



La versión digital de esta tesis está protegida por la Ley de Derechos de Autor del Ecuador.

Los derechos de autor han sido entregados a la "ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL" bajo el libre consentimiento del (los) autor(es).

Al consultar esta tesis deberá acatar con las disposiciones de la Ley y las siguientes condiciones de uso:

- Cualquier uso que haga de estos documentos o imágenes deben ser sólo para efectos de investigación o estudio académico, y usted no puede ponerlos a disposición de otra persona.
- Usted deberá reconocer el derecho del autor a ser identificado y citado como el autor de esta tesis.
- No se podrá obtener ningún beneficio comercial y las obras derivadas tienen que estar bajo los mismos términos de licencia que el trabajo original.

El Libre Acceso a la información, promueve el reconocimiento de la originalidad de las ideas de los demás, respetando las normas de presentación y de citación de autores con el fin de no incurrir en actos ilegítimos de copiar y hacer pasar como propias las creaciones de terceras personas.

***Respeto hacia sí mismo y hacia los demás.***

# **ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL**

## **FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA**

### **DISEÑO Y SIMULACIÓN DE CONTROLADORES TIPO PID Y ESPACIOS NULOS PARA SEGUIMIENTO DE TRAYECTORIA Y EVASIÓN DE OBSTÁCULOS APLICADOS A UNA FORMACIÓN DE MANIPULADORES AÉREOS**

**TRABAJO DE TITULACIÓN PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE  
INGENIERO EN INGENIERÍA EN ELECTRÓNICA Y CONTROL**

**JEFFERSON VLADIMIR ANTAMBA RIVERA**

**jefferson.antamba@epn.edu.ec**

**JOHANA BELÉN QUIÑÓNEZ IBUJÉS**

**johana.quinonez@epn.edu.ec**

**DIRECTOR: Dr. PAULO CÉSAR LEICA ARTEAGA**

**paulo.leica@epn.edu.ec**

**Quito, enero 2020**

## **AVAL**

Certifico que el presente trabajo fue desarrollado por Jefferson Vladimir Antamba Rivera y Johana Belén Quiñónez Ibujés, bajo mi supervisión.

---

**Dr. PAULO CÉSAR LEICA ARTEAGA.**  
**DIRECTOR DEL TRABAJO DE TITULACIÓN**

## **DECLARACIÓN DE AUTORÍA**

Nosotros, Jefferson Vladimir Antamba Rivera y Johana Belén Quiñónez Ibujés, declaramos bajo juramento que el trabajo aquí descrito es de nuestra autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y, que hemos consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

A través de la presente declaración dejamos constancia de que la Escuela Politécnica Nacional podrá hacer uso del presente trabajo según los términos estipulados en la Ley, Reglamentos y Normas vigentes.

---

JEFFERSON VLADIMIR ANTAMBA  
RIVERA

---

JOHANA BELÉN QUIÑÓNEZ IBUJÉS



## DEDICATORIA

Con mucho cariño a todas las personas que depositaron su confianza en mí, que me apoyaron y estuvieron pendientes de mi bienestar.

A todas las personas que tiene afinidad hacia el área de la robótica, y a las cuales espero ayudar con la información presente en este trabajo.

Jefferson

## AGRADECIMIENTO

Aprendí a reconocer que mis logros no los obtengo solo, sino que se los debo a personas que la vida colocó en mi camino y me ayudaron a conseguirlos. Les agradezco desde el fondo de mi corazón por estar a mi lado.

A mis padres, Germánico y Norma, que desde mi primer momento de vida estuvieron para brindarme su apoyo incondicional pese a cualquier complicación y a los cuales espero retribuir de alguna manera todo lo que han hecho por mí.

A mi hermana Elizabeth, por confiar en mí y compartir los momentos más importantes en mi vida.

A mi familia, por preocuparse por mí y apoyarme para cumplir mis objetivos.

A mis amigos, muchos de los cuales conozco hace muchos años y de los cuales guardo gratos momentos. Gracias por su confianza y por motivarme a seguir adelante. Éxitos en su vida profesional.

A Johana Quiñónez, mi amiga y compañera, por su confianza, paciencia y dedicación en la realización de este trabajo de titulación.

A mis profesores, de los cuales me llevo sus consejos y conocimientos aprendidos para poder aplicarlos en mi vida profesional. Entre ellos, al Dr. Paulo Leica, director de este proyecto de titulación, por guiarnos durante todo este proceso.

Al Club de Robótica de la Escuela Politécnica Nacional, lugar donde aprendí aspectos que van más allá de la mera teoría y donde formé un equipo de trabajo y a la vez un grupo de amigos.

Jefferson

## DEDICATORIA

Este trabajo se lo dedico a Dios y a mi familia por su amor incondicional.

Johana

# AGRADECIMIENTO

*“La voluntad de Dios es buena, agradable y perfecta”. Romanos 12:2*

A Dios, por darme la oportunidad de vivir y la dicha de conocer su amor y su bondad. Gracias por las personas maravillosas que ha colocado en mi camino y me han motivado a trabajar por mis sueños.

A mis padres Pedro y Marcia, por su confianza, dedicación y amor. Me han enseñado a ser mejor persona cada día y gracias a su trabajo he podido culminar mi carrera con éxito. Sé que jamás podré devolver todo lo que me han dado, pero prometo esforzarme para que siempre se sientan orgullosos de mí.

A mis hermanos Alex y Katy, por su cariño y compañía. Mi hermano siempre me motivó a aprender más y mi hermana nunca ha dejado de enseñarme. Ustedes fueron mis primeros maestros y con su ayuda logré seguir sus pasos.

A Ricardo, la persona más maravillosa que he podido conocer. Gracias por tu amor y por confiar en mí más de lo que yo confío.

A Jefferson, por ser mi compañero en este trabajo de titulación y por ser mi amigo. Te agradezco por creer en mí y hacer más fácil la realización de este proyecto.

A todos mis profesores que contribuyeron con mi formación profesional y sobre todo a aquellos que de alguna manera lograron inspirarme.

Al Dr. Pulo Leica, por ser el director y guía de este trabajo de titulación.

A mis compañeros de clase, por compartir esta etapa de mi vida, en el camino muchos se convirtieron en amigos a quienes aprecio como personas y valoro como profesionales. Les deseo muchos éxitos.

Al Club de Robótica, lugar donde conocí gente muy especial. Gracias por enseñarme tanto y darme la oportunidad de compartir mis conocimientos con otros.

Gracias a la Escuela Politécnica Nacional por permitirme cumplir un proyecto más en mi vida.

Johana

# ÍNDICE DE CONTENIDO

|  |     |
|--|-----|
| AVAL .....   | I   |
| DECLARACIÓN DE AUTORÍA.....  | II  |
| DEDICATORIA.....   | III |
| AGRADECIMIENTO.....  | IV  |
| ÍNDICE DE CONTENIDO.....   | VII |
| RESUMEN .....  | X   |
| ABSTRACT .....   | XI  |
| 1 INTRODUCCIÓN .....   | 1   |
| 1.1 Objetivos .....  | 1   |
| 1.2 Alcance .....  | 2   |
| 1.3 Marco teórico .....  | 3   |
| 1.3.1 Introducción a la robótica.....                              | 3   |
| 1.3.2 Robots Aéreos.....   | 6   |
| 1.3.3 Cuadricópteros .....   | 7   |
| 1.3.4 Robots manipuladores.....                                    | 13  |
| 1.3.5 Manipulador aéreo.....                                       | 23  |
| 1.3.6 Formación de robots aéreos .....                             | 24  |
| 1.3.7 Controladores.....   | 27  |
| 1.3.8 Controlador PID.....   | 27  |
| 1.3.9 Controlador basado en espacio nulo .....                     | 29  |
| 1.3.10 Evasión de obstáculos mediante campos potenciales .....     | 34  |
| 1.3.11 Estabilidad según Lyapunov .....                            | 37  |
| 1.3.12 Índices de rendimiento.....                                 | 40  |
| 2 METODOLOGÍA .....  | 43  |
| 2.1 Modelo cinemático del quadricóptero .....                      | 43  |
| 2.2 Modelo cinemático del manipulador robótico .....               | 44  |
| 2.3 Modelo cinemático del manipulador aéreo .....                  | 46  |
| 2.4 Modelo cinemático de la formación de manipuladores aéreos..... | 50  |
| 2.4.1 Variables de postura.....                                    | 52  |
| 2.4.2 Variables de forma.....                                      | 52  |
| 2.4.3 Variables de orientación .....                               | 53  |
| 2.4.4 Jacobiano de forma - orientación.....                        | 56  |

|       |   |     |
|-------|---|-----|
| 2.4.5 | Jacobiano de postura .....  | 56  |
| 2.4.6 | Jacobiano de la formación .....   | 57  |
| 2.5   | Diseño de controladores para seguimiento de trayectoria .....   | 58  |
| 2.5.1 | Controlador tipo PID .....  | 58  |
| 2.5.2 | Controlador basado en espacio nulo .....  | 61  |
| 2.6   | Diseño de controladores para evasión de obstáculos .....  | 69  |
| 2.6.1 | Controlador para la tarea de evasión .....  | 69  |
| 2.6.2 | Controlador con prioridad de forma .....  | 71  |
| 2.6.3 | Análisis de estabilidad del controlador con prioridad forma .....   | 71  |
| 2.6.4 | Controlador con prioridad de postura .....  | 75  |
| 2.6.5 | Análisis de estabilidad del controlador con prioridad postura .....   | 76  |
| 2.6.6 | Controlador con prioridad evasión .....   | 80  |
| 2.6.7 | Análisis de estabilidad del controlador con prioridad evasión .....   | 81  |
| 2.7   | Diseño de la interfaz gráfica de usuario .....  | 84  |
| 2.7.1 | Ventana de inicio .....   | 85  |
| 2.7.2 | Ventana de seguimiento de trayectoria .....   | 87  |
| 2.7.3 | Ventana de evasión de obstáculos .....  | 92  |
| 2.7.4 | Ventana de información .....  | 95  |
| 3     | RESULTADOS Y DISCUSIÓN .....  | 97  |
| 3.1.  | Pruebas realizadas al modelo en lazo abierto .....  | 98  |
| 3.1.1 | PRUEBA 1: Modelo del manipulador aéreo .....  | 98  |
| 3.1.2 | PRUEBA 2: Modelo de la formación de robots .....  | 101 |
| 3.2.  | Resultados del seguimiento de trayectoria .....   | 102 |
| 3.1.3 | PRUEBA 3: Seguimiento de trayectoria circular para controladores tipo PID y basado en espacio nulo .....  | 103 |
| 3.1.4 | PRUEBA 4: Seguimiento de trayectoria cuadrada para controladores tipo PID y basado en espacio nulo .....  | 112 |
| 3.1.5 | PRUEBA 5: Seguimiento de trayectoria lemniscata para controladores tipo PID y basado en espacio nulo .....  | 120 |
| 3.2   | Resultados del control de evasión de obstáculos .....   | 128 |
| 3.2.1 | PRUEBA 6: Evasión de obstáculos estáticos utilizando controladores basados en espacio nulo con distinta prioridad para una trayectoria circular ..... | 128 |
| 3.2.2 | Comparación de los tres controladores diseñados .....   | 130 |
| 4     | CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES .....  | 142 |
| 4.1   | Conclusiones .....  | 142 |
| 4.2   | Recomendaciones .....   | 143 |
| 5     | REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....  | 144 |

|                                  |     |
|----------------------------------|-----|
| ANEXOS .....                     | 147 |
| Anexo A: Manual de usuario ..... | 147 |

## RESUMEN

La manipulación aérea es un nuevo tema de investigación que ha recibido especial atención debido a la gran cantidad de aplicaciones implicadas. En el presente proyecto técnico, se realiza un análisis acerca del control de este tipo de sistemas aplicados a esquemas multirobot.

Para ello se propone elaborar un estudio sobre el control de seguimiento de trayectoria y evasión de obstáculos estáticos aplicados a una formación de tres manipuladores aéreos.

Para el seguimiento de trayectoria, se propone un control tipo PID y un esquema de control basado en espacio nulo. Usando el espacio nulo de una matriz jacobiana, se pueden lograr varios objetivos de control asignando una prioridad en el orden de las tareas involucradas mientras se resuelven los conflictos entre ellas. La evasión de obstáculos utiliza la definición de energía potencial artificial acoplada al enfoque basado en el espacio nulo. La estabilidad de los controles propuestos se verifica de acuerdo con los criterios de Lyapunov.

Utilizando MATLAB como plataforma de simulación, se presentan los resultados obtenidos para varias pruebas de funcionamiento y el diseño de una interfaz gráfica de usuario. Para el seguimiento de trayectoria se analiza además el desempeño de los controladores propuestos mediante el índice de desempeño ISE o integral del error al cuadrado. Los resultados para el control de evasión de obstáculos muestran la respuesta del sistema para diferentes prioridades entre las tareas de control.

**PALABRAS CLAVE:** Manipulador aéreo, Formación, Espacio Nulo, PID, Seguimiento de trayectoria, Evasión de obstáculos.



## ABSTRACT

Aerial manipulation is a new research topic which has received special attention due to the large number of applications involved. In this technical project, an analysis about the control of this type of systems applied to multirobot schemes is accomplished.

Motivated by this, a study related to trajectory tracking and static obstacle avoidance applied to a formation of three aerial manipulators is proposed.

For trajectory tracking, a PID type control and a null space-based control scheme are proposed. Using the null space of a jacobian matrix, several control objectives can be achieved by assigning a priority to the tasks involved while resolving conflicts between them. Obstacle avoidance uses artificial potential energy definition coupled with the null space-based approach. The stability of the proposed controllers is checked according to the Lyapunov's criteria.

Using MATLAB as a simulation platform, the results obtained for various functional tests and the design of a graphical user interface are presented. For trajectory tracking, the performance of the proposed controllers is also analyzed using the performance index ISE or integral of the squared error. The results for obstacle avoidance control show the response of the system for different priorities among the control tasks.

**KEYWORDS:** Aerial manipulator, Robot Formation, Null Space, PID, Trajectory tracking, Obstacle avoidance.

# 1 INTRODUCCIÓN

La robótica aérea se ha desarrollado significativamente en los últimos años debido a que ha permitido llevar a cabo un sinnúmero de tareas que van desde la defensa y seguridad, a la inspección, mapeo o filmación. Sin embargo, a medida que los UAVs (*Unmanned Aerial Vehicles*) abarcan un mayor número de aplicaciones, es necesario migrar desde este tipo de tareas consideradas pasivas, a tareas más activas como la manipulación, posicionamiento, sujeción y ensamble. Es así como surge la manipulación aérea y se hace más amplio el campo de aplicación para los robots aéreos, permitiendo que ejecuten un mayor número de tareas.

Adicionalmente, si se establece una formación multirobot con este tipo de sistemas, se incrementa de forma significativa las ventajas en tareas específicas de difícil ejecución con un solo robot, se puede reducir costos del sistema, incrementar robustez y eficiencia.

Cabe mencionar que la movilidad de estos sistemas robóticos puede verse afectada por la presencia de obstáculos o un cambio en la trayectoria de algún robot o grupo de robots. Los robots, por lo tanto, deben tener un esquema de control apropiado que les permita ejecutar la tarea asignada respondiendo a estos cambios.

En el presente Proyecto Técnico, se realiza un estudio de los manipuladores aéreos con el fin de obtener un modelo y diseñar controladores que permitan realizar varias tareas. De esta manera se aprovechan las características de estos sistemas en un gran número de aplicaciones involucradas.

## 1.1 OBJETIVOS

El objetivo general de este Proyecto Técnico es:

- Diseñar y simular controladores tipo PID y basado en espacios nulos para seguimiento de trayectoria y evasión de obstáculos aplicados a una formación de manipuladores aéreos.

Los objetivos específicos del Proyecto Técnico son:

- Estudiar y determinar el modelo que rige el comportamiento cinemático de un manipulador aéreo y de la formación de manipuladores aéreos.
- Diseñar un controlador tipo PID y un controlador basado en espacios nulos para el seguimiento de trayectoria de una formación de manipuladores aéreos.

- Diseñar un controlador basado en espacios nulos para realizar la tarea de evasión de obstáculos mediante campos potenciales en tres dimensiones.
- Diseñar una interfaz gráfica de usuario para visualizar las respuestas de los algoritmos de control, utilizando MATLAB.
- Realizar pruebas de funcionamiento de los esquemas de control para evasión de obstáculos y pruebas para seguimiento de trayectoria utilizando el índice de desempeño ISE.

## **1.2 ALCANCE**

Para el presente Proyecto Técnico, el estudio del manipulador aéreo se limitará a determinar el modelo cinemático de un robot compuesto por un manipulador robótico acoplado a un cuadricóptero. Para el brazo robótico, el modelo cinemático se obtendrá utilizando el algoritmo de Denavit-Hartenberg.

Se considerará para el estudio de la formación a tres manipuladores aéreos, y se tomará en cuenta para este modelo variables de forma-orientación y postura en tres dimensiones.

Se estudiarán y diseñarán controladores tipo PID y basado en espacios nulos para seguimiento de tres tipos de trayectoria: circular, lemniscata y cuadrada; aplicados a la formación de manipuladores aéreos. Además, se diseñarán controladores basados en espacios nulos para evasión de obstáculos utilizando el algoritmo de evasión mediante campos potenciales en tres dimensiones. Los obstáculos se limitarán a ser de tipo estáticos.

Se utilizará Simulink de MATLAB para simular tanto el modelo cinemático de un manipulador aéreo como el modelo cinemático de la formación, realizando pruebas en lazo abierto y se simularán los controladores diseñados para seguimiento de trayectoria y evasión de obstáculos.

Para el seguimiento de trayectoria, se realizará la comparación de los resultados obtenidos entre el controlador tipo PID y el control basado en espacios nulos utilizando el índice de desempeño ISE (Integral del error cuadrático)

Se diseñará e implementará una interfaz gráfica de usuario para visualizar las respuestas de los algoritmos de control utilizando MATLAB.

## 1.3 MARCO TEÓRICO

En esta sección se presenta un breve resumen de los conceptos utilizados para la obtención de los modelos y el diseño de los controladores. La información presentada en esta sección corresponde a la teoría e información más relevante obtenida de investigaciones y desarrollos previos al presente proyecto técnico.

Esta sección contiene una introducción referente a la robótica, robots aéreos y manipuladores. Se empieza a abordar la temática de manipulación aérea y la teoría relacionada con los controladores para estos tipos de sistemas. También se presenta información relacionada a la teoría de Lyapunov e índices de desempeño.

### 1.3.1 INTRODUCCIÓN A LA ROBÓTICA

El término “robot” fue usado por primera vez en una obra de ciencia ficción de origen checo en 1921 llamado “Robots universales de Rossum”, donde los robots eran personas artificiales o androides que terminan rebelándose perjudicando a la humanidad. Este término proviene de la palabra eslava “*robot*” que se refiere al trabajo realizado de manera forzada [1], [2].

Sin embargo, fue el escritor americano de origen ruso Isaac Assimov quien con su obra literaria escrita entre 1950 y 1985, exploró temas relacionados con la interacción y la moral de los humanos y los robots estableciendo las "Tres leyes de la robótica". Estas historias han influido en los libros y películas posteriores, que a su vez han dado forma a la percepción pública de lo que son los robots [2].

Los primeros robots fueron los manipuladores teleoperados que se desarrollaron en la mitad del siglo XX que utilizaban transmisión mecánica y con el tiempo se reemplazó con el uso de la tecnología electrónica y el servocontrol. La sustitución del operador por un programa de ordenador dio paso al concepto de robot atendiendo a las necesidades en las cadenas de fabricación [1].

En los años sesenta, Japón superó a Estados Unidos en el crecimiento de la robótica y se fundó la “*Japan Industrial Robot Association*” (JIRA), la primera de este tipo en el mundo. Luego se formó el “*Robot Institute of America*” (RIA) que cambió su nombre por “*Robotic Industries Association*” [1].

Adicionalmente, se propusieron las bases de la robótica en las universidades con departamentos de inteligencia artificial y se diseñaron los primeros robots móviles. Los

primeros robots humanoides surgen en 1985 en Japón y en 1999 se empieza a desarrollar robots con forma de animales [1].

En los últimos años, el avance de la robótica nos ha permitido mejorar los procedimientos quirúrgicos, realizar una gran cantidad de tareas industriales y militares, automatizar la agricultura, conducir vehículos y aeronaves de manera autónoma con la capacidad de evadir obstáculos, explorar el espacio exterior y las profundidades de los océanos. En ciencia e ingeniería se han desarrollado nuevas áreas como la manipulación terrestre y aérea y la utilización de inteligencia artificial.

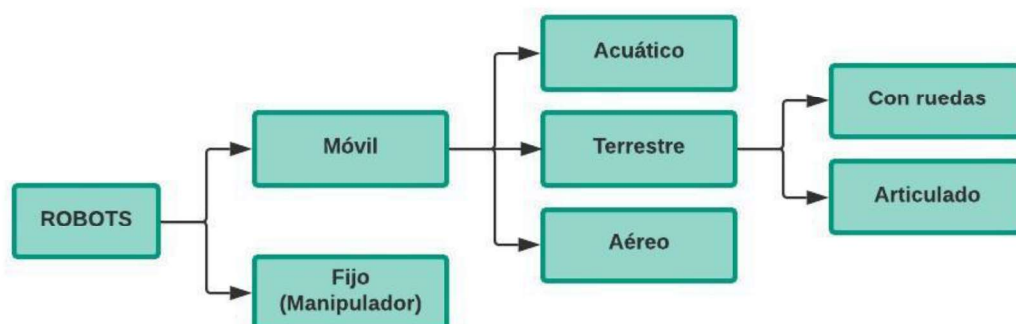
### 1.3.1.1 Definición de Robot

Según el diccionario de Oxford, un robot tiene la siguiente definición: "Máquina automática programable capaz de realizar determinadas operaciones de manera autónoma y sustituir a los seres humanos en algunas tareas, en especial las pesadas, repetitivas o peligrosas; puede estar dotada de sensores, que le permiten adaptarse a nuevas situaciones" [2].

Es decir, un robot puede realizar una serie de tareas complejas de forma automática y este debe ser programable, lo cual distingue a un robot de cualquier otra máquina. Sin embargo, una definición general puede resultar insuficiente para abarcar el gran conjunto de sistemas que son considerados como robot. Por esta razón, se suele definir a cada tipo de robot para acotar en su definición sus características y campos de aplicación [1].

### 1.3.1.2 Tipos de Robots

Los robots pueden clasificarse fácilmente según el medioambiente en que operan, según se muestra en la Figura 1.1.



**Figura 1.1.** Clasificación de los robots según su medioambiente y mecanismo de interacción [3].

Los robots se clasifican en dos grandes grupos: robots móviles y robots manipuladores o fijos, ambos con diferentes ambientes de trabajo y con distintas capacidades.

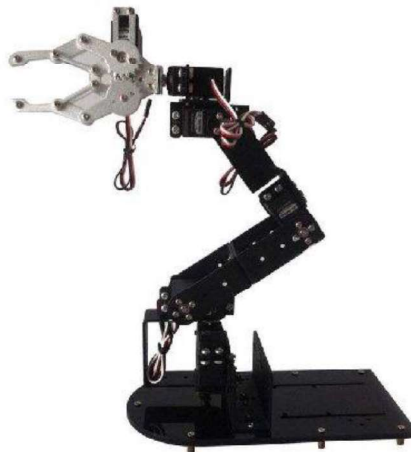
Los robots móviles tienen la capacidad de moverse y ejecutar largas tareas incluso en situaciones y ambientes inciertos [3]. Ejemplos de estos tipos de robots son los autos con conducción propia, cuadricópteros, submarinos y robots móviles de cuatro ruedas como el mostrado en la Figura 1.2.

Los robots móviles a su vez se dividen según su mecanismo de movimiento en: acuáticos (exploración bajo el agua), terrestres (carros con ruedas o articulados) y robots aéreos.



**Figura 1.2.** Robot móvil de cuatro ruedas [4].

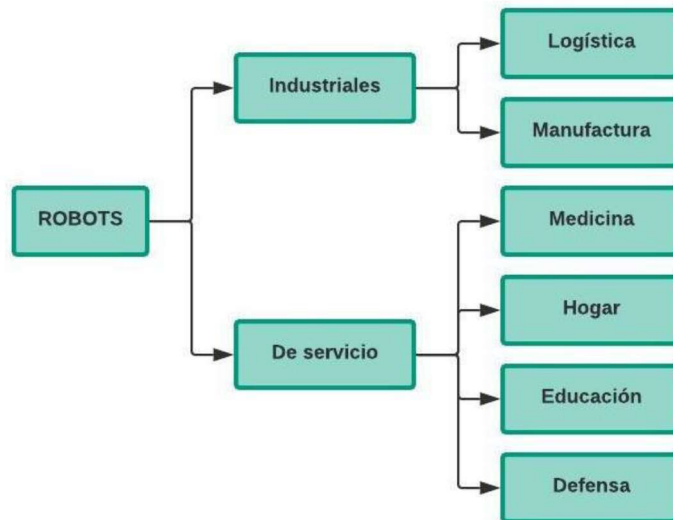
Los robots fijos compuestos mayormente por manipuladores robóticos industriales realizan tareas repetitivas y específicas tales como soldadura, pintura y manufactura. La introducción de sensores y actuadores ha mejorado la interacción humano-robot, con lo cual los manipuladores se han llegado a utilizar en ambientes menos controlados como la cirugía de alta precisión [3]. En la Figura 1.3. se muestra un ejemplo de un robot manipulador.



**Figura 1.3.** Robot manipulador de tres grados de libertad [5].

Los robots manipuladores están unidos a una plataforma en la superficie y pueden determinar su posición basados en su estado interno, mientras que los robots móviles necesitan un sistema de percepción con el medioambiente para determinar su ubicación.

Otra forma de clasificar a los robots se basa en el campo de aplicación. De esta forma se clasifican según lo muestra la Figura 1.4 [3].



**Figura 1.4.** Clasificación de los robots según el campo de aplicación [3].

Los primeros robots fueron industriales porque se desarrollaron según los requerimientos del sector industrial. Los robots de servicio, por otro lado, se desarrollaron para asistir al ser humano con sus tareas. Esto incluye a los robots para realizar tareas del hogar, transporte, medicina (robots en cirugía, rehabilitación y entrenamiento) y defensa (drones de reconocimiento) [3].

### 1.3.2 ROBOTS AÉREOS

Los robots aéreos, o vehículos aéreos no tripulados (*UAVs*) son cada vez más comunes y abarcan una gran cantidad de formas y tamaños. Sus aplicaciones incluyen operaciones militares, supervisión, investigación meteorológica e investigación en robótica [2].

Los *UAVs* son plataformas usadas ampliamente en manipulación aérea, debido a la simplicidad de su diseño mecánico y su capacidad de vuelo; además tienen bajo costo, agilidad y la existencia de esquemas de control precisos para este tipo de robots [6].

Los *UAVs* de ala fija son similares en principio a los aviones de pasajeros, los cuales utilizan alas para proporcionar sustentación y una hélice o un jet para proporcionar empuje hacia adelante [2]. En la Figura 1.5 se muestra un ejemplo de un *UAV* de ala fija.



**Figura 1.5.** UAV Global Hawk [7].

Los UAVs de rotor tienen una variedad de configuraciones que incluyen el diseño de helicópteros convencionales con un rotor principal y de cola, un cable coaxial con rotores y cuadrotores coaxiales de giro contrario. Se utilizan para inspección e investigación y tienen la ventaja de poder despegar verticalmente [2]. En la Figura 1.6 se muestra un cuadricóptero comercial.



**Figura 1.6.** Cuadricóptero DJI Mavic Air [8].

### **1.3.3 CUADRICÓPTEROS**

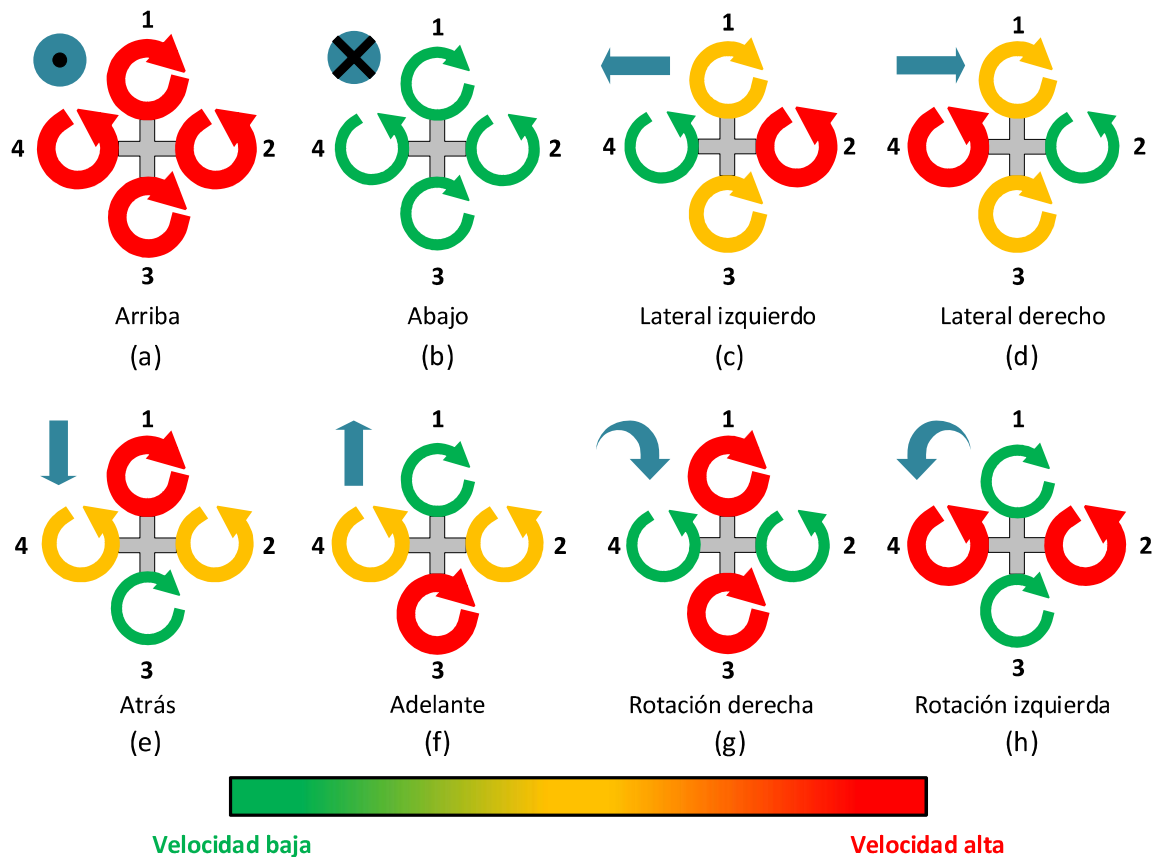
Un cuadricóptero es un robot aéreo con cuatro rotores en total que tiene la habilidad de moverse en el espacio tridimensional, donde la velocidad de cada rotor constituye la base para el control del cuadricóptero. Su uso se ha extendido debido a que pueden ser fácilmente modelados y controlados [2].

La utilización de cuatro rotores individuales supone una ventaja en tamaño respecto a sistemas con un solo rotor como los helicópteros, reduciendo el riesgo si se entra en contacto con cualquier objeto externo. Además, al asegurar los rotores dentro de un bastidor, se logra la protección de los rotores durante las colisiones. Los cuadricópteros permiten realizar vuelos en interiores y en entornos con presencia de obstáculos con menor riesgo de daños, mayor seguridad del operador y del entorno y con menor tiempo de recuperación en caso de colisiones [9].



Estructuralmente, los cuadricópteros se pueden hacer en un tamaño pequeño, con una mecánica y un control simples. Esto es útil en particular para la vigilancia, para entornos peligrosos y para la navegación y cartografía en exteriores.

Existen dos posibles configuraciones para la mayoría de diseño de cuadricópteros en “+” y en “x”. La configuración en cruz “+” de los rotores de un cuadricóptero se representa en la Figura 1.7. El par de rotores delantero y trasero (1, 3) giran en el sentido de las agujas del reloj, mientras que el par de rotor derecho e izquierdo (2, 4) giran en sentido contrario a las agujas del reloj. Esta configuración está diseñada para equilibrar el momento creado por cada uno de los pares de rotor giratorio, de esta manera, cambiando las velocidades de los rotores del cuadricóptero se pueden generar diferentes movimientos como se describe a continuación [10]:



**Figura 1.7.** Configuración de los rotores del cuadricóptero [10].

- a) Movimiento hacia arriba: Incrementando las velocidades de los cuatro rotores en conjunto se genera un movimiento vertical ascendente (Figura 1.7(a)).
- b) Movimiento hacia abajo: Decrementando las velocidades de los cuatro rotores simultáneamente se genera un movimiento vertical descendente (Figura 1.7(b)).

- c) Desplazamiento lateral izquierdo: Si el rotor 2 de la Figura 1.7(c) se mueve a mayor velocidad respecto al rotor 4, se genera un movimiento lateral izquierdo.
- d) Desplazamiento lateral derecho: Si el rotor 2 de la Figura 1.7(d) se mueve a menor velocidad respecto al rotor 4, se consigue un movimiento lateral derecho.
- e) Movimiento hacia atrás: Se consigue movimiento hacia atrás si el rotor 1 gira a alta velocidad respecto al rotor 3 según se indica en la Figura 1.7(e).
- f) Movimiento hacia adelante: Se consigue movimiento hacia adelante si el rotor 1 gira a velocidad baja respecto al rotor 3 como se muestra en la Figura 1.7(f).
- g) Rotación derecha: El par de rotores 1 y 3 con una velocidad alta respecto al par de rotores 2 y 4 provoca la rotación del cuadricóptero hacia la derecha en su propio eje vertical, según se ilustra en la Figura 1.7(g).
- h) Rotación izquierda: Si el par de rotores 1 y 3 tiene una velocidad baja respecto al par de rotores 2 y 4, se consigue una rotación hacia la izquierda alrededor del eje vertical del cuadricóptero según la Figura 1.7(h).

Se considera para el presente trabajo el modelo de un robot cuadricóptero.

### 1.3.3.1 Sistema de coordenadas

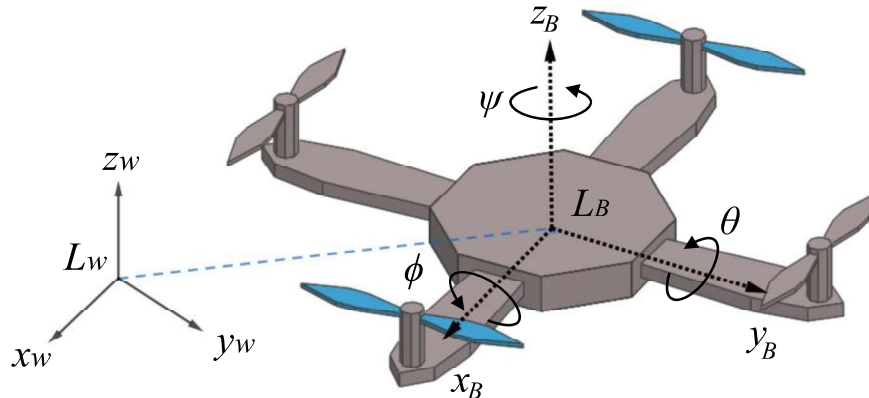
Los sistemas de coordenadas se usan para describir la posición y orientación de un robot (pose del robot) en relación con sí mismo o su medioambiente. Se utiliza un sistema de referencia para relacionar la pose entre un sistema coordinado y otro, donde las posiciones y orientaciones son referenciados con respecto a otro sistema de coordenadas cartesianas o un sistema de coordenadas universal [11].

Para describir el modelo cinemático de un cuadricóptero, se requiere de dos sistemas coordinados: el sistema de coordenadas del sistema de referencia corporal  $\{B\}$  (*Body*) en el centro de masa del robot y alineado al eje  $z$ ; y el sistema de coordenadas del sistema de referencia inercial, referido a la Tierra  $\{W\}$  (*World*).

El sistema de referencia inercial  $\{W\}$  está en una ubicación conocida en la Tierra, en el origen  $L_W$ , siguiendo la convención Este-Norte-Arriba (*ENU: East-North-Up*), con  $z_W$  dirigido hacia arriba,  $y_W$  apuntando hacia el este y  $x_W$ , hacia el norte. Esta convención es usada comúnmente en sistemas de aviación [11].

La pose del cuadricóptero se representa con un sistema de coordenadas de seis grados de libertad. El sistema de referencia del vehículo aéreo se ubica en el centro de masa, centro geométrico o en la parte superior del cuerpo del robot. Es común alinear los ejes de esta referencia con el sistema de referencia inercial, por ejemplo  $z_W$  y  $z_B$  apuntan ambos hacia arriba.

En la Figura 1.8 se muestra el sistema de referencia corporal e inercial de un cuadricóptero.



**Figura 1.8.** Sistema de coordenadas corporal e inercial de un cuadricóptero [11].

Mientras que, la posición del cuerpo respecto al sistema de referencia inercial puede ser expresada según (1.1):

$$p_W^B = \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

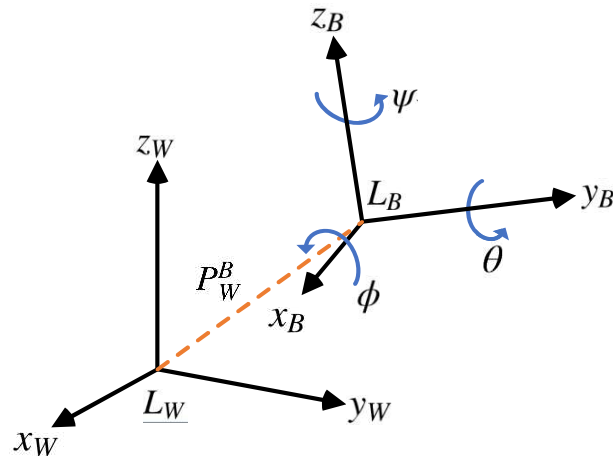
Donde  $p_W^B$  es el vector de posición en el sistema de referencia del cuadricóptero {B} respecto a la referencia inercial {W}.

Así mismo, la orientación del cuerpo se describe utilizando los ángulos de rotación alrededor de los ejes de balanceo, cabeceo, y guiñada (*roll*, *pitch* y *yaw*) para el eje  $x$ , eje  $y$  y eje  $z$ , respectivamente y se representan por  $\phi$ ,  $\theta$  y  $\psi$ .

El vector  $\theta_W^B$  representa el vector de ángulos de orientación en el sistema de referencia del cuadricóptero respecto al sistema inercial y puede expresarse según la ecuación (1.2):

$$\theta_W^B = \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

La posición y orientación de un cuadricóptero se muestran en la Figura 1.9.



**Figura 1.9.** Posición y orientación del sistema del cuadricóptero respecto al sistema inercial [11].

### 1.3.3.2 Ángulos de Euler.

Según el Teorema de rotación de Euler, “Se puede relacionar dos sistemas de coordenadas ortonormales independientes mediante una secuencia de rotaciones (no más de tres) sobre ejes de coordenadas, donde no hay dos rotaciones sucesivas alrededor del mismo eje” [2].

En la Figura 1.9, se muestran dos sistemas de referencias con diferente posición y orientación, uno respecto al otro, donde intuitivamente se puede rotar el sistema de coordenadas corporal para que coincida con el sistema de coordenadas inercial.

El problema de la rotación radica en el orden en el cual las rotaciones son aplicadas ya que la orientación final no es la misma si se cambia el orden de las rotaciones alrededor de los ejes coordenados [2].

Euler además introdujo un método intuitivo y comúnmente utilizado para describir la orientación de un cuerpo rígido. Para la descripción del movimiento,  $\phi$  es el ángulo de “balanceo” (roll),  $\theta$  el ángulo de “cabeceo” (*pitch*) y  $\psi$  el ángulo de “guiñada” (*yaw*). Estos ángulos se conocen como los “Ángulos de Euler” [11].

Se suele utilizar el nombre de ángulos de Euler para hablar de los ángulos que en geometría se conocen como ángulos de Tait-Bryan (por el matemático Peter Guthrie Tait) [11].

En la Figura 1.10 se muestra una secuencia de rotación utilizado los ángulos de Euler.

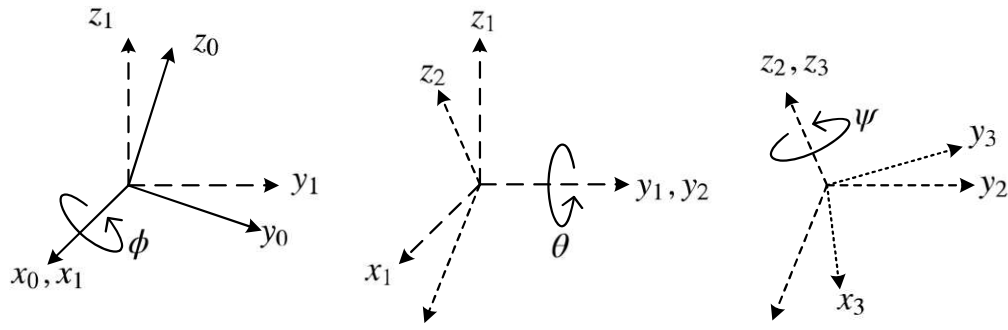


Figura 1.10. Representación de los ángulos de Euler [12].

### 1.3.3.3 Matrices de rotación

Las matrices de rotación permiten el mapeo de coordenadas del sistema inercial en el sistema fijo del cuerpo. En este análisis se considera los ángulos de Euler ZYX y las matrices de rotación elementales. En (1.3), (1.4) y (1.5) se muestran las matrices de rotación en  $x$   $R_x(\phi)$ ,  $y$   $R_y(\theta)$  y  $z$   $R_z(\psi)$  respectivamente [11].

$$R_x(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

$$R_z(\psi) = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

Estas matrices cumplen las siguientes propiedades, según (1.6):

$$\begin{aligned} R_i(0) &= I_{3 \times 3} \\ R_i(\alpha)R_i(\beta) &= R_i(\alpha + \beta) \\ R_i(\alpha)^{-1} &= R_i(-\alpha) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Donde  $i = x, y, z$ .

La matriz de rotación total desde el sistema de referencia inercial  $\{W\}$  hasta el sistema del cuadricóptero  $\{B\}$  es el producto de las tres rotaciones elementales, que denotan rotación alrededor del eje  $z$  seguido de rotación alrededor del eje  $y$ , finalmente, rotación alrededor de eje  $x$ . Combinada, la transformación del sistema de referencia corporal al sistema de referencia inercial está dado por la matriz indicada en (1.7) [11].

$$\begin{pmatrix} x_W \\ y_W \\ z_W \end{pmatrix} = R_W^B \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix}$$

$$R_W^B = R_z(\psi)R_y(\theta)R_x(\phi) \quad (1.7)$$

Esta matriz es una matriz ortonormal que rota al vector definido en el sistema de referencia {B} a un vector respecto al sistema inercial {W} y se muestra en (1.8) y cumple que  $R^T = R^{-1}$  y, además  $\det(R) = 1$ .

$$R_W^B = \begin{bmatrix} C(\psi)C(\theta) & C(\psi)S(\theta)S(\phi) - S(\psi)C(\phi) & C(\psi)S(\theta)C(\phi) + S(\psi)S(\phi) \\ S(\psi)C(\theta) & S(\psi)S(\theta)S(\phi) + C(\psi)C(\phi) & S(\psi)S(\theta)C(\phi) - C(\psi)S(\phi) \\ -S(\theta) & C(\theta)S(\phi) & C(\theta)C(\phi) \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

Donde  $C(\phi) = \cos(\phi)$ ,  $C(\theta) = \cos(\theta)$ ,  $C(\psi) = \cos(\psi)$ ,  $S(\phi) = \sin(\phi)$ ,  $S(\theta) = \sin(\theta)$  y  $S(\psi) = \sin(\psi)$ .

### 1.3.4 ROBOTS MANIPULADORES

#### 1.3.4.1 Definición de Robot Manipulador

Las primeras definiciones de robot manipulador surgen en 1979 por parte de la RIA (*Robot Institute of America*, actualmente *Robotic Industries Association*), donde se define: “Un robot industrial es un manipulador multifuncional reprogramable, capaz de mover materias, piezas, herramientas o dispositivos especiales, según trayectorias variables, programadas para realizar tareas diversas” [1].

Esta definición fue una referencia para la definición actual establecida por la Asociación Internacional de Estándares (ISO) que define al robot manipulador como un “Manipulador de tres o más ejes, con control automático, reprogramable, multi-aplicación, móvil o no, destinado a ser utilizado en aplicaciones de automatización industrial. Incluye al manipulador (sistema mecánico y accionadores) y al sistema de control.



**Figura 1.11.** Robot manipulador IRB 140 [13].

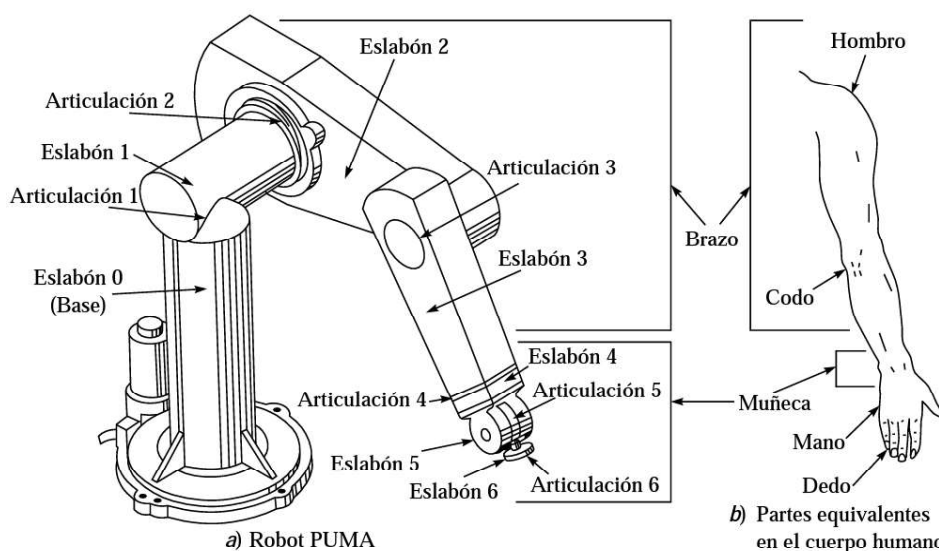
Según ISO, un manipulador robótico debe tener al menos tres ejes servocontrolados, tal que para su posicionamiento, las señales de control al actuador considere la posición de referencia y la posición actual en ese momento (realimentación) [1]. En la Figura 1.11 se muestra un manipulador robótico utilizado para actividades de ensamblaje y soldadura.

### 1.3.4.2 Estructura mecánica de un robot manipulador

Un manipulador robótico está formado por los siguientes elementos: estructura mecánica, transmisores, sistema de acondicionamiento, sistema sensorial, sistema de potencia y control y elementos terminales [1].

Mecánicamente, un robot manipulador está formado por una serie de eslabones o enlaces en cadena unidos mediante articulaciones llamadas uniones que permiten un movimiento relativo entre cada dos eslabones consecutivos. Cada unión tiene un grado de libertad, ya sea traslacional o rotacional donde el movimiento de cada unión cambia al ángulo o posición relativos de los enlaces cercanos [2].

La constitución física de la mayor parte de los robots manipuladores guarda cierta similitud con la anatomía del brazo humano [1] como lo muestra la Figura 1.12, por lo que en ocasiones, para hacer referencia a los distintos elementos del manipulador, se usan términos como cuerpo, brazo, codo y muñeca.



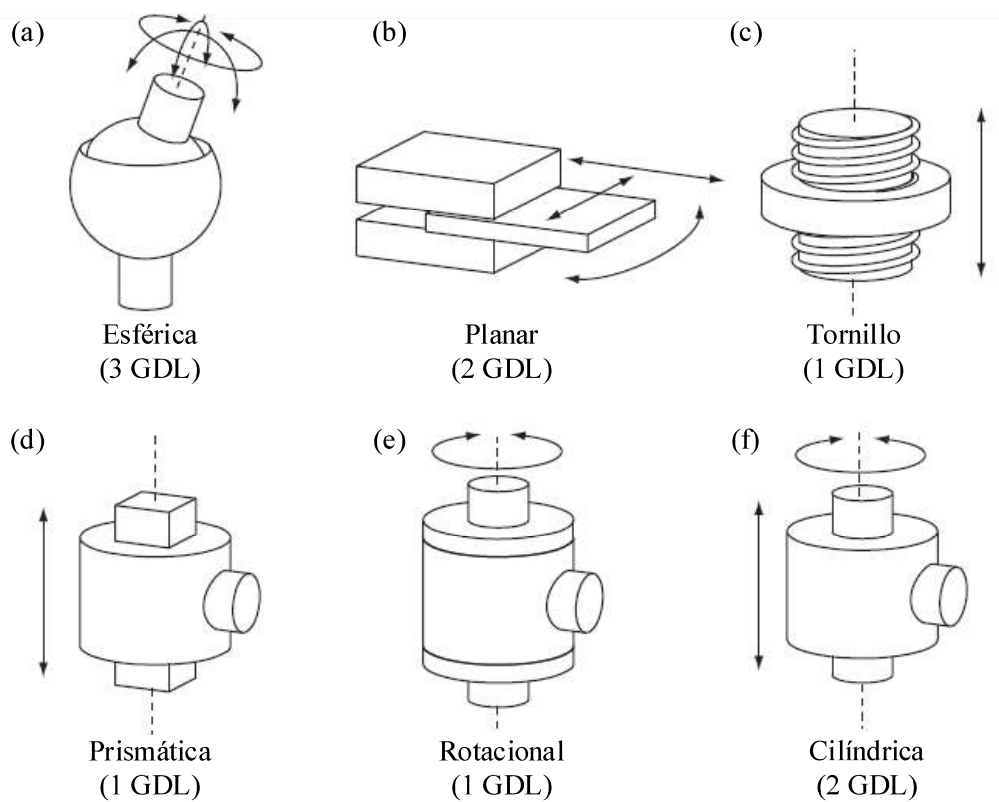
**Figura 1.12.** Manipulador robótico y sus partes equivalentes en el cuerpo humano [14].

### 1.3.4.3 Tipos de articulaciones

Se define como grado de libertad (GDL) de un manipulador, a cada uno de los movimientos independientes que puede realizar una articulación respecto a la anterior.

El número de grados de libertad se relacionan directamente con el tipo de articulación que se utiliza en el manipulador robótico. En la Figura 1.13 se muestran los tipos de articulaciones que se utilizan en manipuladores robóticos y los grados de libertad de movimiento que presentan.

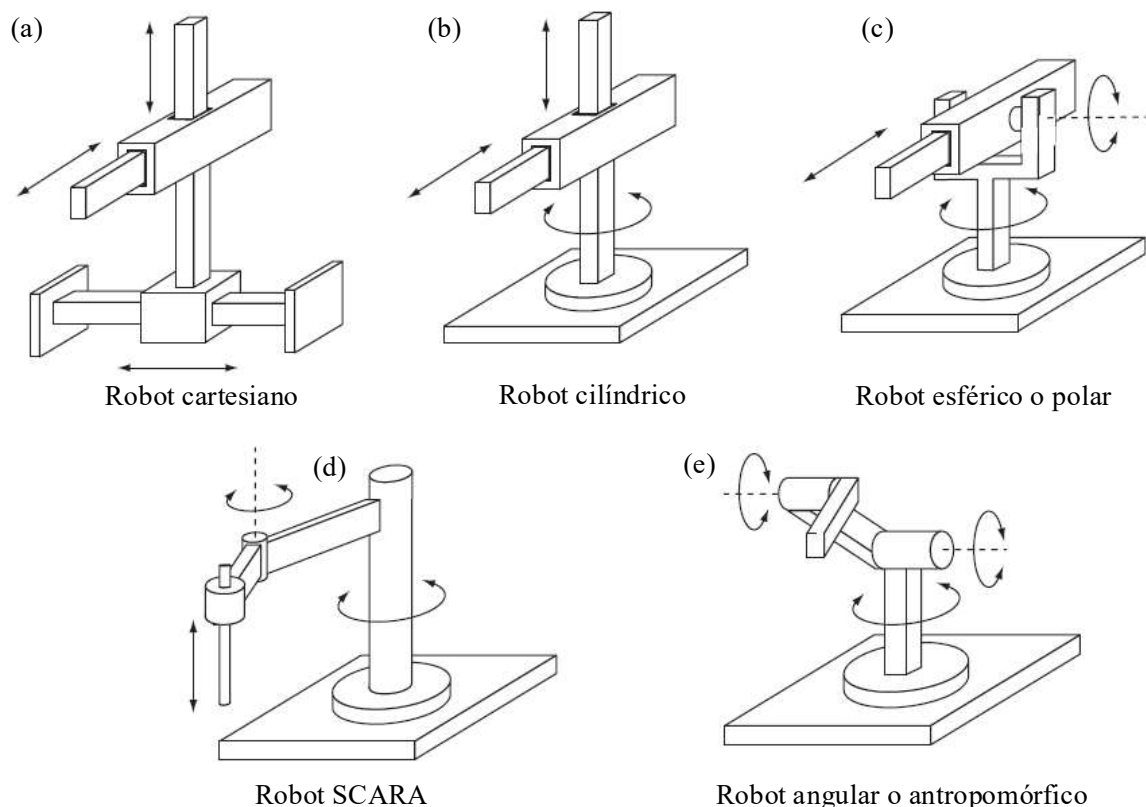
En la práctica, se emplean mayormente articulaciones prismáticas y rotacionales. Por esta razón es común encontrar manipuladores con un número de grado de libertad igual al número de articulaciones. Además, si el robot tiene articulaciones de más de un grado de libertad, se asume que se tienen varias articulaciones unidas por eslabones de longitud nula [1].



**Figura 1.13.** Tipos de articulaciones y sus grados de libertad [1]. (a) esférica, (b) planar, (c) tornillo, (d) prismática, (e) rotacional y (f) cilíndrica.

Cuando el robot manipulador es una cadena cinemática abierta (un solo camino posible para llegar de cualquier eslabón a otro), se tienen diferentes combinaciones que dan lugar a distintas configuraciones que se muestran en la Figura 1.14. De estos, el 45% de los robots manipuladores existentes tienen una estructura angular, seguidos de los robots con estructura cartesiana y los tipos SCARA. Las configuraciones de estructura esférica y cilíndrica no son muy comunes [1].





**Figura 1.14.** Configuraciones más comunes en robots manipuladores en cadena cinemática abierta. (a) cartesiano, (b) cilíndrico, (c) polar, (d) SCARA y (e) angular [1].

#### 1.3.4.4 Matriz de Transformación Homogénea

Una matriz de transformación homogénea  $T$  es una matriz de dimensión  $4 \times 4$  (1.9) que describe la transformación de un sistema de coordenadas a otro y permiten una representación conjunta de la posición y orientación.

$$T = \begin{bmatrix} R_{3 \times 3} & p_{3 \times 1} \\ f_{1 \times 3} & w_{1 \times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Rotación} & \text{Traslación} \\ \text{Perspectiva} & \text{Escala} \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

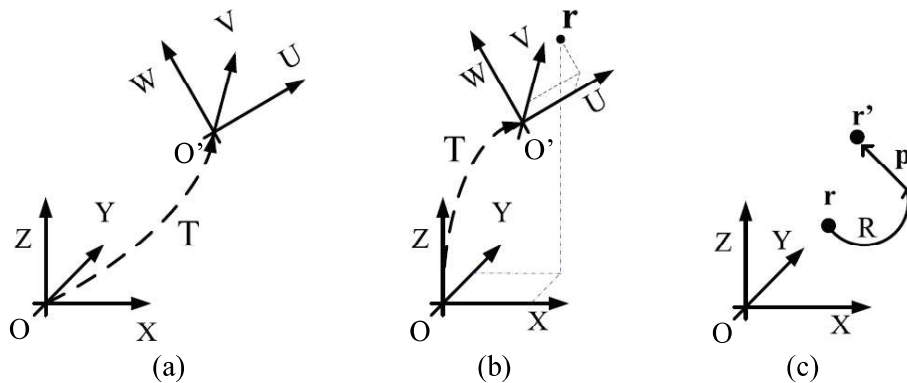
Donde la submatriz  $R_{3 \times 3}$  corresponde a una matriz de rotación, la submatriz  $p_{3 \times 1}$  es un vector de traslación, la submatriz  $f_{1 \times 3}$  es una transformación de perspectiva (componente nulo) y  $w_{1 \times 1}$  es un escalado global (valor unitario), según se muestra en (1.10).

$$T = \begin{bmatrix} R_{3 \times 3} & p_{3 \times 1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Rotación} & \text{Traslación} \\ \text{Perspectiva} & \text{Escala} \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

La ecuación (1.10) tiene algunas aplicaciones que se muestran en la Figura 1.15.

1. Representar la orientación y traslación de un sistema de coordenadas  $O'UVW$  mediante la matriz  $R_{3 \times 3}$  y el vector  $p_{3 \times 1}$  respecto a un sistema  $OXYZ$  (Figura 1.15 (a)).
2. Conocer las coordenadas del vector  $r$  en el sistema  $OXYZ$  a partir de sus coordenadas en el sistema  $O'UVW$  (Figura 1.15 (b)).

3. Rotar y trasladar un vector  $r$  en un mismo sistema de referencia para transformarlo en  $r'$  (Figura 1.15 (c)).



**Figura 1.15.** Aplicaciones de la matriz de transformación homogénea. (a) Orientación de un sistema, (b) coordenadas de un vector, (c) rotación-traslación de un vector [1].

Si únicamente se va a trasladar un sistema  $O'UVW$  con un vector  $p = (p_x, p_y, p_z)$  respecto al sistema  $OXYZ$ , la matriz  $T(p)$  corresponde a una matriz de traslación homogénea indicada en (1.11). Análogamente, si solo se va a rotar el sistema, la submatriz  $R_{3 \times 3}$  define la rotación según (1.3), (1.4) y (1.5). Así, se define las matrices homogéneas básicas de rotación indicadas en (1.12).

$$T(p) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & 0 & p_y \\ 0 & 0 & 1 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

Matrices homogéneas básicas de rotación:

$$\begin{aligned} R_x(\phi) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ R_y(\theta) &= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ R_z(\psi) &= \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.12)$$

Para describir traslaciones y giros consecutivos respecto a un sistema de referencia, la matriz de transformación compleja puede descomponerse en la aplicación de transformaciones simples de traslación y rotación. Esta aplicación se consigue mediante el

producto de las matrices de transformación homogénea simples relacionadas a cada transformación.

Esta transformación no es conmutativa debido a que el producto de matrices tampoco lo es. Ante esto, se debe considerar si las transformaciones se realizan referidas al sistema fijo (Producto de matrices desde la última transformación a la primera) o respecto al sistema móvil (Producto de matrices desde la primera transformación a la última) [1].

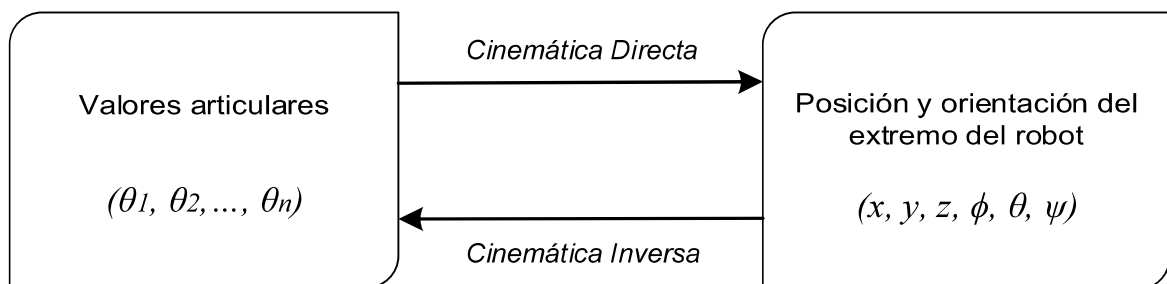
#### 1.3.4.5 El problema cinemático directo

El problema cinemático directo se ocupa de la relación entre las uniones individuales del robot manipulador y la posición y orientación de la herramienta o efector final.

El problema cinemático directo busca determinar la posición y orientación del efector final, dado los valores de las variables de las uniones del robot. Las variables de las uniones son los ángulos entre los enlaces en caso de juntas rotacionales o de revolución y la extensión del enlace en caso de juntas prismáticas o deslizantes, [12].

El problema cinemático directo es contrastado con el problema cinemático inverso que se encarga de determinar los valores de las variables de las uniones del robot manipulador según la posición y orientación del efector final [12].

En la Figura 1.16 se muestra de forma gráfica la relación entre cinemática directa e inversa.

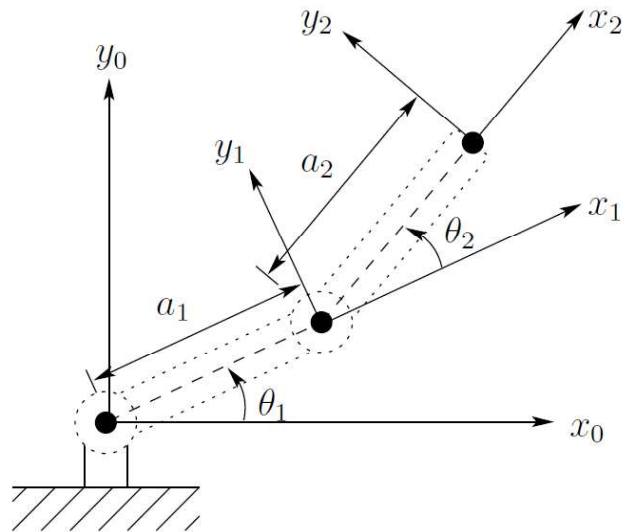


**Figura 1.16.** Relación entre cinemática directa e inversa [1].

#### 1.3.4.6 Método geométrico

Para el caso de robots con pocos grados de libertad, el problema cinemático se puede resolver considerando métodos geométricos.

Por ejemplo, en la Figura 1.17 se muestra un robot manipulador rotacional de dos grados de libertad [1].



**Figura 1.17.** Robot manipulador rotacional de 2 GDL [12].

La cinemática directa del robot de la Figura 1.17 corresponde a las ecuaciones en (1.13).

$$\begin{aligned}
 x_1 &= a_1 \cos \theta_1 \\
 y_1 &= a_1 \sin \theta_1 \\
 x_2 &= a_1 \cos \theta_1 + a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\
 y_2 &= a_1 \sin \theta_1 + a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)
 \end{aligned} \tag{1.13}$$

Donde:

- $\theta_1$  y  $\theta_2$  son los ángulos de rotación de los eslabones 1 y 2 respectivamente.
- $a_1$  y  $a_2$  corresponden a las longitudes de los eslabones 1 y 2 respectivamente.

#### 1.3.4.7 Algoritmo Denavit-Hartenberg

Una forma sistemática de describir la geometría de una cadena de enlaces y uniones fue propuesta por Denavit y Hartenberg en 1955 y es conocido hoy como el algoritmo de Denavit-Hartenberg (D-H) [2].

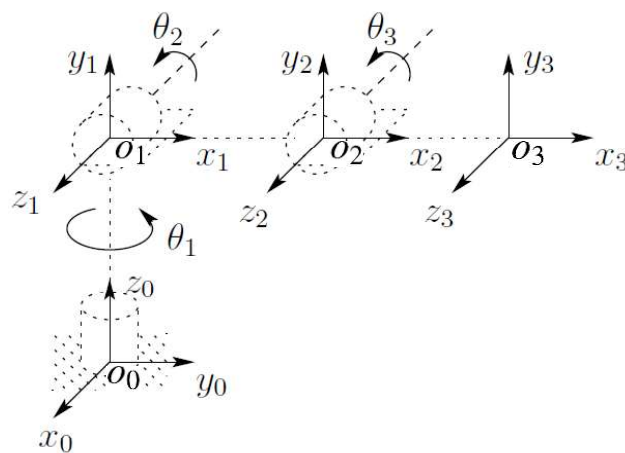
El algoritmo de Denavit-Hartenberg es un método matricial que establece la configuración que debe tomar cada sistema de coordenadas relacionado a cada eslabón  $i$  de una cadena, para poder obtener la cinemática de la cadena completa. Este algoritmo es un conjunto de convenciones que provee un procedimiento sistemático para llevar a cabo el análisis de la cinemática directa del manipulador.

Es posible llevar a cabo el análisis de la cinemática directa sin utilizar este algoritmo mediante el método geométrico. Sin embargo, el análisis de un manipulador de  $n$ -enlaces

puede ser muy complejo y las convenciones introducidas por el algoritmo de Denavit Hartenberg simplifican el análisis considerablemente [1], [12].

El robot manipulador que corresponde a una cadena cinemática abierta con  $n$  uniones, tendrá  $n + 1$  enlaces porque cada unión conecta dos enlaces. Los enlaces se numeran del 0 a  $n$ , empezando por la base, donde la unión  $i$  conecta el enlace  $i - 1$  al enlace  $i$ . Se considera además la ubicación de la unión  $i$  fija respecto al enlace  $i - 1$ , así cuando la junta  $i$  se mueve, el enlace  $i$  se mueve. El enlace 0 es fijo (puede ser móvil) y no se mueve cuando las juntas son actuadas [12].

La variable de la junta puede ser un ángulo  $\theta_i$  si la junta es de rotación o un desplazamiento  $d_i$  si es prismática.



**Figura 1.18.** Sistemas de referencia asignados al manipulador [12].

Para llevar a cabo el análisis de la cinemática del robot, se asigna un sistema de referencia  $o_i x_i y_i z_i$  a cada enlace  $i$  como se ilustra en la Figura 1.18.

Una vez asignados los sistemas de coordenadas para cada eslabón según la representación propuesta por D-H, es posible pasar de un eslabón al otro mediante cuatro transformaciones básicas utilizando una matriz de transformación homogénea que depende de las características geométricas del eslabón [1].

Estas transformaciones básicas son una sucesión de rotaciones y traslaciones utilizando una matriz de transformación  $A_i^{i-1}$  que permite relacionar el sistema de referencia del elemento  $i - 1$  con el sistema del elemento  $i$ . Las transformaciones en cuestión referidas al sistema móvil son las siguientes [1]:

1. Rotación alrededor del eje  $z_{i-1}$  un ángulo  $\theta_i$  mediante una matriz de rotación  $R_z(\theta_i)$ .

2. Traslación a lo largo del eje  $z_{i-1}$  una distancia  $d_i$  mediante una matriz de traslación  $T(0, 0, d_i)$ .
3. Traslación a lo largo de  $x_i$  una distancia  $a_i$  mediante una matriz de traslación  $T(a_i, 0, 0)$ .
4. Rotación alrededor del eje  $x_i$  un ángulo  $\alpha_i$  mediante una matriz de rotación  $R_x(\alpha_i)$ .

Dado que el producto de matrices no es conmutativo, las transformaciones se han de realizar en el orden indicado en (1.14):

$$A_i^{i-1} = R_z(\theta_i)T(0,0,d_i)T(a_i,0,0)R_x(\alpha_i) \quad (1.14)$$

Realizando el producto de matrices se tiene que:

$$A_i^{i-1} = \begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i & 0 & 0 \\ S\theta_i & C\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha_i & -S\alpha_i & 0 \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_i^{i-1} = \begin{bmatrix} C\theta_i & -C\alpha_i S\theta_i & S\alpha_i S\theta_i & a_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & a_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

Donde  $C\theta_i = \cos(\theta_i)$ ,  $S\theta_i = \sin(\theta_i)$ ,  $C\alpha_i = \cos(\alpha_i)$ ,  $S\alpha_i = \sin(\alpha_i)$  y  $\theta_i$ ,  $d_i$ ,  $\alpha_i$ ,  $a_i$  son los parámetros D-H del eslabón  $i$ . Es decir, si se identifican estos parámetros se obtienen las matrices  $A_i^{i-1}$ , tal como lo indica la ecuación (1.15), que permiten relacionar todos los eslabones del robot.

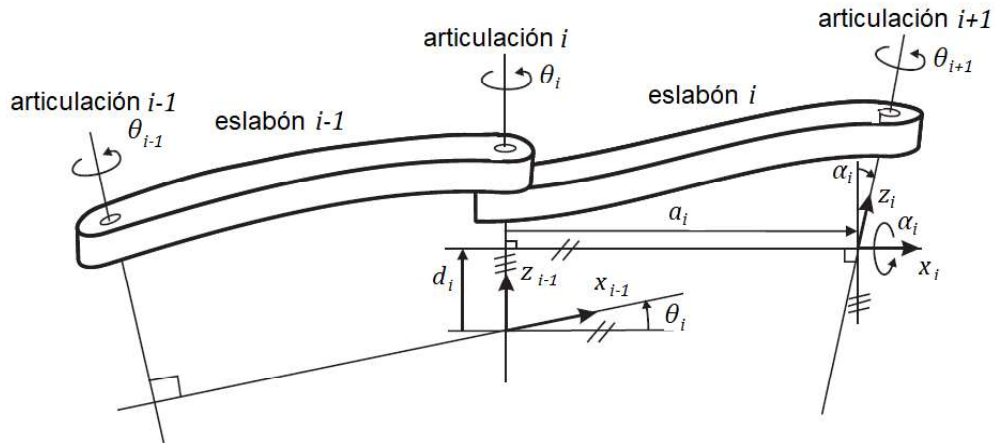
El algoritmo de Denavit Hartenberg para la obtención de los cuatro parámetros y las matrices  $A_i^{i-1}$  se describe a continuación [12]:

1. Ubicar e indicar los ejes de las uniones  $z_0, \dots, z_{n-1}$ .
2. Establezca el sistema de referencia base. Establecer el origen en cualquier lugar en el eje  $z_0$ . Los ejes  $x_0$  y  $y_0$  se eligen convenientemente de tal manera que formen un sistema en el sentido de las agujas del reloj.

Para  $i = 1, \dots, n - 1$  realice los pasos del 3 al 5.

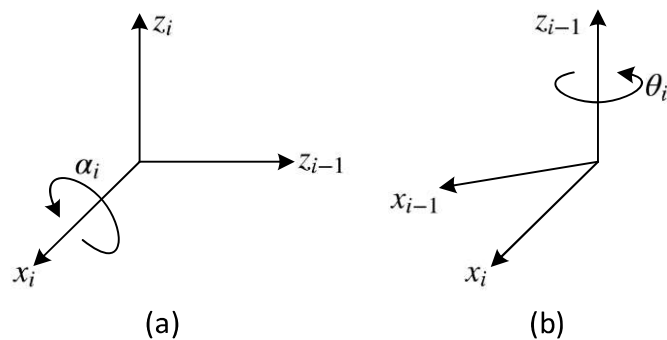
3. Ubique el origen  $o_i$  donde la perpendicular común a  $z_i$  y  $z_{i-1}$  interseca  $z_i$ . Si  $z_i$  interseca  $z_{i-1}$  ubique  $o_i$  en esta intersección. Si  $z_i$  y  $z_{i-1}$  son paralelos, ubique  $o_i$  en cualquier posición conveniente a lo largo de  $z_i$ .
4. Ubique  $x_i$  a lo largo de la perpendicular común entre  $z_{i-1}$  y  $z_i$  a través de  $o_i$ , o en la dirección normal al plano  $z_{i-1} - z_i$  si se intersecan  $z_{i-1}$  y  $z_i$ .

5. Ubique  $y_i$  para completar el sistema en sentido de las agujas del reloj.
6. Establezca el sistema de referencia del efector final  $o_n x_n y_n z_n$ . Asumiendo que la  $n$ -ésima unión es una revolución, establezca  $z_n = a$  a lo largo de la dirección  $z_{n-1}$ . Establezca el origen  $o_n$  convenientemente a lo largo de  $z_n$ . Establezca  $y_n = s$  en la dirección de cierre del efector final y establezca  $x_n = n$  como  $s \times a$ , o en sentido de las agujas de reloj.



**Figura 1.19.** Parámetros D-H para un eslabón de rotación [1].

7. Crear una tabla con los parámetros de los enlaces  $a_i, d_i, \alpha_i, \theta_i$ .
  - $a_i$  = distancia a lo largo de  $x_i$  desde  $o_i$  hasta la intersección de los ejes  $x_i$  y  $z_{i-1}$ . (Figura 1.19).
  - $d_i$  = distancia a lo largo de  $z_{i-1}$  desde  $o_{i-1}$  a la intersección de los ejes  $x_i$  y  $z_{i-1}$ . (Figura 1.19).
  - $\alpha_i$  = ángulo entre  $z_{i-1}$  y  $z_i$  medido sobre  $x_i$ . (Figura 1.20 (a)).
  - $\theta_i$  = ángulo entre  $x_{i-1}$  y  $x_i$  medido sobre  $z_{i-1}$ . (Figura 1.20 (b)).



**Figura 1.20.** Ángulos  $\alpha_i$  y  $\theta_i$  [12].

8. Formar las matrices de transformación homogéneas  $A_i^{i-1}$  sustituyendo los parámetros del anterior paso en (1.15).
9. Obtener la matriz de transformación  $T$  que relaciona el sistema de la base con el externo del robot según lo indica la ecuación (1.16).

$$T = A_1^0 A_2^1 \dots A_n^{n-1} \quad (1.16)$$

Donde  $n$  es el número total de eslabones.

### 1.3.5 MANIPULADOR AÉREO

La manipulación aérea se encuentra dentro de la categoría de manipulación móvil, ampliamente estudiada en robótica. Sin embargo, la mayor parte de la investigación llevada a cabo en la manipulación móvil se centra en los robots terrestres.

Un sistema de manipulación aérea, como un manipulador aéreo no tripulado UAM (*Unmanned Aerial Manipulator*), consiste en dos subsistemas: un vehículo aéreo no tripulado UAV y un mecanismo de manipulador/interacción (como un manipulador robótico o una herramienta rígida) empleado para interactuar físicamente con el ambiente; con los sensores y el sistema de control necesarios para su funcionamiento.

Incorporar un manipulador robótico a un UAM garantiza el acceso a zonas de difícil acceso y si el manipulador es redundante, puede facilitar la capacidad de realizar tareas de control secundarias [6].

Los principales retos a los que se enfrenta la manipulación aérea son [6]:

- Los UAVs no tienen una base estable y, por lo tanto, las fuerzas y pares generados por la presencia y el movimiento del mecanismo de manipulación y la carga útil afectan directamente la posición, comportamiento e incluso la estabilidad del robot.
- Son sistemas con dinámicas acopladas altamente no lineales, lo que introduce mayores complicaciones en su diseño de control.
- Generalmente tienen restricciones de peso de carga útil estrictas y, por lo tanto, no pueden acomodar manipuladores robóticos muy hábiles como los industriales.

Si bien la manipulación aérea es un campo relativamente nuevo, se han desarrollado algunos proyectos relacionados como el proyecto integrado ARCAS (2011), se presenta el desarrollo de un sistema de ensamblaje cooperativo mediante robots aéreos equipados con brazos robóticos. El proyecto busca desarrollar un gran número de aplicaciones que incluyen la construcción de plataformas para la evacuación de personas o aviones de



aterrizaje, la inspección y el mantenimiento de las instalaciones y la construcción de estructuras en sitios inaccesibles [15]. En la Figura 1.21 se muestra un manipulador aéreo del proyecto ARCAS.



**Figura 1.21.** Manipulador aéreo del proyecto ARCAS [16].

### **1.3.6 FORMACIÓN DE ROBOTS AÉREOS**

El control de formación de vehículos aéreos se ha convertido en un área de gran interés para la comunidad robótica. Esto en gran parte se debe a que un esquema de formación de robots permite ejecutar tareas que no son posibles realizar con un solo robot. El uso de múltiples robots tiene algunas ventajas tales como reducción de costos, mayor resistencia, rendimiento y eficiencia [17].

Una formación aérea se puede definir como un conjunto de dos o más vehículos aéreos volando en conjunto, cuyos estados dinámicos son acoplados por medio de una ley de control común.

Los sistemas multirobot, según el tipo de control, se clasifican en sistemas centralizados y descentralizados. Un sistema centralizado se caracteriza al tener una sola unidad de procesamiento que toma decisiones y se comunica con todos los robots. Al almacenar más información, este tipo de sistemas son más eficientes para obtener soluciones; sin embargo, al recibir información de forma continua, existe la posibilidad de que se origine congestión por la gran cantidad de datos y una reducción en la rapidez de toma de decisiones. Si una unidad central falla, el sistema entero se detendrá porque los agentes no son capaces de tomar decisiones de forma autónoma.

Por otro lado, en un sistema descentralizado, cada robot ejecuta una parte del objetivo de control sin conocimiento de las tareas de los otros vehículos. Este tipo de control es más

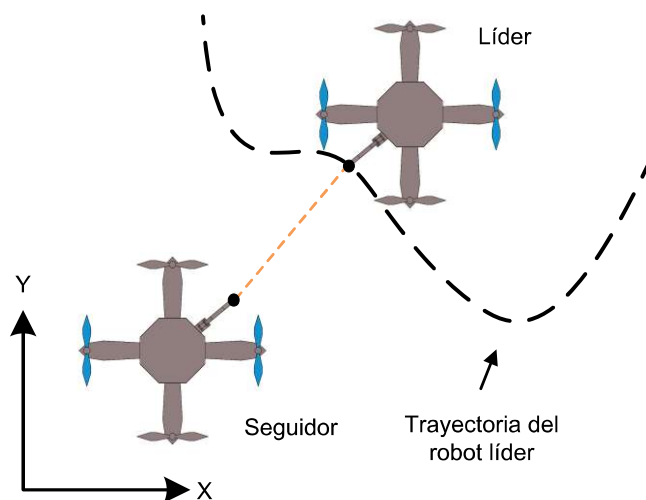
rápido y dinámico sin necesidad de almacenar o enviar información y tiene como ventaja una gran robustez en caso de falla de algún agente [17].

Existen tres estructuras para el control de sistemas multi-robot: Estructura líder-seguidor, métodos basados en comportamiento y estructuras virtuales:

### 1.3.6.1 Estructura líder-seguidor

Un robot es considerado líder mientras que los otros son seguidores. Cada seguidor intercambia su información con el líder, pero no tienen conocimiento sobre las tareas de los otros seguidores. Además, si el líder falla, no hay manera de asegurar que el objetivo de control sea alcanzado [17]. Este tipo de esquema es fácil de entender e implementar.

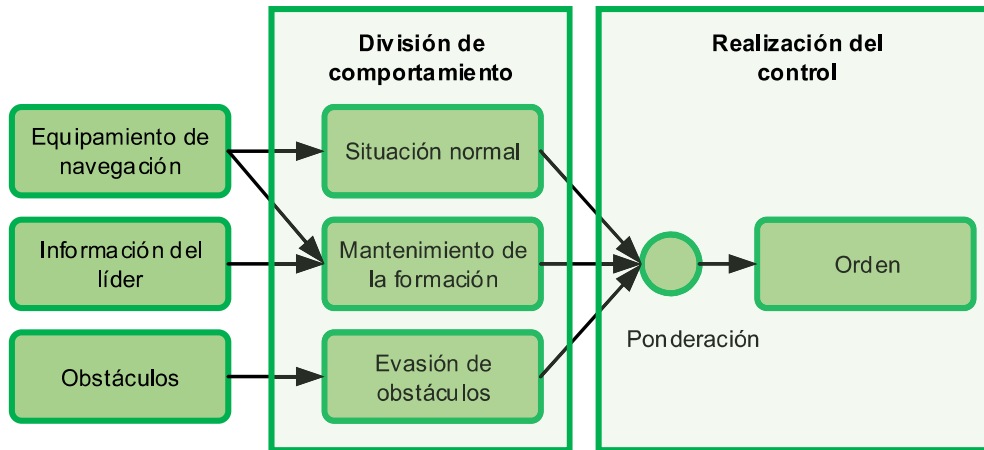
Los seguidores necesitan posicionarse con respecto al líder y mantener una posición deseada. Por tal razón, sólo se necesita especificar el movimiento del líder y las posiciones relativas deseadas de los seguidores respecto al líder. Con el movimiento del líder conocido, las posiciones deseadas de los seguidores se consiguen con una ley de control local en cada seguidor [18]. En la Figura 1.22 se muestra un esquema líder-seguidor de dos robots.



**Figura 1.22.** Configuración líder-seguidor de dos robots [18].

### 1.3.6.2 Estructura basada en comportamiento

El comportamiento de la formación de robots es definido como una combinación del comportamiento individual de cada robot que debe formalizarse matemáticamente. Se prescriben varios comportamientos deseados para cada robot, y la acción final de cada robot se deriva ponderando la importancia relativa de cada comportamiento. Los posibles comportamientos incluyen evitar obstáculos, evitar colisiones, buscar objetivos y mantener la formación (Figura 1.23) [18].



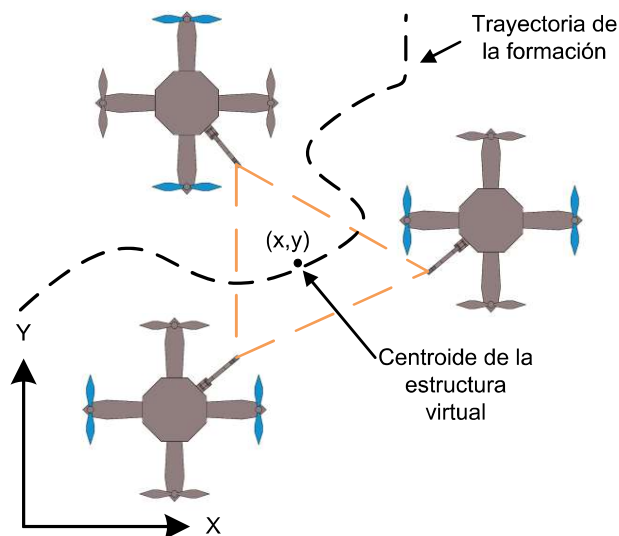
**Figura 1.23.** Esquema de una estructura basada en comportamiento [19].

La limitación del enfoque basado en el comportamiento es que es difícil de analizar matemáticamente, por lo tanto, es difícil garantizar un control preciso de la formación o asegurar la convergencia de la formación a los objetivos de control deseados [20].

### 1.3.6.3 Estructuras virtuales

Las estructuras virtuales implican establecer relaciones geométricas fijas entre los robots y el sistema de referencia como un punto o un robot virtual. La estructura virtual trata a toda la formación como una sola estructura virtual rígida, donde el movimiento deseado es asignado a la estructura virtual como un conjunto y como resultado se trazan las trayectorias para cada robot.

Si se consideran tres robots, la posición de control de la formación es representado por el centroide de la estructura geométrica (triángulo) según la Figura 1.24.

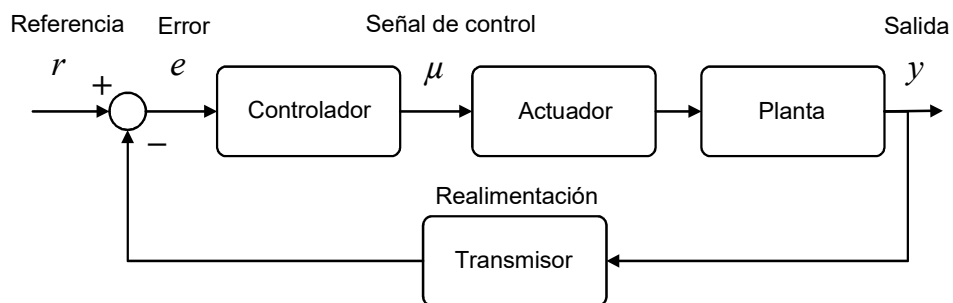


**Figura 1.24.** Estructura virtual para una formación de tres robots aéreos [20].

La principal desventaja de la implementación de la estructura virtual es la centralización, que conduce a un único punto de falla para todo el sistema. Este método puede evitar la interferencia del patrón líder-seguidor; sin embargo, la combinación de la posición de líder virtual y su transferencia a otros UAVs requieren una alta calidad de comunicación y un poder de cómputo intensivo [19].

### 1.3.7 CONTROLADORES

Al realizar formación de manipuladores aéreos, es necesario tener un control de los diferentes parámetros que caracterizan la formación. Es así como, mediante la utilización de técnicas de control apropiadas, se pueden realizar distintas tareas de control como el seguimiento de trayectoria, mantenimiento de la forma y evasión de obstáculos.



**Figura 1.25.** Esquema de un sistema de control en lazo cerrado

En la Figura 1.25 se presenta el esquema general de un sistema de control en lazo cerrado, formado por el controlador, un actuador, la planta y un sistema de realimentación. El sistema tiene una señal de referencia  $r$ , que representa el valor que se desea alcanzar en la salida  $y$  del sistema. A partir de la señal de referencia y la señal de salida se obtiene el error  $e$  con el cual el controlador calcula una acción o señal de control  $u$  aplicada al actuador del sistema.

### 1.3.8 CONTROLADOR PID

El controlador PID (Proporcional - Integral - Derivativo) puede ser considerado el controlador estándar de la industria. Es uno de los esquemas de control clásico más utilizados y permiten resolver adecuadamente muchos problemas de control.

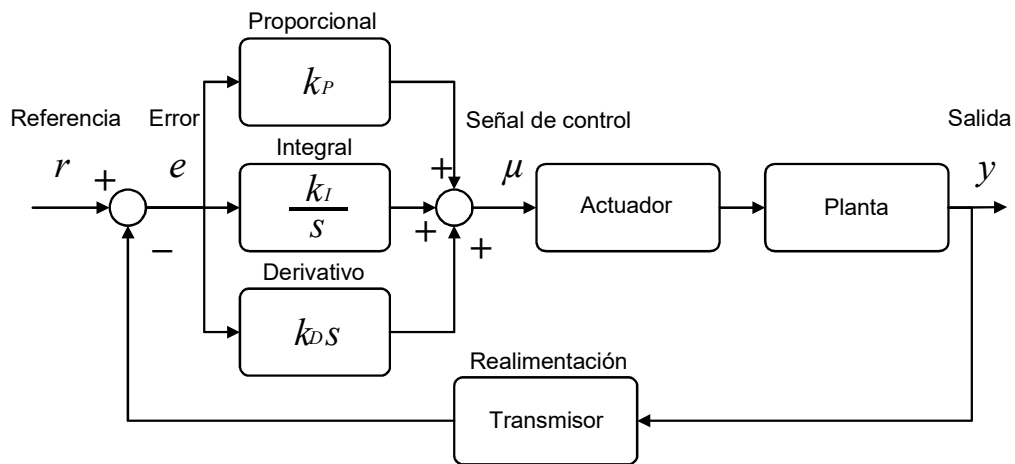
El control PID es un sistema lineal e invariante en el tiempo y propaga una suma ponderada de la señal de entrada, su integral y su primera derivada a la salida [21]. En el dominio del tiempo, la señal de salida se puede describir según la ecuación (1.17):

$$u(t) = k_P e(t) + k_I \int e(t) dt + k_D \frac{de(t)}{dt} \quad (1.17)$$

Donde:

- $u(t)$  es la acción de control.
- $e(t)$  es la entrada del controlador o error de la variable de control.
- $k_P, k_I, k_D$  son constantes ajustables y es necesario optimizarlas según el tipo de proceso y objetivo de control.

En la Figura 1.26 se muestra el esquema del controlador tipo PID.



**Figura 1.26.** Esquema de un controlador PID [21].

En el dominio de Laplace, su representación se da según la ecuación (1.18):

$$\frac{u(s)}{e(s)} = k_P + \frac{k_I}{s} + k_D s \quad (1.18)$$

Una forma alternativa de la función de transferencia y su respuesta temporal correspondiente, se indica en (1.19).

$$\frac{u(s)}{e(s)} = k \left( 1 + \frac{1}{\tau_I s} + \tau_D s \right)$$

$$u(t) = k \left[ 1 + \frac{1}{\tau_I} \int e(t) dt + \tau_D \frac{de(t)}{dt} \right] \quad (1.19)$$

Donde:

- $k = k_P$  es la ganancia total.
- $\tau_I = \frac{k_P}{k_I}$  y  $\tau_D = \frac{k_D}{k_P}$  son las constantes de tiempo de la parte integral y diferencial respectivamente.

### 1.3.8.1 Acción proporcional

$$u(t) = k_p e(t) \quad (1.20)$$

La componente proporcional, ponderada por  $k_p$ , determina la ganancia general del bucle. Una gran ganancia del bucle conduce a una baja sensibilidad, un pequeño error de estado estable y buen rechazo a las perturbaciones (1.20) [21].

### 1.3.8.2 Acción integral

$$u(t) = k_I \int_0^t e(\tau) d\tau \quad (1.21)$$

El componente integral es responsable de eliminar el error de estado estable. Sabemos que un integrador solo puede alcanzar el equilibrio si su entrada es cero. El componente integrador continuará cambiando la acción correctiva hasta que el error sea nulo ( $e = 0$ ). Como el componente integrador contiene almacenamiento de energía, puede provocar respuestas transitorias indeseables e incluso inestabilidad. Por esta razón,  $k_I$  generalmente se mantiene relativamente pequeño (1.21) [21].

### 1.3.8.3 Acción derivativa

$$u(t) = k_D \frac{de(t)}{dt} \quad (1.22)$$

El componente derivado ayuda a proporcionar una respuesta transitoria rápida. Si se produce una perturbación transitoria o cambio repentino, la primera derivada es enorme y provoca una acción de control correspondientemente fuerte. El componente derivado actúa como un componente de adelanto de fase que mejora la estabilidad relativa (1.22) [21].

### 1.3.8.4 Controlador tipo PID

El controlador PID descrito en esta sección se empleará con una modificación, obteniendo así un controlador tipo PD, el cual se propone en la sección 2.5.1 considerando los criterios de Lyapunov de la sección 1.3.11.

## 1.3.9 CONTROLADOR BASADO EN ESPACIO NULO

Trabajar con sistemas de robots, presenta algunas dificultades si se desea realizar una misión determinada en entornos altamente desestructurados y complejos. Por otro lado, se puede tener misiones adicionales como evadir obstáculos y otras restricciones que pueden estar en conflicto con la misión principal [22].

Tanto en el caso de sistemas de robot único como de robot múltiple, el mejor enfoque parece ser la descomposición del problema en varios subproblemas, que eventualmente se pueden resolver en paralelo. Entonces, el problema se convierte en cómo componer los comandos requeridos por cada tarea en un solo comando de movimiento al robot [22].

De forma general, una formación de varios robots permite que se realicen una cierta cantidad de tareas de control en un tiempo determinado. Uno de ellos es el control basado en el comportamiento, que propone dividir el objetivo de control en varios subobjetivos y luego resolver cada uno de ellos individualmente, para finalmente combinar las salidas de cada controlador para que el comando se envíe a los robots [17].

Comportamientos con diferentes objetivos pueden producir acciones conflictivas que parecen irreconciliables. Por lo tanto, un problema importante en el diseño de sistemas de control basados en el comportamiento es la formulación de un mecanismo eficaz para la coordinación de los comportamientos [22].

Los enfoques de fusión de comando (cooperativa) permiten combinar el resultado de varias tareas, tratando de lograr diferentes objetivos, pero generando problemas en el caso de tareas conflictivas, mientras que los enfoques de arbitraje (competitivo) permiten realizar una tarea a la vez, lo que lleva a un sistema infrautilizado, pero a una salida predecible. El enfoque basado en espacio nulo (NSB) se puede definir como un enfoque competitivo y cooperativo que supera las desventajas de los enfoques anteriores [22].

Para entender el control basado en espacio nulo, se tiene el concepto de redundancia de un robot manipulador estándar. Un robot manipulador es un sistema con grados de libertad mayores que las variables de tarea. Los grados de libertad adicionales se pueden acomodar para satisfacer objetivos secundarios que organizan las tareas en prioridades.

El mismo concepto de redundancia se puede aplicar al problema de los sistemas de robot múltiple, donde la redundancia se puede utilizar para realizar tareas secundarias. En particular, el método de prioridad de tareas permite manejar adecuadamente los conflictos entre diferentes tareas. De acuerdo con esta técnica, una tarea secundaria se cumple si no se asocia con una tarea de nivel superior, mientras que se libera en caso de conflicto [22].

#### **1.3.9.1 El espacio nulo de una matriz**

##### ***Definición:***

El espacio nulo de una matriz  $A$  de dimensiones  $m \times n$ , denotado por  $Null(A)$ , es el conjunto de soluciones de la ecuación homogénea  $Ax = 0$  (1.23) [23].

$$\text{Null}(A) = \{x: x \in \mathbb{R} \text{ y } Ax = 0\} \quad (1.23)$$

**Teorema:**

El espacio nulo de una matriz  $A$  de  $m \times n$  es un subespacio de  $\mathbb{R}^n$ . Además, se cumplen algunas propiedades que se describen a continuación:

**Propiedades:**

- $0 \in \text{Null}(A)$
- $\text{Null}(u + v) = \text{Null}(u) + \text{Null}(v)$
- $\text{Null}(cA) = c \text{Null}(A)$
- Si  $A$  es invertible,  $\text{Null}(A) = 0$ .

**1.3.9.2 Control de comportamiento basado en el espacio nulo**

Si se considera una formación de  $n$  robots, el vector que expresa la posición del  $n$ -ésimo robot  $p_i$  en el mismo sistema de referencia inercial se muestra en (1.24):

$$p_i = [x_i \quad y_i \quad z_i]^T \in \mathbb{R}^{3 \times 1} \quad (1.24)$$

Su correspondiente velocidad  $v_i$  se consigue derivando (1.24) para obtener la ecuación (1.25):

$$\dot{p}_i = v_i = [\dot{x}_i \quad \dot{y}_i \quad \dot{z}_i]^T \in \mathbb{R}^{3 \times 1} \quad (1.25)$$

La configuración del grupo de robots de manera general se describe como (1.26):

$$\begin{aligned} p &= [p_1^T \quad p_2^T \quad \dots \quad p_n^T]^T \in \mathbb{R}^{3n \times 1} \\ v &= [v_1^T \quad v_2^T \quad \dots \quad v_n^T]^T \in \mathbb{R}^{3n \times 1} \end{aligned} \quad (1.26)$$

Adicionalmente, la tarea  $\sigma$  asignada al grupo de robots puede definir por la función (1.27):

$$\sigma = \sigma(p) \in \mathbb{R}^{m \times 1} \quad (1.27)$$

Asumiendo a  $\sigma$  diferenciable, la relación entre  $\sigma$  y  $p$  está dada por (1.28):

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= \frac{d\sigma(p)}{dt} = \frac{\partial \sigma(p)}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} = J(p)v \\ \dot{\sigma} &= J(p)v \end{aligned} \quad (1.28)$$

Donde  $J(p) \in \mathbb{R}^{m \times 3n}$  es la matriz jacobiana de la transformación  $\sigma = \sigma(p)$ .

Es importante recalcar que esta descripción es aplicable a cualquier tipo de sistema robótico sin importar el número y tipo de robots.



Estas relaciones se denominan ecuaciones de cinemática directa del sistema que permiten calcular el valor de la función de tarea dada la configuración del sistema, en este caso, las posiciones  $p$  de los robots (Problema de cinemática directa) [22].

Así mismo, el problema de cinemática inversa, que usualmente es más complejo que el problema de cinemática directa, busca el cálculo de la referencia de movimiento  $p_d$  correspondiente a una función de tarea deseada  $\sigma_d$ . Esto permite, a partir de esta función, especificar el comportamiento del sistema, mientras que las posiciones deseadas  $p_d$  son los comandos enviados a los robots [22].

Para el caso de una matriz jacobiana cuadrada ( $n \times n$ ), el problema de cinemática inversa se resuelve calculando las velocidades de los robots con la matriz jacobiana inversa:

$$v_d = J(p_d)^{-1} \dot{\sigma}_d \quad (1.29)$$

No obstante, para el caso de una matriz jacobiana rectangular  $J$  (muy común en sistemas de robots), existen infinitas soluciones para el problema de cinemática inversa. Una solución planteada se indica en la ecuación (1.30):

$$v_d = J^+ \dot{\sigma}_d \quad (1.30)$$

Donde  $J^+$  es la inversa Moore-Penrose de la matriz jacobiana o matriz Pseudo-Inversa.

### 1.3.9.3 Matriz pseudoinversa Moore-Penrose

**Definición:**

Si  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , existe una única  $A^+ \in \mathbb{R}^{m \times n}$  que satisface las condiciones de Penrose [24]:

1.  $AA^+A = A$
2.  $A^+AA^+ = A^+$
3.  $A^+A = (A^+A)^T$
4.  $AA^+ = (AA^+)^T$

Si  $A$  es matriz no singular, se cumple que  $A^+ = A^{-1}$  y satisface las cuatro ecuaciones.

El pseudoinverso definido como tal, se muestra como existente y tiene unicidad. La pseudoinversa y solución de Moore-Penrose tiene las siguientes propiedades [25]:

- $m = n$ ,  $A^+ = A^{-1}$  si  $A$  es de rango completo
- $m > n$  (Corresponde al caso de un manipulador cinemáticamente insuficiente). Hay más ecuaciones restrictivas que variables libres. Por lo tanto, generalmente no es posible encontrar una solución a estas ecuaciones.

- $m < n$  (Correspondiente a un manipulador cinemáticamente redundante). En este caso, generalmente hay un número infinito de soluciones, y la solución Moore-Penrose es la solución particular cuyo vector de norma es mínimo.

De acuerdo con los teoremas planteados, las siguientes ecuaciones se pueden determinar:

$A^+ = A^T(AA^T)^{-1}$  si  $A$  tiene filas linealmente independientes ( $A$  es invertible por derecha).

$A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$  si  $A$  tiene columnas linealmente independientes ( $A$  es invertible por izquierda).

La primera solución permite minimizar la norma de las velocidades de los robots (1.31) [22].

$$A^+ = A^T(AA^T)^{-1} \quad (1.31)$$

#### 1.3.9.4 Esquema del control basado en espacio nulo

Utilizando el algoritmo de cinemática inversa de lazo cerrado, se puede calcular las velocidades deseadas de los robots según lo indica (1.32) [22]:

$$v_d(t) = J(p(t))^+ [\dot{\sigma}_d + \Lambda \tilde{\sigma}] \quad (1.32)$$

Donde el error  $\tilde{\sigma} = \sigma_d - \sigma(p(t))$  y  $\Lambda \in \mathbb{R}^{m \times m}$  es una matriz definida positiva.

La ecuación (1.32) conduce al siguiente sistema asintóticamente estable (1.33):

$$\dot{\tilde{\sigma}} + \Lambda \tilde{\sigma} = 0 \quad (1.33)$$

Considerando la tarea de velocidad, se define una tarea de control deseada como (1.34):

$$v_{d_i} = J_i^+ [\dot{\sigma}_{d_i} + \Lambda_i \tilde{\sigma}_i] \quad (1.34)$$

Donde el subíndice  $i$  denota la  $i$ -ésima tarea, siendo la tarea 1 la de mayor prioridad.

Considerando  $N$  tareas, la solución basada en espacio nulo aplicado a la combinación de tareas puede ser obtenida de forma iterativa, definiendo el vector velocidad según (1.35):

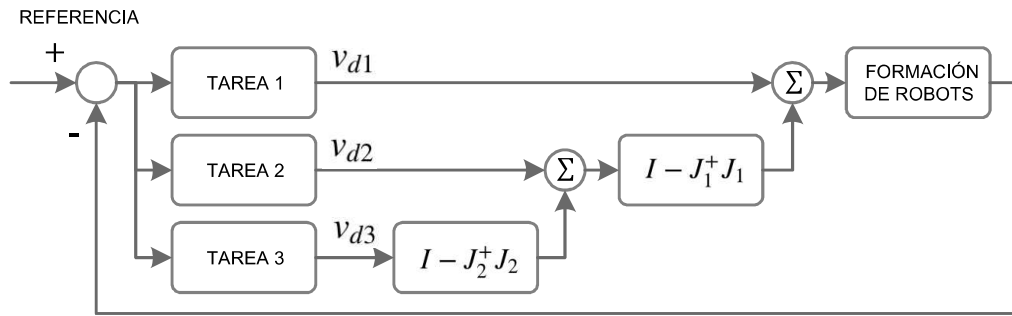
$$v^{(i)} = v_{d_i} + N_i v^{(i+1)}, i = 1, 2, \dots, N \quad (1.35)$$

Donde  $N_i = (I - J_i^+ J_i)$  es la matriz de proyección de espacio nulo del jacobiano  $J_i$ .

Por ejemplo, para el caso de tres tareas, el vector velocidad se define en la ecuación (1.36):

$$v_d = v_{d_1} + N_1(v_{d_2} + N_2 v_{d_3}) \quad (1.36)$$

Y el esquema de control considerando tres tareas se muestra en la Figura 1.27.



**Figura 1.27.** Esquema del control basado en espacio nulo para tres tareas aplicadas a una formación de robots

En resumen, las velocidades calculadas correspondientes a una tarea de prioridad más baja se proyectan en el espacio nulo de la tarea de prioridad inmediatamente superior. Los componentes de velocidad eventualmente conflictivos se eliminan antes de agregarse a los componentes de velocidad de tarea de prioridad más alta [22].

**Propiedad de ortogonalidad:**

Para el caso de dos tareas, el vector velocidad según la ecuación (1.35) se determina por:

$$v_d = v_{d_1} + N_1 v_{d_2} \quad (1.37)$$

Cuando el rango de la matriz  $J_2$  perteneciente a la tarea  $v_{d_2}$  es ortogonal al rango de la matriz  $J_1$  (tarea  $v_{d_1}$ ), entonces las velocidades relacionadas al cumplimiento de la tarea secundaria no afectan a la tarea principal y las dos tareas son compatibles [26].

$$\mathcal{R}(J_2) \cap \mathcal{R}(J_1) = \{0\} \quad (1.38)$$

Cuando se cumple esta condición, se establece que:

$$J_2 J_1^+ = 0 \quad (1.39)$$

**1.3.10 EVASIÓN DE OBSTÁCULOS MEDIANTE CAMPOS POTENCIALES**

Para un manipulador, el enfoque basado en campos potenciales para evitar la colisión de partes de este se puede entender como:

*“El manipulador se mueve en un campo de fuerzas. La posición para alcanzar es un polo atractivo para el efector final y los obstáculos son superficies de repulsión para las partes del manipulador” [27].*

La idea principal de utilizar la teoría de campos potenciales es construir un campo potencial con un gradiente actuando atractivamente al objetivo de control, repeliendo los obstáculos.

### 1.3.10.1 Campo potencial para dos dimensiones

La evasión de obstáculos como objetivo de control, requiere de la definición de un campo potencial que define la zona de repulsión sobre el obstáculo.

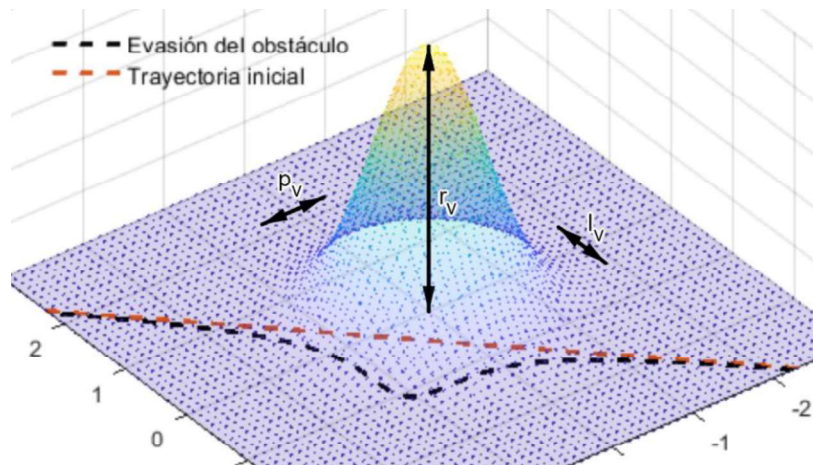
De acuerdo con la ecuación (1.40), se define este campo potencial como [28]:

$$\phi_s = \begin{cases} r_v e^{-\left(\frac{x(t)-x_0(t)}{l_v}\right)^2 - \left(\frac{y(t)-y_0(t)}{p_v}\right)^2} + \varepsilon[x(t) + y(t)] - r_0, & l_v < l_0; p_v < p_0 \\ 0, & l_v > l_0; p_v > p_0 \end{cases} \quad (1.40)$$

Donde:

- $r_v$ ,  $l_v$  y  $p_v$  son los parámetros de altura, ancho y profundidad que describen el tamaño del objeto.
- $0 < r_0 \ll r_v$  es una distancia de seguridad para evitar la colisión de los robots.
- $\varepsilon \ll r_0$  es un parámetro definido para evitar la singularidad del campo.
- $x_0(t)$  y  $y_0(t)$  son las coordenadas del obstáculo.
- $x(t)$  y  $y(t)$  son las coordenadas del robot.
- $l_0$  y  $p_0$  son parámetros de seguridad que limitan la existencia del campo potencial.

En la Figura 1.28 se muestra la forma de este campo potencial.



**Figura 1.28.** Forma de un campo potencial  $\phi_s$  con parámetros  $r_v = 1$ ,  $l_v = p_v = 0.8$  [28].

### 1.3.10.2 Campo potencial para tres dimensiones

Se considera como obstáculo una esfera centrada en  $\xi_0$ . El objeto crea una modulación en todo el espacio de estado del robot que se transmite a través de la función no lineal (1.41) [29]:

$$\phi_s(\xi, \xi_0, r_0) = \left(1 + \frac{r_0^2}{(\xi - \xi_0)^T(\xi - \xi_0)}\right) (\xi - \xi_0) \quad (1.41)$$

Donde:

- $\xi$  es la posición del robot.
- $r_0$  es el radio del obstáculo.

Una modificación de la ecuación anterior se indica en la ecuación (1.42).

$$\phi_s(\xi, \xi_0, r_0, \lambda) = \frac{r_0^2}{(\xi - \xi_0)^T(\xi - \xi_0)} - \lambda(\xi - \xi_0)^T(\xi - \xi_0) \quad (1.42)$$

Donde  $\lambda$  permite acotar el campo potencial a una distancia de seguridad  $d$  para evitar que el campo potencial afecte al resto de controladores. Para determinar el valor de  $\lambda$  se considera esta distancia de seguridad  $d$  donde el robot empieza a sentir la presencia del obstáculo, según se indica en (1.43).

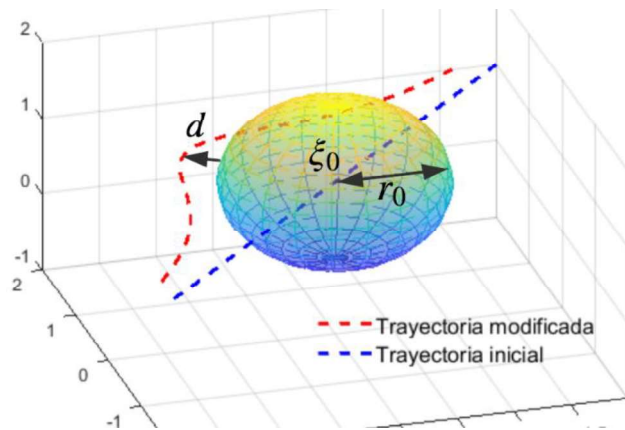
$$\begin{aligned} \phi_s(d + r_0) &= \frac{r_0^2}{(d + r_0)^2} - \lambda(d + r_0)^2 = 0 \\ \lambda &= \frac{r_0^2}{(d + r_0)^4} \end{aligned} \quad (1.43)$$

Es decir, fuera de esta distancia de seguridad, el valor del campo potencial es nulo (1.44).

$$\phi_s = 0; \text{ si } d_{obs} > d + r_0 \quad (1.44)$$

Donde  $d_{obs}$  es la distancia entre el robot y el centro del obstáculo.

En la Figura 1.29 se muestra la forma que adopta el campo potencial tridimensional.



**Figura 1.29.** Forma del campo potencial para tres dimensiones [29].

Cuando el campo potencial es cero, los manipuladores aéreos pueden realizar cualquier otra tarea. Sin embargo, cuando  $\phi_s \neq 0$ , los robots deben cambiar su configuración para evadir el obstáculo.

Si se tiene más de un obstáculo, el campo potencial total está dado por la suma de los campos potenciales relativos (1.45). Es decir:

$$\phi_s = \sum_{j=1}^n \phi_{s_j}, \text{ tal que } j = 1, 2, \dots, n \quad (1.45)$$

### 1.3.11 ESTABILIDAD SEGÚN LYAPUNOV

La estabilidad es un concepto fundamental en sistemas de control. Por tal razón se debe tener en cuenta condiciones que garanticen estabilidad en el sistema de acuerdo con ciertos conceptos o criterios.

#### 1.3.11.1 Punto de equilibrio

Sea el sistema dinámico en su representación en el espacio de estados que satisface la ecuación (1.46) (Se asume que  $f(t, x(t))$  satisface las condiciones para la existencia y unicidad de soluciones).

$$\dot{x} = f(t, x(t)) \quad x(t_0) = x_0 \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (1.46)$$

Se define  $x^* \in \mathbb{R}^n$  como un punto de equilibrio de (1.46) si cumple que  $f(t, x^*) = 0$  [30].

Asumiendo que el origen 0 es un punto de equilibrio del sistema, se tiene que  $f(t, 0) = 0$ .

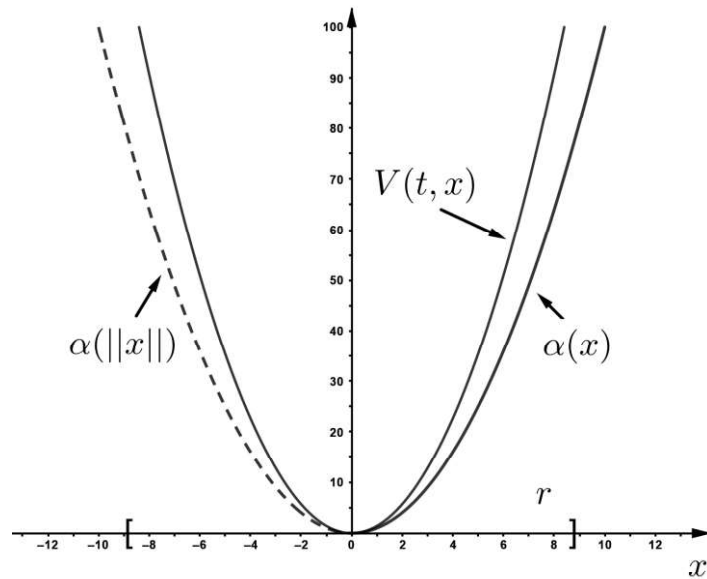
Además,  $x_0$  es la condición inicial del sistema.

#### 1.3.11.2 Funciones definidas

Una función  $V: \mathcal{R}_+ \times \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$  se dice *localmente definida positiva* si [31]:

1. Es continua.
2.  $V(t, 0) = 0, \quad \forall t \geq 0$ .
3. Existe  $\alpha$  de clase  $K$  tal que:  $V(t, x) \geq \alpha(\|x\|) \forall t \geq 0, \forall x \in B_r = \{x: \|x\| \leq r\}, r > 0$ .

Una función  $V(t, x)$  ilustrada en la Figura 1.30 es *definida positiva* si lo anterior vale para todo  $x \in \mathcal{R}^n$  ( $r = \infty$ ).



**Figura 1.30.** Función localmente definida positiva [31].

Una función  $V(t, x)$  es *radialmente no acotada* si:  $V(t, x) \geq \alpha(\|x\|) \quad \forall t \geq 0, \forall x \in \mathcal{R}^n$  y  $\alpha(\cdot)$  continua (no necesariamente clase  $K$ ) tal que  $\alpha(r) \rightarrow \infty$  con  $r \rightarrow \infty$ .

### 1.3.11.3 Teorema de estabilidad

El punto de equilibrio es estable si existe una función continuamente diferenciable, localmente definida positiva  $V(t, x)$  y  $r > 0$  tal que [31]:

$$\dot{V}(t, x) \leq 0 \quad \forall t \geq t_0, \forall x \in B_r \quad (1.47)$$

El método de Lyapunov permite determinar la estabilidad de un sistema sin la necesidad de resolver la ecuación (1.46). El método es una generalización de la idea de que hay una “medida de energía” en un sistema y la razón de cambio de esta energía permite comprobar la estabilidad [30]. El método establece que:

“Si existe una función de Lyapunov  $V(t, x)$  para el punto de equilibrio del sistema (1.46), entonces el punto de equilibrio es estable. Además, si  $V(t, x)$  es una función de Lyapunov estricta, entonces el punto de equilibrio es asintóticamente estable [32]”

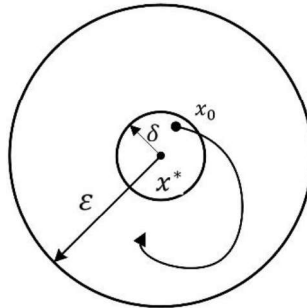
El teorema de Lyapunov, da las condiciones suficientes para la estabilidad del origen del sistema, sin embargo, no da una prescripción de como determinar la función de Lyapunov  $V(t, x)$ .

El teorema establece que cuando  $V(t, x)$  es una función definida localmente positiva y  $\dot{V}(t, x) \leq 0$  entonces se puede concluir estabilidad en el punto de equilibrio.

### ***Función candidata de Lyapunov***

Una función es candidata de Lyapunov si  $V(t, x)$  es continuamente diferenciable y es localmente definida positiva. Si además  $V(t, x)$  cumple con el teorema de estabilidad, entonces es *Función de Lyapunov* [31].

La estabilidad ocurre cuando todas las soluciones que empiezan cerca de  $x^*$  (las condiciones iniciales están en la cercanía de  $x^*$ ) se mantienen cerca de  $x^*$  todo el tiempo. Este concepto se ilustra en la Figura 1.31.



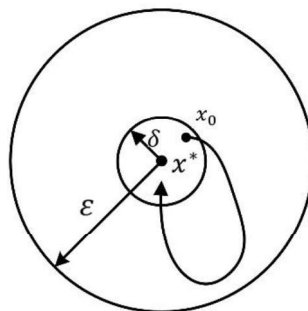
**Figura 1.31.** Estabilidad [32].

### **Estabilidad asintótica**

El punto de equilibrio es asintóticamente estable si existe una función localmente definida positiva y continuamente diferenciable y decreciente  $V(t, x)$  tal que  $-\dot{V}(t, x)$  es localmente definida positiva.

La estabilidad asintótica ocurre cuando el punto de equilibrio  $x^*$  es local y asintóticamente estable, es decir, si  $x^*$  es estable localmente y todas las soluciones que empiezan cerca de  $x^*$  tienen a  $x^*$  mientras  $t \rightarrow \infty$  [31]. Esto se representa en la Figura 1.32.

En robótica, casi siempre se tiene interés en el equilibrio uniforme y asintóticamente estable, ya que, si se desea mover el robot a un punto, se requiere converger a ese punto y no simplemente permanecer cerca [30].



**Figura 1.32.** Estabilidad asintótica [32].



#### 1.3.11.4 Inestabilidad

El punto de equilibrio es inestable si existe una función decreciente continuamente diferenciable  $V: \mathcal{R}_+ \times \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$  y un  $t_0 \geq 0$  tal que:

1.  $\dot{V}(t, x)$  es localmente definida positiva
2.  $V(t, 0) = 0 \quad \forall t \geq t_0$
3. Existen puntos  $x_0$  arbitrariamente próximos a 0 tal que  $V(t_0, x_0) \geq 0$

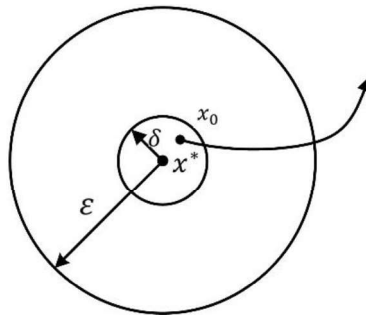


Figura 1.33. Sistema inestable [32].

#### 1.3.12 ÍNDICES DE RENDIMIENTO

Un índice de rendimiento es una medida cuantitativa del comportamiento de un sistema y se elige de forma que resalte las especificaciones importantes del mismo. Son útiles para el análisis y diseño de sistemas de control.

El objetivo del sistema de control es minimizar ese índice para que pueda considerarse óptimo. Para que el índice de rendimiento resulte útil, debe un ser un número positivo y lo más cercano a cero [33].

Se puede obtener numerosos índices basados en diferentes combinaciones de las variables del sistema.

##### 1.3.12.1 Integral del cuadrado del error ISE

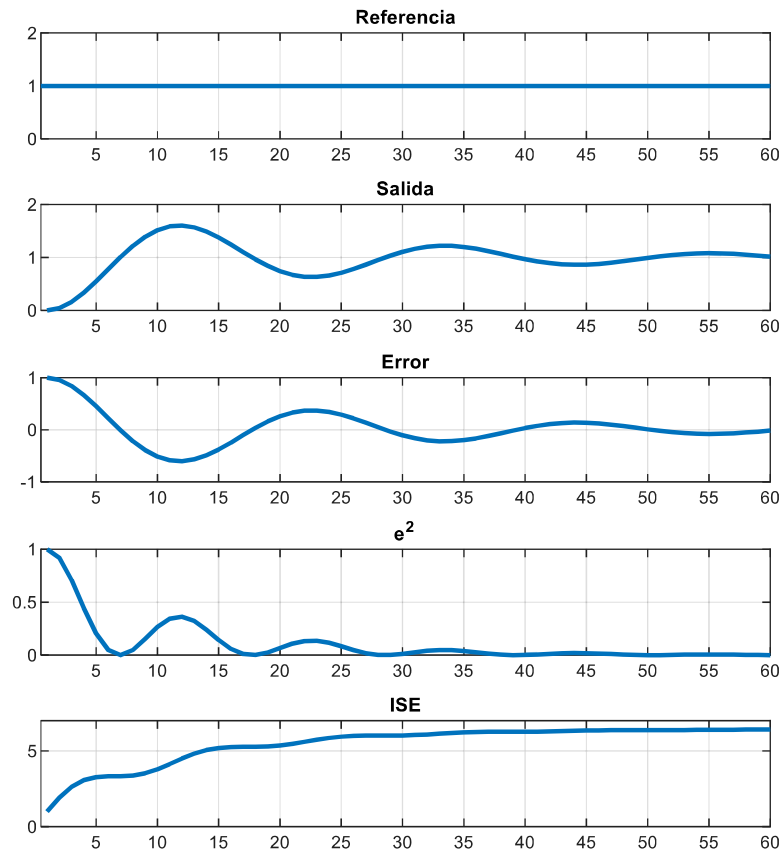
Se expresa como (1.48):

$$ISE = \int_0^T e^2(t) dt \quad (1.48)$$

Donde  $e(t)$  es el error y el límite superior  $T$  es un tiempo finito se elige arbitrariamente de modo que la integral tienda a un valor en estado estacionario. Además, el ISE se obtiene

sin dificultad y el cuadrado del error es matemáticamente conveniente para efectos analíticos. El ISE penaliza los errores positivos y negativos que ocurren en el sistema [33].

En la Figura 1.34 se muestra la evolución del ISE en un sistema de control.



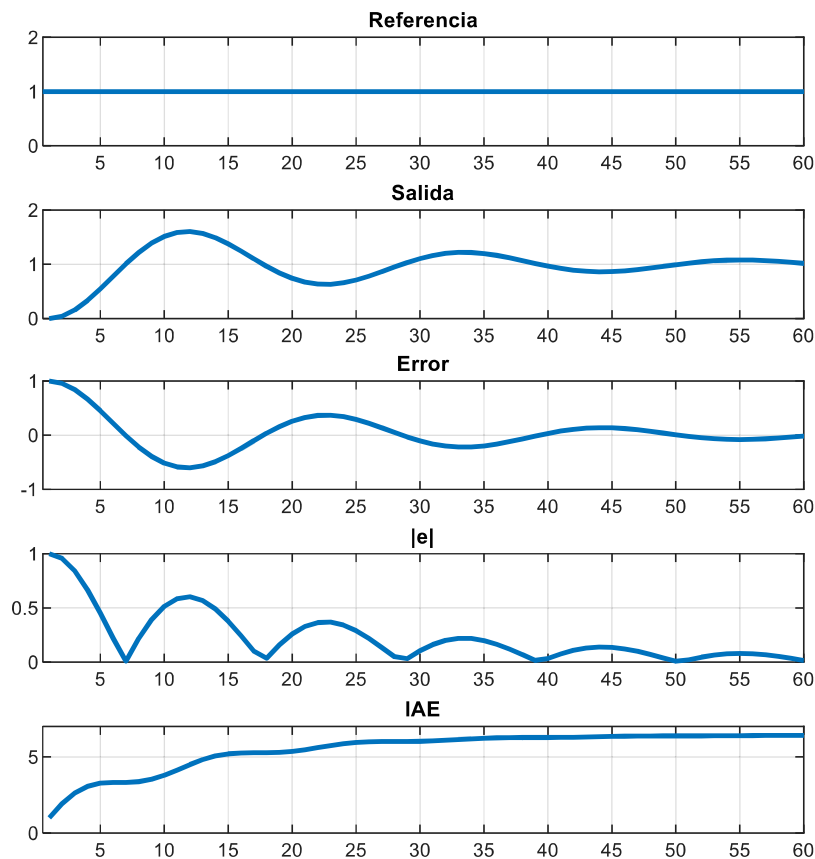
**Figura 1.34.** Gráfica de las señales de un sistema de control y la evolución del ISE.

### 1.3.12.2 Integral de la magnitud absoluta del error IAE

Se describe como (1.49):

$$IAE = \int_0^T |e(t)| dt \quad (1.49)$$

Este índice es útil para casos de simulación en computadores y mide el aumento del error del sistema y si el mismo tiene un buen comportamiento subamortiguado [33]. En la Figura 1.35 se muestra la evolución del IAE.



**Figura 1.35.** Gráfica de las señales de un sistema de control y la evolución del IAE.

La elección de un criterio de desempeño para el análisis y sintonización de controladores depende de las características del sistema y el tipo de respuesta que se requiere conseguir. De esta forma, se puede describir las siguientes pautas para la selección entre estos dos criterios.

La principal diferencia consiste en que el ISE le da mayor ponderación a errores grandes, que generalmente aparecen al inicio de la respuesta, ya que el cuadrado de un error grande será mucho mayor al contrario del cuadrado de un error pequeño menor a uno que se vuelve aún más pequeños y no contribuyen en el valor de la integral. Por otro lado, el índice IAE no agrega peso a ninguno de los errores y se emplea para análisis de errores pequeños [34].

## 2 METODOLOGÍA

En el presente proyecto técnico se realiza un análisis de la teoría y conceptos inherentes a la robótica aplicadas a robots aéreos, manipuladores robóticos y a la formación de robots. Se realiza esto con el fin de obtener un modelo matemático que describa la cinemática de un manipulador aéreo y el correspondiente esquema de formación de manipuladores aéreos basado en estructura virtual.

A partir de este estudio se diseñan controladores tipo PID y controladores basados en espacio nulo para realizar las tareas de seguimiento de trayectoria, mantenimiento de forma y evasión de obstáculos estáticos utilizando el algoritmo de evasión de campos potenciales.

Además, se realiza una descripción del diseño y funcionamiento de la interfaz gráfica de usuario, donde se muestran los resultados de los controladores aplicados al sistema propuesto.

### 2.1 MODELO CINEMÁTICO DEL CUADRICÓPTERO

En la sección 1.3.3.1 se definió al vector de posición y orientación de un cuadricóptero respecto a un sistema de referencia inercial, según las ecuaciones (1.1) y (1.2). Adicionalmente, se definió la matriz de rotación que rota a un vector definido respecto al sistema de referencia del cuadricóptero {B} a un vector respecto al sistema inercial {W} en la ecuación (1.8) de la sección 1.3.3.3. Esta matriz de rotación permite relacionar el sistema de referencia corporal al sistema de referencia inercial según la ecuación (1.7).

El vector  $V$  representa las velocidades en el sistema de referencia del cuadricóptero y se define como las variaciones temporales de las posiciones según la ecuación (2.1):

$$V = \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_B \\ \dot{y}_B \\ \dot{z}_B \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Para obtener las velocidades del cuadricóptero respecto al sistema de referencia inercial, se utiliza la relación definida en la ecuación (1.7), obteniéndose la ecuación (2.2).

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_W \\ \dot{y}_W \\ \dot{z}_W \end{pmatrix} = R_W^B \begin{pmatrix} \dot{x}_B \\ \dot{y}_B \\ \dot{z}_B \end{pmatrix} \\ \dot{\xi} = R_W^B V \quad (2.2)$$

Donde  $\dot{\xi} = [\dot{x}_W \ \dot{y}_W \ \dot{z}_W]$  es el vector de velocidades para los ejes  $x_W$ ,  $y_W$  y  $z_W$  respectivamente (sistema de referencia inercial).

Utilizando la definición de la matriz de rotación de la ecuación (1.8), la ecuación (2.2) queda definida como (2.3):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_W \\ \dot{y}_W \\ \dot{z}_W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C(\psi)C(\theta) & C(\psi)S(\theta)S(\phi) - S(\psi)C(\phi) & C(\psi)S(\theta)C(\phi) + S(\psi)S(\phi) \\ S(\psi)C(\theta) & S(\psi)S(\theta)S(\phi) + C(\psi)C(\phi) & S(\psi)S(\theta)C(\phi) - C(\psi)S(\phi) \\ -S(\theta) & C(\theta)S(\phi) & C(\theta)C(\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_B \\ \dot{y}_B \\ \dot{z}_B \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

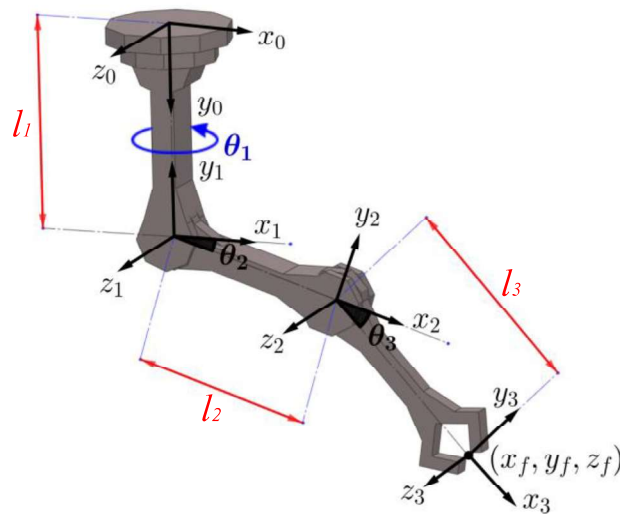
Donde  $C(\phi) = \cos(\phi)$ ,  $C(\theta) = \cos(\theta)$ ,  $C(\psi) = \cos(\psi)$ ,  $S(\phi) = \sin(\phi)$ ,  $S(\theta) = \sin(\theta)$  y  $S(\psi) = \sin(\psi)$ .

Durante el tiempo de vuelo, los ángulos de *roll* y *pitch* son muy cercanos a cero (estado estacionario del cuadricóptero) y se puede tener un modelo reducido de la ecuación (2.3) considerando las aproximaciones de ángulo pequeño  $\cos \phi = \cos \theta = 1$  y  $\sin \phi = \sin \theta = 0$ . Se obtiene de esta manera un modelo cinemático simplificado del cuadricóptero según lo indica la ecuación (2.4).

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_W \\ \dot{y}_W \\ \dot{z}_W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_B \\ \dot{y}_B \\ \dot{z}_B \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

## 2.2 MODELO CINEMÁTICO DEL MANIPULADOR ROBÓTICO

Para la obtención del modelo del manipulador robótico, se utiliza el algoritmo de Denavit-Hartenberg abordado en la sección 1.3.4.7, según el cual primero se ubican los ejes de las uniones  $z_0, \dots, z_{n-1}$ . Teniendo en cuenta que se estudiará un brazo robótico de tres grados de libertad para el manipulador aéreo y las consideraciones del algoritmo, la disposición de los ejes  $x, y, z$  desde la ubicación el sistema de referencia base hasta el sistema de referencia del efector final se indican en la Figura 2.1.



**Figura 2.1.** Ubicación de los ejes en cada unión del brazo robótico.

Los ejes ubicados en cada unión o juntura permiten identificar los parámetros Denavit-Hartenberg (parámetros D-H) utilizados para la obtención del modelo cinemático del manipulador robótico.

Una vez ubicados los ejes, se realiza la Tabla 2.1 con los parámetros D-H  $a_i$ ,  $d_i$ ,  $\alpha_i$ ,  $\theta_i$ .

**Tabla 2.1.** Parámetros DH

| ARTICULACIÓN | $d$    | $\theta$   | $a$   | $\alpha$         |
|--------------|--------|------------|-------|------------------|
| 1            | $-l_1$ | $\theta_1$ | 0     | $-\frac{\pi}{2}$ |
| 2            | 0      | $\theta_2$ | $l_2$ | 0                |
| 3            | 0      | $\theta_3$ | $l_3$ | 0                |

Una vez identificados los parámetros D-H, se reemplazan los valores de la Tabla 2.1, en la ecuación (1.15). Así, las matrices de transformación que relacionan los parámetros de cada eslabón se indican en (2.5), (2.6), (2.7) para los eslabones 1, 2 y 3 respectivamente.

$$A_1^0 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & 0 & -\sin(\theta_1) & 0 \\ \sin(\theta_1) & 0 & \cos(\theta_1) & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

$$A_2^1 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & -\sin(\theta_2) & 0 & l_2 \cos(\theta_2) \\ \sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) & 0 & l_2 \sin(\theta_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

$$A_3^2 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_3) & -\sin(\theta_3) & 0 & l_3 \cos(\theta_3) \\ \sin(\theta_3) & \cos(\theta_3) & 0 & l_3 \sin(\theta_3) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

La matriz de transformación total  $T$  que relaciona el sistema de la base con el externo del robot, se obtiene reemplazando (2.5), (2.6) y (2.7) en la ecuación (1.16). Se obtiene así la matriz representada por la ecuación (2.8):

$$T = A_1^0 A_2^1 A_3^2$$

$$T = \begin{bmatrix} C(\theta_1)C(\theta_2 + \theta_3) & -C(\theta_1)S(\theta_2 + \theta_3) & -S(\theta_1) & C(\theta_1) [l_2 C(\theta_2) + l_3 C(\theta_2 + \theta_3)] \\ S(\theta_1)C(\theta_2 + \theta_3) & -S(\theta_1)S(\theta_2 + \theta_3) & C(\theta_1) & S(\theta_1) [l_2 C(\theta_2) + l_3 C(\theta_2 + \theta_3)] \\ -S(\theta_2 + \theta_3) & -C(\theta_2 + \theta_3) & 0 & -l_1 - l_2 S(\theta_2) - l_3 S(\theta_2 + \theta_3) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Siendo  $C(\theta_1) = \cos(\theta_1)$ ,  $S(\theta_1) = \sin(\theta_1)$ ,  $S(\theta_2) = \sin(\theta_2)$ ,  $C(\theta_2 + \theta_2) = \cos(\theta_2 + \theta_2)$  y  $S(\theta_2 + \theta_2) = \sin(\theta_2 + \theta_2)$ .

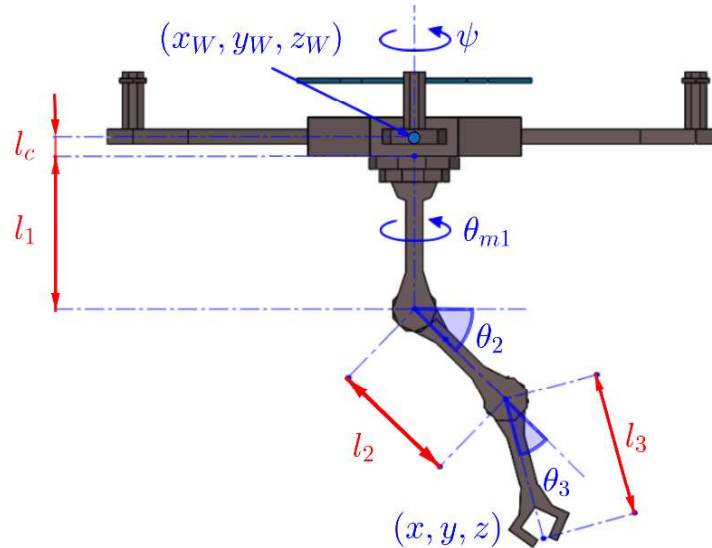
La matriz de transformación homogénea (2.8) corresponde a la matriz de la ecuación (1.10), donde la submatriz de traslación  $T_{3 \times 1}$  en (2.9) representa la posición  $(x_f, y_f, z_f)$  del efector final del brazo robótico en función de sus ángulos y longitudes de cada eslabón.

$$T_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} x_f \\ y_f \\ z_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) [l_2 \cos(\theta_2) + l_3 \cos(\theta_2 + \theta_3)] \\ \sin(\theta_1) [l_2 \cos(\theta_2) + l_3 \cos(\theta_2 + \theta_3)] \\ -l_1 - l_2 \sin(\theta_2) - l_3 \sin(\theta_2 + \theta_3) \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

## 2.3 MODELO CINEMÁTICO DEL MANIPULADOR AÉREO

El modelo cinemático del manipulador aéreo propuesto une el modelo del cuadricóptero obtenido en la sección 2.1 y el modelo cinemático del manipulador robótico de tres grados de libertad definido la sección 2.2.

En la Figura 2.2 se muestra la configuración del manipulador aéreo.



**Figura 2.2.** Estructura mecánica del cuadricóptero acoplado al manipulador robótico.

Para acoplar ambos sistemas, se debe considerar que tanto la posición como orientación del manipulador robótico se ve afectado por la posición del cuadricóptero y la orientación de este. Es así como, la posición del efector final, definido en (2.9), se modifica para obtener la posición del manipulador aéreo  $(x, y, z)$  ya que depende de la posición del cuadricóptero respecto al sistema de referencia inercial como se indica en (2.10).

$$\begin{aligned} x &= x_f + x_w \\ y &= y_f + y_w \\ z &= z_f + z_w \end{aligned} \quad (2.10)$$

De igual manera, la orientación del brazo robótico se modifica. Es así como el valor angular  $\theta_{m1}$  correspondiente a la primera articulación del brazo del manipulador aéreo, depende de la posición angular del cuadricóptero y se define como:

$$\theta_{m1} = \theta_1 + \psi \quad (2.11)$$

Teniendo en cuenta estas modificaciones y la posición del efector final definido en (2.9), las ecuaciones que representan la posición del efector final del manipulador aéreo en (2.12), se obtienen reemplazando (2.9) y (2.11) en (2.10). Por lo tanto:

$$\begin{aligned} x &= \cos(\theta_1 + \psi) [l_2 \cos(\theta_2) + l_3 \cos(\theta_2 + \theta_3)] + x_W \\ y &= \sin(\theta_1 + \psi) [l_2 \cos(\theta_2) + l_3 \cos(\theta_2 + \theta_3)] + y_W \\ z &= -l_1 - l_2 \sin(\theta_2) - l_3 \sin(\theta_2 + \theta_3) + z_W + l_c \end{aligned} \quad (2.12)$$

Donde  $l_c$  es la distancia entre el punto base del manipulador y el centro del cuadricóptero. Para obtener el modelo cinemático del manipulador aéreo, se requiere relacionar las velocidades del efector final de este con las variables del cuadricóptero y del manipulador robótico. Para ello, se define en la ecuación (2.13) a  $R$  como el vector de posiciones del efector final y  $h$  como el vector de las posiciones y ángulos del manipulador aéreo.

$$\begin{aligned} R &= [x \quad y \quad z]^T \\ h &= [x_W \quad y_W \quad z_W \quad \psi \quad \theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3]^T \end{aligned} \quad (2.13)$$

Estos vectores se relacionan mediante la matriz jacobiana  $J$  en la ecuación (2.14)

$$\dot{R} = J \dot{h} \quad (2.14)$$

Donde  $\dot{R} = [\dot{x} \quad \dot{y} \quad \dot{z}]^T$  y  $\dot{h} = [\dot{x}_W \quad \dot{y}_W \quad \dot{z}_W \quad \dot{\psi} \quad \dot{\theta}_1 \quad \dot{\theta}_2 \quad \dot{\theta}_3]^T$  representan las velocidades del efector final y las velocidades angulares y lineales del manipulador aéreo respectivamente.

La matriz Jacobiana que relaciona todas estas velocidades se define en la ecuación (2.15):

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_W} & \frac{\partial x}{\partial y_W} & \frac{\partial x}{\partial z_W} & \frac{\partial x}{\partial \psi} & \frac{\partial x}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x}{\partial \theta_2} & \frac{\partial x}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial y}{\partial x_W} & \frac{\partial y}{\partial y_W} & \frac{\partial y}{\partial z_W} & \frac{\partial y}{\partial \psi} & \frac{\partial y}{\partial \theta_1} & \frac{\partial y}{\partial \theta_2} & \frac{\partial y}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial z}{\partial x_W} & \frac{\partial z}{\partial y_W} & \frac{\partial z}{\partial z_W} & \frac{\partial z}{\partial \psi} & \frac{\partial z}{\partial \theta_1} & \frac{\partial z}{\partial \theta_2} & \frac{\partial z}{\partial \theta_3} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Desarrollando las derivadas a partir de la ecuación (2.12), se tiene que:

$$\frac{\partial x}{\partial x_W} = 1 \qquad \frac{\partial x}{\partial y_W} = 0 \qquad \frac{\partial x}{\partial z_W} = 0$$



$$\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial \psi} &= -\sin(\theta_1 + \psi) [l_2 \cos(\theta_2) + l_3 \cos(\theta_2 + \theta_3)] \\
\frac{\partial x}{\partial \theta_1} &= -\sin(\theta_1 + \psi) [l_2 \cos(\theta_2) + l_3 \cos(\theta_2 + \theta_3)] \\
\frac{\partial x}{\partial \theta_2} &= -\cos(\theta_1 + \psi) [l_2 \sin(\theta_2) + l_3 \sin(\theta_2 + \theta_3)] \\
\frac{\partial x}{\partial \theta_3} &= -l_3 \cos(\theta_1 + \psi) \sin(\theta_2 + \theta_3) \\
\frac{\partial y}{\partial x_W} &= 0 & \frac{\partial y}{\partial y_W} &= 1 & \frac{\partial y}{\partial z_W} &= 0 \\
\frac{\partial y}{\partial \psi} &= \cos(\theta_1 + \psi) [l_2 \cos(\theta_2) + l_3 \cos(\theta_2 + \theta_3)] \\
\frac{\partial y}{\partial \theta_1} &= \cos(\theta_1 + \psi) [l_2 \cos(\theta_2) + l_3 \cos(\theta_2 + \theta_3)] \\
\frac{\partial y}{\partial \theta_2} &= -\sin(\theta_1 + \psi) [l_2 \sin(\theta_2) + l_3 \sin(\theta_2 + \theta_3)] \\
\frac{\partial y}{\partial \theta_3} &= -l_3 \sin(\theta_1 + \psi) \sin(\theta_2 + \theta_3) \\
\frac{\partial z}{\partial x_W} &= 0 & \frac{\partial z}{\partial y_W} &= 0 & \frac{\partial z}{\partial z_W} &= 1 \\
& & \frac{\partial z}{\partial \psi} &= 0 \\
& & \frac{\partial z}{\partial \theta_1} &= 0 \\
\frac{\partial z}{\partial \theta_2} &= -l_2 \cos(\theta_2) - l_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) \\
\frac{\partial z}{\partial \theta_3} &= -l_3 \cos(\theta_2 + \theta_3)
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Los parámetros del vector  $\dot{R}$  quedan definidos en la ecuación (2.17):

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \dot{x}_W - \sin(\theta_1 + \psi) [l_2 \cos(\theta_2) + l_3 \cos(\theta_2 + \theta_3)] (\dot{\psi} + \dot{\theta}_1) \\
&\quad - \cos(\theta_1 + \psi) [l_2 \sin(\theta_2) + l_3 \sin(\theta_2 + \theta_3)] \dot{\theta}_2 \\
&\quad - l_3 \cos(\theta_1 + \psi) \sin(\theta_2 + \theta_3) \dot{\theta}_3 \\
\dot{y} &= \dot{y}_W + \cos(\theta_1 + \psi) [l_2 \cos(\theta_2) + l_3 \cos(\theta_2 + \theta_3)] (\dot{\psi} + \dot{\theta}_1) \\
&\quad - \sin(\theta_1 + \psi) [l_2 \sin(\theta_2) + l_3 \sin(\theta_2 + \theta_3)] \dot{\theta}_2 \\
&\quad - l_3 \sin(\theta_1 + \psi) \sin(\theta_2 + \theta_3) \dot{\theta}_3 \\
\dot{z} &= \dot{z}_W - [l_2 \cos(\theta_2) + l_3 \cos(\theta_2 + \theta_3)] \dot{\theta}_2 - l_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) \dot{\theta}_3
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Reemplazando las velocidades del cuadricóptero en el sistema de referencia inercial obtenidas en la ecuación (2.4) en (2.17), se obtiene el modelo cinemático del manipulador aéreo en función las velocidades del cuadricóptero según se muestra en (2.18).

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \cos(\psi) \dot{x}_B - \sin(\psi) \dot{y}_B - \sin(\theta_1 + \psi) [l_2 \cos(\theta_2) + l_3 \cos(\theta_2 + \theta_3)](\dot{\psi} + \dot{\theta}_1) \\
&\quad - \cos(\theta_1 + \psi) [l_2 \sin(\theta_2) + l_3 \sin(\theta_2 + \theta_3)]\dot{\theta}_2 \\
&\quad - l_3 \cos(\theta_1 + \psi) \sin(\theta_2 + \theta_3) \dot{\theta}_3 \\
\dot{y} &= \sin(\psi) \dot{x}_B + \cos(\psi) \dot{y}_B + \cos(\theta_1 + \psi) [l_2 \cos(\theta_2) + l_3 \cos(\theta_2 + \theta_3)](\dot{\psi} + \dot{\theta}_1) \\
&\quad - \sin(\theta_1 + \psi) [l_2 \sin(\theta_2) + l_3 \sin(\theta_2 + \theta_3)]\dot{\theta}_2 \\
&\quad - l_3 \sin(\theta_1 + \psi) \sin(\theta_2 + \theta_3) \dot{\theta}_3 \\
\dot{z} &= \dot{z}_B - [l_2 \cos(\theta_2) + l_3 \cos(\theta_2 + \theta_3)]\dot{\theta}_2 - l_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) \dot{\theta}_3
\end{aligned} \tag{2.18}$$

El modelo cinemático por lo tanto se puede representar como (2.19):

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \dot{x}_B \\ \dot{y}_B \\ \dot{z}_B \\ \dot{\psi} \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

Donde:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_B} & \frac{\partial x}{\partial y_B} & \frac{\partial x}{\partial z_B} & \frac{\partial x}{\partial \psi} & \frac{\partial x}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x}{\partial \theta_2} & \frac{\partial x}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial y}{\partial x_B} & \frac{\partial y}{\partial y_B} & \frac{\partial y}{\partial z_B} & \frac{\partial y}{\partial \psi} & \frac{\partial y}{\partial \theta_1} & \frac{\partial y}{\partial \theta_2} & \frac{\partial y}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial z}{\partial x_B} & \frac{\partial z}{\partial y_B} & \frac{\partial z}{\partial z_B} & \frac{\partial z}{\partial \psi} & \frac{\partial z}{\partial \theta_1} & \frac{\partial z}{\partial \theta_2} & \frac{\partial z}{\partial \theta_3} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, el modelo cinemático del manipulador aéreo se puede definir en (2.20):

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 & J_{14} & J_{15} & J_{16} & J_{17} \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 & J_{24} & J_{25} & J_{26} & J_{27} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & J_{36} & J_{37} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_B \\ \dot{y}_B \\ \dot{z}_B \\ \dot{\psi} \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \tag{2.20}$$

Donde:

- $J_{14} = J_{15} = -\sin(\theta_1 + \psi) [l_2 \cos(\theta_2) + l_3 \cos(\theta_2 + \theta_3)]$
- $J_{16} = -\cos(\theta_1 + \psi) [l_2 \sin(\theta_2) + l_3 \sin(\theta_2 + \theta_3)]$

- $J_{17} = -l_3 \cos(\theta_1 + \psi) \sin(\theta_2 + \theta_3)$
- $J_{24} = J_{25} = \cos(\theta_1 + \psi) [l_2 \cos(\theta_2) + l_3 \cos(\theta_2 + \theta_3)]$
- $J_{26} = -\sin(\theta_1 + \psi) [l_2 \sin(\theta_2) + l_3 \sin(\theta_2 + \theta_3)]$
- $J_{27} = -l_3 \sin(\theta_1 + \psi) \sin(\theta_2 + \theta_3)$
- $J_{36} = -l_2 \cos(\theta_2) - l_3 \cos(\theta_2 + \theta_3)$
- $J_{37} = -l_3 \cos(\theta_2 + \theta_3)$

## 2.4 MODELO CINEMÁTICO DE LA FORMACIÓN DE MANIPULADORES AÉREOS

En esta sección se define el modelo que describe la formación de tres manipuladores aéreos utilizando el esquema de formación basado en estructura virtual definido en la sección 1.3.6.3. La estructura virtual contiene el modelo cinemático de los tres manipuladores aéreos y permite relacionar las entradas de los robots con sus respectivas salidas.

En la sección 2.3 se determinó el modelo cinemático del manipulador aéreo. A partir de la ecuación (2.19), el modelo de cada uno de los robots de la formación se puede representar según (2.21):

$$\dot{R}_i = J_i \dot{h}_i$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{y}_i \\ \dot{z}_i \end{bmatrix} = J_i \begin{bmatrix} \dot{x}_{B_i} \\ \dot{y}_{B_i} \\ \dot{z}_{B_i} \\ \dot{\psi}_i \\ \dot{\theta}_{1_i} \\ \dot{\theta}_{2_i} \\ \dot{\theta}_{3_i} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Donde:

- $i = 1, 2, 3$  representa el  $i$ -ésimo robot de la formación,
- $\dot{R}_i = [\dot{x}_i \ \dot{y}_i \ \dot{z}_i]$  corresponde a la variación temporal de la posición del  $i$ -ésimo manipulador aéreo,
- $J_i$  representa el jacobiano del  $i$ -ésimo manipulador aéreo, y

- $\dot{h}_i = [\dot{x}_{B_i} \ \dot{y}_{B_i} \ \dot{z}_{B_i} \ \dot{\psi}_i \ \dot{\theta}_{1_i} \ \dot{\theta}_{2_i} \ \dot{\theta}_{3_i}]$  son las entradas de velocidad correspondientes al modelo cinemático del  $i$ -ésimo manipulador aéreo.

El modelo cinemático de los tres robots se integra como una estructura virtual mediante la siguiente ecuación:

$$\dot{R}_F = J_R \dot{h}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{R}_1 \\ \dot{R}_2 \\ \dot{R}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 & 0_{3 \times 7} & 0_{3 \times 7} \\ 0_{3 \times 7} & J_2 & 0_{3 \times 7} \\ 0_{3 \times 7} & 0_{3 \times 7} & J_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \\ \dot{h}_3 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Donde:

- $\dot{R}_F = [\dot{R}_1^T \ \dot{R}_2^T \ \dot{R}_3^T]^T$  representa el vector de las variaciones temporales de las posiciones de los tres robots en conjunto,
- $\dot{h} = [\dot{h}_1^T \ \dot{h}_2^T \ \dot{h}_3^T]^T$  son las entradas de velocidad de los robots, y
- $J_R$  es el jacobiano que relaciona las entradas de velocidad con las variaciones temporales de las posiciones de cada robot.

Considerando esta estructura, se define  $R_F$  como el vector de posiciones de los robots en la ecuación (2.23).

$$R_F = [R_1^T \ R_2^T \ R_3^T]^T$$

$$R_F = [x_1 \ y_1 \ z_1 \ x_2 \ y_2 \ z_2 \ x_3 \ y_3 \ z_3]^T \quad (2.23)$$

Se considera una formación aérea triangular de tres manipuladores aéreos tridimensional y se describe en el modelo las relaciones entre los parámetros de cada robot y las características del sistema multirobot.

Según esto, la estructura virtual rígida establece relaciones geométricas entre las posiciones de los robots y un sistema de referencia en un punto ubicado en el centroide del triángulo formado.

Es así como en la Figura 2.3 se muestra el sistema de referencia que representa la formación de manipuladores aéreos  $P_F$  o sistema de referencia móvil de la formación triangular y el sistema de referencia inercial  $L_W$ .  $P_F$  coincide con el centroide del triángulo formado por los tres robots  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$  (posiciones del efector final).

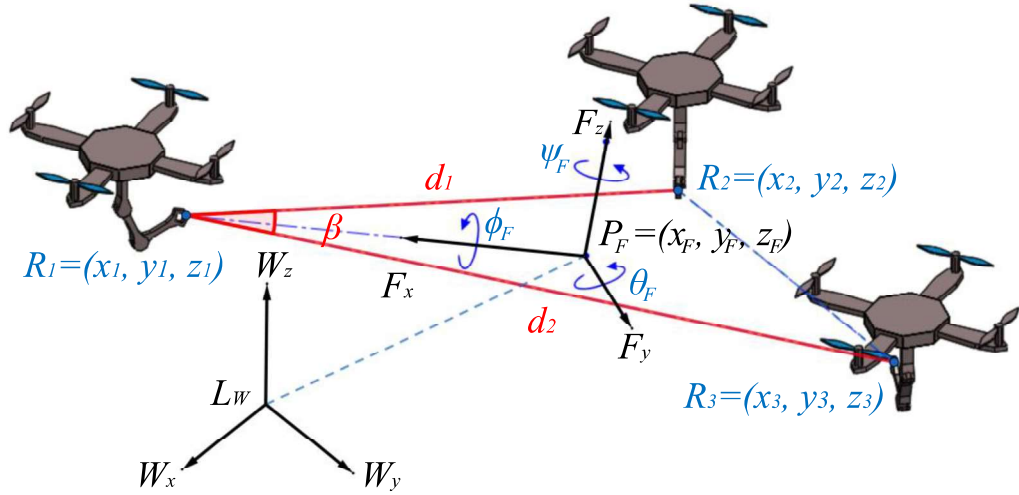


Figura 2.3. Formación de manipuladores aéreos.

### 2.4.1 VARIABLES DE POSTURA

Las variables de postura se definen como  $P_F$  y corresponden a las coordenadas del centroide de la formación en función de la posición de cada robot (posición del efector final de cada manipulador aéreo) como se indica en (2.24) y se muestran en la Figura 2.3.

$$P_F = \begin{bmatrix} x_F \\ y_F \\ z_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \\ \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \\ \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Donde  $x_F$ ,  $y_F$  y  $z_F$  son las variables de postura en la formación.

### 2.4.2 VARIABLES DE FORMA

Las variables de forma se definen como  $S_F$  y corresponde a la distancia  $d_1$  entre los robots  $R_1$  y  $R_2$ , la distancia  $d_2$  entre los robots  $R_1$  y  $R_3$  y el ángulo  $\widehat{R_2 R_1 R_3}$  o  $\beta$ . Estos parámetros se indican en la Figura 2.3.

Las distancias  $d_1$  y  $d_2$  se calculan utilizando la fórmula de distancia entre dos puntos, como se indica en (2.26).

$$\begin{aligned} d_1 &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \\ d_2 &= \sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + (z_1 - z_3)^2} \end{aligned} \quad (2.25)$$

El ángulo  $\beta$  se define a partir de la ley del coseno en (2.26).

$$\beta = \arccos\left(\frac{(R_1 - R_2) \cdot (R_1 - R_3)}{d_1 d_2}\right) \quad (2.26)$$

$$\beta = \arccos\left(\frac{d_1^2 + d_2^2 - d_3^2}{2d_1d_2}\right)$$

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) + (y_1 - y_2)(y_1 - y_3) + (z_1 - z_2)(z_1 - z_3)}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}\sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + (z_1 - z_3)^2}}\right)$$

Donde  $d_3 = \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2}$  representa la distancia entre  $R_2$  y  $R_3$ .

Por lo tanto, las variables de forma quedan definidas en (2.27).

$$S_F = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \\ \sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + (z_1 - z_3)^2} \\ \arccos\left(\frac{d_1^2 + d_2^2 - d_3^2}{2d_1d_2}\right) \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

### 2.4.3 VARIABLES DE ORIENTACIÓN

De igual manera también se definen variables de orientación de la formación como  $O_F$  respecto al sistema de referencia inercial como los ángulos de Euler de *roll*, *pitch* y *yaw* ( $\phi_F$ ,  $\theta_F$  y  $\psi_F$ ) de la formación. Para ello se deben definir los ejes del sistema de referencia de la formación considerando:

- El eje  $x$ ,  $F_x$  se define en (2.28) desde el centroide de la formación hasta la posición del primer robot  $R_1$  como se muestra en la Figura 2.3.

$$F_x = R_1 - P_F$$

$$F_x = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \\ \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \\ \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} \end{bmatrix}$$

$$F_x = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 \\ \frac{2}{3}y_1 - \frac{1}{3}y_2 - \frac{1}{3}y_3 \\ \frac{2}{3}z_1 - \frac{1}{3}z_2 - \frac{1}{3}z_3 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

- El eje  $z$ ,  $F_z$  es perpendicular al plano formado por las posiciones de los efectores finales de cada robot como se muestra en (2.29).

$$F_z = (R_2 - R_1) \times (R_3 - R_1) \quad (2.29)$$

$$F_z = \left( \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \right) \times \left( \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \right)$$

$$F_z = \begin{bmatrix} (y_1 - y_2)(z_1 - z_3) - (y_1 - y_3)(z_1 - z_2) \\ (x_1 - x_3)(z_1 - z_2) - (x_1 - x_2)(z_1 - z_3) \\ (x_1 - x_2)(y_1 - y_3) - (x_1 - x_3)(y_1 - y_2) \end{bmatrix}$$

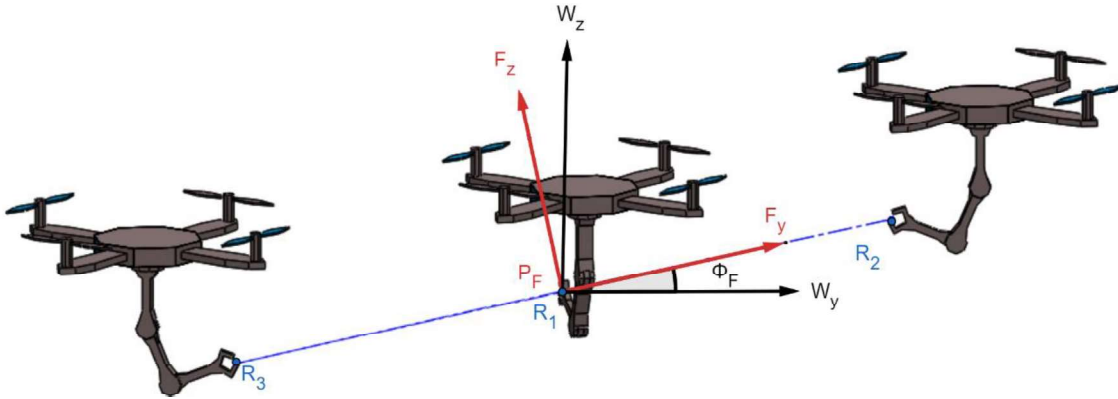
- El eje  $y$ ,  $F_y$  es perpendicular tanto al eje  $F_x$  y el eje  $F_z$  y se define en (2.30).

$$F_y = F_x \times F_z$$

$$F_y = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 \\ \frac{2}{3}y_1 - \frac{1}{3}y_2 - \frac{1}{3}y_3 \\ \frac{2}{3}z_1 - \frac{1}{3}z_2 - \frac{1}{3}z_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} (y_1 - y_2)(z_1 - z_3) - (y_1 - y_3)(z_1 - z_2) \\ (x_1 - x_3)(z_1 - z_2) - (x_1 - x_2)(z_1 - z_3) \\ (x_1 - x_2)(y_1 - y_3) - (x_1 - x_3)(y_1 - y_2) \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

Los ángulos de orientación de la formación se definen a partir de relaciones trigonométricas entre los ejes de la formación.

En la Figura 2.4, Figura 2.5 y Figura 2.6 se muestra la disposición de los ejes  $F_x$ ,  $F_y$  y  $F_z$  con la ubicación de los ángulos  $\phi_F$ ,  $\theta_F$  y  $\psi_F$  respectivamente.

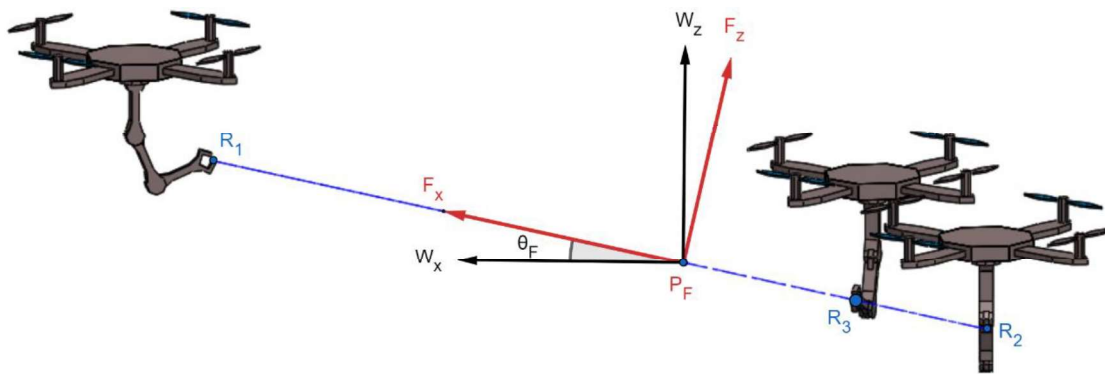


**Figura 2.4.** Ángulo *roll* de la formación.

El ángulo de alabeo *roll*  $\phi_F$  mostrado en la Figura 2.6 se determina mediante (2.31).

$$\phi_F = \arctan \left( \frac{F_{zy}}{F_{zz}} \right)$$

$$\phi_F = \arctan \left[ \frac{(x_1 - x_3)(z_1 - z_2) - (x_1 - x_2)(z_1 - z_3)}{(x_1 - x_2)(y_1 - y_3) - (x_1 - x_3)(y_1 - y_2)} \right] \quad (2.31)$$



**Figura 2.5.** Ángulo *pitch* de la formación.

El ángulo de cabeceo *pitch*  $\theta_F$  de la Figura 2.5 se define en (2.32).

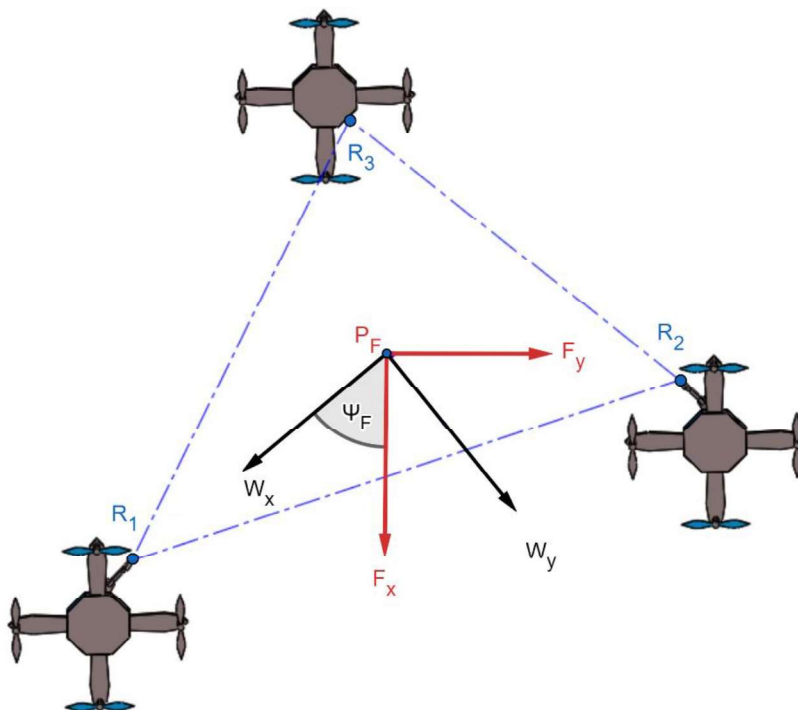
$$\theta_F = \arctan\left(\frac{F_{xz}}{F_{xx}}\right)$$

$$\theta_F = \arctan\left[\frac{2z_1 - z_2 - z_3}{2x_1 - x_2 - x_3}\right] \quad (2.32)$$

El ángulo de guiñada *yaw*  $\psi_F$ , según la Figura 2.6 se define en (2.33).

$$\psi_F = \arctan\left(\frac{F_{xy}}{F_{xx}}\right)$$

$$\psi_F = \arctan\left[\frac{2y_1 - y_2 - y_3}{2x_1 - x_2 - x_3}\right] \quad (2.33)$$



**Figura 2.6.** Ángulo *yaw* de la formación.



Para obtener el modelo cinemático de la formación de manipuladores aéreos, se requiere la matriz jacobiana que relacione las variaciones temporales de las variables de la formación con las velocidades de cada robot.

#### 2.4.4 JACOBIANO DE FORMA - ORIENTACIÓN

Las variables de forma-orientación descritas en las secciones 2.4.1 y 2.4.3 respectivamente se representan con el como  $q_1$  en la ecuación (2.34), tal que:

$$q_1 = [d_1 \quad d_2 \quad \beta \quad \phi_F \quad \theta_F \quad \psi_F]^T \quad (2.34)$$

Se cumple que  $q_1$  es función de las posiciones del efector final de los manipuladores aéreos de los robots  $R_F$  como se representa en la ecuación (2.35):

$$q_1 = g(R_F) \quad (2.35)$$

Derivando respecto al tiempo (2.35) se obtiene la siguiente relación:

$$\dot{q}_1 = \frac{\partial g(R_F)}{\partial R_F} \frac{dR_F}{dt} = J_s \dot{R}_F \quad (2.36)$$

Donde  $J_s$  es el jacobiano de forma-orientación que está formado por las derivadas parciales de las variables de forma-orientación respecto a las posiciones de los efectores finales, como se muestra en (2.37), y  $\dot{q}_1 = [\dot{d}_1 \quad \dot{d}_2 \quad \dot{\beta} \quad \dot{\phi}_F \quad \dot{\theta}_F \quad \dot{\psi}_F]^T$ .

$$J_s = \begin{bmatrix} \frac{\partial d_1}{\partial x_1} & \frac{\partial d_1}{\partial y_1} & \frac{\partial d_1}{\partial z_1} & \frac{\partial d_1}{\partial x_2} & \frac{\partial d_1}{\partial y_2} & \frac{\partial d_1}{\partial z_2} & \frac{\partial d_1}{\partial x_3} & \frac{\partial d_1}{\partial y_3} & \frac{\partial d_1}{\partial z_3} \\ \frac{\partial d_2}{\partial x_1} & \frac{\partial d_2}{\partial y_1} & \frac{\partial d_2}{\partial z_1} & \frac{\partial d_2}{\partial x_2} & \frac{\partial d_2}{\partial y_2} & \frac{\partial d_2}{\partial z_2} & \frac{\partial d_2}{\partial x_3} & \frac{\partial d_2}{\partial y_3} & \frac{\partial d_2}{\partial z_3} \\ \frac{\partial \beta}{\partial x_1} & \frac{\partial \beta}{\partial y_1} & \frac{\partial \beta}{\partial z_1} & \frac{\partial \beta}{\partial x_2} & \frac{\partial \beta}{\partial y_2} & \frac{\partial \beta}{\partial z_2} & \frac{\partial \beta}{\partial x_3} & \frac{\partial \beta}{\partial y_3} & \frac{\partial \beta}{\partial z_3} \\ \frac{\partial \phi_F}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi_F}{\partial y_1} & \frac{\partial \phi_F}{\partial z_1} & \frac{\partial \phi_F}{\partial x_2} & \frac{\partial \phi_F}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_F}{\partial z_2} & \frac{\partial \phi_F}{\partial x_3} & \frac{\partial \phi_F}{\partial y_3} & \frac{\partial \phi_F}{\partial z_3} \\ \frac{\partial \theta_F}{\partial x_1} & \frac{\partial \theta_F}{\partial y_1} & \frac{\partial \theta_F}{\partial z_1} & \frac{\partial \theta_F}{\partial x_2} & \frac{\partial \theta_F}{\partial y_2} & \frac{\partial \theta_F}{\partial z_2} & \frac{\partial \theta_F}{\partial x_3} & \frac{\partial \theta_F}{\partial y_3} & \frac{\partial \theta_F}{\partial z_3} \\ \frac{\partial \psi_F}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_F}{\partial y_1} & \frac{\partial \psi_F}{\partial z_1} & \frac{\partial \psi_F}{\partial x_2} & \frac{\partial \psi_F}{\partial y_2} & \frac{\partial \psi_F}{\partial z_2} & \frac{\partial \psi_F}{\partial x_3} & \frac{\partial \psi_F}{\partial y_3} & \frac{\partial \psi_F}{\partial z_3} \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

#### 2.4.5 JACOBIANO DE POSTURA

Análogamente, las variables de postura descritas en la sección 2.4.1 también son función de las posiciones del efector final de los manipuladores aéreos. Estas variables se representan como  $q_2$  en (2.38) y se cumple que:

$$q_2 = P_F = [x_F \quad y_F \quad z_F]^T \quad (2.38)$$

La relación que existe entre  $q_2$  y las posiciones de los tres robots se describe en (2.39):

$$q_2 = h(R_F)$$

$$\dot{q}_2 = \frac{\partial h(R_F)}{\partial R_F} \frac{dR_F}{dt} = J_p \dot{R}_F \quad (2.39)$$

Donde  $J_p$ , mostrado en (2.40), es el jacobiano de postura formado por las derivadas parciales de la posición del centroide respecto a las posiciones de cada manipulador, y  $\dot{q}_2 = [\dot{x}_F \ \dot{y}_F \ \dot{z}_F]^T$ .

$$J_p = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_F}{\partial x_1} & \frac{\partial x_F}{\partial y_1} & \frac{\partial x_F}{\partial z_1} & \frac{\partial x_F}{\partial x_2} & \frac{\partial x_F}{\partial y_2} & \frac{\partial x_F}{\partial z_2} & \frac{\partial x_F}{\partial x_3} & \frac{\partial x_F}{\partial y_3} & \frac{\partial x_F}{\partial z_3} \\ \frac{\partial y_F}{\partial x_1} & \frac{\partial y_F}{\partial y_1} & \frac{\partial y_F}{\partial z_1} & \frac{\partial y_F}{\partial x_2} & \frac{\partial y_F}{\partial y_2} & \frac{\partial y_F}{\partial z_2} & \frac{\partial y_F}{\partial x_3} & \frac{\partial y_F}{\partial y_3} & \frac{\partial y_F}{\partial z_3} \\ \frac{\partial z_F}{\partial x_1} & \frac{\partial z_F}{\partial y_1} & \frac{\partial z_F}{\partial z_1} & \frac{\partial z_F}{\partial x_2} & \frac{\partial z_F}{\partial y_2} & \frac{\partial z_F}{\partial z_2} & \frac{\partial z_F}{\partial x_3} & \frac{\partial z_F}{\partial y_3} & \frac{\partial z_F}{\partial z_3} \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

## 2.4.6 JACOBIANO DE LA FORMACIÓN

El jacobiano de la formación  $J_F$  está formado por el jacobiano de forma-orientación y el jacobiano de postura, según se muestra en (2.41).

$$J_f = \begin{bmatrix} \frac{\partial d_1}{\partial x_1} & \frac{\partial d_1}{\partial y_1} & \frac{\partial d_1}{\partial z_1} & \frac{\partial d_1}{\partial x_2} & \frac{\partial d_1}{\partial y_2} & \frac{\partial d_1}{\partial z_2} & \frac{\partial d_1}{\partial x_3} & \frac{\partial d_1}{\partial y_3} & \frac{\partial d_1}{\partial z_3} \\ \frac{\partial d_2}{\partial x_1} & \frac{\partial d_2}{\partial y_1} & \frac{\partial d_2}{\partial z_1} & \frac{\partial d_2}{\partial x_2} & \frac{\partial d_2}{\partial y_2} & \frac{\partial d_2}{\partial z_2} & \frac{\partial d_2}{\partial x_3} & \frac{\partial d_2}{\partial y_3} & \frac{\partial d_2}{\partial z_3} \\ \frac{\partial \beta}{\partial x_1} & \frac{\partial \beta}{\partial y_1} & \frac{\partial \beta}{\partial z_1} & \frac{\partial \beta}{\partial x_2} & \frac{\partial \beta}{\partial y_2} & \frac{\partial \beta}{\partial z_2} & \frac{\partial \beta}{\partial x_3} & \frac{\partial \beta}{\partial y_3} & \frac{\partial \beta}{\partial z_3} \\ \frac{\partial \phi_F}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi_F}{\partial y_1} & \frac{\partial \phi_F}{\partial z_1} & \frac{\partial \phi_F}{\partial x_2} & \frac{\partial \phi_F}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_F}{\partial z_2} & \frac{\partial \phi_F}{\partial x_3} & \frac{\partial \phi_F}{\partial y_3} & \frac{\partial \phi_F}{\partial z_3} \\ \frac{\partial \theta_F}{\partial x_1} & \frac{\partial \theta_F}{\partial y_1} & \frac{\partial \theta_F}{\partial z_1} & \frac{\partial \theta_F}{\partial x_2} & \frac{\partial \theta_F}{\partial y_2} & \frac{\partial \theta_F}{\partial z_2} & \frac{\partial \theta_F}{\partial x_3} & \frac{\partial \theta_F}{\partial y_3} & \frac{\partial \theta_F}{\partial z_3} \\ \frac{\partial \psi_F}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_F}{\partial y_1} & \frac{\partial \psi_F}{\partial z_1} & \frac{\partial \psi_F}{\partial x_2} & \frac{\partial \psi_F}{\partial y_2} & \frac{\partial \psi_F}{\partial z_2} & \frac{\partial \psi_F}{\partial x_3} & \frac{\partial \psi_F}{\partial y_3} & \frac{\partial \psi_F}{\partial z_3} \\ \frac{\partial x_F}{\partial x_1} & \frac{\partial x_F}{\partial y_1} & \frac{\partial x_F}{\partial z_1} & \frac{\partial x_F}{\partial x_2} & \frac{\partial x_F}{\partial y_2} & \frac{\partial x_F}{\partial z_2} & \frac{\partial x_F}{\partial x_3} & \frac{\partial x_F}{\partial y_3} & \frac{\partial x_F}{\partial z_3} \\ \frac{\partial y_F}{\partial x_1} & \frac{\partial y_F}{\partial y_1} & \frac{\partial y_F}{\partial z_1} & \frac{\partial y_F}{\partial x_2} & \frac{\partial y_F}{\partial y_2} & \frac{\partial y_F}{\partial z_2} & \frac{\partial y_F}{\partial x_3} & \frac{\partial y_F}{\partial y_3} & \frac{\partial y_F}{\partial z_3} \\ \frac{\partial z_F}{\partial x_1} & \frac{\partial z_F}{\partial y_1} & \frac{\partial z_F}{\partial z_1} & \frac{\partial z_F}{\partial x_2} & \frac{\partial z_F}{\partial y_2} & \frac{\partial z_F}{\partial z_2} & \frac{\partial z_F}{\partial x_3} & \frac{\partial z_F}{\partial y_3} & \frac{\partial z_F}{\partial z_3} \end{bmatrix}$$

$$J_F = \begin{bmatrix} J_s \\ J_p \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

El jacobiano de la formación relaciona todas las variables de la formación de los manipuladores aéreos respecto a las posiciones de los efectores finales de cada uno. Esto se indica en (2.42):

$$q = f(R_F)$$

$$\dot{q} = \frac{\partial f(R_F)}{\partial R_F} \frac{dR_F}{dt} = J_F \dot{R}_F \quad (2.42)$$

Donde  $q$  es el vector de todas las variables de la formación y se cumple que (2.43):

$$q = [d_1 \quad d_2 \quad \beta \quad \phi_F \quad \theta_F \quad \psi_F \quad x_F \quad y_F \quad z_F]^T \quad (2.43)$$

Derivando respecto al tiempo:

$$\dot{q} = [\dot{d}_1 \quad \dot{d}_2 \quad \dot{\beta} \quad \dot{\phi}_F \quad \dot{\theta}_F \quad \dot{\psi}_F \quad \dot{x}_F \quad \dot{y}_F \quad \dot{z}_F]^T \quad (2.44)$$

El diagrama de bloques que representa el esquema de control con la estructura de la formación de los tres manipuladores aéreos y el modelo cinemático de la formación se muestra en la Figura 2.7.

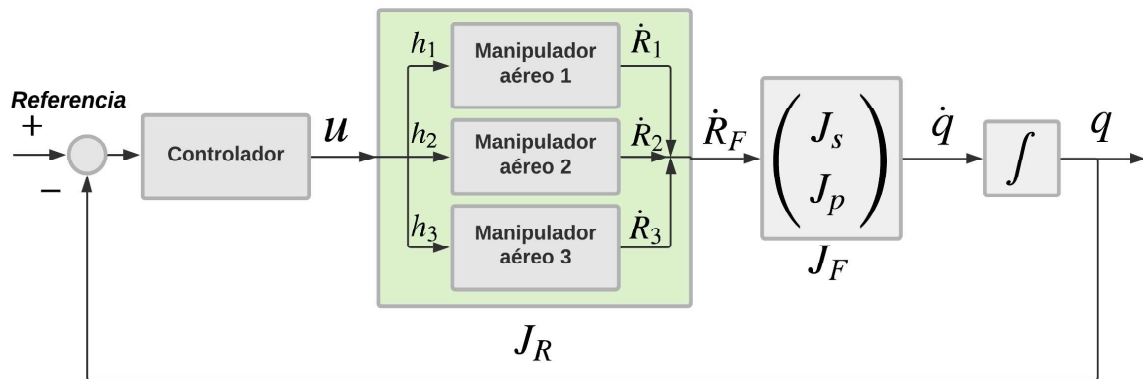


Figura 2.7. Diagrama de bloques del sistema de control.

## 2.5 DISEÑO DE CONTROLADORES PARA SEGUIMIENTO DE TRAYECTORIA

Para que la formación de manipuladores aéreos pueda realizar la tarea de seguimiento de trayectoria, se requiere de controladores que permitan que la postura (posición del centroide) se encamine a lo largo de la trayectoria deseada manteniendo además los parámetros de forma-orientación requeridos.

### 2.5.1 CONTROLADOR TIPO PID

En esta sección se presenta el diseño de un controlador tipo PID aplicado a la formación de tres manipuladores aéreos. El objetivo del controlador tipo PID es el asegurar la forma y orientación del triángulo de la formación mientras se mantiene el centroide en la trayectoria deseada.

Para el diseño del controlador se considera la ecuación (2.42) que especifica que  $\dot{q} = J_F \dot{R}_F$  y la ecuación (2.22) donde  $\dot{R}_F = J_R \dot{h}$ . Reemplazando (2.22) en (2.42), se tiene:

$$\begin{aligned}\dot{q} &= J_F J_R \dot{h} \\ \dot{h} &= (J_F J_R)^{-1} \dot{q}\end{aligned}\quad (2.45)$$

$J_F$  tiene dimensiones  $9 \times 9$  y  $J_R$  es de dimensión  $9 \times 21$ . El producto  $J_F J_R$  de dimensión  $9 \times 21$  no admite inversa al no ser una matriz cuadrada. Sin embargo, se puede calcular la inversa utilizando el concepto de matriz pseudoinversa de la ecuación (1.31).

$$\begin{aligned}(J_F J_R)^{-1} &= (J_F J_R)^+ = (J_F J_R)^T ((J_F J_R)(J_F J_R)^T)^{-1} \\ \dot{h} &= (J_F J_R)^+ \dot{q}\end{aligned}\quad (2.46)$$

Considerando seguimiento perfecto de velocidad  $u = \dot{h}$ , se propone la siguiente ley de control en (2.47):

$$u = (J_F J_R)^+ [\dot{q}_d + K_1 \tanh(\tilde{q})] \quad (2.47)$$

Donde:

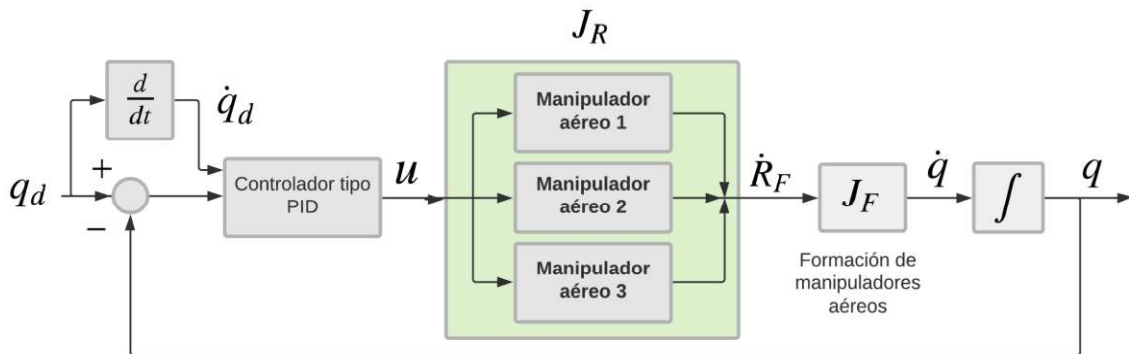
- $\dot{q}_d$  representa la razón de cambio de los parámetros deseados tanto de forma-orientación como de postura (2.48).

$$\begin{aligned}q_d &= [d_{1d} \quad d_{2d} \quad \beta_d \quad \phi_{Fd} \quad \theta_{Fd} \quad \psi_{Fd} \quad x_{Fd} \quad y_{Fd} \quad z_{Fd}]^T \\ \dot{q}_d &= [\dot{d}_{1d} \quad \dot{d}_{2d} \quad \dot{\beta}_d \quad \dot{\phi}_{Fd} \quad \dot{\theta}_{Fd} \quad \dot{\psi}_{Fd} \quad \dot{x}_{Fd} \quad \dot{y}_{Fd} \quad \dot{z}_{Fd}]^T\end{aligned}\quad (2.48)$$

- $K_1$  es un escalar positivo o una matriz diagonal de dimensión  $(9 \times 9)$ .
- $\tilde{q}$  es el error o diferencia entre los parámetros de referencia deseados y la salida del sistema y se muestra en (2.49).

$$\tilde{q} = q_d - q \quad (2.49)$$

En la Figura 2.8 se muestra el esquema del controlador tipo PID propuesto.



**Figura 2.8.** Controlador tipo PID propuesto

### 2.5.1.1 Análisis de estabilidad del controlador tipo PID

En la sección 1.3.11 se estudió el teorema de estabilidad de Lyapunov para demostrar la estabilidad interna de un sistema. Se recurre a este método en esta sección para verificar que el sistema con controlador tipo PID aplicado a la formación de manipuladores aéreos sea estable en el punto de equilibrio.

Para ello se escoge una función  $V(x)$  indicada en (2.50) para la se debe demostrar que cuando  $V(x)$  es una función definida localmente positiva y  $\dot{V}(x, t) \leq 0$  entonces el sistema es estable en el punto de equilibrio.

$$V(x) = \frac{1}{2} \tilde{q}^2, \quad x = \tilde{q} \quad (2.50)$$

Se demuestra en (2.51) que  $V(x)$  es una función definida positiva ya que:

$$V(\tilde{q}) = \frac{1}{2} \tilde{q}^2 > 0, \quad \tilde{q} \neq \tilde{q}_0 \quad (2.51)$$

Además, en condiciones de equilibrio el error del sistema es nulo, por lo cual se verifica:

$$\begin{aligned} \tilde{q}_0 &= 0 \\ V(\tilde{q}_0) &= \frac{1}{2} \tilde{q}_0^2 = 0 \end{aligned} \quad (2.52)$$

Derivando la función o candidata de Lyapunov en (2.50), se tiene que:

$$\dot{V}(\tilde{q}) = \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} \tilde{q}^2 \right] = \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} \tilde{q}^T \tilde{q} \right] = \tilde{q}^T \dot{\tilde{q}} \quad (2.53)$$

A partir de (2.49) se puede obtener la derivada del error  $\tilde{q}$  tal que  $\dot{\tilde{q}} = \dot{q}_d - \dot{q}$ . Reemplazando en la ecuación (2.53) se tiene:

$$\dot{V}(\tilde{q}) = \tilde{q}^T [\dot{q}_d - \dot{q}] \quad (2.54)$$

Reemplazando  $\dot{q} = J_F J_R \dot{h}$  de la ecuación (2.45) en la ecuación (2.54):

$$\dot{V}(\tilde{q}) = \tilde{q}^T [\dot{q}_d - J_F J_R \dot{h}] \quad (2.55)$$

Asumiendo seguimiento perfecto de velocidad donde  $u = \dot{h}$  y reemplazando la ley de control propuesta en (2.47), la ecuación (2.55) se define como:

$$\dot{V}(\tilde{q}) = \tilde{q}^T \{ \dot{q}_d - J_F J_R [(J_F J_R)^+ [\dot{q}_d + K_1 \tanh(\tilde{q})]] \} \quad (2.56)$$

Debido a que  $(J_F J_R)(J_F J_R)^+ = (J_F J_R)(J_F J_R)^T ((J_F J_R)(J_F J_R)^T)^{-1} = I$ , la ecuación (2.56) se simplifica en (2.57):

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{q}) &= \tilde{q}^T \{ \dot{q}_d - \dot{q}_d - K_1 \tanh(\tilde{q}) \} \\ \dot{V}(\tilde{q}) &= -\tilde{q}^T K_1 \tanh(\tilde{q}) \end{aligned} \quad (2.57)$$

Se cumple siempre que  $\tilde{q}^T \tanh(\tilde{q}) > 0$ , es decir:

$$\dot{V}(\tilde{q}) = -\tilde{q}^T K_1 \tanh(\tilde{q}) < 0, \quad \text{si } K_1 > 0 \quad (2.58)$$

A partir de la ecuación (2.58) se demuestra que el sistema en lazo cerrado es asintóticamente estable en el punto de equilibrio y consecuentemente se cumple que  $\tilde{q} \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$

## 2.5.2 CONTROLADOR BASADO EN ESPACIO NULO

En la sección 1.3.9 se estudió un tipo de control basado en espacio nulo que permite manejar múltiples tareas resolviendo los conflictos entre las mismas asignando una prioridad a las tareas involucradas. La redundancia de la planta debido al manipulador aéreo en un sistema multirobot, hace posible que se pueda realizar tareas secundarias.

Para el seguimiento de trayectoria, se consideran dos tareas de control: mantener los parámetros de forma y orientación del triángulo formado por los tres manipuladores aéreos y controlar la postura del centroide del triángulo para cualquier trayectoria deseada.

Según la prioridad que se asigne a las tareas, se puede tener como tarea primaria controlar la forma y como tarea secundaria el control de postura. Cambiando la prioridad, la tarea principal es el control de postura y la tarea secundaria, el control de la forma.

A continuación, se presenta el diseño de los controladores para ambas tareas y los controladores según la prioridad deseada.

### 2.5.2.1 Controlador para la tarea de forma

La tarea de forma permite mantener las variables de forma del triángulo formado por los tres manipuladores aéreos, así como la orientación del mismo respecto al sistema de referencia inercial.

Este controlador relaciona las variables de forma-orientación de la formación  $q_1$  definidos en la sección 2.4.4 con los parámetros de forma y orientación deseados.

En la ecuación (2.36) se relaciona  $\dot{q}_1$  con las velocidades de los tres robots  $\dot{R}_F$  por medio del jacobiano de forma-orientación  $J_s$ . A partir de esta ecuación se puede obtener una ley de control o velocidades deseadas  $v_{d_s}$  en función de los parámetros de forma y orientación utilizando el algoritmo de cinemática inversa estudiado en 1.3.9.4 como se muestra en (2.59):

$$v_{d_s} = J_s^+ [\dot{q}_{1d} + K_s \tanh(\tilde{q}_1)] \quad (2.59)$$

Donde:

- $J_s^+$  es la pseudoinversa del jacobiano de forma-orientación.
- $\dot{q}_{1d}$  es la derivada temporal de los parámetros de forma y orientación deseados, según se indica en (2.60).

$$q_{1d} = [d_{1d} \quad d_{2d} \quad \beta_d \quad \phi_{Fd} \quad \theta_{Fd} \quad \psi_{Fd}] \quad (2.60)$$

Derivando respecto al tiempo:

$$\dot{q}_{1d} = [\dot{d}_{1d} \quad \dot{d}_{2d} \quad \dot{\beta}_d \quad \dot{\phi}_{Fd} \quad \dot{\theta}_{Fd} \quad \dot{\psi}_{Fd}] \quad (2.61)$$

- $K_s$  es una matriz diagonal de dimensión  $(6 \times 6)$  utilizada para el ajuste o sintonización del controlador.
- $\tilde{q}_1$  es el error o diferencia entre los parámetros de referencia deseados y la salida del sistema.

$$\tilde{q}_1 = q_{d1} - q_1 \quad (2.62)$$

### 2.5.2.2 Controlador para la tarea de postura

Este controlador mantiene la posición del centroide de la formación de los tres manipuladores aéreos en la trayectoria deseada. Por lo tanto, el controlador de postura establece velocidades deseadas  $v_{dp}$  en función de las variables de postura  $q_2$  definidas en la sección 2.4.1 con los parámetros de postura deseados (trayectoria deseada).

La ecuación (2.39) relaciona las variaciones temporales de los parámetros de postura  $\dot{q}_2$  (2.38) con las velocidades de cada robot  $\dot{R}_F$  mediante el jacobiano de postura  $J_p$ .

La ley de control que permite obtener las velocidades deseadas en función de los parámetros de postura se obtiene a partir de la ecuación (2.38) mediante el algoritmo de cinemática inversa de la sección 1.3.9.4 en la ecuación:

$$v_{dp} = J_p^+ [\dot{q}_{2d} + K_p \tanh(\tilde{q}_2)] \quad (2.63)$$

Donde:

- $J_p^+$  es la pseudoinversa del jacobiano de postura.
- $\dot{q}_{2d}$  es la derivada temporal de los parámetros de postura deseados, según se indica en (2.64).

$$q_{2d} = [x_{Fd} \quad y_{Fd} \quad z_{Fd}] \quad (2.64)$$

Derivando respecto al tiempo

$$\dot{q}_{2d} = [\dot{x}_{Fd} \quad \dot{y}_{Fd} \quad \dot{z}_{Fd}] \quad (2.65)$$

- $K_p$  es una matriz diagonal de la dimensión de  $(3 \times 3)$  que permite ajustar la respuesta del controlador.
- $\tilde{q}_2$  es el error o diferencia entre los parámetros de referencia deseados y la salida del sistema.

$$\tilde{q}_2 = q_{d2} - q_2 \quad (2.66)$$

### 2.5.2.3 Controlador con prioridad de forma

El controlador para seguimiento de trayectoria con prioridad de forma-orientación permite combinar las acciones de control de la tarea de forma-orientación y la tarea de postura, cumpliéndose esta última si no tiene conflicto con la primera. Para esto, se utiliza la proyección de la tarea de postura en el espacio nulo de la tarea de más prioridad según se estudió en la sección 1.3.9.

Según la ecuación (1.35), el controlador basado en espacio nulo para el seguimiento de trayectoria con prioridad de forma es (2.67):

$$v_d = v_{d_s} + N_s v_{d_p} \quad (2.67)$$

Donde:

- $N_s = (I - J_s^+ J_s)$  es la matriz de proyección de espacio nulo del jacobiano  $J_s$ .

Reemplazando (2.59) y (2.63) en la ecuación (2.67) se obtiene la ley de control que relaciona las velocidades deseadas de salida de cada robot de la formación con los parámetros de la formación. Esta ley de control presentada en (2.68) combina la tarea principal de forma-orientación y la tarea secundaria de postura

$$v_d = J_s^+ [\dot{q}_{1d} + K_s \tanh(\tilde{q}_1)] + (I - J_s^+ J_s) J_p^+ [\dot{q}_{2d} + K_p \tanh(\tilde{q}_2)] \quad (2.68)$$

La ecuación (2.22) permite obtener la ley de control general, ya que  $\dot{R}_F$  representa las velocidades deseadas  $v_d$  de cada manipulador aéreo. Considerando además seguimiento perfecto de velocidad  $u = \dot{h}$ , se obtiene la ecuación (2.69).

$$u = J_R^+ \{ J_s^+ [\dot{q}_{1d} + K_s \tanh(\tilde{q}_1)] + (I - J_s^+ J_s) J_p^+ [\dot{q}_{2d} + K_p \tanh(\tilde{q}_2)] \} \quad (2.69)$$

### 2.5.2.4 Análisis de estabilidad del controlador con prioridad forma

Para el estudio de la estabilidad, se realiza el análisis para cada tarea de manera individual.



### 2.5.2.4.1 Estabilidad para la tarea de forma

Al igual que en la sección 2.5.1.1, se escoge como función de Lyapunov a la función:

$$V(\tilde{q}_1) = \frac{1}{2} \tilde{q}_1^2 \quad (2.70)$$

La función en (2.70) es definida positiva ya que cumple con:

$$\begin{aligned} V(\tilde{q}_1) &> 0, & \tilde{q}_1 &\neq \tilde{q}_{10} \\ \tilde{q}_{10} = 0 &\rightarrow V(\tilde{q}_{10}) = \frac{1}{2} \tilde{q}_{10}^2 = 0 \end{aligned} \quad (2.71)$$

Derivando la candidata de Lyapunov de la ecuación (2.70), se tiene:

$$\dot{V}(\tilde{q}_1) = \tilde{q}_1^T \dot{\tilde{q}}_1 \quad (2.72)$$

A partir de la ecuación (2.62) se sabe que  $\dot{\tilde{q}}_1 = \dot{q}_{1d} - \dot{q}_1$ , por lo que la ecuación (2.72) queda definida como:

$$\dot{V}(\tilde{q}_1) = \tilde{q}_1^T [\dot{q}_{1d} - \dot{q}_1] \quad (2.73)$$

Según la ecuación (2.59) y la ecuación (2.22), se tiene que  $\dot{q}_1 = J_s J_R \dot{h}$ . Reemplazando en la ecuación (2.73) se tiene:

$$\dot{V}(\tilde{q}_1) = \tilde{q}_1^T [\dot{q}_{1d} - J_s J_R \dot{h}] \quad (2.74)$$

Asumiendo seguimiento perfecto de velocidad, donde  $u = \dot{h}$ , es posible reemplazar el controlador obtenido en (2.69) en la ecuación (2.74).

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{q}_1) = \tilde{q}_1^T \{ &\dot{q}_{1d} \\ &- J_s J_R [J_R^+ (J_s^+ [\dot{q}_{1d} + K_s \tanh(\tilde{q}_1)] \\ &+ (I - J_s^+ J_s) J_p^+ [\dot{q}_{2d} + K_p \tanh(\tilde{q}_2)]]] \} \end{aligned} \quad (2.75)$$

Considerando que:

$$\begin{aligned} J_R J_R^+ &= I, \quad y \quad J_s J_s^+ = I \\ J_s (I - J_s^+ J_s) &= J_s - J_s J_s^+ J_s = J_s - J_s = 0 \end{aligned} \quad (2.76)$$

Es posible simplificar la ecuación (2.75) como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{q}_1) &= \tilde{q}_1^T \{ \dot{q}_{1d} - \dot{q}_{1d} - K_s \tanh(\tilde{q}_1) \} \\ \dot{V}(\tilde{q}_1) &= -\tilde{q}_1^T K_s \tanh(\tilde{q}_1) \end{aligned} \quad (2.77)$$

De la ecuación (2.77) se cumple siempre que  $\tilde{q}_1^T \tanh(\tilde{q}_1) > 0$ . Es decir,  $\dot{V}(\tilde{q}_1) < 0$  solo si  $K_s > 0$ .

$$\dot{V}(\tilde{q}_1) = -\tilde{q}_1^T K_s \tanh(\tilde{q}_1) < 0, \quad si \quad K_s > 0 \quad (2.78)$$

La ecuación (2.78) demuestra que para la tarea de forma el punto de equilibrio es asintóticamente estable. Se demuestra en consecuencia que  $\tilde{q}_{1_0} \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

#### 2.5.2.4.2 Estabilidad para la tarea de postura

Se escoge como función de Lyapunov a la función:

$$V(\tilde{q}_2) = \frac{1}{2} \tilde{q}_2^2 \quad (2.79)$$

La función en (2.70) es definida positiva ya que cumple con:

$$\begin{aligned} V(\tilde{q}_2) &> 0, & \tilde{q}_2 &\neq \tilde{q}_{2_0} \\ \tilde{q}_{2_0} = 0 &\rightarrow V(\tilde{q}_{2_0}) = 0 \end{aligned} \quad (2.80)$$

Derivando la candidata de Lyapunov de la ecuación (2.70), se tiene:

$$\dot{V}(\tilde{q}_2) = \tilde{q}_2^T \dot{\tilde{q}}_2 \quad (2.81)$$

A partir de la ecuación (2.49) se sabe que  $\dot{\tilde{q}}_2 = \dot{q}_{2_d} - \dot{q}_2$ , por lo que la ecuación (2.72) se define como:

$$\dot{V}(\tilde{q}_2) = \tilde{q}_2^T [\dot{q}_{2_d} - \dot{q}_2] \quad (2.82)$$

Según la ecuación (2.63) y la ecuación (2.22), se tiene que  $\dot{q}_2 = J_p J_R \dot{h}$ . Reemplazando en la ecuación (2.82) se tiene:

$$\dot{V}(\tilde{q}_2) = \tilde{q}_2^T [\dot{q}_{2_d} - J_p J_R \dot{h}] \quad (2.83)$$

Sabiendo que  $J_R J_R^+ = I$  y asumiendo seguimiento perfecto de velocidad, donde  $u = \dot{h}$ , es posible reemplazar el controlador obtenido en (2.69) en la ecuación (2.83).

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{q}_2) &= \tilde{q}_2^T \{ \dot{q}_{2_d} - J_p J_R [J_R^+ (J_s^+ [\dot{q}_{1_d} + K_s \tanh(\tilde{q}_1)] + (I - J_s^+ J_s) J_p^+ [\dot{q}_{2_d} + K_p \tanh(\tilde{q}_2)])] \} \\ \dot{V}(\tilde{q}_2) &= \tilde{q}_2^T \{ \dot{q}_{2_d} - J_p [J_s^+ [\dot{q}_{1_d} + K_s \tanh(\tilde{q}_1)] + (I - J_s^+ J_s) J_p^+ [\dot{q}_{2_d} + K_p \tanh(\tilde{q}_2)]] \} \end{aligned} \quad (2.84)$$

Para tareas que no entran en conflicto (se puede cumplir ambas tareas de forma simultánea y completa), existe una propiedad que establece que  $\mathcal{R}(J_p) \cap \mathcal{R}(J_s)$ . Es decir, el espacio nulo y el espacio fila son subespacios ortogonales. Debido a la ortogonalidad del rango de  $J_p$  al rango de  $J_s$ , se cumple que:

$$J_p J_s^+ = 0 \quad (2.85)$$

Según esto, la ecuación (2.84) queda definida como:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{q}_2) &= \tilde{q}_2^T \{ \dot{q}_{2_d} - J_p (I - J_s^+ J_s) J_p^+ [\dot{q}_{2_d} + K_p \tanh(\tilde{q}_2)] \} \\ \dot{V}(\tilde{q}_2) &= \tilde{q}_2^T \{ \dot{q}_{2_d} - (J_p - J_p J_s^+ J_s) J_p^+ [\dot{q}_{2_d} + K_p \tanh(\tilde{q}_2)] \} \\ \dot{V}(\tilde{q}_2) &= \tilde{q}_2^T \{ \dot{q}_{2_d} - J_p J_p^+ [\dot{q}_{2_d} + K_p \tanh(\tilde{q}_2)] \} \end{aligned} \quad (2.86)$$

$$\begin{aligned}\dot{V}(\tilde{q}_2) &= \tilde{q}_2^T \{\dot{q}_{2d} - \dot{q}_{2d} - K_p \tanh(\tilde{q}_2)\} \\ \dot{V}(\tilde{q}_2) &= -\tilde{q}_2^T K_p \tanh(\tilde{q}_2)\end{aligned}$$

De igual manera que en el análisis de estabilidad para la tarea de forma, se cumple siempre que  $\tilde{q}_2^T \tanh(\tilde{q}_2) > 0$ . Para que  $\dot{V}(\tilde{q}_2) < 0$ , se debe cumplir que:

$$\dot{V}(\tilde{q}_2) = -\tilde{q}_2^T K_p \tanh(\tilde{q}_2) < 0, \quad \text{si } K_p > 0 \quad (2.87)$$

Con la ecuación (2.87) demuestra la estabilidad asintótica en el sentido de Lyapunov para la tarea de postura. Se concluye por lo tanto que  $\tilde{q}_{2_0} \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

### 2.5.2.5 Controlador con prioridad de postura

De la misma forma como se procedió para el controlador con prioridad de forma, la ley de control para la tarea de postura según la ecuación (1.35), se define como:

$$v_d = v_{d_p} + N_p v_{d_s} \quad (2.88)$$

Donde:

- $N_p = (I - J_p^+ J_p)$  es la matriz de proyección de espacio nulo del jacobiano  $J_p$ .

Reemplazando (2.59) y (2.63) en la ecuación (2.88) se obtiene la ley de control que evalúa las velocidades deseadas de la posición final de cada robot para cumplir con los parámetros de la formación. Esta ley de control combina la tarea principal de postura y la tarea secundaria de forma-orientación en (2.89).

$$v_d = J_p^+ [\dot{q}_{2d} + K_p \tanh(\tilde{q}_2)] + (I - J_p^+ J_p) J_s^+ [\dot{q}_{1d} + K_s \tanh(\tilde{q}_1)] \quad (2.89)$$

De igual manera, la ecuación (2.22) permite obtener la ley de control general. Es decir, a partir de la ecuación (2.89), y considerando seguimiento perfecto de velocidad  $u = \dot{h}$ , la ley de control queda establecida en (2.90).

$$\begin{aligned}\dot{h} &= J_R^+ v_d \\ u &= J_R^+ \{ J_p^+ [\dot{q}_{2d} + K_p \tanh(\tilde{q}_2)] + (I - J_p^+ J_p) J_s^+ [\dot{q}_{1d} + K_s \tanh(\tilde{q}_1)] \} \quad (2.90)\end{aligned}$$

### 2.5.2.6 Análisis de estabilidad del controlador con prioridad postura

El análisis de estabilidad, al igual que en el caso del controlador con prioridad de forma - orientación, se realiza de manera individual para cada tarea.

#### 2.5.2.6.1 Estabilidad para la tarea de postura

Se considera la siguiente función de Lyapunov:

$$V(\tilde{q}_2) = \frac{1}{2} \tilde{q}_2^2 \quad (2.91)$$

Esta función cumple con la condición de ser definida positiva, ya que cumple con:

$$\begin{aligned} V(\tilde{q}_2) &> 0, & \tilde{q}_2 &\neq \tilde{q}_{20} \\ \tilde{q}_{20} = 0 &\rightarrow V(\tilde{q}_{20}) = \frac{1}{2} \tilde{q}_{20}^2 = 0 \end{aligned} \quad (2.92)$$

Para demostrar la estabilidad en el punto de equilibrio, se deriva la ecuación (2.91), obteniéndose la ecuación (2.92).

$$\dot{V}(\tilde{q}_2) = \tilde{q}_2^T \dot{\tilde{q}}_2 \quad (2.93)$$

A partir del error  $\tilde{q}_2$  definido en (2.66), se tiene que  $\dot{\tilde{q}}_2 = \dot{q}_{2d} - \dot{q}_2$ . Reemplazando en la ecuación (2.93), se muestra que:

$$\dot{V}(\tilde{q}_2) = \tilde{q}_2^T [\dot{q}_{2d} - \dot{q}_2] \quad (2.94)$$

Según la ecuación (2.63), se sabe que  $\dot{q}_2 = J_p \dot{R}_F$ . Además, con  $\dot{R}_F = J_R \dot{h}$  definido en la ecuación (2.22), se tiene que  $\dot{q}_2 = J_p J_R \dot{h}$ . Reemplazando en (2.94) se obtiene:

$$\dot{V}(\tilde{q}_2) = \tilde{q}_2^T [\dot{q}_{2d} - J_p J_R \dot{h}] \quad (2.95)$$

Asumiendo seguimiento perfecto de velocidad, es decir  $u = \dot{h}$ , se reemplaza el controlador de la ecuación (2.90) en (2.95).

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{q}_2) &= \tilde{q}_2^T \{ \dot{q}_{2d} \\ &\quad - J_p J_R J_R^+ [J_p^+ (\dot{q}_{2d} + K_p \tanh(\tilde{q}_2)) \\ &\quad + (I - J_p^+ J_p) J_s^+ (\dot{q}_{1d} + K_s \tanh(\tilde{q}_1))] \} \end{aligned} \quad (2.96)$$

Se puede comprobar además que  $J_R J_R^+ = I$  y que  $J_p J_p^+ = I$ . Considerando esto se tiene:

$$\dot{V}(\tilde{q}_2) = \tilde{q}_2^T \{ \dot{q}_{2d} - [\dot{q}_{2d} + K_p \tanh(\tilde{q}_2)] - J_p (I - J_p^+ J_p) J_s^+ (\dot{q}_{1d} + K_s \tanh(\tilde{q}_1)) \} \quad (2.97)$$

Considerando que  $J_p (I - J_p^+ J_p) = J_p - J_p J_p^+ J_p = J_p - J_p = 0$ , la ecuación (2.97) se simplifica de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{q}_2) &= \tilde{q}_2^T \{ \dot{q}_{2d} - \dot{q}_{2d} - K_p \tanh(\tilde{q}_2) \} \\ \dot{V}(\tilde{q}_2) &= -\tilde{q}_2^T K_p \tanh(\tilde{q}_2) \end{aligned} \quad (2.98)$$

El término  $\tilde{q}_2^T \tanh(\tilde{q}_2)$  de la ecuación (2.98) es siempre positivo. Es decir, para que  $\dot{V}(\tilde{q}_2)$  sea negativa, se debe cumplir que:

$$\dot{V}(\tilde{q}_2) = -\tilde{q}_2^T K_p \tanh(\tilde{q}_2) < 0, \quad \text{si } K_p > 0 \quad (2.99)$$

Se verifica por lo tanto la estabilidad asintótica para la tarea de postura a partir de la ecuación (2.99). Por lo tanto, se concluye que el error del sistema tiende a cero,  $\tilde{q}_2 \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

### 2.5.2.6.2 Estabilidad para la tarea de forma

Se considera la siguiente función de Lyapunov:

$$V(\tilde{q}_1) = \frac{1}{2} \tilde{q}_1^2 \quad (2.100)$$

Esta función cumple con la condición de ser definida positiva, ya que cumple con:

$$\begin{aligned} V(\tilde{q}_1) &> 0, & \tilde{q}_1 &\neq \tilde{q}_{1_0} \\ \tilde{q}_{1_0} &= 0 & \rightarrow & V(\tilde{q}_{1_0}) = 0 \end{aligned} \quad (2.101)$$

Para demostrar la estabilidad en el punto de equilibrio, se deriva la ecuación (2.91), obteniéndose la ecuación (2.92).

$$\dot{V}(\tilde{q}_1) = \tilde{q}_1^T \dot{\tilde{q}}_1 \quad (2.102)$$

De acuerdo con la ecuación (2.62) la ecuación (2.102) se define a continuación:

$$\dot{V}(\tilde{q}_1) = \tilde{q}_1^T [\dot{q}_{1_d} - \dot{q}_1] \quad (2.103)$$

Sabiendo que  $\dot{q}_1 = J_s J_R \dot{h}$ , según las ecuaciones (2.59) y (2.22), se tiene:

$$\dot{V}(\tilde{q}_1) = \tilde{q}_1^T [\dot{q}_{1_d} - J_s J_R \dot{h}] \quad (2.104)$$

Asumiendo seguimiento perfecto de velocidad donde  $u = \dot{h}$ , se reemplaza el controlador propuesto en (2.90) en la ecuación (2.104).

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{q}_1) &= \tilde{q}_1^T \left\{ \dot{q}_{1_d} \right. \\ &\quad \left. - J_s J_R J_R^+ \left\{ J_p^+ [\dot{q}_{2_d} + K_p \tanh(\tilde{q}_2)] \right\} \right. \\ &\quad \left. + (I - J_p^+ J_p) J_s^+ [\dot{q}_{1_d} + K_s \tanh(\tilde{q}_1)] \right\} \end{aligned} \quad (2.105)$$

Sabiendo que  $J_R J_R^+ = I$  como se demostró anteriormente, la ecuación (2.105) se reduce a:

$$\dot{V}(\tilde{q}_1) = \tilde{q}_1^T \left\{ \dot{q}_{1_d} - J_s J_p^+ [\dot{q}_{2_d} + K_p \tanh(\tilde{q}_2)] - J_s (I - J_p^+ J_p) J_s^+ [\dot{q}_{1_d} + K_s \tanh(\tilde{q}_1)] \right\} \quad (2.106)$$

Para este caso, se sabe que  $J_s J_p^+ = 0$  al tratarse de tareas no conflictivas, según se expuso en (2.85). Reemplazando en la ecuación (2.106) se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{q}_1) &= \tilde{q}_1^T \left\{ \dot{q}_{1_d} - J_s (I - J_p^+ J_p) J_s^+ [\dot{q}_{1_d} + K_s \tanh(\tilde{q}_1)] \right\} \\ \dot{V}(\tilde{q}_1) &= \tilde{q}_1^T \left\{ \dot{q}_{1_d} - (J_s - J_s J_p^+ J_p) J_s^+ [\dot{q}_{1_d} + K_s \tanh(\tilde{q}_1)] \right\} \\ \dot{V}(\tilde{q}_1) &= \tilde{q}_1^T \left\{ \dot{q}_{1_d} - J_s J_s^+ [\dot{q}_{1_d} + K_s \tanh(\tilde{q}_1)] \right\} \\ \dot{V}(\tilde{q}_1) &= \tilde{q}_1^T \left\{ \dot{q}_{1_d} - \dot{q}_{1_d} - K_s \tanh(\tilde{q}_1) \right\} \end{aligned} \quad (2.107)$$

De la ecuación (2.107) se sabe que  $\tilde{q}_1^T \tanh(\tilde{q}_1) > 0$ . Es decir, para demostrar la estabilidad para la tarea de forma,  $\dot{V}(\tilde{q}_1)$  debe cumplir que:

$$\dot{V}(\tilde{q}_1) = -\tilde{q}_1^T K_s \tanh(\tilde{q}_1) < 0, \quad \text{si } K_s > 0 \quad (2.108)$$

Se demuestra la estabilidad asintótica para la tarea de forma a partir de la ecuación (2.108) y se verifica que  $\tilde{q}_1 \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

## 2.6 DISEÑO DE CONTROLADORES PARA EVASIÓN DE OBSTÁCULOS

Con la presencia de obstáculos en las trayectorias de los robots aparece la necesidad de incluir un nuevo objetivo de control para evitar que los robots colisionen. La utilización de campos potenciales en tres dimensiones como se estudió en la sección 1.3.10.2 para el control de evasión de obstáculos permite definir un área de alrededor del robot que restringe el movimiento cerca de otros objetos para impedir una colisión.

En el diseño del controlador ahora se consideran tres tareas: evasión de obstáculos, seguimiento de trayectoria y mantener la forma, el esquema de control de espacios nulos permite acoplar estas tres tareas, además de poder asignar un orden de prioridad determinado entre las mismas.

### 2.6.1 CONTROLADOR PARA LA TAREA DE EVASIÓN

En la sección 1.3.10.2 se definió la forma del campo potencial para tres dimensiones en la ecuación (1.42) considerando una distancia de seguridad. De igual manera, la presencia de varios obstáculos permite obtener un campo potencial total (1.45) sobre el cual es necesario obtener su jacobiano para poder determinar las velocidades de cada robot.

Derivando el campo potencial en función del tiempo, se tiene la ecuación (2.109):

$$\frac{d\phi_s}{dt} = \frac{\partial\phi_s}{\partial R_F} \frac{dR_F}{dt} + \frac{\partial\phi_s}{\partial t} \quad (2.109)$$

Donde:

- $\frac{d\phi_s}{dt}$  es la razón de cambio del campo potencial en el tiempo.
- $\frac{\partial\phi_s}{\partial R_F}$  es la derivada parcial del campo potencial respecto a la posición de los manipuladores aéreos.
- $\frac{\partial\phi_s}{\partial t}$  es la derivada parcial del campo potencial respecto al tiempo, y

- $\frac{dR_F}{dt}$ , es la variación de las posiciones de los manipuladores aéreos en el tiempo.

Para obtener la ley de control para la tarea de evasión, la ecuación (2.109) se puede escribir de la siguiente manera:

$$\frac{d\phi_s}{dt} = J_\phi \frac{dR_F}{dt} + \frac{\partial \phi_s}{\partial t} \quad (2.110)$$

Donde:

$J_\phi = \frac{\partial \phi_s}{\partial R_F}$  representa el jacobiano que relaciona las razones de cambio de campo potencial con las velocidades de todos los robots. Este jacobiano, para la formación de tres robots está definido en la ecuación (2.111):

$$J_\phi = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_s}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi_s}{\partial y_1} & \frac{\partial \phi_s}{\partial z_1} & \frac{\partial \phi_s}{\partial x_2} & \frac{\partial \phi_s}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_s}{\partial z_2} & \frac{\partial \phi_s}{\partial x_3} & \frac{\partial \phi_s}{\partial y_3} & \frac{\partial \phi_s}{\partial z_3} \end{bmatrix} \quad (2.111)$$

A partir de la ecuación (2.110), la ley de control que permite obtener las velocidades deseadas para la tarea de evasión  $v_{d\phi}$  se determina mediante el algoritmo de cinemática inversa estudiado en el capítulo 1.3.9.4. Para ello se despeja  $\frac{dR_F}{dt}$  de la ecuación (2.110) y la ley de control resultante se indica en (2.112).

$$\begin{aligned} \frac{dR_F}{dt} &= J_\phi^+ \left[ \frac{d\phi_s}{dt} - \frac{\partial \phi_s}{\partial t} \right] \\ v_{d\phi} &= J_\phi^+ \left[ \dot{\phi}_{s_d} + K_\phi \tanh \tilde{\phi}_s - \frac{\partial \phi_s}{\partial t} \right] \end{aligned} \quad (2.112)$$

Donde:

- $J_\phi^+ = J_\phi^T (J_\phi J_\phi^T)^{-1}$  es la pseudoinversa del jacobiano  $J_\phi$ .
- $\dot{\phi}_{s_d}$  es la derivada temporal del valor del campo potencial deseado  $\phi_{s_d}$ . Para llevar a cabo la evasión de obstáculos de la formación de manipuladores aéreos, debe cumplirse que  $\phi_{s_d} = 0$  (los robots de la formación no deben estar ante la presencia de campo potencial que representa la existencia de un obstáculo) en todo el tiempo y por lo tanto  $\dot{\phi}_{s_d} = 0$ .
- $K_\phi$  es un escalar positivo que permite sintonizar la respuesta del controlador.
- $\tilde{\phi}_s$  es el error del campo potencial definido en la ecuación (2.113).

$$\tilde{\phi}_s = \phi_{s_d} - \phi_s \quad (2.113)$$

Debido a que el campo potencial deseado es nulo, se cumple que  $\tilde{\phi}_s = -\phi_s$ .

## 2.6.2 CONTROLADOR CON PRIORIDAD DE FORMA

En la ecuación (1.36) se definió la ley de control que relaciona tres tareas. El control con prioridad de forma propuesto se puede obtener a partir de la ecuación (2.114).

$$v_d = v_{d_s} + N_s (v_{d_\phi} + N_\phi v_{d_p}) \quad (2.114)$$

Donde:

- $v_{d_s}$ ,  $v_{d_p}$  y  $v_{d_\phi}$  son las leyes de control para las tareas de forma, postura y evasión descritas en las secciones 2.5.2.1, 2.5.2.2 y 2.6.1 respectivamente.
- $N_s = (I - J_s^+ J_s)$  es la es la matriz de proyección de espacio nulo del jacobiano  $J_s$ .
- $N_\phi = (I - J_\phi^+ J_\phi)$  es la es la matriz de proyección de espacio nulo del jacobiano  $J_\phi$ .

Reemplazando las ecuaciones (2.59), (2.63) y (2.112), se obtiene la ley de control en la ecuación (2.115).

$$\begin{aligned} v_d = J_s^+ [\dot{q}_{1d} + K_s \tanh(\tilde{q}_1)] \\ + (I - J_s^+ J_s) \left\{ J_\phi^+ \left[ \dot{\phi}_{s_d} + K_\phi \tanh \tilde{\phi}_s - \frac{\partial \phi_s}{\partial t} \right] \right. \\ \left. + (I - J_\phi^+ J_\phi) J_p^+ [\dot{q}_{2d} + K_p \tanh(\tilde{q}_2)] \right\} \end{aligned} \quad (2.115)$$

Asegurando seguimiento perfecto de velocidad  $u = \dot{h}$ , se obtiene la ley de control  $u$  en función de las velocidades de entrada de cada robot. Se utiliza la ecuación (2.22) para obtener la ley de control indicada en (2.116)

$$\begin{aligned} \dot{h} = J_R^+ v_d \\ u = J_R^+ \left\{ J_s^+ [\dot{q}_{1d} + K_s \tanh(\tilde{q}_1)] \right. \\ \left. + (I - J_s^+ J_s) \left\{ J_\phi^+ \left[ \dot{\phi}_{s_d} + K_\phi \tanh \tilde{\phi}_s - \frac{\partial \phi_s}{\partial t} \right] \right. \right. \\ \left. \left. + (I - J_\phi^+ J_\phi) J_p^+ [\dot{q}_{2d} + K_p \tanh(\tilde{q}_2)] \right\} \right\} \end{aligned} \quad (2.116)$$

## 2.6.3 ANÁLISIS DE ESTABILIDAD DEL CONTROLADOR CON PRIORIDAD FORMA

Al igual que en los análisis realizados previamente, la estabilidad se verifica por tarea individualmente.



### 2.6.3.1 Estabilidad para la tarea de forma

La función de Lyapunov  $V(\tilde{q}_1) = \frac{1}{2}\tilde{q}_1^2$  cumple la condición de ser definida positiva ya que:

$$\begin{aligned} V(\tilde{q}_1) &> 0, & \tilde{q}_1 &\neq \tilde{q}_{10} \\ \tilde{q}_{10} = 0 &\rightarrow V(\tilde{q}_{10}) = \frac{1}{2}\tilde{q}_{10}^2 = 0 \end{aligned} \quad (2.117)$$

Derivando la ecuación la función de Lyapunov se determina:

$$\dot{V}(\tilde{q}_1) = \tilde{q}_1^T \dot{\tilde{q}}_1 \quad (2.118)$$

A partir de la ecuación (2.62), se obtiene que  $\dot{\tilde{q}}_1 = \dot{q}_{1d} - \dot{q}_1$ . Reemplazando en la ecuación (2.118), se tiene:

$$\dot{V}(\tilde{q}_1) = \tilde{q}_1^T [\dot{q}_{1d} - \dot{q}_1] \quad (2.119)$$

Debido a que  $\dot{q}_1 = J_s J_R \dot{h}$ , se tiene:

$$\dot{V}(\tilde{q}_1) = \tilde{q}_1^T [\dot{q}_{1d} - J_s J_R \dot{h}] \quad (2.120)$$

Asumiendo seguimiento perfecto de velocidad  $u = \dot{h}$ , se puede reemplazar la ecuación del controlador (2.116).

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{q}_1) = \tilde{q}_1^T &\left\{ \dot{q}_{1d} \right. \\ &- J_s J_R J_R^+ \left[ J_s^+ [\dot{q}_{1d} + K_s \tanh(\tilde{q}_1)] \right. \\ &+ (I - J_s^+ J_s) \left\{ J_\phi^+ \left[ \dot{\phi}_{sd} + K_\phi \tanh \tilde{\phi}_s - \frac{\partial \phi_s}{\partial t} \right] \right. \\ &\left. \left. \left. + (I - J_\phi^+ J_\phi) J_p^+ [\dot{q}_{2d} + K_p \tanh(\tilde{q}_2)] \right] \right\} \right\} \end{aligned} \quad (2.121)$$

Considerando que  $J_R J_R^+ = I$  y  $J_s J_s^+ = I$ , la ecuación (2.121) se simplifica:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{q}_1) = \tilde{q}_1^T &\left\{ \dot{q}_{1d} - [\dot{q}_{1d} + K_s \tanh(\tilde{q}_1)] \right. \\ &- J_s (I - J_s^+ J_s) \left( J_\phi^+ \left[ \dot{\phi}_{sd} + K_\phi \tanh \tilde{\phi}_s - \frac{\partial \phi_s}{\partial t} \right] \right. \\ &\left. \left. + (I - J_\phi^+ J_\phi) J_p^+ [\dot{q}_{2d} + K_p \tanh(\tilde{q}_2)] \right) \right\} \end{aligned} \quad (2.122)$$

Además,  $J_s (I - J_s^+ J_s) = 0$ . Con esto se obtiene la ecuación (2.123).

$$\dot{V}(\tilde{q}_1) = -\tilde{q}_1^T K_s \tanh(\tilde{q}_1) \quad (2.123)$$

Se verifica que  $\tilde{q}_1^T \tanh(\tilde{q}_1) > 0$ . Entonces para que  $\dot{V}(\tilde{q}_1) < 0$  se debe cumplir que:

$$\dot{V}(\tilde{q}_1) = -\tilde{q}_1^T K_s \tanh(\tilde{q}_1) < 0, \quad \text{si } K_s > 0 \quad (2.124)$$

A partir de la ecuación (2.124), se verifica la estabilidad asintótica del controlador para la tarea de forma y se comprueba que el error  $\tilde{q}_1 \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

### 2.6.3.2 Estabilidad para la tarea de evasión

La función de Lyapunov  $V(\tilde{\phi}_s) = \frac{1}{2} \tilde{\phi}_s^2$  para la tarea de evasión, cumple la condición de ser definida positiva ya que:

$$\begin{aligned} V(\tilde{\phi}_s) &> 0, & \tilde{\phi}_s &\neq \tilde{\phi}_{s0} \\ \tilde{\phi}_{s0} = 0 &\rightarrow V(\tilde{\phi}_{s0}) = \frac{1}{2} \tilde{\phi}_{s0}^2 = 0 \end{aligned} \quad (2.125)$$

Derivando la función de Lyapunov:

$$\dot{V}(\tilde{\phi}_s) = \tilde{\phi}_s^T \dot{\tilde{\phi}}_s \quad (2.126)$$

A partir de la ecuación (2.113), se obtiene la derivada del error  $\dot{\tilde{\phi}}_s = \dot{\phi}_{sd} - \dot{\phi}_s$  y se halla que:

$$\dot{V}(\tilde{\phi}_s) = \phi_s^T [\dot{\phi}_{sd} - \dot{\phi}_s] \quad (2.127)$$

Reemplazando la ecuación (2.110), se obtiene:

$$\dot{V}(\tilde{\phi}_s) = \phi_s^T \left\{ \dot{\phi}_{sd} - J_\phi \dot{R}_F - \frac{\partial \phi_s}{\partial t} \right\} \quad (2.128)$$

Además, se sabe por la ecuación (2.22) que  $\dot{R}_F = J_R \dot{h}$ . Asumiendo además seguimiento perfecto de velocidad  $u = \dot{h}$ , se puede reemplazar la ecuación (2.116) en la ecuación (2.128).

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{\phi}_s) &= \phi_s^T \left\{ \dot{\phi}_{sd} - J_\phi J_R u - \frac{\partial \phi_s}{\partial t} \right\} \\ \dot{V}(\tilde{\phi}_s) &= \phi_s^T \left\{ \dot{\phi}_{sd} - J_\phi J_R J_R^+ \left[ J_s^+ [\dot{q}_{1d} + K_s \tanh(\tilde{q}_1)] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (I - J_s^+ J_s) \left\{ J_\phi^+ \left[ \dot{\phi}_{sd} + K_\phi \tanh \tilde{\phi}_s - \frac{\partial \phi_s}{\partial t} \right] \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + (I - J_\phi^+ J_\phi) J_p^+ [\dot{q}_{2d} + K_p \tanh(\tilde{q}_2)] \right] \right\} - \frac{\partial \phi_s}{\partial t} \right\} \end{aligned} \quad (2.129)$$

La ecuación (2.129) se puede simplificar considerando que  $J_R J_R^+ = I$  y que  $J_\phi J_s^+ = 0$  (tareas no conflictivas).

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\tilde{\phi}_s) &= \phi_s^T \left\{ \dot{\phi}_{sd} \right. \\
&\quad \left. - J_\phi (I - J_s^+ J_s) \left[ J_\phi^+ \left[ \dot{\phi}_{sd} + K_\phi \tanh \tilde{\phi}_s - \frac{\partial \phi_s}{\partial t} \right] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (I - J_\phi^+ J_\phi) J_p^+ [\dot{q}_{2d} + K_p \tanh(\tilde{q}_2)] \right] - \frac{\partial \phi_s}{\partial t} \right\} \\
\dot{V}(\tilde{\phi}_s) &= \phi_s^T \left\{ \dot{\phi}_{sd} - J_\phi J_\phi^+ \left[ \dot{\phi}_{sd} + K_\phi \tanh \tilde{\phi}_s - \frac{\partial \phi_s}{\partial t} \right] \right. \\
&\quad \left. - J_\phi (I - J_\phi^+ J_\phi) J_p^+ [\dot{q}_{2d} + K_p \tanh(\tilde{q}_2)] - \frac{\partial \phi_s}{\partial t} \right\} \quad (2.130)
\end{aligned}$$

Sabiendo que  $J_\phi J_\phi^+ = I$  y  $J_\phi (I - J_\phi^+ J_\phi) = 0$  la ecuación (2.130) se reduce a:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\tilde{\phi}_s) &= \phi_s^T \left[ \dot{\phi}_{sd} - \dot{\phi}_{sd} - K_\phi \tanh \tilde{\phi}_s + \frac{\partial \phi_s}{\partial t} - \frac{\partial \phi_s}{\partial t} \right] \\
\dot{V}(\tilde{\phi}_s) &= -\phi_s^T K_\phi \tanh \tilde{\phi}_s \quad (2.131)
\end{aligned}$$

Se verifica que  $\phi_s^T \tanh \tilde{\phi}_s \geq 0$ . Es decir,  $\dot{V}(\tilde{\phi}_s) < 0$  sólo si cumple la siguiente condición:

$$\dot{V}(\tilde{\phi}_s) = -\phi_s^T K_\phi \tanh \tilde{\phi}_s < 0, \quad \text{si } K_\phi > 0 \quad (2.132)$$

Se demuestra por lo tanto la estabilidad asintótica para la tarea de evasión cumpliéndose que  $\tilde{\phi}_s \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

### 2.6.3.3 Estabilidad para la tarea de postura

La función de Lyapunov  $V(\tilde{q}_2) = \frac{1}{2} \tilde{q}_2^2$  para la tarea de postura es una función definida positiva ya que:

$$\begin{aligned}
V(\tilde{q}_2) &> 0, \quad \tilde{q}_2 \neq \tilde{q}_{20} \\
\tilde{q}_{20} = 0 &\rightarrow V(\tilde{q}_{20}) = \frac{1}{2} \tilde{q}_{20}^2 = 0 \quad (2.133)
\end{aligned}$$

Derivando en función del tiempo la función de Lyapunov, se tiene:

$$\dot{V}(\tilde{q}_2) = \tilde{q}_2^T [\dot{q}_{2d} - \dot{q}_2] \quad (2.134)$$

Como se determinó anteriormente,  $\dot{q}_2 = J_p J_R \dot{h}$ . Reemplazando esta igualdad en (2.134):

$$\dot{V}(\tilde{q}_2) = \tilde{q}_2^T [\dot{q}_{2d} - J_p J_R \dot{h}] \quad (2.135)$$

Asumiendo seguimiento perfecto de velocidad, de tal manera que  $u = \dot{h}$ , se puede reemplazar la ecuación del controlador (2.116) en (2.135).

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\tilde{q}_2) = & \tilde{q}_2^T \left\{ \dot{q}_{2d} \right. \\
& - J_p J_R J_R^+ \left[ J_s^+ [\dot{q}_{1d} + K_s \tanh(\tilde{q}_1)] \right. \\
& + (I - J_s^+ J_s) \left\{ J_\phi^+ \left[ \dot{\phi}_{sd} + K_\phi \tanh \tilde{\phi}_s - \frac{\partial \phi_s}{\partial t} \right] \right. \\
& \left. \left. + (I - J_\phi^+ J_\phi) J_p^+ [\dot{q}_{2d} + K_p \tanh(\tilde{q}_2)] \right\} \right\} \quad (2.136)
\end{aligned}$$

Considerando que  $J_R J_R^+ = I$  y que  $J_p J_s^+ = 0$  (tareas no conflictivas), la ecuación (2.136) se simplifica en:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\tilde{q}_2) = & \tilde{q}_2^T \left\{ \dot{q}_{2d} \right. \\
& - J_p (I - J_s^+ J_s) \left[ J_\phi^+ \left[ -K_\phi \tanh \tilde{\phi}_s - \frac{\partial \phi_s}{\partial t} \right] \right. \\
& \left. \left. + (I - J_\phi^+ J_\phi) J_p^+ [\dot{q}_{2d} + K_p \tanh(\tilde{q}_2)] \right] \right\} \quad (2.137)
\end{aligned}$$

Conociendo que  $J_p (I - J_s^+ J_s) = J_p$  y además  $J_p J_\phi^+ = 0$ .

$$\dot{V}(\tilde{q}_2) = \tilde{q}_2^T [\dot{q}_{2d} - J_p (I - J_\phi^+ J_\phi) J_p^+ (\dot{q}_{2d} + K_p \tanh(\tilde{q}_2))] \quad (2.138)$$

Además,  $J_p (I - J_\phi^+ J_\phi) = J_p$  y  $J_p J_p^+ = I$ . Reemplazando en (2.138) se obtiene:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\tilde{q}_2) = & \tilde{q}_2^T [\dot{q}_{2d} - \dot{q}_{2d} - \tanh(\tilde{q}_2)] \\
\dot{V}(\tilde{q}_2) = & -\tilde{q}_2^T K_p \tanh(\tilde{q}_2) \quad (2.139)
\end{aligned}$$

El término  $\tilde{q}_2^T \tanh(\tilde{q}_2) > 0$  para cualquier  $\tilde{q}_2 \neq 0$ . Es decir,  $\dot{V}(\tilde{q}_2) < 0$  si se cumple:

$$\dot{V}(\tilde{q}_2) = -\tilde{q}_2^T K_p \tanh(\tilde{q}_2) < 0, \quad \text{si } K_p > 0 \quad (2.140)$$

La ecuación (2.140) demuestra que la tarea de postura es asintóticamente estable en el sentido de Lyapunov y se concluye que el error  $\tilde{q}_2 \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

#### 2.6.4 CONTROLADOR CON PRIORIDAD DE POSTURA

El controlador con prioridad de postura utiliza el esquema de control basado en espacio nulo para tres tareas de control definido según la ecuación (1.36). Considerando como primera tarea al control de las variables de postura (principal) y como tareas secundarias a la de evasión de obstáculos y mantenimiento de la forma, con prioridad establecida en ese orden, este controlador se define según la ecuación (2.141).

$$v_d = v_{dp} + N_p (v_{d\phi} + N_\phi v_{ds}) \quad (2.141)$$

Donde:

- $v_{d_s}$ ,  $v_{d_p}$  y  $v_{d_\phi}$  son las leyes de control para las tareas de forma, postura y evasión obtenidas en las secciones 2.5.2.1, 2.5.2.2 y 2.6.1 respectivamente.
- $N_p = (I - J_p^+ J_p)$  es la es la matriz de proyección de espacio nulo del jacobiano  $J_p$ .
- $N_\phi = (I - J_\phi^+ J_\phi)$  es la es la matriz de proyección de espacio nulo del jacobiano  $J_\phi$ .

Reemplazando las ecuaciones (2.59), (2.63) y (2.112) en la ecuación (2.141), se obtiene la ley de control (2.142).

$$\begin{aligned}
 v_d = & J_p^+ [\dot{q}_{2d} + K_p \tanh(\tilde{q}_2)] \\
 & + (I - J_p^+ J_p) \left\{ J_\phi^+ \left( \dot{\phi}_{s_d} + K_\phi \tanh \tilde{\phi}_s - \frac{\partial \phi_s}{\partial t} \right) \right. \\
 & \left. + (I - J_\phi^+ J_\phi) J_s^+ [\dot{q}_{1d} + K_s \tanh(\tilde{q}_1)] \right\} \quad (2.142)
 \end{aligned}$$

Considerando seguimiento perfecto de velocidad  $u = \dot{h}$ , la ley de control  $u$  se obtiene a partir de la ecuación (2.22) obteniéndose:

$$\begin{aligned}
 \dot{h} = & J_R^+ v_d \\
 u = & J_R^+ \left\{ J_p^+ [\dot{q}_{2d} + K_p \tanh(\tilde{q}_2)] \right. \\
 & + (I - J_p^+ J_p) \left\{ J_\phi^+ \left( \dot{\phi}_{s_d} + K_\phi \tanh \tilde{\phi}_s - \frac{\partial \phi_s}{\partial t} \right) \right. \\
 & \left. \left. + (I - J_\phi^+ J_\phi) J_s^+ [\dot{q}_{1d} + K_s \tanh(\tilde{q}_1)] \right\} \right\} \quad (2.143)
 \end{aligned}$$

## 2.6.5 ANÁLISIS DE ESTABILIDAD DEL CONTROLADOR CON PRIORIDAD POSTURA

La estabilidad se verifica individualmente por tarea.

### 2.6.5.1 Estabilidad para la tarea de postura

La función de Lyapunov  $V(\tilde{q}_2) = \frac{1}{2} \tilde{q}_2^2$  para la tarea de postura es una función definida positiva ya que:

$$\begin{aligned}
 V(\tilde{q}_2) & > 0, & \tilde{q}_2 & \neq \tilde{q}_{2_0} \\
 \tilde{q}_{2_0} = 0 & \rightarrow V(\tilde{q}_{2_0}) = \frac{1}{2} \tilde{q}_{2_0}^2 = 0 \quad (2.144)
 \end{aligned}$$

Derivando en función del tiempo la función de Lyapunov, se tiene:

$$\dot{V}(\tilde{q}_2) = \tilde{q}_2^T [\dot{q}_{2d} - \dot{q}_2] \quad (2.145)$$

Como se determinó anteriormente,  $\dot{q}_2 = J_p J_R \dot{h}$ . Reemplazando esta igualdad en (2.145):

$$\dot{V}(\tilde{q}_2) = \tilde{q}_2^T [\dot{q}_{2d} - J_p J_R \dot{h}] \quad (2.146)$$

Asumiendo seguimiento perfecto de velocidad, de tal manera que  $u = \dot{h}$ , se puede reemplazar la ecuación del controlador (2.143) en (2.146).

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{q}_2) = \tilde{q}_2^T \left\{ \dot{q}_{2d} \right. \\ - J_p J_R J_R^+ \left[ J_p^+ [\dot{q}_{2d} + K_p \tanh(\tilde{q}_2)] \right] \\ + (I - J_p^+ J_p) \left\{ J_\phi^+ \left( \dot{\phi}_{sd} + K_\phi \tanh \tilde{\phi}_s - \frac{\partial \phi_s}{\partial t} \right) \right. \\ \left. \left. + (I - J_\phi^+ J_\phi) J_s^+ [\dot{q}_{1d} + K_s \tanh(\tilde{q}_1)] \right\} \right\} \quad (2.147) \end{aligned}$$

Considerando que  $J_R J_R^+ = I$  y que  $J_p J_p^+ = I$ , la ecuación (2.147) se simplifica en:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{q}_2) = \tilde{q}_2^T \left\{ \dot{q}_{2d} - \dot{q}_{2d} - K_p \tanh(\tilde{q}_2) \right. \\ - J_p (I - J_p^+ J_p) \left\{ J_\phi^+ \left( \dot{\phi}_{sd} + K_\phi \tanh \tilde{\phi}_s - \frac{\partial \phi_s}{\partial t} \right) \right. \\ \left. \left. + (I - J_\phi^+ J_\phi) J_s^+ [\dot{q}_{1d} + K_s \tanh(\tilde{q}_1)] \right\} \right\} \quad (2.148) \end{aligned}$$

Conociendo que  $J_p (I - J_p^+ J_p) = 0$  la ecuación (2.148) se reduce en (2.149).

$$\dot{V}(\tilde{q}_2) = -\tilde{q}_2^T K_p \tanh(\tilde{q}_2) \quad (2.149)$$

El término  $\tilde{q}_2^T \tanh(\tilde{q}_2) > 0$  para cualquier  $\tilde{q}_2 \neq 0$ . Es decir,  $\dot{V}(\tilde{q}_2) < 0$  si se cumple:

$$\dot{V}(\tilde{q}_2) = -\tilde{q}_2^T K_p \tanh(\tilde{q}_2) < 0, \quad \text{si } K_p > 0 \quad (2.150)$$

La ecuación (2.150) permite concluir que la tarea de postura es asintóticamente estable en el sentido de Lyapunov y se concluye que el error  $\tilde{q}_2 \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

### 2.6.5.2 Estabilidad para la tarea de evasión

La función de Lyapunov  $V(\tilde{\phi}_s) = \frac{1}{2} \tilde{\phi}_s^2$  para la tarea de evasión, cumple la condición de ser definida positiva ya que:

$$\begin{aligned} V(\tilde{\phi}_s) > 0, \quad \tilde{\phi}_s \neq \tilde{\phi}_{s0} \\ \tilde{\phi}_{s0} = 0 \quad \rightarrow \quad V(\tilde{\phi}_{s0}) = \frac{1}{2} \tilde{\phi}_{s0}^2 = 0 \quad (2.151) \end{aligned}$$

Derivando la función de Lyapunov:

$$\dot{V}(\tilde{\phi}_s) = \tilde{\phi}_s^T \dot{\tilde{\phi}}_s \quad (2.152)$$

Reemplazando la derivada del error  $\dot{\tilde{\phi}}_s = -\dot{\phi}_s$ , se halla que:

$$\dot{V}(\tilde{\phi}_s) = \phi_s^T [\dot{\phi}_{sd} - \dot{\phi}_s] \quad (2.153)$$

Reemplazando la ecuación (2.110), se obtiene:

$$\dot{V}(\tilde{\phi}_s) = \phi_s^T \left\{ \dot{\phi}_{sd} - J_\phi \dot{R}_F - \frac{\partial \phi_s}{\partial t} \right\} \quad (2.154)$$

Además, se sabe por la ecuación (2.22) que  $\dot{R}_F = J_R \dot{h}$ . Asumiendo además seguimiento perfecto de velocidad  $u = \dot{h}$ , se puede reemplazar la ecuación del controlador (2.143) en (2.154).

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{\phi}_s) &= \phi_s^T \left\{ \dot{\phi}_{sd} - J_\phi J_R u - \frac{\partial \phi_s}{\partial t} \right\} \\ \dot{V}(\tilde{\phi}_s) &= \phi_s^T \left\{ \dot{\phi}_{sd} - J_\phi J_R J_R^+ \left[ J_p^+ [\dot{q}_{2d} + K_p \tanh(\tilde{q}_2)] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (I - J_p^+ J_p) \left\{ J_\phi^+ \left( \dot{\phi}_{sd} + K_\phi \tanh \tilde{\phi}_s - \frac{\partial \phi_s}{\partial t} \right) \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + (I - J_\phi^+ J_\phi) J_s^+ [\dot{q}_{1d} + K_s \tanh(\tilde{q}_1)] \right\} \right] - \frac{\partial \phi_s}{\partial t} \right\} \end{aligned} \quad (2.155)$$

La ecuación (2.155) se puede simplificar considerando que  $J_R J_R^+ = I$  y que  $J_\phi J_p^+ = 0$ .

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{\phi}_s) &= \phi_s^T \left\{ \dot{\phi}_{sd} \right. \\ &\quad \left. - J_\phi (I - J_p^+ J_p) \left[ J_\phi^+ \left( \dot{\phi}_{sd} + K_\phi \tanh \tilde{\phi}_s - \frac{\partial \phi_s}{\partial t} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (I - J_\phi^+ J_\phi) J_s^+ [\dot{q}_{1d} + K_s \tanh(\tilde{q}_1)] \right] - \frac{\partial \phi_s}{\partial t} \right\} \\ \dot{V}(\tilde{\phi}_s) &= \phi_s^T \left\{ \dot{\phi}_{sd} - J_\phi J_\phi^+ \left( \dot{\phi}_{sd} + K_\phi \tanh \tilde{\phi}_s - \frac{\partial \phi_s}{\partial t} \right) \right. \\ &\quad \left. + J_\phi (I - J_\phi^+ J_\phi) J_s^+ [\dot{q}_{1d} + K_s \tanh(\tilde{q}_1)] - \frac{\partial \phi_s}{\partial t} \right\} \end{aligned} \quad (2.156)$$

Sabiendo que  $J_\phi J_\phi^+ = I$ , la ecuación (2.156) se reduce a:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{\phi}_s) &= \phi_s^T \left\{ \dot{\phi}_{sd} - \dot{\phi}_{sd} - K_\phi \tanh \tilde{\phi}_s + \frac{\partial \phi_s}{\partial t} - \frac{\partial \phi_s}{\partial t} \right\} \\ \dot{V}(\tilde{\phi}_s) &= -\phi_s^T K_\phi \tanh \tilde{\phi}_s \end{aligned} \quad (2.157)$$

Se verifica que  $\phi_s^T \tanh \tilde{\phi}_s > 0$ . Es decir,  $\dot{V}(\tilde{\phi}_s) < 0$  sólo si cumple la siguiente condición:

$$\dot{V}(\tilde{\phi}_s) = -\phi_s^T K_\phi \tanh \tilde{\phi}_s < 0, \quad \text{si } K_\phi > 0 \quad (2.158)$$

Se demuestra por lo tanto la estabilidad asintótica para la tarea de evasión concluyéndose que  $\tilde{\phi}_s \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

### 2.6.5.3 Estabilidad para la tarea de forma

La siguiente función de Lyapunov  $V(\tilde{q}_1) = \frac{1}{2}\tilde{q}_1^2$  es definida positiva ya que:

$$\begin{aligned} V(\tilde{q}_1) &> 0, & \tilde{q}_1 &\neq \tilde{q}_{1_0} \\ \tilde{q}_{1_0} = 0 &\rightarrow V(\tilde{q}_{1_0}) = \frac{1}{2}\tilde{q}_{1_0}^2 = 0 \end{aligned} \quad (2.159)$$

Derivando la ecuación la función de Lyapunov se determina:

$$\dot{V}(\tilde{q}_1) = \tilde{q}_1^T [\dot{q}_{1d} - \dot{q}_1] \quad (2.160)$$

Reemplazando  $\dot{q}_1 = J_s J_R \dot{h}$  se tiene:

$$\dot{V}(\tilde{q}_1) = \tilde{q}_1^T [\dot{q}_{1d} - J_s J_R \dot{h}] \quad (2.161)$$

Asumiendo seguimiento perfecto de velocidad  $u = \dot{h}$ , se reemplaza el controlador (2.143) en la ecuación (2.161).

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{q}_1) = \tilde{q}_1^T &\left\{ \dot{q}_{1d} \right. \\ &- J_s J_R J_R^+ \left[ J_p^+ [\dot{q}_{2d} + K_p \tanh(\tilde{q}_2)] \right. \\ &+ (I - J_p^+ J_p) \left\{ J_\phi^+ \left( \dot{\phi}_{sd} + K_\phi \tanh \tilde{\phi}_s - \frac{\partial \phi_s}{\partial t} \right) \right. \\ &\left. \left. \left. + (I - J_\phi^+ J_\phi) J_s^+ [\dot{q}_{1d} + K_s \tanh(\tilde{q}_1)] \right\} \right\} \end{aligned} \quad (2.162)$$

Considerando que  $J_R J_R^+ = I$  y que  $J_s J_p^+ = 0$  (tareas no conflictivas), la ecuación se reduce a:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{q}_1) = \tilde{q}_1^T &\left\{ \dot{q}_{1d} \right. \\ &- J_s (I - J_p^+ J_p) \left( J_\phi^+ \left( \dot{\phi}_{sd} + K_\phi \tanh \tilde{\phi}_s - \frac{\partial \phi_s}{\partial t} \right) \right. \\ &\left. \left. + (I - J_\phi^+ J_\phi) J_s^+ [\dot{q}_{1d} + K_s \tanh(\tilde{q}_1)] \right) \right\} \end{aligned} \quad (2.163)$$

Además,  $J_s (I - J_p^+ J_p) = J_s$ .

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{q}_1) = \tilde{q}_1^T &\left\{ \dot{q}_{1d} - J_s J_\phi^+ \left[ \dot{\phi}_{sd} + K_\phi \tanh \tilde{\phi}_s - \frac{\partial \phi_s}{\partial t} \right] \right. \\ &\left. - J_s (I - J_\phi^+ J_\phi) J_s^+ [\dot{q}_{1d} + K_s \tanh(\tilde{q}_1)] \right\} \end{aligned} \quad (2.164)$$

Las tareas al no ser conflictivas permiten definir que  $J_s J_\phi^+ = 0$ , por lo que  $J_s (I - J_\phi^+ J_\phi) = J_s$ .



$$\dot{V}(\tilde{q}_1) = \tilde{q}_1^T \{ \dot{q}_{1d} - J_s J_s^+ [\dot{q}_{1d} + K_s \tanh(\tilde{q}_1)] \} \quad (2.165)$$

Reemplazando  $J_s J_s^+ = I$ , se obtiene la ecuación (2.166).

$$\dot{V}(\tilde{q}_1) = -\tilde{q}_1^T K_s \tanh(\tilde{q}_1) \quad (2.166)$$

De esta ecuación  $\tilde{q}_1^T \tanh(\tilde{q}_1) > 0$  y  $\dot{V}(\tilde{q}_1) < 0$  si se cumple:

$$\dot{V}(\tilde{q}_1) = -\tilde{q}_1^T K_s \tanh(\tilde{q}_1) < 0, \quad \text{si } K_s > 0 \quad (2.167)$$

A partir de la ecuación (2.124), se demuestra la estabilidad asintótica del controlador para la tarea de forma y se verifica que el error  $\tilde{q}_1 \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

### 2.6.6 CONTROLADOR CON PRIORIDAD EVASIÓN

Para el diseño de este controlador con prioridad de evasión se utiliza el esquema de control basado en espacio nulo para tres tareas definido en la ecuación (1.36). Considerando como primera tarea al control a la evasión de obstáculos (principal) y como tareas secundarias al control de la posición del centroide y el mantenimiento de la forma, con esa prioridad, este controlador se define en la ecuación (2.168).

$$v_d = v_{d\phi} + N_\phi (v_{dp} + N_p v_{ds}) \quad (2.168)$$

Donde:

- $v_{ds}$ ,  $v_{dp}$  y  $v_{d\phi}$  son las leyes de control para las tareas de forma, postura y evasión descritas en las secciones 2.5.2.1, 2.5.2.2 y 2.6.1 respectivamente.
- $N_\phi = (I - J_\phi^+ J_\phi)$  es la matriz de proyección de espacio nulo del jacobiano  $J_\phi$ .
- $N_p = (I - J_p^+ J_p)$  es la matriz de proyección de espacio nulo del jacobiano  $J_p$ .

Reemplazando las ecuaciones (2.59), (2.63) y (2.112) en la ecuación (2.168), se obtiene la ley de control de la ecuación (2.169).

$$\begin{aligned} v_d = J_\phi^+ & \left[ \dot{\phi}_{sd} + K_\phi \tanh \tilde{\phi}_s - \frac{\partial \phi_s}{\partial t} \right] \\ & + (I - J_\phi^+ J_\phi) \{ J_p^+ [\dot{q}_{2d} + K_p \tanh(\tilde{q}_2)] \\ & + (I - J_p^+ J_p) J_s^+ [\dot{q}_{1d} + K_s \tanh(\tilde{q}_1)] \} \end{aligned} \quad (2.169)$$

A partir de la ecuación (2.22) donde  $\dot{h} = J_R^+ v_d$  y asegurando seguimiento perfecto de velocidad  $u = \dot{h}$ , se obtiene la ley de control  $u$  en (2.170).

$$\begin{aligned}
u = J_R^+ \left\{ J_\phi^+ \left[ \dot{\phi}_{sd} + K_\phi \tanh \tilde{\phi}_s - \frac{\partial \phi_s}{\partial t} \right] \right. \\
+ (I - J_\phi^+ J_\phi) \{ J_p^+ [\dot{q}_{2d} + K_p \tanh(\tilde{q}_2)] \\
\left. + (I - J_p^+ J_p) J_s^+ [\dot{q}_{1d} + K_s \tanh(\tilde{q}_1)] \right\} \quad (2.170)
\end{aligned}$$

## 2.6.7 ANÁLISIS DE ESTABILIDAD DEL CONTROLADOR CON PRIORIDAD EVASIÓN

De igual manera que en los anteriores análisis realizados, se verifica estabilidad en el sentido de Lyapunov para cada tarea.

### 2.6.7.1 Estabilidad para la tarea de evasión

La función de Lyapunov  $V(\tilde{\phi}_s) = \frac{1}{2} \tilde{\phi}_s^2$  para la tarea de evasión, cumple la condición de ser definida positiva ya que:

$$\begin{aligned}
V(\tilde{\phi}_s) > 0, \quad \tilde{\phi}_s \neq \tilde{\phi}_{s0} \\
\tilde{\phi}_{s0} = 0 \quad \rightarrow \quad V(\tilde{\phi}_{s0}) = \frac{1}{2} \tilde{\phi}_{s0}^2 = 0 \quad (2.171)
\end{aligned}$$

Derivando en el tiempo la función de Lyapunov:

$$\dot{V}(\tilde{\phi}_s) = \tilde{\phi}_s^T \dot{\tilde{\phi}}_s \quad (2.172)$$

Reemplazando la derivada del error  $\dot{\tilde{\phi}}_s = -\dot{\phi}_s$ , se halla que:

$$\dot{V}(\tilde{\phi}_s) = \phi_s^T [\dot{\phi}_{sd} - \dot{\phi}_s] \quad (2.173)$$

Reemplazando la ecuación (2.110), se obtiene:

$$\dot{V}(\tilde{\phi}_s) = \phi_s^T \left\{ \dot{\phi}_{sd} - J_\phi \dot{R}_F - \frac{\partial \phi_s}{\partial t} \right\} \quad (2.174)$$

Además, se sabe por la ecuación (2.22) que  $\dot{R} = J_R \dot{h}$ . Asumiendo además seguimiento perfecto de velocidad  $u = \dot{h}$ , se puede reemplazar la ecuación (2.170) en (2.174).

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\tilde{\phi}_s) &= \phi_s^T \left\{ \dot{\phi}_{sd} - J_\phi J_R u - \frac{\partial \phi_s}{\partial t} \right\} \\
\dot{V}(\tilde{\phi}_s) &= \phi_s^T \left\{ \dot{\phi}_{sd} - J_\phi J_R J_R^+ \left[ J_\phi^+ \left( \dot{\phi}_{sd} + K_\phi \tanh \tilde{\phi}_s - \frac{\partial \phi_s}{\partial t} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (I - J_\phi^+ J_\phi) (J_p^+ [\dot{q}_{2d} + K_p \tanh(\tilde{q}_2)] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (I - J_p^+ J_p) J_s^+ [\dot{q}_{1d} + K_s \tanh(\tilde{q}_1)] \right] \right\} - \frac{\partial \phi_s}{\partial t} \quad (2.175)
\end{aligned}$$

La ecuación (2.155) se puede simplificar considerando que  $J_R J_R^+ = I$  y que  $J_\phi J_\phi^+ = I$ .

$$\begin{aligned}\dot{V}(\tilde{\phi}_s) = \phi_s^T & \left\{ \dot{\phi}_{s_d} - \left( \dot{\phi}_{s_d} + K_\phi \tanh \tilde{\phi}_s - \frac{\partial \phi_s}{\partial t} \right) \right. \\ & - J_\phi (I - J_\phi^+ J_\phi) (J_p^+ [\dot{q}_{2_d} + K_p \tanh(\tilde{q}_2)] \\ & \left. + (I - J_p^+ J_p) J_s^+ [\dot{q}_{1_d} + K_s \tanh(\tilde{q}_1)] \right\} - \frac{\partial \phi_s}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.176)$$

Sabiendo que  $J_\phi (I - J_\phi^+ J_\phi) = 0$ , la ecuación (2.176) se reduce a:

$$\begin{aligned}\dot{V}(\tilde{\phi}_s) = \phi_s^T & \left\{ \dot{\phi}_{s_d} - \dot{\phi}_{s_d} - K_\phi \tanh \tilde{\phi}_s + \frac{\partial \phi_s}{\partial t} - \frac{\partial \phi_s}{\partial t} \right\} \\ \dot{V}(\tilde{\phi}_s) = & -\phi_s^T K_\phi \tanh \tilde{\phi}_s \end{aligned} \quad (2.177)$$

Se verifica que  $\phi^T \tanh \tilde{\phi}_s > 0$ . Es decir,  $V(\tilde{\phi}) < 0$  sólo si cumple la siguiente condición:

$$\dot{V}(\tilde{\phi}_s) = -\phi_s^T K_\phi \tanh \tilde{\phi}_s \leq 0, \quad \text{si } K_\phi > 0 \quad (2.178)$$

Se demuestra por lo tanto estabilidad asintótica para la tarea de evasión y se concluye que  $\tilde{\phi}_s \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

### 2.6.7.2 Estabilidad para la tarea de postura

La función de Lyapunov  $V(\tilde{q}_2) = \frac{1}{2} \tilde{q}_2^2$  para la tarea de postura es definida positiva ya que:

$$\begin{aligned}V(\tilde{q}_2) & > 0, \quad \tilde{q}_2 \neq \tilde{q}_{2_0} \\ \tilde{q}_{2_0} = 0 & \rightarrow V(\tilde{q}_{2_0}) = \frac{1}{2} \tilde{q}_{2_0}^2 = 0 \end{aligned} \quad (2.179)$$

Derivando en función del tiempo la función de Lyapunov, se tiene:

$$\dot{V}(\tilde{q}_2) = \tilde{q}_2^T [\dot{q}_{2_d} - \dot{q}_2] \quad (2.180)$$

Como se determinó anteriormente,  $\dot{q}_2 = J_p J_R \dot{h}$ . Reemplazando esta igualdad en (2.180):

$$\dot{V}(\tilde{q}_2) = \tilde{q}_2^T [\dot{q}_{2_d} - J_p J_R \dot{h}] \quad (2.181)$$

Asumiendo seguimiento perfecto de velocidad, de tal manera que  $u = \dot{h}$ , se puede reemplazar la ecuación del controlador (2.170) en (2.181).

$$\begin{aligned}\dot{V}(\tilde{q}_2) = \tilde{q}_2^T & \left\{ \dot{q}_{2_d} \right. \\ & - J_p J_R J_R^+ \left[ J_\phi^+ \left( \dot{\phi}_{s_d} + K_\phi \tanh \tilde{\phi}_s - \frac{\partial \phi_s}{\partial t} \right) \right. \\ & \left. + (I - J_\phi^+ J_\phi) (J_p^+ [\dot{q}_{2_d} + K_p \tanh(\tilde{q}_2)] \right. \\ & \left. \left. + (I - J_p^+ J_p) J_s^+ [\dot{q}_{1_d} + K_s \tanh(\tilde{q}_1)] \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.182)$$

Considerando que  $J_R J_R^+ = I$  y que  $J_p J_\phi^+ = 0$  (tareas no conflictivas), se tiene:

$$\begin{aligned}\dot{V}(\tilde{q}_2) = & \tilde{q}_2^T \{ \dot{q}_{2d} \\ & - J_p(I - J_\phi^+ J_\phi)(J_p^+ [\dot{q}_{2d} + K_p \tanh(\tilde{q}_2)] \\ & + (I - J_p^+ J_p) J_s^+ [\dot{q}_{1d} + K_s \tanh(\tilde{q}_1)]) \} \end{aligned} \quad (2.183)$$

Conociendo que  $J_p(I - J_\phi^+ J_\phi) = J_p$  y además  $J_p J_p^+ = I$ .

$$\dot{V}(\tilde{q}_2) = \tilde{q}_2^T \{ \dot{q}_{2d} - [\dot{q}_{2d} + K_p \tanh(\tilde{q}_2)] - J_p(I - J_p^+ J_p) J_s^+ [\dot{q}_{1d} + K_s \tanh(\tilde{q}_1)] \} \quad (2.184)$$

Además,  $J_p(I - J_p^+ J_p) = 0$ . Reemplazando en (2.184) se obtiene:

$$\dot{V}(\tilde{q}_2) = -\tilde{q}_2^T K_p \tanh(\tilde{q}_2) \quad (2.185)$$

El término  $\tilde{q}_2^T \tanh(\tilde{q}_2) > 0$  para cualquier  $\tilde{q}_2 \neq 0$ . Es decir,  $\dot{V}(\tilde{q}_2) < 0$  si se cumple:

$$\dot{V}(\tilde{q}_2) = -\tilde{q}_2^T K_p \tanh(\tilde{q}_2) < 0, \quad \text{si } K_p > 0 \quad (2.186)$$

La ecuación (2.186) permite concluir que la tarea de postura es asintóticamente estable en el sentido de Lyapunov y se concluye que el error  $\tilde{q}_2 \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

### 2.6.7.3 Estabilidad para la tarea de forma

La función de Lyapunov  $V(\tilde{q}_1) = \frac{1}{2} \tilde{q}_1^2$  cumple la condición de ser definida positiva ya que:

$$\begin{aligned} V(\tilde{q}_1) &> 0, \quad \tilde{q}_1 \neq \tilde{q}_{10} \\ \tilde{q}_{10} = 0 &\rightarrow V(\tilde{q}_{10}) = \frac{1}{2} \tilde{q}_{10}^2 = 0 \end{aligned} \quad (2.187)$$

Derivando la ecuación la función de Lyapunov se determina:

$$\dot{V}(\tilde{q}_1) = \tilde{q}_1^T [\dot{q}_{1d} - \dot{q}_1] \quad (2.188)$$

Reemplazando  $\dot{q}_1 = J_s J_R \dot{h}$  se tiene:

$$\dot{V}(\tilde{q}_1) = \tilde{q}_1^T [\dot{q}_{1d} - J_s J_R \dot{h}] \quad (2.189)$$

Y asumiendo seguimiento perfecto de velocidad  $u = \dot{h}$ , se reemplaza la ecuación del controlador (2.170) en la ecuación (2.189).

$$\begin{aligned}\dot{V}(\tilde{q}_1) = & \tilde{q}_1^T \left\{ \dot{q}_{1d} \right. \\ & - J_s J_R J_R^+ \left[ J_\phi^+ \left( \dot{\phi}_{sd} + K_\phi \tanh \tilde{\phi}_s - \frac{\partial \phi_s}{\partial t} \right) \right. \\ & + (I - J_\phi^+ J_\phi)(J_p^+ [\dot{q}_{2d} + K_p \tanh(\tilde{q}_2)] \\ & \left. \left. + (I - J_p^+ J_p) J_s^+ [\dot{q}_{1d} + K_s \tanh(\tilde{q}_1)] \right) \right\} \end{aligned} \quad (2.190)$$

Se tiene en cuenta que  $J_R J_R^+ = I$  y que  $J_s J_\phi^+ = 0$  porque las tareas no son conflictivas y la ecuación (2.190) se reduce a:

$$\begin{aligned}\dot{V}(\tilde{q}_1) = & \tilde{q}_1^T \{ \dot{q}_{1d} \\ & - J_s(I - J_\phi^+ J_\phi)(J_p^+ [\dot{q}_{2d} + K_p \tanh(\tilde{q}_2)] \\ & + (I - J_p^+ J_p)J_s^+ [\dot{q}_{1d} + K_s \tanh(\tilde{q}_1)] \} \end{aligned} \quad (2.191)$$

Se tiene además que  $J_s(I - J_\phi^+ J_\phi) = J_s$ . Con esto la ecuación (2.191) se simplifica de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\dot{V}(\tilde{q}_1) = & \tilde{q}_1^T \{ \dot{q}_{1d} - J_s J_p^+ [\dot{q}_{2d} + K_p \tanh(\tilde{q}_2)] \\ & - J_s(I - J_p^+ J_p)J_s^+ [\dot{q}_{1d} + K_s \tanh(\tilde{q}_1)] \} \end{aligned} \quad (2.192)$$

$J_s J_p^+ = 0$  al no existir conflicto entre tareas y  $J_s(I - J_p^+ J_p) = J_s$ , por lo tanto, la ecuación (2.192) se reduce a:

$$\dot{V}(\tilde{q}_1) = \tilde{q}_1^T \{ \dot{q}_{1d} - J_s J_s^+ [\dot{q}_{1d} + K_s \tanh(\tilde{q}_1)] \} \quad (2.193)$$

Se sabe que  $J_s J_s^+ = I$ , entonces:

$$\dot{V}(\tilde{q}_1) = -\tilde{q}_1^T K_s \tanh(\tilde{q}_1) \quad (2.194)$$

La ecuación (2.194) es negativa según el signo de  $K_s$ , como se muestra en (2.195), ya que  $\tilde{q}_1^T \tanh(\tilde{q}_1) > 0$ .

$$\dot{V}(\tilde{q}_1) = -\tilde{q}_1^T K_s \tanh(\tilde{q}_1) < 0, \quad \text{si } K_s > 0 \quad (2.195)$$

Se concluye a partir de la ecuación (2.195) que el sistema es asintóticamente estable en el sentido de Lyapunov considerando la tarea de forma y se concluye además que el error  $\tilde{q}_1 \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

## 2.7 DISEÑO DE LA INTERFAZ GRÁFICA DE USUARIO

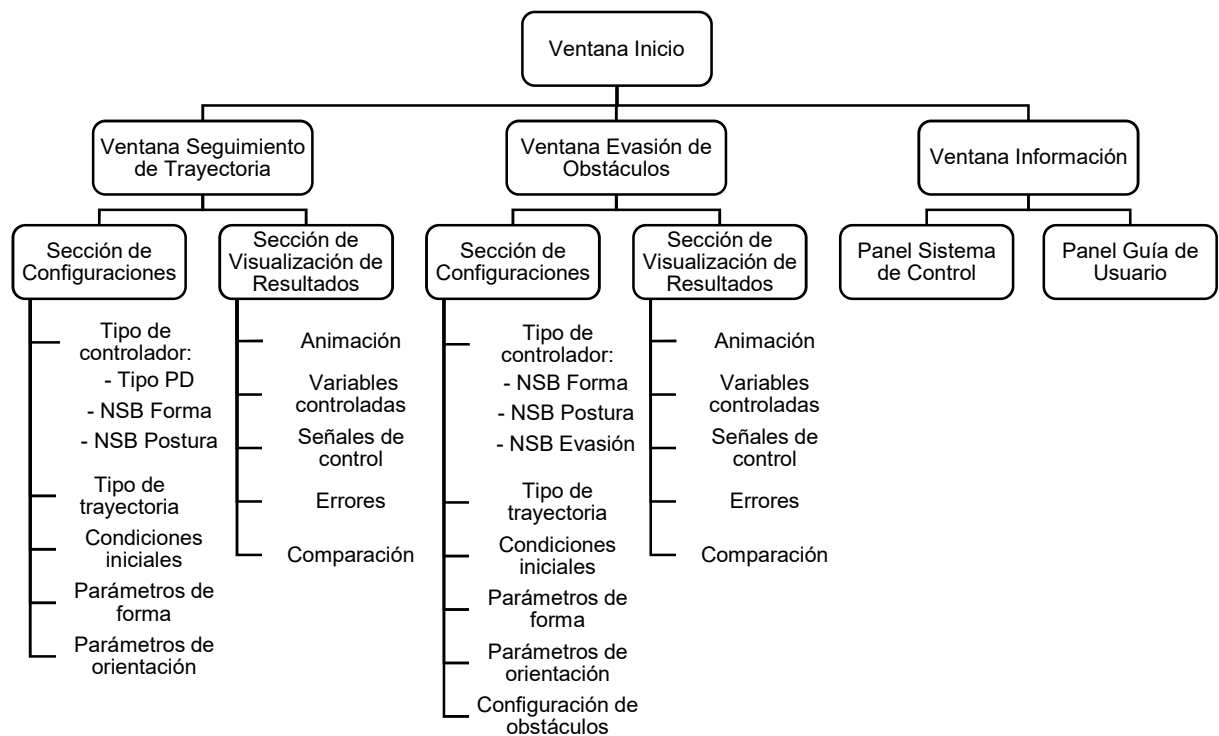
En esta sección se describe el desarrollo y funcionamiento de una interfaz gráfica de usuario en el software MATLAB versión R2019b, la cual permite observar el funcionamiento de los controladores diseñados. Esta interfaz le permite al usuario visualizar, comprender y estudiar de una forma interactiva el control de la formación de manipuladores aéreos analizada en el presente trabajo de titulación.

Dentro de la interfaz se pueden modificar ciertas variables como condiciones iniciales, tipo de trayectoria, parámetros de la formación y posición de obstáculos. Los resultados que se pueden observar son señales de errores, acciones de control, comparación de desempeño entre controladores y una animación del movimiento de la formación de robots a través de las trayectorias elegidas.

Se utilizó la plataforma Simulink de MATLAB como herramienta de simulación para los sistemas de control desarrollados, mientras que para integrar los resultados obtenidos a una interfaz gráfica se empleó la herramienta *App Designer*.

*App Designer* es un entorno diseñado para la creación de aplicaciones gráficas profesionales dentro del paquete de aplicaciones que ofrece MATLAB, cuenta con una sección para integrar los componentes visuales (*Design View*) y un editor integrado para programar el comportamiento de los componentes (*Code View*).

Para la interfaz de usuario se desarrollaron cuatro ventanas principales: inicio, seguimiento de trayectoria, evasión de obstáculos e información como se muestra en el esquema de la Figura 2.9.



**Figura 2.9.** Diagrama de bloques de la interfaz gráfica de usuario.

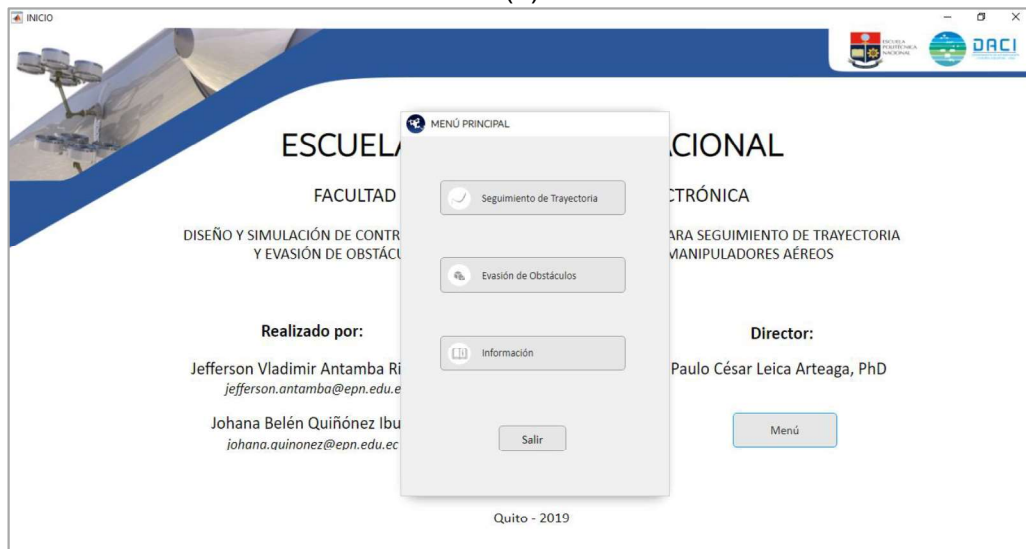
### 2.7.1 VENTANA DE INICIO

En la ventana de inicio de la Figura 2.10(a) se muestra una presentación de la interfaz. Esta pantalla además cuenta con un botón “Menú” con el cuál se despliega una ventana en la que se muestra tres opciones como en la Figura 2.10(b):

- **Seguimiento de trayectoria:** Permite abrir la ventana en la que se observa los resultados para los controladores de seguimiento de trayectoria.
- **Evasión de obstáculos:** Permite abrir la ventana en la que se observa los resultados para los controladores de evasión de obstáculos.
- **Información:** Permite abrir una ventana dónde se muestra una descripción del modelo de la planta, los controladores diseñados y una explicación sobre el manejo de la interfaz.



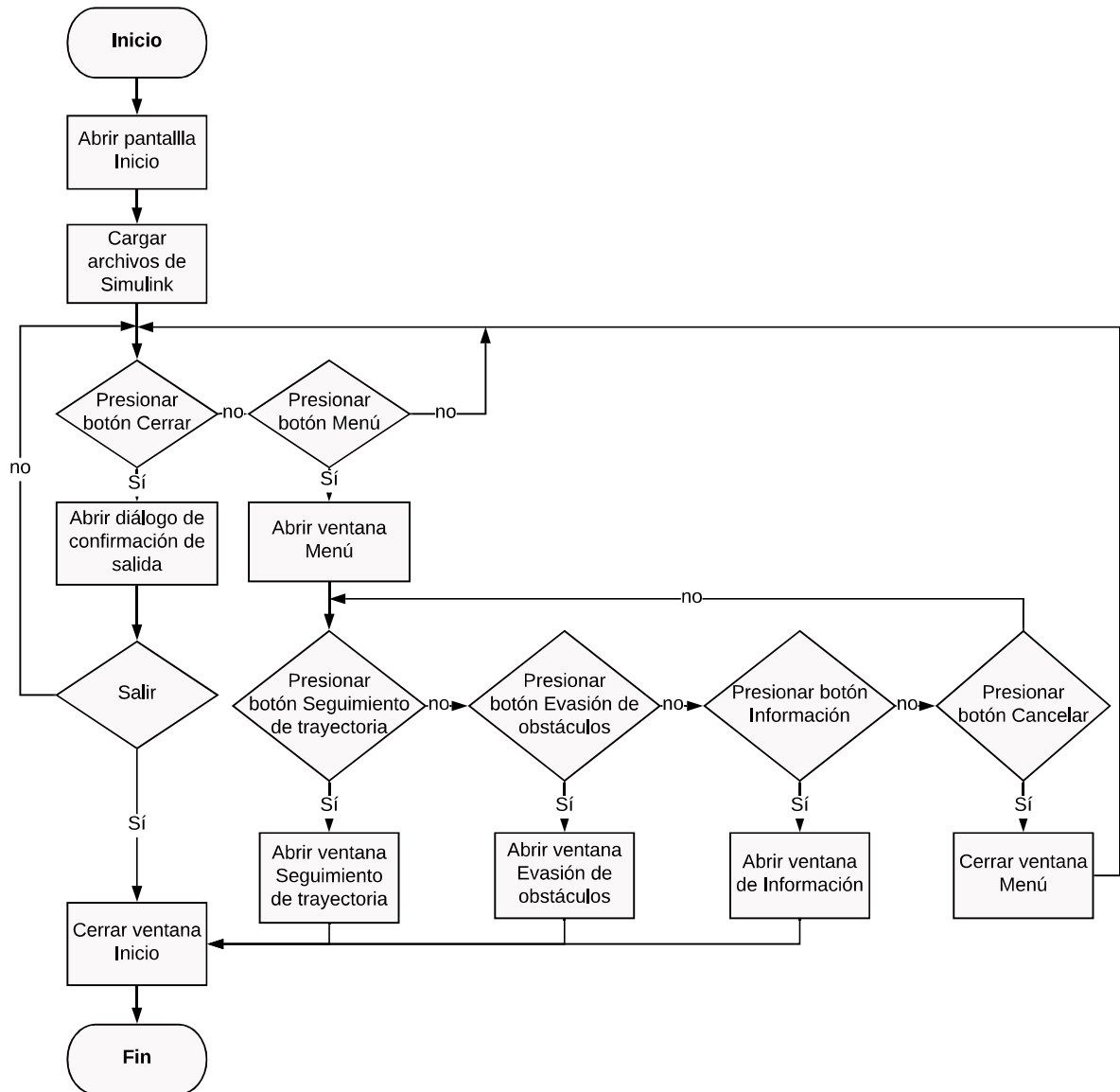
(a)



(b)

**Figura 2.10.** Ventana Inicio de la interfaz. (a) Pantalla de presentación (b) Ventana Menú

En la Figura 2.11 se muestra el diagrama de flujo que representa la lógica del funcionamiento de esta ventana donde se observa la interacción con el resto de las ventanas de la interfaz.

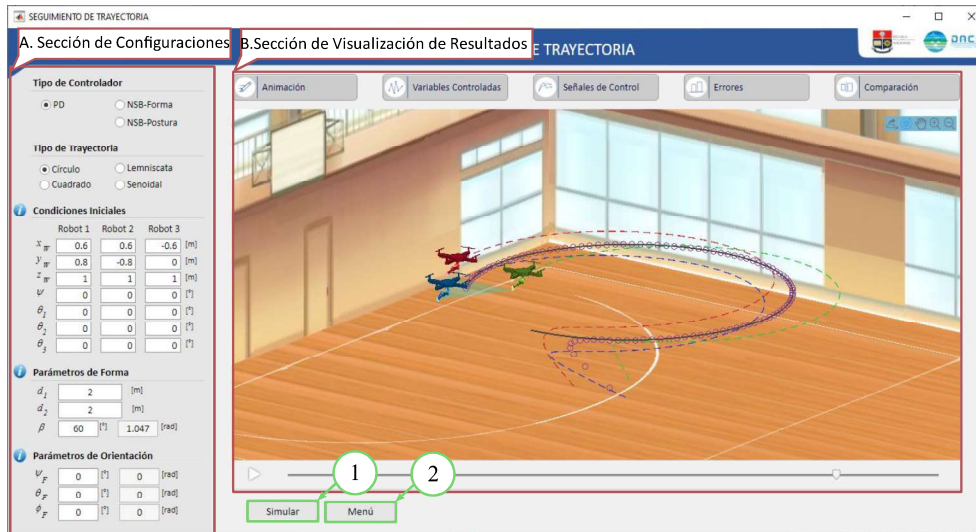


**Figura 2.11.** Diagrama de flujo de la ventana Inicio

## 2.7.2 VENTANA DE SEGUIMIENTO DE TRAYECTORIA

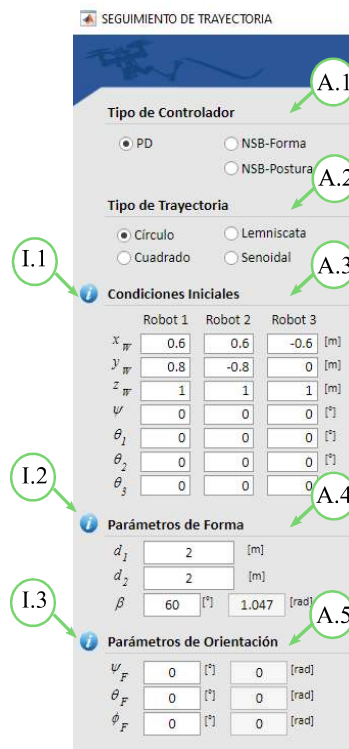
En esta ventana se cuenta con dos secciones: configuraciones y visualización de resultados como se muestra en la Figura 2.12. Además, la ventana presenta dos botones: “Simular” y “Menú” los cuales se describen más adelante y se ubican en la parte inferior de la pantalla.





**Figura 2.12.** Ventana de Seguimiento de trayectoria

**A - Sección configuraciones:** dentro de esta sección se presentan cinco paneles de configuración de parámetros como se muestra en la Figura 2.13.

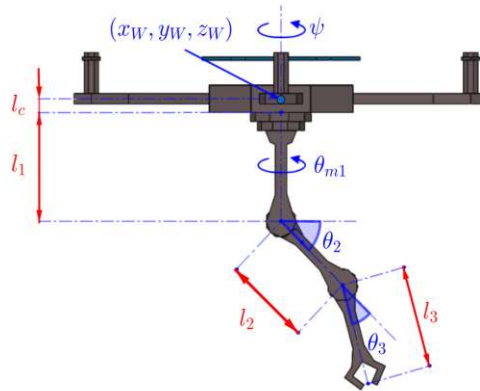


**Figura 2.13.** Sección configuraciones.

- A.1 - Tipo de controlador: se puede elegir entre un controlador tipo PD (PD), un controlador basado en espacios nulos con prioridad forma (NSB-Forma) y un controlador basado en espacio nulo con prioridad postura (NSB-Postura).
- A.2 - Tipo de trayectoria: se puede elegir entre una trayectoria circular, lemniscata, cuadrada y senoidal.

- A.3 - Condiciones iniciales: en este panel se configura las posiciones lineales y angulares de cada robot.
- A.4 - Parámetros de forma: en este panel se configura los valores de referencia para los parámetros de forma.
- A.5 - Parámetros de orientación: en este panel se configura los valores de referencia para los parámetros de orientación.
- Botones de Información (I1, I2 y I3): En la parte izquierda de los paneles condiciones iniciales, parámetros de forma y parámetros de orientación se cuenta con botones de información los cuales muestran las imágenes de la Figura 2.14 donde se describe detalladamente a qué corresponde cada parámetro.

Condiciones Iniciales del Manipulador Aéreo



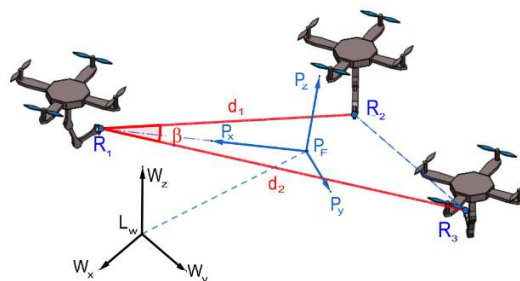
$\theta_1, \theta_2, \theta_3$  : Ángulo de rotación de la articulación 1, 2 y 3

$x_w, y_w, z_w$  : Posición del cuadricóptero

$\psi$  : Ángulo de rotación del cuadricóptero alrededor del eje z

a)

Parámetros de Forma de la Formación

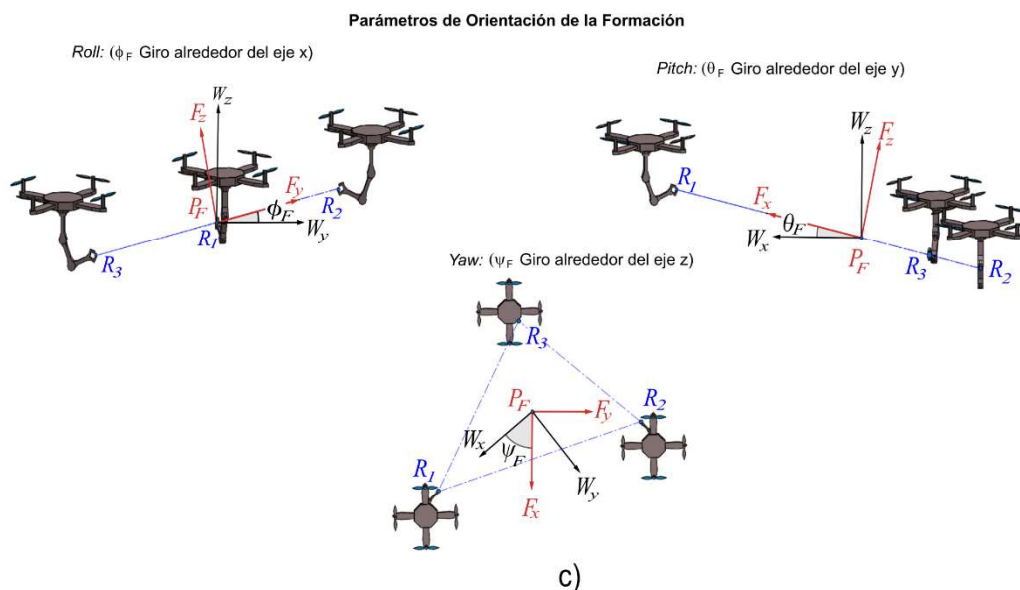


$d_1$ : distancia entre los robots R1 y R2

$d_2$ : distancia entre los robots R1 y R3

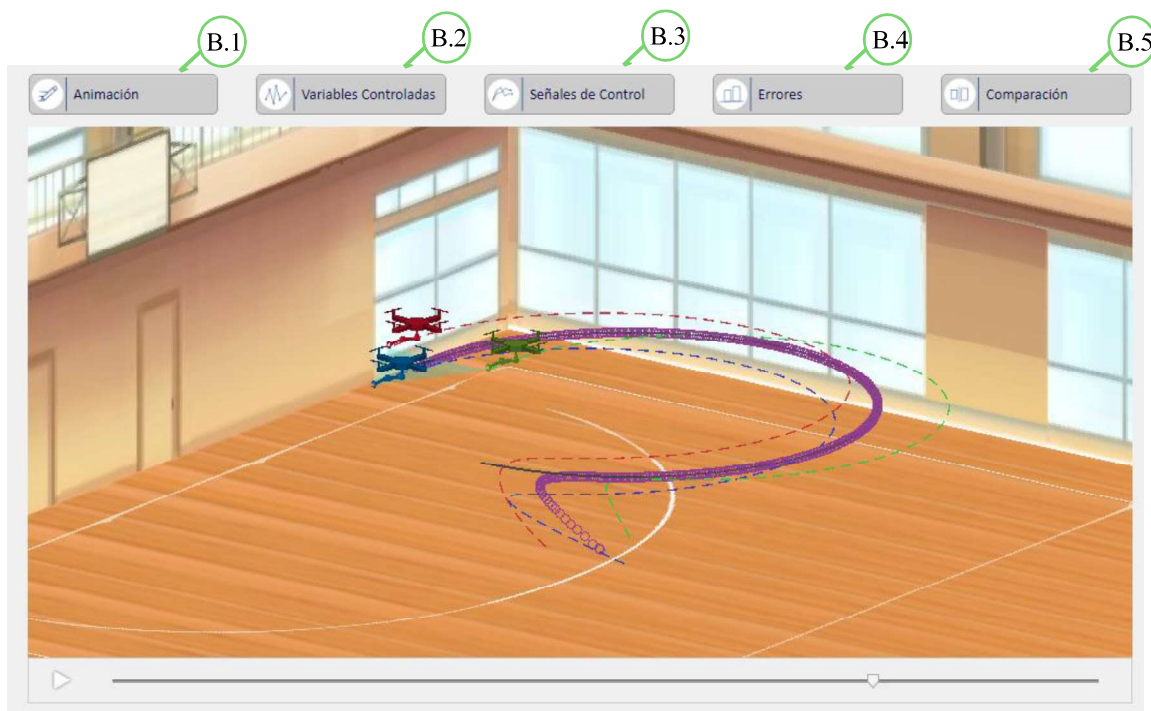
$\beta$ : ángulo entre  $d_1$  y  $d_2$

b)

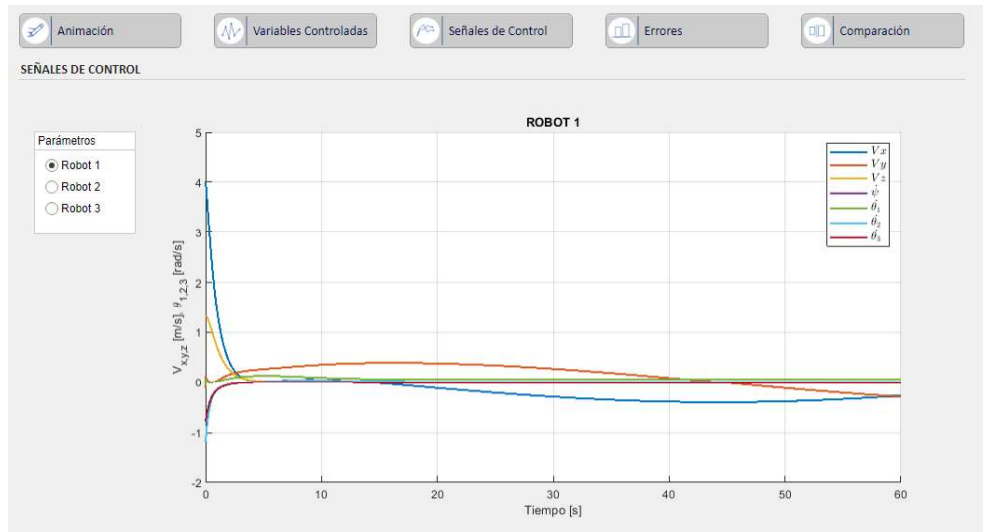


**Figura 2.14.** Imágenes de información a) Informaciones de condiciones iniciales b) información de parámetros de forma c) información de parámetros de orientación

**B - Sección de visualización de resultados:** En esta sección se cuenta con cinco botones como se observa en la Figura 2.15 con los cuales se despliegan ventanas de visualización de resultados como se detalla a continuación.



(a)



(b)

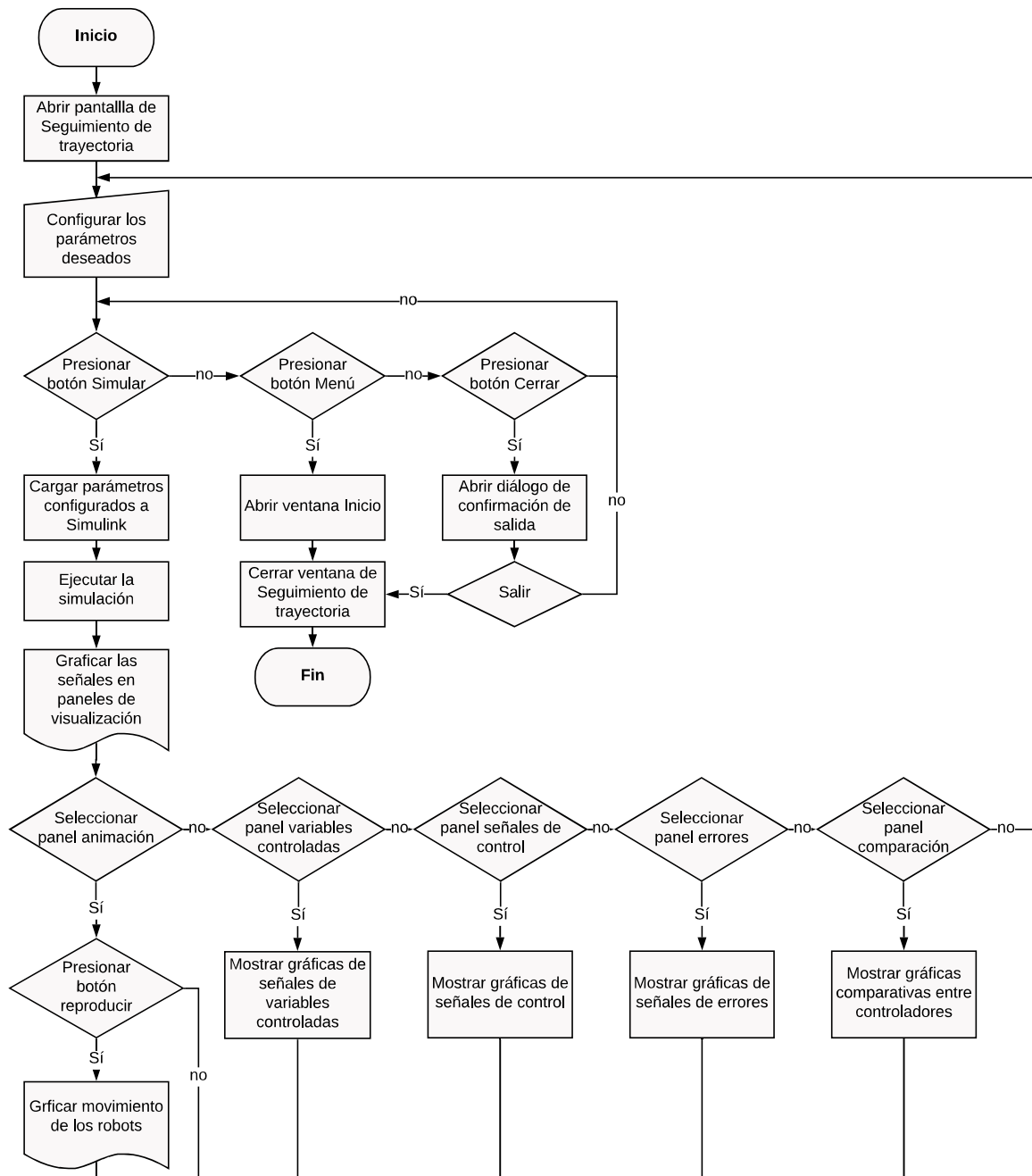
**Figura 2.15.** Sección visualización de resultados. (a) Panel de animación (b) Panel de señales de control.

- B.1 - Animación: en este panel se muestra una animación 3D del movimiento de la formación de robots a través de las trayectorias seleccionadas. Dentro del panel se cuenta con un botón de reproducir el cual inicia la animación, un botón de detener para pausar el movimiento y una barra de desplazamiento para ubicar a los robots en un determinado punto de la trayectoria.
- B.2 - Variables Controladas: en este panel se muestra las señales correspondientes a los valores de referencia y los valores de salida de los parámetros de forma, orientación y postura controlados.
- B.3 - Señales de Control: en este panel se muestran las señales de control de velocidades para cada uno de los robots.
- B.4 - Errores: en este panel se muestran las señales de errores de los parámetros de forma, orientación y postura controlados.
- B.5 - Comparación: en este panel se muestra una comparación de las variables controladas de los dos controladores, una tabla y un gráfico de barras con los índices de desempeño ISE.

**Botón 1 – Simular:** con este botón se inicia la simulación de los archivos de Simulink y se cargan los resultados en los respectivos paneles.

**Botón 2 – Menú:** este botón permite cerrar la ventana de seguimiento de trayectoria y regresar a la pantalla de inicio, después de aparecer una ventana de confirmación de salida.

En la Figura 2.16 se muestra el diagrama de flujo correspondiente esta ventana.



**Figura 2.16.** Diagrama de flujo de la ventana de seguimiento de trayectoria.

### 2.7.3 VENTANA DE EVASIÓN DE OBSTÁCULOS

El diseño de esta ventana es análogo a la ventana de seguimiento de trayectoria como se observa en la Figura 2.17, pero añadiendo componentes adicionales correspondientes a los parámetros de posición y radio de cada obstáculo y ventanas de visualización del

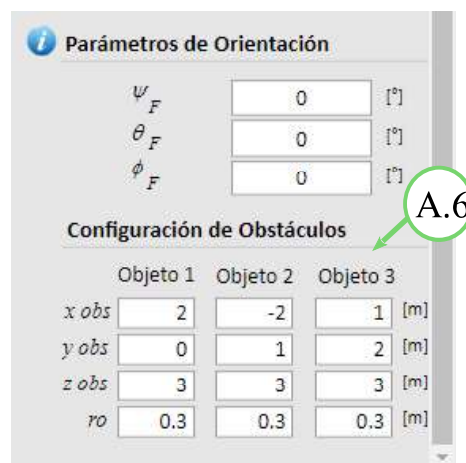
campo potencial y las distancias entre obstáculos y robots. Por lo tanto, en esta sección se describirán únicamente estos componentes adicionales.



**Figura 2.17.** Ventana de evasión de obstáculos

**A - Sección configuraciones:** además de los cinco paneles de configuración de la ventana anterior debajo del panel de configuración de parámetros de orientación se incluye:

- A.6 - Panel de configuración de obstáculos: en este panel se ingresan las posiciones de los obstáculos y el valor del radio de cada uno como se muestra en la Figura 2.18.



**Figura 2.18.** Panel de configuración de obstáculos.

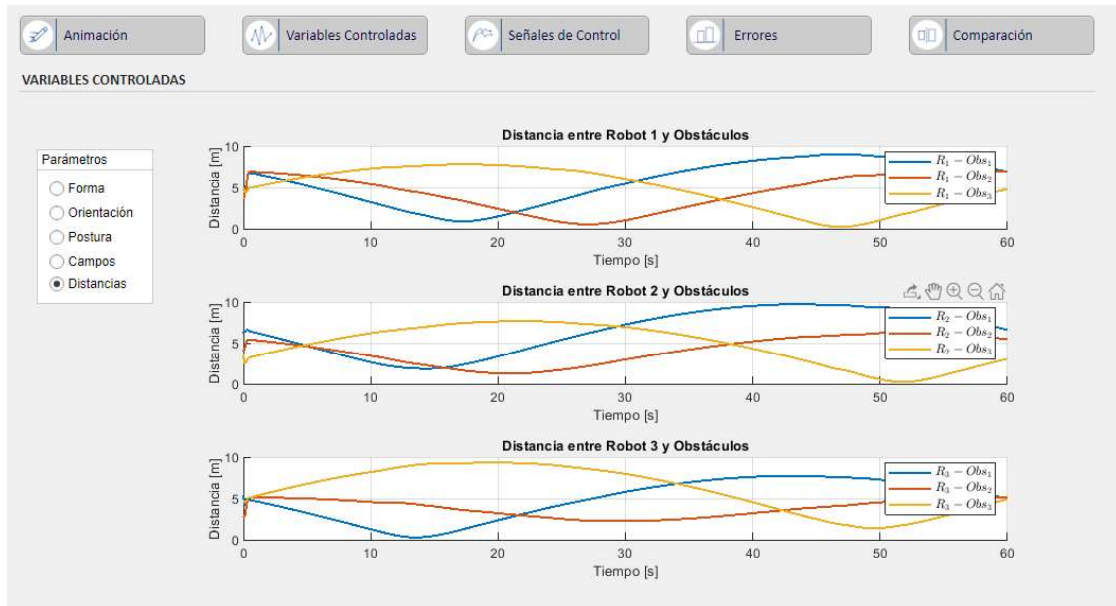
**B - Sección de visualización de resultados:** En esta sección se modifica el panel de variables controladas para mostrar adicionalmente las señales de los campos potenciales y las distancias entre los robots y los obstáculos como se observa en la Figura 2.20.

En la Figura 2.19 se muestra el diagrama de flujo correspondiente a esta ventana.



**Figura 2.19.** Diagrama de flujo de la ventana de evasión de obstáculos.





**Figura 2.20.** Panel de visualización de distancias entre robots y obstáculos

## 2.7.4 VENTANA DE INFORMACIÓN

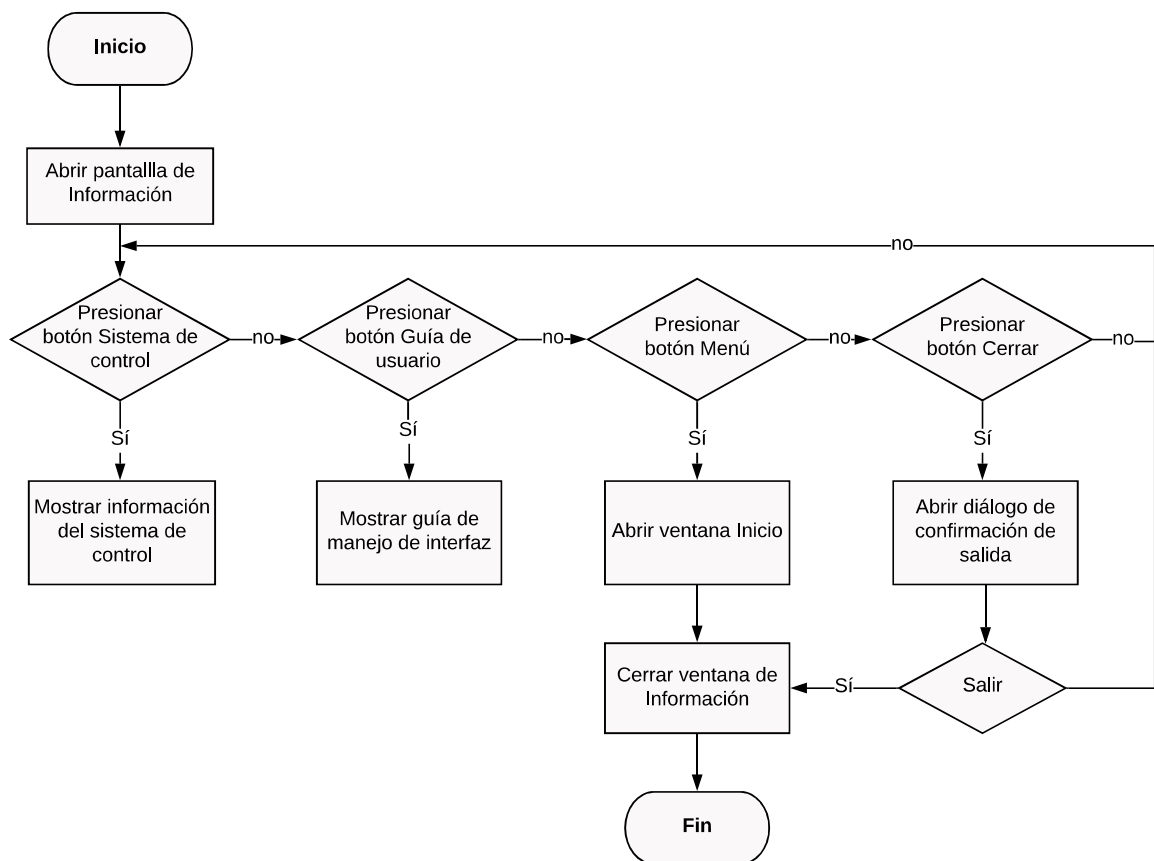
En esta ventana mostrada en la Figura 2.21 se presentan dos secciones una en la que se explica brevemente el modelo de la planta y los controladores diseñados y otra en la que se muestra una guía de usuario acerca del manejo de la interfaz.



**Figura 2.21.** Ventana de información, sección guía de usuario.

En la Figura 2.22 se muestra el diagrama de flujo correspondiente a esta ventana.





**Figura 2.22.** Diagrama de flujo de la ventana de información.

Si se desea salir de cualquiera de estas cuatro ventanas se debe utilizar el botón cerrar de la esquina superior derecha de cada una de ellas y aparecerá una ventana de confirmación de salida tal como se muestra en la Figura 2.23.



**Figura 2.23.** Ventana de confirmación de salida.

### 3 RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En esta sección se presenta los resultados más relevantes obtenidos a partir de pruebas realizadas para verificar el comportamiento del modelo del sistema y el funcionamiento de los controladores diseñados.

A continuación, se presentan tres secciones en las que se muestran los resultados de las pruebas realizadas en lazo abierto del modelo del sistema y los resultados relacionados al seguimiento de trayectoria y evasión de obstáculos.

Las pruebas realizadas son las siguientes:

- **PRUEBAS REALIZADAS AL MODELO EN LAZO ABIERTO**

- **PRUEBA 1 - Modelo del manipulador aéreo:** en esta prueba se verifica el comportamiento del modelo del manipulador aéreo en lazo abierto obtenido en la sección 2.3, cambiando el valor de cada una de las entradas y observando la respuesta de las salidas del sistema.
- **PRUEBA 2 - Modelo de la formación de robots:** mediante esta prueba se verifica el modelo cinemático de la formación de manipuladores aéreos sin controlador el cual se describió en la sección 2.4, asignando entradas específicas para cada uno de los robots y observando el comportamiento del sistema en conjunto.

- **RESULTADOS PARA SEGUIMIENTO DE TRAYECTORIA**

- **PRUEBA 3 - Seguimiento de trayectoria circular para controladores tipo PID y basado en espacio nulo.**
- **PRUEBA 4 - Seguimiento de trayectoria cuadrada para controladores tipo PID y basado en espacio nulo.**
- **PRUEBA 5 - Seguimiento de trayectoria lemniscata para controladores tipo PID y basado en espacio nulo.**

En las pruebas 3, 4 y 5 se presentan los resultados para seguimiento de una trayectoria circular, cuadrada y lemniscata respectivamente. En todos los casos se emplea el controlador tipo PID, controlador NSB con prioridad de forma y controlador NSB con prioridad de postura

Para el análisis de los resultados de los controladores se emplea el índice de desempeño ISE.

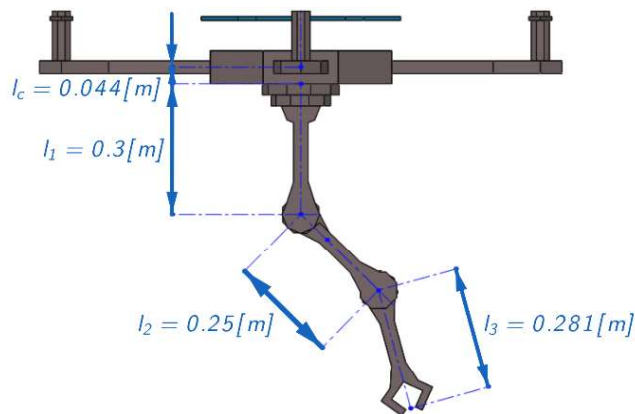
## • RESULTADOS PARA EVASIÓN DE OBSTÁCULOS

- **PRUEBA 6 - Evasión de obstáculos estáticos utilizando controladores basados en espacio nulo con distinta prioridad para una trayectoria circular:** En esta prueba se utilizan controladores basados en espacio nulo con distintas tareas prioritarias para seguimiento de una trayectoria circular con presencia de obstáculos estáticos en el ambiente. Para analizar los resultados obtenidos en esta prueba se utiliza el índice de desempeño ISE, con el cual se identifica las variables que tienen un mejor desempeño en función de la prioridad del controlador.

### 3.1. PRUEBAS REALIZADAS AL MODELO EN LAZO ABIERTO

#### 3.1.1 PRUEBA 1: MODELO DEL MANIPULADOR AÉREO

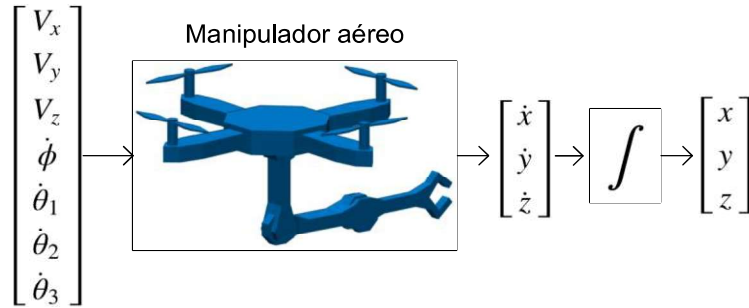
Las pruebas realizadas consideran un brazo robótico de tres grados de libertad ubicado sobre el centro de masa del cuadricóptero, con dimensiones:  $l_1 = 0.3 [m]$ ,  $l_2 = 0.25 [m]$ ,  $l_3 = 0.281 [m]$  y  $l_c = 0.044 [m]$ . Estas dimensiones se observan en la Figura 3.1.



**Figura 3.1.** Dimensiones del manipulador aéreo

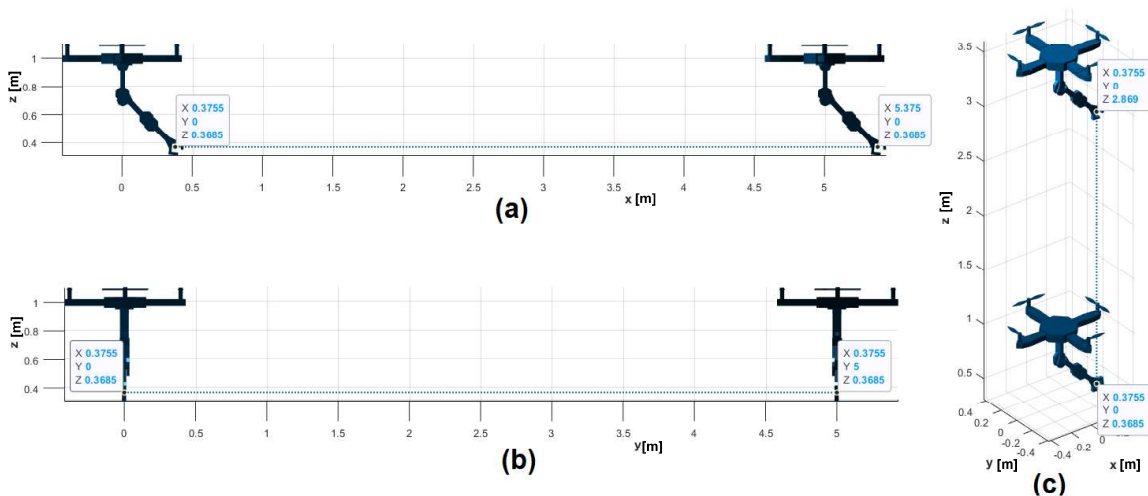
Para verificar el modelo del manipulador aéreo se utiliza la ecuación (2.20) obtenida en la sección 2.3. Se varía cada variable de entrada (manteniendo el resto de las variables en cero) mostrada en la Figura 3.2 y se analiza la salida o posición del efector final.

Las condiciones iniciales que se consideran son:  $x_B = 0 [m]$ ,  $y_B = 0 [m]$ ,  $z_B = 1 [m]$  y  $\psi_0 = 0$ ; como posiciones y ángulo de orientación iniciales del cuadricóptero. Los ángulos iniciales del brazo robótico son:  $\theta_1 = 0 [rad]$ ,  $\theta_2 = \frac{\pi}{4} [rad]$  y  $\theta_3 = 0 [rad]$ . Para estas condiciones iniciales, el efector final se ubica en la posición inicial:  $x = 0.3755 [m]$ ,  $y = 0 [m]$  y  $z = 0.3685 [m]$ , según la ecuación (2.12).



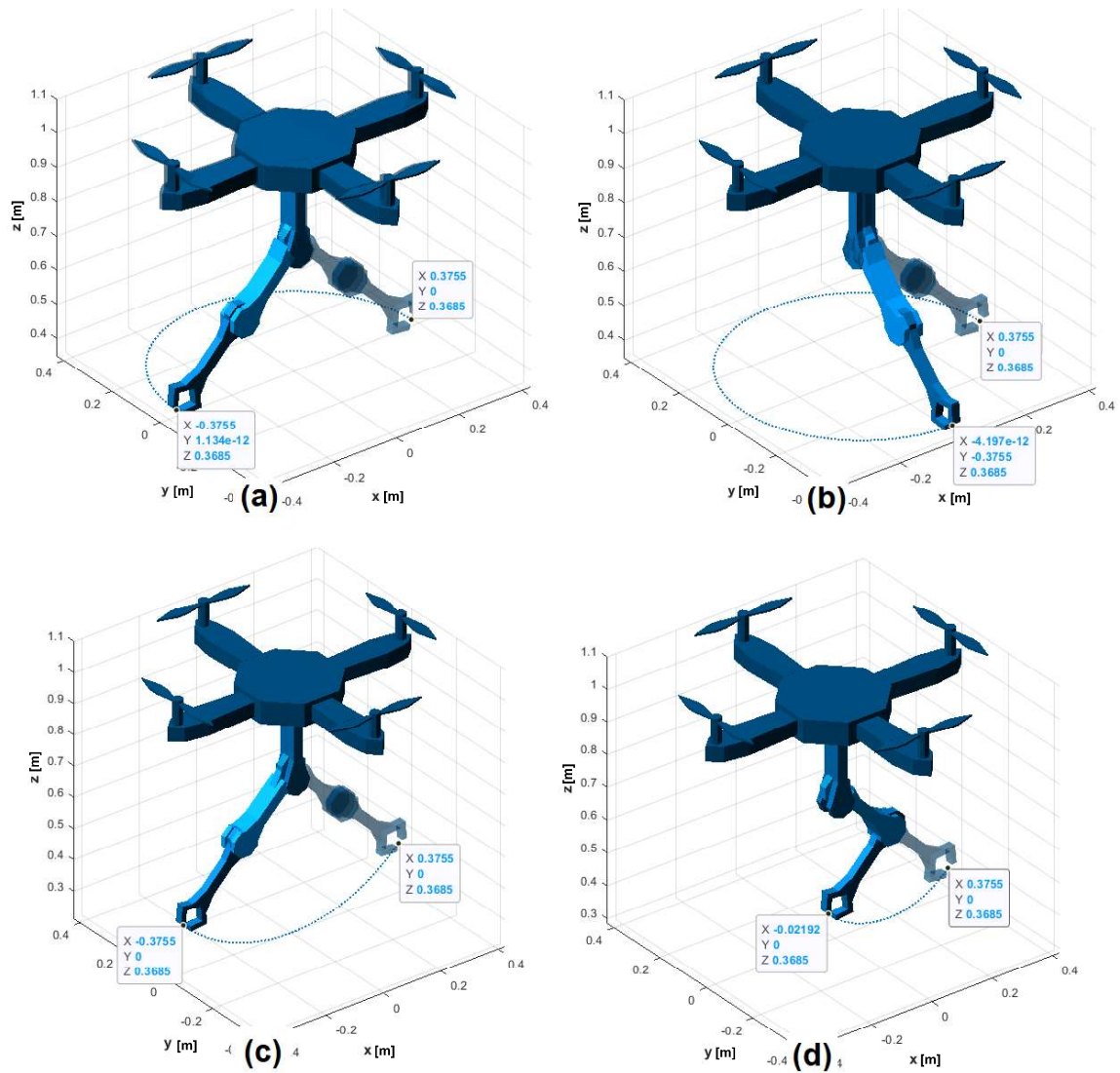
**Figura 3.2.** Entradas y salidas del modelo cinemático del manipulador aéreo.

En primer lugar, se fija  $V_x = 1 \left[ \frac{m}{s} \right]$  y el resto de entradas en cero durante  $t=5 \text{ [seg]}$  y se observa que la posición final del efector, sólo varía en el eje x ( $x = 0.3755 \text{ [m]} + 5 \text{ [m]} = 5.3755 \text{ [m]}$ ). Se realiza lo mismo para  $V_y = 1 \left[ \frac{m}{s} \right]$ ,  $V_z = 0.5 \left[ \frac{m}{s} \right]$  y para las velocidades angulares asignadas de la siguiente manera:  $\dot{\psi} = \frac{\pi}{5} \left[ \frac{rad}{s} \right]$ ,  $\dot{\theta}_1 = \frac{3\pi}{10} \left[ \frac{rad}{s} \right]$ ,  $\dot{\theta}_2 = \frac{\pi}{10} \left[ \frac{rad}{s} \right]$  y  $\dot{\theta}_3 = \frac{\pi}{10} \left[ \frac{rad}{s} \right]$ . En la Figura 3.3 se muestra los resultados para las acciones de control  $V_x$  (a),  $V_y$  (b) y  $V_z$  (c). Se puede observar que la orientación del robot no cambia ya que su desplazamiento es lineal.



**Figura 3.3.** Trayectoria del efector final para valores asignados de velocidades lineales.

Para las velocidades angulares:  $\dot{\psi}$ ,  $\dot{\theta}_1$ ,  $\dot{\theta}_2$  y  $\dot{\theta}_3$ , las trayectorias del efector final se muestran en la Figura 3.4 (a), Figura 3.4 (b), Figura 3.4 (c) y Figura 3.4 (d) respectivamente. Se muestran arcos de circunferencia dados por la rotación del cuadricóptero y de los eslabones del brazo robótico.



**Figura 3.4.** Trayectoria del efector final para valores asignados de velocidades angulares.

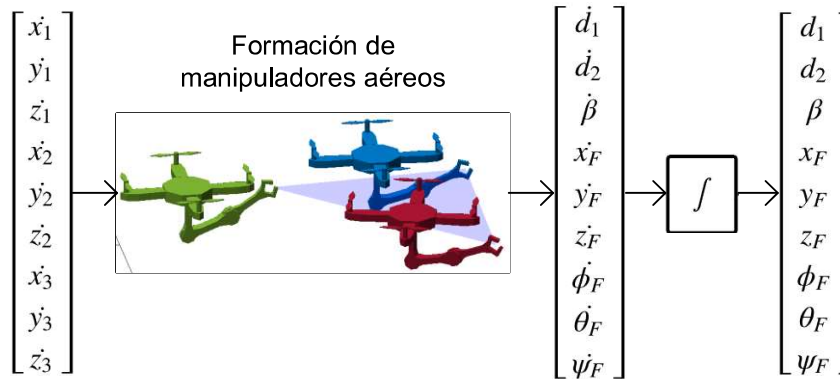
En la Tabla 3.1 se resumen los resultados obtenidos.

**Tabla 3.1.** Resultados obtenidos de las pruebas en lazo abierto del modelo del manipulador aéreo.

| Velocidades de entrada           |                                  |                                  |                                     |   |   |   | Posición final del efector |                 |                 |
|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|-------------------------------------|---|---|---|----------------------------|-----------------|-----------------|
| $V_x \left[ \frac{m}{s} \right]$ | $V_y \left[ \frac{m}{s} \right]$ | $V_z \left[ \frac{m}{s} \right]$ | $\psi \left[ \frac{rad}{s} \right]$ | $\dot{\theta}_1 \left[ \frac{rad}{s} \right]$ | $\dot{\theta}_2 \left[ \frac{rad}{s} \right]$ | $\dot{\theta}_3 \left[ \frac{rad}{s} \right]$ | $x \text{ [m]}$            | $y \text{ [m]}$ | $z \text{ [m]}$ |
| 1                                | 0                                | 0                                | 0                                   | 0   | 0   | 0   | 5.3755                     | 0               | 0.3685          |
| 0                                | 1                                | 0                                | 0                                   | 0   | 0   | 0   | 0.3755                     | 5               | 0.3685          |
| 0                                | 0                                | 0.5                              | 0                                   | 0   | 0   | 0   | 0.3755                     | 0               | 2.8685          |
| 0                                | 0                                | 0                                | $\pi/5$                             | 0   | 0   | 0   | -0.3755                    | 0               | 0.3685          |
| 0                                | 0                                | 0                                | 0                                   | $3\pi/10$                                     | 0   | 0   | 0                          | 0.3755          | 0.3685          |
| 0                                | 0                                | 0                                | 0                                   | 0   | $\pi/10$                                      | 0   | -0.3755                    | 0               | 0.3685          |
| 0                                | 0                                | 0                                | 0                                   | 0   | 0   | $\pi/10$                                      | -0.02192                   | 0               | 0.3685          |

### 3.1.2 PRUEBA 2: MODELO DE LA FORMACIÓN DE ROBOTS

Las pruebas realizadas al modelo de la formación se realizan asignando de manera individual, un valor de velocidad en  $x$ ,  $y$ ,  $z$  para cada uno de los efectores finales de cada robot y verificando que las variables de la formación correspondan al valor final esperado según el tiempo de simulación y las ecuaciones determinadas en la sección 2.4. En la Figura 3.5 se muestra el esquema de la formación con las variables involucradas.



**Figura 3.5.** Esquema del modelo de formación de tres manipuladores aéreos.

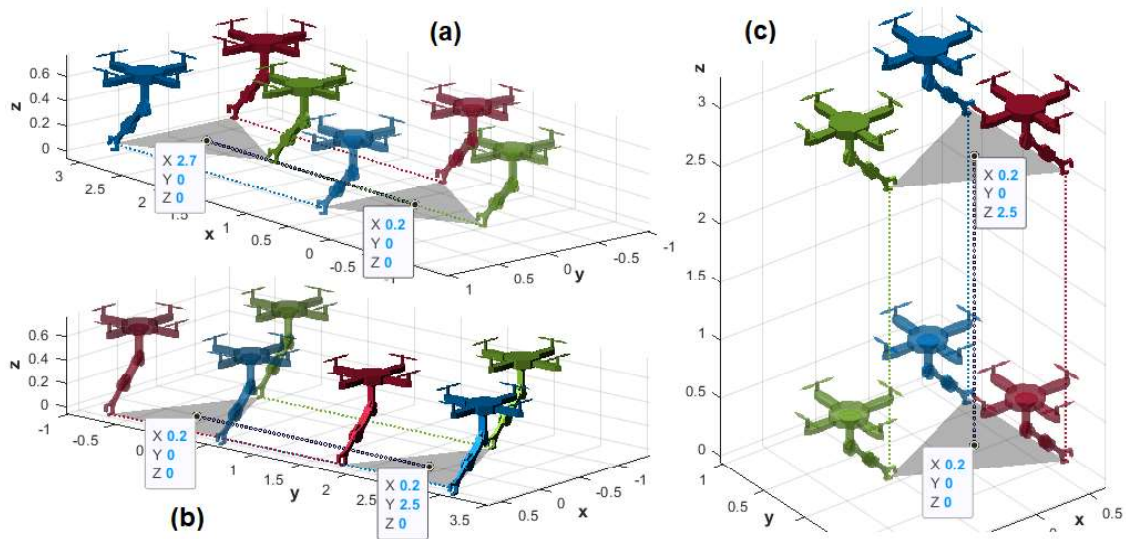
Las condiciones iniciales consideradas son:  $x_1 = 0.6 [m]$ ,  $y_1 = 0.6 [m]$ ,  $z_1 = 0 [m]$ ,  $x_2 = 0.6 [m]$ ,  $y_2 = -0.6 [m]$ ,  $z_2 = 0 [m]$ ,  $x_3 = -0.6 [m]$ ,  $y_3 = 0 [m]$ ,  $z_3 = 0 [m]$ . Para estas condiciones, los parámetros de formación iniciales son:  $d_1 = 1.2 [m]$ ,  $d_2 = 1.342 [m]$ ,  $\beta = 1.107 [rad]$ ,  $x_F = 0.2 [m]$ ,  $y_F = 0 [m]$ ,  $z_F = 0 [m]$ ,  $\phi_F = 0 [rad]$ ,  $\theta_F = 0 [rad]$  y  $\psi_F = 0.9828 [rad]$ , de acuerdo a las ecuaciones (2.24), (2.27), (2.31), (2.32) y (2.33).

El tiempo de simulación considerado es  $t = 5 [seg]$  y de forma similar a lo que se realizó en la prueba anterior se asigna distintos valores de velocidades de entrada para obtener ciertos resultados en los parámetros de salida de acuerdo con las ecuaciones correspondientes que describen el comportamiento de la formación de robots. Los resultados obtenidos para distintos valores de velocidad se muestran en la Tabla 3.2.

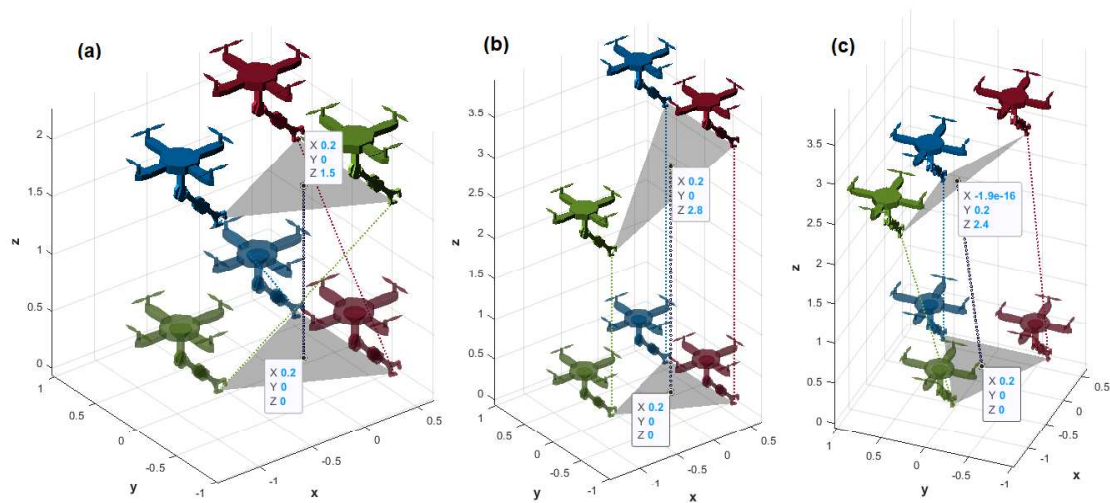
**Tabla 3.2.** Resultados de las pruebas en lazo abierto del modelo de la formación

| Velocidades de entrada |                      |                      |                      |                      |                      |                      |                      |                      | Parámetros de salida |              |                  |              |              |              |                   |                     |                   |
|------------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|--------------|------------------|--------------|--------------|--------------|-------------------|---------------------|-------------------|
| $\dot{x}_1$<br>[m/s]   | $\dot{y}_1$<br>[m/s] | $\dot{z}_1$<br>[m/s] | $\dot{x}_2$<br>[m/s] | $\dot{y}_2$<br>[m/s] | $\dot{z}_2$<br>[m/s] | $\dot{x}_3$<br>[m/s] | $\dot{y}_3$<br>[m/s] | $\dot{z}_3$<br>[m/s] | $d_1$<br>[m]         | $d_2$<br>[m] | $\beta$<br>[rad] | $x_F$<br>[m] | $y_F$<br>[m] | $z_F$<br>[m] | $\phi_F$<br>[rad] | $\theta_F$<br>[rad] | $\psi_F$<br>[rad] |
| 0.5                    | 0                    | 0                    | 0.5                  | 0                    | 0                    | 0.5                  | 0                    | 0                    | 1.2                  | 1.342        | 1.107            | 2.7          | 0            | 0            | 0                 | 0                   | 0.983             |
| 0                      | 0.5                  | 0                    | 0                    | 0.5                  | 0                    | 0                    | 0.5                  | 0                    | 1.2                  | 1.342        | 1.107            | 0.2          | 2.5          | 0            | 0                 | 0                   | 0.983             |
| 0                      | 0                    | 0.5                  | 0                    | 0                    | 0.5                  | 0                    | 0                    | 0.5                  | 1.2                  | 1.342        | 1.107            | 0.2          | 0            | 2.5          | 0                 | 0                   | 0.983             |
| -0.24                  | -0.12                | 0.3                  | 0                    | 0.24                 | 0.3                  | 0.24                 | -0.12                | 0.3                  | 1.324                | 1.324        | 0.927            | 0.2          | 0            | 1.5          | 0                 | 0                   | $\pi$             |
| 0                      | 0                    | 0.64                 | 0                    | 0                    | 0.64                 | 0                    | 0                    | 0.4                  | 1.2                  | 1.8          | 1.231            | 0.2          | 0            | 2.8          | 0                 | $\pi/4$             | 0.983             |
| 0                      | 0                    | 0.4                  | -0.12                | 0                    | 0.64                 | 0                    | 0.12                 | 0.4                  | 1.8                  | 1.2          | 1.231            | 0            | 0.2          | 2.4          | $\pi/4$           | -0.588              | 0.588             |

En la Figura 3.6 y Figura 3.7 se ilustran los resultados obtenidos de las pruebas realizadas a partir de los datos mostrados en Tabla 3.2.



**Figura 3.6.** Trayectorias de la formación para velocidades en eje x (a), eje y (b) y eje z (c).



**Figura 3.7.** Trayectorias de la formación para valores de velocidad. Se observa un cambio en el ángulo de guiñada  $\psi_F$  (a), balance  $\phi_F$  (b) y cabeceo  $\theta_F$  (c).

### 3.2. RESULTADOS DEL SEGUIMIENTO DE TRAYECTORIA

A continuación, se detallan las constantes de calibración de los controladores que se utilizan para las pruebas 3, 4 y 5.

La matriz de constantes del controlador tipo PID de la ecuación (2.47) se muestra en (3.1).

$$K_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Para los controladores basados en espacio nulo con prioridad de forma de la ecuación (2.69) y con prioridad de postura de la ecuación (2.90), se utilizan las matrices que se muestran en la ecuación (3.2) y la ecuación (3.3).

$$K_s = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$$K_p = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

### 3.1.3 PRUEBA 3: SEGUIMIENTO DE TRAYECTORIA CIRCULAR PARA CONTROLADORES TIPO PID Y BASADO EN ESPACIO NULO

En esta prueba se presenta una comparación de los resultados del seguimiento de trayectoria entre el controlador tipo PD, controlador basado en espacio nulo con prioridad de forma y controlador basado en espacio nulo con prioridad de postura para una trayectoria circular.

En los siguientes gráficos de resultados, se utiliza para el controlador basado en espacio nulo la nomenclatura NSB-FP para el controlador con prioridad de forma y NSB-PF para el controlador con prioridad de postura.

La trayectoria deseada se define en (3.4).

$$\begin{aligned} x_{Fd} &= 5 \cos\left(\frac{\pi}{30}t\right) [m] \\ y_{Fd} &= 5 \sin\left(\frac{\pi}{30}t\right) [m] \\ z_{Fd} &= 3 [m] \end{aligned} \quad (3.4)$$

Empleando un tiempo de simulación de  $t = 60$  [seg].

Para realizar la comparación entre ambos controladores, se escogen las mismas condiciones iniciales, que se muestran en la Tabla 3.3.



**Tabla 3.3.** Condiciones iniciales para trayectoria circular.

|                       |                      | ROBOT 1 | ROBOT 2 | ROBOT 3 |
|-----------------------|----------------------|---------|---------|---------|
| <b>CUADRICÓPTERO</b>  | $x_{B_0}$ [m]        | 0.6     | 0.6     | -0.6    |
|                       | $y_{B_0}$ [m]        | 0.8     | -0.8    | 0       |
|                       | $z_{B_0}$ [m]        | 1       | 1       | 1       |
|                       | $\psi_0$ [rad]       | 0       | 0       | 0       |
| <b>BRAZO ROBÓTICO</b> | $\theta_{1_0}$ [rad] | 0       | 0       | 0       |
|                       | $\theta_{2_0}$ [rad] | 0       | 0       | 0       |
|                       | $\theta_{3_0}$ [rad] | 0       | 0       | 0       |

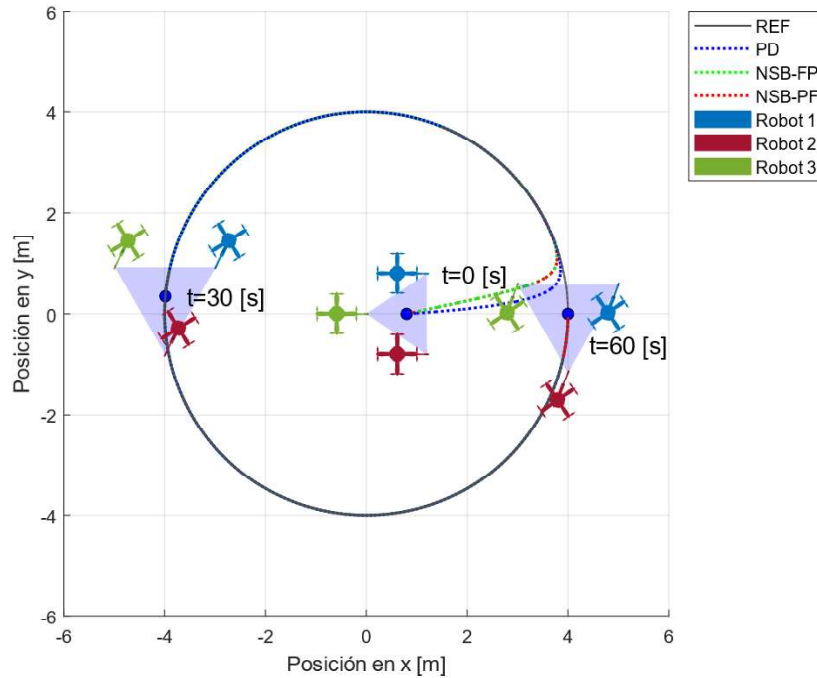
Los parámetros de forma y orientación de la formación deseados se definen a la Tabla 3.4.

**Tabla 3.4.** Parámetros deseados de forma y orientación para seguimiento de trayectoria circular.

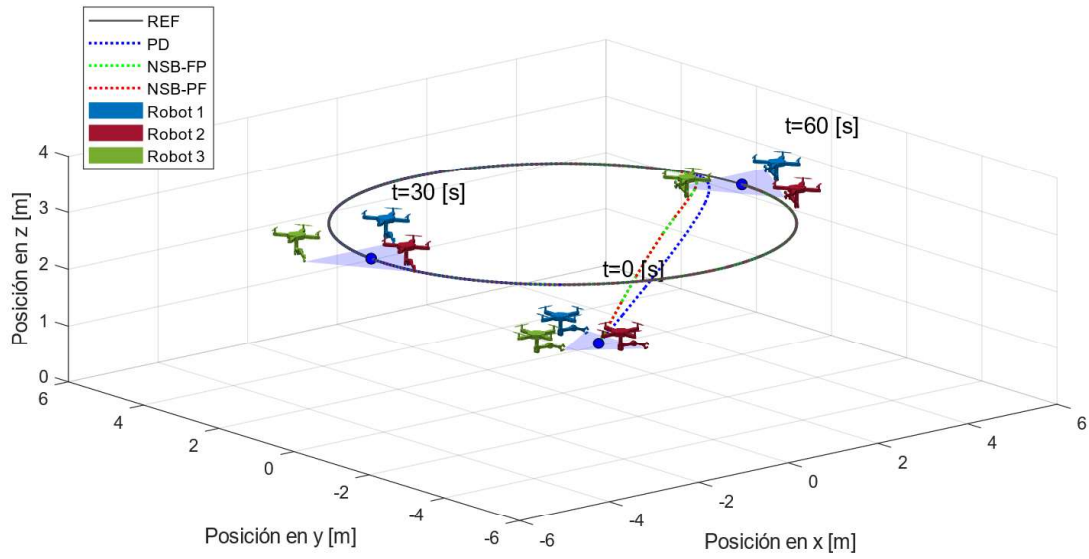
| $d_{1d}$ [m] | $d_{2d}$ [m] | $\beta_d$ [rad] | $\phi_{Fd}$ [rad] | $\theta_{Fd}$ [rad] | $\psi_{Fd}$ [rad] |
|--------------|--------------|-----------------|-------------------|---------------------|-------------------|
| 2            | 2            | $\frac{\pi}{3}$ | 0                 | 0                   | $\frac{\pi}{6}$   |

### 3.1.3.1 Comparación de la trayectoria del centroide de la formación.

En la Figura 3.8 y Figura 3.9 se muestra la respuesta de los tres controladores propuestos para la trayectoria circular, donde se visualiza la trayectoria del centroide de la formación.



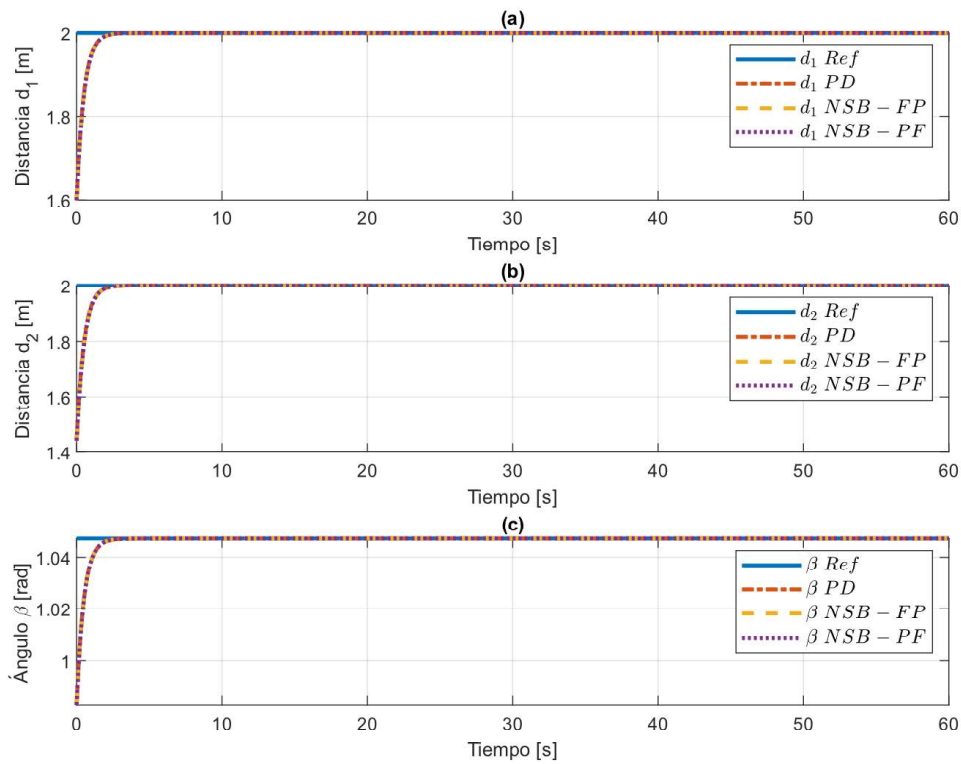
**Figura 3.8.** Trayectorias del centroide de la formación para cada controlador diseñado, desde vista superior para trayectoria circular.



**Figura 3.9.** Trayectorias del centroide de la formación para cada controlador diseñado con vista isométrica para trayectoria circular.

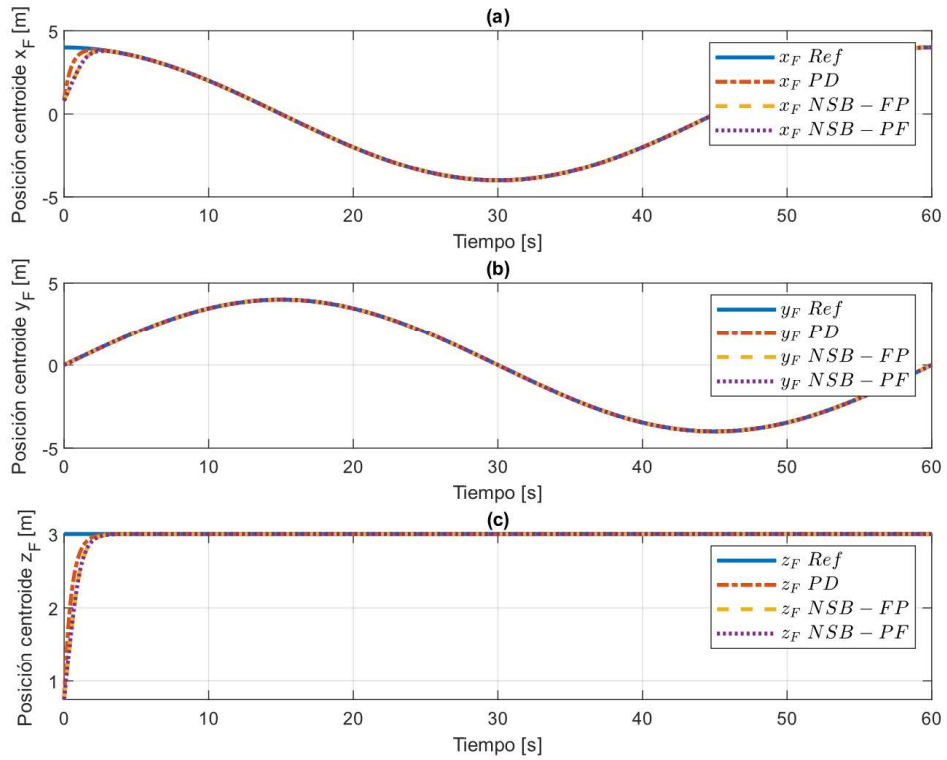
### 3.1.3.2 Salidas.

En la Figura 3.10 se muestran las variables de forma para cada controlador.



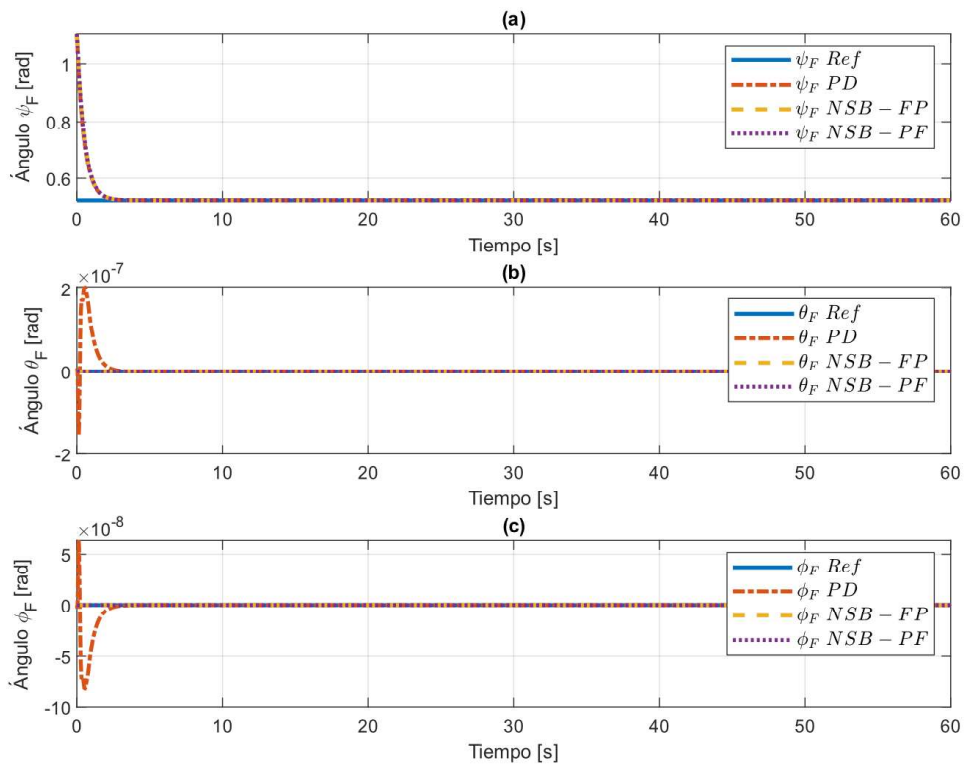
**Figura 3.10.** Variables de forma para trayectoria circular, (a)  $d_1$ , (b)  $d_2$  y (c)  $\beta$ .

En la Figura 3.11 se observa las variables de postura para cada controlador.



**Figura 3.11.** Variables de postura para trayectoria circular, (a)  $x_F$ , (b)  $y_F$  y (c)  $z_F$ .

La Figura 3.12 muestra para cada controlador las variables de orientación.



**Figura 3.12.** Variables de orientación para trayectoria circular, (a)  $\psi_F$ , (b)  $\theta_F$  y (c)  $\phi_F$ .

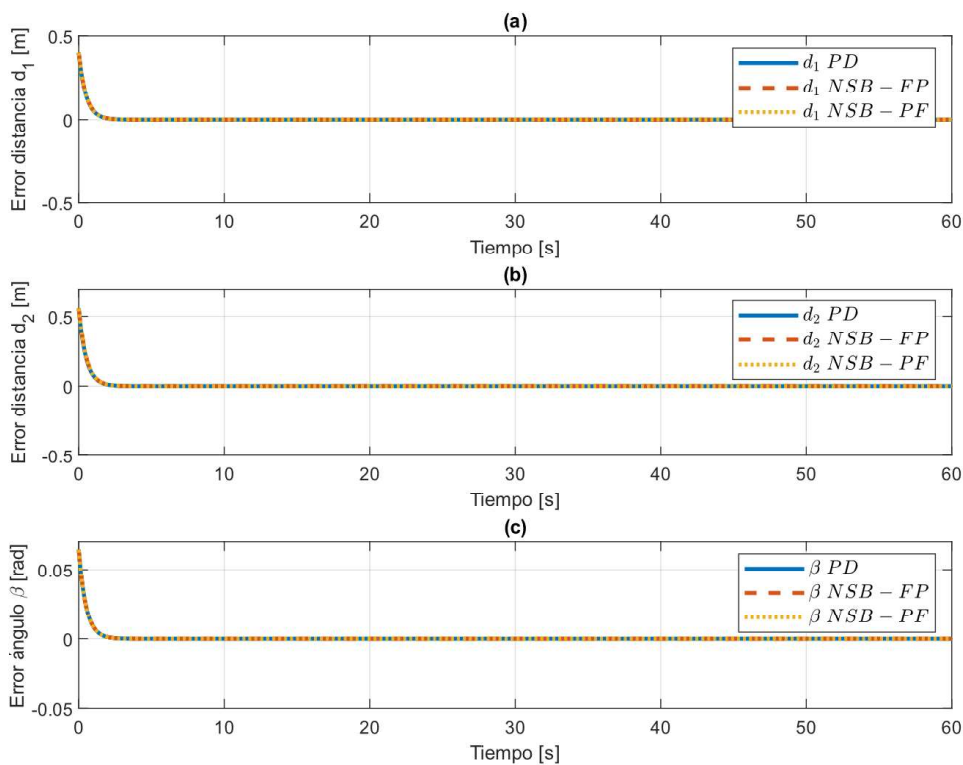
En la Figura 3.10 se presenta la señal de referencia y las señales de salida de los parámetros de forma de los tres controladores, en donde se observa que las repuestas de los tres controladores alcanzan el valor de referencia en un tiempo similar.

En la Figura 3.11 se presenta la señal de referencia y las señales de salida de los parámetros de postura, en las gráficas de las posiciones  $x_F$  y  $z_F$  se observa que el controlador tipo PD alcanza la referencia más rápido que los controladores NSB.

En la Figura 3.12 se presenta la señal de referencia y las señales de salida de los parámetros de orientación, en los ángulos  $\theta_F$  y  $\phi_F$  se presenta un pequeño sobre impulso en el arranque de los robots para el controlador tipo PD en comparación a los controladores NSB.

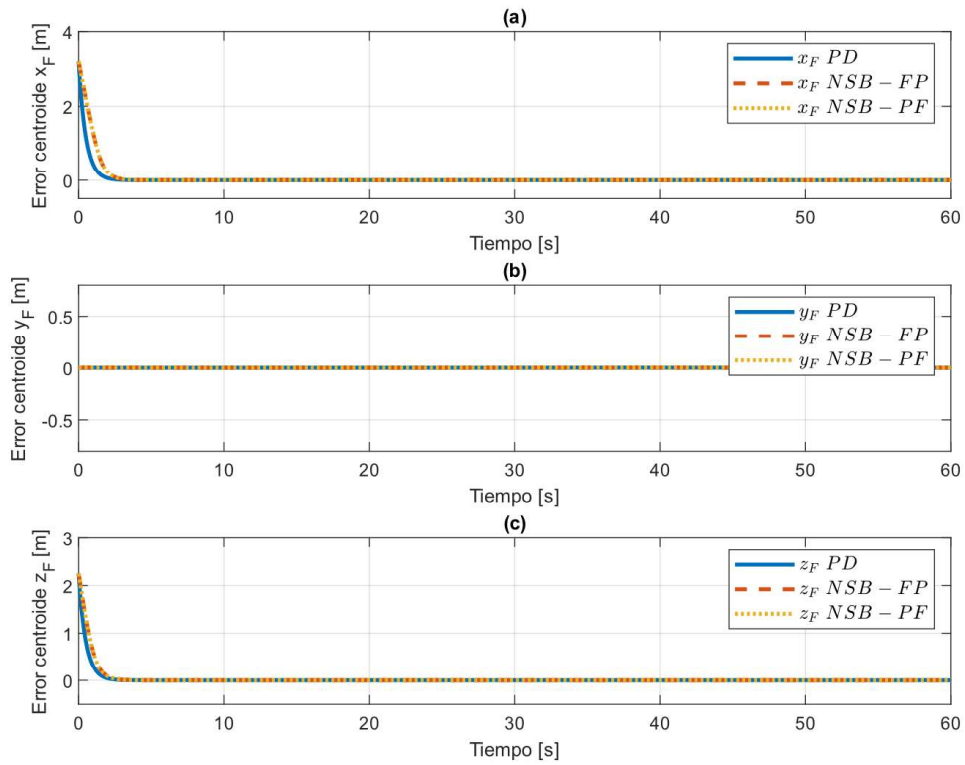
### 3.1.3.3 Errores.

La Figura 3.13 se muestra los errores de los parámetros de forma para cada controlador.



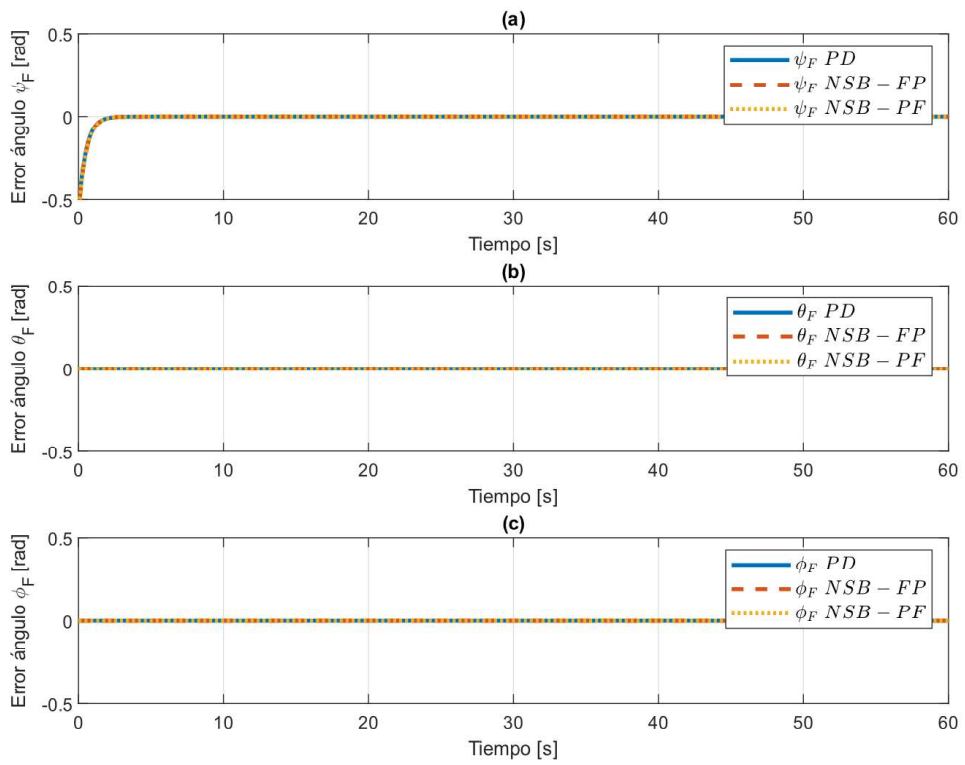
**Figura 3.13.** Error en variables de forma para trayectoria circular, (a)  $d_1$ , (b)  $d_2$  y (c)  $\beta$ .

En la Figura 3.14 se muestran los errores de los parámetros de postura.



**Figura 3.14.** Error en variables de postura para trayectoria circular, (a)  $x_F$ , (b)  $y_F$  y (c)  $z_F$ .

En la Figura 3.15 se muestran los errores de los parámetros de orientación.



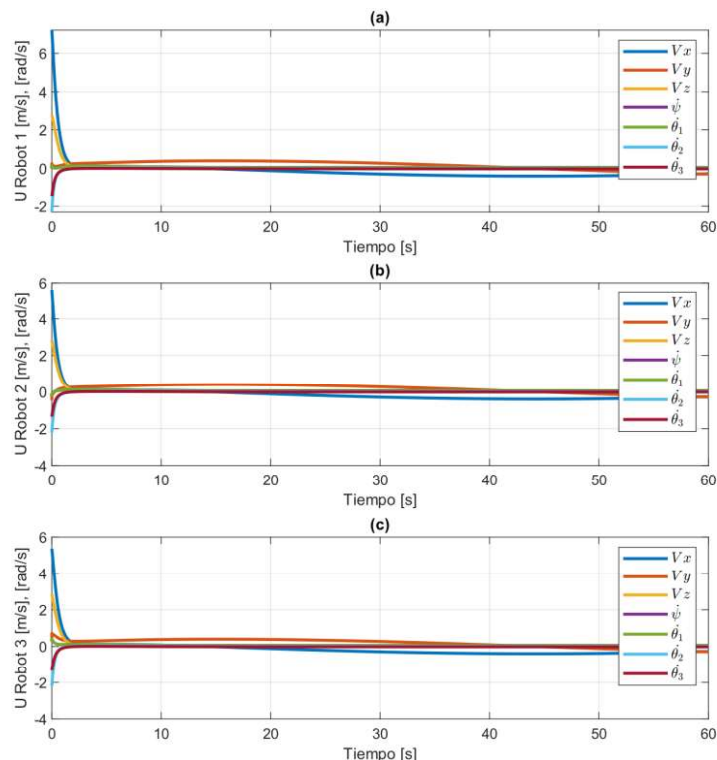
**Figura 3.15.** Error en variables de orientación en trayectoria circular, (a)  $\psi_F$ , (b)  $\theta_F$  y (c)  $\phi_F$ .

En la Figura 3.13, Figura 3.14 y Figura 3.15 se presentan las señales de error de los parámetros de forma, postura y orientación respectivamente. En estos gráficos se observa para los tres controladores que el error converge a cero cuando los robots han alcanzado el valor de referencia, a partir de este momento el valor del error se mantiene en cero durante el resto de la trayectoria comprobando el correcto seguimiento de trayectoria de la formación.

### 3.1.3.4 Acciones de control.

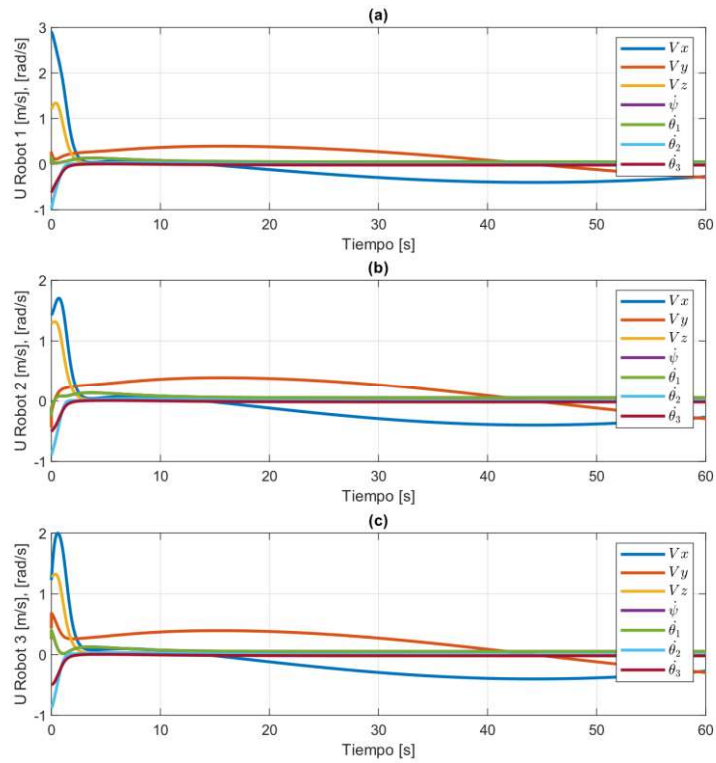
En la Figura 3.16, Figura 3.17 y Figura 3.18 se tiene las señales de las acciones de control correspondientes al controlador tipo PD, NSB con prioridad de forma y NSB con prioridad de postura respectivamente. Se observa que durante el estado estable las señales de control presentan un comportamiento similar para los tres controladores, sin embargo, en el estado transitorio el controlador tipo PD presenta acciones de control iniciales mucho más grandes que en los controladores NSB.

En la Figura 3.16 se muestran las acciones de control del controlador tipo PD para cada robot.



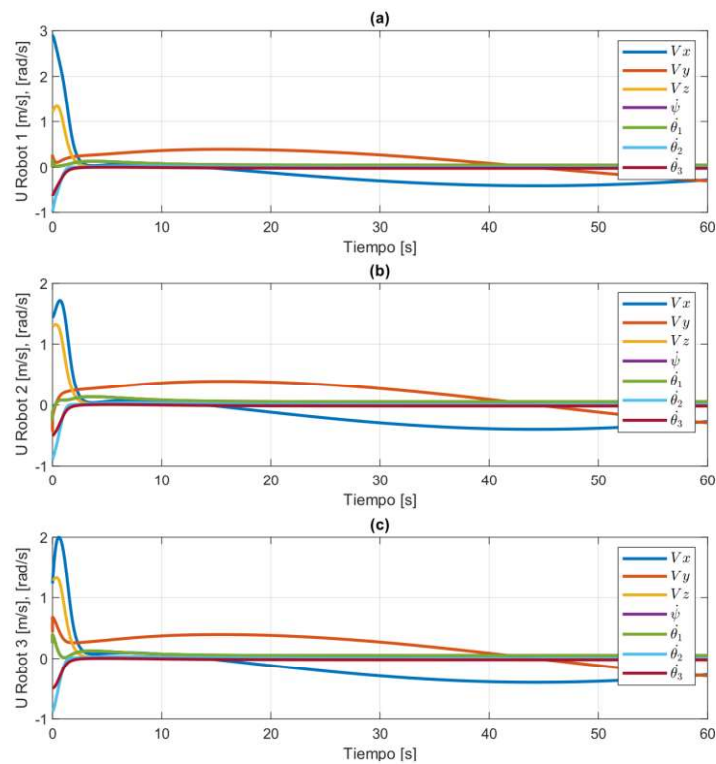
**Figura 3.16.** Acciones del controlador tipo PD, (a) Robot 1, (b) Robot 2, (c) Robot 3.

La Figura 3.17 muestra las acciones del controlador con prioridad de forma para cada robot.



**Figura 3.17.** Acciones del controlador con prioridad de forma (a) Robot 1, (b) Robot 2, (c) Robot 3.

La Figura 3.18 muestra las acciones del controlador con prioridad de postura.



**Figura 3.18.** Acciones del controlador con prioridad de postura (a) Robot 1, (b) Robot 2, (c) Robot 3.

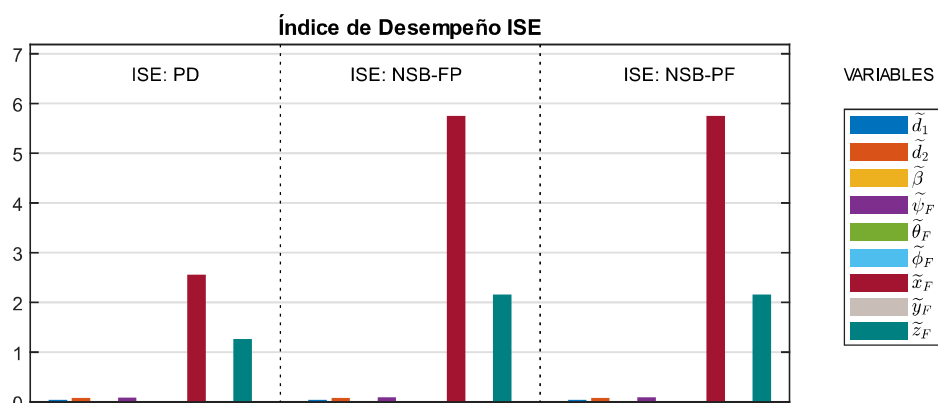
### 3.1.3.5 Índice de desempeño ISE.

La comparación del desempeño de los controladores se realiza mediante el índice de desempeño ISE estudiado en la sección 1.3.12. Los valores del índice de desempeño se tabulan en la Tabla 3.5 donde se observa que el controlador con menor ISE, es decir, el controlador con mejor desempeño es el tipo PD.

**Tabla 3.5.** Valores del ISE de cada variable según el controlador para trayectoria circular.

| <b>ISE</b>         |                         |                         |                         |
|--------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| <b>Parámetros</b>  | <b>PD</b>               | <b>NSB-FP</b>           | <b>NSB-PF</b>           |
| $\tilde{d}_1$      | 0.0400                  | 0.0411                  | 0.0411                  |
| $\tilde{d}_2$      | 0.0778                  | 0.0818                  | 0.0818                  |
| $\tilde{\beta}$    | 0.0010                  | 0.0010                  | 0.0010                  |
| $\tilde{\phi}_F$   | $1.7640 \times e^{-14}$ | $3.9585 \times e^{-33}$ | $2.4367 \times e^{-33}$ |
| $\tilde{\theta}_F$ | $1.0333 \times e^{-13}$ | $1.1311 \times e^{-32}$ | $5.5683 \times e^{-33}$ |
| $\tilde{\psi}_F$   | 0.0851                  | 0.0899                  | 0.0899                  |
| $\tilde{x}_F$      | 2.5595                  | 5.7483                  | 5.7483                  |
| $\tilde{y}_F$      | $8.9948 \times e^{-6}$  | $3.0260 \times e^{-6}$  | $3.0260 \times e^{-6}$  |
| $\tilde{z}_F$      | 1.2657                  | 2.1554                  | 2.1554                  |

En la Figura 3.19 se presenta un gráfico de barras de los índices de desempeño para cada controlador, con el fin de facilitar la comprensión y el análisis de los datos presentados en la tabla anterior. Aquí se puede observar de forma intuitiva que el controlador tipo PD presenta menores valores de ISE como se menciona anteriormente, además se distingue que las variables de postura  $x_F$  y  $z_F$  son las que presentan un mayor error en todos los controladores.



**Figura 3.19.** Gráfico de barras del ISE según el controlador para trayectoria circular.



### 3.1.4 PRUEBA 4: SEGUIMIENTO DE TRAYECTORIA CUADRADA PARA CONTROLADORES TIPO PID Y BASADO EN ESPACIO NULO

En la prueba 4 se detallan los resultados obtenidos para seguimiento de trayectoria entre el controlador tipo PD y los controladores basado en espacio nulo con prioridad de forma (NSB-FP) y prioridad de postura (NSB-PF) para una trayectoria cuadrada. Los resultados se comparan de manera visual y se avalúa el desempeño de cada controlador según el índice de desempeño ISE.

La trayectoria deseada se define en (3.5).

$$\begin{aligned}
 x_{Fd} &= \begin{cases} -2 + \frac{4}{15}t [m], & \text{si } 0 \leq t < 15 [seg] \\ 2 [m], & \text{si } 15 \leq t < 30 [seg] \\ -2 - \frac{4}{15}(t - 45) [m], & \text{si } 30 \leq t < 45 [seg] \\ -2 [m], & \text{si } 45 \leq t \leq 60 [seg] \end{cases} \\
 y_{Fd} &= \begin{cases} -2 [m], & \text{si } 0 \leq t < 15 [seg] \\ -2 + 2(t - 15) [m], & \text{si } 15 \leq t < 30 [seg] \\ 2 [m], & \text{si } 30 \leq t < 45 [seg] \\ -2 - \frac{4}{15}(t - 60) [m], & \text{si } 45 \leq t \leq 60 [seg] \end{cases} \\
 z_{Fd} &= 3 [m]
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Empleando un tiempo de simulación de  $t = 60 [seg]$  y las mismas condiciones que se muestran en la Tabla 3.6.

**Tabla 3.6.** Condiciones iniciales para trayectoria cuadrada.

|                       |                      | ROBOT 1 | ROBOT 2 | ROBOT 3 |
|-----------------------|----------------------|---------|---------|---------|
| <b>CUADRICÓPTERO</b>  | $x_{B_0} [m]$        | 0.6     | 0.6     | -0.6    |
|                       | $y_{B_0} [m]$        | 0.8     | -0.8    | 0       |
|                       | $z_{B_0} [m]$        | 1       | 1       | 1       |
|                       | $\psi_0 [rad]$       | 0       | 0       | 0       |
| <b>BRAZO ROBÓTICO</b> | $\theta_{1_0} [rad]$ | 0       | 0       | 0       |
|                       | $\theta_{2_0} [rad]$ | 0       | 0       | 0       |
|                       | $\theta_{3_0} [rad]$ | 0       | 0       | 0       |

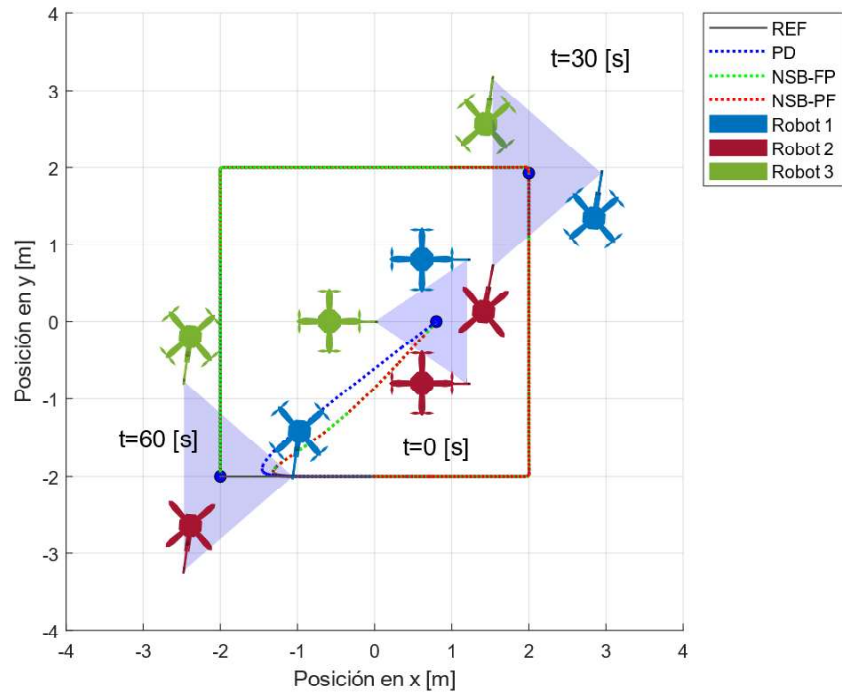
Los parámetros de forma y orientación de la formación deseados se definen a la Tabla 3.7.

**Tabla 3.7.** Parámetros deseados de forma y orientación para una trayectoria cuadrada.

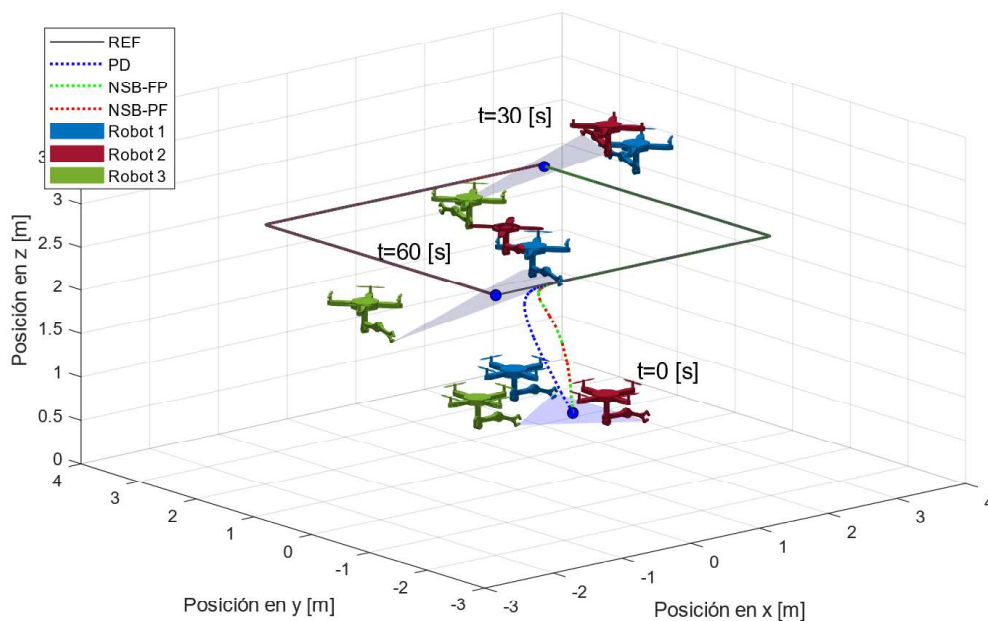
| $d_{1_d} [m]$ | $d_{2_d} [m]$ | $\beta_d [rad]$ | $\phi_{Fd} [rad]$ | $\theta_{Fd} [rad]$ | $\psi_{Fd} [rad]$ |
|---------------|---------------|-----------------|-------------------|---------------------|-------------------|
| 2             | 2             | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{6}$   | 0                   | 0                 |

### 3.1.4.1 Comparación de la trayectoria del centroide de la formación.

En la Figura 3.20 y Figura 3.21 se muestra la respuesta de los tres controladores propuestos para trayectoria cuadrada, donde se visualiza la trayectoria del centroide de la formación.



**Figura 3.20.** Trayectorias del centroide de la formación para cada controlador diseñado, desde vista superior para trayectoria cuadrada.



**Figura 3.21.** Trayectorias del centroide de la formación para cada controlador diseñado con vista isométrica para trayectoria cuadrada.

### 3.1.4.2 Salidas.

En la Figura 3.22 se muestran las variables de forma para cada controlador.

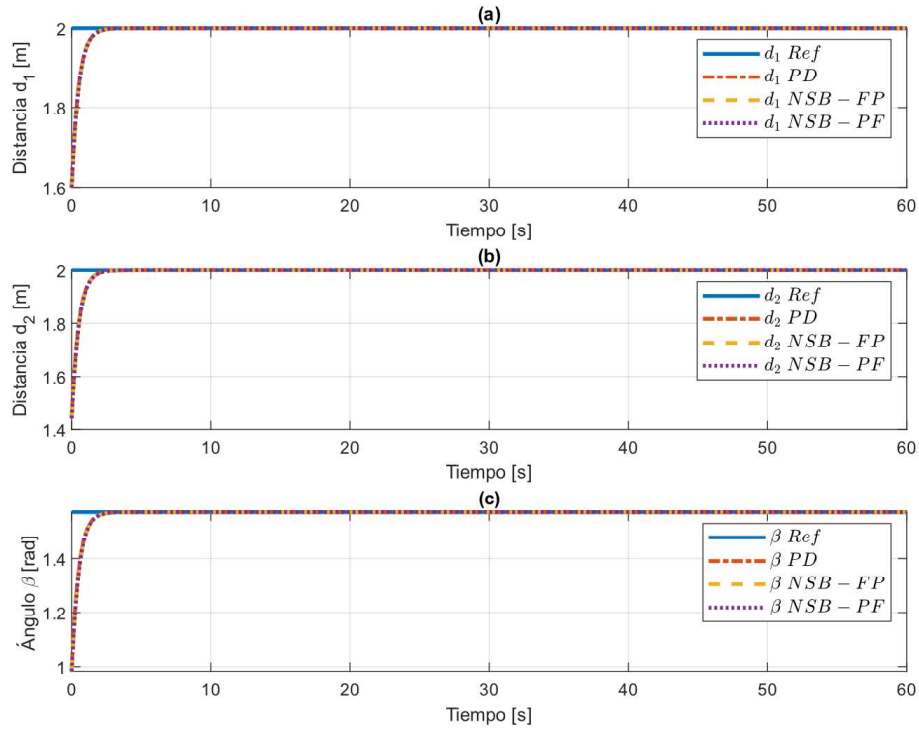


Figura 3.22. Variables de forma para trayectoria cuadrada, (a)  $d_1$ , (b)  $d_2$  y (c)  $\beta$ .

En la Figura 3.23 se observa las variables de postura para cada controlador.

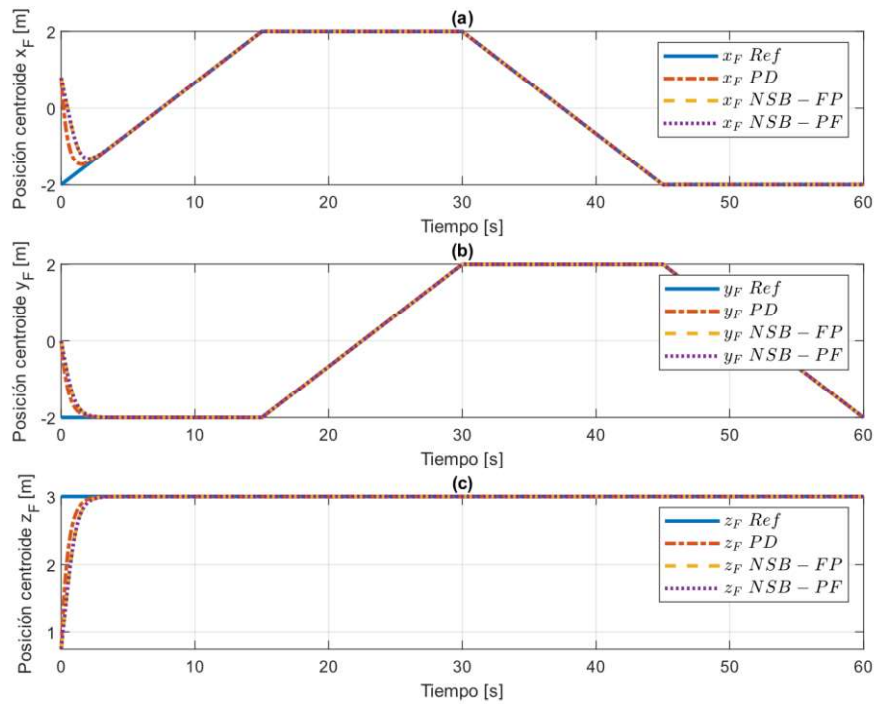
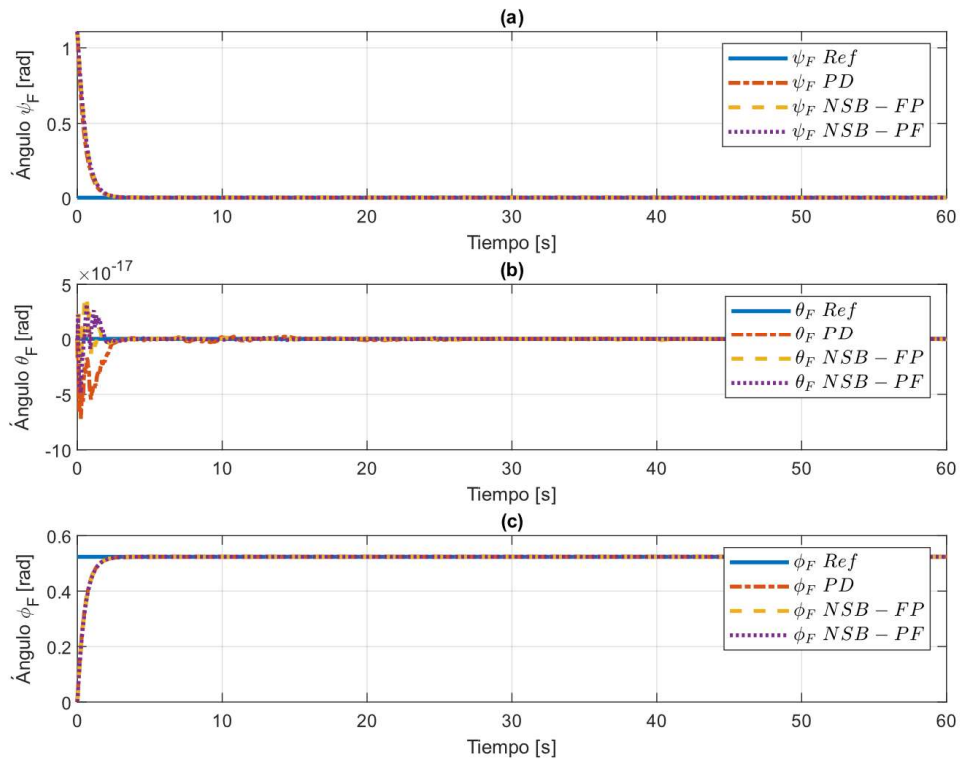


Figura 3.23. Variables de postura para trayectoria cuadrada, (a)  $x_F$ , (b)  $y_F$  y (c)  $z_F$ .

La Figura 3.24 muestra para cada controlador las variables de orientación.



**Figura 3.24.** Variables de orientación para trayectoria cuadrada, (a)  $\psi_F$ , (b)  $\theta_F$  y (c)  $\phi_F$ .

En la Figura 3.22 se presenta la señal de referencia y las señales de salida de los parámetros de forma, en donde se observa que las repuestas de los tres controladores alcanzan el valor de referencia en un tiempo similar.

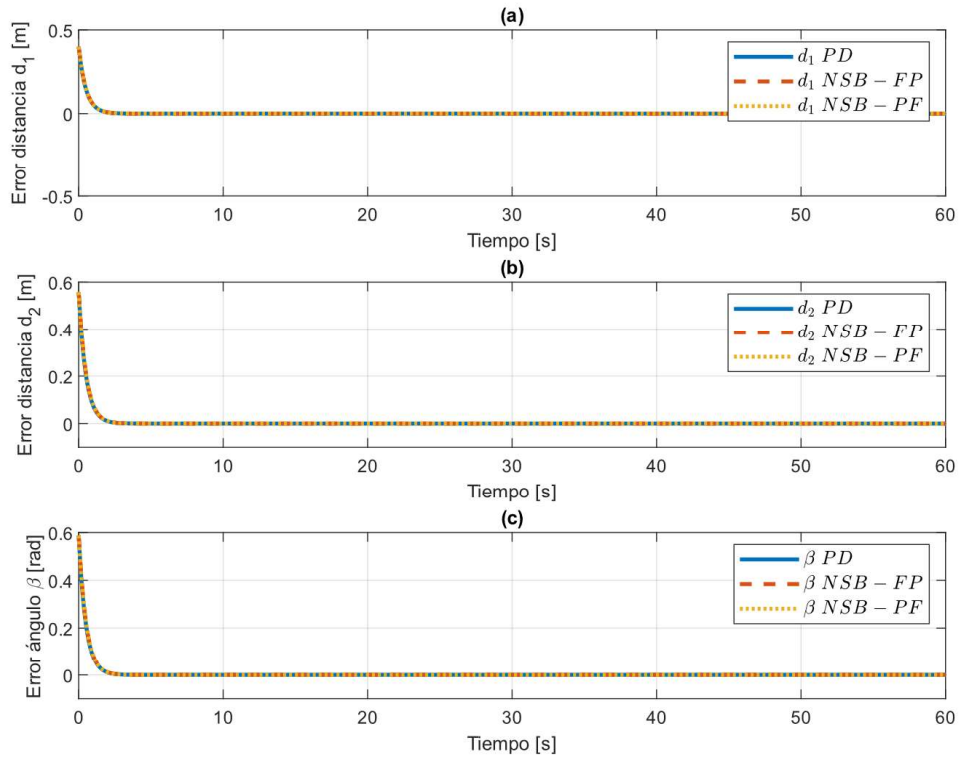
En la Figura 3.23 se presenta la señal de referencia y las señales de salida de los parámetros de postura, se observa que el controlador tipo PD alcanza la referencia ligeramente más rápido que los controladores NSB.

En la Figura 3.24 se presenta la señal de referencia y las señales de salida de los parámetros de orientación de los tres controladores, en el ángulo  $\theta_F$  se presenta pequeñas oscilaciones en el arranque para los tres controladores.

### 3.1.4.3 Errores.

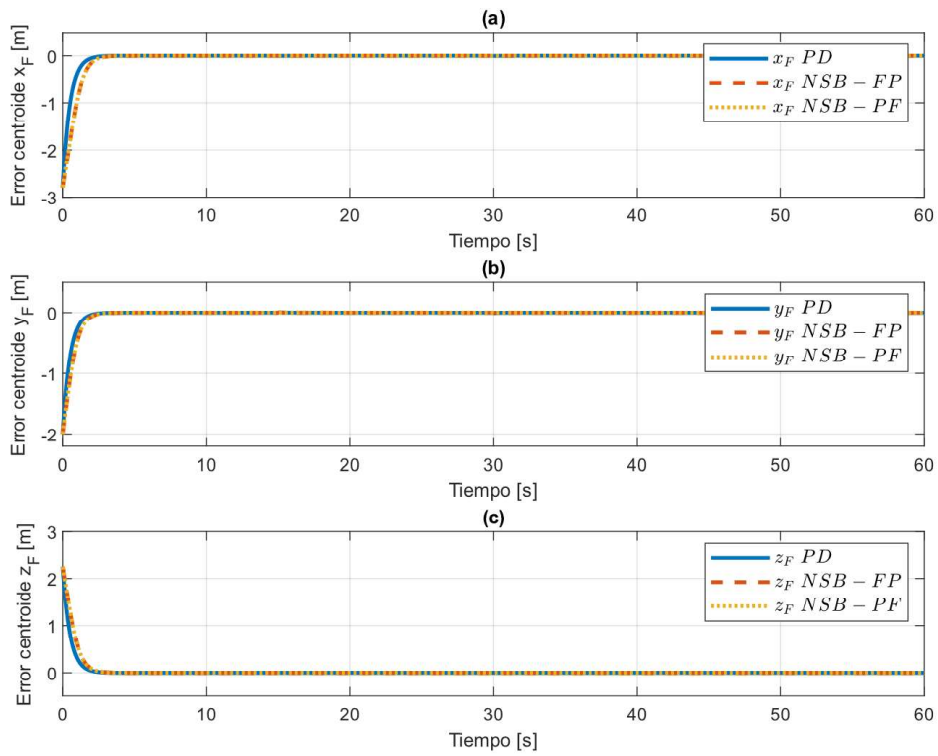
En la Figura 3.25, Figura 3.26 y Figura 3.27 se presentan las señales de error de los parámetros de forma, postura y orientación respectivamente, se observa en los tres controladores que el error converge a cero cuando los robots han alcanzado el estado estable y se mantiene durante el resto de la trayectoria comprobando el seguimiento de trayectoria de la formación.

En la Figura 3.25 se muestra los errores de los parámetros de forma para cada controlador.



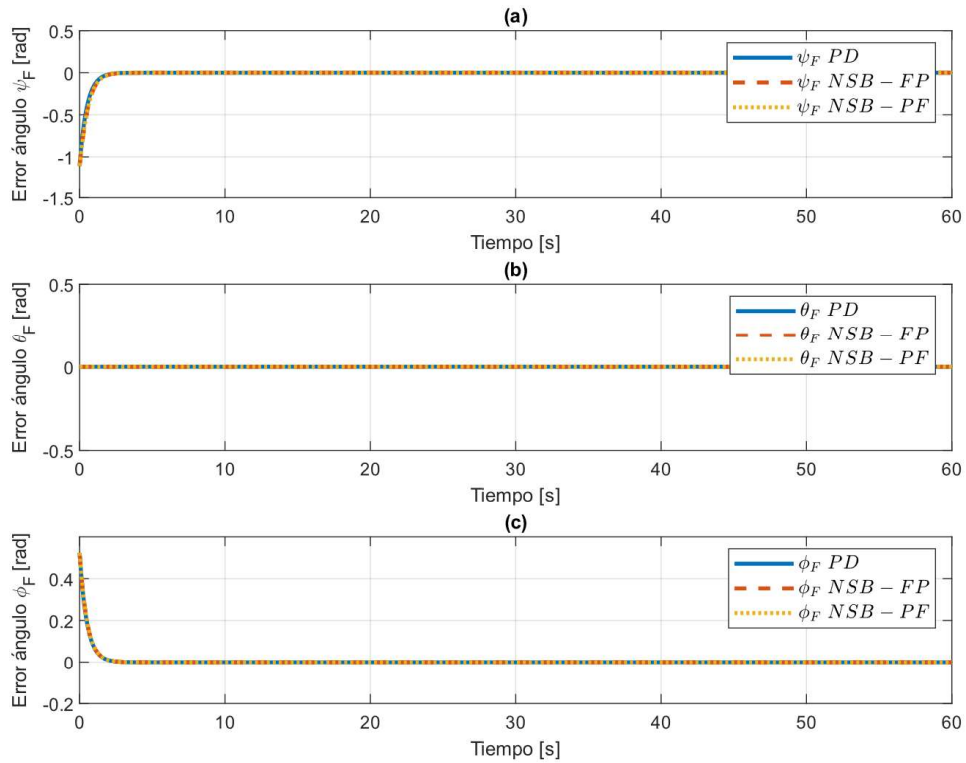
**Figura 3.25.** Error en variables de forma para trayectoria cuadrada, (a)  $d_1$ , (b)  $d_2$  y (c)  $\beta$ .

La Figura 3.26 muestra los errores de los parámetros de postura para cada controlador.



**Figura 3.26.** Error en variables de postura para trayectoria cuadrada, (a)  $x_F$ , (b)  $y_F$ , (c)  $z_F$ .

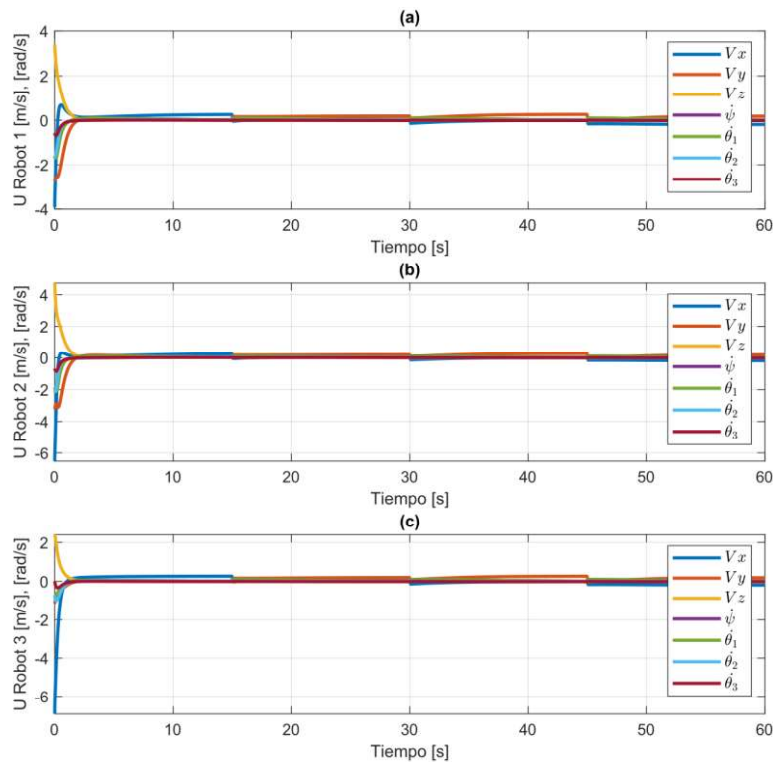
La Figura 3.27 muestra los errores de los parámetros de orientación para los controladores.



**Figura 3.27.** Error en variables de orientación, trayectoria cuadrada, (a)  $\psi_F$ , (b)  $\theta_F$ , (c)  $\phi_F$ .

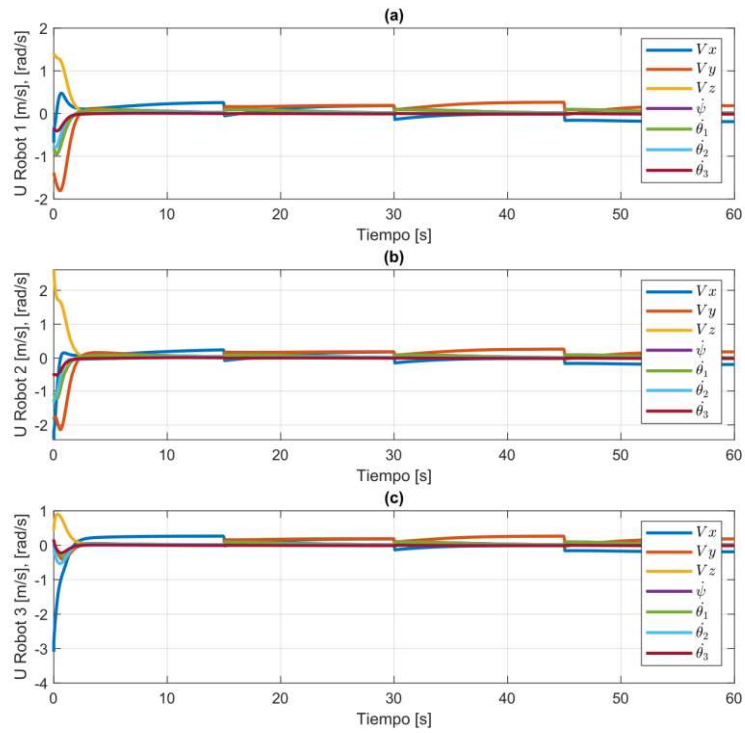
### 3.1.4.4 Acciones de control.

La Figura 3.28 muestra las acciones de control del controlador tipo PD para cada robot.



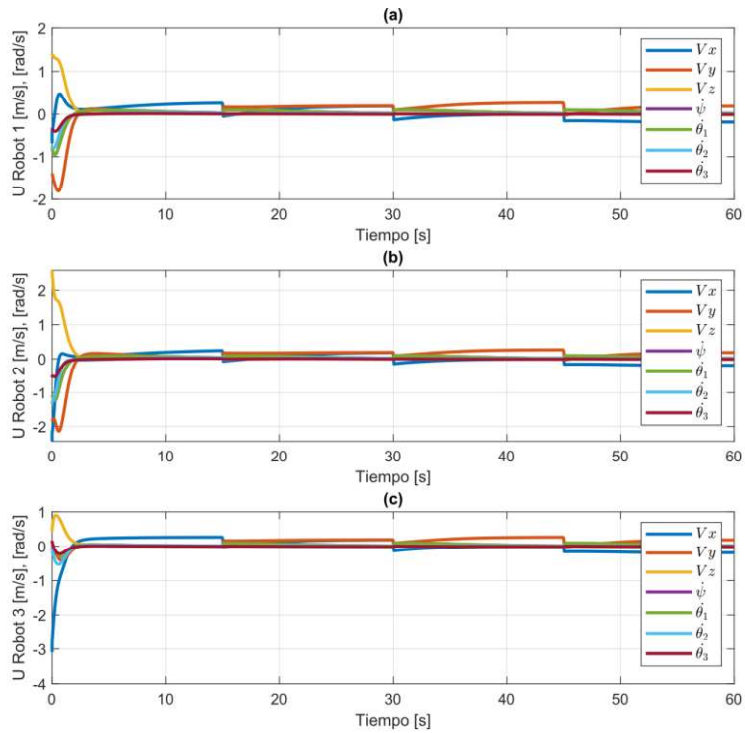
**Figura 3.28.** Acciones del controlador tipo PD, (a) Robot 1, (b) Robot 2, (c) Robot 3.

La Figura 3.29 muestra las acciones del controlador con prioridad de forma para cada robot.



**Figura 3.29.** Acciones del controlador con prioridad de forma (a) Robot 1, (b) Robot 2, (c) Robot 3.

La Figura 3.30 muestra las acciones del controlador con prioridad de postura.



**Figura 3.30.** Acciones del controlador con prioridad de postura (a) Robot 1, (b) Robot 2, (c) Robot 3.

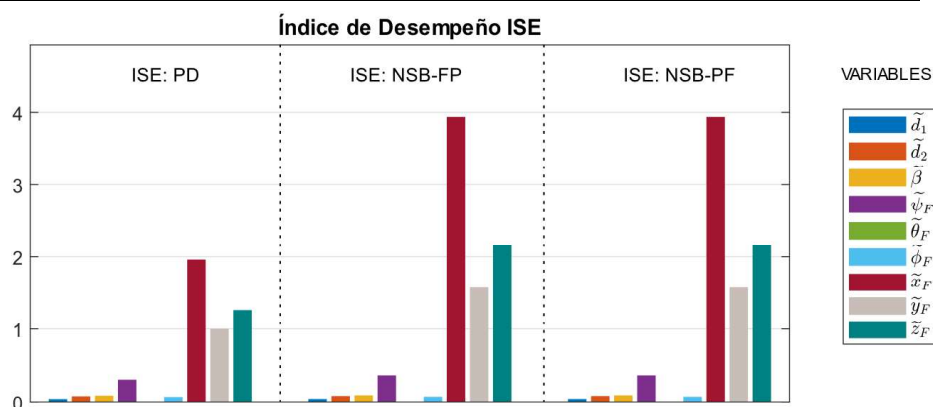
En la Figura 3.28, Figura 3.29 y Figura 3.30 se tiene las señales de las acciones de control correspondientes al controlador tipo PD, NSB con prioridad de forma y NSB con prioridad de postura respectivamente. Se observa que el controlador tipo PD presenta acciones de control iniciales mucho más grandes que en los controladores NSB, sin embargo, en estado estable los tres controladores muestran un comportamiento similar.

### 3.1.4.5 Índice de desempeño ISE.

La comparación del desempeño de los controladores se realiza mediante el índice de desempeño ISE. Los valores del ISE se tabulan en la Tabla 3.8 para cada variable de control involucrada según cada controlador diseñado, donde se tiene que el controlador con menor ISE y por lo tanto mejor desempeño es el controlador tipo PD.

**Tabla 3.8.** Valores del ISE según el controlador para trayectoria cuadrada.

| <i>ISE</i>         |                         |                         |                         |
|--------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| <i>Parámetros</i>  | <i>PD</i>               | <i>NSB-FP</i>           | <i>NSB-PF</i>           |
| $\tilde{d}_1$      | 0.0400                  | 0.0411                  | 0.0411                  |
| $\tilde{d}_2$      | 0.0778                  | 0.0818                  | 0.0818                  |
| $\tilde{\beta}$    | 0.0864                  | 0.0913                  | 0.0913                  |
| $\tilde{\phi}_F$   | 0.0685                  | 0.0716                  | 0.0716                  |
| $\tilde{\theta}_F$ | $9.0897 \times e^{-32}$ | $1.8670 \times e^{-32}$ | $1.0927 \times e^{-32}$ |
| $\tilde{\psi}_F$   | 0.3064                  | 0.3659                  | 0.3659                  |
| $\tilde{x}_F$      | 1.9600                  | 3.9385                  | 3.9385                  |
| $\tilde{y}_F$      | 1.0000                  | 1.5739                  | 1.5739                  |
| $\tilde{z}_F$      | 1.2656                  | 2.1554                  | 2.1554                  |



**Figura 3.31.** Gráfico de barras del ISE según el controlador para trayectoria cuadrada.

En la Figura 3.31 se presenta un gráfico de barras de los índices de desempeño para cada controlador, donde se puede comprobar fácilmente que el controlador tipo PD presenta



menores valores de ISE dando como resultado un mejor desempeño, además se distingue que las variables de postura  $x_F$ ,  $y_F$  y  $z_F$  son las que presentan en general mayor error.

### 3.1.5 PRUEBA 5: SEGUIMIENTO DE TRAYECTORIA LEMNISCATA PARA CONTROLADORES TIPO PID Y BASADO EN ESPACIO NULO

En esta prueba se presenta una comparación entre los resultados del seguimiento de trayectoria entre el controlador tipo PD y el control basado en espacio nulo con prioridad de forma (NSB-FP) y prioridad de postura (NSB-PF) para una trayectoria lemniscata.

La trayectoria deseada se define en (3.6).

$$\begin{aligned} x_{Fd} &= \frac{3\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{30}t\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{30}t\right) + 1} [m] \\ y_{Fd} &= \frac{3\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{30}t\right) \sin\left(\frac{\pi}{30}t\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{30}t\right) + 1} [m] \\ z_{Fd} &= 3 [m] \end{aligned} \quad (3.6)$$

Empleando un tiempo de simulación de  $t = 60$  [seg].

Para realizar la comparación entre ambos controladores, se escogen las mismas condiciones iniciales, que se muestran en la Tabla 3.9.

**Tabla 3.9.** Condiciones iniciales para trayectoria lemniscata.

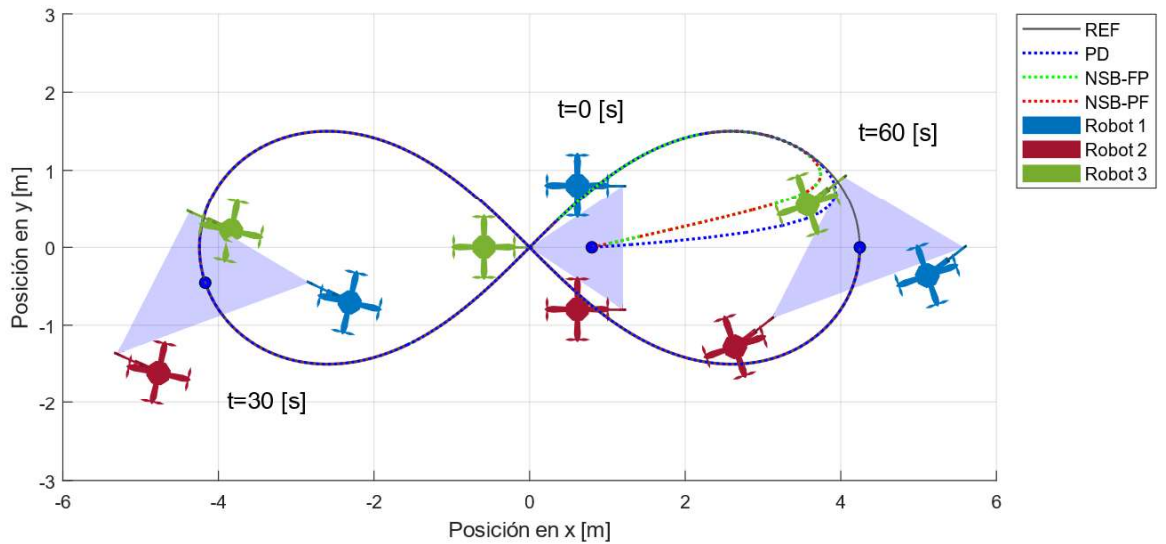
|                       |                      | ROBOT 1 | ROBOT 2 | ROBOT 3 |
|-----------------------|----------------------|---------|---------|---------|
| <b>CUADRICÓPTERO</b>  | $x_{B_0}$ [m]        | 0.6     | 0.6     | -0.6    |
|                       | $y_{B_0}$ [m]        | 0.8     | -0.8    | 0       |
|                       | $z_{B_0}$ [m]        | 1       | 1       | 1       |
|                       | $\psi_0$ [rad]       | 0       | 0       | 0       |
| <b>BRAZO ROBÓTICO</b> | $\theta_{1_0}$ [rad] | 0       | 0       | 0       |
|                       | $\theta_{2_0}$ [rad] | 0       | 0       | 0       |
|                       | $\theta_{3_0}$ [rad] | 0       | 0       | 0       |

**Tabla 3.10.** Parámetros deseados de forma y orientación para seguimiento de trayectoria lemniscata.

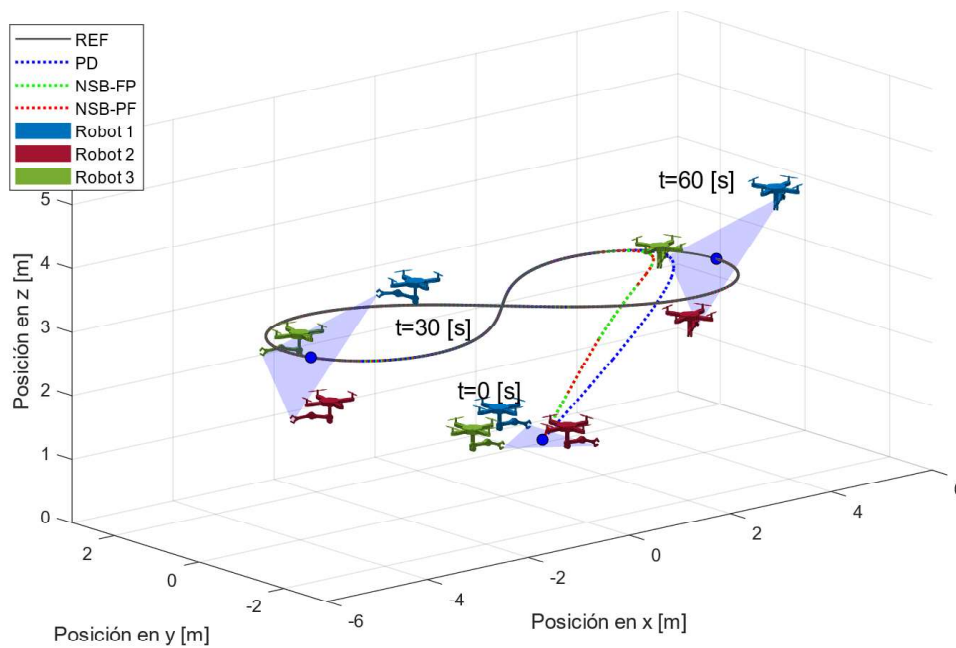
| $d_{1d}$ [m] | $d_{2d}$ [m] | $\beta_d$ [rad] | $\phi_{Fd}$ [rad] | $\theta_{Fd}$ [rad] | $\psi_{Fd}$ [rad] |
|--------------|--------------|-----------------|-------------------|---------------------|-------------------|
| 3            | 2            | $\frac{\pi}{4}$ | 0                 | $\frac{\pi}{6}$     | 0                 |

### 3.1.5.1 Comparación de la trayectoria del centroide de la formación.

En la Figura 3.32 y Figura 3.33 se muestra la respuesta de los tres controladores propuestos para la trayectoria lemniscata, donde se visualiza la trayectoria del centroide de la formación.



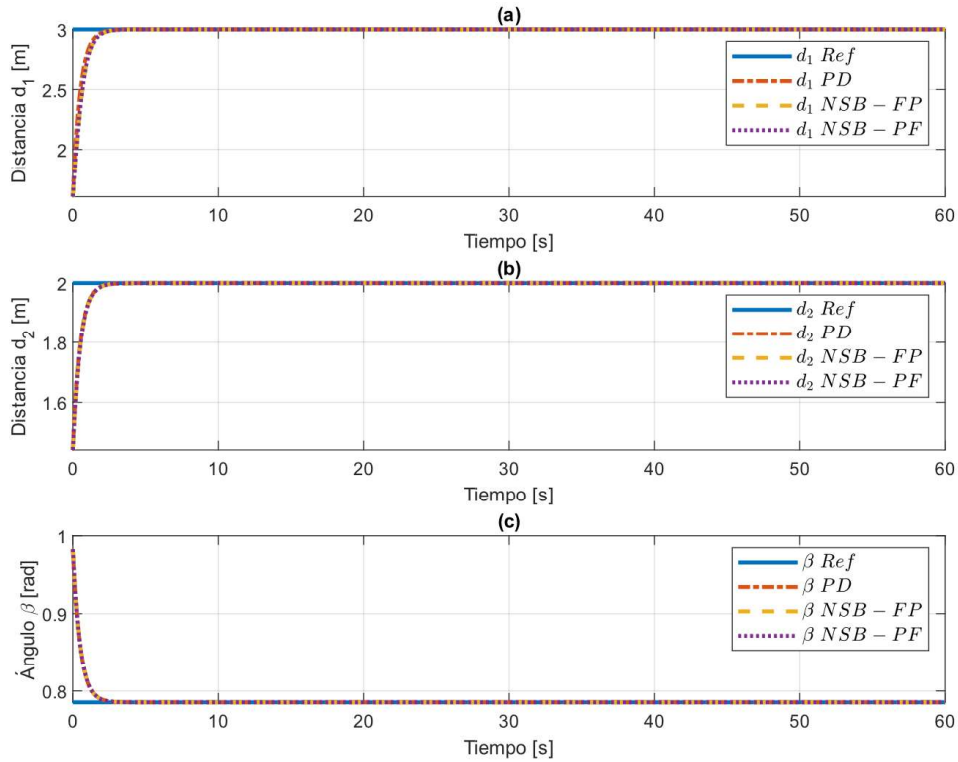
**Figura 3.32.** Trayectorias del centroide de la formación para cada controlador diseñado, desde vista superior para trayectoria lemniscata.



**Figura 3.33.** Trayectorias del centroide de la formación para cada controlador diseñado con vista isométrica para trayectoria lemniscata.

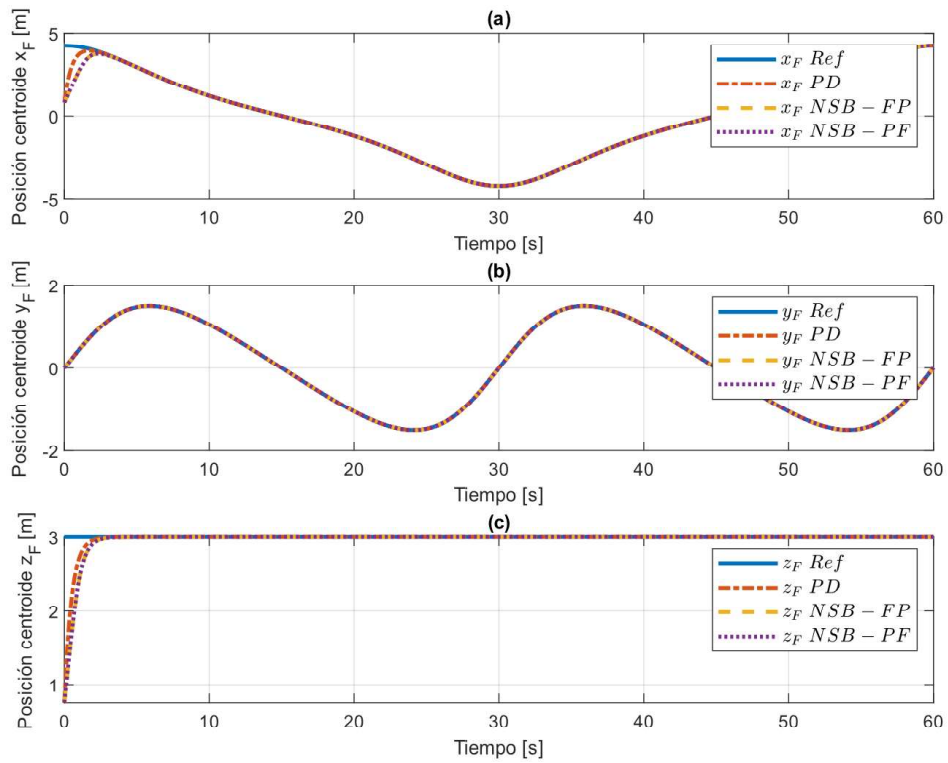
### 3.1.5.2 Salidas.

En la Figura 3.34 se muestran las variables de forma para cada controlador.



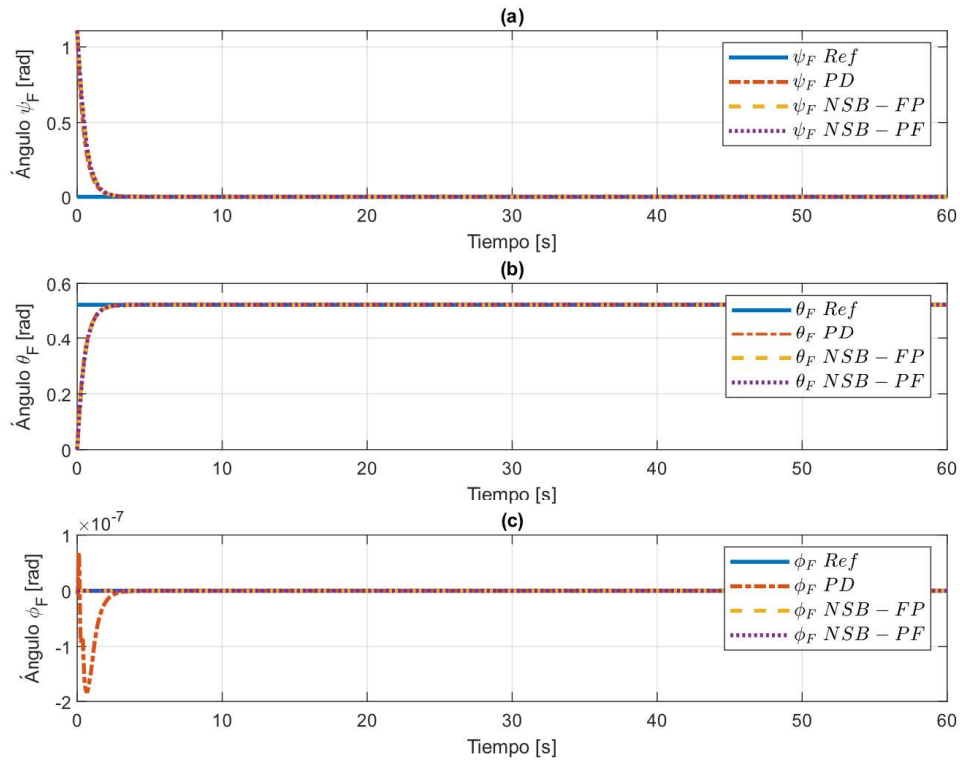
**Figura 3.34.** Variables de forma para trayectoria lemniscata (a)  $d_1$ , (b)  $d_2$  y (c)  $\beta$ .

En la Figura 3.35 se observa las variables de postura para cada controlador.



**Figura 3.35.** Variables de postura para trayectoria lemniscata, (a)  $x_F$ , (b)  $y_F$  y (c)  $z_F$ .

La Figura 3.36 muestra para cada controlador las variables de orientación.



**Figura 3.36.** Variables de orientación para trayectoria lemniscata, (a)  $\psi_F$ , (b)  $\theta_F$  y (c)  $\phi_F$ .

En la Figura 3.34 se presenta la señal de referencia y las señales de salida de los parámetros de forma, en donde se observa que las repuestas de los tres controladores alcanzan el valor de referencia.

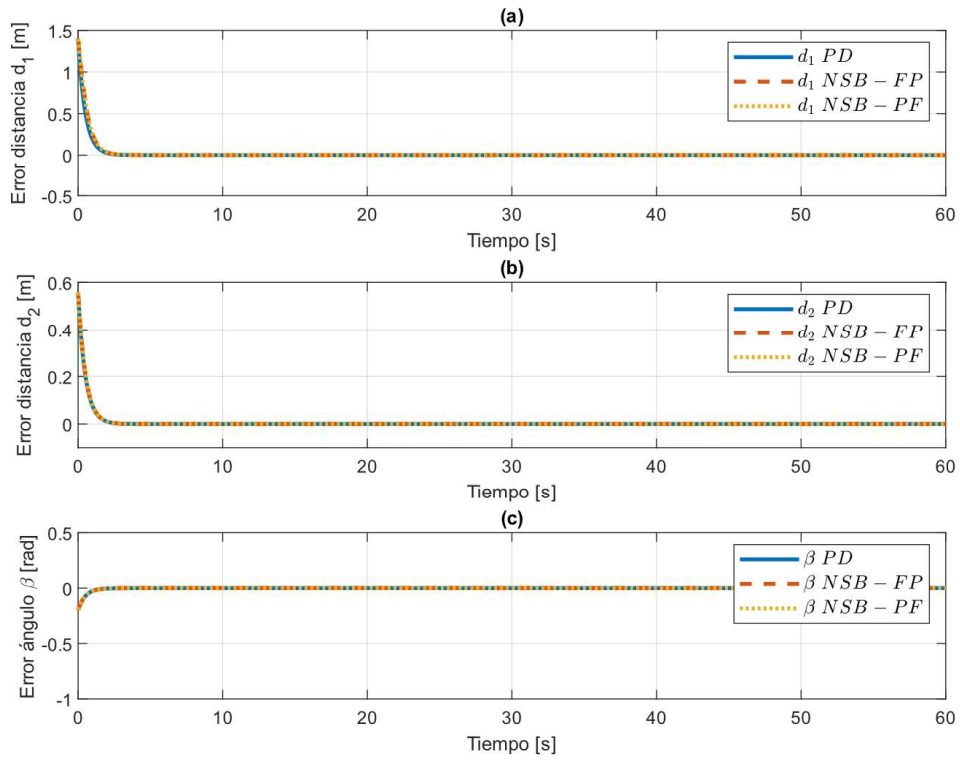
En la Figura 3.35 se presenta la señal de referencia y las señales de salida de los parámetros de postura, para las posiciones  $x_F$  y  $z_F$  se tiene que el controlador tipo PD alcanza la referencia ligeramente más rápido que los controladores NSB.

En la Figura 3.36 se presenta la señal de referencia y las señales de salida de los parámetros de orientación de los tres controladores, para el ángulo  $\phi_F$  se presenta un pequeño sobre impulso en el controlador tipo PD a diferencia de los controladores NSB.

### 3.1.5.3 Errores.

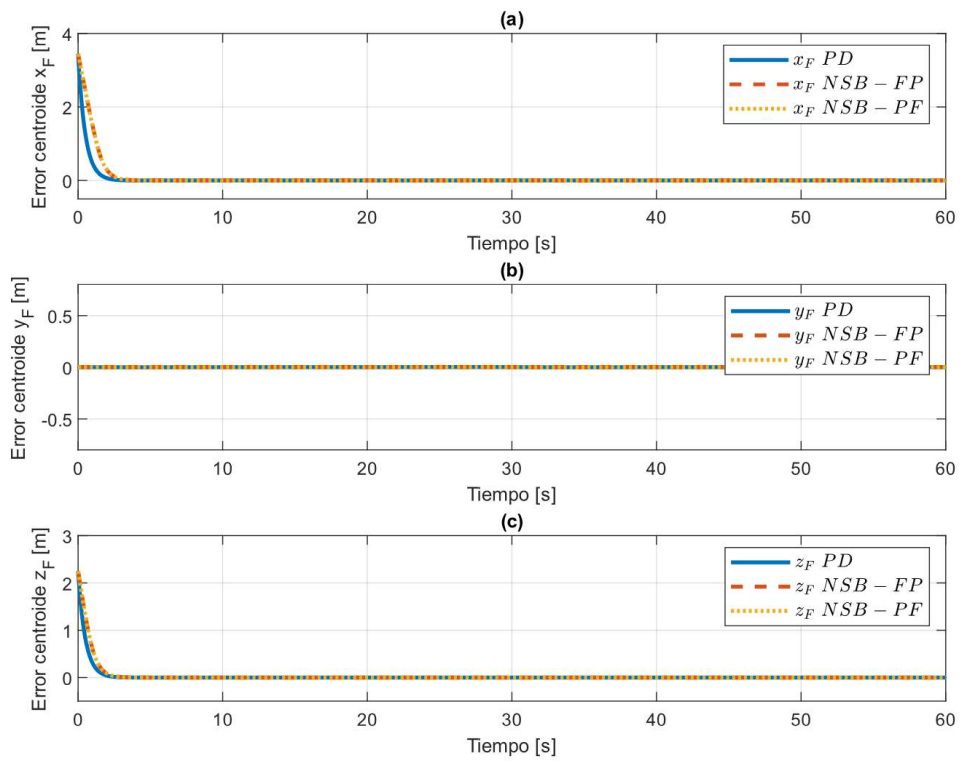
En la Figura 3.37, Figura 3.38 y Figura 3.39 se presentan las señales de error de los parámetros de forma, postura y orientación respectivamente. Se observa que cuando el sistema alcanza el estado estable el error permanece en cero en todos los casos.

En la Figura 3.37 se muestra los errores de los parámetros de forma para cada controlador.



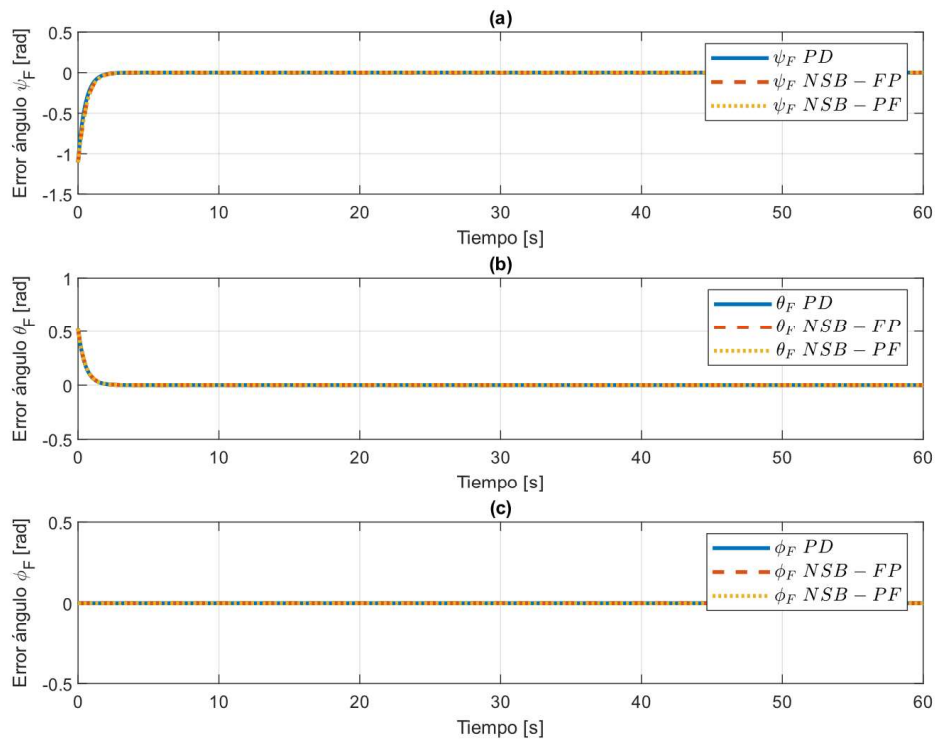
**Figura 3.37.** Error en variables de forma para trayectoria lemniscata (a)  $d_1$ , (b)  $d_2$  y (c)  $\beta$ .

La Figura 3.38 muestra los errores de los parámetros de postura para cada controlador.



**Figura 3.38.** Error en variables de postura en trayectoria lemniscata, (a)  $x_F$ , (b)  $y_F$ , (c)  $z_F$ .

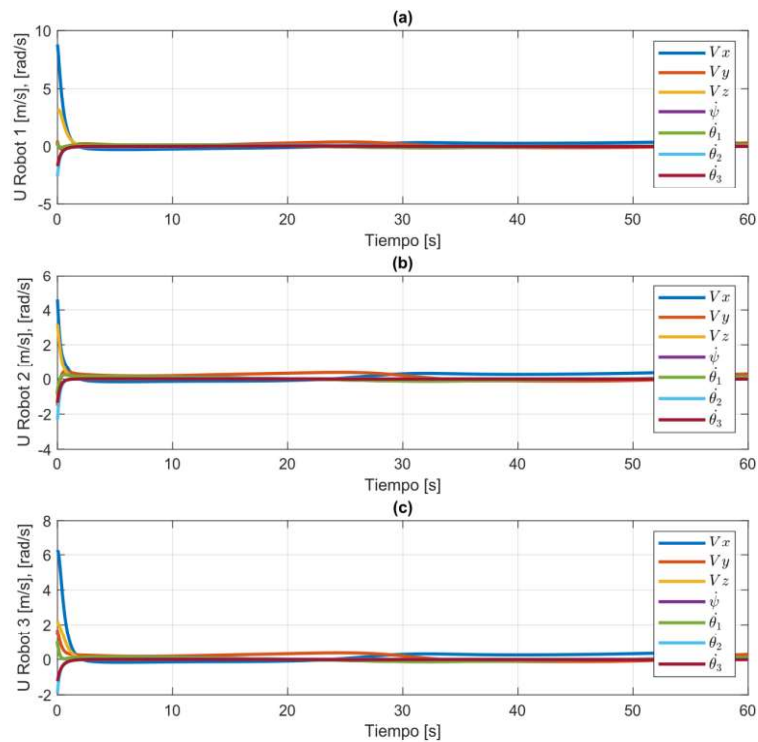
La Figura 3.39 muestra los errores de los parámetros de orientación para los controladores.



**Figura 3.39.** Error en variables de orientación, trayectoria lemniscata, (a)  $\psi_F$ , (b)  $\theta_F$ , (c)  $\phi_F$ .

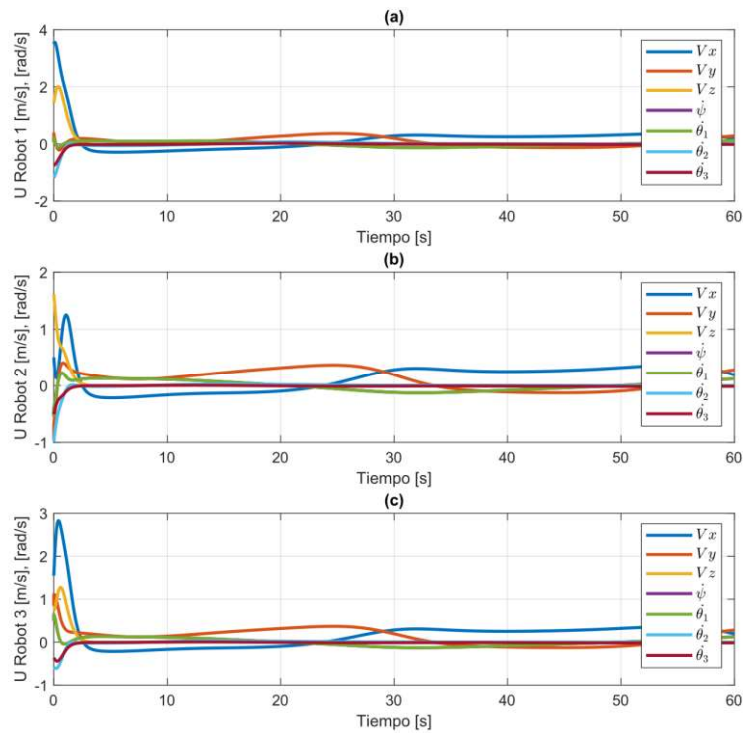
### 3.1.5.4 Acciones de control.

La Figura 3.40 muestra las acciones de control del controlador tipo PD para cada robot.



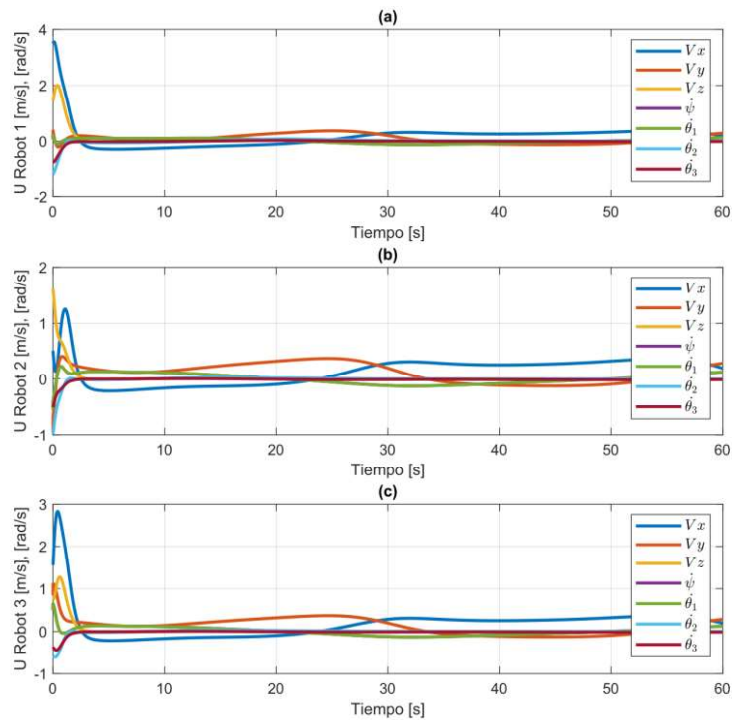
**Figura 3.40.** Acciones del controlador tipo PD, (a) Robot 1, (b) Robot 2, (c) Robot 3.

La Figura 3.41 muestra las acciones del controlador con prioridad de forma para cada robot.



**Figura 3.41.** Acciones del controlador con prioridad de forma (a) Robot 1, (b) Robot 2, (c) Robot 3.

La Figura 3.42 muestra las acciones del controlador con prioridad de postura.



**Figura 3.42.** Acciones del controlador con prioridad de postura (a) Robot 1, (b) Robot 2, (c) Robot 3.

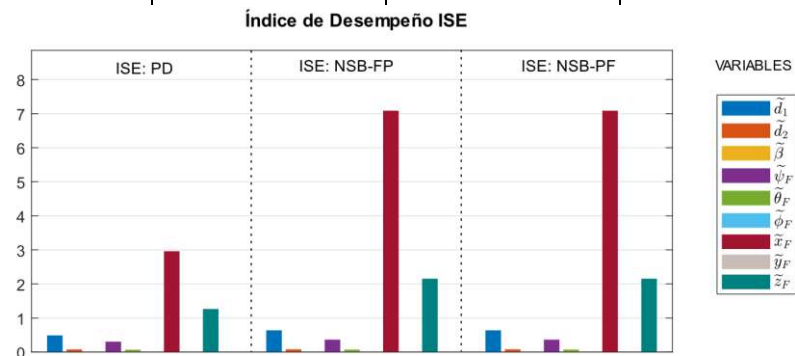
En la Figura 3.40, Figura 3.41 y Figura 3.42 se muestra las señales de las acciones de control de los controladores tipo PD, NSB con prioridad de forma y NSB con prioridad de postura respectivamente. Se observa que el controlador tipo PD genera señales de control mayores que los controladores NSB en el inicio de la trayectoria.

### 3.1.5.5 Índice de desempeño ISE.

La comparación del desempeño de los controladores se realiza mediante el índice de desempeño ISE. La Tabla 3.11 muestra los índices de desempeño de las variables de control involucradas para cada controlador. Se observa que el controlador con menor ISE y por lo tanto mejor desempeño es el tipo PD.

**Tabla 3.11.** Valores del ISE según el controlador para trayectoria lemniscata.

| <i>ISE</i>         |                         |                         |                         |
|--------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| <i>Parámetros</i>  | <i>PD</i>               | <i>NSB-FP</i>           | <i>NSB-PF</i>           |
| $\tilde{d}_1$      | 0.4900                  | 0.6378                  | 0.6378                  |
| $\tilde{d}_2$      | 0.0778                  | 0.0818                  | 0.0818                  |
| $\tilde{\beta}$    | 0.0097                  | 0.0098                  | 0.0098                  |
| $\tilde{\phi}_F$   | $4.9342 \times e^{-14}$ | $1.4663 \times e^{-32}$ | $7.5500 \times e^{-33}$ |
| $\tilde{\theta}_F$ | 0.0685                  | 0.0716                  | 0.0716                  |
| $\tilde{\psi}_F$   | 0.3065                  | 0.3659                  | 0.3659                  |
| $\tilde{x}_F$      | 2.9611                  | 7.0854                  | 7.0854                  |
| $\tilde{y}_F$      | $2.8420 \times e^{-5}$  | $9.7115 \times e^{-6}$  | $9.6899 \times e^{-6}$  |
| $\tilde{z}_F$      | 1.2657                  | 2.1554                  | 2.1554                  |



**Figura 3.43.** Gráfico de barras del ISE según el controlador para trayectoria lemniscata.

En el gráfico de barras de la Figura 3.43 se muestran los índices de desempeño de la tabla anterior, donde se observa de forma más intuitiva que el controlador tipo PD tiene un mejor desempeño dado que presenta menores valores de ISE además se observa que las variables de postura  $x_F$ , y  $z_F$  son las que presentan mayor error en todos los controladores.



Al analizar los resultados obtenidos para las tres pruebas realizadas se puede observar que la respuesta de los tres controladores es bastante similar. El controlador tipo PD como se observa en las señales de salida y errores correspondientes a cada prueba alcanza la referencia en un menor tiempo frente a los dos controladores NSB, esto permite que el índice de rendimiento ISE en general también sea menor. Sin embargo, al observar las señales correspondientes a las acciones de control de cada prueba se puede ver como estas señales alcanzan un mayor valor en el caso del controlador tipo PD, lo cual representaría una mayor exigencia de los actuadores de los sistemas robóticos.

## 3.2 RESULTADOS DEL CONTROL DE EVASIÓN DE OBSTÁCULOS

### 3.2.1 PRUEBA 6: EVASIÓN DE OBSTÁCULOS ESTÁTICOS UTILIZANDO CONTROLADORES BASADOS EN ESPACIO NULO CON DISTINTA PRIORIDAD PARA UNA TRAYECTORIA CIRCULAR

Se muestran los resultados relacionados al control de evasión de obstáculos para una trayectoria circular. Se realiza una comparación entre el comportamiento del control basado en espacio con diferente prioridad: prioridad postura (NSB-PEF), forma (NSB-FEP) y evasión (NSB-EPF).

La trayectoria deseada o parámetros de referencia de postura se definen en:

$$\begin{aligned}x_{Fd} &= 5 \cos\left(\frac{\pi}{30}t\right) [m] \\y_{Fd} &= 5 \cos\left(\frac{\pi}{30}t\right) [m] \\z_{Fd} &= 3 [m]\end{aligned}\tag{3.7}$$

Empleando un tiempo de simulación de  $t = 60 [seg]$ .

Se escogen las mismas condiciones iniciales (ver Tabla 3.12) para los tres controladores.

**Tabla 3.12.** Condiciones iniciales de cada robot.

|                       |                      | ROBOT 1 | ROBOT 2 | ROBOT 3 |
|-----------------------|----------------------|---------|---------|---------|
| <b>CUADRICÓPTERO</b>  | $x_{B_0} [m]$        | 0.6     | 0.6     | -0.6    |
|                       | $y_{B_0} [m]$        | 0.8     | -0.8    | 0       |
|                       | $z_{B_0} [m]$        | 1       | 1       | 1       |
|                       | $\psi_0 [rad]$       | 0       | 0       | 0       |
| <b>BRAZO ROBÓTICO</b> | $\theta_{1_0} [rad]$ | 0       | 0       | 0       |
|                       | $\theta_{2_0} [rad]$ | 0       | 0       | 0       |
|                       | $\theta_{3_0} [rad]$ | 0       | 0       | 0       |

Los parámetros de forma - orientación de formación deseados se definen en la Tabla 3.13.

**Tabla 3.13.** Parámetros deseados de forma y orientación para evasión de obstáculos.

| $d_{1d} [m]$ | $d_{2d} [m]$ | $\beta_d [rad]$ | $\phi_{Fd} [rad]$ | $\theta_{Fd} [rad]$ | $\psi_{Fd} [rad]$ |
|--------------|--------------|-----------------|-------------------|---------------------|-------------------|
| 2            | 2            | $\frac{\pi}{3}$ | 0                 | 0                   | $\frac{\pi}{6}$   |

Para la configuración de los obstáculos, se considera el campo potencial en tres dimensiones propuesto en la sección 1.3.10.2. La distancia de seguridad propuesta es  $d = 1.2 [m]$ . Los obstáculos se ubican en las posiciones indicadas en la Tabla 3.14, los cuales se ubican de tal forma que interfieran en la trayectoria de los robots.

**Tabla 3.14.** Posición de los obstáculos estáticos.

| Parámetro  | Obstáculo 1 | Obstáculo 2 | Obstáculo 3 |
|------------|-------------|-------------|-------------|
| $x_{obs0}$ | 0           | -2          | 2           |
| $y_{obs0}$ | 5           | 1           | -4          |
| $z_{obs0}$ | 3.4         | 3           | 2.7         |
| $r_0$      | 0.3         | 0.3         | 0.3         |

Para los controladores basados en espacio nulo con prioridad de postura de la ecuación (2.143), con prioridad de forma de la ecuación (2.116) y con prioridad de evasión de la ecuación (2.170), se utilizan las matrices que se muestran en las ecuaciones (3.8), (3.9) y (3.10).

$$K_s = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

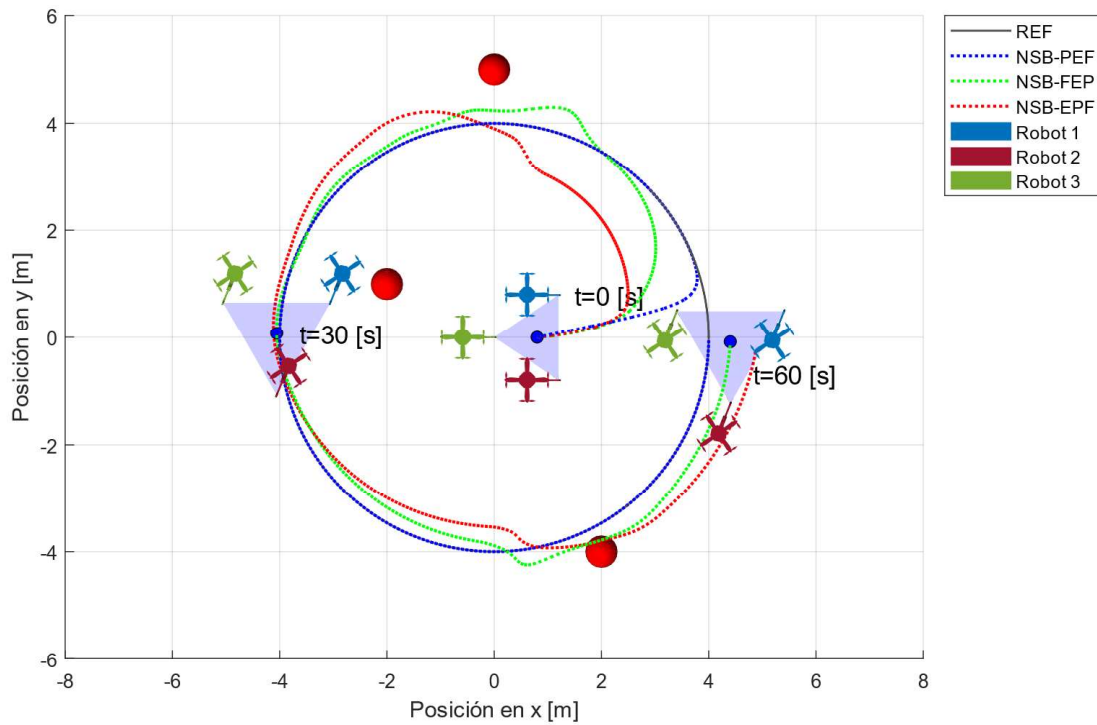
$$K_p = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

$$K_\phi = 2 \quad (3.10)$$

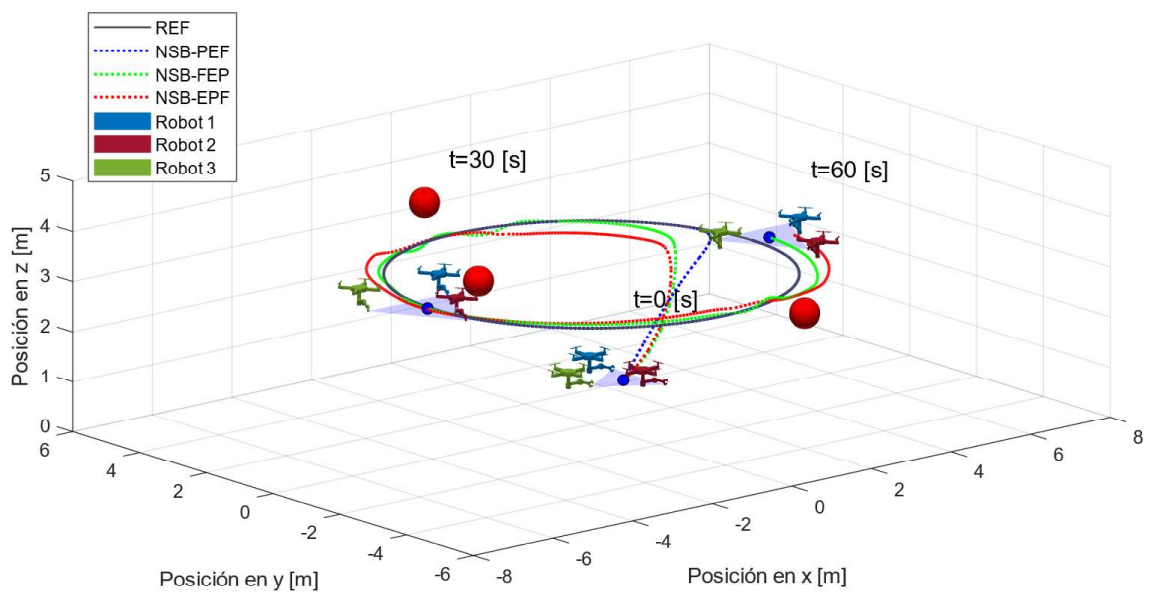
## 3.2.2 COMPARACIÓN DE LOS TRES CONTROLADORES DISEÑADOS.

### 3.2.2.1 Comparación de la trayectoria del centroide de la formación.

En las figuras Figura 3.44 y Figura 3.45 se realiza una comparación gráfica de la trayectoria del centroide según la prioridad de los controladores propuestos.



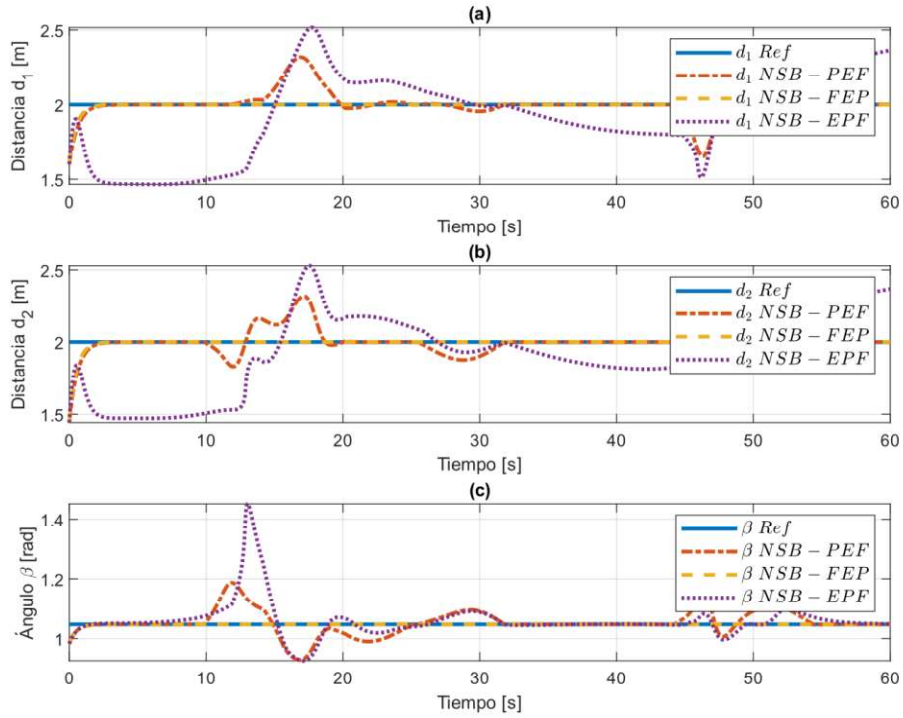
**Figura 3.44.** Trayectorias del centroide para cada controlador desde vista superior.



**Figura 3.45.** Trayectorias del centroide para cada controlador con vista isométrica.

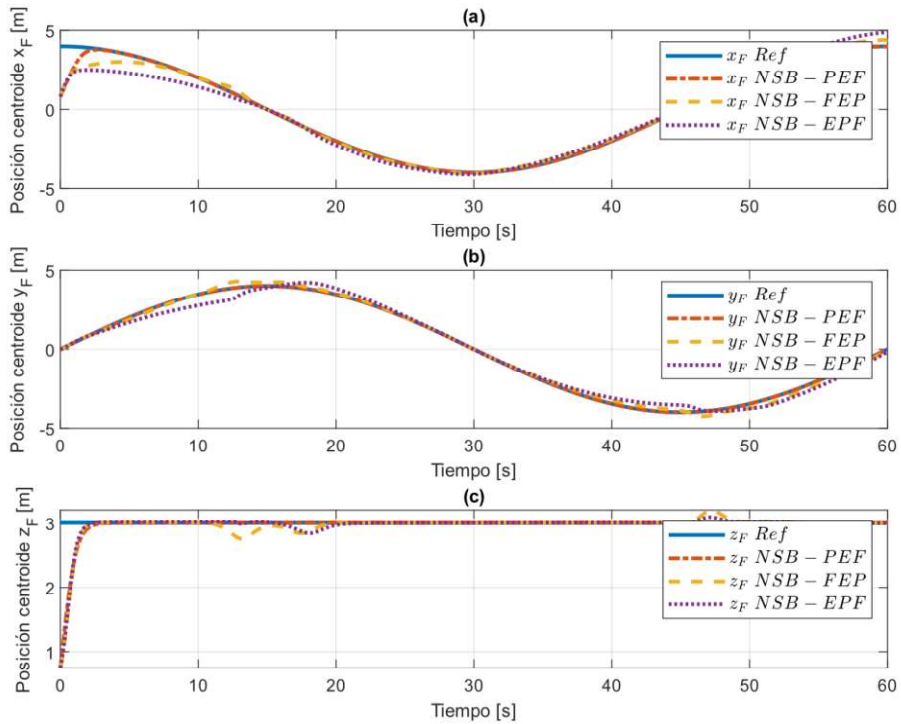
### 3.2.2.2 Salidas

La Figura 3.46 muestra las variables de forma para cada controlador propuesto.



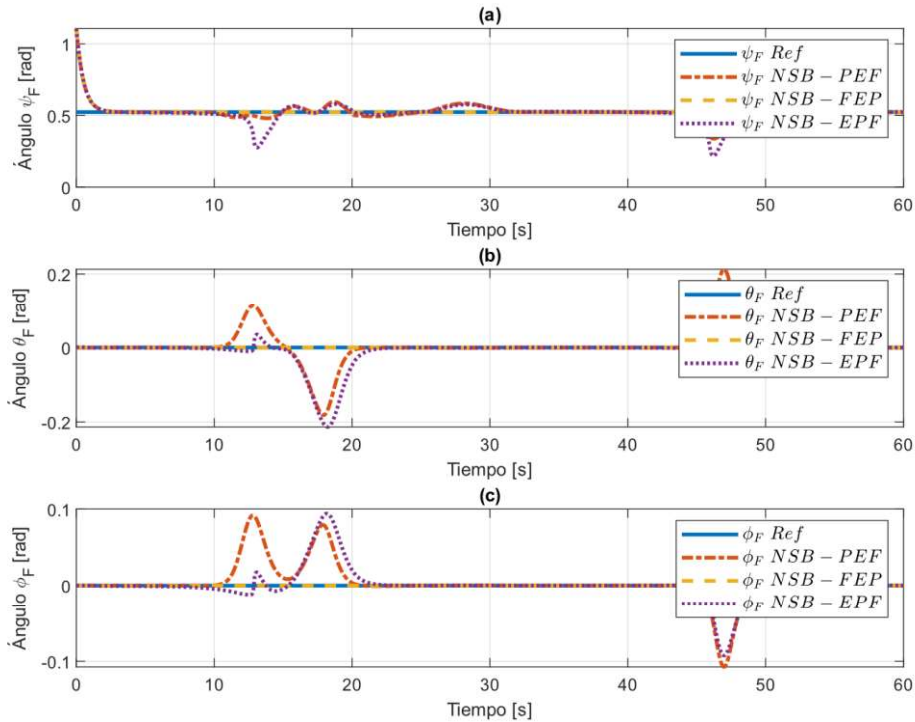
**Figura 3.46.** Variables de forma (a)  $d_1$ , (b)  $d_2$  y (c)  $\beta$  para cada controlador.

Las variables de postura se muestran en la Figura 3.47.



**Figura 3.47.** Variables de postura (a)  $x_F$ , (b)  $y_F$  y (c)  $z_F$  para cada controlador.

Las variables de orientación se muestran en la Figura 3.48.



**Figura 3.48.** Variables de orientación (a)  $\psi_F$ , (b)  $\theta_F$  y (c)  $\phi_F$  para cada controlador.

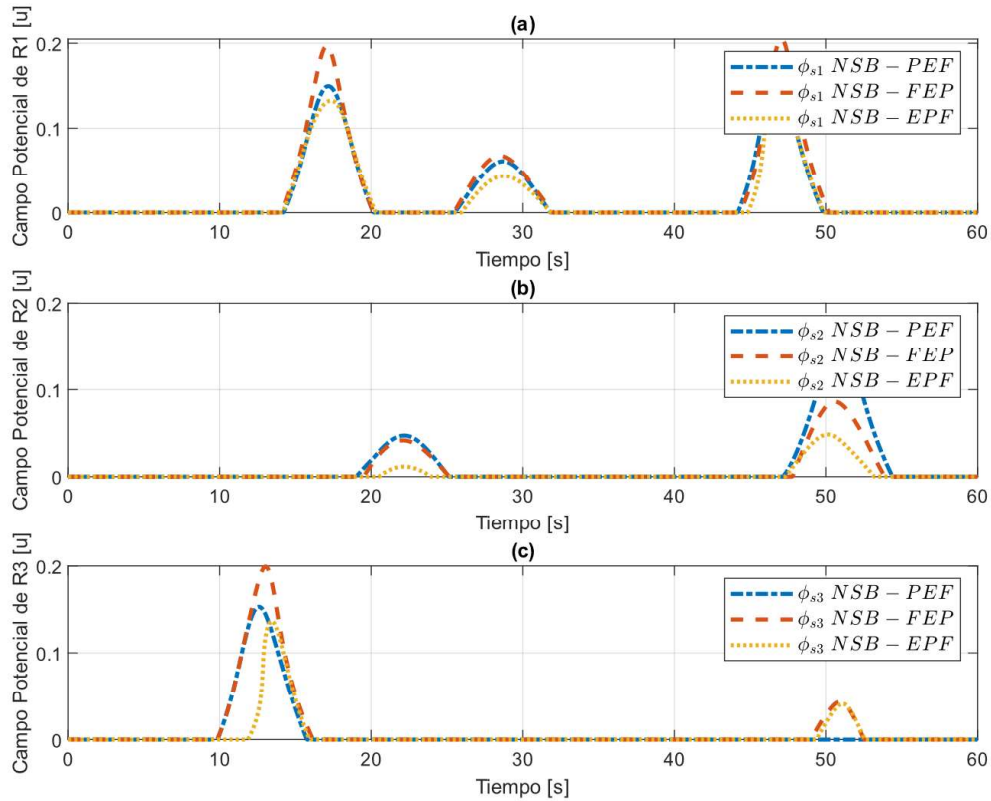
La Figura 3.46, Figura 3.47 y Figura 3.48 se muestra la señal de referencia y las señales de salida de los parámetros de forma, postura y orientación. En estas gráficas se observa la aparición de picos en las señales de salida los cuales representan el momento en que la formación modifica su estructura ante la presencia de obstáculos del controlador.

Para el controlador con prioridad de forma se tiene que las variables de postura presentan desviaciones de la referencia ya que se modifica la trayectoria del centroide para evadir los obstáculos, mientras que, las señales de forma-orientación se mantienen en la referencia durante toda la trayectoria manteniendo las características del triángulo de la formación.

Al contrario, para el controlador con prioridad de postura las señales que mantienen la referencia durante todo el trayecto son precisamente las de postura y se modifican las variables de forma-orientación para cumplir con la evasión de obstáculos.

Finalmente, para el controlador con prioridad de evasión se observa que se modifican tanto las variables de forma-orientación como las de postura debido a que la prioridad del controlador es la evasión.

Las señales del campo potencial se muestran en la Figura 3.49.



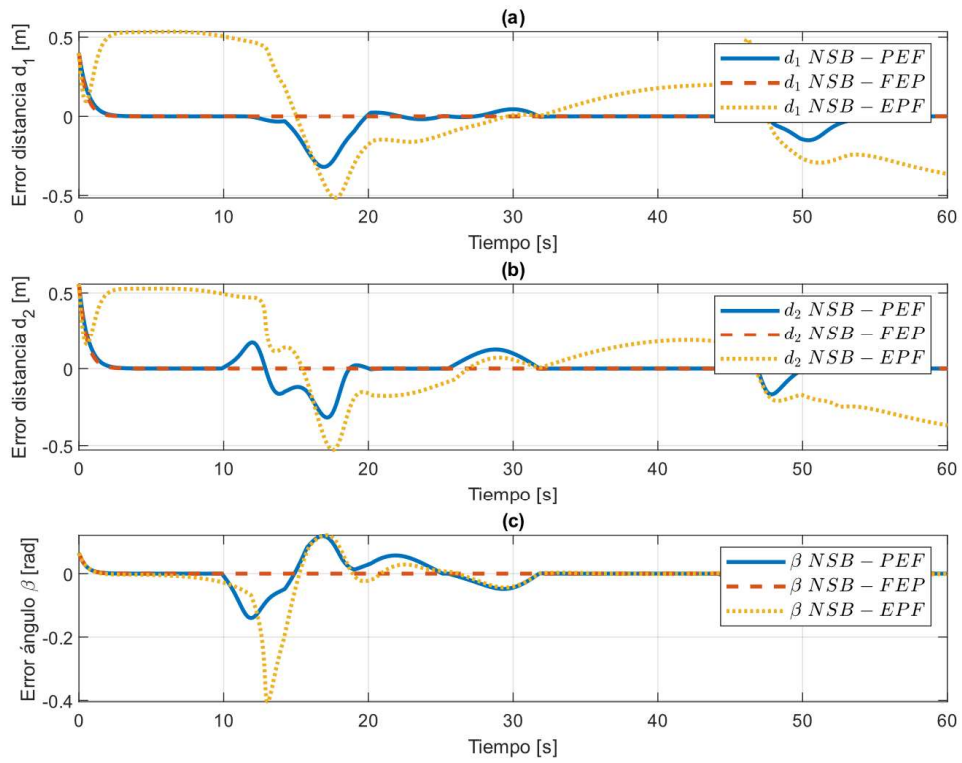
**Figura 3.49.** Valor del campo potencial para (a) Robot 1, (b) Robot 2 y (c) Robot 3.

En esta figura podemos observar como la función del campo se altera ante la presencia de obstáculos, mientras más cerca se encuentre el robot con el objeto el valor del campo incrementa, en cambio, su valor se hace cero cuando el robot se aleja. Además, se verifica que cuando la prioridad del controlador es la evasión el valor del campo potencial se mantiene menor que los otros controladores ante la presencia de obstáculos.

### 3.2.2.3 Errores.

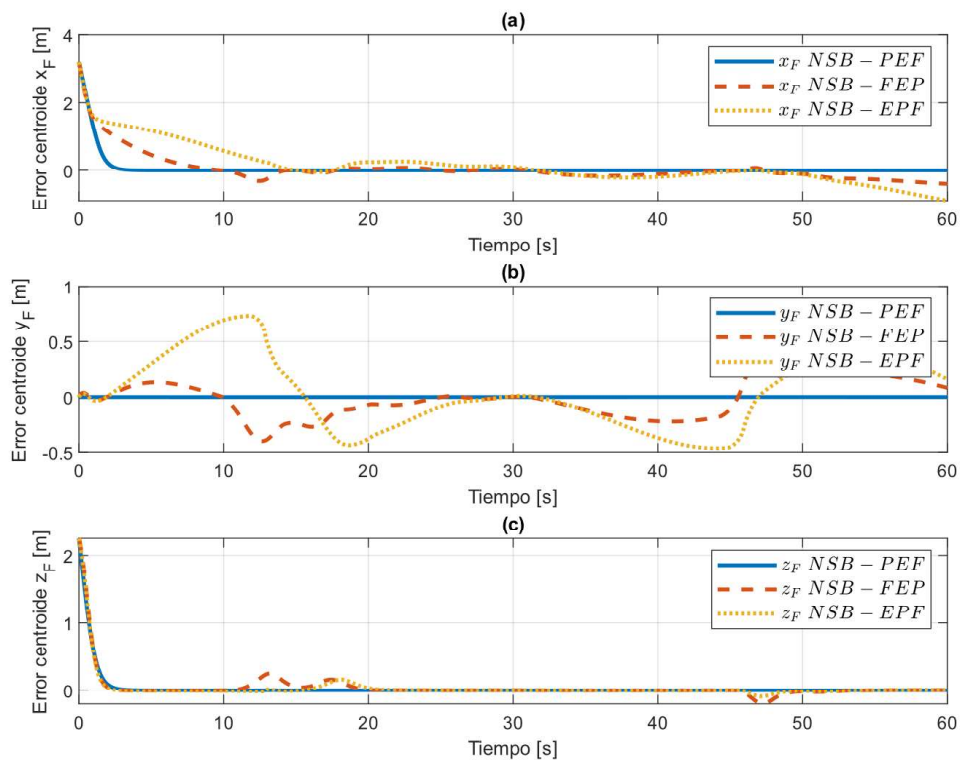
En la Figura 3.50, Figura 3.51 y Figura 3.52 se observan las señales de error de los parámetros de forma-orientación donde se tiene que cuando el controlador tiene prioridad de forma estos errores son cero a pesar de la presencia de obstáculos. Mientras que, en la Figura 3.51, se observa que para el controlador con prioridad de postura los errores de las variables de postura son cero aún con la presencia de obstáculos. El controlador con prioridad de evasión presenta errores en las variables de forma-orientación y postura.

Los errores de forma se muestran en la Figura 3.50.



**Figura 3.50.** Errores de las variables de forma para cada controlador, (a)  $d_1$ , (b)  $d_2$  y (c)  $\beta$ .

Los errores de postura se muestran en la Figura 3.51.



**Figura 3.51.** Errores en variables de postura para cada controlador, (a)  $x_F$ , (b)  $y_F$  y (c)  $z_F$ .

La Figura 3.52 muestra los errores de las variables de orientación.

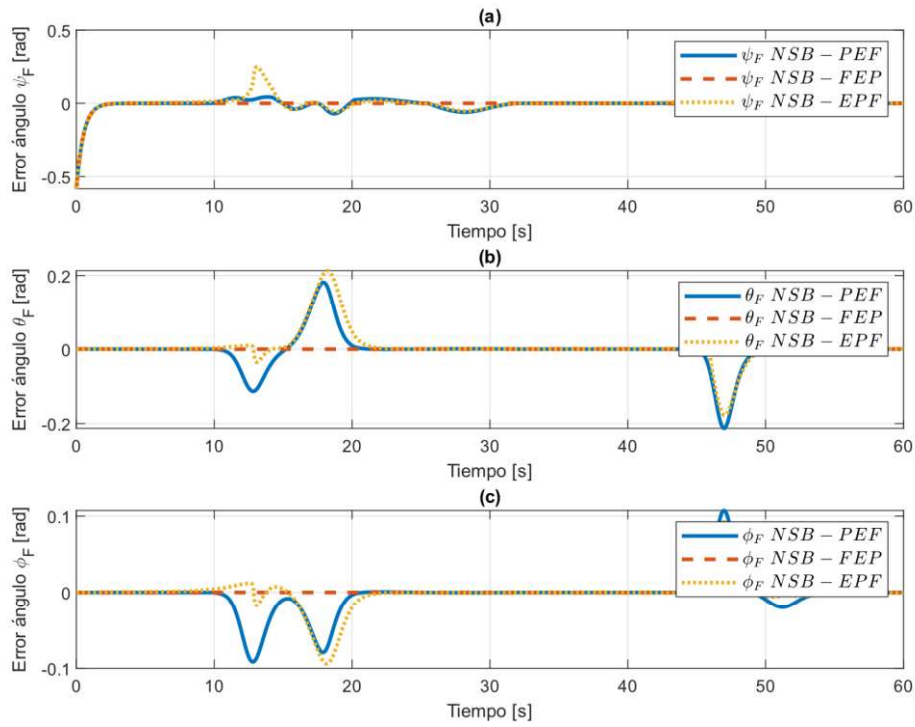


Figura 3.52. Error en variables de orientación para cada controlador, (a)  $\psi_F$ , (b)  $\theta_F$ , (c)  $\phi_F$ .

### 3.2.2.4 Trayectorias de cada robot y distancias entre cada uno y los obstáculos.

Con el fin de comprobar que los robots no colisionan con los obstáculos se presentan las gráficas de las trayectorias de cada robot y las distancias entre los robots y los obstáculos.

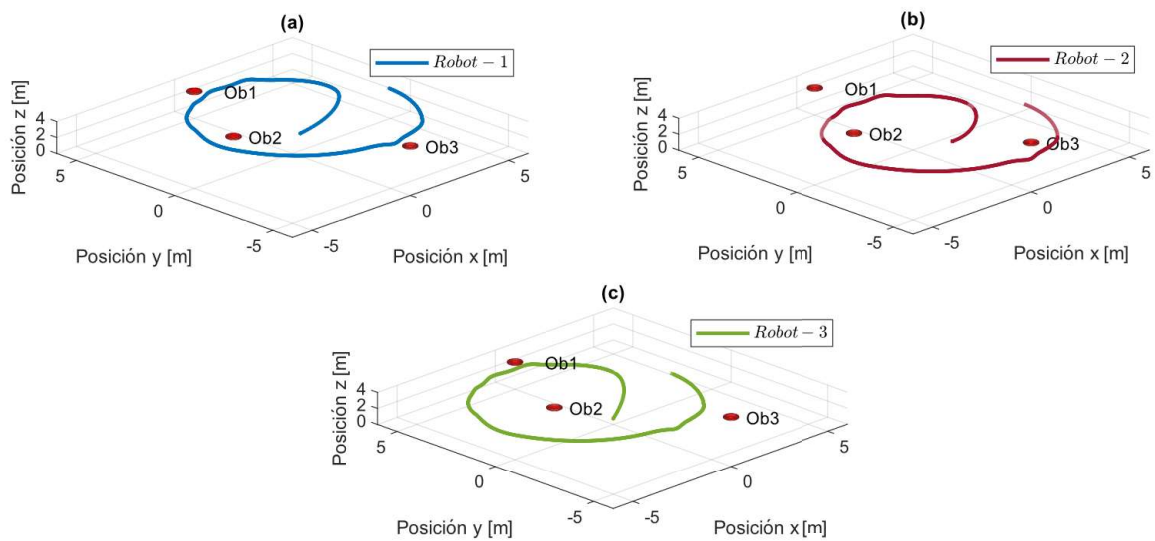
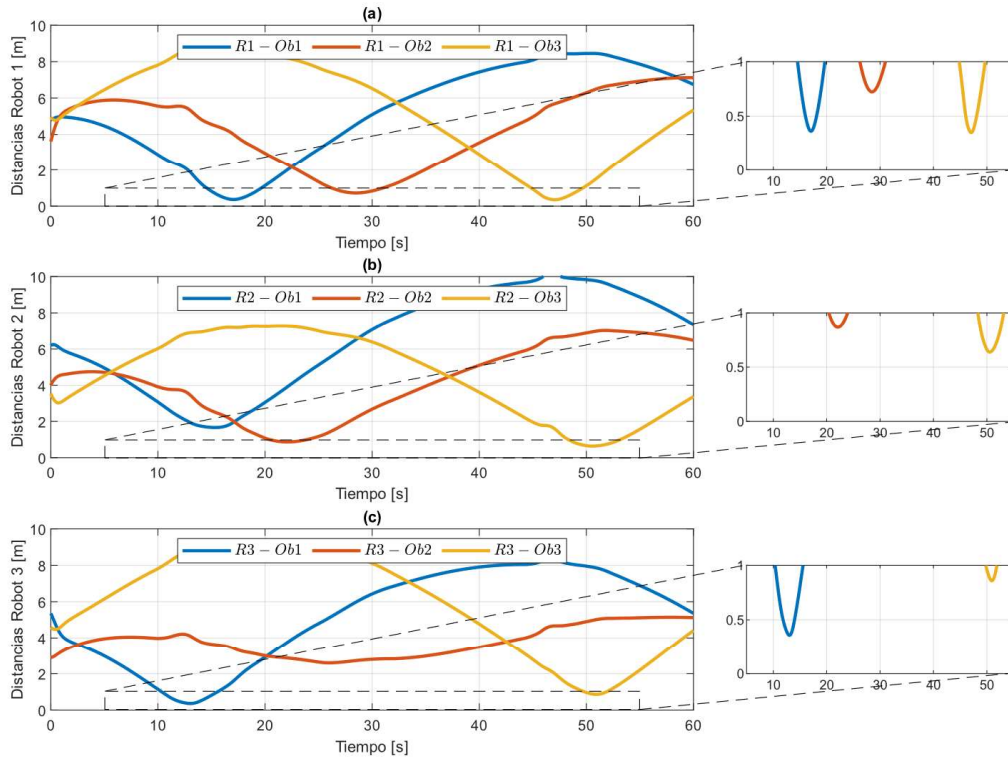


Figura 3.53. Trayectoria del (a) Robot 1, (b) Robot 2 y (c) Robot 3 para el controlador con prioridad de forma.

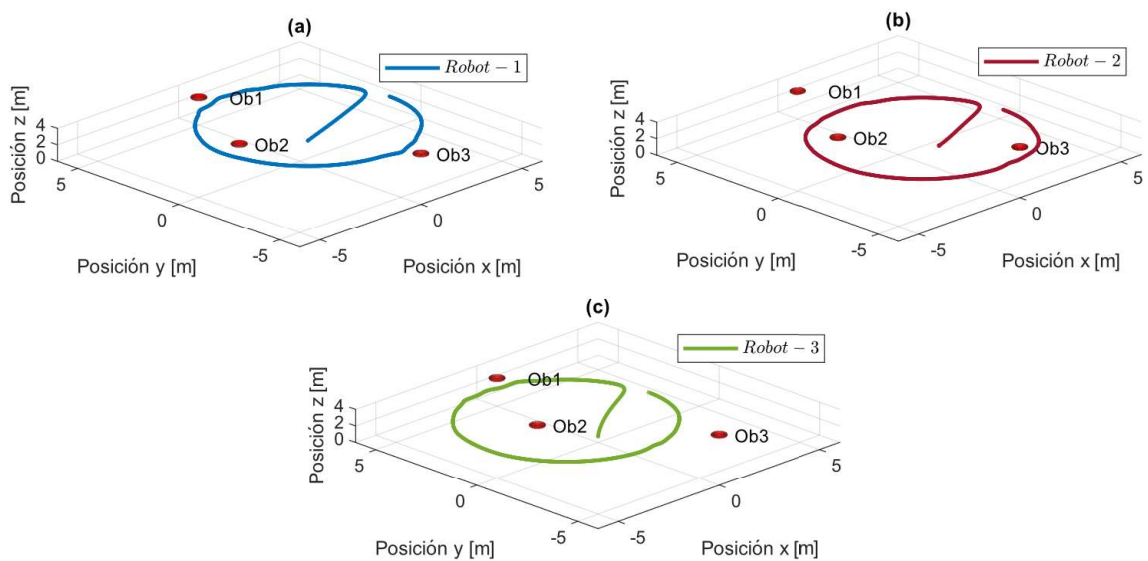




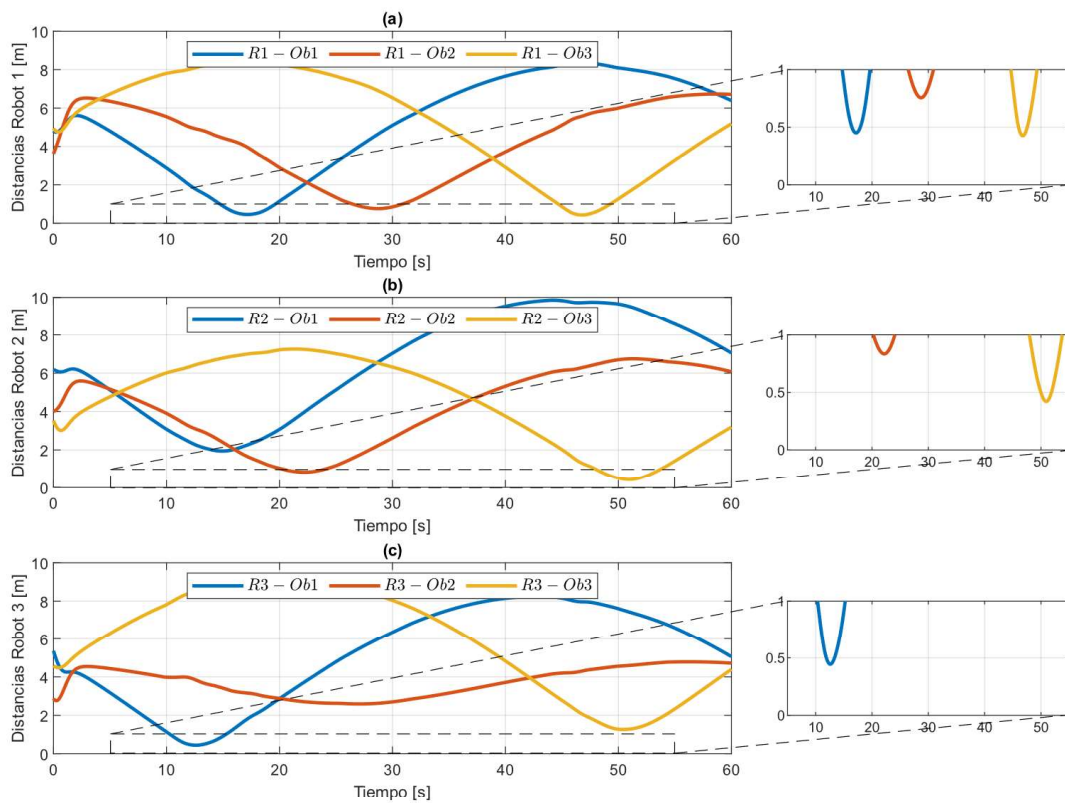
**Figura 3.54.** Distancias del (a) Robot 1, (b) Robot 2 y (c) Robot 3 respecto a cada obstáculo para el controlador con prioridad de forma.

En la Figura 3.53 y Figura 3.54 se muestran las trayectorias de cada robot y las distancias de cada uno respecto a los obstáculos para el controlador con prioridad forma.

Así mismo, para el controlador de postura, se muestra en la Figura 3.55 y Figura 3.56 las trayectorias de cada robot y las distancias entre cada uno y los obstáculos.

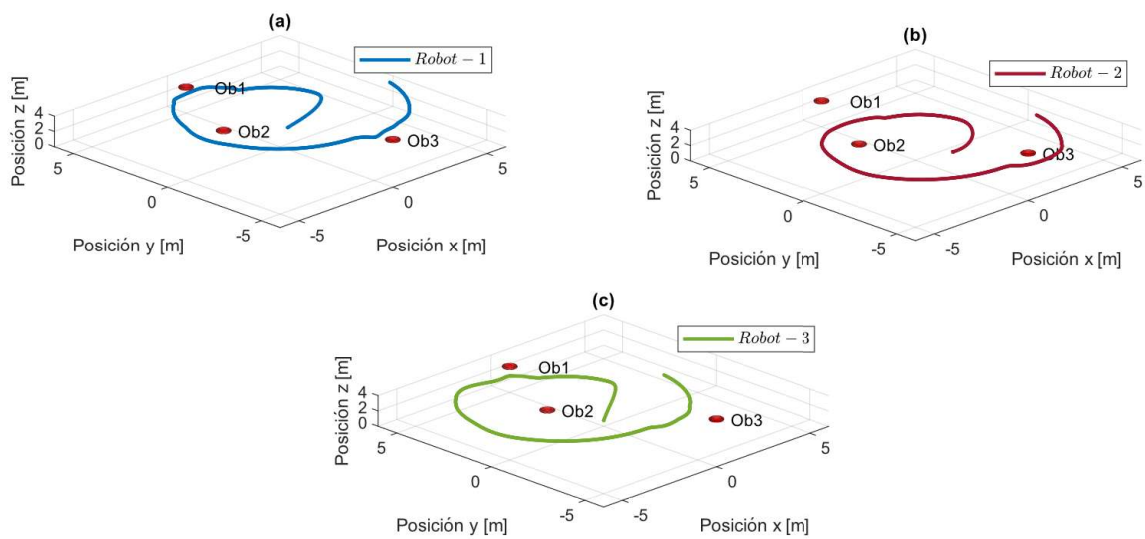


**Figura 3.55.** Trayectoria del (a) Robot 1, (b) Robot 2 y (c) Robot 3 para el controlador con prioridad de postura.

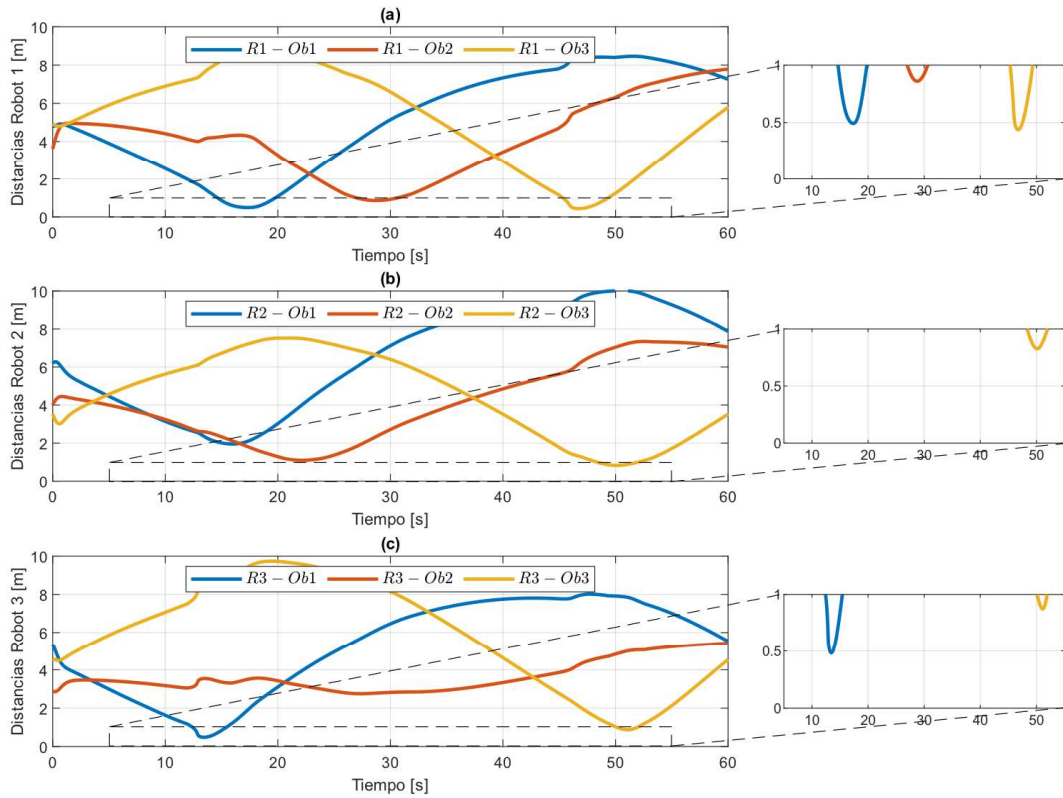


**Figura 3.56.** Distancias del (a) Robot 1, (b) Robot 2 y (c) Robot 3 respecto a cada obstáculo para el controlador con prioridad de postura

Igualmente, en la Figura 3.57 y Figura 3.58 se visualiza las trayectorias de cada robot y la gráfica de las distancias entre cada robot y los obstáculos para el controlador con prioridad de evasión.



**Figura 3.57.** Trayectoria del (a) Robot 1, (b) Robot 2 y (c) Robot 3 con sus distancias respecto a cada obstáculo para el controlador con prioridad de evasión.



**Figura 3.58.** Distancias del (a) Robot 1, (b) Robot 2 y (c) Robot 3 respecto a cada obstáculo para el controlador con prioridad de evasión.

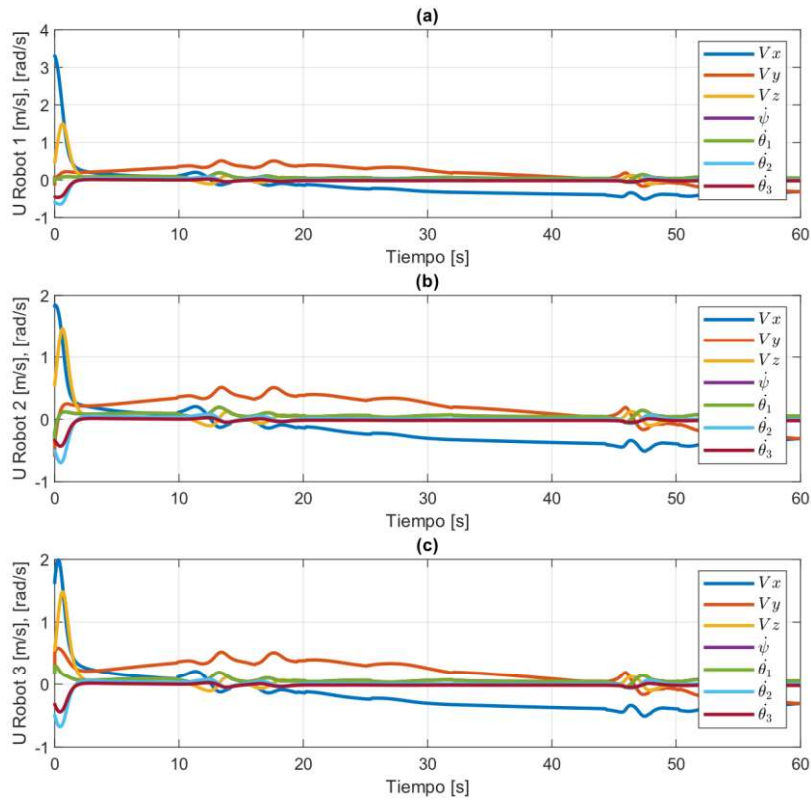
En la Figura 3.53, Figura 3.55 y Figura 3.57 se presentan las trayectorias de cada robot según cada controlador propuesto, donde se observa como los robots modifican su trayectoria para evadir los obstáculos.

En la Figura 3.54, Figura 3.56 y Figura 3.58 se muestran las gráficas de la distancia entre los robots y los obstáculos con el fin de comprobar que efectivamente cada uno de los manipuladores aéreos evade los obstáculos dado que las distancias no llegan a cero en ningún momento.

### 3.2.2.5 Acciones de control

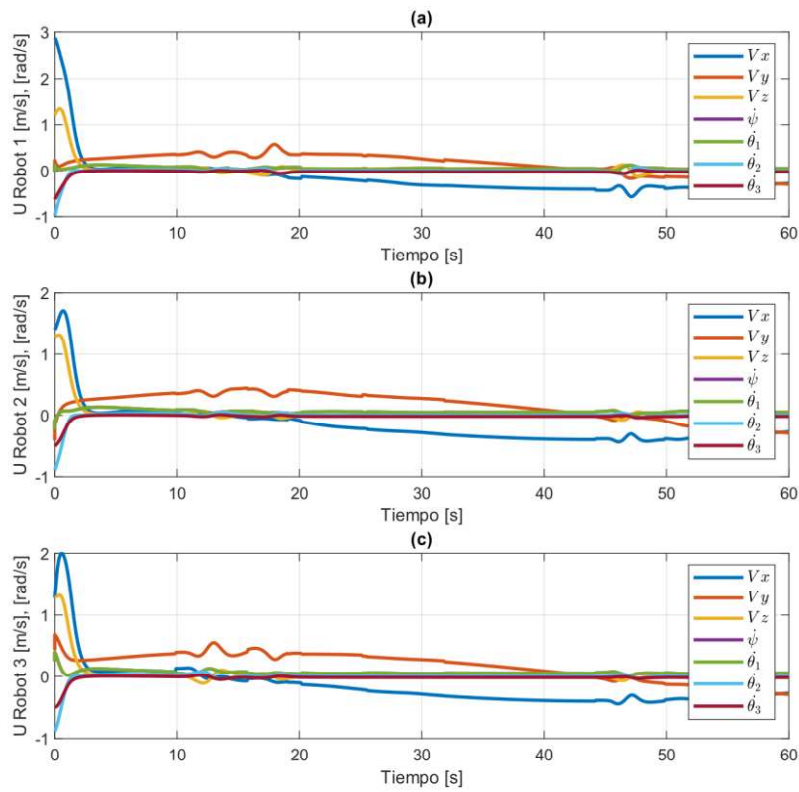
En la Figura 3.59, Figura 3.60 y Figura 3.61 se muestran las señales de acciones de control correspondientes a cada uno de los controladores. Donde se observa que las señales se modifican ante la presencia de obstáculos con el fin de que los robots cumplan con la evasión de obstáculos. El controlador con prioridad de evasión presenta variaciones más suaves a diferencia de los otros controladores.

La Figura 3.59. muestra las señales de control para el controlador forma.



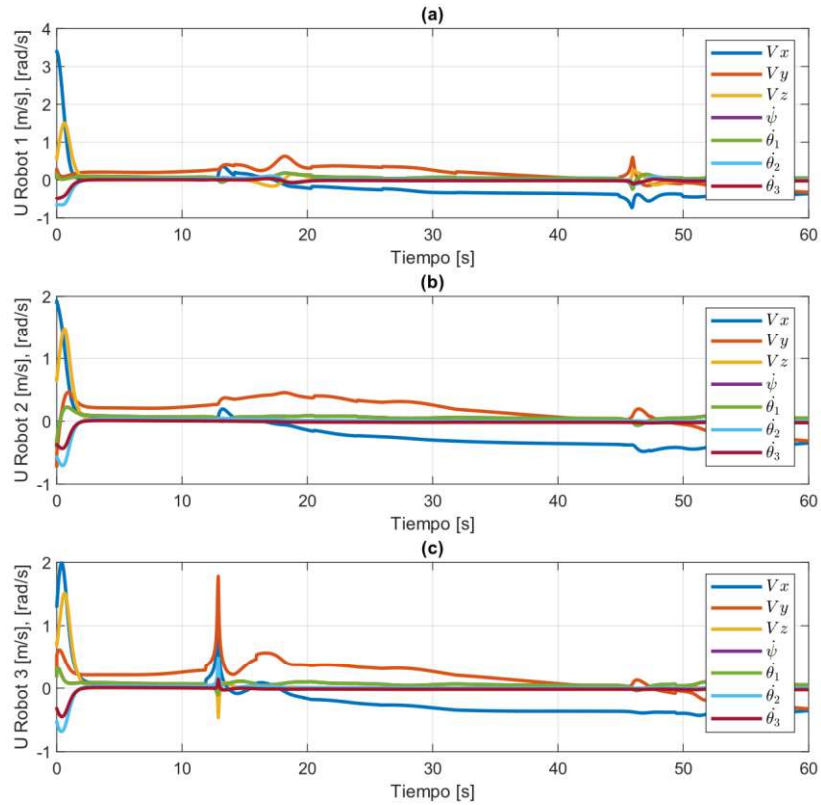
**Figura 3.59.** Acciones del controlador con prioridad de forma.

La Figura 3.60 muestra las señales de control para el controlador postura.



**Figura 3.60.** Acciones del controlador con prioridad de postura.

La Figura 3.61 muestra las señales de control para el controlador evasión.



**Figura 3.61.** Acciones del controlador con prioridad de evasión.

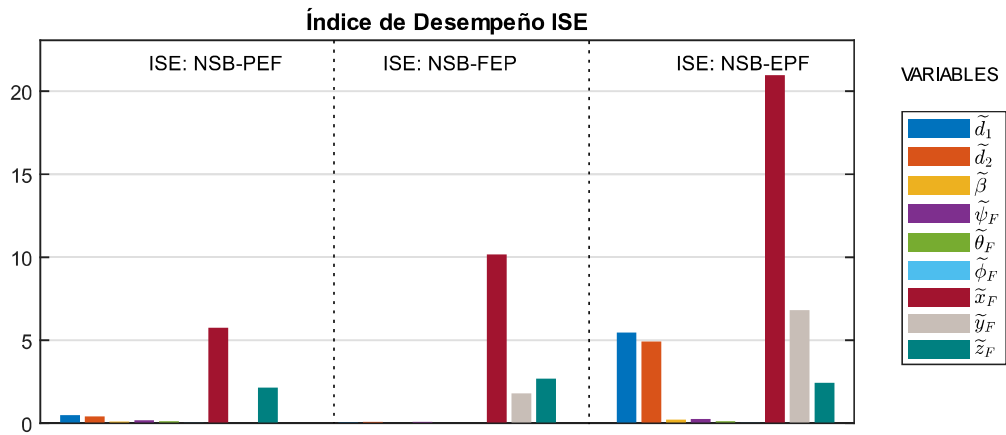
### 3.2.2.6 Índice de desempeño ISE

Finalmente, el desempeño de los controladores se evalúa según el índice de desempeño ISE, donde se comprueba según el valor del ISE la prioridad del controlador escogido.

**Tabla 3.15.** Valores del ISE para cada variable según el controlador.

| <b>Parámetros</b>  | <b>ISE</b>             |                          |                |
|--------------------|------------------------|--------------------------|----------------|
|                    | <b>NSB-PEF</b>         | <b>NSB-FEP</b>           | <b>NSB-EPF</b> |
| $\tilde{d}_1$      | 0.4848                 | 0.0411                   | 5.4605         |
| $\tilde{d}_2$      | 0.4153                 | 0.0818                   | 4.9305         |
| $\tilde{\beta}$    | 0.1052                 | 0.0010                   | 0.2315         |
| $\tilde{\phi}_F$   | 0.1785                 | 0.0899                   | 0.2682         |
| $\tilde{\theta}_F$ | 0.1246                 | $-8.3215 \times e^{-33}$ | 0.1262         |
| $\tilde{\psi}_F$   | 0.0362                 | $-2.7248 \times e^{-33}$ | 0.0274         |
| $\tilde{x}_F$      | 5.7483                 | 10.1636                  | 20.9633        |
| $\tilde{y}_F$      | $3.0260 \times e^{-6}$ | 1.8061                   | 6.8130         |
| $\tilde{z}_F$      | 2.1554                 | 2.6884                   | 2.4460         |

En la Figura 3.62 se presenta un gráfico de barras con el resultado de los índices de desempeño de cada controlador, para comparar de forma rápida el desempeño entre los controladores donde se observa de para este experimento que el controlador con prioridad de postura presenta el mejor desempeño.



**Figura 3.62.** Gráfico de barras del ISE para cada variable según el controlador.

Los resultados muestran que los tres controladores cumplen con el objetivo de control correctamente en función de la prioridad asignada, evadiendo obstáculos, manteniendo la forma y alcanzando la trayectoria propuesta.

## 4 CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Con el análisis de resultados obtenidos de la sección 3, se indica en esta sección las conclusiones y recomendaciones obtenidas y que constituyen la parte final del presente proyecto técnico.

### 4.1 CONCLUSIONES

- Se estudió y determinó el modelo cinemático de un manipulador aéreo compuesto por un cuadricóptero y un brazo robótico de tres grados de libertad, empleando la aproximación de ángulo pequeño en el modelo del cuadricóptero y el algoritmo de Denavit-Hartenberg para el brazo robótico y se comprobó el modelo obtenido mediante pruebas en lazo abierto.
- Se determinó y comprobó el modelo cinemático de una formación de tres manipuladores aéreos utilizando una configuración centralizada basada en estructura virtual verificando su funcionamiento con pruebas en lazo abierto.
- Se diseñó un controlador tipo PID y un controlador basado en espacio nulo que combina las tareas de forma y postura, para seguimiento de trayectoria aplicados a la formación de manipuladores aéreos comprobando su funcionamiento para diferentes tipos de trayectoria.
- Se diseñó controladores basados en espacio nulo para evasión de obstáculos aplicados a la formación de manipuladores aéreos, demostrando su funcionamiento al emplear distintas prioridades entre las tareas de control.
- Se diseñó una interfaz gráfica de usuario para observar el funcionamiento de los controladores de una forma interactiva. El uso de la interfaz gráfica de usuario facilita la visualización de resultados, a la vez que permite modificar parámetros como condiciones iniciales y valores de referencia.
- Se realizó pruebas de simulación de los controladores diseñados para seguimiento de trayectoria lo cual permitió realizar un análisis comparativo mediante el índice de desempeño ISE, observando que los resultados obtenidos son similares entre los tres controladores.
- Se realizó pruebas de simulación de los controladores diseñados para evasión de obstáculos comprobando que los tres controladores cumplen con el objetivo de control en función de la prioridad asignada.

## 4.2 RECOMENDACIONES

- Se sugiere buscar un método sistemático para sintonizar las constantes de los controladores tanto para seguimiento de trayectoria como para evasión de obstáculos ya que los parámetros de los controladores se escogieron de manera heurística en base a la respuesta del sistema, señal de error y acciones de control.
- Para futuros trabajos se recomienda obtener la dinámica del manipulador aéreo con el fin de obtener un modelo matemático que represente de una manera más completa el comportamiento del sistema y que permita diseñar otros esquemas de control que consideren perturbaciones y más complejidades al sistema de control.
- Se sugiere acoplar otros esquemas de control al enfoque de espacio nulos como un control por modos deslizantes (SMC) que ayude a mejorar el desempeño del sistema de control.



## 5 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] A. Barrientos, L. F. Peñín, y C. Balaguer, *Fundamentos de robótica*, 2a. ed. Madrid, España: McGraw-Hill España, 2007.
- [2] P. Corke, *Robotics, Vision & Control*, 2a. ed., vol. 73. Berlin, Alemania: Springer International Publishing, 2017.
- [3] M. Ben-Ari y F. Mondada, *Elements of Robotics*, 1a. ed. Cham, Switzerland: Springer International Publishing, 2017.
- [4] Erwin Aligam, “All about mobile robots”, 2017. [En línea]. Disponible en: <http://www.mobilerobots.pl/>. [Consultado: 10-may-2019].
- [5] M. Fathallah, F. Abdelhedi, y N. Derbel, “A synchronizing second order sliding mode control applied to decentralized time delayed multi-agent robotic systems: Stability Proof”, *Adv. Sci. Technol. Eng. Syst. J.*, vol. 2, pp. 160–170, abr. 2017, doi: 10.25046/aj020321.
- [6] H. Bonyan Khamseh, F. Janabi-Sharifi, y A. Abdessameud, “Aerial manipulation—A literature survey”, *Rob. Auton. Syst.*, vol. 107, pp. 221–235, sep. 2018, doi: 10.1016/j.robot.2018.06.012.
- [7] M. Conner, “Global Hawk | NASA”, 2017. [En línea]. Disponible en: <https://www.nasa.gov/centers/armstrong/aircraft/GlobalHawk/index.html>. [Consultado: 10-may-2019].
- [8] DJI, “DJI Mavic Air - Foldable 4K Drone - DJI”, 2017. [En línea]. Disponible en: <https://www.dji.com/mavic-air>. [Consultado: 10-may-2019].
- [9] A. Nemati y M. Kumar, “Modeling and control of a single axis tilting quadcopter”, *Proc. Am. Control Conf.*, pp. 3077–3082, 2014, doi: 10.1109/ACC.2014.6859328.
- [10] S. Bouabdallah y R. Siegwart, “Towards Autonomous Indoor Micro VTOL”, *Auton. Robots*, vol. 18, pp. 171–183, 2005.
- [11] M. Orsag, C. Korpela, P. Oh, y S. Bogdan, *Aerial Manipulation*, 1a ed. Cham, Switzerland: Springer International Publishing, 2018.
- [12] M. Spong, Mark W; Hutchinson, Seth; Vidyasagar, *Robot dynamics and control*, vol. 28, núm. 3. Wiley, 2005.
- [13] Industrial Robots From ABB Robotics, “IRB 140 - Industrial Robots (Robotics)”, 2019.

- [En línea]. Disponible en: <https://new.abb.com/products/robotics/industrial-robots/irb-140>. [Consultado: 14-may-2019].
- [14] S. Kumar Saha, *Introducción a la robótica*, 1a ed. México DF, México: McGraw-Hill España, 2010.
- [15] K. P. Valavanis y G. J. Vachtsevanos, *Handbook of unmanned aerial vehicles*. Dordrecht, Países Bajos: Springer Netherlands, 2015.
- [16] G. Heredia *et al.*, “Control of a multicopter outdoor aerial manipulator”, en *IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems*, 2014, pp. 3417–3422, doi: 10.1109/IROS.2014.6943038.
- [17] C. Rosales, P. Leica, M. Sarcinelli-Filho, G. Scaglia, y R. Carelli, “3D Formation Control of Autonomous Vehicles Based on Null-Space”, *J. Intell. Robot. Syst. Theory Appl.*, vol. 84, núm. 1–4, pp. 453–467, dic. 2016, doi: 10.1007/s10846-015-0329-5.
- [18] X. Li, J. Xiao, y Z. Cai, “Backstepping based multiple mobile robots formation control”, en *2005 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, IROS*, 2005, pp. 1313–1318, doi: 10.1109/IROS.2005.1545161.
- [19] D. Cai, J. Sun, y S. Wu, “UAVs formation flight control based on behavior and virtual structure”, *Commun. Comput. Inf. Sci.*, vol. 325, núm. 3, pp. 429–438, 2012, doi: 10.1007/978-3-642-34387-2\_49.
- [20] C. B. Low, “A dynamic virtual structure formation control for fixed-wing UAVs”, en *IEEE International Conference on Control and Automation, ICCA*, 2011, pp. 627–632, doi: 10.1109/ICCA.2011.6137877.
- [21] M. A. Haidekker, *Linear Feedback Controls: The Essentials*, 2a ed. Athens, GA, USA: Elsevier, 2013.
- [22] A. Marino, “A Null-Space-based Behavioral Approach to Multi-Robot Patrolling”, Università degli Studi della Basilicata, Potenza, Italia, 2004.
- [23] P. B. Laval, “Null space, column space, row space”, 2010. [En línea]. Disponible en: <http://math.kennesaw.edu/~plaval/math3260/rowcolspaces.pdf>.
- [24] R. Macausland, “The Moore-Penrose Inverse and Least Squares”, *Advanced Topics in Linear Algebra*, 2014. [En línea]. Disponible en: <http://buzzard.ups.edu/courses/2014spring/420projects/math420-UPS-spring-2014-macausland-pseudo-inverse.pdf>. [Consultado: 30-may-2019].

- [25] A. J. Laub, *Matrix Analysis for Scientists and Engineers*, 1a ed. Los Angeles, California: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2004.
- [26] S. Chiaverini, "Singularity-robust task-priority redundancy resolution for real-time kinematic control of robot manipulators", *IEEE Trans. Robot. Autom.*, vol. 13, núm. 3, pp. 398–410, jun. 1997, doi: 10.1109/70.585902.
- [27] N. Bloise, E. Capello, M. Dentis, y E. Punta, "Obstacle Avoidance with Potential Field Applied to a Rendezvous Maneuver", *Appl. Sci.*, vol. 7, núm. 10, p. 1042, oct. 2017, doi: 10.3390/app7101042.
- [28] P. Leica Arteaga, G. Chavez Garcia, A. Rosales, F. Roberti, J. Toibero, y R. Carelli Albarracin, "Strategy Based on Multiple Objectives and Null Space for the Formation of Mobile Robots and Dynamic Obstacle Avoidance", *Rev. Politécnica*, vol. 33, núm. 1, 2014.
- [29] S. Mohammad Khansari-Zadeh y A. Billard, "A dynamical system approach to realtime obstacle avoidance", *Auton. Robots*, vol. 32, núm. 4, pp. 433–454, may 2012, doi: 10.1007/s10514-012-9287-y.
- [30] R. M. Murray, Z. Li, H. Kong, y S. S. Sastry, *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*, 1a ed. Florida, Estados Unidos: CRC Press, 1994.
- [31] M. (Mathukumalli) Vidyasagar, *Nonlinear systems analysis*, 1a ed. New Jersey, Estados Unidos: Prentice Hall, 2002.
- [32] M. A. Yopez, "Funciones de Lyapunov y Algunas Aplicaciones", Universidad Veracruzana, 2013.
- [33] R. C. Dorf y R. H. Bishop, *Sistemas de control moderno*, 10a ed., vol. 1. Madrid, España: Pearson Education, 2005.
- [34] C. A. Smith y A. Corripio, *Control Automático de Procesos. Teoría y Práctica*, 3a ed. México DF, México: Limusa, 2005.

# ANEXOS

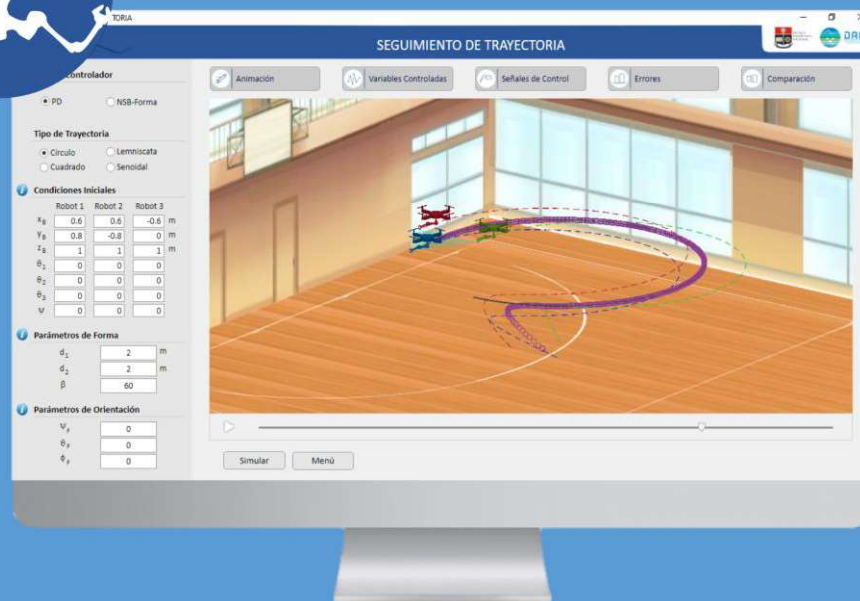
ANEXO A: MANUAL DE USUARIO



ESCUELA  
POLITÉCNICA  
NACIONAL

# MANUAL DE USUARIO

## PARA MANEJO DE INTERFAZ





## CONTENIDO

- A.1. Ejecución de la interfaz
- A.2. Visión general de la aplicación
- A.3. Pantallas
- A.4. Proceso para una correcta simulación



## A.1. Visión general de la aplicación

Esta interfaz de usuario fue diseñada para observar el funcionamiento de controladores tipo PID y basado en espacio nulo aplicados al seguimiento de trayectoria y evasión de obstáculos de una formación de manipuladores aéreos. Le permite al usuario visualizar, comprender y estudiar de una forma interactiva el control de este sistema.

Dentro de la interfaz se permite modificar ciertas variables como condiciones iniciales, tipo de trayectoria, parámetros de la formación y posición de obstáculos. Los resultados que se pueden observar son: señales de errores, acciones de control, comparación de desempeño entre controladores y una animación del movimiento de la formación de robots a través de las trayectorias elegidas.

Para el desarrollo de esta interfaz se utilizó la plataforma Simulink de MATLAB como herramienta de simulación para los sistemas de control, mientras que para integrar los resultados de la simulación en una interfaz gráfica se empleó la herramienta App Designer.

## A.2. Ejecución de la interfaz

Para la ejecución de la interfaz es necesario disponer de la versión MATLAB R2019b o superior y seguir el siguiente procedimiento:

- Arrancar el programa MATLAB y en la sección Carpeta Actual (Current Folder), cargar la carpeta "Interfaz Formación de Manipuladores Aéreos" como se observa en la Figura A.1, en la cual se encuentran los archivos necesarios para la ejecución de la interfaz.

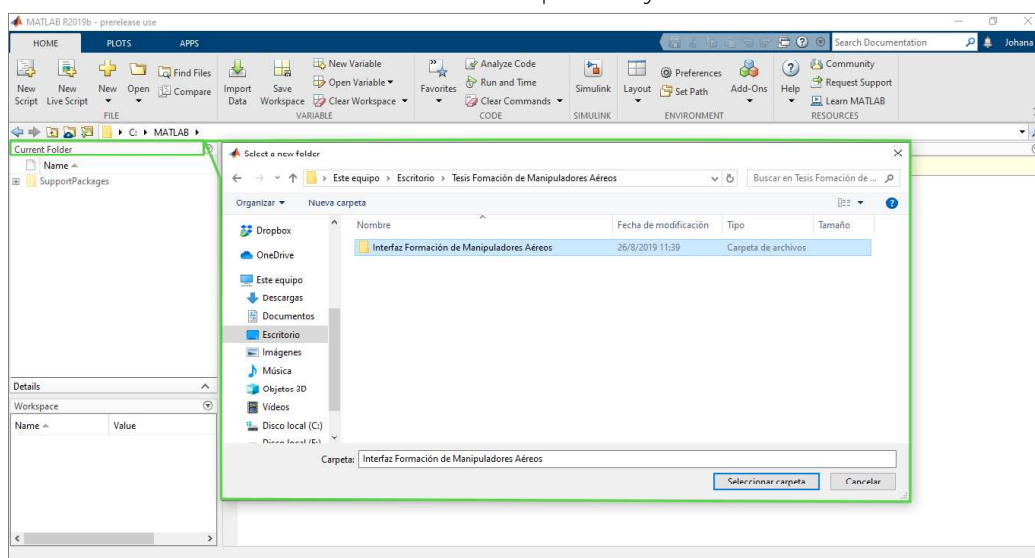


Figura A.1. Selección de la carpeta "Interfaz Formación de Manipuladores Aéreos"



- Buscar el archivo "INICIO.mlapp" y dar clic derecho, aparecerá una lista de opciones de las cuales se debe seleccionar la opción Correr (Run) como se muestra en la Figura A.2. A continuación, se desplegará la pantalla de inicio de la interfaz.

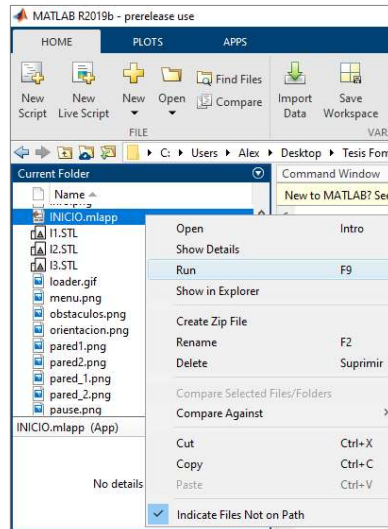


Figura A.2. Ejecución de la interfaz.

## A.3. Pantallas

Para la interfaz se desarrollaron cuatro pantallas principales: inicio, seguimiento de trayectoria, evasión de obstáculos e información.

Ventana de inicio



Figura A.3. Ventana de Inicio





En la ventana de inicio de la Figura A.3 se muestra una presentación de la interfaz. Esta pantalla además cuenta con un botón "Menú" con el cuál se despliega una ventana en la que se muestra tres opciones como se observa en la Figura A.4:

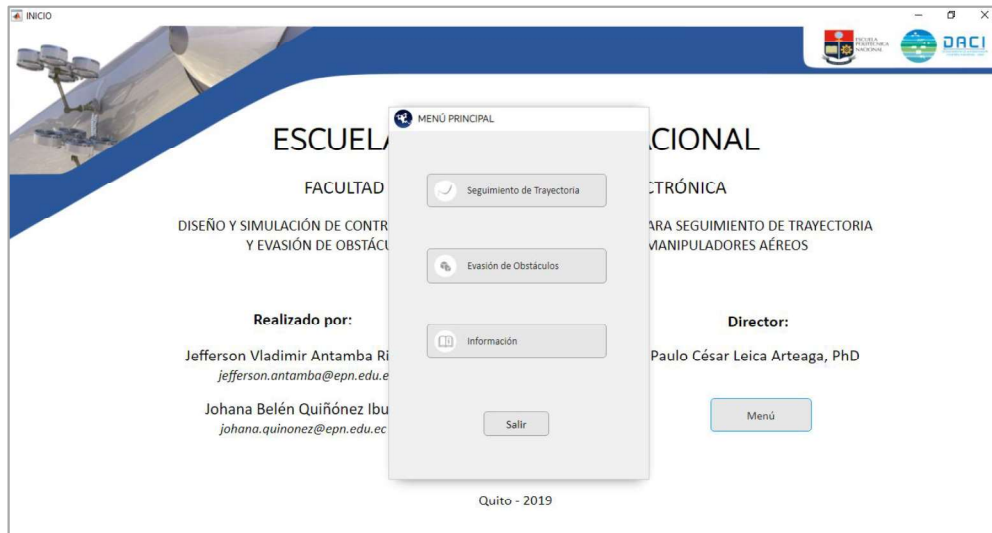


Figura A.4. Ventana Menú Principal

- **Seguimiento de trayectoria:** Permite abrir la ventana en la que se observa los resultados para los controladores de seguimiento de trayectoria.
- **Evasión de obstáculos:** Permite abrir la ventana en la que se observa los resultados para los controladores de evasión de obstáculos.
- **Información:** Permite abrir una ventana dónde se muestra una descripción del modelo de la planta, los controladores diseñados y una explicación sobre el manejo de la interfaz.

### Ventana de seguimiento de trayectoria



Figura A.5. Ventana de Seguimiento de trayectoria



En esta ventana se cuenta con dos secciones: configuraciones y visualización de resultados como se observa en la Figura A.5. Además, la ventana presenta dos botones: “Simular” y “Menú” los cuales se describen más adelante y se ubican en la parte inferior de la pantalla.

**A - Sección configuraciones:** dentro de esta sección se presentan cinco paneles de configuración de parámetros como se tiene en la Figura A.5.

SEGUIMIENTO DE TRAYECTORIA

**Tipo de Controlador**

PD  NSB-Forma  
 NSB-Postura

**Tipo de Trayectoria**

Círculo  Lemniscata  
 Cuadrado  Senoidal

**Condiciones Iniciales**

|                 | Robot 1 | Robot 2 | Robot 3 |     |
|-----------------|---------|---------|---------|-----|
| $x_{\text{pp}}$ | 0.6     | 0.6     | -0.6    | [m] |
| $y_{\text{pp}}$ | 0.8     | -0.8    | 0       | [m] |
| $z_{\text{pp}}$ | 1       | 1       | 1       | [m] |
| $\psi$          | 0       | 0       | 0       | [°] |
| $\theta_1$      | 0       | 0       | 0       | [°] |
| $\theta_2$      | 0       | 0       | 0       | [°] |
| $\theta_3$      | 0       | 0       | 0       | [°] |

**Parámetros de Forma**

$d_1$  2 [m]  
 $d_2$  2 [m]  
 $\beta$  60 [°] 1.047 [rad]

**Parámetros de Orientación**

|            |       |         |
|------------|-------|---------|
| $\psi_F$   | 0 [°] | 0 [rad] |
| $\theta_F$ | 0 [°] | 0 [rad] |
| $\phi_F$   | 0 [°] | 0 [rad] |

Figura A.5. Sección de configuraciones

- A.1 - Tipo de controlador: se puede elegir entre un controlador tipo PD (PD) y un controlador basado en espacios nulos con prioridad forma-postura (NSB-Forma) o prioridad de postura-forma (NSB—Postura).
- A.2 - Tipo de trayectoria: se puede elegir entre una trayectoria circular, lemniscata, cuadrada y senoidal.
- A.3 - Condiciones iniciales: en este panel se configura las posiciones lineales y angulares de cada robot.
- A.4 - Parámetros de forma: en este panel se configura los valores de referencia para los parámetros de forma.
- A.5 - Parámetros de orientación: en este panel se configura los valores de referencia para los parámetros de orientación.



- Botones de Información (I1, I2 y I3): En la parte izquierda de los paneles condiciones iniciales, parámetros de forma y parámetros de orientación se cuenta con botones de información los cuales despliegan imágenes de ayuda donde describen detalladamente a qué corresponde cada parámetro como se observa en la Figura A.6, Figura A.7 y Figura A.8.

Botón I1:

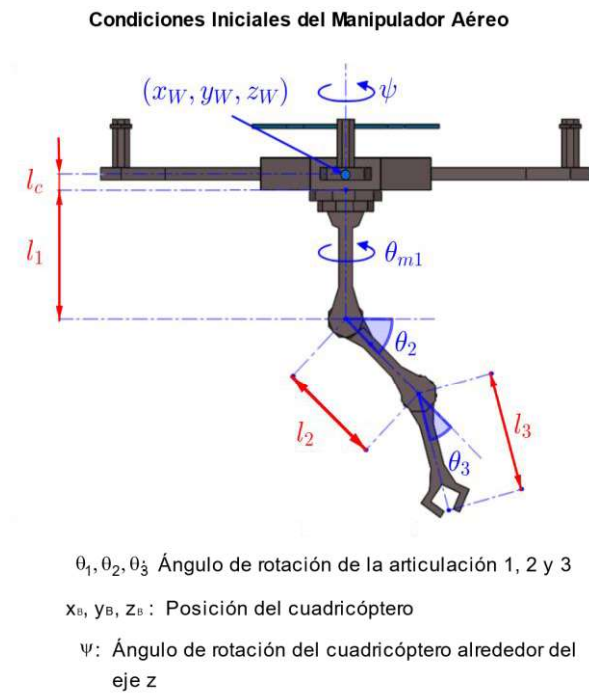


Figura A.6. Imagen de información del panel de condiciones iniciales

Botón I2:

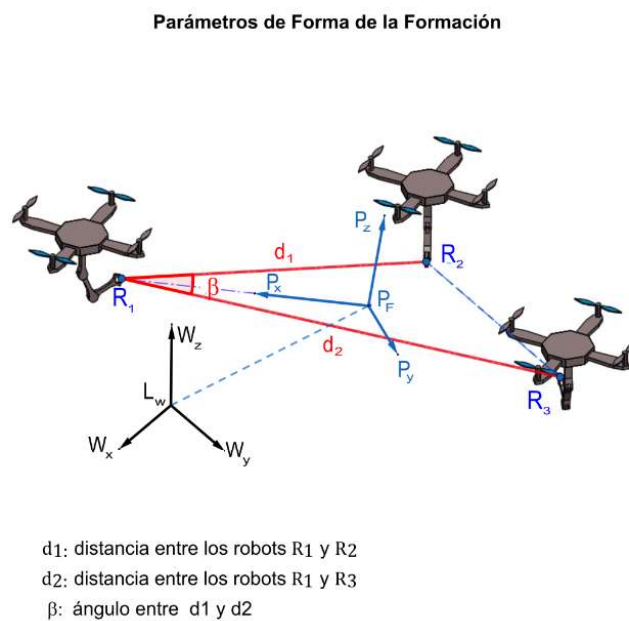


Figura A.7. Imagen de información del panel de parámetros de forma



Botón I3:

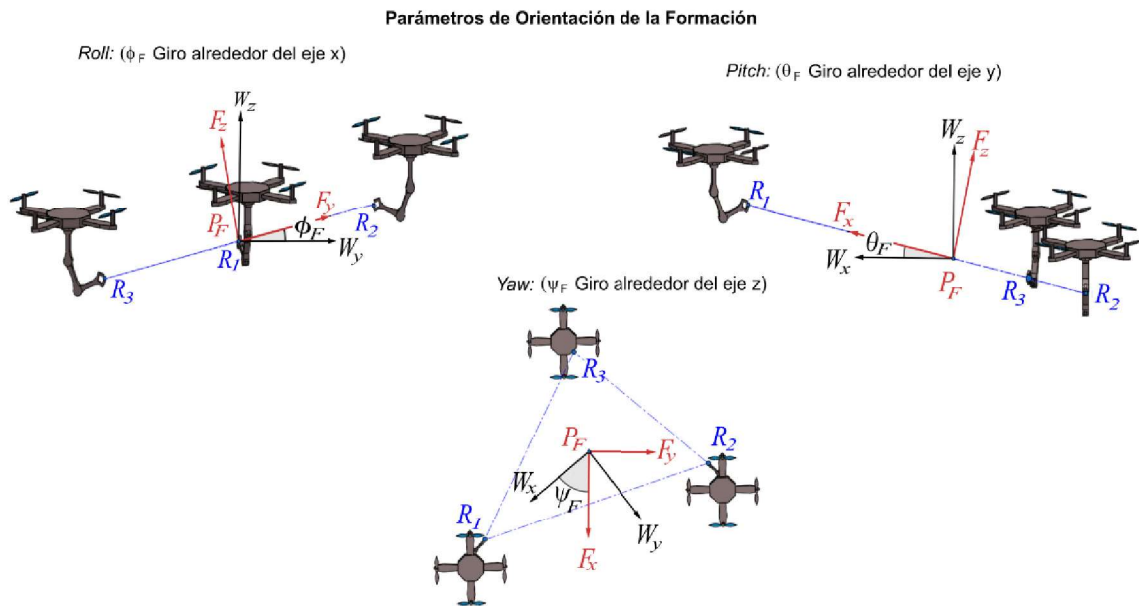


Figura A.8. Imagen de información del panel de parámetros de orientación

**B - Sección de visualización de resultados:** En esta sección se cuenta con cinco botones como se observa en la Figura A.9 con los cuales se despliegan ventanas de visualización de resultados como se detalla a continuación.

- B.1 - Animación: en este panel se muestra una animación 3D del movimiento de la formación de robots a través de las trayectorias seleccionadas. Dentro del panel se cuenta con un botón de reproducir el cual inicia la animación, un botón de detener para pausar el movimiento y una barra de desplazamiento para ubicar a los robots en un determinado punto de la trayectoria.
- B.2 - Variables Controladas: en este panel se muestra las señales correspondientes a los valores de referencia y los valores de salida de los parámetros de forma, orientación y postura controlados.
- B.3 - Señales de Control: en este panel se muestran las señales de control de velocidades para cada uno de los robots.
- B.4 - Errores: en este panel se muestran las señales de errores de los parámetros de forma, orientación y postura controlados.
- B.5 - Comparación: en este panel se muestra una comparación de las variables controladas de los dos controladores, una tabla y un gráfico de barras con los índices de desempeño ISE.

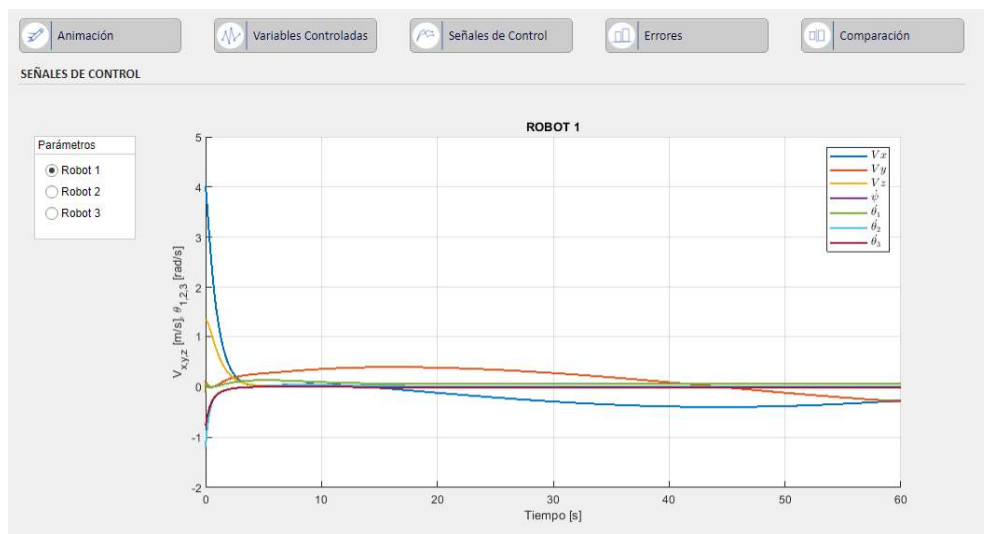
**Botón 1 – Simular:** con este botón se inicia la simulación de los archivos de Simulink y se cargan los resultados en los respectivos paneles.



**Botón 2 – Menú:** este botón permite cerrar la ventana de seguimiento de trayectoria y regresar a la pantalla de inicio, después de aparecer una ventana de confirmación de salida.



(a)



(b)

**Figura A.9.** Sección visualización de resultados. (a) Panel de animación (b) Panel de señales de control.

### Ventana de evasión de obstáculos

El diseño de esta ventana es análogo a la ventana de seguimiento de trayectoria como se observa en la Figura A.10, pero añadiendo componentes adicionales correspondientes a los parámetros de posición y radio de cada obstáculo y ventanas de visualización del campo potencial y las



distancias entre obstáculos y robots. Por lo tanto, en esta sección se describirán únicamente estos componentes adicionales.



Figura A.10. Ventana de evasión de obstáculos

**A - Sección configuraciones:** además de los cinco paneles de configuración de la ventana anterior debajo del panel de configuración de parámetros de orientación se incluye:

- A.6 - Panel de configuración de obstáculos: en este panel se ingresan las posiciones de los obstáculos y el valor del radio de cada uno como se muestra en la Figura A.11.

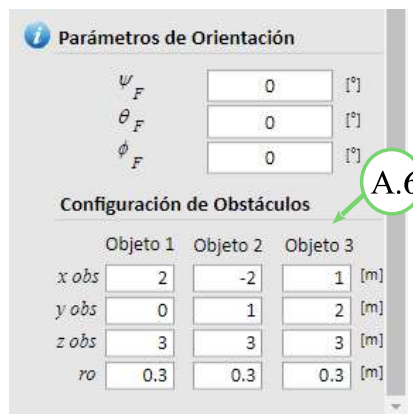


Figura A.11. Panel de configuración de obstáculos.

**B - Sección de visualización de resultados:** En esta sección se modifica el panel de variables controladas para mostrar adicionalmente las señales de los campos potenciales y las distancias entre los robots y los obstáculos como se observa en la Figura A.12.



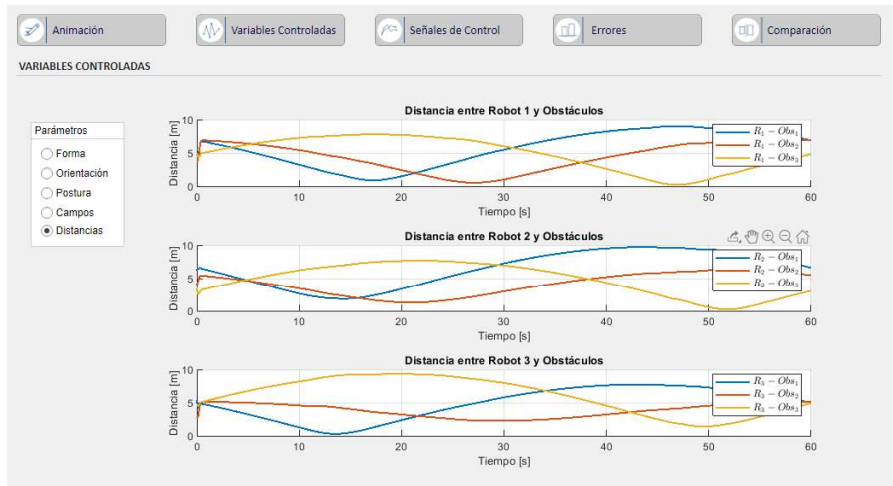


Figura A.12. Panel de visualización de distancias entre robots y obstáculos

### Ventana de información

En esta ventana mostrada en la Figura A.13 se presentan dos secciones una en la que se explica brevemente el modelo de la planta y los controladores diseñados y otra en la que se muestra una guía de usuario acerca del manejo de la interfaz.



Figura A.13. Ventana de información, sección guía de usuario.

Si se desea salir de cualquiera de estas cuatro ventanas se debe utilizar el botón cerrar de la esquina superior derecha de cada una de ellas y aparecerá una ventana de confirmación de salida como se observa en la Figura A.14.

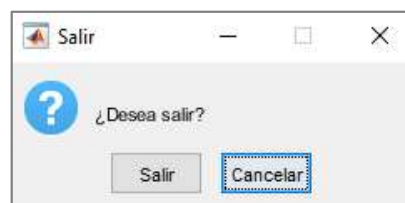


Figura A.14. Ventana de confirmación de salida.



## A.4. Proceso para una correcta simulación

---

1. Una vez iniciada la interfaz, en el menú de la pantalla de inicio se deberá escoger si se desea trabajar con controladores para: Seguimiento de trayectoria o Evasión de obstáculos.
2. Una vez seleccionada una de las dos opciones se despliega la ventana correspondiente a cada uno.
3. En estas pantallas en el lado izquierdo se encuentra un panel de configuraciones, donde se deberá escoger los parámetros que se detallaron en la sección anterior según el tipo de control.
4. A continuación se da clic en el botón simular para correr los archivos de simulink. Mientras esto sucede en la parte inferior derecha aparecera el porcentaje de avance de la simulación y todos los botones quedarán deshabilitados.
5. Una vez terminada la simulación se habilitan los paneles de visualización de resultados donde el usuario puede navegar de forma intuitiva y estudiar el comportamiento del sistema.
6. Para salir de la aplicación se debe utilizar el botón cerrar de la esquina superior derecha de cada una de ellas y aparecerá una ventana de confirmación de salida.