

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS

**MULTIPLICIDAD Y CONCENTRACIÓN DE SOLUCIONES PARA
UNA ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER NO-LINEAL
UNIDIMENSIONAL CON FRECUENCIA CRÍTICA: CASO
POLINOMIAL**

**TRABAJO DE TITULACIÓN PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE
MATEMÁTICO**

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

LEONARDO PAÚL MEDINA ESPINOSA

leonardo.medina@epn.edu.ec

DIRECTOR: JUAN MAYORGA ZAMBRANO, Ph.D.

jrmayorgaz@gmail.com

CODIRECTOR: MARCO VINICIO CALAHORRANO RECALDE, Ph.D.

marco.calahorrano@epn.edu.ec

QUITO, JULIO 2019

DECLARACIÓN

Yo, LEONARDO PAÚL MEDINA ESPINOSA, declaro bajo juramento que el trabajo aquí escrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

A través de la presente declaración cedo mis derechos de propiedad intelectual, correspondientes a este trabajo, a la Escuela Politécnica Nacional, según lo establecido por la Ley de Propiedad Intelectual, por su reglamento y por la normatividad institucional vigente.



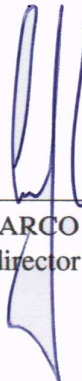
LEONARDO PAÚL MEDINA ESPINOSA

CERTIFICACIÓN

Certificamos que el presente trabajo fue desarrollado por LEONARDO PAÚL MEDINA ESPINOSA , bajo nuestra supervisión



Dr. JUAN MAYORGA ZAMBRANO
Director del Proyecto



Dr. MARCO CALAHORRANO
Codirector del Proyecto

AGRADECIMIENTOS

La mejor frase de mi maestro:

“Lo que hacemos los matemáticos es inventar nueva matemática y tratar de copiar ideas de los números reales” (Juan Mayorga-Zambrano)

Al principio lo considere como mi profesor, alguien a quien no eres tan íntimo sino que tratas de guardar esa línea entre profesor y alumno. Al pasar el tiempo y el trabajo pude ver que poco a poco se convirtió en uno de mis maestros, más que un profesor es un familiar y un modelo a seguir. Gracias a él pude liberarme de algunas cadenas y explotar todo mi potencial, de todo corazón muchas gracias Juan por acceder a dirigir este trabajo, por su enorme paciencia, haber sacrificado su tiempo por mí, su apoyo incondicional, su sentimiento de padre y enseñarme a escribir matemáticas.

Muchas gracias al Dr. Calahorrano por ayudarme en todo este tiempo, por reprenderme cada vez que me veía y por estar pendiente de la culminación de este proyecto. Muchas gracias por su tiempo y entusiasmo.

A mi querida institución, Escuela Politécnica Nacional y de manera especial a la Carrera de Matemática, la cual me ha brindado los conocimientos y bases para mi desarrollo profesional.

Gratitud infinita a la Universidad Yachay Tech por abrirme sus puertas, no cabe duda que en unos cuantos años se convertirá en una de las mejores universidades del Ecuador en el ámbito de investigación científica. Puedo decir esto, ya que viví cerca de la universidad y pude constatar que, omitiendo el hecho de la mala administración tienen una forma particular de pensar desde los estudiantes hasta los profesores y esa es la colaboración grupal.

A su vez mis agradecimientos más sinceros, a los jóvenes que tuve el agrado de conocer, en Yachay, me aceptaron como un miembro de sus casas. Si no fuera por ustedes mi estancia en Yachay no hubiera sido tan buena.

Por último, pero no por ello menos importante, las infinitas gracias de la manera más cariñosa a mis hermanos Alexander Cárdenas, Josue Ruiz y Rossel Medina por estar en las buenas y en las malas durante todo mi trayecto universitario. Por apoyarme en las horas más oscuras de mi vida y hasta en las ideas más descabelladas que se me han ocurrido.

DEDICATORIA

“El científico no estudia la naturaleza por la utilidad de hacerlo; la estudia porque obtiene placer, y obtiene placer porque la naturaleza es bella. Si no fuera bella no valdría la pena conocerla, y si no valiera la pena conocer la naturaleza, la vida no sería digna de ser vivida” (Henri Poincaré)

Esta pequeña frase resume la motivación y enseñanzas que ha inculcado mi maestro Dr. Paúl Medina: gracias padre por apoyarme en toda mi vida, sobre todo hace dos años cuando no tenía ganas de hacer nada.

“Lo que espolea a los matemáticos es el deseo de verdad, la sensibilidad ante la belleza, el poder y la elegancia de las matemáticas” (Landon T. Clay)

Aunque estes apunto de morir siempre decir la verdad y creer en tus convicciones palabras de mis madres Julia Araujo y Susana Espinosa son pequeñas palabras que resumen su educación a las cuales les debo mi forma de ser y poder entender que la vida no sólo es blanco y negro sino tienen un sin número de grises de por medio. Espero de todo corazón que algún día estas palabras toquen sus corazones. Queridos hermanos Gabriel Cisneros y Juliette Medina, estoy convencido que algún día ustedes sabrán superarme.

“Las lenguas mueren pero las ideas matemáticas no. Inmortalidad quizá sea una palabra ingenua, pero un matemático tiene mas probabilidades que cualquier otro ser humano de alcanzar lo que aquella palabra designa”(G. H. Hardy)

Para quién lo lea en el futuro conozca que este trabajo fue realizado con mucho amor y entusiasmo. Una especial dedicatoria a Alejandra Rivera, al igual que las matemáticas que es lo más cercano a la inmortalidad, para mi eso representas en mi corazón. Gracias por enseñarme a las malas a liberar mi potencial.

ÍNDICE GENERAL

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN	1
CAPÍTULO 2. FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS	7
2.1. Resultados básicos	7
2.2. Semicontinuidad	13
2.3. Espacios de Hilbert	14
2.4. Espacios de Lebesgue	17
2.5. Ecuaciones Diferenciales Parciales	22
2.6. Espacios de Sobolev	24
2.7. Función positiva m -homogénea	31
2.8. Algunos tópicos de Análisis No-Lineal	32
2.8.1. El flujo en variedades	40
2.8.2. El flujo gradiente negativo, simetría y el lema de deformación simétrico	41
2.8.3. Condición de Palais-Smale y el Lema de Deformación Simétrico	42
2.8.4. El género de Krasnoselski	48
2.8.5. Principios del Máximo	51
CAPÍTULO 3. ALGUNOS CONCEPTOS DE MECÁNICA CUÁNTICA	54
3.1. Orígenes de la Mecánica Cuántica	54
3.1.1. Visión clásica de partículas y ondas	59
3.1.2. Visión cuántica de partículas y ondas	61
3.1.3. Principio de complementariedad (Dualidad onda-partícula)	62
3.1.4. Principio de superposición lineal	62
3.1.5. Principio de incertidumbre de Heisenberg	63
3.1.6. Principio de correspondencia	64
3.2. Ecuación de Schrödinger	65
3.2.1. Ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo	65
3.2.2. Ecuación de Schrödinger no dependiente del tiempo	66
3.3. Postulados de la mecánica cuántica	66
CAPÍTULO 4. RESULTADOS	68
4.1. Preliminares	68
4.2. Multiplicidad mediante un esquema tipo Ljusternik-Schnirelman	75
4.2.1. Variedades de Nehari	77
4.2.2. Condición de Palais-Smale	86
4.3. Escalamiento de las soluciones	92
4.4. Límites para los valores críticos	94
4.5. Perfiles asintóticos y fenómeno de concentración	107
4.6. Comportamiento asintótico en el límite	114
CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	118
5.1. Conclusiones	118
5.2. Recomendaciones	119

ÍNDICE DE FIGURAS

FIGURA 2.1.	Grafo de d sobre \mathbb{R}^2	9
FIGURA 2.2.	Grafos de funciones positivas $2n$ -homogéneas unidimensionales.	32
FIGURA 2.3.	Grafo de una función positiva 4-homogénea bidimensional.	33
FIGURA 2.4.	Representa la proyección en los ejes x_1, x_2 y x_4 donde $x_4 := J(x)$	38
FIGURA 2.5.	Representa la proyección en los ejes x_1, x_3 y x_4 donde $x_4 := J(x)$	39
FIGURA 2.6.	Representa la proyección en los ejes x_2, x_3 y x_4 donde $x_4 := J(x)$	39
FIGURA 2.7.	Grafo de la solución del problema de Cauchy σ del Ejemplo 2.17.	41
FIGURA 2.8.	Representación de valores de Palais-Smale y su grafo para G sobre una variedad.	43
FIGURA 2.9.	Grafo de la esfera $\mathbb{S}^2 = S_{\mathbb{R}^3}$	45
FIGURA 2.10.	Grafo del toro \mathbb{T}^2	45
FIGURA 3.1.	(a) Efecto fotoeléctrico: cuando un metal se irradia con luz, los elec- trones pueden emitirse. (b) Energía cinética K del electrón que sale del metal cuando se irradia con una luz de frecuencia ν ; cuando $\nu < \nu_0$ no se expulsa ningún electrón del metal, independientemente de la intensidad de la radiación. Fuente [33]	57
FIGURA 3.2.	S dispara una corriente de balas (indestructibles) fuente [33].	60
FIGURA 3.3.	S es una fuente de ondas (e.g., ondas de luz o de agua). Fuente [33].	60
FIGURA 3.4.	S es una fuente de electrones. Fuente [33].	61
FIGURA 3.5.	S es una fuente de electrones. Fuente [33].	61

ÍNDICE DE CUADROS

TABLA 3.1. Ejemplos de observables. Fuente [10].	67
--	----

RESUMEN

Este trabajo contiene resultados matemáticos sobre el comportamiento cualitativo de soluciones de la ecuación no-lineal de Schrödinger

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \Delta v(x) - V(x)v(x) + |v(x)|^{p-1}v(x) = 0, & x \in \mathbb{R}^N, \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} v(x) = 0, \end{cases} \quad (\mathbf{P}_\varepsilon)$$

donde $p > 1$ y el potencial V satisface

(V1) $V \in C(\mathbb{R}^N)$ no-negativo.

(V2)

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = \infty.$$

(V3) El conjunto de ceros del potencial V es distinto del vacío, i.e.,

$$\Omega := \{x \in \mathbb{R}^N \mid V(x) = 0\} \neq \emptyset.$$

La condición (V3) es referida como caso crítico ya que el comportamiento cualitativo de (\mathbf{P}_ε) cambia drásticamente respecto al caso no crítico, i.e., cuando

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^N} V(x) > 0.$$

Por ejemplo, Byeon y Wang, muestran que para el caso crítico, el fenómeno de concentración cambia drásticamente dado que $V(x)$ depende del comportamiento local conforme x se acerca a Ω .

Estudiamos de manera cualitativa el comportamiento de (\mathbf{P}_ε) en el caso unidimensional, enfocándonos en el Caso Finito (descrito por Byeon y Wang), i.e., considerando $\Omega = \{x_0\}$ y que el potencial V decrece polinomialmente conforme se acerca a Ω . Para un $\alpha > 1$ encontramos un $\delta_\alpha > 0$ tal que el problema límite de (\mathbf{P}_ε) , cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, es

$$\begin{cases} u''(x) - P(x)u(x) + |u(x)|^{p-1}u(x) = 0, & x \in (-\delta_\alpha, \delta_\alpha), \\ u(-\delta_\alpha) = u(\delta_\alpha) = 0, \end{cases} \quad (\mathbf{P}_Y)$$

donde la función P representa una generalización de un polinomio homogéneo de grado par y $(-\delta_\alpha, \delta_\alpha)$ es una vecindad de Ω . Se demuestra que existe un número infinito de soluciones de (\mathbf{P}_ε) y (\mathbf{P}_Y) . A medida que $\varepsilon \rightarrow 0$, las soluciones del problema (\mathbf{P}_ε) , vía reescalamiento, se aproximan a soluciones de la ecuación (\mathbf{P}_Y) ; además las soluciones de (\mathbf{P}_Y) presentan un decaimiento exponencial por fuera de $(-\delta_\alpha, \delta_\alpha)$. La motivación principal fueron los resultados de multiplicidad y concentración de información obtenidos por Felmer y Mayorga, para el caso plano planteado por Byeon y Wang.

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

La mecánica cuántica es la parte de la física que estudia las características y el comportamiento de partículas atómicas y subatómicas. Uno de los principios de la mecánica cuántica indica que partículas subatómicas, como los protones, neutrones y electrones están dotadas de propiedades que permiten interpretarlas como ondas y como partículas. Esto, sin lugar a dudas, difiere del comportamiento de los objetos macroscópicos estudiados por la mecánica clásica.

A diferencia de la mecánica clásica que, a groso modo, describe los objetos por su posición y velocidad, la mecánica cuántica estudia la evolución de la probabilidad de encontrar partículas en cierto estado físico. Para lograrlo se recurre a la ecuación de Schrödinger,

$$i\hbar\Psi_t(x,t) + \frac{\hbar^2}{2}\Delta\Psi(x,t) - V_0(x,t)\Psi(x,t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, t \geq 0, \quad (\text{ESch})$$

donde \hbar denota la constante reducida de Planck

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}, \quad h \approx 6.626 \times 10^{-34} [J \cdot s],$$

i es la unidad imaginaria, V_0 es un potencial de energía, Δ denota el operador Laplaciano

$$\Delta := \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_k^2},$$

y Ψ es la función de onda. Ψ ayuda a modelar un sistema que evoluciona con el tiempo, i.e., para un tiempo t la función de densidad de probabilidad de encontrar partículas en cierto estado físico será $|\Psi(x,t)|^2$, véase, e.g., [33].

En este trabajo estudiaremos una versión no-lineal de (ESch):

$$i\hbar\Psi_t(x,t) + \frac{\hbar^2}{2}\Delta\Psi(x,t) - V_0(x)\Psi(x,t) + |\Psi(x,t)|^{p-1}\Psi(x,t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, t \geq 0, \quad (\text{ENSch})$$

donde $p > 1$. La (ENSch) permite analizar y describir otro tipo de fenómenos que aparecen en la naturaleza. Para estudiar (ENSch) nos apoyamos en un método conocido como mecánica semiclásica, que permite abordar de forma asintótica los problemas de la mecánica cuántica usando herramientas y conceptos de la mecánica clásica. Para esto se deja de considerar como constante a \hbar y se permite que tienda a cero.

Esta técnica resulta de gran utilidad al momento de analizar fenómenos de colisiones atómicas y moleculares, ya que sus resultados suelen ser aceptablemente precisos y, adicionalmente, permite abordar problemas transformados, que son más simples desde el punto de vista matemático, véase, e.g., [11].

Cuando un grupo de partículas idénticas interactúan entre ellas en estados ultrafríos, como es el caso de los condensados de Bose-Einstein, la evolución del sistema puede ser descrita con un buen grado de precisión por (ENSch). La (ENSch) surge también cuando se describe la propagación de la luz a través de algunos materiales ópticos no-lineales; en este caso, (ENSch) se deriva de las ecuaciones de Maxwell, véase, e.g., [5], [17], [18] y [23]. Si $p = 3$ en (ENSch), se obtiene la ecuación de Gross-Pitaevskii, la cual describe el estado base de un sistema cuántico de bosones idénticos.

En particular, cuando el potencial de energía V_0 depende sólo de la variable espacial, se pueden buscar soluciones del tipo onda viajera, i.e.,

$$\Psi(x, t) = \exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right) \cdot v(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, t \geq 0, \quad (1.0.1)$$

donde la función v representa a la onda estacionaria. Cuando $1 \gg \hbar > 0$, estas soluciones de onda viajera se conocen como estados semiclásicos. Si reemplazamos (1.0.1) en (ENSch) obtenemos

$$\varepsilon^2 \Delta v(x) - V(x)v(x) + |v(x)|^{p-1} v(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (P)$$

donde

$$\varepsilon^2 := \frac{\hbar^2}{2} \quad \text{y} \quad V(x) := V_0(x) - E.$$

Floer y Weinstein, [16], estudian el problema unidimensional de (P) cuando $p = 3$ y V es una función acotada tal que

$$\inf_{x \in \mathbb{R}} V(x) > 0. \quad (1.0.2)$$

Ellos demuestran que, para

$$1 \gg \varepsilon > 0,$$

existe una solución v_ε de (P) tal que

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \max_{x \in \mathbb{R}} |v_\varepsilon(x)| > 0, \quad (1.0.3)$$

y que la solución se concentra alrededor de un punto crítico no-degenerado de V . En los trabajos [11], [12] y [29], en los cuales se realiza el estudio de (P) cuando $N > 1$, las soluciones encontradas para (P) satisfacen la condición (1.0.3) y presentan el mismo tipo de fenómeno de concentración. Cabe indicar que en estos trabajos los métodos desarrollados para encontrar soluciones son diversos, entre los que se destacan métodos variacionales, reducciones de Lyapunov-Schmidt y combinaciones de los dos anteriores. Bajo la condición (1.0.2), y cuando

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^N} V(x) < \liminf_{|x| \rightarrow \infty} V(x),$$

Rabinowitz, [30], prueba que existe una solución v_ε de (P) usando el Teorema del Paso de Montaña. Mientras que para la condición de que

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^N} V(x) < 0, \quad (1.0.4)$$

para $1 \gg \varepsilon > 0$ no se puede aplicar el Teorema del Paso de Montaña en (P).

Por otro lado, Byeon y Wang, [5], estudian el comportamiento de las soluciones de

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \Delta v(x) - V(x)v(x) + |v(x)|^{p-1}v(x) = 0, & x \in \mathbb{R}^N, \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} v(x) = 0. \end{cases} \quad (\mathbf{P}_\varepsilon)$$

bajo la condición

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^N} V(x) = 0. \quad (1.0.5)$$

Aquí la situación cambia dramáticamente y depende del comportamiento local de $V(\cdot)$ cerca de su mínimo global, donde $V(x) = 0$. La primera característica importante es que las soluciones encontradas ya no verifican (1.0.3); en realidad, el valor máximo de las soluciones se aproxima a cero y la velocidad a la que decrecen estas soluciones depende de la naturaleza del conjunto

$$\Omega := \{x \in \mathbb{R}^N \mid V(x) = 0\}.$$

Por esta razón, Byeon y Wang llaman a la condición (1.0.5) como frecuencia crítica de (P). En [5] se distinguen tres casos:

Caso Plano: donde el interior de $\overline{\Omega}$ no es vacío.

Caso Finito: cuando Ω se reduce a un número finito de puntos y el potencial V decrece como un polinomio en su cercanía.

Caso Infinito: en el cual Ω se reduce a un número finito de puntos y el potencial V decrece exponencialmente en su cercanía.

Asociado a cada uno de los casos, existe un problema límite (\mathbf{P}_ε) , cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, el cual permite estudiar el fenómeno de concentración. En [5], se prueba que existe una función v_ε no-negativa solución de (\mathbf{P}_ε) que es atrapada en una vecindad de puntos mínimos aislados de V y cuya amplitud tiende a 0 cuando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Felmer y Mayorga, en [15], abordan el Caso Plano para el problema (\mathbf{P}_ε) donde el potencial V verifica:

(CP1) V es una función continua no-negativa sobre \mathbb{R}^N ;

(CP2)

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = \infty$$

(CP3)

$$\Omega = \text{int} \{x \in \mathbb{R}^N \mid V(x) = 0\} \neq \emptyset,$$

es conexo y de frontera suave.

En esta situación el problema límite es

$$\begin{cases} \Delta u(x) + |u(x)|^{p-1}u(x) = 0, & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (\mathbf{P}_F)$$

En [15] se comprueba la existencia de un número infinito de soluciones para los problemas (\mathbf{P}_ε) y (\mathbf{P}_F) , los cuales comparten la topología de sus conjuntos de nivel, en el marco

de la Teoría de Ljusternik-Schnirelman. Denotando a las soluciones de (P_ε) y (P_F) como $(v_{k,\varepsilon})_{k \in \mathbb{N}}$ y $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$, respectivamente, se muestra que para $k \in \mathbb{N}$ fijo, la energía de $v_{k,\varepsilon}$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, converge a la energía de u_k . También se muestra que las soluciones $v_{k,\varepsilon}$ para (P_ε) se concentran exponencialmente alrededor de Ω y que, mediante un escalamiento adecuado, convergen en una solución de (P_F) , i.e., presentando el mismo fenómeno de concentración que fue mostrado en [5].

Con esta justificación analítica, Mayorga y Carrasco, [25], para $\varepsilon > 0$ fijo, aplican una variación del esquema de disparo, para obtener numéricamente soluciones numéricamente explícitas de los problemas (P_F) y (P_ε) para el caso cuando $\Omega = (-2, 2)$, $p = 2$ y

$$V(x) := (1 - \chi_\Omega(x)) \cdot (\exp(x^2 - 4) - 1), \quad \chi_\Omega(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \Omega, \\ 0 & \text{si } x \notin \Omega. \end{cases}$$

Para dicha solución se aplicó el método de la secante, ya que el uso de dos pendientes iniciales proporciona control en k , la categoría Ljusternik-Schnirelman. El solucionador de problemas de valor inicial fue Runge-Kutta 4. Fijo k , la concentración se muestra numéricamente como

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\| u_k - \frac{v_{k,\varepsilon}}{\varepsilon^2} \right\|_{L^2(-3,3)} = 0.$$

Aquí, las dificultades adicionales provienen de la existencia de al menos dos soluciones para cada nivel crítico, hecho que a su vez proviene de las propiedades del género de Krasnoselski.

Lo expuesto anteriormente demuestra que el estudio matemático de (P) es un problema que ha sido abordado desde varias perspectivas, ya que dependiendo de las condiciones del potencial V , esta ecuación puede tener (véase, e.g., [5], [15] y [30]) o no tener solución, véase, e.g., [30]. En caso afirmativo, sobre todo al interés yace en la unicidad o multiplicidad de soluciones, véase, e.g., [15].

Una vez presentado brevemente el estado del arte, nos centraremos en el tema de la presente tesis. Estudiaremos de manera cualitativa el comportamiento de (P_ε) cuando $N = 1$, enfocándonos en el Caso Finito, i.e., considerando $\Omega = \{x_0\}$ y que el potencial V decrece polinomialmente conforme se acerca a x_0 . Para un $\alpha > 1$ encontraremos un $\delta_\alpha > 0$ tal que el problema límite de (P_ε) , cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, es

$$\begin{cases} u''(x) - P(x)u(x) + |u(x)|^{p-1}u(x) = 0, & x \in (-\delta_\alpha, \delta_\alpha), \\ u(-\delta_\alpha) = u(\delta_\alpha) = 0, \end{cases} \quad (P_Y)$$

donde la función P representa una generalización de un polinomio homogéneo de grado par y $(-\delta_\alpha, \delta_\alpha)$ es una vecindad escalada de x_0 . En el Capítulo 4 se hablará con mayor detalle de (P_Y) y el porqué es el problema límite.

En este trabajo, se mostrará que:

- i) por el esquema de Ljusternik-Schnirelman y el género de Krasnoselski, existen infinitos pares de soluciones de (P_ε) y (P_Y) , denotándolas como $(v_{k,\varepsilon})_{k \in \mathbb{N}}$ y $(u_k^{\delta_\alpha})_{k \in \mathbb{N}}$ respectivamente;

ii) para un $k \in \mathbb{N}$ fijo, a medida que $\varepsilon \rightarrow 0$ y, mediante un escalamiento adecuado, los puntos críticos $(v_{k,\varepsilon})_{k \in \mathbb{N}}$ subconvergen a $(u_k^{\delta_\alpha})_{k \in \mathbb{N}}$; y,

iii) las soluciones $(u_k^{\delta_\alpha})_{k \in \mathbb{N}}$ presentan un fenómeno de concentración en el intervalo

$$(-\delta_\alpha, \delta_\alpha),$$

las soluciones se anularán con velocidad exponencial fuera del mismo.

Observación 1.1. Una familia de funciones $\{f_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$ se dice que subconverge en un espacio X , cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, si para cualquier sucesión $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que converge a cero es posible tomar una subsucesión $(\varepsilon_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ tal que $(f_{\varepsilon_{n_i}})_{i \in \mathbb{N}}$ converge en X cuando $i \rightarrow \infty$.

A continuación describimos brevemente el contenido de este trabajo.

En el Capítulo 2 se presentan herramientas matemáticas que se utilizarán para probar los resultados. Comenzamos con algunas definiciones básicas sobre los espacios métricos y de Banach, después hacemos un breve repaso sobre funciones semicontinuas, convergencia fuerte y convergencia débil. Seguimos con una breve presentación de los espacios de Hilbert, junto con algunas propiedades fundamentales, puesto que, el principal estudio se enmarca dentro de dicho ámbito. Continuamos con los espacios de Lebesgue junto con resultados clásicos como las desigualdades de Hölder e interpolación. Posteriormente se hablará sobre las Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP) y el porqué estas ayudan a modelar distintos fenómenos en la naturaleza. Seguimos con una pequeña introducción sobre los espacios de Sobolev, los cuales nos ayudarán a estudiar soluciones débiles de las EDP. Posteriormente se hace mención a algunos tópicos del análisis no-lineal para los problemas elípticos. Empezamos con la definiciones de la derivada de Fréchet con sus principales propiedades. Luego se habla sobre variedades en espacios de Hilbert, en particular sobre la variedad de Nehari y sus principales características. Brevemente se introduce el concepto de sucesión de Palais-Smale; hablamos también de la condición de Palais-Smale; y el Lema de deformación simétrico. Finalmente se explicará el concepto de género de Krasnoselski que ayudará a demostrar la multiplicidad de soluciones de los problemas (P_ε) y (P_Y) .

En el Capítulo 3 se expone un breve resumen sobre mecánica cuántica. La mecánica cuántica se puede presentar mediante dos formulaciones que son la mecánica matricial y la mecánica de la Onda; estas dos formulaciones aparentemente muy diferentes son equivalentes. Cabe señalar que en mecánica cuántica existen cuatro principios importantes que son: dualidad onda partícula, superposición lineal, incertidumbre de Heisenberg y correspondencia. El principio de correspondencia permite ver qué relación tienen por medio de la mecánica semi-clásica las soluciones de los problemas (P_ε) y (P_Y) . Continuamos con la presentación de la ecuación de Schrödinger, misma que estudia la evolución de la probabilidad de encontrar partículas en cierto estado físico. Finalmente presentamos los postulados de la mecánica cuántica que son las piedras angulares para su surgimiento como teoría formal.

En el Capítulo 4 se estudiarán los problemas (P_ε) y (P_Y) , de los cuales se indicarán los resultados obtenidos sobre la existencia y multiplicidad de infinitos pares de soluciones en el caso unidimensional ($N = 1$) de los problemas (P_ε) y (P_Y) . Para ello, se definirán nuevos

espacios y funcionales con sus respectivas propiedades.

Posteriormente se enlazarán todos los conceptos mencionados en los anteriores capítulos y enunciaremos los teoremas y lemas que muestran los resultados. Finalmente con la ayuda de la mecánica semiclásica se mostrará la relación que tienen los problemas (P_ε) y (P_Y) .

Por último, en el Capítulo 5 se presentarán las conclusiones y recomendaciones pertinentes a este trabajo.

Capítulo 2

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS

En este capítulo presentamos tópicos necesarios para nuestro estudio. La notación que utilizaremos a lo largo de este trabajo trata de ser lo más estándar posible siguiendo los lineamientos de [26]. Las referencias principales son [1], [3], [4], [6], [20], [21] y [24]. Hemos incluido las demostraciones de algunos resultados, por su relevancia en el desarrollo del trabajo.

2.1. Resultados básicos

Sea $S \subset \mathbb{R}$ un subconjunto no-vacío. Si $b \in \mathbb{R}$ cumple que

$$\forall x \in S: \quad x \leq b,$$

entonces diremos que b es una cota superior de S ; si además b cumple

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in S: \quad b - \varepsilon \leq x,$$

entonces a b se lo llamará supremo de S y se lo denotará como $\sup S = b$.

Si $a \in \mathbb{R}$ cumple

$$\forall x \in S: \quad a \leq x,$$

entonces diremos que a es una cota inferior de S ; si además a cumple

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in S: \quad x \leq a + \varepsilon,$$

entonces a a se la llamará ínfimo de S y se la denotará como $\inf S = a$.

Una familia \mathcal{T} de partes de un conjunto E no-vacío, es una topología sobre E , si las tres condiciones siguientes se cumplen:

(T.1) Los conjuntos \emptyset y E pertenecen a \mathcal{T} .

(T.2) La intersección finita de elementos de \mathcal{T} pertenece a \mathcal{T} .

(T.3) La unión cualquiera de elementos de \mathcal{T} pertenece a \mathcal{T} .

Los elementos de \mathcal{T} son llamados conjuntos abiertos, sus complementarios son llamados cerrados y el par (E, \mathcal{T}) es referido como espacio topológico.

Se dice que $d : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una métrica si verifica las siguientes propiedades:

(D.1) **No-negatividad:** para todo $x, y \in E$,

$$d(x, y) \geq 0.$$

(D.2) **Simetría:** para todo $x, y \in E$,

$$d(x, y) = d(y, x).$$

(D.3) **Separabilidad:**

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

(D.4) **Desigualdad triangular:** para todo $x, y, z \in E$,

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

Al par (E, d) se lo llama espacio métrico. Un caso particular de espacios topológicos son los espacios métricos, véase, e.g., [31].

Podemos calcular la distancia entre $A, B \subseteq E$ con la función

$$\text{dist}(A, B) := \begin{cases} \inf_{(x, y) \in A \times B} d(x, y) & \text{si } A \neq \emptyset \text{ y } B \neq \emptyset \\ \infty & \text{si } A = \emptyset \text{ o } B = \emptyset \end{cases}.$$

Sean (E, d) y (F, ρ) espacios métricos. Diremos que una aplicación $f : E \rightarrow F$ es continua en el punto $x_0 \in E$ si

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in E}} f(x) = f(x_0),$$

es decir,

$$\forall x \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_{\varepsilon, x_0} > 0 : d(x, x_0) < \delta \Rightarrow \rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Diremos que f es continua sobre E , o simplemente continua, si es continua en cada uno de los puntos de E .

Ejemplo 2.1. Consideramos \mathbb{R} equipado con la aplicación

$$\begin{aligned} d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) &\mapsto d(x_1, x_2) := |\arctan(x_1) - \arctan(x_2)|. \end{aligned}$$

Probaremos que la aplicación d es una métrica, i.e., que cumple con las propiedades (D.1)-(D.4).

Notemos que por la definición del valor absoluto $d(x_1, x_2) \geq 0$, para todo $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. La simetría también se cumple para todo par $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$d(x_1, x_2) = |\arctan(x_1) - \arctan(x_2)| = |\arctan(x_2) - \arctan(x_1)| = d(x_2, x_1).$$

Gracias a la siguiente cadena de equivalencias lógicas demostramos la separabilidad

$$d(x_2, x_1) = 0 \Leftrightarrow \arctan(x_1) - \arctan(x_2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2.$$

Por último la desigualdad triangular se cumple, puesto que el valor absoluto cumple la propiedad de la desigualdad triangular. Por lo antes expuesto el par (\mathbb{R}, d) es un espacio métrico.

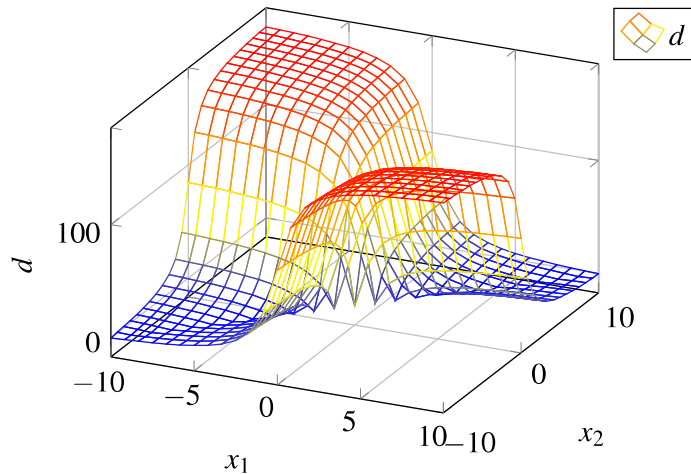


FIGURA 2.1. Grafo de d sobre \mathbb{R}^2 .

Ejemplo 2.2. Consideramos la función

$$f: \mathbb{R} \setminus \{3\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) := \frac{5+x}{3-x}.$$

Probaremos que es continua en $x = 2$, i.e.,

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{5+x}{3-x} = 7,$$

o, lo que es equivalente, demostremos que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: |x-2| < \delta \Rightarrow \left| \frac{5+x}{3-x} - 7 \right| < \varepsilon.$$

Sea $\varepsilon > 0$. Definimos $\delta := \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{16} \right\}$. Concluimos que para todo $x \in (2 - \delta, 2 + \delta)$:

$$\frac{3}{2} < x < \frac{5}{2},$$

entonces

$$\frac{1}{2} < |x-3| < \frac{3}{2},$$

y, por la última desigualdad, δ está nos conduce

$$\left| \frac{5+x}{3-x} - 7 \right| = 8 \left| \frac{x-2}{3-x} \right| < \frac{8\delta}{\frac{1}{2}} < 16\delta = \varepsilon.$$

Con esto queda claro que

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{5+x}{3-x} = 7.$$

Sea $f: U \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, donde U es un conjunto abierto, se dice que f es diferenciable en

$a \in U$ si existe

$$f'(a) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Teorema 2.1 (Teorema del Valor Medio de Lagrange). *Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua sobre el intervalo $[a, b]$ y diferenciable sobre el intervalo (a, b) , donde $a < b$. Entonces existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{a - b}.$$

Para una demostración de este resultado véase, e.g., [4, Capítulo 5].

Sean (E, d) y (F, ρ) espacios métricos y $k > 0$. Diremos que una aplicación $f : E \rightarrow F$ es k -Lipschitziana si

$$\forall x, y \in E : \rho(f(x), f(y)) \leq k \cdot d(x, y).$$

En particular si $k \in (0, 1)$ diremos que f es contractiva.

Ejemplo 2.3. Consideramos la función

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) := \frac{1}{2} \arctan(x). \end{aligned}$$

Sabemos que la función $\arctan(\cdot)$ es continua al igual que su derivada, entonces aplicando el Teorema del Valor Medio Lagrange concluimos

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x \neq y, \exists c \in (\min\{x, y\}, \max\{x, y\}) : \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \frac{1}{2(1+c^2)} = f'(c). \quad (2.1.1)$$

Por otro lado

$$\forall c \in \mathbb{R} : 0 < \frac{1}{2(1+c^2)} \leq \frac{1}{2}, \quad (2.1.2)$$

por último gracias a (2.1.1) y (2.1.2) concluimos

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2} |x - y|.$$

Por lo tanto la función f es contractiva.

En el espacio métrico (E, d) , diremos que una sucesión $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq E$ es de Cauchy ssi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists K_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall l, k > K : d(x_l, x_k) < \varepsilon.$$

Equivalentemente, una sucesión de Cauchy verifica

$$\lim_{l, k \rightarrow \infty} d(x_l, x_k) = 0.$$

El espacio (E, d) es completo si toda sucesión de Cauchy converge.

Un espacio normado es un par $(E, \|\cdot\|)$, donde E es un espacio vectorial y la aplicación $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$, llamada norma, verifica las siguientes propiedades

(N.1) **No-negatividad:** para todo $x \in E$,

$$\|x\| \geq 0.$$

(N.2) **Separabilidad:**

$$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

(N.3) **Homogeneidad:** para todo $x \in E$ y $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|.$$

(N.4) **Desigualdad triangular:** para todo $x, y \in E$,

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

El espacio $(E, \|\cdot\|)$ induce un espacio métrico mediante:

$$\forall x, y \in E : \quad d(x, y) := \|x - y\|.$$

Si el espacio $(E, \|\cdot\|)$ es completo se lo denomina espacio de Banach.

Ejemplo 2.4. El espacio $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ es un espacio de Banach.

Supongamos que E y F son espacios vectoriales reales. Una aplicación $T : E \rightarrow F$ es lineal si verifica

$$\forall x, y \in E, \forall \alpha \in \mathbb{R} : \quad T(\alpha x + y) = \alpha T(x) + T(y).$$

Ahora supongamos que $(E, \|\cdot\|_E)$ y $(F, \|\cdot\|_F)$, son espacios normados. El espacio vectorial

$$\mathbf{B}(E, F) := \{T : E \rightarrow F \mid T \text{ es lineal y continua}\},$$

se equipa habitualmente con la norma

$$\|T\|_{\mathbf{B}(E, F)} := \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|T(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|T(x)\|_F.$$

Debe tenerse presente que $T \in \mathbf{B}(E, F)$ ssi

$$\exists c > 0, \forall u \in E : \quad \|T(u)\|_F \leq c \|u\|_E. \quad (2.1.3)$$

De (2.1.3) se sigue que

$$\forall u, v \in E : \quad \|T(u) - T(v)\|_F = \|T(u - v)\|_F \leq c \|u - v\|_E,$$

es decir, que T es Lipschitz continuo. En particular los conceptos de acotación, continuidad y Lipschitz continuidad son equivalentes para operadores lineales. Además

$$\|T\|_{\mathbf{B}(E, F)} = \inf \mathcal{O}_T, \quad (2.1.4)$$

donde

$$\mathcal{O}_T := \{c > 0 \mid \forall u \in E : \|T(u)\|_F \leq c \|u\|_E\}. \quad (2.1.5)$$

Por (2.1.4) y (2.1.5) se sigue que

$$\forall u \in E : \|T(u)\|_F \leq \|T\|_{\mathbf{B}(E,F)} \cdot \|u\|_E.$$

Teorema 2.2. *Sean E un espacio normado y F un espacio de Banach. Entonces el espacio funcional $\mathbf{B}(E, F)$ es un espacio de Banach.*

Demostración. Se tiene que probar que toda sucesión de Cauchy de $\mathbf{B}(E, F)$ es convergente.

- i) Sea $(T_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbf{B}(E, F)$ una sucesión de Cauchy. Entonces dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m, n > N$ implica

$$\|T_n - T_m\|_{\mathbf{B}(E,F)} < \varepsilon.$$

Por lo tanto, para todo $u \in E$,

$$\|T_n(u) - T_m(u)\|_F = \|(T_n - T_m)(u)\|_F \leq \|T_n - T_m\|_{\mathbf{B}(E,F)} \|u\|_E < \varepsilon \|u\|_E. \quad (2.1.6)$$

Por lo cual, para cada $u \in E$, la sucesión $(T_k(u))_{k \in \mathbb{N}} \subseteq F$ es de Cauchy. Puesto que F es completo, para cada $u \in E$, existe un único elemento $T(u) \in F$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T_k(u) = T(u). \quad (2.1.7)$$

- ii) Por (2.1.7), definimos el operador T es lineal. Ahora probaremos que $T \in \mathbf{B}(E, F)$. Sea $u, v \in E$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, genéricos. Tenemos por la linealidad de T_k y las propiedades de los límites,

$$\begin{aligned} T(\lambda u + v) &= \lim_{k \rightarrow \infty} T_k(\lambda u + v) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda T_k(u) + T_k(v) \\ &= \lambda \lim_{k \rightarrow \infty} T_k(u) + \lim_{k \rightarrow \infty} T_k(v) \\ &= \lambda T(u) + T(v), \end{aligned}$$

dado que u, v y λ fueron tomados arbitrariamente, concluimos que T es lineal.

- iii) Retomando el punto i). Por (2.1.7) y puesto que la norma es continua cuando $m \rightarrow \infty$ en (2.1.6) concluimos, para todo $n > N$ y para todo $u \in E$,

$$\|(T_n - T)(u)\|_F \leq \varepsilon \|u\|_E, \quad (2.1.8)$$

lo que implica que $T_n - T \in \mathbf{B}(E, F)$, para $n > N$. Dado que $\mathbf{B}(X, Y)$ es un espacio lineal y $T_k \in \mathbf{B}(E, F)$ concluimos que T es lineal.

- iv) Por (2.1.8), tenemos para $n > N$ que

$$\|T_n - T\|_{\mathbf{B}(E,F)} < \varepsilon.$$

Dado que ε fue tomado arbitrariamente, esto prueba que $\lim_{k \rightarrow \infty} T_k = T$. \square

2.2. Semicontinuidad

Dado E , un espacio normado, denotaremos $E^* := \mathcal{B}(E, \mathbb{R})$ a su dual topológico y escribiremos el producto en dualidad como

$$\forall (\varphi, x) \in E^* \times E : \langle \varphi, x \rangle := \varphi(x).$$

Diremos que $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq E$ converge débilmente si existe $x \in E$ tal que

$$\forall \varphi \in E^* : \lim_{k \rightarrow \infty} \langle \varphi, x_k \rangle = \langle \varphi, x \rangle.$$

Esto se suele denotar mediante

$$x_k \rightharpoonup x, \quad \text{cuando } k \rightarrow \infty.$$

Por otro lado diremos que $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge fuertemente (o en norma) si existe $x \in E$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - x\| = 0.$$

Esto se suele denotar mediante

$$x_k \rightarrow x, \quad \text{cuando } k \rightarrow \infty.$$

En el siguiente resultado se exhibe una relación entre las convergencias fuerte y débil.

Proposición 2.1. *Sean E un espacio de Banach y $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión sobre E que converge fuertemente a $x \in E$. Entonces $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge débilmente a x .*

Demostración. Probaremos que

$$\forall \varphi \in E^* : \lim_{k \rightarrow \infty} \langle \varphi, x_k \rangle = \langle \varphi, x \rangle. \quad (2.2.9)$$

Sea $\varphi \in E^*$, genérico. Por la continuidad de φ tenemos

$$|\langle \varphi, x_k - x \rangle| = |\varphi(x_k - x)| \leq \|\varphi\|_{E^*} \cdot \|x_k - x\|_E. \quad (2.2.10)$$

Puesto que la sucesión $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge fuertemente a x , desigualdad (2.2.10)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\langle \varphi, x_k - x \rangle| = 0, \quad (2.2.11)$$

la linealidad de φ junto con la desigualdad (2.2.11) implican que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle \varphi, x_k \rangle = \langle \varphi, x \rangle.$$

Dado que φ fue tomado arbitrariamente, se ha probado (2.2.9). \square

Ahora presentamos la definición de semicontinuidad inferior, que es de gran utilidad en la minimización de funciones.

La funcional $\psi : E \rightarrow \mathbb{R}$ es semicontinua inferiormente, si

$$\forall x \in E : \quad \psi(x) \leq \liminf_{y \rightarrow x} \psi(y),$$

en donde

$$\liminf_{y \rightarrow x} \psi(y) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\inf_{y \in E \cap B_\varepsilon(x) \setminus \{x\}} \psi(y) \right),$$

y

$$B_\varepsilon(x) := \{y \in E \mid \|x - y\| < \varepsilon\}.$$

Notemos que si ψ es una función continua, entonces también es semicontinua inferiormente, pues

$$\liminf_{y \rightarrow x} \psi(y) = \lim_{y \rightarrow x} \psi(y) = \psi(x).$$

2.3. Espacios de Hilbert

Se dice que $(E, (\cdot, \cdot))$ es un espacio Euclidiano si E es un espacio vectorial y $(\cdot, \cdot) : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ es un producto escalar sobre E , i.e., cumple las siguientes propiedades

(E.1) **Definida positiva:** para todo $x \in E$,

$$(x, x) \geq 0.$$

(E.2) **Separabilidad:**

$$(x, x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0.$$

(E.3) **Linealidad por la izquierda:** para todo $x, y, z \in E$ y $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$,

$$(\lambda x + y, \beta z) = \lambda (x, z) + \beta (y, z).$$

(E.4) **Simetría:** para todo $x, y \in E$,

$$(x, y) = (y, x).$$

El producto escalar induce una norma mediante

$$\|x\|^2 = (x, x).$$

Si un espacio Euclidiano es completo lo llamaremos espacio de Hilbert.

Teorema 2.3 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz). *Un espacio Euclidiano E se verifica la desigualdad de Cauchy-Schwarz:*

$$\forall x, y \in E : \quad |(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Demostración. Si $y = 0$ la desigualdad de Cauchy-Schwarz se cumple porque ambos lados de la desigualdad son iguales a cero.

Ahora asumamos que $y \neq 0$. Tenemos que para todo $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$0 \leq \|x + \alpha y\|^2$$

$$\begin{aligned}
&= (x + \alpha y, x + \alpha y) \\
&= \|x\|^2 + 2\alpha (x, y) + \alpha^2 \|y\|^2.
\end{aligned} \tag{2.3.12}$$

Definimos la función

$$\begin{aligned}
f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\
\alpha &\mapsto f(\alpha) := \|x\|^2 + 2\alpha (x, y) + \alpha^2 \|y\|^2,
\end{aligned}$$

buscamos los puntos críticos de f y concluimos que

$$f'(\beta) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \beta = -\frac{(x, y)}{\|y\|^2}$$

por último calculamos la segunda derivada f , i.e.,

$$f''(\alpha) = 2\|y\|^2.$$

Puesto que $f''(\beta) \geq 0$, el punto β es un mínimo para la función f . Como la desigualdad (2.3.12) se cumple para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, en particular para β , con lo que concluimos

$$0 \leq f(\beta) = \|x\|^2 + 2\beta (x, y) + \beta^2 \|y\|^2 = \|x\|^2 - \frac{|(x, y)|^2}{\|y\|^2},$$

que es equivalente a la desigualdad de Cauchy-Schwarz. \square

Teorema 2.4 (Representación de representación de Riesz-Fréchet). *Sea H un espacio de Hilbert. Tenemos*

$$\forall \phi \in H^*, \exists! f_\phi \in H, \forall v \in H: \quad \langle \phi, v \rangle = (f_\phi, v).$$

Además se verifica

$$\|f_\phi\|_H = \|\phi\|_{H^*}.$$

Para una demostración de este resultado véase e.g. a [4].

Las siguientes proposiciones son de mucha importancia para los resultados que serán expuestos en el Capítulo 4.

Proposición 2.2. *Sea H un espacio de Hilbert y la sucesión $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq H$ converge débilmente a $u \in H$, entonces*

$$\|u\| \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|u_k\|.$$

Demostración. Como $u \in H$, por el Teorema de Representación de Riesz-Fréchet existe $\Phi(u) = \phi_u \in H^*$, puesto que la sucesión $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq H$ converge débilmente a u ,

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \langle \phi_u, u_k \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle \phi_u, u_k \rangle = \langle \phi_u, u \rangle = \|u\|_H^2. \tag{2.3.13}$$

Por otro lado, como $\phi_u \in H^*$ por el Teorema de Representación de Riesz-Fréchet concluimos

$$\langle \phi_u, u_k \rangle \leq \|\phi_u\|_{H^*} \cdot \|u_k\|_H = \|u\|_H \cdot \|u_k\|_H. \tag{2.3.14}$$

En (2.3.14) calculamos el límite inferior

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \langle \phi_u, u_k \rangle \leq \|u\|_{\mathbf{H}} \cdot \liminf_{k \rightarrow \infty} \|u_k\|_{\mathbf{H}}. \quad (2.3.15)$$

Usando (2.3.13) en (2.3.15) concluimos la demostración. \square

Proposición 2.3. Sean \mathbf{H} un espacio de Hilbert, $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbf{H}$ débilmente convergente a $u \in \mathbf{H}$ y

$$\|u\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k\|.$$

Entonces $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge fuertemente a u .

Demostración. Como $u \in \mathbf{H}$, por el Teorema de Representación de Riesz-Fréchet, existe $\Phi(u) = \phi_u \in \mathbf{H}^*$. Puesto que la sucesión $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbf{H}$ converge débilmente a u ,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle \phi_u, u_k \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} (u, u_k) = \|u\|_{\mathbf{H}}^2. \quad (2.3.16)$$

Puesto que

$$\|u_k - u\|^2 = (u_k - u, u_k - u) = \|u_k\|^2 - 2(u_k, u) + \|u\|^2, \quad (2.3.17)$$

por la hipótesis restante junto con (2.3.16) en (2.3.17), concluimos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k - u\|^2 = \|u\|^2 - 2(u, u) + \|u\|^2 = 0,$$

que es equivalente a decir que $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge fuertemente a u . \square

Proposición 2.4. Toda sucesión acotada en un espacio de Hilbert contiene una subsucesión que converge débilmente.

Para una demostración de este resultado véase e.g. a [10, Capítulo 3].

Sea \mathbf{H} un espacio de Hilbert y una aplicación $a : \mathbf{E}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Se dice que a es

(L.1) **Lineal por la izquierda:** para todo $x, y, z \in \mathbf{H}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$a(\lambda x + y, z) = \lambda a(x, z) + a(y, z).$$

(L.2) **Bilineal:** si es lineal por la izquierda y derecha.

(L.3) **Continua:** si a es bilineal y existe $C \in \mathbb{R}$ tal que para todo $x, y \in \mathbf{H}$,

$$|a(x, y)| \leq C \|x\| \|y\|.$$

(L.4) **Coerciva:** si existe $c \in \mathbb{R}$ tal que para todo $x \in \mathbf{H}$,

$$a(x, x) \geq c \|x\|^2.$$

(L.5) **Simétrica:** para todo $x, y \in \mathbf{H}$,

$$a(x, y) = a(y, x).$$

Teorema 2.5 (Lax-Milgram). *Sea H un espacio de Hilbert, asumamos que $a(\cdot, \cdot)$ es una forma bilineal continua coerciva sobre H . Entonces para todo $\phi \in H^*$ existe un único elemento $u \in H$ tal que*

$$\forall v \in H: \quad a(u, v) = \langle \phi, v \rangle.$$

Es más, si a es simétrica, entonces u es caracterizada por la propiedad

$$\frac{1}{2}a(u, u) - \langle \phi, u \rangle = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2}a(v, v) - \langle \phi, v \rangle \right\}.$$

Para una demostración de este resultado véase, e.g., [4, Capítulo 5].

2.4. Espacios de Lebesgue

Para el desarrollo de este apartado, nos hemos basado principalmente en [1], [4] y [6]. Lebesgue, con la definición de su integral, hizo varios estudios y contribuciones respecto a la teoría de la medida, probabilidades, el análisis de Fourier y el cálculo de las primitivas. Adicionalmente, definió los espacios de Lebesgue que son pivote para definir otros espacios funcionales como los espacios de Sóbolev y Lorentz; además de poseer propiedades interesantes y aplicaciones numerosas.

Una σ -álgebra M sobre un conjunto dado X es una álgebra definida sobre X , estable por reunión numerable y por intersección numerable. De manera más precisa, un subconjunto M de partes de X es una σ -álgebra si se verifican las condiciones:

(A.1) los conjuntos \emptyset y X pertenecen a M ;

(A.2) si A pertenece a M , entonces A^c pertenece a M ;

(A.3) para toda familia numerable $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de elementos de M , tenemos

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \in M \quad \text{y} \quad \bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k \in M.$$

Un conjunto X dotado de una σ -álgebra M será llamado espacio medible y será notado por (X, M) . Los elementos de la σ -álgebra M serán denominados conjuntos M -medibles.

Sea (X, M) un espacio medible. Una medida sobre (X, M) es una función $\mu : M \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, donde $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, que satisface las siguientes condiciones:

(M.1)

$$\forall A \in M: \quad \mu(A) \geq 0,$$

(M.2)

$$\mu(\emptyset) = 0,$$

(M.3) para toda sucesión de elementos disjuntos $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de M ,

$$\mu \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \right) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(A_k).$$

Esta propiedad se llama σ -aditividad de μ .

La tripleta (X, M, μ) se denomina espacio medido. Para todo elemento A de M , denominaremos la cantidad $\mu(A)$, la μ -medida de A .

La masa total de una medida μ es $\mu(X)$, y si se tiene que $\mu(X) < \infty$, diremos que la medida μ es de masa total finita. Además:

- si $A \in M$ es tal que $\mu(A) = 0$ diremos que es un conjunto de μ -medida nula;
- $D \subseteq X$ es μ -despreciable si está contenida en un conjunto $A \in M$ de μ -medida nula, i.e.,

$$D \subseteq A \in M \quad \text{y} \quad \mu(A) = 0.$$

Decimos que una propiedad $P(x)$ que depende de un punto $x \in X$ es válida μ -casi en todas partes (que abreviaremos μ -c.t.p. o simplemente c.t.p., si no hay ambigüedad sobre la medida utilizada), si el conjunto de los $x \in X$ en donde ésta propiedad no está verificada es un conjunto de μ -medida nula, i.e.,

$$\mu(\{x \in X : \neg P(x)\}) = 0.$$

Sean (X, M_X) y (Y, M_Y) dos espacios medibles. Una función $f : X \rightarrow Y$ es (M_X, M_Y) -medible si para todo $A \in M_Y$, tenemos $f^{-1}(A) \in M_X$.

Sea $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una función medible. El supremo esencial de f está definido por

$$\sup_{x \in X} \text{ess} f(x) := \inf \{c \in \overline{\mathbb{R}} \mid f(x) \leq c \quad \mu - \text{c.t.p. sobre } X\}.$$

El ínfimo esencial está determinado de forma análoga por la expresión

$$\inf_{x \in X} \text{ess} f(x) := \sup \{c \in \overline{\mathbb{R}} \mid f(x) \geq c \quad \mu - \text{c.t.p. sobre } X\}.$$

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un conjunto medible, entonces la medida de Lebesgue de A se notará como $|A|$.

Definimos el espacio de funciones esencialmente acotadas

$$\mathcal{L}^\infty(\Omega) := \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \|f\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty \right\},$$

y el espacio de funciones p -integrables

$$\mathcal{L}^p(\Omega) := \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty \right\}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Además definimos la relación de equivalencia sobre el espacio $\mathcal{L}^p(\Omega)$, donde $1 \leq p \leq \infty$, como:

$$f \equiv g \quad \Leftrightarrow \quad f = g \quad \text{c.t.p sobre } \Omega.$$

y la clase de equivalencia de f como

$$[f] := \{g : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid g \equiv f\}.$$

Los espacios de funciones integrables serán:

$$L^p(\Omega) := \mathcal{L}^p(\Omega)/\equiv, \quad 1 \leq p \leq \infty$$

Por $C_0(\Omega)$ denotaremos el espacio de todas las funciones continuas con soporte compacto, i.e.,

$$C_0(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega \setminus K, \text{ para algún } K \text{ compacto}\}.$$

Las propiedades más importantes de los espacios de Lebesgue se resumen en el siguiente teorema.

Teorema 2.6. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto.*

- (a) *Si $1 \leq p \leq \infty$, entonces $L^p(\Omega)$ es un espacio de Banach.*
- (b) *Si $1 < p < \infty$, entonces $L^p(\Omega)$ es un espacio de reflexivo.*
- (c) *Si $1 \leq p < \infty$, entonces $L^p(\Omega)$ es separable, i.e., existe $A \subseteq L^p(\Omega)$ numerable tal que $\overline{A} = L^p(\Omega)$.*

Para una demostración de este resultado véase, e.g., [4, Capítulo 4].

En el siguiente teorema presentamos una idea sobre densidad entre espacios de funciones.

Teorema 2.7. *El espacio $C_0(\Omega)$ es denso en $L^p(\Omega)$, donde $p \geq 1$, i.e.,*

$$\forall f \in L^p(\Omega), \forall \varepsilon > 0, \exists f_1 \in C_0(\Omega) : \quad \|f - f_1\|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon.$$

Para una demostración de este resultado véase, e.g., [4, Capítulo 4].

Los siguientes teoremas son muy importantes para nuestro estudio, por lo cual se ha hecho una mención de los mismos omitiendo sus demostraciones.

Teorema 2.8 (Teorema de convergencia monotonía, Beppo Levi). *Sea $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones de $L^1(\Omega)$ tal que:*

$$(a) \quad \forall k \in \mathbb{N} : \quad f_k(x) \leq f_{k+1}(x) \quad \text{c.t.p } x \in \Omega;$$

$$(b) \quad \sup_{k \in \mathbb{N}} \int_{\Omega} f_k(x) dx < \infty.$$

Entonces $f_k(x)$ converge c.t.p $x \in \Omega$ a un límite finito, denotado por $f(x)$; la función f pertenece a $L^1(\Omega)$ y

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|f_k - f\|_{L^1(\Omega)} = 0.$$

Para una demostración de este resultado véase, e.g., [22, Capítulo 5].

Teorema 2.9 (Teorema de convergencia dominada para $L^1(\Omega)$, Lebesgue). *Sea $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones de $L^1(\Omega)$ tal que:*

$$(a) \quad f_k(x) \rightarrow f(x), \quad \text{c.t.p } x \in \Omega.$$

(b) Existe una función $g \in L^1(\Omega)$ tal que

$$\forall k \in \mathbb{N}: |f_k(x)| \leq g(x) \quad \text{c.t.p. } x \in \Omega.$$

Entonces $f \in L^1(\Omega)$ y

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|f_k - f\|_{L^1(\Omega)} = 0.$$

Para una demostración de este resultado véase, e.g., [22, Capítulo 5].

El Teorema 2.9 muestra que si tenemos una sucesión $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ que converge a f y si existe una función $g \in L^1(\Omega)$ que domina a todas las f_k , entonces la sucesión $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge en norma $L^1(\Omega)$.

Teorema 2.10 (Lema de Fatou). Sea $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones de $L^1(\Omega)$ tal que:

(a)

$$\forall k \in \mathbb{N}: f_k(x) \rightarrow 0, \quad \text{c.t.p. } x \in \Omega,$$

(b)

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \int_{\Omega} f_k(x) dx < \infty.$$

Para cada $x \in \Omega$ definimos $f(x) := \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k(x) \leq \infty$. Entonces $f \in L^1(\Omega)$ y

$$\int_{\Omega} f(x) dx \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_k(x) dx.$$

Para una demostración de este resultado véase, e.g., [22, Capítulo 5].

Teorema 2.11 (Teorema de convergencia dominada para $L^p(\Omega)$). Sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones en $L^p(\Omega)$ tal que $\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0$. Entonces existe una sucesión $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ y una función $h \in L^p(\Omega)$ tal que:

(a)

$$f_{n_k}(x) \rightarrow f(x), \quad \text{c.t.p. } x \in \Omega,$$

(b)

$$\forall k \in \mathbb{N}: |f_{n_k}(x)| \leq h(x), \quad \text{c.t.p. } x \in \Omega.$$

Para una demostración de este resultado véase, e.g., [22, Capítulo 5].

El teorema recientemente enunciado es una generalización del Teorema 2.9 para $L^p(\Omega)$.

$L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert separable con el producto escalar definido mediante

$$\forall u, v \in L^2(\Omega): (u, v)_{L^2(\Omega)} := \int_{\Omega} u(x)v(x) dx.$$

Para los espacios de Lebesgue se tienen los siguientes resultados.

Teorema 2.12 (Desigualdad de Hölder). Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto, $1 \leq p \leq \infty$ y p' el exponente conjugado de p , i.e., $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Entonces para todo $f \in L^p(\Omega)$ y para todo $g \in L^{p'}(\Omega)$ se tiene que

$$\|f \cdot g\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \cdot \|g\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Para una demostración de este teorema referirse, e.g., [4, Capítulo 4].

Lema 2.1 (Desigualdad de interpolación). Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto y $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ con $1 \leq p \leq \infty$ y $1 \leq q \leq \infty$. Entonces $f \in L^r(\Omega)$ para todo $r \in [\min\{p, q\}, \max\{p, q\}]$, y se verifica la desigualdad de interpolación

$$\|f\|_{L^r(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}^\alpha \|f\|_{L^q(\Omega)}^{(1-\alpha)}, \quad \frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}, \quad \alpha \in [0, 1].$$

Demostración. Sean $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ y $r \in [\min\{p, q\}, \max\{p, q\}]$ cualesquiera. Sea $\alpha \in [0, 1]$ elegido de manera que

$$\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q},$$

entonces

$$\frac{p}{\alpha \cdot r} = 1 + \frac{p \cdot (1-\alpha)}{q \cdot \alpha} > 1 \quad \text{y} \quad \frac{q}{(1-\alpha) \cdot r} = 1 + \frac{q \cdot \alpha}{p \cdot (1-\alpha)} > 1,$$

los cuales son exponentes conjugados. Por lo tanto, podemos aplicar la desigualdad de Hölder con la cual tenemos

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^r(\Omega)} &= \left(\int_{\Omega} |f(x)|^r dx \right)^{1/r} \\ &= \left(\int_{\Omega} |f(x)|^{r\alpha} \cdot |f(x)|^{(1-\alpha)r} dx \right)^{1/r} \\ &\leq \left\{ \left(\int_{\Omega} (|f(x)|^{r\alpha})^{\frac{p}{r\alpha}} dx \right)^{\frac{r\alpha}{p}} \cdot \left(\int_{\Omega} (|f(x)|^{r(1-\alpha)})^{\frac{q}{r(1-\alpha)}} dx \right)^{\frac{r(1-\alpha)}{q}} \right\}^{1/r} \\ &= \|f\|_{L^p(\Omega)}^\alpha \|f\|_{L^q(\Omega)}^{(1-\alpha)} < \infty, \end{aligned}$$

así $f \in L^r(\Omega)$. □

Sean $1 \leq p \leq \infty$ y $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto. Una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ pertenece a $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ si $f \cdot \chi_K \in L^p(\Omega)$ para todo $K \subseteq \Omega$ compacto, donde

$$\chi_K(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in K, \\ 0 & \text{si } x \notin K. \end{cases}$$

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un abierto. Recordemos que $C(\Omega)$ denota el espacio de las funciones continuas sobre Ω , $C^k(\Omega)$ es el espacio de las funciones k , $k \in \mathbb{N}$, veces diferenciables con continuidad sobre Ω , y

$$C^\infty(\Omega) := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k(\Omega).$$

Además definimos los espacios $C_0^k(\Omega)$ y $C_0^\infty(\Omega)$ como:

$$C_0^k(\Omega) := C^k(\Omega) \cap C_0(\Omega) \quad \text{y} \quad C_0^\infty(\Omega) := C^\infty(\Omega) \cap C_0(\Omega).$$

donde $C_0(\Omega)$ es el conjunto de funciones continuas U con

$$\text{supp}(u) := \overline{\{x \in \Omega \mid u(x) \neq 0\}},$$

compacto.

Teorema 2.13 (Ascoli-Arzelá). *Sea (E, d) un espacio métrico y \mathcal{H} un subconjunto acotado de $C(E)$. Asuma que \mathcal{H} es uniformemente equicontinuo, i.e.,*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall f \in \mathcal{H} : \quad d(x, y) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Entonces la clausura de \mathcal{H} en $C(E)$ es compacta.

Para una demostración de este teorema referirse, e.g., [31].

2.5. Ecuaciones Diferenciales Parciales

Las EDP se emplean frecuentemente en la formulación matemática de fenómenos de la física y de otras ciencias. Para el desarrollo de este apartado, nos hemos basado principalmente en [14] y [32].

En las EDP es muy común denotar las derivadas parciales empleando multiíndices. Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ y $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Usaremos la siguiente notación:

(a) un elemento $\alpha \in \mathbb{N}^N$ es llamado un multiíndice de orden

$$|\alpha| := \sum_{k=1}^N \alpha_k,$$

(b) dado un multiíndice $\alpha \in \mathbb{N}^N$, definimos

$$D^\alpha u(x) := \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\prod_{k=1}^N \partial x_k^{\alpha_k}},$$

(c) si $l \in \mathbb{N}$,

$$D^l u(x) := \{D^\alpha u(x) \mid |\alpha| = l\},$$

es el conjunto de todas las derivadas parciales de orden l .

Una ecuación de la forma

$$F\left(D^l u(x), \dots, Du(x), u(x), x\right) = 0, \quad x \in \Omega,$$

es llamada EDP de l -orden, donde

$$F : \mathbb{R}^{N^l} \times \dots \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R},$$

está dada y la función u es desconocida. Si se encuentra una función $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$F\left(D^l v(x), \dots, Dv(x), v(x), x\right) = 0, \quad x \in \Omega,$$

diremos que v es una solución de la EDP. Las EDP aparecen en diferentes contextos, por ejemplo para la construcción de un modelo matemático. Los tipos de EDP son:

(i) lineal si tiene la forma

$$\sum_{|k| \leq l} a_k(x) D^k u = f(x),$$

dadas las funciones a_k ($|k| \leq l$) y f .

Por ejemplo la ecuación de Helmholtz

$$\Delta u + k^2 u = 0,$$

aparece en varios contextos de la física, donde k se interpreta como el número de onda.

(ii) semilineal si tiene la forma

$$\sum_{|k|=l} a_k(x) D^k u + a_0\left(D^{l-1}u, \dots, Du, u, x\right) = f(x).$$

Por ejemplo la ecuación de Fisher (semilineal de primer orden)

$$u_t - A\Delta u = ru(M - u),$$

modela la evolución de una población de densidad u , sujeta a difusión y crecimiento logístico (representado por el lado derecho).

(iii) cuasilineal si tiene la forma

$$\sum_{|k|=l} a_k\left(D^{l-1}u, \dots, Du, u, x\right) D^k u + a_0\left(D^{l-1}u, \dots, Du, u, x\right) = f(x).$$

Por ejemplo la ecuación de Burger (cuasilineal de primer orden)

$$u_t + cuu_x = 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

modela un flujo unidimensional de un fluido no viscoso, pero también se utiliza para modelar la dinámica del tráfico.

(iv) totalmente no-lineal si no depende linealmente de las derivadas de orden más alto.

Por ejemplo la ecuación de Eikonal (totalmente no lineal de primer orden)

$$|\nabla u| = c(x),$$

aparece en la óptica geométrica: si u es una solución, su nivel $u(x) = t$ describe la posición de un frente de onda de luz en el tiempo t .

El objetivo principal de la teoría de las EDP es establecer condiciones adecuadas en los datos para tener un problema con las siguientes características:

1. existe al menos una solución (existencia);
2. existe a lo sumo una solución (unicidad);
3. la solución depende continuamente de los datos (estabilidad).

Esta última condición requiere algunas explicaciones. En términos generales, la propiedad 3 establece que la correspondencia

dato \rightarrow solución,

es continua, en otras palabras, que un pequeño error en los datos conlleva un pequeño error en la solución. Esta propiedad es extremadamente importante y puede expresarse como una estabilidad local de la solución con respecto a los datos.

Cuando un problema posee al mismo tiempo las propiedades 1, 2 y 3 se dice que está bien planteado. Cuando se usa un modelo matemático, es extremadamente útil, a veces esencial, buscar la existencia de una solución que indica que el modelo es coherente. Mientras que la unicidad y la estabilidad aumentan la posibilidad de proporcionar aproximaciones numéricas precisas.

2.6. Espacios de Sobolev

De manera general, los problemas que involucran EDP no son fáciles de resolver; y es por esta razón que se crearon los espacios de Sobolev que están dotados de normas derivadas de las normas L^p . Comenzamos por debilitar sustancialmente la noción de derivada, lo que nos lleva a la siguiente definición. Para esta sección nos basamos en [4], [14] y [32].

Sean $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$ y k es un multiíndice. Decimos que v es la k -derivada parcial débil de u , y escribimos

$$D^k u = v,$$

siempre que

$$\forall \phi \in C_0^\infty(\Omega) : \int_{\Omega} u(x) \cdot D^k \phi(x) dx = (-1)^{|k|} \int_{\Omega} v(x) \cdot \phi(x) dx.$$

Ejemplo 2.5. Para dar una noción más clara vamos a mostrar que la derivada débil de la función

$$|\cdot| : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto |x| := \begin{cases} x & \text{si } x > 0, \\ -x & \text{si } x \leq 0, \end{cases}$$

la cual no es diferenciable según el cálculo clásico. Sea $\phi \in C_0^\infty([-1, 1])$, genérica, por la integración por partes concluimos

$$\int_{-1}^1 |x| \phi'(x) dx = \int_{-1}^0 -x \phi'(x) dx + \int_0^1 x \phi'(x) dx$$

$$\begin{aligned}
&= -x\phi(x)|_{-1}^0 + \int_{-1}^0 \phi(x) dx + x\phi(x)|_0^1 - \int_0^1 \phi(x) dx \\
&= \int_{-1}^0 \phi(x) dx - \int_0^1 \phi(x) dx \\
&= - \int_{-1}^1 \operatorname{sgn}(x)\phi'(x) dx,
\end{aligned}$$

donde

$$\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ -1 & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

con lo que concluimos que la derivada débil de la función valor absoluto será la función signo (sgn).

Sean $l \in \mathbb{N}$ y $1 \leq p \leq \infty$. Definimos el espacio de Sobolev

$$W^{l,p}(\Omega) := \left\{ f \in L^p(\Omega) \mid \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega) : \int_{\Omega} f(x) D^k \phi(x) dx = (-1)^{|k|} \int_{\Omega} \phi(x) D^k f(x) dx \right\}.$$

Observación 2.1. Cuando $p = 2$, se denota

$$H^l(\Omega) := W^{l,2}(\Omega).$$

Estos espacios son denotados con la letra H porque son espacios de Hilbert.

Por ejemplo, cuando $p = 2$, notaremos

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega),$$

que está dotado del producto escalar:

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} := (u, v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}, \frac{\partial v}{\partial x_k} \right)_{L^2(\Omega)}.$$

El funcional dado por

$$\|\cdot\|_{W^{l,p}(\Omega)} : W^{l,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f \mapsto \|f\|_{W^{l,p}(\Omega)} := \begin{cases} \left(\sum_{|k| \leq l} \|D^k f\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leq p < \infty, \\ \sum_{|k| \leq l} \|D^k f\|_{L^p(\Omega)} & \text{si } p = \infty, \end{cases}$$

define una norma para los espacios $W^{l,p}(\Omega)$. Cuando $1 \leq p < \infty$ tenemos que la norma

$\|\cdot\|_{W^{l,p}(\Omega)}$ es equivalente a

$$\sum_{|k|\leq l} \|D^k f\|_{L^p(\Omega)}.$$

De manera similar a los espacios de Lebesgue, se verifica la siguiente proposición.

Proposición 2.5. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto.

- (a) Si $1 \leq p \leq \infty$, entonces $W^{l,p}(\Omega)$ es de Banach.
- (b) Si $1 < p < \infty$, entonces $W^{l,p}(\Omega)$ es reflexivo.
- (c) Si $1 \leq p < \infty$, entonces $W^{l,p}(\Omega)$ es separable, i.e., existe $A \subseteq W^{l,p}(\Omega)$ numerable tal que $\overline{A} = W^{l,p}(\Omega)$.

Para una demostración de este resultado véase, e.g., [4, Capítulo 9].

Observación 2.2. Dado $x \in \mathbb{R}^N$ denotaremos

$$x = (x', x_N), \quad x' \in \mathbb{R}^{N-1}, \quad x' = (x_1, x_2, \dots, x_{N-1}) \quad \text{y} \quad |x'| = \left(\sum_{i=1}^{N-1} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Definimos

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_+^N &:= \{x = (x', x_N) \mid x_N > 0\}, \\ Q &:= \{x = (x', x_N) \mid |x'| < 1 \text{ y } |x_N| < 1\}, \\ Q_+ &:= Q \cap \mathbb{R}_+^N, \\ Q_0 &:= \{x = (x', 0) \mid |x'| < 1\}. \end{aligned}$$

Decimos que un conjunto abierto Ω es de clase C^1 si para todo $x \in \Gamma := \partial\Omega$ existe una vecindad U de x en \mathbb{R}^N y una función biyectiva $H: Q \rightarrow U$ tal que

$$H \in C^1, \quad H^{-1} \in C^1(\overline{U}), \quad H(Q_+) = U \cap Q \quad \text{y} \quad H(Q_0) = U \cap \Gamma.$$

La función H es llamada carta local.

Teorema 2.14. Supongamos que Ω es de clase C^1 con Γ acotado (o también $\Omega = \mathbb{R}_+^N$). Entonces existe un operador extensión

$$\tilde{P}: W^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^N), \quad (1 \leq p \leq \infty),$$

y $C_\Omega > 0$ tal que para todo $u \in W^{1,p}(\Omega)$:

$$(E.1) \quad \tilde{P}u|_\Omega = u,$$

$$(E.2) \quad \|\tilde{P}u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C_\Omega \|u\|_{L^p(\Omega)},$$

$$(E.3) \quad \|\tilde{P}u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C_\Omega \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Para una demostración de este resultado véase, e.g., [4, Capítulo 9].

Teorema 2.15 (Morrey). *Sea $p > N$. Entonces*

$$\mathbf{W}^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subseteq \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^N), \quad (2.6.18)$$

con inyección continua. Es más, para todo $u \in \mathbf{W}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, tenemos

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|^\alpha \|\nabla u\|_{\mathbf{L}^p(\mathbb{R}^N)}, \quad \text{c.t.p. } x, y \in \mathbb{R}^N, \quad (2.6.19)$$

donde $\alpha := 1 - \left(\frac{N}{p}\right)$ y C es una constante (que depende sólo de p y N).

Demostración. Comenzamos estableciendo (2.6.19) para $u \in \mathbf{C}_c^1(\mathbb{R}^N)$.

i) Sea

$$Q_r := \{x \in \mathbb{R}^N : \|x\|_\infty < r\}, \quad \|x\|_\infty := \max_{i \in \{1, \dots, N\}} |x_i| \quad \text{y} \quad r > 0.$$

Para $x \in Q$ tenemos

$$u(x) - u(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} u(tx) dt,$$

así, por la regla de la cadena y la desigualdad triangular,

$$\begin{aligned} |u(x) - u(0)| &= \left| \int_0^1 \frac{d}{dt} u(tx) dt \right| \\ &= \left| \int_0^1 \sum_{i=1}^N x_i \frac{\partial u}{\partial x_i}(tx) dt \right| \\ &\leq \int_0^1 \sum_{i=1}^N |x_i| \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(tx) \right| dt \\ &\leq r \sum_{i=1}^N \int_0^1 \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(tx) \right| dt. \end{aligned} \quad (2.6.20)$$

Denotemos por \bar{u} a la media de u en Q , i.e.,

$$\bar{u} := \frac{1}{|Q_r|} \int_{Q_r} u(x) dx.$$

Integrando (2.6.20) en Q , obtenemos

$$\begin{aligned} |\bar{u} - u(0)| &= \left| \frac{1}{|Q_r|} \left(\int_{Q_r} u(x) dx - u(0) |Q_r| \right) \right| \\ &= \left| \frac{1}{|Q_r|} \int_{Q_r} [u(x) - u(0)] dx \right| \\ &\leq \frac{1}{|Q_r|} \int_{Q_r} |u(x) - u(0)| dx \\ &\leq \frac{r}{|Q_r|} \int_{Q_r} \sum_{i=1}^N \int_0^1 \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(tx) \right| dt dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{r^{N-1}} \int_0^1 \sum_{i=1}^N \int_{Q_r} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(tx) \right| dx dt \\
&= \frac{1}{r^{N-1}} \int_0^1 \sum_{i=1}^N \int_{tQ_r} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(y) \right| \frac{dy}{t^N} dt.
\end{aligned}$$

Entonces, por la desigualdad de Hölder, tenemos

$$\begin{aligned}
\int_{tQ_r} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(y) \right| dy &\leq \left(\int_{tQ_r} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(y) \right|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} |tQ_r|^{\frac{1}{p'}} \\
&\leq \left(\int_{Q_r} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^p(y) dy \right)^{\frac{1}{p}} |tQ_r|^{\frac{1}{p'}}.
\end{aligned}$$

Puesto que

$$\forall t \in (0, 1): \quad tQ_r \subseteq Q_r,$$

se sigue que

$$\begin{aligned}
|\bar{u} - u(0)| &\leq \frac{1}{r^{N-1}} \int_0^1 \sum_{i=1}^N \left(\int_{Q_r} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^p(y) \frac{dy}{t^N} \right)^{\frac{1}{p}} |tQ_r|^{\frac{1}{p'}} dt \\
&= \frac{r^{\frac{N}{p'}}}{r^{N-1}} \int_0^1 \sum_{i=1}^N \left(\int_{Q_r} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^p(y) dy \right)^{\frac{1}{p}} \frac{t^{\frac{N}{p'}}}{t^N} dt \\
&= \frac{r^{\frac{N}{p'}}}{r^{N-1}} \|\nabla u\|_{L^p(Q_r)} \int_0^1 \frac{t^{\frac{N}{p'}}}{t^N} dt \\
&= \frac{r^{1-\frac{N}{p}}}{1-\frac{N}{p}} \|\nabla u\|_{L^p(Q_r)}.
\end{aligned}$$

Por traslación, esta desigualdad se mantiene en todos los cubos Q_r . Así tenemos

$$\forall x \in Q_r: \quad |\bar{u} - u(x)| \leq \frac{r^{1-\frac{N}{p}}}{1-\frac{N}{p}} \|\nabla u\|_{L^p(Q_r)}. \quad (2.6.21)$$

Utilizando la desigualdad triangular, obtenemos

$$\forall x, y \in Q_r: \quad |u(x) - u(y)| \leq \frac{2r^{1-\frac{N}{p}}}{1-\frac{N}{p}} \|\nabla u\|_{L^p(Q_r)}. \quad (2.6.22)$$

- ii) Sean $x, y \in \mathbb{R}^N$. El cubo Q_r con lado $r = 2|x - y|$ contiene a x e y . Esto implica (2.6.20) cuando $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$. Para una función general $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ usamos una sucesión $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq C_c^1(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k - u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} u_k(x) = u(x), \quad \text{c.t.p. } x \in \mathbb{R}^N.$$

Ahora probamos (2.6.18). Sea $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$, $x \in \mathbb{R}^N$, y sea Q_1 tal que contiene a x . Por

(2.6.21) y la desigualdad de Hölder, tenemos

$$\begin{aligned}
|u(x)| &\leq |\bar{u}| + |\bar{u} - u(x)| \\
&\leq \frac{1}{|Q_1|} \int_{Q_1} |u(x)| dx + \frac{1}{1 - \frac{N}{p}} \|\nabla u\|_{L^p(Q_1)} \\
&\leq C_{p,N} \|u\|_{W^{1,p}(Q_1)} \\
&\leq C_{p,N} \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

donde

$$C_{p,N} := \frac{1}{|Q_1|^{\frac{1}{p}}} + \frac{1}{1 - \frac{N}{p}}.$$

Entonces

$$\forall u \in C_c^1(\mathbb{R}^N) : \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq C_{p,N} \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}.$$

Para una función general $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, usamos un argumento de densidad estándar.

□

La demostración anterior fue tomada de [4, Capítulo 9].

La desigualdad (2.6.19) implica la existencia de una función $\tilde{u} \in C(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$u = \tilde{u} \quad \text{c.t.p. en } \mathbb{R}^N.$$

En otras palabras, cada función $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ con $p > N$ admite un representante continuo. Cuando es útil a u lo reemplazamos por su representante continuo \tilde{u} , y también lo denotamos por u .

Observación 2.3. Para el caso unidimensional, i.e., $N = 1$, para todo $p > 1$, cada elemento del espacio $W^{1,p}(\mathbb{R})$ posee un representante continuo.

Teorema 2.16 (Rellich-Kondrachov). Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ acotado y de clase C^1 . Entonces la siguiente inyección es compacta

$$W^{1,p}(\Omega) \subseteq C(\bar{\Omega}), \quad p > N.$$

Demostración. Sea \mathcal{F} la bola unidad de $W^{1,p}(\Omega)$. Consideramos el operador extensión P del Teorema 2.14. Entonces existe una $C_\Omega > 0$ tal que

$$\forall u \in \mathcal{F} : \left\| \tilde{P}u \right\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C_\Omega \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C_\Omega. \quad (2.6.23)$$

Por otro lado, por el Teorema de Morrey, tenemos que existe una $C_{p,N} > 0$ tal que

$$\forall u \in \mathcal{F} : \left| \tilde{P}u(x) - \tilde{P}u(y) \right| \leq C_{p,N} |x - y|^\alpha \|Pu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}, \quad (2.6.24)$$

donde $\alpha := 1 - \left(\frac{N}{p}\right)$. Usando (2.6.23) y (2.6.24), tenemos

$$\forall u \in \mathcal{F} : \left| \tilde{P}u(x) - \tilde{P}u(y) \right| \leq C_{p,N,\Omega} |x - y|^\alpha, \quad (2.6.25)$$

por lo tanto, por la propiedad (E.1) del operador extensión P junto con (2.6.26) nos conduce a que para todo $x, y \in \Omega$

$$\forall u \in \mathcal{F} : |u(x) - u(y)| \leq C_{p,N,\Omega} |x - y|^\alpha. \quad (2.6.26)$$

Por lo tanto,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta := \left(\frac{\varepsilon}{C_{p,N,\Omega}} \right)^{\frac{1}{\alpha}}, \forall u \in \mathcal{F} : |x - y| < \delta \Rightarrow |u(x) - u(y)| \leq \varepsilon. \quad (2.6.27)$$

Por último, la proposición (2.6.27) prueba la hipótesis del Teorema de Ascoli-Arzelá, con lo que concluimos. \square

Para finalizar esta sección, presentamos la definición de las funciones de $H_0^l(\Omega)$ que a groso modo, son los elementos de $H^l(\mathbb{R}^N)$ que se “anulan” sobre la frontera de Ω ; ver Proposición 2.6.

Sean $1 \leq p < \infty$ y $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto. El espacio de Sobolev $W_0^{l,2}(\Omega)$ designa la clausura de $C_0^\infty(\Omega)$ en $W^{l,2}(\Omega)$. Se denota $H_0^l(\Omega) = W_0^{l,2}(\Omega)$.

El espacio $W_0^{l,2}(\Omega)$ dotado de la norma inducida por $W^{l,2}(\Omega)$ es un espacio de Banach separable; es reflexivo si $1 < p < \infty$, lo cual se sigue de la Proposición 2.5.

Observación 2.4. El subespacio $C^\infty(\Omega) \cap W^{l,p}(\Omega)$ es denso en $W^{l,p}(\Omega)$.

Teorema 2.17 (Desigualdad de Poincaré). *Sea $p \geq 1$ y $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto y acotado. Entonces existe una constante $C_{p,\Omega} > 0$ tal que*

$$\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) : \|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C_{p,\Omega} \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

En particular, la expresión $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ define una norma sobre $W_0^{1,p}(\Omega)$ y es equivalente a la norma sobre $W^{1,p}(\Omega)$.

Para una demostración de este resultado véase, e.g., [4, Capítulo 9].

Con el fin de mostrar la conexión entre los espacios de Sobolev y las ecuaciones diferenciales, presentamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.6. Deseamos resolver el siguiente problema

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = f(x), & x \in (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (2.6.28)$$

Tomemos $v \in C_0^\infty(0, 1)$, genérico, multiplicamos en (2.6.28), luego integramos y obtenemos

$$\int_0^1 [-u''(x)v(x) + u(x)v(x)] dx = \int_0^1 f(x)v(x) dx,$$

y por la integración por partes, resulta

$$\int_0^1 [u'(x)v'(x) + u(x)v(x)] dx = \int_0^1 f(x)v(x) dx,$$

Por la clausura de $C_0^\infty(0, 1)$ en $W^{1,2}(\Omega)$ concluimos que una solución débil de (2.6.28) es una función $u \in H_0^1(0, 1)$ tal que

$$\forall v \in H_0^1(0, 1) : (u, v)_{H^1(0,1)} = \langle F, v \rangle, \quad (2.6.29)$$

donde

$$\begin{aligned} F : H_0^1(0, 1) &\rightarrow \mathbb{R} \\ v &\mapsto \langle F, v \rangle := (f, v)_{L^2(0,1)}. \end{aligned}$$

Supongamos que $f \in L^1(0, 1)$. Por la linealidad por la izquierda del producto interno de $L^2(0, 1)$ y la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene que

$$|\langle F, v \rangle| \leq \|v\|_{L^2(0,1)} \|f\|_{L^2(0,1)} \leq C \|v\|_{H_0^1(0,1)}.$$

Por lo antes expuesto $F \in H^{-1}(0, 1) := (H_0^1(0, 1))^*$. Por la equivalencia de las normas de los espacios funcionales $H^1(0, 1)$ y $H_0^1(0, 1)$, podemos concluir que el producto interno de $H^1(0, 1)$ es una forma bilineal, continua, coerciva y simétrica. Ahora notemos que el producto interno de $H^1(0, 1)$ y el funcional F cumple con las hipótesis del Teorema de Lax-Milgram. Por lo tanto, existe un único $u \in H_0^1(0, 1)$ tal que cumple (2.6.29). Por último aplicando el Teorema de Rellich-Kondrachov $u \in C([0, 1])$.

Proposición 2.6. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ de clase C^1 y $u \in L^p(\Omega)$ con $p > 1$. Entonces la siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i)

$$u \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

(ii)

$$\exists C > 0, \forall \phi \in C_c^1(\mathbb{R}^N), \forall i \in \{1, \dots, N\} : \left| \int_{\Omega} u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx \right| \leq C \|\phi\|_{L^{p'}(\Omega)},$$

(iii) *la función*

$$\bar{u}(x) := \begin{cases} u(x) & \text{si } x \in \Omega, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases}$$

pertenece a $W^{1,p}(\Omega)$ y en este caso

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i} = \overline{\frac{\partial u}{\partial x_i}}.$$

Para una demostración de este resultado véase, e.g., [4, Capítulo 9].

2.7. Función positiva m-homogénea

Sean $m > 0$ y $P \in C(\mathbb{R}_*^N)$. Si la función P cumple:

(Pm.1) $\forall x \in \mathbb{R}_*^N : P(x) > 0; y$

(Pm.2) $\forall x \in \mathbb{R}_*^N, \forall t > 0: P(tx) = t^m P(x)$,

se dice que es una función positiva m -homogénea.

Esta es una generalización de un polinomio homogéneo P_{2m} de orden $2m$ tal que para toda $x \in \mathbb{R}_*^N$ se cumple $P_{2m}(x) > 0$.

Sean $(E, \|\cdot\|_E)$ y $(F, \|\cdot\|_F)$ espacios vectoriales normados, $O \subseteq E$ abierto que contiene al 0 y $g: O \rightarrow F$ tal que $g(0) = 0$. Si existe una función f , definida sobre una vecindad de $0 \in E$ y con imágenes en F , tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(h) = 0 \quad \text{y} \quad g(h) = \|h\|_E \cdot f(h),$$

entonces escribiremos $g(h) = o(h)$ y diremos que g es un “ o pequeña de h ”.

Ejemplo 2.7. Si un potencial $V \in C^\infty(\mathbb{R})$ no-negativo y $V(0) = 0$, entonces existe $m \in \mathbb{N}$,

$$V(x) = P_{2m}(x) + o(|x|^{2m}) \quad \text{cuando} \quad |x| \rightarrow 0,$$

donde P_{2m} es un polinomio homogéneo de orden $2m$.

Ejemplo 2.8. La siguiente fórmula determina una función $2n$ -homogéneas.

$$f_{\beta,n}(x) = \beta x^{2n}, \quad \beta \geq 0, n \in \mathbb{N}.$$

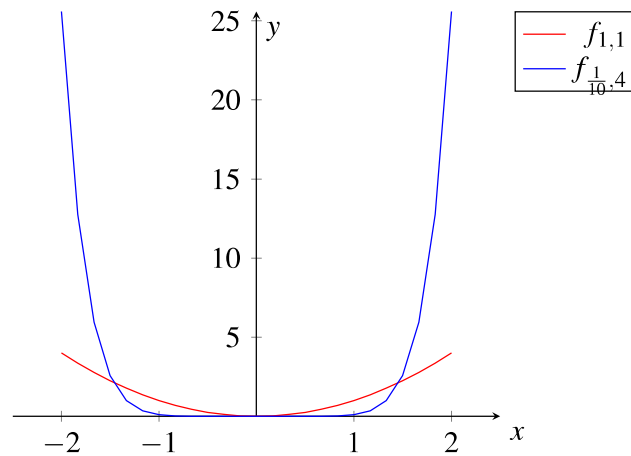


FIGURA 2.2. Grafos de funciones positivas $2n$ -homogéneas unidimensionales.

Ejemplo 2.9. En el caso bidimensional tomando $g(x_1, x_2) = x_1^4 + 2x_1 \cdot x_2^3 + 3x_2^4$.

2.8. Algunos tópicos de Análisis No-Lineal

El Cálculo Variacional se centra en encontrar máximos y mínimos de funcionales y es, a groso modo, una generalización del Cálculo elemental. Cuando trabajamos con funcionales,

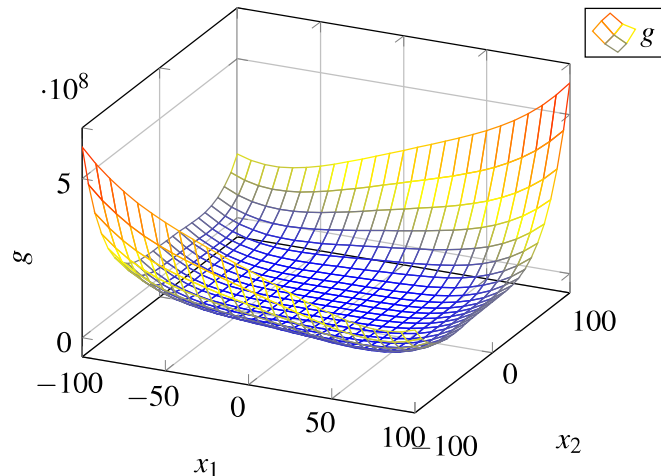


FIGURA 2.3. Grafo de una función positiva 4-homogénea bidimensional.

el concepto de derivación es más delicado puesto que trabajamos con espacios funcionales. Para esta sección nos hemos basado en [1], [14] y [7].

Empecemos precisando algunos conceptos topológicos. Sea (X, \mathcal{T}_X) un espacio topológico y $A, B \subseteq X$. Decimos que A es deformable a B en X si existe $\eta \in C([0, 1] \times A, X)$ tal que

$$\forall x \in A : \quad \eta(0, x) = x \quad \text{y} \quad \eta(1, x) \in B.$$

La función η se llama una deformación de A a B en X . Si A es deformable a un conjunto unitario en X decimos que A es contraíble en X .

Ejemplo 2.10. La esfera unitaria $\mathbb{S}^{N-1} := \{x \in \mathbb{R}^N : |x| = 1\}$ es contraíble en \mathbb{R}^N . Si tomamos la función

$$\begin{aligned} \eta : [0, 1] \times \mathbb{S}^{N-1} &\rightarrow \mathbb{R}^N \\ (t, x) &\mapsto \eta(t, x) := (1 - t) \cdot x, \end{aligned}$$

podemos ver que se cumple

$$\forall x \in \mathbb{S}^{N-1} : \quad \eta(0, x) = x \quad \text{y} \quad \eta(1, x) = 0.$$

Ahora demostraremos que η es una función continua, i.e.,

$$\forall (t_k, x_k) \subseteq [0, 1] \times \mathbb{S}^{N-1}, (t, x) \in [0, 1] \times \mathbb{S}^{N-1} : \lim_{k \rightarrow \infty} (t_k, x_k) = (t, x) \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \eta(t_k, x_k) = \eta(t, x).$$

Sean $(t_k, x_k) \subseteq [0, 1] \times \mathbb{S}^{N-1}$ y $(t, x) \in [0, 1] \times \mathbb{S}^{N-1}$ tales que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (t_k, x_k) = (t, x) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{k \rightarrow \infty} |(t_k - t, x_k - x)| = 0. \quad (2.8.30)$$

Pe tiene que

$$|\eta(t_k, x_k) - \eta(t, x)| \leq |x_k - x| + |t_k x_k - t x|$$

$$\begin{aligned}
&= |x_k - x| + |t_k x_k - t x_k + t x_k - t x| \\
&\leq |x_k - x| + |t_k - t| |x_k| + |t| |x_k - x| \\
&\leq |x_k - x| + |(t_k - t, x_k - x)|^2 + (|x| + |t|) |(t_k - t, x_k - x)|. \quad (2.8.31)
\end{aligned}$$

Usando (2.8.30) en la desigualdad (2.8.31) concluimos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\eta(t_k, x_k) - \eta(t, x)| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \eta(t_k, x_k) = \eta(t, x),$$

lo que prueba que la función η es continua.

Sean E y F dos espacios de Banach y $U \subseteq E$ un conjunto abierto. Una función $f : U \rightarrow F$ es Fréchet diferenciable en $u \in U$ ssi existe $T \in \mathbf{B}(E, F)$ tal que

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{f(u+v) - f(u) - T(v)}{\|v\|_E} = 0,$$

o equivalente tenemos

$$f(u+v) - f(u) = T(v) + o(v) \quad \text{cuando } \|v\|_E \rightarrow 0.$$

A T le llamaremos el diferencial de f en u y notaremos $Df(u) := T$. Se dice que f es diferenciable en U si lo es para todo $u \in U$. La función

$$\begin{aligned}
Df : U &\rightarrow \mathbf{B}(E, F) \\
u &\mapsto Df(u),
\end{aligned}$$

la llamaremos la derivada de f en U . Si la función Df es continua, decimos que f es de clase C^1 en U .

Si la derivada $Df : U \rightarrow \mathbf{B}(E, F)$ es, a su vez, de clase C^1 en U , se dice que f es de clase C^2 en U . La derivada de Df en U se llama la segunda derivada de f en U y se denota $D^2 f$. Inductivamente se define f de clase C^k en U . La k -ésima derivada de f en U se denota por $D^k f$. Una discusión detallada de estos conceptos se encuentra en [2, Capítulo 1].

Proposición 2.7. Sean $U \subseteq E$ un conjunto abierto y $f, g : U \rightarrow F$ funciones Fréchet diferenciables en $u \in U$. Entonces tenemos las siguientes propiedades:

(F.1) Sean $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $af + bg$ es Fréchet diferenciable en u y

$$D(af + bg) = aDf + bDg.$$

(F.2) Sea G un espacio vectorial normado, $V \subseteq \text{Im} f$ y $h : V \rightarrow G$ una funciones Fréchet diferenciable en $f(u)$, entonces

$$D(h \circ f)(u) = Dh(f(u))Df(u).$$

Demostración. Sean $u, v \in E$. Se tiene que:

(F.1)

$$(af + bg)(u+v) - (af + bg)(u) = a(f(u+v) - f(u)) + b(g(u+v) - g(u))$$

$$\begin{aligned}
&= aDf(u)(v) + o_1(v) + bDg(u)(v) \\
&\quad + o_2(v) \\
&= (aDf + bDg)(u)(v) + o(v).
\end{aligned}$$

(F.2)

$$\begin{aligned}
h \circ f(u+v) &= h(f(u+v)) \\
&= h(f(u) + Df(u)(v) + o_1(v)) \\
&= h(f(u)) + Dh(f(u))(Df(u)(v) + o_1(v)) \\
&\quad + o_2(Df(u)(v) + o_1(v)) \\
&= h \circ f(u) + Dh(f(u))Df(u)(v) + Dh(f(u))(o_1(v)) \\
&\quad + o_2(Df(u)(v) + o_1(v)) \\
&= h \circ f(u) + Dh(f(u))Df(u)(v) + o(v).
\end{aligned}$$

lo que es equivalente

$$h \circ f(u+v) - h \circ f(u) = Dh(f(u))Df(u)(v) + o(v).$$

□

Ejemplo 2.11. Sea $a : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal continua. Definimos

$$\begin{aligned}
f : E &\rightarrow \mathbb{R} \\
u &\mapsto f(u) := a(u, u).
\end{aligned}$$

llamada forma cuadrática. Sean $u, v \in E$. Puesto que a es bilineal y continua, tiene que

$$\begin{aligned}
f(u+v) - f(u) &= a(u+v, u+v) - a(u, u) \\
&= a(u, v) + a(v, u) + a(v, v) \\
&= a(u, v) + a(v, u) + o(v),
\end{aligned}$$

por lo tanto, concluimos que

$$\langle Df(u), v \rangle = a(u, v) + a(v, u).$$

Por supuesto que si a es además simétrico

$$\langle Df(u), v \rangle = 2a(u, v).$$

Ejemplo 2.12. Si $f \in E^*$ tenemos que $Df(u) = f$.

Si \mathcal{O} es un abierto de un espacio de Hilbert H y $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable, la derivada $Df(u) : H \rightarrow \mathbb{R}$ en cada $u \in \mathcal{O}$ es, por definición, una función lineal y continua. Así el Teorema de Representación de Riesz-Fréchet asegura la existencia de un único elemento $\nabla f(u) \in H$ tal que

$$\forall v \in H: \quad \langle \nabla f(u), v \rangle = \langle Df(u), v \rangle.$$

$\nabla f(u)$ se llama el gradiente de f en u .

Ejemplo 2.13. En un espacio de Hilbert H consideramos la función determinada por la fórmula $f(u) := \frac{1}{2} \|u\|^2$. Por el Ejemplo 2.11, $\nabla f(u) = u$ puesto que $\|u\|^2$ es una forma cuadrática inducida por el producto interno de H . Mientras que por el Ejemplo 2.12 concluimos que $f \in C^\infty$ en H .

En los primeros años de desarrollo del Análisis No-Lineal, Poincaré ya reconocía que la existencia y forma de las soluciones de una ecuación diferencial están conectadas íntimamente a la topología del espacio donde dichas ecuaciones son encontradas. Este “lugar” en donde ocurre todo este fenómeno se lo llamó variedad, véase, e.g., [8].

De ahora en adelante denotaremos a un espacio de Hilbert como H . Sean $U \subseteq H$ abierto y $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional diferenciable. Decimos que $a \in \mathbb{R}$ es un valor regular de f si para todo $u \in f^{-1}(a)$ se cumple que

$$\nabla f(u) \neq 0.$$

Por otro lado, diremos que $a \in \mathbb{R}$ es un valor crítico de f si no es un valor regular de f .

Definición 2.1 (Variedad de clase C^k). Dado $k \in \mathbb{N}$, diremos que $\mathcal{M} \subseteq H$ un subespacio no vacío es una variedad de clase C^k si \mathcal{M} es cerrado, existen $U \subseteq H$ abierto, un funcional $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^k y un valor regular a de f tal que $\mathcal{M} = f^{-1}(a)$.

Si $u \in \mathcal{M}$, el subespacio

$$T_u \mathcal{M} := \ker(Df(u)),$$

se lo llamará el espacio tangente de \mathcal{M} en u .

Ejemplo 2.14. El conjunto $S_H := \{u \in H \mid \|u\| = 1\}$ es una variedad de clase C^∞ puesto que el funcional

$$\begin{aligned} f : H &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) := \frac{1}{2} \|x\|^2 - \frac{1}{2}, \quad \text{con } \nabla f(x) = x, \end{aligned}$$

es de clase C^∞ y $S_H = f^{-1}(0)$. Además

$$\forall u \in S_H : T_u S_H = \{v \in H \mid (u, v) = 0\}.$$

Sean $\varepsilon > 0$ y $\Gamma_u(\mathcal{M})$ el conjunto de todas las trayectorias $\sigma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow H$ de clase C^1 tales que $\sigma(0) = u$ y $\sigma(t) \in \mathcal{M}$ para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Tenemos

$$T_u \mathcal{M} = \{D\sigma(0) \mid \sigma \in \Gamma_u(\mathcal{M})\},$$

en particular, $T_u \mathcal{M}$ no depende de f .

Definición 2.2 (Punto Crítico, valor crítico y regular). Sean $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1 y \mathcal{M} una variedad de H de clase C^1 . Un punto $u \in \mathcal{M}$ es un punto crítico de f sobre \mathcal{M} si

$$\forall v \in T_u \mathcal{M} : \langle Df(u), v \rangle = 0. \quad (2.8.32)$$

Si $\mathcal{M} = H$, se dice simplemente que u es un punto crítico de f y la condición (2.8.32) equivale a que $Df(u) = 0$. Por otro lado, diremos que $c \in \mathbb{R}$ es un valor crítico de f sobre

\mathcal{M} si $c = f(u)$ para algún punto crítico u de f sobre \mathcal{M} . En otro caso, se dice que c es un valor regular de f sobre \mathcal{M} .

Definición 2.3 (Máximos y mínimos). Sean $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1 y \mathcal{M} una variedad de H de clase C^1 . Un punto $u \in \mathcal{M}$ es un máximo de f si $f(v) \leq f(u)$ para toda $v \in \mathcal{M}$, mientras que si $f(v) \geq f(u)$ para toda $v \in \mathcal{M}$ diremos que u es un mínimo.

Los máximos y mínimos de una función en una variedad tienen la siguiente propiedad.

Proposición 2.8. Si $J : H \rightarrow \mathbb{R}$ es un funcional de clase C^1 , \mathcal{M} es una variedad de H de clase C^1 y u es un mínimo (o un máximo) de J en \mathcal{M} , entonces

$$\forall v \in T_u \mathcal{M} : \langle DJ(u), v \rangle = 0.$$

Demostración. Sea $v \in T_u \mathcal{M}$, genérico, y $\sigma \in \Gamma(\mathcal{M})$ tal que $D\sigma(0) = v$. Si u es un mínimo de J en \mathcal{M} , entonces 0 es un mínimo de $J \circ \sigma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$. Usando la Proposición 2.7 literal (F.2) concluimos

$$0 = D(J \circ \sigma)(0) = \langle DJ(\sigma(0)), D\sigma(0) \rangle = \langle DJ(u), v \rangle,$$

como afirma el enunciado. Análogamente se procede para un máximo. \square

La Proposición 2.8 afirma que los máximos y mínimos son puntos críticos de J en \mathcal{M} .

Ejemplo 2.15. Cuando estudiamos el Problema (2.6.28) dimos condiciones suficientes sobre la función f para que exista una única solución débil. Adicionalmente, al Problema (2.6.28) podemos verlo como un problema de búsqueda de puntos críticos del funcional

$$\begin{aligned} S : H_0^1(0, 1) &\rightarrow \mathbb{R} \\ v &\mapsto S(v) := \frac{1}{2} \|v\|_{H^1(0,1)}^2 - \langle F, v \rangle, \end{aligned}$$

donde F está definido en el Ejemplo 2.6. Recordemos que $\|\cdot\|_{H^1(0,1)}^2$ es una forma cuadrática. Por la Proposición 2.7, literal i) y los Ejemplos 2.11 y 2.12, se tiene que

$$\forall u, v \in H_0^1(0, 1) : \langle DS(u), v \rangle = (u, v)_{H^1(0,1)} - \langle F, v \rangle.$$

Si $u \in H_0^1(0, 1)$ es un punto crítico de S por la Proposición 2.8, se cumple que

$$\forall v \in H_0^1(0, 1) : (u, v)_{H^1(0,1)} = \langle F, v \rangle.$$

Observación 2.5. Lo expuesto en el ejemplo anterior se aplica a una gran variedad de problemas. Es importante mencionar que es esencial precisar bien el espacio funcional en el cual se trabaja.

Teorema 2.18 (Multiplicador de Lagrange). Sea \mathcal{M} una variedad de H y $J : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$. Si u es un punto crítico de J sobre \mathcal{M} , entonces existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla J(u) = \lambda \nabla f(u),$$

donde f es como la Definición 2.1.

Para una demostración de este resultado véase, e.g., [7].

Ejemplo 2.16. Buscaremos los puntos críticos del funcional

$$J: \mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto J(x_1, x_2, x_3) := x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2(x_1 + x_2 + x_3).$$

Usemos el Teorema de Multiplicador de Lagrange. Si x es un punto crítico de J sobre \mathbb{S}^2 , entonces existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla J(x) = \lambda \nabla f(x) \quad \Leftrightarrow \quad x \approx \begin{cases} (0.83, 0.45, 0.31) & \text{si } \lambda \approx -0.2, \\ -(0.31, 0.45, 0.83) & \text{si } \lambda \approx 4.2, \end{cases}$$

donde f esta definido en el Ejemplo 2.14 recordemos que $\mathbb{S}^2 = S_{\mathbb{R}^2}$, por lo que podemos concluir

$$J(x) \approx \begin{cases} -1.8 & \text{si } \lambda \approx -0.2, \\ 5.8 & \text{si } \lambda \approx 4.2. \end{cases}$$

Como se nos hace imposible representar un objeto de \mathbb{R}^4 lo que podemos hacer es ver sus proyecciones usando coordenadas esféricas, i.e.,

$$J_P: (0, \pi) \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\alpha, \beta) \mapsto J_P(\alpha, \beta) := J(x), \quad x = (\sin \alpha \cos \beta, \sin \alpha \sin \beta, \cos \alpha).$$

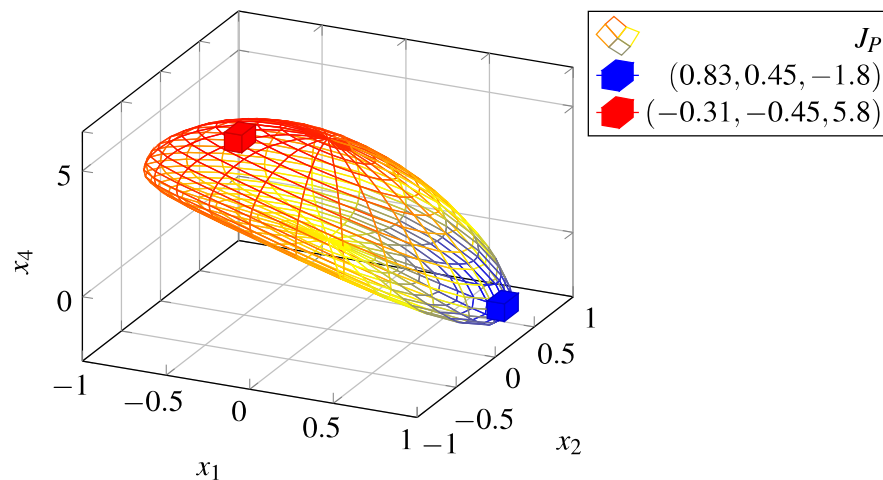


FIGURA 2.4. Representa la proyección en los ejes x_1 , x_2 y x_4 donde $x_4 := J(x)$.

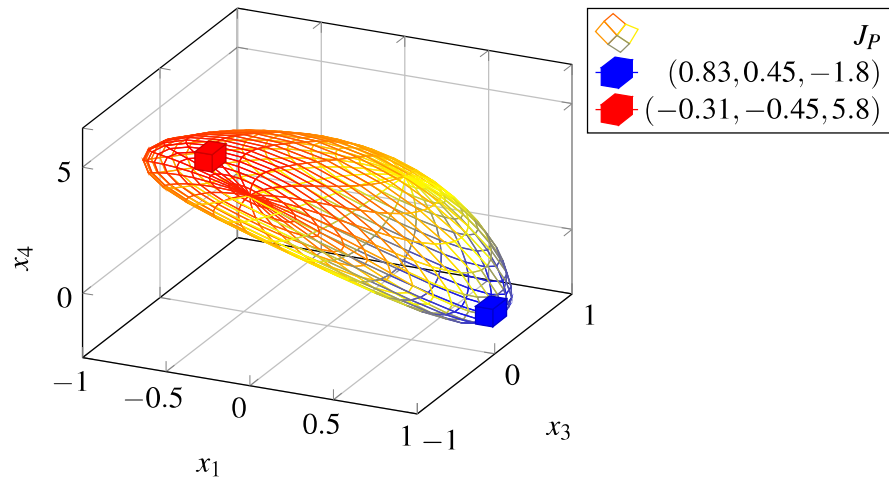


FIGURA 2.5. Representa la proyección en los ejes x_1 , x_3 y x_4 donde $x_4 := J(x)$.

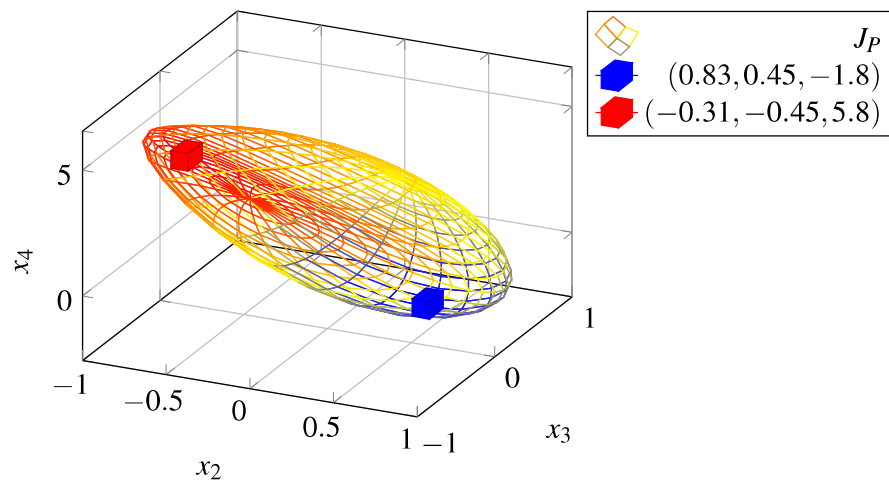


FIGURA 2.6. Representa la proyección en los ejes x_2 , x_3 y x_4 donde $x_4 := J(x)$.

2.8.1. El flujo en variedades

Sea H un espacio de Hilbert y $\mathcal{M} \subseteq H$ una variedad de Hilbert de clase C^1 . Un campo tangente a \mathcal{M} es una función $f : \mathcal{M} \rightarrow H$ tal que

$$\forall u \in \mathcal{M} : f(u) \in T_u \mathcal{M}.$$

El campo es localmente Lipschitz si

$$\forall u \in \mathcal{M}, \exists r_u, C_u > 0, \forall v, w \in B_{r_u}^{\mathcal{M}}(u) : \|f(v) - f(w)\| \leq C_u \|v - w\|,$$

donde

$$B_{r_u}^{\mathcal{M}}(u) := \{v \in \mathcal{M} : \|v - u\| < r_u\}.$$

El teorema de existencia y unicidad de soluciones para el problema de Cauchy sobre una variedad de Hilbert juega un papel fundamental en el estudio de problemas variacionales.

Teorema 2.19 (Existencia y unicidad global). *Sea $f : \mathcal{M} \rightarrow H$ un campo localmente Lipschitz tangente a \mathcal{M} . Entonces, para cada $u \in \mathcal{M}$ existen un intervalo abierto*

$$I(u) := (t^-(u), t^+(u)),$$

que contiene al origen y una única $\sigma(\cdot, u) \in C^1(I(u), \mathcal{M})$ que es solución del problema de Cauchy

$$\begin{cases} \sigma_t(t, u) = f(\sigma(t, u)), \\ \sigma(0, u) = u. \end{cases} \quad (2.8.33)$$

El intervalo $I(u)$ es máximo, i.e., $\sigma(\cdot, u)$ no se puede extender a una solución definida en un intervalo más grande. Si $\|f(\sigma(t, u))\| \leq C < \infty$ para todo $t \in [0, t^+(u))$, entonces $t^+(u) = \infty$. La afirmación análoga vale para $T^-(u)$. El dominio de σ ,

$$D_\sigma := \{(t, u) \in \mathbb{R} \times \mathcal{M} \mid t \in I(u)\},$$

es abierto en $\mathbb{R} \times \mathcal{M}$ y la función $\sigma : D_\sigma \rightarrow \mathcal{M}$, definida por (2.8.33), es continua. La función $\sigma : D_\sigma \rightarrow \mathcal{M}$ se llama el flujo generado por f . Si $D_\sigma = \mathbb{R} \times \mathcal{M}$ se dice que el flujo es global.

Para una demostración de este resultado véase e.g. a [9].

Ejemplo 2.17. Sea

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) := x^2. \end{aligned}$$

La relación

$$\sigma(t, u) := \frac{u}{1 - ut},$$

cumple $\sigma_t(t, u) = \sigma^2(t, u)$ y $\sigma(0, u) = u$. Es claro que σ cumple con (2.8.33), por otro lado

$$D_{\sigma(\cdot, u)} := \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{u}\} & \text{si } u \neq 0, \\ \mathbb{R} & \text{si } u = 0, \end{cases} \quad (2.8.34)$$

Representa la proyección en los ejes x_1, x_2 y x_3 .

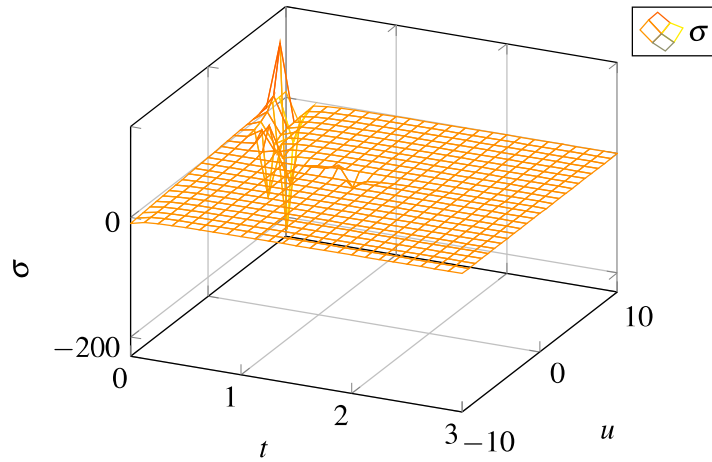


FIGURA 2.7. Grafo de la solución del problema de Cauchy σ del Ejemplo 2.17.

por lo que el dominio de σ es

$$D_\sigma = \mathbb{R}^2 \setminus G(f), \quad G(f) := \left\{ \left(x, \frac{1}{x} \right) \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}.$$

2.8.2. El flujo gradiente negativo, simetría y el lema de deformación simétrico

Supongamos ahora que $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{H}$ es una variedad de clase C^2 y $J \in C^2(\mathbb{H}, \mathbb{R})$. Fijemos una función $\Psi \in C^2(\mathcal{O}, \mathbb{R})$, definida en una vecindad \mathcal{O} de \mathcal{M} en \mathbb{H} , tal que $\mathcal{M} = \Psi^{-1}(a_0)$ para un valor regular a_0 de Ψ . El campo gradiente de J sobre \mathcal{M} es aquél que se obtiene proyectando ortogonalmente a $\nabla J(u)$ sobre $T_u \mathcal{M}$ para cada $u \in \mathcal{M}$, i.e.,

$$D_{\mathcal{M}} J(u) := DJ(u) - t_{J,\Psi,u} D\Psi(u), \quad t_{J,\Psi,u} \in \mathbb{R},$$

donde $t_{J,\Psi,u}$ representan los multiplicadores de Lagrange. Si tomamos los gradientes de J y Ψ en la fórmula anterior se obtiene

$$\nabla_{\mathcal{M}} J(u) := \nabla J(u) - \frac{(\nabla J(u), \nabla \Psi(u))}{\|\nabla \Psi(u)\|^2} \nabla \Psi(u).$$

Notemos que podemos definir los valores de

$$t_{J,\Psi,u} := \frac{(\nabla J(u), \nabla \Psi(u))}{\|\nabla \Psi(u)\|^2}$$

Tomando \mathcal{O} más pequeña en caso de ser necesario, podemos suponer, sin perder generalidad, que $\Psi(u) \neq 0$ para todo $u \in \mathcal{O}$.

El flujo gradiente negativo de J sobre \mathcal{M} es la solución del problema de Cauchy

$$\begin{cases} \sigma_t(t, u) = -\nabla_{\mathcal{M}} J(\sigma(t, u)), \\ \sigma(0, u) = u. \end{cases}$$

2.8.3. Condición de Palais-Smale y el Lema de Deformación Simétrico

En lo sucesivo \mathcal{M} denotará a una variedad de Hilbert de clase C^2 de un espacio de Hilbert H y $J : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^2 y $D_{\mathcal{M}}J$ es la derivada de J sobre \mathcal{M} .

Una sucesión $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} D_{\mathcal{M}}J(u_k) = 0 \quad \equiv \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \nabla_{\mathcal{M}}J(u_k) = 0,$$

y para la cual

$$\exists C > 0, \forall k \in \mathbb{N} : \quad |J(u_k)| \leq C,$$

es llamada una sucesión Palais-Smale para J .

Sea $c \in \mathbb{R}$, si

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J(u_k) = c,$$

y

$$\lim_{k \rightarrow \infty} D_{\mathcal{M}}J(u_k) = 0 \quad \equiv \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \nabla_{\mathcal{M}}J(u_k) = 0,$$

entonces la sucesión $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es llamada una sucesión Palais-Smale para J en el nivel c . En ese caso c se denomina un nivel de Palais-Smale para J .

Ejemplo 2.18. Sea

$$G : \mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) \mapsto G(x) := e^{x_1 + x_2}.$$

Por el Teorema de Multiplicador de Lagrange, si x es un punto crítico de G sobre \mathbb{S}^1 , entonces existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla G(x) = \lambda \nabla f(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = \begin{cases} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) & \text{si } \lambda = \frac{\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}}{2}, \\ -\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) & \text{si } \lambda = -\frac{\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}}{2}, \end{cases}$$

donde f está definido en el Ejemplo 2.14. Por tanto, podemos concluir que

$$G(x) = \begin{cases} e^{\sqrt{2}} & \text{si } \lambda = \frac{\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}}{2}, \\ e^{-\sqrt{2}} & \text{si } \lambda = -\frac{\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}}{2}. \end{cases}$$

Si

$$\forall k \in \mathbb{N} : \quad x_k := \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} \left(1 + \frac{1}{2k} \right) \right), \sin \left(\frac{\pi}{4} \left(1 + \frac{1}{2k} \right) \right) \right)$$

podemos concluir que

i)

$$(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{S}^1.$$

ii)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} G(x_k) = e^{\sqrt{2}}.$$

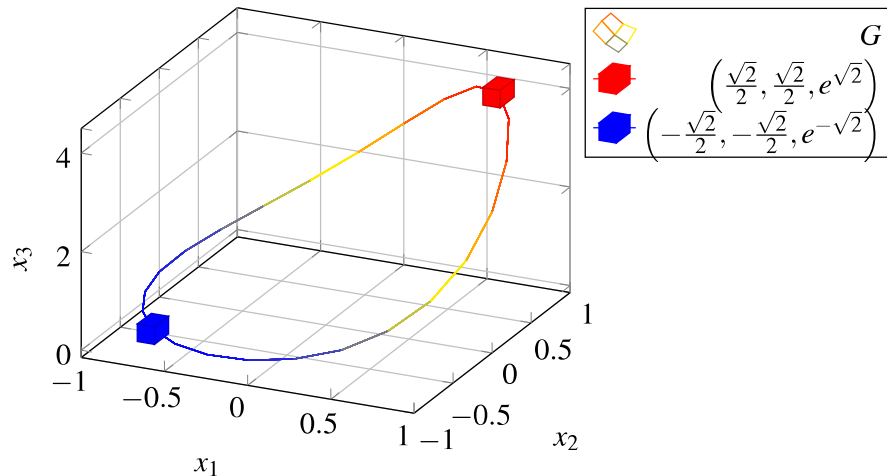


FIGURA 2.8. Representación de valores de Palais-Smale y su grafo para G sobre una variedad.

iii)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \nabla_{\mathbb{S}^1} G(x_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} G(x_k) \begin{pmatrix} 1 + \ln(G(x_k)) \cos\left(\frac{\pi}{4}\left(1 + \frac{1}{2k}\right)\right) \\ 1 + \ln(G(x_k)) \sin\left(\frac{\pi}{4}\left(1 + \frac{1}{2k}\right)\right) \end{pmatrix}^T = 0.$$

Por lo tanto, $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión Palais-Smale para G en el nivel $e^{\sqrt{2}}$.

Por otro lado, si

$$\forall k \in \mathbb{N}: \quad y_k := \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\left(5 + \frac{1}{2k}\right)\right), \sin\left(\frac{\pi}{4}\left(5 + \frac{1}{2k}\right)\right) \right)$$

podemos concluir que

j)

$$(y_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{S}^1.$$

jj)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} G(y_k) = e^{-\sqrt{2}}.$$

jjj)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \nabla_{\mathbb{S}^1} G(y_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} G(y_k) \begin{pmatrix} 1 + \ln(G(y_k)) \cos\left(\frac{\pi}{4}\left(5 + \frac{1}{2k}\right)\right) \\ 1 + \ln(G(y_k)) \sin\left(\frac{\pi}{4}\left(5 + \frac{1}{2k}\right)\right) \end{pmatrix}^T = 0.$$

Por lo tanto, $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión Palais-Smale para G en el nivel $e^{-\sqrt{2}}$.

Notemos que en general $\nabla_{\mathcal{M}} J(u) = 0$ ssi u es un punto crítico de J sobre \mathcal{M} .

Observación 2.6. Decimos que J satisface la condición de Palais-Smale $((PS)_{\mathcal{M}})$ si toda sucesión Palais-Smale para J posee una subsucesión convergente en H . Ahora diremos que J satisface la condición de Palais-Smale en el nivel $c \in \mathbb{R}$ $((PS)_{\mathcal{M},c})$ si toda sucesión de Palais-Smale en el nivel c tiene una subsucesión convergente en H .

Observación 2.7. Notemos que, como el conjunto \mathcal{M} es cerrado en H , el límite u de tal subsucesión pertenece a \mathcal{M} y es un punto crítico de J sobre \mathcal{M} , ya que $\nabla_{\mathcal{M}}J$ es continuo. Además, si \mathcal{M} es compacto, cualquier J satisface $((PS)_{\mathcal{M}})$. Esto no es cierto en general: la sucesión $u_k := k$ es de Palais-Smale para la función exponencial, sin embargo no posee ninguna subsucesión convergente.

Para $X \subseteq \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$ denotaremos

$$\begin{aligned} J^{-1}(X) &:= \{u \in \mathcal{M} \mid J(u) \in X\}, \\ J^a &:= \{u \in \mathcal{M} \mid J(u) \leq a\}, \\ K_a &:= \{u \in \mathcal{M} \mid J(u) = a \text{ y } \nabla_{\mathcal{M}}J(u) = 0\}, \\ B_\varepsilon(K_a) &:= \{u \in \mathcal{M} \mid \text{dist}(u, K_a) < \varepsilon\}. \end{aligned}$$

Lema 2.2. Si J satisface $(PS)_{\mathcal{M},c}$ entonces K_c es compacto (posiblemente vacío).

La demostración es consecuencia inmediata de $(PS)_{\mathcal{M},c}$, véase, e.g., [7].

Lema 2.3. Si J satisface $(PS)_{\mathcal{M},c}$ para todo $c \in [a, b]$, entonces dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\forall u \in J^{-1}[a - \delta, b + \delta] \setminus \bigcup_{c \in [a, b]} B_\varepsilon(K_c) : \quad \|D_{\mathcal{M}}J(u)\| \geq \frac{\delta}{\varepsilon}.$$

Demostración. Por contradicción, supongamos que existe una sucesión $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\forall k \in \mathbb{N} : \quad u \in \mathcal{M} \setminus \bigcup_{c \in [a, b]} B_\varepsilon(K_c), \quad J(u_k) \in \left[a - \frac{1}{k}, b + \frac{1}{k} \right], \quad \|D_{\mathcal{M}}J(u)\| \leq \frac{1}{\varepsilon k}.$$

Esta sucesión contiene una subsucesión $(u_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} J(u_{k_j}) = c \in [a, b],$$

como J satisface $(PS)_{\mathcal{M},c}$, ésta contiene a su vez una subsucesión que converge a un punto $u \in K_c \cap (\mathcal{M} \setminus B_\varepsilon(K_c))$, lo cual es una contradicción. \square

Un subconjunto \mathcal{S} de un espacio vectorial es simétrico si

$$\mathcal{S} = -\mathcal{S} := \{-u \mid u \in \mathcal{S}\}.$$

Ejemplo 2.19. La esfera unitaria S_H es un conjunto simétrico.

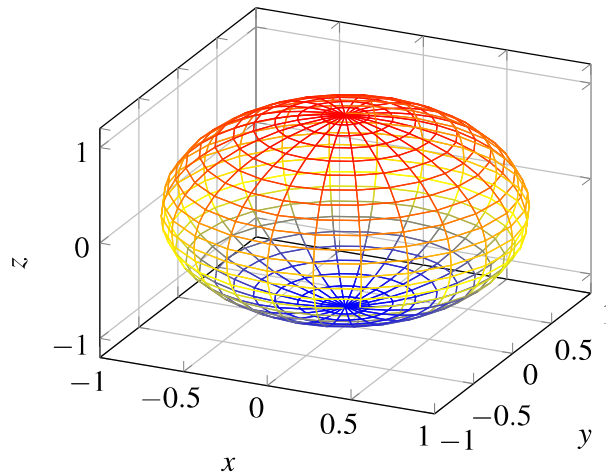
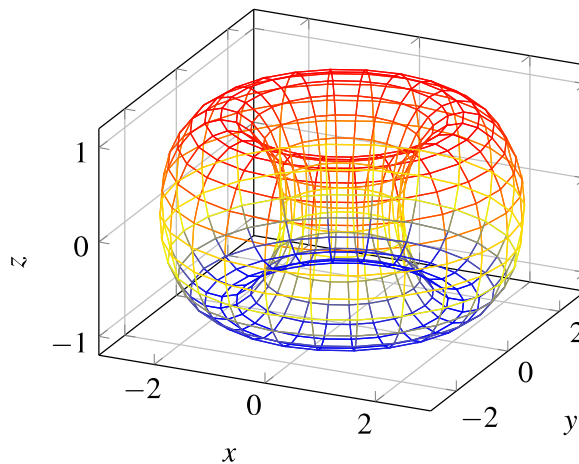
Ejemplo 2.20. El toro definido como $\mathbb{T}^n := (S^1)^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, es un conjunto simétrico.

Sean $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ dos subconjuntos simétricos y $f : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$ diremos que f es una función impar si

$$\forall u \in \mathcal{S}_1 : \quad f(-u) = -f(u).$$

Y diremos que f es una función par si

$$\forall u \in \mathcal{S}_1 : \quad f(-u) = f(u).$$

FIGURA 2.9. Grafo de la esfera $\mathbb{S}^2 = S_{\mathbb{R}^3}$.FIGURA 2.10. Grafo del toro \mathbb{T}^2 .

Si \mathcal{M} es simétrica y J es una función par, el gradiente de J sobre \mathcal{M} resulta ser impar, i.e.,

$$\forall u \in \mathcal{M} : \quad \nabla_{\mathcal{M}} J(-u) = -\nabla_{\mathcal{M}} J(u),$$

en consecuencia, el flujo gradiente negativo σ es impar en u , i.e.,

$$\forall u \in D_{\sigma} : \quad \sigma(t, -u) = -\sigma(t, u). \quad (2.8.35)$$

Esta última afirmación es consecuencia inmediata de la unicidad de la solución para el problema de Cauchy. Ahora asumiremos que \mathcal{M} además es un conjunto simétrico.

Teorema 2.20. Si $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{H}$ es un campo localmente Lipschitz tangente a \mathcal{M} y f una función impar, entonces el flujo generado por f satisface (2.8.35).

Para una demostración de este resultado véase, e.g., [9].

Proposición 2.9 (Lema de Deformación Simétrica). Si J satisface $(PS)_{\mathcal{M},c}$ entonces, dado

$\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ y una función impar

$$\eta : J^{c+\delta} \setminus B_{3\varepsilon}(K_c) \rightarrow J^{c-\delta}.$$

Si $K_c \neq \emptyset$ para todo $c \geq a$, entonces existe una función impar tal que

$$g : \mathcal{M} \rightarrow J^a.$$

Demostración. Esta demostración la haremos en dos literales.

I) Sea $\varepsilon > 0$, genérico. El Lema 2.3 asegura que existe $\delta > 0$ tal que

$$\forall u \in J^{-1}[c - 2\delta, c + 2\delta] \setminus B_\varepsilon(K_c) : \quad \|\nabla_{\mathcal{M}} J(u)\| \geq \frac{2\delta}{\varepsilon}.$$

Consideramos

$$A := (\mathcal{M} \setminus J^{-1}[c - 2\delta, c + 2\delta]) \cup B_\varepsilon(K_c) \quad \text{y} \quad B := J^{-1}[c - \delta, c + \delta] \setminus B_{2\varepsilon}(K_c),$$

y la función

$$\begin{aligned} \rho : \mathcal{M} &\rightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto \rho(u) := \frac{d(u, A)}{d(u, A) + d(u, B)}, \end{aligned}$$

que es localmente Lipschitz y cumple que

$$\rho(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } u \in B, \\ 0 & \text{si } u \in A. \end{cases}$$

El campo vectorial

$$\beta(u) := \begin{cases} -\rho(u) \frac{\nabla_{\mathcal{M}} J(u)}{\|\nabla_{\mathcal{M}} J(u)\|^2} & \text{si } \nabla_{\mathcal{M}} J(u) \neq 0, \\ 0 & \text{si } u \in A, \end{cases}$$

es localmente Lipschitz y tangente a \mathcal{M} , y cumple que

$$\forall u \in \mathcal{M} : \quad \|\beta(u)\| \leq \frac{\varepsilon}{2\delta}.$$

En consecuencia, el flujo generado por β es global y satisface (2.8.35), i.e., existe

$$\sigma \in C(\mathbb{R} \times \mathcal{M}, \mathcal{M}),$$

tal que

$$\forall (t, u) \in D_\sigma : \quad \sigma(t, -u) = -\sigma(t, u) \quad \text{y} \quad \begin{cases} \sigma_t(t, u) = \beta(\sigma(t, u)), \\ \sigma(0, u) = u. \end{cases}.$$

Notemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}J(\sigma(t, u)) &= (\nabla J(\sigma(t, u)), \sigma_t(t, u)) \\ &= (\nabla J(\sigma(t, u)), \beta(\sigma(t, u))) \\ &= -\rho(\sigma(t, u)). \end{aligned} \quad (2.8.36)$$

Así que, como $\rho \geq 0$ por (2.8.36), tenemos que $J(\sigma(t, u))$ es decreciente en t . Definimos

$$\eta(s, u) := \sigma(2\delta s, u).$$

Entonces $\eta(0, u) = u$ para todo $u \in \mathcal{M}$. Sea $u \in J^{c+\delta} \setminus B_{3\varepsilon}(K_c)$, consideramos dos casos:

- i) si $\eta(s, u) \in J^{c-\delta}$ para algún $s \in [0, 1]$ entonces, puesto que $J(\eta(s, u))$ es decreciente en s , se tiene que $\eta(1, u) \in J^{c-\delta}$;
- ii) si $\eta(s, u) \in J^{-1}[c-\delta, c+\delta]$ para todo $s \in [0, 1]$, del Teorema del Valor Medio se sigue que

$$\forall t \in [0, 2\delta] : \quad \|\sigma(t, u) - u\| \leq \max_{s \in [0, t]} \|\sigma_s(s, u)\| t \leq \frac{\varepsilon t}{2\delta} \leq \varepsilon.$$

Como $u \notin B_{3\varepsilon}(K_c)$, la desigualdad anterior implica que $\sigma(t, u) \in B$ para todo $t \in [0, 2\varepsilon]$ y usando (2.8.36) concluimos que

$$J(\sigma(2\delta, u)) - J(u) = \int_0^{2\delta} \frac{d}{ds} J(\sigma(s, u)) ds = - \int_0^{2\delta} \rho(\sigma(s, u)) ds = -2\delta.$$

Por lo tanto, $J(\eta(1, u)) = J(u) - 2\delta \leq c - \delta$ y η es la deformación deseada y satisface (2.8.35), i.e.,

$$\forall u \in D_\eta : \quad \eta(t, -u) = -\eta(t, u).$$

II) Ahora demostraremos la segunda parte de esta proposición. El Lema 2.3 asegura que existe $d < a$ tal que $\nabla_{\mathcal{M}} J(u) \neq 0$ si $J(u) \geq d$. Sea $h \in C^\infty(\mathbb{R})$ tal que $0 \leq h \leq 1$ y

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq d, \\ 1 & \text{si } x \geq a. \end{cases}$$

Definimos

$$\zeta(u) := \begin{cases} -h(J(u)) \frac{\nabla_{\mathcal{M}} J(u)}{\|\nabla_{\mathcal{M}} J(u)\|} & \text{si } J(u) \geq d, \\ 0 & \text{si } J(u) \leq d, \end{cases}$$

y denotaremos por σ al flujo asociado a ζ . Notemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}J(\sigma(t, u)) &= (\nabla J(\sigma(t, u)), \sigma_t(t, u)) \\ &= (\nabla J(\sigma(t, u)), \zeta(\sigma(t, u))) \\ &= -h(\sigma(t, u)), \end{aligned} \quad (2.8.37)$$

para todo $t \in [0, t^+(u))$. En consecuencia $J(\sigma(t, u))$ es decreciente para $t \in [0, t^+(u))$.

Sea $u \in \mathcal{M}$ con $J(u) \geq d$. Sea $\varepsilon > 0$ por el Lema 2.3 asegura que existe $\delta > 0$ tal que $\|\nabla_{\mathcal{M}} J(v)\| \geq \delta$ para todo $v \in J^{-1}[d - \delta, J(u) + \delta]$. Por tanto, $\|\zeta(v)\| \leq \frac{1}{\delta}$ para todo $v \in J^{-1}(-\infty, J(u) + \delta]$, en particular

$$\forall t \in [0, t^+(u)) : \quad \|\zeta(\sigma(t, u))\| \leq \frac{1}{\delta},$$

esto prueba que $t^+(u) = \infty$ para todo $u \in \mathcal{M}$. Definimos

$$\tau(u) := \text{máx} \{J(u) - a, 0\} \quad \text{y} \quad g(s, u) := \sigma(s\tau(u), u),$$

entonces $g \in C([0, 1] \times \mathcal{M}, \mathcal{M})$ y $g(0, u) = u$. Si $J(g(1, u)) = J(\sigma(\tau(u), u)) \geq a$, entonces $J(\sigma(t, u)) \geq a$ para $t \in [0, \tau(u)]$ y la identidad (2.8.37) implica que

$$J(\sigma(\tau(u), u)) - J(u) = - \int_0^{\tau(u)} h(J(\sigma(t, u))) dt = -\tau(u) = -J(u) + a.$$

Por tanto, $J(g(1, u)) = a$, g es la deformación deseada y satisface (2.8.35), i.e.,

$$\forall u \in D_g : \quad g(t, -u) = -g(t, u).$$

□

2.8.4. El género de Krasnoselski

A mediados de los años 50 Krasnoselski introdujo un invariante adecuado para tratar problemas simétricos que es una herramienta útil para buscar puntos críticos, véase e.g. [1] y [29].

Sea E un espacio de Banach. Definimos el conjunto

$$\Sigma_E := \{A \subseteq E \mid A = \bar{A}, \quad A = -A \quad \text{y} \quad 0 \notin A\}. \quad (2.8.38)$$

El género de Krasnoselski de $A \in \Sigma_E$ es el menor número $n \in \mathbb{N}$ para la cual existe

$$f \in C(A, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \quad \text{impar},$$

y se denota como $\gamma(A)$. Se dice que $\gamma(A) = +\infty$ si no hay números naturales con la propiedad anterior y $\gamma(\emptyset) = 0$.

Ejemplo 2.21. Dado $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Para \mathbb{S}^{m-1} , tomando la función identidad

$$\begin{aligned} \text{id} : \mathbb{S}^{m-1} &\rightarrow \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \\ x &\mapsto \text{id}(x) := x, \end{aligned}$$

se encuentra que $\gamma(\mathbb{S}^{m-1}) \leq m$.

Ejemplo 2.22. Supongamos que $B \subseteq E$ es cerrado y $B \cap (-B) = \emptyset$. Sea $A := B \cup (-B)$, entonces $\gamma(A) = 1$ pues la función $f(x) := (\chi_B - \chi_{-B})(x)$ es impar y $f \in C(A, \mathbb{R} \setminus \{0\})$.

Proposición 2.10. Sean $A, B \in \Sigma_E$. El género de Krasnoselski posee las siguientes propiedades:

(K.1) **Normalización:** Si $x \neq 0$, entonces

$$\gamma(\{x\} \cup \{-x\}) = 1.$$

(K.2) **Función:** Si existe una función impar $f \in C(A, B)$, entonces $\gamma(A) \leq \gamma(B)$.

(K.3) **Monotonía:** Si $A \subseteq B$, entonces

$$\gamma(A) \leq \gamma(B).$$

(K.4) **Subaditividad:**

$$\gamma(A \cup B) \leq \gamma(A) + \gamma(B).$$

(K.5) **Continuidad:** Si A es compacto, entonces $\gamma(A) < \infty$ y existe un $\delta > 0$ tal que

$$B_\delta(A) \in \Sigma_E \quad y \quad \gamma(B_\delta(A)) = \gamma(A).$$

Demostración. Procederemos a demostrar cada uno de los literales. Para probar (K.2) - (K.5) asumiremos que $\gamma(A), \gamma(B) < \infty$.

(K.1) es un caso especial del Ejemplo 2.22.

(K.2) Supongamos que $\gamma(B) = n$, entonces existe $h \in C(B, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ en consecuencia $h \circ f \in C(A, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ es impar. Por lo tanto,

$$\gamma(A) \leq n = \gamma(B).$$

(K.3) Tomando $f = \text{id}$ en la propiedad (K.2) concluimos (K.3).

(K.4) Supongamos que $\gamma(A) = m$ y $\gamma(B) = n$, por lo tanto existen $g \in C(A, \mathbb{R}^m \setminus \{0\})$ y $h \in C(B, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ impares. Por el Teorema de extensión de Tietze (vease, e.g. [29]), existen $\hat{g} \in C(E, \mathbb{R}^m)$ y $\hat{h} \in C(E, \mathbb{R}^n)$ tales que $\hat{g}|_A = g$ y $\hat{h}|_B = h$. Por lo mencionado anteriormente, podemos asumir que \hat{g} y \hat{h} son impares.

Sea $f = (\hat{g}, \hat{h})$, entonces $f \in C(A \cup B, \mathbb{R}^{m+n} \setminus \{0\})$ y es impar, por lo tanto

$$\gamma(A \cup B) \leq m + n = \gamma(A) + \gamma(B).$$

(K.5) Para $x \in A$, definimos $r(x) := \frac{1}{2} \|x\| = r(-x)$ y $T_x := B_{r(x)}(x) \cup B_{r(x)}(-x)$. Entonces $\gamma(\overline{T_x}) = 1$ por el Ejemplo 2.22. Se tiene entonces que

$$A \subseteq \bigcup_{x \in A} T_x$$

y, por la compacidad de A , concluimos que

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^k T_{x_i}$$

para algún conjunto finito de puntos $x_1, \dots, x_k \in A$. Por lo tanto de (K.4) obtenemos

$$\gamma(A) < \infty.$$

Si $\gamma(A) = n$, entonces existe $f \in C(A, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ impar. Extendemos f a una función impar \hat{f} como en (K.4). Dado que A es compacto, existe $\delta > 0$ tal que $\hat{f} \neq 0$ sobre $B_\delta(A)$, entonces

$$\gamma(B_\delta(A)) \leq n = \gamma(A),$$

pero por (K.3) conseguimos la igualdad

$$\gamma(A) \leq \gamma(B_\delta(A)).$$

□

La demostración anterior es tomada de [29].

El siguiente teorema es de suma importancia para nuestro problema principal puesto que gracias a el podemos demostrar que existen infinidad de soluciones.

Teorema 2.21. Sean H un espacio de Hilbert, $\mathcal{M} \in \Sigma_H$ una variedad de clase C^1 y $J \in C^1(H, \mathbb{R})$ par. Supongamos que J satisface (PS) $_{\mathcal{M}}$ y $J|_{\mathcal{M}}$ y que está acotado inferiormente. Entonces

$$\gamma(\mathcal{M}) \leq \sum_{c \in \mathbb{R}} \gamma(K_c), \quad (2.8.39)$$

donde

$$K_c := \{u \in \mathcal{M} \mid J(u) = c \text{ y } \nabla_{\mathcal{M}} J(u) = 0\}$$

de manera que J tiene al menos $\gamma(\mathcal{M})$ pares de puntos críticos u y $-u$ sobre \mathcal{M} . Además

$$\forall 1 \leq k \leq \dim(H) : C_k(J) := \inf_{A \in \mathcal{A}_k(\mathcal{M})} \max_{u \in A} J(u),$$

donde $\dim(H)$ es la dimensión del espacio H y

$$\mathcal{A}_k(\mathcal{M}) := \{A \in \Sigma_H \cap \mathcal{M} \mid \gamma(A) \geq k\},$$

donde

$$\Sigma_H \cap \mathcal{M} := \{\mathcal{B} \cap \mathcal{M} \mid \mathcal{B} \in \Sigma_H\}.$$

Demostración. Sea

$$\Gamma := \{c \in \mathbb{R} \mid K_c \neq \emptyset\}$$

el conjunto de valores críticos de J sobre \mathcal{M} . Si Γ no está acotado, la desigualdad (2.8.39) se satisface trivialmente. Si está acotado, escogemos

$$\alpha < \inf_{x \in \mathcal{M}} J(x) \text{ y } \beta > \sup \Gamma.$$

Entonces $\gamma(J^\alpha) = 0$ y el Lema de Deformación Simétrico implica que $\gamma(\mathcal{M}) = \gamma(J^\beta)$.

Para cada $c \in \mathbb{R}$ escogemos una vecindad U de K_c en \mathcal{M} tal que $\gamma(U) = \gamma(K_c)$. Como K_c es compacto, existe $\delta > 0$ tal que $B_{3\delta}(K_c) \subseteq U$. El Lema de Deformación Simétrico asegura

que existe $\varepsilon > 0$ tal que $J^{c+\varepsilon} \setminus B_{3\delta}(K_c)$ es deformable a $J^{c-\varepsilon}$ en \mathcal{M} y, usando las propiedades del género, concluimos que

$$\gamma(J^{c+\varepsilon}) \leq \gamma(J^{c+\varepsilon} \setminus B_{3\delta}(K_c)) + \gamma(B_{3\delta}(K_c)) \leq \gamma(J^{c-\varepsilon}) + \gamma(K_c).$$

Los intervalos $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ contruidos de esta manera forman una cobertura abierta de \mathbb{R} , así que hay un número finito de ellos que cubre a $[\alpha, \beta]$. Escogemos $c_1, \dots, c_k \in [\alpha, \beta]$ y $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k > 0$ de modo que $c_1 = \alpha$, $c_k = \beta$,

$$\begin{aligned} c_{j+1} - \varepsilon_{j+1} &\leq c_j + \varepsilon_j, & \forall j = 1, \dots, k-1, \\ \gamma(J^{c_j+\varepsilon_j}) &\leq \gamma(J^{c_j-\varepsilon_j}) + \gamma(K_{c_j}), & \forall j = 1, \dots, k. \end{aligned} \quad (2.8.40)$$

Por las desigualdades (2.8.40) obtenemos

$$\gamma(\mathcal{M}) = \gamma(J^\beta) \leq \gamma(J^\alpha) + \sum_{j=1}^k \gamma(K_{c_j}) = \sum_{j=1}^k \gamma(K_{c_j}) < \infty.$$

Esto demuestra la desigualdad (4.2.21), y prueba que Γ no está acotado si $\gamma(\mathcal{M}) = 1$. Finalmente, como la cardinalidad de K_{c_j} es al menos $\gamma(K_{c_j})$, concluimos que J tiene al menos $\gamma(\mathcal{M})$ puntos críticos en \mathcal{M} . \square

Teorema 2.22. *Sea $\Omega \in \Sigma_{\mathbb{R}^m}$ y notaremos su frontera como $\partial\Omega$. Entonces $\gamma(\partial\Omega) = m$*

Para una demostración de este resultado véase, e.g., [1].

Observación 2.8. $\gamma(\mathbb{S}^{m-1}) = m$.

Corolario 2.1. *Si H es un espacio de Hilbert de dimensión infinita i.e. $\dim(H) = \infty$, entonces $\gamma(S_H) = \infty$.*

Demostración. Si $\dim(H) = \infty$ entonces, para todo $m \in \mathbb{N}$ existe una isometría lineal de \mathbb{R}^m a H que induce una función continua e impar de \mathbb{S}^{m-1} a S_H . Por la propiedad (K.2) del género de Krasnoselski y el Observación 2.8, concluimos que

$$m = \gamma(\mathbb{S}^{m-1}) \leq \gamma(S_H),$$

para todo $m \in \mathbb{N}$. Esto prueba que $\gamma(S_H) = \infty$. \square

2.8.5. Principios del Máximo

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ acotado y consideramos una operador elíptico L de segundo-orden en Ω , i.e.,

$$L \equiv a_{i,j}(x)D_{i,j} + b_i(x)D_i + c(x)$$

donde los coeficientes $a_{i,j}, b_i, c \in C(\Omega)$. La elipticidad significa que los coeficientes de la matriz $A = (a_{i,j})$ es definida positiva en Ω . Además notaremos

$$D = \det(A) \quad \text{y} \quad D^* = D^{\frac{1}{N}},$$

a D^* se la llama la media geométrica de los valores propios de A . En esta sección asumiremos que

$$0 < \lambda \leq D^* \leq \Lambda,$$

donde $\lambda, \Lambda \geq 0$, la cuales denotan, respectivamente, el máximo y mínimo de los valores propios de A .

Introduzcamos el concepto de conjunto contacto. Sea $u \in C^2(\Omega)$. Definimos

$$\Gamma^+ := \{y \in \Omega \mid \forall x \in \Omega : u(x) \leq u(y) + Du(y) \cdot (x - y)\}.$$

El conjunto Γ^+ es llamado conjunto contacto superior de u y se tiene que la matriz Hessiana $D^2(u) = (D_{i,j}u)$ es no positiva sobre Γ^+ . De hecho el conjunto contacto superior puede también ser definido por funciones continuas u de la siguiente manera

$$\Gamma^+ := \{y \in \Omega \mid \exists p_y \in \mathbb{R}^N, \forall x \in \Omega : u(x) \leq u(y) + p_y \cdot (x - y)\}.$$

Es claro que u es cóncavo ssi $\Gamma^+ = \Omega$. Si $u \in C^1(\Omega)$, entonces $p(y) = Du(y)$ y cualquier soporte de hiperplano debe ser un plano tangente al gráfico.

Ahora, consideramos la ecuación

$$Lu = f \quad \text{en } \Omega$$

para algún $f \in C(\Omega)$.

Teorema 2.23 (Principio del Máximo Débil). *Asumiremos que $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ y*

$$c \equiv 0, \quad \text{en } \Omega.$$

i) Si

$$Lu \leq 0, \quad \text{en } \Omega,$$

entonces

$$\max_{x \in \overline{\Omega}} u(x) = \max_{x \in \partial\Omega} u(x).$$

ii) Si

$$Lu \geq 0, \quad \text{en } \Omega,$$

entonces

$$\min_{x \in \overline{\Omega}} u(x) = \min_{x \in \partial\Omega} u(x).$$

Para una demostración de este resultado véase, e.g., [14].

Teorema 2.24 (Principio del Máximo de Alexandroff). *Suponga que $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ satisface $Lu \geq f$ en Ω junto con las siguientes condiciones*

$$\frac{|b|}{D^*}, \frac{f}{D^*} \in L^N(\Omega) \quad \text{y} \quad c \leq 0 \quad \text{en } \Omega.$$

Entonces se cumple

$$\sup_{x \in \Omega} u(x) \leq \sup_{x \in \partial\Omega} u^+(x) + C_N \left\| \frac{f^-}{D^*} \right\|_{L^N(\Gamma^+)},$$

donde Γ^+ es un conjunto de contacto directo de u y

$$C_N := \text{diam} \left\{ \exp \left\{ \frac{2^{N-2}}{\omega_N N^N} \left(\left\| \frac{b}{D^*} \right\|_{L^N(\Gamma^+)}^N + 1 \right) \right\} - 1 \right\}$$

con ω_N como el volumen de la bola unidad en \mathbb{R}^N .

Para una demostración de este resultado véase, e.g., [19].

Capítulo 3

ALGUNOS CONCEPTOS DE MECÁNICA CUÁNTICA

En este capítulo revisamos algunos puntos que motivaron el nacimiento de la mecánica cuántica y que son relevantes para nuestro estudio. La mecánica cuántica nos permite comprender:

1. como se describe matemáticamente un estado cuántico en un tiempo dado t ;
2. como calcular las diversas cantidades físicas a partir de este estado cuántico;
3. como describir la evolución temporal de un sistema.

La mecánica cuántica es la teoría que describe la dinámica de la materia a escala microscópica; además proporciona un marco válido para describir el mundo microfísico. Es vital para comprender la física moderna (i.e., estado sólido, molecular, atómica, nuclear) y la física de partículas (i.e., óptica, termodinámica, mecánica estadística, etc). También se considera la base de la química y la biología, véase, e.g., [10], [17], [18], [28] y [33].

3.1. Orígenes de la Mecánica Cuántica

La introducción de la mecánica cuántica fue motivada por el fracaso de la física clásica para explicar una serie de fenómenos que se observaron a finales del siglo XIX y principios del siglo XX.

A finales del siglo XIX, la física consistía esencialmente de lo que hoy llamamos mecánica clásica:

- el **electromagnetismo** de Maxwell proporcionó el marco adecuado para estudiar la radiación;
- la **termodinámica** que explica las interacciones entre la materia y la radiación.

El éxito abrumador de la mecánica clásica hizo que la gente creyera que se había logrado la descripción definitiva de la naturaleza (i.e., la materia y la radiación, se describieron en términos de partículas y ondas, respectivamente). Parecía que todos los fenómenos físicos conocidos podían explicarse dentro de este marco, véase, e.g., [33].

En los comienzos del siglo XX, sin embargo, la física clásica se vio seriamente desafiada en dos frentes:

- **Dominio relativista:** la Teoría de la Relatividad Especial de Einstein en 1905 mostró que la validez de la mecánica Newtoniana cesa a velocidades muy altas (i.e., velocidades comparables a la de la luz), véase, e.g., [33].

- **Dominio microscópico:** tan pronto como se desarrollaron nuevas técnicas experimentales, hasta el punto de sondear estructuras atómicas y subatómicas, resultó que la física clásica falla estrepitosamente al proporcionar una explicación adecuada para varios fenómenos recientemente descubiertos. Así, se hizo evidente que la validez de la física clásica cesa a nivel microscópico y que había que invocar nuevos conceptos para describir por ejemplo, la estructura de los átomos y las moléculas, y cómo la luz interactúa con ellos, véase, e.g., [33].

La primera indicación de una ruptura de las ideas clásicas ocurrió con el fenómeno de radiación del cuerpo negro. Se trata de la termodinámica del intercambio de energía entre la radiación y la materia. De acuerdo con los principios de la física clásica, se supone que este intercambio de energía es continuo en el sentido de que la luz de una frecuencia ν puede ceder cualquier cantidad de energía en la absorción dependiendo de la intensidad de energía del haz de luz. De hecho, en 1900, Max Planck postuló por primera vez que las partículas vibrantes de la materia actúan como osciladores armónicos y no emiten ni absorben la luz de forma continua, sino en cantidades discretas.

Matemáticamente, la radiación de frecuencia ν sólo, puede intercambiar energía con materia en unidades de $h\nu$, a lo que Max Planck llamó energía de un cuanto. Aquí h es la *constante de Planck*

$$h = 2\pi\hbar \approx 6.626 \times 10^{-34} [J \cdot s]$$

y \hbar es una *constante universal*.

Hertz, en 1887, descubrió el efecto fotoeléctrico que proporciona una confirmación directa para la cuantificación de la energía de la luz. En 1905, las siguientes leyes experimentales fueron descubiertas:

- Si la frecuencia de la radiación incidente es más pequeña que la frecuencia umbral del metal (una frecuencia que depende de las propiedades del metal) entonces no se puede emitir un electrón independientemente de la intensidad de la radiación (Philip Lenard, 1902);
- No importa cuán baja sea la intensidad de la radiación incidente, los electrones se expulsarán instantáneamente en el momento en que la frecuencia de la radiación exceda la frecuencia umbral ν_0 ;
- En cualquier frecuencia superior a ν_0 , el número de electrones expulsados aumenta con la intensidad de la luz, pero no depende de la frecuencia de la luz;
- La energía cinética de los electrones expulsados depende de la frecuencia pero no de la intensidad del haz; la energía cinética del electrón expulsado aumenta linealmente con la frecuencia incidente.

Estos hallazgos experimentales no pueden explicarse dentro del contexto de la visión clásica de la radiación, en particular la dependencia del efecto en la frecuencia umbral. Según la física clásica, cualquier cantidad (continua) de energía puede intercambiarse con la materia. Es decir, dado que la intensidad de una onda electromagnética es proporcional al cuadrado de su amplitud, cualquier frecuencia con suficiente intensidad puede suministrar la energía

necesaria para liberar el electrón del metal.

Cuando se usa una fuente de luz débil, de acuerdo con la física clásica, un electrón seguiría absorbiendo energía, a un ritmo continuo, hasta que ganara una cantidad suficiente y, entonces, dejaría el metal. Si este argumento se mantiene, entonces, cuando se usa una radiación muy débil, el efecto fotoeléctrico no tendrá lugar durante mucho tiempo, posiblemente horas, hasta que un electrón acumule gradualmente la cantidad necesaria de energía. Esta conclusión, sin embargo, discrepa totalmente con la observación experimental. Los experimentos se realizaron con una fuente de luz que era tan débil que un electrón tardaría varias horas en acumular la energía necesaria para su expulsión y, sin embargo, se observó que algunos electrones abandonaban el metal instantáneamente. Otros experimentos demostraron que un aumento en la intensidad (brillo) no es suficiente para desalojar a los electrones del metal. Pero al aumentar la frecuencia de la radiación incidente más allá de cierto umbral, incluso a una intensidad muy débil, la emisión de electrones comienza de inmediato. Estos hechos experimentales indican que el concepto de acumulación gradual, o absorción continua, de energía por el electrón, como lo predica la física clásica, es ciertamente erróneo, véase, e.g., [33].

Inspirado por la cuantización de la radiación electromagnética de Planck, Einstein logró en 1905 dar una explicación teórica de la dependencia de la emisión fotoeléctrica de la frecuencia de la radiación incidente. Él asumió que la luz está hecha de corpúsculos, cada uno de los cuales lleva una energía $h\nu$, llamada fotones. Cuando un haz de luz de frecuencia ν incide sobre un metal, cada fotón transmite toda su energía $h\nu$ a un electrón cerca de la superficie; en el proceso, el fotón es absorbido por completo por el electrón. De este modo, el electrón absorberá energía sólo en cuantos de energía $h\nu$, independientemente de la intensidad de la radiación incidente. Si $h\nu$ es más grande que la función de trabajo, W , del metal, entonces no se puede emitir ningún electrón desde la superficie del metal; a menos que $h\nu > W$, i.e.,

$$h\nu = W + K, \quad (3.1.1)$$

donde K representa la energía cinética del electrón que sale del material.

La ecuación (3.1.1), que fue derivada por Einstein, da la explicación adecuada a la observación experimental de que la energía cinética del electrón expulsado aumenta linealmente con la frecuencia incidente ν ,

$$K = h\nu - W = h(\nu - \nu_0), \quad (3.1.2)$$

donde $\nu_0 = \frac{W}{h}$ se llama umbral o frecuencia de corte del metal (así como se muestra en la Figura 3.1(b))

Además, esta relación muestra claramente por qué no se puede expulsar un electrón del metal a menos que $\nu > \nu_0$. Dado que la energía cinética no puede ser negativa, el efecto fotoeléctrico no puede ocurrir cuando $\nu < \nu_0$ independientemente de la intensidad de la radiación. Los electrones expulsados adquieren su energía cinética del exceso de energía $h(\nu - \nu_0)$ suministrado por la radiación incidente.

La energía cinética de los electrones emitidos puede determinarse experimentalmente de la siguiente manera. La configuración, que fue diseñada por Lenard, consiste en el metal

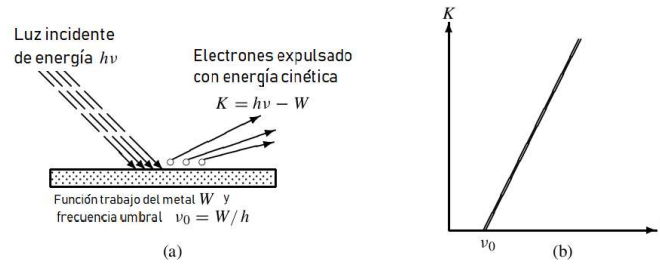


FIGURA 3.1. (a) Efecto fotoeléctrico: cuando un metal se irradia con luz, los electrones pueden emitirse. (b) Energía cinética K del electrón que sale del metal cuando se irradia con una luz de frecuencia ν ; cuando $\nu < \nu_0$ no se expulsa ningún electrón del metal, independientemente de la intensidad de la radiación. Fuente [33]

fotoeléctrico (cátodo) que se coloca al lado de un ánodo dentro de un tubo de vidrio evacuado. Cuando la luz incide en la superficie del cátodo, los electrones expulsados serán atraídos hacia el ánodo, generando así una corriente fotoeléctrica. Se encontró que la magnitud de la corriente fotoeléctrica así generada es proporcional a la intensidad de la radiación incidente, sin embargo, la velocidad de los electrones no depende de la intensidad de la radiación, sino de su frecuencia. Para medir la energía cinética de los electrones, simplemente necesitamos usar una fuente de voltaje variable y revertir los terminales. Cuando se invierte el potencial V a través del tubo, se evitará que los electrones liberados alcancen el ánodo; sólo aquellos electrones con energía cinética mayor que $e|V|$ llegarán a la placa negativa y contribuirán a la corriente. Variamos V hasta que alcanza un valor V_s , llamado potencial de parada, en el que todos los electrones, incluso los más energéticos, se rechazarán antes de llegar al colector; De ahí que el flujo de corriente fotoeléctrica cese por completo. El potencial de parada V_s está conectado a la energía cinética de los electrones mediante $e|V_s| = \frac{1}{2}m_e v^2 = K$ (en lo que sigue, V_s denotará implícitamente $|V_s|$). Así, la relación (3.1.2) se convierte en $e|V_s| = h\nu - W$,

$$V_s = \frac{h}{e}\nu - \frac{W}{e} = \frac{hc}{e\lambda} - \frac{W}{e}. \quad (3.1.3)$$

La forma de la gráfica de V_s contra la frecuencia es una línea recta, muy similar a la Figura 3.1(b) con la pendiente dada ahora por $\frac{h}{e}$. Esto muestra que el potencial de parada depende linealmente de la frecuencia de la radiación incidente.

Millikan, en 1916, dio una confirmación experimental sistemática de la teoría fotoeléctrica de Einstein. Produjo una extensa colección de datos fotoeléctricos utilizando varios metales. Verificó que la relación de Einstein (3.1.3) reproducía sus datos exactamente. Además, Millikan descubrió que el valor empírico para \hbar , que obtuvo al medir la pendiente $\frac{h}{e}$ de (3.1.3) y Figura 3.1(b), es igual a la constante de Planck con un error experimental de 0% a 5%.

Otro avance se debió a Niels Bohr. Justo después del descubrimiento experimental de Rutherford del núcleo atómico en 1911, y combinando el modelo atómico de Rutherford, el concepto cuántico de Planck y los fotones de Einstein, Bohr presentó en 1913 su modelo del átomo de hidrógeno. En este trabajo, argumentó que los átomos pueden encontrarse sólo en estados discretos de energía y que la interacción de los átomos con la radiación i.e. la

emisión o absorción de radiación por los átomos, tiene lugar sólo en cantidades discretas de $h\nu$ porque es el resultado de las transiciones del átomo entre sus diversos estados de energía discreta. Este trabajo proporcionó una explicación satisfactoria a varios importantes sobresalientes, como la estabilidad atómica y la espectroscopia atómica.

En 1923 Compton hizo un descubrimiento importante que dio la confirmación más concluyente del aspecto corpuscular de la luz. Al dispersar los rayos X con electrones, confirmó que los fotones de rayos X se comportan como partículas con un momento de $\frac{h\nu}{c}$, siendo ν la frecuencia de los rayos X y c la velocidad de la luz.

Esta serie de avances, debida a Planck, Einstein, Bohr y Compton, brindó los fundamentos teóricos y la confirmación experimental concluyente del aspecto corpuscular de las ondas i.e. el concepto de que las ondas exhiben un comportamiento de partículas a escala microscópica. A esta escala, la física clásica falla no sólo cuantitativamente sino también cualitativamente y conceptualmente.

Como si las cosas no fueran lo suficientemente malas para la física clásica, de Broglie introdujo en 1923 otro poderoso concepto nuevo que la física clásica no podía reconciliar: postuló que la radiación no sólo muestra un comportamiento similar a las partículas sino que, por lo contrario, las partículas materiales en sí mismas muestran un comportamiento de onda. Este concepto fue confirmado experimentalmente en 1927 por Davisson y Germer; quienes demostraron que los patrones de interferencia, una propiedad de las ondas, se pueden obtener con partículas materiales como los electrones.

Aunque el modelo de Bohr para el átomo produjo resultados que concuerdan bien con la espectroscopia experimental, fue criticado por carecer de los ingredientes de una teoría. Al igual que el esquema de “cuantificación” introducido por Planck en 1900, los postulados y supuestos adoptados por Bohr en 1913 fueron bastante arbitrarios y no se basan en los primeros principios de una teoría. Fue la insatisfacción con la naturaleza arbitraria de la idea de Planck y los postulados de Bohr, así como la necesidad de encajarlos en el contexto de una teoría coherente, lo que llevó a Heisenberg y Schrödinger a buscar una base teórica subyacente a estas nuevas ideas. En 1925, sus esfuerzos dieron frutos, combinaron hábilmente los diversos hallazgos experimentales y los postulados de Bohr en un modelo matemático refinado. La mecánica cuántica además de proporcionar una reproducción precisa de los datos experimentales existentes, resultó tener un poder de predicción asombrosamente confiable que le permitió explorar y desentrañar muchas áreas inexploradas del mundo microfísico. Esta nueva teoría había puesto fin a veinticinco años (1900-1925) de mosaico dominado por las ideas de Planck y Bohr, y que más tarde se conoció como la vieja teoría cuántica.

Históricamente, hubo dos formulaciones independientes de la mecánica cuántica.

- 1.º **Mecánica matricial** fue desarrollada por Heisenberg (1925) para describir la estructura atómica a partir de las líneas espectrales observadas. Inspirado por la cuantización de las ondas de Planck y por el modelo de Bohr del átomo de hidrógeno, Heisenberg fundó su teoría en la idea de que los únicos valores permitidos de intercambio de energía entre sistemas microfísicos son aquellos que son cuantos discretos. Al expresar cantidades dinámicas como energía, posición, momento lineal y momento angular en

términos de matrices, obtuvo un problema de valor propio que describe la dinámica de los sistemas microscópicos. La diagonalización de la matriz Hamiltoniana produce el espectro de energía y los vectores de estado del sistema. La mecánica matricial tuvo mucho éxito al explicar los cuantos discretos de luz emitidos y absorbidos por los átomos.

- 2.º **Mecánica de ondas** desarrollada por Schrödinger (1926). Es una generalización del postulado de Broglie. Este método, más intuitivo que el discreto, describe la dinámica de la materia microscópica mediante una ecuación de onda, denominada ecuación de Schrödinger. En lugar del problema del valor propio de la matriz de Heisenberg, Schrödinger obtuvo una ecuación diferencial. Las soluciones de esta ecuación producen el espectro de energía y la función de onda del sistema en cuestión. En 1927, Max Born propuso su interpretación probabilística de la mecánica de onda: tomó los módulos cuadrados de las funciones de onda que son soluciones a la ecuación de Schrödinger y las interpretó como densidades de probabilidad.

Estas dos formulaciones en principio diferentes son equivalentes. Luego Dirac sugirió una formulación más general de la mecánica cuántica que trata con objetos abstractos como kets, bras y operadores.

Combinando la relatividad especial con la mecánica cuántica, Dirac formuló en 1928 una ecuación que describe el movimiento de los electrones. Esta ecuación, conocida como la ecuación de Dirac, predijo la existencia de una antipartícula, el positrón, que tiene propiedades similares al electrón, pero de carga opuesta; el positrón fue descubierto en 1932, cuatro años después de su predicción por la mecánica cuántica.

En esta sección vamos a estudiar las propiedades de las partículas y las ondas en los contextos de la física clásica y la mecánica cuántica. La configuración experimental para estudiar estos aspectos es el experimento de doble rendija, que consiste en una fuente S (S puede ser una fuente de partículas de materia o de ondas), una pared con dos rendijas S_1 y S_2 , y una pantalla trasera equipada con contadores que registran lo que llega de las rendijas.

3.1.1. Visión clásica de partículas y ondas

En la física clásica, las partículas y las ondas se excluyen mutuamente porque exhiben comportamientos completamente diferentes. La descripción completa de una partícula requiere sólo un parámetro, el vector de posición mientras que la descripción completa de una onda requiere dos parámetros la amplitud y la fase.

(a) S es una fuente que dispara balas

Consideraremos a S como una fuente que dispara balas, puesto que las balas son indestructibles y por lo tanto solo las paredes del experimento serán capaces de pararlas. Considere tres experimentos diferentes como se muestra en la Figura 3.2.

- 1.º Experimento: sólo la ranura S_1 está abierta, dejando I_1 ser la intensidad correspondiente recogida en la pantalla.
- 2.º Experimento: dejando I_2 ser la intensidad recogida en la pantalla cuando sólo S_2 está abierto.

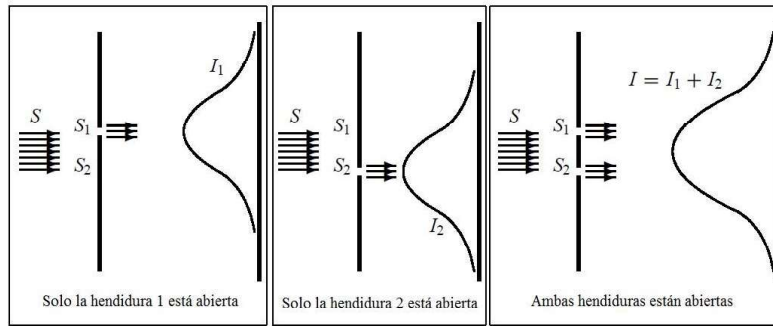


FIGURA 3.2. S dispara una corriente de balas (indestructibles) fuente [33].

3.º Experimento: si S_1 y S_2 están abiertos, la intensidad total recolectada en la pantalla detrás de las dos ranuras debe ser igual a $I = I_1 + I_2$.

(b) S es una fuente de ondas Ahora, como se muestra en la Figura 3.3, I_1 representa

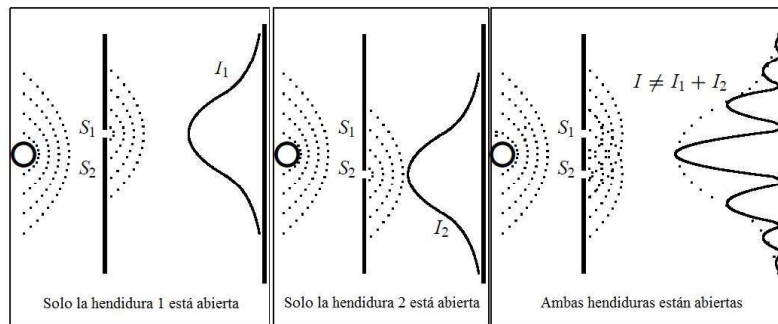


FIGURA 3.3. S es una fuente de ondas (e.g., ondas de luz o de agua). Fuente [33].

la intensidad recogida en la pantalla cuando sólo S_1 está abierto e I_2 la intensidad cuando sólo S_2 está abierto. Recuerde que una onda está representada por una función compleja Ψ , y su intensidad es proporcional a su amplitud (e.g. la altura del agua o el campo eléctrico al cuadrado) entonces

$$I_1 = |\Psi_1|^2 \quad \text{y} \quad I_2 = |\Psi_2|^2,$$

cuando ambas ranuras están abiertas, la intensidad total recogida en la pantalla muestra un patrón de interferencia, por lo tanto, no puede ser igual a la suma de I_1 y I_2 . Las amplitudes, no las intensidades, deben sumarse: la amplitud total Ψ es la suma de Ψ_1 y Ψ_2 , de ahí que la intensidad total esté dada por

$$\begin{aligned} I &= |\Psi_1 + \Psi_2|^2 \\ &= |\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2 + \overline{\Psi_1}\Psi_2 + \overline{\Psi_2}\Psi_1 \\ &= |\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2 + 2\Re(\overline{\Psi_1}\Psi_2). \end{aligned}$$

3.1.2. Visión cuántica de partículas y ondas

Discutamos ahora el experimento de la doble rendija con partículas de material cuántico como los electrones. Sean I_1 e I_2 las intensidades registradas en la pantalla cuando sólo S_1

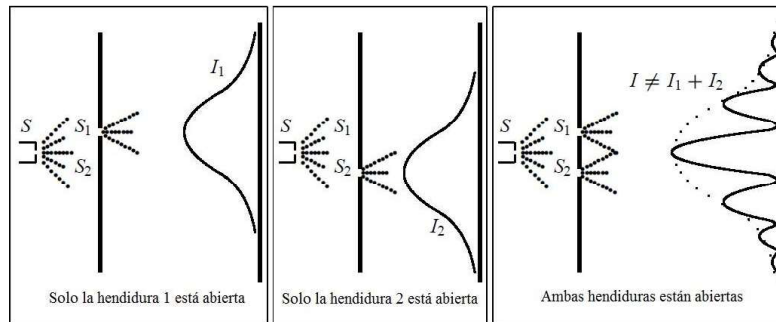


FIGURA 3.4. S es una fuente de electrones. Fuente [33].

está abierto, y luego cuando sólo S_2 está abierto, respectivamente. Cuando ambas ranuras están abiertas, la intensidad total es igual a la suma de I_1 , I_2 y un término oscilante. En los dos primeros casos, las distribuciones de los electrones en la pantalla son suaves (una función continua y derivable por lo menos una vez) la suma de estas distribuciones también es suave, una curva en forma de campana como la obtenida para partículas clásicas (ver Figura 3.2). Pero cuando ambas ranuras están abiertas, vemos una rápida variación en la distribución, un patrón de interferencia. Entonces, a pesar de su discreción, los electrones parecen interferir con ellos mismos; esto significa que cada electrón parece haber atravesado ambas rendijas a la vez. En este caso, si ambas ranuras estaban abiertas y si esperamos lo suficiente para que se recojan suficientes impactos en la pantalla, el patrón de interferencia vuelve a aparecer.

La pregunta crucial ahora es descubrir la rendija a través de la cual pasó el electrón. Para responder a esta consulta, se puede realizar un experimento para observar los electrones a medida que salen de las rendijas. Consiste en colocar una fuente de luz fuerte detrás de la pared que contiene las rendijas, como se muestra. Una fuente de luz se coloca detrás de la

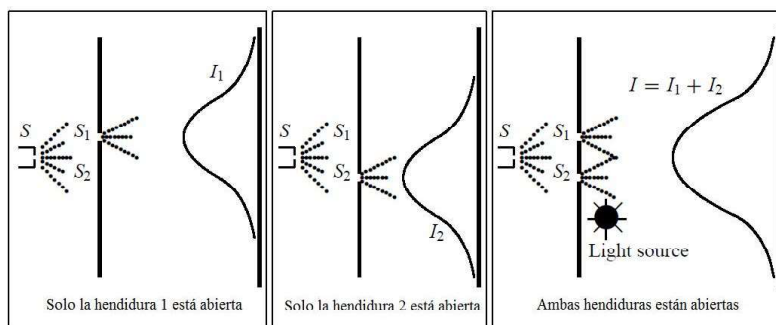


FIGURA 3.5. S es una fuente de electrones. Fuente [33].

pared que contiene S_1 y S_2 . Colocamos los contadores Geiger en toda la pantalla para que cada vez que un electrón llegue a la pantalla escuchemos un clic en el contador. Dado que las cargas eléctricas dispersan la luz, cada vez que un electrón pasa a través de cualquiera

de las rendijas, en su camino hacia el mostrador, dispersará la luz a nuestros ojos. Entonces, cuando escuchamos un clic en el contador, vemos un destello cerca de S_1 o S_2 pero nunca cerca de ambos a la vez. Después de registrar los diferentes conteos con ambas ranuras abiertas, descubrimos que la distribución es $I = I_1 + I_2$ similar a la de las balas clásicas en la 3.2 (el patrón de interferencia ha desaparecido). Pero si apagamos la fuente de luz, el patrón de interferencia vuelve a aparecer.

De este experimento llegamos a la conclusión de que el mero hecho de mirar los electrones afecta enormemente su distribución en la pantalla. Claramente, los electrones son muy delicados, i.e., su movimiento se modifica cuando uno los mira. Este es el principio de la mecánica cuántica que establece que *las mediciones interfieren con los estados de los objetos microscópicos*. Uno podría pensar en bajar el brillo (intensidad) de la fuente de luz para que sea lo suficientemente débil como para no perturbar los electrones. Encontramos que la luz dispersada por los electrones, a medida que pasan, no se debilita; Se ve el mismo tamaño de luz, pero sólo de vez en cuando. Esto significa que, a valores bajos de brillo, perturbamos algunos electrones: escuchamos el clic del contador pero no vemos ningún destello. A valores de brillo aún más bajos, perturbamos la mayoría de los electrones.

El patrón de interferencia obtenido a partir del experimento de doble rendija indica que los electrones muestran las propiedades de las partículas y las ondas. Cuando los electrones se observan o detectan uno por uno, se comportan como partículas, pero cuando se detectan después de muchas mediciones (se estudia la distribución de los electrones detectados) se comportan como ondas cuya longitud de onda es $\lambda = \frac{h}{p}$ y muestran un patrón de interferencia.

3.1.3. Principio de complementariedad (Dualidad onda-partícula)

Los diversos hallazgos como la radiación de cuerpo negro, efecto fotoeléctrico, efecto Compton, producción de pares y los experimentos de doble rendija revelan que los fotones, electrones y cualquier otra partícula microscópica se comporta de una manera diferente a las partículas y ondas “clásicas”. Estos hallazgos indican que, a escala microscópica, la naturaleza puede mostrar el comportamiento de partículas así como el comportamiento de ondas. Sin embargo, la teoría de la mecánica cuántica proporciona el marco adecuado para conciliar los aspectos de partículas y ondas de la materia mediante el uso de una función de onda $\Psi(x,t)$ para describir partículas materiales como los electrones.

Los sistemas microscópicos no son partículas puras ni ondas puras, son ambas cosas. Las manifestaciones de partículas y ondas no se contradicen ni se excluyen entre sí, sino que, como lo sugiere Bohr, son simplemente complementarias. Al ser características complementarias de la materia microscópica, las partículas y las ondas son igualmente importantes para una descripción completa de los sistemas cuánticos. Esta es la esencia del Principio de Complementariedad.

3.1.4. Principio de superposición lineal

El principio de superposición ofrece una explicación del patrón de interferencia en el experimento de doble rendija con los electrones. La interferencia resulta de la superposición de las ondas emitidas por las rendijas S_1 y S_2 . Si las funciones $\Psi_1(x,t)$ y $\Psi_2(x,t)$ denotan las

ondas que llegan a la pantalla, emitidas respectivamente por las ranuras S_1 y S_2 , representan dos estados físicamente posibles del sistema. Luego cualquier superposición lineal dada por

$$\Psi(x,t) = \alpha_1 \Psi_1(x,t) + \alpha_2 \Psi_2(x,t), \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C},$$

también representa un resultado físicamente posible del sistema. Este es el principio de superposición. La intensidad producida en la pantalla abriendo sólo la ranura S_1 es $|\Psi_1(x,t)|^2$ y es $|\Psi_2(x,t)|^2$ cuando sólo la hendidura S_2 está abierta. Cuando ambas ranuras están abiertas, la intensidad es

$$\begin{aligned} |\Psi(x,t)|^2 &= |\alpha_1 \Psi_1(x,t) + \alpha_2 \Psi_2(x,t)|^2 \\ &= |\alpha_1 \Psi_1(x,t)|^2 + |\alpha_2 \Psi_2(x,t)|^2 \\ &\quad + \overline{\alpha_1 \Psi_1(x,t)} \alpha_2 \Psi_2(x,t) + \overline{\alpha_2 \Psi_2(x,t)} \alpha_1 \Psi_1(x,t), \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

Tenga en cuenta que (3.1.4) no es igual a la suma de $|\Psi_1(x,t)|^2$ y $|\Psi_2(x,t)|^2$, pues contiene un término adicional

$$\overline{\alpha_1 \Psi_1(x,t)} \alpha_2 \Psi_2(x,t) + \overline{\alpha_2 \Psi_2(x,t)} \alpha_1 \Psi_1(x,t),$$

el cual describe, en el caso de los electrones, a un patrón de interferencia similar a las ondas de luz. Por lo tanto, el patrón de interferencia resulta de la existencia de un cambio de fase $\Psi_1(x,t)$ y $\Psi_2(x,t)$. Podemos medir este cambio de fase desde el patrón de interferencia, pero de ninguna manera podemos medir las fases de Ψ_1 y Ψ_2 por separado. Podemos resumir los resultados de la doble rendija en tres principios:

- intensidades añadidas para las partículas clásicas: $I = I_1 + I_2$;
- amplitudes, no intensidades, se suman para partículas cuánticas;

$$\Psi(x,t) = \alpha_1 \Psi_1(x,t) + \alpha_2 \Psi_2(x,t)$$

esto da lugar a la interferencia;

- cada vez que se intenta determinar experimentalmente el resultado de eventos individuales para partículas microscópicas de material (como intentar especificar la rendija a través de la cual ha pasado un electrón), el patrón de interferencia se destruye. En este caso, las intensidades se agregan de la misma manera que para las partículas clásicas:

$$I = I_1 + I_2.$$

3.1.5. Principio de incertidumbre de Heisenberg

De acuerdo con la física clásica, dadas condiciones iniciales y conocidas las fuerzas que actúan en un sistema, el comportamiento futuro de un sistema físico se determina únicamente por medio de la segunda Ley de Newton; en otras palabras, la física clásica es completamente determinista.

En su forma original, el principio de incertidumbre de Heisenberg dice que si la componente p del momento de una partícula se mide con una incertidumbre Δp_x , entonces su posición

x no puede, al mismo tiempo, medirse con mayor precisión que $\Delta x \Delta p_x = \frac{\hbar}{2}$. Este principio indica que, *aunque es posible medir el impulso Δp_x o la posición Δx de una partícula con precisión, no es posible medir estos dos observables simultáneamente con una precisión $\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$, i.e., no podemos localizar una partícula microscópica sin darle un impulso bastante grande.* No podemos medir la posición sin molestarla; no hay forma de realizar una medición de este tipo de forma pasiva, ya que está obligado a cambiar el impulso. Según la relación de de Broglie $p = \frac{h}{\lambda}$, el impulso de esta partícula será bastante alto. Formalmente, esto significa que si una partícula se localiza con precisión (es decir, $\Delta x \rightarrow 0$), habrá una incertidumbre total sobre su momento (es decir, $\Delta p_x \rightarrow \infty$). Para resumir, dado que todos los fenómenos cuánticos están descritos por ondas, no tenemos más remedio que aceptar límites en nuestra capacidad de medir simultáneamente dos variables complementarias.

El principio de incertidumbre de Heisenberg se puede generalizar a cualquier par de variables dinámicas complementarias: es imposible diseñar un experimento que pueda medir simultáneamente dos variables complementarias con precisión arbitraria (si esto se lograra alguna vez, la teoría de la mecánica cuántica colapsaría). Energía y tiempo, por ejemplo, forman un par de variables complementarias. Su medición simultánea debe obedecer a la relación de incertidumbre tiempo-energía:

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}.$$

Esta relación establece que si hacemos dos mediciones de la energía de un sistema y si estas mediciones están separadas por un intervalo de tiempo Δt , las energías medidas diferirán en una cantidad ΔE que no puede ser de ninguna manera menor que $\frac{\hbar}{\Delta t}$. Si el intervalo de tiempo entre las dos mediciones es grande, la diferencia de energía será pequeña. Esto se puede atribuir al hecho de que, cuando se realiza la primera medición, el sistema se perturba y le toma mucho tiempo regresar a su estado inicial, imperturbable. Esta expresión es particularmente útil en el estudio de los procesos de descomposición, ya que especifica la relación entre el tiempo de vida medio y la amplitud de energía de los estados excitados.

3.1.6. Principio de correspondencia

Debemos tener en cuenta que la física clásica funciona bastante bien en el ámbito del mundo macroscópico. Por lo tanto, la mecánica cuántica debe considerarse más general que la física clásica: debe producir resultados precisos no sólo en la escala microscópica, sino también en el límite clásico.

Para saber cuándo una descripción clásica es lo suficientemente buena o cuando una descripción cuántica se convierte en una necesidad, comparamos el tamaño de las cantidades del sistema que tienen las dimensiones de una acción con la constante de Planck, \hbar . Las relaciones cuánticas se caracterizan por \hbar , así podemos afirmar que si el valor de la acción de un sistema es demasiado grande en comparación con \hbar , este sistema puede describirse con precisión por medio de la física clásica. De lo contrario, el uso de una descripción cuántica se vuelve inevitable. Uno debe recordar que, para los sistemas microscópicos, el tamaño de las variables de acción es del orden de \hbar ; por ejemplo, el momento angular del átomo de hidrógeno es $L = n\hbar$, donde n es finito.

Otra forma equivalente de definir el límite clásico es por medio de la “longitud”. Desde $\lambda = \frac{\hbar}{p}$ el dominio clásico puede ser especificado por el límite $\lambda \rightarrow 0$. Esto significa que, cuando la longitud de onda de Broglie de un sistema es demasiado pequeña en comparación con su tamaño, el sistema puede describirse con precisión por medio de la física clásica.

Observación 3.1. El límite clásico puede ser descrito como el límite $\hbar \rightarrow 0$ o, equivalentemente, como el límite $\lambda \rightarrow 0$. En estos límites, intuitivamente los resultados de la mecánica cuántica deberían ser similares a los de la física clásica:

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} \text{mecánica cuántica} = \text{mecánica clásica}$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \text{mecánica cuántica} = \text{mecánica clásica.}$$

Entonces, en el límite de $\hbar \rightarrow 0$ o $\lambda \rightarrow 0$, las cantidades dinámicas cuánticas deben tener, según lo propuesto por Bohr, una correspondencia uno a uno con sus homólogos clásicos. Esta es la esencia del principio de correspondencia.

Para que el límite clásico la naturaleza probabilística de la mecánica cuántica se reconcilie con el determinismo de la mecánica clásica, las fluctuaciones cuánticas deben ser insignificantes cuando $\hbar \rightarrow 0$, porque el Principio de Incertidumbre de Heisenberg adquirirá el estatus de certeza, pues cuando $\hbar \rightarrow 0$, las fluctuaciones en la posición ($\Delta r \rightarrow 0$) y el impulso ($\Delta p \rightarrow 0$) desaparecerán. Por lo tanto, la posición y el momento pueden medirse simultáneamente con precisión arbitraria. Esto implica que las evaluaciones probabilísticas de las cantidades dinámicas por parte de la mecánica cuántica deben dar paso a cálculos exactos, entonces *para aquellos casos donde las variables de acción \hbar de un sistema, cuando $\hbar \rightarrow 0$ la mecánica cuántica da los mismos resultados que la mecánica clásica.*

3.2. Ecuación de Schrödinger

Para describir la dinámica de un sistema de N (e.g., $N = 10^{23}$) partículas sin espín (ignoramos su giro por el momento) se describe mediante una función de onda

$$\Psi(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^N, t \geq 0.$$

De acuerdo con la interpretación probabilística de Born, la cantidad $|\Psi(x, t)|^2 dx$ representa la probabilidad de encontrar la partícula en el tiempo t en un elemento de volumen dx . Por lo tanto, la probabilidad total de encontrar el sistema en algún lugar debe cumplir que

$$\forall t \geq 0: \quad \|\Psi(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)} = 1.$$

Una función de onda $\Psi(\cdot, t)$ que satisface esta relación se dice que está normalizada.

3.2.1. Ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo

La ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo para un sistema de N -partículas es

$$i\hbar\Psi_t(x, t) = \hat{H}\Psi(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^N, t \geq 0, \quad (3.2.5)$$

donde \hat{H} es el Hamiltoniano de una partícula con potencial dependiente del tiempo,

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + \hat{V}(x,t), \quad (3.2.6)$$

donde Δ es el operador Laplaciano, m la masa de la partícula y V el operador correspondiente a la energía potencial total (V representa todas las formas de interacciones, internas y externas, i.e., las interacciones mutuas entre las distintas partículas del sistema y las interacciones de las partículas con el mundo exterior).

3.2.2. Ecuación de Schrödinger no dependiente del tiempo

La función de onda de un sistema de N partículas que se mueven en un potencial independiente del tiempo pueden escribirse como un producto de componentes espaciales y de tiempo

$$\Psi(x,t) := \psi(x) \cdot \exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right), \quad x \in \mathbb{R}^N, t \geq 0 \quad (3.2.7)$$

donde E es la energía total del sistema y $\psi(\cdot)$ es la solución a la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo

$$\tilde{H}\psi(x) = E\psi(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (3.2.8)$$

donde \tilde{H} con el Hamiltoniano de una partícula con potencial independiente del tiempo

$$\tilde{H} := -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + \hat{V}(x). \quad (3.2.9)$$

3.3. Postulados de la mecánica cuántica

El formalismo de la mecánica cuántica se basa en varios postulados que se basan a su vez en una amplia gama de observaciones experimentales. Estos postulados no pueden ser derivados y representan el conjunto mínimo de supuestos necesarios para desarrollar la mecánica cuántica. Para descubrir la validez de estos postulados debemos recurrir a la Matemática (puesto que esta es una ciencia formal y exacta) sobre la cual se basan estos postulados. Estos postulados se dividen en dos categorías:

- Los primeros cuatro describen el sistema en un momento dado.
- El quinto muestra cómo el sistema evoluciona en el tiempo.

Postulado 3.1 (El vector de estado). Todo estado posible de un sistema dado en mecánica cuántica corresponde a un espacio de Hilbert separable sobre el campo de número complejo el notamos por H . El estado de cualquier sistema físico y toda su información en el tiempo t se describe mediante un vector de estado $\Psi(\cdot, t) \in H$, el cual se denomina vector de estado dependiente del tiempo del sistema.

Si $\{\Psi_k(\cdot, t)\}_{k=1}^n \subseteq H$, entonces por el principio de superposición se tiene que

$$\hat{\Psi}(x,t) := \sum_{k=1}^n \alpha_k \Psi_k(x,t), \quad \{\alpha_k\}_{k=1}^n \subseteq \mathbb{C},$$

también es un estado válido que pertenece a H . además si $\{\Psi_k(x,t)\}_{k=1}^n$ forma una base ortonormal se cumple la Identidad de Parseval

$$\|\hat{\Psi}(x,t)\|_H^2 = \sum_{k=1}^n |\alpha_k|^2.$$

Postulado 3.2 (Operadores observables y sus valores). Un observable físico es una variable dinámica denotada como B , que puede ser medida. A todos los observables físicos en la mecánica cuántica le corresponde un operador lineal Hermitiano denotado como \hat{B} en un espacio de Hilbert H , $\{\psi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ es una base asociada al observable y con los valores propios correspondientes $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de manera que

$$\hat{B}(\psi_k) = \lambda_k \psi_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Inversamente, a cada uno de dichos operadores en el espacio de Hilbert le corresponde algún observable físico.

Observables	Cantidades clásicas	Operador cuánticos
Posición	x o r	\hat{x} o \hat{r}
Momento lineal	p	$\hat{p} = -i\hbar\nabla$
Energía cinética	$T = \frac{p^2}{2m}$	$\hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta$
Hamiltoniano	$H(x,p) = \frac{p^2}{2m} + V(x,t)$	$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\hat{x},t)$
Momento angular	$L = x \times p$	$\hat{L} = -i\hbar\hat{x} \times \nabla$

CUADRO 3.1. Ejemplos de observables. Fuente [10].

Postulado 3.3 (Principio de Correspondencia). Un operador observable cuántico correspondiente a una variable dinámica se obtiene reemplazando la variable canónica en mecánica clásica por el operador mecánico cuántico correspondiente.

En general, cualquier función $f(x,p)$ observable, que depende de las variables de posición x y momento p se puede convertir en un operador correspondiente reemplazando x y p con sus correspondientes operadores.

Postulado 3.4 (Resultado de la medición cuántica). Si un operador observable \hat{B} que tiene vectores propios $\{\psi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ con sus correspondientes valores propios $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, entonces la probabilidad de que la medición produzca el valor propio λ_k del sistema en el estado normalizado $\psi(x)$ es

$$P_\psi(\lambda_k) := \left| (\psi_k, \psi)_{L^2(\mathbb{R}^N)} \right|^2.$$

Postulado 3.5. Para cada sistema físico existe un operador lineal Hermitiano \hat{H} , el llamado operador Hamiltoniano que representa el operador observable correspondiente a la energía total del vector de estado del sistema. Si un sistema físico no es perturbado por ningún experimento, el operador Hamiltoniano \hat{H} determina el desarrollo del tiempo del vector de estado del sistema $\Psi(x,t)$ a través de la ecuación diferencial parcial

$$i\hbar\Psi_t(x,t) = \hat{H}\Psi(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^N, t \geq 0.$$

Capítulo 4

RESULTADOS

4.1. Preliminares

La ecuación de Schrödinger típica es

$$i\hbar\Psi_t(x,t) + \frac{\hbar^2}{2}\Delta\Psi(x,t) - V_0(x,t)\Psi(x,t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, t \geq 0, \quad (\text{ESch})$$

donde \hbar denota la constante de Planck reducida, i es la unidad imaginaria, V_0 es un potencial, Δ denota el operador Laplaciano

$$\Delta := \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_k^2},$$

y Ψ es la función de onda. En este capítulo estudiamos la siguiente versión no-lineal de (ESch),

$$i\hbar\Psi_t(x,t) + \frac{\hbar^2}{2}\Delta\Psi(x,t) - V_0(x)\Psi(x,t) + |\Psi(x,t)|^{p-1}\Psi(x,t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, t \geq 0, \quad (\text{ENSch})$$

donde $p > 1$. La ecuación (ENSch) permite describir algunos fenómenos que aparecen en la naturaleza; por ejemplo, grupos de partículas idénticas que interactúan entre sí en estados ultrafríos, como en el caso de los condensados de Bose-Einstein.

En particular, cuando el potencial V_0 depende sólo de la variable espacial, se pueden buscar soluciones del tipo onda viajera,

$$\Psi(x,t) = \exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right) \cdot v(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, t \geq 0, \quad (4.1.1)$$

donde la función v representa a la onda estacionaria.

Si reemplazamos (4.1.1) en (ENSch) veremos que debe cumplirse que

$$\varepsilon^2 \Delta v(x) - V(x)v(x) + |v(x)|^{p-1}v(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (\text{P})$$

donde

$$\varepsilon^2 := \frac{\hbar^2}{2} \quad \text{y} \quad V(x) := V_0(x) - E.$$

Para nuestro estudio usaremos el método asintótico conocido como mecánica semiclásica que, a su vez, está fundamentado en el Principio de Correspondencia que fue brevemente explicado en el Capítulo 3. Esto corresponde a estudiar la existencia y comportamiento de soluciones cuando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Concretamente nos interesa el problema

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \Delta v(x) - V(x)v(x) + |v(x)|^{p-1}v(x) = 0, & x \in \mathbb{R}^N, \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} v(x) = 0, \end{cases} \quad (\text{P}_\varepsilon)$$

donde $p > 1$ y el potencial V satisface

(V1) $V \in C(\mathbb{R}^N)$ no-negativa.

(V2)

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = \infty.$$

(V3) El conjunto de ceros del potencial V es no-vacío, i.e.,

$$\Omega := \{x \in \mathbb{R}^N \mid V(x) = 0\} \neq \emptyset.$$

Byeon y Wang, [5], consideran los siguientes casos:

Caso Plano: donde el interior de $\overline{\Omega}$ no es vacío, i.e., $\text{int}(\overline{\Omega}) \neq \emptyset$.

Caso Finito: cuando Ω se reduce a un número finito de puntos y el potencial V se comporta como un polinomio en su cercanía.

Caso Infinito: en el cual Ω se reduce a un número finito de puntos y el potencial V decrece exponencialmente en su cercanía.

Como se comentó en el Capítulo 1, cada uno de los casos tiene asociado un problema límite, cuando ε se aproxima a cero. Estudiaremos de manera cualitativa el comportamiento de (P_ε) en el caso unidimensional, i.e., $N = 1$, enfocándonos en el Caso Finito. Específicamente para el presente trabajo consideramos las siguientes condiciones para el potencial V :

(P1)

$$\Omega = \{x_0\},$$

(P2)

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\} : V(x) > 0,$$

(P3)

$$\forall x \in \mathbb{R} : V(x + x_0) = P(x) + Q(x),$$

donde P es una función positiva m -homogénea y Q es tal que

$$\lim_{|x| \rightarrow 0} |x|^{-m} |Q(x)| = 0.$$

Lema 4.1. Sea $\varepsilon > 0$. Para todo $\alpha > 1$, existe $\delta_\alpha > 0$ tal que para todo $|x| \leq \delta_\alpha$ se cumple que

$$\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) P(x) \leq P(x) + \varepsilon^{-\frac{2m}{m+2}} Q\left(\varepsilon^{\frac{2}{m+2}} x\right) \leq \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) P(x).$$

Demostración. Sea $\alpha > 1$, genérico. Puesto que

$$\lim_{|x| \rightarrow 0} |x|^{-m} |Q(x)| = 0,$$

que existe $\delta_\alpha > 0$ tal que para $x \in (-\delta_\alpha, \delta_\alpha) \setminus \{0\}$ se tiene que

$$\left| \varepsilon^{\frac{2}{m+2}} x \right|^{-m} \left| Q \left(\varepsilon^{\frac{2}{m+2}} x \right) \right| \leq \frac{1}{\alpha} \inf_{|z|=1} P(z),$$

de manera que

$$-\frac{1}{\alpha} \inf_{|z|=1} P(z) |x|^m \leq \varepsilon^{-\frac{2m}{m+2}} Q \left(\varepsilon^{\frac{2}{m+2}} x \right) \leq \frac{1}{\alpha} \inf_{|z|=1} P(z) |x|^m,$$

o, equivalentemente,

$$-\frac{1}{\alpha} P(z) |x|^m \leq \varepsilon^{-\frac{2m}{m+2}} Q \left(\varepsilon^{\frac{2}{m+2}} x \right) \leq \frac{1}{\alpha} P(z) |x|^m, \quad \forall |z| = 1.$$

Por tanto, para $z := \frac{x}{|x|}$ por la m -homogeneidad de P :

$$-\frac{1}{\alpha} P(x) \leq \varepsilon^{-\frac{2m}{m+2}} Q \left(\varepsilon^{\frac{2}{m+2}} x \right) \leq \frac{1}{\alpha} P(x).$$

Si sumamos $P(x)$ a las últimas desigualdades, concluimos con la demostración. \square

Observación 4.1. Como se muestra en [5] para el Caso Finito, el problema límite $\varepsilon \rightarrow 0$ es

$$\begin{cases} u''(x) - P(x)u(x) + |u(x)|^{p-1}u(x) = 0, & x \in (-\delta_\alpha, \delta_\alpha), \\ u(-\delta_\alpha) = u(\delta_\alpha) = 0. \end{cases} \quad (\text{P}_Y)$$

Observación 4.2. En [5] se demuestra que una solución no-negativa de mínima energía para (P_ε) converge, vía un escalamiento, a una solución no negativa de menor energía para (P_Y) . Además, mostraron que las soluciones de menor energía para (P_ε) se concentran en $(-\delta_\alpha, \delta_\alpha)$, al demostrar su decaimiento exponencial fuera de $(-\delta_\alpha, \delta_\alpha)$. Esta variación en el comportamiento cualitativo llevó a Byeon y Wang, [5], denominar a este caso como crítico.

Como se comenta en [15], para el Caso Plano el problema (P_ε) tiene un número infinito de soluciones débiles que presentan el mismo fenómeno de concentración que la solución encontrada en [5]. De hecho como veremos más adelante la aplicación de la teoría Ljusternik-Schnirelman para funciones uniformes da la existencia de infinitas soluciones. También para nuestro caso es natural entonces preguntarse cuál es la relación entre las soluciones de (P_ε) y las de (P_Y) . En este trabajo damos una respuesta a esta pregunta. Probamos que (P_ε) tiene infinitas soluciones de tipo Ljusternik-Schnirelman, cuyos valores críticos convergen a los de (P_Y) . Además, demostramos que estas soluciones se concentran en $(-\delta_\alpha, \delta_\alpha)$.

Antes de presentar nuestros resultados es necesario establecer algunas herramientas. El espacio vectorial donde buscaremos soluciones débiles de (P_ε) es

$$\text{H}_\varepsilon := \{w \in \text{H}_0^1(\mathbb{R}) \mid \|w\|_\varepsilon < \infty\},$$

donde

$$\|w\|_{\varepsilon} := \sqrt{\int_{\mathbb{R}} \left[|w'(x)|^2 + V_{\varepsilon}(x)w^2(x) \right] dx},$$

y

$$V_{\varepsilon}(x) := P(x) + \varepsilon^{-\frac{2m}{m+2}} Q\left(\varepsilon^{\frac{2}{m+2}}x\right), \quad \varepsilon > 0.$$

Observación 4.3. Puesto que P es una función m -homogénea, para cada $x \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$ se tiene que

$$\begin{aligned} V_{\varepsilon}(x) &= P(x) + \varepsilon^{-\frac{2m}{m+2}} Q\left(\varepsilon^{\frac{2}{m+2}}x\right) \\ &= \varepsilon^{-\frac{2m}{m+2}} \left(\varepsilon^{\frac{2m}{m+2}} P(x) + Q\left(\varepsilon^{\frac{2}{m+2}}x\right) \right) \\ &= \varepsilon^{-\frac{2m}{m+2}} \left(P\left(\varepsilon^{\frac{2}{m+2}}x\right) + Q\left(\varepsilon^{\frac{2}{m+2}}x\right) \right) \\ &= \varepsilon^{-\frac{2m}{m+2}} V\left(\varepsilon^{\frac{2}{m+2}}x + x_0\right). \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

Proposición 4.1. *La forma*

$$(w, y)_{\varepsilon} := \int_{\mathbb{R}} \left[w'(x)y'(x) + V_{\varepsilon}(x)w(x)y(x) \right] dx, \quad (4.1.3)$$

define un producto escalar sobre \mathbf{H}_{ε} que induce la norma $\|\cdot\|_{\varepsilon}$.

Demostración. Esta demostración la dividimos en los siguientes pasos

i) Probaremos que

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall w, y, z \in \mathbf{H}_{\varepsilon} : \quad (\alpha w + z, y)_{\varepsilon} = \alpha (w, y)_{\varepsilon} + (z, y)_{\varepsilon}. \quad (4.1.4)$$

Sean $\alpha \in \mathbb{R}$ y $w, y, z \in \mathbf{H}_{\varepsilon}$, genéricos. Entonces

$$\begin{aligned} (\alpha w + z, y)_{\varepsilon} &= \int_{\mathbb{R}} \left[(\alpha w + z)'(x)y'(x) + V_{\varepsilon}(x)(\alpha w + z)(x)y(x) \right] dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left[(\alpha w'(x) + z'(x))y'(x) + V_{\varepsilon}(x)(\alpha w(x) + z(x))y(x) \right] dx \\ &= \alpha \int_{\mathbb{R}} \left[w'(x)y'(x) + V_{\varepsilon}(x)w(x)y(x) \right] dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} \left[z'(x)y'(x) + V_{\varepsilon}(x)z(x)y(x) \right] dx \\ &= \alpha (w, y)_{\varepsilon} + (z, y)_{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Puesto que α, w, z y y fueron elegidos arbitrariamente, se ha probado (4.1.4).

ii) Probaremos que

$$\forall w, y \in \mathbf{H}_{\varepsilon} : \quad (w, y)_{\varepsilon} = (y, w)_{\varepsilon}. \quad (4.1.5)$$

Sean $w, y \in \mathbf{H}_{\varepsilon}$, genéricos. Entonces

$$(w, y)_{\varepsilon} = \int_{\mathbb{R}} \left[w'(x)y'(x) + V_{\varepsilon}(x)w(x)y(x) \right] dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}} [y'(x)w'(x) + V_{\varepsilon}(x)y(x)w(x)] dx \\
&= (y, w)_{\varepsilon}.
\end{aligned}$$

Puesto que w y y fueron elegidos arbitrariamente, se ha probado (4.1.5). Por (4.1.4) y (4.1.5) la función (4.1.3) es bilineal.

iii) De la ecuación (4.1.2) concluimos que

$$V_{\varepsilon}(x) \geq 0,$$

que, a su vez, implica que

$$\forall w \in \mathbf{H}_{\varepsilon} : (w, w)_{\varepsilon} \geq 0. \quad (4.1.6)$$

iv) De la definición de $(w, w)_{\varepsilon}$ y de (4.1.6) se sigue $(w, w)_{\varepsilon} = 0$ ssi $w = 0$.

□

Como veremos en la Sección 4.2, el siguiente conjunto es una variedad de Nehari cerrada de clase C^1

$$\mathcal{M}_{\varepsilon} := \left\{ w \in \mathbf{H}_{\varepsilon} \mid \|w\|_{L^{p+1}(\mathbb{R})} = 1 \right\} = L_{\varepsilon}^{-1}(0), \quad (4.1.7)$$

donde

$$\begin{aligned}
L_{\varepsilon} : \mathbf{H}_{\varepsilon} &\rightarrow \mathbb{R} \\
w &\mapsto L_{\varepsilon}(w) = \frac{\|w\|_{L^{p+1}(\mathbb{R})}^{p+1} - 1}{p+1},
\end{aligned} \quad (4.1.8)$$

cuya derivada está dada por

$$\forall w, y \in \mathbf{H}_{\varepsilon} : \langle DL_{\varepsilon}(w), y \rangle = \int_{\mathbb{R}} w(x) |w(x)|^{p-1} y(x) dx.$$

Asociado a (P_{ε}) consideramos el funcional

$$\begin{aligned}
J_{\varepsilon} : \mathcal{M}_{\varepsilon} &\rightarrow \mathbb{R} \\
w &\mapsto J_{\varepsilon}(w) := \frac{1}{2} \|w\|_{\varepsilon}^2 = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left[|w(x)|^2 + V_{\varepsilon} w^2(x) \right] dx.
\end{aligned}$$

Como veremos, los puntos críticos de J_{ε} sobre $\mathcal{M}_{\varepsilon}$ son soluciones débiles de (P_{ε}) .

Definamos el espacio funcional, donde buscaremos las soluciones débiles del problema (P_Y) . Para $\delta > 0$ denotaremos al espacio vectorial

$$\mathbf{H}_P(-\delta, \delta) := \left\{ w \in \mathbf{H}_0^1(-\delta, \delta) \mid \|w\|_{P, \delta} < \infty \right\},$$

donde

$$\|w\|_{P, \delta} := \sqrt{\int_{(-\delta, \delta)} \left[|w'(x)|^2 + P(x)w^2(x) \right] dx}.$$

Proposición 4.2. Dada $\delta > 0$. La forma

$$(w, y)_{P, \delta} := \int_{(-\delta, \delta)} [w'(x)y'(x) + P(x)w(x)y(x)] dx, \quad (4.1.9)$$

define un producto escalar sobre $\mathbf{H}_P(-\delta, \delta)$ que induce la norma $\|\cdot\|_{P, \delta}$.

Demostración. La siguiente demostración la dividimos en las siguientes partes.

i) Probaremos que

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall w, y, z \in \mathbf{H}_P(-\delta, \delta) : (\alpha w + z, y)_{P, \delta} = \alpha (w, y)_{P, \delta} + (z, y)_{P, \delta}. \quad (4.1.10)$$

Sean $\alpha \in \mathbb{R}$ y $w, y, z \in \mathbf{H}_P(-\delta, \delta)$, genéricos. Entonces

$$\begin{aligned} (\alpha w + z, y)_{P, \delta} &= \int_{(-\delta, \delta)} [(\alpha w + z)'(x)y'(x) + P(x)(\alpha w + z)(x)y(x)] dx \\ &= \int_{(-\delta, \delta)} [(\alpha w'(x) + z'(x))y'(x) + P(x)(\alpha w(x) + z(x))y(x)] dx \\ &= \alpha \int_{(-\delta, \delta)} [w'(x)y'(x) + P(x)w(x)y(x)] dx \\ &\quad + \int_{(-\delta, \delta)} [z'(x)y'(x) + P(x)z(x)y(x)] dx \\ &= \alpha (w, y)_{P, \delta} + (z, y)_{P, \delta}. \end{aligned}$$

Puesto que α, w, z y y fueron elegidos arbitrariamente, se ha probado (4.1.10).

ii) Probaremos que

$$\forall w, y \in \mathbf{H}_P(-\delta, \delta) : (w, y)_{P, \delta} = (y, w)_{P, \delta}. \quad (4.1.11)$$

Sean $w, y \in \mathbf{H}_P(-\delta, \delta)$, genéricos. Entonces

$$\begin{aligned} (w, y)_{P, \delta} &= \int_{(-\delta, \delta)} [w'(x)y'(x) + P(x)w(x)y(x)] dx \\ &= \int_{(-\delta, \delta)} [y'(x)w'(x) + P(x)y(x)w(x)] dx \\ &= (y, w)_{P, \delta}. \end{aligned}$$

Puesto que w y y fueron elegidos arbitrariamente, se ha probado (4.1.11). Por (4.1.10) y (4.1.11) la función (4.1.9) es bilineal.

iii) De la definición de P es una función m -homogénea concluimos

$$P(x) \geq 0,$$

que a su vez implica que

$$\forall w \in \mathbf{H}_P(-\delta, \delta) : (w, w)_{P, \delta} \geq 0. \quad (4.1.12)$$

iv) De la definición de $(w, w)_{P, \delta}$ y de (4.1.12) se sigue $(w, w)_{P, \delta} = 0$ ssi $w = 0$.

□

Como veremos en la Sección 4.2, para $\delta > 0$, el siguiente conjunto es una variedad de Nehari cerrada de clase C^1

$$\mathcal{M}^\delta := \left\{ w \in \mathbf{H}_P(-\delta, \delta) \mid \|w\|_{L^{p+1}(-\delta, \delta)} = 1 \right\} = \left(L^\delta \right)^{-1}(0), \quad (4.1.13)$$

donde

$$\begin{aligned} L^\delta : \mathbf{H}_P(-\delta, \delta) &\rightarrow \mathbb{R} \\ w &\mapsto L^\delta(w) := \frac{\|w\|_{L^{p+1}(-\delta, \delta)}^{p+1} - 1}{p+1}, \end{aligned} \quad (4.1.14)$$

y cuya derivada está dada por

$$\forall w, y \in \mathbf{H}_P(-\delta, \delta) : \left\langle DL^\delta(w), y \right\rangle = \int_{(-\delta, \delta)} w(x) |w(x)|^{p-1} y(x) dx.$$

Consideramos el funcional

$$\begin{aligned} J^\delta : \mathcal{M}^\delta &\rightarrow \mathbb{R} \\ w &\mapsto J^\delta(w) := \frac{1}{2} \|w\|_{P, \delta}^2 = \frac{1}{2} \int_{(-\delta, \delta)} \left[|w'(x)|^2 + P(x)w^2(x) \right] dx. \end{aligned}$$

Observación 4.4. Sea $\alpha > 1$ y δ_α como en el Lema 4.1. Como veremos en la Sección 4.3 los puntos críticos de J^{δ_α} , serán soluciones del problema (P_Y) . En el presente contexto la ecuación límite, cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, para (P_ε) es (P_Y) .

Observación 4.5. Una familia de funciones $\{f_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$ se dice que sub-converge en un espacio métrico X , cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, si para cualquier sucesión $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ que converge a cero es posible tomar una subsucesión $(\varepsilon_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ tal que $(f_{\varepsilon_{n_i}})_{i \in \mathbb{N}}$ converge en X si $i \rightarrow \infty$.

Ahora presentamos los resultados en términos precisos.

Teorema 4.1. Sean $\alpha, p > 1$ y $\delta_\alpha > 0$ como en el Lema 4.1. Se cumplen los siguientes puntos

i) Dado $\varepsilon > 0$, el funcional J_ε posee un infinito número de puntos críticos

$$\{\hat{w}_{k, \varepsilon}\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}_\varepsilon.$$

ii) El funcional límite J^{δ_α} posee infinitos puntos críticos

$$\{\hat{w}_k^{\delta_\alpha}\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}^{\delta_\alpha}.$$

iii) Las funciones dadas por

$$v_{k, \varepsilon}(x) := \left(2\varepsilon^{\frac{2m}{m+2}} c_{k, \varepsilon} \right)^{\frac{1}{p-1}} \hat{w}_{k, \varepsilon} \left(\varepsilon^{-\frac{2}{m+2}} (x - x_0) \right),$$

donde

$$c_{k,\varepsilon} := J_\varepsilon(\hat{w}_{k,\varepsilon}),$$

son soluciones del problema (P_ε) .

iv) Dado $k \in \mathbb{N}$, para los valores críticos se cumple que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon(\hat{w}_{k,\varepsilon}) = \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) J^{\delta_\alpha}(\hat{w}_k^{\delta_\alpha}). \quad (4.1.15)$$

v) Dados $\delta, c > 0$ existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0): \quad |\hat{w}_{k,\varepsilon}(x)| < C \exp\left(-\frac{c}{\varepsilon^{\frac{m}{m+2}}} \cdot \text{dist}[x, (-\delta_\alpha - \delta, \delta_\alpha + \delta)]\right), \quad (4.1.16)$$

para algún $C > 0$.

vi) Las funciones $\hat{w}_{k,\varepsilon}$ verifican

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \max_{x \in \{-\delta_\alpha, \delta_\alpha\}} |\hat{w}_{k,\varepsilon}(x)| = 0. \quad (4.1.17)$$

vii) Para un $k \in \mathbb{N}$ fijo,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|v_{k,\varepsilon}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = 0; \quad (4.1.18)$$

y

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\|v_{k,\varepsilon}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}}{\varepsilon^{\frac{2m}{(p-1)(m+2)}}} > 0. \quad (4.1.19)$$

Observación 4.6. En el contexto del Teorema 4.1 (véase Sección 4.3), la función

$$w_{k,\varepsilon} := (2c_{k,\varepsilon})^{\frac{1}{p-1}} \hat{w}_{k,\varepsilon},$$

donde

$$c_{k,\varepsilon} := J_\varepsilon(\hat{w}_{k,\varepsilon}),$$

satisface la ecuación

$$\begin{cases} w''(x) - \left(P(x) + \varepsilon^{-\frac{2m}{m+2}} Q\left(\varepsilon^{\frac{2}{m+2}} x\right)\right) w(x) + |w(x)|^{p-1} w(x) = 0, & x \in \mathbb{R}, \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} w(x) = 0 \end{cases} \quad (P'_\varepsilon)$$

Probaremos que, para cada $k \in \mathbb{N}$ fijo, existe una subsucesión de $w_{k,\varepsilon}$ que subconverge a $(w_k^{\delta_\alpha})_{k \in \mathbb{N}}$ una solución de (P_Y) (véase Sección 4.6), cuando $\varepsilon \rightarrow 0$.

La situación descrita en el Teorema 4.1 corresponde a los mismos fenómenos que fueron discutidos en [5, Teorema 2.2].

4.2. Multiplicidad mediante un esquema tipo Ljusternik-Schnirelman

A mediados de los años 50 del siglo anterior Krasnoselski introdujo un invariante adecuado para tratar problemas con simetrías y que es una herramienta para buscar puntos críticos,

véase e.g. [1] y [29]. En esta sección, configuramos un esquema Ljusternik-Schnirelman. Para mejorar la exposición volvemos a presentar algunos conceptos, que fueron ya mencionados en el Capítulo 2.

Sea E un espacio de Banach, definimos el conjunto

$$\Sigma_E = \{A \subseteq E \mid A = \bar{A}, \quad A = -A, \quad \text{y} \quad 0 \notin A\}. \quad (4.2.20)$$

El género de Krasnoselski de $A \in \Sigma_E$, denotado $\gamma(A)$, es el menor número $n \in \mathbb{N}$ tal que existe

$$f \in C(A, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \text{ impar.}$$

Se dice que $\gamma(A) = +\infty$ si no hay números enteros con la propiedad anterior y $\gamma(\emptyset) = 0$.

El siguiente resultado es la herramienta principal para demostrar la existencia de multiplicidad de puntos críticos de los funcionales bajo estudio.

Teorema 4.2. Sean H un espacio de Hilbert, $\mathcal{M} \in \Sigma_H$ una variedad de clase C^1 y $J \in C^1(H, \mathbb{R})$ par. Supongamos que J satisface $(PS)_{\mathcal{M}}$ y $J|_{\mathcal{M}}$ y que está acotado inferiormente. Entonces

$$\gamma(\mathcal{M}) \leq \sum_{c \in \mathbb{R}} \gamma(K_c), \quad (4.2.21)$$

donde

$$K_c := \{u \in \mathcal{M} \mid J(u) = c \quad \text{y} \quad \nabla_{\mathcal{M}} J(u) = 0\}$$

de manera que J tiene al menos $\gamma(\mathcal{M})$ pares de puntos críticos u y $-u$ sobre \mathcal{M} . Además

$$\forall 1 \leq k \leq \dim(H) : \quad C_k(J) := \inf_{A \in \mathcal{A}_k(\mathcal{M})} \max_{u \in A} J(u),$$

donde $\dim(H)$ es la dimensión del espacio H y

$$\mathcal{A}_k(\mathcal{M}) := \{A \in \Sigma_H \cap \mathcal{M} \mid \gamma(A) \geq k\},$$

donde

$$\Sigma_H \cap \mathcal{M} := \{\mathcal{B} \cap \mathcal{M} \mid \mathcal{B} \in \Sigma_H\}.$$

Para una demostración de este Teorema se presenta en el Capítulo 2.

Lema 4.2. Suponga que $Z \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo abierto y acotado. La siguiente inyección es compacta

$$H_P(Z) \subseteq C(\bar{Z}). \quad (4.2.22)$$

Demostración. Para hacer esta demostración la dividiremos en dos pasos:

- i) Probaremos que primero la inyección de (4.2.22). Sea $w \in H_P(Z)$, genérico. Entonces por el Teorema de Rellich-Kondrachov y la desigualdad de Poincaré existe una $C_Z > 0$ tal que

$$\|u\|_{C(\bar{Z})} \leq C \|w\|_{H^1(Z)} \leq C_Z \|w\|_{H_0^1(Z)} \leq C_Z \|w\|_{P,Z}$$

esto muestra la inyección de (4.2.22).

ii) Ahora probaremos la compacidad de la inyección (4.2.22). Sea \mathcal{F} la bola unidad de $H_p(Z)$. Consideramos el operador extensión \tilde{P} del Teorema 2.14 y la desigualdad de Poincaré. Por lo tanto existe una $C_Z^1 > 0$ tal que, para todo $u \in \mathcal{F}$, tenemos

$$\left\| \tilde{P}u \right\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq C_Z \|u\|_{H^1(Z)} \leq C_Z^1 \|w\|_{H_0^1(Z)} \leq C_Z^1 \|w\|_{P,Z} \leq C_Z^1. \quad (4.2.23)$$

Por otro lado, por el Teorema de Morrey tenemos que existe una $C > 0$ tal que

$$\forall u \in \mathcal{F} : \quad \left| \tilde{P}u(x) - \tilde{P}u(y) \right| \leq C|x-y|^\alpha \left\| \tilde{P}u \right\|_{H^1(\mathbb{R})}, \quad (4.2.24)$$

donde $\alpha := \frac{1}{2}$. Usando (4.2.23) y (4.2.24), encontramos que

$$\forall u \in \mathcal{F} : \quad \left| \tilde{P}u(x) - \tilde{P}u(y) \right| \leq C_Z^2 |x-y|^\alpha, \quad (4.2.25)$$

por lo tanto, por la propiedad (E.1), revisar Teorema 2.14, del operador extensión \tilde{P} junto con (4.2.26) nos conduce a que para todo $x, y \in Z$

$$\forall u \in \mathcal{F} : \quad |u(x) - u(y)| \leq C_Z^2 |x-y|^\alpha. \quad (4.2.26)$$

Por lo tanto,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta := \left(\frac{\varepsilon}{C_Z^2} \right)^2, \forall u \in \mathcal{F} : \quad |x-y| < \delta \Rightarrow |u(x) - u(y)| \leq \varepsilon. \quad (4.2.27)$$

Por último, el punto (4.2.27) prueba la hipótesis para aplicar el Teorema de Ascoli-Arzelá, con lo que concluimos la inyección compacta de (4.2.22). □

En una versión más general, el siguiente resultado está establecido en [13], [15] y [27].

Lema 4.3. *Las siguientes inyecciones son compactas para*

$$\forall 1 \leq q \leq \infty : \quad H_p(\mathbb{R}) \subseteq L^q(\mathbb{R}),$$

y

$$\forall 1 \leq q \leq \infty : \quad H_\varepsilon \subseteq L^q(\mathbb{R}).$$

4.2.1. Variedades de Nehari

En esta sección demostraremos que existe un número infinito de soluciones débiles para los problemas (P_ε) y (P_Y) haciendo uso del Teorema 2.21. Denotaremos, en el contexto de (2.8.38):

$$\Sigma_\varepsilon := \Sigma_{H_\varepsilon} \quad \text{y} \quad \Sigma^\delta := \Sigma_{H_p(-\delta, \delta)}.$$

Demostraremos que

$$\mathcal{M}_\varepsilon \in \Sigma_\varepsilon \quad \text{y} \quad \mathcal{M}^\delta \in \Sigma^\delta.$$

donde $\delta > 0$. Esto nos ayudará a garantizar la existencia de infinitas soluciones de (P_ε) y (P_Y) .

Lema 4.4. Sea $\delta > 0$ el conjunto \mathcal{M}^δ es cerrado en el espacio $\mathbf{H}_P(-\delta, \delta)$.

Demostración. Probaremos que

$$\forall u \in \overline{\mathcal{M}^\delta} : \|u\|_{L^{p+1}(-\delta, \delta)} = 1. \quad (4.2.28)$$

Sea $u \in \overline{\mathcal{M}^\delta}$, genérico. Por lo tanto, existe una sucesión $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}^\delta$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u - u_k\|_{P, \delta} = 0. \quad (4.2.29)$$

El Lema 4.2 implica que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u - u_k\|_{L^{p+1}(-\delta, \delta)} = 0, \quad (4.2.30)$$

Por (4.2.30), la continuidad de la norma $\|\cdot\|_{L^{p+1}(-\delta, \delta)}$ y $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}^\delta$, concluimos que

$$\|u\|_{L^{p+1}(-\delta, \delta)} = 1.$$

□

Lema 4.5. El conjunto \mathcal{M}^δ es simétrico y el vector 0 no pertenece al conjunto \mathcal{M}^δ .

Demostración. Esta demostración la dividimos en dos puntos:

i) Probaremos que

$$\mathcal{M}^\delta = -\mathcal{M}^\delta. \quad (4.2.31)$$

Por como está definido el conjunto \mathcal{M}^δ tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^\delta &= \left\{ w \in \mathbf{H}_P(-\delta, \delta) : \|w\|_{L^{p+1}(-\delta, \delta)} = 1 \right\} \\ &= \left\{ -w \in \mathbf{H}_P(-\delta, \delta) : \|-w\|_{L^{p+1}(-\delta, \delta)} = 1 \right\} \\ &= \left\{ -w \in \mathbf{H}_P(-\delta, \delta) : \|w\|_{L^{p+1}(-\delta, \delta)} = 1 \right\} \\ &= -\left\{ w \in \mathbf{H}_P(-\delta, \delta) : \|w\|_{L^{p+1}(-\delta, \delta)} = 1 \right\} \\ &= -\mathcal{M}^\delta. \end{aligned}$$

Concluimos que el conjunto \mathcal{M}^δ es simétrico

ii) Observamos que $0 \notin \mathcal{M}^\delta$, puesto que

$$\|u\|_{L^{p+1}(-\delta, \delta)} = 0 \Leftrightarrow u = 0.$$

□

Observación 4.7. Los lemas 4.4 y 4.5 demuestran que

$$\forall \delta > 0 : \mathcal{M}^\delta \in \Sigma^\delta.$$

Lema 4.6. El conjunto \mathcal{M}_ε es cerrado en el espacio \mathbf{H}_ε .

Demostración. Probaremos que

$$\forall u \in \overline{\mathcal{M}_\varepsilon} : \|u\|_{L^{p+1}(\mathbb{R})} = 1. \quad (4.2.32)$$

Sea $u \in \overline{\mathcal{M}_\varepsilon}$, genérico. Por lo tanto, existe una sucesión $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}_\varepsilon$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u - u_k\|_\varepsilon = 0. \quad (4.2.33)$$

El Lema 4.3 implica que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u - u_k\|_{L^{p+1}(\mathbb{R})} = 0. \quad (4.2.34)$$

Por (4.2.34), la continuidad de la norma $\|\cdot\|_{L^{p+1}(\mathbb{R})}$ y $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}_\varepsilon$ concluimos que

$$\|u\|_{L^{p+1}(\mathbb{R})} = 1.$$

□

Lema 4.7. *El conjunto \mathcal{M}_ε es simétrico y el vector 0 no pertenece al conjunto \mathcal{M}_ε .*

Demostración. Esta demostración la dividimos en dos puntos:

i) Probaremos que

$$\mathcal{M}_\varepsilon = -\mathcal{M}_\varepsilon. \quad (4.2.35)$$

Por como esta definido el conjunto \mathcal{M}_ε tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_\varepsilon &= \left\{ w \in \mathbf{H}_\varepsilon : \|w\|_{L^{p+1}(\mathbb{R})} = 1 \right\} \\ &= \left\{ -w \in \mathbf{H}_\varepsilon : \|-w\|_{L^{p+1}(\mathbb{R})} = 1 \right\} \\ &= \left\{ -w \in \mathbf{H}_\varepsilon : \|w\|_{L^{p+1}(\mathbb{R})} = 1 \right\} \\ &= - \left\{ w \in \mathbf{H}_\varepsilon : \|w\|_{L^{p+1}(\mathbb{R})} = 1 \right\} \\ &= -\mathcal{M}_\varepsilon. \end{aligned}$$

Concluimos que el conjunto \mathcal{M}_ε es simétrico.

ii) Notemos que $0 \notin \mathcal{M}_\varepsilon$, puesto que

$$\|u\|_{L^{p+1}(\mathbb{R})} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = 0.$$

□

Observación 4.8. Los Lemas 4.6 y 4.7 demuestran que

$$\mathcal{M}_\varepsilon \in \Sigma_\varepsilon.$$

Por último es necesario ver que \mathcal{M}^δ es una variedad de clase C^1 de $\mathbf{H}_p(-\delta, \delta)$. El siguiente lema muestra que $L^\delta \in C(\mathbf{H}_p(-\delta, \delta), \mathbb{R})$.

Lema 4.8. *El funcional L^δ es continuo.*

Demostración. Sea $u \in H_P(-\delta, \delta)$ y una sucesión $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq H_P(-\delta, \delta)$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k - u\|_{P, \delta} = 0, \quad (4.2.36)$$

entonces demostraremos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |L^\delta(u_k) - L^\delta(u)| = 0. \quad (4.2.37)$$

Por el Lema 4.2 tenemos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u - u_k\|_{L^{p+1}(-\delta, \delta)} = 0, \quad (4.2.38)$$

por lo tanto la sucesión $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es acotada, i.e.,

$$\exists C > 0, \forall k \in \mathbb{N}: \|u_k\|_{L^{p+1}(-\delta, \delta)} \leq C. \quad (4.2.39)$$

Usando el Teorema del Valor Medio, la continuidad de la norma $\|\cdot\|_{L^{p+1}(-\delta, \delta)}$ y (4.2.39) tenemos la siguiente desigualdad

$$|L^\delta(u_k) - L^\delta(u)| \leq C^p \left| \|u_k\|_{L^{p+1}(-\delta, \delta)} - \|u\|_{L^{p+1}(-\delta, \delta)} \right| \leq C^p \|u_k - u\|_{L^{p+1}(-\delta, \delta)}. \quad (4.2.40)$$

Usando (4.2.38) en (4.2.40) concluimos (4.2.37). \square

Lema 4.9. *El funcional L_ε es continuo.*

Demostración. Sea $u \in H_\varepsilon$ y una sucesión $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq H_\varepsilon$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k - u\|_\varepsilon = 0, \quad (4.2.41)$$

entonces demostraremos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |L_\varepsilon(u_k) - L_\varepsilon(u)| = 0. \quad (4.2.42)$$

Por el Lema 4.3 tenemos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u - u_k\|_{L^{p+1}(\mathbb{R})} = 0, \quad (4.2.43)$$

por lo tanto la sucesión $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es acotada, i.e.,

$$\exists C > 0, \forall k \in \mathbb{N}: \|u_k\|_{L^{p+1}(\mathbb{R})} \leq C. \quad (4.2.44)$$

Usando el Teorema del Valor Medio, la continuidad de la norma $\|\cdot\|_{L^{p+1}(\mathbb{R})}$ y (4.2.44) tenemos la siguiente desigualdad

$$|L_\varepsilon(u_k) - L_\varepsilon(u)| \leq C^p \left| \|u_k\|_{L^{p+1}(\mathbb{R})} - \|u\|_{L^{p+1}(\mathbb{R})} \right| \leq C^p \|u_k - u\|_{L^{p+1}(\mathbb{R})}. \quad (4.2.45)$$

Usando (4.2.43) en (4.2.45) concluimos (4.2.42). \square

El siguiente lema nos asegura que $L^\delta \in C^1(\mathbf{H}_P(-\delta, \delta), \mathbb{R})$, i.e.,

$$DL^\delta \in C(\mathbf{H}_P(-\delta, \delta), (\mathbf{H}_P(-\delta, \delta))^*)$$

Lema 4.10. Dado $p > 1$. La función $DL^\delta : \mathbf{H}_P(-\delta, \delta) \rightarrow (\mathbf{H}_P(-\delta, \delta))^*$ tal que

$$\forall u, v \in \mathbf{H}_P(-\delta, \delta) : \quad \langle DL^\delta(u), v \rangle := \int_{(-\delta, \delta)} u(x) |u(x)|^{p-1} v(x) dx, \quad p > 1,$$

es continua en la topología fuerte.

Demostración. Esta demostración la dividimos en cuatro puntos.

i) Demostraremos que la función DL^δ esta bien definida, i.e.,

$$\forall u \in \mathbf{H}_P(-\delta, \delta) : \quad \left\| DL^\delta(u) \right\|_{(\mathbf{H}_P(-\delta, \delta))^*} < \infty.$$

Sean $u, v \in \mathbf{H}_P(-\delta, \delta)$ por la desigualdad de Hölder y el Lema 4.2 tenemos

$$\left| \langle DL^\delta(u), v \rangle \right| \leq \|v\|_{L^{p+1}(-\delta, \delta)} \|u\|_{L^{p+1}(-\delta, \delta)}^p \leq C_1 \|v\|_{P, \delta} \|u\|_{L^{p+1}(-\delta, \delta)}^p,$$

esto prueba que

$$\left\| DL^\delta(u) \right\|_{(\mathbf{H}_P(-\delta, \delta))^*} \leq C_1 \|u\|_{L^{p+1}(-\delta, \delta)}^p \leq C_2 \|u\|_{P, \delta}^p < \infty,$$

con esto concluimos que la función DL^δ esta bien definida.

ii) Probaremos que

$$\forall u, w \in \mathbf{H}_P(-\delta, \delta), \exists C_{u,w} > 0 : \quad \left\| DL^\delta(w) - DL^\delta(u) \right\|_{(\mathbf{H}_P(-\delta, \delta))^*} \leq C.$$

Sean $u, v, w \in \mathbf{H}_P(-\delta, \delta)$, genéricos. Por el Lema 4.2 se tiene que

$$\begin{aligned} \left| \langle DL^\delta(w) - DL^\delta(u), v \rangle \right| &= \left| \int_{(-\delta, \delta)} (w|w|^{p-1} - u|u|^{p-1}) v dx \right| \\ &\leq \int_{(-\delta, \delta)} \left| (w|w|^{p-1} - u|u|^{p-1}) v \right| dx \\ &\leq \|v\|_{C([-\delta, \delta])} \int_{(-\delta, \delta)} \left| w|w|^{p-1} - u|u|^{p-1} \right| dx \\ &\leq C \|v\|_{P, \delta} \int_{(-\delta, \delta)} \left| w|w|^{p-1} - u|u|^{p-1} \right| dx, \end{aligned} \quad (4.2.46)$$

para algún $C > 0$. Ahora por la desigualdad (4.2.46) concluimos que

$$\left\| DL^\delta(w) - DL^\delta(u) \right\|_{(\mathbf{H}_P(-\delta, \delta))^*} \leq C_{u,w}, \quad (4.2.47)$$

donde

$$C_{u,w} := C \int_{(-\delta, \delta)} \left| w|w|^{p-1} - u|u|^{p-1} \right| dx.$$

iii) Sean $u \in \mathbf{H}_P(-\delta, \delta)$ y $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbf{H}_P(-\delta, \delta)$ tales que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k - u\|_{P, \delta} = 0. \quad (4.2.48)$$

Probaremos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| DL^\delta(u_k) - DL^\delta(u) \right\|_{(\mathbf{H}_P(-\delta, \delta))^*} = 0, \quad (4.2.49)$$

Primero definimos los conjuntos

$$A_k := \{x \in (-\delta, \delta) \mid u_k(x) \cdot u(x) \geq 0\} \quad \text{y} \quad B_k := (-\delta, \delta) \setminus A_k,$$

entonces notemos que

$$\begin{aligned} \int_{(-\delta, \delta)} |u_k |u_k|^{p-1} - u |u|^{p-1}|(x) dx &= \int_{A_k} ||u_k|^p - |u|^p|(x) dx \\ &\quad + \int_{B_k} ||u_k|^p + |u|^p|(x) dx. \end{aligned} \quad (4.2.50)$$

Procederemos a calcular cada integral por separado. Por el Lema 4.2 y la continuidad de la norma concluimos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k\|_{C([-\delta, \delta])} = \|u\|_{C([-\delta, \delta])}. \quad (4.2.51)$$

por lo tanto existe una $C^1 > 0$ tal que

$$\forall k \in \mathbb{N} : \quad \|u_k\|_{C([-\delta, \delta])} \leq C^1$$

y por el Teorema del Valor Medio se sigue que

$$\int_{A_k} ||u_k|^p - |u|^p| dx \leq C^1 \int_{(-\delta, \delta)} |u_k - u| dx \leq C^1 \|u_k - u\|_{L^1(-\delta, \delta)}, \quad (4.2.52)$$

mientras que

$$\int_{B_k} ||u_k|^p + |u|^p| dx \leq \| |u_k|^p + |u|^p \|_{C([-\delta, \delta])} |B_k|. \quad (4.2.53)$$

Ahora usando el Lema 4.2 junto con (4.2.48), concluimos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k - u\|_{L^1(-\delta, \delta)} = 0, \quad (4.2.54)$$

y

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |B_k| = 0. \quad (4.2.55)$$

Por lo tanto, usando (4.2.54) y (4.2.55) junto con (4.2.52) y (4.2.53), respectivamente, tenemos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{A_k} ||u_k|^p - |u|^p| dx = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{B_k} ||u_k|^p + |u|^p| dx = 0,$$

Usando estos límites junto con (4.2.50) tenemos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{(-\delta, \delta)} |u_k |u_k|^{p-1} - u |u|^{p-1}| dx = 0.$$

usando este límite junto con la desigualdad (4.2.47), concluimos (4.2.49).

iv) Para terminar esta demostración probaremos que efectivamente se cumple (4.2.55), i.e.,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall k > N \quad |B_k| < \varepsilon.$$

Sea $\varepsilon > 0$, genérico. Por el Lema 4.2 junto con (4.2.48) concluimos que existe una $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall k > N : \left| \left\{ x \in (-\delta, \delta) \mid |u_k(x) - u(x)| > \|u_k - u\|_{L^\infty(-\delta, \delta)} \right\} \right| = 0.$$

Ahora, usando esta desigualdad notamos que para todo $k > N$

$$\begin{aligned} |B_k| &= |\{x \in (-\delta, \delta) \mid |u_k(x) - u(x)| > 0\}| \\ &\leq \sum_{k > N} \left| \left\{ x \in (-\delta, \delta) \mid |u_k(x) - u(x)| > \|u_k - u\|_{L^\infty(-\delta, \delta)} \right\} \right| = 0 < \varepsilon, \end{aligned}$$

puesto que el ε fue tomado arbitrariamente concluimos con la demostración. □

El siguiente lema nos asegura que $L_\varepsilon \in C^1(\mathbf{H}_\varepsilon, \mathbb{R})$, i.e.,

$$DL_\varepsilon \in C(\mathbf{H}_\varepsilon, (\mathbf{H}_\varepsilon)^*)$$

Lema 4.11. Dado $p > 1$. La función $DL_\varepsilon : \mathbf{H}_\varepsilon \rightarrow (\mathbf{H}_\varepsilon)^*$ tal que

$$\forall u, v \in \mathbf{H}_\varepsilon : \langle DL_\varepsilon(u), v \rangle := \int_{\mathbb{R}} u(x) |u(x)|^{p-1} v(x) dx, \quad p > 1,$$

es continua en la topología fuerte.

Demostración. Esta demostración la dividimos en tres puntos. El punto i) demostramos que DL_ε esta bien definido, por otro lado, el punto ii) nos da una cota que no nos ayudara a calcular para el punto iii), por último con el punto iv) sobre una herramienta que se usa en el punto iii).

i) Demostraremos que la función DL_ε está bien definida, i.e.,

$$\forall u \in \mathbf{H}_\varepsilon : \|DL_\varepsilon(u)\|_{(\mathbf{H}_\varepsilon)^*} < \infty.$$

Sean $u, v \in \mathbf{H}_\varepsilon$ por la desigualdad de Hölder y el Lema 4.3 tenemos

$$|\langle DL_\varepsilon(u), v \rangle| \leq \|v\|_{L^{p+1}(\mathbb{R})} \|u\|_{L^{p+1}(\mathbb{R})}^p \leq C^1 \|v\|_\varepsilon \|u\|_{L^{p+1}(\mathbb{R})}^p,$$

esto prueba que

$$\|DL_\varepsilon(u)\|_{(\mathbf{H}_\varepsilon)^*} \leq C^1 \|u\|_{L^{p+1}(\mathbb{R})}^p \leq C^2 \|u\|_\varepsilon^p < \infty,$$

con esto concluimos que la función DL_ε está bien definida.

ii) Probaremos que

$$\forall u, w \in \mathbf{H}_p(-\delta, \delta), \exists C_{u,w} > 0 : \quad \left\| DL_\varepsilon(w) - DL^\delta(u) \right\|_{(\mathbf{H}_\varepsilon)^*} \leq C_{u,w}.$$

Sean $u, v, w \in \mathbf{H}_p(-\delta, \delta)$, genéricos. Por el Lema 4.3 se tiene que

$$\begin{aligned} |\langle DL_\varepsilon(w) - DL_\varepsilon(u), v \rangle| &= \left| \int_{\mathbb{R}} \left(w|w|^{p-1} - u|u|^{p-1} \right) v dx \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \left| \left(w|w|^{p-1} - u|u|^{p-1} \right) v \right| dx \\ &\leq \|v\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \int_{\mathbb{R}} \left| w|w|^{p-1} - u|u|^{p-1} \right| dx \\ &\leq C \|v\|_\varepsilon \int_{\mathbb{R}} \left| w|w|^{p-1} - u|u|^{p-1} \right| dx, \end{aligned} \quad (4.2.56)$$

para algún $C > 0$. Ahora, por la desigualdad (4.2.56), concluimos que

$$\|DL_\varepsilon(w) - DL_\varepsilon(u)\|_{(\mathbf{H}_p(-\delta, \delta))^*} \leq C_{u,w}, \quad (4.2.57)$$

donde

$$C_{u,w} := C \int_{\mathbb{R}} \left| w|w|^{p-1} - u|u|^{p-1} \right| dx.$$

iii) Sean $u \in \mathbf{H}_\varepsilon$ y una sucesión $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbf{H}_\varepsilon$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k - u\|_\varepsilon = 0, \quad (4.2.58)$$

probaremos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|DL_\varepsilon(u_k) - DL_\varepsilon(u)\|_{(\mathbf{H}_\varepsilon)^*} = 0. \quad (4.2.59)$$

Definimos los conjuntos

$$A_k := \{x \in \mathbb{R} \mid u_k(x) \cdot u(x) \geq 0\} \quad \text{y} \quad B_k := \mathbb{R} \setminus A_k,$$

entonces notemos que

$$\int_{\mathbb{R}} \left| u_k |u_k|^{p-1} - u |u|^{p-1} \right| dx = \int_{A_k} \left| |u_k|^p - |u|^p \right| dx + \int_{B_k} \left(|u_k|^p + |u|^p \right) dx. \quad (4.2.60)$$

Procederemos a calcular cada integral por separado. Por el Lema 4.2 y la continuidad de la norma concluimos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})}. \quad (4.2.61)$$

Por lo tanto, existe una $C^1 > 0$ tal que

$$\forall k \in \mathbb{N} : \quad \|u_k\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C^1$$

y por el Teorema del Valor Medio se sigue que

$$\int_{A_k} ||u_k|^p - |u|^p| dx \leq C^1 \int_{\mathbb{R}} |u_k - u| dx \leq C^1 \|u_k - u\|_{L^1(-\delta, \delta)}, \quad (4.2.62)$$

mientras que

$$\int_{B_k} ||u_k|^p + |u|^p| dx \leq \| |u_k|^p + |u|^p \|_{C([- \delta, \delta])} |B_k|. \quad (4.2.63)$$

Ahora usando el Lema 4.3 junto con (4.2.58), concluimos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k - u\|_{L^1(\mathbb{R})} = 0, \quad (4.2.64)$$

y

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |B_k| = 0. \quad (4.2.65)$$

Por lo tanto, usando (4.2.64) y (4.2.65) junto con (4.2.62) y (4.2.63), respectivamente, tenemos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{A_k} ||u_k|^p - |u|^p| dx = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{B_k} ||u_k|^p + |u|^p| dx = 0,$$

usando estos límites junto con (4.2.60) tenemos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} |u_k |u_k|^{p-1} - u |u|^{p-1}| dx = 0.$$

usando este límite junto con la desigualdad (4.2.57), concluimos (4.2.58).

iv) Para terminar esta demostración probaremos que efectivamente se cumple (4.2.65), i.e.,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall k > N \quad |B_k| < \varepsilon.$$

Sea $\varepsilon > 0$, genérico, por el Lema 4.3 junto con (4.2.58). Concluimos que existe una $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall k > N : \left| \left\{ x \in \mathbb{R} \mid |u_k(x) - u(x)| > \|u_k - u\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \right\} \right| = 0.$$

Ahora, usando esta desigualdad notamos que para todo $k > N$

$$\begin{aligned} |B_k| &= |\{x \in \mathbb{R} \mid |u_k(x) - u(x)| > 0\}| \\ &\leq \sum_{k > N} \left| \left\{ x \in \mathbb{R} \mid |u_k(x) - u(x)| > \|u_k - u\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \right\} \right| = 0 < \varepsilon, \end{aligned}$$

puesto que el ε fue tomado arbitrariamente concluimos con la demostración.

□

Observación 4.9. Por los Lemas 4.10 y 4.11 concluimos que los funcionales

$$L_\varepsilon \quad \text{y} \quad L^\delta,$$

son Fréchet diferenciables y, por lo tanto, las variedades

$$\mathcal{M}^\delta \quad \text{y} \quad \mathcal{M}_\varepsilon,$$

son de clase C^1 .

Proposición 4.3. *Para todo $\delta > 0$, existe $d > 0$ tal que*

$$\forall u \in \mathcal{M}^\delta : \quad 2J^\delta(u) = \|u\|_{P,\delta} \geq d.$$

Demostración. Sea $\delta > 0$, genérico. Por el Lema 4.2, para cada $p \geq 0$ existe $C_p > 0$ tal que

$$\forall u \in \mathbf{H}_P(-\delta, \delta) : \quad \|u\|_{L^{p+1}(-\delta, \delta)} \leq C_p \|u\|_{C([-\delta, \delta])} \leq C_p \|u\|_{P,\delta}$$

Por lo tanto, puesto que $u \in \mathcal{M}^\delta$, se tiene que

$$\forall u \in \mathcal{M}^\delta : \quad C^{-1} = \|u\|_{L^{p+1}(-\delta, \delta)} C_p^{-1} \leq \|u\|_{P,\delta} = \sqrt{2J^\delta(u)},$$

si definimos $d = C^{-2}$ concluimos la demostración. \square

Proposición 4.4. *Existe $h > 0$ tal que*

$$\forall u \in \mathcal{M}_\varepsilon : \quad 2J_\varepsilon(u) = \|u\|_\varepsilon \geq h.$$

Demostración. Por el Lema 4.3, para cada $p \geq 0$ existe $C_p > 0$ tal que

$$\forall u \in \mathbf{H}_\varepsilon : \quad \|u\|_{L^{p+1}(\mathbb{R})} \leq C_p \|u\|_\varepsilon$$

Por lo tanto, puesto que $u \in \mathcal{M}_\varepsilon$, se tiene que

$$\forall u \in \mathcal{M}_\varepsilon : \quad C_p^{-1} = \|u\|_{L^{p+1}(\mathbb{R})} C_p^{-1} \leq \|u\|_\varepsilon = \sqrt{2J_\varepsilon(u)},$$

si definimos $d = C_p^{-2}$ concluimos la demostración. \square

4.2.2. Condición de Palais-Smale

Para mejorar la exposición volvemos a presentar algunos conceptos que fueron ya mencionados en el Capítulo 2.

Sea \mathcal{M} una variedad de Hilbert de clase C^2 de un espacio de Hilbert \mathbf{H} y $J : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^2 y $D_{\mathcal{M}}J$ es la derivada de J sobre \mathcal{M} .

Una sucesión $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} D_{\mathcal{M}}J(u_k) = 0 \quad \equiv \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \nabla_{\mathcal{M}}J(u_k) = 0,$$

y para la cual

$$\exists C > 0, \forall k \in \mathbb{N} : \quad |J(u_k)| \leq C,$$

es llamada una sucesión Palais-Smale para J .

Sea $c \in \mathbb{R}$. Si

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J(u_k) = c,$$

y

$$\lim_{k \rightarrow \infty} D_{\mathcal{M}} J(u_k) = 0 \quad \equiv \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \nabla_{\mathcal{M}} J(u_k) = 0,$$

entonces la sucesión $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es llamada una sucesión Palais-Smale para J en el nivel c . En ese caso c se denomina un nivel de Palais-Smale para J .

Decimos que J satisface la condición de Palais-Smale, $(PS)_{\mathcal{M}}$, si toda sucesión de Palais-Smale para J posee una subsucesión convergente en H . Ahora diremos que J satisface la condición de Palais-Smale en el nivel $c \in \mathbb{R}$, $(PS)_{\mathcal{M},c}$, si toda sucesión de Palais-Smale en el nivel c tiene una subsucesión convergente en H .

Proposición 4.5. Para todo $\delta > 0$, J^δ satisface la condición de Palais-Smale sobre \mathcal{M}^δ .

Demostración. Sean $\delta > 0$ y $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}^\delta$, genéricos. Supongamos que

- i) $(J^\delta(u_k))_{k \in \mathbb{N}}$ es acotada, i.e., la sucesión $(\|u_k\|_{P,\delta}^2)_{k \in \mathbb{N}}$ es acotada; y
- ii) $\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| D_{\mathcal{M}^\delta} J^\delta(u_k) \right\|_{(H_P(-\delta, \delta))^*} = 0$.

Tenemos que probar que $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ posee una subsucesión convergente en $H_P(-\delta, \delta)$.

a) Probaremos que la sucesión $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ cumple

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\langle D_{\mathcal{M}^\delta} J^\delta(u_k), u_k \right\rangle = 0. \quad (4.2.66)$$

El literal ii) es la convergencia fuerte de $(D_{\mathcal{M}^\delta} J^\delta(u_k))_{k \in \mathbb{N}}$ en $H_P(-\delta, \delta)$; esto implica la convergencia débil de $(D_{\mathcal{M}^\delta} J^\delta(u_k))_{k \in \mathbb{N}}$ en $H_P(-\delta, \delta)$ por lo que concluimos (4.2.66).

b) Expresamos $DJ^\delta(u_k)$ como

$$DJ^\delta(u_k) = D_{\mathcal{M}^\delta} J^\delta(u_k) + t_k DL^\delta(u_k), \quad t_k \in \mathbb{R}, \quad (4.2.67)$$

donde t_k representan un multiplicador de Lagrange. Probaremos que la sucesión

$$(t_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$$

es acotada.

Si a (4.2.67) le hacemos producto dual con u_k , obtenemos

$$\begin{aligned} \left\langle D_{\mathcal{M}^\delta} J^\delta(u_k), u_k \right\rangle &= \left\langle DJ^\delta(u_k) - t_k DL^\delta(u_k), u_k \right\rangle \\ &= \|u_k\|_{P,\delta}^2 - t_k \left\langle DL^\delta(u_k), u_k \right\rangle \\ &= \|u_k\|_{P,\delta}^2 - t_k. \end{aligned} \quad (4.2.68)$$

Usando (4.2.66) en (4.2.68) concluimos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k\|_{P,\delta}^2 - t_k = 0,$$

por lo tanto la sucesión $(\|u_k\|_{P,\delta}^2 - t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es acotada y por i) la sucesión $(\|u_k\|_{P,\delta}^2)_{k \in \mathbb{N}}$ también es acotada, entonces concluimos que la sucesión $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es acotada.

c) Probemos ahora que $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ contiene una subsucesión que converge.

Puesto que la sucesión $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es acotada, por el Lema 4.2 se tiene que $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ contiene una subsucesión que converge débilmente (a la que seguimos denotando $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ para no complicar la notación) tal que

$$\begin{aligned} u_k &\rightharpoonup u \quad \text{débilmente en } H_P(-\delta, \delta), \\ u_k &\rightarrow u \quad \text{fuertemente en } C^1([-\delta, \delta]) \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \left| \langle DL^\delta(u_k), u_k - u \rangle \right| &= \left| \int_{(-\delta, \delta)} u_k |u_k|^{p-1} (u_k - u) dx \right| \\ &\leq \int_{(-\delta, \delta)} |u_k| |u_k|^{p-1} |u_k - u| dx \\ &\leq \|u_k - u\|_{C([-\delta, \delta])} \|u_k\|_{L^p(-\delta, \delta)}^p. \end{aligned} \quad (4.2.69)$$

Por la desigualdad (4.2.69) y la convergencia fuerte en $C([-\delta, \delta])$, concluimos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle DL^\delta(u_k), u_k - u \rangle = 0. \quad (4.2.70)$$

Por ii), b), (4.2.70) y (4.2.67) concluimos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle DJ^\delta(u_k), u_k - u \rangle = 0,$$

entonces por la convergencia débil en $H_P(-\delta, \delta)$ se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \langle DJ^\delta(u_k), u_k - u \rangle \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (u_k, u_k - u)_{P,\delta} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k\|_{P,\delta}^2 - \lim_{k \rightarrow \infty} (u_k, u)_{P,\delta} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k\|_{P,\delta}^2 - \|u\|_{P,\delta}^2. \end{aligned} \quad (4.2.71)$$

Por (4.2.71) y la Proposición 2.2 concluimos que $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ posee una subsucesión convergente en $H_P(-\delta, \delta)$.

□

Proposición 4.6. J_ε satisface la condición de Palais-Smale sobre \mathcal{M}_ε .

Demostración. Sean $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}_\varepsilon$, genéricos. Supongamos que

- i) $(J_\varepsilon(u_k))_{k \in \mathbb{N}}$ es acotada, i.e., la sucesión $(\|u_k\|_\varepsilon^2)_{k \in \mathbb{N}}$ es acotada; y
- ii) $\lim_{k \rightarrow \infty} \|D_{\mathcal{M}_\varepsilon} J_\varepsilon(u_k)\|_{(\mathbb{H}_\varepsilon)^*} = 0$.

Tenemos que probar que $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ posee una subsucesión convergente en \mathbb{H}_ε .

- a) Probaremos que la sucesión $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ cumple

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle D_{\mathcal{M}_\varepsilon} J_\varepsilon(u_k), u_k \rangle = 0. \quad (4.2.72)$$

El literal ii) es la convergencia fuerte de $(D_{\mathcal{M}_\varepsilon} J_\varepsilon(u_k))_{k \in \mathbb{N}}$ en \mathbb{H}_ε ; esto implica la convergencia débil de $(D_{\mathcal{M}_\varepsilon} J_\varepsilon(u_k))_{k \in \mathbb{N}}$ en \mathbb{H}_ε por lo que concluimos (4.2.72).

- b) Expresamos $DJ_\varepsilon(u_k)$ como

$$DJ_\varepsilon(u_k) = D_{\mathcal{M}_\varepsilon} J_\varepsilon(u_k) + t_k DL_\varepsilon(u_k), \quad t_k \in \mathbb{R}, \quad (4.2.73)$$

donde t_k representa un multiplicador de Lagrange. Probaremos que la sucesión

$$(t_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R},$$

es acotada.

Si a (4.2.73) le hacemos producto dual con u_k , obtenemos

$$\begin{aligned} \langle D_{\mathcal{M}_\varepsilon} J_\varepsilon(u_k), u_k \rangle &= \langle DJ_\varepsilon(u_k) - t_k DL_\varepsilon(u_k), u_k \rangle \\ &= \|u_k\|_\varepsilon^2 - t_k \langle DL_\varepsilon(u_k), u_k \rangle \\ &= \|u_k\|_\varepsilon^2 - t_k. \end{aligned} \quad (4.2.74)$$

Usando (4.2.72) en (4.2.74) concluimos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k\|_\varepsilon^2 - t_k = 0,$$

por lo tanto la sucesión $(\|u_k\|_\varepsilon^2 - t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es acotada y por i) la sucesión $(\|u_k\|_\varepsilon^2)_{k \in \mathbb{N}}$ también es acotada, entonces concluimos que la sucesión $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es acotada.

- c) Probemos ahora que $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ contiene una subsucesión que converge.

Puesto que la sucesión $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es acotada, por el Lema 4.3 se tiene que $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ contiene una subsucesión que converge débilmente (a la que seguimos denotando $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ para no complicar la notación) tal que para todo $1 \leq q \leq \infty$

$$\begin{aligned} u_k &\rightharpoonup u \quad \text{débilmente en } \mathbb{H}_\varepsilon, \\ u_k &\rightarrow u \quad \text{fuertemente en } L^q(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
|\langle DL_\varepsilon(u_k), u_k - u \rangle| &= \left| \int_{\mathbb{R}} u_k |u_k|^{p-1} (u_k - u) dx \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} |u_k| |u_k|^{p-1} |u_k - u| dx \\
&\leq \|u_k - u\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|u_k\|_{L^p(\mathbb{R})}^p.
\end{aligned} \tag{4.2.75}$$

Por la desigualdad (4.2.75) y la convergencia fuerte en $L^p(\mathbb{R})$, concluimos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle DL_\varepsilon(u_k), u_k - u \rangle = 0. \tag{4.2.76}$$

Por ii), b), (4.2.76) y (4.2.73) concluimos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle DJ_\varepsilon(u_k), u_k - u \rangle = 0,$$

entonces por la convergencia débil en $H_P(-\delta, \delta)$ se tiene que

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \langle DJ_\varepsilon(u_k), u_k - u \rangle \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} (u_k, u_k - u)_\varepsilon \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k\|_\varepsilon^2 - \lim_{k \rightarrow \infty} (u_k, u)_\varepsilon \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k\|_\varepsilon^2 - \|u\|_\varepsilon^2.
\end{aligned} \tag{4.2.77}$$

Por (4.2.77) y la Proposición 2.2 concluimos que $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ posee una subsucesión convergente en H_ε .

□

Teorema 4.3. Dado $\delta > 0$. El funcional $J^\delta : \mathcal{M}^\delta \rightarrow \mathbb{R}$ tiene una familia infinita de pares de puntos críticos $\{\hat{w}_k^\delta\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}^\delta$.

Demostración. Por la Observación 4.7 se tiene que $\mathcal{M}^\delta \in \Sigma^\delta$ es una variedad de clase C^1 de $H_P(-\delta, \delta)$ y que

$$\forall u \in H_P(-\delta, \delta) : J^\delta(u) = J^\delta(-u).$$

Las Proposiciones 4.3 y 4.5 aseguran que J^δ esta acotada inferiormente en \mathcal{M}^δ , además J^δ satisface la condición de Palais-Smale sobre \mathcal{M}^δ . Sea

$$S_{H_P(-\delta, \delta)} := \left\{ u \in H_P(-\delta, \delta) \mid \|u\|_{P, \delta} = 1 \right\},$$

la esfera unitaria. La función

$$\begin{aligned}
g : S_{H_P(-\delta, \delta)} &\rightarrow \mathcal{M}^\delta \\
u &\mapsto g(u) := \frac{u}{\|u\|_{L^{p+1}(-\delta, \delta)}},
\end{aligned}$$

es continua e impar. Usando el Corolario 2.1 y la monotonía del género, concluimos que

$$\infty = \gamma(S_{H_p(-\delta, \delta)}) \leq \gamma(\mathcal{M}^\delta).$$

El Teorema 4.2 asegura entonces que J^δ tiene una familia infinita de pares de puntos críticos

$$\{\hat{w}_k^\delta\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}^\delta.$$

□

Observación 4.10. Notaremos para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{A}_k^\delta := \mathcal{A}_k(\mathcal{M}^\delta) \quad \text{y} \quad c_k^\delta := C_k(J^\delta) = J^\delta(\hat{w}_k^\delta) > 0,$$

donde c_k^δ representan los valores críticos del funcional J^δ .

En nuestro estudio, sera conveniente tener un problema intermedio que es

$$\begin{cases} u''(x) - P(x)u(x) + |u(x)|^{p-1}u(x) = 0, & x \in (-\delta_\alpha - \delta, \delta_\alpha + \delta), \\ u(-\delta_\alpha - \delta) = u(\delta_\alpha + \delta) = 0. \end{cases} \quad (\mathbf{P}_F^\delta)$$

Asociado a (\mathbf{P}_F^δ) , consideramos el funcional $J^{\delta_\alpha + \delta}$.

Teorema 4.4. Sean $\alpha > 1$ y $\delta_\alpha > 0$ conforme al Lema 4.1 y $\delta > 0$. Los funcionales

$$J^{\delta_\alpha} : \mathcal{M}^{\delta_\alpha} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{y} \quad J^{\delta_\alpha + \delta} : \mathcal{M}^{\delta_\alpha + \delta} \rightarrow \mathbb{R}$$

asociados a los problemas (\mathbf{P}_Y) y (\mathbf{P}_F^δ) , respectivamente, tienen familias infinitas de pares de puntos críticos

$$\{\hat{w}_k^{\delta_\alpha}\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}^{\delta_\alpha} \quad \text{y} \quad \{\hat{w}_k^{\delta_\alpha + \delta}\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}^{\delta_\alpha + \delta}.$$

La demostración de este resultado lo sustenta el Teorema 4.3.

Teorema 4.5. El funcional $J_\varepsilon : \mathcal{M}_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}$ tiene una familia infinita de pares de puntos críticos $\{\hat{w}_{k,\varepsilon}\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}_\varepsilon$.

Demostración. Por la Observación 4.8 se tiene que $\mathcal{M}_\varepsilon \in \Sigma_\varepsilon$ es una variedad de clase C^1 de H_ε y que

$$\forall u \in H_\varepsilon : J_\varepsilon(u) = J_\varepsilon(-u).$$

Las Proposiciones 4.4 y 4.6 aseguran que J_ε esta acotada inferiormente en \mathcal{M}_ε , además J_ε satisface la condición de Palais-Smale sobre \mathcal{M}_ε . Sea

$$S_{H_\varepsilon} := \{u \in H_\varepsilon \mid \|u\|_\varepsilon = 1\},$$

la esfera unitaria. La función

$$g : S_{H_\varepsilon} \rightarrow \mathcal{M}_\varepsilon$$

$$u \mapsto g(u) := \frac{u}{\|u\|_{L^{p+1}(\mathbb{R})}},$$

es continua e impar. Usando el Corolario 2.1 y la monotonía del género, concluimos que

$$\infty = \gamma(\mathcal{S}_{H_\varepsilon}) \leq \gamma(\mathcal{M}_\varepsilon).$$

El Teorema 4.2 asegura entonces que J_ε tiene una familia infinita de pares de puntos críticos

$$\{\hat{w}_{k,\varepsilon}\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}_\varepsilon.$$

□

Observación 4.11. Asociado a (P_ε) tomamos, para cada $k \in \mathbb{N}$ y todo $\varepsilon > 0$,

$$\mathcal{A}_{k,\varepsilon} := \mathcal{A}_k(\mathcal{M}_\varepsilon) \quad \text{y} \quad c_{k,\varepsilon} := C_k(J_\varepsilon) = J_\varepsilon(\hat{w}_{k,\varepsilon}) > 0,$$

donde $c_{k,\varepsilon}$ representan los valores críticos del funcional J_ε .

4.3. Escalamiento de las soluciones

Lema 4.12. Sea $\delta > 0$. La función

$$w_k^\delta := \left(2c_k^\delta\right)^{\frac{1}{p-1}} \hat{w}_k^\delta \quad \text{y} \quad c_k^\delta = J^\delta(\hat{w}_k^\delta), \quad (4.3.78)$$

es una solución débil de

$$\begin{cases} u''(x) - P(x)u(x) + |u(x)|^{p-1}u(x) = 0, & x \in (-\delta, \delta), \\ u(-\delta) = u(\delta) = 0. \end{cases} \quad (P'_F)$$

Demostración. Probaremos que w_k^δ es solución débil de (P'_F) , i.e.,

$$\forall v \in H_0^1(-\delta, \delta): \int_{(-\delta, \delta)} \left[\left(w_k^\delta\right)' v' + P w_k^\delta v - \left|w_k^\delta\right|^{p-1} w_k^\delta v \right] dx = 0. \quad (4.3.79)$$

Usando (4.3.78) veremos que (4.3.79) equivale a

$$\forall v \in H_0^1(-\delta, \delta): \int_{(-\delta, \delta)} \left[\left(\hat{w}_k^\delta\right)' v' + P \hat{w}_k^\delta v - 2c_k^\delta \left|\hat{w}_k^\delta\right|^{p-1} \hat{w}_k^\delta v \right] dx = 0. \quad (4.3.80)$$

Ahora recordemos que \hat{w}_k^δ es un punto crítico del funcional $J^\delta : \mathcal{M}^\delta \rightarrow \mathbb{R}$. Por los multiplicadores de Lagrange, existe un parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que para todo $v \in H_0^1(-\delta, \delta)$

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle DJ^\delta(\hat{w}_k^\delta) - \lambda DL^\delta(\hat{w}_k^\delta), v \right\rangle \\ &= \int_{(-\delta, \delta)} \left[\left(\hat{w}_k^\delta\right)' v' + P \hat{w}_k^\delta v - \lambda \left|\hat{w}_k^\delta\right|^{p-1} \hat{w}_k^\delta v \right] dx. \end{aligned} \quad (4.3.81)$$

Para encontrar el valor de λ tomamos $v := \hat{w}_k^\delta$ en (4.3.81)

$$2J^\delta(\hat{w}_k^\delta) = \int_{(-\delta, \delta)} \left[\left| (\hat{w}_k^\delta)' \right|^2 + P(\hat{w}_k^\delta)^2 \right] dx = \lambda \int_{(-\delta, \delta)} \left| \hat{w}_k^\delta \right|^{p+1} dx = \lambda.$$

Con eso encontramos el valor de

$$\lambda = 2J^\delta(\hat{w}_k^\delta) = 2c_k^\delta,$$

con lo que podemos fijarnos que (4.3.81) es igual a (4.3.80). \square

Corolario 4.1. Las funciones $w_k^{\delta\alpha}$ y $w_k^{\delta\alpha+\delta}$ son soluciones débiles de (P_Y) y (P_F^δ) respectivamente.

Lema 4.13. La función

$$w_{k,\varepsilon} := (2c_{k,\varepsilon})^{\frac{1}{p-1}} \hat{w}_{k,\varepsilon}, \quad c_{k,\varepsilon} = J_\varepsilon(\hat{w}_{k,\varepsilon}), \quad (4.3.82)$$

es una solución débil de (P'_ε) .

Demostración. Probaremos que $w_{k,\varepsilon}$ es solución débil de (P'_ε) , i.e.,

$$\forall v \in H_0^1(\mathbb{R}) : \int_{\mathbb{R}} \left[(w_{k,\varepsilon})' v' + V_\varepsilon w_{k,\varepsilon} v - |w_{k,\varepsilon}|^{p-1} w_{k,\varepsilon} v \right] dx = 0. \quad (4.3.83)$$

Usando (4.3.82) veremos que (4.3.83) equivale a

$$\forall v \in H_0^1(\mathbb{R}) : \int_{\mathbb{R}} \left[(\hat{w}_{k,\varepsilon})' v' + V_\varepsilon \hat{w}_{k,\varepsilon} v - 2c_{k,\varepsilon} |\hat{w}_{k,\varepsilon}|^{p-1} \hat{w}_{k,\varepsilon} v \right] dx = 0. \quad (4.3.84)$$

Ahora recordemos que $\hat{w}_{k,\varepsilon}$ es un punto crítico del funcional $J_\varepsilon : \mathcal{M}_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}$. Por los multiplicadores de Lagrange, existe un parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que para todo $v \in H_0^1(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} 0 &= \langle DJ_\varepsilon(\hat{w}_{k,\varepsilon}) - \lambda DL_\varepsilon(\hat{w}_{k,\varepsilon}), v \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left[(\hat{w}_{k,\varepsilon})' v' + V_\varepsilon \hat{w}_{k,\varepsilon} v - \lambda |\hat{w}_{k,\varepsilon}|^{p-1} \hat{w}_{k,\varepsilon} v \right] dx. \end{aligned} \quad (4.3.85)$$

Para encontrar el valor de λ tomamos $v := \hat{w}_{k,\varepsilon}$ en (4.3.85)

$$2J_\varepsilon(\hat{w}_{k,\varepsilon}) = \int_{\mathbb{R}} \left[\left| (\hat{w}_{k,\varepsilon})' \right|^2 + V_\varepsilon (\hat{w}_{k,\varepsilon})^2 \right] dx = \lambda \int_{\mathbb{R}} \left| \hat{w}_{k,\varepsilon} \right|^{p+1} dx = \lambda.$$

Con eso encontramos el valor de

$$\lambda = 2J_\varepsilon(\hat{w}_{k,\varepsilon}) = 2c_{k,\varepsilon},$$

con lo que podemos fijarnos que (4.3.85) es igual a (4.3.84). \square

Lema 4.14. La función

$$v_{k,\varepsilon}(x) := \left(2\varepsilon^{\frac{2m}{m+2}} c_{k,\varepsilon} \right)^{\frac{1}{p-1}} \hat{w}_{k,\varepsilon} \left(\varepsilon^{\frac{-2}{(m+2)}} (x - x_0) \right), \quad c_{k,\varepsilon} = J_\varepsilon(\hat{w}_{k,\varepsilon}), \quad (4.3.86)$$

es una solución débil de (P_ε) .

Demostración. Para demostrar que (4.3.86) es una solución débil de (P_ε) , primero hacemos un cambio de variable con

$$z = \varepsilon^{\frac{-2}{m+2}} (x - x_0),$$

en (4.3.86) y obtenemos

$$(2c_{k,\varepsilon})^{\frac{1}{p-1}} \hat{w}_{k,\varepsilon}(z) = \varepsilon^{-\frac{2}{p-1} \frac{m}{m+2}} v_{k,\varepsilon} \left(\varepsilon^{\frac{2}{m+2}} z + x_0 \right), \quad (4.3.87)$$

donde

$$c_{k,\varepsilon} = J_\varepsilon (\hat{w}_{k,\varepsilon}).$$

Por el Lema 4.13, la función

$$w_{k,\varepsilon} = (2c_{k,\varepsilon})^{\frac{1}{p-1}} \hat{w}_{k,\varepsilon}, \quad (4.3.88)$$

es una solución débil de (P'_ε) . Reemplazando (4.3.88) en (4.3.87) obtenemos

$$w_{k,\varepsilon}(z) = \varepsilon^{-\frac{2}{p-1} \frac{m}{m+2}} v_{k,\varepsilon} \left(\varepsilon^{\frac{2}{m+2}} z + x_0 \right),$$

y, por el cambio de variable, concluimos que para todo $r \in H_0^1(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}} \left[(w_{k,\varepsilon})' r' + V_\varepsilon w_{k,\varepsilon} r - |w_{k,\varepsilon}|^{p-1} w_{k,\varepsilon} r \right] dz \\ &= \varepsilon^{-\frac{2m}{m+2} \frac{p+1}{p-1} - \frac{2}{m+2}} \int_{\mathbb{R}} \left[\varepsilon^2 (v_{k,\varepsilon})' r' + V v_{k,\varepsilon} r - |v_{k,\varepsilon}|^{p-1} v_{k,\varepsilon} r \right] dz. \end{aligned} \quad (4.3.89)$$

Por (4.3.89), concluimos que (4.3.86) es solución débil de (P_ε) . \square

4.4. Límites para los valores críticos

Esta sección esta dedicada a probar el punto (iii) del Teorema 4.1. Como se discutió en la sección anterior, el resultado de la multiplicidad se basa en la Teoría de Ljusternik-Schnirelman para los funcionales uniformes. Se prueba que para los conjuntos de nivel J_ε y J^{δ_α} mediante la categoría de Lusternik-Schnirelman son topológicamente equivalentes:

Teorema 4.6. Sea $\alpha > 1$ y $\delta_\alpha > 0$ conforme al Lema 4.1. Para todo $k \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} c_{k,\varepsilon} = \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right) c_k^{\delta_\alpha}.$$

La demostración de este teorema se divide en varios pasos, que se desprenden de los siguientes lemas.

Lema 4.15. Sean $\alpha > 1$ y $\delta_\alpha > 0$ conforme al Lema 4.1. Para todo $k \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$, tenemos

$$c_{k,\varepsilon} \leq \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right) c_k^{\delta_\alpha}.$$

Demostración. Sea $k \in \mathbb{N}$, genérico.

i) Probemos que

$$\forall \varepsilon > 0: \quad \Sigma^{\delta_\alpha} \subseteq \Sigma_\varepsilon. \quad (4.4.90)$$

Sea $\varepsilon > 0$, genérico. Ahora identificamos a $u \in H_P(-\delta_\alpha, \delta_\alpha)$, con su extensión por cero fuera de $(-\delta_\alpha, \delta_\alpha)$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \|u\|_\varepsilon^2 &= \int_{\mathbb{R}} (|u'|^2 + V_\varepsilon u^2) dx \\ &= \int_{(-\delta_\alpha, \delta_\alpha)} (|u'|^2 + V_\varepsilon u^2) dx \\ &\leq \int_{(-\delta_\alpha, \delta_\alpha)} \left[|u'|^2 + \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) P u^2 \right] dx \\ &\leq \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \int_{(-\delta_\alpha, \delta_\alpha)} (|u'|^2 + P u^2) dx \\ &= \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \|u\|_{P, \delta_\alpha}^2. \end{aligned} \quad (4.4.91)$$

De (4.4.91), por la arbitrariedad del u , se sigue que

$$H_P(-\delta_\alpha, \delta_\alpha) \subseteq H_\varepsilon, \quad (4.4.92)$$

de donde se obtiene (4.4.90), puesto que ε también fue elegido arbitrariamente.

ii) Probaremos que

$$\forall \varepsilon > 0: \quad \mathcal{M}^{\delta_\alpha} \subseteq \mathcal{M}_\varepsilon. \quad (4.4.93)$$

Sea $\varepsilon > 0$, genérico. Identificamos a $u \in \mathcal{M}^{\delta_\alpha}$ dada, con su extensión por cero fuera de $(-\delta_\alpha, \delta_\alpha)$.

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^{p+1}(\mathbb{R})} &= \left(\int_{\mathbb{R}} |u(x)|^{p+1} dx \right)^{\frac{1}{p+1}} \\ &= \left(\int_{(-\delta_\alpha, \delta_\alpha)} |u(x)|^{p+1} dx \right)^{\frac{1}{p+1}} \\ &= \|u\|_{L^{p+1}(-\delta_\alpha, \delta_\alpha)} \end{aligned} \quad (4.4.94)$$

por (4.4.94) concluimos (4.4.93).

iii) Ahora sean $k \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$. Por (4.4.90) y (4.4.93), se tiene que

$$\mathcal{A}_k^{\delta_\alpha} \subseteq \mathcal{A}_{k, \varepsilon}, \quad (4.4.95)$$

de manera que

$$\begin{aligned} c_{k, \varepsilon} &= \inf_{A \in \mathcal{A}_{k, \varepsilon}} \max_{u \in A} J_\varepsilon(u) \\ &\leq \inf_{A \in \mathcal{A}_k^{\delta_\alpha}} \max_{u \in A} J_\varepsilon(u) \\ &\leq \inf_{A \in \mathcal{A}_k^{\delta_\alpha}} \left[\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \max_{u \in A} J^{\delta_\alpha}(u) \right] \end{aligned}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) c_k^{\delta_\alpha}, \quad (4.4.96)$$

lo que concluye la demostración. □

Proposición 4.7. Sean $k \in \mathbb{N}$, $\sigma > 0$, $\alpha > 1$ y $\delta_\alpha > 0$ conforme al Lema 4.1. Para todo $1 \gg \delta > 0$, existe $\varepsilon_\delta > 0$ tal que

$$\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_\delta) : c_k^{\delta_\alpha + \delta} \leq \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) c_{k,\varepsilon} + \sigma. \quad (4.4.97)$$

La demostración de esta proposición se divide en los siguientes lemas.

Lema 4.16. Dados $k \in \mathbb{N}$, $\sigma > 0$, $\alpha > 1$ y $\delta_\alpha > 0$ conforme al Lema 4.1. Para todo $\varepsilon > 0$ y $q \geq 1$, existen $A_\sigma(\varepsilon) \in \mathcal{A}_{k,\varepsilon}$, $b_{k,\sigma,\alpha} \geq 0$ y $C_q > 0$ tales que

$$\forall v \in A_\sigma(\varepsilon) : \|v\|_{L^q(\mathbb{R})} \leq C_q \sqrt{b_{k,\sigma,\alpha}}. \quad (4.4.98)$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$, genérico. Por la caracterización del ínfimo, de $c_{k,\varepsilon}$, existe

$$A_\sigma(\varepsilon) \in \mathcal{A}_{k,\varepsilon}$$

tal que

$$\max_{v \in A_\sigma(\varepsilon)} J_\varepsilon(v) \leq c_{k,\varepsilon} + \frac{\sigma}{3}, \quad (4.4.99)$$

entonces, por el Lema 4.15, se tiene que

$$\forall v \in A_\sigma(\varepsilon) : J_\varepsilon(v) \leq \left[\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) c_k^{\delta_\alpha} + \frac{\sigma}{3} \right] =: b_{k,\sigma,\alpha}. \quad (4.4.100)$$

Sea $v \in A_\sigma(\varepsilon)$, genérico. Por (4.4.100) se tiene que

$$b_{k,\sigma,\alpha} \geq J_\varepsilon(v) \geq \frac{1}{2} \|v\|_{P,\infty}^2 = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left[|u'(x)|^2 + Pu^2(x) \right] dx. \quad (4.4.101)$$

Por otro lado, para $q \geq 1$ se tiene, por el Lema 4.3 nos da la existencia de $C_q > 0$ tal que

$$\|v\|_{L^q(\mathbb{R})} \leq C_q \|v\|_{P,\mathbb{R}}^2. \quad (4.4.102)$$

Aplicando (4.4.102) en (4.4.101) concluimos (4.4.98). □

Lema 4.17. Consideramos las condiciones del Lema 4.16. Definimos

$$Q_\rho := \inf_{x \in \mathbb{R} \setminus (-\delta_\alpha - \rho, \delta_\alpha + \rho)} Q\left(\varepsilon^{\frac{2}{m+2}} x\right), \quad \rho > 0.$$

Para todo $\delta > 0$ y $v \in A_\sigma(\varepsilon)$ se cumple que

$$\|v\|_{L^2(\mathbb{R} \setminus (-\delta_\alpha - \delta, \delta_\alpha + \delta))} \leq \left(\frac{2b_{k,\sigma,\alpha}}{Q_\delta} \right)^{\frac{1}{2}} \varepsilon^{\frac{m}{m+2}}. \quad (4.4.103)$$

Demostración. Sean $\delta > 0$ y $v \in A_\sigma(\varepsilon)$, genéricos. Por (4.4.100) se sigue que

$$\begin{aligned} b_{k,\sigma,\alpha} &\geq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R} \setminus (-\delta_\alpha, \delta_\alpha)} \left[\varepsilon^{-\frac{2m}{m+2}} Q \left(\varepsilon^{\frac{2}{m+2}} x \right) v^2 \right] dx \\ &\geq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R} \setminus (-\delta_\alpha - \delta, \delta_\alpha + \delta)} \left[\varepsilon^{-\frac{2m}{m+2}} Q \left(\varepsilon^{\frac{2}{m+2}} x \right) v^2 \right] dx \end{aligned} \quad (4.4.104)$$

Aquí es importante señalar que la constante $b_{k,\sigma,\alpha}$ no depende de ε . Por lo tanto

$$\begin{aligned} b_{k,\sigma,\alpha} &\geq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R} \setminus (-\delta_\alpha - \delta, \delta_\alpha + \delta)} \left[\varepsilon^{-\frac{2m}{m+2}} Q \left(\varepsilon^{\frac{2}{m+2}} x \right) v^2 \right] dx \\ &\geq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R} \setminus (-\delta_\alpha - \delta, \delta_\alpha + \delta)} \left(\varepsilon^{-\frac{2m}{m+2}} Q_\delta v^2 \right) dx \\ &= \frac{Q_\delta}{2\varepsilon^{\frac{2m}{m+2}}} \|v\|_{L^2(\mathbb{R} \setminus (-\delta_\alpha - \delta, \delta_\alpha + \delta))}^2, \end{aligned} \quad (4.4.105)$$

de donde se obtiene (4.4.103). \square

Lema 4.18. Consideramos las condiciones del Lema 4.16. Para todo $\delta > 0$, se tiene que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \max_{v \in A_\sigma(\varepsilon)} \|v\|_{L^{p+1}(\mathbb{R} \setminus (-\delta_\alpha - \delta, \delta_\alpha + \delta))} = 0. \quad (4.4.106)$$

Demostración. Sea $\delta > 0$, genérico. Por interpolación, elegimos $\alpha_0 \in (0, 1)$ tal que $\frac{1}{p+1} = \frac{1-\alpha_0}{2} + \frac{\alpha_0}{q}$ y considerando (4.4.103) junto con (4.4.98) se sigue que, para todo $v \in A_\sigma(\varepsilon)$,

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^{p+1}(\mathbb{R} \setminus (-\delta_\alpha - \delta, \delta_\alpha + \delta))} &\leq \|v\|_{L^2(\mathbb{R} \setminus (-\delta_\alpha - \delta, \delta_\alpha + \delta))}^{1-\alpha_0} \|v\|_{L^q(\mathbb{R} \setminus (-\delta_\alpha - \delta, \delta_\alpha + \delta))}^{\alpha_0} \\ &\leq C \left(\frac{2b_{k,\sigma,\alpha}}{Q_\delta} \right)^{\frac{1-\alpha_0}{2}} \varepsilon^{\frac{m(1-\alpha_0)}{2(m+2)}} (b_{k,\sigma,\alpha})^{\frac{\alpha_0}{2}} \\ &\leq C \left(\frac{b_{k,\sigma,\alpha}}{Q_\delta^{1-\alpha_0}} \right)^{\frac{1}{2}} \varepsilon^{\frac{m(1-\alpha_0)}{2(m+2)}}. \end{aligned} \quad (4.4.107)$$

que equivalente a

$$\max_{v \in A_\sigma(\varepsilon)} \|v\|_{L^{p+1}(\mathbb{R} \setminus (-\delta_\alpha - \delta, \delta_\alpha + \delta))} \leq C \left(\frac{b_{k,\sigma,\alpha}}{Q_\delta^{1-\alpha_0}} \right)^{\frac{1}{2}} \varepsilon^{\frac{m(1-\alpha_0)}{2(m+2)}}. \quad (4.4.108)$$

Tomando el límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ en (4.4.108) obtenemos (4.4.106). \square

Lema 4.19. Consideramos las condiciones de la Proposición 4.7. Para todo $\delta > 0$, existe $\varepsilon_\delta > 0$ tal que

$$\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_\delta), \forall v \in A_\sigma(\varepsilon) : \|v\|_{L^{p+1}(-\delta_\alpha - \delta, \delta_\alpha + \delta)} \geq 1 - \delta. \quad (4.4.109)$$

Demostración. Por (4.4.106), dado $\delta > 0$ y $s > 0$, existe $\varepsilon_{\delta,s} = \varepsilon_{\delta,s}(\delta, s) > 0$ tal que

$$\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_{\delta,s}) : \max_{v \in A_\sigma(\varepsilon)} \|v\|_{L^{p+1}(\mathbb{R} \setminus (-\delta_\alpha - \delta, \delta_\alpha + \delta))} \leq \delta^s. \quad (4.4.110)$$

Fijamos $s = 1$, tomando $\varepsilon_\delta = \varepsilon_{\delta,1}$. Sean $\varepsilon \in (0, \varepsilon_\delta)$ y $v \in A_\sigma(\varepsilon)$, genéricos. Por la desigualdad triangular

$$\begin{aligned}
1 &= \|v\|_{L^{p+1}(\mathbb{R})} \\
&= \|v \cdot \chi_{(-\delta_\alpha - \delta, \delta_\alpha + \delta)} + v \cdot \chi_{\mathbb{R} \setminus (-\delta_\alpha - \delta, \delta_\alpha + \delta)}\|_{L^{p+1}(\mathbb{R})} \\
&\leq \|v \cdot \chi_{(-\delta_\alpha - \delta, \delta_\alpha + \delta)}\|_{L^{p+1}(\mathbb{R})} + \|v \cdot \chi_{\mathbb{R} \setminus (-\delta_\alpha - \delta, \delta_\alpha + \delta)}\|_{L^{p+1}(\mathbb{R})} \\
&= \|v\|_{L^{p+1}(-\delta_\alpha - \delta, \delta_\alpha + \delta)} + \|v\|_{L^{p+1}(\mathbb{R} \setminus (-\delta_\alpha - \delta, \delta_\alpha + \delta))} \\
&\leq \|v\|_{L^{p+1}(-\delta_\alpha - \delta, \delta_\alpha + \delta)} + \max_{v \in A_\sigma(\varepsilon)} \|v\|_{L^{p+1}(\mathbb{R} \setminus (-\delta_\alpha - \delta, \delta_\alpha + \delta))} \\
&\leq \|v\|_{L^{p+1}(-\delta_\alpha - \delta, \delta_\alpha + \delta)} + \delta
\end{aligned} \tag{4.4.111}$$

por (4.4.111) podemos concluir (4.4.109). \square

Definimos una función corte tal que para $\delta > 0$ y $r > 1$

$$\phi_\delta(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \left(-\delta_\alpha - \frac{\delta}{2}, \delta_\alpha + \frac{\delta}{2}\right), \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus (-\delta_\alpha - \delta, \delta_\alpha + \delta). \end{cases} \tag{4.4.112}$$

y

$$\forall x \in \left(-\delta_\alpha - \delta, \delta_\alpha - \frac{\delta}{2}\right) \cup \left(\delta_\alpha + \frac{\delta}{2}, \delta_\alpha + \delta\right) : \quad \phi_\delta(x) \in (0, 1) \text{ y } |\phi'_\delta(x)| \leq \frac{1}{\delta r}.$$

Definimos el operador $\phi_\delta[\cdot]$ como

$$\begin{aligned}
\phi_\delta[\cdot] : \mathcal{M}_\varepsilon &\rightarrow \mathcal{M}^{\delta_\alpha + \delta} \\
u &\mapsto \phi_\delta[u] := \frac{\phi_\delta u}{\|u\|_{L^{p+1}(\mathbb{R})}}
\end{aligned} \tag{4.4.113}$$

Lema 4.20. Consideramos las condiciones de la Proposición 4.7. Para todo $\delta \in (0, 1)$,

$$\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_\delta), \forall v \in A_\sigma(\varepsilon) : \quad c_k^{\delta_\alpha + \delta} \leq \max_{v \in \phi_\delta[A_\sigma(\varepsilon)]} J^{\delta_\alpha + \delta}(v). \tag{4.4.114}$$

Demostración. Sean $\delta \in (0, 1)$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ y $v \in A_\sigma(\varepsilon)$ genéricos. Por la propiedad de concentración dada en (4.4.109) y la definición (4.4.112) se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_{(-\delta_\alpha - \delta, \delta_\alpha + \delta)} |\phi_\delta v|^{p+1} dx &\geq \int_{(-\delta_\alpha - \frac{\delta}{2}, \delta_\alpha + \frac{\delta}{2})} |\phi_\delta v|^{p+1} dx \\
&= \int_{(-\delta_\alpha - \frac{\delta}{2}, \delta_\alpha + \frac{\delta}{2})} |v|^{p+1} dx \\
&\geq \left(1 - \frac{\delta}{2}\right)^{p+1}
\end{aligned}$$

así que

$$\|\phi_\delta v\|_{L^{p+1}(-\delta_\alpha - \delta, \delta_\alpha + \delta)} \geq 1 - \delta \tag{4.4.115}$$

En particular, vemos que $\phi_\delta[\cdot]$ está bien definido y concluimos que es continuo. Entonces,

dato que $\phi_\delta[\cdot]$ es un funcional impar, de las propiedades de género tenemos que

$$\gamma(\phi_\delta[A_\sigma(\varepsilon)]) \geq k,$$

y, por ello,

$$\phi_\delta[A_\sigma(\varepsilon)] \in \mathcal{A}_k^{\delta_\alpha + \delta}. \quad (4.4.116)$$

Ahora (4.4.116) y la definición de $c_k^{\delta_\alpha + \delta}$ implica (4.4.114). \square

Lema 4.21. *Consideramos las condiciones de la Proposición 4.7. Para todo $\delta \in (0, \frac{1}{4})$ y $\varepsilon \in (0, \varepsilon_\delta)$, existe un elemento $w \in A_\sigma(\varepsilon)$ tal que*

$$\max_{v \in \phi_\delta[A_\sigma(\varepsilon)]} J^{\delta_\alpha + \delta}(v) \leq J_\varepsilon(w) + \frac{\sigma}{3} \quad (4.4.117)$$

Demostración. Sean $\delta \in (0, \frac{1}{4})$ y $\varepsilon \in (0, \varepsilon_\delta)$, genéricos. Por la caracterización del supremo, tomemos ahora un elemento $u \in A_\sigma(\varepsilon)$ tal que $\bar{v} := \phi_\delta[u]$ satisface

$$\max_{v \in \phi_\delta[A_\sigma(\varepsilon)]} J^{\delta_\alpha + \delta}(v) \leq J^{\delta_\alpha + \delta}(\bar{v}) + \frac{\sigma}{3} \quad (4.4.118)$$

Para $\bar{v} := \phi_\delta[u]$, por la definición de ϕ_δ de (4.4.112) tenemos

$$\begin{aligned} \|\phi_\delta u\|_{L^{p+1}(\mathbb{R})}^2 J^{\delta_\alpha + \delta}(\bar{v}) &= \frac{1}{2} \|\phi_\delta u\|_{L^{p+1}(\mathbb{R})}^2 \|\bar{v}\|_{P, \delta_\alpha + \delta}^2 \\ &= \frac{1}{2} \|\phi_\delta u\|_{P, \delta_\alpha + \delta}^2 \\ &= \frac{1}{2} \int_{(-\delta_\alpha - \delta, \delta_\alpha + \delta)} \left(|(\phi_\delta u)'|^2 + P(\phi_\delta u)^2 \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{(-\delta_\alpha - \delta, \delta_\alpha + \delta)} \left(|\phi_\delta' u + \phi_\delta u'|^2 + P(\phi_\delta u)^2 \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{(-\delta_\alpha - \delta, \delta_\alpha + \delta)} \left(|\phi_\delta' u|^2 + 2\phi_\delta' u \phi_\delta u' + |\phi_\delta u'|^2 \right) dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{(-\delta_\alpha - \delta, \delta_\alpha + \delta)} \left(P(\phi_\delta u)^2 \right) dx \\ &\leq \int_{(-\delta_\alpha - \delta, \delta_\alpha + \delta)} \left(|\phi_\delta' u|^2 + 2\phi_\delta' u \phi_\delta u' + |u'|^2 + Pu^2 \right) dx \\ &\leq \int_{(-\delta_\alpha - \delta, \delta_\alpha + \delta)} \left(|\phi_\delta' u|^2 + 2\phi_\delta' u \phi_\delta u' \right) dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} \left(|u'|^2 + Pu^2 \right) dx \\ &\leq \int_{(-\delta_\alpha - \delta, \delta_\alpha + \delta)} \left(|\phi_\delta' u|^2 + 2\phi_\delta' u \phi_\delta u' \right) dx + \|u\|_\varepsilon^2. \end{aligned} \quad (4.4.119)$$

Gracias a las desigualdades (4.4.119), (4.4.115), la definición de la función corte ϕ_δ de (4.4.112), por las desigualdades de Cauchy-Schwarz, Poincaré y aplicando (4.4.101) tenemos

$$(1 - \delta)^2 J^{\delta_\alpha + \delta}(\bar{v}) \leq \|\phi_\delta u\|_{L^{p+1}(\mathbb{R})}^2 J^{\delta_\alpha + \delta}(\bar{v})$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_{(-\delta_\alpha - \delta, \delta_\alpha + \delta)} \left(|\phi'_\delta u|^2 + 2\phi'_\delta u \phi_\delta u' \right) dx + \int_{\mathbb{R}} \left(|u'|^2 + V_\varepsilon u^2 \right) dx \\
&= J_\varepsilon(u) + \int_{(-\delta_\alpha - \delta, \delta_\alpha + \delta)} \left(|\phi'_\delta u|^2 + 2\phi'_\delta u \phi_\delta u' \right) dx \\
&= J_\varepsilon(u) + \int_{(-\delta_\alpha - \frac{\delta}{2}, \delta_\alpha + \frac{\delta}{2})} \left(|\phi'_\delta u|^2 + 2\phi'_\delta u \phi_\delta u' \right) dx \\
&\quad + \int_{(-\delta_\alpha - \delta, \delta_\alpha - \frac{\delta}{2}) \cup (\delta_\alpha + \frac{\delta}{2}, \delta_\alpha + \delta)} \left(|\phi'_\delta u|^2 + 2\phi'_\delta u \phi_\delta u' \right) dx \\
&= J_\varepsilon(u) + \int_{(-\delta_\alpha - \delta, \delta_\alpha - \frac{\delta}{2}) \cup (\delta_\alpha + \frac{\delta}{2}, \delta_\alpha + \delta)} \left(\frac{1}{\delta^{2r}} |u|^2 + \frac{2}{\delta^r} uu' \right) dx \\
&\leq J_\varepsilon(u) + \frac{1}{\delta^{2r}} \|u\|_{L^2((-\delta_\alpha - \delta, \delta_\alpha - \frac{\delta}{2}) \cup (\delta_\alpha + \frac{\delta}{2}, \delta_\alpha + \delta))}^2 \\
&\quad + \frac{2}{\delta^r} \|u\|_{L^2((-\delta_\alpha - \delta, \delta_\alpha - \frac{\delta}{2}) \cup (\delta_\alpha + \frac{\delta}{2}, \delta_\alpha + \delta))} \\
&\quad \|u\|_{H_0^1((-\delta_\alpha - \delta, \delta_\alpha - \frac{\delta}{2}) \cup (\delta_\alpha + \frac{\delta}{2}, \delta_\alpha + \delta))} \\
&\leq \left(\frac{C_p}{\delta^{2r}} + \frac{2}{\delta^r} \right) \|u\|_{L^2((-\delta_\alpha - \delta, \delta_\alpha - \frac{\delta}{2}) \cup (\delta_\alpha + \frac{\delta}{2}, \delta_\alpha + \delta))} \\
&\quad \|u\|_{H_0^1((-\delta_\alpha - \delta, \delta_\alpha - \frac{\delta}{2}) \cup (\delta_\alpha + \frac{\delta}{2}, \delta_\alpha + \delta))} + J_\varepsilon(u) \\
&\leq \left(\frac{C_p}{\delta^{2r}} + \frac{2}{\delta^r} \right) \left(\int_{(-\delta_\alpha - \delta, \delta_\alpha - \frac{\delta}{2}) \cup (\delta_\alpha + \frac{\delta}{2}, \delta_\alpha + \delta)} \left(|u'|^2 + Pu^2 \right) dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \|u\|_{L^2((-\delta_\alpha - \delta, \delta_\alpha - \frac{\delta}{2}) \cup (\delta_\alpha + \frac{\delta}{2}, \delta_\alpha + \delta))} + J_\varepsilon(u) \\
&\leq J_\varepsilon(u) + \left(\frac{C_p}{\delta^{2r}} + \frac{2}{\delta^r} \right) \sqrt{2} b_{k, \sigma, \alpha} \|u\|_{L^2((-\delta_\alpha - \delta, \delta_\alpha - \frac{\delta}{2}) \cup (\delta_\alpha + \frac{\delta}{2}, \delta_\alpha + \delta))} \\
&= J_\varepsilon(u) + \frac{C}{\delta^{2r}} \|u\|_{L^2((-\delta_\alpha - \delta, \delta_\alpha - \frac{\delta}{2}) \cup (\delta_\alpha + \frac{\delta}{2}, \delta_\alpha + \delta))}.
\end{aligned}$$

donde

$$C := \sqrt{2}(C_p + 2)b_{k, \sigma, \alpha}.$$

Luego, usando la desigualdad de Hölder para $\|u\|_{L^2((-\delta_\alpha - \delta, \delta_\alpha - \frac{\delta}{2}) \cup (\delta_\alpha + \frac{\delta}{2}, \delta_\alpha + \delta))}$, considerando (4.4.110) y tomando $s > 2r$, obtenemos ε_1 tal que

$$\begin{aligned}
(1 - \delta)^2 J^{\delta_\alpha + \delta}(\bar{v}) &\leq J_\varepsilon(u) + \frac{C}{\delta^{2r}} \|u\|_{L^{p+1}((-\delta_\alpha - \delta, \delta_\alpha - \frac{\delta}{2}) \cup (\delta_\alpha + \frac{\delta}{2}, \delta_\alpha + \delta))} \\
&\leq J_\varepsilon(u) + \frac{C}{\delta^{2r}} \|u\|_{L^{p+1}(\mathbb{R} \setminus [\delta_\alpha - \frac{\delta}{2}, \delta_\alpha + \frac{\delta}{2}])} \\
&\leq J_\varepsilon(u) + \frac{C}{\delta^{2r}} \left(\frac{\delta}{2} \right)^s.
\end{aligned}$$

Por lo tanto concluimos que

$$\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_1) : \quad (1 - \delta)^2 J^{\delta_\alpha + \delta}(\bar{v}) \leq J_\varepsilon(u) + C\delta^{s-2r}. \quad (4.4.120)$$

Por (4.4.100) se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}J^{\delta_\alpha+\delta}(\bar{v}) &= \frac{8}{16}J^{\delta_\alpha+\delta}(\bar{v}) \\
&\leq \left(\frac{3}{4}\right)^2 J^{\delta_\alpha+\delta}(\bar{v}) \\
&\leq (1-\delta)^2 J^{\delta_\alpha+\delta}(\bar{v}) \\
&\leq J_\varepsilon(u) + C\delta^{s-2r} \\
&\leq b_{k,\sigma,\alpha} + C\delta^{s-2r},
\end{aligned}$$

que, junto a (4.4.120), entrega

$$\begin{aligned}
J^{\delta_\alpha+\delta}(\bar{v}) &\leq J^{\delta_\alpha+\delta}(\bar{v}) + \delta^2 J^{\delta_\alpha+\delta}(\bar{v}) \\
&\leq J_\varepsilon(u) + C\delta^{s-2r} + 2\delta J^{\delta_\alpha+\delta}(\bar{v}) \\
&\leq J_\varepsilon(u) + C\delta^{s-2r} + 4\delta (b_{k,\sigma,\alpha} + C\delta^{s-2r}).
\end{aligned}$$

Ahora, tomando $w := u$, se tiene que

$$J^{\delta_\alpha+\delta}(\bar{v}) \leq J_\varepsilon(w) + \frac{\sigma}{3} \quad (4.4.121)$$

con lo que concluimos (4.4.118). \square

Demostración de la Proposición 4.7. Por las desigualdades (4.4.114), (4.4.121) y (4.4.99) se sigue que

$$\begin{aligned}
c_k^{\delta_\alpha+\delta} &\leq \max_{v \in \phi_\delta[A_\sigma(\varepsilon)]} J^{\delta_\alpha+\delta}(v) \\
&\leq J^{\delta_\alpha+\delta}(\bar{v}) + \frac{\sigma}{3} \\
&\leq J_\varepsilon(w) + \frac{2\sigma}{3} \\
&\leq \max_{u \in A_\sigma(\varepsilon)} J_\varepsilon(u) + \frac{2\sigma}{3} \\
&\leq \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) c_{k,\varepsilon} + \sigma.
\end{aligned}$$

\square

Lema 4.22. Sean $\alpha > 1$ y $\delta_\alpha > 0$ conforme al Lema 4.1. Para todo $k \in \mathbb{N}$ y $\delta > 0$, se tiene que

$$c_k^{\delta_\alpha+\delta} \leq c_k^{\delta_\alpha}.$$

Demostración. i) Probaremos que

$$\forall \delta > 0: \quad \Sigma^{\delta_\alpha} \subseteq \Sigma^{\delta_\alpha+\delta}. \quad (4.4.122)$$

Sea $\delta > 0$, genérico. Identificamos a $u \in \mathbb{H}_P(-\delta_\alpha, \delta_\alpha)$ dada, con su extensión por cero

fuera de $(-\delta_\alpha, \delta_\alpha)$.

$$\begin{aligned} \|u\|_{P, \delta_\alpha + \delta}^2 &= \int_{(-\delta_\alpha - \delta, \delta_\alpha + \delta)} (|u'|^2 + Pu^2) dx \\ &= \int_{(-\delta_\alpha, \delta_\alpha)} (|u'|^2 + Pu^2) dx \\ &= \|u\|_{P, \delta_\alpha}^2, \end{aligned} \quad (4.4.123)$$

que implica que

$$H_P(-\delta_\alpha, \delta_\alpha) \subseteq H_P(-\delta_\alpha - \delta, \delta_\alpha + \delta). \quad (4.4.124)$$

Por (4.4.124) concluimos (4.4.122).

ii) Probaremos que

$$\forall \delta > 0: \quad \mathcal{M}^{\delta_\alpha} \subseteq \mathcal{M}^{\delta_\alpha + \delta}. \quad (4.4.125)$$

Sea $\delta > 0$, genérico. Identificamos a $u \in \mathcal{M}^{\delta_\alpha}$ dada, con su extensión por cero fuera de $(-\delta_\alpha, \delta_\alpha)$.

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^{p+1}(-\delta_\alpha - \delta, \delta_\alpha + \delta)} &= \left(\int_{(-\delta_\alpha - \delta, \delta_\alpha + \delta)} |u|^{p+1} dx \right)^{\frac{1}{(p+1)}} \\ &= \left(\int_{(-\delta_\alpha, \delta_\alpha)} |u|^{p+1} dx \right)^{\frac{1}{(p+1)}} \\ &= \|u\|_{L^{p+1}(-\delta_\alpha, \delta_\alpha)}, \end{aligned} \quad (4.4.126)$$

que implica (4.4.93).

iii) Sean $k \in \mathbb{N}$ y $\delta > 0$, genéricos. Por (4.4.122) y (4.4.125), se tiene que

$$\mathcal{A}_k^{\delta_\alpha} \subseteq \mathcal{A}_k^{\delta_\alpha + \delta}. \quad (4.4.127)$$

que conduce a

$$\begin{aligned} c_k^{\delta_\alpha + \delta} &= \inf_{A \in \mathcal{A}_k^{\delta_\alpha + \delta}} \max_{u \in A} J^{\delta_\alpha + \delta}(u) \\ &\leq \inf_{A \in \mathcal{A}_k^{\delta_\alpha}} \max_{u \in A} J^{\delta_\alpha + \delta}(u) \\ &\leq \inf_{A \in \mathcal{A}_k^{\delta_\alpha}} \max_{u \in A} J^{\delta_\alpha}(u) \\ &= c_k^{\delta_\alpha}. \end{aligned} \quad (4.4.128)$$

Por (4.4.128) concluimos la demostración. \square

En el siguiente resultado se presenta una estimación uniforme que es esencial para la demostración del Teorema 4.6.

Proposición 4.8. Sean $\alpha > 1$ y $\delta_\alpha > 0$ conforme al Lema 4.1. Para todo $k \in \mathbb{N}$ y $\sigma > 0$,

existe $\delta_\sigma > 0$ tal que

$$\forall \delta \in (0, \delta_\sigma) : c_k^{\delta_\alpha} \leq c_k^{\delta_\alpha + \delta} + \sigma.$$

La demostración de esta proposición se desglosa en los siguientes lemas.

Lema 4.23. Sean $k \in \mathbb{N}$, $\sigma > 0$, $\alpha > 1$ y $\delta_\alpha > 0$ conforme al Lema 4.1. Para todo $\delta > 0$, existen $B_\sigma(\delta) \in \mathcal{A}_k^{\delta_\alpha + \delta}$ y $b_{k,\sigma,\alpha} \geq 0$ tal que

$$\forall v \in B_\sigma(\delta) : J^{\delta_\alpha + \delta}(v) \leq b_{k,\sigma,\alpha}. \quad (4.4.129)$$

Demostración. Sea $\delta > 0$, genérico. Acorde a la definición de $c_k^{\delta_\alpha + \delta}$, por la caracterización del ínfimo existe

$$B_\sigma(\delta) \in \mathcal{A}_k^{\delta_\alpha + \delta}$$

tal que

$$\max_{v \in B_\sigma(\delta)} J^{\delta_\alpha + \delta}(v) \leq c_k^{\delta_\alpha + \delta} + \frac{\sigma}{3}. \quad (4.4.130)$$

Entonces por el Lema 4.22 concluimos

$$\forall v \in B_\sigma(\delta) : J^{\delta_\alpha + \delta}(v) \leq \left(c_k^{\delta_\alpha} + \frac{\sigma}{3} \right) := b_{k,\sigma,\alpha}. \quad (4.4.131)$$

□

Para todo $\delta > 0$ definimos un difeomorfismo $\psi_\delta \in C^1([-\delta_\alpha, \delta_\alpha], [-\delta_\alpha - \delta, \delta_\alpha + \delta])$ tal que

$$\forall x \in [-\delta_\alpha, \delta_\alpha] : |\psi_\delta(x) - x| \leq O(\delta), \quad |\psi'_\delta(x) - 1| \leq O(\delta), \quad (4.4.132)$$

y

$$\psi_\delta(-\delta_\alpha) = -\delta_\alpha - \delta \quad \text{y} \quad \psi_\delta(\delta_\alpha) = \delta_\alpha + \delta.$$

Lema 4.24. Consideramos las condiciones de la Proposición 4.8. Existe $\delta_1 \in (0, \delta_0)$, donde $\delta_o := \delta_o(\delta_\alpha) > 0$, tal que

$$\forall \delta \in (0, \delta_1) : \psi_\delta[B_\sigma(\delta)] \in \mathcal{A}_k^{\delta_\alpha}. \quad (4.4.133)$$

Demostración. Observe que para probar (4.4.133) basta mostrar que Γ_δ definido como

$$\begin{aligned} \Gamma_\delta : \mathbb{H}_P(-\delta_\alpha - \delta, \delta_\alpha + \delta) \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{H}_P(-\delta_\alpha, \delta_\alpha) \\ v &\mapsto \Gamma_\delta[v] := \frac{v \circ \psi_\delta}{\|v \circ \psi_\delta\|_{L^{p+1}(-\delta_\alpha, \delta_\alpha)}}, \end{aligned} \quad (4.4.134)$$

está bien definido y es continuo, ya que claramente Γ_δ es impar. Primero, observamos que por (4.4.132), para cada $\eta > 0$, existen $\delta_2 = \delta_2(\eta) > 0$ y $\delta_1 \geq \delta_2$, tales que

$$\forall x \in [-\delta_\alpha, \delta_\alpha], \forall \delta \in (0, \delta_2) : 1 - \eta \leq \psi'_\delta(x) \leq 1 + \eta. \quad (4.4.135)$$

i) Probaremos que dados $\delta \in (0, \delta_2)$ y $v \in \mathbb{H}_P(-\delta_\alpha - \delta, \delta_\alpha + \delta) \setminus \{0\}$, se tiene que

$$v \circ \psi_\delta \neq 0.$$

Sean $\delta \in (0, \delta_2)$ y $v \in \mathbf{H}_P(-\delta_\alpha - \delta, \delta_\alpha + \delta) \setminus \{0\}$, genéricos. De (4.4.135) y la fórmula de cambio de variables obtenemos

$$\begin{aligned}
\|v \circ \psi_\delta\|_{L^{p+1}(-\delta_\alpha, \delta_\alpha)}^{p+1} &= \int_{(-\delta_\alpha, \delta_\alpha)} |v \circ \psi_\delta|^{p+1} dx \\
&= \int_{(-\delta_\alpha, \delta_\alpha)} |v \circ \psi_\delta|^{p+1} \frac{\psi'_\delta}{\psi'_\delta} dx \\
&\geq \int_{(-\delta_\alpha, \delta_\alpha)} |v \circ \psi_\delta|^{p+1} \frac{\psi'_\delta}{|1 + \eta|} dx \\
&= \frac{1}{|\eta + 1|} \int_{(-\delta_\alpha - \delta, \delta_\alpha + \delta)} |v|^{p+1} dx, \tag{4.4.136}
\end{aligned}$$

por otro lado

$$\begin{aligned}
\|v \circ \psi_\delta\|_{L^{p+1}(-\delta_\alpha, \delta_\alpha)}^{p+1} &= \int_{(-\delta_\alpha, \delta_\alpha)} |v \circ \psi_\delta|^{p+1} dx \\
&= \int_{(-\delta_\alpha, \delta_\alpha)} |v \circ \psi_\delta|^{p+1} \frac{\psi'_\delta}{\psi'_\delta} dx \\
&\leq \int_{(-\delta_\alpha, \delta_\alpha)} |v \circ \psi_\delta|^{p+1} \frac{\psi'_\delta}{|1 - \eta|} dx \\
&= \frac{1}{|1 - \eta|} \int_{(-\delta_\alpha - \delta, \delta_\alpha + \delta)} |v|^{p+1} dx. \tag{4.4.137}
\end{aligned}$$

Por lo tanto $v \circ \psi_\delta \neq 0$. Además, por (4.4.136) y (4.4.137), se sigue que

$$\frac{\|v\|_{L^{p+1}(-\delta_\alpha - \delta, \delta_\alpha + \delta)}}{|1 + \eta|^{\frac{1}{p+1}}} \leq \|v \circ \psi_\delta\|_{L^{p+1}(-\delta_\alpha, \delta_\alpha)} \leq \frac{\|v\|_{L^{p+1}(-\delta_\alpha - \delta, \delta_\alpha + \delta)}}{|1 - \eta|^{\frac{1}{p+1}}}.$$

ii) Vamos a probar que

$$\forall v \in \mathbf{H}_P(-\delta_\alpha - \delta, \delta_\alpha + \delta) \setminus \{0\} : \quad \Gamma_\delta[v] \in \mathbf{H}_P(-\delta_\alpha, \delta_\alpha) \setminus \{0\}. \tag{4.4.138}$$

Sea $w \in C_0^\infty(-\delta_\alpha - \delta, \delta_\alpha + \delta) \setminus \{0\}$, genérico. Por la desigualdad de Poincaré, puesto que P es una función m -homogénea, (4.4.135) y usando de nuevo la fórmula de cambio de variables, se obtiene

$$\begin{aligned}
\|\Gamma_\delta[w]\|_{P, \delta_\alpha}^2 &= \int_{(-\delta_\alpha, \delta_\alpha)} \left(|\Gamma_\delta[w]|^2 + P(\Gamma_\delta[w])^2 \right) dx \\
&\leq \left\| \frac{w \circ \psi_\delta}{\|w \circ \psi_\delta\|_{L^{p+1}(-\delta_\alpha, \delta_\alpha)}} \right\|_{P, \delta_\alpha}^2 \\
&\leq \frac{|1 + \eta|^{\frac{2}{p+1}} \int_{(-\delta_\alpha, \delta_\alpha)} \left(|(w \circ \psi_\delta)'|^2 + P(w \circ \psi_\delta)^2 \right) dx}{\|w\|_{L^{p+1}(-\delta_\alpha - \delta, \delta_\alpha + \delta)}^2} \\
&\leq \frac{|1 + \eta|^{\frac{2}{p+1}} \int_{(-\delta_\alpha, \delta_\alpha)} \left(|w' \circ \psi_\delta|^2 |\psi'_\delta|^2 + P(w \circ \psi_\delta)^2 \right) dx}{\|w\|_{L^{p+1}(-\delta_\alpha - \delta, \delta_\alpha + \delta)}^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{|1 + \eta|^{\frac{2}{p+1}+2} \int_{(-\delta_\alpha, \delta_\alpha)} (|w' \circ \psi_\delta|^2 + P(w \circ \psi_\delta)^2) dx}{\|w\|_{L^{p+1}(-\delta_\alpha - \delta, \delta_\alpha + \delta)}^2} \\
&= \frac{|1 + \eta|^{\frac{2}{p+1}+2} \int_{(-\delta_\alpha, \delta_\alpha)} (|w' \circ \psi_\delta|^2 + P(w \circ \psi_\delta)^2) \frac{\psi'_\delta}{\psi_\delta} dx}{\|w\|_{L^{p+1}(-\delta_\alpha - \delta, \delta_\alpha + \delta)}^2} \\
&\leq \frac{|1 + \eta|^{\frac{2}{p+1}+2} \int_{(-\delta_\alpha, \delta_\alpha)} (|w' \circ \psi_\delta|^2 + P(w \circ \psi_\delta)^2) \psi'_\delta dx}{\|w\|_{L^{p+1}(-\delta_\alpha - \delta, \delta_\alpha + \delta)}^2 (1 - \eta)} \\
&= K \int_{(-\delta_\alpha - \delta, \delta_\alpha + \delta)} (|w'|^2 + Pw^2) dx \\
&= K \|w\|_{P, \delta_\alpha + \delta}^2.
\end{aligned}$$

Esta desigualdad nos conduce a

$$\Gamma_\delta[w] \in \mathbf{H}_P(-\delta_\alpha, \delta_\alpha) \setminus \{0\}.$$

Además, por (4.4.132) tenemos

$$\Gamma_\delta[w](-\delta_\alpha) = \frac{w(-\delta_\alpha - \delta)}{\|w \circ \psi_\delta\|_{L^{p+1}(-\delta_\alpha, \delta_\alpha)}} \quad \text{y} \quad \Gamma_\delta[w](\delta_\alpha) = \frac{w(\delta_\alpha + \delta)}{\|w \circ \psi_\delta\|_{L^{p+1}(-\delta_\alpha, \delta_\alpha)}}.$$

Por lo tanto, hemos demostrado que $\Gamma_\delta[w] \in \mathbf{H}_P(-\delta_\alpha, \delta_\alpha) \setminus \{0\}$ y

$$\forall w \in C_0^\infty(-\delta_\alpha - \delta, \delta_\alpha + \delta): \quad \|\Gamma_\delta[w]\|_{P, \delta_\alpha} \leq K \|w\|_{P, \delta_\alpha + \delta}, \quad (4.4.139)$$

para ciertos $K = K(\eta, \delta)$. Usando un argumento de densidad, ampliamos esta desigualdad a todos los $\mathbf{H}_P(-\delta_\alpha - \delta, \delta_\alpha + \delta)$. De aquí obtenemos (4.4.138) y la continuidad de $\Gamma_\delta[\cdot]$. Finalmente, desde (4.4.138) y (4.4.139), obtenemos (4.4.133). □

Lema 4.25. *Consideramos las condiciones de la Proposición 4.8. Para todo $\delta \in (0, \delta_2)$, existe un elemento $w \in B_\sigma(\delta)$ tal que tal que*

$$\max_{u^* \in \Gamma_\delta[B_\sigma(\delta)]} J^{\delta_\alpha}(u^*) \leq J^{\delta_\alpha + \delta}(w) + \frac{2\sigma}{3}. \quad (4.4.140)$$

Demostración. Elegimos $\delta \in (0, \delta_2)$. Para $u = \Gamma_\delta[v]$, usamos el cambio de variable $z = \psi_\delta(x)$, (4.4.131), (4.4.132) y $\|v\|_{L^{p+1}(-\delta_\alpha, \delta_\alpha)} = 1$ y obtenemos

$$\begin{aligned}
J^{\delta_\alpha}(u) &= \frac{1}{2} \|u\|_{P, \delta_\alpha}^2 \\
&= \frac{\|v \circ \psi_\delta\|_{P, \delta_\alpha}^2}{2 \|v \circ \psi_\delta\|_{L^{p+1}(-\delta_\alpha, \delta_\alpha)}^2} \\
&\leq \frac{1}{2} \left(\frac{|1 + \eta|^{\frac{1}{p+1}}}{\|v\|_{L^{p+1}(-\delta_\alpha - \delta, \delta_\alpha + \delta)}} \right)^2 \|v \circ \psi_\delta\|_{P, \delta_\alpha}^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{|1 + \eta|^{\frac{2}{p+1}}}{2} \int_{(-\delta_\alpha, \delta_\alpha)} \left(|(v \circ \psi_\delta)'|^2 + P(v \circ \psi_\delta)^2 \right) dx \\
&= \frac{|1 + \eta|^{\frac{2}{p+1}}}{2} \int_{(-\delta_\alpha, \delta_\alpha)} \left(|v' \circ \psi_\delta|^2 |\psi_\delta'|^2 + P(v \circ \psi_\delta)^2 \right) dx \\
&\leq \frac{\left(|1 + \eta|^{\frac{1}{p+1}} (O(\delta) + 1) \right)^2}{2} \int_{(-\delta_\alpha, \delta_\alpha)} \left(|v' \circ \psi_\delta|^2 + P(v \circ \psi_\delta)^2 \right) dx \\
&\leq \frac{\left(|1 + \eta|^{\frac{1}{p+1}} (O(\delta) + 1) \right)^2}{2} \int_{(-\delta_\alpha, \delta_\alpha)} \left(|v' \circ \psi_\delta|^2 + P(v \circ \psi_\delta)^2 \right) \frac{\psi_\delta'}{\psi_\delta} dx \\
&\leq \frac{\left(|1 + \eta|^{\frac{1}{p+1}} (O(\delta) + 1) \right)^2}{2(1 - \eta)} \int_{(-\delta_\alpha, \delta_\alpha)} \left(|v' \circ \psi_\delta|^2 + P(v \circ \psi_\delta)^2 \right) \psi_\delta' dx \\
&\leq \frac{\left(|1 + \eta|^{\frac{1}{p+1}} (O(\delta) + 1) \right)^2}{2(1 - \eta)} \int_{(-\delta_\alpha - \delta, \delta_\alpha + \delta)} \left(|v'|^2 + Pv^2 \right) dx \\
&= \frac{\left(|1 + \eta|^{\frac{1}{p+1}} (O(\delta) + 1) \right)^2}{1 - \eta} J^{\delta_\alpha + \delta}(v).
\end{aligned}$$

Ahora elegimos $w = v$ de manera que se cumple

$$J^{\delta_\alpha}(u) \leq J^{\delta_\alpha + \delta}(w) + \frac{\sigma}{3}. \quad (4.4.141)$$

Puesto que tomamos $u = \Gamma_\delta[v]$, arbitrariamente, concluimos (4.4.140). \square

Demostración de la Proposición 4.8. Sean $k \in \mathbb{N}$ y $\sigma > 0$. Podemos aplicar los Lemas 4.25 y 4.23. Ahora, considerando (4.4.133) y la definición de $c_k^{\delta_\alpha}$, se deduce que

$$c_k^{\delta_\alpha} \leq \max_{u \in \Gamma_\delta[B_\sigma(\delta)]} J^{\delta_\alpha}(u) \quad (4.4.142)$$

Por último, considerando (4.4.142), (4.4.140) y (4.4.130) se sigue que

$$\begin{aligned}
c_k^{\delta_\alpha} &\leq \max_{u^* \in \Gamma_\delta[B_\sigma(\delta)]} J^{\delta_\alpha}(u^*) \\
&\leq J^{\delta_\alpha + \delta}(w) + \frac{2\sigma}{3} \\
&\leq \max_{v \in B_\sigma(\delta)} J^{\delta_\alpha + \delta}(v) + \frac{2\sigma}{3} \\
&\leq c_k^{\delta_\alpha + \delta} + \sigma
\end{aligned}$$

\square

Demostración del Teorema 4.6. Sea $1 \gg \sigma > 0$. Considerando la Proposición 4.8 elegimos un $\delta \in (0, \delta_{\frac{\sigma}{2}})$, tal que

$$c_k^{\delta_\alpha} \leq c_k^{\delta_\alpha + \delta} + \frac{\sigma}{2}.$$

Por otro lado, por la Proposición 4.7, existe un $\varepsilon_\delta > 0$ (implícitamente dependiendo de σ) tal que

$$\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_\delta) : \quad c_k^{\delta_\alpha} \leq c_k^{\delta_\alpha + \delta} + \frac{\sigma}{2} \leq \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) c_{k,\varepsilon} + \sigma.$$

Debido al Lema 4.15, concluimos la demostración porque $\sigma > 0$ es arbitrario. \square

4.5. Perfiles asintóticos y fenómeno de concentración

En esta sección estudiamos el comportamiento asintótico de las soluciones, tanto dentro de $(-\delta_\alpha, \delta_\alpha)$ como fuera de $(-\delta_\alpha, \delta_\alpha)$. A lo largo de esta sección usamos la notación presentada en la Sección 4.2.

Lema 4.26. Sean $\alpha > 1$ y $\delta_\alpha > 0$ conforme al Lema 4.1. Para cada $k \in \mathbb{N}$, cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, $w_{k,\varepsilon}$ subconverge débilmente a $u_k \in H^1(\mathbb{R})$ tal que, restringido a $(-\delta_\alpha, \delta_\alpha)$, es una solución de (P_Y) , con

$$J^{\delta_\alpha}(\hat{u}_k|_{(-\delta_\alpha, \delta_\alpha)}) = c_k^{\delta_\alpha},$$

para

$$\hat{u}_k = \left(2c_k^{\delta_\alpha}\right)^{\frac{1}{1-p}} u_k.$$

Demostración. Sea $k \in \mathbb{N}$, genérico.

i) Probaremos que para ε_δ

$$\|\hat{w}_{k,\varepsilon}\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq K_1, \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_\delta), \quad (4.5.143)$$

donde $K_1 = K_1(k) > 0$ es una constante.

Sea $\varepsilon \in (0, \varepsilon_\delta)$, genérico. Del Lema 4.15, obtenemos

$$\begin{aligned} \|\hat{w}_{k,\varepsilon}\|_{P,\infty}^2 &\leq 2J(\hat{w}_{k,\varepsilon}) \\ &= 2c_{k,\varepsilon} \\ &\leq 2\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) c_k^{\delta_\alpha}. \end{aligned} \quad (4.5.144)$$

Luego, por el Lema 4.3 y (4.5.144),

$$\begin{aligned} \|\hat{w}_{k,\varepsilon}\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 &\leq C \|\hat{w}'_{k,\varepsilon}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \\ &\leq C_1 \|\hat{w}_{k,\varepsilon}\|_{P,\infty}^2 \\ &\leq \left(C_2 c_k^{\delta_\alpha}\right) =: K_1, \end{aligned}$$

i.e., K_1 es una constante que depende sólo de k , con eso concluimos (4.5.143).

De la estimación (4.5.143), existe $\hat{u}_k \in H^1(\mathbb{R})$ tal que $\hat{w}_{k,\varepsilon}$ subconverge débilmente y puntualmente a $\hat{u}_k \in H^1(\mathbb{R})$, cuando $\varepsilon \rightarrow 0$.

ii) Probaremos que $\hat{u}_k|_{(-\delta_\alpha, \delta_\alpha)}$ es una solución de (P_Y) .

Como $\hat{w}_{k,\varepsilon} \in \mathcal{M}_\varepsilon$ es un punto crítico para J_ε , tenemos

$$\forall \phi \in \mathbf{H}_0^1(\mathbb{R}) : \int_{\mathbb{R}} (\hat{w}'_{k,\varepsilon} \phi' + V_\varepsilon \hat{w}_{k,\varepsilon} \phi) dx = \lambda_{k,\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} |\hat{w}_{k,\varepsilon}|^{p-1} \hat{w}_{k,\varepsilon} \phi dx, \quad (4.5.145)$$

donde $\lambda_{k,\varepsilon} = 2c_{k,\varepsilon}$ es el multiplicador de Lagrange. Pasando al límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, tenemos

$$\forall \phi \in C_0^\infty(-\delta_\alpha, \delta_\alpha) : \int_{(-\delta_\alpha, \delta_\alpha)} (\hat{u}'_k \phi' + P \hat{u}_k \phi) dx = \lambda_k \int_{(-\delta_\alpha, \delta_\alpha)} |\hat{u}_k|^{p-1} \hat{u}_k \phi dx, \quad (4.5.146)$$

donde $\lambda_k = 2c_k$, i.e.,

$$\forall \phi \in C_0^\infty(-\delta_\alpha, \delta_\alpha) : \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \varepsilon^{-\frac{2m}{m+2}} Q\left(\varepsilon^{\frac{2}{m+2}} x\right) \hat{w}_{k,\varepsilon} \phi dx = 0.$$

Aquí hemos utilizado el hecho de que $\hat{w}_{k,\varepsilon}$ sub-converge en $L^{p+1}(\mathbb{R})$ a \hat{u}_k , que proviene del Lema 4.15 y la inyección compacta $H_\varepsilon \subseteq L^{p+1}(\mathbb{R})$.

iii) Considerando (4.5.146) y la Proposición 2.6, probamos que

$$\hat{u}_k(x) = 0, \quad \text{c.t.p. } \mathbb{R} \setminus (-\delta_\alpha, \delta_\alpha). \quad (4.5.147)$$

Para demostrar (4.5.147), haremos esta demostración por el absurdo. Por la definición de c.t.p. la negación de la proposición (4.5.147) es

$$|\{x \in \mathbb{R} \setminus (-\delta_\alpha, \delta_\alpha) \mid \hat{u}_k(x) \neq 0\}| > 0. \quad (4.5.148)$$

Definimos los conjuntos

$$S_{\delta,\beta} := \{x \in \mathbb{R} \setminus (-\delta_\alpha - \delta, \delta_\alpha + \delta) \mid |\hat{u}_k(x)| \geq \beta\}, \quad (\delta, \beta) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}_*^+$$

por lo tanto, tenemos que

$$\{x \in \mathbb{R} \setminus (-\delta_\alpha, \delta_\alpha) \mid \hat{u}_k(x) \neq 0\} \subseteq \bigcup_{(\delta,\beta) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}_*^+} S_{\delta,\beta}.$$

Por la monotonía de la medida concluimos que

$$0 < |\{x \in \mathbb{R} \setminus (-\delta_\alpha, \delta_\alpha) \mid \hat{u}_k(x) \neq 0\}| \leq \sum_{(\delta,\beta) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}_*^+} |S_{\delta,\beta}| \quad (4.5.149)$$

Ahora supongamos que existen $\delta_*, \beta_*, \eta > 0$ tales que $|S_{\delta_*,\beta_*}| \geq \eta > 0$. Entonces, por la monotonía de la medida

$$\forall \delta \in (0, \delta_*) : S_{\delta_*,\beta_*} \subseteq S_{\delta,\beta_*} \rightarrow 0 < \eta \leq |S_{\delta_*,\beta_*}| \leq |S_{\delta,\beta_*}|. \quad (4.5.150)$$

De esto se sigue que

$$\|\hat{w}_{k,\varepsilon}\|_{L^2(\mathbb{R} \setminus (-\delta_\alpha - \delta, \delta_\alpha + \delta))} \leq \left(\frac{2c_k}{Q_\delta}\right)^{\frac{1}{2}} \varepsilon^{\frac{m}{m+2}}, \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_\delta), \forall \delta > 0 \quad (4.5.151)$$

que viene de (4.4.103). Para cada $\delta > 0$ tomamos

$$\varepsilon_\delta^* = \min \left\{ \varepsilon_\delta, \frac{Q_\delta}{(4c_k)^{\frac{1}{2}}} \right\} \quad (4.5.152)$$

Considerando (P3), obtenemos $\delta' \in (0, \delta_*)$ tal que

$$Q_\delta < \frac{\beta_*^2 \eta}{2}, \quad \forall \delta \in (0, \delta'). \quad (4.5.153)$$

Sea $\delta_0 \in (0, \delta')$, entonces tenemos que

$$|\hat{u}_k(x)|^2 \geq \beta_*^2, \quad \forall x \in S_{\delta_0, \beta_*}$$

si integramos en le dominio S_{δ_0, α_*} y por la desigualdad (4.5.150)

$$\begin{aligned} \int_{S_{\delta_0, \beta_*}} |\hat{u}_k(x)|^2 &\geq \int_{S_{\delta_0, \beta_*}} \beta_*^2 \\ &= \beta_*^2 |S_{\delta_0, \beta_*}| \\ &\geq \beta_*^2 \eta \end{aligned} \quad (4.5.154)$$

Análogo a la Demostración 4.4, por cada $\sigma > 0$ existe un $\varepsilon_\sigma \in (0, \varepsilon_\delta^*)$ tal que:

$$\|\hat{u}_k\|_{L^2(S_{\delta_0, \beta_*})}^2 \leq \|\hat{w}_{k, \varepsilon}\|_{L^2(S_{\delta_0, \beta_*})}^2 + \sigma, \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_\sigma)$$

Por lo tanto, para $\sigma = \frac{\beta_*^2 \eta}{3}$ y $\varepsilon \in (0, \varepsilon_\sigma)$, por (4.5.151), (4.5.152) y (4.5.153)

$$\begin{aligned} \int_{S_{\delta_0, \beta_*}} |\hat{u}_k(x)|^2 dx &\leq \sigma + \int_{S_{\delta_0, \beta_*}} |\hat{w}_{k, \varepsilon}(x)|^2 dx \\ &= \frac{\beta_*^2 \eta}{3} + \int_{S_{\delta_0, \beta_*}} |\hat{w}_{k, \varepsilon}(x)|^2 dx \\ &\leq \frac{\beta_*^2 \eta}{3} + \left(\frac{4c_k^{\delta_\alpha}}{Q_\delta} \right) \varepsilon^2 \\ &\leq \frac{\beta_*^2 \eta}{3} + \left(\frac{4c_k^{\delta_\alpha}}{Q_\delta} \right) (\varepsilon_\delta^*)^2 \\ &< \frac{\beta_*^2 \eta}{3} + Q_\delta \\ &< \frac{5}{6} \beta_*^2 \eta \end{aligned} \quad (4.5.155)$$

Lo que contradice (4.5.154). Entonces

$$\forall (\delta, \beta) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}_*^+ : |S_{\delta, \beta}| = 0. \quad (4.5.156)$$

Usando la desigualdad (4.5.149) y (4.5.156), tenemos

$$0 < |\{x \in \mathbb{R} \setminus (-\delta_\alpha, \delta_\alpha) : \hat{u}_k(x) \neq 0\}| \leq \sum_{(\delta, \beta) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}_*^+} |S_{\delta, \beta}| = 0$$

lo que contradice (4.5.148).

iv) Por ii) se tiene que $\hat{u}_k|_{(-\delta_\alpha, \delta_\alpha)} \in \mathbf{H}_P(-\delta_\alpha, \delta_\alpha)$. Por otro lado, por (4.5.146)

$$J^{\delta_\alpha}(\hat{u}_k|_{(-\delta_\alpha, \delta_\alpha)}) = c_k^{\delta_\alpha}.$$

□

En realidad, tenemos convergencia fuerte, conforme al siguiente lema.

Lema 4.27. Sean $\alpha > 1$ y $\delta_\alpha > 0$ conforme al Lema 4.1. Para todo $k \in \mathbb{N}$, cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, $w_{k, \varepsilon}$ subconverge en la norma de $\mathbf{H}^1(\mathbb{R})$ a u_k .

Demostración. Sea $k \in \mathbb{N}$, genérico. Por el Lema 4.3 concluimos $H_\varepsilon \subseteq L^2(\mathbb{R})$, lo que induce que $\hat{w}_{k, \varepsilon}$ subconverge en $L^2(\mathbb{R})$ a \hat{u}_k cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, i.e.,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} (\hat{w}_{k, \varepsilon})^2 dx = \int_{\mathbb{R}} (\hat{u}_k)^2 dx$$

Por (4.5.144) tenemos que para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_\delta)$, como la función P es m -homogénea y usando la desigualdad de Poincaré

$$\begin{aligned} \|\hat{w}'_{k, \varepsilon}\|_{\mathbf{H}_0^1(\mathbb{R})}^2 &\leq \|\hat{w}_{k, \varepsilon}\|_{P, \infty}^2 \\ &\leq 2c_k^{\delta_\alpha} \\ &= \|\hat{u}_k\|_{P, \delta_\alpha}^2 \\ &= \int_{(-\delta_\alpha, \delta_\alpha)} \left[|\hat{u}'_k|^2 + P\hat{u}_k^2 \right] dx \\ &\leq C \int_{(-\delta_\alpha, \delta_\alpha)} |\hat{u}'_k|^2 dx \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}} |\hat{u}'_k|^2 dx \end{aligned}$$

lo que nos conduce a

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\hat{w}_{k, \varepsilon}\|_{\mathbf{H}^1(\mathbb{R})} \leq C \|\hat{u}_k\|_{\mathbf{H}^1(\mathbb{R})}$$

lo que concluye la demostración. □

Nuestro próximo objetivo, es obtener un control exponencial de la descomposición de la familia $\{w_{k, \varepsilon}\}$ fuera de $(-\delta_\alpha, \delta_\alpha)$.

Lema 4.28. Sea $\alpha > 1$, tomando $\delta_\alpha > 0$ conforme al Lema 4.1. Para todo $k \in \mathbb{N}$ existe una K_2 tal que

$$\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_\delta) : \quad \|\hat{w}_{k, \varepsilon}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq K_2. \quad (4.5.157)$$

Demostración. Sea $k \in \mathbb{N}$, genéricos. Del Lema 4.3 y usando (4.5.144) tenemos que para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_\delta)$,

$$\begin{aligned} \|\hat{w}_{k,\varepsilon}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} &\leq C_3 \|\hat{w}_{k,\varepsilon}\|_{P,\infty} \\ &\leq \left(C_4 \sqrt{c_k^{\delta_\alpha}} \right) =: K_2, \end{aligned} \quad (4.5.158)$$

donde la constante K_2 depende de k . □

Observación 4.12. Como $v_{k,\varepsilon}(x) = \varepsilon^{\frac{2m}{(p-1)(m+2)}} \hat{w}_{k,\varepsilon} \left(\varepsilon^{-\frac{2}{m+2}} (x - x_0) \right)$ tenemos la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned} \|v_{k,\varepsilon}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} &= \sup_{x \in \mathbb{R}} |v_{k,\varepsilon}(x)| \\ &= \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \varepsilon^{\frac{2m}{(p-1)(m+2)}} \hat{w}_{k,\varepsilon} \left(\varepsilon^{-\frac{2}{m+2}} (x - x_0) \right) \right| \\ &= \sup_{\varepsilon^{-\frac{2}{m+2}} (x - x_0) \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \varepsilon^{-\frac{2}{m+2}} x_0 \right\}} \left| \varepsilon^{\frac{2m}{(p-1)(m+2)}} \hat{w}_{k,\varepsilon} \left(\varepsilon^{-\frac{2}{m+2}} (x - x_0) \right) \right| \\ &= \sup_{z \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \varepsilon^{-\frac{2}{m+2}} x_0 \right\}} \left| \varepsilon^{\frac{2m}{(p-1)(m+2)}} \hat{w}_{k,\varepsilon}(z) \right| \\ &\leq \sup_{z \in \mathbb{R}} \left| \varepsilon^{\frac{2m}{(p-1)(m+2)}} \hat{w}_{k,\varepsilon}(z) \right| \\ &\leq \varepsilon^{\frac{2m}{(p-1)(m+2)}} \sup_{z \in \mathbb{R}} |\hat{w}_{k,\varepsilon}(z)| \\ &\leq \varepsilon^{\frac{2m}{(p-1)(m+2)}} \|\hat{w}_{k,\varepsilon}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}, \end{aligned}$$

de donde, aplicando el Lema 4.28, se sigue que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|v_{k,\varepsilon}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (4.5.159)$$

Por otro lado, como $u_k \in \mathcal{M}$ y $\|u_k\|_{L^{p+1}(\mathbb{R})} \neq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, está claro que existe una constante $\eta_k > 0$ tal que

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\|v_{k,\varepsilon}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}}{\varepsilon^{\frac{2m}{(p-1)(m+2)}}} \geq \eta_k > 0. \quad (4.5.160)$$

Para obtener el decrecimiento exponencial de $w_{k,\varepsilon}$, daremos un argumento de comparación como en [5]. Consideramos una solución positiva para el problema

$$\begin{cases} \Delta U - 2bU = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \setminus \Omega^\delta, \\ U = a & \text{sobre } \partial\Omega^\delta, \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} U(x) = 0, \end{cases} \quad (4.5.161)$$

donde $a, b > 0$ y $\Omega^\delta := \{x \in \mathbb{R}^N : \text{dist}(x, \Omega) < \delta\}$. Tal solución satisface

$$U(x) \leq C \exp\left(-b \cdot \text{dist}\left(x, \Omega^\delta\right)\right), \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \Omega^\delta \quad (4.5.162)$$

donde C es una constante que depende de a y de Ω^δ , ver [5, Lema 2.7].

Lema 4.29. Sean $\alpha > 1$ y $\delta_\alpha > 0$ conforme al Lema 4.1. Para todo $k \in \mathbb{N}, \delta, c > 0$, existe $\varepsilon_* \in (0, \varepsilon_\delta)$ tal que

$$|\hat{w}_{k,\varepsilon}(x)| < C \exp\left(-\frac{c}{\varepsilon^{\frac{m}{m+2}}} \cdot \text{dist}\left[x, (-\delta_\alpha - \delta, \delta_\alpha + \delta)\right]\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_*), \quad (4.5.163)$$

donde C depende de K_2 y de $[-\delta_\alpha - \delta, \delta_\alpha + \delta]$

Demostración. Tomemos $k \in \mathbb{N}$ y $\delta, c > 0$, genéricos. Tomemos $\varepsilon_* \in (0, \varepsilon_\delta)$ tale que

$$Q_\delta > \left(K_2 + \frac{2c}{\varepsilon_*^{\frac{m}{m+2}}}\right) \varepsilon_*^{\frac{2m}{m+2}}.$$

Por el Lema 4.28 y para todos $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*)$ y $x \in \mathbb{R} \setminus [-\delta_\alpha - \delta, \delta_\alpha + \delta]$, tenemos que

$$\begin{aligned} F_{k,\varepsilon}(x) &:= V_\varepsilon - |\hat{w}_{k,\varepsilon}|^{p-1} \\ &\geq P + \varepsilon^{-\frac{2m}{m+2}} Q_\delta - K_2 \\ &> P + K_2 + \frac{2c}{\varepsilon^{\frac{m}{m+2}}} - K_2 \\ &= P + \frac{2c}{\varepsilon^{\frac{m}{m+2}}} \\ &\geq \frac{2c}{\varepsilon^{\frac{m}{m+2}}}. \end{aligned}$$

Ahora consideramos U una solución al problema (4.5.161) con $a = K_2$ y $b = \frac{c}{\varepsilon^{\frac{m}{m+2}}}$. Entonces,

$$\begin{cases} U'' - F_{k,\varepsilon}(x)U \leq \left(U'' - \frac{2c}{\varepsilon^{\frac{m}{m+2}}}U\right) = 0, & \text{en } \mathbb{R} \setminus (-\delta_\alpha - \delta, \delta_\alpha + \delta), \\ U(\delta_\alpha + \delta) = U(-\delta_\alpha - \delta) = K_2, \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} U(x) = 0, \end{cases} \quad (4.5.164)$$

de donde se sigue que

$$\begin{cases} (U - \hat{w}_{k,\varepsilon})'' - F_{k,\varepsilon}(x)(U - \hat{w}_{k,\varepsilon}) \leq 0 & \text{en } \mathbb{R} \setminus (-\delta_\alpha - \delta, \delta_\alpha + \delta) \\ (U - \hat{w}_{k,\varepsilon})(-\delta_\alpha - \delta), (U - \hat{w}_{k,\varepsilon})(\delta_\alpha + \delta) \geq 0, \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} (U(x) - \hat{w}_{k,\varepsilon}(x)) = 0. \end{cases} \quad (4.5.165)$$

Por la tercera condición, tomemos $\hat{\varepsilon} > 0$ existe un $\delta' > 0$ tal que

$$\forall |x| > \delta' : |U(x) - w_{k,\varepsilon}(x)| \leq \hat{\varepsilon}. \quad (4.5.166)$$

Definimos el conjunto

$$I_{\delta'} := (-\delta_\alpha - \delta', -\delta_\alpha - \delta) \cup (\delta_\alpha + \delta, \delta_\alpha + \delta').$$

Usando (4.5.166) y el problema (4.5.165) planteamos el siguiente problema

$$\begin{cases} (U - w_{k,\varepsilon})'' - F_{k,\varepsilon}(x)(U - w_{k,\varepsilon}) \leq 0 & \text{en } I_{\delta'}, \\ U - w_{k,\varepsilon} \geq 0 & \text{en } \partial I_{\delta'}. \end{cases} \quad (4.5.167)$$

Por el Principio del Máximo Débil aplicado en la primera inecuación de (4.5.167)

$$\inf_{x \in I_{\delta'}} (U(x) - w_{k,\varepsilon}(x)) = \inf_{x \in \partial I_{\delta'}} (U(x) - w_{k,\varepsilon}(x)) = 0. \quad (4.5.168)$$

Recordemos que cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ produce que $\delta' \rightarrow \infty$ entonces se tiene que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_{\delta'} = \mathbb{R} \setminus (-\delta_\alpha - \delta', \delta_\alpha + \delta'). \quad (4.5.169)$$

Aplicando (4.5.169) en (4.5.168). Ahora está claro que para el problema (4.5.165) se tiene que

$$\inf_{x \in \mathbb{R} \setminus (-\delta_\alpha - \delta, \delta_\alpha + \delta)} (U(x) - w_{k,\varepsilon}(x)) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} (U(x) - w_{k,\varepsilon}(x)) = 0,$$

es decir,

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus (-\delta_\alpha - \delta, \delta_\alpha + \delta) : w_{k,\varepsilon}(x) \leq U(x). \quad (4.5.170)$$

Por otro lado, por el sistema de inecuaciones de (4.5.164) planteamos el siguiente sistema de inecuaciones

$$\begin{cases} (-U)'' - F_{k,\varepsilon}(x)(-U) \geq 0 & \text{en } \mathbb{R} \setminus (-\delta_\alpha - \delta, \delta_\alpha + \delta), \\ -U(-\delta_\alpha - \delta) = -U(\delta_\alpha + \delta) = -K_2, \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} -U(x) = 0, \end{cases} \quad (4.5.171)$$

por lo tanto, construimos un sistema de inecuaciones análogo a (4.5.165)

$$\begin{cases} (-U - w_{k,\varepsilon})'' - F_{k,\varepsilon}(x)(-U - w_{k,\varepsilon}) \geq 0 & \text{en } \mathbb{R} \setminus (-\delta_\alpha - \delta, \delta_\alpha + \delta) \\ (-U - w_{k,\varepsilon})(-\delta_\alpha - \delta), (-U - w_{k,\varepsilon})(\delta_\alpha + \delta) < 0, \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} (-U(x) - w_{k,\varepsilon}(x)) = 0. \end{cases} \quad (4.5.172)$$

Por la tercera condición, tomemos $\check{\varepsilon} > 0$ existe un $\check{\delta}' > 0$ tal que

$$\forall |x| > \check{\delta}' : |-U(x) - w_{k,\varepsilon}(x)| \leq \check{\varepsilon}. \quad (4.5.173)$$

Usando (4.5.173) y el problema (4.5.172), deducimos el siguiente problema

$$\begin{cases} (-U - w_{k,\varepsilon})'' - F_{k,\varepsilon}(x)(-U - w_{k,\varepsilon}) \geq 0 & \text{en } I_{\check{\delta}'}, \\ -U - w_{k,\varepsilon} \leq 0 & \text{en } \partial I_{\check{\delta}'}. \end{cases} \quad (4.5.174)$$

Por el Principio del Máximo Débil aplicado en la primera inecuación de (4.5.174)

$$\sup_{x \in I_{\delta'}^+} (-U(x) - w_{k,\varepsilon}(x)) = \sup_{x \in \partial I_{\delta'}^+} (-U(x) - w_{k,\varepsilon}(x)) = 0. \quad (4.5.175)$$

Por (4.5.169) y (4.5.175). Se tiene que para el problema (4.5.172):

$$\sup_{x \in \mathbb{R} \setminus (-\delta_\alpha - \delta, \delta_\alpha + \delta)} (U(x) - w_{k,\varepsilon}(x)) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} (U(x) - w_{k,\varepsilon}(x)) = 0$$

es decir,

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus (-\delta_\alpha - \delta, \delta_\alpha + \delta) : w_{k,\varepsilon}(x) \geq -U(x). \quad (4.5.176)$$

Por las proposiciones (4.5.170), (4.5.176) y (4.5.162) concluimos

$$|w_{k,\varepsilon}(x)| \leq U(x) \leq C \exp\left(-\frac{c}{\varepsilon^{\frac{m}{m+2}}} \cdot \text{dist}[x, (-\delta_\alpha - \delta, \delta_\alpha + \delta)]\right),$$

para todo $x \in \mathbb{R} \setminus (-\delta_\alpha - \delta, \delta_\alpha + \delta)$

□

4.6. Comportamiento asintótico en el límite

Ya sabemos que la familia de soluciones $w_{k,\varepsilon}$ converge en $H^1(\mathbb{R})$ a una función $u_k^{\delta_\alpha}$ que es una solución de (P_γ) en $(-\delta_\alpha, \delta_\alpha)$. Por el Teorema de Rellich-Kondrachov la función $u_k^{\delta_\alpha}$ posee un representante continuo. Por otro lado, en $\mathbb{R} \setminus (-\delta_\alpha - \delta, \delta_\alpha + \delta)$, tenemos decaimiento exponencial según el Lema 4.29. El comportamiento uniforme de $w_{k,\varepsilon}$ en el límite dentro del conjunto $(-\delta_\alpha, \delta_\alpha)$ no está cubierto por estos dos argumentos. En esta sección probamos el siguiente resultado.

Proposición 4.9. *Sean $\alpha > 1$ y $\delta_\alpha > 0$ conforme al Lema 4.1. La familia de soluciones $w_{k,\varepsilon}$ verifica*

$$\forall k \in \mathbb{N} : \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \max_{x \in \{-\delta_\alpha, \delta_\alpha\}} |w_{k,\varepsilon}(x)| = 0. \quad (4.6.177)$$

Definimos el anillo alrededor de $\{-\delta_\alpha, \delta_\alpha\}$ como

$$R(\delta) := (-\delta_\alpha - \delta, -\delta_\alpha + \delta) \cup (\delta_\alpha - \delta, \delta_\alpha + \delta), \quad \delta \in (0, \delta_\alpha)$$

y consideramos

$$M_\varepsilon(\delta) = \max_{x \in \partial R(\delta)} |w_{k,\varepsilon}(x)|, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Con esas definiciones en mente mostramos el siguiente resultado.

Lema 4.30. *Sean $\alpha > 1$ y $\delta_\alpha > 0$ conforme al Lema 4.1. Dada $\sigma > 0$, existe $\delta_\sigma > 0$ tal que*

$$\max_{x \in \partial R(\delta)} |w_{k,\varepsilon}(x)| \leq M_\varepsilon(\delta) + \sigma, \quad \forall \delta \in (0, \delta_\sigma). \quad (4.6.178)$$

Demostración. Tomemos $k \in \mathbb{N}$ y $\sigma > 0$, genéricos. Por comodidad de notación, escribimos

$$w = w_{k,\varepsilon} \quad \text{y} \quad R^\pm(\delta) := \{x \in R(\delta) \mid \pm w > 0\}.$$

Entonces tenemos

$$\begin{cases} \pm w'' \mp Pw \pm |w|^{p-1}w \geq 0 & \text{en } R^\pm(\delta) \\ \pm w \geq 0 & \text{sobre } \partial R^\pm(\delta) \end{cases} \quad (D^\pm)$$

Consideramos el problema (D^+) , para el cual definimos $v := w - M_\varepsilon(\delta)$ para obtener

$$\begin{cases} v'' \geq f & \text{en } R^+(\delta) \\ v \leq 0 & \text{sobre } \partial R^+(\delta) \end{cases} \quad (4.6.179)$$

donde $f := (P - |w|^{p-1})(M_\varepsilon(\delta) + v)$.

Puesto que $v \leq 0$ en $\partial R^+(\delta)$, usando el Principio del Máximo de Alexandroff, tenemos

$$\begin{aligned} \sup_{R^+(\delta)} v &\leq \sup_{\partial R^+(\delta)} v^+ + C \cdot \|f^-\|_{L^1(R^+(\delta))} \\ &\leq C \cdot \|f^-\|_{L^1(R^+(\delta))} \\ &\leq C |R^+(\delta)| \left(\max_{x \in R^+(\delta)} P(x) + K_2^{p-1} \right) \left(M_\varepsilon(\delta) + \sup_{R^+(\delta)} v \right), \end{aligned} \quad (4.6.180)$$

donde $C = C(\delta_\alpha) > 0$. Notemos

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} |R^+(\delta)| = 0. \quad (4.6.181)$$

Ahora tomemos $\sigma > 0$ por (4.6.181), existe un $\delta_\sigma > 0$, usando la desigualdad (4.6.180) junto con la definición de v se tiene que

$$\sup_{R^+(\delta)} v = \sup_{R^+(\delta)} (w - M_\varepsilon(\delta)) = \sup_{R^+(\delta)} w - M_\varepsilon(\delta) \leq \sigma, \quad \forall \delta \in (0, \delta_\sigma). \quad (4.6.182)$$

Consideramos el problema (D^-) y para el mismo definimos $v := w + M_\varepsilon(\delta)$ para obtener de esta manera

$$\begin{cases} v'' \leq f & \text{en } R^-(\delta), \\ v \geq 0 & \text{en } \partial R^-(\delta), \end{cases} \quad (4.6.183)$$

donde $f := (P - |w|^{p-1})(M_\varepsilon(\delta) - v)$.

Puesto que $v \geq 0$ en $\partial R^-(\delta)$, usando el Principio del Máximo de Alexandroff, tenemos

$$\begin{aligned} \inf_{R^-(\delta)} v &\geq \inf_{\partial R^-(\delta)} v^- - C \cdot \|f^+\|_{L^1(R^-(\delta))} \\ &\geq -C \cdot \|f^+\|_{L^1(R^-(\delta))} \\ &\geq -C |R^-(\delta)| \left(\max_{x \in R^-(\delta)} P(x) + K_2^{p-1} \right) \left(M_\varepsilon(\delta) + \sup_{R^-(\delta)} v \right), \end{aligned} \quad (4.6.184)$$

donde $C = C(\delta_\alpha) > 0$. Notemos que:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} |R^-(\delta)| = 0. \quad (4.6.185)$$

Ahora tomemos $\sigma > 0$ por (4.6.185), existe un $\delta_\sigma > 0$, usando la desigualdad (4.6.184) junto con la definición de v se tiene que

$$\inf_{R^-(\delta)} v = \inf_{R^-(\delta)} (w + M_\varepsilon(\delta)) = \inf_{R^-(\delta)} w + M_\varepsilon(\delta) \geq -\sigma, \quad \forall \delta \in (0, \delta_\sigma). \quad (4.6.186)$$

Por las desigualdades (4.6.182) y (4.6.186) concluimos la demostración. \square

Definimos el conjunto

$$\forall \delta \in (0, \delta_\alpha): \quad (-\delta_\alpha, \delta_\alpha)_\delta := (\infty, -\delta_\alpha - \delta) \cup (-\delta_\alpha + \delta, \delta_\alpha - \delta) \cup (\delta_\alpha + \delta, \infty).$$

Lema 4.31. Sean $\alpha > 1$ y $\delta_\alpha > 0$ conforme al Lema 4.1. Dado $\sigma > 0$, existe $\delta', \varepsilon' > 0$ tal que

$$M_\varepsilon(\delta') < \sigma, \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon'). \quad (4.6.187)$$

Demostración. Definimos

$$m_\delta(\varepsilon) := \max_{x \in \partial(-\delta_\alpha, \delta_\alpha)_\delta} |w_{k,\varepsilon}(x)| \quad \text{y} \quad m^\delta(\varepsilon) := \max_{x \in \{-\delta_\alpha - \delta, \delta_\alpha + \delta\}} |w_{k,\varepsilon}(x)|.$$

Mostremos que $m_\delta(\varepsilon)$ y $m^\delta(\varepsilon)$ están acotados por σ .

- i) Como se demuestra en el Lema 4.29, $w_{k,\varepsilon}$ decae exponencialmente i.e. $w_{k,\varepsilon} \rightarrow 0$ uniformemente en $\{-\delta_\alpha - \delta, \delta_\alpha + \delta\}$ con lo que concluimos que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} m^\delta(\varepsilon) = 0.$$

- ii) Ahora estudiamos $m_\delta(\varepsilon)$. Denotamos por K_{c_k} el conjunto de puntos críticos de funcional J que corresponde al valor crítico c_k . De acuerdo con los Lemas 4.26 y 4.27, existe $u \in K_{c_k}$ y $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} w_{k,\varepsilon_n} =: w_n = u,$$

en $H^1(\mathbb{R})$ y puntualmente. Definimos el conjunto

$$R_\delta(\eta) := (-\delta_\alpha, \delta_\alpha)_{\delta-\eta} \setminus \overline{(-\delta_\alpha, \delta_\alpha)_{\delta+\eta}}, \quad \eta > 0,$$

se tiene que

$$\forall \eta > 0: \quad R_\delta(\eta) \cap \{-\delta_\alpha, \delta_\alpha\} = \emptyset.$$

Vemos que para cada conjunto compacto $D \subseteq (-\delta_\alpha, \delta_\alpha)$, la convergencia de w_n a u es uniforme en D . Entonces, en particular, dado $\sigma > 0$, existe un $n^* = n^*(\sigma, w) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\max_{x \in R_\delta(\eta)} |w_n(x) - u(x)| < \frac{\sigma}{2}, \quad \forall n > n^*. \quad (4.6.188)$$

Por otro lado, ya que $u|_{\mathbb{R} \setminus (-\delta_\alpha, \delta_\alpha)} = 0$ y u es una solución de (P_Y) , existe

$$\delta' = \delta'(\sigma, w) > 0$$

tal que

$$\max_{x \in R_{\delta'}(\eta)} |w_n(x)| < \frac{\sigma}{2}. \quad (4.6.189)$$

Luego, desde (4.6.188) y (4.6.189), obtenemos

$$m_{\delta'}(\varepsilon_\delta) < \sigma, \quad \forall n > n^*. \quad (4.6.190)$$

Vemos que los valores n^* y δ' dependen de u . Sin embargo, podemos argumentar usando la compacidad del conjunto K_{c_k} , que pueden elegirse de modo que dependan sólo de k , pero no en lo particular de $u \in K_{c_k}$.

□

Demostración de la Proposición 4.9. Probaremos que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall \sigma > 0, \exists \varepsilon' > 0: \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon') \Rightarrow \max_{x \in \{-\delta_\alpha, \delta_\alpha\}} |w_{k,\varepsilon}| \leq \sigma,$$

Sean $k \in \mathbb{N}$ y $\sigma > 0$, genéricos. Por el Lema 4.30 existe $\delta_{\frac{\sigma}{2}} > 0$ tal que

$$\max_{x \in \partial R(\delta)} |w_{k,\varepsilon}(x)| \leq M_\varepsilon(\delta) + \frac{\sigma}{2}, \quad \forall \delta \in (0, \delta_{\frac{\sigma}{2}}), \quad (4.6.191)$$

mientras que por el Lema 4.31, existen $\delta', \varepsilon' > 0$ tales que

$$M_\varepsilon(\delta') < \frac{\sigma}{2}, \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon'). \quad (4.6.192)$$

Tomemos a $\hat{\delta} := \min\{\delta, \delta'\}$, donde $\delta \in (0, \delta_{\frac{\sigma}{2}})$, por el (4.6.191) y (4.6.192) concluimos que

$$\max_{x \in \partial R(\delta)} |w_{k,\varepsilon}(x)| \leq \sigma, \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon'). \quad (4.6.193)$$

Ahora notemos

$$\{-\delta_\alpha, \delta_\alpha\} \subseteq R(\delta) \Rightarrow \max_{x \in \{-\delta_\alpha, \delta_\alpha\}} |w_{k,\varepsilon}| \leq \max_{x \in R(\delta)} |w_{k,\varepsilon}|. \quad (4.6.194)$$

Usando las proposiciones (4.6.193) y (4.6.194), concluimos la demostración.

□

Capítulo 5

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

5.1. Conclusiones

(a) En esta tesis se estudió el comportamiento cualitativo de soluciones de la ecuación

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \Delta v(x) - V(x)v(x) + |v(x)|^{p-1}v(x) = 0, & x \in \mathbb{R}^N, \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} v(x) = 0, \end{cases} \quad (\text{P}_\varepsilon)$$

donde $p > 1$ y el potencial V satisface

(V1) $V \in C(\mathbb{R}^N)$ no-negativa.

(V2)

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = \infty.$$

(V3) el conjunto de ceros del potencial V es distinto del vacío, i.e.,

$$\Omega := \{x \in \mathbb{R}^N \mid V(x) = 0\} \neq \emptyset.$$

Estudiamos de manera cualitativa el comportamiento de (P_ε) en el caso unidimensional, i.e. $N = 1$, enfocándonos en el Caso Finito (que fue descrito por, Byeon y Wang, [5]), i.e. considerando $\Omega = \{x_0\}$ y el potencial V decrece polinomialmente conforme se acerca a Ω . Para un $\alpha > 1$ encontramos un $\delta_\alpha > 0$ tal que el problema límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, fue

$$\begin{cases} u''(x) - P(x)u(x) + |u(x)|^{p-1}u(x) = 0, & x \in (-\delta_\alpha, \delta_\alpha), \\ u(-\delta_\alpha) = u(\delta_\alpha) = 0, \end{cases} \quad (\text{P}_Y)$$

donde la función P representa una generalización de un polinomio homogéneo de grado par y $(-\delta_\alpha, \delta_\alpha)$ es una vecindad escalada que contiene a Ω . Las conclusiones principales en este trabajo son las siguientes.

i) Por el esquema Ljusternik-Schnirelman usando el género de Krasnoselski se demostró la existencia de infinitos pares de soluciones de (P_ε) , denotándolas como

$$(v_{k,\varepsilon})_{k \in \mathbb{N}},$$

y de (P_Y) , denotándolas como

$$(u_k^{\delta_\alpha})_{k \in \mathbb{N}}.$$

ii) Para un $k \in \mathbb{N}$ fijo, a medida que $\varepsilon \rightarrow 0$, y mediante un escalamiento adecuado, los puntos críticos $(v_{k,\varepsilon})_{k \in \mathbb{N}}$, subconvergen a los puntos críticos $(u_k^{\delta_\alpha})_{k \in \mathbb{N}}$.

iii) Las soluciones $(u_k^{\delta_\alpha})_{k \in \mathbb{N}}$ presentaron un fenómeno de concentración en el intervalo $(-\delta_\alpha, \delta_\alpha)$ y se anularon, con velocidad exponencial, fuera del intervalo $(-\delta_\alpha, \delta_\alpha)$.

(b) Fueron necesarias herramientas, conocimientos y conceptos de Análisis Funcional, Cálculo Variacional, Análisis Numérico, EDP y de Mecánica Cuántica para entender el problema y su abordaje.

(c) Fue preciso leer varios artículos que aportaban desde las perspectivas anteriores al objetivo del trabajo. Estos conceptos no son triviales y se tradujo en un esfuerzo adicional para obtener resultados satisfactorios basados en el trabajo de Felmer y Mayorga, en [15], y poder contrastar estos resultados con los resultados teóricos mostrados por Byeon y Wang, en [5].

(d) Debido a que el trabajo fue arduo para abordar (P_ε) en el caso unidimensional, i.e. $N = 1$, preveemos que la dificultad incrementará radicalmente para dimensiones $N > 1$, debido especialmente a la presencia de la no linealidad de la Ecuación de Schrödinger en el término

$$|v(x)|^{p-1} v(x).$$

Esta conjetura la hacemos debido a que no es posible usar el Teorema 2.15 ni el Teorema 2.16 y por lo tanto nuestras soluciones

$$(v_{k,\varepsilon})_{k \in \mathbb{N}} \quad \text{y} \quad (u_k^{\delta_\alpha})_{k \in \mathbb{N}}$$

ya no tendrían necesariamente representantes continuos. Esto implica que es necesario hacer un nuevo estudio para $N > 1$.

5.2. Recomendaciones

Las recomendaciones con sus respectivos comentarios que se prestan en esta sección final son dos prolongaciones y una continuación que (si se desea a futuro) podrían hacerse con, y a partir de, este trabajo.

(a) Revisar el Lema 4.1 para ver si es posible extender el conjunto $(-\delta_\alpha, \delta_\alpha)$ y trabajar sobre todo \mathbb{R} . Lo importante de todo este estudio es ver si nuestro nuevo J cumple con la propiedad **iv)** del Teorema 4.1.

(b) Estudiar el trabajo de Felmer y Mayorga, en [15], para el caso infinito. Lo fundamental de esto es ver si se puede aplicar la teoría del género de Krasnoselski y ver si se mantiene el resultado de existencia de soluciones infinitas dentro de la variedad de Hilbert.

(c) Revisar el trabajo de Byeon y Wang, en [5]), para los perfiles asintóticos y fenómenos de concentración para el caso infinito. Esto se lo hace porque Byeon y Wang muestran un estudio detallado para el caso cuando existe solo una solución para el caso infinito.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] AMBROSETTI, A., AND MALCHIODI, A. *Nonlinear Analysis and Semilinear Elliptic Problems*, vol. 104. Cambridge University Press, 2007.
- [2] BADIALE, M., AND SERRA, E. *Semilinear Elliptic Equations for Beginners: Existence Results via the Variational Approach*. Springer Science & Business Media, 2010.
- [3] BOMBAL, F. Los Espacios Abstractos y el Análisis Funcional. *Las Matemáticas del siglo XX*, 20 (1) (2000), 205–210.
- [4] BREZIS, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer Science & Business Media, 2010.
- [5] BYEON, J., AND WANG, Z.-Q. Standing waves with a critical frequency for nonlinear schrödinger equations. *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 165, 4 (2002), 295–316.
- [6] CHAMORRO, D. *Espacios de Lebesgue y de Lorentz*, vol. 2. Amarun, 2018.
- [7] CLAPP, M. *Análisis Matemático*. UNAM, 2015.
- [8] COLEMAN, R. *Calculus on Normed Vector Spaces*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [9] CORNEA, O., LUPTON, G., OPREA, J., AND TANRÉ, D. *Lusternik-Schnirelmann Category*. No. 103. American Mathematical Soc, 2003.
- [10] DEBNATH, L., AND MIKUSINSKI, P. *Introduction to Hilbert Spaces with Applications*. Academic Press, 2005.
- [11] DEL PINO, M., AND FELMER, P. Semi-classical States of Nonlinear Schrödinger Equations: A Variational Reduction Method. *Mathematische Annalen* 324, 1 (2002), 1–32.
- [12] DEL PINO, M., AND FELMER, P. L. Local Mountain Passes for Semilinear Elliptic Problems in Unbounded Domains. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations* 4, 2 (1996), 121–137.
- [13] DOLBEAULT, J., FELMER, P., AND MAYORGA-ZAMBRANO, J. Compactness properties for trace-class operators and applications to Quantum Mechanics. *Monatshefte für Mathematik* 155, 1 (2008), 43.
- [14] EVANS, L. C. *Partial Differential Equations*, vol. 19. American Mathematical Society, 2010.
- [15] FELMER, P., AND MAYORGA-ZAMBRANO, J. Multiplicity and Concentration for the Nonlinear Schrödinger Equation with Critical Frequency. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications* 66, 1 (2007), 151–169.

- [16] FLOER, A., AND WEINSTEIN, A. Nonspreading wave packets for the cubic Schrödinger equation with a bounded potential. *Journal of Functional analysis* 69, 3 (1986), 397–408.
- [17] GRATTON, J. *Introducción a la Mecánica Cuántica*, vol. 4. 2003.
- [18] GREINER, W. *Relativistic Quantum Mechanics*, vol. 3. Springer, 1990.
- [19] HAN, Q., AND LIN, F. Elliptic partial differential equations (Courant lecture notes in mathematics 1); New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York. *American Mathematical Society, Providence, RI* (1997).
- [20] KOLMOGOROV, A. N., AND FOMIN, S. V. *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis. Metric and Normed Spaces*, vol. 1. Graylock Press Rochester NY, 1957.
- [21] KOLMOGOROV, A. N., AND FOMIN, S. V. *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis. Measure, The Lebesgue Integral & Hilbert space*, vol. 2. Graylock Press Rochester NY, 1961.
- [22] KOLMOGOROV, A. N., AND FOMIN, S. V. *Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional*. 1972.
- [23] LANDAU, L. D., AND LIFSHITZ, E. M. *Quantum Mechanics: A Shorter Course of Theoretical Physics*, vol. 2. Elsevier, 2013.
- [24] LIMA, E. L. *Análisis Real*. Instituto de Matemática y Ciencias Afines, 2005.
- [25] MAYORGA-ZAMBRANO, J., AND CARRASCO-BETANCOURT, R. *Concentration of solutions for a one-dimensional nonlinear Schrödinger Equation with critical frequency*. Preprint, 2016.
- [26] MAYORGA-ZAMBRANO, J., AND LEIVA, H. *An Introduction to Functional Analysis*. Preprint, 2018.
- [27] MAYORGA-ZAMBRANO, J., AND SALINAS, Z. *Sobolev-like cones of trace-class operators on unbounded domains: Interpolation inequalities and compactness properties*. Elsevier, 2013.
- [28] MCMAHON, D. *Quantum Mechanics Demystified*. McGraw-Hill, 2013.
- [29] RABINOWITZ, P. H. *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations*. No. 65. American Mathematical Soc., 1984.
- [30] RABINOWITZ, P. H. *On a class of nonlinear Schrödinger equations*, vol. 43. Springer, 1992.
- [31] RUDIN, W. *Principles of Mathematical Analysis*, vol. 3. McGraw-hill New York, 1964.
- [32] SALSA, S. *Partial Differential Equations in action: from modelling to theory*, vol. 99. Springer, 2016.
- [33] ZETTILI, N. *Quantum Mechanics: Concepts and Applications*. Wiley New York, 2003.