

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS

**ESTUDIO DE LA FORMACIÓN DE SUPERFICIES
ATRAPADAS EN COLISIONES DE ONDAS
GRAVITACIONALES DE CHOQUE ANCHAS EN ESPACIO
PLANO**

TRABAJO PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE FÍSICO

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

ANDRÉS ELOY PINTO PINOARGOTE

andres.pinto@epn.edu.ec

DIRECTOR: ÁLVARO DUEÑAS VIDAL, Ph.D.

alvaro.duenas@epn.edu.ec

QUITO, JULIO 2019

Declaración

Yo Andrés Eloy Pinto Pinoargote, declaro bajo juramento que el trabajo aquí escrito es de mi autoría, que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional, y que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

A través de la presente declaración cedo mis derechos de propiedad intelectual, correspondientes a este trabajo, a la Escuela Politécnica Nacional, según lo establecido por la Ley de Propiedad Intelectual, por su reglamento y la normativa institucional vigente.



Andrés Eloy Pinto Pinoargote

Certificación

Certifico que el presente trabajo fue desarrollado por Andrés Eloy Pinto Pinoargote, bajo mi supervisión.



Álvaro Dueñas Vidal, Ph.D.
Director del Proyecto.

“Spacetime tells matter how to move; matter tells spacetime how to curve”.

John Archibald Wheeler

Agradecimientos

A mis padres, quienes han creído ciegamente en mí y me han brindado su apoyo incondicional con el fin de cumplir uno de mis sueños.

A mis hermanos, Génesis y Luis, quienes han estado conmigo en las buenas y malas, demostrándome que siempre estaremos juntos para apoyarnos y ver como alcanzamos nuestras metas.

A mi novia y toda su familia, quienes me han brindado su apoyo incondicional desde que entré a sus vidas.

A mi director, el Dr. Álvaro Dueñas, quien con paciencia infinita ha compartido su vasto conocimiento conmigo, con el fin de guiar este proyecto de la mejor manera.

A todos los profesores y amigos que han contribuido en mi formación académica y personal, entre ellos los doctores Esteban Iribarra, Ramón Xulvi y Christian Vásquez, quienes han dedicado su valioso tiempo en darme diferentes consejos.

*A mi familia, quienes están a mi lado en cada momento para apoyar todas y cada una de mis ideas.
A la ciencia, que me permite volar lejos y aún no despego.*

Índice General

Declaración	II
Certificación	III
Convenciones y Notación	IX
Resumen	x
Abstract	XI
1. Ondas Gravitacionales en Espacio Plano	1
1.1. Ondas Gravitacionales Perturbativas	1
1.2. Ondas Paralelas Planas y Ondas de Choque	3
1.3. Boost de Aichelburg-Sexl	6
1.4. Colisión de Ondas Gravitacionales de Choque en Espacio Plano	8
1.4.1. Análisis del Cono de Luz	8
2. Ondas de Choque Anchas Y Modelo de Colisión	15
2.1. Ondas Gravitacionales de Choque Anchas	15
2.2. Superficie de Penrose para Ondas Anchas	19
2.2.1. Formación de la Superficie de Penrose en $D = 4$	21
2.2.2. Formación de la Superficie de Penrose en $D = 5$	23
2.2.3. Formación de la Superficie de Penrose en $D \geq 6$	23
3. Modelo para Iones Pesados Ultrarelativistas	25
3.1. Densidad de Energía para la Distribución Nuclear	25
3.2. Modelo de Esfera Sólida	26
3.3. Modelo de Woods-Saxon	27
3.4. Energía Total para Iones Pesados Ultrarelativistas	28
3.5. Superficie Atrapada de Penrose para Esfera Sólida	30
3.6. Superficie Atrapada de Penrose con Densidad de Woods-Saxon	36
4. Conclusiones	45
4.1. Esfera Sólida	45
4.2. Densidad de Woods-Saxon	46
A. Lema (1.34)	49
Bibliografía	51

Índice de Figuras

1.1. Esquema de Colisión para Ondas de Choque en Espacio Plano	9
1.2. Cono de Luz para la Colisión de Dos Ondas Gravitacionales	10
1.3. Estructura Causal de la Solución de Khan-Penrose	11
2.1. Comportamiento del Tamaño de la Superficie de Penrose	21
2.2. Comportamiento del Tamaño de la Superficie de Penrose en Función del Ancho de la Fuente $D = 4$	22
2.3. Comportamiento del Tamaño de la Superficie de Penrose en Función del Ancho de la Fuente $D = 5$	23
3.1. Densidad de Energía en Modelo de Esfera Sólida	27
3.2. Densidad de Energía con Distribución de Woods-Saxon	28
3.3. Resultados Numéricos para el Tamaño de la de la Superficie de Penrose en $D = 4$ con Modelo de Esfera Sólida	32
3.4. Comportamiento del Tamaño de la Superficie de Penrose para Esfera Sólida en $D = 4$	33
3.5. Comportamiento del Tamaño de la Superficie de Penrose para Esfera Sólida en $D = 5$	34
3.6. Resultados Numéricos para el Tamaño de la de la Superficie de Penrose en $D = 5$ con Modelo de Esfera Sólida	35
3.7. Comportamiento del Tamaño de la Superficie de Penrose para Esfera Sólida en $D = 6, 7, 8$	36
3.8. Comportamiento del Tamaño de la Superficie de Penrose para Densidad de Woods-Saxon en $D = 4$	38
3.9. Resultados Numéricos para el Tamaño de la de la Superficie de Penrose en $D = 4$ con Modelo de Woods-Saxon	39
3.10. Resultados Numéricos para el Tamaño de la de la Superficie de Penrose en $D = 5$ con Modelo de Woods-Saxon	40
3.11. Comportamiento del Tamaño de la Superficie Atrapada para Densidad de Woods-Saxon en $D = 5$	41
3.12. Comportamiento del Tamaño de la Superficie de Penrose para Densidad de Woods-Saxon en $D = 6, 7, 8$	42
3.13. Comparación entre Modelo de Esfera Sólida y Woods-Saxon para $D = 4, 5, 6$.	43

Convenciones y Notación

La dimensión del espacio-tiempo se denota por D .

Los índices espacio-temporales se designan por letras griegas: $\mu, \nu, \sigma \dots \in \{0, 1, \dots, D - 1\}$.

Los índices espaciales se representan por letras latinas: $i, j, k, \dots \in \{1, 2, \dots, D - 1\}$

La métrica de una variedad M se denota por $g_{\mu\nu}$.

Consideramos la métrica de Minkowski, $\eta_{\mu\nu}$, con signatura $(-, +, +, \dots, +)$.

Adoptamos el sistema de unidades con $c = \hbar = 1$, y G_D la constante de gravitación en D dimensiones.

Tomamos la contracción $R_{\mu\nu} = R_{\mu\alpha\nu}^{\alpha}$, para el tensor de Ricci y $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$, para la curvatura escalar.

∇_{μ} es la conexión de Levi-Civita.

Resumen

Las ondas gravitacionales son una solución ya sea perturbativa o exacta a las ecuaciones de campo de Einstein, cuya velocidad de propagación es la velocidad de la luz en el vacío. En particular, las ondas gravitacionales de choque permiten modelar el campo gravitacional de un objeto viajando a la velocidad de la luz. Si dos de éstos colisionan, son capaces de distorsionar el espacio-tiempo, tal que, modelar la estructura causal después de la colisión es una tarea ardua y altamente complicada. Un método viable es estudiar la formación de superficies marginalmente atrapadas sobre el cono de luz pasado de la colisión. Este análisis se realiza porque las superficies atrapadas son un fuerte indicativo de que la geometría del espacio-tiempo evoluciona a un horizonte de sucesos en el cono de luz futuro.

En este trabajo de titulación, desarrollamos un breve estudio en espacio-tiempo plano y dimensión arbitraria, acerca de la producción y formación de superficies atrapadas en la colisión frontal de ondas gravitacionales de choque. En particular, hemos centrado nuestro interés en ondas cuya distribución de densidad de energía en el espacio transversal tiene tamaño no nulo (ondas de choque anchas). Para ello, propusimos dos modelos en donde la densidad de energía es una distribución de tipo Heaviside (modelo de esfera sólida) y otra del tipo Woods-Saxon, éste con el fin de modelar la colisión de iones pesados ultrarelativistas a muy alta energía. En teoría, es posible estimar la sección eficaz para la producción de micro agujeros negros siguiendo este esquema. Los modelos planteados muestran que existen anchos de la densidad de energía para los cuales no hay solución real a la ecuación de la superficie atrapada. Además, cuando la superficie atrapada alcanza su tamaño crítico, hemos encontrado relaciones de escala caracterizadas por exponentes críticos independientes de la dimensión.

Abstract

Gravitational waves are a perturbative or exact solution to Einstein's field equations, whose propagation velocity is the speed of light in a vacuum. In particular, gravitational shock waves allow us to model the gravitational field of an object that travels to the speed of light. If two of these collide, they are able to distort space-time, such that, modelling the causal structure after the collision is a hard task and highly complicated. A profitable method is to study the formation of marginally trapped surfaces over the past light cone of the collision. This analysis is carried out because this can be considered as signaling an eventual horizon formation in the future light cone of the collision.

In this degree work, we illustrate a brief study in flat space-time and arbitrary dimension, about the production and formation of the trapped surfaces in the collision of gravitational shock waves. In particular, we have focused our interest on waves whose energy density distribution in transverse space has non-zero size (fat shock waves). To do this, we have proposed two models in which energy density is a Heaviside's distribution (solid sphere model) and Woods-Saxon's distribution, this with the aim of modelling ultrarelativistic heavy-ion collision at high energy. In theory, it's possible to estimate the effective cross-section for micro black holes production following this scheme. The proposed models show that there are energy density widths for which there is no solution to the trapped surface equation. In addition, when the trapped surface reaches its critical size, we find scaling relations characterized by critical exponents independent of the dimension.

Capítulo 1

Ondas Gravitacionales en Espacio Plano

La teoría de la Relatividad General (RG) fue formulada y establecida por Albert Einstein en 1915, con el fin de dar una nueva descripción de la dinámica gravitatoria [1]. Probablemente, representa uno de los modelos más elegantes de las teorías actuales, ya que permite describir un sin número de fenómenos desde un punto de vista geométrico, dando lugar a nuevos conceptos que la visión Newtoniana no puede concebir.

Las ecuaciones de campo de Einstein predicen fenómenos de diferente naturaleza como agujeros negros, blancos, de gusano y ondas gravitacionales, entre otros [1-10]. En particular, en este trabajo de titulación, el enfoque estará centrado en el estudio de ondas gravitacionales de choque y su colisión. Cabe mencionar que éstas no son las mismas que las detectadas por LIGO en 2016 [11], ya que éstas corresponden a una linealización de las ecuaciones de campo de Einstein y representan fluctuaciones débiles que se propagan de acuerdo a un desarrollo perturbativo de las ecuaciones [1].

El presente capítulo está orientado a estudiar y modelar las ondas gravitacionales, así como dar a conocer el concepto de colisión entre ondas de choque, y estudiar la estructura causal en la colisión. Introduciremos el formalismo para perturbaciones en la sección 1.1, puesto que estas permitirán realizar un símil con las soluciones exactas descritas en la sección 1.2. Posteriormente en la sección 1.3 estudiaremos el Boost de Aichelburg-Sexl como ejercicio sencillo para introducirnos en ondas de choque más complejas. Finalmente en la sección 1.4 estableceremos el formalismo para abordar la colisión de dos ondas gravitacionales de choque. El interés de estudiar ondas de choque es que, éstas son capaces de modelar el campo gravitacional de una partícula viajando a la velocidad de la luz [3, 12].

1.1. Ondas Gravitacionales Perturbativas

La radiación gravitatoria corresponde a una perturbación débil sobre un espacio-tiempo estacionario que tiende a producirse cuando un objeto es acelerado. Dichas perturbaciones se propagan a la velocidad de la luz y en esta sección estamos interesados en obtener la ecuación que gobierna dicho movimiento.

Consideremos un espacio-tiempo plano D -dimensional con métrica $g_{\mu\nu}$, y cuyo tensor energía momento es $T_{\mu\nu}$. Entonces, la dinámica gravitacional viene dada en términos de

la ec. de campo de Einstein,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G_D T_{\mu\nu}, \quad (1.1)$$

donde G_D es la constante de Gravitación en D dimensiones¹. Supongamos ahora que la métrica es una ligera perturbación respecto al espacio de Minkowski, esto es,

$$g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (1.2)$$

con $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ ². Al tratarse de una perturbación pequeña y aditiva, es posible realizar un desarrollo perturbativo de la ec. de campo (1.1) y quedarnos a primer orden en $h_{\mu\nu}$. Entonces, la métrica inversa es,

$$g^{\mu\nu} \approx \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}, \quad (1.3)$$

mientras que los índices suben y bajan con $\eta_{\mu\nu}$. Manteniendo a primer orden, los símbolos de Christoffel que son considerables corresponden a:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta} (\partial_{\mu}h_{\beta\nu} + \partial_{\nu}h_{\beta\mu} - \partial_{\beta}h_{\mu\nu}). \quad (1.4)$$

El tensor de Ricci puede aproximarse por,

$$R_{\mu\nu} \approx \partial_{\alpha}\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} - \partial_{\nu}\Gamma_{\alpha\mu}^{\alpha},$$

sustituyendo entonces (1.4), obtenemos,

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} (\partial^{\alpha}\partial_{\mu}h_{\alpha\nu} + \partial^{\alpha}\partial_{\nu}h_{\alpha\mu} - \partial^{\alpha}\partial_{\alpha}h_{\mu\nu} - \partial_{\mu}\partial_{\nu}h), \\ R &= \partial^{\mu}\partial^{\nu}h_{\mu\nu} - \partial^{\mu}\partial_{\mu}h. \end{aligned} \quad (1.5)$$

donde $h = \eta^{\alpha\beta}h_{\alpha\beta}$ es la traza de la perturbación. Reemplazando (1.5) en (1.1), se sigue,

$$\partial^{\alpha}\partial_{\mu}h_{\alpha\nu} + \partial^{\alpha}\partial_{\nu}h_{\alpha\mu} - \partial^{\alpha}\partial_{\alpha}h_{\mu\nu} - \partial_{\mu}\partial_{\nu}h - \eta_{\mu\nu} (\partial^{\alpha}\partial^{\beta}h_{\alpha\beta} - \partial^{\alpha}\partial_{\alpha}h) = 16\pi G_D T_{\mu\nu}, \quad (1.6)$$

donde el tensor energía-momento debe ser del mismo orden que $h_{\mu\nu}$. Definiendo $\bar{h}_{\mu\nu}$, como,

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h,$$

la ecuación (1.6), toma la forma,

$$-\partial^{\alpha}\partial_{\alpha}\bar{h}_{\mu\nu} + \partial^{\alpha}\partial_{\mu}\bar{h}_{\alpha\nu} + \partial^{\alpha}\partial_{\nu}\bar{h}_{\mu\alpha} - \eta_{\mu\nu}\partial^{\alpha}\partial^{\beta}\bar{h}_{\alpha\beta} = 16\pi G_D T_{\mu\nu}. \quad (1.7)$$

En Relatividad General tenemos una libertad gauge correspondiente a un grupo de difeomorfismos³. En la aproximación lineal, ésto implica que las dos perturbaciones representan la misma perturbación física, sí y sólo sí éstas difieren por la acción de un

¹ G_D tiene unidades $[G_4] L^{D-4}$ donde L es longitud y G_4 la constante de gravitación newtoniana. En nuestro sistema de unidades, G_4 tiene unidades de longitud por energía.

²Que la perturbación sea pequeña puede definirse de forma adecuada que las componentes de $h_{\mu\nu}$ son mucho menor que 1, en un sistema inercial de coordenadas global de $\eta_{\mu\nu}$.

³Si $\phi : M \rightarrow M$ es un difeomorfismo de un espacio-tiempo, las métricas $g_{\mu\nu}$ y $\phi^*g_{\mu\nu}$ representan la geometría del mismo espacio-tiempo, donde ϕ^* es la *mapa* en el campo de tensores inducido por ϕ .

difeomorfismo infinitesimal en la métrica plana $\eta_{\mu\nu}$. Tomando un cambio de coordenadas infinitesimal,

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + \xi^\mu,$$

el cambio en el campo de tensores inducido por tal difeomorfismo viene dado por,

$$g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} + \mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu},$$

donde \mathcal{L}_ξ es la derivada de Lie con respecto al campo vectorial que genera la transformación de coordenada. Esta transformación cambia $\bar{h}_{\mu\nu}$,

$$\bar{h}_{\mu\nu} \rightarrow \bar{h}_{\mu\nu} + \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu.$$

Es decir, $\bar{h}_{\mu\nu}$ y $\bar{h}_{\mu\nu} + \mathcal{L}_\xi \eta_{\mu\nu}$ describen la misma perturbación. Esto significa que la linealización $\bar{h}_{\mu\nu}$ tiene una libertad gauge. Por tanto, podemos tomar una métrica equivalente de un mismo espacio-tiempo, aquella que verifique el Gauge Transversal [1, 2],

$$\eta^{\mu\nu} \bar{h}_{\mu\nu} = 0, \quad \partial^\mu \bar{h}_{\mu\nu} = 0.$$

Así, (1.7) toma la forma,

$$\partial^\alpha \partial_\alpha \bar{h}_{\mu\nu} = -16\pi G_D T_{\mu\nu}. \quad (1.8)$$

Finalmente, la ecuación (1.8), describe cómo la *radiación gravitatoria* se propaga a través del espacio-tiempo.

Cabe resaltar que la expresión obtenida representa *asintóticamente* las ondas gravitacionales detectadas por LIGO, cuyo origen puede estar relacionado a la colisión de agujeros negros, estrellas de neutrones, etc [11]. Un estudio más detallado acerca de las ondas perturbativas puede encontrarse en [1, 2, 13]. Estas ondas no son el enfoque del trabajo, pero se ha desarrollado su formalismo puesto que esta ecuación puede extenderse al caso más general.

1.2. Ondas Paralelas Planas y Ondas de Choque

Hasta ahora hemos planteado ondas gravitacionales como una perturbación débil que se propaga sobre el espacio de Minkowski. Sin embargo, también existen soluciones no perturbativas (i.e. exactas), consistentes en “pliegues” de la geometría que se propaga por el espacio-tiempo. Estas soluciones son igualmente ondas gravitacionales, aunque no del tipo débil, perturbativo, de la sección anterior. Físicamente, las primeras modelan la radiación gravitacional procedente de fenómenos como la colisión de objetos compactos o su colapso, mientras que las segundas, no perturbativas, modelan el campo gravitacional asociado a objetos ultrarelativistas.

Ondas Gravitacionales PP

Un caso particularmente importante de ondas gravitacionales no perturbativas son las ondas paralelas frontalmente planas (*Planned-Fronted Parallel Waves*, PP-waves), definidas como aquellas que admiten un vector nulo k^μ , que cumple,

$$\nabla_\nu k^\mu = 0. \quad (1.9)$$

El nombre de este tipo de ondas proviene de que las curvas integrales de k^μ pueden ser interpretadas como rayos paralelos a lo largo de los cuales se propaga [3, 4]. Alternativamente, se pueden definir las ondas PP como aquellas que responden al elemento de línea,

$$ds^2 = -dudv + d\vec{x}_\perp^2 + H(u, \vec{x}_\perp)du^2, \quad (1.10)$$

en coordenadas $\{u, v, \vec{x}_\perp\}$, con $H(u, \vec{x}_\perp)$ una función que satisface,

$$\Delta_\perp H(u, \vec{x}_\perp) = -16\pi G_D T_{uu}, \quad (1.11)$$

donde $\Delta_\perp = \sum_{x^i} \partial_{x^i}^2$ es el operador de Laplace-Beltrami sobre las coordenadas transversas \vec{x}_\perp . Esta ecuación es similar a la ec. (1.8) para la radiación gravitacional. Sin embargo, ésto no significa que las ondas sean de la misma naturaleza. Esta forma del elemento de línea (1.10), se conoce como la forma de Brinkmann. En estas coordenadas, k^μ es,

$$k^\mu = g^{\mu\nu} \partial_\nu u.$$

Si $H_0(\eta, \vec{x}_\perp)$ es la función de Green que cumple:

$$\Delta_\perp H_0(\eta, x^i) = -\frac{16\pi G_D}{\sqrt{|g|_x}} \delta^D(\eta - x^i), \quad (1.12)$$

entonces toda solución a (1.11) es,

$$H(u, \vec{x}_\perp) = \int_{-\infty}^{\infty} d\eta h(\eta, u) H_0(\eta, \vec{x}_\perp), \quad (1.13)$$

donde $h(\eta, u)$ es cualquier función integrable.

Los espacio-tiempo que contienen ondas pp pueden ser clasificados acorde sus simetrías. Las ondas más simétricas son las ondas planas, mismas que admiten $D + 1$ campos de Killing, entre éstos el campo vectorial k^μ [12, 13]. Equivalentemente, una onda de tipo pp se dice plana, sí y sólo sí depende cuadráticamente de las coordenadas transversas, tal que (1.10) se escribe como:

$$ds^2 = -dudv + h_{ij}(u)x^i x^j du^2 + d\vec{x}_\perp^2.$$

Por otra parte, si una onda pp tiene únicamente dos campos vectoriales de Killing se dice axisimétrica. En este caso, el elemento de línea toma la forma,

$$ds^2 = -dudv + F(u, r_\perp)du^2 + d\vec{x}_\perp^2, \quad (1.14)$$

donde $r_\perp^2 = \vec{x}_\perp^2$, es la coordenada radial en el espacio transverso.

Ondas de Choque en Espacio Plano

Las ondas gravitacionales axisimétricas presentan un sinnúmero de clasificaciones. En particular, sí $F(u, r_\perp) = \delta(u)\Phi(r_\perp)$, la onda se conoce como onda de Choque (*Shock Wave*, SW) en espacio plano [3, 4, 12-16]. Así, el elemento de línea en la forma de Brinkmann, es,

$$ds^2 = -dudv + \delta(u)\Phi(r_\perp)du^2 + d\vec{x}_\perp^2. \quad (1.15)$$

La función $\Phi(r_\perp)$ da la “forma” del frente de onda. Por ese motivo, la denominaremos función de perfil, o simplemente, perfil. Reemplazando $F(u, r_\perp)$ en (1.11), el tensor energía-momento queda,

$$T_{uu} = \delta(u)\rho(r_\perp), \quad (1.16)$$

donde $\rho(r_\perp)$ es la densidad de energía en el espacio transverso. Así, $\Phi(r_\perp)$ satisface la ecuación de Poisson,

$$\Delta_\perp \Phi(r_\perp) = -16\pi G_D \rho(r_\perp). \quad (1.17)$$

El elemento de línea que describe la onda de choque presenta problemas en las geodésicas nulas al cruzar el frente de onda, ya que (1.15) es discontinuo en $u = 0$ [17]. Ésto no es sencillo de apreciar, pero es posible realizar un análisis que permita saber que existe, estudiando el comportamiento de la geodésica nula v , antes y después de atravesar el frente de onda localizado en $u = 0$. Consideremos el caso en que las componentes transversas $\vec{x}_{\perp 0}$ no sufren variación a lo largo de una curva, tal que $d\vec{x}_{\perp 0} = 0$, y por tanto, de (1.15),

$$ds^2 = du [-dv + \delta(u)\Phi(r_0)du],$$

si la curva es luminosa $ds^2 = 0$. Entonces, al integrar a ambos lados de la hipersuperficie $u = 0$, tenemos:

$$dv = \delta(u)\Phi(r_0)du \Rightarrow \Delta v = \Phi(r_0) \int_{-\epsilon}^{\epsilon} du \delta(u) \Rightarrow \Delta v = \Phi(r_0),$$

con ϵ suficientemente pequeño, y $r_0^2 = \vec{x}_{\perp 0}^2$ es la coordenada radial localizada en $u = 0$. Por tanto, una geodésica v que atravesase el frente de onda en $r = r_0$ presenta un salto $\Delta v \neq 0$.

Puesto que el elemento de línea (1.15) presenta discontinuidad, dicho resultado puede causar problemas al tratar de estudiar geodésicas nulas en espacios-tiempo que contienen ondas de choque. Para evitar esto, se cambia a las coordenadas [18],

$$\begin{aligned} u &= U, \\ v &= V + \Phi(\vec{X}_\perp)\Theta(U) + \frac{1}{4}U\Theta(U) [\vec{\nabla}\Phi(\vec{X}_\perp)]^2, \\ \vec{x}_\perp &= \vec{X}_\perp + \frac{1}{2}U\Theta(U)\vec{\nabla}\Phi(\vec{X}_\perp), \end{aligned} \quad (1.18)$$

donde $\Theta(U)$ es la función de Heaviside, con el propósito de “absorber” la distribución $\delta(u)$ en (1.15). Nótese que para $U < 0$ las coordenadas antiguas y nuevas coinciden. A partir de este cambio de coordenadas se obtienen los diferenciales:

$$\begin{aligned} du &= dU, \\ dv &= dV + \left\{ \Phi\delta(U) + \frac{1}{4}\Theta(U) [\vec{\nabla}\Phi]^2 \right\} dU + \Theta(U) \left[\partial_i\Phi + \frac{U}{2}\partial_j\Phi\partial_j\partial_i\Phi \right] dX^i, \\ dx^i &= dX^i + \frac{1}{2}\Theta(U)\partial^i\Phi dU + \frac{1}{2}U\Theta(U)\partial_j\partial^i\Phi dX^j. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Reemplazando (1.18) y (1.19) en (1.15), el elemento de línea toma la forma,

$$ds^2 = -dUdV + \left[\delta_{ij} + \frac{1}{2}U\Theta(U)\partial_i\partial_j\Phi \right] \left[\delta_{jk} + \frac{1}{2}U\Theta(U)\partial_j\partial_k\Phi \right] dX^i dX^k,$$

que ya no presenta discontinuidades ni divergencias. Definiendo H_{ij} , como,

$$H_{ij} = \delta_{ij} + \frac{1}{2}U\Theta(U)\partial_i\partial_j\Phi, \quad (1.20)$$

la ec. (1.15) viene dada por,

$$ds^2 = -dUdV + H_{ij}H_{jk}dX^i dX^k. \quad (1.21)$$

El elemento de línea (1.21) recibe el nombre de forma de Rosen de una onda gravitacional de choque [14].

1.3. Boost de Aichelburg-Sexl

Desde un punto de vista físico, las ondas gravitacionales de choque describen el campo gravitacional de un objeto que se propaga a la velocidad de la luz. Aichelburg y Sexl fueron los primeros en ofrecer esta descripción a partir de considerar el boost de la solución de Schwarzschild en el límite $\gamma \rightarrow \infty$ [19]. Obtuvieron así, la onda gravitacional de choque que ocuparía a una partícula puntual sin masa que se propaga a la velocidad de la luz. En esta sección revisaremos el desarrollo de Aichelburg y Sexl, y la onda de choque que se obtiene.

En coordenadas adecuadas y unidades naturales, la solución de Schwarzschild es de la forma [1-3],

$$ds^2 = -f(r) dt^2 + f^{-1}(r) dr^2 + r^2 d\Omega_2^2, \quad (1.22)$$

con,

$$f(r) = 1 - \frac{2G_4M}{r}, \quad (1.23)$$

donde M es la masa de la solución y Ω_2 es el volumen de la 2-esfera. Antes de tomar un boost es necesario introducir coordenadas “isotrópicas”, en la que la parte radial y la parte angular tengan pesos similares en (1.22), con el fin de asegurar que no existan direcciones privilegiadas. Definiendo \bar{r} como [20],

$$r = \bar{r} \left(1 + \frac{G_4M}{2\bar{r}}\right)^2 \Rightarrow dr^2 = \left[1 - \left(\frac{G_4M}{2\bar{r}}\right)^2\right]^2 d\bar{r}^2. \quad (1.24)$$

el elemento de línea (1.22) toma la forma,

$$ds^2 = -f(r(\bar{r}))dt^2 + g(r(\bar{r})) \left[d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 d\Omega_2^2\right], \quad (1.25)$$

donde,

$$f(r(\bar{r})) = 1 - \frac{2G_4M}{r(\bar{r})}, \quad g(r(\bar{r})) = \left[1 + \frac{G_4M}{\bar{r}} + \left(\frac{G_4M}{2\bar{r}}\right)^2\right]^2. \quad (1.26)$$

Así, \bar{r} admite asintóticamente las coordenadas Cartesianas usuales, y permite realizar la transformación de Lorentz en cualquier dirección. Definiendo,

$$\bar{r}^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad (1.27)$$

tomamos el boost en la dirección de propagación x ,

$$t = \gamma(t' + \beta x'), \quad x = \gamma(x' + \beta t'), \quad y = y', \quad z = z'. \quad (1.28)$$

Bajo (1.28) los nuevos elementos de la métrica son,

$$g_{\mu'\nu'} = \begin{pmatrix} \gamma^2 [-f(r(\bar{r})) + \beta^2 g(\bar{r})] & \gamma^2 \beta [-f(r(\bar{r})) + g(\bar{r})] & 0 & 0 \\ \gamma^2 \beta [-f(r(\bar{r})) + g(\bar{r})] & \gamma^2 [-\beta^2 f(r(\bar{r})) + g(\bar{r})] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g(\bar{r}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g(\bar{r}) \end{pmatrix}. \quad (1.29)$$

donde,

$$\bar{r}'^2 = \gamma^2(x' + \beta t')^2 + y'^2 + z'^2, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

Es conveniente reescribir (1.29) en función de las coordenadas nulas $u' = t' + x'$ y $v' = t' - x'$,

$$g_{\mu'\nu'} = \begin{pmatrix} \frac{\gamma^2(1+\beta)^2}{4} [g(\bar{r}) - f(r(\bar{r}))] & -\frac{1}{4} [g(\bar{r}) + f(r(\bar{r}))] & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} [g(\bar{r}) + f(r(\bar{r}))] & \frac{\gamma^2(1-\beta)^2}{4} [g(\bar{r}) - f(r(\bar{r}))] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g(\bar{r}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g(\bar{r}) \end{pmatrix}. \quad (1.30)$$

En el límite $\gamma \rightarrow \infty$ se sigue que $f(r(\bar{r})) = f(\bar{r})$, ya que,

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} r(\bar{r}) = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \bar{r} \left(1 + \frac{G_4 M}{2\bar{r}}\right)^2 = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \bar{r},$$

por otra parte,

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} g_{u'u'} = -\frac{1}{2}, \quad \lim_{\gamma \rightarrow \infty} g_{y'y'} = 1, \quad \lim_{\gamma \rightarrow \infty} g_{z'z'} = 1. \quad (1.31)$$

El cálculo de los elementos $g_{u'u'}$ y $g_{v'v'}$, en el límite $\gamma \rightarrow \infty$, requiere un análisis más delicado. Nótese que estas componentes tienen un factor γ extra, lo cual da lugar a que el límite diverga. Para evitar esto, definimos el producto $\mu = \gamma M$ como la *energía relativista* y tomamos límite $\gamma \rightarrow \infty$ junto con $M \rightarrow 0$, tal que μ es finita. Puesto que M tiende a cero, podemos desarrollar en serie y considerar a primer orden en M , como,

$$g_{u'u'} \approx \gamma(1 + \beta^2) \frac{G_4 \mu}{\bar{r}}, \quad g_{v'v'} \approx \gamma(1 - \beta^2) \frac{G_4 \mu}{\bar{r}}, \quad (1.32)$$

tal que,

$$\begin{aligned} \lim_{\gamma \rightarrow \infty} g_{v'v'} &= \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - \beta^2}{1 + \beta^2}\right)^2 g_{u'u'} = 0, \\ \lim_{\gamma \rightarrow \infty} g_{u'u'} &= -8G_4 \mu \delta(u') \log(r_\perp) + 4 \frac{G_4 \mu}{|u'|}, \end{aligned} \quad (1.33)$$

donde $r_\perp^2 = y^2 + z^2$ es la coordenada radial en el espacio transverso a la dirección del boost. Para realizar el cálculo de los límites se ha usado el resultado,

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \gamma \chi [\gamma^2(x + \beta t)^2] = \delta(x + t) \int_{-\infty}^{\infty} \chi(\eta^2) d\eta, \quad (1.34)$$

cuya demostración puede consultarse en el apéndice A. Nótese que el segundo término del límite de $g_{u'u'}$ presenta problemas en $u' = 0$. Sin embargo, puede eliminarse redefiniendo la coordenada v' como,

$$\begin{aligned} v' &\rightarrow v' - 4\mu G_4 \log(u'), \\ dv' &\rightarrow dv' - 4\frac{\mu G_4}{|u'|} du'. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Finalmente, de (1.31) y (1.33), en el límite $\gamma \rightarrow \infty$, se obtiene el elemento de línea⁴ [13, 19],

$$ds^2 = -dudv - 8\mu G_4 \delta(u) \log(r_\perp) du^2 + d\vec{x}_\perp^2, \quad (1.36)$$

que corresponde a una onda de choque con perfil,

$$\Phi(r_\perp) = -8\mu G_4 \log(r_\perp). \quad (1.37)$$

El elemento de línea (1.36) describe a una partícula sin masa moviéndose en un espacio de 4 dimensiones con energía μ [19]. Se puede comprobar que la solución de Aichelburg-Sexl (1.37) cumple con la ecuación (1.17) para la densidad,

$$\rho(r_\perp) = \frac{\mu}{2\pi} \frac{\delta(r_\perp)}{r_\perp}. \quad (1.38)$$

Cabe recalcar que el resultado obtenido no debe confundirse con un fotón, ya que éste posee helicidad. Sin embargo, la solución de Schwarzschild no posee momento angular.

1.4. Colisión de Ondas Gravitacionales de Choque en Espacio Plano

La colisión de ondas gravitacionales puede dar lugar a fenómenos interesantes, no sólo meramente matemáticos, sino también físicos, como la formación de horizontes de sucesos [13-15]. A partir del análisis de la colisión, es posible obtener una serie de información como la sección eficaz para la producción de agujeros negros en colisiones a muy alta energía [18, 21, 22].

1.4.1. Análisis del Cono de Luz

Consideremos dos ondas de choque que se propagan en el espacio plano en direcciones opuestas. La primera tiene soporte en $v = 0$ y se aproxima desde $u \rightarrow \infty$, mientras que la segunda posee soporte en $u = 0$ y procede desde $v \rightarrow -\infty$ (ver figura 1.1). Los elementos de línea para cada onda son:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -dudv + d\vec{x}_\perp^2 + \delta(u)\Phi^+(r_+)du^2, \\ ds^2 &= -dudv + d\vec{x}_\perp^2 + \delta(v)\Phi^-(r_-)dv^2, \end{aligned} \quad (1.39)$$

donde Φ^\pm representa el perfil de las ondas que viajan desde $u \rightarrow \infty$ y $v \rightarrow -\infty$, tal que la colisión tiene lugar en $u = v = 0$. Entonces, la colisión divide el espacio-tiempo en 4 regiones (figura 1.2):

⁴Hemos omitido la notación primada por simplicidad.

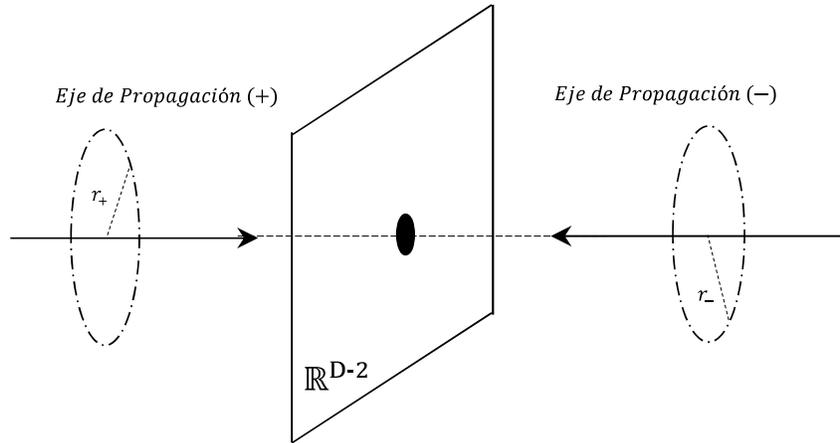


FIGURA 1.1: Esquema de Colisión para Ondas de Choque en Espacio Plano: Las colisión es frontal y se da en el espacio transversal \mathbb{R}^{D-2} .

- Región I:** Denominaremos región I al pasado causal de la colisión, esto es, los eventos que verifican $u < 0$ y $v < 0$. En esta región, existe al menos una curva temporal que conecta con la hipersuperficie de la colisión. Puesto que las ondas no interaccionan antes de la colisión, el elemento de línea en la región I viene dado como la “*superposición lineal*” de los elementos de línea (1.39), es decir,

$$ds^2 = -dudv + d\vec{x}_\perp^2 + \delta(u)\Phi^+(r_+)du^2 + \delta(v)\Phi^-(r_-)dv^2. \quad (1.40)$$

Podemos definir coordenadas de Rosen como,

$$\begin{aligned} u &= U + \Phi^-(\vec{X}_\perp)\Theta(V) + \frac{1}{4}V\Theta(V) \left[\vec{\nabla}\Phi^-(\vec{X}_\perp) \right]^2, \\ v &= V + \Phi^+(\vec{X}_\perp)\Theta(U) + \frac{1}{4}U\Theta(U) \left[\vec{\nabla}\Phi^+(\vec{X}_\perp) \right]^2, \\ \vec{x}_\perp &= \vec{X}_\perp + \frac{1}{2}U\Theta(U)\vec{\nabla}\Phi^+(\vec{X}_\perp) + \frac{1}{2}V\Theta(V)\vec{\nabla}\Phi^-(\vec{X}_\perp), \end{aligned} \quad (1.41)$$

en estas coordenadas, el elemento de línea (1.40) toma la forma,

$$ds^2 = -dUdV + \left[H_{ij}^+ H_{jk}^+ + H_{ij}^- H_{jk}^- - \delta_{ik} \right] dX^i dX^k, \quad (1.42)$$

donde se han definido H_{ij}^+ y H_{ij}^- , como:

$$\begin{aligned} H_{ij}^+ &= \delta_{ij} + \frac{1}{2}U\Theta(U)\partial_i\partial_j\Phi^+(\vec{X}_\perp), \\ H_{ij}^- &= \delta_{ij} + \frac{1}{2}V\Theta(V)\partial_i\partial_j\Phi^-(\vec{X}_\perp). \end{aligned} \quad (1.43)$$

- Región II-III:** Consideraremos las regiones II y III al conjunto de eventos que no tienen relación causal con la hipersuperficie de la colisión. Éstos son aquellos que verifican $u < 0$, $v > 0$ (región II) y $v < 0$, $u > 0$ (región III). Ya que no existe relación causal, las ondas no interaccionan y, por tanto, el elemento de línea que las describe es (1.42).

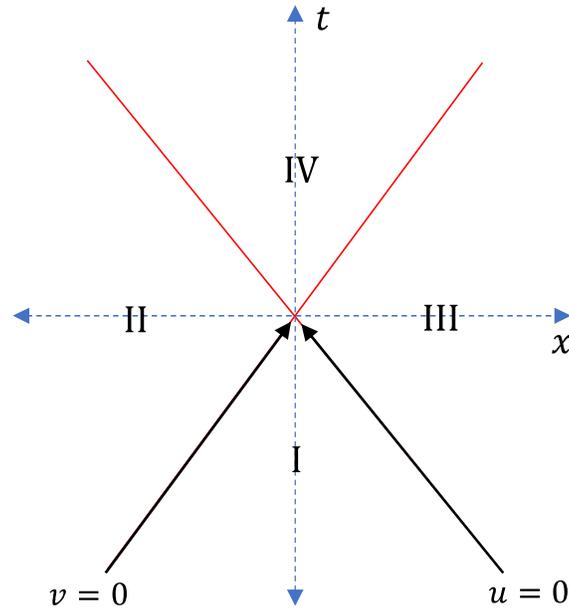


FIGURA 1.2: Cono de luz para la colisión de dos ondas gravitacionales en espacio plano. El espacio-tiempo queda dividido en 4 regiones a partir de las hipersuperficies $u = 0$ y $v = 0$. Las regiones I y IV representan el pasado y futuro de la colisión respectivamente.

- Región IV:** Son los eventos que verifican $u > 0$, $v > 0$ y representa el futuro de la colisión, i.e. cada suceso de esta región se ve afectado por lo que ocurre en la superficie de la colisión. Es necesario hacer énfasis que (1.42) no describe la región IV, ya que en ésta última las ondas interactúan y por tanto no se puede considerar una superposición lineal. Un caso particular de colisión de ondas gravitacionales en el que se ha resuelto la estructura causal en la región IV es la solución de Khan-Penrose. Ésta considera dos ondas planas en dimensión $D = 4$, con una alta simetría que permite resolver la colisión en la región IV [23]. Matemáticamente, la solución de Khan-Penrose muestra que después de una colisión puede aparecer una singularidad desnuda (ver figura 1.3).

Superficie Atrapada de Penrose

Una Superficie Atrapada⁵ \mathcal{S} es una superficie $(D - 2)$ -dimensional, cuyas normales nulas salientes tienen convergencia cero [24-26]. Nuestro interés en estudiar superficies atrapadas en la colisión de ondas gravitacionales está en que, a día de hoy, no existe un formalismo general que permita resolver de manera analítica la estructura causal en la región IV⁶. Otro camino para abordar el problema es mediante el estudio de la formación de superficies atrapadas sobre el cono de luz pasado de la colisión. Aunque no ha sido

⁵Nos interesa definir una *superficie marginalmente atrapada hacia el exterior*, a la cual nos referiremos simplemente por superficie atrapada.

⁶En principio, la complejidad de esta región surge debido a que habitualmente no hay suficiente simetría como para resolver el problema, sumado al hecho de que las ecuaciones diferenciales son no lineales, uno de los progresos más recientes (ajenos al contexto del presente trabajo) puede consultarse en [27].

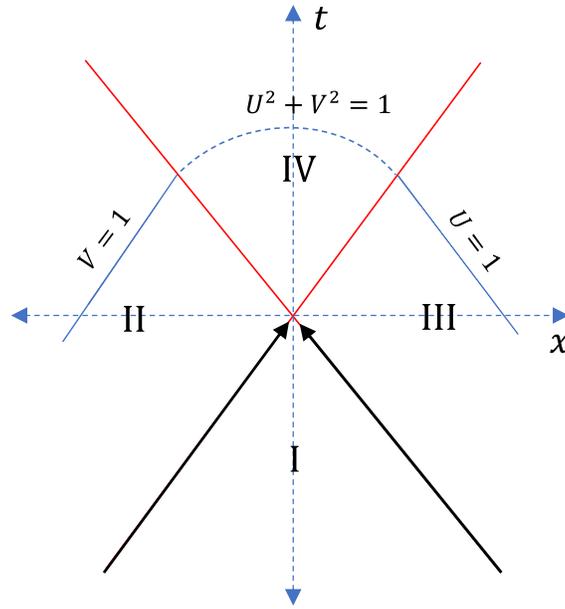


FIGURA 1.3: Estructura causal de la solución de Khan-Penrose: En la región IV aparece una singularidad de curvatura en $U^2 + V^2 = 1$.

demostrado en términos generales, es una suposición razonable asumir que la existencia de una superficie atrapada sobre el cono de luz pasado implica la evolución de la geometría hacia un horizonte de sucesos en la región IV.

En particular, Penrose describió la parametrización para una superficie atrapada sobre el cono de luz pasado de un evento físico⁷. A esta superficie la denominaremos superficie atrapada de Penrose o, simplemente, Superficie de Penrose y es en la que nos enfocaremos en este trabajo. En las referencias [18, 21, 27, 28] se da el formalismo para calcular la superficie atrapada de Penrose como la unión de dos hipersuperficies nulas, \mathcal{S}_+ y \mathcal{S}_- , parametrizadas según,

$$\mathcal{S}_+ : \begin{cases} U = 0 \\ V + \Psi_+(\vec{X}_\perp) = 0, \end{cases} \quad \Psi_+(\vec{X}_\perp)|_{\mathcal{C}} = 0, \quad (1.44)$$

$$\mathcal{S}_- : \begin{cases} V = 0 \\ U + \Psi_-(\vec{X}_\perp) = 0, \end{cases} \quad \Psi_-(\vec{X}_\perp)|_{\mathcal{C}} = 0, \quad (1.45)$$

donde $\Psi_\pm(\vec{X}_\perp) > 0$ y $\mathcal{C} = \mathcal{S}_+ \cap \mathcal{S}_-$ es una subvariedad $(D - 3)$ -dimensional en el espacio transversal a la colisión [18]. Para caracterizar \mathcal{S}_\pm , se busca un conjunto de vectores normales salientes. Sean,

$$\left(n_\mu^{(\pm)} \right) = \begin{pmatrix} n_U^{(\pm)} \\ n_V^{(\pm)} \\ \vec{n}_\perp^{(\pm)} \end{pmatrix}, \quad \left(m_\nu^{(\pm)} \right) = \begin{pmatrix} m_U^{(\pm)} \\ m_V^{(\pm)} \\ \vec{m}_\perp^{(\pm)} \end{pmatrix}, \quad (1.46)$$

⁷Penrose calculó esta superficie atrapada durante un seminario a estudiantes en el año 1974, en Cambridge. Nunca publicó nada al respecto, porque para él fue un ejercicio académico sencillo de clase.

los vectores que generan el espacio ortogonal a cada superficie \mathcal{S}_\pm . A partir de (1.44) y (1.45) se obtiene,

$$\begin{aligned} (n_\mu^{(+)}) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vec{0} \end{pmatrix}, & (m_\nu^{(+)}) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vec{\nabla}_\perp \Psi_+ \end{pmatrix}, \\ (n_\mu^{(-)}) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vec{0} \end{pmatrix}, & (m_\nu^{(-)}) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vec{\nabla}_\perp \Psi_- \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.47)$$

Por tanto, todo vector perpendicular a \mathcal{S}^\pm tendrá la forma,

$$(N_\mu^{(\pm)}) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \beta \vec{\nabla}_\perp \Psi_\pm \end{pmatrix}, \quad (N_\mu^{(-)}) = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \\ \beta \vec{\nabla}_\perp \Psi_- \end{pmatrix}, \quad (1.48)$$

donde α y β son constantes. Puesto que es necesario que el campo de vectores sea nulo, exigimos además,

$$g^{\mu\nu} N_\mu^\pm N_\nu^\pm = 0, \quad (1.49)$$

obteniendo,

$$\beta \left[\beta (\vec{\nabla}_\perp \Psi_\pm)^2 - 4\alpha \right] = 0, \quad (1.50)$$

que tiene las soluciones,

$$\beta_1 (\vec{\nabla}_\perp \Psi_\pm)^2 = 4\alpha, \quad \beta_2 = 0. \quad (1.51)$$

Sustituyendo en (1.48) se obtienen los dos campos de vectores nulos,

$$\begin{aligned} (N_+^\mu) &= \beta \begin{pmatrix} -2 \\ -\frac{1}{2}(\vec{\nabla}_\perp \Psi_+)^2 \\ \vec{\nabla}_\perp \Psi_+ \end{pmatrix}, & (M_+^\nu) &= \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ \vec{0} \end{pmatrix}, \\ (N_-^\mu) &= \beta \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(\vec{\nabla}_\perp \Psi_-)^2 \\ -2 \\ \vec{\nabla}_\perp \Psi_- \end{pmatrix}, & (M_-^\nu) &= \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ \vec{0} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.52)$$

donde hemos usado β_1 para N_\pm^μ y β_2 para M_\pm^μ . Así, los campos de vectores (1.52) son normales y nulos a las superficies \mathcal{S}_\pm . Ahora, se debe imponer los vectores estén dirigidos hacia el futuro, esto es, tomar α y β negativos. En particular, elegimos,

$$\alpha = -\frac{1}{2}, \quad \beta = -1, \quad (1.53)$$

que nos da la condición de normalización,

$$N_\pm^\mu M_\pm^\nu g_{\mu\nu} = -1. \quad (1.54)$$

Ahora imponemos que los vectores normales salientes tengan expansión cero, es decir,

$$\nabla_\mu N_\pm^\mu = 0, \quad \nabla_\mu M_\pm^\mu = 0. \quad (1.55)$$

Claramente, como todas las componentes de M_\pm^μ son constantes, su expansión es nula. Por otro lado, de la ecuación para N_\pm^μ se tiene que Ψ_\pm cumple la ecuación,

$$\Delta_\perp \Psi_\pm = -16\pi G_D \rho(\vec{X}_\perp), \quad (1.56)$$

donde Δ_\perp es el operador de Laplace-Beltrami sobre \mathbb{R}^{D-2} . La ec. (1.56) puede simplificarse usando la ec. (1.17). Entonces, \mathcal{S} es una superficie con expansión nula si las funciones Ψ_\pm verifican:

$$\Delta_\perp (\Phi_\pm - \Psi_\pm) = 0. \quad (1.57)$$

Aún falta por establecer que las dos piezas \mathcal{S}_\pm de la superficie \mathcal{S} deben unirse suavemente en $\mathcal{C} = \mathcal{S}_+ \cap \mathcal{S}_-$. Es decir, sus vectores normales N_\pm deben coincidir en \mathcal{C} . Así, igualando N_\pm en \mathcal{C} , de (1.52) tenemos,

$$\left(\vec{\nabla}_\perp \Psi_\pm\right)^2|_{\mathcal{C}} = 4, \quad \vec{\nabla}_\perp \Psi_+|_{\mathcal{C}} = \vec{\nabla}_\perp \Psi_-|_{\mathcal{C}}, \quad (1.58)$$

que pueden escribirse de forma compacta como,

$$g^{ij} \partial_i \Psi_\pm \partial_j \Psi_\pm|_{\mathcal{C}} = 4, \quad \partial_i \Psi_+|_{\mathcal{C}} = \partial_i \Psi_-|_{\mathcal{C}}. \quad (1.59)$$

Nótese que estas dos ecuaciones, implican la condición sobre \mathcal{C} ,

$$g^{ij} \partial_i \Psi_+ \partial_j \Psi_-|_{\mathcal{C}} = 4, \quad (1.60)$$

que es una condición necesaria y suficiente para asegurar (1.58) y, por tanto, la unión de N_\pm^μ en \mathcal{C} .

En resumen, en la colisión de ondas gravitacionales de choque se forma una superficie atrapada sobre el cono de luz pasado de la colisión siempre que exista una subvariedad $(D-3)$ -dimensional \mathcal{C} en el espacio espacio transversal, y dos funciones $\Psi_\pm(\vec{X}_\perp)$ dentro de \mathcal{C} , que satisfacen el problema de frontera:

$$\begin{aligned} \Delta_\perp (\Phi_\pm - \Psi_\pm) &= 0, \\ g^{ij} \partial_i \Psi_+ \partial_j \Psi_-|_{\mathcal{C}} &= 4, \\ \Psi_\pm|_{\mathcal{C}} &= 0. \end{aligned} \quad (1.61)$$

Cabe recalcar que éste es un problema de frontera muy particular, ya que la segunda condición de (1.61) indica que la frontera de la superficie atrapada es parte del problema. Es decir, ésta se ajusta dependiendo de las características de las ondas y cómo tenga lugar la colisión.

Capítulo 2

Ondas de Choque Anchas Y Modelo de Colisión

En el capítulo 1 hemos introducido el concepto de onda gravitacional en espacio plano como una solución tanto aproximada como exacta a las ecuaciones de campo (1.1), centrando principal interés en las ondas de choque. Además, hemos dado a conocer un formalismo para estudiar superficies atrapadas sobre el cono de luz pasado de la colisión de ondas de choque, en donde consideramos que de formarse una superficie de Penrose es posible la evolución de la geometría del espacio-tiempo hacia un horizonte.

Existen dos formas de obtener ondas de choque, la primera es realizando un boost sobre una métrica que sea solución conocida a las ecuaciones de campo de Einstein, y luego tomar el límite $\gamma \rightarrow \infty$, como vimos en la sección (1.3) con la solución de Aichelburg-Sexl. La segunda es considerar una densidad de energía arbitraria en la ecuación (1.17) y obtener el perfil del frente de onda. Existe una gran diferencia entre estas dos formas: la primera se puede interpretar como el campo gravitacional “comprimido”, generado por objetos que viajan a la velocidad de la luz, mientras que el segundo método dependerá completamente de la densidad de energía elegida. Es decir, si la fuente no proviene de un tensor energía momento que represente una ecuación de materia, la métrica obtenida no modela ningún fenómeno físico conocido, y sólo viene a ser un problema matemático.

La solución de Aichelburg-Sexl describe ondas originadas a partir de una fuente puntual. En este capítulo estudiaremos la formación de la superficie de Penrose cuando la fuente tiene tamaño no nulo. Denominaremos a estas ondas, Ondas de Choque Anchas, o simplemente, Ondas Anchas. En la sección 2.1 daremos el formalismo para resolver la ecuación (1.17) de forma general, haciendo uso de las funciones de Green. Mientras que en la sección 2.2, plantearemos un modelo que permita analizar la formación de la superficie de Penrose en la colisión de ondas anchas. A su vez identificaremos si existen parámetros que den un comportamiento crítico al tamaño de la superficie atrapada.

2.1. Ondas Gravitacionales de Choque Anchas

Los ondas de choque estudiadas hasta ahora consideran que la fuente es de carácter puntual, esto es, que la densidad es proporcional a la función delta de Dirac. Por otra parte, las ondas anchas toman en cuenta que la fuente tiene tamaño no nulo, y el interés en éstas es que permiten modelar fenómenos como la colisión de iones pesados ultrarelativistas.

Bajo simetría esférica en el plano transverso, la ecuación (1.17) toma la forma,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{D-3}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \Delta_{S^{D-3}} \right) \Phi(r) = -16\pi G_D \rho(r), \quad (2.1)$$

donde $\Delta_{S^{D-3}}$ es el operador de Laplace sobre la $(D-3)$ -esfera. Resolver $\Phi(r)$ puede resultar realmente complejo acorde la densidad de energía que se use. De forma general, la solución a (2.1) se puede escribir en término de la función de Green¹ $G(r, r')$ de la ec. (2.1), esto es,

$$\Phi(r) = -16\pi G_D \int d^{D-2} r' \sqrt{|g|_{r'}} G(r, r') \rho(r'), \quad (2.2)$$

tomando la integral sobre la $(D-3)$ -esfera, se sigue,

$$\Phi(r) = -16\pi G_D \Omega_{D-3} \int_0^\infty dr' r'^{(D-3)} G(r, r') \rho(r'), \quad (2.3)$$

donde Ω_{D-3} es el volumen de $(D-3)$ -esfera, y viene dado por,

$$\Omega_n = \frac{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}. \quad (2.4)$$

Definiendo $\bar{G}(r, r') = -16\pi G_D \Omega_{D-3} G(r, r')$, el perfil toma la forma,

$$\Phi(r) = \int_0^\infty dr' r'^{(D-3)} \bar{G}(r, r') \rho(r'). \quad (2.5)$$

La función de Green es, por definición, solución a la ecuación diferencial,

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{D-3}{r} \frac{d}{dr} \right) \bar{G}(r, r') = -\frac{16\pi G_D}{r^{(D-3)}} \delta(r - r'). \quad (2.6)$$

La solución a (2.6) se obtiene como suma de la solución homogénea (\bar{G}_h) y particular. Iniciamos resolviendo la EDO homogénea,

$$\left[r^{D-3} \frac{d^2}{dr^2} + (D-3)r^{D-2} \frac{d}{dr} \right] \bar{G}_h(r) = 0.$$

considerando $D = 4$ y $D \geq 5$, se tiene,

$$\bar{G}_h(r) = \begin{cases} A \log(r) + B, & D = 4 \\ C r^{4-D} + F, & D \geq 5 \end{cases}, \quad (2.7)$$

donde $A, B, C, F \in \mathbb{R}$. Ahora, nos interesa hallar la solución general $\bar{G}(r, r')$ que satisface (2.6). Proponemos el ansatz,

$$\bar{G}(r, r') = C_1(r') g_1(r) \Theta(r - r') + C_2(r') g_2(r) \Theta(r' - r), \quad (2.8)$$

¹Dada la ecuación diferencial $\hat{L}[u(x^i)] = f(x^i)$, donde \hat{L} es un operador diferencial definido sobre una variedad pseudo-Riemanniana D -dimensional (\mathcal{M}, g) , la solución viene dada por: $u(x^i) = \int d^D x' \sqrt{|g|_{x'}} G(x^i, x'^i) f(x'^i)$, siendo $G(x^i, x'^i)$ la función de Green para \hat{L} , es decir, $\hat{L} [G(x^i, x'^i)] = \frac{1}{\sqrt{|g|_x}} \delta^D(x^i - x'^i)$.

siendo: $\{g_1, g_2\}|_{D=4} = \{\log r, 1\}$, $\{g_1, g_2\}|_{D \geq 5} = \{r^{4-D}, 1\}$ y C_i para $i = 1, 2$ funciones desconocidas de r' . Nótese que para $r \rightarrow 0$ y $r \rightarrow \infty$, g_1 y g_2 divergen y convergen respectivamente, para evitar que la solución diverga se ha ponderado (2.8) con la función de Heaviside. Por otra parte, como (2.8) debe verificar ser simétrica bajo cambios de r y r' , se cumple que,

$$C_1(r')g_1(r) = C_2(r)g_2(r'), \quad \forall r, r' \in [0, \infty[, \quad (2.9)$$

esto es,

$$C_1(r') = \alpha g_2(r'), \quad C_2(r') = \alpha g_1(r'), \quad (2.10)$$

siendo $\alpha \in \mathbb{R}$ una constante a ser determinada. Entonces, (2.8) toma la forma,

$$\bar{G}(r, r') = \alpha [g_2(r')g_1(r)\Theta(r - r') + g_1(r')g_2(r)\Theta(r' - r)]. \quad (2.11)$$

Ahora, ya que $\bar{G}(r, r')$ es solución al problema, entonces debe satisfacer (2.6). Reemplazando y operando algebraicamente, obtenemos,

$$\begin{aligned} & \alpha \left\{ [g_2(r')g_1'(r) - g_1(r')g_2'(r)] + \frac{D-3}{r} [g_2(r')g_1(r) - g_1(r')g_2(r)] \right\} \delta(r - r') \\ & = -\frac{16\pi G_D}{r^{(D-3)}} \delta(r - r'). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Integrando a ambos lados de (2.12) sobre la coordenada radial, obtenemos,

$$\alpha [g_2(r')g_1'(r') - g_1(r')g_2'(r')] = -\frac{16\pi G_D}{r'^{(D-3)}}. \quad (2.13)$$

Puesto que la solución a la ecuación homogénea da dos soluciones linealmente independientes $g_{1,2}$. Los valores de α son,

$$\alpha = \begin{cases} -16\pi G_4, & D = 4, \\ \frac{16\pi G_D}{D-4}, & D \geq 5. \end{cases} \quad (2.14)$$

Entonces, la función de Green es de la forma,

$$\begin{aligned} \bar{G}(r, r')|_{D=4} &= -16\pi G_4 [\log(r)\Theta(r - r') + \log(r')\Theta(r' - r)], \\ \bar{G}(r, r')|_{D \geq 5} &= \frac{16\pi G_D}{D-4} [r^{-(D-4)}\Theta(r - r') + r'^{-(D-4)}\Theta(r' - r)]. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Cuando $\rho(r')$ tiene soporte compacto en el espacio transversal, podemos conocer el comportamiento asintótico del perfil (2.5) para $r \gg r'$. En este caso $\Phi(r)$ sólo recibe contribución de la función de Green $G(r, r')$ con $r > r'$, entonces,

$$\begin{aligned} \Phi(r)|_{D=4} &\sim -16\pi G_4 \log(r) \int_0^\infty dr' r' \rho(r'), \\ \Phi(r)|_{D \geq 5} &\sim \frac{16\pi G_D}{(D-4)r^{D-4}} \int_0^\infty dr' r'^{(D-3)} \rho(r'), \end{aligned} \quad (2.16)$$

dado que,

$$\int_0^\infty dr r^{D-3} = \frac{1}{\Omega_{D-3}} \int_{\mathbb{R}^{D-2}} d^{D-2} \vec{x}_\perp \sqrt{|g|_x}, \quad (2.17)$$

podemos escribir (2.16), como,

$$\begin{aligned}\Phi(r)|_{D=4} &\sim -8G_4 \log(r) \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \vec{x}'_{\perp} \sqrt{|g|_{x'}} \rho(\vec{x}'_{\perp}), \\ \Phi(r)|_{D \geq 5} &\sim \frac{16\pi G_D}{(D-4)\Omega_{D-3} r^{D-4}} \int_{\mathbb{R}^{D-2}} d^{D-2} \vec{x}'_{\perp} \sqrt{|g|_{x'}} \rho(\vec{x}'_{\perp}).\end{aligned}\quad (2.18)$$

Definiendo la energía total de la distribución de la fuente que es medida por un observador que se localiza a lo largo del frente de onda, como,

$$\bar{E} = \int_{\mathbb{R}^{D-2}} d^{D-2} \vec{x}'_{\perp} \sqrt{|g|_{x'}} \rho(\vec{x}'_{\perp}), \quad (2.19)$$

el perfil (2.18) toma la forma,

$$\begin{aligned}\Phi(r)|_{D=4} &\sim -8G_4 \log(r) \bar{E}, \\ \Phi(r)|_{D \geq 5} &\sim \frac{16\pi G_D}{(D-4)\Omega_{D-3} r^{D-4}} \bar{E}.\end{aligned}\quad (2.20)$$

Donde $\Phi(r) \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow \infty$ para $D \geq 5$, mientras que para $D = 4$ encontramos un comportamiento divergente cuando $r \rightarrow \infty$. Como caso particular para el boost de Aichelburg-Sexl, la densidad de energía es,

$$\rho(r) = \frac{\mu}{\Omega_{D-3} r^{D-3}} \delta(r), \quad D \geq 4. \quad (2.21)$$

Usando (2.21), la energía total es,

$$\bar{E} = \mu. \quad (2.22)$$

Así, la energía relativista μ coincide con la definición (2.19). Finalmente, el perfil de onda es,

$$\begin{aligned}\Phi(r)|_{D=4} &\sim -8G_4 \mu \log(r), \\ \Phi(r)|_{D \geq 5} &\sim \frac{16\pi G_D \mu}{\Omega_{D-3} (D-4) r^{D-4}},\end{aligned}\quad (2.23)$$

que coincide con el resultado obtenido en (1.37)². Si bien, (2.23) es un resultado aproximado, pero ya que (2.21) tiene soporte compacto, ésta se anula para $r \neq 0$ y, por tanto, (1.37) y (2.23) son iguales.

Ahora que se ha conseguido una solución general, la idea es extender la fuente a aquello que no sea puntual y que a su vez permita describir objetos o fenómenos con tamaño no nulo, esto es, considerar densidades que den lugar a energías \bar{E} finitas con un soporte no nulo. Para ello, supongamos densidades del tipo,

$$\rho(r) = \frac{\mu}{\Omega_{D-3} r^{D-3}} F(\omega, r), \quad (2.24)$$

siendo ω un parámetro que mide el “ancho” de la fuente y $F(\omega, r)$ una *Función de Forma* que determina cuánto se ha extendido la densidad de energía, y que verifica la condición de normalización [13, 28],

$$\int_0^{\infty} dr F(\omega, r) = 1, \quad (2.25)$$

²Para $D \geq 5$ se puede consultar la referencia [18].

por completitud, exigiremos que $F(\omega, r)$ sea una regularización de la delta de Dirac, esto es, que cumpla,

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} F(\omega, r) = \delta(r). \quad (2.26)$$

Nótese que $F(\omega, r)$ no necesariamente tiene soporte compacto, sin embargo la ecuación (2.20) sigue siendo válida siempre y cuando $F(\omega, r)$ caiga rápidamente a cero. En general, los fenómenos físicos reales involucran fuentes que poseen tamaño no nulo, que a partir del modelo planteado pueden ser consideradas. En particular, las ondas anchas son de gran interés, ya que al tener fuentes generalizadas, el fenómeno de colisión cambia drásticamente y el factor ω puede jugar un rol relevante en la formación de la superficie atrapada de Penrose. Como se detalló en la subsección 1.4.1, la superficie atrapada no siempre aparece y para el caso de ondas anchas, ésta puede o no tomar lugar después de la colisión. Específicamente pueden aparecer valores críticos de ω para los cuales, la superficie atrapada no se forma.

2.2. Superficie de Penrose para Ondas Anchas

En esta sección, seguiremos el desarrollo hecho previamente en [28], adaptado al espacio plano. Para una colisión frontal, $\Phi_+ = \Phi_- = \Phi$ y $\Psi_+ = \Psi_- = \Psi$, se tiene entonces simetría esférica $SO(D-2)$ y en estas condiciones, \mathcal{C} es una esfera de $(D-3)$ -dimensiones. Entonces, las ecuaciones (1.61) toman la forma,

$$\begin{aligned} \Delta_{\perp}(\Phi - \Psi) &= 0, \\ \partial_r \Psi(r_0)|_{\mathcal{C}} &= -2, \\ \Psi(r_0)|_{\mathcal{C}} &= 0, \end{aligned} \quad (2.27)$$

donde r_0 es el tamaño de \mathcal{C} . Además se ha tomado el valor negativo de la raíz para la segunda condición, ya que Ψ es semidefinida positiva dentro de \mathcal{C} y por tanto $\Psi'(r_0) \leq 0$. La primera ecuación, en coordenadas esféricas, es,

$$\Delta_{\perp} \Psi = \Delta_{\perp} \Phi \Rightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{D-3}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \Delta_{S^{D-3}} \right) \Psi(r) = -16\pi G_D \rho(r), \quad (2.28)$$

siendo su solución la combinación lineal de la solución homogénea y la función Φ del tipo (2.5). Entonces,

$$\Psi(r) = \Phi(r) + C_1 g_1(r) + C_2 g_2(r), \quad (2.29)$$

con,

$$\{g_1, g_2\}|_{D=4} = \{\log r, 1\} \quad y \quad \{g_1, g_2\}|_{D \geq 5} = \{r^{4-D}, 1\}. \quad (2.30)$$

Ya que g_1 diverge para $r = 0$, se exige $C_1 = 0$. Usando la tercera condición de (2.27), obtenemos,

$$C_2 = -\Phi(r_0).$$

Entonces, la solución para Ψ es,

$$\Psi(r) = \Phi(r) - \Phi(r_0). \quad (2.31)$$

Aplicando la condición sobre la derivada se sigue,

$$\Phi'(r_0) = -2. \quad (2.32)$$

Sustituyendo (2.5) con las funciones de Green (2.15) en (2.32), es claro que,

$$8\pi G_4 \int_0^\infty dr' r' \rho(r') \left[\frac{\Theta(r-r')}{r} + \log(r)\delta(r-r') - \log(r')\delta(r'-r) \right] \Big|_{r_0} = 1, \quad (2.33)$$

para $D = 4$, mientras que para $D \geq 5$ tenemos,

$$-\frac{8\pi G_D}{D-4} \int_0^\infty dr' r'^{(D-3)} \rho(r') \left[-\frac{(D-4)\Theta(r-r')}{r^{D-3}} + \frac{\delta(r-r')}{r^{D-4}} - \frac{\delta(r'-r)}{r'^{(D-4)}} \right] \Big|_{r_0} = 1. \quad (2.34)$$

Las dos últimas integrales se anulan por las propiedades de la función delta. Por otra parte, la primera integral es no nula sólo para $r' \leq r$, por la función de Heaviside. Escribiendo de forma compacta se tiene,

$$\frac{8\pi G_D}{\Omega_{D-3}} E(r_0) = r_0^{D-3}, \quad D \geq 4, \quad (2.35)$$

donde se ha definido la energía $E(r_0)$, como,

$$\bar{E}(r_0) = \Omega_{D-3} \int_0^{r_0} dr r^{D-3} \rho(r). \quad (2.36)$$

Comparando (2.19) con (2.36), se puede interpretar $\bar{E}(r_0)$ como la energía disponible dentro de un radio r_0 en el espacio transversal \mathbb{R}^{D-2} [21].

En resumen, el problema (2.27) tiene solución, y la superficie de Penrose se forma después de la colisión, siempre y cuando exista un valor r_0 que resuelve la ecuación transcendental (2.35). Con el fin de determinar r_0 para un caso ya estudiado, consideremos la solución de Aichelburg-Sexl. Integrando la densidad (2.21), la ec. (2.35) siempre tiene solución, dada por,

$$r_0 = \left(\frac{8\pi G_D \mu}{\Omega_{D-3}} \right)^{\frac{1}{D-3}}, \quad D \geq 4. \quad (2.37)$$

Por tanto, para una onda de choque con fuente puntual, la superficie de Penrose siempre surge después de la *colisión frontal*, i.e. no hay parámetros críticos.

Consideremos el caso más general de una onda de choque ancha. Sustituyendo (2.24) en (2.35), tenemos,

$$\frac{8\pi G_D \mu}{\Omega_{D-3}} \int_0^{r_0} dr F(\omega, r) = r_0^{D-3}. \quad (2.38)$$

Eliminando la dependencia de r_0 en los límites de integración mediante el cambio de variable $r = u r_0 \rightarrow dr = r_0 du$, se sigue,

$$r_0 \int_0^1 du F(\omega, u r_0) = \frac{\Omega_{D-3}}{8\pi G_D \mu} r_0^{D-3}. \quad (2.39)$$

A partir de esta expresión, se puede estudiar si se forma la superficie atrapada. De (2.25) se sigue que en el límite $r_0 \rightarrow \infty$, la integral del lado izquierdo de (2.39) converge a,

$$\lim_{r_0 \rightarrow \infty} r_0 \int_0^1 du F(\omega, u r_0) = 1, \quad (2.40)$$

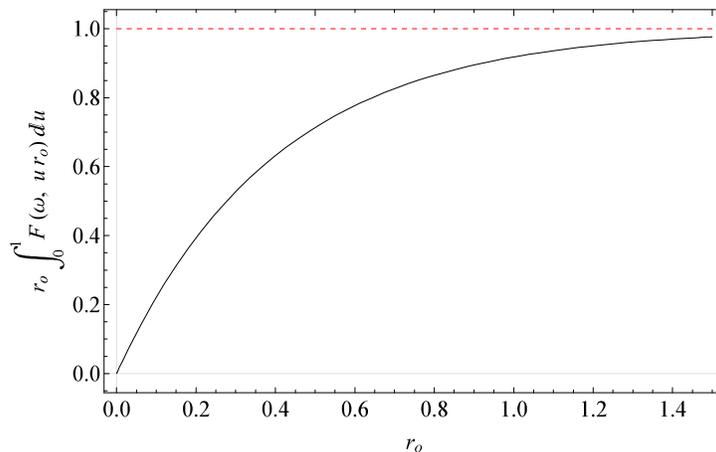


FIGURA 2.1: Comportamiento del Tamaño de la Superficie de Penrose en Ondas Gravitacionales de Choque Anchas: Para valores pequeños de r_0 se tiene un comportamiento lineal y conforme este incrementa tiende a saturarse hasta converger a 1.

de modo que se satura a 1. Por otra parte, para $r_0 \sim 0$ se aproxima por,

$$r_0 \int_0^1 du F(\omega, u r_0) \simeq F(\omega, 0) r_0, \quad (2.41)$$

dando un comportamiento lineal, cuya pendiente está regulada por el ancho ω de la fuente (ver figura 2.1). Para saber si existe o no solución a la ecuación (2.39) es necesario separar por casos y estudiar en cada dimensión.

2.2.1. Formación de la Superficie de Penrose en $D = 4$

En dimensión $D = 4$, la ec. (2.39) toma la forma,

$$r_0 \int_0^1 du F(\omega, u r_0) = \frac{r_0}{4G_4\mu}, \quad (2.42)$$

donde la parte derecha corresponde a una recta de pendiente $(4G_4\mu)^{-1}$. Entonces, la existencia de 2, 1 o ninguna solución depende de la relación entre ω y μ (ver figura 2.2). Existe por tanto un valor crítico $\omega = \omega_c$ a partir del cual no es posible la formación de la superficie atrapada. Sí, en el caso crítico $\omega = \omega_c$, se forma una superficie atrapada con tamaño r_c suficientemente pequeño, de (2.41) tenemos,

$$F(\omega_c, 0) \simeq \frac{1}{4G_4\mu}. \quad (2.43)$$

Para el caso en que $\omega > \omega_c$ no existe punto alguno de corte, ya que la recta nunca intersectaría a la curva del lado derecho de (2.42), mientras que sí $\omega < \omega_c$ debe existir al menos un punto donde se tenga un corte. Por otra parte, cuando $r_0 \rightarrow \infty$, buscamos la intersección entre una constante y una recta (ver figura 2.2).

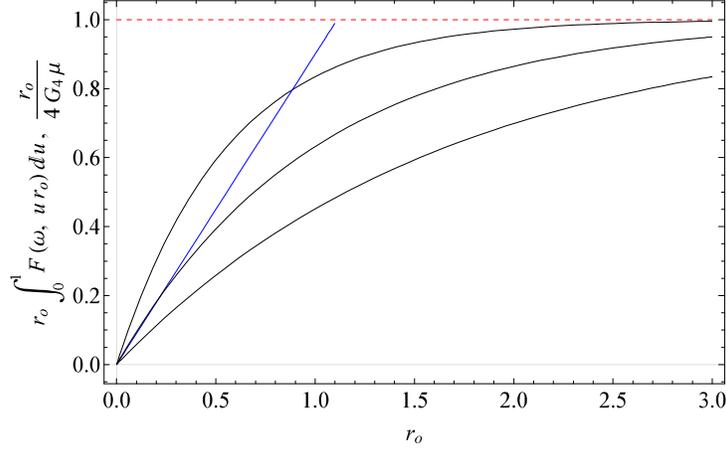


FIGURA 2.2: Comportamiento del tamaño de la superficie de Penrose en función del ancho de la fuente ω : La recta azul corresponde al lado derecho de la ecuación (2.42) para $4G_4\mu = 1$, mientras que el lado izquierdo viene dado por las 3 curvas negras: $\omega < \omega_c$ (curva superior), $\omega = \omega_c$ y para $\omega > \omega_c$ (curva inferior).

Se puede calcular como cambia el tamaño de la superficie atrapada cerca del caso crítico $\omega = \omega_c$. Definiendo r_c como al tamaño que alcanza la superficie de Penrose cuando $\omega = \omega_c$ y $G(\omega, r_c)$ como la función,

$$G(\omega, r_c) = r_c \int_0^1 du F(\omega, u r_c) - \frac{r_c}{4G_4\mu}. \quad (2.44)$$

se tiene que en el punto crítico³,

$$G(\omega_c, r_c) = 0, \quad G^{(0,1)}(\omega_c, r_c) = 0. \quad (2.45)$$

Ya que (2.42) es diferenciable en su dominio, ésta es analítica en r_c y admite una expansión en serie alrededor de este punto, entonces, para una superficie de tamaño r_0 cercana al tamaño crítico r_c , tenemos

$$\begin{aligned} G(\omega, r_0) &= G(\omega_c, r_c) + G^{(0,1)}(\omega_c, r_c)(r_0 - r_c) + G^{(1,0)}(\omega_c, r_c)(\omega - \omega_c) \\ &+ \frac{1}{2!} \left[G^{(0,2)}(\omega_c, r_c)(r_0 - r_c)^2 + G^{(2,0)}(\omega_c, r_c)(\omega - \omega_c)^2 + \dots \right], \end{aligned} \quad (2.46)$$

usando las condiciones (2.45) y resolviendo $G(\omega, r_0) = 0$, para $\omega \lesssim \omega_c$ se obtiene,

$$r_0 - r_c \simeq \sqrt{\frac{2G^{(1,0)}(\omega_c, r_c)}{G^{(0,2)}(\omega_c, r_c)}} (\omega_c - \omega)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.47)$$

donde se ha prescindido de aportes cuya potencia sea superior a la segunda para $\omega_c - \omega$. Así, se obtiene un exponente crítico $\gamma_4 = \frac{1}{2}$ para el tamaño de la superficie atrapada crítica en función de ω [28].

³Se ha usado la notación supra-indices para las derivadas parciales:

$$\frac{\partial^n G}{\partial \omega^n} = G^{(n,0)}(\omega, r_c), \quad \frac{\partial^n G}{\partial r_c^n} = G^{(0,n)}(\omega, r_c), \quad \frac{\partial^n}{\partial \omega^n} \left(\frac{\partial^m G}{\partial r_c^m} \right) = G^{(n,m)}(\omega, r_c).$$

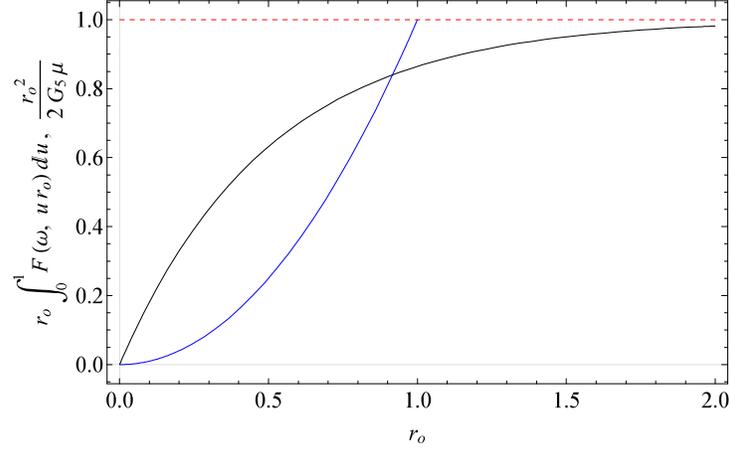


FIGURA 2.3: Comportamiento del tamaño de la superficie de Penrose en función del ancho de la fuente ω : La recta azul corresponde al lado derecho de la ecuación (2.42) para $2G_5\mu = 1$, mientras que el lado izquierdo viene dado por la curva negra.

2.2.2. Formación de la Superficie de Penrose en $D = 5$

En dimensión $D = 5$, la ec. (2.39) viene dada por,

$$r_0 \int_0^1 du F(\omega, u r_0) = \frac{r_0^2}{2G_5\mu}, \quad (2.48)$$

donde el lado derecho corresponde a una función cuadrática de pendiente $(2G_5\mu)^{-1}$. Ésto, claramente resulta en la solución trivial y dos valores no nulos de r_0 . Entonces, podemos aproximar las soluciones, si $r_0 \sim 0$, tenemos,

$$r_0 \simeq 2G_5\mu F(\omega, 0). \quad (2.49)$$

Análogamente, de (2.40) se sigue que r_0 converge a,

$$r_0 = \sqrt{2G_5\mu}. \quad (2.50)$$

Por tanto, siempre existe un valor de ω para el cual es posible hallar solución a la ec. (2.48), es decir, la superficie de Penrose siempre se forma en $D = 5$ (ver figura 2.3).

2.2.3. Formación de la Superficie de Penrose en $D \geq 6$

Para dimensiones superiores ($D \geq 6$) existen como mucho dos valores de r_0 no triviales que solucionan (2.39). En particular, si $r_0 \sim 0$, el tamaño de la superficie de Penrose se aproxima por,

$$r_0 \simeq \left[4\pi^{\frac{4-D}{2}} G_D \mu \Gamma\left(\frac{D-2}{2}\right) F(\omega, 0) \right]^{\frac{1}{D-4}}, \quad (2.51)$$

mientras que para $r_0 \rightarrow \infty$, se tiene,

$$r_0 = \left[4\pi^{\frac{4-D}{2}} G_D \mu \Gamma\left(\frac{D-2}{2}\right) \right]^{\frac{1}{D-3}}. \quad (2.52)$$

Por tanto, para $D > 4$ las ondas de choque no exhiben criticalidad, i.e. la superficie de Penrose siempre surge en la colisión frontal sin importar la magnitud de ω . Cabe resaltar que el análisis aquí realizado es genérico, ya que dependiendo de la *función de forma*, ésto puede verse alterado puesto que, se ha considerado que el lado izquierdo de (2.39) no varía a medida que la dimensión lo hace.

Capítulo 3

Modelo para Iones Pesados Ultrarelativistas

En los capítulos anteriores hemos expuesto la naturaleza de las ondas de choque, así como el fenómeno de colisión, y el formalismo matemático para resolver el problema. Dicho análisis fue extendido con el fin de estudiar casos cuyo tamaño sea no nulo. Sin embargo, no por tratarse de ondas cuya fuente no es puntual, éstas son capaces de modelar eventos físicos.

En este capítulo, plantearemos dos modelos para la producción de micro agujeros negros en la colisión de iones pesados ultrarelativistas a muy altas energías. En la sección 3.1 daremos el formalismo general para obtener la fuente $\rho(\vec{x}_\perp)$ en el espacio transverso para un ión pesado ultrarelativista, a partir de un tensor energía momento genérico, mientras que en las secciones 3.2 y 3.3 calcularemos la fuente para la esfera sólida y el modelo de Woods-Saxon, respectivamente. Así mismo, en la sección 3.4 examinaremos los modelos planteados, y en 3.5 y 3.6, estudiaremos la formación de la superficie de Penrose y su comportamiento para la esfera sólida y el modelo de Woods-Saxon, respectivamente.

3.1. Densidad de Energía para la Distribución Nuclear

La distribución de los nucleones tiende a ser prácticamente constante dentro del núcleo atómico [29], esto es, que varía únicamente en los bordes. Para modelar hemos propuesto, en primera aproximación, un modelo de *Esfera Sólida*, es decir, densidad constante y radio nuclear R . Sin embargo, ya que la densidad cae en los bordes del núcleo, se ha implementado como corrección el modelo de Woods-Saxon, que permite considerar que ésta no se corta bruscamente en un radio determinado, sino que se extiende al infinito. En base a los modelos descritos, calcularemos la densidad de energía en el espacio transverso a partir del tensor energía-momento para un núcleo en reposo, tomando el límite $\gamma \rightarrow \infty$, sobre un boost en la dirección de propagación.

Sea $\rho(r)$ la densidad de energía de un ión pesado en reposo. Entonces, el tensor energía-momento viene dado por,

$$T_{00} = \rho(r) = \rho_0 f(r), \quad r = \sqrt{x^2 + \vec{x}_\perp^2} \geq 0, \quad (3.1)$$

donde ρ_0 es una constante con unidades de densidad de energía, f una función arbitraria definida sobre \mathbb{R}^{D-1} , y x la dirección de propagación. Para conseguir que el ión se mueva

a velocidades cercanas a la de la luz, tomamos el boost,

$$t \rightarrow t = \gamma(t' + \beta x'), \quad x \rightarrow x = \gamma(x' + \beta t'), \quad \vec{x}_\perp \rightarrow \vec{x}'_\perp, \quad (3.2)$$

siendo r ,

$$r^2 = x^2 + \vec{x}_\perp^2 \quad \rightarrow \quad r'^2 = \gamma^2(x' + \beta t')^2 + \vec{x}'_\perp^2. \quad (3.3)$$

Introduciendo las coordenadas nulas u' y v' , las componentes del tensor energía momento son,

$$T_{u'u'} = \frac{\gamma^2(1 + \beta)^2}{4} T_{00}(r'), \quad T_{v'v'} = \frac{\gamma^2(1 - \beta)^2}{4} T_{00}(r'). \quad (3.4)$$

Para que el núcleo se mueva a la velocidad de la luz, se toma el límite $\gamma \rightarrow \infty$ con $\bar{\rho}_0 = \gamma \rho_0$ constante (análogo al proceso realizado en la sección 1.3). Así, se sigue que $T_{v'v'}$ se anula,

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} T_{v'v'} = \bar{\rho}_0 \lim_{\beta \rightarrow 1} \frac{(1 - \beta)^2}{4} \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \gamma f \left(\sqrt{\gamma^2(x' + \beta t')^2 + \vec{x}'_\perp^2} \right), \quad (3.5)$$

haciendo uso del resultado del apéndice A, se obtiene el límite,

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \gamma f(r') = \delta(u') \int_{-\infty}^{\infty} d\eta f \left(\sqrt{\eta^2 + \vec{x}'_\perp^2} \right) < \infty, \quad (3.6)$$

tal que,

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} T_{v'v'} = 0. \quad (3.7)$$

Para la componente $T_{u'u'}$ se sigue,

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} T_{u'u'} = \bar{\rho}_0 \int_{-\infty}^{\infty} d\eta f \left(\sqrt{\eta^2 + \vec{x}'_\perp^2} \right) \delta(u'). \quad (3.8)$$

Comparando con (1.16), la densidad de energía del espacio transverso¹ es,

$$\rho(\vec{x}_\perp) = \bar{\rho}_0 \int_{-\infty}^{\infty} d\eta f \left(\sqrt{\eta^2 + \vec{x}'_\perp^2} \right). \quad (3.9)$$

Nótese que la densidad (3.9) es general, y describe un ión pesado ultrarelativista, para el cual la contracción Lorentz ha deformado la distribución de energía a tal punto que el frente de onda es infinitamente delgado y está contenido en un plano $(D - 2)$ -dimensional. Así, en $D = 4$ estaría contenido en un plano de dos dimensiones.

3.2. Modelo de Esfera Sólida

Consideremos que el núcleo atómico es una esfera maciza de densidad constante y radio R , tal que los nucleones se distribuyen de forma homogénea. Entonces, para núcleos pesados en reposo, la densidad de energía es de la forma,

$$T_{00} = \rho_0 \Theta \left(\frac{R^2 - r^2}{\alpha^2} \right), \quad (3.10)$$

¹Se ha omitido la notación primada por simplicidad.

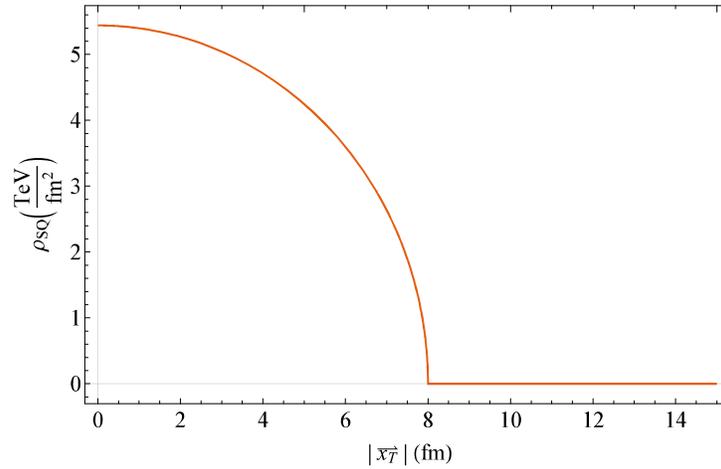


FIGURA 3.1: Densidad de Energía (3.11) con Distribución de Heaviside en Función de las Coordenadas Transversas: Se consideró $R = 8fm$, ya que el elemento más pesado *sintético* posee número másico $A = 266$. Además, en el LHC la energía de un ión pesado es $E \approx 575TeV$ tal que $\bar{\rho}_0 \approx 0,34TeV/fm^2$.

donde $R = r_0 A^{1/3}$ es el radio nuclear, siendo $r_0 = 1,25fm$ con A el número másico [29], y α es un parámetro adimensional². Ya que se busca iones pesados ultrarelativistas, basta aplicar el formalismo desarrollado en la sección 3.1, tal que la densidad de energía transversa viene dada por,

$$\rho_{SQ}(\vec{x}_\perp) = \bar{\rho}_0 \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \Theta\left(\frac{R^2 - \vec{x}_\perp^2 - \eta^2}{\alpha^2}\right) = 2\bar{\rho}_0 \sqrt{R^2 - \vec{x}_\perp^2} \Theta\left(\frac{R^2 - \vec{x}_\perp^2}{\alpha^2}\right). \quad (3.11)$$

El comportamiento de la expresión (3.11) se muestra en la figura 3.1, en donde se observa que la densidad de energía cae bruscamente en los bordes.

3.3. Modelo de Woods-Saxon

El modelo de tipo Heaviside describe la densidad nuclear de forma burda. Sin embargo, ésta no es del todo constante ya que en los bordes cae suavemente. Como otra opción que mejora el modelo en este sentido, proponemos un modelo construido sobre el potencial de Woods-Saxon, esto es, plantear la densidad de energía,

$$T_{00}(r) = \frac{\rho_0}{1 + e^{\frac{r-R}{a}}}, \quad r \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, \quad (3.12)$$

donde ρ_0 y R son los mismos parámetros descritos en (3.10), mientras que a es una medida del “grosor” de la superficie nuclear. Considerando el caso ultrarelativista y (3.9), obtenemos la densidad de energía transversa,

$$\rho_{WS}(\vec{x}_\perp) = 2\bar{\rho}_0 \int_0^{\infty} \frac{d\eta}{1 + e^{\frac{\sqrt{\eta^2 + \vec{x}_\perp^2} - R}{a}}}. \quad (3.13)$$

²Se añade con el fin de que la función de Heaviside no tenga dimensiones en su argumento, pero no juega ningún rol físico.

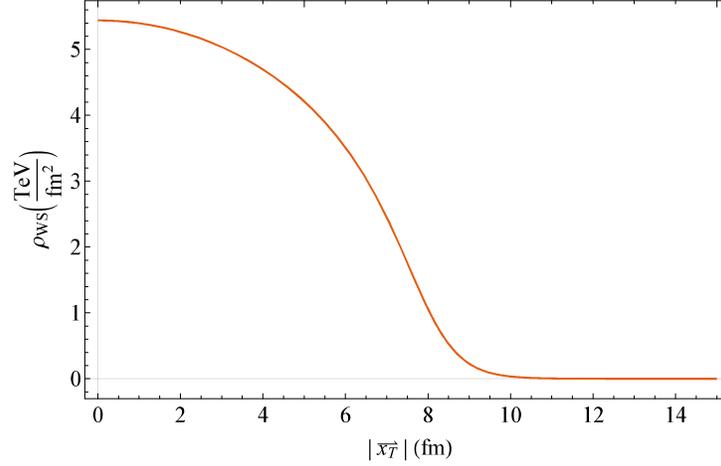


FIGURA 3.2: Integración por Doble Exponencial para la Densidad de Energía (3.13) con Distribución de Woods-Saxon: Se ha usado $R = 8fm$, $a = 0,535fm$ y $\bar{\rho}_0 \approx 0,34TeV/fm^2$.

Desafortunadamente la expresión (3.13) no tiene una primitiva directa, pero la integral puede aproximarse mediante métodos numéricos³. En la figura 3.2 se muestra el resultado llevando a cabo una integración Doble Exponencial⁴. Nótese que la distribución de la densidad de energía en el espacio transversal para las figuras 3.1 y 3.2 son semejantes, con la excepción de que la primera es más burda debido a que la aproximación no considera que la densidad no es constante en los bordes. Sin embargo en primera instancia, es un modelo decente para describir la distribución de los nucleones.

3.4. Energía Total para Iones Pesados Ultrarelativistas

Una magnitud de interés es la energía total que tendría un ión pesado bajo las densidades (3.11) y (3.13). Podemos definirla como,

$$E = \int_{\mathbb{R}^{D-2}} d^{D-2}\vec{x}_\perp \sqrt{|g|_{x_\perp}} \rho(\vec{x}_\perp), \quad (3.14)$$

donde hemos integrado sobre el espacio transversal \mathbb{R}^{D-2} .

■ Energía Total para Esfera Sólida

Para el modelo de esfera sólida tenemos,

$$E_{SQ} = 2\bar{\rho}_0 \int_{\mathbb{R}^{D-2}} d^{D-2}\vec{x}_\perp \sqrt{|g|_{x_\perp}} \sqrt{R^2 - \vec{x}_\perp^2} \Theta\left(\frac{R^2 - \vec{x}_\perp^2}{\alpha^2}\right). \quad (3.15)$$

³Se tomó el cambio de variable $\eta = \tan(\theta)$, tal que (3.13) toma la forma,

$$\rho_{WS}(\vec{x}_\perp) = 2\bar{\rho}_0 |\vec{x}_\perp| \int_0^{\pi/2} d\theta \frac{\sec^2 \theta}{1 + e^{\frac{|\vec{x}_\perp| \sec \theta - R}{a}}}.$$

⁴El error decae exponencialmente con el número de puntos de integración N , mientras que los métodos usuales lo hacen de forma polinómica como N^{-k} con $k \in \mathbb{Z}^+$ [30]: $error \sim e^{-\frac{N}{\log(N)}}$

Tomando coordenadas sobre la $(D - 3)$ -esfera e integrando sobre el ángulo sólido, obtenemos,

$$E_{SQ} = 2\bar{\rho}_0 \Omega_{D-3} \int_0^\infty dr r^{D-3} \sqrt{R^2 - r^2} \Theta \left(\frac{R^2 - r^2}{\alpha^2} \right). \quad (3.16)$$

Nótese que la expresión es no nula sólo para valores entre 0 y R . Por tanto,

$$E_{SQ} = \frac{2\bar{\rho}_0 \pi^{\frac{D-1}{2}} R^{D-1}}{\Gamma\left(\frac{D-1}{2}\right) D-1}. \quad (3.17)$$

La ecuación (3.17) crece monótonamente con el radio nuclear con potencia $(D - 1)$. Para $D = 4$ se tiene $R = r_0 A^{1/3}$ y por tanto el comportamiento es lineal con el número másico.

■ Energía total para Densidad con Woods-Saxon

Tomando el modelo de Woods-Saxon con densidad de energía (3.13), tenemos,

$$E_{WS} = \bar{\rho}_0 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^{D-2}} d\eta d^{D-2} \vec{x}_\perp \frac{\sqrt{|g|_{x_\perp}}}{1 + e^{\frac{\sqrt{\eta^2 + \vec{x}_\perp^2} - R}{a}}}. \quad (3.18)$$

Nótese que la integral se lleva a cabo en \mathbb{R}^{D-1} , ya que debemos integrar también sobre η . Considerando coordenadas sobre la $(D - 2)$ -esfera de radio au , con u un parámetro adimensional, se sigue que,

$$(au)^2 = \eta^2 + \vec{x}_\perp^2. \quad (3.19)$$

Integrando sobre el ángulo sólido, la expresión (3.18) toma la forma,

$$\begin{aligned} E_{WS} &= \bar{\rho}_0 a^{D-1} \Omega_{D-2} \int_0^\infty du \frac{u^{D-2}}{1 + e^{u - \frac{R}{a}}}, \\ E_{WS} &= -\bar{\rho}_0 a^{D-1} \frac{2\pi^{\frac{D-1}{2}} \Gamma(D-1)}{\Gamma\left(\frac{D-1}{2}\right)} Li_{D-1} \left(-e^{\frac{R}{a}} \right). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Donde hemos introducido la función polilogarítmica, definida como,

$$Li_{s+1}(-e^x) = -\mathcal{F}_s(x), \quad (3.21)$$

con \mathcal{F}_s la integral de Fermi-Dirac,

$$\mathcal{F}_s(x) = \frac{1}{\Gamma(s+1)} \int_0^\infty dt \frac{t^s}{1 + e^{t-x}}. \quad (3.22)$$

La energía (3.20) depende del radio nuclear, el *grosor* de la superficie nuclear “ a ”, la densidad de energía relativista $\bar{\rho}_0$ y la dimensión del espacio. Esta magnitud tiende a ser mayor conforme D crece, pero siempre es finita.

3.5. Superficie Atrapada de Penrose para Esfera Sólida

Calcular la superficie atrapada sobre el cono de luz pasado de la colisión se reduce a resolver el problema de frontera (2.27) con densidad (3.11). La superficie de Penrose aparece después de la colisión siempre que exista un valor r_0 para el tamaño de la subvariedad \mathcal{C} que resuelva la ecuación trascendental (2.35). Para la densidad $\rho_{SQ}(r)$ de (2.35), esta ecuación es,

$$\int_0^{r_0} dr r^{D-3} \sqrt{R^2 - r^2} \Theta \left(\frac{R^2 - r^2}{\alpha^2} \right) = \frac{r_0^{D-3}}{16\pi G_D \bar{\rho}_0}. \quad (3.23)$$

Definiendo las variables adimensionales,

$$\bar{r} = \frac{r}{\alpha}, \quad \bar{R} = \frac{R}{\alpha}, \quad \bar{\rho}_D = 16\pi G_D \bar{\rho}_0 \alpha^2, \quad (3.24)$$

la ec. (3.23) toma la forma,

$$\int_0^{\bar{r}_0} d\bar{r} \bar{r}^{D-3} \sqrt{\bar{R}^2 - \bar{r}^2} \Theta \left(\bar{R}^2 - \bar{r}^2 \right) = \frac{\bar{r}_0^{D-3}}{\bar{\rho}_D}. \quad (3.25)$$

La primitiva de (3.25) viene dada en términos de la función hipergeométrica de Gauss⁵,

$$\bar{R} \frac{\bar{r}_0^{D-2}}{D-2} {}_2F_1 \left(-\frac{1}{2}; \frac{D-2}{2}; \frac{D}{2}; \frac{\bar{r}_0^2}{\bar{R}^2} \right) = \frac{\bar{r}_0^{D-3}}{\bar{\rho}_D}, \quad \forall \bar{r}_0 < \bar{R}, \quad 4 \leq D. \quad (3.27)$$

Nótese que la expresión obtenida nos da una condición fuerte sobre el tamaño de \mathcal{C} , ya que, para asegurar la convergencia de la función hipergeométrica, \bar{r}_0 no debe exceder el radio nuclear. Se puede estudiar el comportamiento⁶ de la ecuación (3.27), para $\bar{r}_0 \rightarrow \bar{R}$,

$$\lim_{\bar{r}_0 \rightarrow \bar{R}} \bar{R} \frac{\bar{r}_0^{D-2}}{D-2} {}_2F_1 \left(-\frac{1}{2}; \frac{D-2}{2}; \frac{D}{2}; \frac{\bar{r}_0^2}{\bar{R}^2} \right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right)} \frac{\bar{R}^{D-1}}{D-2}. \quad (3.28)$$

mientras que para $\bar{r}_0 \sim 0$, se puede expandir en serie,

$$\bar{R} \frac{\bar{r}_0^{D-2}}{D-2} {}_2F_1 \left(-\frac{1}{2}; \frac{D-2}{2}; \frac{D}{2}; \frac{\bar{r}_0^2}{\bar{R}^2} \right) = \bar{R} \frac{\bar{r}_0^{D-2}}{D-2} + \mathcal{O}(\bar{r}_0^D). \quad (3.29)$$

La ecuación (3.27) puede tener o no solución dependiendo de $\bar{\rho}_D$, D y \bar{R} . Para estudiar si existe o no solución, debemos analizar por separado para distintos valores de D :

⁵La función hipergeométrica de Gauss ${}_2F_1$, es una función especial definida como,

$${}_2F_1(a; b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!}, \quad (q)_n = \begin{cases} 1 & n=0, \\ q(q+1)\cdots(q+n-1) & n>0, \end{cases} \quad (3.26)$$

donde $(q)_n$ es el símbolo de Pochhammer, y converge dentro del círculo unidad $|z| < 1$ con $z \in \mathbb{C}$ [31].

⁶Para consultar las propiedades de la función hipergeométrica de Gauss, véase [31].

- $D = 4$. En cuatro dimensiones, la ec. (3.27) toma la forma,

$$\frac{1}{3} \left[\bar{R}^3 - (\bar{R}^2 - \bar{r}_0^2)^{3/2} \right] = \frac{\bar{r}_0}{\bar{\rho}_4}, \quad (3.30)$$

donde el lado derecho corresponde a una recta de pendiente $(\bar{\rho}_4)^{-1}$. Como mucho esta ecuación puede tener 3 soluciones (incluida $\bar{r}_0 = 0$). Puesto que (3.30) es transcendental podemos aproximar \bar{r}_0 . Para $\bar{r}_0 \sim 0$, de (3.29) se sigue,

$$\frac{\bar{R}}{2} \bar{r}_0^2 \simeq \frac{\bar{r}_0}{\bar{\rho}_4} \quad \Rightarrow \quad \bar{r}_0 \simeq \frac{2}{\bar{\rho}_4 \bar{R}}. \quad (3.31)$$

Por otra parte, en el límite $\bar{r}_0 \rightarrow \bar{R}$, podemos encontrar una condición sobre la densidad de energía: para que existan dos soluciones reales y no triviales, la densidad debe verificar,

$$\frac{\bar{R}^3}{3} = \frac{\bar{R}}{\bar{\rho}_R} \quad \Rightarrow \quad \bar{\rho}_R = \frac{3}{\bar{R}^2}. \quad (3.32)$$

siendo $\bar{\rho}_R$ la densidad de energía que da lugar a que existan dos soluciones. Así, r_0 toma los valores,

$$\begin{cases} \bar{r}_{out} = \bar{R}, \\ \bar{r}_{in} = \frac{1}{3} \left[(19 + 3\sqrt{33})^{1/3} + \frac{4}{(19 + 3\sqrt{33})^{1/3}} - 2 \right] \bar{R}. \end{cases} \quad (3.33)$$

Este resultado indica que al colisionar las ondas de choque anchas se producen dos superficies atrapadas, una contenida dentro de la otra. Para nuestros propósitos, únicamente tiene importancia la superficie externa, ya que un horizonte de sucesos se define como el límite de la región atrapada [28].

Ahora nos interesa hallar un valor crítico $\bar{\rho}_c$ por debajo del cual no se forma la superficie de Penrose, i.e. cuando las curvas de (3.30) presentan un punto de tangencia. Para hallar la densidad crítica se resuelve (3.30) mediante métodos numéricos. El proceso realizado consistió en: para un valor fijo de \bar{R} se dieron diferentes valores de densidades de energía, con el fin de que los tamaños de las superficies atrapadas externa (\bar{r}_{out}) e interna (\bar{r}_{in}) se aproximen a un mismo valor. Así, considerando una tolerancia $\bar{r}_{out} - \bar{r}_{in} \leq 0,001$, se ha tomado la densidad de energía como la densidad crítica que verifica un único punto de tangencia. Posteriormente, se procedió a variar el radio nuclear desde $\bar{R} = 5,75$ hasta $\bar{R} = 8$, considerando un paso de 0.15, con el fin de determinar la relación entre $\bar{\rho}_c$ y \bar{R} . Esto permite considerar núcleos con número másico desde 97 hasta 262, i.e. elementos naturales y sintéticos. Los resultados numéricos se muestran en la figura 3.3, a partir de los cuales hemos obtenido,

$$\bar{\rho}_c \simeq \frac{2,93578}{\bar{R}^2}, \quad (3.34)$$

con exponente crítico $\lambda_4 \simeq 2$. Las expresiones (3.32) y (3.34) son semejantes, lo cual permite concluir que la formación de la superficie atrapada para valores menores a $\bar{\rho}_R$ se da con valores muy cercanos, i.e. $\bar{\rho}_c \simeq \bar{\rho}_R$. Entonces, sí $\bar{\rho}_c < \bar{\rho}_0 \leq \bar{\rho}_R$, la ec.

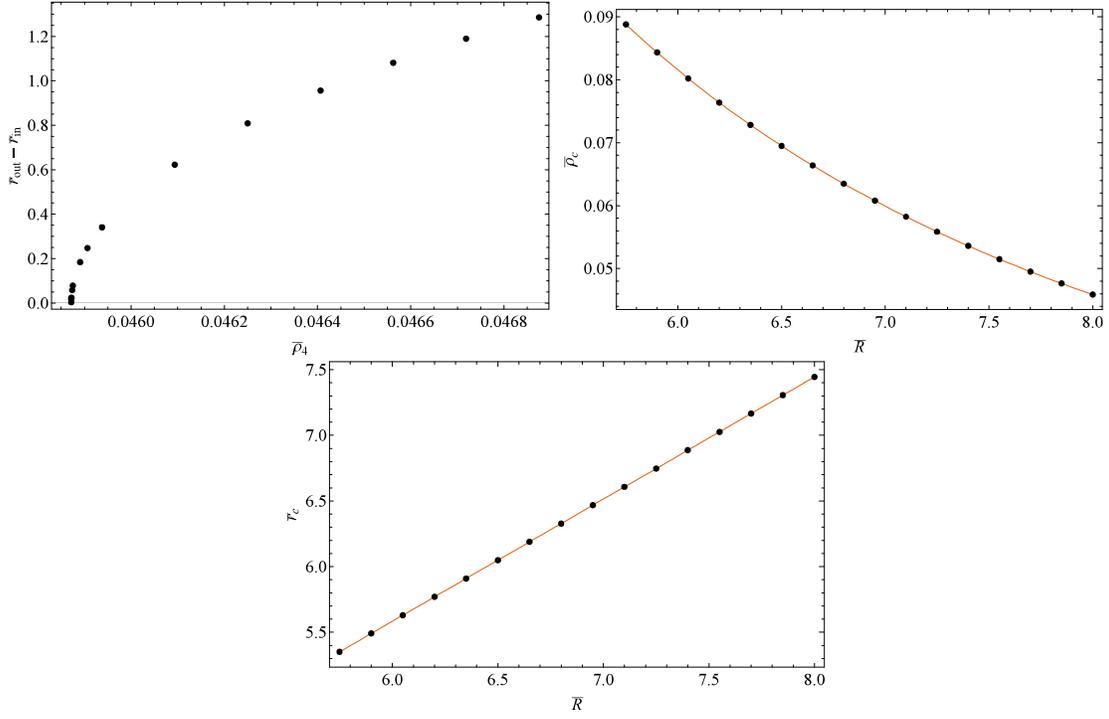


FIGURA 3.3: Resultados numéricos para la ecuación trascendental (3.30) de la Superficie de Penrose en $D = 4$: Los puntos representan los resultados obtenidos de forma numérica, y la curva los ajustes respectivos para la densidad crítica (3.34) y el tamaño crítico (3.35).

(3.30) tiene dos soluciones, mientras que si $\bar{\rho}_0 > \bar{\rho}_R$ sólo hay una solución no trivial (ver figura 3.4). Así mismo, usando la densidad crítica (3.34), y para los valores de \bar{R} ya descritos, podemos aproximar el tamaño crítico \bar{r}_c mediante,

$$\bar{r}_c \simeq 0,9306\bar{R}, \quad (3.35)$$

con exponente $\gamma_4 \simeq 1$. Nótese que éste difiere del expuesto en la sección 2.2 debido a que la función de forma (2.24) no considera la dimensión como un parámetro, mientras que la función hipergeométrica presenta una clara dependencia con la misma, dando lugar a que el tamaño de \mathcal{C} no sea el mismo.

- $D = 5$. En cinco dimensiones, la ec. (3.27) viene dada por,

$$\frac{1}{8} \left[\bar{R}^4 \arcsin \left(\frac{\bar{r}_0}{\bar{R}} \right) - \bar{r}_0 \left(\bar{R}^2 - 2\bar{r}_0^2 \right) \sqrt{\bar{R}^2 - \bar{r}_0^2} \right] = \frac{\bar{r}_0^2}{\bar{\rho}_5}, \quad (3.36)$$

donde el lado derecho corresponde a una función que inicia en cero y crece como $\bar{r}_0^2/\bar{\rho}_5$. Análogo al proceso realizado en $D = 4$, las soluciones a (3.36) pueden aproximarse, tal que para $\bar{r}_0 \sim 0$, de (3.29), se tiene,

$$\bar{r}_0 \simeq \frac{3}{\bar{\rho}_5 \bar{R}}. \quad (3.37)$$

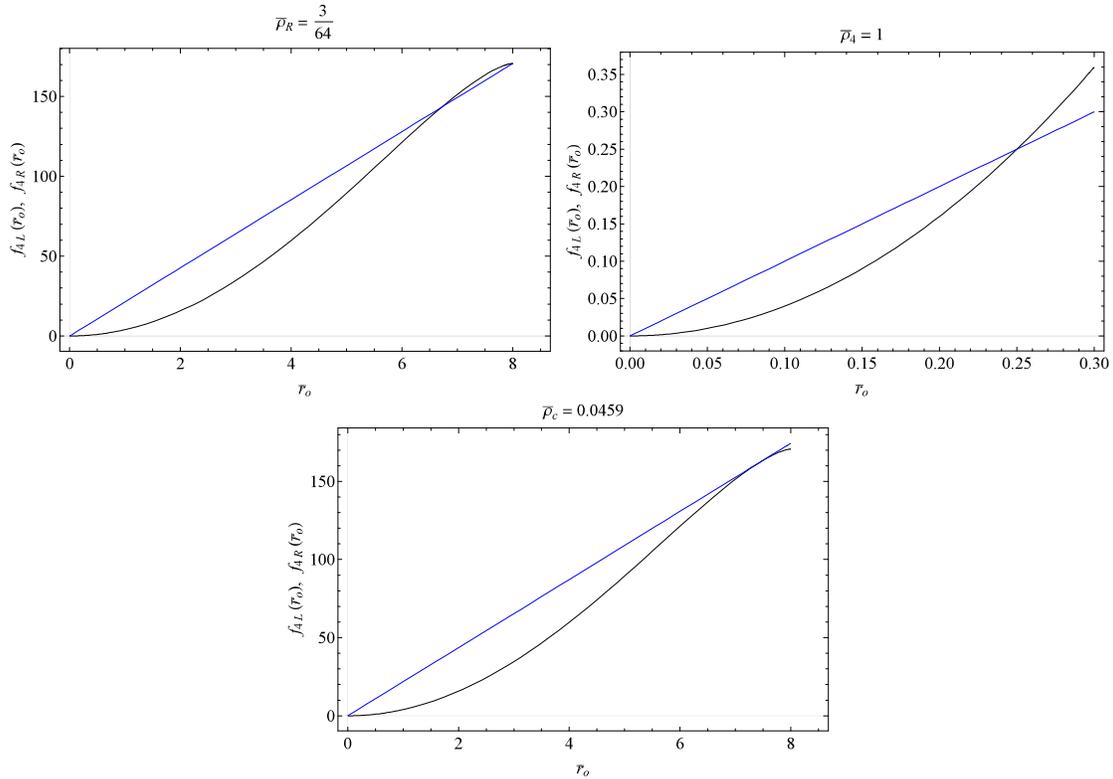


FIGURA 3.4: Comportamiento del tamaño de la superficie de Penrose para $\bar{r}_0 \rightarrow \bar{R}$, $\bar{r}_0 \sim 0$ y $\bar{r}_0 = \bar{r}_c$ (De izquierda a derecha). f_{4L} (curva negra) y f_{4R} (curva azul) corresponden a las funciones del lado izquierdo y derecho de la ec. (3.30) respectivamente. Se ha usado $\bar{R} = 8$.

Por otra parte, en el límite $\bar{r}_0 \rightarrow \bar{R}$, para que existan dos soluciones no triviales y reales a (3.36), la densidad de energía debe verificar,

$$\bar{\rho}_R = \frac{16}{\pi \bar{R}^2}. \quad (3.38)$$

Entonces, si $\bar{\rho}_5 = \bar{\rho}_R$, se forman dos superficie atrapadas, una contenida dentro de la otra (ver figura 3.5). A su vez, para determinar si existe un valor crítico $\bar{\rho}_c$ por debajo del cual no es posible la formación de la superficie atrapada, evaluamos (3.36) numéricamente mediante el mismo proceso usado para obtener (3.34). Así, se obtuvieron los resultados mostrados en la figura 3.6, a partir de los cuales obtenemos,

$$\bar{\rho}_c \simeq \frac{4,746249}{\bar{R}^2}, \quad (3.39)$$

con exponente crítico $\lambda_5 \simeq 2$. Este exponente crítico resulta próximo al de (3.38), esto es, que en caso de generarse dos superficies atrapadas sus tamaños van a ser muy cercanos, además de que se aproximarían al tamaño crítico. Por tanto, si $\bar{\rho}_c < \bar{\rho}_0 \leq \bar{\rho}_R$ se tienen dos soluciones, mientras que si $\bar{\rho}_0 > \bar{\rho}_R$, sólo se tiene una solución (ver figura 3.5). A su vez, para el tamaño crítico tenemos,

$$\bar{r}_c \simeq 0,8771\bar{R}, \quad (3.40)$$

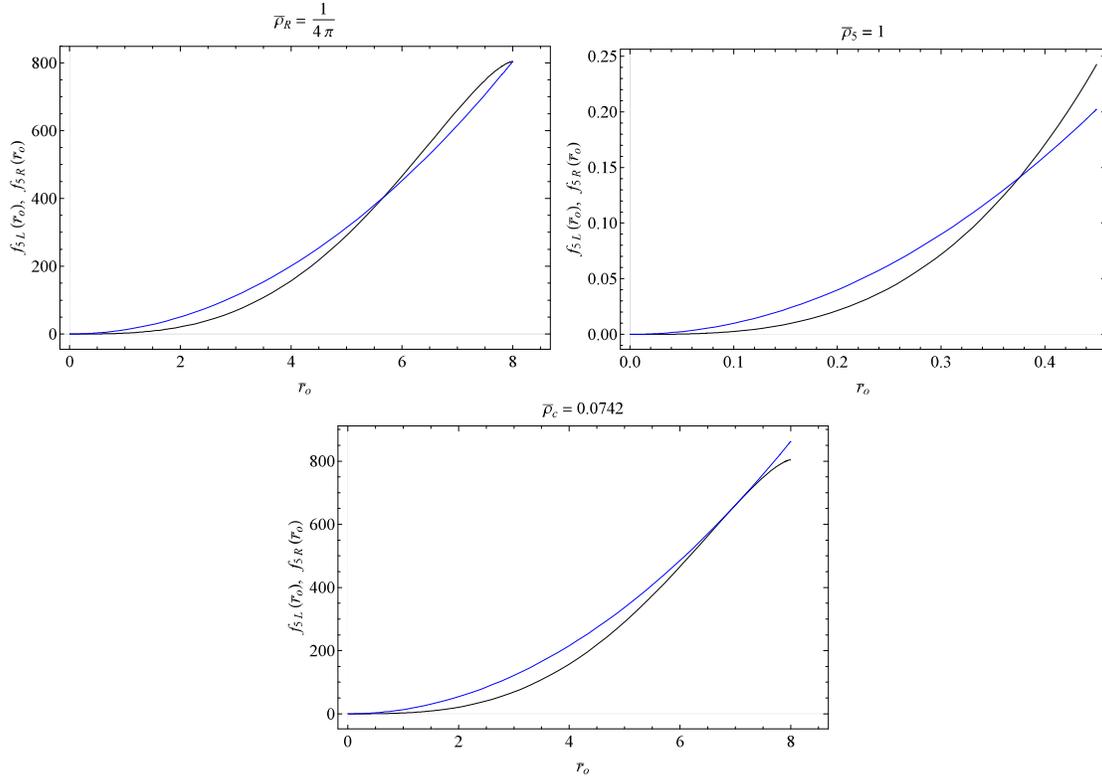


FIGURA 3.5: Comportamiento del tamaño de la superficie de Penrose para $\bar{r}_0 \rightarrow \bar{R}$, $\bar{r}_0 \sim 0$ y $\bar{r}_0 = \bar{r}_c$ (De izquierda a derecha). f_{5L} (curva negra) y f_{5R} (curva azul) corresponden a las funciones del lado izquierdo y derecho de la ec. (3.36) respectivamente. Se ha usado $\bar{R} = 8$.

con exponente crítico $\gamma_5 \simeq 1$. Nótese que para una onda de choque ancha con distribución del tipo (3.11) si existe comportamiento crítico en $D = 5$.

- $D \geq 6$. Para dimensiones superiores a cinco, el lado derecho de (3.27) es una función que inicia en cero y crece como $\bar{r}_0^{D-3}/\bar{\rho}_D$. A primer orden, si $\bar{r}_0 \sim 0$, de (3.29), se sigue que,

$$\bar{r}_0 \simeq \frac{D-2}{\bar{\rho}_D \bar{R}}. \quad (3.41)$$

A su vez, en el límite $\bar{r}_0 \rightarrow \bar{R}$, la densidad de energía que da lugar a dos superficies atrapadas de tamaños diferentes, viene dada por,

$$\bar{\rho}_R = \frac{2(D-2)\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)\bar{R}^2}. \quad (3.42)$$

Análogamente a los casos ya estudiados, nuestro enfoque está en determinar si para $D \geq 6$ existe un valor crítico $\bar{\rho}_c$ por debajo del cual no es posible la formación de la superficie atrapada. En base a los resultados expuestos en $D = 4, 5$, se esperaría $\bar{\rho}_c \simeq \bar{\rho}_R$, tal que,

$$\bar{\rho}_c \simeq \alpha(D)\bar{R}^{-\lambda_D}, \quad \lambda_D \simeq 2, \quad (3.43)$$

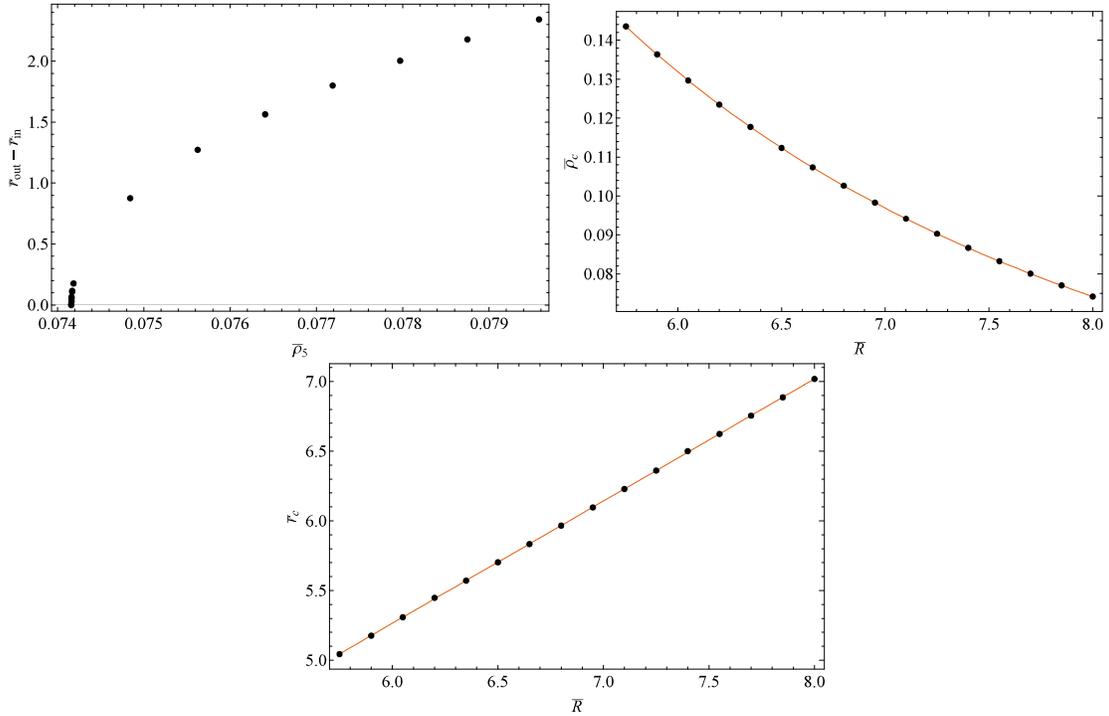


FIGURA 3.6: Resultados numéricos para la ecuación trascendental (3.36) de la Superficie de Penrose en $D = 5$: Los puntos representan los resultados obtenidos de forma numérica, y la curva los ajustes respectivos para la densidad crítica (3.39) y el tamaño crítico (3.40).

donde $\alpha(D)$ es un coeficiente acotado que varía con la dimensión y que parece ser monótono creciente. Considerando (3.42) y los modelos aquí descritos, podemos suponer que α está acotado como:

$$0 < \alpha(D) \lesssim \frac{2(D-2)\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)}. \quad (3.44)$$

Este resultado indica que en caso de tener dos soluciones a (3.27) se esperaría que ambas sean muy cercanas y próximas al tamaño crítico. Análogamente, para \bar{r}_c esperamos (dentro de los modelos aquí expuestos) un comportamiento del tipo,

$$\bar{r}_c \simeq \beta(D)\bar{R}^{\gamma_D}, \quad \gamma_D \simeq 1, \quad 0 < \beta(D) < 1. \quad (3.45)$$

Este resultado ha sido comprobado numéricamente para $D = 6, 7, 8$ (ver figura 3.7). En base a ésto, se observó que $\beta(D) < 1$ y parece seguir un comportamiento monótono decreciente. En términos generales, se puede concluir que los coeficientes α y β varían con la dimensión, mientras que los exponentes críticos son prácticamente constantes y vienen dados por: $\lambda_D \simeq 2$ para la densidad de energía $\bar{\rho}_c$ y $\gamma_D \simeq 1$ para el tamaño crítico \bar{r}_c . Es decir, a medida que la dimensión crece, la superficie atrapada crítica es cada vez más pequeña.

Cabe resaltar que matemáticamente siempre es posible tener criticalidad para cualquier dimensión, aunque no se sabe hasta qué punto este resultado sigue guardando

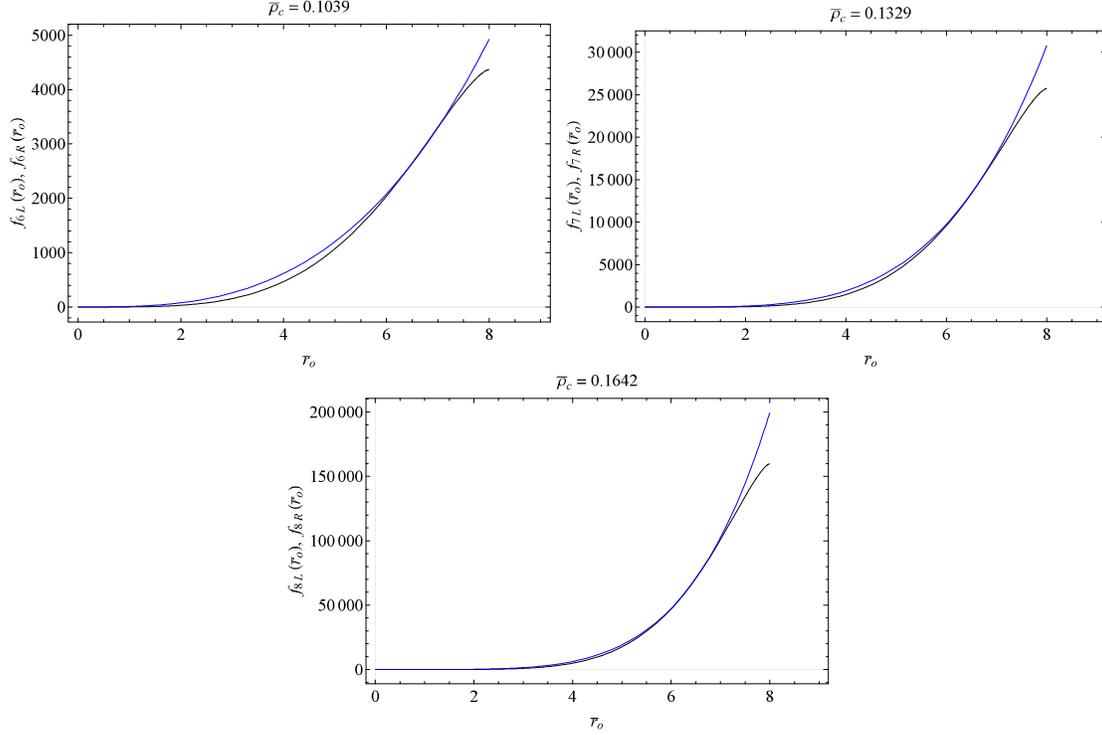


FIGURA 3.7: Comportamiento del tamaño de la superficie de Penrose para dimensiones $D = 6, 7, 8$ (De izquierda a derecha). f_{DL} (curva negra) y f_{DR} (curva azul) corresponden a las funciones del lado izquierdo y derecho de la ec. (3.27) respectivamente. Se ha usado $\bar{R} = 8$.

significado físico. Por otra parte, en $D = 4$ se ha mostrado experimentalmente que $R = 1,25A^{1/3} fm$, pero en dimensiones superiores no tenemos la concepción de un modelo nuclear, e inclusive este resultado empírico podría estar ligado a la conjetura de Kepler.

3.6. Superficie Atrapada de Penrose con Densidad de Woods-Saxon

Calcular la superficie atrapada sobre el cono de luz pasado de la colisión se reduce a resolver el problema de frontera (2.27) con densidad (3.13). La superficie de Penrose aparece después de la colisión siempre que exista un valor r_0 para el tamaño de la subvariedad \mathcal{C} que resuelva la ecuación trascendental (2.35). Para la densidad $\rho_{WS}(r)$ de (2.35), esta ecuación es,

$$16\pi G_D \bar{\rho}_0 \int_0^{r_0} \int_0^\infty dr d\eta \frac{r^{D-3}}{1 + e^{\frac{\sqrt{\eta^2 + r^2} - R}{a}}} = r_0^{D-3}, \quad D \geq 4. \quad (3.46)$$

Desafortunadamente la expresión (3.46) no posee una primitiva directa, pero puede ser estudiada para diferentes valores de r_0 mediante integración numérica⁷. P previo a ello, se

⁷Se ha usado la Integración Doble Exponencial.

elimina la dependencia en la integral, ya que ésto facilita los cálculos numéricos. Tomando el cambio de variable $r = u r_0 \rightarrow dr = r_0 du$, (3.46) toma la forma,

$$r_0^{D-2} \int_0^1 \int_0^\infty du d\eta \frac{u^{D-3}}{1 + e^{\frac{\sqrt{\eta^2 + r_0^2} u^2 - R}{a}}} = \frac{r_0^{D-3}}{16\pi G_D \bar{\rho}_0}. \quad (3.47)$$

Definiendo las variables adimensionales,

$$\bar{R} = \frac{R}{a}, \quad \bar{r} = \frac{r_0}{a}, \quad \bar{\eta} = \frac{\eta}{a}, \quad \bar{\rho}_D = 16\pi G_D \bar{\rho}_0 a^2, \quad (3.48)$$

se sigue,

$$\bar{r}^{D-2} \int_0^1 du F_D(\bar{R}, \bar{r}, u) = \frac{\bar{r}^{D-3}}{\bar{\rho}_D}, \quad (3.49)$$

donde hemos definido la función de forma $F_D(\bar{R}, \bar{r}, u)$ ⁸, como,

$$F_D(\bar{R}, \bar{r}, u) = \int_0^\infty d\bar{\eta} \frac{u^{D-3}}{1 + e^{\sqrt{\bar{\eta}^2 + \bar{r}^2} u^2 - \bar{R}}}. \quad (3.50)$$

Así, se puede analizar los casos cuando $\bar{r} \sim 0$ y $\bar{r} \rightarrow \infty$. Para $\bar{r} \sim 0$, se sigue,

$$\bar{r}^{D-2} \int_0^1 du F_D(\bar{R}, 0, u) = \log(1 + e^{\bar{R}}) \frac{\bar{r}^{D-2}}{D-2} + \mathcal{O}(\bar{r}^D), \quad (3.51)$$

mientras que para $\bar{r} \rightarrow \infty$, la expresión converge a,

$$\lim_{\bar{r} \rightarrow \infty} \bar{r}^{D-2} \int_0^1 du F_D(\bar{R}, \bar{r}, u) = -\frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{D-2}{2}\right) \Gamma(D-1)}{\Gamma\left(\frac{D-1}{2}\right)} Li_{D-1}(-e^{\bar{R}}). \quad (3.52)$$

Nótese que la parte izquierda de (3.49) crece desde cero con potencia $(D-2)$ hasta saturarse a un valor constante, el cual depende explícitamente de la dimensión del espacio y el radio \bar{R} . La expresión (3.51) es semejante a (3.29), por lo cual se esperaría un comportamiento análogo al obtenido en la sección anterior cuando $\bar{r} \sim 0$. Sin embargo, para $\bar{r} \rightarrow \infty$, estas expresiones difieren y en principio se debe a que el modelo de Woods-Saxon considera que la densidad nuclear está definida para todo \bar{r} , incluido $\bar{r} > \bar{R}$, tal que \mathcal{C} puede tener tamaños mayores a \bar{R} . A partir de los resultados para el modelo de esfera sólida, es de esperar un comportamiento análogo para la densidad de energía crítica y el tamaño crítico, es decir, que sus exponentes sean prácticamente constante y sus coeficientes variables con la dimensión.

La formación de la superficie atrapada depende de la dimensión según el valor de D , debemos estudiar las soluciones a la ec. (3.49) por separado.

⁸La evaluación numérica de la función de forma se lleva a cabo mediante el cambio de variable $\eta = u\bar{r} \tan \theta$, tal que $F_D(\bar{R}, \bar{r}, u)$ toma la forma,

$$F_D(\bar{R}, \bar{r}, u) = \bar{r} u^{D-2} \int_0^{\pi/2} d\theta \frac{\sec^2 \theta}{1 + e^{u\bar{r} \sec \theta - \bar{R}}}.$$

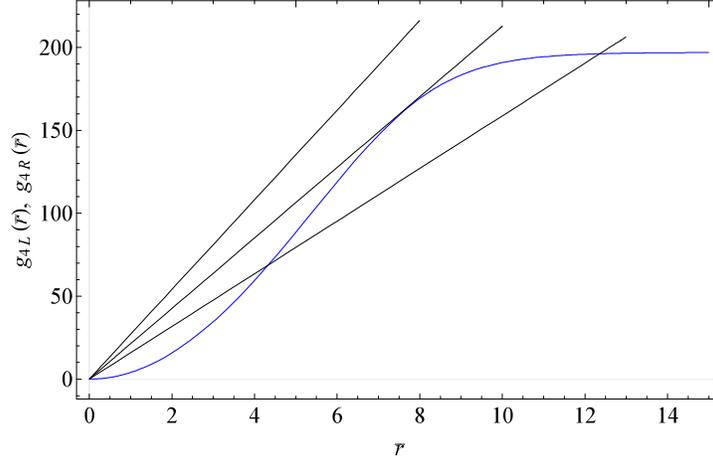


FIGURA 3.8: Comportamiento del tamaño de la superficie de Penrose con densidad de energía (3.13): La curva azul, g_{4L} , corresponde al lado izquierdo de la ecuación (3.53) con $\bar{R} = 8$, mientras que el lado derecho, g_{4R} , viene dado por las 3 rectas negras: $\bar{\rho}_4 > \bar{\rho}_c$ (curva inferior), $\bar{\rho}_4 = \bar{\rho}_c = 0,047$ y $\bar{\rho}_4 < \bar{\rho}_c$ (curva superior).

- $D = 4$. En dimensión cuatro, la ec. (3.49) toma la forma,

$$\bar{r}^2 \int_0^1 du F_4(\bar{R}, \bar{r}, u) = \frac{\bar{r}}{\bar{\rho}_4}, \quad (3.53)$$

donde el lado derecho corresponde a una función lineal con pendiente $(\bar{\rho}_4)^{-1}$. Por tratarse de una ec. transcendental comenzaremos aproximando la solución a primer orden y posteriormente con métodos numéricos. Entonces, para $\bar{r} \sim 0$, la solución a (3.53) se puede aproximar por,

$$\bar{r} \simeq \frac{2}{\bar{\rho}_4 \log(1 + e^{\bar{R}})}, \quad (3.54)$$

mientras que en límite $\bar{r} \rightarrow \infty$, el lado izquierdo de (3.53) tiende a la función polilogarítmica, y por tanto la solución converge a,

$$\bar{r} = -2\bar{\rho}_4 Li_3(-e^{\bar{R}}). \quad (3.55)$$

Es decir, en $D = 4$, la ecuación (3.53) puede no tener solución, tener una solución (caso crítico) o tener dos soluciones, una contenida dentro de la otra (ver figura 3.8). Ésto es una gran diferencia con el modelo de esfera sólida, ya que para la densidad (3.11) sólo existen dos superficies atrapadas bajo determinadas condiciones entre la densidad de energía y el radio nuclear.

Ahora nos interesa saber si existen casos críticos para los cuales la superficie de Penrose no aparece, esto es, determinar una relación entre la densidad de energía y el radio nuclear. Para ello, se evalúa numéricamente (3.53) usando el proceso descrito en el modelo de esfera sólida, mediante los mismos pasos, tolerancia y valores de \bar{R} .

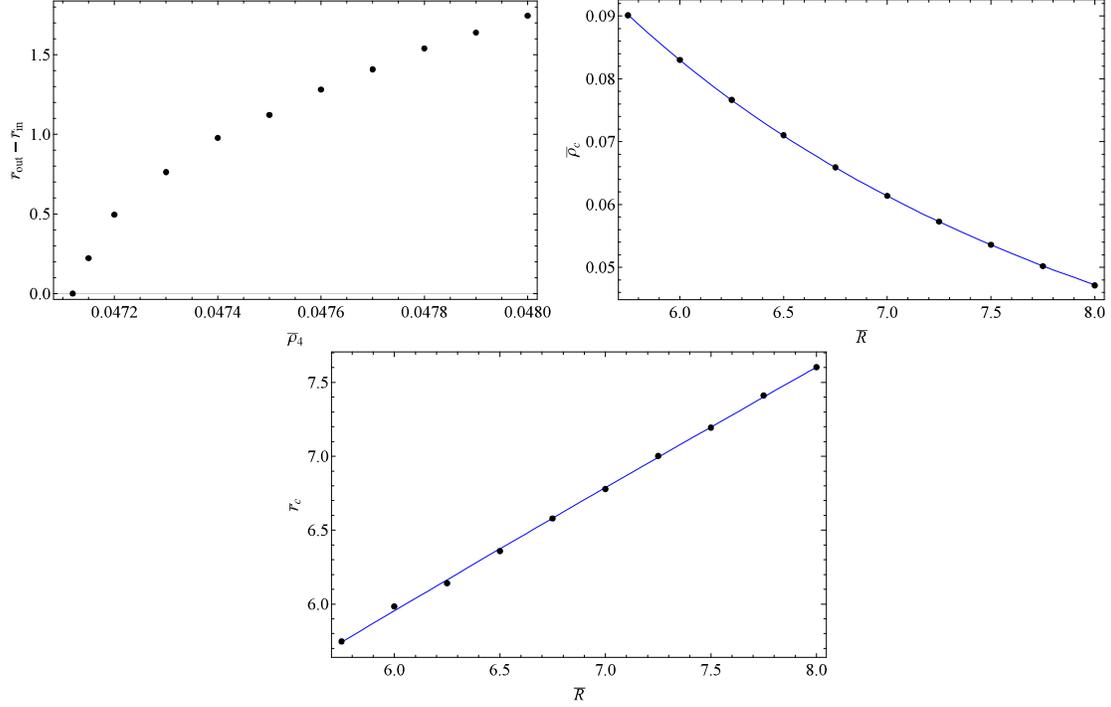


FIGURA 3.9: Resultados numéricos para la ecuación trascendental (3.53) de la Superficie de Penrose en $D = 4$: Los puntos representan los resultados obtenidos de forma numérica, y las curvas los ajustes de (3.56) para la densidad crítica y el tamaño crítico respectivamente.

Así, obtenemos los resultados numéricos de la figura 3.9, con cuales realizamos los ajustes para la densidad de energía crítica y el tamaño crítico, dados por,

$$\bar{\rho}_c \simeq \frac{2,78565}{R^{1,96}}, \quad \bar{r}_c \simeq 1,29865 \bar{R}^{0,85}, \quad (3.56)$$

donde los exponentes son $\lambda_4 \simeq 1,96$ y $\gamma_4 \simeq 0,85$ para la densidad y el tamaño crítico respectivamente. En principio, los resultados obtenidos son semejantes a los reflejados para la esfera sólida, y aunque el exponente $\lambda_4 \simeq 1,96$ parece ser próximo a dos, es necesario hacer énfasis que tal aproximación da lugar a que (3.53) no tenga solución real. En resumen, si $\bar{\rho}_4 < \bar{\rho}_c$, la superficie de Penrose no se forma, mientras que para $\bar{\rho}_4 > \bar{\rho}_c$ siempre se forman dos superficies atrapadas de diferentes tamaños, una contenida dentro de la otra (ver figura 3.8). Por otra parte, es necesario recalcar que la densidad crítica en $D = 4$, está acotada por el modelo de esfera sólida como:

$$\bar{\rho}_c^{SQ} < \bar{\rho}_c^{WS} \lesssim \bar{\rho}_R^{SQ} = \frac{3}{R^2}, \quad (3.57)$$

donde $\bar{\rho}_R^{SQ}$ es la densidad (3.32), que da lugar a dos superficies atrapadas en el modelo de esfera sólida, y $\bar{\rho}_c^{SQ}$ es la densidad crítica (3.34) para la esfera sólida. Este comportamiento es de esperarse, ya que como se mencionó, el modelo de Woods-Saxon es una mejor aproximación para la densidad nuclear.

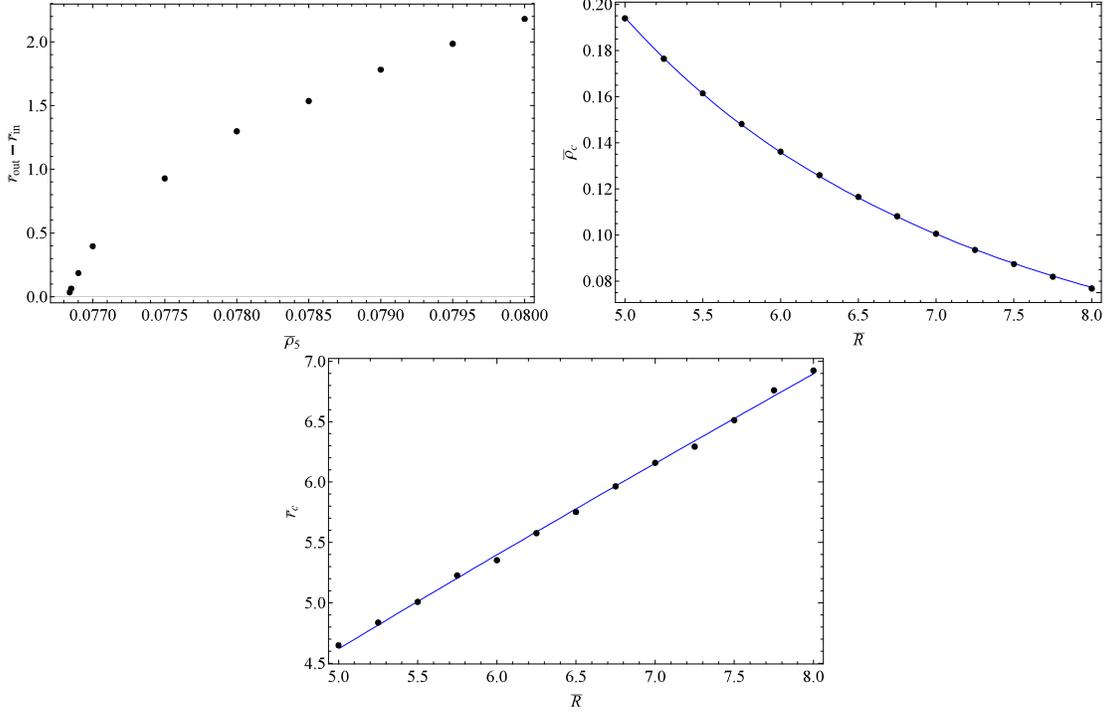


FIGURA 3.10: Resultados numéricos para la ecuación trascendental (3.58) de la Superficie de Penrose en $D = 5$: Los puntos representan los resultados obtenidos de forma numérica, y las curvas los ajustes (3.60) para la densidad crítica y el tamaño crítico respectivamente.

- $D = 5$. En cinco dimensiones, la ecuación (3.49) toma la forma,

$$\bar{r}^3 \int_0^1 du F_5(\bar{R}, \bar{r}, u) = \frac{\bar{r}^2}{\bar{\rho}_5}, \quad (3.58)$$

donde el lado derecho se comporta como una función cuadrática de pendiente $(\bar{\rho}_5)^{-1}$. Entonces, podemos aproximar sus soluciones para $\bar{r} \sim 0$ y $\bar{r} \rightarrow \infty$, como,

$$\begin{cases} \bar{r} \simeq \frac{3}{\bar{\rho}_5 \log(1 + e^{\bar{R}})}, & \text{si } \bar{r} \sim 0, \\ \bar{r} = \left[-\frac{3\pi}{2} \bar{\rho}_5 Li_4(-e^{\bar{R}}) \right]^{1/2}, & \text{si } \bar{r} \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (3.59)$$

Por tanto, (3.58) puede no tener solución, puede tener una solución (caso crítico) o tener dos soluciones, es decir, dos superficies atrapadas, una contenida dentro de la otra. Análogamente, para determinar la relación entre la densidad de energía y el radio nuclear para la cual la superficie atrapada no se forma sobre el cono de luz pasado de la colisión, resolvemos (3.58) mediante métodos numéricos. Haciendo uso del mismo proceso implementado para obtener las ecuaciones (3.56), hemos obtenido la figura 3.10. Así, los ajustes para $D = 5$ vienen dados por,

$$\bar{\rho}_c \simeq \frac{4,5749}{\bar{R}^{1,96}}, \quad \bar{r}_c \simeq 1,1718 \bar{R}^{0,85}, \quad (3.60)$$

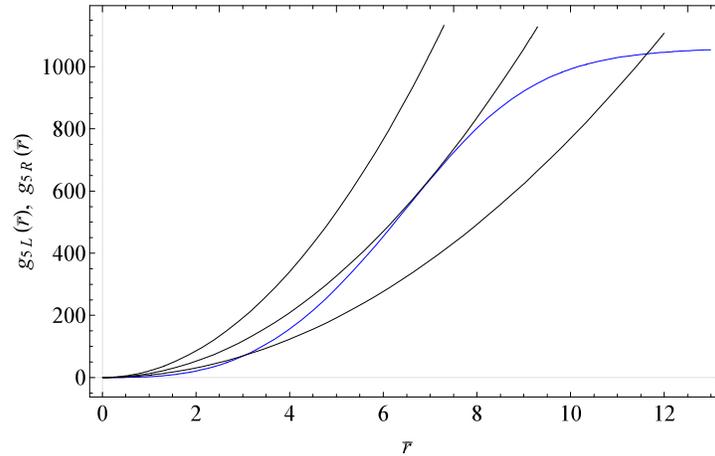


FIGURA 3.11: Comportamiento del tamaño de la superficie atrapada con densidad (3.13): La curva azul, g_{5L} , corresponde al lado izquierdo de la ecuación (3.58) con $\bar{R} = 8$, mientras que el lado derecho, g_{5R} , viene dado por las 3 curvas negras: $\bar{\rho}_5 > \bar{\rho}_c$ (curva inferior), $\bar{\rho}_5 = \bar{\rho}_c = 0,077$ y $\bar{\rho}_5 < \bar{\rho}_c$ (curva superior).

con exponentes $\lambda_5 \simeq 1,96$ y $\gamma_5 \simeq 0,85$ para la densidad de energía crítica y tamaño crítico de la superficie atrapada respectivamente. Por tanto, el modelo de Woods-Saxon exhibe criticalidad en $D = 5$ y la superficie de Penrose siempre aparece tras la colisión si $\bar{\rho}_5 > \bar{\rho}_c$ (ver figura 3.11). Cabe resaltar, que para este caso la densidad crítica puede acotarse usando el modelo de esfera sólida, de manera que,

$$\bar{\rho}_c^{SQ} < \bar{\rho}_c^{WS} \lesssim \bar{\rho}_R^{SQ} = \frac{16}{\pi \bar{R}^2}. \quad (3.61)$$

- $D \geq 6$. Para dimensiones superiores a cinco, se tiene que el lado derecho de (3.49) corresponde a una función con potencia $(D - 3)$ y pendiente $(\bar{\rho}_D)^{-1}$. Entonces, podemos aproximar la solución para $\bar{r} \sim 0$ y $\bar{r} \rightarrow \infty$, por,

$$\begin{cases} \bar{r} \simeq \frac{D-2}{\bar{\rho}_D \log(1+e^{\bar{R}})}, & \text{si } \bar{r} \sim 0, \\ \bar{r} = \left[-\frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{D-2}{2}\right) \Gamma(D-1)}{2 \Gamma\left(\frac{D-1}{2}\right)} \bar{\rho}_D Li_{D-1}(-e^{\bar{R}}) \right]^{\frac{1}{D-3}}, & \text{si } \bar{r} \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (3.62)$$

Este resultado indica que incluso en dimensión arbitraria mayor a cinco, siempre que (3.49) tiene solución, necesariamente da lugar a dos superficies atrapadas después de la colisión, y los tamaños mínimo y máximo que pueden tener son los dados por (3.62) respectivamente. A su vez, nuestro enfoque está centrado en saber si en $D \geq 6$ el modelo en cuestión tiene valores de $\bar{\rho}_D$ y \bar{R} para los cuales (3.49) no tiene solución real, i.e. la superficie de Penrose no se forma. Para ello, el comportamiento en $D = 6, 7, 8$ se muestra en la figura 3.12, en donde se observa que las curvas de los lados derecho e izquierdo de (3.49) siempre encuentran un punto de tangencia que conforme D incrementa, éste disminuye. Entonces, se esperaría hallar una densidad

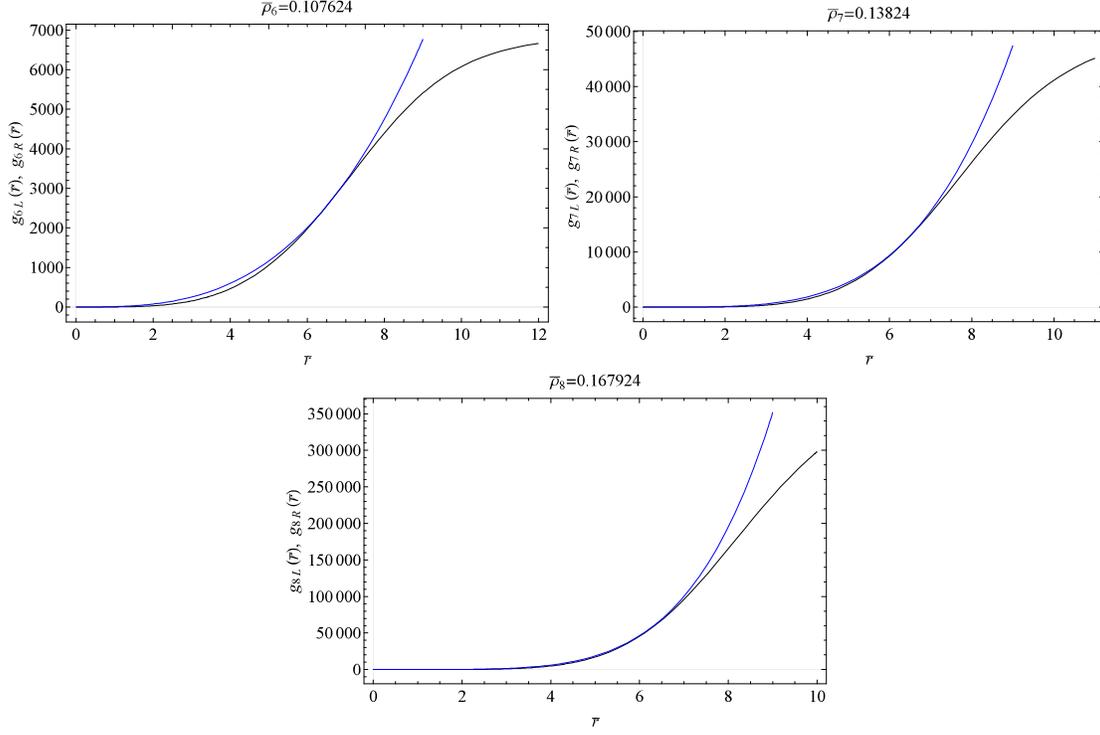


FIGURA 3.12: Comportamiento del tamaño de la superficie de Penrose para dimensiones $D = 6, 7, 8$ (De izquierda a derecha). f_{DL} (curva negra) y f_{DR} (curva azul) corresponden a las funciones del lado izquierdo y derecho de la ec. (3.49) respectivamente. Se ha usado $\bar{R} = 8$.

crítica \bar{p}_c , por debajo de la cual no se forma la superficie atrapada. Acorde los resultados expuestos anteriormente en $D = 4, 5$ se propone el siguiente modelo,

$$\bar{p}_c = \frac{\alpha(D)}{\bar{R}^{\lambda_D}}, \quad \bar{r}_c = \beta(D) \bar{R}^{\gamma_D}, \quad (3.63)$$

donde α y β son coeficientes positivos, acotados y parecen ser: monótonos creciente y decreciente respectivamente. Esto ha sido verificado numéricamente hasta $D = 8$ considerando $r_{out} - r_{in} \leq 0,001$. Así mismo, los exponentes críticos parecen no variar considerablemente a medida que la dimensión incrementa, quedando fijos en los valores,

$$\lambda_D \simeq 1,96, \quad \gamma_D \simeq 0,85. \quad (3.64)$$

En principio, que λ_D y γ_D sean prácticamente constante es de esperarse, ya que para el modelo de esfera sólida teníamos este comportamiento y, pese a que el modelo de Woods-Saxon mejora el de esfera sólida, sigue siendo parecido, y por tanto es razonable que los coeficientes y exponentes críticos exhiban un comportamiento parecido (ver figura 3.13). Entonces, a medida que la dimensión incrementa, el tamaño crítico de la superficie de Penrose es menor. Además, para los casos estudiados, la densidad crítica parece estar acotada por el modelo de esfera sólida, tal que sería

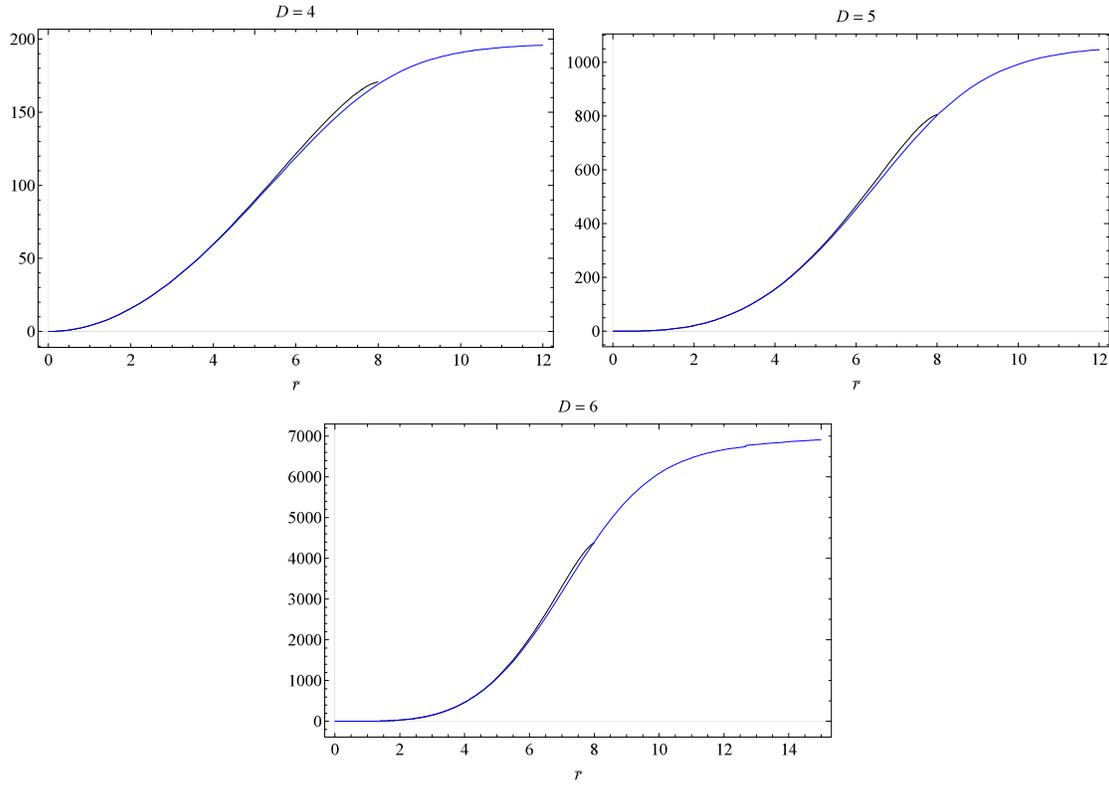


FIGURA 3.13: Comparación entre Modelo de Esfera Sólida (curva negra) y Woods-Saxon (curva azul) para $D = 4, 5, 6$. Se ha usado $\bar{R} = 8$.

una suposición razonable asumir que,

$$\bar{\rho}_c^{SQ} < \bar{\rho}_c^{WS} \lesssim \bar{\rho}_R^{SQ} = \frac{2(D-2)\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)\bar{R}^2}. \quad (3.65)$$

Por tanto, en espacios de dimensión $D \geq 6$, la superficie de Penrose siempre exhibe un comportamiento crítico que depende de cuán ancha sea la fuente.

Capítulo 4

Conclusiones

En este trabajo de titulación desarrollamos un breve estudio acerca de la formación de la Superficie Atrapada de Penrose sobre el cono de luz pasado como resultado de la colisión frontal de dos ondas gravitacionales de choque. En particular, hemos centrado nuestro interés en ondas cuya distribución de densidad de energía viene dada por una fuente de tamaño no nulo, ésto con el fin de modelar la colisión de iones pesados ultrarelativistas a muy alta energía. En teoría, es posible estimar la sección eficaz para la producción de micro agujeros negros en aceleradores como el LHC.

En primera aproximación se plantearon dos modelos de densidades de energía, del tipo Heaviside (Esfera Sólida) y Woods-Saxon. A partir de éstos, se caracterizó el comportamiento crítico de la superficie atrapada en cada caso, obteniendo una ley de potencia entre el tamaño de la superficie atrapada, la densidad de energía y el ancho de la fuente. Para los modelos aquí estudiados, se concluye que si la fuente de la onda no es puntual, aparece un comportamiento crítico en función de los parámetros del modelo, tal que por debajo de una cierta densidad de energía crítica, la superficie atrapada no se forma sobre el cono de luz pasado.

4.1. Esfera Sólida

El modelo de esfera sólida considera que el núcleo atómico es una esfera maciza de radio R , tal que los nucleones se distribuyen de forma homogénea. Entonces, la densidad de energía viene dada por,

$$T_{00} = \rho_0 \Theta \left(\frac{R^2 - r^2}{\alpha^2} \right) \quad (4.1)$$

donde ρ_0 es una constante con unidades de densidad de energía, r es la coordenada radial sobre \mathbb{R}^{D-1} y $\alpha > 0$ un parámetro que adimensiona la función de Heaviside. El problema a resolver consiste en determinar los parámetros tales como: la densidad de energía relativista $\bar{\rho}_0$, el radio nuclear R y el tamaño de la superficie atrapada r_0 , para los cuales la superficie de Penrose se forma o no, sobre el cono de luz pasado de la colisión.

Dentro de este modelo, tenemos la ligadura $r_0 < R$, por ello, el tamaño máximo que la superficie atrapada puede alcanzar es R , sin importar la dimensión del espacio. Este resultado, daba lugar a dos valores no triviales de r_0 , es decir, se producen dos superficies atrapadas, una contenida dentro de la otra siempre y cuando se verifique la condición

entre la densidad de energía y el radio nuclear,

$$\bar{\rho}_R = \frac{2(D-2)\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)\bar{R}^2}, \quad D \geq 4. \quad (4.2)$$

donde se han definido las variables adimensionales,

$$\bar{r}_0 = \frac{r_0}{\alpha}, \quad \bar{R} = \frac{R}{\alpha}, \quad \bar{\rho}_D = 16\pi G_D \bar{\rho}_D \alpha^2. \quad (4.3)$$

Así, cuando $\bar{\rho}_D > \bar{\rho}_R$, sólo se forma una superficie atrapada, mientras que para $\bar{\rho}_c < \bar{\rho}_D \leq \bar{\rho}_R$ aparecen dos superficies atrapadas de diferentes tamaños. Donde $\bar{\rho}_c$ es la densidad crítica por debajo de la cual no se forma la superficie atrapada. En base a los resultados obtenidos numéricamente hasta $D = 8$, hemos propuesto,

$$\bar{\rho}_c \simeq \frac{\alpha(D)}{\bar{R}_c^{\lambda_D}}, \quad \lambda_D \simeq 2, \quad 0 < \alpha(D) \lesssim \frac{2(D-2)\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)}. \quad (4.4)$$

En particular, el exponente crítico parece no variar considerablemente cuando la dimensión incrementa, mientras que α parece ser monótono creciente con D . Por ello, se sigue que $\bar{\rho}_c \simeq \bar{\rho}_R$, tal que de formarse dos superficies atrapadas los tamaños serían próximos al crítico. Análogamente, el tamaño crítico viene dado por,

$$\bar{r}_c \simeq \beta(D)\bar{R}_c^{\gamma_D}, \quad \gamma_D \simeq 1, \quad 0 < \beta(D) < 1, \quad (4.5)$$

donde β es un coeficiente positivo, acotado que varía con la dimensión y parece ser monótono decreciente. Así, a medida que la dimensión incrementa el tamaño crítico es menor. En base a los resultados obtenidos, se tiene que los exponentes críticos para \bar{r}_c y $\bar{\rho}_c$, son prácticamente constantes. En general, se puede concluir que en la colisión frontal el modelo de esfera sólida exhibe relaciones de escala con exponentes críticos independientes de la dimensión.

4.2. Densidad de Woods-Saxon

El modelo de esfera sólida describe la densidad nuclear de forma burda. Sin embargo, ésta no es del todo constante ya que en los bordes cae suavemente. Como otra opción que mejora el modelo en este sentido, hemos propuesto un modelo construido sobre el potencial de Woods-Saxon, esto es, plantear la densidad de energía,

$$T_{00} = \frac{\rho_0}{1 + e^{\frac{r-R}{a}}}, \quad r \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, \quad (4.6)$$

donde $\bar{\rho}_0$ y R son las mismas magnitudes descritas en el modelo de esfera sólida, mientras que a es una medida del *grosor* de la superficie nuclear que recubre a los nucleones. A diferencia de la esfera sólida, este modelo no presenta ligadura alguna con respecto al tamaño de la superficie atrapada. Puesto que la densidad de energía se extiende al infinito, siempre que ésta sea mayor a la densidad de energía crítica $\bar{\rho}_c$, se forman dos superficies

atrapadas. En particular, si $r/a \sim 0$ y $r/a \rightarrow \infty$, los tamaños de las superficies atrapadas se pueden aproximar por,

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{r} \simeq \frac{D-2}{\bar{\rho}_D \log(1+e^{\bar{R}})}, \\ \bar{r} = \left[-\frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{D-2}{2}\right) \Gamma(D-1)}{2 \Gamma\left(\frac{D-1}{2}\right)} \bar{\rho}_D \text{Li}_{D-1}\left(-e^{\bar{R}}\right) \right]^{\frac{1}{D-3}}, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{si } \bar{r} \sim 0, \\ \text{si } \bar{r} \rightarrow \infty. \end{array} \quad (4.7)$$

donde,

$$\bar{\rho}_D = 16\pi G_D \bar{\rho}_0 a^2, \quad \bar{r} = \frac{r}{a}, \quad \bar{R} = \frac{R}{a}, \quad (4.8)$$

son magnitudes adimensionales. Nótese que éstos son los tamaños límite que las superficies atrapadas pueden alcanzar, en particular cualquier valor que \bar{r} tome deberá estar acotado por los dados en (4.7). Por otra parte, el modelo en cuestión presenta una densidad crítica por debajo de la cual no es posible la formación de la superficie atrapada. Evaluando numéricamente hasta $D = 8$, hemos observado que la densidad de energía crítica incrementa con la dimensión, mientras que el tamaño crítico disminuye con la misma. Los resultados numéricos permiten ajustar las magnitudes mencionadas mediante un modelo del tipo,

$$\bar{\rho}_c \simeq \frac{\alpha(D)}{\bar{R}_c^{\lambda_D}}, \quad \lambda_D \simeq 1,96, \quad 5/2 < \alpha(D) < \infty. \quad (4.9)$$

donde el exponente crítico parece no variar considerablemente a medida que la dimensión incrementa, pero α parece si hacerlo. Además, dentro de los casos estudiados, la densidad crítica del modelo de Woods-Saxon parece estar acotada por el modelo de esfera sólida como:

$$\bar{\rho}_c^{SQ} < \bar{\rho}_c^{WS} \lesssim \bar{\rho}_R^{SQ} = \frac{2(D-2) \Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{D}{2}\right) \bar{R}^2}. \quad (4.10)$$

Por otra parte, hemos modelado el tamaño crítico como,

$$\bar{r}_c \simeq \beta(D) \bar{R}_c^{\gamma_D}, \quad \gamma_D \simeq 0,85, \quad 0 < \beta(D) < 1. \quad (4.11)$$

donde el exponente crítico parece ser constante para toda dimensión, mientras que β puede considerarse como monótono decreciente. Por tanto, a medida que la dimensión del espacio crece, el tamaño crítico de la superficie atrapada es menor.

Apéndice A

Lema (1.34)

En este apéndice demostramos el lema usado en las secciones 1.3 y 3.1, para calcular el límite $\gamma \rightarrow \infty$. El lema se reduce a la ecuación,

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \gamma \chi \left[\gamma^2 (x + \beta t)^2 \right] = \delta(x + t) \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \chi(\eta^2), \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (\text{A.1})$$

donde $\chi(\eta^2)$ es una función integrable en \mathbb{R} .

Para demostrar (A.1), se calcula una primitiva para el lado izquierdo, posteriormente se toma el límite $\gamma \rightarrow \infty$, y finalmente se realiza la derivada del resultado. Sea $F_\beta(y)$ una primitiva de (A.1), esto es,

$$F_\beta(y) = \int_{-\infty}^y dx \chi \left[\frac{(x + \beta t)^2}{1 - \beta^2} \right], \quad (\text{A.2})$$

tomando el cambio de variable,

$$\eta = \frac{x + \beta t}{\sqrt{1 - \beta^2}} \rightarrow d\eta = \frac{dx}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (\text{A.3})$$

la función (A.2) viene dada como,

$$F_\beta(y) = \sqrt{1 - \beta^2} \int_{-\infty}^{\frac{y + \beta t}{\sqrt{1 - \beta^2}}} d\eta \chi(\eta^2) \Rightarrow \frac{F_\beta(y)}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \int_{-\infty}^{\frac{y + \beta t}{\sqrt{1 - \beta^2}}} d\eta \chi(\eta^2). \quad (\text{A.4})$$

Nótese que cuando $\gamma \rightarrow \infty$ se sigue que $\beta \rightarrow 1$. Tomando el límite $\beta \rightarrow 1$, tenemos,

$$\lim_{\beta \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} F_\beta(y) = \lim_{\beta \rightarrow 1} \int_{-\infty}^{\frac{y + \beta t}{\sqrt{1 - \beta^2}}} d\eta \chi(\eta^2). \quad (\text{A.5})$$

Entonces, el valor de la integral queda delimitado por el límite superior,

$$\lim_{\beta \rightarrow 1} \frac{y + \beta t}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \begin{cases} \infty, & \text{si } y + t > 0, \\ -\infty, & \text{si } y + t < 0. \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

Así, podemos escribir (A.5) en términos de la función de Heaviside,

$$\lim_{\beta \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} F_\beta(y) = \Theta(y + t) \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \chi(\eta^2). \quad (\text{A.7})$$

Derivando con respecto a y obtenemos,

$$\lim_{\beta \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{d}{dy} F_\beta(y) = \left[\frac{d}{dy} \Theta(y+t) \right] \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \chi(\eta^2) = \delta(y+t) \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \chi(\eta^2). \quad (\text{A.8})$$

Cambiando y por x , y volviendo a la variable γ , obtenemos el resultado deseado:

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \gamma \chi[\gamma^2(x+\beta t)^2] = \delta(x+t) \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \chi(\eta^2). \quad (\text{A.9})$$

Bibliografía

- [1] L. D. Landau y E. M. Lifshitz. *Course of Theoretical Physics. Volume 2: The classical theory of fields*. Cambridge University Press, 1947.
- [2] R. M. Wald. *General Relativity*. The University of Chicago Press, 1984.
- [3] J. B. Griffiths y J. Podolský. *Exact space-times in Einstein's general relativity*. Cambridge University Press, 2009.
- [4] H. Stephani y col. *Exact solutions of Einstein's field equations*. Cambridge University Press, 2003.
- [5] S. W. Hawking y G. F. Ellis. *The large scale structure of space-time*. Vol. 1. Cambridge university press, 1973.
- [6] M. P. Hobson, G. P. Efstathiou y A. N. Lasenby. *General relativity: an introduction for physicists*. Cambridge University Press, 2006.
- [7] P. A. Dirac. *General theory of relativity*. Princeton University Press, 1975.
- [8] T. Padmanabhan. *Gravitation: foundations and frontiers*. Cambridge University Press, 2010.
- [9] C. W. Misner, K. S. Thorne y J. A. Wheeler. *Gravitation*. Princeton University Press, 1973.
- [10] D. Kramer y col. *Exact solutions of Einstein's field equations*. Cambridge University Press, 1980.
- [11] B. P. Abbott y col. "Observation of gravitational waves from a binary black hole merger". En: *Physical review letters* 116.6 (2016), pág. 061102.
- [12] J. B. Griffiths. *Colliding plane waves in general relativity*. Oxford University Press, 1991.
- [13] A. Dueñas Vidal. "Gravitational Shock Waves and Holography". Tesis doct. Universidad de Salamanca, 2015.
- [14] J.M. Stewart. "Gravitational shock waves". En: *General Relativity and Gravitation* 38.6 (2006), págs. 1017-1027.
- [15] P. Szekeres. "Colliding gravitational waves". En: *Nature* 228.5277 (1970), pág. 1183.
- [16] K. Sfetsos. "On gravitational shock waves in curved spacetimes". En: *Nuclear Physics B* 436.3 (1995), págs. 721-745.
- [17] T. Dray. "Gravitational shock waves". En: *Geometric Aspects of the Einstein Equations and Integrable Systems*. Springer, 1985, págs. 151-153.
- [18] D. M. Eardley y S. B. Giddings. "Classical black hole production in high-energy collisions". En: *Physical Review D* 66.4 (2002), pág. 044011.

- [19] P. C. Aichelburg y R. U. Sexl. “On the gravitational field of a massless particle”. En: *General Relativity and Gravitation* 2.4 (1971), págs. 303-312.
- [20] C.O. Lousto y N. Sánchez. “The curved shock wave space-time of ultrarelativistic charged particles and their scattering”. En: *International Journal of Modern Physics A* 5.05 (1990), págs. 915-938.
- [21] S. S. Gubser, S. S. Pufu y A Yarom. “Entropy production in collisions of gravitational shock waves and of heavy ions”. En: *Physical Review D* 78.6 (2008), pág. 066014.
- [22] W. van der Schee. “Gravitational collisions and the quark-gluon plasma”. En: *arXiv preprint arXiv:1407.1849* (2014).
- [23] K.A. Khan y R. Penrose. “Scattering of two impulsive gravitational plane waves”. En: *Nature* 229.5281 (1971), pág. 185.
- [24] J. M. Senovilla. “Trapped surfaces”. En: *Black Holes: New Horizons*. World Scientific, 2013, págs. 203-234.
- [25] D. Bini y G. Esposito. “A concise introduction to trapped surface formation in general relativity”. En: *arXiv preprint arXiv:1705.01706* (2017).
- [26] R. Penrose. “Cambridge University Seminar (unpublished)”. En: *Cambridge, England, conference paper*. 1974, pág. 93.
- [27] D. Grumiller y P. Romatschke. “On the collision of two shock waves in AdS5”. En: *Journal of High Energy Physics* 2008.08 (2008), pág. 027.
- [28] L. Alvarez-Gaume y col. “Critical formation of trapped surfaces in the collision of gravitational shock waves”. En: *Journal of High Energy Physics* 2009.02 (2009), pág. 009.
- [29] C. A. Bertulani. *Nuclear physics in a nutshell*. Princeton University Press, 2007.
- [30] H. Takahasi y M. Mori. “Double exponential formulas for numerical integration”. En: *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences* 9.3 (1974), págs. 721-741.
- [31] M. Abramowitz e I.A. Stegun. “Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables”. En: *National Bureau of Standards, Washington, DC* (1964).