

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

**NARVAEZ ORDOÑEZ JIMMY SEBASTIAN
FACULTAD DE CIENCIAS**

**ANÁLISIS DE INESTABILIDADES TWO-STREAM EN LOS CASOS
LÍMITE DE BEAM-PLASMA Y GENTLE-BUMP EN PLASMAS
CINÉTICOS NO COLISIONALES, USANDO ALGORITMOS TIPO
PARTICLE-IN-CELL NO RELATIVISTAS**

TRABAJO DE TITULACIÓN PREVIO DE LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE FÍSICA

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

AMANDA ODERAY ENRIQUEZ MONCAYO

amanda.enriquez@epn.edu.ec

DIRECTOR: CHRISTIAN LEONARDO VÁSCONEZ VEGA, PHD

christian.vasconez@epn.edu.ec

Quito, Noviembre, 2019

DECLARACIÓN

Yo, AMANDA ODERAY ENRIQUEZ MONCAYO, declaro bajo juramento que el trabajo aquí escrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

A través de la presente declaración cedo mis derechos de propiedad intelectual, correspondientes a este trabajo, a la Escuela Politécnica Nacional, según lo establecido por la Ley de Propiedad Intelectual, por su reglamento y por la normativa institucional vigente.



Amanda Oderay Enriquez Moncayo

CERTIFICACIÓN

Certifico que el siguiente trabajo fue desarrollado por AMANDA ODERAY ENRIQUEZ MONCAYO, bajo mi supervisión.

A handwritten signature in blue ink, appearing to read 'Christian', is centered on the page. The signature is stylized and fluid.

Christian Leonardo Vásquez Vega, PhD
Director del Proyecto

AGRADECIMIENTO

Agradezco a mi director de tesis PhD Christian Vásquez por su guía, misma que me permitió desarrollar este trabajo.

DEDICATORIA

Este trabajo le dedico a mi mamá y a mi hermano por su apoyo incondicional.

Índice general

RESUMEN	4
ABSTRACT	5
1. MARCO TEÓRICO	6
1.1. Introducción	6
1.2. Descripción general de un plasma	8
1.3. Aproximación cinética de los plasmas	10
1.3.1. Ecuación cinética de orden cero: ecuación de Vlasov	11
2. ESTUDIO DE INESTABILIDADES	14
2.1. Inestabilidad two-stream	14
2.1.1. Caso electrostático	15
2.1.2. Inestabilidad beam-plasma	17
2.1.3. Plasma waves	19
2.1.4. Inestabilidad gentle-bump	20
3. METODOLOGÍA	25
3.1. Método PIC	28
3.2. Pseudo-algoritmo PIC	31
4. RESULTADOS NUMÉRICOS	33
4.1. Inestabilidad beam-plasma	33
4.2. Inestabilidad gentle-bump	35
5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	38
A. Inestabilidad two-stream	40
A.1. Linealización de la ecuación de Vlasov	40
A.2. Función de distribución en el espacio de Fourier	41
A.3. Función dieléctrica	41
B. Inestabilidad beam-plasma	43
B.1. Relación de dispersión	43
B.2. Punto mínimo de la relación de dispersión	43
B.3. Condición para la inestabilidad	44

C. Inestabilidad gentle-bump	45
C.1. Parte imaginaria	45
D. Cálculo de momentos	47
E. Adimensionalización	48

Índice de figuras

2.1. Sistema de referencia	17
2.2. RHS y LHS de la relación de dispersión de la inestabilidad <i>beam-plasma</i>	18
2.3. Relación de dispersión de la inestabilidad <i>beam-plasma</i>	18
2.4. Función de distribución electrónica de la inestabilidad <i>gentle-bump</i>	20
2.5. Relación de dispersión de la inestabilidad <i>gentle-bump</i>	24
3.1. Distribución inicial de las partículas computacionales	31
3.2. Tiempo computacional	32
4.1. Función de distribución inicial de la inestabilidad <i>beam-plasma</i>	34
4.2. Campo eléctrico y energía inicial de la inestabilidad <i>beam-plasma</i>	34
4.3. Evolución temporal del espacio de fases de la inestabilidad <i>beam-plasma</i>	34
4.4. Campo eléctrico y energía al tiempo $t = 60$ de la inestabilidad <i>beam-plasma</i>	35
4.5. Función de distribución al tiempo $t = 60$ de la inestabilidad <i>beam-plasma</i>	35
4.6. Función de distribución inicial de la inestabilidad <i>gentle-bump</i>	36
4.7. Evolución temporal del espacio de fases de la inestabilidad <i>gentle-bump</i>	36
4.8. Campo eléctrico y energía al tiempo $t = 60$ de la inestabilidad <i>gentle-bump</i>	37
4.9. Función de distribución al tiempo $t = 60$ de la inestabilidad <i>gentle-bump</i>	37

RESUMEN

Un plasma espacial puede ser descrito analíticamente mediante una aproximación cinética. En este régimen, el comportamiento del plasma está gobernado por una ecuación de Vlasov para cada especie de partículas que lo componen. El estudio que se desarrolla en este documento tiene dos componentes: uno analítico y el otro numérico. En ambos escenarios analizamos a la inestabilidad *two-stream*, en los casos límite *beam-plasma* y *gentle-bump*. Para el tratamiento no lineal hemos implementado un código cinético tipo *Particle-in-Cell* en el servidor de cálculo numérico del Departamento de Física de la Escuela Politécnica Nacional. Las simulaciones numéricas desarrolladas en este estudio muestran que el código implementado es estable y reproduce adecuadamente la física de estos casos límite.

ABSTRACT

A space plasma can be described analytically from a kinetic approach. In this regime, the behavior of the plasma is governed by one Vlasov equation for each of the species present in the plasma. This study has two components: one analytical and the other one numerical. In both scenarios, we analyze the *two-stream* instability, in the limit cases of *beam-plasma* and *gentle-bump*. For the non-linear treatment, we have implemented a *Particle-in-Cell* full-kinetic code on the HPC server of the Department of Physics of Escuela Politécnica Nacional. The simulations results show that our code is stable and adequately reproduces the physics of these limit cases.

Capítulo 1

MARCO TEÓRICO

1.1. Introducción

Los plasmas forman la mayor parte del universo. Un plasma espacial es el medio que compone el espacio interestelar [1]. Se caracteriza por ser un medio magnetizado donde pueden haber una variedad de ondas de plasma. Las interacciones onda-partícula de los plasmas espaciales son importantes para la formación de la magnetósfera, generación del coro electromagnético, etc [2]. El fenómeno más estudiado de los plasmas espaciales es el viento solar [3]. El viento solar es un flujo de plasma supersónico originado en el Sol, con un flujo de Alfvén tenuemente magnetizado, altamente ionizado y casi no colisional. Está constituido por protones térmicos que fluyen fuera de la corona solar y se expanden dentro de la heliósfera [4]. Este medio permite estudiar directamente los fenómenos de un plasma no colisional a bajas frecuencias [5], el cual se caracteriza por $f_{pe} \gg f_{ce}$ donde f_{pe} es la frecuencia electrónica del plasma y f_{ce} es la frecuencia ciclotrónica de los electrones.

Las propiedades del viento solar están lejos de ser entendidas. La razón de esta dificultad es que el viento solar no es un medio completamente colisional o no colisional. Esto significa que un acercamiento hidrodinámico, o uno puramente no colisional, no son adecuados para modelar la expansión del viento solar y explicar las propiedades observadas. El acercamiento de fluido clásico es aplicable en un medio dominado por colisiones, mientras que para estudiar los efectos no térmicos de la distribución en la corona se usa el acercamiento cinético. Uno de los acercamientos cinéticos más simples es el exosférico, el cual ignora las colisiones binarias entre las partículas por encima de una determinada altura llamada exobase [6].

Un primer modelo teórico predictivo para el viento solar fue dado por Parker (1958) desde un acercamiento hidrodinámico. Parker consideraba una expansión en estado estacionario de un flujo de protones y electrones fluyendo térmicamente hacia afuera de la corona solar. Sin embargo, este modelo, y los derivados de él no podían explicar el viento solar de alta velocidad observado a 1 UA sin una declaración *ad-hoc* del momentum y/o la energía en la corona. Los modelos exosféricos/cinéticos han dado mejores descripciones. Las mediciones detalladas *in-situ* de la forma de la distribución de partículas apoyan el acercamiento cinético. Debido a que la distancia de colisión es mucho mayor que la distancia de interacción entre ondas y partículas, se espera que las funciones de distribución se desvíen de la forma Maxwelliana [7]. El primer modelo de viento solar de este tipo fue desarrollado por Chamberlain (1960). El viento solar se modelaba como una expansión radial de la corona solar producto de una evaporación de protones coronales calientes fuera del campo gravitacional solar. Más tarde los modelos de Jensen (1963) y los de Brandt & Cassinelli (1966) fueron los primeros en poder reproducir los flujos supersónicos del viento solar. En estos modelos se tomaron en cuenta varios caminos libres medios de las partículas como función de su velocidad.

Sin embargo, estos modelos aún era inadecuados. El campo eléctrico ambipolar real (hacia afuera), que asegura la cuasi neutralidad del plasma y la corriente eléctrica cero resulta ser mayor, lo que acelera los protones a velocidades mayores. Los modelos de Jockers (1970) y el de Lemaire & Scherer (1971) tomaron en cuenta esta corrección y produjeron vientos supersónicos, pero las velocidades aún eran pequeñas como para explicar el viento solar ($\sim 700 - 800 \text{ km s}^{-1}$). Luego, el modelo de Maksimovic (1997) dio una descripción razonable de las propiedades del viento solar. Las densidades, temperaturas y velocidades dentro del rango observado de 1 AU fueron acertadas, pero no las funciones de distribución de velocidades debido a que no se tomaron en cuenta las colisiones. El mayor logro de los modelos cinéticos fue proporcionar un posible mecanismo de conducción para el viento solar rápido [6].

Las observaciones revelan que la distribución electrónica consiste de un centro casi Maxwelliano, y un halo que se aparta fuertemente de una función de distribución térmica. En algunos casos específicos, como en un viento solar de alta velocidad, puede aparecer un tercer componente llamado *strahl*. Sin embargo, las características son que el centro de las distribuciones es isotrópico, mientras que el halo es siempre anisotrópico [7].

El espectro de energía del viento solar presenta un gran rango de frecuencias ($10^{-6} - 10^4 \text{ Hz}$) [7]. A estas frecuencias, en la heliósfera, se puede observar fluctuaciones de gran amplitud [5]. Es así que, después del inicio de la aventura espacial durante el Año Geofísico Internacional (1957), comenzó la exploración del medio interplanetario en de la vecindad de la Tierra [7]. La misión PIONEER (1967) proveeó la primera medida *in-situ*. Luego, HELIOS 1 (1974) y HELIOS 2 (1976) exploraron regiones hasta una distancia de 0.3 UA hacia el Sol. Inicialmente se estudiaron inestabilidades hidrodinámicas de baja frecuencia en las misiones PIONEER, HELIOS e ISEE. Luego, VOYAGER (1977) proveyó información desde la heliósfera hasta sobre 1 AU [7]. Estas dos dimensiones de ver el espacio interplanetario fue más tarde completado con ULYSSES (1990), quien sondeó las regiones desconocidas perpendiculares al plano eclíptico [5, 7, 8]. Entre 1994 y 1995 ULYSSES hizo un escaneo rápido de latitud de la heliósfera desde la región polar del sur hasta la norte, en un tiempo de mínima actividad solar. Los datos recolectados mostraron que las polaridades observadas en el campo magnético de la heliósfera correspondían a las polaridades dominantes del Sol. La variación del campo magnético entre los hemisferios norte y sur de la heliósfera no mostraron diferencia en amplitud o en gradiente radial. La mayor parte de las líneas del campo magnético tienen su origen en los agujeros de la corona solar y son barridas hacia la heliósfera por el viento solar. [8]. Para el estudio de altas frecuencias se implementaron analizadores de espectros y receptores de forma de onda en las misiones interplanetarias VOYAGER, GALILEO, ULYSSES, WIND, CASSINI, CLUSTER y STEREO. Los analizadores miden la intensidad del campo eléctrico en varios canales de frecuencia con estrecho ancho de banda. Sin embargo, éstos pierden información sobre la fase de la señal. Por ello, en los 90's se introdujeron los analizadores de forma de onda, porque los registros de formas de onda a alta frecuencia son a menudo mucho más cortos [7].

En las observaciones de las distintas misiones, se obtuvo que las ondas con frecuencias superiores a la ciclotrónica de iones jugaban un papel importante en la microfísica del plasma espacial. Mediciones *in-situ* de la región 1-30 del radio solar son necesarios para resolver la cuestión del calentamiento y la aceleración del viento solar. Aún es necesario la resolución de alta energía y de tiempo de la función de distribución de las partículas, para poder validar posibles teorías [7].

El estudio del plasma nos permite mejorar la comprensión del universo, su naturaleza, comportamiento y posibles aplicaciones. Existen varias teorías para describirlos, una de ellas es la cinética y es en la que se va a enfocar este trabajo. En la Capítulo 3 se va a estudiar de forma analítica el sistema de ecuaciones Vlasov-Maxwell para un plasma cinético no colisional, compuesto por protones y electrones. Para ello, se acoplarán sus ecuaciones de Vlasov con las ecuaciones de Maxwell para construir un sistema cerrado. El sistema de ecuaciones será linealizado y adimensionado utilizando un sistema de unidades Gaussiano. La resolución del sistema se lo realizará de forma analítica en el espacio 1D-1V (1 dimensión espacial y 1 dimensión en el espacio de velocidades). Este proceso nos dará las respectivas relaciones de dispersión para los casos límite de la inestabilidad. Para trabajar en los casos no lineales, escribiremos un algoritmo PIC, no relativista, utilizando metodologías espectrales y de diferencias finitas. Nuestro estudio de plasma se concentrará en la inestabilidad *two-stream*, en los casos límite *beam-plasma* y *gentle-bump*. Este algoritmo se implementará en lenguaje FORTRAN y se ejecutará en el servidor de cálculo numérico del Departamento de Física de la Escuela Politécnica Nacional, para su resolución numérica. En el Capítulo 4 realizaremos experimentos numéricos para los casos límite, utilizando sus respectivas condiciones iniciales y de borde. Compararemos los resultados obtenidos con la teoría bibliográfica para comprobar la fiabilidad numérica del código.

1.2. Descripción general de un plasma

El plasma es el cuarto estado de la materia [9, 10, 11, 12, 13]. Si la temperatura es lo suficientemente elevada como para que los átomos de un gas tengan una energía cinética que sobrepase la energía de enlace de todos sus orbitales se logra obtener un gas ionizado o plasma [9, 10, 14]. El estado de plasma se diferencia de los otros estados (sólido, líquido y gaseoso) por la fuerza de los enlaces que mantienen juntas a las partículas que lo constituyen. Sin embargo, esta transición de gas a plasma no es una transición de fase en el sentido termodinámico, sino que ocurre gradualmente con el aumento de la temperatura [9]. El plasma es generalmente una sustancia de alta temperatura y algunas de sus propiedades están relacionadas con sus efectos térmicos [15]. La velocidad térmica v_{ths} de la partícula s se la considera como la velocidad media del movimiento térmico y se define a través de la temperatura T_s de dicha especie de partícula,

$$v_{ths} = \sqrt{\frac{k_B T_s}{m_s}}, \quad (1.1)$$

donde k_B es la constante de Boltzman ($1,38 \times 10^{-16}$ ergs/K) y m_s es la masa de la partícula s que conforma al plasma, i.e., electrones o protones [10, 15, 16]. Se cumple que $m_p \gg m_e$ y $T_e > T_p$ [17].

El plasma es una sustancia macroscópica neutra compuesta por electrones libres y átomos o moléculas ionizadas que describen un comportamiento colectivo debido a la fuerza de Coulomb, la cual es de largo alcance [3, 9, 14, 18, 19]. El plasma es macroscópicamente neutro cuando la carga neta resultante es cero y se encuentra bajo condiciones de equilibrio ausentes de fuerzas externas. La neutralidad se evidencia en un volumen suficientemente grande para contener a un gran número de de partículas y suficientemente pequeño comparado con las longitudes características. En este volumen, la variación de parámetros macroscópicos como las densidad y la temperatura no varían. Si esta neutralidad macroscópica no es mantenida, la energía potencial asociada con las fuerzas de Coulomb resultantes puede ser enorme comparada a la velocidad cinética de la partícula térmica [9].

Las desviaciones de la neutralidad macroscópica eléctrica pueden ocurrir naturalmente. La energía térmica de la partícula tiende a romper la neutralidad eléctrica, mientras que la energía potencial electrostática resultante de cualquier separación de carga tiende a recobrar dicha neutralidad. La distancia donde se obtiene un balance entre los dos fenómenos es del orden del parámetro de longitud característica de un plasma conocida como longitud de Debye. Para longitudes mayores que la longitud de Debye no es posible salir de la neutralidad macroscópica en ausencia de fuerzas externas. Esto se debe a que las partículas cargadas son capaces de moverse libremente para neutralizar regiones con exceso de carga espacial debido al largo alcance de la fuerza de Coulomb que aparecen [9].

La longitud de Debye es una longitud característica del plasma e indica la distancia a la cual la influencia del campo eléctrico de una sola partícula cargada puede ser sentido por otras partículas cargadas dentro del plasma. Las partículas cargadas se distribuyen de tal forma que protegen cualquier campo electrostático dentro de una distancia del orden de la longitud de Debye. Esta protección se debe al comportamiento colectivo de las partículas del plasma [9, 19]. La longitud de Debye se define como

$$\lambda_D = \left(\frac{k_B T_e}{4\pi n_e e^2} \right)^{1/2}, \quad (1.2)$$

donde T_e es la temperatura electrónica, n_e es la densidad electrónica (en cm^{-3}) y e es la carga del electrón [3, 9, 10, 13, 15, 17, 19].

La longitud de Debye también puede ser usada como una medida de la distancia en la cual potenciales eléctricos fluctuantes pueden aparecer en un plasma. Esto corresponde a la conversión de la energía cinética de una partícula térmica en energía potencial [9]. Generalmente, λ_D depende de la velocidad de la partícula de prueba con respecto al plasma [10] y puede ser tomada como la distancia que la partícula viaja durante un periodo del plasma [15]. A partir de λ_D se puede definir a la esfera de Debye como la esfera dentro del plasma con radio λ_D . Cada carga en el plasma interactúa colectivamente solo con las cargas que se encuentran dentro de la esfera de Debye. El número de electrones N_D dentro de la esfera sería [3, 9, 19]

$$N_D = \frac{4}{3}\pi\lambda_D^3 n_e = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{k_B T}{n_e^{1/3} e^2} \right)^{3/2}. \quad (1.3)$$

El efecto protector de Debye es una característica de todos los plasmas, pero no ocurre en todos los medios que contienen partículas cargadas. Un requerimiento necesario para la existencia de un plasma es que las dimensiones físicas del sistema sean grandes en comparación a λ_D . Caso contrario no va a haber suficiente espacio para que se presente el efecto de protección colectiva y el conjunto de partículas cargadas no va a presentar un comportamiento colectivo [9]. Si L es la dimensión característica de un plasma, entonces el criterio para la definición de un plasma es que $L \gg \lambda_D$. Dado que el efecto de protección es el resultado del comportamiento colectivo de partículas dentro de una esfera Debye, también es necesario que el número de electrones dentro de una esfera Debye sea muy grande, entonces $n_e \lambda_D^3 \gg 1$. En general λ_D es muy pequeño, pero en el plasma interestelar puede ser del orden de varios metros [9, 13].

Una propiedad importante del plasma es la estabilidad de la neutralidad de carga espacial macroscópica. Cuando un plasma se perturba y sale de su condición de equilibrio, los campos de carga espacial interna resultantes dan lugar a movimientos colectivos de partículas que tienden a restaurar la neutralidad de carga original. El movimiento colectivo se caracteriza por una frecuencia de

oscilación natural conocida como frecuencia de plasma. Las oscilaciones colectivas son oscilaciones de altas frecuencias, por lo que iones pesados no pueden seguir el movimiento de los electrones. Los electrones oscilan de forma colectiva alrededor de los iones pesados y la fuerza de restauración colectiva resulta de la atracción Coulómbica ion-electrón [9]. La frecuencia colectiva de la oscilación de la especie de partículas s es

$$\omega_{ps} = \left(\frac{4\pi n_s q_s^2}{m_s} \right)^{1/2}, \quad (1.4)$$

donde q_s es la carga de la partícula s y n_s es la densidad de la partícula s [9, 10, 13, 16]. Es normal llamar a ω_{ps} como frecuencia, aunque tenga unidades de radianes por segundo [10]. Se trata de una frecuencia angular, donde $\omega_{ps} = 2\pi f_{ps}$. Si consideramos dos especies s , protones y electrones, la frecuencia total del plasma sería $\omega^2 = \omega_{pe}^2 + \omega_{pp}^2$. Sin embargo, debido a que $m_p \gg m_e$, $\omega_p \approx \omega_e$ [17]. La frecuencia de plasma es usada para especificar la densidad de electrones en un plasma. También es una medida del periodo de tiempo que requiere un electrón (o ión) para moverse con velocidad térmica una distancia de Debye [10].

1.3. Aproximación cinética de los plasmas

La dinámica de las partículas en un plasma pueden ser descritas adecuadamente por las leyes de la Mecánica Clásica. Los efectos cuánticos son solo importantes a altas densidades y muy bajas temperaturas. El comportamiento dinámico de los plasmas está gobernado por la interacción entre las partículas del plasma junto a los campos internos producidos por las mismas partículas, y los campos externos aplicados. Además, su movimiento también puede generar corrientes eléctricas y en consecuencia campos magnéticos [9].

En la descripción estadística de un plasma se utiliza la Teoría Cinética, la que necesita conocer la función de distribución del sistema de partículas. Entonces, el problema consiste en resolver las ecuaciones cinéticas apropiadas que gobiernan la evolución de la función de distribución en el espacio de fases. Un ejemplo de ecuación diferencial cinética es la ecuación de Vlasov, en el que la interacción entre las partículas cargadas se describe mediante campos electromagnéticos internos consistentes con las distribuciones de densidad de carga eléctrica y densidad de corriente dentro del plasma, y se desprecian los efectos colisionales [9].

La Teoría Cinética es una descripción microscópica que se basa en la configuración y distribución en el espacio de velocidades de las partículas del plasma, la correlación entre las partículas y los microcampos producidas por ellas. Las cantidades microscópicas son más difíciles de medir directamente, pero son importantes para determinar las propiedades macroscópicas del plasma [10]. En el espacio de fases, en cualquier instante de tiempo, cada partícula del plasma puede estar localizada mediante un vector posición $\mathbf{r} = (x, y, z)$ trazado desde el origen del sistema de coordenadas hasta el centro de masa de la partícula. De forma análoga, en este espacio, el vector de velocidades es $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$. A cada instante de tiempo el estado dinámico de un sistema de N partículas está representado por N puntos en el espacio de fases. Para cada punto se tiene un espacio $6N$ -dimensional definido por $3N$ coordenadas de posición $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)$ y $3N$ coordenadas de velocidad $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_N)$ [9].

La Teoría Cinética provee una base formal para incluir los campos promedios debido a las partículas, despreciando las fuerza de corto alcance de los vecinos más cercanos [10]. Una descripción

conveniente para la interacción de partículas es mediante un acercamiento estadístico. Para ello es necesario introducir conceptos de espacio de fases y función de distribución. La función de distribución en el espacio de fases $f_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ es una densidad de puntos representativos de la especie de partículas s definida como

$$f_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \frac{d^6 N_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}{d^3 r d^3 v},$$

donde $d^6 N_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ es el número de partículas s dentro del elemento de volumen $d^3 r d^3 v$. El elemento de volumen $d^3 r d^3 v$ indica que hay pocas partículas con grandes velocidades, por tanto se requiere que $f_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ tienda a cero cuando la velocidad es infinitamente grande. Es así que se trata de una función positiva y finita en cualquier instante de tiempo. Además, se asume que la densidad de los puntos representativos en el espacio de fases no varía rápidamente de un elemento de volumen a otro, por lo que $f_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ puede ser considerada como una función continua, al igual que sus argumentos [9].

La función de distribución caracteriza a un plasma. Un plasma es homogéneo cuando la función de distribución no depende de \mathbf{r} , es anisotrópico cuando depende de la orientación del vector de velocidad \mathbf{v} , pero es isotrópico cuando solo depende de la magnitud $v = |\mathbf{v}|$. Un plasma en equilibrio térmico se caracteriza por una función de distribución homogénea, isotrópica y dependiente del tiempo. En el sentido estadístico la función de distribución provee una descripción completa del sistema. A partir de ella se pueden deducir todas las variables macroscópicas para las partículas α . Sin embargo, uno de los problemas de la teoría cinética está en determinar la función de distribución para un determinado sistema [9].

1.3.1. Ecuación cinética de orden cero: ecuación de Vlasov

Una forma aproximada de describir la dinámica de un plasma es considerar que el movimiento de las partículas que lo conforman está gobernado por campos externos y el campo promedio interno macroscópico [9]. Los microcampos producidos por las partículas del plasma son reemplazados por el campo promedio que las partículas producen en un determinado punto del espacio. La función de distribución de las partículas del plasma es calculada de forma que concuerda con el campo promedio [10].

La ecuación de Vlasov es una ecuación diferencial parcial que describe la evolución temporal de la función de distribución en el espacio de fases. A esta ecuación también se la conoce como ecuación de Boltzmann no colisional [9, 13, 19]. Anatoly Vlasov fue un físico ruso quien, en 1968, publicó el artículo "The vibrational properties of an electron gas", donde presenta la ecuación cinética de Vlasov como alternativa a la de Boltzmann. En el desarrollo de su trabajo se muestra cómo la ecuación de Boltzmann puede ser simplificada debido a las propiedades vibracionales de las partículas. Con ello, se pueden ignorar todas las interacciones a través de colisiones [20]. Esta ecuación incorpora los campos electromagnéticos internos macroscópicos suavizados [9, 19]. En nuestro estudio la ecuación de Vlasov representa dos ecuaciones acopladas, correspondientes a protones y electrones. En nuestro sistema de unidades la ecuación de Vlasov para la especie de partícula s es

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_s + \frac{q_s}{m_s} \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}_s \times \mathbf{B}}{c} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_s = 0, \quad (1.5)$$

donde \mathbf{E} es el campo eléctrico, \mathbf{B} es el campo magnético, \mathbf{v} es la velocidad de la partícula s , c es la velocidad de la luz y t es el tiempo [10]. El sistema puede ser cerrado junto a las ecuaciones de Maxwell,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho; \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0; \quad (1.6)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}; \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad (1.7)$$

que describen la dinámica de un plasma en términos de la función de distribución $f_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ [10, 13]. La densidad de carga ρ y la densidad de corriente \mathbf{J} se definen como momentos de la función de distribución,

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_s q_s \int_v f_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v; \quad (1.8)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \sum_s q_s \int_v \mathbf{v} f_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v; \quad (1.9)$$

y deben ser resueltas de forma simultánea [9, 13, 16, 19]. La densidad de partículas $n_s(\mathbf{r}, t)$ es una variable macroscópica definida en el espacio de configuraciones como el número de partículas s por unidad de volumen [9],

$$n_s(\mathbf{r}, t) = \int_v f_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v. \quad (1.10)$$

La ecuación de Vlasov también describe correctamente plasmas estacionarios [10], ondas de plasma [3, 13, 16, 17, 21, 22, 23], inestabilidades [3, 13, 16, 21, 23] y el comportamiento del plasma para intervalos de tiempo mucho más pequeños que el tiempo de colisiones binarias ($\tau_{colectivo} \ll \tau_{colisional}$) [19, 21], todo en términos de $f_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ [10].

Los fenómenos físicos en los plasmas se deben principalmente a que sus partículas están eléctricamente cargadas y por tanto son capaces de interactuar y crear campos electromagnéticos locales y externos. La alta movilidad electrónica hace de los plasmas buenos conductores eléctricos y térmicos. La alta conductividad eléctrica implica que solo soportan campos electromagnéticos hasta un cierto punto, en una dirección normal a cualquier campo magnético presente que inhiba el flujo de partículas cargadas en esa dirección [9].

Una característica importante de los plasmas es su habilidad de sostener gran variedad de fenómenos ondulatorios. Ejemplos incluyen ondas electrostáticas longitudinales y ondas electromagnéticas transversales de alta frecuencia. En el régimen de bajas frecuencias se tienen las ondas Alfvén y las ondas magnetosónicas. Cada uno de los posibles modos de propagación de la onda pueden ser caracterizados por una relación de dispersión, la cual es una relación funcional entre la frecuencia ω y el número de onda k . En las ondas es posible tener modos con amplitudes crecientes como resultado de alguna inestabilidad, donde hay una transferencia de energía desde las partículas del plasma hacia el campo de la onda. Los fenómenos de inestabilidad son importantes en una gran variedad de situaciones físicas que involucran procesos dinámicos en los plasmas [9].

Una clasificación de plasmas que podría guiar al lector de mejor manera podría ser la siguiente

Plasmas fríos

Un plasma frío es un conjunto de partículas cargadas sin carga neta que se encuentran en reposo, excepto cuando son inducidas a moverse debido a la acción de campos electromagnéticos de una onda. Son partículas que no tienen movimiento cinético propio [15]. Un plasma se clasifica como frío debido a las bajas temperaturas de las especies de partículas pesadas [12].

Plasmas térmicos

Un plasma térmico resulta cuando se añade un efecto térmico a los efectos de plasma fríos, obteniéndose un fenómeno cinético debido a que en una distribución térmica hay partículas que se mueven cerca de la velocidad de fase de la onda. Estas partículas tienen interacciones resonantes con las ondas debido a su larga interacción en el tiempo con la onda. Estas interacciones pueden provocar un *damping* no colisional de la onda o inestabilidades y crecimiento de la onda [15].

Plasma no magnetizados

Un plasma no magnetizado es aquel en el cual el campo magnético total es cero ($\mathbf{B} = 0$). Se trata de un plasma isotrópico, i.e., las propiedades son las mismas en todas las direcciones. Las ondas para este tipo de plasmas son ondas electromagnéticas de alta frecuencia que consideran al plasma como un simple dieléctrico debido a la interacción de los electrones con la onda, o también pueden ser ondas de sonido.

En un plasma frío, las ondas de sonido son una simple oscilación a la frecuencia del plasma, donde las ondas electromagnéticas no se propagan. En un plasma térmico las ondas de sonido dependen de la temperatura del electrón y de la masa del ión [15].

Plasmas magnetizados

Un plasma magnetizado es aquel en el cual el campo magnético total es distinto de cero ($\mathbf{B} \neq 0$). En los plasmas magnetizados se presenta el fenómeno de anisotropía, debido a que no hay una dirección preferida. Las ondas transversales solo existen en plasmas magnetizados, llamadas ondas Alfvén. La anisotropía hace que la descripción sea algebraicamente complicada y por ende la física. Incluso en plasmas fríos, el número de ondas debido al campo magnético es grande, y éstas varían según el ángulo de propagación con respecto al campo magnético [15].

La clasificación expuesta es importante, ya que en este trabajo vamos a estudiar plasmas de estas características, mediante el uso de modelos numéricos. Las simulaciones numéricas nos van a permitir estudiar el comportamiento de los plasmas bajo las dos condiciones de inestabilidad planteadas para este trabajo.

Capítulo 2

ESTUDIO DE INESTABILIDADES

En el tratamiento de las ondas de plasmas se asume un estado no perturbado, en perfecto equilibrio termodinámico, i.e., las partículas tienen una distribución de velocidad Maxwelliana, con densidades y campos uniformes. En este estado de alta entropía no hay energía libre disponible para excitar a las ondas, pero cuando hay energía libre disponible las ondas se auto-excitan provocando un equilibrio inestable [3].

El estudio de inestabilidades es posible cuando los estados no están en un perfecto equilibrio termodinámico, aunque sí mantienen las fuerzas balanceadas y se puede obtener una solución independiente del tiempo. Una inestabilidad es un movimiento que disminuye la energía libre y lleva al plasma cerca de un equilibrio termodinámico. Las inestabilidades se clasifican de acuerdo al tipo de energía libre disponible que permitió que exista una. Una de las categorías en la clasificación corresponde a las inestabilidades tipo *streaming*. En este tipo de inestabilidad un *beam* de partículas cargadas viaja a través de un plasma provocando que diferentes especies de partículas tengan *drifts* relativos entre sí. La energía del *drift* es usada para excitar a las ondas [3].

Una inestabilidad ocurre cuando la amplitud de una pequeña perturbación inicial crece. El análisis matemático de la perturbación se realiza a través de la relación de dispersión, obtenida cuando la función dieléctrica $D(\omega, \mathbf{k}) = 0$. Este análisis determina si una perturbación inicial causa oscilaciones sin damping, o si las oscilaciones están amortiguadas o creciendo. La relación de dispersión indica cuándo y/o dónde la solución es compleja. La parte imaginaria de \mathbf{k} u ω determina si las oscilaciones tienen damping o si aumentan, según su signo [24].

2.1. Inestabilidad two-stream

Un caso de inestabilidades tipo *streaming* es la inestabilidad *two-stream* [3]. La inestabilidad *two-stream* es un modelo que consiste en dos corrientes de partículas cargadas que fluyen de forma opuesta [11]. Dos casos límite son la inestabilidad *beam-plasma* y *gentle-bump* [10], mismas que serán estudiadas en este trabajo.

La teoría de Vlasov describe correctamente el comportamiento de los plasmas para intervalos de tiempo mucho más pequeños que el tiempo de colisiones binarias. Esta teoría también permite estudiar las ondas y la estabilidad del plasma. El análisis de las propiedades de ondas de amplitud “pequeña” que se propagan como perturbaciones bajo efectos de campos electromagnéticos es descrito por el sistema de ecuaciones Vlasov-Maxwell linealizado [10]. La resolución analítica de dicho

sistema nos permitirá encontrar las condiciones de estabilidad del plasma en los casos ya mencionados.

En el sistema de ecuaciones Vlasov-Maxwell, ecuaciones (1.5) - (1.7), los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} dependen de la función de distribución f_s . Por tanto, la ecuación de Vlasov es no lineal y en consecuencia es difícil de resolver. En lugar de calcular el valor exacto de f_s se puede utilizar una aproximación perturbativa para linealizar las ecuaciones. La linealización de esta ecuación requiere que f_s , \mathbf{E} y \mathbf{B} sean expresados en términos de un valor de un equilibrio más una perturbación, i.e., [10]

$$f_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = f_{s0}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + \epsilon f_{s1}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t); \quad (2.1)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t) + \epsilon \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t); \quad (2.2)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0(\mathbf{r}, t) + \epsilon \mathbf{B}_1(\mathbf{r}, t); \quad (2.3)$$

donde f_{s0} , \mathbf{E}_0 y \mathbf{B}_0 representan el estado de un plasma estacionario, ϵ es la amplitud de la perturbación, y f_{s1} , \mathbf{E}_1 y \mathbf{B}_1 representan el estado de un plasma perturbado. Reemplazamos la ecuación (2.1) en la ecuación de Vlasov, donde los términos de segundo orden ϵ^2 son ignorados, y además sabemos que f_{s0} satisface la ecuación de Vlasov y las ecuaciones de Maxwell. El desarrollo del acoplamiento de las ecuaciones (1.5)-(1.7) con las definiciones (2.1)-(2.3) se detalla en el Apéndice A.1, para obtener [10]

$$\frac{\partial f_{s1}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_{s1} + \frac{q_s}{m_s} \left(\mathbf{E}_1 + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}_1}{c} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{s0} + \frac{q_s}{m_s} \left(\mathbf{E}_0 + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0}{c} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{s1} = 0; \quad (2.4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_1 = 4\pi \sum_s q_s \int f_{s1} d\mathbf{v}; \quad (2.5)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}_1 = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sum_s q_s \int \mathbf{v} f_{s1} d\mathbf{v}; \quad (2.6)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_1 = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t}. \quad (2.7)$$

Una aplicación de estas ecuaciones linealizadas es investigar las propiedades de las ondas de plasma de pequeña amplitud cuyos períodos de oscilación son mucho menores que un tiempo de colisión binaria.

2.1.1. Caso electrostático

En un plasma espacialmente uniforme y sin campo de fondo que obedece las ecuaciones de Vlasov en equilibrio, i.e., $\mathbf{E}_0 = \mathbf{B}_0 = 0$, la ecuación (2.4) se reduce a

$$\frac{\partial f_{s1}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_{s1} + \frac{q_s}{m_s} \left(\mathbf{E}_1 + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}_1}{c} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{s0} = 0. \quad (2.8)$$

En el caso de una perturbación electrostática, el desplazamiento de la carga solo genera un campo eléctrico perturbado pero no un campo magnético. Esta condición se satisface si la densidad de carga solo varía en una dimensión [10]. En este caso la ecuación (2.7) se reescribe

$$\nabla \times \mathbf{E}_1 = 0, \quad (2.9)$$

donde el campo eléctrico \mathbf{E}_1 se puede escribir como el gradiente de un potencial ϕ_1 ,

$$\mathbf{E}_1 = -\nabla\phi_1. \quad (2.10)$$

Para determinar la forma del potencial, reemplazamos la ecuación (2.10) en la ecuación (2.5),

$$\nabla^2\phi_1 = -4\pi \sum_s q_s \int f_{s1} d\mathbf{v}. \quad (2.11)$$

En consecuencia la ecuación de Vlasov se reduciría a

$$\frac{\partial f_{s1}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_{s1} - \frac{q_s}{m_s} \nabla\phi_1 \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{s0} = 0. \quad (2.12)$$

Para resolver el sistema de ecuaciones (2.10) - (2.12) utilizamos f_{s1} y ϕ_1 en el espacio de Fourier,

$$f_{s1}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = f_{sk}(\mathbf{v}) \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]; \quad (2.13)$$

$$\phi_1(\mathbf{r}, t) = \phi_k \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)], \quad (2.14)$$

de esta manera nos mantenemos en la aproximación perturbativa y además facilitamos la resolución. Si reemplazamos la ecuación (2.13) en la ecuación (2.12) podemos despejar f_{sk} , cuyo desarrollo se muestra en el Apéndice A.2

$$f_{sk} = -\frac{(q_s/m_s)\mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{s0}}{\omega - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}} \phi_k. \quad (2.15)$$

Ahora, si reemplazamos las ecuaciones (2.14) y (2.13) en la ecuación (2.11) y hacemos uso de la definición de f_{sk} y ω_{ps} , obtenemos la función dieléctrica para un plasma en un campo electrostático [10]

$$D(\mathbf{k}, \omega) = 1 + \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{k^2} \int \frac{\mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{s0}}{\omega - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}} d\mathbf{v} = 0. \quad (2.16)$$

donde $D(\mathbf{k}, \omega) = 0$ nos indica sus valores propios ω , i.e., las relaciones de dispersión para el plasma bajo una determinada inestabilidad. La función dieléctrica nos permite determinar las relaciones de dispersión dada una función de distribución [10]. El desarrollo para deducir esta función se muestra en el Apéndice A.3. En el caso unidimensional escogemos un sistema de referencia alineado con \mathbf{k} . En la Figura 2.1 se observa que $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$, $\mathbf{k} = (k, 0, 0)$ y $\mathbf{E}_1 = (E, 0, 0)$. De acuerdo a lo anterior, la función dieléctrica unidimensional se reescribe

$$D(k, \omega) = 1 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{k^2} \int \frac{\nabla_v f_{s0}}{v - \omega/|k|} dv = 0, \quad (2.17)$$

$$1 = \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{k^2} \int \frac{\nabla_v f_{s0}}{v - \omega/|k|} dv.$$

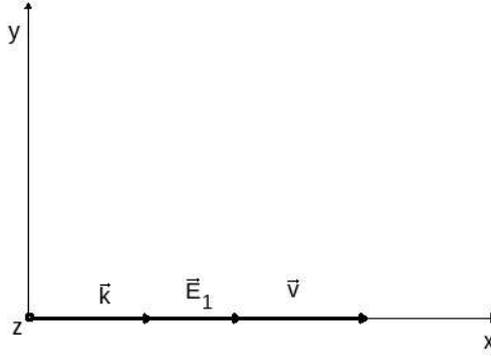


Figura 2.1: Sistema de referencia para el caso electrostático unidimensional. El vector de onda \mathbf{k} está alineado con el campo \mathbf{E}_1 y la velocidad \mathbf{v} .

2.1.2. Inestabilidad beam-plasma

La inestabilidad *beam-plasma* es un caso límite de la inestabilidad *two-stream*. El modelo consiste en inyectar un haz de partículas en un plasma estacionario donde, tanto el *beam* como el plasma de fondo están fríos, i.e., $v_b \approx v_{the}$ [11], $k_B T_e = k_B T_i = 0$ [3]. Si nos mantenemos en el caso electrostático y consideramos un plasma compuesto por electrones y protones podemos asumir las siguientes funciones de distribución [10]

$$f_{e0} = \delta\left(v - \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_e}{|k|}\right) \quad (2.18)$$

para los electrones, y

$$f_{p0} = \delta(v) \quad (2.19)$$

para los protones, donde \mathbf{u}_e es el *bulk-velocity* electrónico. Desarrollamos el sumatorio de la ecuación (2.17) y reemplazamos con las dos últimas funciones de distribución para obtener la relación de dispersión para la inestabilidad *beam-plasma*

$$1 = \frac{\omega_{pp}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{pe}^2}{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_e - \omega)^2}. \quad (2.20)$$

La deducción se detalla en el Apéndice B.1. En la Figura 2.2 graficamos la parte derecha (RHS) de la relación de dispersión, como una función de ω y la parte izquierda (LHS) de la misma ecuación. Al mínimo local lo llamaremos A, cuando $A < 1$ la ecuación (2.20) tiene cuatro raíces reales. Por el contrario, cuando $A > 1$ se tienen dos raíces reales y dos raíces complejas conjugadas, una de las cuales corresponde a la inestabilidad.

Para determinar el punto mínimo A de la relación de dispersión, derivamos la ecuación (2.20) con respecto a ω (ver Apéndice B.2) y obtenemos que A se encuentra en

$$\omega_A = \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_e \left[\frac{(\omega_{pp}/\omega_{pe})^{2/3}}{(\omega_{pp}/\omega_{pe})^{2/3} + 1} \right]. \quad (2.21)$$

La condición para la inestabilidad es que el RHS de la relación de dispersión sea mayor que 1 en $\omega = \omega_A$, i.e.,

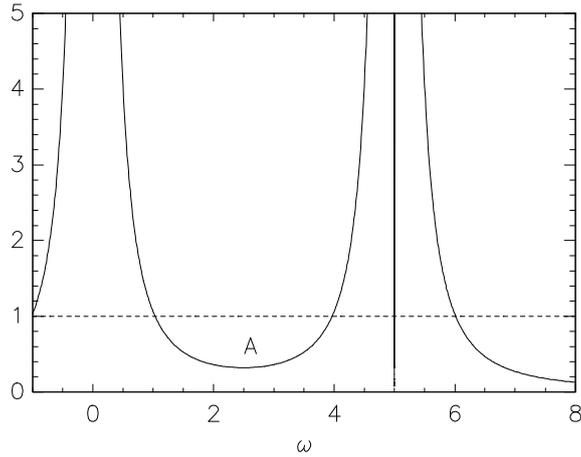


Figura 2.2: La línea continua representa el *Right Hand Side*, RHS, de la ecuación (2.20) como una función de ω , donde el punto A representa el mínimo de la función. La línea horizontal punteada representa el *Left Hand Side* LHS de la misma ecuación. Como referencia la línea vertical representa la velocidad de fase $\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_e$.

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_e < \omega_{pe} \left[1 + \left(\frac{\omega_{pp}}{\omega_{pe}} \right)^{2/3} \right]^{3/2}. \quad (2.22)$$

La ecuación (2.22) se cumple para oscilaciones de longitud de onda corta o para pequeñas *bulk velocities* \mathbf{u}_e [10]. Para graficar la relación de dispersión se puede considerar que k solo tiene valores reales, mientras que ω es la suma de una frecuencia real más una frecuencia imaginaria, i.e., $\omega = \omega_r + i\omega_i$ [11]. En la Figura 2.3 en el panel izquierdo se muestran el gráfico de ω_r en función de k y en el panel derecho se muestra el gráfico de ω_i en función de k .

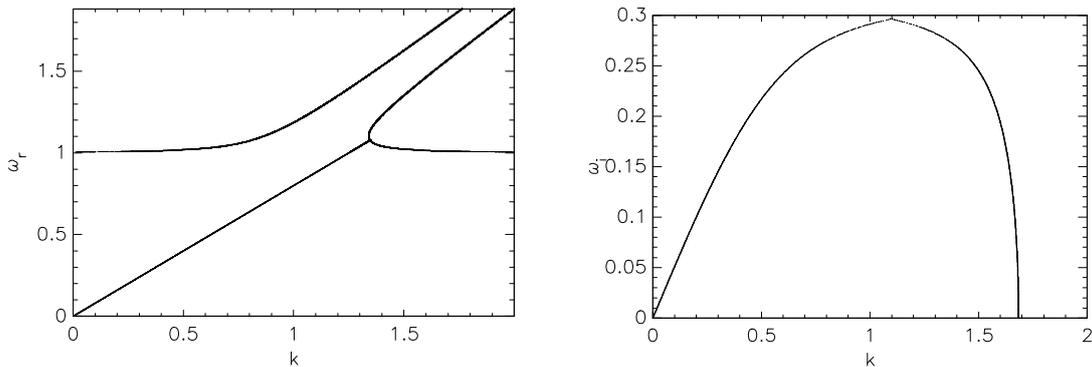


Figura 2.3: Relación de dispersión de la inestabilidad *beam-plasma*. En el panel izquierdo se ilustran las raíces reales i.e., ω_r en función del número de onda k . Mientras que en el panel derecho se ilustran las raíces imaginarias i.e., ω_i en función de k .

Al estudiar a la inestabilidad *beam-plasma* en el régimen no lineal, es posible observar un atrapamiento de partículas debido a la acción de los electrones. Este fenómeno se aprecia en el espacio de fases [11].

2.1.3. Plasma waves

Las ondas en un plasma se propagan solo si hay una distribución de velocidades de electrones, o si los electrones tienen una velocidad media en el sistema de referencia del observador. Las ondas son oscilaciones del plasma a una frecuencia ω_p causada por un grupo de carga desplazado. La relación de dispersión de estas ondas se puede descomponer en dos términos, una parte real y otra imaginaria, i.e., $\omega = \omega_r + i\omega_i$. Para el cálculo de ω_r y ω_i se utiliza la función dieléctrica (ecuación (2.16)), cuyos modos normales se caracterizan por ceros en $D(\mathbf{k}, \omega)$ para los cuales las eigenfrecuencias ω son casi puramente reales, con solo una pequeña parte imaginaria. Si la parte imaginaria fuera grande la onda tendría un damping en unos pocos periodos de oscilación y no se clasificaría como un modo normal. Una técnica útil para encontrar los ceros de $D(\mathbf{k}, \omega)$ es considerar un *damping* débil i.e., $\omega_i \ll \omega_r$. De acuerdo a esta consideración hacemos una expansión de la ecuación (2.16) alrededor de $\omega = \omega_r$ [10]

$$D(\mathbf{k}, \omega) \approx D(\mathbf{k}, \omega_r) + i\omega_i \frac{\partial D(\mathbf{k}, \omega_r)}{\partial \omega_r}, \quad (2.23)$$

donde $D(\mathbf{k}, \omega_r)$ puede expresarse como $D(\mathbf{k}, \omega_r) = D_r(\mathbf{k}, \omega_r) + iD_i(\mathbf{k}, \omega_r)$. De esta manera $D(\mathbf{k}, \omega)$ puede ser reescrita como

$$D(\mathbf{k}, \omega) \approx D_r(\mathbf{k}, \omega_r) + iD_i(\mathbf{k}, \omega_r) + i\omega_i \frac{\partial D_r(\mathbf{k}, \omega_r)}{\partial \omega_r} - \omega_i \frac{\partial D_i(\mathbf{k}, \omega_r)}{\partial \omega_r},$$

donde para encontrar los valores propios ω_r y ω_i de la función dielectrica, tenemos $D(\mathbf{k}, \omega) = 0$. Esta igualdad implica que tanto la parte real como la imaginaria deben ser cero, i.e.,

$$D_r(\mathbf{k}, \omega_r) - \omega_i \frac{\partial D_i(\mathbf{k}, \omega_r)}{\partial \omega_r} = 0,$$

donde $\omega_i = 0$, ya que en la parte real no puede existir una frecuencia imaginaria. Entonces $D_r(\mathbf{k}, \omega_r) = 0$, misma que se define

$$D_r = 1 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{k^2} \int \frac{\mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{s0}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{k} - \omega_r} d\mathbf{v} = 0. \quad (2.24)$$

En el caso unidimensional esta relación se reescribe

$$D_r = 1 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{k^2} \int \frac{\nabla_v f_{s0}}{v - \omega_r/|k|} dv = 0, \quad (2.25)$$

$$1 = \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{k^2} \int \frac{\nabla_v f_{s0}}{v - \omega_r/|k|} dv.$$

A continuación, igualamos a cero la parte imaginaria obteniendo

$$iD_i(\mathbf{k}, \omega_r) + i\omega_i \frac{\partial D_r(\mathbf{k}, \omega_r)}{\partial \omega_r} = 0,$$

con lo que

$$\omega_i = -\frac{D_i(\mathbf{k}, \omega_r)}{\partial D_r(\mathbf{k}, \omega_r)/\partial \omega_r}. \quad (2.26)$$

En el caso unidimensional para un plasma compuesto por partículas tipo s , $D_i(\mathbf{k}, \omega)$ se define [10]

$$D_i = -\pi \frac{\omega_{ps}^2}{k^2} \frac{\partial f_{s0}}{\partial v} \Big|_{v=\omega_r/k}. \quad (2.27)$$

2.1.4. Inestabilidad gentle-bump

La inestabilidad *gentle-bump* es otro caso límite de la inestabilidad *two-stream*. El modelo que describe esta inestabilidad se construye al inyectar un haz de partículas en un plasma estacionario, donde el *bump* y el plasma de fondo están calientes, i.e., la velocidad media del *bump* es mucho mayor a v_{th} ($v_b \gg v_{th}$) [10, 24]. Cuando hay superposición de la distribución de partículas y del plasma en la región de ondas inestables (ver Figura 2.4) se debe considerar el efecto de las partículas que se mueven a la velocidad de la onda, i.e., las partículas resonantes [10]. En este caso, la función de distribución de los electrones y de los protones pueden ser descritos, respectivamente, como

$$f_{e0} = \frac{n_1}{n_e} \left(\frac{m_e}{2\pi k_B T_1} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{m_e \mathbf{v}^2}{2k_B T_1} \right) + \frac{n_2}{n_e} \delta(v_x) \delta(v_y) \left(\frac{m_e}{2\pi k_B T_2} \right)^{1/2} \frac{1}{2} \left\{ \exp \left[-\frac{m_e (v_z - u_e)^2}{2k_B T_2} \right] + \exp \left[-\frac{m_e (v_z + u_e)^2}{2k_B T_2} \right] \right\}; \quad (2.28)$$

$$f_{p0} = \delta(v_x) \delta(v_y) \delta(v_z), \quad (2.29)$$

donde el subíndice 1 representan la región fuera del *bump* y el subíndice 2 representa al *bump*. n_e es la densidad electrónica total y cumple que $n_e = n_1 + n_2 \gg n_2$, T_1 y T_2 son las temperaturas en cada región donde $T_1 \gg T_2$, \mathbf{v} es la velocidad tal que $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$, $u_e \gg 2k_B T_1/m_e$ es la componente en z de la velocidad media (*bulk velocity*) de los electrones en el *bump* [10].

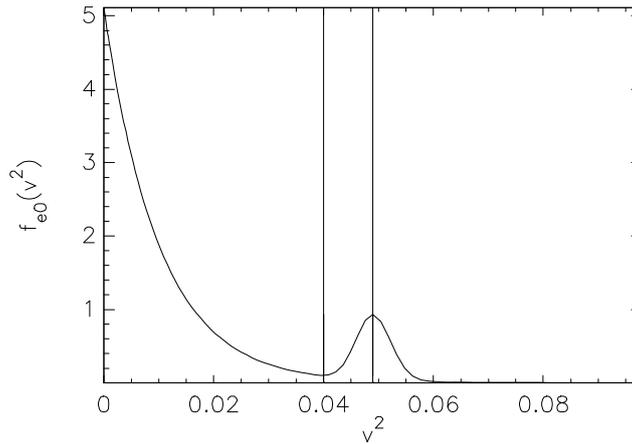


Figura 2.4: Función de distribución unidimensional electrónica en función de v^2 de la inestabilidad *gentle-bump*. Las líneas verticales ilustran la región inestable.

Las desviaciones en la distribución Maxwelliana en forma de un *bump*, nos indican que esta región se cumple que $\partial f_{e0}/\partial \omega > 0$. En esta región hay un *damping* de Landau inverso, i.e., hay un

crecimiento de la amplitud de la onda, que se da bajo ciertas condiciones, generando un atrapamiento de partículas [25]. Cuando se escoge f_{e0} simétrica en \mathbf{v} , alrededor de u_e , se garantiza un estado de equilibrio sin corrientes de plasma o campos magnéticos. Para reescribir las funciones de distribución en el espacio unidimensional, proyectamos a los vectores en el eje z , donde la velocidad es $\mathbf{v} = (0, 0, v)$ y el vector de onda es $\mathbf{k} = (0, 0, k_z)$. Con ello, la función de distribución de los electrones y protones se reduce a

$$f_{e0} = \frac{n_1}{n_e} \left(\frac{m_e}{2\pi k_B T_1} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{m_e v^2}{2k_B T_1} \right) + \frac{n_2}{n_e} \left(\frac{m_e}{2\pi k_B T_2} \right)^{1/2} \frac{1}{2} \left\{ \exp \left[- \frac{m_e (v - u_e)^2}{2k_B T_2} \right] + \exp \left[- \frac{m_e (v + u_e)^2}{2k_B T_2} \right] \right\}; \quad (2.30)$$

$$f_{i0} = \delta(v). \quad (2.31)$$

Para determinar la relación de dispersión de esta inestabilidad utilizamos el planteamiento expuesto en la Sección 2.1.3. Para ello, expandimos la ecuación (2.16) alrededor de $\omega = \omega_r$, y realizamos los cálculos para el caso unidimensional. Vamos a considerar que $\omega_{pe}^2 \gg \omega_{pi}^2$ y $n_1 \gg n_2$, (i.e., $n_1 \approx n_e$). Para la parte real, utilizamos la ecuación (2.25), de manera que D_r toma la forma

$$D_r \approx 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \int \frac{\nabla_v f_{e0}}{v - \omega_r/|k|} dv = 0. \quad (2.32)$$

Realizamos una integración por partes,

$$D_r \approx 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \int \frac{f_{e0}(v)}{(v - \omega_r/|k|)^2} dv,$$

y expandimos al denominador para facilitar la integración,

$$D_r \approx 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \int f_{e0} \frac{k^2}{\omega_r^2} \left(1 + 2 \frac{kv}{\omega_r} + 3 \frac{k^2 v^2}{\omega_r^2} \right) dv.$$

En consecuencia, obtenemos que dicha parte real se reduce a

$$D_r \approx 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \left(\frac{k^2}{\omega_r^2} + 3 \frac{k^4}{\omega_r^4} \frac{k_B T_1}{m_e} \right).$$

De aquí podemos despejar ω_r cuando $D_r = 0$,

$$\omega_r^2 \approx \omega_{pe}^2 (1 + 3k^2 \lambda_{D1}^2). \quad (2.33)$$

Por otro lado, para facilitar los cálculos de la parte imaginaria, D_i , separamos a la ecuación (2.30) en dos sumandos,

$$f_{e0_1} = \left(\frac{m_e}{2\pi k_B T_1} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{m_e v^2}{2k_B T_1} \right) \quad (2.34)$$

y

$$f_{e0_2} = \frac{n_2}{n_1} \left(\frac{m_e}{2\pi k_B T_2} \right)^{1/2} \frac{1}{2} \left\{ \exp \left[- \frac{m_e (v - u_e)^2}{2k_B T_2} \right] + \exp \left[- \frac{m_e (v + u_e)^2}{2k_B T_2} \right] \right\}. \quad (2.35)$$

El denominador de ω_i (ecuación (2.26)) resulta

$$\frac{\partial D_r}{\partial \omega_r} = 2 \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_r^3}, \quad (2.36)$$

el cual es válido para ambos sumandos. En cambio para el numerador, D_i , usamos la ecuación (2.27) donde comenzamos por calcular la derivada de f_{e0_1} con respecto a v , esto es

$$\frac{\partial f_{e0_1}}{\partial v} = -2\pi \left(\frac{m_e}{2\pi k_B T_1} \right)^{3/2} v \exp \left(- \frac{m_e v^2}{2k_B T_1} \right).$$

Evaluamos en $v = \omega_r/|k|$,

$$\left. \frac{\partial f_{e0_1}}{\partial v} \right|_{v=\omega_r/|k|} = -2\pi \left(\frac{m_e}{2\pi k_B T_1} \right)^{3/2} \frac{\omega_r}{|k|} \exp \left(- \frac{1}{2k^2 \lambda_{D_1}^2} - \frac{3}{2} \right).$$

Es decir, la función dieléctrica imaginaria D_{i_1} es

$$D_{i_1} = 2\pi^2 \left(\frac{m_e}{2\pi k_B T_1} \right)^{3/2} \frac{\omega_{pe}^3}{k^3} \exp \left(- \frac{1}{2k^2 \lambda_{D_1}^2} - \frac{3}{2} \right).$$

Al reemplazar esta última relación, junto con la ecuación (2.36), en la ecuación (2.26) podemos desarrollar ω_{i_1}

$$\begin{aligned} \omega_{i_1} &= -2\pi^2 \left(\frac{m_e}{2\pi k_B T_1} \right)^{3/2} \frac{\omega_{pe}^3}{k^3} \frac{\omega_r^3}{2\omega_{pe}^2} \exp \left(- \frac{1}{2k^2 \lambda_{D_1}^2} - \frac{3}{2} \right), \\ &= -\pi^2 \left(\frac{m_e}{2\pi k_B T_1} \right)^{3/2} \omega_{pe} \frac{\omega_{pe}^3}{k^3} \exp \left(- \frac{1}{2k^2 \lambda_{D_1}^2} - \frac{3}{2} \right), \end{aligned}$$

obtenemos la primera parte de la frecuencia imaginaria

$$\omega_{i_1} = -\sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_{pe}}{k^3 \lambda_{D_1}^3} \exp \left(- \frac{1}{2k^2 \lambda_{D_1}^2} - \frac{3}{2} \right). \quad (2.37)$$

Realizamos un proceso similar para f_{e0_2} , donde se asume que las partículas en el *bump* son frías, excepto en la dirección z , de forma que $\omega_r/k_z = v$ proporciona efectos resonantes [10]. Comenzamos derivando f_{e0_2}

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{e0_2}}{\partial v} &= \frac{n_2}{2n_1} \left(\frac{m_e}{2\pi k_B T_2} \right)^{1/2} \left\{ - \frac{m_e}{k_B T_2} \left(v - \frac{k_z u_e}{k_z} \right) \exp \left[- \frac{m_e (v - k_z u_e / k_z)^2}{2k_B T_2} \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{m_e}{k_B T_2} \left(v + \frac{k_z u_e}{k_z} \right) \exp \left[- \frac{m_e (v + k_z u_e / k_z)^2}{2k_B T_2} \right] \right\}, \end{aligned}$$

donde se ha multiplicado a u_e por k_z/k_z para facilitar el desarrollo. Evaluando a la derivada anterior en $v = \omega_r/k_z$ e ignorando el último exponencial debido a que decae más rápido, tenemos

$$\left. \frac{\partial f_{e0_2}}{\partial v} \right|_{v=\omega_r/k_z} = \frac{n_2}{n_1} \left(\frac{m_e}{2k_B T_2} \right)^{3/2} \frac{\omega_r}{\sqrt{\pi} k_z} \left(\frac{k_z u_e}{\omega_r} - 1 \right) \exp \left[- \frac{T_1/T_2}{2\lambda_{D_1}^2 k_z^2} \left(1 - \frac{k_z u_e}{\omega_r} \right)^2 \right],$$

con lo cual el D_{i_2} es

$$D_{i_2} = -\pi \frac{\omega_{pe}^2}{k_z^2} \frac{n_2}{n_1} \left(\frac{m_e}{2k_B T_2} \right)^{3/2} \frac{\omega_r}{\sqrt{\pi} k_z} \left(\frac{k_z u_e}{\omega_r} - 1 \right) \exp \left[-\frac{T_1/T_2}{2\lambda_{D_1}^2 k_z^2} \left(1 - \frac{k_z u_e}{\omega_r} \right)^2 \right].$$

Esta última relación, junto con la ecuación (2.36), las reemplazamos en la ecuación (2.26) y desarrollamos para ω_{i_2}

$$\begin{aligned} \omega_{i_2} &= \pi \frac{\omega_{pe}^2}{k_z^2} \frac{n_2}{n_1} \left(\frac{m_e}{2k_B T_2} \right)^{3/2} \frac{\omega_r}{\sqrt{\pi} k_z} \frac{\omega_r^3}{2\omega_{pe}^2} \left(\frac{k_z u_e}{\omega_r} - 1 \right) \exp \left[-\frac{T_1/T_2}{2\lambda_{D_1}^2 k_z^2} \left(1 - \frac{k_z u_e}{\omega_r} \right)^2 \right], \\ \omega_{i_2} &= \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{n_2}{n_1} \frac{1}{k_z^3} \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{3/2} \frac{\omega_r}{2\lambda_{D_1}^3} \left(\frac{k_z u_e}{\omega_r} - 1 \right) \exp \left[-\frac{T_1/T_2}{2\lambda_{D_1}^2 k_z^2} \left(1 - \frac{k_z u_e}{\omega_r} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Finalmente unimos las ecuaciones (2.37) y (2.38) tomando en cuenta que $k^3 = k_z^3$ y obtenemos

$$\omega_i = -\sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_{pe}}{k_z^3 \lambda_{D_1}^3} \left\{ \exp \left(-\frac{1}{2k^2 \lambda_{D_1}^2} - \frac{3}{2} \right) - \frac{n_2}{2n_1} \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{3/2} \left(\frac{k_z u_e}{\omega_r} - 1 \right) \exp \left[-\frac{T_1/T_2}{2\lambda_{D_1}^2 k_z^2} \left(1 - \frac{k_z u_e}{\omega_r} \right)^2 \right] \right\}. \quad (2.39)$$

El ω_i (ecuación 2.39) presenta una contribución correspondiente al *damping* de Landau de la componente Maxwelliana de la distribución. El *damping* es independiente de la dirección \mathbf{k} de la onda. Otra contribución a ω_i es de las partículas en el *bump*. Si la velocidad de fase de la onda es menor a la velocidad media de las partículas en el *bump*, i.e., $\omega_r/k_z < u_e$, entonces hay un crecimiento de la onda porque la distribución tendría una pendiente positiva. La frecuencia $\omega_r \approx \omega_{pe}$ es independiente de k para $k\lambda_D \ll 1$, entonces la velocidad de fase queda determinada por k_z , i.e., $v_p \approx \omega_{pe}/k_z$. Si $\omega_r/k_z > u_e$ las partículas en el *bump* contribuyen al *damping* producido por la componente Maxwelliana de la distribución. Para cualquier valor $\omega_r/k_z < u_e$ el *damping* o el crecimiento de una onda está determinado por uno de los dos términos. Si u_e es grande en alguna región de ω_r/k_z la distribución es inestable para las ondas en esa región. La distribución es estable cuando el *bump* es leve, entonces para que exista una inestabilidad el número de partículas debe aumentar, i.e., aumenta n_2/n_1 ; el *bump* debe ser más agudo, i.e., disminuir T_2/T_1 para hacer que se parezca a una función δ ; la velocidad de las partículas en el *bump* debe aumentar, i.e., aumentar $mu_e^2/k_B T_1$ [10].

En la Figura 2.5 en el panel izquierdo se muestra la relación de dispersión de la parte real, mientras que en el panel derecho se muestra la parte imaginaria. En la relación de temperaturas utilizamos $T_1/T_2 = 1/0,25$, mientras que $n_2/n_1 = 0,03/0,97$ [26].

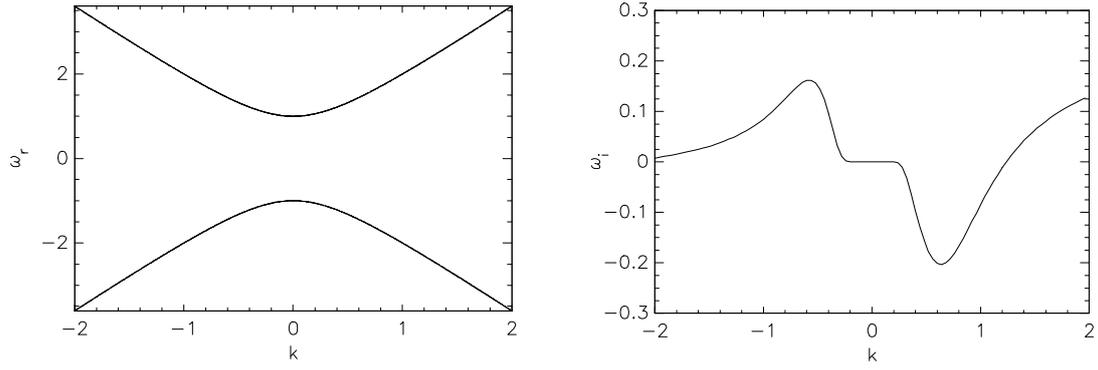


Figura 2.5: Relación de dispersión de la inestabilidad *gentle-bump*. En el panel izquierdo se ilustran las raíces reales i.e., ω_r en función del número de onda k (ecuación (2.33)). Mientras que en el panel derecho se ilustran las raíces imaginarias i.e., ω_i en función de k (ecuación (2.39)).

Al estudiar a la inestabilidad *gentle-bump* en el régimen no lineal, es posible observar un atrapamiento de partículas debido a la acción de los electrones en el *bump* de la función de distribución. Este fenómeno se aprecia en el espacio de fases [27].

Capítulo 3

METODOLOGÍA

En el desarrollo de modelos numéricos es importante utilizar unidades adimensionales. Su uso permite que los resultados se mantengan cercanos a la unidad, mejorando la precisión de las operaciones [28]. Nuestra adimensionalización a escalas electrónicas es la usual [28, 29]

$$t' = \frac{1}{\omega_{pe}}; \quad l' = \lambda_D = \frac{v_{the}}{\omega_{pe}}; \quad \mathbf{v}' = v_{the}; \quad \omega_{pe}^2 = \frac{4\pi n' e^2}{m_e}; \quad \mathbf{P}'_e = \mathbf{P}'_p = m_e v_{the}^2; \quad \nabla' = \frac{1}{l'};$$

$$\mathbf{E}' = \frac{m_e v_{the} \omega_{pe}}{e}; \quad \mathbf{B}' = \frac{m_e c \omega_{pe}}{e}; \quad \mathbf{J} = e v_{the}; \quad \rho' = e; \quad n'.$$

En estas unidades, el *skin depth* electrónico cumple la relación $d_e = \sqrt{m_e/m_p}$ [29]. Las ecuaciones de la densidad de carga, densidad de corriente, ecuaciones de Maxwell y del movimiento adimensionales, se muestran en la Tabla 3.1, en comparación de aquellas dimensionales. En nuestras unidades, la ecuación de Vlasov para protones y electrones serían

$$\frac{\partial f_p}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_p}{\partial \mathbf{r}} + d_e^2 (\mathbf{E} + \mathbf{v}_p \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f_p}{\partial \mathbf{v}} = 0; \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{r}} - (\mathbf{E} + \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (3.2)$$

respectivamente. La solución de la ecuación de Vlasov es muy compleja debido a su no linealidad [19]. También es posible realizar una linealización definiendo f_p y f_e como la superposición de $N_{c,s}$ partículas computacionales, $f_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \sum_c f_{c,s}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ para la especie s , donde $f_{c,s}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = S_{\mathbf{r}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{c,s}) S_{\mathbf{v}}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_{c,s})$. $S_{\mathbf{r}}$ y $S_{\mathbf{v}}$ son las funciones de forma para la posición y velocidad respectivamente. Éstas formas tienen parámetros libres que evolucionan temporalmente, según la solución numérica de la ecuación de Vlasov [28, 30]. Una elección usual para las funciones de forma es $S_{\mathbf{v}}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_{c,s}) = \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_{c,s})$. Esta elección implica que todas las partículas en un elemento del espacio de fases descritas por una partícula computacional tienen la misma velocidad y permanecen juntas a pesar de su evolución temporal [28]. La función de forma $S_{\mathbf{r}}$ se construye con una b-spline de orden cero, i.e., $S_{\mathbf{r}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{c,s}) = b_1((\mathbf{r} - \mathbf{r}_{c,s})/\Delta_c)$, donde Δ_c es el tamaño de la partícula computacional y [28]

$$b_1(\epsilon) = \begin{cases} 1 - |\epsilon|, & \text{if } |\epsilon| \leq 1 \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

La obtención de la evolución de las ecuaciones de movimiento para los parámetros libres $\mathbf{r}_{c,s}$ y $\mathbf{v}_{c,s}$ requiere que los momentos de primer orden de la ecuación de Vlasov satisfagan las funciones de forma antes mencionadas. Para cada momento integramos sobre todo el dominio espacial y de velocidades. Por practicidad nombramos a la ecuaciones (3.1) y (3.2) como $\ll Vlasov_s \gg$. El momento de orden cero de esta relación sería

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Vlasov_s \, d\mathbf{r} d\mathbf{v},$$

de donde $N_{c,s}$ cumpliría que

$$\frac{dN_{c,s}}{dt} = 0. \quad (3.3)$$

El momento de primer orden en \mathbf{r} ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{r} \cdot Vlasov_s \, d\mathbf{r} d\mathbf{v},$$

nos entrega la primera ecuación de movimiento para las especies de partículas,

$$\frac{d\mathbf{r}_{c,s}}{dt} = \mathbf{v}_{c,s}, \quad (3.4)$$

donde $\mathbf{r}_{c,s}$ y $\mathbf{v}_{c,s}$ son, respectivamente, la posición y la velocidad de las partículas computacionales s .

Finalmente, el momento de primer orden en \mathbf{v} , definido como

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{v} \cdot Vlasov_s \, d\mathbf{r} d\mathbf{v},$$

nos proporciona las ecuaciones de movimiento (tipo Newtoniano) para los protones,

$$\frac{d\mathbf{v}_{c,p}}{dt} = d_e^2 (\mathbf{E}_{c,p} + \mathbf{v}_{c,p} \times \mathbf{B}_{c,p}), \quad (3.5)$$

y para los electrones,

$$\frac{d\mathbf{v}_{c,e}}{dt} = -(\mathbf{E}_{c,e} + \mathbf{v}_{c,e} \times \mathbf{B}_{c,e}), \quad (3.6)$$

donde $\mathbf{E}_{c,s}$ y $\mathbf{B}_{c,s}$ son el campo eléctrico y magnético que actúan sobre la partícula computacional s , respectivamente. Estos campos se definen como

$$\mathbf{E}_{c,s} = \int S_{\mathbf{r}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{c,s}) \mathbf{E} d\mathbf{r}; \quad (3.7)$$

$$\mathbf{B}_{c,s} = \int S_{\mathbf{r}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{c,s}) \mathbf{B} d\mathbf{r}, \quad (3.8)$$

donde \mathbf{E} y \mathbf{B} son los campos que actúan sobre todo el sistema [19, 28, 30].

Complementariamente, la teoría de momentos nos permite proyectar el espacio de fases en el espacio real para reducir la dependencia a \mathbf{r} y t . Así, obtenemos la densidad de partículas,

$$n_s(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{c,s} \, d\mathbf{v}, = \sum_c S_{\mathbf{r}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{c,s}); \quad (3.9)$$

densidad de carga,

$$\rho_s(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} q_s f_{c,s} d\mathbf{v}, = q_s \sum_c S_{\mathbf{r}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{c,s}); \quad (3.10)$$

y densidad de corriente [31]

$$\mathbf{J}_s(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} q_s f_{c,s} \mathbf{v}_s d\mathbf{v}, = q_s \sum_c S_{\mathbf{r}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{c,s}) \mathbf{v}_{c,s}. \quad (3.11)$$

Además de las ecuaciones de Newton se necesitan las ecuaciones de Maxwell para cerrar al sistema de ecuaciones. La evolución temporal del campo eléctrico está gobernada por la ley de Ampere, cuya forma adimensional es

$$\left(\frac{v_{the}}{c}\right)^2 \left(\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}\right) = \nabla \times \mathbf{B} - \left(\frac{v_{the}}{c}\right)^2 \left(\frac{1}{n} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}\right). \quad (3.12)$$

La evolución temporal del campo magnético está dado por la Ley de Faraday. Adicionalmente, la densidad de corriente y de carga deben cumplir la ecuación de continuidad [30]. Esta ley se obtiene partiendo de las ecuaciones de Maxwell de la divergencia del campo eléctrico y la ley de Ampere cuando $\nabla \times \mathbf{B} = 0$. Combinando estas dos ecuaciones obtenemos la ecuación de continuidad de la carga ρ ,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -4\pi \nabla \cdot \mathbf{J}. \quad (3.13)$$

La Tabla 3.1 recoge las ecuaciones principales en unidades Gaussianas y en su forma adimensional. En el Apéndice E se muestra la adimensionalización de todas las ecuaciones necesarias para este trabajo.

Ecuación	Unidades Gaussianas	Adimensionalización
Continuidad	$\partial\rho/\partial t = -4\pi\nabla \cdot \mathbf{J}$	$\partial\rho/\partial t = -4\pi\nabla \cdot \mathbf{J}$
Densidad corriente	$\mathbf{J} = \sum_s q_s \int \mathbf{v}_{c,s} f_s d\mathbf{v}$	$\mathbf{J} = \sum_s \frac{q_s}{e} \int \mathbf{v}_{c,s} f_s d\mathbf{v}$
Ley de Faraday	$\partial\mathbf{B}/\partial t = -c\nabla \times \mathbf{E}$	$\partial\mathbf{B}/\partial t = -\nabla \times \mathbf{E}$
Ley de Ampere	$\nabla \times \mathbf{B} = (1/c)\partial\mathbf{E}/\partial t + (4\pi/c)\mathbf{J}$	$\nabla \times \mathbf{B} = (v_{the}/c)^2(\partial\mathbf{E}/\partial t + \mathbf{J}/n)$
Ley de Gauss	$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho$	$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/n$
Ley de Gauss	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
Velocidad	$d\mathbf{r}_{c,s}/dt = \mathbf{v}_{c,s}$	$d\mathbf{r}_{c,s}/dt = \mathbf{v}_{c,s}$
Fuerza Lorentz	$d\mathbf{v}_{c,s}/dt = (q_s/m_s)[\mathbf{E}_{c,s} + (\mathbf{v}_{c,s} \times \mathbf{B}_{c,s})/c]$	$d\mathbf{v}_{c,p}/dt = (\mathbf{E}_{c,p} + \mathbf{v}_{c,p} \times \mathbf{B}_{c,p})d_e^2$ $d\mathbf{v}_{c,e}/dt = -(\mathbf{E}_{c,e} + \mathbf{v}_{c,p} \times \mathbf{B}_{c,e})$

Tabla 3.1: Ecuaciones para la densidad de carga, densidad de corriente, ecuaciones de Maxwell y del movimiento en unidades del sistema Gaussiano y en unidades adimensionales. El proceso de adimensionalización se detalla en el Apéndice E.

3.1. Método PIC

La simulación computacional de plasmas puede basarse en descripciones cinéticas. Este acercamiento es aplicable para plasmas cinéticos gobernados por la ecuación de Vlasov [11, 31, 32], donde el método *Particle-in-cell* (PIC) es el más utilizado en este tipo de simulaciones [18, 29]. Su uso se debe a que presenta un acercamiento Lagrangiano, i.e., integra numéricamente las ecuaciones de movimiento para un gran número de macropartículas bajo efectos de campos electromagnéticos externos y/o sus propios campos. Además, el método PIC obedece las leyes de protones y electrones reales, pero utilizando un número de partículas por unidad de volumen mucho menor que la densidad de un plasma real [18]. Este método permite una representación estadística de funciones de distribución en el espacio de fases, donde las partículas reales son representadas por partículas computacionales. Cada conjunto de partículas se le conoce como partícula computacional y puede ser visualizada como una pequeña parte del espacio de fases. La ventaja de tener partículas computacionales de tamaño finito es que interactúan más débilmente de lo que lo harían partículas puntuales, pero se comportan como partículas puntuales hasta que sus respectivas superficies se superponen. Cuando la superposición ocurre, en esa área la fuerza entre las partículas es cero. A grandes distancias la fuerza es igual a la de Coulomb, pero en la superposición esa fuerza es más débil que su correspondiente fuerza de Coulomb, de modo que se anula. Las partículas computacionales de tamaño finito permiten que se obtenga el parámetro de plasma correcto usando menos partículas de

las que hay en el sistema físico, de manera que se tiene una condición realística [28, 29]. En general, el método PIC usa las ecuaciones fundamentales sin mucha aproximación, permitiendo retener la mayor parte de la física del sistema [33].

Sin embargo, este método también presenta desventajas de eficiencia computacional. En el modelo estadístico las fluctuaciones numéricas convergen a $N^{-1/2}$ para N partículas y el método PIC puede reducir la constante pero no la escala. También se presentan dificultades al momento de resolver la cola de la distribución, la cual es poco poblada. Otra complicación es modelar para grandes rangos de escalas de tiempo, porque las escalas de tiempo cortas requieren pasos temporales pequeños, mientras que grandes escalas requieren muchos pasos temporales. Grandes rangos de escalas de tiempo presentan dificultades similares para el tamaño de la red. Además, este método requiere una gran capacidad de memoria y procesador [33]. Otra desventaja de este método es que el nivel de ruido de disparo es mucho mayor, especialmente cuando se simula un plasma frío [18].

La simulación de un plasma utilizando el método PIC involucra muchas partículas. Por ello, para la discretización de las ecuaciones se debe escoger un método que sea rápido y que mantenga una precisión aceptable. Adicionalmente, el método debe considerar la capacidad de almacenamiento del ordenador. El método *leapfrog* implícito es uno de los métodos de integración comúnmente utilizados [30, 31]. Este método tiene un error que desaparece cuando $\Delta t \rightarrow 0$ [11]. En el esquema PIC implícito las partículas computacionales se definen en un espacio continuo en posición y velocidad, mientras que los campos se definen en puntos discretos en el espacio. Sin embargo, tanto las partículas computacionales como los campos se definen en tiempos discretos. La evolución de las ecuaciones de movimiento para cada una de las $N_{c,s}$ partículas computacionales es discretizada en varios pasos temporales Δt , escogidos de manera que las partículas solo se muevan una pequeña distancia [28]. El valor de los campos y las partículas computacionales avanzan secuencialmente en el tiempo, partiendo de condiciones iniciales pero con un desfase en el tiempo de $\Delta t/2$. Las ecuaciones de movimiento de las partículas computacionales avanzan un paso de tiempo, utilizando campos interpolados desde la grilla discreta a las ubicaciones de partículas continuas [33].

En el método *leapfrog* implícito, la densidad de corriente ρ y la densidad de carga \mathbf{J} se evalúan en un nivel de tiempo futuro. ρ se evalúa en un nivel de tiempo $n + 1$, mientras que a \mathbf{J} se calcula en un nivel de tiempo $n + 1/2$ como promedio de \mathbf{J} en los tiempos $n + 1$ y n [31]. Discretizamos las ecuaciones (3.4), (3.5), (3.6), (3.13), (3.12), ley de Faraday y la densidad de corriente. La densidad de carga adimensional sería [30]

$$\rho^{n+1} = \rho^n - 4\pi\Delta t\nabla \cdot \mathbf{J}^{n+1/2}. \quad (3.14)$$

La densidad de corriente discretizada de forma explícita es

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^{n+1/2} = & \sum_{s=1} \left[\mathbf{v}_{c,p}^n + \frac{\Delta t d_e^2}{2} (\mathbf{E}_{c,p}^n + \mathbf{v}_{c,p}^n \times \mathbf{B}_{c,p}^n) \right] S(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{c,p}) \\ & - \sum_{c=1} \left[\mathbf{v}_{c,e}^n - \frac{\Delta t}{2} (\mathbf{E}_{c,e}^n + \mathbf{v}_{c,e}^n \times \mathbf{B}_{c,e}^n) \right] S(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{c,e}). \end{aligned} \quad (3.15)$$

La ecuación de Maxwell para el campo eléctrico de segundo orden, o ley de Ohm, puede ser diferenciada en el tiempo de un nivel de tiempo n hasta $n + 1$ [31]

$$\left(\frac{v_{the}}{c}\right)^2 \mathbf{E}^{n+1} - (\Delta t)^2 \nabla^2 \mathbf{E}^{n+1} = \left(\frac{v_{the}}{c}\right)^2 \mathbf{E}^n + \frac{\Delta t}{n} \left[\nabla \times \mathbf{B}^n - \left(\frac{v_{the}}{c}\right)^2 \mathbf{J}^{n+1/2} \right] - (\Delta t)^2 \nabla \left(\frac{\rho^{n+1}}{n} \right), \quad (3.16)$$

donde el término el disipativo $\nabla^2 \mathbf{E} = \nabla(\rho/n)$ evita aumentos del campo eléctrico en la escala de tamaño de la cuadrícula [26]. A continuación, discretizamos la evolución temporal del campo magnético [31]

$$\mathbf{B}^{n+1} = \mathbf{B}^n - \Delta t \nabla \times \mathbf{E}^{n+1}, \quad (3.17)$$

donde se ha utilizado el campo eléctrico \mathbf{E}^{n+1} calculado anteriormente. La evolución dinámica de las partículas computacionales utiliza los campos eléctrico y magnético interpolados desde la grilla hacia las partículas computacionales [24, 30]. La posición de las partículas computacionales de la especie s es

$$\mathbf{r}_{c,s}^{n+1} = \mathbf{r}_{c,s}^n + \mathbf{v}_{c,s}^{n+1} \Delta t, \quad (3.18)$$

mientras que su velocidad se calcula como

$$\mathbf{v}_{c,p}^{n+1} = \mathbf{v}_{c,p}^n + d_e^2 \Delta t \left(\mathbf{E}_{c,p}^{n+1} + \mathbf{v}_{c,p}^{n+1/2} \times \mathbf{B}_{c,p}^{n+1} \right) \quad (3.19)$$

para los protones y

$$\mathbf{v}_{c,e}^{n+1} = \mathbf{v}_{c,e}^n - \Delta t \left(\mathbf{E}_{c,e}^{n+1} + \mathbf{v}_{c,e}^{n+1/2} \times \mathbf{B}_{c,e}^{n+1} \right), \quad (3.20)$$

para los electrones, donde $\mathbf{E}_{c,p}$, $\mathbf{E}_{c,e}$, $\mathbf{B}_{c,p}$ y $\mathbf{B}_{c,e}$ es el campo electromagnético interpolado. La velocidad calculada avanzaría medio paso temporal, así obtenemos

$$\mathbf{v}_{c,p}^{n+1/2} = \frac{\hat{\mathbf{v}}_{c,p} + (\Delta t d_e^2 / 2) \hat{\mathbf{v}}_{c,p} \times \mathbf{B}_{c,p}^{n+1} + (\Delta t d_e^2 / 2)^2 (\hat{\mathbf{v}}_{c,p} \cdot \mathbf{B}_{c,p}^{n+1}) \mathbf{B}_{c,p}^{n+1}}{1 + [(\Delta t d_e^2 / 2) \mathbf{B}_{c,p}^{n+1}]^2}, \quad (3.21)$$

para los protones, y para los electrones

$$\mathbf{v}_{c,e}^{n+1/2} = \frac{\hat{\mathbf{v}}_{c,e} - (\Delta t / 2) \hat{\mathbf{v}}_{c,e} \times \mathbf{B}_{c,e}^{n+1} + (\Delta t / 2)^2 (\hat{\mathbf{v}}_{c,e} \cdot \mathbf{B}_{c,e}^{n+1}) \mathbf{B}_{c,e}^{n+1}}{1 + [(\Delta t / 2) \mathbf{B}_{c,e}^{n+1}]^2}. \quad (3.22)$$

La velocidad $\hat{\mathbf{v}}_{c,s}$ es una velocidad auxiliar definida como [31]

$$\hat{\mathbf{v}}_{c,p} = \mathbf{v}_{c,p}^n + d_e^2 \Delta t \mathbf{E}_{c,p}^n \quad (3.23)$$

para los protones, y

$$\hat{\mathbf{v}}_{c,e} = \mathbf{v}_{c,e}^n - \Delta t \mathbf{E}_{c,e}^n. \quad (3.24)$$

para los electrones [31]. El sistema de ecuaciones (3.15) - (3.24) será implementado como código en lenguaje FORTRAN.

3.2. Pseudo-algoritmo PIC

1. **Datos iniciales:** La distribución inicial discreta de las partículas en el espacio de fases es importante. La forma de la distribución afecta la posibilidad de una investigación adecuada de los procesos físicos [18]. El ciclo comienza en $t = 0$, donde se dan condiciones apropiadas a las posiciones y velocidades de las partículas computacionales [11]. Si la distribución espacial de las partículas computacionales es completamente caótica la densidad de energía electrostática ($\propto k^{-2}$) incrementa infinitamente con el decrecimiento del número de onda \mathbf{k} . Sin embargo, según la teoría del plasma esa densidad de energía electrostática debe ser en proporción a $(2 + k^2 \lambda_D^2)^{-1}$ por tanto, una distribución espacial caótica no es satisfactoria. La distribución de partículas en un plasma real se encuentran dentro de una esfera de radio λ_D [18]. Una forma adecuada para la distribución inicial de las posiciones es de una forma uniforme [11].

En las simulaciones se van a utilizar derivadas espectrales por tanto, el espacio de Fourier exige 2^{n_1} partículas computacionales por celda y 2^{n_2} puntos de grilla. En la Figura 3.1 se muestra una distribución inicial uniforme con 8 partículas computacionales por celda.



Figura 3.1: Distribución inicial de las partículas computacionales en la grilla L_x . Se muestran 8 partículas computacionales por cada Δx .

Con respecto a la inicialización de la velocidad de las partículas computacionales, la distribución de velocidades es simulada por una distribución Maxwelliana. Se usa un set de M números aleatorios $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_M$ uniformemente distribuidos en el intervalo $[0,1]$, así la velocidad se define por la siguiente fórmula [18]

$$v_M = \left(\sum_{i=1}^M \epsilon_i - \frac{M}{2} \right) \left(\frac{M}{12} \right)^{-1/2}. \quad (3.25)$$

La inicialización de los campos depende del caso de estudio, donde $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \epsilon \mathbf{E}_1$ y $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \epsilon \mathbf{B}_1$, siendo ϵ la amplitud de la perturbación [10].

2. **Densidad de partículas:** La densidad de partículas de cada especie se asigna de acuerdo a la inestabilidad a estudiar.
3. **Cálculo de las densidades de corriente y carga:** La densidad de corriente \mathbf{J} se calcula utilizando la ecuación (3.15), mientras que la densidad de carga de cada especie se calcula utilizando la definición dada por la ecuación (3.10). Esto permite que las densidades sean distribuidas a todos los puntos de grilla [24].

4. **Cálculo de los campos:** La densidad de corriente \mathbf{J} es el enlace entre la ecuación de Vlasov y las ecuaciones de Maxwell [31]. El cálculo de estas proveen la relación entre las posiciones y velocidades de las partículas computacionales con los campos eléctrico \mathbf{E}_p (ecuación (3.7)) y campo magnético \mathbf{B}_p (ecuación (3.8)) [11]. De esta forma los campos que fueron calculados en cada punto de la grilla son redistribuidos a la posición de cada partícula [24].
5. **Evolución dinámica:** El movimiento de cada partícula se obtiene comenzando con la velocidad auxiliar (ecuaciones (3.23) y (3.24)), luego la velocidad a medio paso temporal (ecuaciones (3.21) y (3.22)) y finalmente la velocidad a un paso temporal (ecuaciones (3.19) y (3.20)). A continuación, se actualiza la posición de las partículas utilizando la ecuación (3.18) [31, 24]
6. Se regresa al punto 3 hasta que se alcance el tiempo final.

El tiempo de ejecución del algoritmo depende del número de puntos de grilla y el número de partículas computacionales por celda. En la Figura 3.2 se muestra el tiempo computacional (en segundos) en función del número de partículas computacionales por celda $N_{c/c,p}$, para una longitud de grilla L_x con $N_x = 512$ puntos. La escala logarítmica en ambos ejes evidencia una ley de potencia que liga al tiempo computacional con $N_{c/c,p}$.

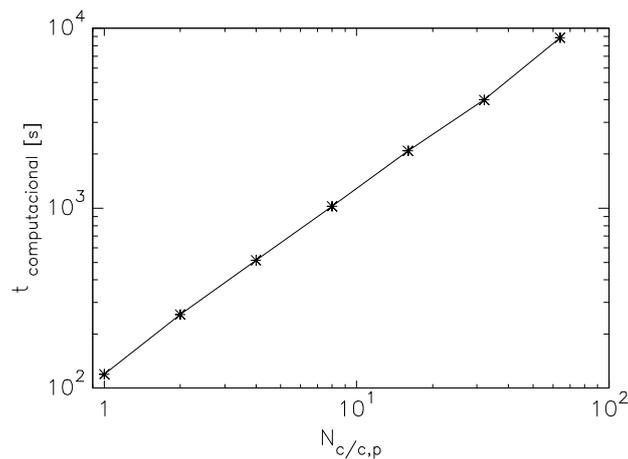


Figura 3.2: Tiempo computacional en función del número de partículas computacionales por celda $N_{c/c,p}$

Capítulo 4

RESULTADOS NUMÉRICOS

En este Capítulo estudiaremos las inestabilidades *beam-plasma* (Sección 2.1.2) y *gentle-bump* (Sección 2.1.4) en el régimen no lineal. Para llevar a cabo este estudio usaremos el código PIC presentado como algoritmo en la Sección 3.2. Las simulaciones se realizarán en el espacio 1D-1V (1 dimensión en el espacio físico y 1 dimensión en el espacio de velocidad), para el caso electrostático. El campo eléctrico será perturbado como $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \epsilon \mathbf{E}_1$ pero, de acuerdo a lo expuesto en el Capítulo 2, $\mathbf{E}_0 = 0$, entonces $\mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E}_1$. El campo eléctrico perturbativo será $E = 0,1 \cos(mk_0/L_x)$, donde m es el modo, $k_0 = 2\pi/x$ es el número de onda inicial y L_x es la longitud del espacio físico. Utilizaremos $m = 3$, $L_x = 10\pi$ y $N_x = 512$ puntos de grilla, donde $\Delta x = L_x/N_x$. La longitud del espacio de velocidad $L_v = 10$ con $N_v = 512$ puntos de grilla. La velocidad se encuentra en el rango $[-5,5]$. Las simulaciones se llevarán a cabo por un tiempo $t = 60$, i.e., 60 giros de ciclotrón, con un avance temporal $\Delta t = 0,01$ [27]. Notamos que se debe cumplir que $\Delta t < \Delta x$ para que el código sea estable [28, 31]. La relación de masas es $d_e^2 = 1/10$ y el tamaño de las partículas computacionales es $\Delta_{c,s} = \Delta x/9$, i.e., hay 8 partículas computacionales en cada Δx .

4.1. Inestabilidad beam-plasma

En las simulaciones no lineales de la inestabilidad *beam-plasma* consideramos que existirá una interacción entre protones y electrones, por lo cual nos encontramos en el régimen del modelo *strong-beam*, donde cumplimos que $m_p \gg m_e$. Otra característica de este régimen es que los protones forman un plasma de fondo, mientras que los electrones forman una corriente que ingresa en los protones. Se debe cumplir que $\omega_{pp}^2 \ll \omega_{pe}^2$, i.e., $n_p \approx n_e$ [11]. Los protones forman un plasma de fondo por tanto su *bulk velocity* es nula. En cambio, los electrones se inyectan en el plasma con una *bulk velocity* $u_e = 1$. Las *bulk-velocities* de electrones y protones se reflejan en el valor de la velocidad a la cual las funciones de distribución iniciales están centradas. En la Figura 4.1 se muestra la función de distribución al tiempo $t = 0$, donde se aprecian las *bulk-velocities*, dependiendo de donde se encuentra centrado el pico de la distribución. Esta distribución resulta de hacer un corte transversal en cualquier punto x del espacio de fases. La inicialización del campo eléctrico y el espectro de energía se muestran en la Figura 4.2 en el panel izquierdo y derecho, respectivamente. En la misma Figura se pueden apreciar los modos de oscilación del campo. En el panel izquierdo de la Figura 4.3 se muestra el espacio de fases inicial, donde también se aprecian las *bulk-velocities*. Al hacer un corte transversal en $L_x/2$ se obtiene la Figura 4.1.

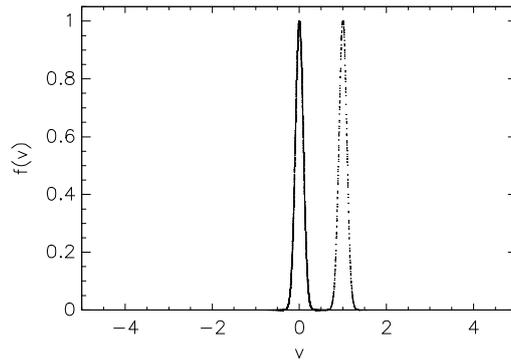


Figura 4.1: Al tiempo $t = 0$, se muestra la función distribución electrónica y protónica para la inestabilidad *beam-plasma*.

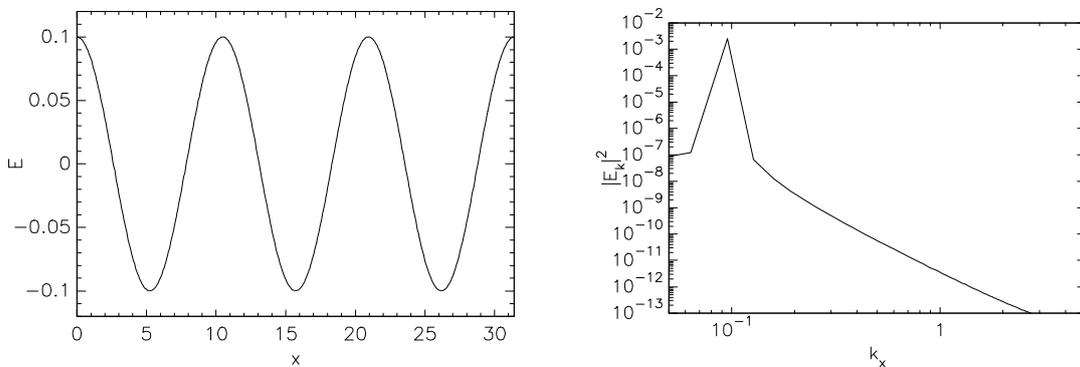


Figura 4.2: Al tiempo $t = 0$, en el panel izquierdo se ilustra el campo eléctrico total, $\mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E}_1$, de la inestabilidad *beam-plasma*. En el panel derecho se muestra el correspondiente espectro de energía del campo eléctrico.

La evolución temporal del espacio de fases se muestra en la Figura 4.3, de izquierda a derecha se muestran los tiempos $t = 0$, $t = 30$ y $t = 60$. En $t = 30$ el espacio de fases se deforma debido a que las partículas van perdiendo energía. La mitad de la energía se pierde como energía de oscilación y la otra mitad se va al campo de energía. A medida que las velocidades de las partículas oscilan, la energía del campo vuelve a la energía cinética. Las partículas oscilan a diferentes frecuencias lo que provoca que las oscilaciones de campo y el rebote de partículas se extingan [11]. De esta manera se llega a un atrapamiento de partículas, como el que se ilustra en el panel derecho de la Figura 4.3.

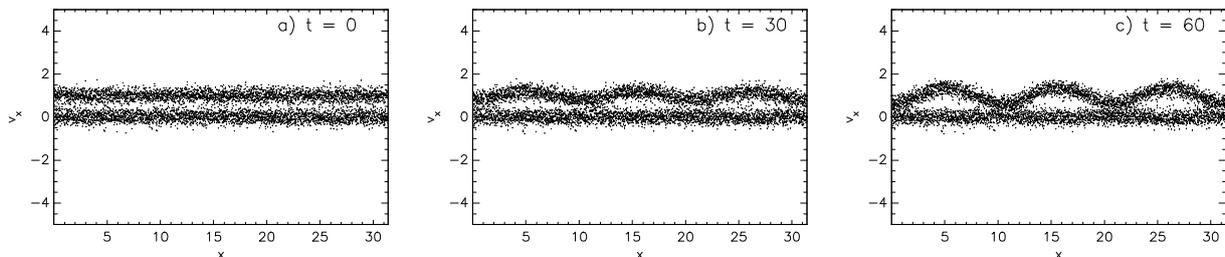


Figura 4.3: Evolución temporal del espacio de fases de la inestabilidad *beam-plasma* en los tiempos a) $t = 0$, b) $t = 30$ y c) $t = 60$.

Al final de la evolución temporal ($t = 60$), el campo eléctrico presenta una pequeña disminución en la amplitud de la onda tal como se muestra en el panel izquierdo de la Figura 4.4. En el panel derecho de la Figura 4.4, el espectro de energía muestra picos correspondientes a los modos de oscilación del campo eléctrico. Además, se visualizan varios picos pequeños como consecuencia de la evolución no lineal. En cuanto al espacio de fases, el panel derecho de la Figura 4.3 muestra un atrapamiento de partículas debido a la acción de los electrones [11]. En este caso, recurrimos a un histograma para determinar a qué velocidades se tiene una mayor cantidad de partículas. Al hacer un corte transversal en $x = L_x/2$ obtenemos lo mostrado en la Figura 4.5, donde un mayor número de partículas están con $v_{c,p} = 0$, $v_{c,e} = 1,2$ y $v_{c,e} = 1,4$, valores correspondientes a los picos de las funciones de distribución protónica y electrónica. Además, se observa que la función de distribución electrónica disminuye como consecuencia del crecimiento de la inestabilidad [10].

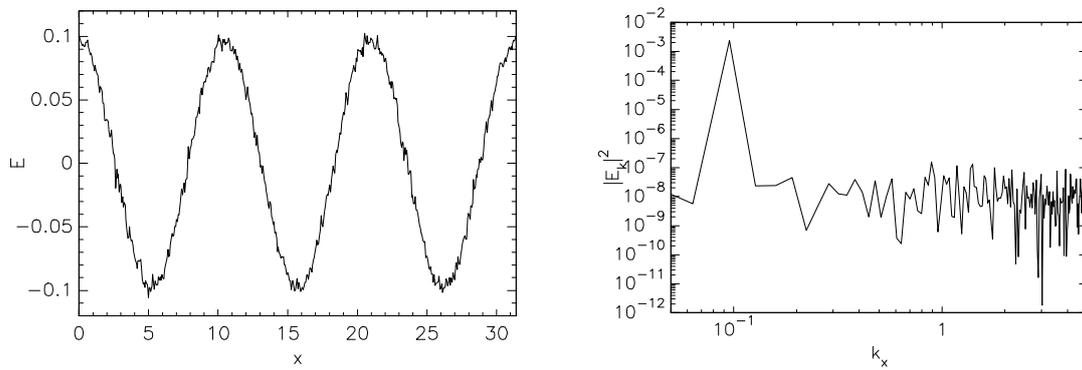


Figura 4.4: Al tiempo $t = 60$, en el panel izquierdo se ilustra el campo eléctrico total, $\mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E}_1$, para la inestabilidad *beam-plasma*. En el panel derecho se muestra el correspondiente espectro de energía del campo eléctrico.

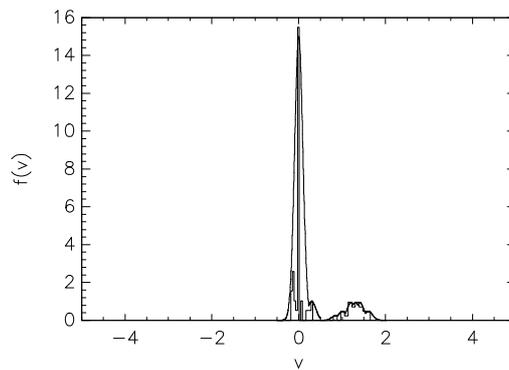


Figura 4.5: Al tiempo $t = 60$, se muestra la función de distribución en $x = L_x/2$ de la inestabilidad *beam-plasma*.

4.2. Inestabilidad gentle-bump

En el régimen no lineal, la simulación de un plasma bajo la inestabilidad *gentle-bump* mantiene las condiciones detalladas al inicio del presente Capítulo. Sin embargo, existen diferencias ya que en esta inestabilidad la distribución electrónica de la región 1 (centrada en cero), va a tener una

mayor densidad de electrones $n_1 = 0,97n_e$, mientras que la densidad en la región 2 (*bump*) sería $n_2 = 0,03n_e$ [26]. La *bulk velocity* electrónica en el *bump* es $u_e = 2$, mientras que en la región 1 es cero. La *bulk velocity* protónica $u_p = 2$.

En la Figura 4.6 se muestra la función de distribución al tiempo $t = 0$, donde se aprecian las *bulk-velocities*. Esta distribución resulta de hacer un corte transversal en $L_x/2$ del espacio de fases mostrado en el panel izquierdo de la Figura 4.7. En la Figura 4.7 también se aprecian las *bulk-velocities*. En cuanto al campo eléctrico y su correspondiente espectro de energía, estos coinciden con la Figura 4.2, ya que ambas inestabilidades tienen las mismas condiciones iniciales para el campo eléctrico.

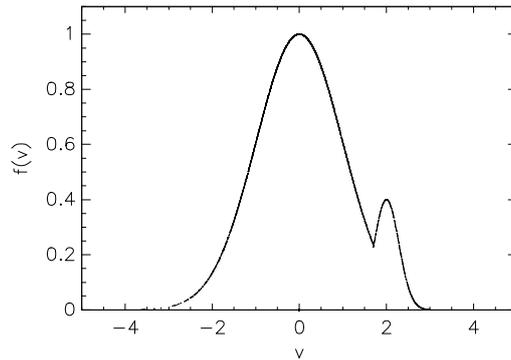


Figura 4.6: Al tiempo $t = 0$, se muestra la función de distribución en $x = L_x/2$ para la inestabilidad *gentle-bump*.

En la Figura 4.7 se muestra la evolución temporal del espacio de fases. De izquierda a derecha se muestran la evolución a $t = 0$, $t = 30$ y $t = 60$, donde observamos que se forman agujeros de pequeña amplitud en el *bump* de la función de distribución. Los agujeros se forman debido a que los electrones del haz quedan atrapados en cada pozo de potencial, y se difunden en el espacio de fase de velocidad a través de un movimiento de captura no lineal, formando una función de distribución de velocidad estable [27].

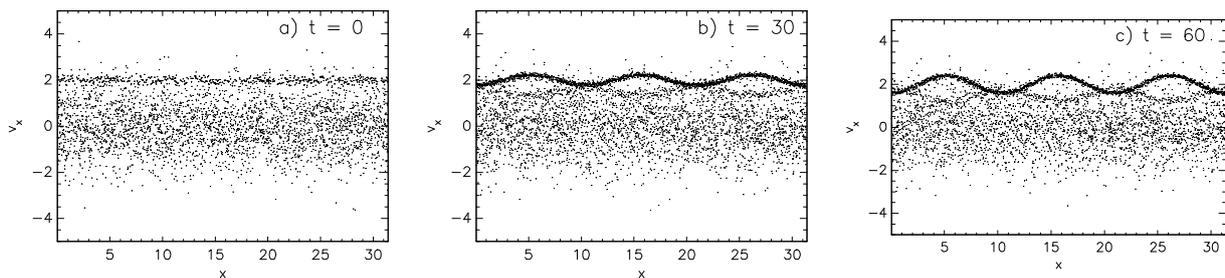


Figura 4.7: Evolución temporal del espacio de fases de la inestabilidad *gentle-bump* en los tiempos a) $t = 0$, b) $t = 30$ y c) $t = 60$.

Al final de la evolución temporal ($t = 60$), el campo eléctrico se deforma como se muestra en el panel izquierdo de la Figura 4.8. En consecuencia, el espectro de energía mostrado en el panel derecho de la Figura 4.8, presenta una saturación no lineal. Esto demuestra que la simulación está formada por una fase inicial o transitoria y una fase de saturación no lineal [34]. En el espacio de fases mostrado en el panel izquierdo de la Figura 4.7 se observa un atrapamiento de partículas

únicamente en el *bump* de la función de distribución. En la Figura 4.9 se muestra un histograma mostrando a qué velocidades se concentran un mayor número de partículas. En la misma Figura se observa una deformación en el *bump* indicando el atrapamiento de partículas.

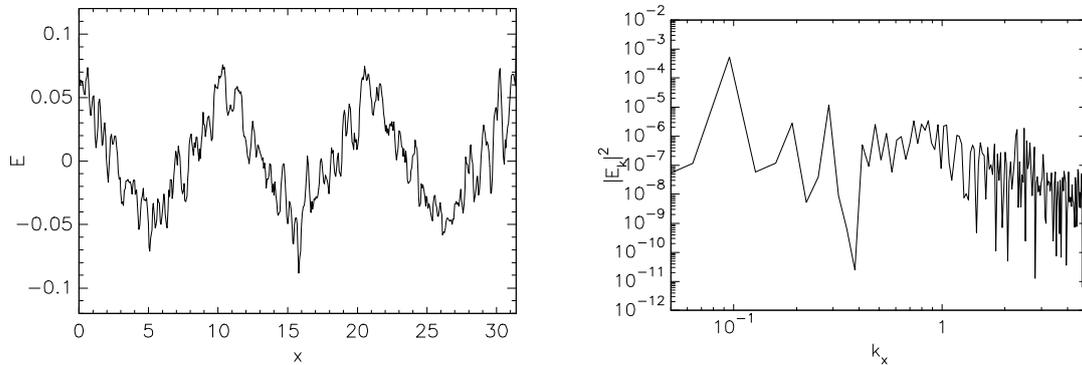


Figura 4.8: En el panel izquierdo se ilustra el campo eléctrico total, $\mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E}_1$, al tiempo $t = 60$ para la inestabilidad *gentle-bump*. En el panel derecho se muestra el correspondiente espectro de energía del campo eléctrico.

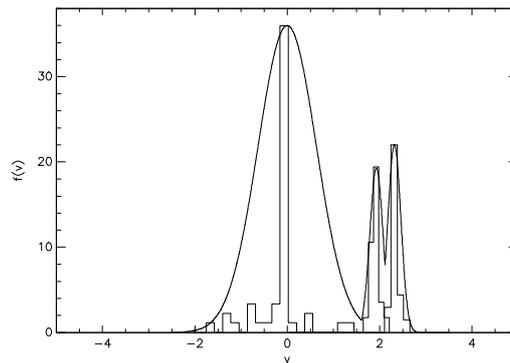


Figura 4.9: Al tiempo $t = 60$, se muestra la función de distribución correspondiente a $x = L_x/2$ la inestabilidad *gentle-bump*.

Capítulo 5

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Un plasma espacial puede ser descrito mediante un modelo cinético no colisional no relativista. En esta aproximación, se toma una escala en la cual los efectos cinéticos de los electrones no pueden ser ignorados. La descripción analítica del plasma se realiza mediante la ecuación de Vlasov, donde para estudiar la estabilidad de la ecuación se analizó a la inestabilidad *two-stream* en los casos límite *beam-plasma* y *gentle-bump*. El tratamiento de estabilidad para los casos no lineales requirió recurrir a simulaciones numéricas. Para ello, implementamos un código PIC en el espacio 1D-1V para visualizar el comportamiento de un plasma compuesto por electrones y protones.

En el análisis lineal de las inestabilidades *beam-plasma* y *gentle-bump* acoplamos las ecuaciones de Vlasov-Maxwell para deducir la función dieléctrica. A partir de las funciones de distribución y condiciones que caracterizan a cada caso de estudio analizamos a la función dieléctrica en el caso electrostático unidimensional. Con esta función obtuvimos las relaciones de dispersión para ambas inestabilidades, mismas que se muestran en la Figuras 2.3 y 2.5 para el *beam-plasma* y *gentle-bump*, respectivamente.

En la implementación numérica, el uso de derivadas espectrales permitió obtener derivadas exactas dentro del rango numérico. El costo de esta precisión es verificar que las funciones a operar sean periódicas tipo Dirichlet o Neumann [35]. En nuestras simulaciones no lineales asignamos ocho partículas computacionales por celda entonces, para obtener una mejor descripción del comportamiento de un plasma real, es necesario aumentar ese número.

En la Figura 3.2 observamos cómo el tiempo de ejecución de las simulaciones sigue una ley de potencia al aumentar el número de partículas computacionales por celda. Estas pruebas de tiempo las hicimos con una grilla 1D discretizada con $N_x = 512$. Es por ello que escogimos colocar 8 partículas por celda, para que el tiempo de simulación no sea muy grande y sea acorde al tipo de procesadores usados. El aumento de número de procesadores y programar una ejecución en paralelo permitiría aumentar el número de partículas por celda al menos a 1024 [26]. Incluso se podría aumentar las dimensiones del espacio físico y de velocidad, manteniendo un tiempo de simulación razonable.

En la inestabilidad *beam-plasma* la Figura 4.5 muestra el final de la evolución temporal de la función de distribución, donde observamos una deformación especialmente en la correspondiente a los electrones. Esta deformación se refleja en el espacio de fases donde se observan indicios de un atrapamiento de partículas. El atrapamiento podría deberse a la acción del *beam* de electrones que se inyecta en el plasma de fondo compuesto por protones, lo cual provoca una oscilación de las partículas y posteriormente la formación de agujeros de electrones. Los agujeros que se muestran en

el espacio de fases de la Figura 4.3 son periódicos y coinciden con los picos del campo eléctrico. EL panel izquierdo de la Figura 4.4 muestran una deformación en la perturbación del campo eléctrico, que podría deberse a una transferencia de energía a las partículas y al desgaste numérico. La deformación del campo eléctrico se refleja en el espectro de energía mostrado en el panel derecho de la misma Figura, en el cual se observan los modos de oscilación presentes en el campo eléctrico y varios picos superpuestos correspondientes a la evolución no lineal.

De forma similar, en la inestabilidad *gentle-bump*, la Figura 4.9 muestra el final de la evolución temporal de la función de distribución, donde observamos una deformación especialmente en el *bump* de la distribución. Esta deformación en el *bump* es apreciable en el espacio de fases mostrado en la Figura 4.7 donde se observa un indicio de atrapamiento de partículas. Este atrapamiento se manifiesta como agujeros, mismos que se forman porque quedan atrapados en un pozo de potencial. Al igual que en la inestabilidad *beam-plasma*, el patrón de atrapamiento coincide con los picos del campo eléctrico. El campo eléctrico mostrado en el panel izquierdo de la Figura 4.8 presenta una mayor deformación, lo cual indicaría una mayor transferencia de energía las partículas y pérdida por desgaste numérico. Es así que en el panel derecho de la Figura 4.8 el espectro de energía presenta muchos picos superpuestos correspondientes a la evolución no lineal, además de los correspondientes a los modos de oscilación del campo eléctrico.

Apéndice A

Inestabilidad two-stream

A.1. Linealización de la ecuación de Vlasov

La linealización de la ecuación de Vlasov requiere que f_s sea expresada como $f_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = f_{s0}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + \epsilon f_{s1}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$, donde f_{s0} representa el estado de un plasma estacionario, ϵ es la perturbación y f_{s1} es el estado de un plasma perturbado. Reemplazando f_s en la ecuación de Vlasov, tenemos

$$\frac{\partial(f_{s0} + \epsilon f_{s1})}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla(f_{s0} + \epsilon f_{s1}) + \frac{q_s}{m_s} \left[\mathbf{E}_0 + \epsilon \mathbf{E}_1 + \frac{\mathbf{v} \times (\mathbf{B}_0 + \epsilon \mathbf{B})}{c} \right] \cdot \nabla_{\mathbf{v}}(f_{s0} + \epsilon f_{s1}) = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{s0}}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial f_{s1}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_{s0} + \epsilon \mathbf{v} \cdot \nabla f_{s1} \\ + \frac{q_s}{m_s} \left[\mathbf{E}_0 + \epsilon \mathbf{E}_1 + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0}{c} + \epsilon \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}_1}{c} \right] \cdot (\nabla_{\mathbf{v}} f_{s0} + \epsilon \nabla_{\mathbf{v}} f_{s1}) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{s0}}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial f_{s1}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_{s0} + \epsilon \mathbf{v} \cdot f_{s1} + \frac{q_s}{m_s} \left[\mathbf{E}_0 + \epsilon \mathbf{E}_1 + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0}{c} + \epsilon \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}_1}{c} \right] \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{s0} \\ + \frac{q_s}{m_s} \left[\mathbf{E}_0 + \epsilon \mathbf{E}_1 + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0}{c} + \epsilon \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}_1}{c} \right] \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{s1} \epsilon = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{s0}}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial f_{s1}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_{s0} + \epsilon \mathbf{v} \cdot f_{s1} + \frac{q_s}{m_s} \left(\mathbf{E}_0 + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0}{c} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{s0} + \frac{q_s}{m_s} \left(\epsilon \mathbf{E}_1 + \epsilon \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}_1}{c} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{s0} \\ + \frac{q_s}{m_s} \left(\mathbf{E}_0 + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0}{c} \right) \cdot \epsilon \nabla_{\mathbf{v}} f_{s1} + \frac{q_s}{m_s} \epsilon \left(\mathbf{E}_1 + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}_1}{c} \right) \cdot \epsilon \nabla_{\mathbf{v}} f_{s1} = 0, \end{aligned}$$

donde los términos de orden ϵ^2 son ignorados,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{s0}}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial f_{s1}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_{s0} + \epsilon \mathbf{v} \cdot f_{s1} + \frac{q_s}{m_s} \left(\mathbf{E}_0 + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0}{c} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{s0} + \frac{q_s}{m_s} \left(\epsilon \mathbf{E}_1 + \epsilon \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}_1}{c} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{s0} \\ + \frac{q_s}{m_s} \left(\mathbf{E}_0 + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0}{c} \right) \cdot \epsilon \nabla_{\mathbf{v}} f_{s1} = 0. \end{aligned}$$

Sabemos que f_{s0} satisface la ecuación de Vlasov

$$\frac{\partial f_{s0}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_{s0} + \frac{q_s}{m_s} \left(\mathbf{E}_0 + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0}{c} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{s0} = 0,$$

de manera que se obtiene

$$\frac{\partial f_{s1}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_{s1} + \frac{q_s}{m_s} \left(\mathbf{E}_1 + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}_1}{c} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{s0} + \frac{q_s}{m_s} \left(\mathbf{E}_0 + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0}{c} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{s1} = 0;$$

A.2. Función de distribución en el espacio de Fourier

Una forma de resolver al sistema de ecuaciones Vlasov-Maxwell para perturbaciones electrostáticas es pasar al espacio de Fourier de manera que asumimos que la función f_{s1} se expresa como

$$f_{s1}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = f_{sk}(\mathbf{v}) \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)].$$

Esta relación la reemplazamos en la ecuación

$$\frac{\partial f_{s1}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_{s1} - \frac{q_s}{m_s} \nabla \phi_1 \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{s0} = 0.$$

y despejamos la función de distribución en el espacio de Fourier f_{sk} ,

$$-i\omega f_{s1} + \mathbf{v} \cdot (i\mathbf{k}) f_{s1} - \frac{q_s}{m_s} i\mathbf{k} \phi_1 \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{s0} = 0,$$

$$-\omega f_{sk} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{k} f_{sk} - \frac{q_s}{m_s} \phi_k \mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{s0} = 0,$$

$$f_{sk}(\omega - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}) + \frac{q_s}{m_s} \phi_k \mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{s0} = 0,$$

$$f_{sk} = -\frac{(q_s/m_s) \mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{s0}}{\omega - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}} \phi_k.$$

A.3. Función dieléctrica

Para determinar la función dieléctrica, utilizamos la función de distribución f_{s1} y el potencial ϕ_1 en el espacio de Fourier, definidos como

$$f_{s1}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = f_{sk}(\mathbf{v}) \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)];$$

$$\phi_1(\mathbf{r}, t) = \phi_k \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$$

y los reemplazamos en la ecuación para el potencial electrostático

$$\nabla^2 \phi_1 = -4\pi \sum_s n_s q_s \int f_{s1} d\mathbf{v}.$$

Desarrollando obtenemos

$$\nabla \cdot (i\mathbf{k}\phi_k \exp [i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]) = -4\pi \sum_s n_s q_s \int f_{sk}(\mathbf{v}) \exp [i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] d\mathbf{v},$$

$$k^2 \phi_k \exp [i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] = 4\pi \exp [i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] \sum_s n_s q_s \int f_{sk}(\mathbf{v}) d\mathbf{v},$$

$$k^2 \phi_k = 4\pi \sum_s n_s q_s \int f_{sk}(\mathbf{v}) d\mathbf{v},$$

donde la función en el espacio de Fourier f_{sk} es

$$f_{sk} = -\frac{(q_s/m_s)\mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{s0}}{\omega - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}} \phi_k.$$

Reemplazando con la definición de f_{sk} y desarrollando obtenemos

$$k^2 \phi_k = -4\pi \sum_s n_s q_s \int \frac{(q_s/m_s)\mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{s0}}{\omega - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}} \phi_k d\mathbf{v},$$

$$k^2 \phi_k \left(1 + 4\pi \sum_s n_s \frac{q_s^2}{m_s} \int \frac{\mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{s0}}{\omega - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}} d\mathbf{v} \right) = 0,$$

y utilizando la relación $\omega_{ps}^2 = 4\pi n_s q_s^2 / m_s$, se tiene

$$k^2 \phi_k \left(1 + \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{k^2} \int \frac{\mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{s0}}{\omega - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}} d\mathbf{v} \right) = 0.$$

El resultado no trivial de la relación anterior resulta ser la función dieléctrica, i.e.,

$$D(\mathbf{k}, \omega) = 1 + \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{k^2} \int \frac{\mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{s0}}{\omega - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}} d\mathbf{v}.$$

Apéndice B

Inestabilidad beam-plasma

B.1. Relación de dispersión

La relación de dispersión se obtiene cuando la función dieléctrica es cero. Para ello, usamos la ecuación (2.17) y desarrollamos el sumatorio reemplazando con las respectivas funciones de distribución (ecuaciones (2.18) y (2.19))

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\omega_{pp}^2}{k^2} \int \frac{\nabla_v \delta(v)}{v - \omega/|k|} dv + \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \int \frac{\nabla_v \delta(v - \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_e/|k|)}{v - \omega/|k|} dv, \\ 1 &= \frac{\omega_{pp}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \frac{k^2}{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_e - \omega)^2}, \\ 1 &= \frac{\omega_{pp}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{pe}^2}{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_e - \omega)^2}. \end{aligned}$$

B.2. Punto mínimo de la relación de dispersión

En la relación de dispersión del *beam-plasma* (ecuación (2.20)) hay un mínimo local, llamado A. Cuando el valor de A es menor a 1 se tienen cuatro raíces reales. Por el contrario, cuando A es mayor a 1 se tienen dos raíces reales y dos raíces complejas conjugadas, una de las cuales corresponde a la inestabilidad. Para determinar el punto mínimo A derivamos la ecuación (2.20), i.e.,

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{2\omega_{pp}^2}{\omega^3} + \frac{2\omega_{pe}^2}{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_e - \omega)^3}, \\ \frac{\omega_{pp}^2}{\omega^3} &= \frac{\omega_{pe}^2}{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_e - \omega)^3}, \\ \frac{\omega^3}{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_e - \omega)^3} &= \left(\frac{\omega_{pp}}{\omega_{pe}} \right)^2, \\ \frac{\omega}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_e - \omega} &= \left(\frac{\omega_{pp}}{\omega_{pe}} \right)^{2/3}, \\ \omega &= \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_e \left(\frac{\omega_{pp}}{\omega_{pe}} \right)^{2/3} - \omega \left(\frac{\omega_{pp}}{\omega_{pe}} \right)^{2/3}, \end{aligned}$$

$$\omega \left[1 + \left(\frac{\omega_{pp}}{\omega_{pe}} \right)^{2/3} \right] = \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_e \left(\frac{\omega_{pp}}{\omega_{pe}} \right)^{2/3},$$

$$\omega_A = \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_e \left[\frac{(\omega_{pp}/\omega_{pe})^{2/3}}{(\omega_{pp}/\omega_{pe})^{2/3} + 1} \right].$$

B.3. Condición para la inestabilidad

La condición para que exista la inestabilidad *beam-plasma* es que el RHS de la relación de dispersión (ecuación (2.20)) sea mayor que 1 en $\omega = \omega_A$, i.e.,

$$1 < \frac{\omega_{pp}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{pe}^2}{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_e - \omega)^2},$$

$$1 < \frac{\omega_{pp}^2}{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_e)^2} \left[\frac{(\omega_{pp}/\omega_{pe})^{2/3} + 1}{(\omega_{pp}/\omega_{pe})^{2/3}} \right]^2 + \frac{\omega_{pe}^2}{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_e)^2} \left\{ 1 - \left[\frac{(\omega_{pp}/\omega_{pe})^{2/3}}{(\omega_{pp}/\omega_{pe})^{2/3} + 1} \right] \right\}^{-2},$$

$$(\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_e)^2 < \omega_{pp}^2 \frac{[(\omega_{pp}/\omega_{pe})^{2/3} + 1]^2}{(\omega_{pp}/\omega_{pe})^{4/3}} + \frac{\omega_{pe}^2 [(\omega_{pp}/\omega_{pe})^{2/3} + 1]^2}{[(\omega_{pp}/\omega_{pe})^{2/3} + 1 - (\omega_{pp}/\omega_{pe})^{2/3}]^2},$$

$$(\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_e)^2 < \left[\left(\frac{\omega_{pp}}{\omega_{pe}} \right)^{2/3} + 1 \right]^2 \left[\omega_{pp}^2 \left(\frac{\omega_{pe}}{\omega_{pp}} \right)^{4/3} + \omega_{pe}^2 \right],$$

$$(\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_e)^2 < \omega_{pe}^2 \left[\left(\frac{\omega_{pp}}{\omega_{pe}} \right)^{2/3} + 1 \right]^2 \left[1 + \left(\frac{\omega_{pp}}{\omega_{pe}} \right)^2 \left(\frac{\omega_{pe}}{\omega_{pp}} \right)^{4/3} \right],$$

$$(\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_e)^2 < \omega_{pe}^2 \left[\left(\frac{\omega_{pp}}{\omega_{pe}} \right)^{2/3} + 1 \right]^2 \left[1 + \left(\frac{\omega_{pp}}{\omega_{pe}} \right)^{2/3} \right],$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_e < \omega_{pe} \left[1 + \left(\frac{\omega_{pp}}{\omega_{pe}} \right)^{2/3} \right]^{3/2}.$$

Apéndice C

Inestabilidad gentle-bump

C.1. Parte imaginaria

Por facilidad de cálculos la función de distribución f_{e0} se ha separado en dos partes, de manera que $f_{e0} = f_{e0_1} + f_{e0_2}$. Para calcular la función dielectrica imaginaria D_i y posteriormente la frecuencia imaginaria ω_i comenzamos por derivar f_{e0_1} con respecto a v

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_{e0_1}}{\partial v} &= -\left(\frac{m_e}{2\pi k_B T_1}\right)^{1/2} \frac{m_e v}{k_B T_1} \exp\left(-\frac{m_e v^2}{2k_B T_1}\right), \\ &= -2\pi \left(\frac{m_e}{2\pi k_B T_1}\right)^{3/2} v \exp\left(-\frac{m_e v^2}{2k_B T_1}\right).\end{aligned}$$

Evaluamos la derivada en $v = \omega_r/|k|$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_{e0_1}}{\partial v} \Big|_{v=\omega_r/|k|} &= -2\pi \left(\frac{m_e}{2\pi k_B T_1}\right)^{3/2} \frac{\omega_r}{|k|} \exp\left(-\frac{m_e \omega_r^2}{2k^2 k_B T_1}\right), \\ &= -2\pi \left(\frac{m_e}{2\pi k_B T_1}\right)^{3/2} \frac{\omega_r}{|k|} \exp\left[-\frac{m_e}{2k^2 k_B T_1} \omega_{pe}^2 (1 + 3k^2 \lambda_{D_1}^2)\right], \\ &= -2\pi \left(\frac{m_e}{2\pi k_B T_1}\right)^{3/2} \frac{\omega_r}{|k|} \exp\left[-\frac{m_e}{k^2 k_B T_1} \omega_{pe}^2 k^2 \lambda_{D_1}^2 \left(\frac{1}{2k^2 \lambda_{D_1}^2} + \frac{3}{2}\right)\right], \\ &= -2\pi \left(\frac{m_e}{2\pi k_B T_1}\right)^{3/2} \frac{\omega_r}{|k|} \exp\left(-\frac{1}{2k^2 \lambda_{D_1}^2} - \frac{3}{2}\right).\end{aligned}$$

Realizamos el mismo procedimiento para f_{e0_2} , donde primero derivamos con respecto a v

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_{e0_2}}{\partial v} &= \frac{n_2}{2n_1} \left(\frac{m_e}{2\pi k_B T_2}\right)^{1/2} \left\{ -\frac{m_e}{k_B T_2} \left(v - \frac{k_z u_e}{k_z}\right) \exp\left[-\frac{m_e (v - k_z u_e/k_z)^2}{2k_B T_2}\right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{m_e}{k_B T_2} \left(v + \frac{k_z u_e}{k_z}\right) \exp\left[-\frac{m_e (v + k_z u_e/k_z)^2}{2k_B T_2}\right] \right\},\end{aligned}$$

donde se multiplica a u_e por k_z/k_z para facilitar el desarrollo. Evaluando a la derivada anterior en $v = \omega_r/k_z$ tenemos

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial f_{e0_2}}{\partial v} \right|_{v=\omega_r/k_z} &= -\frac{n_2}{2n_1} \left(\frac{m_e}{2\pi k_B T_2} \right)^{1/2} \frac{m_e}{k_B T_2} \left\{ \left(\frac{\omega_r}{k_z} - \frac{k_z u_e}{k_z} \right) \exp \left[-\frac{m_e (\omega_r/k_z - k_z u_e/k_z)^2}{2k_B T_2} \right] \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\omega_r}{k_z} + \frac{k_z u_e}{k_z} \right) \exp \left[-\frac{m_e (\omega_r/k_z + k_z u_e/k_z)^2}{2k_B T_2} \right] \right\}, \\
&= -\frac{n_2}{2n_1} \left(\frac{m_e}{2\pi k_B T_2} \right)^{1/2} \frac{m_e \omega_r}{k_B T_2 k_z} \left\{ \left(1 - \frac{k_z u_e}{\omega_r} \right) \exp \left[-\frac{m_e \omega_r^2 (1 - k_z u_e/\omega_r)^2}{2k_B T_2 k_z^2} \right] \right. \\
&\quad \left. + \left(1 + \frac{k_z u_e}{\omega_r} \right) \exp \left[-\frac{m_e \omega_r^2 (1 + k_z u_e/\omega_r)^2}{2k_B T_2 k_z^2} \right] \right\},
\end{aligned}$$

donde el último exponencial decae más rápido, y por tanto se lo ignora, así tenemos

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial f_{e0_2}}{\partial v} \right|_{v=\omega_r/k_z} &= -\frac{n_2}{2n_1} \left(\frac{m_e}{2\pi k_B T_2} \right)^{1/2} \frac{m_e \omega_r}{k_B T_2 k_z} \left(1 - \frac{k_z u_e}{\omega_r} \right) \exp \left[-\frac{m_e \omega_r^2}{2k_B T_2 k_z^2} \left(1 - \frac{k_z u_e}{\omega_r} \right)^2 \right], \\
&= -\frac{n_2}{2n_1} \left(\frac{m_e}{2\pi k_B T_2} \right)^{1/2} \frac{m_e \omega_r}{k_B T_2 k_z} \left(1 - \frac{k_z u_e}{\omega_r} \right) \exp \left[-\frac{T_1}{2\lambda_{D_1}^2 T_2 k_z^2} \left(1 - \frac{k_z u_e}{\omega_r} \right)^2 \right], \\
&= \frac{n_2}{n_1} \left(\frac{m_e}{2k_B T_2} \right)^{3/2} \frac{\omega_r}{\sqrt{\pi} k_z} \left(\frac{k_z u_e}{\omega_r} - 1 \right) \exp \left[-\frac{T_1/T_2}{2\lambda_{D_1}^2 k_z^2} \left(1 - \frac{k_z u_e}{\omega_r} \right)^2 \right].
\end{aligned}$$

Apéndice D

Cálculo de momentos

La densidad de las partículas n_s :

$$\begin{aligned}n_s &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{c,s} d\mathbf{v}, \\&= \sum_c S_{\mathbf{r}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{c,s}) \int_{-\infty}^{\infty} S_{\mathbf{v}}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_{c,s}) d\mathbf{v}, \\&= \sum_c S_{\mathbf{r}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{c,s}) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_{c,s}) d\mathbf{v}, \\&= \sum_c S_{\mathbf{r}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{c,s}).\end{aligned}$$

Bulk velocity de la partícula s :

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_s &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{c,s} \mathbf{v} d\mathbf{v}, \\&= \sum_c S_{\mathbf{r}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{c,s}) \int_{-\infty}^{\infty} S_{\mathbf{v}}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_{c,s}) \mathbf{v} d\mathbf{v}, \\&= \sum_c S_{\mathbf{r}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{c,s}) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_{c,s}) \mathbf{v} d\mathbf{v}, \\&= \sum_c S_{\mathbf{r}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{c,s}) \mathbf{v}_{c,s}.\end{aligned}$$

Densidad de corriente:

$$\begin{aligned}\mathbf{J} &= \sum_s q_s \int_{-\infty}^{\infty} f_{c,s} \mathbf{v} d\mathbf{v}, \\&= \sum_s q_s \sum_c S_{\mathbf{r}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{c,s}) \int_{-\infty}^{\infty} S_{\mathbf{v}}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_{c,s}) \mathbf{v} d\mathbf{v}, \\&= \sum_s q_s \sum_c S_{\mathbf{r}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{c,s}) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_{c,s}) \mathbf{v} d\mathbf{v}, \\&= \sum_s q_s \sum_c S_{\mathbf{r}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{c,s}) \mathbf{v}_{c,s}.\end{aligned}$$

Apéndice E

Adimensionalización

Ecuación de Vlasov:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{r}} + \frac{q_s}{m_s} \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}_s \times \mathbf{B}}{c} \right) \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{v}} &= 0, \\ \omega_{pe} \frac{\partial f_s}{\partial t} + v_{the} \frac{\omega_{pe}}{v_{the}} \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{r}} + \frac{q_s}{m_s} \left(\frac{m_e v_{the} \omega_{pe}}{e} \mathbf{E} + v_{the} \frac{m_e c \omega_{pe}}{e} \frac{\mathbf{v}_s \times \mathbf{B}}{c} \right) \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{v}} \frac{1}{v_{the}} &= 0, \\ \frac{\partial f_s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{r}} \pm \frac{m_e}{m_s} (\mathbf{E} + \mathbf{v}_s \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{v}} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \partial f_p / \partial t + \mathbf{v} \cdot (\partial f_p / \partial \mathbf{r}) + d_e^2 (\mathbf{E} + \mathbf{v}_p \times \mathbf{B}) \cdot (\partial f_p / \partial \mathbf{v}) = 0, & \text{protones} \\ \partial f_e / \partial t + \mathbf{v} \cdot (\partial f_e / \partial \mathbf{r}) - (\mathbf{E} + \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}) \cdot (\partial f_e / \partial \mathbf{v}) = 0, & \text{electrones} \end{cases}$$

Ecuación de continuidad de carga:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= -4\pi \nabla \cdot \mathbf{J}, \\ e\omega_{pe} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= -4\pi \frac{\omega_{pe}}{v_{the}} e v_{the} \nabla \cdot \mathbf{J}, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} &= -4\pi \nabla \cdot \mathbf{J}. \end{aligned}$$

Ley de Faraday:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= -c \nabla \times \mathbf{E} \\ \omega_{pe} \frac{m_e c \omega_{pe}}{e} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= -c \frac{\omega_{pe}}{v_{the}} \frac{m_e v_{the} \omega_{pe}}{e} \nabla \times \mathbf{E}, \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= -\nabla \times \mathbf{E}. \end{aligned}$$

Ley de Ampere:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \\ \frac{\omega_{pe}}{v_{the}} \frac{m_e c \omega_{pe}}{e} \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \frac{m_e v_{the} \omega_{pe}}{e} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} e v_{the} \mathbf{J} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{v_{the}^2}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + 4\pi \frac{v_{the}^2}{c^2} e^2 \frac{1}{\omega_{pe}^2 m_e} \mathbf{J} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{v_{the}^2}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + 4\pi \frac{v_{the}^2}{c^2} e^2 \frac{1}{\omega_{pe}^2 m_e} \frac{n}{n} \mathbf{J} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{v_{the}^2}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{v_{the}^2}{c^2} \frac{\mathbf{J}}{n}\end{aligned}$$

Ley de Gauss para el campo eléctrico:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi \rho \\ \frac{\omega_{pe}}{v_{the}} \frac{m_e v_{the} \omega_{pe}}{e} \nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi \rho e \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{e^2}{m_e \omega_{pe}^2} 4\pi \rho \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{e^2}{m_e} \frac{m_e}{4\pi n e^2} 4\pi \rho \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{n}\end{aligned}$$

Ecuación del movimiento para la velocidad:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{r}_{c,s}}{dt} &= \mathbf{v}_{c,s} \\ \omega_{pe} \frac{v_{the}}{\omega_{pe}} \frac{d\mathbf{r}_{c,s}}{dt} &= v_{the} \mathbf{v}_{c,s} \\ \frac{d\mathbf{r}_{c,s}}{dt} &= \mathbf{v}_{c,s}\end{aligned}$$

Ecuación del movimiento para la aceleración:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{v}_{c,s}}{dt} &= \frac{q_s}{m_s} \left(\mathbf{E}_{c,s} + \frac{\mathbf{v}_{c,s} \times \mathbf{B}_{c,s}}{c} \right) \\ v_{the} \omega_{pe} \frac{d\mathbf{v}_{c,s}}{dt} &= \frac{q_s}{m_s} \left(\frac{m_e v_{the} \omega_{pe}}{e} \mathbf{E}_{c,s} + v_{the} \frac{m_e c \omega_{pe}}{e} \frac{\mathbf{v}_{c,s} \times \mathbf{B}_{c,s}}{c} \right) \\ \frac{d\mathbf{v}_{c,s}}{dt} &= \frac{q_s}{e} \frac{m_e}{m_s} (\mathbf{E}_{c,s} + \mathbf{v}_{c,s} \times \mathbf{B}_{c,s}).\end{aligned}$$

$$\begin{cases} d\mathbf{v}_{c,p}/dt = d_e^2 (\mathbf{E} + \mathbf{v}_{c,p} \times \mathbf{B}), & \text{protones} \\ d\mathbf{v}_{c,e}/dt = -(\mathbf{E} + \mathbf{v}_{c,e} \times \mathbf{B}), & \text{electrones} \end{cases}$$

Densidad de corriente en el paso temporal $n + 1/2$:

$$\mathbf{J}^{n+1/2} = q_p \sum_{c=1}^{N_{c,p}} \mathbf{v}_{c,p}^{n+1/2} S(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{c,p}) + q_e \sum_{c=1}^{N_{c,e}} \mathbf{v}_{c,e}^{n+1/2} S(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{c,e}),$$

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^{n+1/2} &= q_p \sum_{c=1} \left[\mathbf{v}_{c,p}^n + \frac{q_p \Delta t}{2m_p} \left(\mathbf{E}_{c,p}^n + \frac{\mathbf{v}_{c,p}^n \times \mathbf{B}_{c,p}^n}{c} \right) \right] S(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{c,p}) \\ &+ q_e \sum_{c=1} \left[\mathbf{v}_{c,e}^n - \frac{q_e \Delta t}{2m_e} \left(\mathbf{E}_{c,e}^n + \frac{\mathbf{v}_{c,e}^n \times \mathbf{B}_{c,e}^n}{c} \right) \right] S(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{c,e}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{the} \mathbf{J}^{n+1/2} &= q_p \sum_{c=1} \left[v_{the} \mathbf{v}_{c,p}^n + \frac{q_p \Delta t}{2m_p} \left(\frac{m_e v_{the} \omega_{pe}}{e} \mathbf{E}_{c,p}^n + v_{the} \frac{m_e c \omega_{pe}}{e} \frac{\mathbf{v}_{c,p}^n \times \mathbf{B}_{c,p}^n}{c} \right) \right] S(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{c,p}) \\ &+ q_e \sum_{c=1} \left[v_{the} \mathbf{v}_{c,e}^n - \frac{q_e \Delta t}{2m_e} \left(\frac{m_e v_{the} \omega_{pe}}{e} \mathbf{E}_{c,e}^n + v_{the} \frac{m_e c \omega_{pe}}{e} \frac{\mathbf{v}_{c,e}^n \times \mathbf{B}_{c,e}^n}{c} \right) \right] S(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{c,e}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^{n+1/2} &= \sum_{c=1} \left[\mathbf{v}_{c,p}^n + \frac{\Delta t d_e^2}{2} (\mathbf{E}_{c,p}^n + \mathbf{v}_{c,p}^n \times \mathbf{B}_{c,p}^n) \right] S(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{c,p}) \\ &- \sum_{c=1} \left[\mathbf{v}_{c,e}^n - \frac{\Delta t}{2} (\mathbf{E}_{c,e}^n + \mathbf{v}_{c,e}^n \times \mathbf{B}_{c,e}^n) \right] S(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{c,e}). \end{aligned}$$

Relación de dispersión de la inestabilidad *beam-plasma*

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\omega_{pp}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{pe}^2}{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_e - \omega)^2}, \\ 1 &= \frac{\omega_{pp}^2}{\omega_{pe} \omega^2} + \frac{\omega_{pe}^2}{((\omega_{pe}/v_{the}) v_{the} \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_e - \omega_{pe} \omega)^2}, \\ 1 &= \frac{d_e^2}{\omega^2} + \frac{1}{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_e - \omega)^2}, \end{aligned}$$

Bibliografía

- [1] Peter Mészáros. *The high energy universe: ultra-high energy events in astrophysics and cosmology*. Cambridge university press, 2010.
- [2] Bruce T Tsurutani and Gurbax S Lakhina. Some basic concepts of wave-particle interactions in collisionless plasmas. *Reviews of Geophysics*, 35(4):491–501, 1997.
- [3] Francis F Chen. *Introduction to plasma physics and controlled fusion*, volume 1. Springer, 1984.
- [4] J Lemaire and M Scherer. Kinetic models of the solar and polar winds. *Reviews of Geophysics*, 11(2):427–468, 1973.
- [5] Roberto Bruno and Vincenzo Carbone. The solar wind as a turbulence laboratory. *Living Reviews in Solar Physics*, 2(1):4, 2005.
- [6] Ioannis Zouganelis, M Maksimovic, N Meyer-Vernet, H Lamy, and K Issautier. A transonic collisionless model of the solar wind. *The Astrophysical Journal*, 606(1):542, 2004.
- [7] C Briand. Plasma waves above the ion cyclotron frequency in the solar wind: a review on observations. *Nonlinear Processes in Geophysics*, 16(2):319–329, 2009.
- [8] Robert J Forsyth, A Balogh, TS Horbury, G Erdös, EJ Smith, and ME Burton. The heliospheric magnetic field at solar minimum: Ulysses observations from pole to pole. *Astronomy and Astrophysics*, 316:287–295, 1996.
- [9] José A Bittencourt. *Fundamentals of plasma physics*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [10] Nicholas A Krall and Alvin W Trivelpiece. Principles of plasma physics. *American Journal of Physics*, 41(12):1380–1381, 1973.
- [11] Charles K Birdsall and A Bruce Langdon. *Plasma physics via computer simulation*. CRC press, 2004.
- [12] Maher I Boulos, Pierre Fauchais, and Emil Pfender. *Thermal plasmas: fundamentals and applications*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [13] Dwight Roy Nicholson and Dwight R Nicholson. *Introduction to plasma theory*. Wiley New York, 1983.
- [14] Kenro Miyamoto. *Fundamentals of plasma physics and controlled fusion*. Iwanami Book Service Center Tokyo, 1997.

- [15] Donald Gary Swanson. *Plasma waves*. CRC Press, 2003.
- [16] S Peter Gary. *Theory of space plasma microinstabilities*. Cambridge university press, 2005.
- [17] Henry G Booker. *Cold plasma waves*, volume 2. Springer Science & Business Media, 2012.
- [18] Yu N Grigoryev, Vitaliĭ Andreevich Vshivkov, and Mikhail Petrovich Fedoruk. *Numerical "particle-in-cell" Methods: Theory and Applications*. Walter de Gruyter, 2012.
- [19] George K Parks. Physics of space plasmas-an introduction. *Redwood City, CA, Addison-Wesley Publishing Co., 1991, 547 p.*, 1991.
- [20] Anatoly Aleksandrovich Vlasov et al. The vibrational properties of an electron gas. *Soviet Physics Uspekhi*, 10(6):721–733, 1968.
- [21] F Valentini, R De Marco, V Carbone, and P Veltri. Linear and nonlinear regimes of bump-on-tail instability through vlasov and toy model simulations. *EPL (Europhysics Letters)*, 83(5):55001, 2008.
- [22] Hans Laszlo Pecseli. *Waves and oscillations in plasmas*. CRC Press, 2016.
- [23] Donald B Melrose and Don B Melrose. *Instabilities in space and laboratory plasmas*. Cambridge University Press, 1986.
- [24] Miroslav Horký. Numerical studies of plasma instabilities. 2015.
- [25] Bo Lehnert. Basic features of plasma instabilities. Technical report, Kungliga Tekniska Hogskolan, 1972.
- [26] Jan Paral. Hybrid-kinetic modelling of space plasma with application to mercury. 2013.
- [27] Takayuki Umeda. Study on nonlinear processes of electron beam instabilities via computer simulations. 2004.
- [28] Giovanni Lapenta. Particle in cell method a brief description of the pic method. *Centrum voor Plasma Astrofysica Katholieke Universiteit Leuven*, 2006.
- [29] F Valentini, P Trávníček, Francesco Califano, Petr Hellinger, and André Mangeney. A hybrid-vlasov model based on the current advance method for the simulation of collisionless magnetized plasma. *Journal of Computational Physics*, 225(1):753–770, 2007.
- [30] Giovanni Lapenta, JU Brackbill, and Paolo Ricci. Kinetic approach to microscopic-macroscopic coupling in space and laboratory plasmas. *Physics of plasmas*, 13(5):055904, 2006.
- [31] Stefano Markidis, Giovanni Lapenta, et al. Multi-scale simulations of plasma with ipic3d. *Mathematics and Computers in Simulation*, 80(7):1509–1519, 2010.
- [32] Stefano Markidis, Giovanni Lapenta, WB VanderHeyden, and Z Budimlić. Implementation and performance of a particle-in-cell code written in java. *Concurrency and Computation: Practice and Experience*, 17(7-8):821–837, 2005.
- [33] John P Verboncoeur. Particle simulation of plasmas: review and advances. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 47(5A):A231, 2005.

- [34] T Hayward. Multi-mode treatments of the marginally unstable one-dimensional bump-on-tail problem. 2016.
- [35] William H Press, Saul A Teukolsky, William T Vetterling, and Brian P Flannery. *Numerical recipes in Fortran 90*, volume 2. Cambridge university press Cambridge, 1996.