

**ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL**

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**ESTUDIO DEL IMPACTO DE LOS FACTORES  
MACROECONÓMICOS EN LA CALIDAD CREDITICIA  
DE PRÉSTAMOS MINORISTAS: UN ENFOQUE  
EMPÍRICO PARA LOS PRINCIPALES PRODUCTOS DEL  
SISTEMA FINANCIERO DE ECUADOR**

**TRABAJO DE TITULACIÓN PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL  
TÍTULO DE INGENIERO MATEMÁTICO**

**PROYECTO DE INVESTIGACIÓN**

**RONNY JAVIER TONATO ZAMBRANO**

ronny\_75@hotmail.com

**DIRECTORA: ADRIANA UQUILLAS ANDRADE, PhD.**

adriana.uquillas@epn.edu.ec

**QUITO, ENERO 2020**

# DECLARACIÓN

Yo, RONNY JAVIER TONATO ZAMBRANO, declaro bajo juramento que el trabajo aquí escrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

A través de la presente declaración cedo mis derechos de propiedad intelectual, correspondientes a este trabajo, a la Escuela Politécnica Nacional, según lo establecido por la Ley de Propiedad Intelectual, por su reglamento y por la normatividad institucional vigente.

---

Ronny Javier Tonato Zambrano

# CERTIFICACIÓN

Certifico que el presente trabajo fue desarrollado por RONNY JAVIER TONATO ZAMBRANO, bajo mi supervisión.

---

Adriana Uquillas Andrade, PhD.  
Directora del Proyecto

# AGRADECIMIENTOS

A Dios por guiar mi vida y darme fuerzas para continuar con mis metas trazadas sin desfallecer.

A mis padres, que con su apoyo incondicional, amor y confianza permitieron que logre culminar mi carrera universitaria.

A mis hermanos Diego y Jordan por su cariño y apoyo condicional en todo momento.

A la Dra. Adriana Uquillas por su paciencia y guía en el desarrollo de este trabajo.

A mis profesores por haber compartido sus conocimientos en la preparación de mi formación profesional.

Finalmente, a mis amigos de la universidad por su amistad en esta etapa de mi vida, gracias por las experiencias compartidas.

# DEDICATORIA

*A mis padres, por su amor y apoyo incondicional.*

# Índice general

Índice de figuras	VIII
Índice de tablas	X
Resumen	XII
Abstract	XIII
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Antecedentes . . . . .	1
1.2. Justificación . . . . .	3
1.3. Objetivos . . . . .	5
1.4. Evolución de la tasa de morosidad de los segmentos: Consumo, Vivienda y Microempresa . . . . .	5
<b>2. Marco Teórico</b>	<b>8</b>
2.1. Conceptos y procesos fundamentales en la modelización de series temporales . . . . .	8
2.1.1. Procesos estacionarios . . . . .	9
2.1.2. Modelo autoregresivo . . . . .	12
2.1.3. No estacionariedad . . . . .	13
2.1.4. Análisis de Causalidad . . . . .	14
2.1.5. Predicción . . . . .	16
2.2. Modelo de Vectores Autoregresivos . . . . .	16
2.2.1. Representación de un modelo VAR( $p$ ) . . . . .	18
2.2.2. Estabilidad de un proceso VAR( $p$ ) . . . . .	18
2.2.3. Representación media móvil de un VAR( $p$ ) . . . . .	19
2.2.4. Autocovarianzas y Autocorrelaciones de un VAR( $p$ ) estable . . . . .	20
2.2.5. Estimación del modelo . . . . .	21
2.2.5.1. Estimador de mínimos cuadrados multivariante . . . . .	22
2.2.5.2. Estimador de máxima verosimilitud . . . . .	25
2.2.5.3. Estadísticos de calidad del modelo . . . . .	27
2.2.5.4. Determinación del número de retardos . . . . .	28
2.2.6. Validación del modelo . . . . .	30
2.2.6.1. Estabilidad del modelo . . . . .	30
2.2.6.2. Incorrelación de los residuos . . . . .	31
2.2.6.3. Homocedasticidad . . . . .	32
2.2.6.4. Normalidad de los residuos . . . . .	33
2.2.7. Análisis de impulso-respuesta . . . . .	34

2.2.8.	Descomposición de la Varianza . . . . .	35
2.2.9.	VARs Bayesianos . . . . .	36
2.2.9.1.	Distribución a priori normal de los parámetros de un VAR gaussiano . . . . .	37
2.2.9.2.	Distribución a priori de Minnesota (Litterman) . . . . .	38
2.2.9.3.	Distribución a priori Normal-Wishart . . . . .	39
<b>3.</b>	<b>Aplicación del modelo al Sector Bancario Privado de Ecuador</b>	<b>41</b>
3.1.	Descripción de las variables . . . . .	41
3.2.	Análisis de estacionariedad . . . . .	43
3.3.	Selección de las variables . . . . .	44
3.3.1.	Variables endógenas . . . . .	45
3.3.2.	Variables exógenas . . . . .	45
3.4.	Estimación y validación de los modelos . . . . .	46
3.5.	Funciones de impulso-respuesta . . . . .	51
3.6.	Descomposición de la varianza . . . . .	54
3.7.	Predicciones del modelo . . . . .	55
3.8.	Análisis de escenarios . . . . .	57
<b>4.</b>	<b>Conclusiones y recomendaciones</b>	<b>61</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>64</b>
	<b>Anexos</b>	<b>67</b>
<b>A.</b>	<b>Fuente y representación gráfica de las variables</b>	<b>68</b>
A.1.	Fuente de las variables . . . . .	68
A.2.	Representación gráfica de las variables . . . . .	69
<b>B.</b>	<b>Análisis de las variables</b>	<b>72</b>
B.1.	Estacionariedad . . . . .	72
B.2.	Matriz de correlación . . . . .	76
B.3.	Análisis de Causalidad . . . . .	78
<b>C.</b>	<b>Estimación de los parámetros de los modelos</b>	<b>82</b>
C.1.	Modelo VAR inicial . . . . .	82
C.2.	Modelo VAR . . . . .	83
C.3.	Modelo VAR bayesiano . . . . .	85

# Índice de figuras

1.1. Morosidad de las carteras de consumo, vivienda y microempresa, período 2005-2018. . . . .	6
2.1. Serie trimestral del gasto de consumo de hogares en Ecuador, período 2001-2017. . . . .	9
2.2. Proceso estacionario. . . . .	11
2.3. Realización de un ruido blanco. . . . .	11
3.1. Criterio gráfico-VAR(6) inicial . . . . .	47
3.2. Criterio gráfico-Modelo 1 . . . . .	48
3.3. Criterio gráfico-Modelo 1 bayesiano . . . . .	50
3.4. Funciones de impulso-respuesta . . . . .	52
3.5. Comparación de las predicciones del modelo con datos reales de la serie morosidad de consumo . . . . .	55
3.6. Comparación de las predicciones del modelo con datos reales de la serie morosidad de microcrédito . . . . .	56
3.7. Comparación de las predicciones del modelo con datos reales de la serie morosidad de vivienda . . . . .	56
3.8. Comparación de las predicciones del modelo con datos reales de la serie morosidad de consumo, período año 2018 . . . . .	56
3.9. Comparación de las predicciones del modelo con datos reales de la serie morosidad de microcrédito, período año 2018 . . . . .	57
3.10. Comparación de las predicciones del modelo con datos reales de la serie morosidad de vivienda, período año 2018 . . . . .	57
3.11. Análisis de escenarios para la morosidad de consumo . . . . .	59
3.12. Análisis de escenarios para la morosidad de microcrédito . . . . .	59
3.13. Análisis de escenarios para la morosidad de vivienda . . . . .	59
A.1. Serie CONS . . . . .	69
A.2. Serie MICRO . . . . .	69
A.3. Serie VIV . . . . .	69
A.4. Serie GASTO_MF . . . . .	69
A.5. Serie M_ACT . . . . .	69
A.6. Serie M_PATR . . . . .	69
A.7. Serie INTERFIN . . . . .	70
A.8. Serie ACTPROD_ACT . . . . .	70
A.9. Serie ACTPROD_PAS . . . . .	70
A.10. Serie VOL . . . . .	70
A.11. Serie ROA . . . . .	70



A.12.Serie ROE . . . . .	70
A.13.Serie LIQUIDEZ . . . . .	70
A.14.Serie VIPC . . . . .	70
A.15.Serie DESEMPLEO . . . . .	71
A.16.Serie VEXP_NP_IND . . . . .	71
A.17.Serie VEXP_NP_PRIM . . . . .	71
A.18.Serie VIMP_CAP . . . . .	71
A.19.Serie VIMP_CON . . . . .	71
A.20.Serie VPETR . . . . .	71
A.21.Serie BAL_PIB . . . . .	71
A.22.Serie CAPT_PIB . . . . .	71

# Índice de tablas

3.1.	Listado de variables más relevantes para el estudio . . . . .	42
3.2.	Criterios para escoger el retardo del VAR . . . . .	46
3.3.	Raíces inversas-VAR(6) inicial . . . . .	47
3.4.	Prueba de Portmanteau-VAR(6) inicial . . . . .	47
3.5.	Prueba LM-VAR(6) inicial . . . . .	47
3.6.	Raíces inversas-Modelo 1 . . . . .	48
3.7.	Prueba de Portmanteau-Modelo 1 . . . . .	49
3.8.	Prueba LM-Modelo 1 . . . . .	49
3.9.	Prueba de White del Modelo 1 . . . . .	49
3.10.	Prueba de Normalidad del Modelo 1 . . . . .	49
3.11.	Raíces inversas-Modelo 1 bayesiano . . . . .	50
3.12.	Prueba de Portmanteau-Modelo 1 bayesiano . . . . .	51
3.13.	Prueba LM-Modelo 1 bayesiano . . . . .	51
3.14.	Prueba de White del Modelo 1 bayesiano . . . . .	51
3.15.	Respuesta de las variables ante un shock unitario de D(CONS) . . . . .	53
3.16.	Respuesta de las variables ante un shock unitario de D(MICRO) . . . . .	53
3.17.	Respuesta de las variables ante un shock unitario de D(VIV) . . . . .	53
3.18.	Descomposición de la varianza de D(CONS) . . . . .	54
3.19.	Descomposición de la varianza de D(MICRO) . . . . .	54
3.20.	Descomposición de la varianza de D(VIV) . . . . .	54
3.21.	Escenarios de la morosidad de consumo . . . . .	60
3.22.	Escenarios de la morosidad de microcrédito . . . . .	60
3.23.	Escenarios de la morosidad de vivienda . . . . .	60
A.1.	Fuente de las variables disponibles para el estudio . . . . .	68
B.1.	Prueba DFA de la serie diferenciada CONS . . . . .	72
B.2.	Prueba DFA de la serie diferenciada MICRO . . . . .	72
B.3.	Prueba DFA de la serie diferenciada VIV . . . . .	72
B.4.	Prueba DFA de la serie diferenciada GASTO_MF . . . . .	72
B.5.	Prueba DFA de la serie diferenciada M_ACT . . . . .	73
B.6.	Prueba DFA de la serie diferenciada M_PATR . . . . .	73
B.7.	Prueba DFA de la serie diferenciada INTERFIN . . . . .	73
B.8.	Prueba DFA de la serie diferenciada ACTPROD_ACT . . . . .	73
B.9.	Prueba DFA de la serie diferenciada ACTPROD_PAS . . . . .	73
B.10.	Prueba DFA de la serie diferenciada VOL . . . . .	73
B.11.	Prueba DFA de la serie diferenciada ROA . . . . .	74
B.12.	Prueba DFA de la serie diferenciada ROE . . . . .	74
B.13.	Prueba DFA de la serie diferenciada LIQUIDEZ . . . . .	74

B.14.Prueba DFA de la serie VIPC . . . . .	74
B.15.Prueba DFA de la serie diferenciada DESEMPLEO . . . . .	74
B.16.Prueba DFA de la serie VEXP_NP_IND . . . . .	74
B.17.Prueba DFA de la serie VEXP_NP_PRIM . . . . .	75
B.18.Prueba DFA de la serie VIMP_CAP . . . . .	75
B.19.Prueba DFA de la serie VIMP_CON . . . . .	75
B.20.Prueba DFA de la serie VPETR . . . . .	75
B.21.Prueba DFA de la serie diferenciada BAL_PIB . . . . .	75
B.22.Prueba DFA de la serie diferenciada CAPT_PIB . . . . .	75
B.23.Matriz de correlación-Primera Parte . . . . .	76
B.24.Matriz de correlación-Última Parte . . . . .	77
B.25.Prueba de Causalidad de Granger para 6 retardos . . . . .	78
C.1. Estimación de los coeficientes del modelo VAR inicial . . . . .	82
C.2. Estimación de los coeficientes del modelo VAR . . . . .	83
C.3. Estimación de los coeficientes del modelo VAR bayesiano . . . . .	85

# Resumen

Debido a las últimas crisis económicas, las instituciones financieras tuvieron que revisar y mejorar sus mecanismos de gestión y control de los riesgos financieros, sobre todo del riesgo de crédito y considerando que una gestión inadecuada del riesgo de crédito puede ocasionar enormes pérdidas económicas en las instituciones financieras. En este trabajo se propone un modelo de vectores autoregresivos (VAR) para analizar las relaciones del riesgo de crédito entre las carteras de consumo, microempresa y vivienda del sistema de bancos privados del Ecuador, así como también los efectos de factores externos tanto a nivel macroeconómico como microeconómico sobre estas variables. Como medida del riesgo de crédito se utilizó el índice de morosidad. Los datos utilizados en el presente trabajo fueron tomados desde el Banco Central del Ecuador (BCE), Instituto Nacional de Estadísticas y Censos (INEC), y Superintendencia de Bancos del Ecuador (SBE) para el período enero de 2005 a diciembre de 2018. Los shocks de las variables exógenas se transmiten en general de forma inmediata en la morosidad de las carteras de consumo, microempresa y vivienda. Mientras que los términos autoregresivos asociados a la morosidad de las carteras tardan hasta medio año (6 meses) en afectar estas variables, pero no de forma acumulativa. El modelo propuesto realiza buenas predicciones en el corto plazo para cada variable endógena. Adicionalmente, se construyen escenarios de estrés para evaluar el modelo propuesto y los resultados nos muestran que el impacto de estos escenarios tiene mayor efecto en la morosidad de las carteras de consumo y microempresa.

**Palabras claves:** riesgo de crédito, morosidad, modelo de vectores autoregresivos (VAR), shocks, escenarios de estrés.

# Abstract

Because of the latest economic crises, financial institutions had to review and improve their financial risk management and control mechanisms, especially credit risk and considering that an improper credit risk management may cause huge economic losses in financial institutions. In this paper, a vector autoregressive (VAR) model is proposed to analyze the credit risk relationships between the consumption, microenterprise and housing portfolios of Ecuador's private banking system, as well as the effects of external factors both at the macroeconomic level as microeconomic about these variables. As a measure of credit risk, the delinquency rate was used. The data used in this paper were taken from the Central Bank of Ecuador, National Institute of Statistics and Censuses, and Superintendence of Banks of Ecuador for the period January 2005 to December 2018. The shocks of exogenous variables are generally transmitted immediately in the late payment of consumer, microenterprise and housing portfolios. While the autoregressive terms associated with delinquencies in portfolios take up to half a year (6 months) to affect these variables, but not cumulatively. The proposed model makes good predictions in the short term for each endogenous variable. Additionally, stress scenarios are constructed to evaluate the proposed model and the results show us that the impact of these scenarios has a greater effect on the delinquency of consumption and microenterprise portfolios.

**Keywords:** credit risk, delinquency, vector autoregressive (VAR) model, shocks, stress scenarios.

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Antecedentes

El estudio de la relación que existe entre el entorno económico y la calidad de la cartera de crédito ha sido motivado por las recesiones económicas que han experimentado diferentes países a finales del siglo XX y comienzos del siglo XXI, como por ejemplo, la crisis del rublo en Rusia (1998), el efecto Tequila en México (1994) y la crisis económica de Estados Unidos (a finales de 2007) causada por la burbuja inmobiliaria, que afectaba al crédito y las hipotecas (Uquillas y González, 2017). Esta última crisis mencionada no sólo afectó la economía de Estados Unidos, sino que tuvo el potencial de extenderse a nivel mundial y afectar a la economía global debido a que el sistema financiero estadounidense es el núcleo de una red en la que se interrelacionan los sistemas financieros nacionales de casi todos los países del mundo (Frenkel y Rapetti, 2009). Esta crisis económica global fue conocida con el nombre de Gran Recesión y generó problemas de liquidez en los bancos debido al aumento significativo de los créditos morosos. Esto a su vez ocasionó un impacto negativo en indicadores macroeconómicos como desempleo, producto interno bruto, entre otros. La Gran Recesión evidenció que es necesario que las instituciones financieras dispongan de modelos macroeconómicos que expliquen las causas del riesgo de crédito (Uquillas y González, 2017).

Los modelos macroeconómicos de riesgo crediticio están motivados por el aumento de las tasas de incumplimiento durante las recesiones. Esto ha permitido construir modelos econométricos que intentan explicar indicadores de incumplimiento a través del uso de variables económicas. Sin embargo, estos modelos requieren que las series de datos abarquen al menos un ciclo económico; de lo contrario, el modelo no captaría por completo el impacto del ciclo económico en las probabilidades de incumplimiento.

Las instituciones financieras se encargan de dar préstamos a sus clientes con la finalidad de que puedan adquirir bienes de consumo o realizar pagos de servicios. Sin embargo, existen clientes que no cumplen a tiempo con el pago del crédito otorgado por las instituciones financieras lo cual puede ocasionar que estas instituciones incurran en un riesgo de crédito. El riesgo de crédito es uno de los riesgos financieros de mayor importancia para el sector bancario debido a que su actividad principal se basa en prestar dinero. Además, si tenemos en cuenta las operaciones que realizan

los bancos con grandes compañías, esto supone, por las cantidades de dinero que se prestan, que sea necesario establecer mecanismos de control y monitoreo que permitan controlar la exposición a este tipo de riesgo, puesto que un impago puede tener graves consecuencias no sólo para la entidad, sino que también para la economía del país.

El índice de morosidad es un indicador del riesgo de crédito. Según la nota técnica número 5 de la Superintendencia de Bancos del Ecuador (SBE), el índice de morosidad se define como la proporción de la cartera improductiva respecto al total de la cartera (cartera bruta). Existe una gran variedad de literatura empleando este indicador como medida de riesgo de crédito: Aguilar et al. (2004), Rinaldi y Sanchis-Arellano (2006), Jakubík (2007), Marcucci y Quagliariello (2008), Jakubík y Schmieder (2008), Fajardo (2016), entre otras. La ventaja de utilizar el índice de morosidad como medida de riesgo de crédito es que facilita la supervisión del riesgo de crédito a nivel agregado o individual. Además, este índice es considerado a nivel mundial como una medida apropiada de la calidad de las carteras de préstamos (Uquillas y González, 2017).

El sistema financiero ecuatoriano se encuentra compuesto por instituciones financieras privadas (bancos, sociedades financieras, cooperativas y mutualistas); instituciones financieras públicas; instituciones de servicios financieros, compañías de seguros y compañías auxiliares del sistema financiero. La Superintendencia de Bancos del Ecuador es la entidad encargada de controlar y supervisar a los bancos del país. Los bancos privados representan más del 90 % de las operaciones del total del sistema, lo cual lo convierte en el mayor y más importante participante del mercado. Según la información disponible en los boletines financieros de la SBE, actualmente, el sistema de bancos privados está conformado por 24 entidades.

De entre los segmentos de crédito que tienen las entidades del sistema financiero ecuatoriano, el crédito de consumo, microcrédito y el crédito de vivienda tienen un papel importante en el desarrollo y estabilidad de la economía del país y por tanto, este estudio se centrará en estos productos financieros. Según la SBE en su reporte de estabilidad financiera de diciembre de 2018, señala que al crédito de consumo le correspondió el 36,54 % de participación en la cartera bruta del sistema de bancos privados, al microcrédito el 6,35 % y al crédito de vivienda el 8,48 %.

De acuerdo a la Codificación de Regulaciones del Banco Central del Ecuador (2007), el crédito de consumo se define como: “créditos otorgados por las instituciones controladas a personas naturales asalariadas y/o rentistas, que tengan por destino la adquisición de bienes de consumo o pago de servicios, que generalmente se amortizan en función de un sistema de cuotas periódicas y cuya fuente de pago es el ingreso neto mensual promedio del deudor, entendiéndose por este el promedio de los ingresos brutos mensuales del núcleo familiar menos los gastos familiares estimados mensuales” (p. 91). En esta cartera se incluyen las operaciones realizadas con tarjetas de crédito.

Con respecto al microcrédito, este se entiende como: “todo crédito no superior a USD 20000 concedido a un prestatario, sea una empresa constituida como persona

natural o jurídica con un nivel de ventas inferior a USD 100000, un trabajador por cuenta propia, o un grupo de prestatarios con garantía solidaria, destinado a financiar actividades en pequeña escala, de producción, comercialización o servicios, cuya fuente principal de pago la constituye el producto de las ventas o ingresos generados por dichas actividades, adecuadamente verificados por la institución del sistema financiero” (Banco Central del Ecuador, 2007, p. 92).

El crédito de vivienda se define como: “operaciones de crédito otorgadas a personas naturales para la adquisición, construcción, reparación, remodelación y mejoramiento de vivienda propia, siempre que se encuentren caucionadas con garantía hipotecaria y hayan sido otorgadas al usuario final del inmueble” (Banco Central del Ecuador, 2007, p. 94). Este crédito puede ser pagado en el largo plazo (10 a 20 años).

El análisis realizado por la Corporación Financiera Nacional (CFN) en julio del año 2017 mostró que el Sistema Financiero del Ecuador ha enfrentado un panorama de decrecimiento de la demanda crediticia y una mayor exposición al riesgo crediticio, debido al comportamiento de pago de sus clientes. Este panorama que enfrenta el Sistema Financiero es consecuencia de la situación económica del país. Esto nos obliga a preguntarnos: ¿Es posible encontrar alguna relación entre el riesgo de crédito de los diferentes productos financieros y factores macroeconómicos? Y esta pregunta nos induce a que debemos tratar de construir un modelo el cual explique estas relaciones que estamos buscando.

Este trabajo tiene como finalidad construir un modelo para explicar el impacto de factores macroeconómicos en el comportamiento del riesgo de crédito de los productos de crédito del sistema financiero de Ecuador descritos anteriormente utilizando técnicas econométricas, el análisis estadístico multivariado y la relación existente en términos de morosidad entre estos productos crediticios. Nos enfocaremos en el sector de la Banca Privada porque consideramos a este sector el más idóneo para nuestro estudio debido a las instituciones que lo conforman y, además, se utilizará el índice de morosidad como nuestro indicador de riesgo de crédito para los productos de crédito. La modelización se realizará con la ayuda del programa estadístico Eviews<sup>1</sup>.

## 1.2. Justificación

Las instituciones financieras están obligadas a mantener un mínimo nivel de capital para hacer frente a posibles eventos de no pago por parte de los sujetos de crédito. Esto fue implementado en Basilea I, el primero de los acuerdos emitido por el Comité de Basilea, con el fin de contener los posibles riesgos financieros que pueden enfrentar estas instituciones. En Basilea I se estableció que el capital mínimo debe ser al menos el 8% de los activos ponderados por su riesgo. Para asegurar la

estabilidad financiera de un sistema financiero es necesario realizar evaluaciones y

---

<sup>1</sup>Eviews es un programa que puede ser empleado para análisis estadístico general, pero es especialmente útil para realizar análisis econométrico orientado a series de tiempo.



seguimiento de las instituciones financieras. Una forma particular de realizar esto consiste en relacionar el riesgo de crédito con los factores macroeconómicos de forma cuantitativa, lo cual implica que se debe construir un modelo utilizando técnicas econométricas que relacione el riesgo de crédito con las variables macroeconómicas que explican este riesgo.

Chan-Lau (2006) presenta en su estudio dos tipos de modelos basados en la macroeconomía: los modelos con factores económicos exógenos donde las variables económicas son exógenas y no se ven afectadas por dificultades financieras, y los modelos econométricos con factores económicos endógenos que permiten efectos de retroalimentación entre dificultades financieras y el ciclo económico. Estos modelos permiten estudiar el comportamiento de las tasas de incumplimiento de distintos sectores financieros.

Diversos trabajos ya han tratado las relaciones entre la morosidad de las carteras de crédito del sistema bancario y factores macroeconómicos. Por ejemplo, Aguilar et al. (2004) presentan un modelo dinámico de datos de panel para el sistema bancario de Perú, donde los factores macroeconómicos son: la tasa de crecimiento del PIB con dos rezagos, colocaciones sobre PIB y el tipo de cambio real; y las variables endógenas son: la cartera pesada, tasa de morosidad y la cartera de alto riesgo.

Para el caso de Austria, Kalirai y Scheicher (2002) analizan la interdependencia del riesgo de crédito y el estado de la economía, medido por variables macroeconómicas, a través de la metodología de mínimos cuadrados ordinarios. En el modelo propuesto se incluyen un rezago de la variable dependiente que se utiliza como medida del riesgo de crédito, la cual está definida como el total de las provisiones para insolvencia sobre el total de provisiones y una variable dummy para identificar el cambio en la provisión de pérdidas crediticias.

Vazquez et al. (2010) proponen un macromodelo de pruebas de tensión para riesgo de crédito basado en el análisis de escenarios para el sistema bancario de Brasil utilizando vectores autoregresivos (VAR). Los resultados corroboran la presencia de un comportamiento procíclico de la calidad del crédito y muestran una sólida relación negativa entre los préstamos morosos y el crecimiento del PIB, con una respuesta de mediano plazo.

Para el caso de Colombia, Fajardo (2016) realiza un estudio de la cartera de consumo aplicando también vectores autoregresivos (VAR) y, determina que el comportamiento de la calidad de la cartera de consumo puede ser pronosticado a través de la tasa de interés y la inflación.

En resumen, estos trabajos presentan el impacto de ciertos factores macroeconómicas en la calidad de la cartera de crédito mediante la modelización del riesgo de crédito de los productos financieros y estos factores macroeconómicos a través de diferentes modelos econométricos, y utilizando distintas variables financieras como medida del riesgo de crédito.

Uno de los aspectos más importantes de nuestro trabajo son las variables ma-

macroeconómicas empleadas para realizar la modelización ya que la selección de estas variables depende de sus relaciones con el riesgo de crédito. Entre las variables macroeconómicas que podrían afectar al riesgo de crédito tenemos: la tasa de crecimiento real del producto interno bruto (PIB), el tipo de cambio real, las tasas de interés nominal y real, la inflación, y la tasa de desempleo. Los resultados de estudios previos expuestos en el trabajo de Jakubík y Schmieder (2008) justifican el uso de estas variables, las cuales son utilizadas para construir los modelos de República Checa y Alemania. Esto nos indica que es necesario determinar de forma apropiada las variables macroeconómicas que formarán parte del modelo que queremos construir teniendo en cuenta los resultados expuestos en la literatura. Sin embargo, es necesario mencionar que este estudio se limitará a las variables disponibles en las principales fuentes de información y a la calidad e histórico de las mismas.

Fajardo (2016) y Vazquez et al. (2010) utilizan en sus trabajos la metodología de los modelos de vectores autoregresivos (VAR) para analizar las relaciones entre el riesgo de crédito y factores macroeconómicos. Una de las razones es porque estos modelos nos permiten caracterizar las interacciones simultáneas entre un grupo de variables, que es lo que tratamos de determinar.

Los resultados obtenidos en estos artículos, nos motivó el aplicar la metodología del Modelo de Vectores Autoregresivos (VAR) para el caso del sector bancario privado de Ecuador. Consideramos esta metodología apropiada para analizar el riesgo de crédito de los productos crediticios y generar un indicador integral.

### **1.3. Objetivos**

Modelizar el riesgo de crédito de los principales productos del sistema financiero nacional: crédito de consumo, microcrédito y crédito de vivienda mediante el análisis estadístico multivariado.

Para lograr el cumplimiento de esto, es necesario cumplir los siguientes objetivos específicos:

- Identificar las variables macroeconómicas que influyen en la capacidad de pago de los deudores para evaluar de manera eficiente las fortalezas y vulnerabilidades de las carteras de préstamos de cada producto.
- Identificar el período de transmisión de las variables explicativas a la calidad de los préstamos.
- Definir un marco multivariado que permita el desarrollo de ejercicios de prueba de estrés.

### **1.4. Evolución de la tasa de morosidad de los segmentos: Consumo, Vivienda y Microempresa**

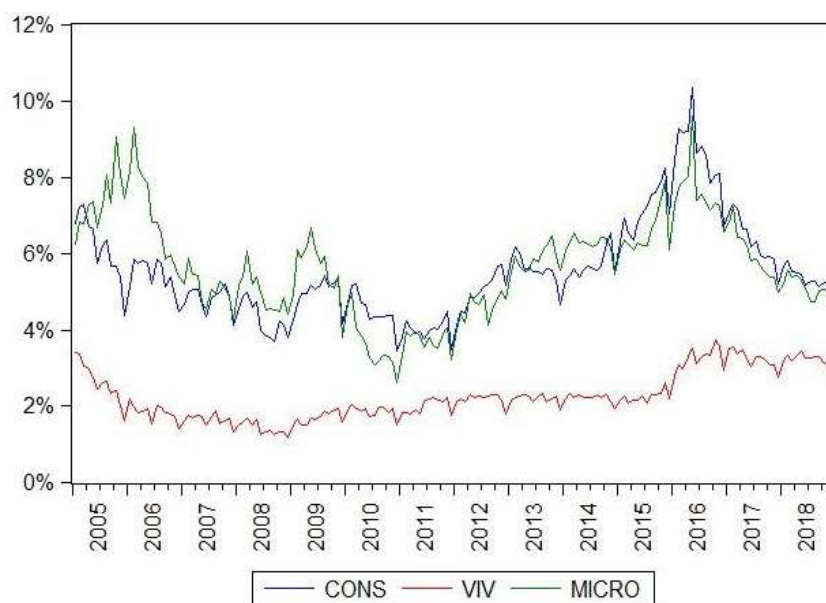
En esta sección se analizará la evolución de la morosidad de las carteras de consumo, vivienda y microempresa del sector bancario privado. Se considera el periodo

de análisis desde el año 2005 hasta el año 2018.

El comportamiento de la actividad crediticia es procíclico, es decir, en las fases expansivas del ciclo económico en las que el crédito crece fuertemente la morosidad es baja, es en esta parte donde se tiende a cometer fallas en la evaluación de riesgos, lo cual posteriormente se traduce en pérdidas durante la fase contractiva (Cóndor y Cajamarca, 2014). El incremento de la cartera en mora obliga a que las entidades financieras realicen mayores provisiones por cartera lo cual reduce la expansión del crédito y probablemente el ritmo de crecimiento económico.

En la figura 1.1 se puede observar que el crédito de consumo es aquel que alcanza los niveles más altos de morosidad siendo el año 2016 donde se alcanza la tasa de morosidad más alta. Además, se nota que el crédito de consumo y microcrédito presentan periodos similares de alta y baja morosidad. Esto nos da un primer indicio de que existe una relación entre la morosidad de estos productos crediticios.

Durante el año 2005, se observa una caída en la morosidad del crédito de vivienda para luego presentar una estabilidad y a finales del periodo de análisis se observa un aumento considerable de la morosidad de este producto. Además, se aprecia que el crédito de vivienda es el producto que alcanza los niveles más bajos de morosidad durante el periodo de análisis. A esto se le debe sumar que la morosidad de esta cartera tiene un comportamiento similar al de las carteras de consumo y microempresa en ciertos periodos.



**Figura 1.1:** Morosidad de las carteras de consumo, vivienda y microempresa, período 2005-2018. **Fuente:** Datos de la Superintendencia de Bancos del Ecuador.

Como se mencionó previamente, existe un primer indicio de que existe una relación entre la morosidad del crédito de consumo, vivienda y microcrédito. Esto se demostrará estadísticamente más adelante y por tanto, la metodología de los modelos VAR será aplicada para la morosidad de estos productos crediticios.

En el siguiente capítulo hablaremos de las herramientas matemáticas que se utilizarán en la modelización de la morosidad de las carteras de crédito en el presente

trabajo. El capítulo 3 tratará sobre el desarrollo de los modelos para las variables disponibles, y en el capítulo 4 se presentarán algunas conclusiones y recomendaciones deducidas de los resultados de los modelos obtenidos.

# Capítulo 2

## Marco Teórico

En este capítulo desarrollaremos los fundamentos teóricos y matemáticos detrás de la modelización planificada. En primer lugar, presentamos conceptos y notaciones dentro de las series temporales, y la formulación teórica de un modelo básico: modelo autoregresivo. Luego, explicaremos cuál es la representación del modelo VAR que utilizaremos para realizar la modelización, así como el método de estimación y las técnicas de validación de este modelo empleando las herramientas y conceptos previamente descritos al inicio de este capítulo.

### 2.1. Conceptos y procesos fundamentales en la modelización de series temporales

Una **serie temporal** se define como una secuencia de observaciones de una variable ordenadas cronológicamente. En cualquier campo de la ciencia podemos observar series temporales; por ejemplo, en Economía, tenemos series de precios diarios de acciones, exportaciones e importaciones mensuales, datos trimestrales del producto interno bruto (PIB), tasa de inflación, etc. En Meteorología tenemos series de temperaturas máximas o mínimas, precipitaciones diarias, velocidad del viento, nivel del caudal de un río, etc. En Demografía, se estudian las series de población total, tasa de natalidad o mortalidad, etc. En Marketing, se analizan las series de gastos, utilidades, ventas.

Existen diferentes notaciones empleadas para la representación matemática de una serie temporal. González (2009) denota a la serie temporal conformada por  $T$  observaciones de una variable  $X$  por

$$X_t, t \in \mathfrak{S} \quad \text{o} \quad X_t, t = 1, \dots, T$$

donde el subíndice  $t$  indica el tiempo en que se obtiene la observación  $X_t$ . Dado que las series temporales en estudio toman valores reales, utilizaremos la siguiente notación:  $X_t, t = 1, \dots, T$  para representar a una serie temporal con  $T$  observaciones.

Una serie temporal se representa con frecuencia en un gráfico temporal, donde el valor de la serie se ubica en el eje de las ordenadas y los tiempos en el eje de las abscisas.



**Figura 2.1:** Serie trimestral del gasto de consumo de hogares en Ecuador, período 2001-2017. **Fuente:** Datos del Banco Central del Ecuador.

En la figura 2.1 podemos observar la evolución trimestral del gasto de consumo de los hogares (miles de USD) en Ecuador, comprendida entre los años 2001 y 2017. Además, se nota que esta serie presenta una fuerte tendencia creciente a medida que pasa el tiempo. El comportamiento de esta serie puede ser explicado mediante los procesos estocásticos y modelos estadísticos asociados a estos procesos. Por tanto, presentaremos los fundamentos matemáticos necesarios de los procesos estocásticos a continuación.

### 2.1.1. Procesos estacionarios

El objetivo del análisis de las series temporales es utilizar la teoría de los *procesos estocásticos* para caracterizar el comportamiento de la serie temporal y predecir en el futuro a partir de procesos que se ajusten a la serie en estudio. Para obtener métodos de predicción consistentes es necesario que los procesos estocásticos que generan a las serie temporales sean estables en el tiempo ya que el comportamiento pasado de la serie es utilizado para pronosticar el futuro. Esto nos quiere decir que si los procesos estocásticos tienen un comportamiento irregular e inestable, entonces no pueden ser utilizados para predecir. A esta condición de estabilidad en el tiempo para procesos estocásticos se le conoce como *estacionariedad*.

Antes de explicar las condiciones para que un proceso sea estacionario, vamos a definir lo que es un proceso estocástico considerando lo expuesto por Ross (2010).

**Definición 2.1.1.** Un **proceso estocástico**  $\{Y_t : t \in \mathcal{T}\}$  (también denotado por  $\{Y_t\}_{t \in \mathcal{T}}$ ) es una familia de variables aleatorias definidas sobre un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , indexadas por un conjunto  $\mathcal{T}$  denominado espacio de tiempos, y en donde las variables toman valores en un conjunto  $\mathcal{S}$  denominado espacio de estados.

El espacio de tiempos  $\mathcal{T}$  puede ser un conjunto contable o un intervalo de la recta real y el espacio de estados  $\mathcal{S}$  suele ser  $\mathbb{R}$  o un subconjunto del mismo.

Dado que nos enfocamos en el análisis de las series temporales, consideraremos secuencias de variables aleatorias ordenadas en el tiempo, y por tanto, se tomará  $\mathcal{T} = \mathbb{Z}$ . Además, se considera que los procesos estocásticos son reales; es decir,  $\mathcal{S} = \mathbb{R}$ .

Desde el punto de vista estadístico, una serie temporal,  $Y_1, Y_2, \dots, Y_T$ , puede ser interpretada como una realización muestral de un proceso estocástico que se observa únicamente para un número finito de periodos,  $t = 1, 2, \dots, T$  (González, 2009). Esto nos permite entender la relación que existe entre una serie temporal y un proceso estocástico.

En la literatura referente a los procesos estocásticos, existen dos tipos de estacionariedad: estricta y débil.

**Definición 2.1.2.** Un proceso estocástico  $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  es **estrictamente estacionario (estacionario en el sentido estricto)** si para toda  $n$ -tupla  $(t_1, t_2, \dots, t_n)$  y todo entero  $k$ , el vector  $(Y_{t_1}, Y_{t_2}, \dots, Y_{t_n})$  tiene la misma distribución de probabilidad conjunta que el vector  $(Y_{t_1+k}, Y_{t_2+k}, \dots, Y_{t_n+k})$ , es decir,

$$F(Y_{t_1+k}, Y_{t_2+k}, \dots, Y_{t_n+k}) = F(Y_{t_1}, Y_{t_2}, \dots, Y_{t_n}) \quad \forall t_1, t_2, \dots, t_n, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

donde  $F$  representa la función de distribución conjunta del vector  $(Y_{t_1}, Y_{t_2}, \dots, Y_{t_n})$ .

Una relación directa pero esencial es que un proceso independiente e idénticamente distribuido (i.i.d.) es estrictamente estacionario (Hansen, 2019).

**Definición 2.1.3.** Un proceso estocástico  $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  es **débilmente estacionario (estacionario en el sentido débil)** si:

1. El momento de primer orden es invariante en el tiempo:

$$E(Y_t) = \mu, \forall t \in \mathbb{Z}$$

donde  $\mu$  es una constante independiente de  $t$ .

2. Las covarianzas son independientes del tiempo y sólo dependen del número de periodos de separación que existe entre las variables aleatorias:

$$Cov(Y_t, Y_{t+k}) = E[(Y_t - \mu)(Y_{t+k} - \mu)] = \gamma(k) \quad \forall t, k \in \mathbb{Z}$$

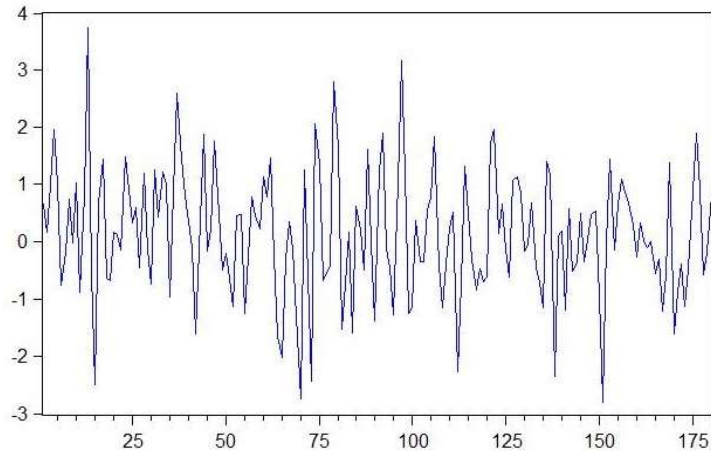
Como condición técnica, también asumimos que el momento de segundo orden del proceso es finito:

$$E(Y_t^2) < \infty, \forall t \in \mathbb{Z}$$

A partir de ahora, a un proceso débilmente estacionario simplemente se lo denominará como proceso estacionario.

De la parte 2 en la definición 2.1.3 tenemos que  $\gamma(k)$  se denomina **función de autocovarianza** del proceso, la cual recoge toda la información sobre la estructura dinámica lineal del mismo y sólo depende del salto  $k$ . Además, podemos notar que  $V(Y_t) = \gamma(0)$  para todo  $t$ , lo cual nos indica que la varianza del proceso estacionario es constante.

Una forma intuitiva e informal para determinar si es un proceso estocástico estacionario o no es a través de su gráfico. Un proceso estacionario tiene un gráfico similar a lo siguiente:



**Figura 2.2:** Proceso estacionario. **Fuente:** Elaboración propia.

En la figura 2.2 podemos observar que:

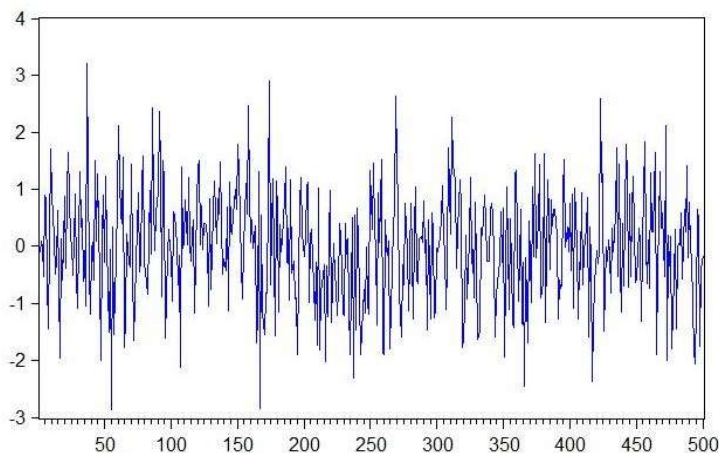
- I) Los datos oscilan alrededor de una constante (en este caso cero), lo cual nos permite suponer que la media es constante.
- II) Los datos presentan una variabilidad homogénea, por lo que podemos asumir que la varianza es constante.

Estas condiciones son de gran utilidad para propósitos prácticos. Por ejemplo, en la serie de la figura 2.1 podemos observar una tendencia de crecimiento lineal en los datos, lo cual nos indica que la media no es constante y por tanto, el proceso asociado a esta serie no es estacionario; sin embargo, esto debe ser verificado mediante pruebas y análisis estadísticos como por ejemplo: la prueba de Dickey-Fuller Aumentada, la cual se verá más adelante.

Uno de los procesos estocásticos más sencillos es el **ruido blanco (white noise)** que es una sucesión de variables aleatorias con esperanza cero, igual varianza y covarianzas nulas. Se denotará por  $u_t$  a este proceso:

$$E(u_t) = 0, \forall t \in \mathbb{Z} \quad V(u_t) = \sigma^2, \forall t \in \mathbb{Z} \quad Cov(u_t, u_{t+k}) = 0, \forall k \neq 0$$

Notemos que por definición, el ruido blanco es un proceso estacionario. A partir de ahora, un ruido blanco  $u_t$  de media 0 y varianza  $\sigma^2$  se denotará por  $u_t \sim WN(0, \sigma^2)$  donde WN significa white noise (ruido blanco).



**Figura 2.3:** Realización de un ruido blanco. **Fuente:** Elaboración propia.



La figura 2.3 muestra la realización de un ruido blanco de tamaño 500 a partir de una distribución normal con media cero y varianza uno,  $u_t \sim WN(0, 1)$ . Se puede observar que el proceso simulado oscila alrededor de cero con una variabilidad constante y de forma aleatoria. Además, se evidencia la ausencia de correlación en el tiempo entre las observaciones. El ruido blanco es un proceso estocástico muy útil en el análisis de las series temporales ya que constituye la base para la construcción de los modelos.

### 2.1.2. Modelo autoregresivo

Consideremos un proceso estacionario  $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  tal que

$$Y_t = \sum_{j=1}^p \phi_j Y_{t-j} + u_t \quad t = 1, 2, \dots \quad (2.1.1)$$

donde  $\phi_j \neq 0$  y  $u_t \sim WN(0, \sigma^2)$ . A  $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  se le denomina como proceso autoregresivo de orden  $p$  (se denota por  $AR(p)$ ). Podemos notar que en un proceso autoregresivo,  $Y_t$  sólo depende de sus valores pasados hasta el instante  $t - p$  y la innovación contemporánea ( $u_t$ ).

De ahora en adelante, consideraremos el operador de retardo  $B$  (Backward) definido por:

$$\begin{cases} B^j Y_t = Y_{t-j}, & j = 1, 2, \dots \\ B^0 Y_t = Y_t \end{cases} \quad (2.1.2)$$

El proceso (2.1.1) puede ser reescrito con el operador de retardo de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} Y_t &= (\phi_1 B + \phi_2 B^2 + \phi_3 B^3 + \dots + \phi_p B^p) Y_t + u_t \\ (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \phi_3 B^3 - \dots - \phi_p B^p) Y_t &= u_t \\ \Phi_p(B) Y_t &= u_t \end{aligned}$$

A  $\Phi_p(B)$  se le denomina *polinomio autoregresivo*.

Un proceso  $AR(p)$  es *estacionario* si el módulo de las raíces del polinomio autoregresivo  $\Phi_p(B)$  es mayor que 1. Además, podemos observar que se cumple lo siguiente:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \phi_j^2 = \sum_{j=1}^p \phi_j^2 < \infty$$

Esto nos indica que el proceso  $AR(p)$  depende de forma convergente de su propio pasado; es decir, este proceso es *invertible*. Gracias a esto, podemos expresar al modelo  $AR(p)$  como sigue:

$$\begin{aligned} \Phi_p(B) Y_t &= u_t \\ \Phi_p(B) Y_t &= \frac{1}{\Phi_p(B)} u_t \\ Y_t &= \Psi(B) u_t \\ Y_t &= (1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \psi_3 B^3 + \dots) u_t \end{aligned}$$

$$Y_t = u_t + \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j u_{t-j} \quad (2.1.3)$$

A (2.1.3) se le conoce como *representación de medias móviles infinita* donde los parámetros  $\psi_j$  dependen del vector de parámetros  $(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p)$ .

### 2.1.3. No estacionariedad

Generalmente, la mayoría de las series financieras son no estacionarias y por ende se debe analizar el comportamiento de las mismas con la finalidad de transformarlas en estacionarias. Existen series que presentan tendencias lineales o cuadráticas y en este caso, se debe tomar primeras o segundas diferencias:  $\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}$  o  $\Delta^2 Y_t = Y_t - 2Y_{t-1} - Y_{t-2}$  para transformarlas en estacionarias. A  $\Delta$  se le denomina operador de diferenciación no estacional y está definido por

$$\Delta = 1 - B \quad (2.1.4)$$

Un resultado importante es que si una serie tiene tendencia polinomial de orden  $d$  entonces debe ser diferenciada no estacionalmente  $d$  veces para que sea estacionaria.

Por otro lado, existen serie que presentan tendencias no polinomiales. En este caso, primero se debe aplicar una transformación de los datos y luego realizar la diferenciación.

En la práctica se utiliza la prueba de Dickey-Fuller Aumentada (DFA) para analizar la estacionariedad de las series. A continuación, se presenta esta prueba.

### Prueba de Dickey-Fuller Aumentada (DFA)

La prueba DFA contrasta la hipótesis de existencia de raíces unitarias en las series; es decir, la no estacionariedad de las series. Si la serie  $Y$  presenta una correlación de un orden mayor a 1, la prueba DFA construye una corrección paramétrica para la correlación de orden más alto asumiendo que la serie sigue un proceso  $AR(p)$  y agregando  $p - 1$  términos rezagados de la primera diferencia (no estacional) de la serie al lado derecho de la regresión. El modelo general se expresa por:

$$\Delta Y_t = \delta Y_{t-1} + \sum_{j=1}^{p-1} \gamma_j \Delta Y_{t-j} + u_t \quad (2.1.5)$$

donde  $\delta = \phi_1 + \dots + \phi_p - 1$  y  $\gamma_j = -(\phi_{j+1} + \dots + \phi_p)$ . En el caso de que la serie  $Y$  no presente una correlación de un orden mayor a 1, la prueba DFA se reduce a la prueba de Dickey-Fuller donde la serie  $Y$  sigue un proceso  $AR(1)$  y el modelo de regresión es el siguiente:

$$\Delta Y_t = \delta^* Y_{t-1} + u_t \quad (2.1.6)$$

con  $\delta^* = \phi_1 - 1$ .

De acuerdo al modelo (2.1.5), la hipótesis nula y la hipótesis alternativa a contrastar son:

$$H_0 : \delta = 0$$

$$H_1 : \delta < 0$$

El estadístico de contraste es

$$DF = \frac{\hat{\delta}}{\sqrt{V(\hat{\delta})}}$$

donde  $\hat{\delta}$  es el parámetro estimado por MCO en el modelo de regresión adecuado.

Lütkepohl y Krätzig (2004) indican que bajo  $H_0$ , este estadístico no se distribuye asintóticamente como una normal estándar, sino que tiene una distribución límite no estándar. Los valores críticos de esta distribución son calculados mediante simulaciones de Monte Carlo y están disponibles en la literatura correspondiente, por ejemplo, en Dickey (1976) y Fuller (1976).

Bajo  $H_0$ , se rechaza  $H_0$  si el valor del estadístico  $DF$  es menor que el valor crítico para un nivel de significancia dado.

Existen dos versiones más del modelo (2.1.5):

- Modelo con un término constante:

$$\Delta Y_t = \alpha + \delta Y_{t-1} + \sum_{j=1}^{p-1} \gamma_j \Delta Y_{t-j} + u_t \quad (2.1.7)$$

en el cual la hipótesis nula conjunta es:  $H_0 : \delta = 0, \alpha = 0$ .

- Modelo con un término constante y una tendencia lineal:

$$\Delta Y_t = \alpha + \beta t + \delta Y_{t-1} + \sum_{j=1}^{p-1} \gamma_j \Delta Y_{t-j} + u_t \quad (2.1.8)$$

en el cual la hipótesis nula conjunta es:  $H_0 : \delta = 0, \alpha = \beta = 0$ .

En la práctica se comienza tratando el modelo (2.1.8) y de acuerdo a los resultados de los coeficientes  $\beta$  y  $\alpha$  (si son estadísticamente significativos o no), se debe utilizar el modelo adecuado, (2.1.7) o (2.1.5). Además, Eviews incluye una opción automática para la selección de los coeficientes  $\gamma_j$  necesarios en el modelo, lo cual nos permite evitar errores de decisión en la prueba.

## 2.1.4. Análisis de Causalidad

Este análisis nos permite comprender las relaciones causales entre las variables de interés. Granger propuso el concepto de causalidad en el sentido de las series temporales. Se dirá que la variable  $X$  causa a la variable  $Y$  si el conocimiento de valores pasados o rezagados de  $X$  permite obtener un mejor pronóstico de  $Y$  que el obtenido al no incluir esta información (Balacco, 1986). Sin embargo, debemos tener claro que el estudio de la causalidad entre variables no se limita sólo a una relación estadística, sino que esta relación debe provenir de la teoría y estadísticas externas (Uquillas y González, 2017). En el presente trabajo, además de considerar los resultados de la prueba de causalidad de Granger, también tomaremos en cuenta los resultados de trabajos anteriores relacionados al fenómeno en estudio y la teoría económica.

## Prueba de causalidad de Granger

Según Gujarati y Poter (2010), esta prueba implica la estimación de las siguientes regresiones

$$Y_t = \sum_{i=1}^n \alpha_i X_{t-i} + \sum_{i=1}^n \beta_i Y_{t-i} + u_{1,t} \quad (2.1.9)$$

$$X_t = \sum_{i=1}^n \delta_i X_{t-i} + \sum_{i=1}^n \gamma_i Y_{t-i} + u_{2,t} \quad (2.1.10)$$

donde  $Y_t$  y  $X_t$  son dos variables estacionarias con  $t = 1, \dots, T$  y las perturbaciones  $u_{1,t}$  y  $u_{2,t}$  no están correlacionadas. La dirección de la causalidad depende de manera crítica del número de retardos ( $n$ ) incluidos en las regresiones (2.1.9) y (2.1.10).

- $X$  no causa a  $Y$  si no se rechaza la siguiente hipótesis nula:

$$H_0 : \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$$

- $Y$  no causa a  $X$  si no se rechaza la siguiente hipótesis nula:

$$H_0 : \gamma_1 = \dots = \gamma_n = 0$$

Si se llegan a rechazar estas dos hipótesis nulas; es decir,  $X$  causa a  $Y$  y viceversa, entonces se habla de efectos de retroalimentación.

Para determinar el estadístico de contraste, es necesario definir la suma de cuadrados residual.

**Definición 2.1.4.** Sean  $\hat{u}_t$  ( $t = 1, \dots, T$ ) los residuos del modelo. Se denomina **suma de cuadrados residual (SCR)** del modelo al valor definido por la expresión:

$$SCR = \sum_{t=1}^T (\hat{u}_t)^2.$$

Bajo la hipótesis nula  $H_0 : \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ , el estadístico de contraste utilizado es

$$F^* = \frac{(SCR_R - SCR_{NR})/n}{SCR_{NR}/(T - m)}$$

donde  $SCR_R$  es la suma de cuadrados de los residuos de la regresión (2.1.9) restringida:

$$Y_t = \sum_{i=1}^n \beta_i Y_{t-i} + u_{1,t};$$

$SCR_{NR}$  es la suma de cuadrados de los residuos de la regresión (2.1.9) y  $m$  es el número de parámetros estimados en esta regresión. Este estadístico sigue asintóticamente bajo  $H_0$  una distribución  $F$  con  $n$  y  $(T - k)$  grados de libertad. Bajo  $H_0$ , se rechaza  $H_0$  si  $F^* > F_{(n, T-k); \alpha}$  para un nivel de significancia  $\alpha$ .

En los software estadísticos se dispone del **p-valor** que es el nivel de significancia más pequeño que conduce al rechazo de la hipótesis nula. En este caso, se rechaza  $H_0$  si  $p\text{-valor} < 0,05$ .

### 2.1.5. Predicción

Uno de los objetivos de la modelización de series temporales consiste en obtener predicciones óptimas de  $Y_t$  a partir de un conjunto de información  $\Omega_t = \{Y_s : s \leq t\}$ . Por tanto, vamos a definir las herramientas para lograr este objetivo.

**Definición 2.1.5.** Sean  $Y_t$  una serie temporal y  $\Omega_t = \{Y_s : s \leq t\}$  el conjunto de información disponible. Se define la **predicción de  $Y_t$  al horizonte  $h$** , denotada por  $Y_t(h)$ , a la expresión:

$$Y_t(h) = E[Y_{t+h} | \Omega_t]$$

**Definición 2.1.6.** Sean  $Y_t$  una serie temporal y  $Y_t(h)$  su predicción al horizonte  $h$ . Se define el **error de predicción al horizonte  $h$** , denotado por  $e_t(h)$ , a la expresión:

$$e_t(h) = Y_{t+h} - Y_t(h)$$

Bajo el supuesto de normalidad en las perturbaciones ruido blanco  $u_t$  se cumple que el error de predicción está distribuido normalmente con media 0 y varianza  $V(e_t(h))$ .

Un predictor óptimo es aquel que es el mejor en minimizar una función de pérdida. Usualmente, se utiliza el error cuadrático medio de predicción como función de pérdida. A continuación presenta la definición del error cuadrático medio de predicción.

**Definición 2.1.7.** Sean  $Y_t$  una serie temporal y  $Y_t(h)$  su predicción al horizonte  $h$  el conjunto de información disponible. Se define el **error cuadrático medio de predicción (ECMP)** mediante la siguiente expresión:

$$ECMP = E[Y_{t+h} - Y_t(h)]^2$$

Por tanto,  $Y_t(h)$  es un predictor óptimo si minimiza el ECMP; es decir,

$$E[Y_{t+h} - Y_t(h)]^2 \leq E[Y_{t+h} - Y_t^*(h)]^2 \quad \forall Y_t^*(h)$$

Para obtener las predicciones a un horizonte  $j$  determinado en los modelos básicos y más complejos es suficiente con escribir los modelos en forma de ecuación en diferencias y calcular las esperanzas condicionales, conociendo que

$$E[Y_{t+h} | \Omega_t] = \begin{cases} Y_{t+j} & j \leq 0 \\ Y_t(j) & j > 0 \end{cases} \quad E[u_{t+h} | \Omega_t] = \begin{cases} u_{t+j} & j \leq 0 \\ 0 & j > 0 \end{cases}$$

## 2.2. Modelo de Vectores Autoregresivos

Uno de los objetivos de este estudio es explicar el impacto de las relaciones intertemporales entre 2 o más variables dependientes, así como también, nos interesa estudiar el efecto de variables exógenas sobre una variable dependiente. Por tanto, introduciremos el modelo de vectores autoregresivos (VAR) que nos permite resolver esta inquietud. El modelo VAR se considera como la generalización del proceso autoregresivo al caso multivariante.

Antes de presentar este modelo vamos a introducir la notación de una serie temporal multivariante y la noción de estacionariedad para esta serie.

## Notación

Una serie temporal multivariante es un proceso estocástico  $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  donde cada componente del vector  $Y_t$  es una serie univariante. Se denotará por:  $Y_t = (Y_{1t}, Y_{2t}, \dots, Y_{nt})'$  al vector de  $n$  series univariantes en el tiempo  $t$ .

## Procesos multivariantes estacionarios

Como se verá más adelante, una característica importante de estos procesos es que son estables a lo largo del tiempo, lo cual implica que sean estacionarios. A continuación vamos a definir la noción de estacionariedad en el caso multivariante.

**Definición 2.2.1.** Sea  $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  con  $Y_t = (Y_{1,t}, Y_{2,t}, \dots, Y_{n,t})'$  un proceso estocástico multivariante.  $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  es **estrictamente estacionario** si:

$$F(Y_{t_1+k}, Y_{t_2+k}, \dots, Y_{t_n+k}) = F(Y_{t_1}, Y_{t_2}, \dots, Y_{t_n}) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t_1, t_2, \dots, t_n, k \in \mathbb{Z}$$

donde  $F$  representa la función de distribución conjunta de  $Y_{t_1}, Y_{t_2}, \dots, Y_{t_n}$ .

**Definición 2.2.2.** Sea  $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  con  $Y_t = (Y_{1,t}, Y_{2,t}, \dots, Y_{n,t})'$  un proceso estocástico multivariante.  $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  es **débilmente estacionario** si sus momentos de primer y segundo orden son invariantes en el tiempo; es decir,

1.  $E(Y_t) = \boldsymbol{\mu} \quad \forall t \in \mathbb{Z}$ ; es decir, el vector de medias  $\boldsymbol{\mu}$  es constante e independiente de  $t$ .
2.  $Cov(Y_t, Y_{t-k}) = E[(Y_t - \boldsymbol{\mu})(Y_{t-k} - \boldsymbol{\mu})'] = \Gamma_Y(k) \quad \forall t, k \in \mathbb{Z}$ ; es decir, la **matriz de covarianzas cruzadas** entre  $Y_t$  y  $Y_{t-k}$  sólo depende del salto  $k$ .

El vector de medias  $\boldsymbol{\mu}$  es de tamaño  $n$  y sus componentes son las medias de las series univariantes de  $Y_t$ .

La matriz  $\Gamma_Y(k)$  es de dimensión  $n \times n$ . Denotaremos por  $\gamma_{i,j}(k)$  a la entrada  $i, j$ -ésima de esta matriz que representa la covarianza entre  $Y_{i,t}$  y  $Y_{j,t-k}$ . La matriz de covarianzas cruzadas es semi definida positiva. Si  $k = 0$  entonces la diagonal de la matriz  $\Gamma_0$  está compuesta por las varianzas de las series univariantes.

Si un proceso multivariante  $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  es débilmente estacionario entonces se puede demostrar que las componentes del proceso también serán débilmente estacionarios.

Para un proceso multivariante  $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  estacionario, la matriz  $\Gamma_Y(k)$  puede ser estimada por

$$\hat{\Gamma}_Y(k) = \frac{1}{T} \sum_{t=k+1}^T (Y_t - \bar{Y})(Y_{t-k} - \bar{Y}) \quad k > 0 \quad (2.2.1)$$

donde  $T$  es el número de observaciones y  $\bar{Y}$  es el vector de medias muestrales dado por:

$$\bar{Y} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T Y_t.$$

### 2.2.1. Representación de un modelo VAR( $p$ )

Un modelo VAR de orden  $p$  con  $n$  variables endógenas, denotado por VAR( $p$ ), se representa por:

$$Y_t = \nu + A_1 Y_{t-1} + A_2 Y_{t-2} + \cdots + A_p Y_{t-p} + u_t \quad \forall t \in \mathbb{Z} \quad (2.2.2)$$

donde  $Y_t = (Y_{1,t}, \dots, Y_{n,t})'$  es un vector  $n$ -dimensional de variables endógenas estacionarias, los  $A_i$  son matrices de coeficientes fijos de dimensión  $n \times n$ ,  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)'$  es un vector  $n$ -dimensional de coeficientes fijos (interceptos) y  $u_t = (u_{1,t}, \dots, u_{n,t})'$  es un vector  $n$ -dimensional de errores tal que  $E(u_t) = 0$ ,  $E(u_t u_t') = \Sigma_u$  y  $E(u_t u_s') = 0$  para  $s \neq t$ ; es decir,  $u_t$  es un ruido blanco.

A  $\Sigma_u$  se le conoce como matriz de varianzas-covarianzas de los errores (perturbaciones), la cual se asume que es no singular.

Utilizando el operador de retardo (2.1.2), la representación (2.2.2) puede ser reescrita como:

$$\begin{aligned} (I_n - A_1 B - A_2 B^2 - \cdots - A_p B^p) Y_t &= \nu + u_t \\ A(B) Y_t &= \nu + u_t \end{aligned}$$

donde  $A(B)$  se denomina matriz polinomial en el operador de retardo.

A continuación, presentamos el modelo utilizado para la modelización, el cual incluye el efecto de variables exógenas.

### Representación de un modelo VAR<sub>X</sub>( $p$ )

Si consideramos  $X_t = (X_{1,t}, X_{2,t}, \dots, X_{m,t})'$  un vector  $m$ -dimensional de variables exógenas estacionarias y  $E$  una matriz de coeficientes fijos de dimensión  $n \times m$ . Entonces a partir del modelo (2.2.2) se puede obtener un nuevo modelo:

$$Y_t = \nu + A_1 Y_{t-1} + A_2 Y_{t-2} + \cdots + A_p Y_{t-p} + E X_t + u_t \quad \forall t \in \mathbb{Z} \quad (2.2.3)$$

A esta representación se le denomina modelo VAR de orden  $p$  con  $n$  variables endógenas y  $m$  variables exógenas, y se denota por VAR<sub>X</sub>( $p$ ). Debemos aclarar que en este modelo, el vector  $X_t$  puede incluir variables retardadas.

Podemos notar que (2.2.3) es una extensión más general de los modelos VAR( $p$ ). Por tanto, las propiedades y las metodologías de estimación y verificación que se analizarán para los procesos VAR( $p$ ) también se aplican a los procesos VAR<sub>X</sub>( $p$ ).

### 2.2.2. Estabilidad de un proceso VAR( $p$ )

Para analizar la *estabilidad* de los procesos VAR( $p$ ), consideremos primero un proceso VAR(1):

$$Y_t = \nu + A_1 Y_{t-1} + u_t. \quad (2.2.4)$$

Este proceso es *estable* si todos los valores propios de  $A_1$  son de módulo menor a uno. Esta condición es equivalente a

$$\det(I_n - A_1 z) \neq 0, \quad \text{para } |z| < 1. \quad (2.2.5)$$

Un proceso VAR( $p$ ) puede ser representado como un VAR(1) de la siguiente forma:

$$\mathbf{Y}_t = \boldsymbol{\nu} + \mathbf{A}\mathbf{Y}_{t-1} + \mathbf{U}_t \quad (2.2.6)$$

donde

$$\mathbf{Y}_t := \begin{pmatrix} Y_t \\ Y_{t-1} \\ \vdots \\ Y_{t-p+1} \end{pmatrix}_{(np \times 1)}, \quad \boldsymbol{\nu} := \begin{pmatrix} \nu \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{(np \times 1)}, \quad \mathbf{A} := \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_{p-1} & A_p \\ I_n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I_n & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I_n & 0 \end{pmatrix}_{(np \times np)}, \quad \mathbf{U}_t := \begin{pmatrix} u_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{(np \times 1)}$$

La representación (2.2.6) nos indica que para obtener las propiedades de los procesos VAR( $p$ ) es suficiente con demostrarlas para el proceso VAR(1).

La condición de estabilidad (2.2.5) se cumple para  $\mathbf{Y}_t$  si

$$\det(I_{np} - \mathbf{A}z) \neq 0, \quad \text{para } |z| < 1.$$

Se puede probar fácilmente que

$$\det(I_{np} - \mathbf{A}z) = \det(I_n - A_1z - A_2z^2 - \dots - A_pz^p).$$

Por tanto, un proceso VAR( $p$ ) es *estable* si:

$$\det(I_n - A_1z - A_2z^2 - \dots - A_pz^p) \neq 0, \quad \text{para } |z| < 1. \quad (2.2.7)$$

A  $\det(I_n - A_1z - A_2z^2 - \dots - A_pz^p)$  se le denomina *polinomio característico inverso*.

La condición (2.2.7) implica que todas las raíces del polinomio característico inverso están fuera del círculo complejo unitario. A  $\det(I_n - A_1z - A_2z^2 - \dots - A_pz^p)$  se le conoce como *polinomio característico inverso*.

Un hecho importante es que estabilidad implica estacionariedad y por tanto, es suficiente probar la estabilidad para asegurar que un proceso VAR( $p$ ) sea estable y estacionario. En la literatura de las series temporales, la condición de estabilidad (2.2.7) a menudo es utilizada como condición de estacionariedad (Lütkepohl, 2005).

### 2.2.3. Representación media móvil de un VAR( $p$ )

Consideremos un VAR(1) estable  $Y_t$ :

$$Y_t = \nu + A_1Y_{t-1} + u_t$$

Si realizamos sustituciones repetidas en el proceso hasta el  $i$ -ésimo paso, obtenemos que:

$$\begin{aligned} Y_t &= \nu + A_1Y_{t-1} + u_t = \nu + A_1(\nu + A_1Y_{t-2} + u_{t-1}) + u_t \\ &= (I + A_1)\nu + A_1^2Y_{t-2} + (A_1u_{t-1} + u_t) \\ &= (I + A_1)\nu + A_1^2(\nu + A_1Y_{t-3} + u_{t-2}) + (A_1u_t + u_t) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= (I + A_1 + A_1^2)\nu + A_1^3 Y_{t-3} + (A_1^2 u_{t-2} + A_1 u_{t-1} + u_t) \\
&\vdots \\
&= (I + A_1 + A_1^2 + \cdots + A_1^i)\nu + A_1^{i+1} Y_{t-i+1} + \sum_{j=0}^i A_1^j u_{t-j}, \quad i = 0, 1, 2, \dots
\end{aligned}$$

donde  $A^0 = I$ .

Como el proceso VAR es estable entonces se cumple que

$$(I + A_1 + A_1^2 + \cdots + A_1^i)\nu \xrightarrow{i \rightarrow \infty} (I - A_1)^{-1}\nu.$$

Además,  $A_1^{i+1} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0$  rápidamente; así, el término  $A_1^{i+1} Y_{t-i+1}$  podemos ignorarlo en el límite. Por tanto, se obtiene la siguiente representación:

$$Y_t = (I - A_1)^{-1}\nu + \sum_{j=0}^{\infty} A_1^j u_{t-j}.$$

Al aplicar este mismo procedimiento a la representación (2.2.6) se obtiene la representación media móvil del VAR( $p$ ):

$$Y_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \Theta_j u_{t-j} \quad (2.2.8)$$

donde  $\mu = (I - A_1 - A_2 - \cdots - A_p)^{-1}\nu$  y las matrices  $\Theta_j$  se calculan recursivamente:

$$\begin{cases} \Theta_0 = I_n \\ \Theta_j = \sum_{i=1}^{\min\{j,p\}} \Theta_{j-i} A_i, \quad j = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (2.2.9)$$

## 2.2.4. Autocovarianzas y Autocorrelaciones de un VAR( $p$ ) estable

Las autocovarianzas de un proceso VAR( $p$ ) estable satisfacen las ecuaciones de Yule-Walker:

$$\begin{cases} \Gamma_Y(0) = A_1 \Gamma_Y(1)' + A_2 \Gamma_Y(2)' + \cdots + A_p \Gamma_Y(p)' + \Sigma_u \\ \Gamma_Y(k) = A_1 \Gamma_Y(k-1) + A_2 \Gamma_Y(k-2) + \cdots + A_p \Gamma_Y(k-p)' \quad k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

donde  $\Gamma_Y(i) = \Gamma_Y(-i)'$ .

Estas ecuaciones pueden ser utilizadas para calcular las autocovarianzas  $\Gamma_Y(k)$  de forma recursiva para  $k \geq p$  si las matrices  $A_1, A_2, \dots, A_p$  y  $\Gamma_Y(k-1), \Gamma_Y(k-2), \dots, \Gamma_Y(0)$  son conocidas.

Para valores de  $|k| < p$  se pueden calcular las matrices de autocovarianzas  $\Gamma_Y(k)$  mediante la siguiente ecuación

$$\text{vec } \Gamma_Y(0) = (I_{(np)^2} - \mathbf{A} \otimes \mathbf{A})^{-1} \text{vec } \Sigma_U$$

donde  $\otimes$  es el producto de Kronecker,  $\text{vec}$  denota la vectorización<sup>2</sup> de la matriz dada,  $\mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{U}_t$  son los vectores y matrices asociados a la representación (2.2.6),  $\Sigma_{\mathbf{U}} = E(\mathbf{U}_t \mathbf{U}_t')$  y  $\Gamma_{\mathbf{Y}}(0)$  está dada por

$$\Gamma_{\mathbf{Y}}(0) = \begin{pmatrix} \Gamma_Y(0) & \Gamma_Y(1) & \dots & \Gamma_Y(p-1) \\ \Gamma_Y(-1) & \Gamma_Y(0) & \dots & \Gamma_Y(p-2) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \Gamma_Y(-p+1) & \Gamma_Y(-p+2) & \dots & \Gamma_Y(0) \end{pmatrix}$$

Utilizando la igualdad  $\Gamma_Y(k) = \Gamma_Y(-k)'$  podemos determinar las autocovarianzas para valores negativos de  $k$ .

En un proceso  $\text{VAR}(p)$  estable, las autocorrelaciones están dadas por

$$R_Y(k) = D^{-1} \Gamma_Y(k) D^{-1} \quad k = 0, 1, \dots; k < T$$

donde  $D^{-1}$  es una matriz diagonal compuesta por el inverso de las desviaciones estándar de las componentes de  $Y_t$ ; es decir, los elementos de la diagonal de  $D^{-1}$  son el inverso de las raíces cuadradas de los elementos de la diagonal de  $\Gamma_Y(0)$ . A  $R_Y(k)$  se le conoce como **matriz de correlación cruzada** entre  $Y_t$  y  $Y_{t-k}$ . Esta matriz es semidefinida positiva. La entrada  $i, j$ -ésima de la matriz  $R_Y(k)$  es el coeficiente de correlación lineal entre  $Y_t$  y  $Y_{t-k}$  dado por

$$\rho_{i,j}(k) = \frac{\gamma_{i,j}(k)}{\sqrt{\gamma_{i,i}(k)} \sqrt{\gamma_{j,j}(k)}} \quad (2.2.10)$$

donde  $\gamma_{i,j}(k)$  es la entrada  $i, j$ -ésima de la matriz  $\Gamma_Y(k)$ .

En la práctica se suele estimar  $R_Y(k)$  por

$$\hat{R}_Y(k) = \hat{D}^{-1} \hat{\Gamma}_Y(k) \hat{D}^{-1}$$

donde la matriz  $\hat{\Gamma}_Y(k)$  está dada por (2.2.1) y  $\hat{D}^{-1}$  es una matriz diagonal compuesta por el inverso de las desviaciones estándar muestrales de las componentes de  $Y_t$ .

## 2.2.5. Estimación del modelo

Antes de empezar, debemos recalcar que la estimación de los parámetros de un modelo VAR sólo puede realizarse en series temporales estacionarias. Una serie univariante puede convertirse en estacionaria utilizando procesos de diferenciación (no estacional y estacional) o transformaciones de las series.

Para un proceso VAR especificado podemos utilizar la estimación de mínimos cuadrados o un método de máxima verosimilitud para estimar las ecuaciones de forma conjunta.

A continuación, introduciremos la notación respectiva para el desarrollo de estos estimadores.

---

<sup>2</sup>La vectorización de una matriz es una transformación lineal que convierte a la matriz en un vector columna. Dada una matriz  $A$  de orden  $m \times n$ , la vectorización de  $A$ , denotada por  $\text{vec}(A)$ , es un vector columna de  $mn$  elementos que se obtiene al escribir las columnas de  $A$  una a continuación de otra:  $\text{vec}(A) = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1}, a_{12}, a_{22}, \dots, a_{m2}, \dots, a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{mn})'$ .

Consideremos una muestra de  $T$  observaciones para cada una de las  $n$  variables de  $Y_t$ . Además, se supone que hay  $p$  datos premuestrales para cada variable:  $Y_{-p+1}, \dots, Y_0$ . El particionamiento de la serie temporal multivariante  $Y_t$  en datos muestrales y premuestrales será útil para simplificar la notación.

Para  $t = 1, 2, \dots, T$ , el modelo (2.2.2) puede ser escrito en forma de un sistema compacto:

$$Y = HZ + U \quad (2.2.11)$$

donde  $Y := (Y_1, Y_2, \dots, Y_T)$  y  $U := (u_1, u_2, \dots, u_T)$  son matrices de orden  $n \times T$ ,  $H := (\nu, A_1, \dots, A_p)$  es la matriz de coeficientes (o parámetros) del sistema de orden  $n \times (np + 1)$ ,  $Z := (Z_0, Z_1, \dots, Z_{T-1})$  es la matriz de datos de orden  $(np + 1) \times T$  y  $Z_t := (\mathbb{1}, Y_t, Y_{t-1}, \dots, Y_{t-p+1})'$  es el vector  $(np + 1)$ -dimensional de los regresores del modelo al instante  $t$  ( $\mathbb{1} = (1, 1, \dots, 1)$  vector  $n$ -dimensional).

La expresión (2.2.11) puede ser reescrita mediante el producto de Kronecker y la vectorización de las matrices, es decir:

$$\mathbf{y} = (Z' \otimes I_n)\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u} \quad (2.2.12)$$

donde  $\mathbf{y} := \text{vec}(Y)$  es un vector  $nT$ -dimensional,  $\boldsymbol{\beta} := \text{vec}(H)$  es un vector  $(n^2p + n)$ -dimensional y  $\mathbf{u} = \text{vec}(U)$  es un vector  $nT$ -dimensional con  $\Sigma_{\mathbf{u}} = I_T \otimes \Sigma_u$ .

### 2.2.5.1. Estimador de mínimos cuadrados multivariante

El método de mínimos cuadrados (o mínimos cuadrados generalizados (MCG)) multivariante estima  $\boldsymbol{\beta}$ , que minimiza la siguiente suma de cuadrados de residuos:

$$\begin{aligned} S(\boldsymbol{\beta}) &= \mathbf{u}'(I_T \otimes \Sigma_u)^{-1}\mathbf{u} \\ &= [\mathbf{y} - (Z' \otimes I_n)\boldsymbol{\beta}]'(I_T \otimes \Sigma_u)^{-1}[\mathbf{y} - (Z' \otimes I_n)\boldsymbol{\beta}] \\ &= \mathbf{y}'(I_T \otimes \Sigma_u)^{-1}\mathbf{y} + \boldsymbol{\beta}'(ZZ' \otimes \Sigma_u^{-1})\boldsymbol{\beta} - 2\boldsymbol{\beta}'(Z \otimes \Sigma_u^{-1})\mathbf{y}. \end{aligned}$$

Calculando la derivada parcial de primer orden de  $S(\boldsymbol{\beta})$  con respecto a  $\boldsymbol{\beta}$  e igualando a cero:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} &= 2(Z'Z \otimes \Sigma_u^{-1})\boldsymbol{\beta} - 2(Z \otimes \Sigma_u^{-1})\mathbf{y} = 0 \\ (Z'Z \otimes \Sigma_u^{-1})\boldsymbol{\beta} &= (Z \otimes \Sigma_u^{-1})\mathbf{y} \end{aligned}$$

De donde el estimador de mínimos cuadrados (MC) multivariante es

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\beta}} &= ((ZZ')^{-1} \otimes \Sigma_u)(Z \otimes \Sigma_u^{-1})\mathbf{y} \\ &= ((ZZ')^{-1}Z \otimes I_n)\mathbf{y}. \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

Dado que los regresores son los mismos para cada ecuación del sistema (2.2.11), el estimador de mínimos cuadrados multivariante es equivalente al estimador de mínimos cuadrados ordinarios (MCO) aplicado a cada ecuación por separado. Este resultado fue demostrado por Zellner (1962).

Reemplazando (2.2.12) en (2.2.13) obtenemos una forma alternativa de expresar el estimador MC

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = ((ZZ')^{-1} \otimes \Sigma_u)(Z \otimes \Sigma_u^{-1})[(Z' \otimes I_n)\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}]$$

$$= \boldsymbol{\beta} + ((ZZ')^{-1}Z \otimes I_n)\mathbf{u}.$$

Por otro lado, de (2.2.13) podemos notar que

$$\begin{aligned} \text{vec}(\widehat{H}) &= \widehat{\boldsymbol{\beta}} = ((ZZ')^{-1}Z \otimes I_n) \text{vec}(Y) \\ &= \text{vec}(YZ'(ZZ')^{-1}). \end{aligned}$$

De donde se tiene que

$$\widehat{H} = YZ'(ZZ')^{-1} \quad (2.2.14)$$

es el estimador MC considerando la representación del sistema (2.2.11).

Ahora, reemplazando (2.2.11) en (2.2.14) obtenemos una forma alternativa de expresar este estimador

$$\begin{aligned} \widehat{H} &= (HZ + U)Z'(ZZ')^{-1} \\ &= H + UZ'(ZZ')^{-1}. \end{aligned}$$

### Propiedades asintóticas del estimador MC

En esta parte vamos a presentar las condiciones necesarias para que el estimador MC sea consistente y asintóticamente normal. Estos resultados se obtienen al considerar que se tiene muestra grande porque son difíciles de derivar para muestras finitas. Antes de presentar los resultados, vamos a introducir la noción de ruido blanco estándar.

**Definición 2.2.3.** Un proceso ruido blanco  $u_t = (u_{1,t}, u_{2,t}, \dots, u_{n,t})$  se denomina **ruido blanco estándar** si los  $u_t$  son vectores aleatorios continuos tal que

1.  $E(u_t) = 0$
2.  $\Sigma_u = E(u_t u_t')$  es no singular
3.  $E(u_t u_s) = 0, \forall t \neq s$
4. Para una constante finita  $c$ ,

$$E|u_{i,t} u_{j,t} u_{k,t} u_{l,t}| \leq c \quad \text{para } i, j, k, l = 1, \dots, n, \text{ y } \forall t$$

Esta propiedad de los procesos VAR estables es una condición suficiente para los siguientes resultados:

- $\Gamma := p \lim \frac{ZZ'}{T}$  existe y es no singular, y
- $\frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^T \text{vec}(u_t Z'_{t-1}) = \frac{1}{\sqrt{T}} \text{vec}(UZ') = \frac{1}{\sqrt{T}} (Z \otimes I_n) \mathbf{u} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \Gamma^{-1} \otimes \Sigma_u)$ ,

donde  $p \lim$  y  $\xrightarrow{d}$  denotan convergencia en probabilidad y convergencia en distribución, respectivamente.

La siguiente proposición presenta formalmente las condiciones para que se cumplan las propiedades asintóticas del estimador MC

**Proposición 2.2.1.** Sean  $Y_t$  un proceso VAR( $p$ ) estable como en (2.2.2) con  $u_t$  un ruido blanco estándar y  $\hat{H}$  el estimador MC de la matriz de coeficientes  $H$ . Entonces

- $p \lim \hat{H} = H$ , y
- $\sqrt{T}(\hat{\beta} - \beta) = \sqrt{T} \text{vec}(\hat{H} - H) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \Gamma^{-1} \otimes \Sigma_u)$

Bajo las condiciones de esta proposición, el estimador MC es consistente y asintóticamente normal. Ahora, debemos determinar las matrices  $\Gamma$  y  $\Sigma_u$  para poder calcular numéricamente la varianza de la distribución asintótica del estimador MC.

Dado que  $\Gamma = p \lim \frac{ZZ'}{T}$ , entonces un estimador consistente de  $\Gamma$  es

$$\hat{\Gamma} = \frac{ZZ'}{T}. \quad (2.2.15)$$

De esto, se sigue que  $\hat{\beta} \overset{a}{\sim} \mathcal{N}(\beta, (ZZ')^{-1} \otimes \Sigma_u)$ , donde  $\overset{a}{\sim}$  denota distribución asintótica.

Para la matriz  $\Sigma_u$ , notemos que como  $\Sigma_u = E(u_t u_t')$ , entonces un estimador plausible de esta matriz es

$$\hat{\Sigma}_u = \frac{1}{T - np - 1} \sum_{t=1}^T \hat{u}_t \hat{u}_t' \quad (2.2.16)$$

donde  $np + 1$  es el número de parámetros a estimar por ecuación en el sistema. Además, este estimador es insesgado.

El estimador (2.2.16) es equivalente a la siguiente expresión

$$\hat{\Sigma}_u = \frac{1}{T - np - 1} \hat{U} \hat{U}' = \frac{1}{T - np - 1} (Y - \hat{H}Z)(Y - \hat{H}Z)'$$

La siguiente proposición muestra un resultado importante para cualquier estimador de  $\Sigma_u$ .

**Proposición 2.2.2.** Sean  $Y_t$  un proceso VAR( $p$ ) estable como en (2.2.2) con  $u_t$  un ruido blanco estándar y  $\bar{H}$  un estimador MC de la matriz de coeficientes  $H$  tal que  $\sqrt{T} \text{vec}(\bar{H} - H)$  converge en distribución. Además, supongamos que

$$\bar{\Sigma}_u = \frac{(Y - \bar{H}Z)(Y - \bar{H}Z)'}{T - c}$$

donde  $c$  es una constante fija. Entonces

$$p \lim \sqrt{T} \left( \bar{\Sigma}_u - \frac{UU'}{T} \right) = 0.$$

Esta proposición indica que el estimador  $\hat{\Sigma}_u$  y cualquier otro estimador factible tienen las mismas propiedades asintóticas que el estimador

$$\frac{UU'}{T} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T u_t u_t'$$

el cual no es factible porque está en función de los valores de los errores que son desconocidos.

Otra implicación de la Proposición 2.2.2 es que  $\widehat{\Sigma}_u$  es un estimador consistente de  $\Sigma_u$ ; es decir,

$$p \lim \widehat{\Sigma}_u = \Sigma_u. \quad (2.2.17)$$

Por tanto, si  $Y_t$  es un proceso estable con ruido blanco estándar entonces la Proposición 2.2.1 y (2.2.17) aseguran que

$$\frac{\widehat{\beta}_i - \beta_i}{\widehat{s}_i} \xrightarrow{d} N(0, 1)$$

donde  $\beta_i$  ( $\widehat{\beta}_i$ ) es la  $i$ -ésima componente de  $\boldsymbol{\beta}$  ( $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ ) y  $\widehat{s}_i$  es la raíz cuadrada del  $i$ -ésimo elemento diagonal de  $(ZZ')^{-1} \otimes \widehat{\Sigma}_u$ .

### 2.2.5.2. Estimador de máxima verosimilitud

En este caso, vamos a presentar los estimadores de  $\boldsymbol{\beta}$  y  $\Sigma_u$  mediante el método de máxima verosimilitud.

El estimador de máxima verosimilitud (MV) es un método alternativo al estimador de mínimos cuadrados cuando se asume que la distribución del proceso es conocida. Para este estimador, consideraremos la misma notación dada en (2.2.11) y (2.2.12).

Supongamos que el VAR( $p$ ) es gaussiano; es decir,

$$\mathbf{u} = \text{vec}(U) = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_T \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}(0, I_T \otimes \Sigma_u).$$

Entonces la función de densidad de  $\mathbf{u}$  es

$$f_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}) = \frac{1}{(2\pi)^{nT/2}} |I_T \otimes \Sigma_u|^{-1/2} \exp \left[ -\frac{1}{2} \mathbf{u}' (I_T \otimes \Sigma_u^{-1}) \mathbf{u} \right]. \quad (2.2.18)$$

De (2.2.12), tenemos que

$$\mathbf{u} = \mathbf{y} - (Z' \otimes I_n) \boldsymbol{\beta}. \quad (2.2.19)$$

Reemplazando (2.2.18) en (2.2.19), obtenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\boldsymbol{\beta}, \Sigma_u) &= \frac{1}{(2\pi)^{nT/2}} \\ &\times |I_T \otimes \Sigma_u|^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} [\mathbf{y} - (Z' \otimes I_n) \boldsymbol{\beta}]' (I_T \otimes \Sigma_u^{-1}) [\mathbf{y} - (Z' \otimes I_n) \boldsymbol{\beta}] \right\}. \end{aligned}$$

Por tanto, la función log-verosimilitud es

$$\begin{aligned} \ln \mathcal{L}(\boldsymbol{\beta}, \Sigma_u) &= -\frac{nT}{2} \ln(2\pi) - \frac{T}{2} \ln(|\Sigma_u|) \\ &\quad - \frac{1}{2} [\mathbf{y} - (Z' \otimes I_n) \boldsymbol{\beta}]' (I_T \otimes \Sigma_u^{-1}) [\mathbf{y} - (Z' \otimes I_n) \boldsymbol{\beta}]. \end{aligned} \quad (2.2.20)$$

Calculando la derivada parcial de primer orden de (2.2.20) con respecto a  $\boldsymbol{\beta}$  e igualando a cero:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln \mathcal{L}(\boldsymbol{\beta}, \Sigma_u)}{\partial \boldsymbol{\beta}} &= (Z \otimes \Sigma_u^{-1})\mathbf{y} - (Z'Z \otimes \Sigma_u^{-1})\boldsymbol{\beta} = 0 \\ (Z'Z \otimes \Sigma_u^{-1})\boldsymbol{\beta} &= (Z \otimes \Sigma_u^{-1})\mathbf{y}\end{aligned}$$

Despejando para  $\boldsymbol{\beta}$  en la última expresión, obtenemos el estimador de máxima verosimilitud (MV) de  $\boldsymbol{\beta}$ :

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{MV} = ((ZZ')^{-1}Z \otimes I_n)\mathbf{y}, \quad (2.2.21)$$

el cual coincide con el estimador de mínimos cuadrados.

Por otro lado, en (2.2.20) podemos notar que

$$\begin{aligned}[\mathbf{y} - (Z' \otimes I_n)\boldsymbol{\beta}]' (I_T \otimes \Sigma_u^{-1}) [\mathbf{y} - (Z' \otimes I_n)\boldsymbol{\beta}] &= \text{tr}[(Y - HZ)' \Sigma_u^{-1} (Y - HZ)] \\ &= \text{tr}[\Sigma_u^{-1} (Y - HZ)(Y - HZ)']\end{aligned} \quad (2.2.22)$$

donde  $\text{tr}(\cdot)$  denota la traza de una matriz.

Reemplazando (2.2.22) en (2.2.20), tenemos que la función log-verosimilitud es equivalente a la siguiente expresión:

$$\ln \mathcal{L}(\boldsymbol{\beta}, \Sigma_u) = -\frac{nT}{2} \ln(2\pi) - \frac{T}{2} \ln(|\Sigma_u|) - \frac{1}{2} \text{tr}[\Sigma_u^{-1} (Y - HZ)(Y - HZ)']. \quad (2.2.23)$$

Ahora, calculando la derivada parcial de primer orden de (2.2.23) con respecto a  $\Sigma_u$  e igualando a cero:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln \mathcal{L}(\boldsymbol{\beta}, \Sigma_u)}{\partial \Sigma_u} &= -\frac{T}{2} \Sigma_u^{-1} + \frac{1}{2} \Sigma_u^{-1} (Y - HZ)(Y - HZ)' \Sigma_u^{-1} = 0 \\ \Sigma_u^{-1} (Y - HZ)(Y - HZ)' \Sigma_u^{-1} &= T \Sigma_u^{-1} \\ (Y - HZ)(Y - HZ)' \Sigma_u^{-1} &= T I_n\end{aligned}$$

Despejando para  $\Sigma_u$  en la última expresión, obtenemos el estimador de máxima verosimilitud (MV) de  $\Sigma_u$ :

$$\begin{aligned}\widetilde{\Sigma}_u &= \frac{1}{T} (Y - \widehat{H}Z)(Y - \widehat{H}Z)' = \frac{1}{T} \widehat{U}\widehat{U}' \\ &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \widehat{u}_t \widehat{u}_t'\end{aligned} \quad (2.2.24)$$

donde  $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{MV} = \text{vec}(\widehat{H})$ . Este estimador es sesgado y asintóticamente equivalente al estimador (2.2.16).

## Propiedades asintóticas del estimador MV

Para el estimador MV, asumimos que el proceso VAR es gaussiano; es decir, los  $u_t$  son un ruido blanco con distribución  $\mathcal{N}(0, \Sigma_u)$ . Esto nos garantiza que los  $u_t$  son un ruido blanco estándar ya que los momentos de esta distribución normal multivariante satisfacen las condiciones de la Definición 2.2.3.

Si  $Y_t$  es un proceso VAR estable gaussiano, entonces las condiciones de la Proposición 2.2.1 son cumplidas. Por tanto, el estimador ML es consistente y se distribuye asintóticamente como  $\mathcal{N}(\beta, (ZZ')^{-1} \otimes \Sigma_u)$  (utilizando (2.2.15)). Además, de la Proposición 2.2.2 se sigue que  $p \lim \tilde{\Sigma}_u = \Sigma_u$ ; es decir,  $\tilde{\Sigma}_u$  es un estimador consistente de  $\Sigma_u$ .

La matriz de covarianzas estimadas del estimador MV es

$$V(\widehat{\beta}_{MV}) = (ZZ')^{-1} \tilde{\Sigma}_u$$

donde  $\tilde{\Sigma}_u$  es el estimador ML de  $\Sigma_u$  dado en (2.2.24).

### 2.2.5.3. Estadísticos de calidad del modelo

Luego de haber estimado los coeficientes del modelo, es necesario tener medidas estadísticas significativas que evalúen la capacidad del modelo. En Eviews se presenta estadísticos para el modelo multivariante y cada ecuación del modelo.

Sean  $Y_{i,t}$  la  $i$ -ésima variable endógena y  $\hat{u}_{i,t}$  el residuo de la  $i$ -ésima ecuación del sistema (2.2.2). Para cada ecuación univariante del modelo se dispone de los siguientes estadísticos:

**Definición 2.2.4.** Se conoce como **coeficiente de determinación**, denotado por  $R^2$ , al valor calculado mediante la siguiente fórmula:

$$R^2 = 1 - \frac{SCR}{SCT}$$

donde SCR es la suma de cuadrados residual y SCT es la suma de cuadrados total definida por:

$$SCT = \sum_{t=1}^T (Y_{i,t} - \bar{Y}_i)$$

con  $\bar{Y}_i$  igual al promedio muestral de la variable  $Y_i$ .

Este coeficiente se interpreta como el porcentaje de la variación total de la serie temporal que queda explicada por el modelo. Su valor varía entre 0 y 1: así, si este coeficiente es más cercano a 1 entonces mejor será el ajuste del modelo a la variable que estamos intentando explicar. Sin embargo, este coeficiente tiene un inconveniente, es muy sensible ante la inclusión de variables explicativas no significativas. Para solucionar esto, se plantea un ajuste a este coeficiente de determinación.

**Definición 2.2.5.** Se define el **coeficiente de determinación ajustado**, denotado por  $\bar{R}^2$ , al valor calculado mediante la siguiente expresión:

$$\bar{R}^2 = 1 - (1 - R^2) \frac{T - 1}{T - k}$$

donde  $k_i$  es el número de parámetros de la  $i$ -ésima ecuación a estimar y  $R^2$  es el coeficiente de determinación definido previamente.

Otra forma de resolver el problema del  $R^2$  es utilizar algún criterio de información, el cual tiene en cuenta en la misma fórmula tanto el número de parámetros como el ajuste del modelo. Los criterios más conocidos son: el criterio informativo



de Akaike (AIC) y el criterio de información bayesiano (BIC) o criterio de Schwarz (SC). Estos estadísticos se definen como:

$$AIC = \ln(\tilde{\sigma}_u^2) + \frac{2k_i}{T}$$

$$SC = \ln(\tilde{\sigma}_u^2) + \frac{k_i - i \ln(T)}{T}$$

donde

$$\tilde{\sigma}_u^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (\hat{u}_{i,t})^2$$

A continuación, presentamos un estadístico basado en la varianza estimada de los residuos, el cual nos indica que tan mal está nuestro modelo.

**Definición 2.2.6.** Se denomina **error estándar del modelo (SE)** al valor definido mediante la siguiente fórmula

$$SE = \sqrt{\frac{SCR}{T - k_i}}$$

es el número de parámetros de la  $i$ -ésima ecuación a estimar.

El SE representa la distancia promedio entre los valores estimados y las observaciones. Por tanto, los valores más pequeños de este estadístico implica que las observaciones están más cerca de la línea ajustada.

Por último, otro estadístico importante es el **logaritmo de la función de verosimilitud** univariante que se define por:

$$\ln \mathcal{L} = -\frac{T}{2} [1 + \ln(2\pi)] - \frac{T}{2} \ln(\tilde{\sigma}_u^2)$$

Para el caso del modelo multivariante se tiene como estadísticos al determinante de la matriz de varianzas-covarianzas residual estimada (y ajustada por los grados de libertad) y los criterios de Akaike y Schwarz multivariante. Estos dos últimos estadísticos se presentan en la siguiente subsección.

#### 2.2.5.4. Determinación del número de retardos

Cuando vamos a estimar los modelos VAR debemos tener en cuenta el número de retardos que vamos a incluir en la estimación del modelo. Esto puede ser realizado al analizar y comparar los resultados de la estimación entre diferentes modelos alternativos.

Entre los criterios más utilizados para seleccionar entre modelos alternativos se encuentran el criterio informativo de Akaike (AIC), el criterio de Schwarz (SC) y el criterio de Hanan-Quinn (HQ), en su versión multivariante.

En el caso de la representación VAR, los criterios previamente mencionados pueden ser utilizados para determinar el orden  $p$  del modelo. Para la selección del orden adecuado, primero debemos estimar todos los modelos VAR para retardos de 0 a

$p_0$  ( $p_0$  es el máximo retardo admitido por la teoría o disponibilidad de los datos y es fijado de antemano). Luego, para cada retardo se calculan los estadísticos. Las expresiones de los estadísticos  $AIC(p)$ ,  $SC(p)$  y  $HQ(p)$  para el caso multivariante están dadas por:

$$\begin{aligned} AIC(p) &= \ln(|\tilde{\Sigma}_u(p)|) + \frac{2n^2p}{T} \\ SC(p) &= \ln(|\tilde{\Sigma}_u(p)|) + \frac{n^2p \ln(p)}{T} \\ HQ(p) &= \ln(|\tilde{\Sigma}_u(p)|) + \frac{2n^2p \ln(\ln(T))}{T} \end{aligned}$$

donde  $n$  es el número de variables endógenas del modelo,  $p$  es el número de retardos,  $T$  es el número de observaciones,  $\tilde{\Sigma}_u(p)$  es el estimador ML de la matriz  $\Sigma_u$  para un modelo VAR( $p$ ) dado en (2.2.24) y  $|\cdot|$  denota el determinante de una matriz.

Para cada uno de estos criterios, se escoge como orden del modelo al retardo que minimice el estadístico dado.

El **logaritmo de la función verosimilitud** también es utilizada para determinar el retardo del modelo. Este estadístico se obtiene al reemplazar (2.2.24) en (2.2.23) y operar los términos. La expresión resultante de este estadístico es

$$\ln \mathcal{L}(p) = -\frac{nT}{2} [1 + \ln(2\pi)] - \frac{T}{2} \ln(|\tilde{\Sigma}_u(p)|).$$

El retardo que maximice el logaritmo de la función de verosimilitud, será escogido como el orden del modelo.

La **razón de máxima verosimilitud** es otro criterio utilizado para determinar el retardo del modelo. Supongamos que  $p_0$  es el máximo retardo admitido como orden del modelo VAR. Entonces este estadístico es utilizado para contrastar la siguiente sucesión de hipótesis nula y alternativa:

$$\begin{aligned} H_0^1 : A_{p_0} = 0 \quad vs \quad H_1^1 : A_{p_0} \neq 0 \\ H_0^2 : A_{p_0-1} = 0 \quad vs \quad H_1^2 : A_{p_0-1} \neq 0 | A_{p_0} = 0 \\ \vdots \\ H_0^i : A_{p_0-i+1} = 0 \quad vs \quad H_1^i : A_{p_0-i+1} \neq 0 | A_{p_0} = \dots = A_{p_0-i+2} = 0 \\ \vdots \\ H_0^{p_0} : A_1 = 0 \quad vs \quad H_1^{p_0} : A_1 \neq 0 | A_{p_0} = \dots = A_2 = 0 \end{aligned} \quad (2.2.25)$$

donde los  $A_j$  son las matrices de coeficientes del modelo VAR. En este esquema, cada hipótesis nula es contrastada condicionando sobre el hecho de que las anteriores que son verdaderas

El estadístico de contraste para contrastar la  $i$ -ésima hipótesis nula es

$$\lambda_{LR}(i) = T[\ln(|\tilde{\Sigma}_u(p_0 - i)|) - \ln(|\tilde{\Sigma}_u(p_0 - i + 1)|)]$$

donde  $T$  es el número de observaciones y  $\tilde{\Sigma}_u(p_0)$  es el estimador ML de la matriz  $\Sigma_u$  para un modelo VAR( $p_0$ ). Este estadístico se distribuye asintóticamente bajo la

hipótesis nula como una ji-cuadrado con  $n^2$  grados de libertad. Bajo  $H_0^i$ , se rechaza  $H_0^i$  si  $\lambda_{LR}(i) > \chi_{(n^2); \alpha}^2$  para un nivel de significancia  $\alpha$ .

En la práctica, se utiliza el estadístico LR corregido por el factor  $(T - np - 1)$  donde  $np + 1$  representa el número de parámetros por cada ecuación del modelo. El estadístico LR modificado está dado por:

$$\lambda_{LR}^*(i) = (T - ni - 1)[\ln(|\tilde{\Sigma}_u(p_0 - i)|) - \ln(|\tilde{\Sigma}_u(p_0 - i + 1)|)].$$

En el esquema (2.2.5.4), cada hipótesis nula es contrastada condicionando sobre el hecho de que las anteriores son verdaderas. Además, cada hipótesis nula y alternativa se puede expresar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} H_0^i &: \text{El modelo no es un VAR}(p_0 - i + 1) \\ H_1^i &: \text{El modelo es un VAR}(p_0 - i + 1) \end{aligned}$$

Primero, procedemos a contrastar la hipótesis nula  $H_0^1$  contra la alternativa  $H_1^1$ . Si  $H_0^1$  no es rechazada entonces podemos asegurar que nuestro modelo VAR no es de orden  $p_0$ .

Luego, procedemos a contrastar si nuestro modelo es de orden  $p_0 - 1$  dado que no es orden  $p_0$ ; es decir, debemos contrastar la hipótesis nula  $H_0^2$  contra la alternativa  $H_1^2$ . Si  $H_0^2$  no es rechazada entonces podemos asegurar que nuestro modelo VAR no es de orden  $p_0 - 1$  y seguimos con el contraste de las siguientes hipótesis nula y alternativa.

Este procedimiento termina cuando se rechaza la hipótesis nula por primera vez y el orden del modelo es dado por el retardo que se asume en esta hipótesis nula. Es decir, si se rechaza  $H_0^i$  entonces el orden del modelo será  $p = p_0 - i + 1$ .

Por tanto, el orden del modelo VAR será determinado por el retardo  $p$  que cumpla con la mayoría de los criterios expuestos.

## 2.2.6. Validación del modelo

Una vez que el orden del modelo VAR ha sido seleccionado, procedemos a estimar los coeficientes. A parte de analizar la significancia de los coeficientes estimados, debemos analizar si se cumplen los supuestos, es decir, si el modelo es estable y los  $u_t$  son un ruido blanco.

### 2.2.6.1. Estabilidad del modelo

En EViews, la estabilidad del modelo es determinada mediante los criterios analítico y gráfico de las raíces inversas del polinomio característico inverso. El criterio analítico presenta la tabulación de las raíces inversas con sus respectivos módulos. El criterio gráfico muestra las raíces inversas sobre el círculo unitario complejo.

El modelo VAR es estable si el módulo de las raíces inversas es menor que 1. Esta condición es equivalente a que las raíces inversas están dentro del círculo unitario complejo. Por tanto, los dos criterios indican lo mismo.

### 2.2.6.2. Incorrelación de los residuos

Luego de comprobar la estabilidad del modelo, debemos analizar si las perturbaciones son ruido blanco; es decir, si no están autocorrelacionadas y son homocédsticas (varianzas iguales). Para verificar el supuesto de incorrelación tenemos la prueba de Portmanteau y la prueba del Multiplicador de Lagrange (LM).

Antes de presentar estas dos pruebas, vamos a introducir las matrices de autocovarianza y autocorrelación de las perturbaciones.

Si  $u_t$  es un ruido blanco  $n$ -dimensional con matriz de covarianzas  $\Sigma_u$ . Las matrices de autocovarianza y autocorrelación de  $u_t$  con respecto al retardo  $j$  están dadas por:

$$\begin{aligned} C_j &= E(u_t u'_{t-j}) \\ R_j &= D_u^{-1} C_j D_u^{-1} \end{aligned}$$

donde  $D_u^{-1}$  es una matriz diagonal cuyos elementos son el inverso de las raíces cuadradas de los elementos de la diagonal de  $C_0$ ; es decir,  $\Sigma_u$  ya que  $C_0 = E(u_t u'_t) = \Sigma_u$ .

En la práctica,  $\Sigma_u$  es desconocida y debe ser estimada. Por tanto, las matrices  $C_j$  y  $R_j$  también deben ser estimadas. Entonces las expresiones de los estimadores de estas matrices son:

$$\begin{aligned} \hat{C}_j &= \frac{1}{T} \sum_{t=j+1}^T \hat{u}_t \hat{u}'_{t-j} \quad j = 0, 1, \dots; j < T \\ \hat{R}_j &= \hat{D}_u^{-1} \hat{C}_j \hat{D}_u^{-1} \quad j = 0, 1, \dots; j < T \end{aligned}$$

donde  $T$  es el número de observaciones,  $\hat{u}_t$  son los residuos del modelo VAR (estable) estimado, y  $\hat{D}_u^{-1}$  es una matriz diagonal cuyos elementos son el inverso de las raíces cuadradas de los elementos de la diagonal de  $\hat{C}_0$ .

### Prueba de Portmanteau

La prueba de Portmanteau fue extendida para modelos multivariantes por Hosking (1980). Esta prueba es utilizada para determinar si las autocorrelaciones de las perturbaciones, respecto a un retardo específico, son estadísticamente nulas.

Se plantea la hipótesis nula y la hipótesis alternativa:

$$\begin{aligned} H_0 &: \mathbf{R}_k = (R_1, \dots, R_k) = 0 \\ H_1 &: \mathbf{R}_k \neq 0 \end{aligned}$$

El estadístico de contraste es

$$Q_k = T \sum_{i=1}^k tr(\hat{C}'_i \hat{C}_0^{-1} \hat{C}_i \hat{C}_0^{-1})$$

donde  $tr(\cdot)$  denota la traza de una matriz.

Este estadístico se distribuye asintóticamente bajo  $H_0$  como una ji-cuadrado con  $n^2(k-p)$  grados de libertad. Bajo  $H_0$ , se rechaza  $H_0$  si  $p\text{-valor} < 0,05$ .

Hosking consideró una modificación del estadístico  $Q_k$  para obtener mejores propiedades. El estadístico modificado es:

$$Q_k^* := T^2 \sum_{i=1}^k \frac{1}{T-i} tr(\hat{C}'_i \hat{C}_0^{-1} \hat{C}_i \hat{C}_0^{-1}).$$

## Prueba del Multiplicador de Lagrange (LM)

También conocida como prueba de Breusch-Godfrey, es utilizada para detectar autocorrelación de las perturbaciones de cualquier orden en modelos con variables dependientes retardadas. Para determinar si existe autocorrelación de orden  $k$ , se plantea la hipótesis nula y la hipótesis alternativa:

$$\begin{aligned} H_0 : D_k &= 0 \\ H_1 : D_k &\neq 0 \end{aligned}$$

$D_k$  proviene del modelo auxiliar:

$$\hat{u}_t = \nu + A_1 Y_{t-1} + \cdots + A_p Y_{t-p} + D_k \hat{u}_{t-k} + \varepsilon_t \quad (2.2.26)$$

donde  $\hat{u}_t$  son los residuos del modelo VAR( $p$ ) estimado y  $\varepsilon_t$  es un ruido blanco.

Si denotamos por  $\hat{\varepsilon}_t$  a los residuos estimados del modelo auxiliar (2.2.26), entonces el estimador de la matriz de covarianzas es

$$\tilde{\Sigma}_\varepsilon = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \hat{\varepsilon}_i \hat{\varepsilon}_i'$$

Si denotamos por  $\hat{\varepsilon}_t^R$  a los residuos obtenidos de la estimación del modelo auxiliar (2.2.26) sin el residuo retardado  $\hat{u}_{t-k}$ , entonces el estimador de esta matriz de covarianzas es

$$\tilde{\Sigma}_R = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \hat{\varepsilon}_i^R \hat{\varepsilon}_i^{R'}$$

El estadístico de contraste es

$$LM_k = T[n - \text{tr}(\tilde{\Sigma}_\varepsilon \tilde{\Sigma}_R^{-1})].$$

Este estadístico se distribuye asintóticamente bajo  $H_0$  como una ji-cuadrado con  $n^2$  grados de libertad. Bajo  $H_0$ , se rechaza  $H_0$  si  $p\text{-valor} < 0,05$ .

### 2.2.6.3. Homocedasticidad

Para contrastar la hipótesis de homocedasticidad de las perturbaciones del modelo (varianzas iguales) se utiliza la prueba de heteroscedasticidad de White. Esta prueba es una extensión al caso multivariante de la propuesta por White (1980).

## Prueba de White

Se plantea la hipótesis nula y la hipótesis alternativa:

$$\begin{aligned} H_0 : u_t &\text{ son homocedásticos} \\ H_1 : u_t &\text{ son heteroscedásticos} \end{aligned}$$

Asumimos que se han calculado los residuos del modelo VAR( $p$ ) estimado  $\hat{u}_t$  ( $t = 1, \dots, T$ ). Sean  $\mathbf{\Omega}_t = (\hat{u}_{1t}^2, \dots, \hat{u}_{nt}^2, \hat{u}_{1t}\hat{u}_{2t}, \dots, \hat{u}_{nt}\hat{u}_{(n-1)t})$  un vector  $r$ -dimensional con  $r$  igual al número de productos cruzados de los términos de error de las  $n$  ecuaciones del modelo:  $r = \frac{n(n+1)}{2}$ ,  $\mathbf{\Omega}$  la matriz de orden  $T \times r$  asociada a las observaciones dadas

$T$  y  $\text{vec}(\mathbf{\Omega})$  la vectorización de la matriz  $\mathbf{\Omega}$ . Sean  $L_T$  un vector  $T$ -dimensional de 1's y  $P_T$  la matriz de observaciones de orden  $T \times q$  en  $q$  funciones de las  $n$  variables de  $Y_t$  (y sus  $p$  retardos). Estas funciones son las variables originales y sus respectivos cuadrados, de lo cual se conoce que  $q = 2np$ .

Para definir el estadístico de contraste, es necesario del siguiente modelo auxiliar:

$$\text{vec}(\mathbf{\Omega}) = \mathbf{L}\mathbf{w} + \mathbf{P}\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.2.27)$$

donde  $\mathbf{L}$  y  $\mathbf{P}$  son matrices de bloque diagonal:  $\mathbf{L} = \text{diag}_{s=1}^r(L_T)$  y  $\mathbf{P} = \text{diag}_{s=1}^r(P_T)$  y cuyos órdenes son  $Tr \times r$  y  $Tr \times qr$ , respectivamente,  $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n, w_1w_2, \dots, w_nw_{n-1})'$  es un vector  $r$ -dimensional,  $\boldsymbol{\alpha}$  es un vector  $qr$ -dimensional y  $\boldsymbol{\varepsilon}$  es un vector  $Tr$ -dimensional de innovaciones tal que bajo  $H_0$ :  $E(\boldsymbol{\varepsilon}) = 0$  y  $V(\boldsymbol{\varepsilon}) = \widehat{V}_{\mathbf{\Omega}} \otimes I_T$  con  $\widehat{V}_{\mathbf{\Omega}} = \frac{1}{T}\mathbf{\Omega}'\mathbf{\Omega}$ .

De (2.2.27), podemos observar que la hipótesis nula es equivalente a contrastar que  $\boldsymbol{\alpha} = 0$ .

El estadístico de contraste es

$$LM_{white} = Ttr[(\mathbf{\Omega}'\mathbf{\Omega})^{-1}\mathbf{\Omega}'\mathbf{P}(\mathbf{P}'\mathbf{P})^{-1}\mathbf{P}'\mathbf{\Omega}].$$

Este estadístico se distribuye asintóticamente bajo  $H_0$  como una ji-cuadrado con  $qr$  grados de libertad. Bajo  $H_0$ , se rechaza  $H_0$  si  $p\text{-valor} < 0,05$ .

#### 2.2.6.4. Normalidad de los residuos

Para verificar la normalidad de las perturbaciones se utiliza la prueba de Jarque-Bera. En este caso, presentamos una extensión para el caso multivariante de esta prueba.

#### Prueba de Jarque-Bera

Se plantea la hipótesis nula y la hipótesis alternativa:

$$H_0 : u_t \sim \text{Distribución Normal Multivariante}$$

$$H_1 : u_t \sim \text{Distribución no Normal Multivariante}$$

Consideremos que se disponen de los residuos  $\widehat{u}_t$  ( $t = 1, \dots, T$ ) del modelo VAR estimado, y además, la matriz de varianzas-covarianzas residual  $\widetilde{\Sigma}_u$  está dada por (2.2.24). El estadístico de contraste se construye a partir de la asimetría y curtosis de los residuos estandarizados:

$$\widehat{v}_t = (\widehat{v}_{1,t}, \dots, \widehat{v}_{n,t})' = \widehat{P}\widehat{u}_t$$

donde  $\widehat{P}$  es una matriz tal que  $\widehat{P}\widehat{P}' = \widetilde{\Sigma}_u$ . Notemos que  $\widehat{P}$  no es única y por tanto, los resultados de esta prueba dependerán de su elección.

Lütkepohl (2005) señala que  $\widehat{P}$  puede ser la matriz triangular inferior de la descomposición de Cholesky de  $\widetilde{\Sigma}_u$ . En este caso, el valor del estadístico de contraste depende del orden de las variables endógenas en el modelo.

Doornik y Hansen (1994) proponen que  $\widehat{P}$  es la raíz cuadrada de la matriz de correlación correspondiente a  $\widetilde{\Sigma}_u$ . Esto garantiza que el estadístico de contraste es invariante del orden de las variables endógenas en el modelo.

Urzua (1997) plantea que la matriz  $\widehat{P}$  está dada por

$$\widehat{P} = \widehat{V}\widehat{D}^{1/2}\widehat{V}'$$

donde  $\widehat{D}$  es una matriz diagonal cuyos elementos de la diagonal son los valores propios de la matriz de covarianzas residuales y  $\widehat{V}$  es la matriz ortonormal de los respectivos vectores propios.

Las expresiones de los vectores de asimetría y curtosis son:

$$\mathbf{b}_1 := (b_{1,1}, \dots, b_{n,1})' \quad \text{con } b_{j,1} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (\widehat{v}_{j,t})^3, \quad j = 1, \dots, n$$

$$\mathbf{b}_2 := (b_{1,2}, \dots, b_{n,2})' \quad \text{con } b_{j,2} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (\widehat{v}_{j,t})^4, \quad j = 1, \dots, n$$

Podemos notar que  $b_{j,1}$  y  $b_{j,2}$  son la asimetría y curtosis estimados de la  $j$ -ésima componente del vector  $u_t$ .

Definimos el vector  $n$  dimensional  $\mathbf{3}_n = (3, \dots, 3)'$ . Entonces el estadístico de contraste es:

$$JB_M = T \left[ \frac{\mathbf{b}'_1 \mathbf{b}_1}{6} + \frac{(\mathbf{b}_2 - \mathbf{3}_n)'(\mathbf{b}_2 - \mathbf{3}_n)}{24} \right]$$

donde  $\mathbf{b}'_1 \mathbf{b}_1$  y  $(\mathbf{b}_2 - \mathbf{3}_n)'(\mathbf{b}_2 - \mathbf{3}_n)$  corresponden a la asimetría y curtosis de la serie multivariante  $u_t$ . Este estadístico se distribuye asintóticamente bajo  $H_0$  como una ji-cuadrado con  $2n$  grados de libertad. Bajo  $H_0$ , se rechaza  $H_0$  si  $p\text{-valor} < 0,05$ .

## 2.2.7. Análisis de impulso-respuesta

En la práctica, es de gran interés conocer la respuesta de una variable ante el impulso de otra variable de un sistema conformado por varias variables. Por tanto, en esta subsección estudiaremos esta relación de impulso-respuesta entre dos variables en un sistema dado.

Estas relaciones de impulso-respuesta pueden ser comprendidas fácilmente a través de la representación media móvil de un proceso VAR estable (Krätzig y Lütkepohl, 2004). Entonces, consideremos la representación estable (2.2.8) con  $\nu = 0$  (por facilidad de cálculos):

$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \Theta_j u_{t-j} \quad (2.2.28)$$

donde  $\Theta_j$  se determinan mediante (2.2.9).

Asumiendo que los valores pasados de  $Y_t$  son constantes, el  $(i, l)$ -elemento de  $\Theta_j$  representa la respuesta (reacción) de la  $i$ -ésima variable del sistema ( $Y_{i,t}$ ) ante un choque (shock) unitario en la variable  $l$  ( $Y_{l,t}$ ) durante  $j$  periodos.

De (2.2.28) también podemos notar que el cambio en  $Y_{j,t}$  es medido por la innovación  $u_{j,t}$ . Por tanto, los elementos de  $\Theta_j$  representan las respuestas al impulso de las componentes de  $Y_t$  con respecto a las innovaciones  $u_t$ .

Dado que el proceso es estable entonces  $\Theta_j \rightarrow 0$  cuando  $j \rightarrow \infty$ . Esto nos indica que el efecto de un impulso es transitorio; es decir, va desapareciendo con el paso del tiempo.

Un inconveniente en este análisis de impulso-respuesta es que las innovaciones  $u_t$  están correlacionadas contemporáneamente, es decir,  $\Sigma_u$  no es diagonal. Esto implica que un choque en una variable puede estar acompañado por un choque en otra variable. Si ignoramos esto, entonces estaremos distorsionando la verdadera relación dinámica entre las variables. Por tanto, Lütkepohl y Krätzig (2004) señalan que es preferible utilizar innovaciones ortogonales en este tipo de análisis.

Una forma de obtener innovaciones ortogonales es a través de la descomposición de Cholesky de la matriz  $\Sigma_u$ . Si  $P$  es una matriz triangular tal que  $\Sigma_u = PP'$ , entonces las innovaciones ortogonales están dadas por  $\varepsilon_t = P^{-1}u_t$ . Además, se tiene que  $\Sigma_\varepsilon = E(\varepsilon_t\varepsilon_t')$  es una matriz diagonal cuyos elementos son las varianzas de las innovaciones ortogonales.

De (2.2.28) se sigue que

$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j \varepsilon_{t-j} \quad (2.2.29)$$

donde  $\Psi_j = \Theta_j P$  ( $j = 0, 1, 2, \dots$ ).

En esta representación podemos notar que un cambio en una componente de  $\varepsilon_t$  no tiene efecto en las otras componentes porque las componentes no están correlacionadas (son ortogonales). Además, como  $P$  es una matriz triangular, entonces el orden de las variables en el vector  $Y_t$  es importante.

## 2.2.8. Descomposición de la Varianza

La descomposición de la varianza del error de predicción nos permite determinar la contribución de cada una de las innovaciones a la varianza del error. Consideremos la representación media móvil de un proceso VAR(p) estable:

$$Y_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \Theta_j u_{t-j}.$$

Además, asumiremos que las innovaciones  $u_t$  deben ser ortogonalizadas como en la subsección previa.

Si denotamos por  $\Omega_t = \{Y_s : s \leq t\}$  al conjunto de información disponible en  $t$ . La predicción del modelo para un horizonte  $h$  es:

$$Y_t(h) = E(Y_{t+h} | \Omega_t) = E \left( \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \Theta_j u_{t+h-j} \middle| \Omega_t \right) = \mu + \sum_{j=h}^{\infty} \Theta_j u_{t+h-j}.$$

Por tanto, el error de predicción al horizonte  $h$  es:

$$\begin{aligned} e_t(h) &= Y_{t+h} - Y_t(h) = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \Theta_j u_{t+h-j} - \mu - \sum_{j=h}^{\infty} \Theta_j u_{t+h-j} \\ &= \sum_{j=0}^{h-1} \Theta_j u_{t+h-j} \\ &= \sum_{j=0}^{h-1} \Theta_j P P^{-1} u_{t+h-j} \end{aligned}$$



$$= \sum_{j=0}^{h-1} \Psi_j \varepsilon_{t+h-j}.$$

Si denotamos  $\psi_{km,j}$  a la  $(k, m)$ -ésima entrada de la matriz  $\Psi_j$  entonces el error de predicción al horizonte  $h$  de la  $i$ -ésima componente del vector  $Y_t$  es

$$\begin{aligned} e_{i,t}(h) &= \sum_{j=0}^{h-1} (\psi_{i1,j} \varepsilon_{1,t+h-j} + \dots + \psi_{in,j} \varepsilon_{n,t+h-j}) \\ &= \sum_{k=1}^n (\psi_{ik,0} \varepsilon_{k,t+h} + \dots + \psi_{ik,h-1} \varepsilon_{k,t+1}). \end{aligned}$$

Dado que las innovaciones  $\varepsilon_t$  no están correlacionadas, entonces la varianza del error de predicción al horizonte  $h$  de la  $i$ -ésima componente del vector  $Y_t$  está dada por:

$$\begin{aligned} \sigma_i^2(h) &= E[e_{i,t}(h)]^2 \\ &= \sum_{k=1}^n \sigma_{\varepsilon_k}^2 (\psi_{ik,0}^2 + \dots + \psi_{ik,h-1}^2) \end{aligned}$$

donde  $\sigma_{\varepsilon_k}^2$  es la varianza de la  $k$ -ésima componente de  $\varepsilon_t$  (o  $k$ -ésima entrada de la diagonal principal de  $\Sigma_\varepsilon$ ).

El término  $\sigma_{\varepsilon_k}^2 (\psi_{ik,0}^2 + \dots + \psi_{ik,h-1}^2)$  puede ser interpretado como la contribución de la variable  $k$  a la varianza del error de predicción al horizonte  $h$  de la variable  $i$ . Ahora, dividiendo este término por  $\sigma_i^2(h)$  y multiplicando por 100 nos da la contribución porcentual de la variable  $k$  a la varianza del error de predicción al horizonte  $h$  de la variable  $i$ :

$$\omega_{ik}(h) = 100 \left[ \frac{\sigma_{\varepsilon_k}^2 (\psi_{ik,0}^2 + \dots + \psi_{ik,h-1}^2)}{\sigma_i^2(h)} \right].$$

## 2.2.9. VARs Bayesianos

En la econometría y otros campos de investigación aplicada se ha notado un gran interés por el uso de métodos bayesianos. La econometría bayesiana está basada en algunas reglas simples de probabilidades que son aplicables a los problemas clásicos de la econometría como la estimación de los parámetros de un modelo, la comparación entre distintos modelos y la obtención de pronósticos (predicciones). Estos problemas involucran las mismas reglas de probabilidades, siendo esta una de las principales ventajas de esta metodología (Koop, 2003). Por otro lado, los modelos VAR son representaciones poco parsimoniosas donde con frecuencia se estima un gran número de parámetros en comparación al número de observaciones disponibles, lo cual resulta en estimaciones imprecisas de los parámetros (overfitting) (Oularis et al., 2016), predicciones malas y un número limitado de grados de libertad.

Litterman (1986), Doan et al. (1984), Sims y Zha (1998), y Kadiyala y Karlsson (1997) propusieron introducir una serie de restricciones probabilísticas con la finalidad de mejorar las estimaciones y predicciones. Estas restricciones son del tipo puramente estadísticas dando origen a los modelos VAR Bayesianos. A este tipo de modelos se los denota por BVAR (Bayesian Vector AutoRegressives).

## Notación

Sean  $Y$  un vector de  $T$  observaciones:  $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_T)$  y  $\theta$  un vector de parámetros. Denotaremos la distribución a priori de los parámetros por  $p(\theta)$  que representa lo que es conocido de  $\theta$  antes de conocer la información muestral. La distribución a posteriori de  $\theta$  dado  $Y$  representa lo que es conocido de  $\theta$  después de obtener la información muestral y se denota por  $p(\theta|Y)$ .

Por el teorema de Bayes se conoce que

$$p(\theta|Y) = \frac{p(Y|\theta)p(\theta)}{p(Y)}$$

donde  $p(Y)$  es la distribución muestral de  $Y$  que no depende de  $\theta$  (puede ser considerada como una constante) y  $p(Y|\theta)$  es la función de verosimilitud. Por tanto, la distribución a posteriori es proporcional al producto de la función de verosimilitud y la distribución a priori:

$$p(\theta|Y) \propto \mathcal{L}(\theta|Y)p(\theta)$$

### 2.2.9.1. Distribución a priori normal de los parámetros de un VAR gaussiano

Supongamos que  $Y_t$  es un proceso VAR( $p$ ) estable gaussiano:

$$Y_t = \nu + A_1 Y_{t-1} + A_2 Y_{t-2} + \dots + A_p Y_{t-p} + u_t, \quad t = 1, \dots, T$$

donde  $u_t \sim N(0, \Sigma_u)$ . La notación matricial de este proceso es:

$$Y = HZ + U.$$

Esta expresión puede ser reescrita mediante el producto de Kronecker y el operador vec:

$$\mathbf{y} = (Z' \otimes I_n)\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}$$

donde  $\mathbf{y} := \text{vec}(Y)$ ,  $\boldsymbol{\beta} := \text{vec}(H)$  y  $\mathbf{u} = \text{vec}(U)$  con  $\Sigma_{\mathbf{u}} = I_T \otimes \Sigma_u$ . Entonces la función de verosimilitud de este proceso está dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\boldsymbol{\beta}|\mathbf{y}) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{nT/2} |I_T \otimes \Sigma_u|^{-1/2} \\ &\times \exp \left\{ -\frac{1}{2} [\mathbf{y} - (Z' \otimes I_n)\boldsymbol{\beta}]' (I_T \otimes \Sigma_u^{-1}) [\mathbf{y} - (Z' \otimes I_n)\boldsymbol{\beta}] \right\}. \end{aligned}$$

Además, supongamos que la distribución a priori de  $\boldsymbol{\beta}$  es normal con media  $\boldsymbol{\beta}_0$  y matriz de varianzas-covarianzas  $V_{\boldsymbol{\beta}}$ :

$$p(\boldsymbol{\beta}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{(n^2 p+n)/2} |V_{\boldsymbol{\beta}}|^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}_0)' V_{\boldsymbol{\beta}}^{-1} (\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}_0) \right\}.$$

Al combinar la distribución a priori con la función de verosimilitud se obtiene la distribución a posteriori:

$$p(\boldsymbol{\beta}|\mathbf{y}) \propto p(\boldsymbol{\beta})\mathcal{L}(\boldsymbol{\beta}|\mathbf{y})$$

$$\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2}(\boldsymbol{\beta} - \bar{\boldsymbol{\beta}})' \bar{V}_{\boldsymbol{\beta}}^{-1} \boldsymbol{\beta} - \bar{\boldsymbol{\beta}} \right\}$$

donde la media posteriori es:

$$\bar{\boldsymbol{\beta}} = [V_{\boldsymbol{\beta}}^{-1} + (ZZ' \otimes \Sigma_u^{-1})]^{-1} [V_{\boldsymbol{\beta}}^{-1} \boldsymbol{\beta}_0 + (Z \otimes \Sigma_u^{-1}) \mathbf{y}]$$

y la matriz de varianza-covarianzas posteriori es:

$$\bar{V}_{\boldsymbol{\beta}} = [V_{\boldsymbol{\beta}}^{-1} + (ZZ' \otimes \Sigma_u^{-1})]^{-1}.$$

### 2.2.9.2. Distribución a priori de Minnesota (Litterman)

Litterman (1986) y Doan et al. (1984) propusieron una distribución a priori específica para los parámetros de un modelo VAR conocida como priori de Minnesota o priori de Litterman. Esta distribución a priori es una de las más conocidas y su nombre es debido a que sus autores eran investigadores de la Universidad de Minnesota y el Banco de la Reserva Federal de Minneapolis.

Para esta distribución a priori se asume que  $\Sigma_u$  es conocida y por ende, es reemplazada por su estimación,  $\hat{\Sigma}_u$ . Se supone que  $\hat{\Sigma}_u$  es una matriz diagonal:  $\hat{\Sigma}_u = \text{diag}(\hat{\sigma}_1^2, \dots, \hat{\sigma}_n^2)$  donde  $\hat{\sigma}_i^2$  es la varianza estimada del error de la  $i$ -ésima ecuación del modelo.

La distribución a priori de Minnesota para  $\boldsymbol{\beta}$  es:  $p(\boldsymbol{\beta}) \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\beta}_0, V_{\boldsymbol{\beta}})$ . Entonces la distribución a posteriori de  $\boldsymbol{\beta}$  es normal con media  $\bar{\boldsymbol{\beta}}$  y varianza  $\bar{V}_{\boldsymbol{\beta}}$  dadas por:

$$\bar{\boldsymbol{\beta}} = \bar{V}_{\boldsymbol{\beta}} [V_{\boldsymbol{\beta}}^{-1} \boldsymbol{\beta}_0 + (Z \otimes \hat{\Sigma}_u^{-1}) \mathbf{y}] \quad (2.2.30)$$

$$\bar{V}_{\boldsymbol{\beta}} = [V_{\boldsymbol{\beta}}^{-1} + (ZZ' \otimes \hat{\Sigma}_u^{-1})]^{-1}. \quad (2.2.31)$$

Inicialmente, la media a priori ( $\boldsymbol{\beta}_0$ ) para las matrices de coeficientes  $A_i$  que conforman  $\boldsymbol{\beta}$  se les asignó una estructura de matriz diagonal:  $E[A_i] = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_1)$  donde  $\mu_1$  ( $0 \leq \mu_1 \leq 1$ ) es un hiper-parámetro (parámetro que está establecido por el usuario o indirectamente ajustado a los datos) que caracteriza la persistencia<sup>3</sup> de las variables. Si  $\mu_1 = 1$  para toda matriz  $A_i$ , entonces todas las variables presentan una alta persistencia y esto a su vez es equivalente a la creencia de que las matrices de coeficientes muestran un comportamiento individual de paseo aleatorio (Litterman, 1986).

Si se cree que la dependencia intertemporal de las variables es débil, entonces se establece que  $\boldsymbol{\beta}_0 = 0$  ( $\mu_1 = 0$ ) y  $V_{\boldsymbol{\beta}} \neq 0$ . Es decir, la priori de Minnesota implica asumir que la mayoría de sus elementos son cero, lo cual asegura que los coeficientes del modelo VAR tienden a cero y disminuye el riesgo de overfitting en el modelo (Rummel, 2015). En este caso, la media posteriori en (2.2.30) se reduce a

$$\bar{\boldsymbol{\beta}} = [V_{\boldsymbol{\beta}}^{-1} + (ZZ' \otimes \hat{\Sigma}_u^{-1})]^{-1}.$$

---

<sup>3</sup>En el contexto de series temporales, el término persistencia a menudo se relaciona con la propiedad de memoria larga de las series. En otras palabras, una serie temporal es persistente si los efectos de un shock exógeno perduran en la serie durante mucho tiempo.

La matriz de varianzas-covarianzas a priori  $V_{\beta}$  propuesta por Litterman puede ser especificada como una matriz diagonal:

$$v_{ij,k} = \begin{cases} \left(\frac{\lambda_1}{k^{\lambda_3}}\right)^2 & i = j \\ \left(\frac{\lambda_1 \lambda_2 \widehat{\sigma}_i}{k^{\lambda_3} \widehat{\sigma}_j}\right)^2 & i \neq j \end{cases}$$

donde  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  y  $\lambda_3$  son hiper-parámetros dados;  $v_{ij,k}$  es la varianza a priori de la  $(i, j)$ -ésima entrada de la matriz  $A_k$  (o  $j$ -ésima variable endógena de la  $i$ -ésima ecuación en el retardo  $k$ ) y  $\widehat{\sigma}_j$  es la raíz cuadrada del  $j$ -ésimo elemento de la diagonal de  $\widehat{\Sigma}_u$ . Las varianzas a priori de los términos de intercepto son infinitas ( $\infty$ ) y esto refleja que no tenemos ninguna información previa para estos coeficientes.

$\lambda_1$  ( $\lambda_1 > 0$ ) caracteriza la tensión<sup>4</sup> general de la distribución a priori de  $\beta$ , y su valor debe ser cercano a cero en el caso de que exista más certidumbre sobre la priori. Este hiper-parámetro controla la desviación estándar de la  $(i, i)$ -ésima entrada de la matriz  $A_1$ .

El hiper-parámetro  $\lambda_2$  ( $0 < \lambda_2 < 1$ ) caracteriza la importancia de las variables retardadas correspondientes a la  $j$ -ésima variable endógena en la  $i$ -ésima ecuación del modelo. Esto se debe a que este parámetro controla la varianza de los coeficientes de las variables que son diferentes de la variable endógena de la ecuación  $i$ . Estos coeficientes se acercan a cero a medida que  $\lambda_2$  disminuye.

Finalmente, el hiper-parámetro  $\lambda_3$  ( $\lambda_3 > 0$ ) controla la velocidad a la cual la varianza a priori disminuye al aumentar la longitud del retardo  $k$  mediante el término  $1/k^{\lambda_3}$ . Esto implica que a medida que  $\lambda_3$  aumenta, los coeficientes de los retardos de orden superior se reducen a cero. Si se asume que la varianza a priori no disminuye entonces se establece  $\lambda_3 = 1$ .

### 2.2.9.3. Distribución a priori Normal-Wishart

Kadiyala y Karlsson (1997) mostraron que la función de verosimilitud  $\mathcal{L}(\beta, \Sigma_u | \mathbf{y})$  de un modelo VAR se puede descomponer en dos partes. Una parte es una distribución Normal para  $\beta$  dado  $\Sigma_u$  y la otra es una distribución Wishart inversa para  $\Sigma_u$ . La distribución a priori Normal-Wishart relaja la suposición de que la matriz de varianzas-covarianzas de los errores  $\Sigma_u$  es conocida considerando una distribución a priori para  $\Sigma_u$ .

Las distribuciones a priori para  $\beta$  y  $\Sigma_u$  están dadas por:

$$p(\beta | \Sigma_u) \sim \mathcal{N}(\beta_0, V_0 \otimes \Sigma_u) \quad p(\Sigma_u) \sim \mathcal{W}^{-1}(\Upsilon, w_0) \quad (2.2.32)$$

donde  $\beta = \text{vec}(H)$ ,  $V_0$  es una matriz de orden  $(np + 1) \times (np + 1)$ ,  $\mathcal{W}^{-1}$  representa la distribución Wishart inversa<sup>5</sup>,  $\Upsilon$  es una matriz simétrica definida positiva de orden  $n \times n$  y  $w_0$  denota los grados de libertad de esta distribución.

<sup>4</sup>En el contexto de la teoría de probabilidades, la tensión es una propiedad importante. Una medida de probabilidad es tensa si la medida de un conjunto compacto no se escapa en el sentido de que la medida del complemento de tal compacto es muy pequeño.

<sup>5</sup>La distribución Wishart es la generalización al caso multivariante de la distribución Gamma. Si  $W \sim \mathcal{W}(R, r)$ , donde  $R$  es de dimensión  $n \times n$ , entonces su densidad es proporcional a  $|W|^{(r-k-1)/2} \exp(-\frac{1}{2} \text{tr}(R^{-1}W))$ . Por otro lado,  $W$  tiene distribución Wishart inversa  $\mathcal{W}^{-1}(R, r)$  si su inversa  $W^{-1}$  tiene una distribución Wishart  $\mathcal{W}(R^{-1}, r)$ .

De (2.2.32) se tiene que la distribución a priori incondicional de  $\boldsymbol{\beta}$  ( $p(\boldsymbol{\beta})$ ) es normal con media y varianza  $E(\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\beta}_0$  y  $Var(\boldsymbol{\beta}) = (w_0 - n - 1)^{-1}V_0 \otimes \boldsymbol{\Upsilon}$ , respectivamente, donde  $w_0 > n + 1$ .

Dadas las distribuciones a priori supuestas, las distribuciones a posteriori son obtenidas como:

$$p(\boldsymbol{\beta}|\Sigma_u, \mathbf{y}) \sim \mathcal{N}(\bar{\boldsymbol{\beta}}, \bar{V}_0 \otimes \Sigma_u) \quad p(\Sigma_u|\mathbf{y}) \sim W^{-1}(\bar{\boldsymbol{\Upsilon}}, \bar{w}_0)$$

donde:

$$\begin{aligned} \bar{V}_0 &= (V_0^{-1} + ZZ')^{-1} \\ \bar{H} &= [H_0(V_0^{-1})' + YZ']\bar{V}_0' \\ \bar{w}_0 &= w_0 + T \\ \bar{\boldsymbol{\Upsilon}} &= (Y - \hat{H}Z)(Y - \hat{H}Z)' + \boldsymbol{\Upsilon} + \hat{H}ZZ'\hat{H}' + H_0V_0^{-1}H_0' - \bar{H}\bar{V}_0^{-1}\bar{H}' \end{aligned}$$

con  $\mathbf{y} = \text{vec}(Y)$ ,  $\bar{\boldsymbol{\beta}} = \text{vec}(\bar{H})$ ,  $\boldsymbol{\beta}_0 = \text{vec}(H_0)$  y  $\hat{H}$  es el estimador dado en (2.2.14). La distribución a posteriori marginal de  $H$ :  $p(H|\mathbf{y})$  es una distribución  $t$  matricial<sup>6</sup>  $\mathcal{MT}_{n,np+1}(\bar{H}, \bar{\boldsymbol{\Upsilon}}, \bar{V}_0^{-1}, w_0 + T)$ .

Para la distribución a priori Normal-Wishart es necesario asumir que  $\boldsymbol{\beta}_0$ ,  $V_0$ ,  $\boldsymbol{\Upsilon}$  y  $w_0$  son conocidos. En la practica  $\boldsymbol{\beta}_0$  es especificado como dependiente de un solo hiper-parámetro que controla la media del primer retardo de la variable endógena ( $\mu_1$ );  $V_\beta$  depende de un hiper-parámetro  $\lambda_1$  como en la priori de Minnesota;  $\boldsymbol{\Upsilon}$  es una matriz identidad y  $w_0$  es igual a los grados de libertad tal que se garantice la existencia de las varianzas a priori de  $\boldsymbol{\beta}$ . Entonces para la priori Normal-Wishart sólo se debe establecer dos parámetros:  $\mu_1$  y  $\lambda_1$ .

El hiper-parámetro  $\mu_1$  ( $\mu \in [0, 1]$ ) dirige la priori respecto a las propiedades del proceso de series de tiempo. Es decir, si se cree que las series del modelo VAR son estacionarias entonces  $\mu_1$  debe ser cero (o muy pequeño). En cambio,  $\mu = 1$  implica que las series del VAR están mejor modeladas con una raíz unitaria.

El hiper-parámetro  $\lambda_1$  ( $\lambda_1 > 0$ ) es el parámetro de ajuste general. Un valor grande de  $\lambda_1$  implica mayor certidumbre acerca de la priori de  $\boldsymbol{\beta}$ , lo cual es exactamente lo opuesto de cómo este parámetro funciona en el caso de la priori de Minnesota.

---

<sup>6</sup>La distribución  $t$  matricial ( $\mathcal{MT}$ ) es la generalización al caso matricial de la distribución  $t$  multivariante. Si  $V \sim \mathcal{MT}_{n,p}(M, \Psi, \Omega, r)$  donde  $V$  y  $M$  son matrices de orden  $n \times p$ ,  $\Psi$  es una matriz de orden  $n \times n$  y  $\Omega$  es una matriz de orden  $p \times p$  respectivamente, entonces la función de densidad de  $T$  es proporcional a  $|I_n + \Psi^{-1}(V - M)\Omega^{-1}(V - M)'|^{-(r+n+p-1)/2}$ .

## Capítulo 3

# Aplicación del modelo al Sector Bancario Privado de Ecuador

### 3.1. Descripción de las variables

La modelización se realiza considerando datos mensuales de las variables desde el año 2005 hasta el año 2018. Para ello, los datos son tomados de los boletines mensuales de las páginas web de la Superintendencia de Bancos del Ecuador (SBE), del Instituto Nacional de Estadísticas y Censos (INEC) y del Banco Central del Ecuador (BCE), los cuales están disponibles para el acceso público. Una vez obtenidos los datos, se procede a realizar una limpieza de ellos para luego proseguir con la construcción del modelo deseado. En este estudio inicialmente se disponía de 60 variables pero solo se presentarán las variables más relevantes, las cuales son indicadores macroeconómicos y microeconómicos. De manera general, los factores macroeconómicos representan indicadores del bienestar económico del país y la calidad de vida, y los factores microeconómicos representan índices de estructura y calidad de los activos, eficiencia, rentabilidad y liquidez que describen el comportamiento del sistema de bancos privados. En el Anexo A.1 se detalla la fuente de información de cada una de las variables consideradas para este estudio.

Las variables morosidad de las carteras de consumo, microcrédito y vivienda, proporción de activos productivos netos y activos productos/pasivos con costo son indicadores de la estructura y calidad de activos; es decir, estos indicadores reflejan la posición del riesgo crediticio y la posibilidad de cobertura para créditos irrecuperables.

La proporción de activos productivos netos mide la calidad de las colocaciones o la proporción de activos que generan rendimientos.

El indicador activos productos/pasivos con costo (ACTPROD\_PAS) mide la eficiente utilización de pasivos con costo como fuente de productividad. Este indicador también es conocido como utilización del pasivo con costo en relación a la productividad generada.

El grado de absorción del margen financiero neto es un indicador que establece el nivel de absorción de los egresos operacionales en los ingresos provenientes de la gestión operativa.

El margen de intermediación/activos (M\_ACT) y margen de intermediación/patrimonio (M\_PATR) son dos indicadores de eficiencia financiera que miden la

rentabilidad de la gestión operativa en relación a los activos y al patrimonio, respectivamente. Por tanto, cuanto mayor son estos indicadores, la colocación de préstamos en función a la cantidad de depósitos es más eficiente en relación al activo o patrimonio respectivamente.

La variable intermediación financiera (INTERFIN) mide el nivel de préstamos o créditos otorgados en relación a la cantidad de depósitos efectuados por parte de los depositantes en una entidad. Mientras mayor es este indicador, la entidad es más eficiente en la colocación de préstamos en función a la cantidad de depósitos a la vista y a plazo que receipta.

El volumen de crédito mide el volumen de colocaciones del sistema financiero privado, en operaciones de crédito otorgadas al público.

El ROA y ROE son dos indicadores de rentabilidad que miden el nivel de retorno generado por el activo y patrimonio, respectivamente. Mientras más altos son estos indicadores, es mejor la rentabilidad de la entidad financiera.

El índice de liquidez (LIQUIDEZ) se calcula dividiendo los fondos disponibles entre los depósitos a corto plazo. Este indicador nos permite conocer la capacidad de respuesta del sistema de bancos privados frente a requerimientos de efectivo inmediatos por parte de sus depositantes. Además, se escogió este indicador como medida de liquidez debido a la disponibilidad de los datos.

La inflación es un indicador económico de importancia, ya que mide la variación promedio del nivel de precios en todo el conjunto de una economía, en un período de tiempo determinado. La inflación mensual es la variación de precios en el último mes.

El desempleo es un indicador que mide la población en situación de desempleo de 15 años y más con relación a la población económicamente activa (PEA), expresado como porcentaje.

Las exportaciones no petroleras industrializadas y primarias, las importaciones de bienes de capital y consumo, y el precio del petróleo son variables macroeconómicas que tienen una importante incidencia en la economía del país. En enero del 2019, las exportaciones no petroleras presentaron un decrecimiento de 0,7% y las exportaciones petroleras tuvieron un decrecimiento del 18,1% en comparación con enero de 2018. Las importaciones de bienes de capital y consumo alcanzaron crecimientos del 11,9% y 8,7%. Para el presente estudio se considera la variación de estas variables con respecto al mes anterior.

La variable balanza comercial/PIB (BAL\_PIB) se calcula dividiendo el saldo de la balanza comercial entre el PIB. El saldo de la balanza comercial es el resultado de la diferencia entre las exportaciones e importaciones totales.

La variable captaciones/PIB (CAPT\_PIB) se calcula dividiendo las captaciones entre el PIB. Las captaciones es un indicador que mide el saldo de los depósitos del público en las entidades del sistema de bancos privados.

En la siguiente tabla se presenta un breve resumen de las variables seleccionadas para el estudio.

**Tabla 3.1:** Listado de variables más relevantes para el estudio

<b>Variable</b>	<b>Descripción</b>
CONS	Morosidad de la cartera de consumo (%)
MICRO	Morosidad de la cartera de microcrédito (%)

*Continúa en la siguiente página.*

*Viene de la página anterior.*

VIV	Morosidad de la cartera de vivienda (%)
GASTO_MF	Grado de absorción del margen financiero neto (%)
M_ACT	Rentabilidad de la gestión operativa en relación a los activos del sistema de bancos privados (%)
M_PATR	Rentabilidad de la gestión operativa en relación al patrimonio del sistema de bancos privados (%)
INTERFIN	Nivel de préstamos o créditos otorgados en relación a la cantidad de depósitos efectuados (%)
ACTPROD_ACT	Proporción de los activos productivos netos (%)
ACTPROD_PAS	Utilización del pasivo con costo en relación a la productividad generada (%)
VOL	Volumen de crédito del sistema de bancos privados (%)
ROA	Rentabilidad del activo del sistema de bancos privados (%)
ROE	Rentabilidad del patrimonio del sistema de bancos privados (%)
LIQUIDEZ	Índice de liquidez (%)
VIPC	Tasa de inflación mensual (%)
DESEMPLEO	Tasa de desempleo urbano mensual (%)
VEXP_NP_IND	Tasa de variación mensual de las exportaciones no petroleras industrializadas (%)
VEXP_NP_PRIM	Tasa de variación mensual de las exportaciones no petroleras primarias (%)
VIMP_CAP	Tasa de variación mensual de las importaciones de bienes de capital (%)
VIMP_CON	Tasa de variación mensual de las importaciones de bienes de consumo (%)
VPETR	Tasa de variación mensual del precio de petróleo (%)
BAL_PIB	Balanza comercial en relación al PIB (%)
CAPT_PIB	Captaciones del sistema de bancos privados en relación al PIB (%)

Es necesario mencionar que sólo se disponían de datos trimestrales de la tasa del desempleo y del PIB (utilizado en la construcción de las variables BAL\_PIB y CAPT\_PIB). En este caso se aplicó el método de interpolación por splines cúbicos para transformar los datos trimestrales a mensuales de estas variables.

Los datos del año 2005 hasta el año 2017 se utilizarán para la construcción del modelo y los datos del año 2018 se emplearán para comparar con los pronósticos obtenidos del modelo, y realizar pruebas de estrés.

En el Anexo A.2 se muestran los gráficos de las series de cada una de las variables. Esto nos permite observar el comportamiento que tienen las variables a lo largo del período de estudio.

### 3.2. Análisis de estacionariedad

Como ya se ha mencionado anteriormente, uno de los requisitos fundamentales en la estimación de los modelos es que las variables sean estacionarias. Por tanto, se



realiza la prueba DFA para determinar si las variables son estacionarias o no. En el caso de que las variables no sean estacionarias, se las diferencia o transforma según corresponda.

A partir de aquí, utilizaremos la siguiente notación:

- $D(\cdot)$ : la variable está diferenciada no estacionalmente una vez.
- $\text{LOG}(\cdot)$ : a la variable se le aplicó logaritmos.

Esto nos permitirá comprender los resultados que se mostrarán en este capítulo y en los anexos respectivos.

En el Anexo B.1 se muestra la prueba DFA de las series ya diferenciadas y/o transformadas. En cada prueba, se presenta la hipótesis nula; el modelo seleccionado en la opción *exógena* donde *ninguna* representa al modelo (2.1.5), *constante* al modelo (2.1.7) y *tendencia lineal con constante* al modelo (2.1.8); el estadístico de contraste; el p-valor y los valores críticos para los niveles de significancia del 10 %, 5 % y 1 %. En este caso, se rechaza la presencia de una raíz unitaria en la serie si el estadístico de contraste es menor que todos los valores críticos o si  $p\text{-valor} < 0,01$ .

Para las variables morosidad de las carteras de consumo, microcrédito y vivienda, grado de absorción del margen financiero neto, margen de intermediación/activos, margen de intermediación/patrimonio, intermediación financiera, proporción de activos productivos netos, activos productivos/pasivo con costo, ROA, ROE, índice de liquidez, desempleo, balanza comercial/PIB y captaciones/PIB se aplicó una diferenciación no estacional. Para la variable volumen de crédito se aplicó una transformación logarítmica para convertir los datos en porcentajes y una diferenciación no estacional. Al resto de las variables no hubo necesidad de diferenciarlas porque ya son estacionarias.

### 3.3. Selección de las variables

Una vez que las variables son estacionarias, se procede con análisis estadísticos de las variables lo cual nos permitirá seleccionar las variables relevantes para nuestro modelo. En este caso se calculó la correlación entre cada par de variables y se realizó la prueba de causalidad de Granger. Los resultados de estos análisis se presentan en los Anexos B.2 y B.3.

En las Tablas B.23 y B.24 se detalla las correlaciones calculadas entre cada par de variables consideradas para construir el modelo. En estas tablas se observa que la mayor parte de las correlaciones no son mayores a 0,7 ni menores a  $-0,7$ , a excepción de las correlaciones entre la morosidad de la cartera de consumo con respecto a la morosidad de las carteras de microcrédito y vivienda, margen de intermediación/activos y margen de intermediación/patrimonio, el grado de absorción del margen financiero neto con respecto a las variables margen de intermediación/activos y margen de intermediación/patrimonio, y entre ROA y ROE.

Para la prueba de causalidad de Granger se consideró 6 y 12 retardos, así como también retardos menores a 6 y mayores a 12. Esto se realizó para analizar el comportamiento de la causalidad a corto y largo plazo. En la tabla B.25 se muestra los resultados de la prueba sólo para 6 retardos por facilidad y comprensión.

De acuerdo a la prueba de causalidad de Granger, se observa que la morosidad de la cartera de microcrédito es causada en el sentido de Granger por la morosidad de la cartera de consumo. La morosidad de la cartera de vivienda causa en el sentido de Granger a la morosidad de las carteras de consumo y microcrédito.

Los siguientes indicadores: margen de intermediación/activos, margen de intermediación/patrimonio, ROA, ROE, índice de liquidez, inflación, variación de las exportaciones no petroleras primarias, variación de las importaciones de bienes de consumo causan a la manera de Granger a la morosidad de las carteras de consumo, microcrédito y vivienda.

El grado de absorción del margen financiero neto causa en el sentido Granger a la morosidad de las carteras de microcrédito y vivienda. En cambio, la morosidad de la cartera de consumo presenta causalidad de Granger en ambas direcciones con respecto a esta variable.

El volumen de crédito y la variable captaciones/PIB causan en el sentido Granger a la morosidad de las carteras de consumo y vivienda. En cambio, la morosidad de la cartera de microcrédito no presenta causalidad a la manera de Granger en ninguna dirección con estas variables.

La variación de las exportaciones no petroleras industrializadas no causa en el sentido Granger a la morosidad de las carteras de consumo y vivienda. Sin embargo, esta variable es causada en el sentido de Granger por la morosidad de las tres carteras.

La variable balanza comercial/PIB no presenta causalidad a la manera de Granger en ninguna dirección con respecto a la morosidad de las carteras de consumo y vivienda. En cambio la morosidad de la cartera de microcrédito es causada en el sentido de Granger por esta variable.

Las variables que no causan a la manera de Granger en ninguna dirección con respecto a la morosidad de las carteras de consumo, microcrédito y vivienda son: activos productivos/pasivo con costo, desempleo, intermediación financiera, variación de las importaciones de bienes de capital y variación del precio de petróleo.

### **3.3.1. Variables endógenas**

Como se mencionó previamente, las variables relacionadas a la morosidad se consideran endógenas. Por tanto, el vector de variables endógenas está conformado por  $D(\text{CONS})$ ,  $D(\text{MICRO})$  y  $D(\text{VIV})$ . A parte de estas variables, se les debe sumar aquellas variables que presenten una fuerte correlación y causen en el sentido de Granger con las variables endógenas previamente señaladas en ambas direcciones. Sin embargo, como no se dispone de más variables que tengan un efecto de retroalimentación con todas las variables previamente mencionadas, entonces no se adicionan más variables al vector de variables endógenas.

### **3.3.2. Variables exógenas**

La selección de variables exógenas se realiza considerando aquellas variables que causen en el sentido de Granger a la morosidad de por los menos dos de las carteras y tomando como referencia a los factores macroeconómicos, que se relacionan con la morosidad de la cartera de crédito, propuestos en los modelos y hallazgos previos de la literatura que se expone en la Sección 1.2 de este documento. Por tanto, además

de la constante, se toma como variables exógenas a:  $D(\text{GASTO\_MF})$ ,  $D(\text{M\_ACT})$ ,  $D(\text{M\_PATR})$ ,  $D(\text{ACTPROD\_ACT})$ ,  $D(\text{LOG(VOL)})$ ,  $D(\text{ROA})$ ,  $D(\text{ROE})$ ,  $D(\text{LIQUIDEZ})$ ,  $\text{VIPC}$ ,  $\text{VEXP\_NP\_PRIM}$ ,  $\text{VIMP\_CON}$  y  $D(\text{CAPT\_PIB})$ .

Entre las variables  $D(\text{GASTO\_MF})$ ,  $D(\text{M\_ACT})$  y  $D(\text{M\_PATR})$  se elige sólo una, al igual que entre  $D(\text{ROA})$  y  $D(\text{ROE})$ . Esto se realiza porque estas variables están muy correlacionadas entre ellas. Se escoge las siguientes variables:  $D(\text{GASTO\_MF})$  y  $D(\text{ROE})$  para construir el modelo puesto que como se verá más adelante, estas variables constituyen la mejor elección.

### 3.4. Estimación y validación de los modelos

Una vez definidas las variables endógenas y exógenas a incluir en el modelo, se procede con la estimación del mismo.

Para la elección del retardo inicial a considerar en la modelización del modelo VAR, se usarán los criterios de Log-Likelihood, LR, Akaike, Schwarz y Hannan-Quinn en cuanto a los seis primeros retardos. Los resultados pueden verse en la tabla 3.2.

**Tabla 3.2:** Criterios para escoger el retardo del VAR

<b>Criterio\Retardo</b>	1	2	3	4	5	6
Log-likelihood	-1,2931	13,3760	17,4304	23,3694	33,6746	53,7749
LR	37,8445	26,1878	7,0748	10,1241	17,1523	32,6462
Akaike	0,5408	0,4648	0,5311	0,5722	0,5547	0,4057
Schwarz	1,3271	1,4325	1,6803	1,9028	2,0668	2,0992
Hannan-Quinn	0,8603	0,8579	0,9980	1,1128	1,1690	1,0937

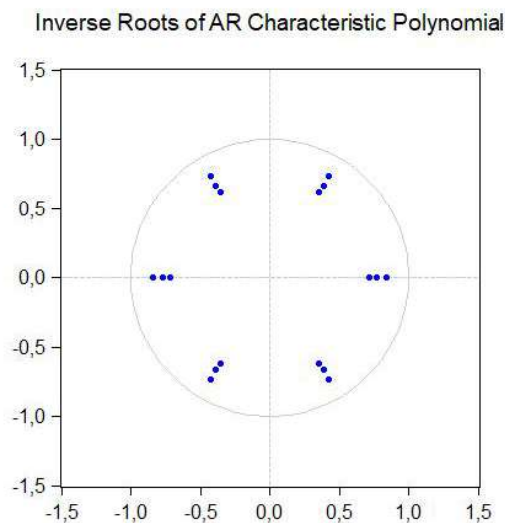
De acuerdo con la tabla precedente, el retardo 6 cumple con la mayoría de los criterios propuestos y por tanto, será considerado para iniciar la estimación del modelo.

Con el software estadístico EViews obtenemos una tabla con los valores estimados de los coeficientes, la desviación estándar (entre paréntesis) y el valor del estadístico  $t$  (entre corchetes) de los parámetros para cada ecuación del modelo VAR(6). Además, se presenta los estadísticos descritos en la Subsección 2.2.5.3. Esto se puede apreciar en el Anexo C.1.

Luego de estimar los coeficientes de los parámetros, se debe observar el cumplimiento de los supuestos del modelo VAR; es decir, el modelo es estable y las perturbaciones estimadas son no autocorrelacionadas, homocedásticas y normales. Para ello, primero analizamos la estabilidad del modelo VAR(6) inicial.

Raíces	Módulos
0,843291	0,843291
-0,421646 - 0,730312i	0,843291
-0,421646 + 0,730312i	0,843291
0,421646 - 0,730312i	0,843291
0,421646 + 0,730312i	0,843291
-0,843291	0,843291
-0,385325 - 0,667403i	0,770650
-0,385325 + 0,667403i	0,770650
0,770650	0,770650
0,385325 - 0,667403i	0,770650
0,385325 + 0,667403i	0,770650
-0,770650	0,770650
-0,713131	0,713131
0,356565 - 0,617590i	0,713131
0,356565 + 0,617590i	0,713131
-0,356565 - 0,617590i	0,713131
-0,356565 + 0,617590i	0,713131
0,713131	0,713131

**Tabla 3.3:** Raíces inversas-VAR(6) inicial



**Figura 3.1:** Criterio gráfico-VAR(6) inicial

En la tabla 3.3 se observa que el módulo de las raíces inversas es menor a 1, es decir, el modelo es estable. Esto también puede ser visto en la Figura 3.1, donde las raíces inversas están dentro del círculo unitario.

Después de esto, se calcula las pruebas de Pormanteau y LM para analizar si las perturbaciones son autocorrelacionadas o no. Estas pruebas se encuentran en las tablas 3.4 y 3.5.

**Tabla 3.4:** Prueba de Portmanteau-VAR(6) inicial

Retardo	Q-Stat.	Prob.	Q-Stat. Ajust	Prob.	gl
1	30,92487	—	31,13383	—	—
2	52,75024	—	53,25614	—	—
3	63,88629	—	64,62100	—	—
4	72,03297	—	72,99242	—	—
5	85,95806	—	87,40102	—	—
6	91,64892	—	93,33066	—	—
7	93,90251	0,0006	95,69535	0,0004	54
8	101,9668	0,0014	104,2172	0,0008	63
9	109,5036	0,0029	112,2385	0,0017	72
10	124,4773	0,0014	128,2894	0,0006	81
11	137,9560	0,0009	142,8425	0,0003	90
12	163,8117	0,0000	170,9630	0,0000	99
13	170,3943	0,0001	178,1748	0,0000	108
14	189,0979	0,0000	198,8180	0,0000	117
15	198,0989	0,0000	208,8266	0,0000	126
16	211,7469	0,0000	224,1164	0,0000	135
17	216,8070	0,0001	229,8282	0,0000	144
18	227,0704	0,0001	241,5018	0,0000	153
19	233,0151	0,0002	248,3154	0,0000	162
20	239,7704	0,0004	256,1181	0,0000	171

**Tabla 3.5:** Prueba LM-VAR(6) inicial

Retardo	LRE stat	gl	Prob.
1	32,13825	9	0,0002
2	22,69765	9	0,0069
3	11,23989	9	0,2596
4	8,274652	9	0,5067
5	14,10109	9	0,1188
6	18,54743	9	0,0293
7	2,373785	9	0,9841
8	8,355649	9	0,4987
9	8,270108	9	0,5072
10	15,48157	9	0,0785
11	14,75313	9	0,0979
12	29,63806	9	0,0005
13	6,960865	9	0,6412
14	21,24350	9	0,0116
15	10,46969	9	0,3138
16	15,71932	9	0,0730
17	5,681434	9	0,7713
18	13,42404	9	0,1443
19	7,368960	9	0,5988
20	8,201156	9	0,5140

La prueba de Pormanteau muestra que a partir del retardo 7, los p-valores son menores a 0,05; de esto se sigue que los residuos están autocorrelacionados y además, la prueba LM indica que los p-valores de los retardos 1, 2, 6, 12 y 14 son menores a 0,05. Esto nos obliga a reformular el modelo estimado previamente.

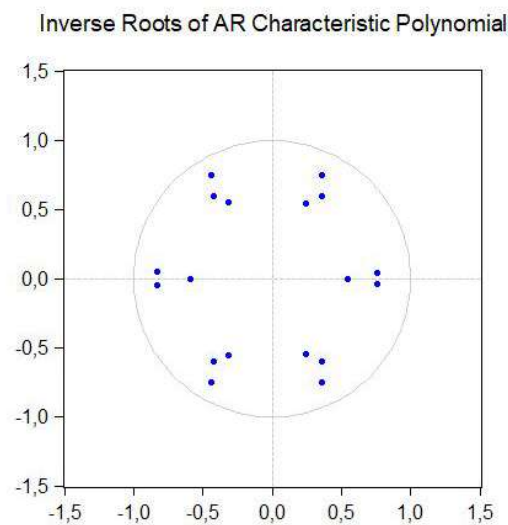
A partir de lo explicado en el párrafo anterior, se procede a corregir el modelo VAR(6) inicial añadiendo más retardos con tal de cumplir las pruebas de autocorrelación como se verá más adelante. Se recomienda utilizar la menor cantidad de retardos posibles debido al limitado número de observaciones disponibles y además, por la teoría relacionada a los modelos VAR, es posible modificar las variables exógenas a través de los retardos incluidos en el modelo, es decir, es posible variables exógenas retardadas. A partir de esto obtenemos el modelo VAR de orden 6 con retardos 1, 2 y 6 donde se tiene que las variables VIPC y D(ACTPROD\_ACT) entran con un retardo de orden 1 y las variables VEXP\_NP\_PRIM y VIMP\_CON con retardos de orden 2. A este nuevo modelo se lo denominará modelo 1. Los coeficientes estimados y estadísticos del modelo 1 se pueden observar en el Anexo C.2.

Es importante recalcar que se realiza un ajuste en las observaciones disponibles debido a los retardos incluidos en el modelo; es decir, el modelo 1 utilizará los datos desde septiembre de 2005 hasta diciembre de 2017 (149 observaciones disponibles) para los análisis que prosigan.

Ahora, analizamos la estabilidad de este modelo. En la tabla 3.6 y figura 3.2 se observa que el módulo de las raíces inversas es menor a 1; es decir, el modelo 1 es estable.

Raíces	Módulo
$-0,437857 - 0,751764i$	0,869982
$-0,437857 + 0,751764i$	0,869982
$0,356869 + 0,752451i$	0,832789
$0,356869 - 0,752451i$	0,832789
$-0,829914 - 0,049870i$	0,831411
$-0,829914 + 0,049870i$	0,831411
$0,755187 + 0,035810i$	0,756036
$0,755187 - 0,035810i$	0,756036
$-0,421813 - 0,600478i$	0,733825
$-0,421813 + 0,600478i$	0,733825
$0,360124 - 0,600484i$	0,700193
$0,360124 + 0,600484i$	0,700193
$-0,310664 - 0,555865i$	0,636788
$-0,310664 + 0,555865i$	0,636788
$0,244905 - 0,544484i$	0,597027
$0,244905 + 0,544484i$	0,597027
$-0,589392$	0,589392
$0,543775$	0,543775

**Tabla 3.6:** Raíces inversas-Modelo 1



**Figura 3.2:** Criterio gráfico-Modelo 1

Luego, analizamos la autocorrelación en las perturbaciones del modelo 1. Para ello, presentamos las pruebas de autocorrelación en las tablas 3.7 y 3.8 que se muestran a continuación.

**Tabla 3.7:** Prueba de Portmanteau-Modelo 1

Retardo	Q-Stat.	Prob.	Q-Stat. Ajust	Prob.	gl
1	1,625219	—	1,636200	—	—
2	5,782458	—	5,850000	—	—
3	14,38498	—	14,62929	—	—
4	22,66077	—	23,13338	—	—
5	28,61474	—	29,29408	—	—
6	35,09630	—	36,04759	—	—
7	40,76007	0,2690	41,99056	0,2273	36
8	50,05552	0,2797	51,81341	0,2253	45
9	55,69278	0,4109	57,81307	0,3363	54
10	68,55837	0,2945	71,60425	0,2139	63
11	77,16657	0,3171	80,89860	0,2212	72
12	88,59405	0,2640	93,32703	0,1648	81
13	95,67223	0,3214	101,0818	0,1995	90
14	103,3002	0,3637	109,5008	0,2211	99
15	111,7254	0,3837	118,8692	0,2233	108
16	123,9656	0,3121	132,5818	0,1539	117
17	134,5660	0,2845	144,5474	0,1236	126
18	139,9217	0,3683	150,6390	0,1692	135
19	146,4054	0,4285	158,0703	0,1997	144
20	159,1147	0,3509	172,7500	0,1310	153

**Tabla 3.8:** Prueba LM-Modelo 1

Retardo	LRE stat	gl	Prob.
1	5,144979	9	0,8215
2	16,28132	9	0,0612
3	8,890727	9	0,4474
4	8,216352	9	0,5125
5	5,878514	9	0,7520
6	14,79325	9	0,0968
7	5,699644	9	0,7696
8	9,654846	9	0,3791
9	5,419445	9	0,7963
10	13,27534	9	0,1505
11	8,730863	9	0,4625
12	12,97052	9	0,1639
13	7,992362	9	0,5349
14	8,955970	9	0,4413
15	9,209912	9	0,4181
16	14,28323	9	0,1126
17	12,75261	9	0,1741
18	6,244642	9	0,7152
19	7,171337	9	0,6193
20	15,36195	9	0,0815

Los resultados de estas pruebas nos indican que los p-valores de los retardos son mayores a 0,05; es decir, los residuos son no autocorrelacionados.

Luego de esto, se analiza si las perturbaciones son homocedásticas. Para ello, se realiza la prueba de White y cuyo resultado se muestra a continuación.

**Tabla 3.9:** Prueba de White del Modelo 1

Chi-cuad	gl	Prob.
240,5943	216	0,1204

En la tabla precedente se observa que el p-valor es mayor a 0,05 y de esto se sigue que los residuos son homocedásticos.

Ahora, se analiza si las perturbaciones del modelo siguen una distribución normal multivariante o no. Para esto, se realiza la prueba de Jarque-Bera multivariante y cuyo resultado se observa en la tabla 3.10.

**Tabla 3.10:** Prueba de Normalidad del Modelo 1

Componente	Jarque-Bera	gl	Prob.
1	5,039200	2	0,0805
2	30,17002	2	0,0000
3	10,80709	2	0,0045
Conjunto	46,01631	6	0,0000

El p-valor de esta prueba es menor a 0,05, lo cual nos indica que los residuos no siguen una distribución normal multivariante. Además, no podemos suponer normalidad asintótica debido al número de observaciones disponibles.

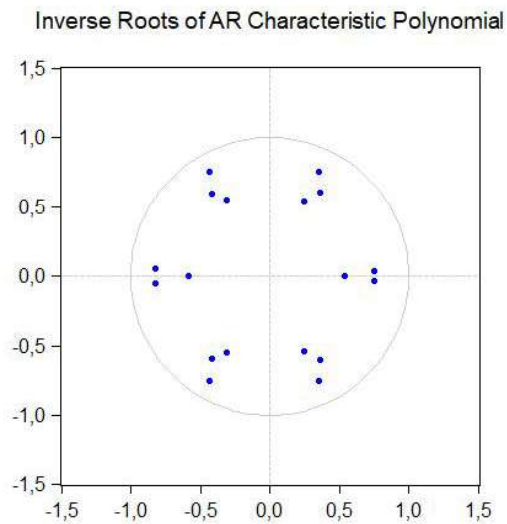
Dado que nuestro objetivo no sólo es predecir sino también identificar los efectos en las funciones de impulso-respuesta y la descomposición de la varianza del error de predicción, entonces la no normalidad de los residuos nos genera problema. Esto se debe a que las desviaciones estándar calculadas de los intervalos de confianza para

las funciones de impulso-respuesta y las predicciones no son válidas. Para resolver esto, se propone suponer una distribución a priori de los parámetros del modelo; es decir, se utiliza los modelos VAR bayesianos. En este caso se escogió la distribución a priori Normal Wishart con hiperparámetros  $\mu = 0$  y  $\lambda = 0,2$  donde la elección de  $\mu$  representa que las variables endógenas ya son estacionarias y  $\lambda$  es el resultado de probar varios modelos con distintos valores del mismo. Este nuevo modelo estimado se denominará modelo 1 bayesiano. La estimación de los coeficientes y estadísticos del modelo 1 bayesiano se encuentran en el Anexo C.3.

En la tabla 3.11 y figura 3.3 se puede notar que el módulo de las raíces inversas es menor a 1, es decir, el modelo 1 bayesiano es estable. Además, se puede observar que existen pequeñas diferencias de los resultados obtenidos en comparación con la tabla 3.6 y figura 3.2 del modelo 1.

Raíces	Módulo
$-0,434367 - 0,751666i$	0,868145
$-0,434367 + 0,751666i$	0,868145
$0,356105 + 0,751231i$	0,831359
$0,356105 - 0,751231i$	0,831359
$-0,826261 - 0,050120i$	0,827780
$-0,826261 + 0,050120i$	0,827780
$0,753289 + 0,035209i$	0,754112
$0,753289 - 0,035209i$	0,754112
$-0,419983 - 0,597271i$	0,730150
$-0,419983 + 0,597271i$	0,730150
$0,359575 - 0,599474i$	0,699045
$0,359575 + 0,599474i$	0,699045
$-0,306406 - 0,547603i$	0,627498
$-0,306406 + 0,547603i$	0,627498
$0,248422 - 0,538038i$	0,592620
$0,248422 + 0,538038i$	0,592620
$-0,585072$	0,585072
$0,543669$	0,543669

**Tabla 3.11:** Raíces inversas-Modelo 1 bayesiano



**Figura 3.3:** Criterio gráfico-Modelo 1 bayesiano

A continuación, se presentan las pruebas de Pormanteau y LM del modelo 1 bayesiano para analizar si las perturbaciones están autocorrelacionadas o no.

**Tabla 3.12:** Prueba de Portmanteau-Modelo 1 bayesiano

Retardo	Q-Stat.	Prob.	Q-Stat. Ajust	Prob.	gl
1	1,942591	—	1,955716	—	—
2	5,610394	—	5,673421	—	—
3	14,19635	—	14,43580	—	—
4	22,37069	—	22,83564	—	—
5	28,41347	—	29,08824	—	—
6	34,43594	—	35,36340	—	—
7	39,91717	0,3002	41,11483	0,2565	36
8	49,23505	0,3075	50,96139	0,2507	45
9	54,87909	0,4411	56,96825	0,3652	54
10	68,02028	0,3103	71,05486	0,2273	63
11	77,08231	0,3195	80,83922	0,2226	72
12	89,00390	0,2542	93,80504	0,1564	81
13	96,14418	0,3095	101,6278	0,1891	90
14	103,6834	0,3539	109,9489	0,2124	99
15	111,9319	0,3784	119,1208	0,2185	108
16	123,7532	0,3168	132,3642	0,1571	117
17	134,5206	0,2854	144,5183	0,1240	126
18	139,7392	0,3724	150,4539	0,1718	135
19	146,3237	0,4304	158,0008	0,2008	144
20	159,0520	0,3522	172,7024	0,1316	153

**Tabla 3.13:** Prueba LM-Modelo 1 bayesiano

Retardo	LRE stat	gl	Prob.
1	5,624210	9	0,7769
2	16,33124	9	0,0603
3	8,921746	9	0,4445
4	8,608030	9	0,4742
5	6,189281	9	0,7208
6	15,00955	9	0,0907
7	5,914644	9	0,7484
8	10,04955	9	0,3465
9	5,807034	9	0,7591
10	13,85695	9	0,1275
11	9,239413	9	0,4155
12	13,61898	9	0,1365
13	8,312348	9	0,5030
14	9,127648	9	0,4256
15	9,281766	9	0,4117
16	14,02392	9	0,1215
17	13,22014	9	0,1529
18	6,547669	9	0,6841
19	7,499876	9	0,5852
20	16,04154	9	0,0660

Los resultados de estas pruebas nos indican que los p-valores de los retardos son mayores a 0,05; es decir, los residuos son no autocorrelacionados.

Por último, se realiza la prueba de White y cuyo resultado se muestra en la tabla 3.14. El p-valor de esta prueba es mayor a 0,05, lo cual nos indica que los residuos son homocedásticos.

**Tabla 3.14:** Prueba de White del Modelo 1 bayesiano

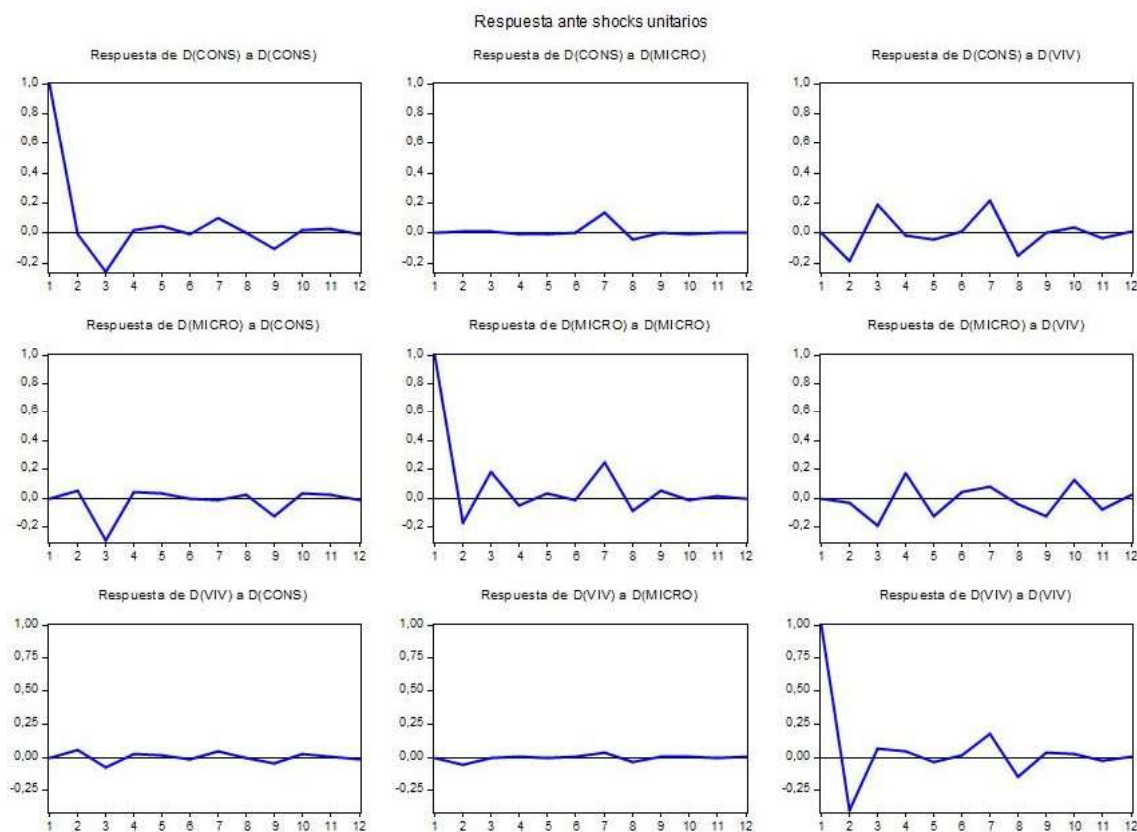
Chi-cuad	gl	Prob.
240,3305	216	0,1228

A partir del modelo 1 bayesiano estimado, se presentan los análisis de las funciones de impulso-respuesta, descomposición de la varianza del error de predicción, pronósticos y análisis de escenarios.

### 3.5. Funciones de impulso-respuesta

En la siguiente figura se muestran los resultados de las funciones de impulso-respuesta que presenta Eviews para las variables D(CONS), D(MICRO) y D(VIV). En estos gráficos se observa la respuesta de las variables endógenas ante un impulso unitario de estas mismas variables para un período de 12 meses. Además, los resultados numéricos de las funciones de impulso-respuesta se pueden apreciar en las tablas 3.15, 3.16. y 3.17.





Un shock unitario de la morosidad de consumo en el primer mes provoca en la misma variable inicialmente una caída negativa significativa hasta el tercer mes ( $-0,25$ ) y, a partir de ese instante el efecto disminuye presentando aumentos y decrementos leves hasta desaparecer en el décimo mes. En la morosidad de microcrédito ocasiona un aumento leve en el segundo mes para luego presentar una caída negativa significativa ( $-0,3$ ) en el siguiente mes para aumentar positiva y luego disminuye hasta desaparecer en el décimo mes. En la morosidad de vivienda produce el menor efecto porque se tienen aumentos y decrementos muy leves para desaparecer definitivamente en el décimo mes.

Un shock unitario de la morosidad de microcrédito en el primer mes produce en la morosidad de consumo un efecto muy bajo porque éste desaparece en los primeros meses hasta presentar un aumento significativo en el séptimo para posteriormente disminuirse hasta desaparecer de nuevo en el noveno mes. En la misma variable provoca una caída negativa significativa en el segundo mes ( $-0,25$ ) para pasar a ser positivo y luego el efecto disminuye hasta presentar un aumento significativo en el séptimo mes ( $0,25$ ) y posteriormente disminuye otra vez hasta desaparecer en el décimo mes. En la morosidad de vivienda ejerce el menor efecto porque éste desaparece prácticamente a partir del tercer mes.

Un shock unitario de la morosidad de vivienda en el primer mes produce en la morosidad de consumo una caída en el segundo mes para posteriormente tener un aumento significativo ( $0,18$ ) y después el efecto disminuye para tener otro aumento significativo ( $0,22$ ) y volver a disminuir negativamente ( $-0,14$ ) hasta desaparecer en el penúltimo mes. En la morosidad de microcrédito ocasiona un efecto negativo

hasta el tercer mes para pasar a un aumento positivo y posteriormente tener aumentos y decrementos leves hasta desaparecer en el último mes. En la misma variable provoca una caída negativa significativa en el segundo mes  $(-0,25)$  para pasar a ser positivo, luego el efecto va disminuyendo hasta presentar un aumento significativo en el séptimo mes  $(0,17)$  y posteriormente disminuye otra vez hasta desaparecer en el décimo mes.

**Tabla 3.15:** Respuesta de las variables ante un shock unitario de D(CONS)

Período	D(CONS)	D(MICRO)	D(VIV)
1	1,000000	0,000000	0,000000
2	-0,008432	0,053986	0,050861
3	-0,251590	-0,298998	-0,074616
4	0,019434	0,039627	0,027806
5	0,045893	0,034725	0,017596
6	-0,004381	-0,008854	-0,011631
7	0,100003	-0,012637	0,047238
8	0,007407	0,025679	-0,001398
9	-0,102873	-0,121664	-0,044519
10	0,018973	0,030143	0,025470
11	0,028197	0,024620	0,008976
12	-0,007212	-0,011824	-0,010452

**Tabla 3.16:** Respuesta de las variables ante un shock unitario de D(MICRO)

Período	D(CONS)	D(MICRO)	D(VIV)
1	0,000000	1,000000	0,000000
2	0,015883	-0,168457	-0,055589
3	0,014421	0,184741	-0,002197
4	-0,008141	-0,049824	0,001541
5	-0,003487	0,032624	-0,005226
6	0,003327	-0,011163	0,002124
7	0,138783	0,250589	0,033320
8	-0,037673	-0,084140	-0,034930
9	0,003986	0,049566	0,004594
10	-0,002963	-0,015363	0,001848
11	0,002371	0,015405	-0,002365
12	0,000750	-0,006804	0,000883

**Tabla 3.17:** Respuesta de las variables ante un shock unitario de D(VIV)

Período	D(CONS)	D(MICRO)	D(VIV)
1	0,000000	0,000000	1,000000
2	-0,185520	-0,028553	-0,403766
3	0,189976	-0,190817	0,062898
4	-0,017415	0,169237	0,042524
5	-0,045387	-0,127146	-0,036247
6	0,015338	0,042684	0,010461
7	0,219696	0,077440	0,178343
8	-0,146576	-0,046244	-0,148425
9	0,002815	-0,123783	0,038262
10	0,040100	0,128743	0,026614
11	-0,030718	-0,081293	-0,027996
12	0,008155	0,026994	0,009285

En resumen, el análisis de las funciones impulso-respuesta nos indica que los efectos del shock unitario empleado en el modelo se desvanecen conforme pasa el tiempo, lo cual caracteriza a un proceso VAR estacionario. Siendo esto así, se ratifica la elección del modelo encontrado.

### 3.6. Descomposición de la varianza

En esta parte se presenta la descomposición de la varianza para cada variable endógena y considerando un período de 10 meses. Esto se muestra a continuación.

**Tabla 3.18:** Descomposición de la varianza de D(CONS)

Período	S.E.	D(CONS)	D(MICRO)	D(VIV)
1	0,354980	100,0000	0,000000	0,000000
2	0,356032	99,61020	0,007297	0,382507
3	0,363082	99,20148	0,045049	0,753474
4	0,363111	99,19192	0,051484	0,756594
5	0,363321	99,16867	0,053628	0,777703
6	0,363329	99,16493	0,054887	0,780180
7	0,379981	97,11910	1,696674	1,184228
8	0,381291	96,79036	1,825354	1,384287
9	0,382905	96,81603	1,811253	1,372716
10	0,383057	96,80295	1,809989	1,387066

**Tabla 3.19:** Descomposición de la varianza de D(MICRO)

Período	S.E.	D(CONS)	D(MICRO)	D(VIV)
1	0,441126	43,27317	56,72683	0,000000
2	0,445898	42,88034	57,11388	0,005777
3	0,455860	43,42308	56,32456	0,252360
4	0,456800	43,36132	56,19399	0,444686
5	0,457248	43,32200	56,12525	0,552741
6	0,457294	43,31607	56,11903	0,564906
7	0,471167	43,37405	56,05576	0,570185
8	0,472470	43,30841	56,11106	0,580539
9	0,474667	43,63665	55,69237	0,670979
10	0,475283	43,67370	55,55370	0,772607

**Tabla 3.20:** Descomposición de la varianza de D(VIV)

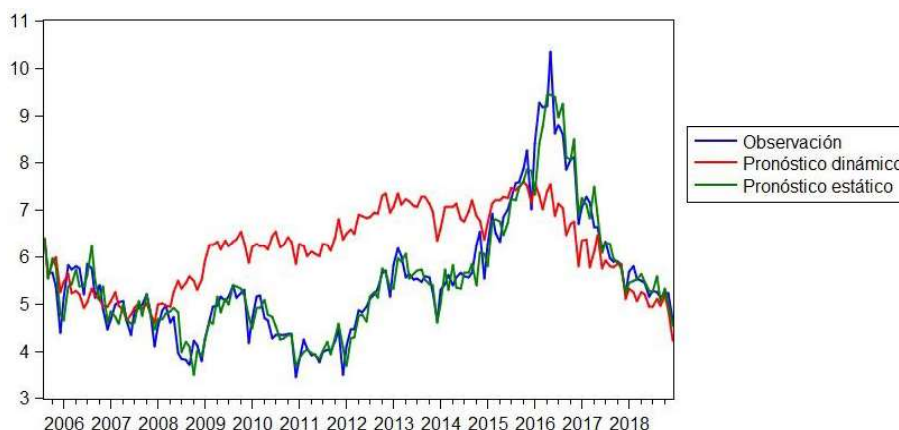
Período	S.E.	D(CONS)	D(MICRO)	D(VIV)
1	0,152214	38,57008	0,626845	60,80307
2	0,165300	37,51304	2,524378	59,96258
3	0,166818	38,44509	2,478636	59,07627
4	0,167512	38,85970	2,461875	58,67842
5	0,167587	38,83126	2,476505	58,69224
6	0,167612	38,84204	2,478208	58,67975
7	0,174904	41,79891	2,847156	55,35393
8	0,178015	42,27010	3,314609	54,41529
9	0,178414	42,45109	3,312194	54,23671
10	0,178854	42,69981	3,298658	54,00153

En las tablas precedentes se observa que la varianza del error de predicción de D(CONS) representa un 96,80 % con sus propias innovaciones, un 1,81 % con las de D(MICRO) y un 1,39 % con las de D(VIV), lo cual ratifica los resultados del análisis de casualidad. La varianza del error de predicción de D(MICRO) es de un 43,67 % con D(CONS), un 55,55 % con sus propias innovaciones y un 0,77 % con D(VIV). Finalmente, la varianza del error de predicción de D(VIV) es de un 42,70 % con D(CONS), un 3,30 % con D(MICRO) y un 54 % con sus propias innovaciones.

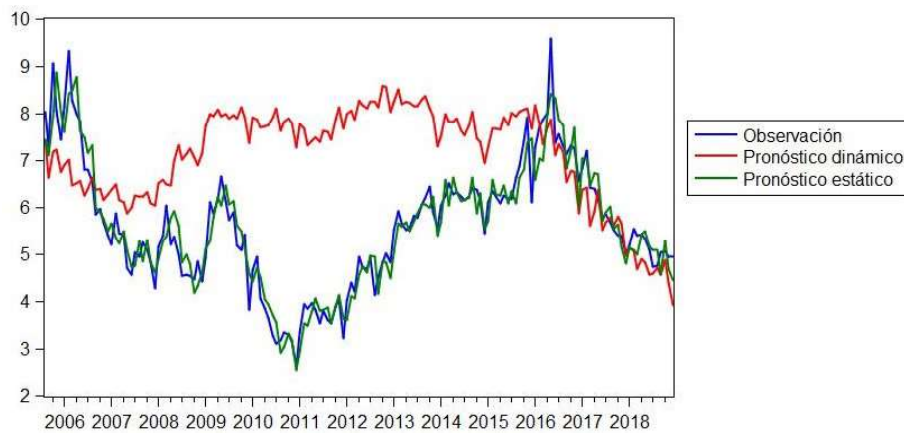
Es importante señalar que las tablas 3.18, 3.19 y 3.20 tienen en la segunda columna la desviación estándar del error de predicción. Para los tres casos, esta desviación estándar es pequeña, lo cual asegura que el modelo construido es bueno.

### 3.7. Predicciones del modelo

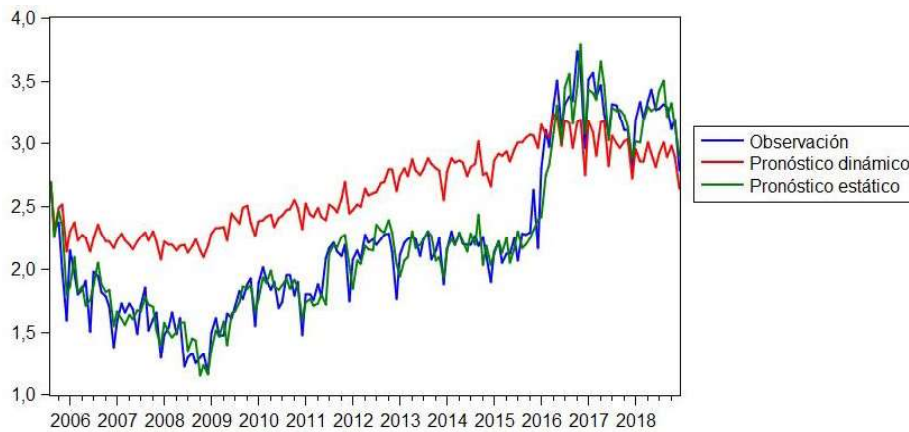
En las siguientes figuras se puede observar los pronósticos estáticos y dinámicos junto con los datos reales de la morosidad de las carteras de consumo, microcrédito y vivienda para los períodos de desarrollo y testeo. El período de desarrollo representa los datos utilizados en la modelización y comprende desde enero de 2005 hasta diciembre de 2017 pero se presentan las predicciones a partir de agosto de 2005 debido a los retardos incluidos en el modelo y a la diferenciación de las variables endógenas. En cambio, el período de testeo identifica los datos no utilizados en la modelización y comprende el año 2018.



**Figura 3.5:** Comparación de las predicciones del modelo con datos reales de la serie morosidad de consumo

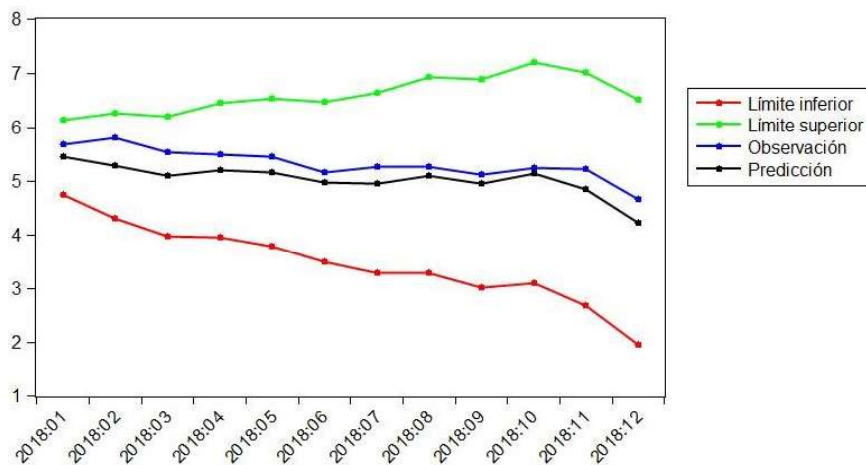


**Figura 3.6:** Comparación de las predicciones del modelo con datos reales de la serie morosidad de microcrédito

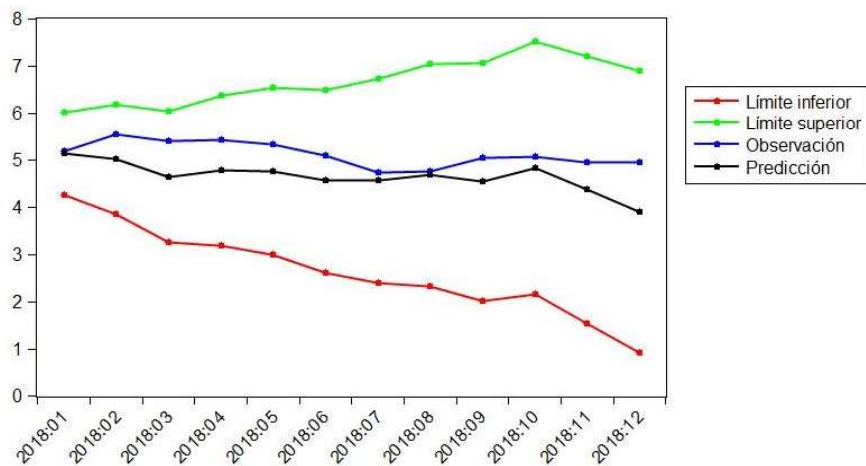


**Figura 3.7:** Comparación de las predicciones del modelo con datos reales de la serie morosidad de vivienda

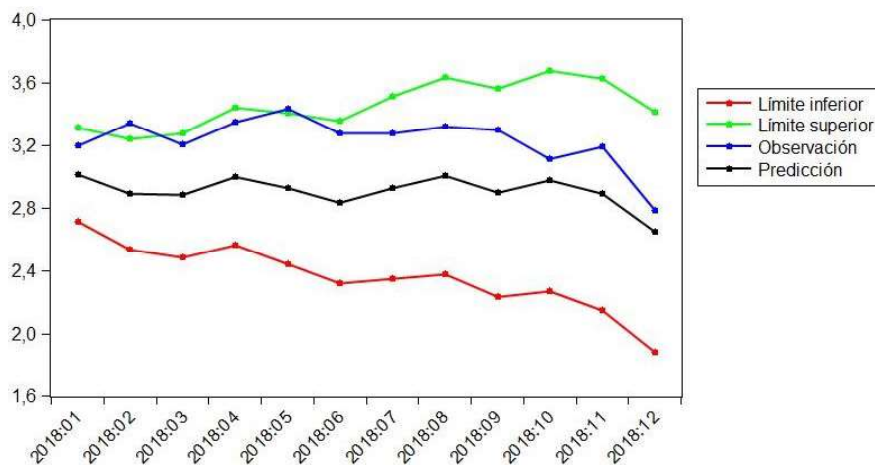
En las siguientes figuras se muestran los pronósticos dinámicos, valores observados y los intervalos de confianza correspondientes (nivel de confianza 95 %) para cada variable endógena en el período de testeo. Los resultados nos indican que el modelo realiza buenas predicciones en el corto plazo.



**Figura 3.8:** Comparación de las predicciones del modelo con datos reales de la serie morosidad de consumo, período año 2018



**Figura 3.9:** Comparación de las predicciones del modelo con datos reales de la serie morosidad de microcrédito, período año 2018



**Figura 3.10:** Comparación de las predicciones del modelo con datos reales de la serie morosidad de vivienda, período año 2018

En esta figura podemos observar que las predicciones dinámicas de la morosidad de vivienda están dentro del intervalo de confianza pero tienden a sobreestimar el modelo. Esto podría ser causado porque el efecto de los términos autoregresivos de la morosidad de consumo y microcrédito en la ecuación de esta variable endógena no contribuye considerablemente en el cálculo de las predicciones.

### 3.8. Análisis de escenarios

Un escenario de estrés es una compilación de suposiciones respecto de las condiciones económicas que son poco probables que ocurran, pero que tendría a generar pérdidas crediticias muy altas si estas ocurren (Basilea, 2005). Es posible construir diferentes tipos de escenarios tales como: escenarios hipotéticos, simulados o históricos de las variables disponibles en el modelo. Para este estudio se construyen dos escenarios hipotéticos, tomando en cuenta el comportamiento de las variables exógenas utilizadas en la construcción del modelo. En ambos escenarios se utiliza los datos del año 2018 para la inflación, variación de las exportaciones no petroleras

primarias, variación de las importaciones de bienes de consumo y el volumen de crédito. Para el resto de variables exógenas se plantea supuestos a partir de los valores históricos.

En el primer escenario, que se considera de tipo pesimista, se supone que la proporción de activos productivos netos es de 89,92 % en enero de 2018 como a finales de 2011 y luego crece mensualmente en 3 %, la variable captaciones/PIB presenta un decrecimiento del 5 %, el grado de absorción del margen financiero neto crece mensualmente en 2 %, el índice de liquidez decrece en 3 % y el ROE presenta un decrecimiento mensual del 5,5 %. Estos valores corresponden a uno de los peores escenarios observados.

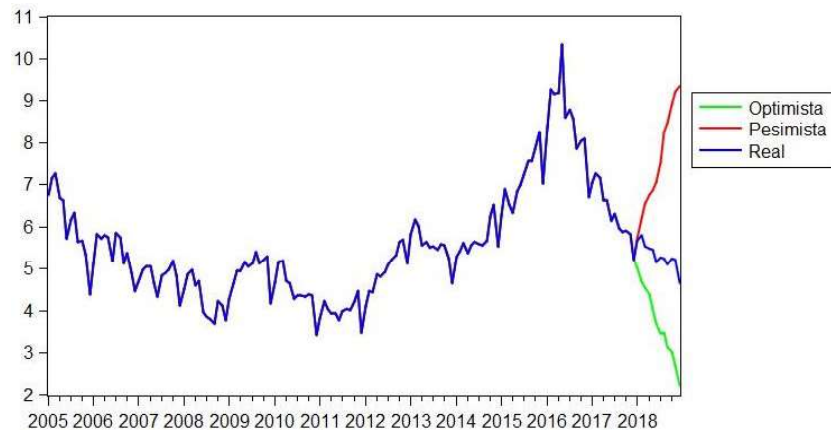
En el segundo escenario, que se considera de tipo optimista, se supone que para enero de 2018 la proporción de activos productivos netos es de 80,03 % como a finales de 2016, la variable captaciones/PIB es de 109,81 % como a finales de 2017 y el grado de absorción del margen financiero neto es de 75,45 % como a inicios de 2011. A partir de febrero, se tiene que la proporción de activos productivos netos y el grado de absorción del margen financiero neto decrecen en 1 % y la variable captaciones/PIB crece en 1 %. Además, se supone que el índice de liquidez y el ROE presentan un crecimiento mensual del 1 % y 10 % respectivamente.

En las figuras 3.11, 3.12 y 3.13 se observa el comportamiento de la morosidad de las carteras de crédito frente a los escenarios planteados. Además, se muestra de forma tabulada los resultados numéricos de las predicciones obtenidas en las tablas 3.21, 3.22 y 3.23.

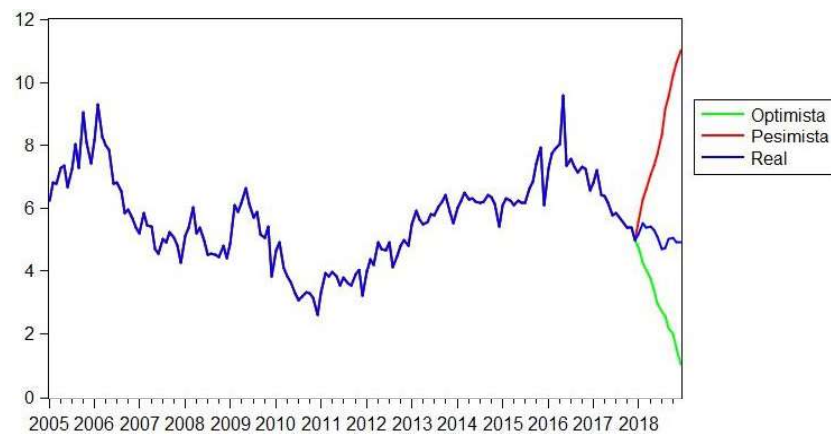
En el escenario pesimista se observa que la morosidad de las tres carteras aumenta como lo esperado, siendo la morosidad de consumo y microcrédito aquellas que presentan el mayor efecto puesto que para diciembre de 2018 la morosidad de consumo aumenta 4,69 puntos porcentuales pasando de 4,67 % a 9,36 % y la morosidad de microcrédito aumenta 6,08 puntos porcentuales pasando de 4,93 % a 11,01 %. En cambio, la morosidad de vivienda presenta el menor efecto porque para diciembre de 2018 aumenta 0,6 puntos porcentuales pasando de 2,78 % a 3,38 %. Este escenario claramente nos indica que cuando el sistema de bancos privados no es eficiente en la colocación de sus recursos en activos productivos, no recibe suficientes depósitos por parte de sus clientes, no genera los suficientes ingresos para cubrir sus gastos operativos y remunerar a sus accionistas, y tiene una menor liquidez entonces el índice de morosidad aumenta.

En el escenario optimista se observa que la morosidad de las tres carteras disminuye como se espera, siendo la morosidad de consumo y microcrédito aquellas que presentan el mayor efecto puesto que para diciembre de 2018 la morosidad de consumo disminuye 2,45 puntos porcentuales pasando de 4,67 % a 2,22 % y la morosidad de microcrédito disminuye 3,88 puntos porcentuales pasando de 4,93 % a 1,05 %. En cambio, la morosidad de vivienda presenta el menor efecto porque para diciembre de 2018 disminuye 0,22 puntos porcentuales pasando de 2,78 % a 2,57 %. Obviamente, este escenario nos indica que cuando el sistema de bancos privados es eficiente en la colocación de sus recursos en activos productivos, recibe suficientes depósitos por parte de sus clientes, dispone de los suficientes ingresos para cubrir sus

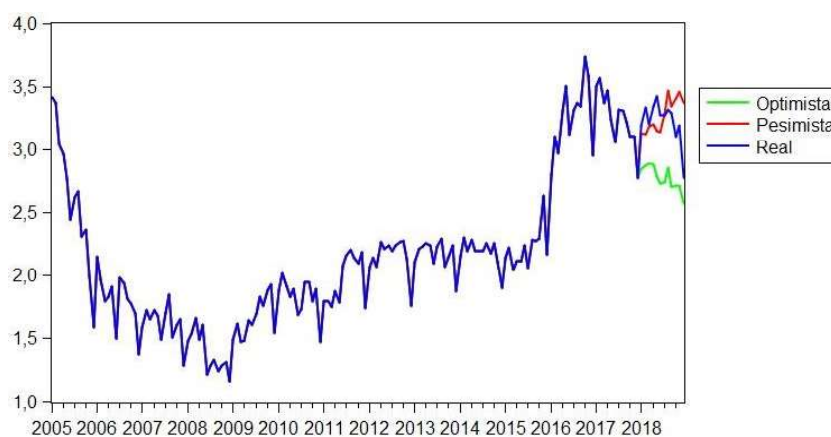
gastos operativos y remunerar a sus accionistas, y tiene una mayor liquidez entonces el índice de morosidad disminuye.



**Figura 3.11:** Análisis de escenarios para la morosidad de consumo



**Figura 3.12:** Análisis de escenarios para la morosidad de microcrédito



**Figura 3.13:** Análisis de escenarios para la morosidad de vivienda



**Tabla 3.21:** Escenarios de la morosidad de consumo

Período	Real (%)	Escenario Pe- simista (%)	Escenario Op- timista (%)
2018-01	5,67	5,72	5,04
2018-02	5,80	6,20	4,69
2018-03	5,53	6,54	4,55
2018-04	5,48	6,76	4,38
2018-05	5,45	6,88	4,02
2018-06	5,16	7,05	3,69
2018-07	5,27	7,53	3,46
2018-08	5,26	8,27	3,49
2018-09	5,12	8,48	3,14
2018-10	5,23	8,93	3,02
2018-11	5,22	9,23	2,71
2018-12	4,67	9,36	2,22

**Tabla 3.22:** Escenarios de la morosidad de microcrédito

Período	Real (%)	Escenario Pe- simista (%)	Escenario Op- timista (%)
2018-01	5,19	5,58	4,80
2018-02	5,54	6,29	4,28
2018-03	5,38	6,62	4,05
2018-04	5,42	7,05	3,74
2018-05	5,31	7,37	3,39
2018-06	5,09	7,69	2,96
2018-07	4,72	8,36	2,72
2018-08	4,75	9,19	2,57
2018-09	5,03	9,55	2,18
2018-10	5,06	10,23	2,00
2018-11	4,94	10,63	1,55
2018-12	4,93	11,01	1,05

**Tabla 3.23:** Escenarios de la morosidad de vivienda

Período	Real (%)	Escenario Pe- simista (%)	Escenario Op- timista (%)
2018-01	3,19	3,13	2,84
2018-02	3,34	3,12	2,88
2018-03	3,20	3,18	2,89
2018-04	3,35	3,20	2,89
2018-05	3,43	3,15	2,78
2018-06	3,28	3,14	2,73
2018-07	3,28	3,29	2,74
2018-08	3,32	3,47	2,86
2018-09	3,29	3,35	2,70
2018-10	3,11	3,41	2,71
2018-11	3,19	3,47	2,71
2018-12	2,78	3,38	2,57

# Capítulo 4

## Conclusiones y recomendaciones

El riesgo de crédito constituye uno de los riesgos más importantes en la gestión y administración de riesgos por parte de las entidades del sistema financiero. El índice de morosidad es utilizado como medida de este tipo de riesgo. La identificación de los factores que afectan el riesgo de crédito nos ayuda a descubrir vulnerabilidades en el sistema financiero que pueden provocar pérdidas al sector de la economía y a las entidades que conforman el sistema. Esto a su vez nos permite establecer políticas económicas y de gestión crediticia que generen impactos en el rendimiento de los indicadores de riesgo de crédito y así evitar estas pérdidas.

El objetivo de este trabajo es construir un modelo que explique las relaciones del riesgo de crédito de las carteras de consumo, microempresa y vivienda del sistema financiero nacional, particularmente del sistema de bancos privados para el período enero 2005 a diciembre 2017, utilizando factores externos tanto macroeconómicos como microeconómicos. Para ello, se cumplió con los objetivos específicos propuestos; es decir, fue posible identificar las variables macroeconómicas que influyen en la capacidad de pago de los deudores para evaluar de manera eficiente las fortalezas y vulnerabilidades de las carteras de préstamos de cada producto; se identificó los períodos de transmisión de las variables explicativas a la calidad de los préstamos y se definió un marco multivariado que permite el desarrollo de ejercicios de prueba de estrés.

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en la modelización se establecen las siguientes conclusiones:

1. En el sistema de bancos privados del Ecuador, los shocks se transmiten de manera rápida en las variables explicativas. El ratio de captaciones/PIB, el grado de absorción del margen financiero neto, el índice de liquidez, el ROE y el volumen de crédito afectan de manera contemporánea a la morosidad de los préstamos de las carteras de consumo, microempresa y vivienda. Los shocks de la proporción de activos productivos netos consumo y la inflación tardan un mes (rezago de orden 1) en afectar la calidad de los préstamos. En cambio el efecto de los shocks de la variación de exportaciones no petroleras primarias y la variación de importaciones de bienes de consumo tardan dos meses (rezago de orden 2). El uso de algunos de estos indicadores como variables exógenas en el modelo se soporta ampliamente en la literatura (Aguilar et al., 2004; Fajardo, 2016; Jakubík y Schmieder, 2008; Marcucci y Quagliariello, 2008, Rinaldi y Sanchis-Arellano, 2006; Vazquez et al., 2006).

Los rezagos de la parte autoregresiva de las variables endógenas del modelo tienen el mayor efecto puesto que sus shocks se transmiten en el corto plazo (tardan 6 meses) pero no de forma acumulativa. Esto es consecuencia de la manera en que fue construido el modelo.

2. El análisis de las funciones de impulso-respuesta nos muestra que las respuestas de la morosidad de la vivienda frente a los shocks de la morosidad de consumo y microcrédito representan el menor efecto de manera general. Este hecho se justifica porque el efecto de los términos autoregresivos de la morosidad de consumo y microcrédito en la morosidad de vivienda es bajo.
3. La descomposición de la varianza del error de predicción nos indica que la morosidad de consumo tiene un fuerte comportamiento autoregresivo puesto que más del 95 % de su varianza es explicada por ella misma, lo que no ocurre con las demás variables. Sin embargo, ninguna de las otras dos variables pierde rápidamente capacidad explicativa con sus propios rezagos. Además, un porcentaje considerable de la varianza de la morosidad de las carteras de microempresa y vivienda es causado por los shocks en la morosidad de consumo.
4. La metodología propuesta resultó ser apropiada ya que se muestra robusta en el análisis empírico del sistema de bancos privados. Adicionalmente, la inclusión de variables exógenas nos permite construir y evaluar escenarios de estrés.
5. Con respecto al análisis de escenarios, considerando los dos escenarios propuestos a partir de supuestos y de los valores máximos y mínimos históricos de las variables exógenas, se observa que el impacto de las condiciones económicas supuestas tiene mayor efecto en la morosidad de las carteras de consumo y microempresa. Este resultado podría deberse a que en las ecuaciones de la morosidad de consumo y microempresa, los signos de los coeficientes estimados de las variables exógenas, utilizadas en los escenarios propuestos, son los esperados, y además, por el efecto de los términos autoregresivos en estas dos ecuaciones.

Para la morosidad de vivienda, los resultados del análisis de escenarios puede ser causado porque el efecto de las variables exógenas en la ecuación de esta variable es menor con relación a las otras dos ecuaciones. Además, los signos de los coeficientes del índice de liquidez y ROE en esta ecuación no son los esperados como lo indica la literatura económica.

En el caso de realizar futuros trabajos relacionados con este estudio se recomienda tomar en cuenta lo siguiente:

1. En el proceso de estimación del modelo se recurrió a la inferencia bayesiana para estimar los coeficientes del modelo puesto que los errores de la estimación del modelo VAR son no normales, lo cual posiblemente se debe a la presencia de cambios estructurales e incluir variables dummies podría ayudar al cumplimiento de este supuesto. Esto constituye una alternativa que puede ser analizada e implementada en futuros trabajos.
2. Estimar el modelo propuesto para el índice de morosidad de otro grupo de carteras de crédito.

3. Considerar la inclusión de otros factores externos en el modelo previo al análisis de correlación y causalidad de Granger. En principio, se esperarían mejores resultados respecto del modelo propuesto.
4. Con relación al numeral anterior, se recomienda considerar el número de observaciones disponibles al momento de estimar los nuevos modelos con el fin de evitar problemas con los grados de libertad en las pruebas de validación de estos modelos.

# Bibliografía

- Aguilar, Giovanna; Camargo, Gonzalo y Saravia, Rosa M. Análisis de la morosidad en el sistema bancario peruano. *Instituto de Estudios Peruanos*, 2004.
- Balacco, Hugo. Algunas consideraciones sobre la definición de causalidad de Granger en el análisis econométrico. *Económica*, 32(2):207–225, 1986.
- Banco Central del Ecuador (BCE). Codificación de Regulaciones del Banco Central del Ecuador: Libro I Política Monetaria-Crediticia, 2007. Recuperado de <https://www.bce.fin.ec/documents/pdf/general/LibroI.pdf>.
- Basilea, C. Studies on the validation of internal rating systems. *BIS Working Paper No. 14*, 2005.
- Chan-Lau, Jorge A. Fundamentals-Based estimation of default probabilities: A survey. *IMF Working Paper*, 6(149), 2006.
- Cóndor, Jorge y Cajamarca, Rodrigo. Matrices de transición y análisis de cosechas en el contexto de riesgo de crédito, 2014. Recuperado de [http://oidprd.sbs.gob.ec/medios/PORTALDOCS/downloads/articulos\\_financieros/Estudios\\_Especializados/EE1\\_2014.pdf](http://oidprd.sbs.gob.ec/medios/PORTALDOCS/downloads/articulos_financieros/Estudios_Especializados/EE1_2014.pdf).
- Dickey D.A. *Estimation and Hypothesis Testing for Nonstationary Time Series*. PhD thesis, Iowa State University, 1976.
- Doan, Thomas; Litterman, Robert y Sims, Christopher. Forecasting and Conditional Projection Using Realistic Prior Distributions. *Econometric Reviews*, 3(1):1–100, 1984.
- Doornik, J.A. y Hansen, D. An omnibus test for univariate and multivariate normality. *Working Paper, Nuffield College, Oxford*, 1994.
- Fajardo, Ángela. Impacto del comportamiento macroeconómico sobre la morosidad de la cartera de consumo en Colombia. Master's thesis, Universidad Nacional de Colombia, 2016.
- Frenkel, Roberto y Rapetti, Martín. La crisis mundial desde la perspectiva de los países en desarrollo: algunas reflexiones. *Nueva Sociedad, venezuela*, (224):86–103, 2009.
- Fuller, W. A. *Introduction to Statistical Time Series*. John Wiley & Sons, New York, 1st edition, 1976.

- González, María Pilar. *Análisis de series temporales: Modelos ARIMA*. Sarrikon/Universidad del País Vasco, Lejona, España, 1era edición, 2009.
- Gujarati, Damodar N. y Porter, Dawn C. *Econometría*. McGraw-Hill, México, D. F., 5ta edición, 2010.
- Hansen, Bruce E. *Econometrics*. University of Wisconsin, Department of Economics, 2019.
- Hosking, J. R. M. The Multivariate Portmanteau Statistic. *Journal of the American Statistical Association*, 75(371):602–608, 1980.
- Jakubík, Petr. Macroeconomic Environment and Credit Risk. *Czech Journal of Economics and Finance, Charles University Prague, Faculty of Social Sciences*, 57(1-2):60–78, 2007.
- Jakubík, Petr y Schmieder, Christian. Stress Testing Credit Risk: Comparison of the Czech Republic and Germany. *FSI Award 2008 Winning Paper, Financial Stability Institute, Bank for International Settlements*, 2008.
- Kadiyala, K. Rao y Karlsson, Sune. Numerical Methods for Estimation and Inference in Bayesian VAR-Models. *Journal of Applied Econometrics*, 12(2):99–132, 1997.
- Kalirai, Harvir y Scheicher, Martin. Macroeconomic stress testing: Preliminary evidence for Austria. *Financial Stability Report*, (3):58–74, 2002.
- Koop, Gary. *Bayesian Econometrics*. John Wiley & Sons, The Atrium, Southern Gate, Chichester, West Sussex PO19 8SQ, England, 1st edition, 2003.
- Krätzig, Markus y Lütkepolh, Helmut. *Applied Time Series Econometrics (Themes in Modern Econometrics)*. Cambridge University Press, New York, United States of America, 1st edition, 2004.
- Litterman, Robert. Forecasting with Bayesian Vector Autoregressions: Five Years of Experience. *Journal of Business & Economic Statistics*, 4(1):25–38, 1986.
- Lütkepolh, Helmut. *New Introduction to Multiple Time Series Analysis*. Springer, Berlin, Germany, 2nd edition, 2005.
- Marcucci, J. y Quagliariello, M. Credit risk and business cycle over different regimes. *Bank of Italy Temi di discussione (Working Papers) No. 670*, 2008.
- Ouliaris, S.; Pagan, A. R. y Restrepo, J. *Quantitative Macroeconomic Modeling with Structural Vector Autoregressions-An EViews Implementation*. 2016. Recuperado de <https://www.eviews.com/StructVAR/structvar.html>.
- Rinaldi, L. y Sanchis-Arellano, A. Household debt sustainability: what explains household non-performing loans? An empirical analysis. *ECB Working Paper Series No. 570*, 2006.
- Ross, Sheldon M. *Introduction to Probability Models*. Academic Press, United States of America, 10th edition, 2010.

- Rummel, Ole. Estimating Bayesian VAR models. *Centre for Central Banking Studies, Bank of England*, pages 1–36, 2015.
- Sims, Christopher y Zha, Tao. Bayesian Methods for Dynamic Multivariate Models. *International Economic Review*, 39(4):949–968, 1998.
- Uquillas, Adriana y González, Carlos. Determinantes macro y microeconómicos para pruebas de tensión de riesgo de crédito: un estudio comparativo entre Ecuador y Colombia basado en la tasa de morosidad. *Ensayos sobre Política Económica*, 35: 245–259, 2017.
- Urzua, Carlos M. Omnibus Tests for Multivariate Normality Based on a Class of Maximum Entropy Distributions. *Advances in Econometrics*, 12:341–358, 1997.
- Vazquez, Francisco; Tabak, Benjamin M. y Souto, Marcos. A Macro Stress Test Model of Credit Risk for the Brazilian Banking Sector. *Journal of Financial Stability*, 8(2):69–83, 2006.
- White, Halbert. A Heteroskedasticity-Consistent Covariance Matrix Estimator and a Direct Test for Heteroskedasticity. *Econometrica*, 48(4):817–838, 1980.
- Zellner, Arnold. An Efficient Method of Estimating Seemingly Unrelated Regressions and Tests for Aggregation Bias. *Journal of the American Statistical Association*, 57(298):348–368, 1962.