiva, existen constantes positivas c_1, c_2 y c_3, tales que

$$I(t\varphi) = \frac{t^2}{2}\,\|\varphi\| - \int_\Omega F(t\varphi)\,dx \leq c_1t^2 + c_2 - c_3t^\mu.$$

Como $\mu > 2$, si se toma t suficientemente grande $I(t\varphi) < 0$. Si además se asegura que $t > \dfrac{\rho}{\|\varphi\|}$, tomando $v = t\varphi \in H_0^1(\Omega)$ se tiene la segunda propiedad. Hasta aquí, con tan sólo la geometría de paso de montaña se puede asegurar que el funcional I posee una sucesión de Palais-Smale a un nivel $c > 0$. Verificando (PS) se obtendrá el punto crítico y por ende la solución a la EDP. Asúmase que $(u_k)_k$ es una sucesión de Palais-Smale para I en $H_0^1(\Omega)$, es decir,

$$(I(u_k))_k \text{ está acotada} \tag{4.16}$$

e

$$I'(u_k) \to 0. \tag{4.17}$$

La proposición (4.16) implica que existe $C_1 > 0$ tal que $|I(u_k)| \leq C$. Por otro lado (4.17) significa que $\|I'(u_k)\| \to 0$, es decir $\displaystyle\sup_{v\in H_0^1(\Omega)} \frac{|I'(u_k)v|}{\|v\|} \to 0$, que a su vez implica que existe $C_2 > 0$ tal que $\displaystyle\sup_{v\in H_0^1(\Omega)} \frac{|I'(u_k)v|}{\|v\|} \le C_2$. Así, para todo $v \in H_0^1(\Omega)$, $\dfrac{|I'(u_k)v|}{\|v\|} \le C_2$; en especial para los u_k. Si se toma $C = \text{máx}\{C_1, C_2\}$, entonces

$$|I(u_k)| \le C \quad \text{y} \quad |I'(u_k)u_k| \le C\,\|u_k\| \tag{4.18}$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. Sumando las dos ecuaciones de (4.18) se obtiene

$$|I(u_k)| + |I'(u_k)u_k| \le C(1 + \|u_k\|).$$

Luego,

$$\begin{aligned}
C(1 + \|u_k\|) &\ge |I(u_k)| + |I'(u_k)u_k| \\
&\ge I(u_k) + \frac{1}{\mu}|I'(u_k)u_k| \\
&\ge I(u_k) - \frac{1}{\mu}I'(u_k)u_k \\
&= \frac{1}{2}\|u_k\|^2 - \int_\Omega F(u_k)\,dx - \frac{1}{\mu}\left(\|u_k\|^2 - \int_\Omega f(u_k)u_k\,dx\right) \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right)\|u_k\|^2 + \int_\Omega \left(\frac{1}{\mu}f(u_k)u_k - F(u_k)\right)\,dx. \qquad (4.19)
\end{aligned}$$

Ahora, gracias a h_4, si $|u_k| > M$, entonces $\dfrac{1}{\mu}f(u_k)u_k - F(u_k) \ge 0$, y por tanto $\displaystyle\int_{\{|u_k|>M\}} \left(\frac{1}{\mu}f(u_k)u_k - F(u_k)\right)\,dx \ge 0$, por lo tanto, con una separación de Ω idónea, se tiene:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left(\frac{1}{\mu}f(u_k)u_k - F(u_k)\right)\,dx &= \int_{\{|u_k|\le M\}} \left(\frac{1}{\mu}f(u_k)u_k - F(u_k)\right)\,dx \\
&\quad + \int_{\{|u_k|>M\}} \left(\frac{1}{\mu}f(u_k)u_k - F(u_k)\right)\,dx \\
&\ge \int_{\{|u_k|\le M\}} \left(\frac{1}{\mu}f(u_k)u_k - F(u_k)\right)\,dx.
\end{aligned}$$

Gracias a h_2,

$$|f(u_k)| \leq K(|u_k|^{p-1} + 1) \leq K(M^{p-1} + 1) = C_0.$$

Con lo cual,

$$|F(u_k)| = \left| \int_0^{u_k} f(s)\, ds \right| \leq \int_0^{u_k} |f(s)|\, ds \leq C_0 u_k \leq C_0 M.$$

Así,

$$\frac{f(u_k)}{\mu} \geq -\frac{C_0}{\mu} \quad \text{y} \quad -F(u_k) \geq -C_0 M,$$

y por tanto,

$$\left(\frac{1}{\mu} f(u_k) u_k - F(u_k) \right) \geq -\left(\frac{C_0}{\mu} + C_0 M \right) = -C_3,$$

dónde, claramente $C_3 > 0$. Luego

$$\int_\Omega \left(\frac{1}{\mu} f(u_k) u_k - F(u_k) \right) dx \geq -\tilde{C}, \tag{4.20}$$

con $\tilde{C} > 0$. Ubicando (4.20) en (4.19), se tiene

$$C(1 + \|u_k\|) \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu} \right) \|u_k\|^2 - \tilde{C},$$

que ordenando un poco lleva a

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu} \right) \|u_k\|^2 - C \|u_k\| - (C + \tilde{C}) \leq 0,$$

una desigualdad cuadrática en la variable $z = \|u_k\|$. Las raíces de la igualdad están dadas por

$$z = \frac{C \pm \sqrt{C^2 + 4 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu} \right) (C + \tilde{C})}}{2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu} \right)},$$

dónde es posible sacar la raíz en $\mathbb{R}$ ya que $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mu}\right)>0$, que a su vez ayuda a concluir que,

$$\frac{C-\sqrt{C^2+4\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mu}\right)(C+\tilde{C})}}{2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mu}\right)}\leq\|u_k\|\leq\frac{C+\sqrt{C^2+4\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mu}\right)(C+\tilde{C})}}{2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mu}\right)}.$$

En otras palabras, la sucesión $(u_k)_k$ está acotada en $H_0^1(\Omega)$. Como $H_0^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert, es reflexivo, y gracias al Teorema de Banach-Alaoglu, existen $u\in H_0^1(\Omega)$ y una subsucesión de $\{u_k\}_k$, que se vuelve a denotar por $(u_k)_k$ tal que,

$$u_k\rightharpoonup u\quad\text{ en } H_0^1(\Omega).$$

Por las inmersiones de Sobolev se sabe que

$$H_0^1(\Omega)\overset{c}{\hookrightarrow}L^q(\Omega),\quad\forall\,q\in[1,2^*[,$$

Con lo cual

$$u_k\to u,\ \text{ en } L^p(\Omega),\quad\forall\,p\in[1,2^*[.$$

Particularmente la convergencia en $L^1(\Omega)$ está garantizada y una vez más se asegura la existencia de una subsucesión, que se seguirá notando por $(u_k)_k$, y de una función $v\in L^1(\Omega)$ tales que

1. $u_k(x)\to u(x)$ c.t.p. en Ω;

2. $|u_k(x)|\leq v(x)$, para todo k.

Con ello, gracias a la continuidad de f y por propiedades de multiplicación de límites,

$$f(u_k(x))u_k(x)\to f(u(x))u(x)\ \text{c.t.p en }\Omega$$

y

$$f(u_k(x))u(x) \to f(u(x))u(x) \text{ c.t.p en } \Omega.$$

Además

$$|f(u_k(x))u_k(x)| \leq K(|u_k(x)|^{p-1} + 1)|u_k(x)| \leq K(v(x)^{p-1} + 1)v(x) \in L^1(\Omega)$$

y

$$|f(u_k(x))u(x)| \leq K(|u_k(x)|^{p-1} + 1)|u(x)| \leq K(v(x)^{p-1} + 1)|u(x)| \in L^1(\Omega),$$

con lo cual, gracias al Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue, se tiene que

$$\int_\Omega f(u_k)u_k\,dx \to \int_\Omega f(u)u\,dx \quad \text{y} \quad \int_\Omega f(u_k)u\,dx \to \int_\Omega f(u)u\,dx,$$

que obviamente implica que

$$\int_\Omega f(u_k)(u_k - u)\,dx \to 0.$$

Además, ya que

$$\int_\Omega f(u)(u_k - u)\,dx \to 0,$$

en definitiva:

$$\int_\Omega (f(u_k) - f(u))(u_k - u)\,dx \to 0. \tag{4.21}$$

Por otro lado, como para cada k, $I'(u_k)$ es un operador compacto (por tener imagen en $\mathbb{R}$, un espacio de dimensión finita), entonces $I'(u_k)u_k \to I'(u_k)u$, y de igual forma $I'(u)u_k \to I'(u)u$. En definitiva

$$I'(u_k)(u_k - u) \to 0 \quad \text{e} \quad I'(u)(u_k - u) \to 0,$$

que implica

$$(I'(u_k) - I'(u))(u_k - u) \to 0. \tag{4.22}$$

Ahora bien, se tiene que

$$\begin{aligned}
(I'(u_k) - I'(u))(u_k - u) &= I'(u_k)(u_k - u) - I'(u)(u_k - u) \\
&= \int_\Omega \nabla u_k \nabla (u_k - u)\, dx + \int_\Omega q u_k (u_k - u)\, dx \\
&\qquad - \int_\Omega f(u_k)(u_k - u)\, dx \\
&\quad - \int_\Omega \nabla u \nabla (u_k - u)\, dx - \int_\Omega q u (u_k - u)\, dx \\
&\qquad + \int_\Omega f(u)(u_k - u)\, dx \\
&= \|u_k - u\|^2 - \int_\Omega (f(u_k) - f(u))(u_k - u)\, dx.
\end{aligned}$$

De esta forma,

$$\|u_k - u\|^2 = (I'(u_k) - I'(u))(u_k - u) + \int_\Omega (f(u_k) - f(u))(u_k - u)\, dx,$$

que gracias a (4.21) y (4.22) implica que $u_k \to u$ en $H_0^1(\Omega)$ y prueba que I satisface (PS), dando lugar a la existencia de un punto crítico no trivial.

Se ha resuelto finalmente el problema (4.1) en su forma débil. Para quién esté familiarizado con los procesos variacionales de resolución de EDPs es conocido que para recuperar soluciones clásicas son necesarios resultados de regularidad sobre u. Estos resultados no se abordarán aquí.

Ambrosetti y Rabinowitz abordan mucho más que el problema recientemente tratado en su artículo; utilizan operadores elípticos generales y no únicamente para el laplaciano. Una gran variedad de problemas de existencia de soluciones para

EDPs pueden resolverse utilizando el TPM clásico; en el artículo de referencia problemas no lineales de valores y vectores propios son resueltos usando esta técnica; más aún junto pequeñas modificaciones del TPM y la inclusión de diversos conceptos y distintas hipótesis, es posible hablar de multiplicidad de soluciones para aquellos problemas. Un muy práctico pero excelente resumen de estas posibilidades se encuentran en la segunda parte de la monografía de Rabinowitz [25]. Como colofón a su original artículo, Ambrosetti y Rabinowitz [3] entregan aplicaciones de su teorema a ecuaciones integrales del tipo

$$v(x) = \int_{\Omega} g(x,y)q(y,v(y))\,dy.$$

El TPM en la versión clásica, analizada en este ensayo, ha experimentado modificaciones de variado tipo y ha sido generalizado ampliamente. Los métodos que se desprenden de él o tienen alguna relación con su estructura son llamados métodos de minimax, y entre otras cosas son útiles, por ejemplo para hallar soluciones de sistemas Hamiltonianos. Las aplicaciones son numerosas y frecuentes en la investigación contemporánea, cuestión que hace imposible detallarlas en su totalidad; el lector interesado puede dirigirse a Ambrosetti y Rabinowitz [3], Badiale y Serra [5], Evans [14], Jabri [16] o Rabinowitz [25]. Por ahora ha llegado el momento de de girar en una dirección crucialmente diferente para empezar el segundo gran bloque que compone este ensayo: el TPM Topológico.

5. El Teorema de Paso de Montaña Topológico

5.1. Requisitos

Como su nombre lo indica, el resultado central que se analiza en el presente capítulo es un teorema que toma lugar en espacios topológicos de amplia generalidad: no se precisa de ninguna noción de operaciones y mucho menos de diferenciabilidad. Fue el matemático francés Guy Katriel [17] quien en su artículo de 1994, titulado "Mountain pass theorems and global homeomorphism theorems", introdujo por primera vez lo que llamó el TPM topológico. A diferencia del TPM clásico este teorema no es precisamente famoso, entre otras cosas porque sus aplicaciones, que se estudian en la siguiente sección, no poseen repercusiones en ramas de la matemática tan populares como lo es la de las ecuaciones diferenciales parciales. De hecho son aplicaciones teóricas en uno de los campos que parecen ser menos cautivantes para el gran público matemático (al menos en la Facultad de Ciencias de la EPN): la Topología General. Sin embargo, a parte de dichas aplicaciones, la que se advierte como otra de las motivaciones de Katriel es la generalización de un teorema de Richard Courant [10] de 1950, de amplio alcance en la teoría de puntos críticos en dimensión finita, y que se mostrará en el capítulo final, ya que entre otras cosas, resulta interesante como punto de comunión entre el TPM clásico y el TPM topológico.

El marco en el que se navega en la intención de demostrar el TPM es muy diferente al precedente —con espacios normados y/o con producto escalar— por lo cual resulta necesaria una pequeña re-introducción a las nociones más básicas de la Topología General así como a resultados no tan elementales de esta tan estimulante rama de las matemáticas. A continuación se brindan algunas definiciones y resultados sencillos pero importantes, demostrados originalmente a menos que se indique lo contrario.

5.1.1. Definiciones generales

Definición 5.1.1 (Vecindad)**.** Sea X un espacio topológico y $x \in X$. V es una vecindad de x si existe un abierto $W \subset X$ tal que $x \in W \subset V$.

Se hace esta aclaración de la definición de vecindad para recalcar que una vecindad no necesita ser abierta en general, si no únicamente contener un subconjunto que lo sea: de ésta forma se puede hablar de vecindades cerradas, conexas, compactas, etc. Evidentemente, cuando se habla de una vecindad abierta de un punto x, se hace referencia solamente a un conjunto abierto que contenga a x.

Aunque las definiciones de abierto y cerrado en espacios topológicos son bastante conocidas, se estudia a continuación definiciones y resultados de abiertos y cerrados relativos a subconjuntos de espacios topológicos.

Definición 5.1.2 (Abierto relativo)**.** Sea X un espacio topológico y $Y \subset X$. Se dice que $A \subset Y$ es abierto relativo a Y (o abierto en Y) si existe B abierto en X tal que $A = B \cap Y$.

Esta definición produce una topología en $Y \subset X$, y es la topología que se sobreentiende existe en cada subconjunto de un espacio topológico a falta de otra afirmación. A Y dotado de esta topología *inducida* por X, se lo llama subespacio topológico de X. Se puede apreciar claramente que si $A \subset Y$ es abierto en X, inmediatamente lo es en Y, pues al ser A subconjunto de Y, se tiene que $A = A \cap Y$.

Definición 5.1.3 (Cerrado relativo)**.** Sea X un espacio topológico y $Y \subset X$. Se dice que $A \subset Y$ es cerrado relativo a Y si $Y \backslash A$ es abierto relativo a Y.

A continuación, un primer resultado cuya demostración se puede encontrar realizada por James Munkres [21].

Teorema 5.1.1. *Sea X un espacio topológico y $Y \subset X$. $A \subset Y$ es cerrado relativo a Y si y solo si existe B cerrado en X tal que $A = B \cap Y$.*

Por último y para demostraciones posteriores, se recuerdan las definiciones de clausura y frontera de un conjunto en un espacio topológico.

Definición 5.1.4 (Clausura)**.** Sea X un espacio topológico y $A \subset X$. Se define la clausura de un conjunto A, notada por $\overline{A}$, como el conjunto de todos los elementos $x \in X$ tales que para toda vecindad abierta V de x, se tiene que $A \cap V \neq \varnothing$.

La frontera de A, denotada por ∂A, es la intersección entre las clausuras de A y $X \backslash A$, es decir $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \backslash A}$. Tanto la clausura como la frontera de cualquier subconjunto son conjuntos cerrados.

5.1.2. Funciones continuas

Muy pocas cosas en Topología tienen relevancia si no es a la luz de la definición de continuidad de funciones, cuestión que en el TPM clásico es fundamental. A continuación se recuerdala definición y una propiedad muy útil en el futuro.

Definición 5.1.5. Sean X e Y dos espacios topológicos. Una función $f : X \to Y$ se dice continua si para todo conjunto V abierto en Y, su imagen inversa $f^{-1}(V)$ es abierto en X.

Proposición 5.1.1. *Sean X e Y dos espacios topológicos, y $f : X \to Y$ una función continua. Entonces, para todo $A \subset X$, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.*

Demostración. Sea $y \in f(\overline{A})$. El objetivo es mostrar que la intersección entre cualquier vecindad abierta de y y el conjunto $f(A)$ es no-vacía. Sea V una vecindad abierta de y, arbitraria pero fija. Ahora, como $y \in f(\overline{A})$, existe $x \in \overline{A}$ tal que $y = f(x)$. En otras palabras $x \in f^{-1}(\{y\}) \subset f^{-1}(V)$, lo cual quiere decir que $f^{-1}(V)$, al ser abierto por la continuidad de f, es una vecindad abierta de x. Como $x \in \overline{A}$,

$$A \cap f^{-1}(V) \neq \varnothing,$$

con lo cual

$$f(A \cap f^{-1}(V)) \neq \varnothing.$$

Por otro, lado y usando propiedades elementales de las imágenes directa e inversa de un conjunto se conoce que

$$f(A \cap f^{-1}(V)) \subset f(A) \cap f(f^{-1}(V)) \subset f(A) \cap V,$$

con lo cual $f(A) \cap V \neq \varnothing$, que es lo que se buscaba. $\square$

A las propiedades de los conjuntos que se conservan bajo la imagen directa de funciones continuas se las conoce como propiedades topológicas. A continuación se recuerdan un par de ellas.

5.1.3. Conexidad y Compacidad

Definición 5.1.6. Sea X un espacio topológico. Se dice que X es conexo si no existen abiertos disjuntos no vacíos A, B tales que $X = A \cup B$. Si tales conjuntos existen, entonces X se dice disconexo. $Y \subset X$ es conexo (o disconexo) si es conexo (o disconexo) con respecto a la topología inducida por X.

La demostración de que la conexidad es una propiedad topológica, se puede encontrar en el Capítulo 3 de Munkres [21], así como la siguiente propiedad (equivalente a la definición) recurrente de los conjuntos conexos.

Teorema 5.1.2. *Sea X un espacio topológico. X es conexo si y solo si los únicos conjuntos que son abiertos y cerrados a la vez son $\varnothing$ y X.*

De ésta forma $Y \subset X$ es conexo si y solo si los únicos conjuntos abiertos y cerrados a la vez (relativos a Y) son $\varnothing$ y Y. A continuación se presentan unos cuantos resultados importantes, afirmados sin demostrar (Ver Capítulo 2 de Christenson y Voxman [9] o Capítulo 3 de Munkres [21]) referentes a conjuntos conexos.

Proposición 5.1.2. *Sean X un espacio topológico, $A \subset X$ y $B \subset X$ tales que cumplen $A \subset B \subset \overline{A}$. Si A es conexo, entonces B lo es. En particular $\overline{A}$ es conexo.*

Proposición 5.1.3. *La unión arbitraria de una familia de conjuntos conexos es un conjunto conexo siempre y cuando la intersección de dicha familia sea no vacía.*

Proposición 5.1.4. *En $\mathbb{R}$ (dotado de la topología usual), $A \subset \mathbb{R}$ es conexo si y sólo si $A = \varnothing$, $A = \{x\}$ o si A es un intervalo.*

En realidad, se considera por convención que el conjunto vacío es conexo y como cualquier conjunto unitario, en cualquier espacio topológico, es conexo, el caso interesante es cuando la cardinalidad de A es mayor o igual que 2, donde no hay otra opción que A sea un intervalo de cualquier clase.

La siguiente definición resulta útil en consideraciones posteriores.

Definición 5.1.7. Sea X un espacio topológico. Un subespacio $C \subset X$ es llamado componente conexa de X si satisface dos propiedades:

1. C es conexo;

2. Si $C \subset A$ y A es conexo, entonces $C = A$.

En otras palabras una componente conexa es un elemento maximal de la familia de subespacios conexos (ordenados por inclusión). El siguiente lema permite definir un concepto de gran preponderancia; puede encontrarse una demostración en [20].

Lema 5.1.1. *Sea x un punto en el espacio topológico X. Sea $C(x)$ la unión de todos los subespacios conexos que contienen a x, es decir,*

$$C(x) = \bigcup \{Y \subset X \ | \ x \in Y, \ \ Y \ \text{conexo}\}.$$

Entonces $C(x)$ es una componente conexa de X que contiene a x y es llamada la componente conexa de x en X.

El siguiente Teorema, resume algunas propiedades interesantes de las componentes conexas:

Teorema 5.1.3. *Sea X un espacio topológico. Entonces:*

- *Las componentes conexas de X son subespacios topológicos disjuntos de X cuya unión es X.*
- *Cada conjunto conexo no vacío de X interseca a una y sólo una de las componentes conexas de X*
- *Cada elemento del espacio X pertenece a una y sólo una componente conexa de X.*

Por último, en lo que se refiere a la propiedad de conexidad se demuestra una propiedad relativa a funciones continuas con imagen en la línea real.

Teorema 5.1.4. *Sea X un espacio topológico y $f : X \to \mathbb{R}$ una función continua. Si $A \subset X$ es conexo entonces*

$$\sup_{x \in A} f(x) = \sup_{x \in \overline{A}} f(x)$$

Demostración. Por un lado, como $A \subset \overline{A}$, se tiene

$$\sup_{x \in A} f(x) \leq \sup_{x \in \overline{A}} f(x).$$

Por otro lado, al ser f continua, gracias a la proposición 5.1.1, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$; entonces

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \overline{A}} f(x) &= \sup\{f(x) \mid x \in \overline{A}\} \\ &= \sup(f(\overline{A})) \\ &\leq \sup(\overline{f(A)}). \end{aligned}$$

Ahora, como A es conexo, $f(A)$ lo es, pero al estar en $\mathbb{R}$ sólo podría ser vacío, unitario o un intervalo, debido a la Proposición 5.1.4. El caso vacío es descartable; si fuera unitario, fuera cerrado en $\mathbb{R}$ y por tanto $\overline{f(A)} = f(A)$; y en el caso de que fuera un intervalo se debe tener en cuenta que tome la forma que tome un intervalo en $\mathbb{R}$, su supremo será igual al supremo de su clausura. De todas formas,

$$\sup(\overline{f(A)}) = \sup(f(A)) = \sup_{x \in A} f(x),$$

con lo cual

$$\sup_{x \in \overline{A}} f(x) \leq \sup_{x \in A} f(x).$$

Obtenidas las desigualdades en ambos sentidos se concluye la igualdad deseada. $\square$

Por formalidad se recuerda la definición de conjunto compacto.

Definición 5.1.8. Un espacio topológico se dice compacto si cualquier recubrimiento abierto admite un subrecubrimiento finito. Un subespacio en un espacio topológico es compacto si lo es para la topología inducida.

Se presentan a continuación dos resultados necesarios en lo subsiguiente, el primero de los cuales es demostrado en el referido Capítulo 3 de Munkres [21].

Proposición 5.1.5. *Sea X un subespacio topológico y $K \subset X$ un subespacio compacto. Si $C \subset K$ es un subespacio cerrado, entonces C es compacto.*

Proposición 5.1.6. *Sea X un espacio topológico, $K \subset X$ un subespacio compacto y $C \subset X$ un subespacio cerrado, entonces $K \cap C$ es compacto.*

Demostración. La presente demostración está basada en el hecho de que para cualquier terna de conjuntos A, B, y C , se tiene:

$$A \cap B \subset C \Leftrightarrow A \subset C \cup B^c,$$

proposición de demostración más que interesante para un curso de Fundamentos de la Matemática.

Sea $\{J_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento abierto de $K \cap C$, es decir $K \cap C \subset \bigcup\limits_{i\in I} J_i$; con lo cual $K \subset \bigcup\limits_{i\in I} J_i \cup X\backslash C$. Como C es cerrado, $X\backslash C$ es abierto y $\{\{J_i\}_{i\in I}, X\backslash C\}$ es un recubrimiento abierto para el compacto K. Así, existe $\{J_1, J_2, \ldots, J_n\}$ subrecubrimiento finito de $\{\{J_i\}_{i\in I}, X\backslash C\}$ para K, es decir, $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} J_i \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} J_i \cup X\backslash C$; luego, $K \cap C \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} J_i$. Ahora, podría ser que $J_k = X\backslash C$ para algún $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, en cuyo caso $K \cap C \subset \bigcup\limits_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} J_i \cup J_k$ y claramente $K \cap C \subset \bigcup\limits_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} J_i$. Si este no fuera el caso el subrecubrimiento finito de $\{J_i\}_{i\in I}$ buscado es simplemente $\{J_1, J_2, \ldots, J_n\}$; y si lo fuera entonces sería $\{J_1, J_2, \ldots, J_n\}$ quitado J_k. $\square$

A parte de éstas propiedades que se cumplen en cualquier espacio topológico, son usuales la caracterización por sucesiones de la compacidad que ya se ha usado anteriormente y es válida sólo en espacios métricos y la clásica equivalencia en dimensión finita que dice que un conjunto es compacto si y solo si es cerrado y acotado (Teorema de Heine-Borel).

5.1.4. Axiomas de Separación

Definición 5.1.9. Sea X un espacio topológico en el cual los conjuntos de un solo punto son cerrados. X se dice regular si para cada $B \subset X$ cerrado y $x \notin B$ existen dos conjuntos abiertos disjuntos conteniendo a B y x, respectivamente. Esta propiedad también es conocida como T_3.

Definición 5.1.10. Un espacio topológico X se dice Hausdorff o T_2 si para cada par de puntos $x, y \in X$ existen dos conjuntos abiertos disjuntos conteniendo a x e y, respectivamente.

La propiedad por la cual todo conjunto de un solo elemento es cerrado se conoce como T_1, y es necesaria para que *todo espacio regular sea un espacio Hausdorff*. En los espacios Hausdorff, todo compacto es cerrado, por lo que la Proposición 5.1.6, se demuestra inmediatamente en estos espacios. En algunos libros de Topología se hace una diferenciación entre espacio regular y T_3, siendo los primero aquellos que cumplen únicamente con la segunda característica de la Definición 5.1.9, y los segundos, aquellos que son regulares y T_1. En este trabajo no se hace esa diferenciación y se usan los términos equivalentemente.

5.1.5. Propiedades locales

Definición 5.1.11 (Conexidad local)**.** Un espacio topológico X es localmente conexo en x si para toda vecindad abierta U de x, existe una vecindad conexa V de x contenida en U. Si X es localmente conexo en cada uno de sus puntos se dice que es localmente conexo.

Tómese en cuenta el siguiente lema, cuya demostración se puede encontrar en Christenson y Voxman [9] y Munkres [21].

Lema 5.1.2. *Un espacio X es localmente conexo si y solo si para todo abierto U de X, cada componente conexa de U es abierto en X.*

Definición 5.1.12 (Compacidad local)**.** Un espacio topológico X es localmente compacto si para todo $x \in X$ y para toda vecindad abierta U de x existe un abierto V tal que $x \in V \subset \overline{V} \subset U$, con $\overline{V}$ compacto.

Lema 5.1.3. *Sea X un espacio topológico regular. Entonces X es localmente compacto si y solo si cada $x \in X$ posee una vecindad compacta.*

Demostración. ($\Rightarrow$) En primer lugar, asúmase que X es localmente compacto. Sea $x \in X$. Como siempre se puede encontrar una vecindad abierta U para x (en el peor de los casos, el propio X), entonces, la compacidad local implica que existe V abierto tal que $x \in V \subset \overline{V} \subset U$, con $\overline{V}$ compacto, que precisamente es la vecindad compacta buscada.

($\Leftarrow$) Ahora asúmase que cualquier elemento de X posee una vecindad compacta. Sea $x \in X$ y U cualquier vecindad abierta de x. Entonces existen N compacto y W abierto, tales que $x \in W \subset N$. Por otro lado, como $X \backslash U$ es cerrado, entonces, gracias a la regularidad de X existen V_1 vecindad abierta de x y V_2 vecindad abierta de $X \backslash U$ tales que $V_1 \cap V_2 = \varnothing$. Se conjetura que $\overline{V_1} \subset U$. Sea $y \in \overline{V_1}$ y supóngase que $y \in X \backslash U$, luego $y \in V_2$, convirtiéndose así V_2 en una vecindad abierta de y, implicando esto, gracias a la definición de $\overline{V_1}$, que $V_1 \cap V_2 \neq \varnothing$, que es una contradicción. Por tanto. $\overline{V_1} \subset U$. Sea $V = V_1 \cap W$. Claramente es abierto y $x \in V$. Por un lado,

$$\overline{V} = \overline{V_1 \cap W} \subset \overline{V_1} \cap \overline{W} \subset \overline{V_1} \subset U.$$

Por otro lado,

$$\overline{V} = \overline{V_1 \cap W} \subset \overline{V_1} \cap \overline{W} \subset \overline{W} \subset \overline{N}.$$

Como X es Hausdorff, todo compacto es cerrado, particularmente N, con lo cual $\overline{N} = N$. Así $\overline{V} \subset N$, y como todo cerrado en un compacto es compacto, se concluye que $\overline{V}$ lo es. Así, se ha encontrado V abierto tal que

$$x \in V \subset \overline{V} \subset U,$$

con $\overline{V}$ compacto; como x y U fueron elegidos arbitrariamente entonces X es localmente compacto. $\square$

Observación 5.1.1. La equivalencia previa es necesaria para tener la muy útil propiedad por la cual todo espacio topológico regular compacto es localmente compacto.

Definición 5.1.13. Un espacio topológico X es llamado compactamente conexo si para cada par de puntos $x_1, x_2 \in X$ existe un conjunto K compacto y conexo tal que $x_1, x_2 \in K$.

En general la intersección arbitraria de conjuntos conexos no es conexa, y la intersección arbitraria de compactos no es compacta (a menos que nos encontremos en un espacio de Hausdorff), sin embargo para cualquier espacio topológico tenemos el siguiente resultado que combina las dos propiedades topológicas estudiadas, y puede encontrarse detallado a lo largo del Capítulo 6 de Engelking [12] y en el Capítulo 4 de Christenson y Voxman [9].

Teorema 5.1.5. *Sea X un espacio topológico Hausdorff (T_2) y $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia numerable decreciente de conjuntos cerrados y conexos, todos contenidos en un mismo conjunto compacto. Entonces su intersección $\bigcap\limits_{n\in N} B_n$ es compacto y conexo.*

5.2. El Teorema de Paso de Montaña Topológico

Construir el TPM para espacios topológicos no es una tarea sencilla; las hipótesis deben ser refinadas y es preciso definir distintas nociones de punto crítico, ya que la definición usual utiliza la la estructura diferencial de los espacios, de las que en este caso se carece. A partir de ciertas definiciones y un lema central en la demostración del Teorema se puede comenzar a construir ésta. En lo subsiguiente, los espacios topológicos a tratar se asumen regulares y por ende Hausdorff.

Definición 5.2.1 (Punto de paso de montaña)**.** Sean X un espacio topológico y $f : X \to \mathbb{R}$ una función. Se dice que $x \in X$ es un punto global de paso de montaña (abreviado PM) de f si para toda vecindad V de x, el conjunto

$$\{y \mid f(y) < f(x)\} \cap V$$

es disconexo. Se dice que x es un punto local de PM de f si existe una vecindad M de x tal que x es un punto global de PM para $f|_M$.

Observación 5.2.1. Obsérvese que si x es un punto global de PM, y si $f(x) = a$, lo que se está diciendo con esta definición es que el interior del subnivel f^a es disconexo.

Definición 5.2.2 (Función creciente al infinito)**.** Sea X un espacio topológico. Una función $f : X \to \mathbb{R}$ se dice creciente al infinito si para todo $x \in X$ existe un compacto $K \subset X$ tal que $f(z) > f(x)$ para todo $z \notin K$.

Algunas de las propiedades de las funciones crecientes al infinito son de gran interés para el estudio del TPM. Entre ellas está que toda función *continua* creciente al infinito es acotada inferiormente, y que todo espacio que admite una función *continua* creciente al infinito es localmente compacto. A contiuació se detallan dos demostraciones originales de estos resultados, precedidas de una definición.

Definición 5.2.3 (Sucesión propiamente divergente)**.** Una sucesión $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ se dice divergente a infinito si

$$(\forall\, K \in R)\ \ (\exists\, N \in \mathbb{N}) \text{ tal que } (\forall\, n \geq N),\ \ x_n > K.$$

Una sucesión $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ se dice divergente a menos infinito si

$$(\forall\, K \in \mathbb{R})\ \ (\exists\, N \in \mathbb{N}) \text{ tal que } (\forall\, n \geq N),\ \ x_n < K.$$

Cualquier sucesión que diverja a infinito o a menos infinito se denomina sucesión que diverge propiamente.

Observación 5.2.2. Toda sucesión creciente y no acotada superiormente es divergente a infinito así como toda sucesión decreciente y no acotada inferiormente es divergente a menos infinito.

Más adelante se estudiará con mayor detalle a las sucesiones propiamente divergentes. Por ahora, se hace uso de ellas en el siguiente lema.

Lema 5.2.1. *Sea X un espacio topológico y $f : X \to \mathbb{R}$ una función continua creciente al infinito. Entonces f es acotada inferiormente.*

Demostración. Mostrar que f es acotada inferiormente equivale a mostrar que

$$(\exists\, C \in \mathbb{R})\ \ (\forall\, x \in X) \text{ tal que } f(x) \geq C.$$

Procediendo por contradicción se tendría que

$$(\forall\, C \in \mathbb{R})\ \ (\exists\, x \in X) \text{ tal que } f(x) < C.$$

Esta proposición permite construir una sucesión de la siguiente forma: como $-1 \in \mathbb{R}$, existe $x_1 \in X$ tal que $f(x_1) < -1$. Se conjetura que existe $x_2 \in X$ tal que $f(x_1) \geq f(x_2)$ y $f(x_2) < -2$. Si no fuera así se tendría que

$$\forall x \in X,\ \ f(x_1) < f(x) \vee f(x) \geq -2. \tag{5.1}$$

Ahora, como $-2 \in \mathbb{R}$ existe $x_2 \in X$ tal que $f(x_2) < -2$, con lo cual (5.1) implicaría que necesariamente $f(x_1) < f(x_2)$. Por otro lado como para x_1 la primera parte de (5.1) es falsa, necesariamente $f(x_1) \geq -2$. En resumen

$$-2 \leq f(x_1) < f(x_2) < -2,$$

contradicción que prueba la conjetura. Procediendo por inducción es posible probar que para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in X$ tal que

$$f(x_n) \geq f(x_{n+1}) \text{ y } f(x_n) < -n. \tag{5.2}$$

Es decir, la sucesión $(f(x_n))_n$ es decreciente y no acotada inferiormente, implicando esto que diverge a menos infinito, es decir $f(x_n) \to -\infty$. El proceso por el cual se ha construido esta sucesión es bastante usual y será utilizado posteriormente. Ahora, como f es creciente al infinito existe $K \subset X$, tal que $x_1 \in K$, pues $f(x_1) \leq f(x_1)$; pero como además

$$f(x_1) \geq f(x_2) \geq f(x_3) \geq \cdots$$

entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in K$. Por lo tanto $f(x_n) \in f(K)$, que es un conjunto compacto pues f es continua. Al estar la sucesión $(f(x_n))_n$ en un compacto de $\mathbb{R}$, se sabe que posee una subsucesión convergente, más esto contradice el hecho de que $(f(x_n))_n$ diverge a $-\infty$, pues las sucesiones de este tipo no pueden tener ninguna sucesión convergente. Esta contradicción prueba que f es acotada inferiormente, es decir, posee un mínimo global. $\square$

Lema 5.2.2. *Sea X un espacio topológico. Si X admite una función continua creciente al infinito, entonces X es localmente compacto.*

Demostración. Sea $x \in X$; si X fuera compacto, no habría nada que demostrar, pues todo conjunto compacto es localmente compacto. En caso de que X no fuese compacto, el objetivo es mostrar que existe una vecindad compacta de x. Sea el conjunto compacto $K \subset X$ tal que para todo $z \notin K$, $f(z) > f(x)$. En realidad $K \subsetneq X$ (la contenencia es propia, ya que X no es compacto); así, se puede escoger $z_1 \notin K$. Si $c = f(z_1)$, entonces $f(x) < c$. Ahora, para z_1 existe un compacto $K_1 \subset X$ tal que para todo $w \notin K_1$, se tiene que $f(w) > f(z_1)$. Por lo tanto si se encuentra $w \in X$ tal que $f(w) \leq f(z_1)$, inmediatamente se sabe que $w \in K_1$. Con eso en mente sea $V = \{y \in X \mid f(y) < c\}$; evidentemente $x \in V$ y como $V = f^{-1}(\,]-\infty, c\,[\,)$, es la preimagen de un abierto por una función continua, es abierto y así V es vecindad abierta de x. Por un lado, es claro que $V \subset \overline{V} \subset f^{-1}(\,]-\infty, c\,]\,)$. Por otro lado, sea $y \in f^{-1}(\,]-\infty, c\,]\,)$; entonces $f(y) \leq c$ con lo cual $y \in K_1$. En definitiva, $V \subset K_1$. Al ser K_1 compacto y contener a una vecindad abierta de x, entonces K_1 es la vecindad compacta de x deseada. $\square$

El siguiente lema es el primer eslabón de vital preponderancia en la demostración del TPM topológico.

Lema 5.2.3. *Sea X un espacio topológico (regular), compactamente conexo, localmente compacto y localmente conexo, y C un subconjunto de X no vacío, abierto y conexo. Entonces C es compactamente conexo.*

Demostración. Sea $x_0 \in C$ y

$$B = \bigcup \{K \subset C \mid x_0 \in K, K \text{ compacto y conexo}\}.$$

Si se mostrase que $B = C$ entonces C fuera compactamente conexo. En efecto, asumiendo aquello, sean $x, y \in C = B$; de esta forma existen conjuntos compactos y conexos K_x y K_y tales que $x \in K_x$ e $y \in K_y$. Sea $K = K_x \cup K_y$; al ser la unión finita de dos conjuntos compactos y conexos no disjuntos (pues $x_0 \in K_x$ y $x_0 \in K_y$), K es compacto y conexo, y obviamente $x, y \in K$. Como $x_0 \in K$, $K \subset B = C$. De ésta forma, para cualquier par de puntos en C se ha encontrado un subconjunto compacto y conexo $K \subset C$ que contiene a dichos puntos.

Así que lo único que hay que mostrar es que $C = B$. Para ello se utilizará el hecho de que C es conexo y por tanto los únicos conjuntos que son abiertos y cerrados en C son $\varnothing$ y C mismo. Por construcción $B \subset C$; luego, si se prueba que B es abierto y cerrado en C a la vez se tendrá el resultado ya que $B \neq \varnothing$ pues $\{x_0\}$ es compacto y conexo y $x_0 \in C$. Mostrar que B es abierto en C equivale a mostrar que lo es en general en X, mientras que mostrar que B es cerrado en C equivale a mostrar que $\overline{B} \cap C \subset B$ y ya que $B \subset \overline{B} \cap C$, obtener $B = \overline{B} \cap C$; como $\overline{B}$ es cerrado en X, B sería cerrado en C (Teorema 5.1.1).

- **B es abierto.** Sea $x \in B$, el objetivo es encontrar una vecindad abierta V de x tal que $V \subset B$. Para ello, como X es localmente compacto, tómese una vecindad compacta N_0 de x. La regularidad del espacio X hace posible la existencia de dos abiertos disjuntos O_1 y O_2 tales que $x \in O_1$ y $X \backslash C \subset O_2$, puesto que $X\backslash C$ es cerrado. Sea $N_1 = N_0 \cap \overline{O_1}$; este es un conjunto compacto pues es la intersección de un compacto con un cerrado. Además, como N_0 es vecindad de x, existe V_0 vecindad abierta de x tal que $V_0 \subset N_0$. Sea $V_1 = V_0 \cap O_1$; V_1 es vecindad abierta de x y como $V_1 \subset N_1$, se tiene que N_1 es vecindad compacta de x, que además está contenida en C; para ver esto, tómese $x \in N_1$, y muéstrese que $x \in C$; suponiendo por contradicción que $x \in X\backslash C$, entonces $x \in O_2$, que al ser abierto representa una vecindad abierta de x; como $x \in \overline{O_1}$, entonces existe $y \in O_1 \cap O_2$ que representa una contradicción pues $O_1 \cap O_2 = \varnothing$. Por la conexidad local de X existe una vecindad conexa N de x tal que $N \subset N_1$. Así $\overline{N}$ es un cerrado, conexo contenido en C ($\overline{N} \subset \overline{N_1} = N_1 \subset C$). Como x está en B, existe K compacto y conexo tal que $x \in K \subset C$, y que además contiene a x_0. Así, $K \cup \overline{N}$ es un compacto conexo que contiene a x_0 y además contenido en C y por tanto elemento de B. Llámese V a la vecindad abierta de x contenida en N, entonces

$$V \subset N \subset \overline{N} \subset K \cup \overline{N} \subset B,$$

y B es abierto.

- **B es cerrado.** Sea $x \in \overline{B} \cap C$. Como anteriormente tómese $\overline{N}$ una vecindad cerrada y conexa de x contenida en C. Como $x \in \overline{B}$ existe $y \in B \cap N$, por tanto existe K compacto y conexo contenido en C tal que $x_0 \in K$ e $y \in K$. Finalmente $K \cup \overline{N}$ es un compacto conexo contenido en C que contiene a x_0, y por lo tanto está en B:

$$x \in \overline{N} \subset K \cup \overline{N} \subset B.$$

$\square$

El siguiente resultado es una herramienta de gran utilidad en la demostración del teorema principal de este capítulo.

Lema 5.2.4. *Sea X un espacio topológico y $f : X \to \mathbb{R}$ una función continua. Sea Γ una familia de conjuntos compactos de X y la función*

$$\phi : \Gamma \to \mathbb{R}$$

$$A \mapsto \sup_{x \in A} f(x).$$

Si $c = \inf_{A \in \Gamma} \phi(A)$ está en $\mathbb{R}$, entonces existe una sucesión $\{A_n\}_n$ de conjuntos en Γ tal que

$$\begin{cases} \phi(A_1) \geq \phi(A_2) \geq \phi(A_3) \geq \cdots \\ \phi(A_n) \to c. \end{cases}$$

Demostración. Esta demostración está basada en la caracterización del ínfimo de un conjunto acotado inferiormente que expresa que para todo $\epsilon > 0$ existe $A_\epsilon \in \Gamma$ tal que $c + \epsilon > \phi(A_\epsilon)$. Así, como $1 > 0$, entonces existe $A_1 \in \Gamma$ tal que $c + 1 > \phi(A_1)$. El objetivo es mostrar que existe $A_2 \in \Gamma$ tal que $\phi(A_1) \geq \phi(A_2)$ y $c + \dfrac{1}{2} > \phi(A_2)$.

Procediendo por contradicción asúmase que para todo $A \in \Gamma$

$$\phi(A) > \phi(A_1)$$

o

$$c + \frac{1}{2} \leq \phi(A).$$

En particular, esto debería cumplirse para A_1, para quien se contradiría la primera proposición, siendo necesario que se cumpla la segunda, es decir $c + \frac{1}{2} \leq \phi(A_1)$. Ahora, como $\frac{1}{2} > 0$, existe $A_2 \in \Gamma$ tal que $c + \frac{1}{2} > \phi(A_2)$, por lo tanto tendría que cumplirse $\phi(A_2) > \phi(A_1)$; juntando todo,

$$\phi(A_2) < c + \frac{1}{2} \leq \phi(A_1) < \phi(A_2),$$

que constituye una contradicción. Se puede concluir que existe $A_2 \in \Gamma$ tal que $\phi(A_1) \geq \phi(A_2)$ y $c + \frac{1}{2} > \phi(A_2)$. Si se procede por inducción se puede hallar $\{A_n\}_n \subset \Gamma$ tal que $\phi(A_{n-1}) \geq \phi(A_n)$ y $c + \frac{1}{n} > \phi(A_n) \geq c$, que gracias al Teorema de Estricción para límites implica la convergencia buscada. $\square$

5.2.1. El Principio de Minimax Topológico

La demostración del TPM topológico es un proceso que se puede separar en dos pasos que recuerdan al TPM clásico. El primero de ellos es el Principio de Minimax (siendo el segundo el TPM en sí), cuyos conceptos clave se definen a continuación.

Definición 5.2.4 (Familia topológicamente admisible)**.** Sea X un espacio topológico compactamente conexo; sean $x_1, x_2 \in X$ y $f : X \to \mathbb{R}$ una función continua. La familia de conjuntos (clase de minimax)

$$\Gamma = \{\Sigma \subset X \mid \Sigma \text{ es conexo, compacto y } x_1, x_2 \in \Sigma\},$$

con nivel de minimax

$$c = \inf_{\Sigma \in \Gamma} \max_{x \in \Sigma} f(x),$$

se dice topológicamente admisible con respecto a f si

1. $c > \max\{f(x_1), f(x_2)\}$;

2. Existe $B \in \Gamma$ tal que $\max\limits_{x \in B} f(x) = c$.

Observación 5.2.3. Téngase en cuenta que, gracias a que se define en un espacio compactamente conexo, $\Gamma \neq \varnothing$. Además, la primera propiedad garantiza que $c \in \mathbb{R}$.

Teorema 5.2.1 (Principio de Minimax Topológico)**.** *Sea X un espacio topológico localmente conexo, compactamente conexo y localmente compacto. Sean $x_1, x_2 \in X$, $f : X \to \mathbb{R}$ una función continua y Γ (definida como anteriormente) una familia topológicamente admisible con respecto a f. Entonces existe $x_3 \in X$, un mínimo local o un punto global de paso de montaña de f, tal que $f(x_3) > \max\{f(x_1), f(x_2)\}$.*

Demostración. Como Γ es topológicamente admisible existe un conjunto B en Γ para el cual $\max\limits_{x \in B} f(x) = c$, gracias a lo cual el conjunto $f^{-1}(\{c\}) \neq \varnothing$. Además

$$B \subset \{y \in X \mid f(y) \leq c\}.$$

Por otro lado, como $c > \max\{f(x_1), f(x_2)\}$, entonces $x_1, x_2 \notin f^{-1}(\{c\})$. El objetivo es mostrar que $f^{-1}(\{c\})$ posee un mínimo local o un punto global de paso de montaña de f. Por contradicción se supone que no, es decir, dado $x \in f^{-1}(\{c\})$, existe N vecindad de x tal que $\{y \in X \mid f(y) < f(x)\} \cap N$ es conexo, y para toda vecindad V de x existe $y \in V$ tal que $f(y) < f(x)$. Para empezar, como $\{c\}$ es cerrado en $\mathbb{R}$ y f es continua, $f^{-1}(\{c\})$ es cerrado en X, con lo cual $X \backslash f^{-1}(\{c\})$ es abierto. Sea $C = C(x_1)$ la componente conexa de x_1 en $X \backslash f^{-1}(\{c\})$. En primer lugar como C es conexo, $f(C) \subset \mathbb{R}$ también lo es, y por tanto es un intervalo en el que obviamente no puede estar c; así que

$$f(C) \subset]-\infty, c[\text{ o } f(C) \subset]c, +\infty[;$$

si el último caso fuera cierto entonces para todo $x \in C$, $f(x) > c$, en específico para x_1, pero $f(x_1) > c$ es una contradicción, por lo cual necesariamente $f(C) \subset]-\infty, c[$, y por lo tanto $f(x) < c$ para todo $x \in C$. Además, como X es localmente conexo, C es abierto. Pra empezar se debe mostrar que

$$\overline{C} \subset C \cup f^{-1}(\{c\}). \tag{5.3}$$

Para esto supóngase que $x \in \overline{C}$ y $x \notin f^{-1}(\{c\})$ ($\{x\} \subset X \backslash f^{-1}(\{c\})$), con lo cual

$$C \subset C \cup \{x\} \subset \overline{C}.$$

Pero como C es conexo, entonces $C \cup \{x\}$ también lo es, y gracias a la maximalidad de C para conjuntos conexos por contenencia, se tiene $C \cup \{x\} = C$, con lo cual $x \in C$. Por otro lado es preciso mostrar que

$$B \subset \overline{C}, \tag{5.4}$$

para lo cual basta mostrar $B \cap \overline{C} = B$. Como $B \cap \overline{C} \subset B$ y gracias a que B es conexo, para probar esta igualdad sólo se necesita ver que $B \cap \overline{C}$ sea abierto y cerrado en B. Directamente se puede ver que es cerrado pues es la intersección de un cerrado en X ($\overline{C}$) con B. Con el fin de ver que es abierto relativo a B, para $x \in B \cap \overline{C}$, se debe encontrar una vecindad abierta N de x tal que $N \cap B \subset B \cap \overline{C}$. Si $x \in B \cap \overline{C}$, podría estar en C, en cuyo caso basta tomar $N = C$, que es abierto y cumple el requerimiento automáticamente. Si, por otro lado, $x \notin C$, entonces por (5.3), necesariamente $x \in f^{-1}(\{c\})$ ($f(x) = c$), con lo cual existe una vecindad N de x tal que $M = \{y \in X \mid f(y) < c\} \cap N$ es conexo; como $x \in \overline{C}$ entonces existe $u \in C \cap N$, pero al estar en C, $f(u) < c$, y por tanto $u \in M$; de esta forma se tiene que el conjunto conexo M interseca a la componente conexa C, y como todo conexo se encuentra en alguna componente conexa y las componentes conexas son disjuntas entre sí, no hay otra alternativa que

$$M \subset C.$$

Por otro lado, sea $w \in f^{-1}(\{c\}) \cap N$. Al estar en $f^{-1}(\{c\})$ se sabe que w no es un mínimo local; por tanto para cualquier vecindad V de w existe $y \in V$ tal que $f(y) < f(w) = c$; con lo cual $V \cap \{y \in X \mid f(y) < c\} \neq \varnothing$, y en específico $N \cap \{y \in X \mid f(y) < c\} \neq \varnothing$. De esta forma $V \cap M \neq \varnothing$. Como esto se cumple para una vecindad arbitraria V de w, entonces se tiene que w está en la clausura de M. Por lo tanto,

$$f^{-1}(\{c\}) \cap N \subset \overline{M}.$$

Usando lo que se ha mostrado hasta el momento se tiene,

$$
\begin{aligned}
N \cap B &\subset N \cap \{y \in X \mid f(y) \leq c\} \qquad (5.5)\\
&= (N \cap \{y \in X \mid f(y) < c\}) \cup (N \cap \{y \in X \mid f(y) = c\})\\
&= M \cup ([f^{-1}(\{c\}) \cap N)\\
&\subset C \cup \overline{M}\\
&\subset \overline{C} \cup \overline{C} = \overline{C}.
\end{aligned}
$$

con lo cual $N \cap B \subset B \cap \overline{C}$. Ahora, una vez demostrados (5.3) y (5.4), estos implican que

$$B \subset C \cap f^{-1}(\{c\}).$$

Esto muestra que como $x_2 \in B$ pero $x_2 \notin f^{-1}(\{c\})$, entonces $x_2 \in C$. Como C es un abierto conexo en el espacio X que es localmente conexo, localmente compacto y compactamente conexo, por el Lema 5.2.3, es compactamente conexo. Por tanto existe $K \subset C$ conexo y compacto tal que $x_1, x_2 \in K$. Es decir $K \in \Gamma$. Pero como $f(x) < c$ para todo $x \in C$, especialmente en K, entonces $\max_{x \in K} f(x) < c$, que contradice la definición de c. De tal forma que existe x_3 mínimo local o punto global de PM tal que

$$f(x_3) > \max\{f(x_1), f(x_2)\},$$

y caracterizado por:

$$f(x_3) = \inf_{\Sigma \in \Gamma} \max_{x \in \Sigma} f(x).$$

□

5.2.2. El Teorema de Paso de Montaña *Topológico*

Como aplicación del Principio de Minimax Topológico se tiene al TPM topológico.

Teorema 5.2.2 (Teorema de Paso de Montaña Topológico). *Sean X un espacio topológico localmente conexo y compactamente conexo y $f : X \to \mathbb{R}$ una función continua y creciente al infinito. Sean $x_1, x_2 \in X$, $S \subset X$ un subconjunto que separa x_1 y x_2, es decir x_1 y x_2 se encuentran en distintas componentes (conexas) de $X \backslash S$, y*

$$\max\{f(x_1), f(x_2)\} < \inf_{x \in S} f(x) = p. \tag{5.6}$$

Entonces existe $x_3 \in X$, un mínimo local o un punto global de paso de montaña de f, con $f(x_3) > \max\{f(x_1), f(x_2)\}$.

Demostración. Gracias al Principio de Minimax precedente, para obtener el resultado de existencia, sólo hace falta mostrar que

$$\Gamma = \{\Sigma \subset X \mid \Sigma \text{ es conexo, compacto y } x_1, x_2 \in \Sigma\}$$

es una familia topológicamente admisible, ya que X es compactamente conexo, localmente conexo y locamente compacto (pues admite una función creciente al infinito). Considérese la función,

$$\begin{aligned} \phi : \Gamma &\to \mathbb{R} \\ A &\mapsto \sup_{x \in A} f(x) = \max_{x \in A} f(x). \end{aligned}$$

Se tiene $c = \inf\limits_{A\in\Gamma} \phi(A)$. Como S separa x_1 y x_2, entonces $A \in \Gamma$ debe intersecar S. Luego, para todo $A \in \Gamma$

$$\begin{aligned} p = \inf_{x\in S} f(x) &\leq \inf_{x\in A\cap S} f(x) \\ &\leq \sup_{x\in A\cap S} f(x) \\ &\leq \sup_{x\in A} f(x) = \phi(A). \end{aligned}$$

con lo cual $p \leq c$, y por tanto c es finito. Más aún

$$c > \max\{f(x_1), f(x_2)\},$$

por (5.6). Gracias al Lema 5.2.4, se puede considerar la sucesión $\{A_i\}_i$ de conjuntos en Γ tal que

$$\begin{cases} \phi(A_1) \geq \phi(A_2) \geq \phi(A_3) \geq \cdots \\ \phi(A_i) \to c. \end{cases}$$

Ahora, Sea $x_{A_1} = \arg\max\limits_{x\in A_1} f(x)$, como f es creciente al infinito existe $K \subset X$ compacto tal que para todo $z \notin K$, $f(z) > f(x_{A_1}) = \phi(A_1)$. Por lo tanto $f(z) > \phi(A_i)$ para todo $i \in \mathbb{N}$. El objetivo es mostrar que $A_i \subset K$ para todo $i \in \mathbb{N}$; fijado $i \in \mathbb{N}$, sea $x \in A_i$ y supóngase por contradicción que $x \notin K$; luego, $f(x) > \phi(A_i) = \max\limits_{x\in A_i} f(x)$, que no puede ser posible. Por lo tanto para todo $i \in \mathbb{N}$, $A_i \subset K$. Sea $n \in \mathbb{N}$, luego $A_i \subset K$ para todo $i \geq n$, con lo cual $\bigcup\limits_{i\geq n} A_i \subset K$ y así $B_n = \overline{\bigcup\limits_{i\geq n} A_i} \subset \overline{K} = K$ (pues todo compacto es cerrado en espacios regulares). Además B_n es conexo por ser clausura de la unión de conexos no disjuntos. Luego, $\{B_n\}_n$ es una sucesión decreciente de conjuntos cerrados, conexos todos contenidos en el mismo compacto, con lo cual, gracias al Teorema 5.1.5, $B = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$ es compacto, conexo y por construcción $x_1, x_2 \in B$. Así, $B \in \Gamma$, con lo cual $\phi(B) \geq c$. Por otro lado, como $B = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$, si $x \in B$ entonces $x \in B_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, con lo cual $f(x) \leq \phi(B_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y como x era arbitrario en B,

$$\phi(B) \leq \phi(B_n), \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Ahora, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \phi(B_n) &= \sup\left(f\left(\overline{\bigcup_{i\geq n} A_i}\right)\right) \\ &= \sup\left(f\left(\bigcup_{i\geq n} A_i\right)\right), \end{aligned}$$

gracias al Teorema 5.1.4, ya que $\bigcup_{i\geq n} A_i$ es conexo. Sea $x \in \bigcup_{i\geq n} A_i$ entonces existe $i \geq n$ tal que $x \in A_i$; luego $f(x) \leq \phi(A_i) \leq \phi(A_n)$, con lo cual

$$\phi(B_n) \leq \phi(A_n), \ \ \forall\, n \in \mathbb{N};$$

en definitiva

$$\phi(B) \leq \phi(A_n) \ \ \forall\, n \in \mathbb{N},$$

obteniéndose que $\phi(B) \leq c$, y por tanto $\phi(B) = c$. Se ha encontrado un conjunto B en Γ para el cual $\max_{x\in B} f(x) = c$, y con ello que Γ es topológicamente admisible, requisito que faltaba para asegurar la existencia de x_3. $\square$

Análogamente a lo expuesto en el Capítulo 2 con el TPM clásico, se puede resumir la demostración del TPM topológico con un esquema de pasos.

1. En primer lugar es necesario mostrar que todo subconjunto abierto y conexo C de todo espacio topológio X compactamente conexo, localmente conexo y localmente compacto, es también compactamente conexo.

2. Se define la admisibilidad de una familia específica de conjuntos en un espacio topológico X (la familia de los compactos conexos que poseen dos puntos dados x_1 y x_2).

3. Se muestra que si X es compactamente conexo, localmente conexo y localmente compacto y la familia es admisible, el funcional f posee un punto de mínimo local o un punto de paso de montaña al nivel de minimax c. Esto se hace suponiendo lo contrario, lo que lleva a encontrar un conjunto en la familia que contradice las características de ésta; proceso dónde se utiliza lo mostrado en el primer paso.

4. Por último, bajo ciertas hipótesis sobre el funcional y los puntos x_1 y x_2, se prueba que la familia es admisible para dicho funcional, lo que implica que exista el punto crítico.

Observación 5.2.4. La demostración aquí presentada del TPM topológico, una vez más y como en el caso clásico está adaptada para el ejercicio comparativo posterior: el Principio de Minimax topológico es un resultado introducido para que el lector puede tener una idea de las similitudes en estructura entre las demostraciones del TPM clásico y el TPM topológico. Se volverá a ello en el capítulo final.

6. Aplicaciones del Teorema de Paso de Montaña Topológico

6.1. Teoremas de Homeomorfismos

En las aplicaciones del Teorema 5.2.2 del capítulo anterior se usa la siguiente versión a manera de coroloario.

Corolario 6.1.1. *Sean X un espacio topológico, localmente conexo y compactamente conexo, y $f : X \to \mathbb{R}$ una función continua y creciente al infinito. Si x_1 y x_2 son mínimos locales estrictos de f, entonces existe $x_3 \in X$ que es un mínimo local o un punto global de paso de montaña de f, con $f(x_3) > \max\{f(x_1), f(x_2)\}$.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad asúmase que $f(x_1) \geq f(x_2)$. Como x_1 es mínimo local estricto, entonces existe U vecindad abierta de x_1 tal que $f(x) > f(x_1)$ para todo $x \in U \backslash \{x_1\}$. Como X admite una función creciente al infinito, es localmente compacto, lo que implica que existe N vecindad compacta de x, tal que $N \subset U$. Luego, $f(x) > f(x_1)$ para todo $x \in N \backslash \{x_1\}$. Como N es compacto, es cerrado y al ser ∂N un cerrado en un compacto, también lo es (recuérdese que el espacio X es Hausdorff); así

$$p = \min_{x \in \partial N} f(x) \geq \min_{x \in N} f(x) > f(x_1) \geq f(x_2).$$

De éstas desigualdades se puede concluir que $x_2 \notin N$ y por lo tanto ∂N separa a x_1 de x_2. Si $S = \partial N$, entonces se puede aplicar el Teorema 5.2.2 para obtener el resultado. □

Las aplicaciones del TPM topológico están basadas en un teorema de alternativa muy interesante. Antes, sin embargo, es necesario repasar algunas definiciones y un lema que se usará más adelante.

Definición 6.1.1 (Homeomorfismo)**.** Sean X e Y dos espacios topológicos. Una aplicación $F : X \to Y$ es llamada homeomorfismo (global) si es biyectiva y tanto F como $F^{-1} : Y \to X$ son aplicaciones continuas.

Definición 6.1.2 (Aplicación abierta)**.** Sean X e Y dos espacios topológicos. Una aplicación $f : X \to Y$ es abierta si para todo abierto $A \subset X$, es abierto el conjunto $f(A) \subset Y$.

Observación 6.1.1. Es muy fácil demostrar que toda aplicación biyectiva, continua y abierta es un homeomorfismo.

Definición 6.1.3 (Homeomorfismo local)**.** Sean X e Y dos espacios topológicos. Una aplicación $F : X \to Y$ es llamada homeomorfismo local si para todo $x \in X$ existe U vecindad abierta de x tal que $F(U)$ es vecindad abierta de $F(x)$ y $F|_U : U \to F(U)$ es un homeomorfismo.

Definición 6.1.4 (Aplicación propia)**.** Sean X e Y dos espacios topológicos. Una aplicación $F : X \to Y$ es llamada propia si para todo conjunto compacto $K \subset Y$, $F^{-1}(K)$ es compacto en X.

Lema 6.1.1. *Sean X e Y dos espacios topológicos y $F : X \to Y$ un homeomorfismo local. Entonces F es una aplicación abierta.*

Demostración. Sea A un abierto en X. Dado x en A existe una vecindad abierta U_x de x tal que $V_x = F(U_x)$ es vecindad abierta de $F(x)$ y $F|_{U_x} : U_x \to V_x$ es un homeomorfismo. Claramente $U_x \cap A$ es abierto en U_x y $F(U_x \cap A) \subset V_x$. Como $F|_{U_x} : U_x \to V_x$ es un homeomorfismo, en particular es un aplicación abierta (transforma abiertos de U_x en abiertos de V_x), por lo cual $F(U_x \cap A)$ es abierto en V_x, lo que significa que existe O abierto en Y tal que $F(U_x \cap A) = O \cap V_x$, pero como V_x es también abierto en Y, $F(U_x \cap A)$ lo sería también al ser la intersección de dos de estos conjuntos. Ahora, como $A \subset \bigcup_{x \in A} U_x$,

$$\begin{aligned} \bigcup_{x\in A} F(U_x \cap A) &= F\left(\bigcup_{x\in A} U_x \cap \bigcup_{x\in A} A\right) \\ &= F\left(\bigcup_{x\in A} U_x \cap A\right) \\ &= F(A). \end{aligned}$$

Al ser unión arbitraria de abiertos en Y, $\bigcup_{x\in A} F(U_x \cap A) = F(A)$ es abierto en Y, y por tanto F es una aplicación abierta. $\square$

Lema 6.1.2. *Sean X e Y dos espacios topológicos y $F : X \to Y$ un homeomorfismo local. Si F es biyectiva, entonces F es un homeomorfismo (global).*

Demostración. Al ser F biyectiva, como por la proposición precedente se sabe abierta, entonces sólo hace falta mostrar que es continua para establecer que es un homeomorfismo global. Sea B un abierto en Y. Como F es biyectiva, existe $x \in F^{-1}(B)$.

Para tal x existe una vecindad abierta U_x de x tal que $V_x = F(U_x)$ es vecindad abierta de $F(x)$ y $F|_{U_x} : U_x \to V_x$ es un homeomorfismo. De esta forma $B \cap V_x \subset V_x$ es abierto en Y y por ende en V_x posibilitando que $F^{-1}(B \cap V_x) \subset U_x$ sea un abierto en U_x y por ende en X. Como $F^{-1}(B) \subset \bigcup_{x \in F^{-1}(B)} U_x$,

$$\begin{aligned}
\bigcup_{x \in F^{-1}(B)} F^{-1}(B \cap V_x) &= \bigcup_{x \in F^{-1}(B)} (U_x \cap F^{-1}(B)) \\
&= \bigcup_{x \in F^{-1}(B)} U_x \ \cap \ \bigcup_{x \in F^{-1}(B)} F^{-1}(B) \\
&= \bigcup_{x \in F^{-1}(B)} U_x \ \cap \ F^{-1}(B) \\
&= F^{-1}(B).
\end{aligned}$$

Al ser unión arbitraria de abiertos en X, $\bigcup_{x \in F^{-1}(B)} F^{-1}(B \cap V_x) = F^{-1}(B)$ es abierto en X, y por tanto F es una aplicación continua.

□

Lema 6.1.3. *Sean X e Y dos espacios topológicos. Sea $F : X \to Y$ un homeomorfismo local propio. Entonces $|F^{-1}(\{y\})| < +\infty$ para todo $y \in Y$.*

Demostración. Sea $y \in Y$; se debe mostrar que la cardinalidad de $F^{-1}(\{y\})$ es finita. Si $F^{-1}(\{y\}) = \varnothing$, entonces $|F^{-1}(\{y\})| = 0 < +\infty$. Así que se asume que $F^{-1}(\{y\}) \neq \varnothing$. Por un lado como $\{y\}$ es compacto en Y, ya que F es propia, se sigue que $F^{-1}(\{y\})$ es compacto en X. Por otro lado para $x \in F^{-1}(\{y\})$ existe una vecindad abierta U_x de x tal que $F(U_x)$ es vecindad abierta de $F(x)$ y $F|_{U_x} : U_x \to V_x$ es un homeomorfismo y, en particular, biyectiva. Se conjetura que $\{x\} = U_x \cap$

$F^{-1}(\{y\})$. Para esto, supóngase que existe un elemento distinto $\tilde{x} \in U_x \cap F^{-1}(\{y\})$. Así $f(\tilde{x}) = y = f(x)$, que gracias a la inyectividad, al estar ambos puntos en U_x implica que $\tilde{x} = x$, y se confirma la conjetura. Ahora, se puede construir

$$C = \{U_x \mid x \in F^{-1}(\{y\})\},$$

un recubrimiento abierto para el conjunto $F^{-1}(\{y\})$. Como este último es compacto entonces existe un subrecubrimiento finito, es decir

$$F^{-1}(\{y\}) \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_n},$$

con lo cual,

$$\begin{aligned} F^{-1}(\{y\}) &\subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_n} \cap F^{-1}(\{y\}) \\ &\subset \bigcup_{i=1}^{n} (U_{x_n} \cap F^{-1}(\{y\})) \\ &= \bigcup_{i=1}^{n} \{x_n\} \\ &= \{x_1, x_2, \dots, x_n\}. \end{aligned}$$

Al encontrarse $F^{-1}(\{y\})$ dentro de un conjunto finito, su cardinalidad debe serlo también. □

Observación 6.1.2. Como se expresa Katriel [17], si en el lema precedente se añade la suposición de que Y es localmente compacto y conexo se puede probar que $|F^{-1}(\{y\})|$ no es sólo finito sino constante para todo $y \in Y$.

El siguiente es el principal teorema de aplicación del TPM topológico.

Teorema 6.1.1. *Sean X e Y dos espacios topológicos, Y conexo y X localmente compacto y compactamente conexo. Entonces una de las dos siguientes alternativas se sigue:*

(I) Toda función $f : Y \to \mathbb{R}$ continua y creciente al infinito tiene un número infinito de mínimos locales o un punto local de paso de montaña (o ambas).

(II) Todo homeomorfismo local propio $F : X \to Y$ es un homeomorfismo global

Demostración. La existencia de una función continua creciente al infinito implica que Y es localmente compacto, por lo tanto si Y no fuera localmente compacto, *(I)* se cumpliría trivialmente. Así que se asume que Y es localmente compacto. Para probar la alternativa se supone que *(II)* no se da y se busca probar que *(I)* se cumple. Sea $f : Y \to \mathbb{R}$ una función continua creciente al infinito. Se sabe que f tiene al menos un mínimo local, puesto que es acotada inferiormente. Supóngase que posee sólo un número finito de mínimos locales; para probar el resultado se debe asegurar la existencia de un punto local de paso de montaña. Sea y_0 un mínimo local en el cual el valor de f es maximal, es decir, si $M = \{y \in Y \mid y \text{ es mínimo local de } f\}$,

$$f(y_0) = \max_{y \in M} f(y). \tag{6.1}$$

El hecho de que haya un número finito de mínimos locales garantiza que y_0 (y cualquier otro punto de mínimo) sea de hecho un mínimo estricto. Como se partió de que *(II)* no se satisface entonces se puede afirmar que existe un homeomorfismo local y propio $F : X \to Y$ que no es homeomorfismo global. Si $|F^{-1}(y)| = 1$ para todo $y \in Y$, entonces F sería biyectiva. De hecho: para la inyectividad, sean $a, b \in X$, tales que $F(a) = F(b)$; obviamente $F^{-1}(\{F(a)\}) = F^{-1}(\{F(b)\})$, pero como en estos conjuntos sólo hay un elemento, entonces $a = b$. Para la sobreyectividad, sea $y \in Y$, como $|F^{-1}(\{y\})| = 1$, entonces existe un único $x \in X$ tal que $x \in F^{-1}(\{y\})$, es decir $F(x) \in \{y\}$, o lo que es lo mismo $F(x) = y$. Así, si $|F^{-1}(y)| = 1$, F es un homeomorfismo local biyectivo y gracias al Lema 6.1.2, un homeomorfismo global, cosa que contradice la suposición. Por ende existe un $y \in Y$ tal que $|F^{-1}(y)| \neq 1$. Gracias a la Observación 6.1.2 se sabe que las cardinalidades de las imágenes inversas de conjuntos unitarios son constantes, por lo cual

$$|F^{-1}(\{y\})| = |F^{-1}(\{y_0\})|$$

para todo $y \in Y$, y por tanto

$$|F^{-1}(\{y_0\})| \geq 2.$$

Es posible así elegir dos distintos x_1 y x_2 en X tales que $F(x_1) = F(x_2) = y_0$. Sea la función:

$$\begin{aligned} g : X &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto g(x) = (f \circ F)(x) = f(F(x)). \end{aligned}$$

g es continua al ser la composición entre dos funciones continuas. Es preciso mostrar en primer lugar que esta función es creciente al infinito. Sea $x \in X$; para $y = F(x) \in Y$, como f es creciente al infinito existe $K_y \subset Y$ tal que para todo $z \notin K_y$,

$f(z) > f(y)$. Como F es propia $K = F^{-1}(K_y)$ es compacto en X. Así, $z \notin F^{-1}(K_y)$ implica que $F(z) \notin K_1$ y por tanto $f(F(z)) > f(F(x))$. De esta forma, $g(z) > g(x)$ para todo $z \notin K$ compacto. Ahora, puede verse que tanto x_1 y x_2 son mínimos locales de g: el siguiente argumento es para x_1 siendo análoga la demostración para x_2. Para x_1 en X existe una vecindad abierta U_{x_1} de x_1 tal que $V_{x_1} = F(U_{x_1})$ es vecindad abierta de $F(x_1) = y_0$ y $F|_{U_{x_1}} : U_{x_1} \to V_{x_1}$ es un homeomorfismo. Por otro lado, como y_0 es mínimo local de f, existe V_{y_0} vecindad abierta de de y_0 tal que

$$f(y) > f(y_0), \quad \forall\, y \in V_{y_0} \backslash \{y_0\}.$$

Como F es continua $F^{-1}(V_{y_0})$ es abierto en X y $x_1 \in F^{-1}(V_{y_0})$. Sea $U = U_{x_1} \cap F^{-1}(V_{y_0})$. U es una vecindad abierta de x_1. Además $F(U) \subset V_{x_1}$ y $F(U) \subset V_{y_0}$. Sea $x \in U$ con $x \neq x_1$. La biyectividad (local) del homeomorfismo local hace que $F(x) \neq F(x_1) = y_0$; con ello en mente, se tiene:

$$g(x) = f(F(x)) > f(y_0) = f(F(x_1)) = g(x_1),$$

con lo cual U es la vecindad donde x_1 es mínimo local. De esta forma se ha mostrado que $g : X \to \mathbb{R}$ es creciente al infinito y posee dos mínimos locales estrictos distintos (x_1 y x_2). Como por hipótesis X es localmente conexo y compactamente conexo, entonces, gracias al Corolario 6.1.1 se puede concluir que existe $x_3 \in X$ mínimo local o punto global de PM para g distinto a x_1 y x_2 y tal que $g(x_3) > \max\{g(x_1), g(x_2)\}$; es decir $f(F(x_3)) > f(y_0)$. Si x_3 fuera mínimo local de g, entonces $y_1 = F(x_3)$ fuera mínimo local de f: en efecto, al ser $x_3 \in X$ mínimo local, existe V_{x_3} vecindad abierta de x_3 tal que

$$g(x) > g(x_3), \quad \forall\, y \in V_{x_3} \backslash \{x_3\}.$$

Además, existe una vecindad abierta U_{x_3} de x_3 tal que $F(U_{x_3})$ es vecindad abierta de $F(x_3) = y_1$ y $F|_{U_{x_1}} : U_{x_1} \to F(U_{x_3})$ es un homeomorfismo. Sea $V = F(U_{x_3}) \cap F(V_{x_3})$. Como F es aplicación abierta entonces, V es una vecindad de y_1. Sea $y \in V$ e $y \neq y_1$; por la biyectividad (local) del homeomorfismo local $F^{-1}(y) \neq F^{-1}(y_1) = x_3$; así,

$$f(y) = f(F(F^{-1}(y))) = g(F^{-1}(y)) > g(x_3) = f(F(x_3)) = f(y_1).$$

En suma, y_1 es un mínimo local de f para el cual $f(y_1) > f(y_0)$, algo que contradice la elección de y_0 dada por (6.1). Por ende la única opción viable es que x_3 sea un punto global de PM para g; se mostrará a continuación que esto implica que y_1 es un punto local de PM para f, obteniéndose así (I) y dando por concluida la demostración: una vez más, recuérdese que existe una vecindad abierta U_{x_3} de x_3 tal que $F(U_{x_3})$ es vecindad abierta de $F(x_3) = y_1$ y $F|_{U_{x_3}} : U_{x_3} \to F(U_{x_3})$ es un homeomorfismo. Sea $M = F(U_{x_3})$, el objetivo es mostrar que para toda vecindad $N \subset M$ de y_1, el conjunto $\{z \mid f(z) < f(y_1)\} \cap N$ es disconexo. Por contradicción, supóngase que existe una vecindad $N \subset M$ de y_1 tal que $\{z \mid f(z) < f(y_1)\} \cap N$ es conexo. Sea $A = \{z \mid f(z) < f(y_1)\}$. Como F es un homeomorfismo local y $A \cap N \subset M$, entonces

$$F^{-1}(A \cap N) = F^{-1}(A) \cap F^{-1}(N)$$

es conexo. Por un lado, es claro que $F^{-1}(N) \subset U_{x_3}$ es una vecindad de x_3, y por otro

$$\begin{aligned} F^{-1}(A) &= \{w \mid F(w) \in A\} \\ &= \{w \mid f(F(w)) < f(F(y_1))\} \\ &= \{w \mid g(w) < g(x_3)\}. \end{aligned}$$

Así que $\{w \mid g(w) < g(x_3)\} \cap F^{-1}(N)$ es un conexo. Eso contradice el hecho de que x_3 es punto global de PM, puesto que si lo fuera para cualquier vecindad de x_3, específicamente $F^{-1}(N)$, tal conjunto debería se disconexo. En suma, esta contradicción prueba que efectivamente y_1 es un punto local de PM para f.

□

Como para todo teorema de alternativa exclusiva, en este caso existen dos tipos de aplicaciones: por un lado si se tienen dos espacio X e Y que satisfacen las hipótesis del teorema y se pudiera encontrar una función $f : Y \to \mathbb{R}$ continua y creciente al infinito tal que sólo posee un número finito de mínimos locales y ningún punto de PM, entonces se sabe que todo homeomorfismo local propio entre X e Y es homeomorfismo global. Por otro lado si se encuentra un homeomorfismo local propio $F : X \to Y$ que no sea homeomorfismo global entonces se sabría que cualquier función continua creciente al infinito $f : Y \to \mathbb{R}$ tendría infinitos mínimos locales o al menos un punto local de PM.

Para descargar un poco la terminología, considérese la siguiente definición.

Definición 6.1.5 (Función y espacio simple)**.** Una función $f : Y \to \mathbb{R}$ continua y creciente al infinito y que posee únicamente un número finito de mínimos locales y ningún punto local de PM es llamada función simple. El espacio topológico Y que admite alguna función simple es llamado espacio simple.

Tomando en cuenta esta definición, se desprende directamente del Teorema 6.1.1 el siguiente resultado.

Teorema 6.1.2. *Si X es un espacio topológico localmente conexo y compactamente conexo y Y es un espacio simple y conexo, entonces cualquier homeomorfismo local propio $F : X \to Y$ es un homeomorfismo global.*

A continuación se presenta el detalle de algunos resultado que se desprenden directamente de este teorema

Corolario 6.1.2. *Todo homeomorfismo local propio de $\mathbb{R}^n$ en si mismo es un homeomorfismo global.*

Demostración. Para aplicar el teorema precedente, sea $X = Y = \mathbb{R}^n$. Como $\mathbb{R}^n$ es localmente conexo, compactamente conexo y conexo, entonces si se prueba que es simple, el resultado se sigue. Para ello se debe hallar al menos una función simple en $\mathbb{R}^n$. La función

$$f : \mathbb{R}^n \to R$$

$$x \mapsto \|x\|$$

es simple. En efecto, la norma euclídea es continua y coerciva, propiedad que implica que es creciente al infinito al estar en dimensión finita (se probará esta afirmación en el siguiente capítulo). Además dado cualquier vector no nulo en $\mathbb{R}^n$ siempre se puede encontrar uno con norma más pequeña, implicando esto que el único punto de mínimo es el mínimo global $x = 0$. Lo único que hace falta ver es que f no posee punto locales de PM: para ello tómese $x \in \mathbb{R}^n$ y M una vecindad de x. El objetivo es mostrar que existe $N \subset M$ vecindad de x que hace que $\{y \mid f(y) < f(x)\} \cap N$ sea conexo: se tiene por un lado que

$$\{y \mid f(y) < f(x)\} = \{y \mid \|y\| < \|x\|\} = B_{\|x\|}(0),$$

es la bola abierta de centro cero y radio $\|x\|$. Como M es abierto se sabe que existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(x) \subset M$. Tomando $N = B_\delta(x)$, que es claramente vecindad de x, se tiene lo buscado ya que $B_{\|x\|}(0) \cap B_\delta(x)$ es conexo al ser intersección de dos bolas abiertas en el espacio euclídeo. Un ejemplo en dos dimensiones es presentado en la Figura 6.1. $\square$

Para la siguiente aplicación se deben tener en cuenta los siguientes resultados.

Lema 6.1.4. *Sea X compacto. Entonces $f : X \to \mathbb{R}$ es creciente al infinito.*

Demostración. Sea $x \in X$; tómese el compacto $K = X$. Entonces

$$z \notin K \Rightarrow f(z) > f(x),$$

puesto que $z \notin K \Leftrightarrow z \notin X \Leftrightarrow z \in \varnothing$, es una proposición falsa. $\square$

Lema 6.1.5. *Sean X un espacio topológicos compacto e Y un espacio topológico Hausdorff. Si $F : X \to Y$ es un homeomorfismo local entonces es una aplicación propia.*

Demostración. Sea K compacto en Y; como Y es Hausdorff, K es cerrado y al ser F continua, $F^{-1}(K)$ es cerrado en X, que al ser compacto, hace a $F^{-1}(K)$ compacto a su vez. $\square$

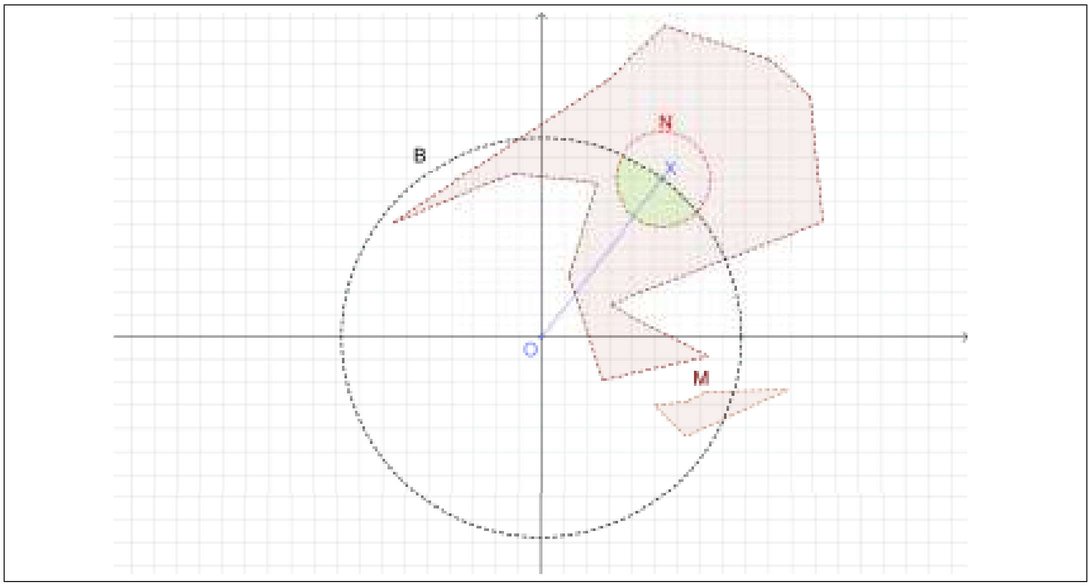

Figura 6.1: (realizada con la ayuda de GeoGebra) Ejemplo de la demostración del Corolario 6.1.2. Aquí M, representada en rojo, es una vecindad abierta de x que en general podría ser disconexa y $B = \{y \mid f(y) < f(x)\} = B_{\|x\|}(0)$. En verde se presenta la intersección conexa buscada.

Corolario 6.1.3. *Todo homeomorfismo local de S^n en si mismo es un homeomorfismo global siempre que $n \geq 2$.*

Demostración. Recuérdese que $S^n = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$. Sea $X = Y = S^n$ para aplicar el teorema precedente. Como S^n es localmente conexo, compactamente conexo y conexo, basta con hallar al menos una función simple en

S^n. Sea

$$f : S^n \to R$$

$$x \mapsto x_1.$$

La función que elige cualquier componente de un vector dado es continua; luego, f es continua. El hecho de que que S^n sea compacto establece inmediatamente que f es creciente al infinito. Como para cualquier punto en S^n siempre se puede encontrar uno con primera componente más pequeña exceptuando para $x = (-1, 0, \dots, 0)$, que es el mínimo global de f, entonces sólo hay una cantidad finita de mínimos. Por último se puede ver, utilizando los mismos argumentos del resultado anterior, que f no posee puntos locales de PM, pues $A = \{y \mid y_1 < x_1\}$ es una bola abierta en la topología inducida en S^n; si se vuelve a elegir N como una bola lo suficientemente pequeña en la vecindad M se tendrá la intersección $A \cap N$ es un conjunto conexo. Así, todo homeomorfismo local propio de S^n en si mismo es un homeomorfismo global. Pero como todo homeomorfismo local en S^n en sí mismo es propio, el resultado se sigue sin mediar la característica de propiedad. $\square$

Observación 6.1.3. En el caso de S^1 sin embargo, el vector $(1, 0)$ si es un punto local de PM (global, de hecho).

Ninguno de los dos resultados precedentes es nuevo, sin embargo para el caso del segundo la prueba usual (ver Spanier [28]) está basada en el hecho de que S^n es simplemente conexo para $n > 1$, cuestión mucho más difícil de probar que la existencia de una función simple. El propio Katriel [17] analiza esta cuestión en la tercera parte de su artículo.

A continuación se presenta el segundo tipo de aplicación del Teorema 6.1.1.

Teorema 6.1.3. *Sea W un espacio topológico compactamente conexo y localmente conexo. Sea $X = S^1 \times W$. Entonces toda función $f : X \to \mathbb{R}$ continua y creciente al infinito posee un número infinito de mínimos locales o un punto de PM (o ambos)*

Demostración. Como X hereda las propiedades de conexidad compacta y conexidad local de W para probar el teorema sólo hace falta exhibir un homeomorfismo local $F : X \to X$ que no se global. Tal homeomorfismo, expuesto por Katriel en [17], representando los puntos de S^1 por $(\cos(t), \sin(t))$, es el siguiente:

$$F : S^1 \times W \to S^1 \times W.$$

tal que

$$F(\cos(t), \sin(t), w) = (\cos(2t), \sin(2t), w).$$

$\square$

Como ejemplo tómese $X = T^n = S^1 \times S^1 \times \cdots \times S^1$ (n veces). En específico T^2, el clásico toro. Con $X = S^1 \times T^{n-1}$, el teorema se aplica y se concluye que toda función continua (como X es compacto toda función es creciente al infinito) $f : T^n \to \mathbb{R}$ posee un número infinito de mínimos locales o un punto de PM. Esto deja un problema abierto: si uno encontrase una función continua desde el toro a los reales sin puntos locales de PM, podría afirmar que toda función real continua definida en el toro posee un número infinito de mínimos locales; de igual forma si se encontrase una función continua con un número finito de mínimos locales se podría aseverar que toda función continua definida en el toro posee necesariamente al menos un punto de PM.

Observación 6.1.4. Como se puede apreciar, las aplicaciones del TPM topológico son meramente útiles en la propia topología, en especial en aquella referente a las superficies compactas y conexas de los espacios euclídeos, algo que se suele llamar aplicaciones teóricas; provienen del Teorema 6.1.1, teorema de alternativa que por otro lado es bastante general y no se limita a las superficies compactas y conexas, aunque es en éstas en las cuales uno puede encontrar más aplicaciones: Katriel presenta algunas aplicaciones más en el estilo ya mostrado, para conjuntos tal simples como las bolas cerradas o tan complejos como el plano proyectivo.

7. Comparación y contraste entre el TPM clásico y el TPM topológico.

El análisis comparativo entre los dos teoremas que se han estudiado al detalle en las páginas anteriores está dividido en tres partes, cada una de las cuales toma en cuenta tres de las posibles características en que se puede hallar relaciones entre ambos resultados. La primera —consistente en las relaciones que las aplicaciones de ambos teoremas comparten— explora básicamente una aplicación que poseen en común y que no se ha tratado hasta ahora. La segunda —que trata con los elementos teóricos de la estructura de las demostraciones de ambos teoremas— recoge lo mostrado en los capítulos 3 y 5 para trazar un paralelismo entre el los procesos de demostración, evidenciando su estrecha similitud. Por último, la tercera parte —que explora las relaciones lógicas entre los teoremas— busca encontrar si existen contextos en los cuales alguno de los teoremas no es más que una generalización del otro. Una vez tratados estos puntos, interesantes conclusiones se pueden sacar.

7.1. Aplicaciones en común de los Teoremas de Paso de Montaña: el TPM en dimensión finita

Por lo expuesto por Ambrosetti y Rabinowitz [3], se puede inferir que tenían una clara motivación en su afán de demostrar el TPM clásico: asegurar la existencia de soluciones débiles de EDPs semilineales elípticas. Por otro lado, como expresa en el título de su artículo [17], Katriel buscaba probar teoremas de homeomorfismos, cuestión que resulta de gran importancia en la Topología General. Ambas aplicaciones se han estudiado con lujo de detalle en secciones anteriores y puede decirse que no poseen ninguna relación a simple vista. Sin embargo, resulta que existe otra aplicación de connotada relevancia que surge como uno de los puntos en común que se pueden encontrar para ambos contextos del TPM; esta aplicación es un teorema, en Teoría de Puntos Críticos en dimensión finita, que fue demostrado por primera vez en 1950 por Richard Courant [10]. Como se puede apreciar, precede ampliamente en el tiempo a los casos que se han estudiado. Este teorema, que hoy se conoce como Teorema de Paso de Montaña *en dimensión finita*, puede considerarse la primera aproximación al tipo de demostración que poseen las otras dos versiones.

A continuación se presenta una demostración basada en las ideas de Courant [10] pero también, y principalmente, de Michael Struwe [29], introduciendo sin embargo una primera parte completamente original con el objetivo de ilustrar que la demostración, aunque guarda cierta relación con las demostraciones del TPM clásico y topológico, es en realidad completamente dependiente de las características de los espacios en dimensión finita y puede hacerse sin tener en cuenta a aquellas. Luego, y muy a parte de esta demostración propia, se mostrará que este TPM en dimensión finita es un corolario tanto del TPM clásico como del topológico, brindando así ese primer punto de encuentro entre los dos teoremas que puede hacer surgir cuestiones interesantes sobre las posibles relaciones teóricas y lógicas que puedan poseer y que se estudian como parte final de este capítulo. Antes, se presentan algunas de las herramienta necesarias para la ejecución de la primera demostración.

Definición 7.1.1 (Función coerciva)**.** Una función continua $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, se dice coerciva si

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty,$$

o en otras palabras, si

$$(\forall\, M > 0)\ \ (\exists\, R > 0) \text{ tal que } \forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ \ \|x\| > R \Rightarrow f(x) > M.$$

Una función continua $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, se dice anticoerciva si $-f$ es coerciva.

La siguiente definición ya se ha utilizado previamente; a continuación se revisa su forma en espacios normados.

Definición 7.1.2 (Sucesión divergente al infinito)**.** Una sucesión $(x_n)_n$ en un espacio de Banach E diverge al infinito si

$$(\forall\, K > 0)\ \ (\exists\, N \in \mathbb{N}) \text{ tal que } (\forall\, n \geq N),\ \ \|x_n\| > K.$$

Idénticamente se pueden definir las sucesiones que divergen a menos infinito y, como ya se vio, a ambas se las denomina sucesiones que divergen propiamente.

Se puede probar que toda sucesión no acotada por arriba y creciente diverge al infinito, así como toda sucesión no acotada por abajo y decreciente diverge a menos infinito, pero además, toda sucesión no acotada posee una subsucesión divergente al infinito como muestra el siguiente resultado.

Lema 7.1.1. *Sea E un espacio de Banach y $(x_n)_n$ una sucesión no acotada en E. Entonces $(x_n)_n$ posee una subsucesión divergente al infinito.*

Que $(x_n)_n$ sea una sucesión no acotada significa que

$$(\forall\, C > 0)\ \ (\exists\, n \in \mathbb{N}) \text{ tal que } \|x_n\| > C.$$

Luego, como $1 > 0$, entonces existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_{n_1}\| > 1$; tómese el más pequeño n_1 que cumple con esta propiedad. Ahora, para el siguiente término de la subsucesión es necesario probar que

$$(\exists\, n_2 > n_1) \text{ tal que } (\|x_{n_2}\| > 2) \wedge (\|x_{n_2}\| > \|x_{n_1}\|);$$

si no fuera el caso se tendría que

$$(\forall\, n > n_1)\ \ (\|x_n\| \leq 2) \vee (\|x_n\| \leq \|x_{n_1}\|);$$

tomando $C = \text{máx}\{\text{máx}\{\|x_1\|, \ldots, \|x_{n_1}\|\}, 2\}$, esto implicaría que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\|x_n\| \leq C$, que significa que $(x_n)_n$ es acotada, lo que contradice la hipótesis. Procediendo por inducción se puede llegar a probar que para todo $k \in \mathbb{N}$

$$(\exists\, n_k > n_{k-1}) \text{ tal que } (\|x_{n_k}\| > k) \wedge (\|x_{n_k}\| > \left\|x_{n_{k-1}}\right\|);$$

proposición que genera la subsucesión deseada, pues al ser creciente y no acotada, claramente diverge al infinito.

Lema 7.1.2. *Sean $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$ dos sucesiones en un espacio de Banach tales que $\|x_n\| + \|y_n\| \to +\infty$. Entonces al menos una de las dos sucesiones posee una subsucesión que diverge al infinito.*

Demostración. Supóngase que $(y_n)_n$ no posee una subsucesión divergente al infinito. Es preciso mostrar que obligatoriamente (x_n) la posee. Por el recíproco de lema anterior se sabe que y_n es acotada, es decir existe $C > 0$ tal que para todo $n \in N$ se tiene que $\|y_n\| \leq C$. Lo que se va a mostrar es que x_n diverge al infinito, obteniéndose el resultado pues toda sucesión es subsucesión de si misma. Para ello, sea $K > 0$. Como $K + C > 0$, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq M$, $\|x_n\| + \|y_n\| > K + C$. Tomando $N = M$, se tiene que para todo $n \geq N$,

$$\|x_n\| > K + C - \|y_n\| > K + C - C = K.$$

Es decir $\|x_n\| \to +\infty$. □

El siguiente lema trabaja con conjuntos acotados, concepto válido únicamente en espacios métricos.

Lema 7.1.3. *Sea $(A_n)_n$ una sucesión de conjuntos acotados tales que*

$$(\forall\, C > 0) \;\; (\exists\, j \in \mathbb{N}) \text{ tal que } \; diam(A_j) > C.$$

Entonces existe una subsucesión $(A_{n_k})_k$ tal que

$$\lim_{k \to +\infty} diam(A_{n_k}) = +\infty, \tag{7.1}$$

dónde

$$diam(A_n) = \sup_{x,y \in A_n} \|x - y\|,$$

es el diámetro de A_n.

Demostración. Como $1 > 0$ entonces existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{diam}(A_{n_1}) > 1$; tómese el más pequeño n_1 que cumple esta propiedad. Ahora, para el siguiente término de la subsucesión se precisa probar que

$$\exists\, n_2 > n_1 \text{ tal que } \operatorname{diam}(A_{n_2}) > 2 \ \ \wedge \ \ \operatorname{diam}(A_{n_2}) > \operatorname{diam}(A_{n_1}).$$

Si no fuera el caso se tendría que

$$\forall\, n > n_1, \ \ \operatorname{diam}(A_n) \leq 2 \ \ \vee \ \ \operatorname{diam}(A_{n_1}) \leq \operatorname{diam}(A_{n_1}).$$

Tomando $C = \text{máx}\{\text{máx}\{\operatorname{diam}(A_1), \ldots, \operatorname{diam}(A_{n_1})\}, 2\}$ se tendría que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{diam}(A_n) \leq C$, que es exactamente la negación de la hipótesis y una contradicción que brinda la conjetura deseada. Procediendo por inducción se llega a que para todo $k \in \mathbb{N}$

$$\exists\, n_k > n_{k-1} \text{ tal que } \operatorname{diam}(A_{n_k}) > k \ \ \wedge \operatorname{diam}(A_{n_k}) > \operatorname{diam}(A_{n_{k-1}});$$

proposición que genera la subsucesión deseada que claramente cumple (7.1). □

Se procede a demostrar el teorema de Courant.

Teorema 7.1.1 (Teorema de Paso de Montaña en dimensión finita)**.** *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ un funcional continuamente diferenciable (C^1) y coercivo. Si f tiene dos mínimos locales estrictos x_1 y x_2, entonces tiene un tercer punto crítico x_3 tal que*

$$f(x_3) > \text{máx}\{f(x_1), f(x_2)\}.$$

Demostración. Sea

$$\Gamma = \{\Sigma \in X \ \mid \ \Sigma \text{ es compacto y conexo con } x_1, x_2 \in \Sigma\}.$$

Al ser $\mathbb{R}^n$ compactamente conexo, Γ es no vacío. Se define

$$\begin{aligned} \phi : \Gamma &\to \mathbb{R} \\ A &\mapsto \sup_{x\in A} f(x) = \max_{x\in A} f(x), \end{aligned}$$

Claramente $\phi(A) \geq \max\{f(x_1), f(x_2)\}$ para todo $A \in \Gamma$ pero, como tanto x_1 y x_2 son mínimos locales estrictos, entonces

$$\phi(A) > \max\{f(x_1), f(x_2)\}.$$

Esto implica que

$$c = \inf_{A\in\Gamma} \phi(A) = \inf_{A\in\Gamma} \max_{x\in A} f(x),$$

existe y por tanto se puede encontrar la sucesión *minimizante* $\{A_i\}_i$ de conjuntos en Γ tal que

$$\begin{cases} \phi(A_1) \geq \phi(A_2) \geq \phi(A_3) \geq \cdots \\ \phi(A_i) \to c. \end{cases}$$

Se sabe que para todo $i \in \mathbb{N}$, A_i es en un conjunto compacto, conexo y tal que $x_1, x_2 \in A_i$; así dado cualquier $n \in \mathbb{N}$, $\bigcap_{i\geq n} A_i \neq \varnothing$, y por lo tanto $\bigcup_{i\geq n} A_i$ es conexo; además, como la clausura de un conjunto conexo sigue siendo conexa, $\overline{\bigcup_{i\geq n} A_i}$ es conexo, y directamente se sabe que es también cerrado. El objetivo es mostrar que también es acotado y por tanto compacto (por encontrarse en dimensión finita). El hecho de que cada A_i sea acotado no implica necesariamente que la unión éstos lo sea, sin embargo una condición necesaria y suficiente es que la cota de los conjuntos sea uniforme es decir que

$$(\exists\, C>0)\ \ (\forall\, i\in\mathbb{N})\ \text{tal que}\ \ \operatorname{diam}(A_i)\leq C.$$

Por contradicción, supóngase que

$$(\forall\, C>0)\ \ (\exists\, j\in\mathbb{N})\ \text{tal que}\ \ \operatorname{diam}(A_j)>C;$$

entonces, gracias al Lema 7.1.3 se sabe que existe una subsucesión $(A_{n_k})_k$ tal que

$$\lim_{k\to+\infty}\operatorname{diam}(A_{n_k})=+\infty. \tag{7.2}$$

Ahora, es preciso recordar que para todo conjunto compacto A existen $a,b\in A$ tales que $\operatorname{diam}(A)=\|a-b\|$. Como A_{n_k} es compacto, entonces existen $x_{n_k},y_{n_k}\in A_{n_k}$ tales que $\operatorname{diam}(A_{n_k})=\|x_{n_k}-y_{n_k}\|$, y por tanto

$$\|x_{n_k}-y_{n_k}\|\to+\infty\ \text{cuando}\ k\to+\infty.$$

Gracias a la desigualdad triangular, esto implica que

$$\|x_{n_k}\|+\|y_{n_k}\|\to+\infty\ \text{cuando}\ k\to+\infty,$$

con lo cual al menos uno de los dos sumandos debería tener una subsucesión divergente al infinito también. Sin pérdida de generalidad asúmase que es el primero, y denótese a esa subsucesión con el mismo nombre $(x_{n_k})_k$; luego:

$$\|x_{n_k}\|\to+\infty\ \text{cuando}\ k\to+\infty.$$

Por la coercividad de f, esto implica que

$$f(x_{n_k})\to+\infty\ \text{cuando}\ k\to+\infty;$$

sin embargo, como $x_{n_k} \in A_{n_k}$, se tiene que

$$f(x_{n_k}) \leq \limsup_{k \to +\infty} f(x_{n_k}) \leq \limsup_{k \to +\infty} \phi(A_{n_k}) \leq c;$$

lo que significa que $(f(x_{n_k}))_k$ es acotada, siendo imposible que $f(x_{n_k}) \to +\infty$. Esta contradicción deja como conclusión que los conjuntos A_n son uniformemente acotados y por tanto $\bigcup\limits_{i \geq n} A_i$ es acotado. Su clausura lo sigue siendo y así, cuando $B_n = \overline{\bigcup\limits_{i \geq n} A_i}$, la familia $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una familia decreciente de conjuntos compactos y conexos; condición suficiente para que su intersección numerable

$$B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\bigcup_{i \geq n} A_i}$$

sea compacta y conexa. Como por construcción $x_1, x_2 \in B$ se tiene que $B \in \Gamma$. De ésta forma

$$\phi(B) \geq \inf_{\Sigma \in \Gamma} \phi(\Sigma) = c.$$

Hasta aquí se ha hecho uso de la propiedad de coercitividad de f y de las características de $\mathbb{R}^n$ para determinar que $B \in \Gamma$, a diferencia de la demostración del TPM topológico donde es la propiedad de crecimiento al infinito la que aporta esta conclusión. La siguiente parte, en donde se busca probar que $\phi(B) \leq c$, es exactamente igual a la de aquella demostración, y se invita al lector a revisarla (Teorema 5.2.2). Una vez que se tiene $\phi(B) = c$, se ha encontrado un conjunto B en Γ para el cual se alcanza el ínfimo de ϕ sobre Γ. Con ello se puede afirmar que

$$c > \max\{f(x_1), f(x_2)\},$$

y definir el conjunto

$$\mathscr{M} = \left\{ x \in B \;\middle|\; f(x) = \phi(B) = \max_B f = c \right\}.$$

El objetivo es probar que existe algún punto x_3 en $\mathscr{M}$ tal que $f'(x_3) = 0$. Por contradicción supóngase que para todo $x \in \mathscr{M}$ se tiene que $f'(x) = \nabla f(x) \neq 0$. En primer lugar hay que tener en cuenta que $\mathscr{M}$ es compacto; para ver esto sea $(x_n)_n$ una sucesión cualesquiera en $\mathscr{M}$; luego, para todo $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in B$, que es compacto, garantizando que existen una subsucesión $(x_{n_k})_k$ de $(x_n)_n$ y $x \in B$ tales que $x_{n_k} \to x$. La continuidad de f garantiza que $f(x_{n_k}) \to f(x)$, pero como $(f(x_{n_k}))_k$ es constante, por unicidad del límite $f(x) = c$ y así $x \in \mathscr{M}$. La compacidad de este conjunto aunada a la continuidad de $\|\nabla f\|$ garantizan la existencia de $\delta > 0$ tal que para todo $x \in \mathscr{M}$, $\|\nabla f(x)\| \geq \delta > \delta/2$. Por continuidad existe $\epsilon > 0$ tal que el conjunto

$$\mathscr{M}_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists y \in \mathscr{M} \text{ tal que } |x - y| < \epsilon\}$$

es una vecindad de $\mathscr{M}$ en la cual $\|\nabla f(x)\| > \delta/2$. Como x_1 y x_2 son mínimos locales estrictos en particular son puntos críticos y por tanto no pueden pertenecer a $\mathscr{M}_\epsilon$. Como $\mathscr{M}$ es compacto, $\mathscr{M}_\epsilon$ es abierto y acotado y $\mathscr{M} \subset \mathscr{M}\epsilon$, entonces un teorema básico de existencia de funciones test garantiza la existencia de $\rho \in \mathscr{D}(\mathscr{M}_\epsilon)$ tal que:

$$\begin{cases} 0 \leq \rho \leq 1, \\ \operatorname{supp}(\rho) \subset \mathscr{M}_\epsilon, \\ \rho = 1 \text{ en } \mathscr{M}. \end{cases}$$

Se deifine la siguiente función:

$$\eta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \tag{7.3}$$

$$(x,t) \mapsto x - t\rho(x)\nabla f(x), \tag{7.4}$$

que claramente es diferenciable con respecto a ambas variables. Calculando la derivada con respecto a t de $f \circ \eta$:

$$\frac{d}{dt} f(\eta(x,t)) = -(\nabla f(\eta(x,t)|\eta'(x,t)). \tag{7.5}$$

Luego, para $x \in \operatorname{supp}(\rho)$ se tiene

$$\frac{d}{dt} f(\eta(x,t))|_{t=0} = -(\nabla f(x)|\rho(x)\nabla f(x)) \tag{7.6}$$

$$= -\rho(x) \left\| \nabla f(x) \right\|^2 \tag{7.7}$$

$$\leq -\rho(x)\frac{\delta^2}{4}. \tag{7.8}$$

La continuidad de $\dfrac{d}{dt} f(\eta(\cdot,t))$ en t garantiza la existencia de un $T > 0$ tal que para todo $t \in [\,0, T\,]$

$$\frac{d}{dt} f(\eta(x,t)) \leq -\rho(x)\frac{\delta^2}{4}.$$

Se construye el conjunto

$$B_T = \eta(B,T) = \{\eta(x,T); x \in B\}.$$

Este conjunto es compacto y conexo automáticamente porque B lo es y η es continua. Además como $x_1, x_2 \notin \mathscr{M}$ entonces $x_1, x_2 \notin \operatorname{supp}(\rho)$, con lo cual $\rho(x_1) = \rho(x_2) = 0$ obteniéndose que $\eta(x_1,T) = x_1$ y $\eta(x_2,T) = x_2$, que significa que $x_1, x_2 \in B_T$; luego,

$B_T \in \Gamma$. Para todo $\eta(x,T) \in B_T$,

$$f(\eta(x,T)) = f(x) + \int_0^T \frac{d}{dt} f(\eta(x,t))\,dt \tag{7.9}$$

$$\leq f(x) - \frac{T}{2}\rho(x)\,\|\nabla f(x)\|^2\,; \tag{7.10}$$

con lo cual, por un lado, si $x \notin \mathscr{M}$ y por ende $\eta(x,T) \notin M$, $f(\eta(x,T)) < c$; y por otro, si $x \in \mathscr{M}$, $f(\eta(x,T)) \leq c - \frac{T}{2}\delta^2 < c$. En cualquier caso

$$\max_{x \in B_T} f(x) < c,$$

lo cual contradice la definición de M, al ser $B_T \in \Gamma$. □

Puede parecer que el teorema precedente utiliza en su primera etapa el método de demostración del TPM topológico en cuanto a que hace uso de la misma familia Γ y busca encontrar que el nivel de minimax de esa familia es alcanzado; en realidad es el TPM topológico el que se basa en el TPM en dimensión finita, pues una de las motivaciones de Katriel [17] es generalizarlo. La diferencia está en que en el presente caso es la coercividad la que directamente brinda esto mientras que en el caso topológico, es el crecimiento al infinito quien lo construye (más adelante se verá la relación entre estas dos características). Por otro lado una vez conseguido aquello, no se vuelve a usar la coercividad, mas si toda la estructura diferencial que tiene f, para asegurar la existencia de una deformación η que brinde posibilidades, tal como en el TPM clásico; se puede sospechar que el TPM en dimensión finita fue una semilla para los posteriores resultados de tal tipo.

Es importante recalcar que en el trabajo original de Courant la deformación es diferente a la aquí expuesta, pero en opinión de quien escribe demasiado intrincada y de entendimiento poco intuitivo; es por ello que se ha elegido utilizar la que se propone Struwe [29]. En resumidas cuentas podría decirse que el TPM en dimensión finita representa una combinación de los TPM clásico (en espacios de Banach) y topológico (en una amplia gama de espacios topológicos), aunque en realidad, como se verá, no es otra cosa que un corolario de ambos. Por último es preciso expresar lo interesantísimo que resulta el hecho de que la existencia del punto crítico (o punto de mínimo o punto de PM) en cada uno de los tres teoremas estudiados, se deduzca por contradicción, siendo esta igual en todos los casos: encontrar un conjunto perteneciente a la clase de minimax en el cual el máximo valor que alcanza el funcional sea menor que el nivel de minimax, es decir el menor valor que en teoría debería alcanzar cada máximo de la función en cada conjunto de la clase.

A continuación se demuestra el Teorema de Paso de Montaña en dimensión finita usando el TPM clásico.

Teorema 7.1.1 vía TPM clásico

Demostración. Sin pérdida de generalidad asúmase que $f(x_1) \geq f(x_2)$. Para poder aplicar el TPM clásico, es necesario definir el siguiente funcional:

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto g(x) = f(x + x_1) - f(x_1). \end{aligned}$$

Por construcción, $g(0) = 0$. Es preciso mostrar que 0 y $x_2 - x_1$ son mínimos locales de g. Para el caso de 0, se debe hallar $\delta_1 > 0$ tal que para todo $x \in B_{\delta_1}(0) \backslash \{0\}$, $g(x) > g(0)$. Como x_1 es mínimo local de f, entonces existe δ tal que si $x \in B_\delta(x_1) \backslash \{x_1\}$ entonces $f(x) > f(x_1)$. Si se toma $\delta_1 = \delta$, entonces, sea $x \in B_{\delta_1}(0) \backslash \{0\}$, o sea $\|x\| < \delta_1$, es decir $\|x + x_1 - x_1\| < \delta$, que implica, al ser $x + x_1 \neq x_1$, $f(x + x_1) > f(x_1)$. Con ello

$$g(x) = f(x + x_1) - f(x_1) > 0 = g(0).$$

Ahora, para el caso de $x_2 - x_1$ es preciso mostrar que existe $\delta_2 > 0$ tal que para todo $x \in B_{\delta_2}(x_2 - x_1) \backslash \{x_2 - x_1\}$, $g(x) > g(x_2 - x_1)$. Como x_2 es mínimo local de f, entonces existe δ_0 tal que si $x \in B_{\delta_0}(x_2) \backslash \{x_2\}$ entonces $f(x) > f(x_2)$. Si se toma $\delta_2 = \delta_0$, entonces, sea $x \in B_{\delta_2}(x_2 - x_1) \backslash \{x_2 - x_1\}$, es decir $\|x - (x_2 - x_1)\| < \delta_2$, o sea $\|x + x_1 - x_2\| < \delta_0$, que implica al ser $x + x_1 \neq x_2$, $f(x + x_1) > f(x_2)$. Con ello

$$g(x) = f(x + x_1) - f(x_1) > f(x_2) - f(x_1) = g(x_2 - x_1).$$

Como para todo $0 < \tilde{\delta} < \delta_1$, si $\|x\| = \tilde{\delta}$, $g(x) = \alpha > 0$ y como $g(x_2 - x_1) = f(x_2) - f(x_1) \leq 0$, en el contexto de la geometría de paso de montaña, basta tomar como ρ a cualquier $\tilde{\delta}$ positivo lo suficientemente pequeño para ser menor que δ_1 y $\|x_2 - x_1\|$ al mismo tiempo, cosa que es posible ya que $\|x_2 - x_1\| > 0$. Luego, con $v = x_2 - x_1$, se tiene que el funcional g cumple con las proposiciones de la geometría de paso de montaña del TPM clásico. Ahora se necesita probar que g satisface (PS). Para ello, como ya se verá, basta evidenciar que g es coerciva. En primer lugar, se verifica que $h(x) = f(x + x_1)$ lo es, es decir

$$(\forall\, M > 0)\ \ (\exists\, R > 0) \text{ tal que } \forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ \ \|x\| > R \Rightarrow h(x) > M.$$

Sea $M > 0$. Si $x_1 = 0$ no habría nada que probar, así que se asume $x_1 \neq 0$, con lo cual $\|-x_1\| > 0$. Cómo f es coerciva, existe $R_1 > 0$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|x\| > R_1$, se tiene que $f(x) > M$. Sea $R = R_1 + \|-x_1\|$ y tómese $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|x\| > R$. Así,

$$\|x + x_1\| = \|x - (-x_1)\| \geq \|x\| - \|-x_1\| > R_1,$$

con lo cual $f(x + x_1) = h(x) > M$.

Se necesita ahora que para todo $c \in \mathbb{R}$, $h(x) + c$ sea coerciva, es decir

$$(\forall\, M > 0)\ \ (\exists\, R > 0) \text{ tal que } \forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ \ \|x\| > R \Rightarrow h(x) + c > M.$$

Sea $M > 0$. Si $c < M$, entonces $M - c > 0$, y como h es coerciva existe $R_1 > 0$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|x\| > R_1$ se tiene que $h(x) > M - c$, es decir $h(x) + c > M$; Basta tomar $R = R_1$. Si es que $c \geq M$, entonces $c > \dfrac{M}{2}$; se toma nuevamente $R = R_1$ y así, cuando $\|x\| > R$,

$$h(x) + c > h(x) + \frac{M}{2} > \frac{M}{2} + \frac{M}{2} = M.$$

De esta forma y tomando $c = -f(x_1)$, se tiene que $g(x)$ es una función coerciva. A continuación, uno de los más interesantes resultados de este trabajo: que la coercividad implica el cumplimiento de (PS) para un funcional en dimensión finita.

Sea $(x_n)_n$ una sucesión de Palais-Smale, es decir,

$$(g(x_n))_n \text{ es acotada } \text{ y } g'(x_n) \to 0.$$

En primer lugar, se puede mostrar que $(x_n)_n$ es acotada: en efecto si esto no fuera cierto y la sucesión fuera no acotada, por el Lema 7.1.1 se tendría la existencia de una subsucesión $(x_{n_k})_k$ convergente al infinito, es decir $\|x_{n_k}\| \to +\infty$ cuando $k \to +\infty$, lo que a su vez implicaría, gracias a la coercividad de g, que $g(x_{n_k}) \to +\infty$. Sin embargo esto contradice la acotación de $(g(x_{n_k}))_k$ que proviene de la acotación de $(g(x_n))_n$. En consecuencia $(x_n)_n$ debe ser acotada y al encontrarse en un espacio euclídeo de dimensión finita, poseer una subsucesión acotada, debido al Teorema de Bolzano-Weierstrass, obteniéndose (PS). Aplicando el TPM clásico se llega a la conclusión de que g posee un punto crítico, dígase x_0, tal que $g(x_0) > 0$. Claramente,

$$g'(x) = f'(x + x_1).$$

Como $g'(x_0) = 0$, es fácil probar que $x_3 = x_0 + x_1$ es un punto crítico de f, pues

$$f'(x_0 + x_1) = g'(x_0) = 0.$$

Además

$$f(x_3) = f(x_0 + x_1) = g(x_0) + f(x_1) > f(x_1),$$

por el hecho de que $g(x_0) > 0$. Esto completa la demostración. □

Ahora se demuestra el TPM en dimensión finita usando el TPM topológico

Teorema 7.1.1 vía TPM topológico

Demostración. $\mathbb{R}^n$ es un espacio topológico regular, localmente conexo y compactamente conexo. Es preciso mostrar que f es creciente al infinito dado que es coerciva.

Sea $x \in \mathbb{R}^n$; el objetivo es mostrar que existe $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto, tal que para todo $z \notin K$ se tiene $f(z) > f(x)$. Procediendo por contradicción se tiene la siguiente proposición:

$$\forall\, K \subset \mathbb{R}^n \text{ compacto, } \exists\, z \notin K \text{ tal que } f(z) \leq f(x).$$

Sea $\delta > 0$; en dimensión finita el conjunto $B = \overline{B_\delta(0)}$ es compacto, por lo cual existe $z \notin B$ tal que $f(z) \leq f(x)$. Como $z \notin B$ entonces $\|z\| > \delta$, y por lo tanto se ha probado que

$$(\forall \delta > 0)\ \ (\exists z_\delta \in \mathbb{R}^n) \text{ tal que } (\|z_\delta\| > \delta \wedge f(z_\delta) \leq f(x)).$$

Así, como $1 > 0$, existe $z_1 \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|z_1\| > 1$ y $f(z_1) \leq f(x)$. Se conjetura que existe $z_2 \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|z_2\| > 2$, $\|z_2\| \geq \|z_1\|$ y $f(z_2) \leq f(x)$. Para probar esto , por contradicción se asume que para todo $z \in \mathbb{R}^n$, $\|z\| \leq 2$ o $\|z\| < \|z_1\|$ o $f(z_2) > f(x)$. Como $2 > 0$, entonces existe $z_2 \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|z_2\| > 2$ y $f(z_2) \leq f(x)$; lo que implicaría que $\|z_2\| < \|z_1\|$; a su vez se tendría obligadamente que $\|z_1\| \leq 2$, brindando la contradicción $2 < \|z_2\| < \|z_1\| \leq 2$. Procediendo por inducción es posible encontrar la sucesión $(z_n)_n$ en $\mathbb{R}^n$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\|z_n\| > n$, $\|z_n\| \geq \|z_{n-1}\|$ y $f(z_n) \leq f(x)$. La sucesión de normas es creciente y no acotada y por lo tanto diverge a infinito ($\|z_n\| \to +\infty$). La coercividad de f implicaría que $f(z_n) \to +\infty$, cuestión que contradice que $f(z_n) < f(x) < +\infty$, para todo $n \in \mathbb{N}$. De esta forma se prueba que f es creciente al infinito, siendo vital que el espacio sea de dimensión finita.

Utilizando el Coroloario 6.1.1 del TPM topológico se asegura la existencia de un vector $x_3 \in \mathbb{R}^n$ que es un punto mínimo o punto global de paso de montaña con la propiedad que $f(x_3) > \max\{f(x_1), f(x_2)\}$. En caso de que fuera un punto mínimo es claro que se trata de un punto crítico. ¿Qué pasa en el caso de que sea un punto global de PM?. Guy Katriel [17], en el artículo en que por primera ves aparece el TPM topológico, demuestra en con argumentos topológico-diferenciales, lo siguiente.

Lema 7.1.4. *Si X es un espacio de Banach, $U \subset X$ es abierto, $f : U \to \mathbb{R}$ es C^1 y $x \in U$ es tal que $f'(x) \neq 0$, entonces existe una bola abierta $B \subset X$ con centro en 0, un difeomorfismo $H : B \to H(B) \in U$ con $H(0) = x$ y un funcional lineal L en X tal que $f(H(w)) = L(w) + f(x)$ para $w \in B$. De hecho se puede escoger $L = f'(x)$ y H tal que $H'(0) = I$, dónde I es la función identidad en X.*

Este lema muestra que cerca de un punto regular, es decir un punto que no es crítico, una función suave se ve topológicamente como una función lineal no trivial. Sin embargo, como las funciones lineales no poseen puntos de PM (aseveración encontrada en Katriel [17] también), entonces, se tiene que un punto regular no puede ser de PM. Por lo tanto todo punto de PM debe ser necesariamente un punto crítico.

Así se llega a la conclusión de que el TPM topológico implica el TPM en dimensión finita. $\square$

Es de sumo placer académico, al menos para quien escribe, poder llegar a un resultado en matemáticas a través de tres distintas metodologías, dos de las cuales son fundamentalmente de carácter teórico muy alejado: al usar el TPM clásico, se está usando la estructura diferencial de los espacios de Banach y, como se vio en su demostración ya hace unos cuántos capítulos, es imposible obviarla en la construcción de pseudo-gradientes y sobre todo deformaciones; por otro lado el TPM topológico sólo ocupa las definiciones más básicas de la topología general para concluir el resultado y sólo usa cuestiones diferenciales, al final para dar cuenta del punto de PM como un punto crítico. Más allá de éste momento, las respectivas demostraciones tienen poco que ver. Sin embargo, como se pudo apreciar, en estructura usan clases de minimax particularmente parecidas y el punto crítico o mínimo local o punto PM al que llegan termina siendo uno al nivel de minimax que, como ya se advirtió surge por contradicción, siendo ésta idéntica en ambos casos. La siguiente sección analiza con más profundidad estas similitudes y diferencias.

7.2. Elementos teóricos de la estructura de demostración de las distintas variantes del TPM

La presente sección tiene como objetivo trazar un paralelismo entre los aspectos teóricos de los enunciados y las demostraciones de las versiones clásica y topológica del Teorema de Paso de Montaña. A continuación se presenta una reescritura de los enunciados de ambas versiones con el fin de evidenciar las similitudes de su estructura en lo concerniente a las hipótesis de ambos.

Teorema (Teorema de Paso de Montaña Clásico). *Sea E un espacio de Banach e $I \in C^1(E)$ un funcional que satisface (PS) y tal que $I(0) = 0$. Supóngase que existen ρ y α números reales positivos tales que cumplen:*

1. *Si $\|u\| = \rho$ entonces $I(u) \geq \alpha$,*

2. *Existe $v \in E$ tal que $\|v\| > \rho$ e $I(v) \leq 0$.*

Entonces I posee al menos un punto crítico a un nivel $c \geq \alpha$.

Teorema (Teorema de Paso de Montaña Topológico). *Sea X un espacio topológico localmente conexo y compactamente conexo, $f \in C(X)$ una función continua y creciente al infinito. Supóngase que existen $x_1, x_2 \in X$ y $S \subset X$ tales que cumplen:*

1. *S separa x_1 y x_2,*

2. $\max\{f(x_1), f(x_2)\} < \inf_{x \in S} f(x) = p$.

Entonces f posee un mínimo local o un punto global de paso de montaña a un nivel $c \geq p$.

Tómese en cuenta las tres últimas hipótesis del caso clásico: que I es tal que $I(0) = 0$ y la existencia de ρ y α tales que satisfacen *1* y *2* (la geometría de paso de montaña). Como se vio en su demostración en el Capítulo 2, éstas hipótesis son las responsables de que la clase de minimax

$$\Gamma_1 = \{\gamma([0,1]) \mid \gamma : [0,1] \to E \text{ es función continua }, \gamma(0) = 0 \text{ y } \gamma(1) = v\},$$

cuyo nivel de minimax se denotará c_1, sea una familia $\alpha-$admisible; sin embargo si se toma la clase de minimax

$$\Gamma_2 = \{\Sigma \in E \mid \Sigma \text{ es compacto y conexo con } 0, v \in \Sigma\}$$

también se tiene dicha α-admisibilidad. En efecto, para todo $A \in \Gamma_2$, $\max_{u \in A} I(u) < +\infty$ (por compacidad) y por lo tanto, $c_2 \leq +\infty$. Como A es conexo y ya que la norma es una función continua y $\|0\| < \rho < \|v\|$, entonces existe $u_A \in A$ tal que $\|u\| = \rho$. Así $I(u_A) \geq \alpha$, y por tanto $\max_{u \in A} I(u) \geq \alpha$. En definitiva

$$c_2 \geq \alpha > 0 > -\infty.$$

Queda por demostrar que Γ_2 es invariante con respecto a todas las deformaciones que fijan $A_{c,\bar{\epsilon}}$ para algún $\bar{\epsilon} < \alpha$.

Si se toma $\bar{\epsilon} = \alpha/2$, entonces $c - \bar{\epsilon} > 0$. Con ello se tiene

$$I(0) = 0 < c - \bar{\epsilon} \text{ e } I(v) \leq 0 < c - \bar{\epsilon}, \tag{7.11}$$

condiciones que aseguran que $0, v \in A_{c,\bar{\epsilon}}$. Sea η cualquier deformación que fija $A_{c,\bar{\epsilon}}$ y sea $K \in \Gamma_2$. Por continuidad $\eta(t, K)$ es compacto y conexo para todo $t > 0$. Por otro lado, como $0, v \in \eta(t, K)$ ya que $\eta(t, 0) = 0$ y $\eta(t, v) = v$, se tiene que Γ_2 es invariante con respecto η, concluyendo el resultado. En cuanto a la relación entre c_1 y c_2, como $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$ entonces $c_1 \geq c_2$. Rabinowitz [25] va más allá y muestra que $c_1 = c_2$. En cualquier caso, lo más importante en este punto es el hecho de que la clase de minimax para el caso clásico puede ser análoga a la del caso topológico, es decir,

$$\Gamma = \{\Sigma \in X \mid \Sigma \text{ es compacto y conexo con } x_1, x_2 \in \Sigma\},$$

cuya admisibilidad topológica se obtiene gracias a las tres últimas hipótesis de dicho caso: que f es creciente al infinito y que existen $x_1, x_2 \in X$ y $S \subset X$ que satisfacen *1* y *2* (del TPM topológico, evidentemente). Una vez obtenidas estas admisibilidades en su respectivo contexto son los principios de minimax de cada caso los que garantizan en realidad la existencia de los puntos críticos (o puntos de mínimo o puntos de PM); a continuación se presenta estos principios reescritos de manera que se resaltan sus similitudes.

Teorema (Principio de Minimax Clásico)**.** *Sean E un espacio de Banach e $I \in C^1(E)$ un funcional que satisface (PS). Si existen $\alpha > 0$ y $v \in E$ tales que la familia de conjuntos*

$$\Gamma = \{\Sigma \in E \mid \Sigma \textit{ es compacto y conexo con } 0, v \in \Sigma\}$$

es α-admisible para I, entonces I posee un punto crítico al nivel

$$c = \inf_{\Sigma \in \Gamma} \max_{u \in \Sigma} I(u).$$

Teorema (Principio de Minimax Topológico)**.** *Sea X un espacio topológico localmente conexo, compactamente conexo y localmente compacto y $f \in C(X)$ un funcional. Si existen $x_1, x_2 \in X$ tales que la familia de conjuntos*

$$\Gamma = \{\Sigma \in X \mid \Sigma \textit{ es compacto y conexo con } x_1, x_2 \in \Sigma\},$$

es topológicamente admisible con respecto a f, entonces f posee un mínimo local o un punto global de paso de montaña, al nivel

$$c = \inf_{\Sigma \in \Gamma} \max_{u \in \Sigma} f(u).$$

Estos principios de minimax evidencian que en ambas versiones del TPM sus hipótesis pueden ser separadas en dos grupos: hipótesis de estructura del espacio e hipótesis geométricas del funcional. Éstas últimas hacen referencia aquellas 'tres últimas hipótesis' que sirven para que las clases de minimax sean admisibles en su contexto. Por otro lado las hipótesis de estructura del espacio son las que determinan que exista el punto crítico (o mínimo local o punto de PM) al actuar sobre estas clases admisibles; en el teorema clásico, la estructura está dada por el hecho de que el espacio sea de Banach y que $I \in C^1(\Omega)$ satisfaga (PS). En el caso topológico, la estructura se encuentra dada por las propiedades de conexidad local y conexidad compacta (así como la implícita compacidad local proveniente del crecimiento al infinito de f) y el hecho de que $f \in C(X)$. No existe una relación evidente entre las hipótesis de estructura de ambos teoremas aunque puede verse una ligera relación informal entre satisfacer (PS) y la compacidad local y conexidad compacta, en el sentido de que satisfacer (PS) hace referencia cierto tipo de compacidad, puesto que determina que cierto tipo de sucesiones tiene subsucesiones convergentes. Por el lado de las hipótesis geométricas si existe una relación interesante: sin contar con la hipótesis de crecimiento al infinito en el caso topológico, las hipótesis geométricas de ambos teoremas pueden implicarse si lo que se asume es la existencia de dos puntos de mínimo local en 0 y v para el caso clásico (por lo mostrado en la demostración del TPM en dimensión finita vía TPM clásico) y en x_1 y x_2 para el topológico (por los razonamientos del Corolario 6.1.1). Más aún, las hipótesis geométricas clásicas si implican las hipótesis geométricas topológicas (una vez más sin tomar en cuenta el crecimiento al infinito) pues $S = \partial\overline{B_\rho(0)}$ separa a 0 y v y

$$p = \inf_{u \in S} I(u) \geq \alpha \geq \max\{I(0), I(v)\}.$$

Con respecto a los puntos cuya existencia garantizan los teoremas, a parte de poder mostrar que se alcanzan a un nivel en una clase de minimax muy parecida, existe una relación muy interesante: por un lado, y como ya se vio, todo punto de paso de montaña en un espacio dotado de estructura diferencial es un punto crítico (y obviamente todo punto de mínimo lo es), pero por si esto fuera poco el punto crítico cuya existencia asegura el TPM clásico es un punto de mínimo local o un punto de paso de montaña, como se puede apreciar demostrado en el Capítulo 10 de Struwe [29]. Esto implica que ambos teoremas brindan la existencia de la misma clase de punto: un punto de mínimo o un punto de paso de montaña.

Lo más interesante sin embargo es, como ya se ha mencionado antes, que la demostración de estos principios se haga por el método indirecto de reducción al absurdo, siendo la contradicción exactamente la misma: encontrar un conjunto en la clase de minimax que contradice la definición del nivel de minimax: en el caso clásico esto es gracias al Teorema de Deformación y en el topológico se debe a propiedades topológias exclusivamente, como se advierte en los Principios de Minimax, que aunque en su primera condición buscan algo parecido (que el nivel de minimax se alcance en $\mathbb{R}$), en la segunda difieren totalmente al estar el clásico vinculado a trabajar con deformaciones y el topológico construido para trabajar con estructuras topológicas.

En base a esta estructura análoga de los teoremas uno podría investigar si hay contextos en los cuáles resultan relacionadas las dos versiones en el sentido lógico, es decir responder las preguntas ¿implica el TPM clásico al TPM topológico? o ¿implica el TPM topológico al TPM clásico?

7.3. Relaciones lógicas

Para poder iniciar la comparación de hipótesis de las dos versiones del teorema, que permitirían responder los cuestionamientos del final de la sección anterior, en primer lugar es necesario poner a éstas en el mismo contexto estructural, es decir, hacer del espacio topológico X un espacio de Banach E, e introducir la hipótesis de diferenciabilidad continua en la función f. Una vez allí salta a la vista la incompatibilidad de las hipótesis debido al siguiente resultado atribuido usualmente a Augustin Louis Cauchy y cuya demostración se puede encontrar en la Sección 15 de Köthe [18].

Teorema 7.3.1. *Sea X un espacio vectorial topológico. X es localmente compacto si y solo si X es de dimensión finita.*

La razón por la cual este resultado es un impedimento en el afán de conectar los teoremas se detalla a continuación.

En primer lugar si se quiere utilizar el TPM clásico para mostrar el topológico, se debe buscar que las hipótesis de éste último impliquen las del primero; sin embargo, una de aquellas es que la función continua f es creciente al infinito, lo que a su vez implica que el espacio es de dimensión finita, cuestión no contradictoria pero que reduce notablemente el marco referencial al cual se pretende llevar la comparación.

Si por otro lado se desea utilizar el TPM topológico para mostrar el clásico, al momento de asumir que el funcional I satisface (PS) y buscar que sea además creciente al infinito, se tiene una contradicción puesto que si lo fuese, el espacio debería ser de dimensión finita, cuestión que no necesariamente es verdad, entre otras cosas porque si existen funcionales que satisfacen (PS) definidos en espacios de dimensión infinita como aquel que se expuso en el Capítulo 4 (definido en $H_0^1(\Omega)$).

Podría pensarse que si en la demostración del TPM topológico se puede utilizar otro tipo de función (cuya existencia no implique la compacidad local del espacio) entonces tal vez se pueda tener lo antes buscado, ya que la función creciente al infinito al parecer sirve únicamente para encontrar el conjunto B en el que se alcanza el nivel de minimax c (Teorema 5.2.2); sin embargo no sólo es en ese momento es necesaria la hipótesis, pues de hecho la compacidad local es utilizada al momento en que se hace uso del Lema 5.2.3 para probar que el conjunto C (Teorema 5.2.1) es compactamente conexo. Así que, por más que la definición de crecimiento al infinito cambiase, llega un momento en el que parece insalvable el problema de utilizar la compacidad local del espacio.

¿Qué pasaría sin embargo si para comparar las hipótesis se restringen los teoremas al caso en dimensión finita, en dónde es irrelevante el teorema de Cauchy?

7.3.1. ¿El TPM clásico implica al TPM topológico?

Con la salvedad de estar trabajando en $X = E = \mathbb{R}^n$, donde la conexidad local y compacta así como la compacidad local se tienen por descontado, si se verifican las hipótesis del TPM topológico, el objetivo es ver hasta qué punto las hipótesis del TPM clásico se cumplen, para así poder aplicarlo y al obtener un punto crítico que es un mínimo o punto de PM, demostrar el TPM topológico. Sin embargo, ese procedimiento no es posible en general, como muestra el siguiente contraejemplo. Considérese la función

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto -e^{-(x+2)^2/2} - e^{-(x-2)^2/8} \end{aligned}$$

El primer punto de mínimo local de esta función es $x_1 \approx -1{,}99452$ con imagen $y_1 \approx -1{,}00034$. Con lo cual, la traslación

$$f(x) = g(x + x_1) - y_1$$

posee un punto de mínimo en 0 y $f(0) = 0$. Además $\sup\limits_{\mathbb{R}} f = -y_1$.

Como se muestra en la Figura 7.1, f posee dos mínimos locales, lo que implica, por los razonamientos del Corolario 6.1.1, que satisface las hipótesis geométricas del

TPM topológico, porque además es creciente al infinito; para ver esto, considérese que si $x \in [-6, 6]$ si se toma $K = [-6, 6]$, entonces para cualquier $z \notin K$ se tiene que $f(z) > f(x)$. Si $x < -6$ o $x > 6$ basta tomar $K = [x, -x]$ o $K = [-x, x]$ respectivamente para obtener el resultado. Así, esta función satisface todos lo requerimientos del TPM topológico y de hecho también las hipótesis geométricas del TPM clásico (ya que posee un mínimo estricto en 0 y $f(0) = 0$ y tiene otro punto de mínimo con imagen menor a cero). Por otro lado es claro que el funcional es continuamente diferenciable. Sin embargo f no satisface (PS) como se muestra a continuación. La sucesión $(x_k)_k$ definida por $x_k = k$ es de Palais-Smale para f, pues $(f(x_k))_k$ es acotada (de hecho $\lim\limits_{k\to+\infty} f(x_k) = -y_1$) y además $\lim\limits_{k\to+\infty} f'(x_k) = 0$ (para ver esto sólo hace falta darse cuenta que f no es mas que una función gaussiana bimodal invertida y trasladada); sin embargo, dicha sucesión no posee una sucesión convergente pues $x_k \to +\infty$. Así que el cumplimiento de las hipótesis del Teorema topológico no necesariamente implica el cumplimiento de las hipótesis del TPM clásico.

7.3.2. ¿El TPM topológico implica al TPM clásico?

Suena razonable y tentadora la posibilidad de probar que el TPM topológico es una generalización del TPM clásico para espacios de Banach. Nuevamente, en el caso finito dimensional, donde todas las condiciones de espacio topológico (conexidad local, compacidad local, y conexidad compacta) se cumplen, si se suponen satisfechas todas las hipótesis del TPM clásico, ¿hasta qué punto se cumplen las hipótesis

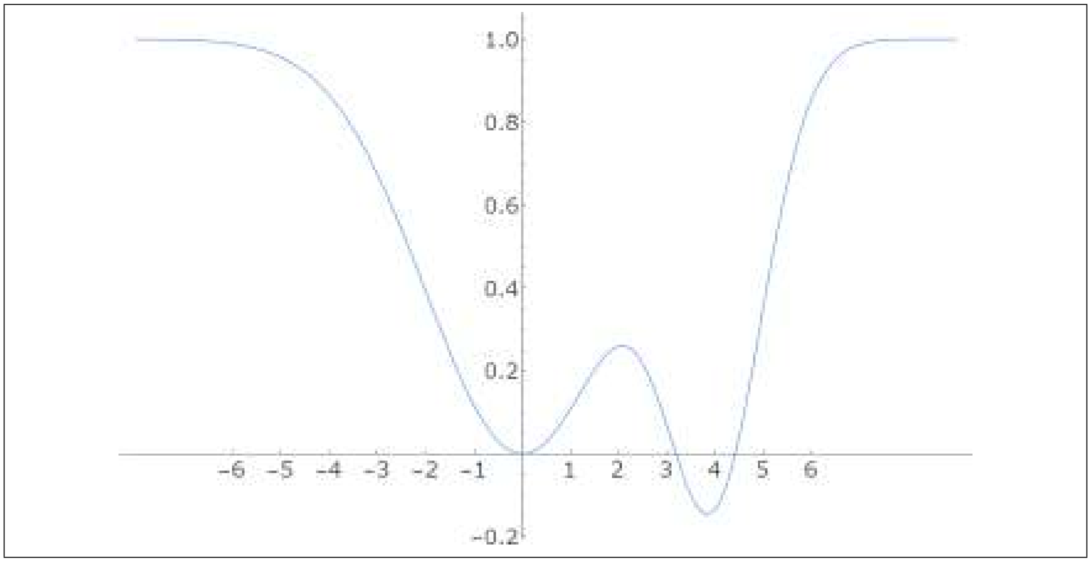

Figura 7.1: (realizada con la ayuda de Wolfram Mathematica) Gráfica de la función f de fórmula $f(x) = -e^{-(x+x_1+2)^2/2} - e^{-(x+x_1-2)^2/8} - y_1$, donde se aprecia como ésta cumple con las hipótesis del TPM topológico.

del TPM topológico con el fin de aplicarlo? Para empezar, es interesante que las hipótesis geométricas clásicas si impliquen las hipótesis geométricas topológicas pues $S = \partial\overline{B_\rho(0)}$ separa a 0 y v y $p = \inf\limits_{u\in S} I(u) \geq \alpha \geq \max\{I(0), I(v)\}$. Sin embargo, la función

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 1 - \cos(x),$$

que al tener un mínimo en 0 y otro en 2π satisface las hipótesis geométricas (pues $f(0) = 0$), es una función continuamente diferenciable que satisface (PS) pero no es creciente al infinito. Para verificar que satisface (PS), supóngase que $(x_k)_k \subset \mathbb{R}$ es una sucesión de Palais-Smale para f, es decir, las sucesión $(f_k)_k$ es acotada y la sucesión $(f'(x_k))_k$ converge a cero. Esto último implica que

$$\sin(x_k) \to 0,$$

que por continuidad implica que

$$x_k \to \arcsin(0) = 0,$$

brindando la convergencia de la arbitraria sucesión $(x_k)_k$, que prueba lo buscado.

Para probar que f no es creciente al infinito basta probar que existe algún número real x tal que para todo $K \subset \mathbb{R}$ compacto exista un número real $z \notin K$ tal que $f(z) \leq f(x)$. Sea $x = \pi$ y sea un compacto $K \subset \mathbb{R}$ arbitrario pero fijo. Como K es compacto, entonces es acotado, es decir, existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $y \leq C$ para todo $y \in K$. Ahora, gracias a la propiedad arquimediana de los números reales, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n\pi > C$, con lo cual $n\pi \notin K$; si se toma $z = n\pi$, entonces

$$f(z) = f(n\pi) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par,} \\ \\ 2 & \text{si } n \text{ es impar;} \end{cases}$$

en cualquier caso,

$$f(z) \leq 2 = f(\pi) = f(x),$$

probando que f no es creciente al infito, hecho que se puede corroborar también al evidenciar que f es oscilante. Se presenta su gráfica en la Figura 7.2.

Aunque hubiera resultado de lo más interesante que el teorema topológico fuese una generalización del teorema clásico (aunque sea en un contexto reducido), el hecho de que no lo sea no resulta nada decepcionante porque implica que el TPM en dimensión finita puede ser demostrado a través de dos métodos que son realmente diferentes en fondo: dos maneras independientes de llegar al mismo resultado, que aunque guardan relación estrecha en estructura superficial, representan esquemas de conocimiento de dos ramas de la matemática relativamente alejadas, que utilizan sus propios conceptos y definiciones de manera idónea para lograr sus propios objetivos (aplicaciones de uno y otro) y que, *anecdóticamente*, pueden demostrar un teorema de otro ramo.

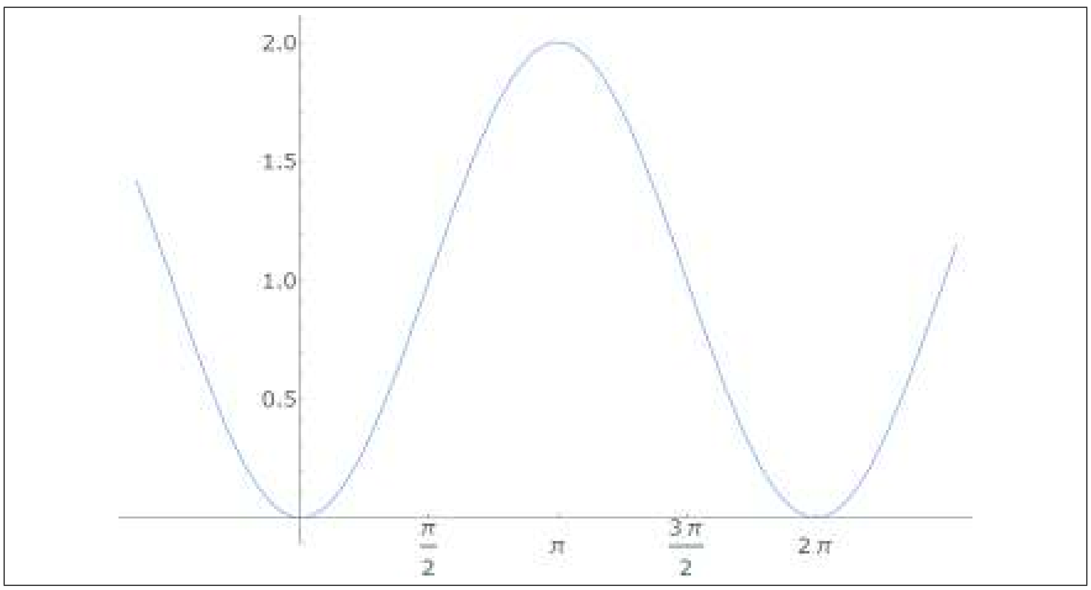

Figura 7.2: (realizada con la ayuda de Wolfram Mathematica) Gráfica de la función f de fórmula $f(x) = 1 - \cos(x)$, donde se aprecia como ésta cumple con las hipótesis geométricas del TPM clásico.

8. Conclusiones

No cabe duda de que los dos teoremas que se han estudiado en este trabajo representan por sí solos grandes descubrimientos matemáticos más allá de su popularidad en los círculos académicos. Por encima de la importancia que sus aplicaciones tengan para el desarrollo de la matemática estos resultados suponen —siempre en opinión de quien escribe: un entusiasta de la matemática teórica— magníficas estructuras de pensamiento formal imbuidas además de una belleza y elegancia distintivas. Ha sido un viaje muy grato el poder escarbar en la mente de los matemáticos que hicieron posible esos descubrimientos. Para finalizar con este ensayo, se brindan a continuación cinco conclusiones sobre esta experiencia de comparación y contraste.

Independencia lógica

La intención de encontrar relaciones lógicas entre los dos teoremas ha supuesto una tarea sumamente interesante que ha arrojado tal vez el más revelador resultado de este trabajo: que los teoremas estudiados representan dos resultados de naturaleza matemática lógicamente independiente, cuestión que no es trivial pues por sus características estructurales análogas se podía intuir alguna relación en el sentido lógico.

Como se ha advertido, la independencia lógica de ambos resultados posee interés teórico al momento de estudiar su contexto de demostraciones sumamente parecidas, pero asimismo se puede encontrar un interés práctico al saber que en el contexto de la teoría de puntos críticos en dimensión finita se cuenta con dos herramientas distintas para resolver problemas específicos en la búsqueda de dichos puntos.

Hipótesis principal

En la estructura de la demostración del TPM clásico la condición de Palais-Smale (PS) impuesta sobre el funcional resulta un pilar fundamental en la búsqueda del punto crítico (Ver Teorema 3.3.1). De igual manera en la estructura de la demostración del TPM topológico el crecimiento al infinito es de esencial relevancia para encontrar el punto de mínimo o punto de PM. Aunque en el primer caso la condición (PS) —como hipóteisis de estructura— es necesaria en el Principio de Minimax correspondiente y en el segundo caso el crecimiento al infinito forma parte de las hipótesis geométricas, una vez encuadrados en espacios de dimensión finita (donde se equiparan el resto de hipóteis de estructura del espacio) y si se acomodan los puntos mínimos para que las condiciones geométricas en ambos teoremas sean equivalentes, son únicamente esas dos condiciones las que diferencian a los resultados (siempre que se aceptes que la función es continuamente diferenciable en el caso del TPM topológico).

Se ha visto, sin embargo, que dichas hipótesis no son equivalentes: es muy difícil ver a simple vista como podrían estar conectadas y con los contraejemplos brindados se confirma que no poseen relación lógica en general. Es por eso que resulta natural decir que la hipótesis principal del TPM clásico es el cumplimiento de la condición de Palais-Smale mientras que para el TPM topológico resulta el crecimiento al infinito.

Escencia de las demostraciones

Más allá de la clara relación que guardan los teoremas en su estructura de demostración —relación estrecha en vista de la conexión que tienen las familias de minimax, la utilización de dos puntos del espacio dotados de cierta geometría muy parecida y el procedimiento por reducción al absurdo— y el hecho de que ambos garantizan la existencia de un punto mínimo o punto global de paso de montaña para un funcional, se puede evidenciar que resultan en fondo muy distintas: mientras en el caso clásico todo está construido con el objeto de recurrir al Teorema de Deformación —que a su vez es un resultado que se alimenta de la estructura diferencial del espacio y que es el principio motor del TPM clásico como quedó acentuado en la sección correspondiente— en el caso topológico, es el sistema de conceptos de la topología general el que por sí solo carga con el peso de la demostración. No quiere decir esto que en el TPM clásico no se utilice la topología sino que ésta se encuentra acompañada de consideraciones diferenciales exclusivas de los espacios de Banach, mientras que en el otro caso la generalidad de las consideraciones topológicas es sumamente amplia.

Aplicaciones incompatibles

Como ya quedó establecido, la motivación para el descubrimiento del TPM clásico fue la resolución de ecuaciones diferenciales parciales, cuestión por la cual es célebre; como para tal aplicación los espacios funcionales donde se trabaja son de dimensión infinita, resulta imposible querer usar al TPM topológico en la misma línea de aplicaciones. Esta evidente consideración no es irrelevante ya que la investigación actual en el campo de las EDPs en la búsqueda de generalizaciones del TPM intenta alcanzar resultados de este tipo que no precisen de las hipótesis usuales; algunas, por un lado, tratan de deshacerse de la condición de Palais-Smale, cuestión de la que el TPM topológico carece, por ejemplo. Sin embargo resulta difícil no utilizar dicha hipótesis aunque existen algunos ejemplos que se pueden estudiar en los capítulos finales de Jabri[16].

Por otro lado, en la búsqueda de generalizaciones del TPM clásico, se ha llegado a una generalización en espacios métricos al menos (véase Katriel[17]). Una generalización a espacios topológicos está por descubrirse aún.

De igual manera resulta bastante complejo interpretar el TPM clásico de tal forma que pueda utilizarse en la búsqueda de aplicaciones en Topología, principalmente porque muchos espacio topológicos (como las superficies conexas y compactas para las cuales el TPM topológico posee resultados) ni siquiera son espacios vectoriales, mucho menos espacios de Banach.

Dimensión finita

La incompatibilidad de las aplicaciones principales de cada uno de los teoremas hace mucho más interesante a la aplicación en común más importante: el TPM en dimensión finita, teorema para el cual se ha considerado importante contribuir con una visión propia de su demostración que evidenciara su esencial arraigo a las propiedades de los espacios de dimensión finita. Por otro lado, la forma de demostrarlo usando las otras dos variantes, sección que ha representado una de las partes más interesantes de este trabajo, evidencia como la propiedad de coercividad representa más de lo que se ve a primera vista, siempre y cuando se esté trabajando en dimensión finita.

En ese contexto, es interesante que al querer buscar puntos críticos para funciones que poseen dos puntos de mínimo estricto, se tenga como opción para encontrarlos a la verificación de tres distintas cuestiones, que en uno u otro caso resultarán más o menos fáciles de verificar: la coercividad (la más general porque implica las otras dos), el crecimiento al infinito o la condición (PS). Esto brinda una riqueza única a las técnicas de búsqueda de puntos críticos en dimensión finita.

9. Referencias

[1] Ambrosetti, Antonio; Malchiodi, Andrea, *Nonlinear analysis and semilinear elliptic problems*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 104. Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

[2] Ambrosetti, Antonio; Prodi, Giovanni, *A primer of nonlinear analysis*. Reimpresión corregida del original de 1993. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 34. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[3] Ambrosetti, Antonio; Rabinowitz, Paul, 'Dual variational methods in critical point theory and applications'. J. Functional Analysis 14 (1973), págs. 349–381.

[4] Apostol, Tom, *Calculus. Vol. II: Multi-variable calculus and linear algebra, with applications to differential equations and probability*. Segunda Edición. Blaisdell Publishing Co. Ginn and Co., Waltham, Mass.-Toronto, Ont.-London, 1969.

[5] Badiale, Marino; Serra, Enrico, *Semilinear elliptic equations for beginners. Existence results via the variational approach*. Universitext. Springer, London, 2011.

[6] Brezis, Haim, *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Universitext. Springer, New York, 2011.

[7] Clark, David, 'A variant of the Lusternik-Schnirelman theory'. Indiana Univ. Math. J. 22 (1972/73), págs. 65–74.

[8] Chemin, Jean-Yves, *Théorie des distributions et analyse de Fourier*. Département de Mathématiques, École Polytechnique, Université Paris-Saclay. Imprimiere de l'École Polytechnique, 2003.

[9] Christenson, Charles; Voxman, William, *Aspects of topology*. Pure and applied Mathematics, Vol. 39. Marcel Dekker, Inc., New York-Basel, 1977.

[10] Courant, Richard, *Dirichlet's principle, conformal mapping, and minimal surfaces*. Reimpresión del original de 1950. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977.

[11] de Figueiredo, Djairo. 'On the superlinear Ambrosetti-Prodi problem'. Nonlinear Anal. 8 (1984), no. 6, págs. 655–665.

[12] Engelking, Ryszard, *General topology*. Traducido al inglés del polaco por el author. Segunda edición. Sigma Series in Pure Mathematics, 6. Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[13] Eriksson, Kenneth; Estep, Donald; Johnson, Claes, *Applied mathematics: body and soul. Vol. 1. Derivatives and geometry in* $\mathbb{R}^3$. Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[14] Evans, Lawrence, *Partial differential equations*. Segunda edición. Graduate Studies in Mathematics, 19. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.

[15] Hartman, Philip, *Ordinary differential equations*. Reimpresión corregida de la segunda edición (1982) [Birkhäuser, Boston, MA]. Classics in Applied Mathe-

matics, 38. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2002.

[16] Jabri, Youssef, *The mountain pass theorem. Variants, generalizations and some applications*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 95. Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

[17] Katriel, Guy, 'Mountain pass theorems and global homeomorphism theorems'. Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 11 (1994), no. 2, págs 189–209.

[18] Köthe, Gottfried, *Topological vector spaces*. Traducido del alemán por D. J. H. Garling. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 159 Springer-Verlag New York Inc., New York, 1969.

[19] Kreyszig, Erwin, *Introductory functional analysis with applications*. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1989.

[20] Manetti, Marco, *Topology*. Traducido al inglés de la edición italiana de 2014 por Simon G. Chiossi. Unitext, 91. La Matematica per il 3+2. Springer, Cham, 2015.

[21] Munkres, James, *Topology*. Segunda edición. Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, 2000.

[22] Palais, Richard, 'Morse theory on Hilbert manifolds'. Topology 2 (1963), págs. 299–340.

[23] Palais, Richard, 'Critical point theory and the minimax principle'. 1970 Global Analysis (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XV, Berkeley, Calif, 1968) págs. 185–212 Amer. Math. Soc., Providence, RI.

[24] Pucci, Patrizia; Serrin, James, 'The structure of the critical set in the mountain pass theorem'. Trans. Amer. Math. Soc. 299 (1987), no. 1, págs. 115–132.

[25] Rabinowitz, Paul, *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations*. CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 65. Publicado para la Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; por American Mathematical Society, Providence, RI, 1986.

[26] Royden, Halsey, *Real analysis*. The Macmillan Co., New York; Collier-Macmillan Ltd., Londres, 1963.

[27] Rudin, Mary Ellen, 'A new proof that metric spaces are paracompact'. Proc. Amer. Math. Soc. 20 (1969), pág. 603.

[28] Spanier, Edwin, *Algebraic topology*. McGraw-Hill Book Co., New York-Toronto, Ont.-London, 1966.

[29] Struwe, Michael; *Variational methods. Applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems*; Cuarta Edición; Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics], 34; Springer-Verlag; Berlin; 2008.