

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS

CÁLCULO DE FUNCIONES BETA EN TEORÍAS GAUGE NO
ABELIANAS CON GRUPO $SU(N)$

TRABAJO PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE FÍSICO

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

DIEGO SEBASTIÁN SANTANA ALARCÓN

`dsantana2804@gmail.com`

Director: DR. ÁLVARO DUEÑAS VIDAL

`alvaro.duenas@epn.edu.ec`

QUITO, JULIO 2019

DECLARACIÓN

Yo DIEGO SEBASTIÁN SANTANA ALARCÓN, declaro bajo juramento que el trabajo aquí escrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

A través de la presente declaración cedo mis derechos de propiedad intelectual, correspondientes a este trabajo, a la Escuela Politécnica Nacional, según lo establecido por la Ley de Propiedad Intelectual, por su reglamento y por la normatividad institucional vigente.

Diego Sebastián Santana Alarcón

CERTIFICACIÓN

Certifico que el presente trabajo fue desarrollado por DIEGO SEBASTIÁN SANTANA ALARCÓN, bajo mi supervisión.

Dr. Álvaro Dueñas Vidal.
Director del Proyecto

AGRADECIMIENTO

El presente trabajo de titulación fue posible gracias a las personas que estuvieron conmigo antes, durante, y en la finalización de esta etapa. Agradezco mucho a mis padres, Ángel, Fabiolita; hermanos (en orden de aparición), Santi, Nena y Andrea; amigos, Sofía, Liss, Kathy Bryan, Adrián, y profesores, sin su apoyo tanto académico como moral, la realización de este proyecto no se habría llevado a cabo. Debo mencionar también a mi hijo Samuel, al arte, a los libros, a la música y al cine que me acompañó toda esta etapa, fueron un motor más que me llevaron de la mano al final del camino.

Quiero agradecer en especial a mi madre por su cariño, por su paciencia, por su apoyo y amor incondicional. Estaré en deuda con ella por siempre.

DEDICATORIA

A Samuel

Índice general

Declaración de Autoría	I
Índice de Figuras	VII
Resumen	VIII
Abstract	IX
Convenciones	X
Prólogo	XII
1. Teorías Cuánticas de Campos	1
1.1. Métodos funcionales en Teoría Cuántica de Campos	1
1.2. Teorías con interacción	4
1.3. Teorías Gauge	7
1.4. Fijación Gauge y fantasmas de Faddeev y Popov	11
2. Mecanismos de Renormalización	15
2.1. Correcciones radiativas	15
2.2. Divergencia de integrales	17
2.3. Teoría renormalizable perturbativa y contraterminos	19
2.3.1. Correcciones radiativas en QED	20
2.3.2. Correcciones radiativas en Teorías Gauge No Abelianas	25
2.4. Enfoque de Wilson	28
2.5. Ecuación de Callan-Symanzik	29
2.5.1. Función beta	30
3. Cálculo de funciones Beta	33
3.1. Cálculo de la función Beta en QED	33
3.2. Cálculo de funciones Beta en Teorías Gauge No Abelianas	39
3.2.1. Propagador bosónico	40
3.2.2. Propagador fermiónico	47
3.2.3. Vértice 3-bosónico	49

4. Resultados y Conclusiones	53
4.1. Función Beta en QED	53
4.2. Función Beta en Teorías Gauge con grupo SU(N)	54
4.3. Aplicación a la Cromodinámica Cuántica SU(3)	56
4.4. Problemas del mecanismo de renormalización perturbativa	57
4.5. Consideraciones finales	59
A. Regularización dimensional	61
B. Representaciones de Grupos de Lie	64
Bibliografía	68

Índice de figuras

2.1.	Diagrama de Feynman de la dispersión de Compton	16
2.2.	Ejemplos de diagramas de 1-bucle en la dispersión de Compton . . .	16
2.3.	Diagramas de un bucle de teorías gauge no Abelianas. (a)-(d) son las correcciones al propagador bosónico, (e) al propagador fermiónico, (f) la corrección propagador fantasma y (g) y (h) son los diagramas de las correcciones al vértice fermión-bosón.	25
2.4.	Diagramas de un bucle en teorías no Abelianas. Los diagramas son las correcciones al: vértice fantasma (c) y (d), vértice 3-bosónico (e)-(h) y al vértice 4-bosónico (i)-(m).	26
3.1.	Estructura de los contratérminos a la función beta de la QED a orden de 1-bucle.	33
3.2.	Contribuciones al propagador bosónico a orden g^2 . Estos diagramas poseen divergencias que son canceladas por el contratérmino δ_3 . . .	39
3.3.	Corrección al propagador fermiónico. La divergencia de este diagrama es cancelada por el contratérmino δ_2	39
3.4.	Contribuciones a la corrección del vértice fermión-bosón a orden g^2 y cuyas divergencias son canceladas por el contratérmino δ_1	39
4.1.	Gráfica esquemática de la carga renormalizada en función de la escala de energía M . Aquí α es la constante de estructura fina dada por $\alpha = e^2/4\pi$	54
4.2.	Gráfica esquemática de la constante de acoplamiento renormalizada g_r en función de la distancia desde la constante de acoplamiento desnuda g . Aquí α_s es la constante de acoplamiento fuerte dada por $\alpha_s = g^2/4\pi$	55

Resumen

En Teoría Cuántica de Campos con interacciones siempre aparecen cantidades divergentes cuando se calculan amplitudes físicas. Estas cantidades deben ser expresadas mediante magnitudes medibles, y para este cometido se necesita un mecanismo de renormalización que elimine estas divergencias. Una consecuencia de la renormalización es que las constantes de acoplamiento renormalizadas dependen de la escala de energía. Esta dependencia se puede caracterizar mediante las funciones beta β de la teoría. El entendimiento de su estructura nos permite conocer el comportamiento infrarrojo y ultravioleta de la teoría, así como indicar su régimen perturbativo. En este trabajo se presenta el computo de la función beta en Teorías Gauge no Abelianas con grupo $SU(N)$, y se discute el caso especial de $SU(3)$. Se revisan las correcciones radiativas de la teoría a orden de 1-bucle, y se determina que los diagramas divergentes a tratar son las contribuciones del propagador bosónico, propagador fermiónico y el vértice bosón-fermión. En este trabajo utilizamos el esquema de Bogoliubov, Parasiuk y Hepp (BPH) para aislar divergencias en contratérminos y para renormalizar los parámetros de la teoría. Utilizamos, además, el método de regularización dimensional para regularizar integrales infinitas y garantizar su convergencia. A modo de ejercicio, calculamos también la función beta de la Electrodinámica Cuántica (QED). Como conclusión, para el caso de la QED se obtiene que la función beta es positiva, $\beta(e) > 0$, siendo segura en regímenes infrarrojos. En teorías Gauge no Abelianas, $\beta(g) < 0$ para $n_F < 16$, y presenta el fenómeno de libertad asintótica.

Abstract

In Quantum Field Theory with interactions divergent quantities always appear when calculating physical amplitudes. These quantities must be expressed by measurable magnitudes, and for this purpose a renormalization mechanism is needed to eliminate these divergences. A consequence of renormalization is that renormalized coupling constants depend on the energy scale. This dependence can be characterized by the beta β functions of the theory. The understanding of its structure allows us to know the infrared and ultraviolet behavior of the theory, as well as to indicate its perturbative regime. In this paper, we present the computation of the beta function in non-Abelian Gauge Theories with the SU (N) group, and the special case of SU (3) is discussed. The radiative corrections of the theory are reviewed to the order of 1-loop, and it is found out that the divergent diagrams to be dealt with are the contributions of the bosonic propagator, fermionic propagator and the boson-fermion vertex. In this paper, we use the Bogoliubov, Parasiuk and Hepp (BPH) scheme to isolate divergences in counterterms and to renormalize the parameters of the theory. We also use the method of dimensional regularization to regularize infinite integrals and guarantee their convergence. As an exercise, we also calculate the beta function of Quantum Electrodynamics (QED). As a conclusion, for the case of QED, it is obtained that the function beta is positive, $\beta(e) > 0$, being safe in infrared regimes. In non-Abelian Gauge theories, $\beta(g) < 0$ for $n_F < 16$, and presents the phenomenon of asymptotic freedom.

Convenciones

Unidades

Se trabajará en unidades naturales, donde

$$\hbar = c = 1.$$

En este sistema, se cumple

$$[\text{longitud}] = [\text{tiempo}] = [\text{energía}]^{-1} = [\text{masa}]^{-1}.$$

Por lo tanto, la masa (m) de una partícula es igual a su energía en reposo (mc^2).

Relatividad y Tensores

Utilizaremos la métrica de Minkowsky $\eta_{\mu\nu}$ con signatura $(+, -, -, -)$, es decir,

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Las coordenadas espacio temporales x^μ serán denotadas por índices Griegos ($\mu = 0, 1, 2, 3$) con la coordenada del tiempo t siendo x^0 . Las coordenadas espaciales x^i serán etiquetadas con índices Latinos ($i = 1, 2, 3$). Cuadrivectores son denotados por letra itálica y vectores tridimensionales son denotados por negrita. Por ejemplo,

$$x^\mu = (x^0, \mathbf{x}), \quad x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu = (x^0, -\mathbf{x})$$
$$p \cdot x = g_{\mu\nu}p^\mu x^\nu = p^0 x^0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}.$$

En transformadas de Fourier los factores de 2π aparecerán con la integral de momento. Por ejemplo, en cuatro dimensiones :

$$f(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \tilde{f}(k) e^{-ikx}$$

Además, se utilizará la prescripción de Feymann para resolver integrales moviendo sus puntos de divergencia una cantidad infinitesimal ϵ al espacio complejo. Por ejemplo, integrales como

$$\dots \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i e^{-ik \cdot (x_1 - x_2)}}{k^2 - m^2 + i\epsilon}$$

Se utiliza la convención de Einstein donde índices repetidos en una expresión se suman.

Prólogo

Este trabajo de titulación consta de cuatro capítulos. En el primer capítulo se sientan las bases fundacionales de las Teorías Cuánticas de Campos, marco teórico necesario para el desarrollo y fluidez de todo el estudio. Además de introducir la notación que se utilizará a lo largo del trabajo, se revisará la importancia y las bases del formalismo de integrales de camino y de las teorías con simetrías gauge.

En el segundo capítulo se aborda los mecanismos de renormalización, se estudiará las divergencias que aparecen en las teorías y como lidiarlas sistemáticamente. Se discutirá la teoría renormalizable perturbativa, metodología esencial al momento de calcular funciones beta.

En el tercer capítulo se calculan las funciones beta de la Electrodinámica Cuántica y Teorías Gauge No Abelianas. Esto se lo realiza al obtener expresiones explícitas de todas las contribuciones divergentes a orden de un bucle de diagramas de Feynman de ambas teorías a través de los contratérminos con condiciones de renormalización adecuadas. Finalmente, en el cuarto capítulo, se discute los resultados y se presentan las conclusiones.

Este estudio intenta ir más allá de los conocimientos de la carrera de pregrado, con el objetivo de enfatizar el conocimiento y el desarrollo de teorías de campo gauge no Abelianas; teorías de un interés científico muy alto y de un campo muy activo en la investigación actual. Tanto que el *Instituto Clay de Matemáticas* catalogó aspectos de las teorías gauge a principios del siglo XXI como uno de los problemas del milenio.^a

^a El planteamiento del problema oficial fue preparado por Arthur Jaffey y Edward Witten y se puede encontrar en [6].

Capítulo 1

Teorías Cuánticas de Campos

*Tu materia es el tiempo, el incesante
tiempo. Eres cada solitario instante.*

Jorge Luis Borges

*El pasado y el presente se marchitan.
Y los he llenado y los he vaciado a los dos
y prosigo llenando lo que me espera en el futuro.
(...) Yo soy inmenso y contengo multitudes.*

Walt Whitman

Los formalismos usados para llevar a cabo la cuantización de campos son la cuantización canónica o *segunda cuantización*, y la cuantización por *métodos funcionales de Feynman*. En este capítulo vamos a revisar los fundamentos necesarios para abordar QFT a través de éste último. En la sección 1.1 se estudiará el origen de los métodos funcionales para cuantizar campos y se introducirán las funciones de Green, cantidades de interés para el trabajo. En la sección 1.2, se expone un ejemplo de como el formalismo funcional permite llegar a la derivación de diagramas de Feynman de una teoría. En la sección 1.3 se estudia las teorías Gauge y se presentan las reglas de Feynman para la electrodinámica cuántica y para teorías gauge no Abelianas. En la última sección, se profundiza en las consecuencias de una fijación gauge en el Lagrangiano de una teoría no Abeliana.

1.1. Métodos funcionales en Teoría Cuántica de Campos

En 1933, Paul Dirac notó que, en contraste con la mecánica clásica, la acción parecía irrelevante en el marco de la mecánica cuántica [24]. Sin embargo, en sus trabajos realizó un razonamiento con el que concluyó que, en el límite clásico, la fase de la función de onda es la acción del sistema. Este resultado llevó a Dirac a sugerir que la fase de la función de onda puede obtenerse como superposición de todas las trayectorias posibles, pesadas por $\exp(iS)$ [24], esto es,

$$\psi(q, t) \sim \sum_{\text{trayectorias}} e^{iS}.$$

A partir de fenómenos como el experimento de doble rendija, si $\langle q', t' | q, t \rangle$ es la probabilidad de encontrar la partícula en q' a tiempo t' si estaba en q a tiempo t se puede postular que,

$$\langle q', t' | q, t \rangle = \sum_{\text{trayectorias}} e^{iS}, \quad (1.1)$$

y haciendo una suma continua sobre todo el espacio de trayectorias, queda

$$\langle q', t' | q, t \rangle = \int \mathcal{D}q(t) e^{iS}. \quad (1.2)$$

donde \mathcal{D} es la medida sobre todo el espacio posible de trayectorias de $q(t)$. En otras palabras, para ir de A a B , una partícula tomará todas las trayectorias posibles, de tal forma que cada trayectoria contribuye con un factor e^{iS} a la amplitud de probabilidad de encontrar la partícula en B [25, 26].

Podemos entender la teoría de campos como el límite al continuo de la mecánica de partículas, ya que un campo no es más que una asignación de un valor a cada punto del espacio e implica, por tanto, un número infinito de grados de libertad. La generalización del formalismo de integrales de camino a una teoría de campos es inmediata (e.g. se puede revisar [28]). Para un campo escalar ϕ , la ecuación

(1.2) toma la forma:

$$\begin{aligned} \langle \phi', t' | \phi, t \rangle &= \int \mathcal{D}\phi e^{iS} \\ &= \int \mathcal{D}\phi \int \mathcal{D}\pi \exp \left[i \int_t^{t'} dt \int d^3x (\pi \dot{\phi} - \mathcal{H}) \right] \end{aligned} \quad (1.3)$$

donde $\pi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}$, y \mathcal{H} la densidad Hamiltoniana del sistema. Ahora, la variable dinámica es el campo $\phi(x)$ en vez de la trayectoria $q(t)$ y la integral es, por tanto, sobre todas las configuraciones posibles de campo, y no sobre trayectorias.

Las cantidades que nos interesan calcular son las *funciones de Green a n-puntos* $G^{(n)}(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$, o *funciones de correlación a n-puntos*. Estas cantidades contienen toda la física de la teoría [29], y cumplen un rol fundamental en la derivación de reglas de Feynman, cálculos de secciones eficaces, tasas de decaimiento, etc. En el formalismo funcional están dadas por,

$$G_0^{(n)}(\phi_1, \dots, \phi_n; g_0) = \frac{\int \mathcal{D}\phi \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \exp [i \int d^4x \mathcal{L}(x)]}{\int \mathcal{D}\phi \exp [i \int d^4x \mathcal{L}(x)]}. \quad (1.4)$$

El subíndice 0 es debido a que estas funciones de Green son calculadas a partir de campos desnudos¹. Así, g_0 representa la constante de acoplamiento desnuda característica de la teoría². Debido a que estas cantidades no son coherentes, al calcular amplitudes físicas, es usual trabajar con funciones de Green renormalizadas, donde los campos desnudos sean renormalizados (reescalados) por $\phi_0 = Z^{1/2} \phi_r$, con Z algún número referido como *renormalización de la intensidad del campo*. De esta manera, las funciones de Green renormalizadas se obtienen a partir de

$$G_r^{(n)}(\phi_1, \dots, \phi_n; g) = \left[\prod_{a=1}^n Z_a^{-1/2} \right] G_0^{(n)}(\phi_1, \dots, \phi_n; g_0). \quad (1.5)$$

El rescalamiento en el campo provoca también que g_0 sea reescalada a g , la cual llamaremos constante de acoplamiento renormalizada. Esta expresión nos será de utilidad más adelante, en el capítulo 2. En el resto de este capítulo, solamente

¹En inglés, bare fields. Esto es, previo a renormalización.

²También llamada constante de acoplamiento gauge, esta determina la fuerza con la que los campos interactúan. Por ejemplo, la constante de estructura fina α en la teoría clásica de Maxwell es una constante de acoplamiento.

trabajaremos con cantidades desnudas y, por tanto, no se usará la notación con el subíndice “0”.

Para el caso de campos escalares con $n = 2$, podemos expresar la función de correlación a dos puntos como:

$$G^{(2)}(\phi_1, \phi_2) = \frac{\int \mathcal{D}\phi \phi(x_1)\phi(x_2) \exp \left[i \int d^4x \mathcal{L} \right]}{\int \mathcal{D}\phi \exp \left[i \int d^4x \mathcal{L} \right]} \quad (1.6)$$

Físicamente $G^{(2)}(\phi_1, \phi_2)$ nos da la amplitud de propagación de una excitación (o partícula) entre los puntos x_1 y x_2 . Esta propagación está denotada por $D_F(x_1 - x_2)$ y es conocido como el propagador de Feynman para campos escalares. De igual forma, $G^{(4)}(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4)$ significaría que dos partículas son creadas en dos puntos del espacio, cada una se propaga a cualquiera de los otros puntos para después ser aniquiladas. Esto puede ocurrir de tres maneras diferentes, correspondientes a las tres maneras de conectar cuatro puntos en pares. La amplitud total del proceso es la suma de los tres diagramas.

Una forma útil de expresar $G^{(2)}(\phi_1, \phi_2)$ es haciendo uso del funcional generador $W[J]$, definido como

$$W[J] = \int \mathcal{D}\phi \exp \left[i \int d^4x (\mathcal{L} + J\phi) \right] \quad (1.7)$$

Así, $G^{(2)}(\phi_1, \phi_2)$ viene dada por:

$$G^{(2)}(\phi_1, \phi_2) = \frac{1}{W[J]} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} \Big|_{J=0} \quad (1.8)$$

La función de Green a dos puntos, en el formalismo de cuantización canónica, es usual denotarla como $\langle \Omega | T \phi(x_1) \phi(x_2) | \Omega \rangle$, donde T representa el operador de ordenamiento temporal que garantiza que los campos evaluados a tiempos posteriores sean ubicados siempre hacia la izquierda³. El estado Ω representa el vacío en una teoría con interacción en la cual partículas pueden ser creadas y aniquiladas. Este vacío, en general difiere del vacío de una teoría libre donde no existen interacciones.

³Este requerimiento en el Formalismo Funcional, viene incorporado naturalmente.

1.2. Teorías con interacción

Las interacciones entre campos juegan un papel fundamental en la física actual. En particular, el modelo estándar de partículas no es mas que la teoría de campos para las interacciones electrodébil y fuerte. Las amplitudes de probabilidad cuando una teoría tiene interacción no son solubles de manera exacta, sino que hace falta un método perturbativo.

Como ejemplo sencillo de teoría con interacción, consideremos la teoría $\lambda\phi^4$, con densidad Lagrangiana,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \quad (1.9)$$

con $\frac{\lambda}{4!}\phi^4$ el término de interacción y λ la constante de acoplo. Si insertamos (1.9) en la expresión (1.4) para la función de correlación a cuatro puntos, obtenemos,

$$\begin{aligned} \langle\Omega|T\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4|\Omega\rangle &= Z^{-1} \int \mathcal{D}\phi \phi_1\phi_2\phi_3\phi_4 \exp\left[i \int d^4x \mathcal{L}\right] \\ &= Z^{-1} \int \mathcal{D}\phi \phi_1\phi_2\phi_3\phi_4 \exp\left[i \int d^4x \mathcal{L}_0\right] \exp\left[i \int d^4x \left(-\frac{\lambda}{4!}\phi^4\right)\right] \end{aligned} \quad (1.10)$$

donde hemos separado explícitamente el termino de interacción. Aquí Z representa el denominador de (1.4) no relevante para el punto de esta sección. El cálculo explícito de $\langle\Omega|T\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4|\Omega\rangle$, no puede llevarse a cabo, pero si es posible realizar un desarrollo perturbativo de la exponencial en potencias de λ como sigue,

$$\exp\left[i \int d^4x \mathcal{L}\right] = \exp\left[i \int d^4x \mathcal{L}_0\right] \left(1 - i \int d^4z \frac{\lambda}{4!}\phi^4 + \dots\right). \quad (1.11)$$

La resolución de la expresión anterior se realiza gracias al Teorema de Wick o contracción de campos [5,7], en el formalismo funcional definido como:

$$\overline{\phi_1\phi_2} = \frac{\int \mathcal{D}\phi e^{iS_0} \phi_1\phi_2}{\int \mathcal{D}\phi e^{iS_0}} = D_F(x_1 - x_2) \quad (1.12)$$

Así, por ejemplo, la función de correlación a cuatro puntos libre (sin interacción) puede expresarse como la suma de todas las posibles contracciones de los campos

$\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4 :$

$$\begin{aligned} \langle 0|T\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4|0\rangle &= D_F(x_1 - x_2)D_F(x_3 - x_4) \\ &+ D_F(x_1 - x_3)D_F(x_2 - x_4) \\ &+ D_F(x_1 - x_4)D_F(x_2 - x_3) \end{aligned} \quad (1.13)$$

Por tanto, aplicando el mismo análisis a la expresión (1.10) con la expansión (1.11), reconocemos que el término de primer orden es la expresión anterior (1.13), mientras que el término de segundo orden (con la variable de interacción especificada con z) toma la forma ⁴:




$$\begin{aligned} \langle \Omega|T\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4|\Omega\rangle &= 3 \cdot \left(\frac{-i\lambda}{4!}\right) D_F(x_1 - x_2) \int d^4z D_F(z - x_3)D_F(z - x_4) \\ &+ 12 \cdot \left(\frac{-i\lambda}{4!}\right) D_F(x_1 - z)D_F(x_2 - z)D_F(z - z). \end{aligned} \quad (1.14)$$

Esta expresión viene del resultado de que hay 15 maneras distintas de contraer los campos en pares, pero afortunadamente solo dos de ellos son realmente diferentes al considerar factores de simetría. En efecto, el $4!$ del término de interacción de la teoría viene dado por convención para no tener que lidiar con los factores numéricos de las contracciones [9].

A partir de la interpretación física del propagador, a cada uno de los términos en la expresión anterior se le puede asociar una representación pictórica. En esta representación dibujamos una línea recta por cada contracción de D_F que tengamos, donde sus extremos estén representados por la etiqueta de la partícula. Nos referimos a las líneas de los diagramas como *propagadores* porque, en efecto, representan la amplitud de propagación $D_F(x - y)$ entre dos puntos. Representamos con una circunferencia al propagador sobre sí mismo $D_F(0)$ y nos referimos a este como *bucle*. El término de interacción $(-i\lambda) \int d^4z$ es representado por el *vértice* de cuatro líneas.

Estas reglas se resumen a continuación,




⁴ La demostración del teorema de Wick y el desarrollo completo de este formalismo, así como el cálculo del propagador de Feynman se puede encontrar en la referencia [8], Cap. 12.

Por cada propagador	$iD_F(x-y)$	$x \text{---} y$
Por cada bucle	$iD_F(0)$	
Por cada punto externo	1	
Por cada vértice	$-i\lambda \int d^4z$	

Las reglas de Feynman para ϕ^4 se presentan en el espacio de posiciones para la claridad de la explicación, en la práctica, es más conveniente expresarlas en el espacio de momentos al introducir la expansión de Fourier a cada propagador:

$$D_F(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (x-y)}. \quad (1.15)$$

De esta manera, las reglas de Feynman para la teoría $\lambda\phi^4$ se resumen a continuación,

Por cada propagador		$= \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$
Por cada punto externo		$e^{-ip \cdot x}$
Por cada vértice		$-i\lambda$

Los diagramas de Feynman son herramientas matemáticas invaluable para el entendimiento físico de las QFTs permitiendo cálculos menos complejos y más esclarecedores de expresiones que de otra manera su visualización se reduciría a una fórmula abstracta. Todo este desarrollo se puede aplicar a cualquier teoría cuantica de campos. En las siguientes secciones se presentarán las reglas de Feynman que nos serán de utilidad para el resto del estudio, su deducción y demostración completa se la puede encontrar en las referencias [46, 47].

1.3. Teorías Gauge

Una teoría gauge es aquella que presenta un grupo de Lie de simetría que se realiza localmente (simetría gauge). El caracter local obliga a introducir nuevos

campos (campos gauge) que se acoplan de una manera muy particular con la teoría [48].

Electrodinámica Cuántica (QED)

Una teoría gauge cuyo grupo de simetría es conmutativo recibe el apelativo de Abelianas. La electrodinámica cuántica es el ejemplo más inmediato que encontramos en la naturaleza. Específicamente, QED es una teoría gauge con grupo $U(1)$ acoplada a fermiones de Dirac (electrones y positrones). La cantidad conservada asociada a la simetría global es la carga eléctrica. Revisar como se construye constituye un buen ejercicio de calentamiento antes de pasar a estudiar teorías no Abelianas.

El Lagrangiano de Dirac describe la dinámica libre de fermiones como los e^- y e^+ . Para fermiones de masa m , viene dado por,

$$\mathcal{L}_{Dirac} = \bar{\psi}(i\cancel{D} - m)\psi, \quad (1.16)$$

que es invariante bajo la transformación $\psi(x) \rightarrow e^{ie\alpha}\psi(x)$ para $\alpha \in \mathbb{R}$. Consideremos no obstante la transformación local,

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)}\psi(x). \quad (1.17)$$

Bajo esta transformación el Lagrangiano (1.16) ya no es invariante, ya que el término de derivada se transforma como,

$$\partial_\mu \psi'(x) = e^{i\alpha(x)}[\partial_\mu \psi + (\partial_\mu \alpha(x))\psi(x)] \neq e^{i\alpha(x)}\partial_\mu \psi(x). \quad (1.18)$$

Podemos forzar que el Lagrangiano sea invariante bajo transformaciones locales si introducimos una nueva derivada $D_\mu \psi$ (derivada covariante) como,

$$D_\mu \psi(x) = \partial_\mu + ieA_\mu \psi, \quad (1.19)$$

tal que A_μ se transforma como,

$$A^\mu(x) \rightarrow A^\mu(x) + \frac{1}{e} \partial^\mu \alpha(x). \quad (1.20)$$

Así, logramos que, bajo la transformación local (1.17),

$$D_\mu \psi \rightarrow e^{i\alpha(x)} D_\mu \psi, \quad (1.21)$$

con esto, recuperamos la invarianza del Lagrangiano.

El nuevo campo A_μ necesita ser dotado de dinámica, este término se puede construir de manera inmediata al exigir la invarianza Lorentz del Lagrangiano. En el caso de QED, este corresponde al Lagrangiano de Maxwell dado por

$$\mathcal{L}_{Maxwell} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad \text{con} \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (1.22)$$

Finalmente, con (1.16) y (1.22) y junto a un término de interacción $e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$ que viene dado por la definición de derivada covariante se puede construir el único Lagrangiano de la QED que describe la interacción de partículas cargadas,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{QED} &= \mathcal{L}_{Dirac} + \mathcal{L}_{Maxwell} + \mathcal{L}_{int} \\ &= \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu, \end{aligned} \quad (1.23)$$

ψ representa el campo de Dirac, un campo de fermiónico de espín 1/2, y e la carga del electrón. La partícula cuantizada, o la excitación, proveniente del campo gauge A_μ se denomina *bosón gauge*, en el caso de QED, este corresponde al fotón.

A partir de (1.23), siguen las reglas de Feynman de QED,

$$\text{Propagador fermiónico: } \longrightarrow = \frac{i(\not{k} + m)}{k^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (1.24)$$

$$\text{Propagador del fotón: } \rightsquigarrow = \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon}. \quad (1.25)$$

$$\text{Vértice QED: } \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} \rightsquigarrow_\mu = ie\gamma^\mu. \quad (1.26)$$

Podemos decir, en conclusión, que la existencia del campo electromagnético A_μ es una consecuencia de haber postulado que el campo fermiónico (en este caso, el electrón) sea invariante bajo cambios de fase locales.

Teorías Gauge No Abelianas

Teorías gauge fundamentadas en grupos no Abelianos también pueden ser construidas como una generalización de las teorías gauge Abelianas⁵.

Al generalizar el desarrollo anterior a un grupo no Abeliano, los campos se transforman de acuerdo a

$$\psi_n(x) \rightarrow \exp(-ig\alpha^a T^a) \psi_n(x) \quad (1.27)$$

donde aparecen los generadores T^a del grupo. En este caso la derivada covariante asociada a un grupo de transformación general se escribe como

$$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu^a T^a, \quad (1.28)$$

aquí cada generador tiene un campo vector A_μ^a asociado que se transforman como

$$A_\mu^a \rightarrow A_\mu^a + \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha^a + f^{abc} A_\mu^b \alpha^c, \quad (1.29)$$

lo que hace al Lagrangiano de Dirac invariante. Análogo a QED, el termino cinético que tenemos que introducir debe ser el tensor de campo más simple que sea invariante gauge e invariante Lorentz, de esta manera obtenemos,

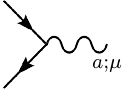
$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \quad (1.30)$$

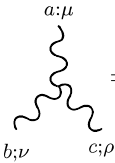
donde notamos que aparece el conmutador debido al grupo no Abeliano. De esta manera, se tiene como resultado el Lagrangiano de Yang-Mills:

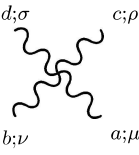
$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_n (i\not{D} - m) \psi_n - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}. \quad (1.31)$$

⁵Para un tratamiento más a fondo de teoría de representaciones de grupos es recomendable la lectura del apéndice B de este estudio primero.

El Lagrangiano de Yang-Mills anterior describe una teoría de interacción no trivial llamada *Teoría de Yang-Mills* que depende de dos parámetros: la constante de acoplamiento g y la masa m del fermión. Este Lagrangiano lleva al conjunto de reglas de Feynman para una Teoría Gauge No Abelian, presentadas a continuación⁶

Vértice del Fermión:  $= ig\gamma^\mu T^a$ (1.32)

Vértice 3-bosónico:  $= igf^{abc}[g^{\mu\nu}(k-p)^\rho + g^{\nu\rho}(p-q)^\mu + g^{\rho\mu}(q-k)^\nu]$ (1.33)

Vértice 4-bosónico:  $= -ig^2[f^{abe}f^{cde}(g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho})$
 $+ f^{ace}f^{bde}(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho})$
 $+ f^{ade}f^{bce}(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma})]$ (1.34)

1.4. Fijación Gauge y fantasmas de Faded y Poppov

El formalismo funcional aplicado a una teoría gauge implica también integrar sobre campos gauge. Por ejemplo, el funcional generador para la parte gluónica será:

$$W_0 = \int \mathcal{D}A \exp \left[i \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a,\mu\nu} \right) \right]. \quad (1.35)$$

Sin embargo, la invarianza bajo el grupo gauge implica que existen configuraciones de A_μ equivalentes. No es correcto, por tanto, integrar libremente sobre A_μ por lo que es necesario incluir la “ligadura” que evite integrar sobre campos gauge con estados físicos iguales. Para resolver el inconveniente del exceso de grados de libertad debido a la simetría gauge, Faded y Popov [15] propusieron un esquema análogo a los multiplicadores de Lagrange.

⁶Los propagadores de fermiones y bosones gauge son los mismos que en QED, multiplicados por la matriz identidad en el álgebra de Lie.

Sea $G(A)$ una función cualquiera que actúa como la condición de fijación gauge, restringimos la integral funcional a cubrir solo las configuraciones con $G[A] = 0$. Una forma de insertar esta ligadura es mediante el truco de insertar un 1,

$$1 = \int \mathcal{D}\alpha(x) \delta(G[A^\alpha]) \det \left(\frac{\delta G(A^\alpha)}{\delta \alpha} \right). \quad (1.36)$$

Así, la integral (1.35) toma la forma:

$$W_0 = \int \mathcal{D}A^\alpha \mathcal{D}\alpha(x) \exp \left[i \int d^4x (\mathcal{L}[A^\alpha]) \right] \delta(G[A^\alpha]) \det \left(\frac{\delta G(A^\alpha)}{\delta \alpha} \right) \quad (1.37)$$

dado que, por definición, el Lagrangiano es gauge invariante tenemos que $\mathcal{L}[A^\alpha] = \mathcal{L}[A]$ por lo que podemos cambiar la etiqueta de nuestra variable de integración:

$$W_0 = \int \mathcal{D}A \exp \left[i \int d^4x (\mathcal{L}[A]) \right] \delta(G[A]) \det \left(\frac{\delta G(A)}{\delta \alpha} \right), \quad (1.38)$$

donde hemos prescindido de la integral $\int \mathcal{D}\alpha = \mathcal{N}$ por ser sólo una constante que no afecta a los grados de libertad de la teoría.

Para teorías no Abelianas, elegimos un gauge específico, el gauge de Landau Feynman 't Hooft:

$$G[A^\alpha] = \partial^\mu A_\mu^a + \frac{1}{g} \partial^\mu D_\mu^{ab} \alpha_b + w^a \quad (1.39)$$

con

$$D_\mu^{ab} = \delta^{ab} \partial_\mu + g f^{abc} A_{c\mu},$$

cuya forma infinitesimal de $G[A]$ está dada por:

$$\frac{\delta G}{\delta \alpha} = \frac{1}{g} \partial^\mu D_\mu^{ab}. \quad (1.40)$$

Reemplazando esta expresión en (1.38) e integrando en la función delta obtenemos el término de fijación gauge en el Lagrangiano:

$$\mathcal{L}_{gauge \text{ fix}} = \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^{a,\mu})^2 \quad (1.41)$$

con ξ un parámetro gauge libremente ajustable.⁷ El funcional generador nos queda, entonces,

$$W_0 = \int \mathcal{D}A \exp \left[i \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a,\mu\nu} + \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu^a)^2 \right) \right] \det \left(\frac{1}{g} \partial^\mu D_\mu^{ab} \right). \quad (1.42)$$

Por último, nos queda descifrar como el determinante funcional puede expresarse como un término en el Lagrangiano. Esto se consigue mediante campos conocidos como *fantasmas*. Estos en cierto sentido se comportan como campos ordinarios, forman parte de las reglas de Feynman pero no se pueden propagar. Los fantasmas son esencialmente una manera de exponenciar el término del determinante para poder incluirlo en el Lagrangiano. Faddev y Popov demostraron [19] que el determinante funcional se puede expresar como un nuevo conjunto de campos anticonmutativos pertenecientes a la representación adjunta del grupo como:

$$\det \left(\frac{1}{g} \partial^\mu D_\mu^{ab} \right) = \int \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}c \exp \left[i \int d^4x \bar{c}_a(x) (-\partial^\mu D_\mu^{ab}) c_b(x) \right]. \quad (1.43)$$

Estos nuevos campos no corresponden a ninguna partícula real, de hecho, violan el teorema de correspondencia entre espín y estadística. Sin embargo, son necesarios para no sobrecontar las configuraciones equivalentes provocadas por la invarianza gauge. Por lo tanto, W_0 se puede expresar como:

$$W_0 = \int \mathcal{D}A \exp \left[i \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a,\mu\nu} + \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu^a)^2 + \bar{c}_a (-\partial^\mu D_\mu^{ab}) c_b \right) \right] \quad (1.44)$$

Finalmente, a partir de (1.44), la inclusión de fermiones es inmediata. Lo que nos lleva a completar el Lagrangiano para teorías gauge no Abelianas,

$$\boxed{\mathcal{L} = \bar{\psi}_n (\not{D}_\mu - m) \psi_n - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a,\mu\nu} - \underbrace{\frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu^a)^2}_{\text{fijación gauge}} + \underbrace{\partial^\mu \bar{c}_a (\delta^{ab} \partial_\mu + g f^{abc} A_{c\mu}) c_b}_{\text{campos fantasmas}}.} \quad (1.45)$$

⁷Este parámetro a conveniencia puede tener el valor de $\xi = 1$, llamado *gauge de Feynman-'t Hooft*.

Las reglas de Feynman asociadas a los campos fantasmas vienen dadas por:

Propagador fantasma: $a \text{-----} b = \frac{i\delta^{ab}}{k^2 + i\epsilon}$. (1.46)

Vértice fantasma: $\begin{array}{c} b:\mu \\ | \\ \text{---} \\ / \quad \backslash \\ a \quad c \end{array} = -gf^{abc}k^\mu$. (1.47)

Capítulo 2

Mecanismos de Renormalización

No podemos hablar de una teoría cuántica de campos sin hablar de renormalización. A grandes rasgos, la renormalización es un mecanismo para aislar y remover todos los infinitos que aparecen en cantidades físicas medibles.

Este capítulo pretende ser una guía para comprender el mecanismo de renormalización y su significado, además de descifrar las características físicas fundamentales detrás de las funciones beta. En la sección 2.1 se discutirán las correcciones radiativas en diagramas de Feynman, en la sección 2.2 se estudiará la estructura de las divergencias de las correcciones radiativas que debemos lidiar, y su implicancia en la renormalizabilidad de QFTs. En la sección 2.3 se explicita las correcciones radiativas en QED y en teorías gauge no Abelianas y se introduce los contratérminos junto con la metodología para tratar estas divergencias. En la sección 2.4 se discute la física detrás del proceso de renormalización y su enfoque aceptado en la actualidad. Por último, en la sección 2.5, se introduce la función beta y se plantea cómo calcularla a partir de contratérminos.

2.1. Correcciones radiativas

Como estudiamos en el capítulo anterior en el desarrollo perturbativo de las funciones de correlación pueden aparecer diagramas de Feynman con bucles.

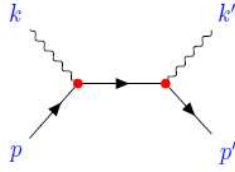


FIGURA 2.1: Diagrama de Feynman de la dispersión de Compton

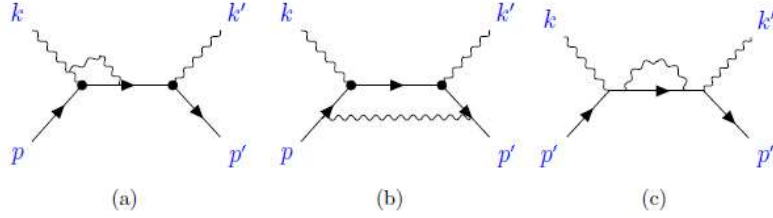


FIGURA 2.2: Ejemplos de diagramas de 1-bucle en la dispersión de Compton

El diagrama de la figura 2.1, corresponde al diagrama de árbol¹ para la dispersión Compton. Al calcularlo no aparecen integrales divergentes, y el resultado es finito. La situación cambia cuando consideramos la contribución de órdenes superiores con bucles, como se puede ver en la figura 2.2. Al contrario de los diagramas de árbol, estos diagramas contienen bucles cerrados que requieren una integración sobre el momento del bucle k_{bucle} . Como k_{bucle} no está sujeto a restricciones por conservación de momentos, debemos integrar $\forall k_{bucle} \in [0, \infty)$. Así, la integral diverge y aparentemente la teoría no es consistente. Estos diagramas son conocidos como *correcciones radiativas*² del efecto Compton.

Por ejemplo la integral de un bucle en una teoría escalar viene dada por :

$$\begin{aligned}
 \text{Diagrama de un bucle} &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \approx \int \frac{d^4k}{k^2} \\
 &= \frac{(2\pi)^2}{(2\pi)^4} \int_0^\infty d|k| \frac{|k|^3}{|k|^2} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{d|k|}{|k|},
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

que diverge cuando $k \rightarrow \infty$. El hecho de que la integral diverja para momentos grandes significa que las correcciones cuánticas son sensibles a las fluctuaciones cuánticas para k grandes. Cuando la divergencia se debe a que k no está acotada

¹Llamamos diagramas de árbol (tree level, en inglés) a aquellos que no presentan bucles.

²El nombre surge debido a que en electrodinámica corresponden a emisión y absorción de fotones. Este nombre también es aceptado en otras teorías perturbativas.

por arriba ($k \rightarrow \infty$) decimos que tratamos con *divergencias Ultravioletas*. Por otro lado, cuando k puede tomar valores muy pequeños, es decir, $k \rightarrow 0$, decimos que tratamos con *divergencias Infrarrojas*.

2.2. Divergencia de integrales

Se puede caracterizar cuánto de divergente es un diagrama de bucle a partir del grado de divergencia superficial \mathcal{D} , definido como:

$$\mathcal{D} \equiv (\text{potencias de } k \text{ en el numerador}) - (\text{potencias de } k \text{ en el denominador}) \quad (2.2)$$

Esta definición se debe a que en una expresión correspondiente a un diagrama cualquiera en esta habrá una integral potencialmente divergente por cada bucle que tenga; pero al mismo tiempo, los propagadores del diagrama ayudan a la convergencia al proveer potencias de momentos en el denominador, es decir,

$$\left(\begin{array}{c} \text{cualquier diagrama} \\ \text{de Feynman} \end{array} \right) \rightarrow \int \frac{\overbrace{d^d k_1 d^d k_2 \cdots d^d k_L}^{\text{bucles}}}{\underbrace{(k_i - m) \cdots (k_j^2) \cdots (k_n^2)}_{\text{propagadores}}} \quad (2.3)$$

Por tanto, podemos expresar la ecuación (2.2) como

$$\mathcal{D} \equiv d \times L - P_f - 2P_b, \quad (2.4)$$

donde d es el número de dimensiones espacio temporales, L el número de bucles, P_f el número de propagadores fermiónicos, y P_b el número de propagadores bosónicos. Por ejemplo, si se introduce un corte superior Λ a una integral cualquiera de diagramas,

$$\int^{\infty} dk \rightarrow \int^{\Lambda} dk, \quad (2.5)$$

a priori, se esperaría que la integral sea polinómicamente divergente si $\mathcal{D} > 0$, que diverja logarítmicamente si $\mathcal{D} = 0$, y convergente si $\mathcal{D} < 0$. Sin embargo, resulta que las cosas son más complicadas que este razonamiento. El adjetivo superficial,

en efecto, es debido a que \mathcal{D} no siempre refleja el verdadero grado de divergencia del diagrama pues en el proceso pueden aparecer subdiagramas con divergencias o restricciones de simetrías que provoquen cancelaciones entre términos infinitos [9]. La ecuación (2.4) se puede reescribir en términos del número de líneas externas y el número de vértices. Para QED, por ejemplo, el grado de divergencia superficial se expresaría como

$$\mathcal{D} = d + \frac{d-4}{2}V - \frac{d-2}{2}N_\gamma - \frac{d-1}{2}N_e, \quad (2.6)$$

donde V es el número de vértices, N_γ el número de patas externas del fotón, y N_e el número de líneas externas del electrón. Aunque el grado superficial de divergencia no abarca todo el panorama, si que nos permite dividir todas las posibles teorías en tres distintas clases:

- **Teoría Super Renormalizable:** Sólo un número finito de diagramas de Feynman diverge superficialmente.
- **Teoría Renormalizable:** Solo un número finito de amplitudes diverge superficialmente; sin embargo, la divergencia ocurre en todos los órdenes en teoría de perturbaciones.
- **Teoría No Renormalizable:** Todas las amplitudes divergen a órdenes suficientemente altos en teoría de perturbaciones.

En teorías renormalizables y super renormalizables, las divergencias se pueden tratar mediante la metodología que será descrita en la siguiente sección. En el caso de las no renormalizables no es posible, sin embargo, estas pueden seguir siendo útiles como teorías efectivas hasta cierta escala de corte. Históricamente, muchas teorías no renormalizables han sido un total éxito en la descripción de la naturaleza, siendo uno de las más notables la teoría de Fermi del decaimiento beta [36].

Otra manera de clasificar los grados de divergencia es mediante la dimensión de la constante de acoplamiento g . Esta caracterización nos provee una visión física mucho más amplia de la teoría que se trate. Se puede mostrar que la dimensión de la

constante de acoplamiento $[g]$, en unidades naturales ($\hbar = c = 1$), está relacionada con el número de vértices máximo en un diagrama típico, i.e. $[g] = -V^{max}$. Por lo que podemos clasificar a las QFTs de acuerdo a si:

$$[g] = \begin{cases} > 0 & \text{Super-Renormalizable} \\ 0 & \text{Renormalizable} \\ < 0 & \text{No Renormalizable} \end{cases} \quad (2.7)$$

Podemos concluir que la propiedad de que una teoría sea o no sea renormalizable recae en la dimensión de su constante de acoplamiento g . Esto también implica que solo teorías de campos con espín 0,1/2,1 pueden ser renormalizables [35]. Así, por ejemplo, la gravedad, que implica un campo de espín 2 (gravitón) no puede ser renormalizable. Sólo las teorías renormalizables forman parte del Modelo Estándar. Estas teorías son: teoría ϕ^4 , Yukawa y las interacciones gauge con partículas escalares, espinoriales y vectoriales.

2.3. Teoría renormalizable perturbativa y contraterminos




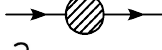



Después de haber estudiado la estructura de las divergencias usuales en QFTs, podemos explicar el procedimiento para lidiar con estos infinitos presentes en las correcciones radiativas. Este procedimiento se denomina *esquema de renormalización BPH* (Bogoliubov, Parasiuk y Hepp,[37–39]) . Grosso modo, consiste en dividir el Lagrangiano en una parte física (renormalizada), que contiene los campos que medimos experimentalmente, y en otra parte que contiene contraterminos que son inobservables.

2.3.1. Correcciones radiativas en QED

En QED, el grado de divergencia superficial de un diagrama con E_γ fotones y E_e fermiones externos es³

$$\mathcal{D} = 4 - E_\gamma - \frac{3}{2}E_e. \quad (2.8)$$


En concordancia con el resultado (2.8) , sólo hay un número finito de diagramas divergentes ($\mathcal{D} \geq 0$). Estos son⁴

	\mathcal{D}	Diagrama	Nombre
a)	$\mathcal{D} = 4$		Energía del vacío
b)	$\mathcal{D} = 3$		Amplitud 1-fotón
c)	$\mathcal{D} = 2$		Propagador del fotón
d)	$\mathcal{D} = 1$		Propagador del electrón
e)	$\mathcal{D} = 1$		Amplitud 3-fotón
f)	$\mathcal{D} = 0$		Corrección del vértice
g)	$\mathcal{D} = 0$		Amplitud 4-fotón

No todos los diagramas son relevantes. Así, tenemos que

- El diagrama (a), son todas las correcciones radiativas a la amplitud de vacío. Puede ser ignorado en los cálculos debido a que no contribuye a las funciones de correlación.
- Los diagramas (b) y (f) se hacen cero en todo orden debido a la simetría discreta de la conjugación de carga [29]. Este hecho también implica que, si un diagrama esta compuesto únicamente de un número impar de fotones externos, se cancela completamente.

³Para la derivación completa del grado de divergencia superficial revisar [34].

⁴La notación  de los diagramas significa correcciones radiativas en todos los órdenes.

- El diagrama (*g*), es diferente de cero, pero es finito a consecuencia de la simetría gauge [30].

Por lo tanto, los únicos diagramas divergentes son (*c*), (*d*) y (*e*). Como sabemos de antemano, $[e] = 0$, y por tanto la teoría es renormalizable. Así, el diagrama (*c*) se puede reinterpretar como una corrección al propagador del electrón, el diagrama (*d*) una corrección al propagador del fotón y (*e*) una corrección al vértice. De este modo, estas correcciones afectarán a la constante de acoplo, masa y campos que pueden medirse. Es decir, las correcciones radiativas implican que en el Lagrangiano (1.23), la masa, la constante de acoplamiento y sus campos no son los que se miden.

Sean e_0 y m_0 la constante de acoplo y la masa desnudas (no observables) que aparecen en (1.23) y ψ_0 , A_0^μ los campos desnudos correspondientes. Redefinimos los campos observables (renormalizados) como:

$$\begin{aligned}\psi &= Z_2^{-1/2}\psi_0, \\ A^\mu &= Z_3^{-1/2}A_0^\mu,\end{aligned}\tag{2.9}$$

donde Z_2 y Z_3 son constantes. Sustituyendo en (1.23), tenemos entonces:

$$\mathcal{L} = Z_2\bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m_0)\psi - e_0Z_2Z_3^{1/2}\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu - \frac{1}{4}Z_3(F^{\mu\nu})^2.\tag{2.10}$$

Podemos recuperar la forma del Lagrangiano de QED introduciendo constantes,

$$\begin{aligned}\delta_1 &= Z_1 - 1 = (e_0/e)Z_2Z_3^{1/2} - 1 & \delta_2 &= Z_2 - 1 \\ \delta_3 &= Z_3 - 1 & \delta_m &= m - Z_2m_0.\end{aligned}\tag{2.11}$$

Así, tenemos el Lagrangiano,

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m)\psi - e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu - \frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 \\ &+ \bar{\psi}(i\delta_2\cancel{\partial} - \delta_m)\psi - e\delta_1\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu - \frac{1}{4}\delta_3(F_{\mu\nu})^2.\end{aligned}\tag{2.12}$$

donde $m = Z_2m_0 + \delta_m$ y $e = (Z_2/Z_1)Z_3^{1/2}e_0$ son la masa y la carga renormalizadas. La primera línea es idéntica al Lagrangiano (1.23), pero ahora está escrita en

términos de la masa y la carga eléctrica física. Los términos de la segunda línea se conocen como *contratérminos*. Son contribuciones no físicas que, mediante adecuadas condiciones de renormalización que se explicarán más adelante, han sido introducidas de tal manera que cancelen todas las divergencias de los diagramas.

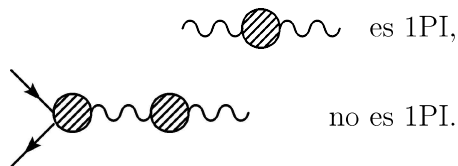
Los contratérminos en (2.12) cancelan las contribuciones divergentes del propagador del electrón, propagador del fotón, y del vértice; por lo que, para calcularlos, tendremos que determinar estos diagramas divergentes a través de sus reglas de Feynman. Estas reglas de Feynman son:

$$\begin{aligned}
 \text{---} \otimes \text{---} &= i(\not{p}\delta_2 - \delta_m) \\
 \text{~~~~} \otimes \text{~~~~} &= -i(g^{\mu\nu}q^2 - q^\mu q^\nu)\delta_3 \\
 \text{---} \otimes \text{~~~~} &= -ie\gamma^\mu\delta_1.
 \end{aligned}
 \tag{2.13}$$

Condiciones de renormalización

Las cuatro constantes que definimos anteriormente, δ_1 , δ_2 , δ_3 y δ_m , son parámetros que no nos puede proveer la teoría, por lo que necesitamos cuatro condiciones externas para fijarlos. Estas condiciones que se imponen a partir de la experimentación, garantizan que la masa y la constante de acoplo renormalizadas sean observables.

Antes de definir apropiadas *condiciones de renormalización*, primero debemos introducir dos tipos de diagramas de Feynman: Los diagramas de partículas 1-irreducibles y digramas amputados. Los diagramas de partículas 1-irreducibles (1PI, por sus siglas en inglés) son aquellos diagramas que no se pueden dividir en dos por una sola línea. Por ejemplo:



Así, denotaremos con el subíndice *1PI* a los diagramas que requieran esta condición.

Los diagramas de Feynman amputados son aquellos a los cuales sus líneas externas han sido removidas. Estos serán denotados con el subíndice *amp.* Con esta notación en mente, las condiciones de renormalización que debemos imponer a los contratérminos se escriben como:

$$\begin{aligned}
& \left(\text{Diagrama 1} \right)_{\text{amp.}} = -ie\gamma_\mu. \\
& \left(\text{Diagrama 2} \right)_{1\text{PI}} \Big|_{\not{p}=m} = 0 \\
& \frac{d}{d\not{p}} \left(\text{Diagrama 3} \right)_{1\text{PI}} \Big|_{\not{p}=m} = 0 \\
& \frac{d}{dq^2} \left(\text{Diagrama 4} \right)_{1\text{PI}} \Big|_{q^2=0} = -i\eta_{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{2.14}$$

La primera condición en (2.14) fija la carga electrónica al imponer que QED a bajas energías debe reducirse a la electrodinámica clásica de Maxwell. La segunda y tercera condición son fijadas cuando $e \rightarrow 0$, es decir, conforme la constante de acoplo se vaya desvaneciendo, los parámetros involucrados Z_2 y Z_3 deben tender a aquellos valores de una teoría sin interacción (donde una renormalización es innecesaria). Es decir, $Z_2, Z_3 \rightarrow 1$. En la última condición, se fija la masa renormalizada (física) del electrón en m con un razonamiento similar al propagador del electrón. Estas condiciones de renormalización son conocidas como *condiciones de renormalización on-shell*.

Para no hacer engorrosa la notación, denotaremos estos diagramas como⁵,

$$\begin{aligned}
& \left(\text{Diagrama 1} \right)_{1\text{PI}} = i\Pi^{\mu\nu}(q) = i(\eta^{\mu\nu}q^2 - q^\mu q^\nu)\Pi(q^2) \\
& \left(\text{Diagrama 2} \right)_{1\text{PI}} = -i\Sigma(\not{p}) \\
& \left(\text{Diagrama 3} \right)_{\text{amp.}} = -ie\Gamma^\mu(k', k).
\end{aligned} \tag{2.15}$$

⁵El término $\Pi^{\mu\nu}$ es conocido como el tensor de polarización, $\Pi(q)$ como la autoenergía del fotón y $\Sigma(\not{p})$ como la autoenergía del fermión (electrón y positrón en QED).

De esta manera, las condiciones de renormalización (2.14) se reducen a

$$\begin{aligned}
\Sigma(\not{p} = m) &= 0; \\
\left. \frac{d}{d\not{p}} \Sigma(\not{p}) \right|_{\not{p}=m} &= 0; \\
\Pi(q^2 = 0) &= 0; \\
-ie\Gamma^\mu(k' - k = 0) &= -ie\gamma^\mu.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

El cálculo explícito de los contratérminos se lo hará más adelante en el capítulo 3, y como veremos más adelante estos serán de suma importancia ya que están directamente relacionados con los cálculos de la función beta.

Observación

El Lagrangiano en (1.23) originalmente es invariante gauge, por lo que al aplicar el esquema de renormalización anterior es conveniente mantener esta invarianza al exigir que los contratérminos también lo sean. La única forma de lograr esto es si $\delta_1 = \delta_2$. Para ver esto consideremos la parte problemática del Lagrangiano (el resto es invariante gauge por sí mismo),

$$\Delta\mathcal{L} = \delta_2 \bar{\psi} i \not{\partial} \psi + ie\delta_1 \bar{\psi}_1 \gamma^\mu \psi A_\mu. \tag{2.17}$$

Ahora consideremos la transformación gauge $A_\mu \rightarrow A_\mu - \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x)$:

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L} &= -\delta_2 \bar{\psi} i \gamma^\mu i \partial_\mu \alpha \psi - i\delta_1 \bar{\psi}_1 \gamma^\mu \psi \partial_\mu \alpha \\
&= \underbrace{(\delta_2 - \delta_1)}_{=0} \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \partial_\mu \alpha
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Entonces, observamos que para que esto sea invariante gauge se requiere que $\delta_1 = \delta_2$. Este resultado no trivial implica que la renormalización de la constante de acoplamiento e sea igual a la renormalización de la función de onda del fermión.

2.3.2. Correcciones radiativas en Teorías Gauge No Abelianas

De igual forma que en QED, en teorías no Abelianas también aparecen divergencias, y es necesario renormalizarlas. El grado de divergencia superficial para teorías no Abelianas es análogo a QED (2.8) y viene dado por [15] :

$$\mathcal{D} = 4 - E, \quad (2.19)$$

donde E representa el número de líneas externas (fermiónicas, bosónicas o fantasmas) de un diagrama. La ecuación (2.19) muestra que sólo un número finito de diagramas son divergentes ($\mathcal{D} \geq 0$). En las figuras 2.3 y 2.4 se presentan estos diagramas a orden de 1-bucle (omitiendo sus permutaciones).

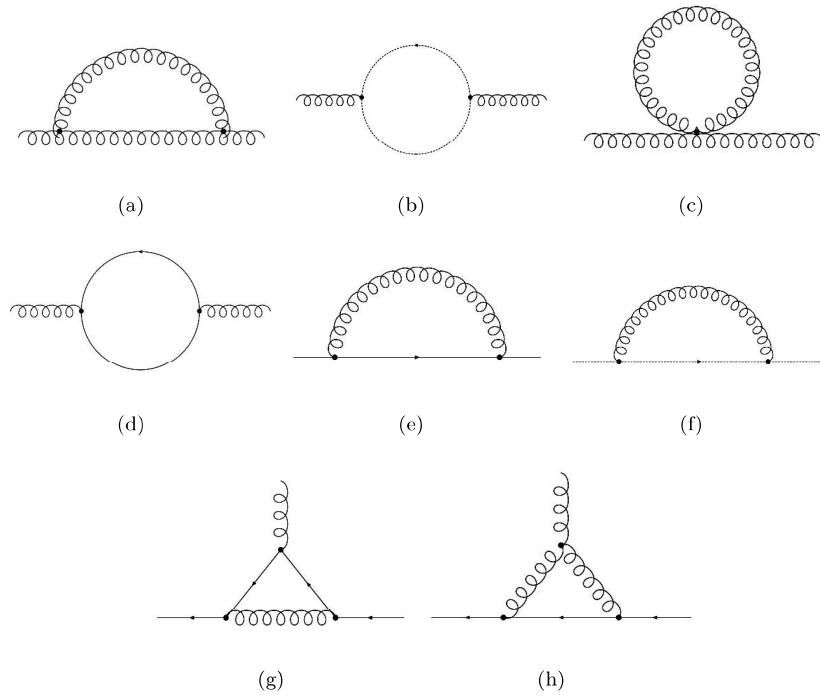


FIGURA 2.3: Diagramas de un bucle de teorías gauge no Abelianas. (a)-(d) son las correcciones al propagador bosónico, (e) al propagador fermiónico, (f) la corrección propagador fantasma y (g) y (h) son los diagramas de las correcciones al vértice fermión-bosón.

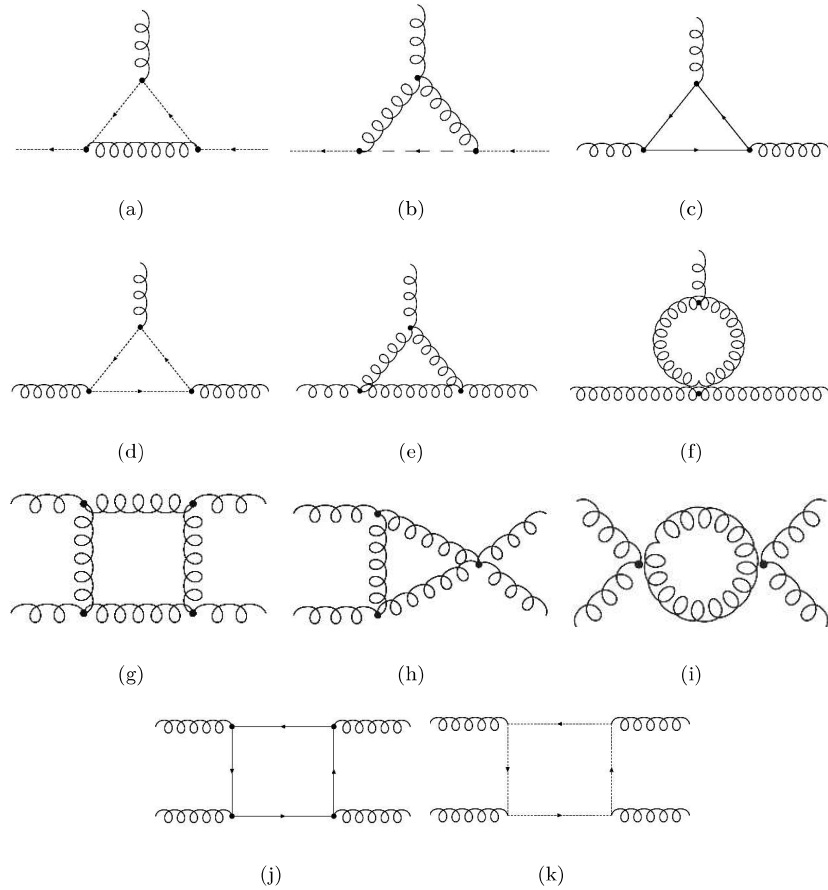


FIGURA 2.4: Diagramas de un bucle en teorías no Abelianas. Los diagramas son las correcciones al: vértice fantasma (c) y (d), vértice 3-bosónico (e)-(h) y al vértice 4-bosónico (i)-(m).

Debido a que en teorías gauge no Abelianas aparece un término de interacción bosón-bosón en su transformación, los posibles diagramas divergentes aumentan. Mediante un razonamiento similar realizado en los diagramas de QED, no todas las contribuciones son realmente divergentes [44]. Así, los únicos diagramas divergentes en teorías gauge no Abelianas son las contribuciones divergentes al propagador bosónico Fig. 2.3a-d, la corrección al propagador fermiónico Fig 2.3e, y las correcciones al vértice fermión-bosón Fig 2.4a-b.

El esquema BPH en teorías no Abelianas es similar a QED y su desarrollo puede ser tedioso y sin valor añadido por lo que no ahondaremos en este. El resultado

de aplicar el esquema al Lagrangiano (1.45) se escribe como

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)^2 + \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi - \bar{c}^a \partial^2 c^a + g A_\mu^a \bar{\psi} \gamma^\mu t^a \psi - g f^{abc} (\partial_\mu A_\nu^a) A^{b\mu} A^{c\nu} \\
& - \frac{1}{4} g^2 (f^{eab} A_\mu^a A_\nu^b) (f^{ecd} A^{c\mu} A^{d\nu}) - g \bar{c}^a f^{abc} \partial^\mu (A_\mu^b c^c) - \frac{1}{4} \delta_3 (\partial_\mu A_\nu^a A_\mu^a)^2 + \bar{\psi} (i\delta_2 \not{\partial} - \delta_m) \psi \\
& - \delta_2^c \bar{c}^a \partial^2 c^a + g \delta_1 A_\mu^a \bar{\psi} \gamma^\mu \psi - g \delta_1^{3g} f^{abc} (\delta_\mu A_\nu^a) A_{b\mu} A^{c\nu} - \frac{1}{4} \delta_1^{4g} (f^{eab} A_\mu^a A_\nu^b) (f^{ecd} A^{c\mu} A^{d\nu}) \\
& - g \delta_1^c \bar{c}^a f^{abc} \partial^\mu (A_\mu^b c^c).
\end{aligned} \tag{2.20}$$

donde se han definido las siguientes constantes:

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= \frac{g_0}{g} Z_2 (Z_3)^{1/2} - 1, & \delta_1^{3g} &= \frac{g_0}{g} (Z_3)^{3/2} - 1, \\
\delta_1^{4g} &= \frac{g_0^2}{g^2} (Z_3)^2 - 1, & \delta_1^c &= \frac{g_0}{g} Z_2^c (Z_3)^{1/2} - 1.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

$$\delta_2 = Z_2 - 1, \quad \delta_3 = Z_3 - 1, \quad \delta_2^c = Z_2^c - 1, \quad \delta_m = Z_2 m_0 - m, \tag{2.22}$$

Estos ocho contratérminos dependen de cinco parámetros Z_2, Z_3, Z_2^c, g, m y por lo tanto, se necesitan cinco condiciones de renormalización que especifican unívocamente todos los parámetros de manera que remuevan todas las divergencias de la teoría. No obstante, la constante Z_2^c proveniente de los contratérminos fantasmas no está involucrado en ningún diagrama divergente mencionado. Por lo que las condiciones de renormalización se reducen a cuatro, y de hecho, son exactamente las mismas⁶ que teníamos para QED presentadas en la ecuación (2.16).

Análogo a QED, el Lagrangiano (2.20) proporciona nuevas reglas de Feynmann para calcular los contratérminos en teorías gauge no Abelianas:

$$\begin{aligned}
\text{---} \circlearrowleft \text{---} &= i\not{p} \delta_2 \\
\text{~~~~} \circlearrowleft \text{~~~~} &= -i(k^2 g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu) \delta^{ab} \delta_3 \\
\text{---} \circlearrowleft \text{~~~~} &= -igt^a \gamma^\mu \delta_1
\end{aligned} \tag{2.23}$$

⁶ En teorías no Abelianas, en lugar de tener un propagador del fotón tendremos un propagador bosónico en general. Se debe tomar en cuenta el contexto, ya que la notación es la misma.

2.4. Enfoque de Wilson

Ya hemos descrito los problemas que lleva una teoría con diagramas divergentes y como se puede resolver mediante la renormalización. Sin embargo, no hemos profundizado en la física detrás este proceso, que a simple vista parecería un proceso conveniente, pero nada más. La discusión que se presenta a continuación será de fundamental importancia para el resto del trabajo, ya que como veremos las condiciones de renormalización anteriormente descritas deberán ser cambiadas.

Históricamente, incluso después de comprender los aspectos técnicos de la renormalización, todavía quedaban dificultades conceptuales que hacían ver el mecanismo de renormalización como un procedimiento *ad hoc* justificado únicamente por el hecho de que produce resultados físicamente razonables. Se creía ampliamente que solo una clase limitada de teorías renormalizables tenían sentido físico. K. Wilson [45] en 1970 cambió esta concepción, y permitió establecer las bases para la comprensión moderna de la renormalización. Para el presente trabajo el desarrollo de este análisis es innecesario. No obstante, si que se puede discutir brevemente esta visión, revisitada en mucha literatura como por ejemplo [9, 10, 46], y obtener resultados cualitativos de este enfoque.

Actualmente, se acepta el enfoque de Wilson del mecanismo de la renormalización. De acuerdo a Wilson, la renormalización no es más que la parametrización de la sensibilidad de la física de bajas energías a la física de altas energías. En otras palabras, se debe pensar a las QFTs como una descripción efectiva de la física donde por energías más allá de un cierto límite impuesto la imagen de la teoría de campo no refleja correctamente los grados de libertad microscópicos. Así, según este enfoque, el Modelo Estándar de Partículas es en realidad una teoría de campo efectiva que describe la naturaleza aproximadamente a través de teorías solamente renormalizables⁷.

Los parámetros de una teoría de campos renormalizada están determinados por un cierto conjunto de condiciones de renormalización, aplicadas a cierta escala de momento, denominada *escala de renormalización*. Estas condiciones específicas de

⁷El hecho de que la relatividad general no sea renormalizable en este sentido es aún considerado un problema abierto.

renormalización son necesarias para definir la teoría adecuadamente. En secciones anteriores definimos un conjunto de condiciones de renormalización, naturales y usuales, conocidas como on-shell, definidas en términos de la masa física m . Sin embargo, en una teoría donde $m = 0$, estas condiciones no se pueden usar porque llevan a indeterminaciones en los contratérminos. Para evitar estas singularidades, se escoge una escala de momento arbitraria M y se imponen condiciones de renormalización a un momento espacial p con $p^2 = M^2$. Por lo tanto las condiciones de renormalización para QED y teorías no Abelianas se reescriben como

$$\begin{aligned} \Sigma(\not{p}) = 0, \quad \text{a } p^2 = M^2, \quad \left. \frac{d}{d\not{p}} \Sigma(\not{p}) \right|_{p^2=M^2} = 0; \\ \Pi(q^2 = M^2) = 0, \quad -ie\Gamma^\mu(p' - p = 0) = -ie\gamma^\mu. \end{aligned} \quad (2.24)$$

El parámetro M es también referido como escala de renormalización. Estas condiciones definen sin ambigüedad a la masa y a la constante de acoplamiento física de la teoría, permitiendo en el proceso remover todas las divergencias. En otras palabras, decimos que estamos definiendo la teoría a la escala M . Esta escala también implica la dependencia de las funciones de Green normalizadas sobre M , es decir, las funciones de Green definidas en (1.5) tendrán esta dependencia.

2.5. Ecuación de Callan-Symanzik

En las condiciones de renormalización (2.24), la escala de renormalización es arbitraria. Se pudo haber definido la misma teoría a una escala diferente M' . De igual forma, las funciones de Green renormalizadas a una escala M , $G_r^{(n)}(x_1, \dots, x_n; g; M)$ pueden ser renormalizadas a una escala M' distinta, con una nueva constante de acoplamiento renormalizada g' y un nuevo factor de reescalamiento Z' . La ecuación de Callan-Symanzik determina cómo cambian las funciones de correlación a n puntos con la escala. Dado que la escala también cambia la constante de acoplo, podemos escribir la transformación de las funciones de Green como,

$$dG^{(n)} = \frac{\partial G^{(n)}}{\partial M} \delta M + \frac{\partial G^{(n)}}{\partial g} \delta g = n\delta\eta G^{(n)}, \quad (2.25)$$

donde $\delta\eta$ representa el reescalamiento en el campo. Al definir parámetros adimensionales,

$$\beta = \frac{M}{\delta M} \delta g \quad \gamma = -\frac{M}{\delta M} \delta\eta, \quad (2.26)$$

y al dividir (2.25) por $M/\delta M$, se obtiene la ecuación de Callan-Symanzik,

$$\left[M \frac{\partial}{\partial M} + \beta \frac{\partial}{\partial g} + n\gamma \right] G^{(n)}(x_1, \dots, x_n; M, g) = 0. \quad (2.27)$$

La función beta, definida en (2.26), mide la dependencia de la “constante” de acoplamiento sobre la escala de renormalización M . Por otro lado, γ determina la dependencia M en el reescalamiento del campo.

Así, la definición (2.26) puede reescribirse como,

$$\beta(g) = M \frac{\partial}{\partial M} g(g_0, M) \quad (2.28)$$

La ecuación (2.27) está escrita para una teoría en la que hay un único campo. Si tenemos varios, debemos tener en cuenta nuevos términos proporcionales al número de líneas para cada campo [33]. Por ejemplo, en el caso de QED la ecuación de Callan-Symanzik viene dada por

$$\left[M \frac{\partial}{\partial M} + \beta(e) \frac{\partial}{\partial e} + n\gamma_2 + m\gamma_3(e) \right] G^{(n,m)}(\{x_i\}; M, e) = 0 \quad (2.29)$$

donde n y m son, respectivamente, el número de campos para el electrón y el fotón en las funciones de Green $G^{(n,m)}$ y γ_2, γ_3 son las funciones de reescalamiento de los campos del electrón y el fotón.

En el contexto de la teoría renormalizable perturbativa, la dependencia de las funciones de correlación con M es debida a la introducción de los contratérminos como mecanismo para cancelar divergencias. De hecho, como veremos, β y γ están directamente relacionadas con los contratérminos.

2.5.1. Función beta

Nuestro objetivo es usar la ecuación de Callan-Symanzik para obtener una expresión para la función β en términos de derivadas de M de los contratérminos.

Como primer paso, comenzaremos obteniendo una expresión para γ en términos de derivadas de M de la renormalización del campo Z . Sea

$$\phi(M) = Z^{-1/2}(M)\phi_0, \quad (2.30)$$

al considerar una variación en la escala de renormalización $M \rightarrow M + \delta M$ tenemos

$$1 + \frac{\delta\phi}{\phi} = \frac{Z^{-1/2}(M + \delta M)}{Z^{-1/2}(M)}. \quad (2.31)$$

Recordando que $\delta\eta = \delta\phi/\phi$, podemos escribir la expresión anterior como

$$\delta\eta = \frac{Z^{-1/2}(M + \delta M)}{Z^{-1/2}(M)} - 1 = \frac{Z^{-1/2}(M + \delta M) - Z^{-1/2}(M)}{Z^{-1/2}(M)}. \quad (2.32)$$

Dividiendo esta expresión entre $\delta\eta$ y tomando el límite $\delta M \rightarrow 0$ obtenemos

$$\frac{\delta\eta}{\delta M} = -\frac{1}{2} \frac{1}{Z} M \frac{\partial Z}{\delta M}, \quad (2.33)$$

y aplicando la definición en (2.26) resulta en

$$\gamma = -\frac{1}{2} \frac{1}{Z} M \frac{\partial Z}{\delta M} \quad (2.34)$$

La expresión anterior es exacta. Sin embargo, dado que estamos trabajando con teoría renormalizable perturbativa, podemos siempre escribir Z como $Z = 1 + \delta Z$, con $\delta Z \ll 1$, dando como resultado la expresión aproximada:

$$\gamma \simeq \frac{1}{2} M \frac{\partial \delta Z}{\delta M} + \dots, \quad (2.35)$$

Ahora consideremos una teoría genérica con constante de acoplamiento g . Las funciones de Green pueden ser esquemáticamente descritas como

$$G^{(n)} = \left[\left(\begin{array}{c} \text{diagramas} \\ \text{de árbol} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{diagramas} \\ \text{de bucle 1PI} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{contratérminos} \\ \text{del vertice} \end{array} \right) + \right. \\ \left. + \left(\begin{array}{c} \text{bucles de las} \\ \text{líneas externas} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{contraterminos de} \\ \text{líneas externas} \end{array} \right) \right] \prod_i \frac{i}{p_i^2} \quad (2.36)$$

En general, se puede tener diferentes campos externos cada uno con su δZ_i , por lo que podemos escribir la expresion anterior como

$$G^{(n)} = \left[-ig + \frac{\text{bucles}}{1\text{PI}} - i\delta_g + (-ig) \sum_{i=1}^n \left(\frac{\text{bucles de las líneas externas}}{} - \delta Z_i \right) \right] \prod_i \frac{i}{p_i^2} \quad (2.37)$$

En esta expresión, p_i son los momentos de las líneas externas, y p^2 , el invariante construido de estos momentos. La dependencia de M de esta expresión proviene de los contratérminos δ_g y δ_{Z_i} . A orden más bajo de perturbación, (2.37) reemplazamos en la ecuación de Callan-Symanzik obteniendo

$$\begin{aligned} \left[M \frac{\partial}{\partial M} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} + n\gamma_i \right] (-ig - i\delta_g + ig \sum \delta_{Z_i}) &= 0 \\ M \frac{\partial}{\partial M} \left(\delta_g - g \sum_i \delta_{Z_i} \right) + \beta(g) + g \sum_i \gamma_i &= 0. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Al reemplazar (2.35) en la expresión anterior tenemos

$$M \frac{\partial}{\partial M} \left(\delta_g - g \sum_i \delta_{Z_i} \right) + \beta(g) + g \sum_i \frac{1}{2} M \frac{\partial}{\partial M} \delta_{Z_i} = 0. \quad (2.39)$$

El último término de la expresión (2.39) reemplaza $nG^{(n)}$ dado que aquí consideramos la posibilidad de tener diferentes campos (por ejemplo en QED tenemos campos fermiónicos y fotónicos). Como resultado, se obtiene la expresión

$$\beta(g) = M \frac{\partial}{\partial M} \left(\frac{1}{2} g \sum_i \delta_{Z_i} - \delta_g \right). \quad (2.40)$$

La expresión (2.40) nos permite calcular las funciones beta de una teoría cualquiera una vez que se conozca los contratérminos de la misma.

Capítulo 3

Cálculo de funciones Beta

Como vimos en el capítulo anterior, la función β mide la dependencia de la constante de acoplamiento sobre la escala de renormalización. En este capítulo se lleva a cabo el cálculo de las funciones beta para teorías gauge con grupo $SU(N)$.

En la primera sección, a modo de ejercicio de calentamiento, se calcula la función beta a orden de un bucle para $N = 1$ (QED). El cálculo general se deja para la segunda sección.

3.1. Cálculo de la función Beta en QED

En QED, los contratérminos que contribuyen al cálculo de la función beta a orden de 1-bucle son determinados por los diagramas mostrados en la Figura 3.1. Usando (2.40), para QED tenemos,

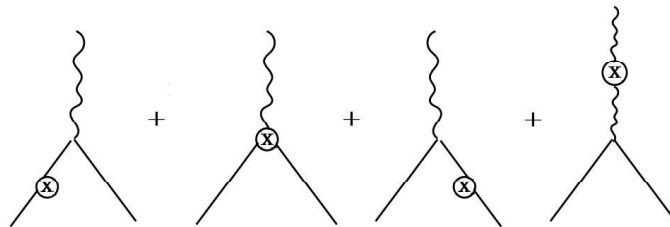


FIGURA 3.1: Estructura de los contratérminos a la función beta de la QED a orden de 1-bucle.

$$\begin{aligned}
\beta(e) &= M \frac{\partial}{\partial M} \left(\frac{1}{2} e \delta_2 + \frac{1}{2} e \delta_2 + \frac{1}{2} e \delta_3 - e \delta_1 \right) \\
&= e M \frac{\partial}{\partial M} \left(\underbrace{-\delta_1 + \delta_2}_{=0} + \frac{1}{2} \delta_3 \right), \\
&= \frac{e M}{2} \frac{\partial}{\partial M} \delta_3
\end{aligned} \tag{3.1}$$

ya que, como vimos con anterioridad, la exigencia de la invarianza gauge implica que $\delta_1 = \delta_2$. El contratérmino δ_3 está involucrado en las correcciones radiativas del propagador del fotón. A segundo orden en e esta corrección viene dada por el diagrama de Feynman:

$$i\Pi_2^{\mu\nu}(q) \equiv \text{Diagrama de un bucle con dos líneas de fotón y dos líneas de fermión} \tag{3.2}$$

De acuerdo a las reglas de Feynman (1.75-1.77), a este diagrama le corresponde la integral

$$i\Pi_2^{\mu\nu}(q) = -(-ie^2) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\text{Tr}[\gamma^\mu i(\not{k} + m) \gamma^\nu i(\not{k} + \not{q} + m)]}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)((k+q)^2 - m^2 + i\epsilon)}. \tag{3.3}$$

Para evaluar la integral debemos seguir 3 pasos sistemáticos: Parámetros de Feynman, rotación de Wick, regularización.

- Parametrización de Feynman:** Para resolver la integral (3.3) tenemos que expresar su denominador (que lo llamaremos por D) en una forma conveniente para facilitar los cálculos. Para ello utilizamos la siguiente identidad

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 \frac{dx}{(Ax + B(1-x))^2}, \tag{3.4}$$

donde x se denomina parámetro de Feynman. Aplicando esta identidad al denominador de (3.3) con $A = k^2 - m^2 + i\epsilon$ y $B = (k+q)^2 - m^2 + i\epsilon$, se

tiene,

$$\begin{aligned}
D &= \int_0^1 dx \frac{1}{((k+q)^2 - m^2 + i\epsilon)x + (k^2 - m^2)(1-x)^2 + i\epsilon} \\
&= \int_0^1 dx \frac{1}{(k^2 - 2kqx + q^2x - m^2 + i\epsilon)^2} \\
&= \int_0^1 dx \frac{1}{(\ell^2 + \Delta + i\epsilon)^2}
\end{aligned} \tag{3.5}$$

donde $\ell = k + qx$ y $\Delta = m^2 - q^2x(1-x)$. De esta manera, el denominador resulta en

$$\begin{aligned}
D &= \int \frac{d^4k}{f} \int_0^1 dx (2\pi)^4 \frac{1}{(\ell^2 + \Delta + i\epsilon)^2} \\
&= \int_0^1 dx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(\ell^2 + \Delta + i\epsilon)^2},
\end{aligned} \tag{3.6}$$

donde, en la segunda línea, se ha cambiado el orden de integración.

- Rotación de Wick:** Fijándonos solamente en la integral de momento de (3.6) observamos que esta es una integral compleja (debido al factor $i\epsilon$) sobre el eje real. El valor de esta integral no cambia si deformamos el contorno sin golpear ningún polo. Por tanto, podemos girar el contorno 90 grados en el sentido contrario a las manecillas del reloj para situarlo a lo largo del eje imaginario. Para lograr este cometido, introducimos el cuádrimomento Euclideo $\ell_E = (\ell_E^0, \vec{\ell}_E)$ como,

$$\ell^0 = i\ell_E^0, \quad \vec{\ell} = \vec{\ell}_E \tag{3.7}$$

tal que $\ell^2 = -\ell_E^2 = -\sum_i (\ell_E^i)^2$. De esta manera cambiamos la integral de momento de (3.6) de acuerdo a,

$$\int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \frac{1}{(\ell^2 - \Delta + i\epsilon)^\lambda} \rightarrow i(-1)^\lambda \int \frac{d^4\ell_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{(\ell_E^2 + \Delta)^\lambda}, \tag{3.8}$$

donde para nosotros, $\lambda = 2$. En esta etapa se ha omitido $i\epsilon$ dado que ya no es más necesario. La integral anterior se la puede calcular como una integral

esférica en \mathbb{R}^4 , es decir, la integral (3.6) se transforma en

$$= \int_0^1 dx \int \frac{d^4 \ell_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{(\ell_E^2 + \Delta)^2}. \quad (3.9)$$

Ahora, es el turno de trabajar con el numerador de (3.3). Aplicando un poco de operaciones algebraicas, se tiene,

$$\text{Tr} [\dots] \rightarrow \text{Tr} [(-\not{q} + \not{\ell} + \not{q}x + m) \gamma_\nu (-\not{\ell} - \not{q}x + m) \gamma_\mu] \quad (3.10)$$

$$= -\text{Tr} [(\not{\ell} + \not{q}(x-1)) \gamma_\nu (\not{\ell} + \not{q}x) \gamma_\mu] + m^2 \text{Tr} [\gamma_\mu \gamma_\nu] \quad (3.11)$$

$$= 4 \left(\frac{2}{d} \ell^2 g^{\mu\nu} - \ell^2 g^{\mu\nu} \right) + 8x(1-x) (q^\mu q^\nu - q^2 g^{\mu\nu}), \quad (3.12)$$

donde se han utilizado algunas identidades para las matrices de Dirac, recogidas en el apéndice B.

Finalmente, al unir el numerador (3.12) y el denominador (3.9) anteriormente calculados, la expresión para $i\Pi_2^{\mu\nu}(q)$ es

$$i\Pi_2^{\mu\nu}(q) = -8ie^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4 \ell_E}{(2\pi)^4} \frac{(-\frac{2}{d} + 1)g^{\mu\nu} \ell_E^2 + x(1-x)(q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu)}{(\ell_E^2 + \Delta^2)^2}. \quad (3.13)$$

■ Regularización dimensional:

El último paso es regularizar la integral de momento de (3.13) ya que diverge cuando $|\ell_E| \rightarrow \infty$. Para ello vamos a utilizar la regularización dimensional. Una breve descripción de este método y sus ventajas en QFTs se puede encontrar en el apéndice A.

Utilizando la expresión (A.7), y evaluando el término de ℓ^2 de la integral (3.13), obtenemos

$$\begin{aligned} \int \frac{d^d \ell_E}{(2\pi)^d} \frac{(-\frac{2}{d} + 1)g^{\mu\nu} \ell_E^2}{(\ell_E^2 + \Delta)^2} &= \frac{-1}{(4\pi)^{d/2}} (1 - d/2) \Gamma(1 - d/2) \left(\frac{1}{\Delta} \right)^{1 - \frac{d}{2}} g^{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma(2 - d/2) \left(\frac{1}{\Delta} \right)^{2 - \frac{d}{2}} (-\Delta g^{\mu\nu}). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Por lo tanto, la expresión para $\Pi_2^{\mu\nu}$ es

$$\begin{aligned} i\Pi_2^{\mu\nu} &= 8ie^2 \int_0^1 dx \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{\Delta^{2-d/2}} [x(1-x)(q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu)] \\ &= i(q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \Pi_2(q^2), \end{aligned} \quad (3.15)$$

con

$$\Pi_2(q^2) = \frac{-8e^2}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx x(1-x) \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{\Delta^{2-d/2}} \quad (3.16)$$

Como podemos ver es esta la expresión que buscamos ya que esta involucra la condición de renormalización $\Pi(q^2 = M^2) = 0$.

El contratérmino δ_3 debe eliminar la divergencia de esta expresión, es decir,

$$\delta_3 = -\Pi_2(q^2 = M^2) \quad (3.17)$$

De esta manera, de (3.16) se sigue que

$$\begin{aligned} \delta_3 &= \frac{-8e^2}{(4\pi)^{d/2}} \underbrace{\int_0^1 dx x(1-x)}_{=1/6} \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{\Delta^{2-d/2}} \\ &= -\frac{e^2}{(4\pi)^{d/2}} \frac{4}{3} \frac{\Gamma(2 - d/2)}{(M^2)^{2-d/2}} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Volvemos a $d = 4$ al tomar $\epsilon \rightarrow 0$ de acuerdo a la aproximación (A.9), tenemos a primer orden en ϵ que,

$$\delta_3 = -\frac{4e^2}{3} \log M \quad (3.19)$$

Una vez calculada la expresión para el contratérmino δ_3 estamos listos para calcular la función beta. Reemplazamos (3.19) en (3.1) se llega al resultado:

$$\beta(e) = \frac{e^3}{12\pi^2} \quad (3.20)$$

La expresión para la función beta de QED aquí calculada está en orden de 1-bucle. El cálculo de la función beta a órdenes superiores en bucles ingenuamente puede hacerse con la misma metodología presentada. Sin embargo, ésta no es

la correcta debido a las complejidades de diagramas con múltiples bucles. Por ejemplo, diagramas finitos que pueden tener subdiagramas divergentes, diagramas anidados o diagramas superpuestos son problemáticos tanto en complejidad como en tratamiento. El criterio que usamos, el grado de divergencia superficial cuyas divergencias que identifica son denominadas *divergencias locales*, deja de ser el correcto si queremos calcular la función beta en órdenes superiores [39].

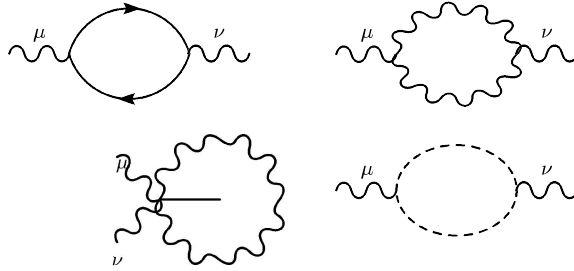


FIGURA 3.2: Contribuciones al propagador bosónico a orden g^2 . Estos diagramas poseen divergencias que son canceladas por el contratérmino δ_3 .

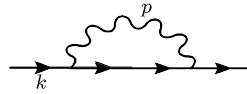


FIGURA 3.3: Corrección al propagador fermiónico. La divergencia de este diagrama es cancelada por el contratérmino δ_2 .

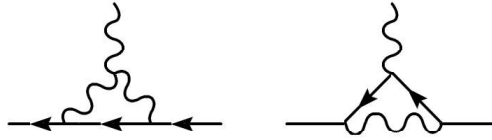


FIGURA 3.4: Contribuciones a la corrección del vértice fermión-bosón a orden g^2 y cuyas divergencias son canceladas por el contratérmino δ_1 .

3.2. Cálculo de funciones Beta en Teorías Gauge No Abelianas

En una teoría gauge no Abeliana, a partir de (2.40), la función β viene dada por [31],

$$\beta = eM \frac{\partial}{\partial M} \left(-\delta_1 + \delta_2 + \frac{1}{2}\delta_3 \right), \quad (3.21)$$

donde, ahora, $\delta_1 \neq \delta_2$, ya que el término $(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)$ no es gauge invariante por sí solo¹. Los diagramas divergentes que debemos calcular, y que a su vez deberán ser cancelados por los contratérminos δ_1 , δ_2 y δ_3 se resumen en las figuras 3.2, 3.3

¹ La expresión (3.21) no es específica para QED, nada en ella fue derivada por reglas de Feynman, solamente se utilizó la estructura de los contratérminos para su derivación, que en teorías gauge no Abelianas es la misma, por lo que podemos hacer uso de ella.

y 3.4 para el propagador bosónico, el propagador fermiónico, y el vértice gauge fermión-bosón, respectivamente.

3.2.1. Propagador bosónico

Para calcular las correcciones radiativas del propagador bosónico, tenemos que lidiar con los cuatro diagramas de la Figura 3.2. Comenzamos calculando el primero, el diagrama con el bucle fermiónico:

$$i\Pi_2^{\mu\nu}(q) \equiv \text{Diagrama con bucle fermiónico} \quad (3.22)$$

Al aplicar la regla de Feynman (1.32) al diagrama tenemos:

$$\begin{aligned} i\Pi_2^{\mu\nu}(q) &= -(-ig^2) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\text{Tr}[\gamma^\mu T^a i(\not{k} + m) \gamma^\nu T^b i(\not{k} + \not{q} + m)]}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)((k+q)^2 - m^2 + i\epsilon)} \\ &= -(-ig^2) C(r) \delta^{ab} \underbrace{\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\text{Tr}[\gamma^\mu i(\not{k} + m) \gamma^\nu i(\not{k} + \not{q} + m)]}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)((k+q)^2 - m^2 + i\epsilon)}}_{\text{igual que QED}}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Como observamos, la parte encerrada en llaves es idéntica a la expresión de la corrección radiativa del propagador del fotón en QED (ver ecuación (3.3)). Por tanto, el cálculo de este diagrama viene dado por la ecuación (3.15), multiplicado por el factor $C(r)\delta^{ab}$ extra que aparece en (3.23). Así,

$$\begin{aligned} -i\Pi_2^{\mu\nu}(q) &= i(q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) C(r) \delta^{ab} \frac{-8g^2}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx x(1-x) \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{\Delta^{2-d/2}} \\ &= i(q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \delta^{ab} C(r) \frac{-g^2}{(4\pi)^{d/2}} \frac{4}{3} \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{\Delta^{2-d/2}} = i(q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \Pi_2(q). \end{aligned} \quad (3.24)$$

La parte que nos interesa del diagrama es $\Pi_2(q)$. Si existen n_F especies de fermiones, todas en la misma representación r , entonces la contribución total a orden g^2 de los diagramas con bucles fermiónicos es

$$\sum_{\text{fermiones}} (i\Pi_2^{\mu\nu}) = i(q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \delta^{ab} \underbrace{\left(\frac{-g^2}{(4\pi)^2} \frac{4}{3} n_F C(r) \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{\Delta^{2-d/2}} \right)}_{\Pi_{\text{ferm}}(q^2)}. \quad (3.25)$$

Así, finalmente, tenemos,

$$\Pi_{ferm}(q^2) = \frac{-g^2}{(4\pi)^2} \frac{4}{3} n_{FC}(r) \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{\Delta^{2-d/2}}. \quad (3.26)$$

Recordemos que el contratérmino δ_3 debe cancelar las divergencias de todas las contribuciones en la Figura 3.3, por lo que debemos considerar los otros tres diagramas. El segundo diagrama de la Figura 3.2,

$$\Upsilon^{\mu\nu}(q) \equiv \text{diagrama}, \quad (3.27)$$

puede escribirse de acuerdo a las reglas de Feynman 1.33, obteniendo,

$$\begin{aligned} \Upsilon^{\mu\nu}(q) &= \frac{1}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{-i}{p^2} \frac{-i}{(p+q)^2} g^2 f^{acd} f^{bcd} [g^{\mu\rho}(q-p)^\sigma + g^{\rho\sigma}(2p+q)^\mu + \\ &\quad g^{\sigma\mu}(-p-2q)^\rho] \times [\underbrace{g_{\nu\rho}}_{\delta_\rho^\nu} (p-q)_\sigma + g_{\rho\sigma}(-2p-q)^\nu + \underbrace{g_{\sigma\nu}}_{\delta_\sigma^\nu} (p+2q)_\rho] \quad (3.28) \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{-i}{p^2} \frac{-i}{(p+q)^2} g^2 f^{acd} f^{bcd} N^{\mu\nu} \end{aligned}$$

donde en la expresión se suma sobre los índices repetidos del grupo gauge, en este caso los superíndices ac . El término $N^{\mu\nu}$ está dado por $N^{\mu\nu} = [g^{\mu\rho}(q-p)^\sigma + g^{\rho\sigma}(2p+q)^\mu + g^{\sigma\mu}(-p-2q)^\rho] \times [\delta_\rho^\nu(p-q)_\sigma + g_{\rho\sigma}(-2p-q)^\nu + \delta_\sigma^\nu(p+2q)_\rho]$.

Al trabajar sólo con el denominador de (3.28), podemos aplicar la parametrización de Feynman, tal y como lo hemos hecho en las secciones anteriores. Así,

$$\begin{aligned} \frac{1}{p^2} \frac{1}{(p+q)^2} &= \int_0^1 \frac{dx}{((p+q)^2 x + (1-x)p^2)^2} \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{(P-\Delta)^2} \end{aligned} \quad (3.29)$$

donde $P = p + xq$ y $\Delta = -x(1-x)q^2$. De esta manera la expresión (3.28) se reescribe como

$$\Upsilon^{\mu\nu}(q) = -\frac{g^2}{2} C_2(G) \delta^{ab} \int_0^1 dx \int \frac{d^4 P}{(2\pi)^4} \frac{N^{\mu\nu}}{(P^2 - \Delta)^2}, \quad (3.30)$$

donde se ha utilizado la identidad $f^{acd}f^{bcd} = C_2(G)\delta^{ab}$ con $C_2(G)$ el invariante de Casimir en la representación adjunta del grupo.

Ahora trabajamos sobre la estructura de $N^{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned}
N^{\mu\nu} &= [g^{\mu\rho}(q-p)^\sigma + g^{\rho\sigma}(2p+q)^\mu + g^{\sigma\mu}(-p-2q)^\rho] \\
&\quad \times [\delta_\rho^\nu(p-q)_\sigma + g_{\rho\sigma}(-2p-q)^\nu + \delta_\sigma^\nu(p+2q)_\rho] \\
&= \underbrace{g^{\mu\rho}\delta_\rho^\nu}_{=g^{\mu\nu}}(q-p)^\sigma(p-q)_\sigma + \underbrace{g^{\mu\rho}g_{\rho\sigma}}_{=\delta_\sigma^\mu} (q-p)^\sigma(-2p-q)^\nu + g^{\mu\rho}(q-p)^\sigma\delta_\sigma^\nu(p+2q)_\rho \\
&\quad + \underbrace{g^{\rho\sigma}\delta_\rho^\nu}_{=\delta^{\sigma\nu}}(2p+q)^\mu(p-q)_\sigma + \underbrace{g^{\rho\sigma}g_{\rho\sigma}}_{=\delta_\rho^\sigma=d} (2p+q)^\mu(-2p-q)^\nu + \underbrace{g^{\rho\sigma}\delta_\sigma^\nu}_{=g^{\rho\nu}}(2p+q)^\mu(p+2q)_\rho \\
&\quad + g^{\sigma\mu}(-p-2q)^\rho\delta_\rho^\nu(p-q)_\sigma + \underbrace{g^{\sigma\mu}g_{\rho\sigma}}_{\delta_\rho^\mu} (-p-2q)^\rho(-2p-q)^\nu + \underbrace{g^{\sigma\mu}\delta_\sigma^\nu}_{g^{\mu\nu}}(-p-2q)^\rho(p+2q)_\rho \\
&= -g^{\mu\nu}[(q-p)^2 + (2q+p)^2] - d(q+2p)^\mu(q+2p)^\nu + [(2q+p)^\mu(2p+q)^\nu \\
&\quad + (q-p)^\mu(2q+p)^\nu - (2p+q)^\mu(q-p)^\nu + (2q+p)^\nu(2p+q)^\mu + (q-p)^\nu(2q+p)^\mu \\
&\quad - (2p+q)^\nu(q-p)^\mu]
\end{aligned} \tag{3.31}$$

La expresión anterior se puede simplificar haciendo el cambio de variable $P = p+xq$ con el fin de eliminar p de la ecuación:

$$\begin{aligned}
N^{\mu\nu} &= -g^{\mu\nu}[(q-P+xq)^2 + (2q+P-xq)^2] - d(q+2P-2xq)^\mu(q+2P-2xq)^\nu \\
&\quad + [(2q+P-xq)^\mu(2P-2xq+q)^\nu + (q-P+xq)^\mu(2q+P-xq)^\nu \\
&\quad - (2P-2xq+q)^\mu(q-P+xq)^\nu + (\mu \rightarrow \nu)]. \\
&= -g^{\mu\nu}[q^2(1-x)^2 - 2qP(1+x) + P^2 + q^2(2-x)^2 + 2qP(2-x) + P^2] \\
&\quad - dq^\mu(2-x)q^\nu(1-2x) + 2q^\mu q^\nu[(2-x)(1-2x) + (1+x)(2-x) - \\
&\quad - (1-2x)(1+x)].
\end{aligned} \tag{3.32}$$

En la última línea se han descartado los términos lineales en P^μ ya que se integran simétricamente a cero. Trabajando un poco con los términos de (3.32) y reemplazando $P^\mu P^\nu \rightarrow g^{\mu\nu}P^2/d$ se obtiene

$$-g^{\mu\nu}[\dots] \rightarrow -g^{\mu\nu}q^2[(2-x)^2 + (1+x)^2 - \frac{2}{d}P^2] \quad (3.33)$$

$$2q^\mu q^\nu[\dots] \rightarrow [2(1-x)(2-x) + (1-2x)[2(2-x) - 2(1+x) - d(1-2x)]] \quad (3.34)$$

$$\rightarrow q^\mu q^\nu[2(1-x)(2-x) + (1-2x)^2(2-d)]. \quad (3.35)$$

Al unir todos los términos anteriores, ecs. (3.33) y (3.35), tenemos la expresión del numerador:

$$\begin{aligned} N^{\mu\nu} = & -g^{\mu\nu}P^2[6(1 - \frac{1}{d}) - g^{\mu\nu}q^2[(2-x)^2 + (1+x)^2] + \\ & + q^\mu q^\nu[2(1-x)(2-x) + (1-2x)^2(2-d)]. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Con este resultado podemos seguir desarrollando la expresión (3.30). Aplicando la rotación de Wick (3.7), tenemos que la integral de momento esta dada por,

$$\rightarrow \int \frac{d^4 P_E}{(2\pi)^4} \times \frac{iN_E^{\mu\nu}}{(P_E^2 + \Delta^2)^2}, \quad (3.37)$$

con el numerador en el espacio Euclideo,

$$\begin{aligned} N_E^{\mu\nu} = & g^{\mu\nu}P_E^2[6(1 - \frac{1}{d})] - g^{\mu\nu}q^2[(2-x)^2 + (1+x)^2] + \\ & + q^\mu q^\nu[2(1-x)(2-x) + (1-2x)^2(2-d)]. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Ahora aplicamos en cada término del numerador las relaciones de integración para la regularización dimensional (A.6) y (A.7), obteniendo

1.

$$\int \frac{d^d P_E}{(2\pi)^d} \frac{[6(1 - \frac{1}{d})]g^{\mu\nu}P_E^2}{(P_E^2 + \Delta^2)^2} = \frac{3(d-1)}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma(1 - d/2) \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-\frac{d}{2}} (-\Delta g^{\mu\nu}) \quad (3.39)$$

2.

$$\int \frac{d^d P_E}{(2\pi)^d} \frac{g^{\mu\nu}q^2}{(P_E^2 + \Delta^2)^2} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma(2 - d/2) \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-\frac{d}{2}} g^{\mu\nu}q^2 \quad (3.40)$$

3.

$$\int \frac{d^d P_E}{(2\pi)^d} \frac{q^\mu q^\nu}{(P_E^2 + \Delta)^2} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma(2 - d/2) \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2 - \frac{d}{2}} q^\mu q^\nu \quad (3.41)$$

Finalmente, uniendo todas las integrales anteriores conllevan a que el diagrama $\Upsilon^{\mu\nu}(q)$ tome la forma:

$$\begin{aligned} \Upsilon^{\mu\nu}(q) = \frac{ig^2 C_2(G) \delta^{ab}}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \frac{1}{\Delta^{2-d/2}} \times & \left[\Gamma(1 - \frac{d}{2}) g^{\mu\nu} q^2 \left[\frac{3}{2} (d-1)x(1-x) \right] + \right. \\ & \Gamma(2 - \frac{d}{2}) g^{\mu\nu} q^2 \left[\frac{1}{2} (2-x)^2 + \frac{1}{2} (1+x)^2 \right] - \\ & \left. \Gamma(2 - \frac{d}{2}) q^\mu q^\nu \left[(1 - \frac{d}{2})(1-2x)^2 + (1+x)(2-x) \right] \right]. \end{aligned} \quad (3.42)$$

A continuación, seguimos con el diagrama con el vértice gauge bosónico a 4.

$$\Xi_2^{\mu\nu}(q) \equiv \text{Diagrama con un vértice gauge bosónico a 4} \quad (3.43)$$

Usando la regla de Feynman (1.34), se tiene

$$\begin{aligned} \Xi_2^{\mu\nu}(q) = \frac{1}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{-ig_{\rho\sigma}}{p^2} \delta^{cd} (-ig^2) \times & [f^{abe} f^{cde} (g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) \\ & + f^{ace} f^{bde} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) + f^{ade} f^{bce} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma})]. \end{aligned} \quad (3.44)$$

La primera combinación de las constantes de estructura se desvanece ya que $\delta^{cd} f^{cde} = 0$ por antisimetría. La segunda y tercera puede reducirse usando $f^{acd} f^{bcd} = C_2(G) \delta^{ab}$. Así,

$$\Xi_2^{\mu\nu}(q) = -g^2 C_2(G) \delta^{ab} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2} g^{\mu\nu} (d-1). \quad (3.45)$$

Esta integral puede resolverse de manera similar a las anteriores, escribiéndola en términos del parámetro de Feynman. Para esto, multiplicamos el integrando por 1 en la forma $(q+p)^2/(q+p)^2$,

$$\Xi_2^{\mu\nu}(q) = -g^2 C_2(G) \delta^{ab} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2} \frac{(q+p)^2}{(q+p)^2} g^{\mu\nu} (d-1). \quad (3.46)$$

Por lo tanto, al aplicar la parametrización de Feynman al igual que en (3.29), definiendo la variable $P = p + xq$, tenemos,

$$\Xi_2^{\mu\nu}(q) = -g^2 C_2(G) \delta^{ab} \int_0^1 dx \int \frac{d^4 P}{(2\pi)^4} \frac{g^{\mu\nu}(d-1)[P^2 + (1-x)^2 q^2]}{(P^2 - \Delta)^2}. \quad (3.47)$$

En la ecuación anterior hemos descartado términos lineales en P . Aplicando la rotación de Wick (3.7) a la integral de momento,

$$\rightarrow \int \frac{d^4 P_E}{(2\pi)^4} \times \frac{ig^{\mu\nu}(d-1)[-P_E^2 + (1-x)^2 q^2]}{(P_E^2 + \Delta^2)^2} \quad (3.48)$$

A continuación aplicamos las relaciones de integración para la regularización dimensional (A.6) y (A.7), en cada término del numerador, y obtenemos:

1.
$$\begin{aligned} \int \frac{d^d P_E}{(2\pi)^d} \frac{g^{\mu\nu} P_E^2}{(P_E^2 + \Delta)^2} &= \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{d}{2} \Gamma(1 - d/2) \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{1 - \frac{d}{2}} g^{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma(1 - d/2) \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2 - \frac{d}{2}} (-\Delta g^{\mu\nu}). \end{aligned} \quad (3.49)$$

2.
$$\int \frac{d^d P_E}{(2\pi)^d} \frac{g^{\mu\nu} q^2}{(P_E^2 + \Delta)^2} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma(2 - d/2) \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2 - \frac{d}{2}} g^{\mu\nu} q^2. \quad (3.50)$$

Uniendo todas las integrales, se tiene:

$$\begin{aligned} \Xi_2^{\mu\nu}(q) = \frac{ig^2 C_2(G) \delta^{ab}}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \frac{1}{\Delta^{2-d/2}} \times \left(-\Gamma(1 - \frac{d}{2}) g^{\mu\nu} q^2 \frac{d}{2} (d-1)x(1-x) \right. \\ \left. - \Gamma(2 - \frac{d}{2}) g^{\mu\nu} q^2 [(d-1)(1-x)^2] \right). \end{aligned} \quad (3.51)$$

El último diagrama que nos compete es el diagrama con el bucle fantasma:

$$F^{\mu\nu}(q) \equiv \text{diagrama con bucle fantasma} \quad (3.52)$$

De acuerdo a las reglas de Feynman (1.47), el diagrama anterior se escribe como

$$F^{\mu\nu}(q) = (-1) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2} \frac{i}{(p+q)^2} g^2 f^{dac} (p+q)^\mu f^{cbd} p^\nu. \quad (3.53)$$

El signo menos enfrente de la integral es debido a que los campos fantasmas anticonmutan. Esta integral se ejecuta de la misma manera que lo hemos hecho en los diagramas anteriores. Al usar la parametrización de Feynman se tiene,

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu}(q) &= \int_0^1 dx \int \frac{d^4 P}{(2\pi)^4} \frac{C_2(G)\delta^{ab}(p+q)^\mu p^\nu}{(P^2 - \Delta)^2} \\ &= \int_0^1 dx \int \frac{d^4 P}{(2\pi)^4} \frac{-C_2(G)\delta^{ab}[g^{\mu\nu}\frac{P^2}{d} + (1-x)xq^\mu q^\nu]}{(P^2 - \Delta)^2} \end{aligned} \quad (3.54)$$

donde se ha utilizado, de nuevo, la relación (B.13) y se ha descartado los términos lineales en P . En este punto podemos aplicar la rotación de Wick (3.7), obteniendo,

$$F^{\mu\nu}(q) = -C_2(G)\delta^{ab} \int_0^1 dx \int \frac{d^4 P_E}{(2\pi)^4} \frac{[g^{\mu\nu}\frac{-P_E^2}{d} + (1-x)xq^\mu q^\nu]}{(P_E^2 - \Delta)^2}. \quad (3.55)$$

Aplicando las relaciones de integración para la regularización dimensional (A.6) y (A.7), en cada término del numerador:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^d P_E}{(2\pi)^d} \frac{g^{\mu\nu} P_E^2}{(P_E^2 + \Delta)^2} &= \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{1}{2} \Gamma(1 - d/2) \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{1 - \frac{d}{2}} g^{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma(1 - d/2) \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2 - \frac{d}{2}} (-\Delta g^{\mu\nu}) \end{aligned} \quad (3.56)$$

$$\int \frac{d^d P_E}{(2\pi)^d} \frac{q^\mu q^\nu}{(P_E^2 + \Delta)^2} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma(2 - d/2) \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2 - \frac{d}{2}} q^\mu q^\nu. \quad (3.57)$$

En resumen, el resultado del bucle fantasma es,

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu}(q) &= \frac{ig^2 C_2(G)\delta^{ab}}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \frac{1}{\Delta^{2-d/2}} \times \left(-\Gamma(1 - \frac{d}{2}) g^{\mu\nu} q^2 [\frac{1}{2}x(1-x)] \right. \\ &\quad \left. + \Gamma(2 - \frac{d}{2}) q^\mu q^\nu [x(1-x)] \right). \end{aligned} \quad (3.58)$$

Es tiempo de unir los tres diagramas del sector gauge puro para obtener la corrección a la parte transversal del propagador bosónico $\Pi(q^2)$, así, al sumar a la corrección del bucle fermiónico (3.26), se puede obtener una expresión completa para $\Pi(q^2)$.

$$\begin{aligned}
& \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} \\
&= i(q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \delta^{ab} \underbrace{\left[\frac{-g^2}{(4\pi)^2} \left(\frac{-5}{3} \right) C_2(G) \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \right]}_{\Pi_{gauge}(q^2)}
\end{aligned} \tag{3.59}$$

Al unir $\Pi_{ferm}(q^2)$ de (3.26) y $\Pi_{gauge}(q^2)$ de la ecuación anterior obtenemos

$$\Pi(q^2) = \frac{-g^2}{(4\pi)^2} \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{\Delta^{2-d/2}} \left[\frac{4}{3} n_F C(r) - \frac{5}{3} C_2(G) \right] \tag{3.60}$$

Para que el contratérmino δ_3 cancele la divergencia de la ecuación (3.60), debe tomar la forma

$$\delta_3 = \frac{-g^2}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(2 - d/2)}{(M^2)^{2-d/2}} \left[\frac{5}{3} C_2(G) - \frac{4}{3} n_F C(r) \right], \tag{3.61}$$

donde hemos aplicado las condiciones de renormalización (2.24).

3.2.2. Propagador fermiónico

El diagrama divergente que es cancelado por el contratérmino δ_2 corresponde a la corrección al propagador fermiónico de la Figura 3.3. De acuerdo a las reglas de Feynman (1.32) y (1.33) se puede escribir como,

$$i\Sigma_2(\not{p}) \equiv \text{Diagram} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (ig^2) \gamma^\mu T^a \frac{i(\not{p} + \not{k})}{(p+k)^2} \gamma_\mu T^a \frac{-i}{p^2}. \tag{3.62}$$

Dado que vamos a resolver esta integral a momentos altos hemos hecho en la expresión anterior la masa del fermion cero [31]. El producto de matrices $T^a T^a$ se reduce a $C_2(r)$ gracias a la identidad (B.13). El numerador se puede simplificar con la identidad (B.14). De esta manera obtenemos,

$$\Sigma_2(\not{p}) = g^2 C_2(r) (d-2) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{(\not{p} + \not{k})}{(p+k)^2 p^2}. \tag{3.63}$$

Ahora podemos realizar la integral mediante la parametrización de Feynman, rotación de Wick y regularización dimensional. La parametrización de Feynman en el denominador toma la misma forma que la ecuación (3.29) calculada en los diagramas bosónicos:

$$\frac{1}{p^2} \frac{1}{(p+k)^2} \rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{(P-\Delta)^2} \quad (3.64)$$

con $P = p + xk$. Este cambio de variable lo aplicamos al denominador:

$$\begin{aligned} (\not{p} + \not{k}) &\rightarrow (\not{P} - x\not{k} + \not{k}) \\ &\rightarrow (\not{P} + (1-x)\not{k}) \\ &\rightarrow (1-x)\not{k} \end{aligned} \quad (3.65)$$

Por lo tanto, (3.62) se reduce a

$$\begin{aligned} \Sigma_2(\not{p}) &= g^2 C_2(r) (d-2) \int_0^1 dx \int \frac{d^4 P}{(2\pi)^4} \frac{(1-x)\not{k}}{(P^2 - \Delta)^2} \\ &= ig^2 C_2(r) (d-2) \int_0^1 dx \int \frac{d^d P_E}{(2\pi)^d} \frac{(1-x)\not{k}}{(P_E^2 - \Delta)^2} \\ &= \frac{ig^2}{(4\pi)^{d/2}} C_2(r) \not{k} (d-2) \int_0^1 dx (1-x) \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{\Delta^{2-d/2}} \end{aligned} \quad (3.66)$$

En la segunda línea se ha realizado la rotación de Wick y en la última línea se integró en d dimensiones de acuerdo a la relación (A.6), con $d = 4 - \epsilon$. Finalmente, la expresión divergente está dada por

$$\Sigma_2(\not{p}) = \frac{ig^2}{(4\pi)^{d/2}} \not{k} C_2(r) (d-2) \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{\Delta^{2-d/2}}. \quad (3.67)$$

Utilizando la condición de renormalización (2.24): $\Sigma_2(\not{k} = M) = 0$, el contratérmino toma la forma:

$$\delta_2 = -\frac{g^2}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(2 - d/2)}{(M^2)^{2-d/2}} C_2(r). \quad (3.68)$$

3.2.3. Vértice 3-bosónico

Nos quedan dos diagramas por calcular, correspondientes a las correcciones del vértice 3-bosónico. El primero que consideraremos lo denotaremos por

$$\Gamma_f^\mu(k, k') \equiv \text{Diagrama} \quad (3.69)$$

De acuerdo a las reglas de Feynman, el diagrama se escribe como,

$$\Gamma_f^\mu(k, k') = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} g^3 T^b T^a T^b \frac{\gamma^\nu (\not{p} + \not{k}') \gamma^\mu (\not{p} + \not{k}) \gamma_\nu}{(p+k')^2 (p+k)^2 p^2}. \quad (3.70)$$

Trabajando un poco $T^b T^a T^b$ tenemos,

$$T^b T^a T^b = T^b T^b T^a + T^b [T^a, T^b] = C_2(r) T^a + T^b f^{abc} T^c. \quad (3.71)$$

Como las constantes de estructura son antisimétricas, podemos escribir,

$$T^b T^b T^a + T^b [T^a, T^b] = C_2(r) T^a + \frac{1}{2} f^{abc} (T^b T^c + T^b T^c) \quad (3.72)$$

$$= [C_2(r) - \frac{1}{2} C_2(G)] T^a \quad (3.73)$$

donde hemos utilizado las relaciones de (B.13). Con este factor la ecuación (3.70) toma la forma,

$$\Gamma_f^\mu(k, k') = g^3 [C_2(r) - \frac{1}{2} C_2(G)] T^a \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^\nu (\not{p} + \not{k}') \gamma^\mu (\not{p} + \not{k}) \gamma_\nu}{(p+k')^2 (p+k)^2 p^2}. \quad (3.74)$$

En este punto podríamos resolver la integral de momento con el proceso de parametrización de Feynman, rotación de Wick y regularización dimensional. Sin embargo, los cálculos que conllevan, aparte de ser engorrosos, no aportan en su totalidad al resultado final. La parte que nos interesa es únicamente la parte divergente del diagrama, por lo que podemos extraer esta divergencia directamente de (3.74) al considerar el límite en el cual la variable de integración p sea mucho

mayor que los momentos de las lineas externas k, k' . En este límite el diagrama es

$$\Gamma_f^\mu(k, k') \sim g^3 [C_2(r) - \frac{1}{2}C_2(G)] T^a \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^\nu \not{p} \gamma^\mu \not{p} \gamma_\nu}{p^2 \cdot p^2 \cdot p^2}. \quad (3.75)$$

El denominador se puede simplificar usando las identidades de las matrices gamma $\gamma^\mu \gamma^\nu p \gamma_\mu = p^\mu \gamma_\mu (2-d)$ y $p^\sigma p^\rho = p^2/d$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \gamma^\nu \not{p} \gamma^\mu \not{p} \gamma_\nu &\rightarrow \gamma^\mu \gamma^\sigma p_\sigma \gamma_\nu \gamma^\mu \gamma^\rho p_\rho \\ &\rightarrow (2-d)^2 \gamma^\mu \frac{p^2}{d}. \end{aligned} \quad (3.76)$$

La expresión (3.77) se reduce a,

$$\Gamma_f^\mu(k, k') \sim g^3 [C_2(r) - \frac{1}{2}C_2(G)] T^a (2-d)^2 \frac{1}{d} \gamma^\mu \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^2)^2}. \quad (3.77)$$

Finalmente, al aplicar las relaciones (A.6) a la integral de momento obtenemos

$$\Gamma_f^\mu(k, k') \sim \frac{g^3}{(4\pi)^2} [C_2(r) - \frac{1}{2}C_2(G)] T^a \gamma^\mu \Gamma(2 - \frac{d}{2}). \quad (3.78)$$

Esta estimación nos proporciona el coeficiente correcto del término divergente, el cual será absorbido por el contratérmino δ_1 . Los términos restantes finitos que no se han tomado en cuenta al hacer esta aproximación no se ven involucrados en el cálculo de la función β . No obstante, si se quisiera calcular otra amplitud, estos términos deben tomarse en cuenta.

El último diagrama involucrado en el vértice 3-bosónico es,

$$\Gamma_g^\mu(k, k') \equiv \begin{array}{c} \mu \\ \text{wavy line} \\ \leftarrow k' - p \quad \leftarrow k - p \\ \leftarrow k' \quad \leftarrow p \quad \leftarrow k \end{array}. \quad (3.79)$$

De acuerdo a las reglas de Feynman, tenemos,

$$\begin{aligned} \Gamma_g^\mu(k, k') &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (ig\gamma_\nu T^b) \frac{i\not{p}}{p^2} (ig\gamma_\rho T^c) \frac{-i}{(k' - p)^2} \frac{-i}{(k - p)^2} g f^{abc} [g^{\mu\nu} (2k' - k - p)^\rho \\ &\quad + g^{\nu\rho} (-k' - k + 2p)^\mu + g^{\rho\mu} (2k - k' - p)^\nu]. \end{aligned} \quad (3.80)$$

El producto de las matrices puede reducirse como sigue

$$T^b T^c f^{abc} = \frac{1}{2} f^{abc} [T^b, T^c] = \frac{i}{2} \underbrace{f^{abc} f^{bce}}_{-C_2(G)\delta_{ae}} T^e \quad (3.81)$$

$$= \frac{i}{2} C_2(G) T^a. \quad (3.82)$$

Al igual que en $\Gamma_{fer}^\mu(p, p')$, extraemos la divergencia del diagrama al despreciar los momentos externos al compararlos con p , es decir, $p \gg k, k'$. Tenemos así,

$$\begin{aligned} \Gamma_g^\mu(k, k') &\sim \frac{g^3}{2} C_2(G) T^a \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\gamma_\nu \not{p} \gamma_\rho [g^{\mu\nu} p^\rho - 2g^{\nu\rho} p^\mu + g^{\rho\mu} p^\nu]}{(p^2)^3} \\ &\sim \frac{g^3}{2} C_2(G) T^a \frac{1}{d} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^\mu \overbrace{\gamma^\rho \gamma_\rho}^4 - 2 \overbrace{\gamma^\rho \gamma^\mu \gamma_\rho}^{-2\gamma^\mu} + \overbrace{\gamma^\sigma \gamma_\sigma}^4 \gamma^\mu}{(p^2)^2} \\ &\sim \frac{3g^3}{2} C_2(G) T^a \gamma^\mu \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^2)^2} \end{aligned} \quad (3.83)$$

Análogo a la ecuación (3.77), realizamos la integral de momento, con el resultado siguiente

$$\Gamma_g^\mu(k, k') \sim \frac{3}{2} \frac{g^3}{(4\pi)^2} C_2(G) T^a \gamma^\mu \Gamma(2 - \frac{d}{2}). \quad (3.84)$$

La suma de las divergencias en los resultados (3.78) y (3.84) deben ser canceladas por el contratérmino δ_1 con la renormalización de escala M en las condiciones de renormalización (2.24). De esta manera se obtiene,

$$\delta_1 = \frac{-g^2}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(2 - d/2)}{(M^2)^{2-d/2}} [C_2(r) + C_2(G)]. \quad (3.85)$$

Función Beta en Teorías Gauge No Abelianas

Una vez calculados los tres contratérminos podemos calcular la función beta sustituyendo las ecuaciones (3.61), (3.68) y (3.85) en (3.21), y volviendo a $d = 4$ de la misma manera que hicimos en QED, con

$$\left. \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(2 - d/2)}{(M^2)^{2-d/2}} \right|_{d=4-\epsilon} = \frac{1}{16\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon} + \gamma_E - \log M^2 - \log(4\pi) + \mathcal{O}(\epsilon) \right). \quad (3.86)$$

se tiene

$$\begin{aligned}\beta(g) &= (-2)\frac{g^3}{16\pi^2} \left[(C_2(G) + C(r)) - C(r) + \frac{1}{2} \left(\frac{5}{3}C_2(G) - \frac{4}{3}n_F C(r) \right) \right] \\ &= -\frac{g^3}{16\pi^2} \left[\frac{11}{3}C_2(G) - \frac{4}{3}n_F C(r) \right].\end{aligned}\tag{3.87}$$

Finalmente, la función beta en Teorías Gauge No Abelianas se escribe como

$$\boxed{\beta(g) = -\frac{g^3}{16\pi^2} \left[\frac{11}{3}C_2(G) - \frac{4}{3}n_F C(r) \right]}.\tag{3.88}$$

Capítulo 4

Resultados y Conclusiones

En este capítulo discutimos los resultados obtenidos en el presente trabajo de titulación.

4.1. Función Beta en QED

Calculamos en el capítulo anterior que la función beta para QED a orden de 1-bucle esta dada por,

$$\beta(e)_{QED} = \frac{e^3}{12\pi^2}. \quad (4.1)$$

Como vimos en la ecuación (2.26), la función beta caracteriza la variación de la constante de acoplamiento con la escala de energía M . Por tanto, el hecho de que el signo de (4.1) sea positivo ya nos proporciona información del comportamiento global de la constante de acoplamiento: la constante de acoplo renormalizada para QED aumenta cuando aumenta la escala de energía.

Por un lado, cuando se trabaja a una escala M en el régimen de bajas energías, donde la carga del electrón renormalizada es suficientemente pequeña, la función beta nos dice que es totalmente legítimo abordar QED mediante un tratamiento perturbativo siempre. Se dice entonces que QED es segura en regímenes infrarrojos ya que la aproximación perturbativa nos proporciona mejores resultados conforme vamos a energías más bajas. En el límite, a escalas de energía suficientemente pequeñas (del orden de la masa del electrón, $m_e \simeq 0.5MeV$), la carga del electrón viene dada en términos de la constante de estructura fina α con el valor clásico de

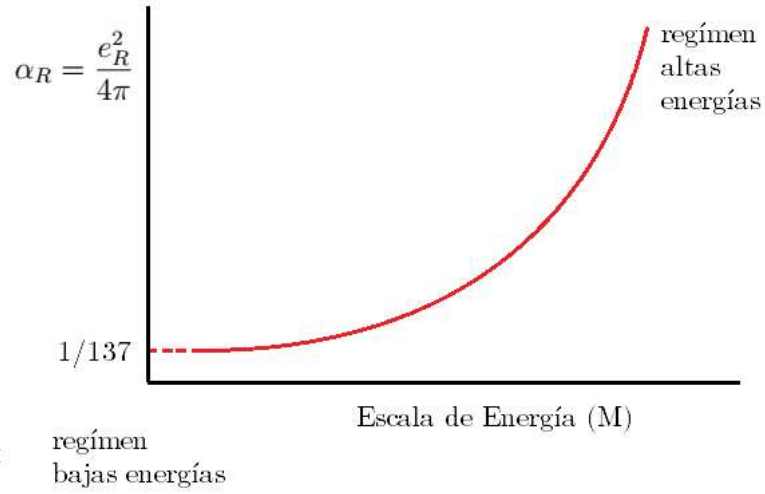


FIGURA 4.1: Gráfica esquemática de la carga renormalizada en función de la escala de energía M . Aquí α es la constante de estructura fina dada por $\alpha = e^2/4\pi$.

$\frac{1}{137}$ (Ver Figura 4.1). Por otro lado, cuando se incrementa la escala de energía M (a distancias cortas) el acoplamiento cada vez se hace más fuerte y la aproximación perturbativa deja de ser una metodología válida para el tratamiento de la teoría. Si quisieramos describir procesos a estas energías es estrictamente necesario cambiar el enfoque a uno no perturbativo.

4.2. Función Beta en Teorías Gauge con grupo SU(N)

En Teorías Gauge no Abelianas, ocurre totalmente lo contrario a QED. La función beta calculada en el capítulo 3 es,

$$\beta(g) = -\frac{g^3}{16\pi^2} \left[\frac{11}{3} C_2(G) - \frac{4}{3} n_F C(r) \right]. \quad (4.2)$$

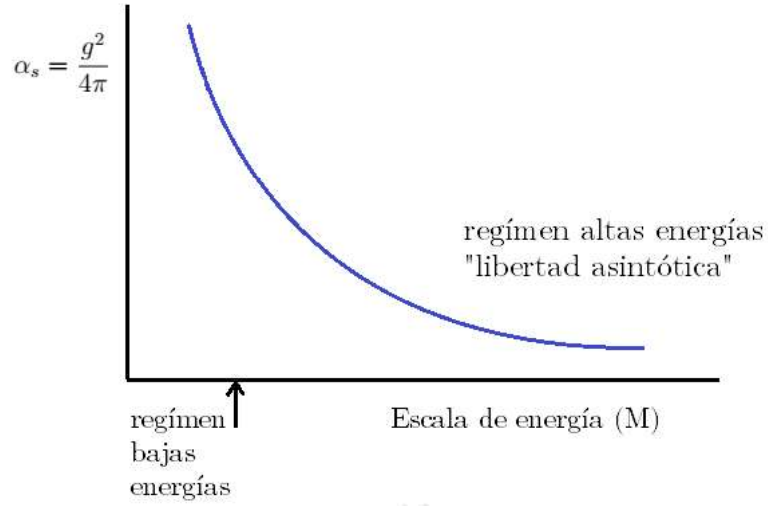


FIGURA 4.2: Gráfica esquemática de la constante de acoplamiento renormalizada g_r en función de la distancia desde la constante de acoplamiento desnuda g . Aquí α_s es la constante de acoplamiento fuerte dada por $\alpha_s = g^2/4\pi$.

Para el grupo $SU(N)$ se tiene que $C_2(G) = N$, y $C(r) = \frac{1}{2}$ (Ver apéndice B), valores que reemplazando en (4.2) resultan en,

$$\beta(g) = -\frac{g^3}{16\pi^2} \left[\frac{11}{3}N - \frac{2}{3}n_F \right]. \quad (4.3)$$

Al fijarnos en (4.3) se deduce claramente que para una pequeña cantidad de fermiones (n_F) la función β es negativa, lo que a partir de su definición (2.26) implica que la constante de acoplamiento efectiva aumenta cuando M disminuye y decrece mientras M sea cada vez más grande. Es decir,

$$\text{si } n_F < \frac{11}{2}N \quad \rightarrow \quad \beta(g) < 0. \quad (4.4)$$

Este hecho implica también que la constante de acoplamiento tienda a cero conforme la escala de energía se incrementa (a distancias cortas, ver Figura 4.2). Este fenómeno es conocido como *libertad asintótica*: en el límite Ultravioleta la teoría renormalizada es libre (sin interacción). En esta clase de teorías (a diferencia de QED), el comportamiento a distancias cortas, o energías arbitrariamente altas, es completamente tratable mediante diagramas de Feynman. Aunque las divergencias

ultravioletas aparezcan en cada orden de perturbación, este resultado garantiza que la constante de acoplamiento permanece débilmente acoplada, lo suficiente para tratar las divergencias que aparezcan de manera sofisticada y sin perjuicio para con la teoría. Podemos decir que teorías gauge no abelianas son seguras en regímenes Ultravioletas, siempre y cuando el número de fermiones cumpla la condición (4.4). Por otro lado, a distancias grandes o a bajas energías la constante de acoplamiento está fuertemente acoplada, lo cual implica que una teoría de perturbaciones deja de ser un marco válido para el estudio del comportamiento en este régimen.

4.3. Aplicación a la Cromodinámica Cuántica SU(3)

La Cromodinámica Cuántica (QCD) es la teoría para describir las interacciones fuertes hoy en día. En adición a los campos gauge, cuyo bosón es el gluón, esta teoría involucra campos de espín 1/2 conocidos como quarks. Es bien conocido que existen seis sabores (o tipos) de quarks en total: up, charm, top, con carga eléctrica $\frac{2e}{3}$; down, strange, bottom, con carga $-\frac{e}{3}$. Cada sabor de quark puede tener tres cargas de “color” que corresponden con la representación fundamental del grupo SU(3). Con esto en mente, la función beta para QCD, con $N = 3$ y con $n_F = 6$, se reduce a,

$$\beta(g) = -\frac{5g^3}{(16\pi)^2}. \quad (4.5)$$

Como se ve en la expresión anterior, la libertad asintótica es una propiedad perteneciente a QCD. Este fenómeno está en concordancia con resultados experimentales por aceleradores donde se verificó que los partones¹ y los quarks son las mismas entidades. La libertad asintótica en QCD implica que los quarks dentro de los hadrones se comportan casi como partículas libres. Decimos entonces que QCD es segura en regímenes ultravioletas, totalmente lo contrario a QED.

¹El partón era una partícula fundamental hipotética considerada como componente del hadrón en el llamado modelo de partón de las interacciones fuertes, propuesto por primera vez por Feynman. Los resultados experimentales indican una dinámica libre de los partones a escalas muy altas de energía [55].

A distancias grandes, o equivalentemente a energías bajas, la constante de acoplamiento se hace tan fuerte que hace imposible aislar quarks individuales. Este fenómeno se denomina *confinamiento*, según el cual no pueden existir partículas con color aisladas, y por lo tanto no pueden ser observados directamente. En efecto, a bajas energías los quarks y gluones se asocian para formar hadrones con carga de color siempre neutra. Es así que las técnicas usuales perturbativas no son útiles para desentrañar la física detrás de este proceso. Decimos que QCD es no perturbativa a bajas energías. Es importante señalar que el confinamiento de quarks no parece tener una relación directa con que la teoría esté fuertemente acoplada a bajas energías. Experimentalmente, se ha comprobado la existencia de un estado de materia llamado *plasma de quark y gluones*, consistente en un agregado de quarks y gluones deconfinados que ocurre a una escala en la que la teoría es aún fuertemente acoplada [58, 59].

Al día de hoy, el confinamiento es un fenómeno poco entendido, y su complejidad radica en que su comportamiento es un fenómeno global que QFT en su carácter local no ha podido reconciliar. En realidad, el problema de confinamiento de quarks está considerado dentro de uno de los problemas del milenio por el *Clay Mathematics Institute* [6].

4.4. Problemas del mecanismo de renormalización perturbativa

La ecuación de la función β (2.26) que describe la dependencia de la constante de acoplamiento g de una teoría con una escala de energía M puede ser escrita perturbativamente de la siguiente manera:

$$\frac{dg}{d \ln M} = \beta_1 g + \beta_2 g^2 + \beta_3 g^3 + \dots \quad (4.6)$$

La ecuación anterior podemos integrarla sólo en orden g^2 con las condiciones de frontera:

$$g(m) = g_R, \quad g(M) = g_0,$$

donde m es la masa característica de la teoría, M una escala de energía cualquiera, y g_R , g_0 son la constante de acoplo renormalizada y desnuda, respectivamente, obteniendo,

$$g_R = \frac{g_0}{1 + \beta_2 g_0 \ln\left(\frac{M}{m}\right)}. \quad (4.7)$$

Dado que g_R es la constante de acoplamiento que esperamos ver, la forma de interpretar la ecuación (4.7) está en la determinación de la carga desnuda:

$$g_0 = \frac{g_R}{1 - \beta_2 g_R \ln\left(\frac{M}{m}\right)}. \quad (4.8)$$

Como podemos notar la ecuación anterior tiene un polo cuando la escala de energía toma el valor de $M_L = m e^{\frac{1}{\beta_2 g_R}}$. Este polo es conocido como el polo de Landau. El problema con este polo radica en que, si asumimos que g_R es la constante renormalizada, (la que nosotros observamos en experimentos), para que tenga g_R un valor finito en el del polo de Landau, la constante desnuda g_0 que aparece en nuestros cálculos de renormalización perturbativa tiene que ser infinita. Por tanto, el Lagrangiano de la teoría no sería consistente.

El problema del polo de Landau tiene dos posibles soluciones. Una es aseverar que, debido a que se ha utilizado teoría de perturbaciones para calcular (4.8), no se puede aplicar, por tanto, esta expresión para un caso donde g_0 esté por encima del valor 1. Es decir, el polo de Landau es consecuencia de que estamos extrapolando un resultado perturbativo a una región no perturbativa. La otra solución a este problema se la denomina trivialidad cuántica, la cual establece que si hacemos experimentos en las inmediaciones de energía del polo de Landau el valor de la constante de acoplo que mediríamos sería cero ($g_R \rightarrow 0$ cuando $M \rightarrow M_L$). En otras palabras, en esta escala de energía la teoría se vuelve trivial (sin interacciones), debido al apantallamiento de carga producto de las interacciones consigo misma. Ambas soluciones al problema son factibles. En el caso de QED, cabe aclarar que el polo de Landau es una mera curiosidad matemática al día de hoy, ya que la escala a la que ocurre es a $M_L = 10^{227}$ GeV [54], energías muy sobre el límite de los cómputos de interés usuales de la teoría, que son del orden de los TeV [54].

A parte del problema de Landau, el problema fundamental de la renormalización perturbativa radica en que todas las teorías que se estudia con este método se vuelven no perturbativas en algún punto (en el caso de QED, en el régimen Ultravioleta y QCD, en el régimen Infrarrojo). Así, el régimen no perturbativo es imposible de escapar. Este hecho se puede considerar como una señal de que las teorías que tratemos perturbativamente nunca van a llegar a la rigurosidad matemática de una teoría completa. El mecanismo de renormalización perturbativa funciona, y se obtienen resultados con precisiones nunca antes vistas. Sin embargo, es de suma importancia ser crítico en el método y tener siempre presente las limitaciones del mismo.

4.5. Consideraciones finales

Para finalizar, cabe concluir que todas las teorías estudiadas en el presente trabajo deben ser consideradas como teorías efectivas a bajas energías. En concordancia al enfoque discutido en el capítulo 3, la renormalización nos dice que los detalles de la física de alta energía no afectan los efectos en el régimen de baja energía. En este sentido, el Modelo Estándar de Partículas es en realidad una teoría de campo efectiva que describe a la naturaleza (aproximadamente) a través de teorías solamente renormalizables. De existir, la única teoría completa debería ser una “Teoría del Todo”, la cual unificaría y explicaría todas las interacciones de la naturaleza con estricta rigurosidad matemática.

En trabajos futuros se sugiere encarecidamente el continuo estudio de teorías cuánticas de campo en la carrera de pregrado a un nivel introductorio, así como en las prácticas pre profesionales y trabajos de titulación. En concreto, como continuación de este trabajo, el estudio de las herramientas y técnicas para el cálculo de funciones beta en órdenes superiores de perturbación, e.g. métodos externos de campos, simetrías efectivas de acción, métodos computacionales o el estudio de alternativas no perturbativas. Es importante desestigmatizar el hecho de que proyectos teóricos por su carácter puramente académico son de menos interés para la carrera de pregrado. La física de las teorías gauge, además de ser un campo muy activo en la investigación actual, guarda una de las más grandes incógnitas

hasta ahora sin resolver, *el problema del confinamiento de la carga de color*, por lo que su temprana introducción al tema puede ser beneficioso, no solo para la preparación para un futuro masterado o doctorado del estudiante, sino también para el desarrollo de la ciencia en sí misma.

Apéndice A

Regularización dimensional

La elección del método de regularización dimensional para tratar integrales divergentes en este estudio sobre otros métodos (corte de momento, regularización de Pauli-Villars, regularización de red) se debe a que este método conserva las simetrías de la teoría, tales como la invariancia gauge y la invarianza Lorentz [44]. Además, las reglas para manipular integrales no son engorrosas a diferencia de los otros métodos. En este apéndice se presentan los desarrollos y expresiones básicas necesarias para hacer uso del método de regularización dimensional.

Al calcular propagadores mediante las reglas de Feynman, los integrandos resultantes tenemos que expresarlos en función de parámetros de Feynman, de acuerdo a la identidad,

$$\frac{1}{A_1 A_2 \dots A_n} = \int_0^1 dx_1 \dots dx_n \delta(\sum x_i - 1) \frac{(n-1)!}{[x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_n A_n]^n}. \quad (\text{A.1})$$

Una vez aplicada la expresión (A.1), la cantidad en corchetes del denominador será una función cuadrática de las variables de integración p_i^μ . Por ejemplo, en una expresión del estilo,

$$\frac{1}{p^2(p+q)^2} = \int_0^1 \frac{dx}{[(p+q)^2 x + (1-x)p^2]^2}. \quad (\text{A.2})$$

A continuación, se completa el cuadrado y se realiza un cambio de variables de integración para absorber los términos lineales en p_i^μ . Para las integrales en 1-bucle,

hay una sola integración en p^μ , la cual es desplazada a la variable de momento ℓ^μ . Después de este cambio, el denominador toma la forma $(\ell^2 - \Delta)^n$. En el numerador, mientras tanto, pueden aparecer términos con un número impar de potencias de ℓ , los cuales se hacen cero por la simetría en la integración. La simetría también nos permite reemplazar,

$$\begin{aligned}\ell^\mu \ell^\nu &\rightarrow \frac{1}{d} \ell^2 g^{\mu\nu}, \\ \ell^\mu \ell^\nu \ell^\rho \ell^\sigma &\rightarrow \frac{1}{d(d+2)} (\ell^2)^2 (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} + g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}),\end{aligned}\tag{A.3}$$

donde d es la dimension espacio temporal. La integral resultante de este procedimiento toma la forma de:

$$\int \frac{d^d \ell}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\ell^2 + \Delta)^n},\tag{A.4}$$

donde hemos cambiado las dimensiones espacio temporales a un número continuo al hacer $d = 4 - \epsilon$. Esta integral conviene evaluarla después de hacer una rotación de Wick en el espacio Euclideo, con la sustitución,

$$\ell^0 = i\ell_E^0, \quad \ell^2 = -\ell_E^2,\tag{A.5}$$

donde las expresiones generales resultantes que se pueden dar, vienen dadas por:

$$\int \frac{d^d \ell_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\ell_E^2 + \Delta)^n} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(n - \frac{d}{2})}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n - \frac{d}{2}};\tag{A.6}$$

$$\int \frac{d^d \ell_E}{(2\pi)^d} \frac{\ell_E^2}{(\ell_E^2 + \Delta)^n} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{d}{2} \frac{\Gamma(n - \frac{d}{2} - 1)}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n - \frac{d}{2} - 1}.\tag{A.7}$$

donde Γ son las funciones especiales matemáticas beta [46]. Ahora, para volver a $d = 4$, el comportamiento en sus inmediaciones puede ser extraído al expandir $(1/\Delta)^{n - \frac{d}{2}}$,

$$\left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n - \frac{d}{2}} = 1 - (n - \frac{d}{2}) \log \Delta + \dots,\tag{A.8}$$

y $\Gamma(x)$ alrededor de $x = -n$,

$$\Gamma(x) = \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{1}{x+n} - \gamma + 1 + \dots + \frac{1}{n} + \mathcal{O}(x+n) \right).\tag{A.9}$$

Aquí γ es la constante de Euler-Mascheroni, cuyo valor es $\gamma \approx 0.5772$. La combinación de (A.8) y (A.9) con $n = 2$, dan una expansión muy frecuente en cálculos de correcciones radiactivas:

$$\frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{(4\pi)^{d/2}} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2 - \frac{d}{2}} = \frac{1}{(4\pi)^2} \left(\frac{2}{\epsilon} - \log \Delta - \gamma + \log(4\pi) + \mathcal{O}(\epsilon)\right), \quad (\text{A.10})$$

con $\epsilon = 4 - d$.

Apéndice B

Representaciones de Grupos de Lie

En teoría cuántica de campos estamos interesados en representaciones de grupos,¹ que a breves rasgos, son representaciones en términos de matrices unitarias de un grupo de Lie. Un grupo de Lie es aquel que tiene elementos conectados continuamente con la identidad. Un elemento infinitesimal del grupo de Lie, g , entonces, puede escribirse como:

$$g(\alpha) = 1 + i\alpha^a T^a + \mathcal{O}(\alpha^2), \quad (\text{B.1})$$

donde T^a , son los generadores de la simetría del grupo y α^a son los parámetros del grupo. Se puede mostrar que el conmutador de dos generadores cualquiera T^a debe ser una combinación lineal de generadores, de esta manera se cumple la relación [34],

$$[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c, \quad (\text{B.2})$$

donde los números f^{abc} son llamados constantes de estructura y obedecen la identidad de Jacobi,

$$f^{ade} f^{bcd} + f^{bde} f^{cad} + f^{cde} f^{abd} = 0. \quad (\text{B.3})$$

Las constantes de estructura y las relaciones de conmutación (B.2) determinan la ley de multiplicación del grupo y los T^a definen el álgebra de Lie. Con este

¹Literatura recomendada para ahondar en el tema, puede ser [34, 40, 41]

lenguaje, presentamos ejemplos concretos de las representaciones de los grupos $U(1)$ y $SU(3)$ que utilizaremos en este trabajo.

U(1)

Es el grupo Abelian más sencillo, y es el grupo gauge de QED. Su álgebra consiste en un solo generador T , y elementos pueden escribirse como:

$$U(\alpha) = e^{-i\alpha T}, \quad (\text{B.4})$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$. Sus representaciones irreducibles son unidimensionales y son de la forma,

$$d_G(\alpha) = e^{-iq\alpha}, \quad (\text{B.5})$$

donde q es la carga eléctrica en QED.

SU(3)

Este grupo tiene ocho generadores y dos representaciones tridimensionales básicas irreducibles, la fundamental ($d_{\mathbf{3}}$) y la antifundamental ($d_{\bar{\mathbf{3}}}$). En cromodinámica cuántica (QCD), por ejemplo, estas representaciones están asociadas con la transformación de quarks y antiquarks bajo la simetría gauge de color $SU(3)$. Los elementos de estas representaciones se expresan como,

$$d_{\mathbf{3}}(\alpha^a) = e^{\frac{i}{2}\alpha^a\lambda_a}, \quad d_{\bar{\mathbf{3}}}(\alpha^a) = e^{-\frac{i}{2}\alpha^a\lambda_a^\dagger} \quad (a = 1, \dots, 8), \quad (\text{B.6})$$

y sus generadores se escriben,

$$T^a(\mathbf{3}) = \frac{1}{2}\lambda_a, \quad T^a(\bar{\mathbf{3}}) = -\frac{1}{2}\lambda_a^\dagger, \quad (\text{B.7})$$

con λ_a como las matrices de Gell-Mann [43].

Invariante de Casimir

Hay una serie de invariantes que se pueden construir asociados con una representación irreducible r de un grupo de Lie G y que son de suma importancia en

los cálculos de funciones beta en el capítulo 3.

Sean T^a los generadores en una cierta representación R del álgebra de Lie. Usando la antisimetría de f^{abc} se puede demostrar que la matriz $T^2 = \sum_a T^a T^a$ conmuta con todo el grupo de generadores [44]. Por tanto, de acuerdo con el lema de Schur², su representación matricial tiene que ser proporcional a la identidad, es decir, tendría que ser expresada como,

$$T^a T^a = C(r) \cdot \mathbf{1}, \quad (\text{B.8})$$

donde $\mathbf{1}$ es la matriz unidad, y $C(r)$ el invariante Casimir cuadrático³. Un segundo invariante C_2 en la representación r puede ser definido mediante la identidad,

$$f^{acd} f^{bcd} = C_2(r) \delta^{ab}. \quad (\text{B.9})$$

En el caso del grupo $SU(N)$, en la representación fundamental, encontramos los valores de

$$C(r) = \frac{1}{2}, \quad C_2(r) = \frac{N^2 - 1}{2N}, \quad (\text{B.10})$$

y en la representación adjunta tenemos,

$$C(G) = N, \quad C_2(G) = N. \quad (\text{B.11})$$

El invariante Casimir $C(r)$ aparece también al hacer la traza de $T^a T^b$:

$$\text{tr}[T^a T^b] = C(r) \delta^{ab}, \quad (\text{B.12})$$

²El lema de Schur establece que: si una representación es irreducible y hay una matriz de la misma dimensión que conmute con todos los generadores, entonces sus elementos tienen que ser proporcionales a la identidad.

³También llamado operador Casimir o elemento Casimir

y en otras operaciones algebraicas que se utilizaron a lo largo de este trabajo,

$$\begin{aligned}
T^a T^b T^a &= [C_2(r) - \frac{1}{2}C_2(G)]T^b, \\
f^{abcd} f^{bcd} &= C_2(G)\delta^{ab}, \\
f^{abc} T^b T^c &= \frac{1}{2}iC_2(G)T^a.
\end{aligned}
\tag{B.13}$$

Fórmulas útiles del álgebra de Matrices

Las trazas de las matrices γ en d dimensiones se pueden evaluar con las siguientes identidades,

$$\begin{aligned}
\gamma^\mu \gamma_\nu &= d, \\
\gamma^\mu \gamma_\nu \gamma_\mu &= -(d-2)\gamma^\nu, \\
\gamma^\mu \gamma_\nu \gamma^\rho \gamma_\mu &= 4g^{\mu\rho} - (4-d)\gamma^\nu \gamma^\rho, \\
\gamma^\mu \gamma_\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_\mu &= -2\gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu + (4-d)\gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma.
\end{aligned}
\tag{B.14}$$

Bibliografía

- [1] J. B. Odom, D. Hanneke, B. Durso, and G. Gabrielse. New measurement of the electron magnetic moment using a one-electron quantum cyclotron. *Phys. Rev. Lett.*, **97**:030801, Jul (2006).
- [2] C. N. Yang and R. L. Mills. Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance. *Physical Review*, **96**:191-195, October (1954).
- [3] Abdus Salam and J. C. Ward. Weak and electromagnetic interactions. *Il Nuovo Cimento* (1955-1965), **11(4)**:568-577, Feb (1959).
- [4] Sheldon L. Glashow. Partial-symmetries of weak interactions. *Nuclear Physics*, **22(4)**:579 - 588, (1961).
- [5] Steven Weinberg. A model of leptons. *Phys. Rev. Lett.*, **19**:1264-1266, Nov (1967).
- [6] Arthur Jaffe And Edward Witten, Quantum Yang-Mills theory-Official problem Description (2000)
- [7] Alvarez-Gaumé, L. and Vázquez-Mozo, M.A, An Invitation to Quantum Field Theory, Springer Berlin Heidelberg (2011)
- [8] Walter Greiner, Field Quantization, Springer-Verlag (1996)
- [9] L.H. Ryder. Quantum Field Theory. Cambridge University Press, (1996).
- [10] A. Zee. Quantum Field Theory in a Nutshell: Second Edition. In a Nutshell. Princeton University Press, (2010).

- [11] Oskar Klein. Quantum Theory and Five-Dimensional Relativity Theory. *The Oskar Klein Memorial Lectures*, (1988-1999).
- [12] W. Gordon. The Compton Effect according to Schrödinger's Theory. *Journal of Physics*, **40(1)**:117-133, Jan (1926).
- [13] O. Klein. Electrodynamics and wave mechanics from the point of view of the correspondence principle. *Journal of Physics A Hadrons and nuclei*, **41(6)**:407-442, Oct (1927).
- [14] Dirac, P. A. M. (1928). The Quantum Theory of the Electron. *Proceedings of the Royal Society A*. **117** (778): 610.
- [15] R. Shankar. Principles of Quantum Mechanics. . Springer, (1994).
- [16] A. Böhm. Quantum mechanics. Texts and monographs in physics. Springer-Verlag, (1979).
- [17] Erwin Schrodinger. Quantisation as a Problem of Proper Values. *Ann. Phys.*, **79**:489527, (1926).
- [18] W. Z. Heisenberg. Quantum mechanical reinterpretation of kinematic and mechanical relations. *Ann. Phys.*, **33**:879, (1925).
- [19] F. Silvan Schweber. QED and the Men Who Made it: Dyson, Feynman, Schwinger and Tomonaga. *Physics Today*, **47(12)**, (1994).
- [20] Tomonaga, S. "On a Relativistically Invariant Formulation of the Quantum Theory of Wave Fields." *Prog. Theor. Phys.* 1, 2742 (1946)
- [21] Feynman, Richard P. (1948). "A Relativistic Cut-Off for Quantum Electrodynamics". *Physical Review*. 74 (10): 14301438.
- [22] G. Gabrielse, D. Hanneke, T. Kinoshita, M. Nio, and B. Odom. New determination of the fine structure constant from the electron g value and qed. *Phys. Rev. Lett.*, **97**:030802, Jul (2006).
- [23] Herbert Goldstein, Classical Mechanics. Pearson Education, 2002 .

- [24] P. A.M. Dirac. Quantum Mechanics. Oxford University Press, 1958..
- [25] Richard P. Feynman. The principle of least action in quantum mechanics. PhD thesis, Faculty of Princeton University, 1942.
- [26] R. Feynman. QED: the Strange Theory of Light and Matter. Universities Press (India) Pvt. Limited, 1985.
- [27] N. Zetillim, Quantum Mechanics, 2da Ed., Wiley, Jacksonville (2009).
- [28] Sanjeev S. Seahra. Path Integrals in Quantum Field Theory. Department of Physics, University of Waterloo, 2000
- [29] M.E. Peskin and D.V. Schroeder. An Introduction To Quantum Field Theory. Frontiers in Physics. Avalon Publishing, 1995
- [30] Mark Srednicki. Quantum Field Theory. Cambridge University Press, 2007
- [31] Steven. Weinberg. The Quantum Theory Of Fields, volume 1. Cambridge University Press, 1995
- [32] George B. Arfken and Hans J. Weber. Mathematical Methods for Physicists. Academic Press: San Diego, 4th edition, 1995.
- [33] David Tong. Quantum Field theory. Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics . University of Cambridge, 2007
- [34] Brian C. Hall. Lie Groups, Lie Algebras, and representations. An elementary Introduction. Springer, 2004.
- [35] Faddeev, L. D.; Popov, V. (1967), "Feynman diagrams for the Yang-Mills field", Phys. Lett. B, 25 (1): 29
- [36] E. Fermi, Trends to a Theory of beta Radiation. (In Italian), Nuovo Cim., vol. 11, pp. 119, 1934
- [37] N. N. Bogoliubov and O. S. Parasiuk, Acta. Math. 97, 227 (1957)
- [38] K. Hepp, Comm. Math. Phys. 2, 301, (1966),

- [39] W. Zimmermann, In "Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory", Proceedings. 1970
- [40] H.F. Jones. Groups, Representations and Physics. CRC Press, 1998.
- [41] H. Georgi. Lie Algebras In Particle Physics: from Isospin To Unified Theories. Frontiers in Physics. Avalon Publishing, 1999
- [42] Pierre Ramond. Group Theory A Physicists Survey. Cambridge University Press, 2010
- [43] Murray Gell-Mann. Symmetries of baryons and mesons. Phys. Rev., 125:10671084, Feb 1962.
- [44] R. P. Feynman. Space-time approach to quantum electrodynamics. Phys. Rev., 76:769789, Sep 1949.
- [45] K. G. Wilson (1975), "The renormalization group: critical phenomena and the Kondo problem, Rev. Mod. Phys. 47, 4, 773.
- [46] Paul. H. Frampton. Gauge Field theories. Wiley-VCH Verlag, 2008.
- [47] Ta-Pei Cheng and Ling-Fong. Li. Gauge theory of elementary particle physics. Wiley-VCH Verlag, 2008.
- [48] L. O'RaiFeartaigh, The Dawning of Gauge Theory, Princeton University Press, 1997.
- [49] A. Salam, Weak and electromagnetic interactions, in Svartholm: Elementary Particle Theory, Proceedings of The Nobel Symposium held in 1968 at Lerum, Sweden, Stockholm, 1968, 366 377
- [50] Aoyama, Tatsumi; Hayakawa, Masashi; Kinoshita, Toichiro; Nio, Makiko. Tenth-Order Electron Anomalous Magnetic Moment- Contribution of Diagrams without Closed Lepton Loops. *Physical Review D*. **91** (3): 033006 (2015)
- [51] Giusti, D., et al. Strange and charm HVP contributions to the muon ($g - 2$) including QED corrections with twisted-mass fermions. (2017).

- [52] Lev Landau, in Wolfgang Pauli, ed. Niels Bohr and the Development of Physics. London: Pergamon Press. (1955)
- [53] Yndurain, F.J.: Landau Poles, Violations of Unitarity and a Bound on the Top Quark Mass. In: Akhoury, R., de Wit, B., van Nieuwenhuizen, P., Veltman, H. (eds.) Gauge Theorie - Past and Future. World Scientific, Singapore (1992)
- [54] Gökeler, M.; R. Horsley; V. Linke; P. Rakow; G. Schierholz; H. Stüben (1998). Is There a Landau Pole Problem in QED?. Physical Review Letters. 80 (19): 41194122
- [55] Feynman, R. P. The Behavior of Hadron Collisions at Extreme Energies. High Energy Collisions: *Third International Conference at Stony Brook*, N.Y. Gordon and Breach. pp. **237249** (1969)
- [56] Atick, Joseph J.; Witten, Edward "The Hagedorn transition and the number of degrees of freedom of string theory". (1988)
- [57] Ericson, Torleif; Rafelski, Johann The tale of the Hagedorn temperature. CERN Courier (2003)
- [58] H. van Hees, V. Greco, and R. Rapp, Heavy-quark probes of the quark-gluon plasma at RHIC, *Phys.Rev.* **C73** 034913, (2006)
- [59] U. W. Heinz, The Strongly coupled quark-gluon plasma created at RHIC, J.Phys. A42 214003 (2009)