

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS

CONTROL ÓPTIMO DE ECUACIONES DIFERENCIALES
PARCIALES ELÍPTICAS CON TÉRMINOS DE COSTO NO
CONVEXOS DEL GRADIENTE.

TRABAJO DE TITULACIÓN PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL
TÍTULO DE INGENIERO MATEMÁTICO.

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

EDISON FELIPE GUERRA URGILES
gflip_05j@hotmail.es

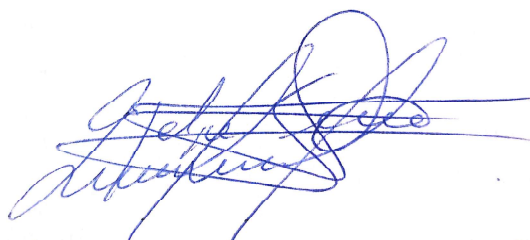
Director: Pedro Martín Merino Rosero. Ph.D.
pedro.merino@epn.edu.ec

Quito. Marzo 2020

Declaración de autoría.

Yo, Edison Felipe Guerra Urgilés, declaro bajo juramento que el trabajo aquí descrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y, que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

La Escuela Politécnica Nacional puede hacer uso de los derechos correspondientes a este trabajo, según lo establecido por la Ley de la Propiedad Intelectual, por su Reglamento y por la normatividad institucional vigente.



Edison Felipe Guerra Urgilés

Certificación

Certifico que el presente trabajo fue realizado y desarrollado por Edison Felipe Guerra Urgilés, bajo mi supervisión.

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'Pedro Merino', written in a cursive style.

Pedro Merino. Ph.D.
DIRECTOR

DEDICATORIA

*A mi Señor y Salvador Jesús de Nazaret,
y a mi mamá Miriam.*

Agradecimientos

Agradezco a mi Dios por haberme rescatado hace mas de 8 años y darme la oportunidad de vivir estos momentos. A mi mamá que fue mi apoyo durante toda mi vida y especialmente en este proceso de aprendizaje en la EPN. A mi Anita Belén que me ama y me ha apoyado siempre. A mi hermano Daniel y su familia que me apoyaron desde muy lejos con sus consejos y palabras de ánimo. A mi primo Isaac que me animó a seguir estudiando. A mi profe Pedro Merino por brindarme su tiempo y conocimiento en la realización de este proyecto de investigación. A todos mis profes de ingeniería y a mis compañeros que fueron de gran ayuda a su tiempo.

Índice general

1. Introducción	6
2. Preliminares	8
2.1. Notaciones	8
2.2. Definiciones	8
2.3. Resultados de la teoría de EDP's	10
3. Problema de Control Óptimo	13
3.1. Descripción del Problema	13
3.2. Estudio de la Ecuación de Estado	14
3.3. Operador de Control-Estado	17
3.4. Formulación del Problema Regularizado	18
3.5. Condiciones Necesarias de Optimalidad	26
4. Implementación Numérica	41
4.1. Algoritmo DC	41
4.2. Aproximación por F.E.M	43
4.3. Adaptacion del DCA al problema (PSR-R)	49
4.4. Evidencia Numérica	50
5. Conclusiones y Recomendaciones	54

Capítulo 1

Introducción

Muchos problemas asociados al procesamiento de imágenes, problemas inversos y de control óptimo requieren penalizaciones que induzcan dispersión en la solución. Esta característica es buscada debido al efecto de localización en las soluciones que es muy apreciada desde el punto de vista práctico. En el presente proyecto de investigación consideramos un problema de control óptimo para ecuaciones elípticas lineales con término de penalización no convexo que induce sparcidad en las derivadas parciales (en el sentido débil) del control. En otras palabras, el término de penalización no convexo produce que la mayoría de los elementos del gradiente sean cero. Al inducir dispersión en el gradiente del control, se busca que éste tenga una variación acotada de manera “localizada”, lo cual hace que el control tenga regiones donde su comportamiento sea constante, análogo al término de penalización de variación total anisotrópica [Cha04].

Una de las aplicaciones más importantes que involucran términos de dispersión que penalizan un problema en el control o su gradiente es en la recuperación de señales e imágenes. Este tema se ha vuelto tradicional en estos tiempos y ha impulsado estudios relacionados, así lo menciona Michael Hintermüller y Tao Wu en [HW13].

La investigación desarrollada en el presente proyecto tiene como objetivos principales estudiar las condiciones de optimalidad en el espíritu del problema de control óptimo y adaptar el algoritmo DC al problema de control óptimo. El sistema de optimalidad que se propondrá es importante para el desarrollo de teórico de nuevos problemas, como también para la implementación numérica de otros algoritmos, como Semi-smooth Newton Method (SNN), y comparar el rendimiento del algoritmo DC con dichos algoritmos.

El presente proyecto de investigación está organizado de la siguiente manera. En el Capítulo 1, introducimos los los problemas no convexos de control óptimo dotados de las cuasinormas L^q , $q \in (0, 1)$. En el Capítulo 2, presentamos la notación que se empleará en el presente proyecto de investigación. Además, exponemos definiciones y resultados de la teoría de ecuaciones diferenciales parciales. En el Capítulo 3 for-

mulamos el problema de control óptimo que estudiaremos, el cual se divide en tres secciones de análisis. En la primera sección, estudiaremos la ecuación de estado del problema de control óptimo para reducir a un problema sin restricciones mediante el operador de control estado. En la segunda sección, vamos a regularizar el problema sin restricciones mediante la función de Huber expuesta en [Mer19, pg. 4]. Para cerrar el capítulo, derivamos un sistema de optimalidad para el problema regularizado por medio de la programación de diferencia de funciones convexas (DC programming) [DLT]. En el Capítulo 4, describiremos el algoritmo DC (DCA) para posteriormente adaptar dicho algoritmo al problema de control óptimo reducido usando el método de elementos finitos para aproximar la solución; al final del capítulo exponemos algunos ejemplos numéricos. Finalmente, en el Capítulo 5, damos conocer las conclusiones y recomendaciones sobre la investigación del presente proyecto.

Capítulo 2

Preliminares

2.1. Notaciones

Notación 2.1.1. Generalmente se escribirá las derivadas parciales como $\partial_i v$ y $\partial_i v(x)$ en lugar de

$$\frac{\partial v}{\partial x_i} \quad \text{y} \quad \frac{\partial v}{\partial x_i}(x),$$

respectivamente.

Notación 2.1.2. Si X es un espacio de Banach, un elemento del dual X^* se escribe a través del producto en dualidad. Es decir, para $\varphi \in X^*$ y $x \in X$

$$\varphi(x) := \langle \varphi, x \rangle_{X^* \times X}.$$

Sin riesgo a confusión escribiremos simplemente $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en lugar de $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X^* \times X}$ y especificaremos en los casos que sean necesarios.

Las definiciones y los resultados que se presentan en esta sección se encuentran en [Eva10] y [Bre11], por esta razón referimos las demostraciones a [Eva10] y [Bre11] según sea necesario.

Observación 2.1.1. *De aquí en adelante se considera Ω un abierto y cotado subconjunto de \mathbb{R}^n cuya frontera $\partial\Omega$ es suficientemente regular.*

2.2. Definiciones

Definición 2.2.1 (Operador Diferencial de Segundo Orden). *Un operador diferencial de segundo orden es de la forma*

$$\mathcal{A}(y)(x) = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial y}{\partial x_i}(x) \right) + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial y}{\partial x_i}(x) + c_0 y(x), \quad (2.1)$$

o también de la forma

$$\mathcal{A}(y)(x) = - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial y}{\partial x_i}(x) + c_0 y(x), \quad (2.2)$$

donde a_{ij} , b_i y c_0 son funciones dadas, para $i = 1, \dots, n$. Se dirá que un operador diferencial de segundo orden está en forma de divergencia si es de la forma (2.1), y que está en forma de no divergencia si cumple con (2.2).

Definición 2.2.2 (Operador Diferencial Elíptico). Se dice que un operador diferencial de segundo orden \mathcal{A} , es uniformemente elíptico si existe un $\theta > 0$ tal que

$$\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x) \zeta_i \zeta_j \geq \theta |\zeta|^2, \quad (2.3)$$

en casi todo punto $x \in \Omega$, y para todo $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n) \in \mathbb{R}^n$.

Definición 2.2.3 (Vector Unitario Normal). Si $\partial\Omega$ es suficientemente regular, entonces a lo largo de $\partial\Omega$ se define el vector unitario normal

$$\boldsymbol{\nu} = (\nu^1, \dots, \nu^n).$$

Además, si $v \in C^1(\overline{\Omega})$. Llamamos la derivada normal de v como

$$\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \cdot \nabla v$$

Definición 2.2.4 (Operador no Acotado Densamente Definido). Sean X, Y dos espacios normados. Decimos que un operador lineal $T : \text{dom}(T) \subseteq X \rightarrow Y$ es un operador no acotado si su dominio es un subespacio vectorial de X . Además, decimos que T está densamente definido si el dominio de T es denso en X , i.e., $\overline{\text{dom}(T)} = X$.

Definición 2.2.5 (Subdiferencial Convexo). Sean X un espacio de Banach y F una función propia y convexa de X en \mathbb{R} . Si $x \in \text{dom}F$ definimos el subdiferencial convexo de F como:

$$\partial F(x) := \{x^* \in X^* : \langle x^*, \tilde{x} - x \rangle \leq F(\tilde{x}) - F(x), \quad \forall \tilde{x} \in X\}.$$

2.3. Resultados de la teoría de EDP's

Proposición 2.3.1 (Teorema de Gauss-Green). *Sea Ω un abierto y acotado subconjunto de \mathbb{R}^n y $\partial\Omega$ es regular. Suponga que $\mu \in C^1(\overline{\Omega})$, entonces*

$$\int_{\Omega} \partial_i \mu dx = \int_{\partial\Omega} \mu \nu^i dS, \quad \forall i = 1, \dots, n. \quad (2.4)$$

Proposición 2.3.2 (Fórmula de Integración por Partes). *Bajo las mismas hipótesis del Teorema 2.3.1, suponga que $v, \mu \in C^1(\overline{\Omega})$, entonces*

$$\int_{\Omega} \partial_i \mu v dx = - \int_{\Omega} \mu \partial_i v dx + \int_{\partial\Omega} \mu v \nu^i dS, \quad \forall i = 1, \dots, n. \quad (2.5)$$

Proposición 2.3.3 (Fórmulas de Green). *Sean $v, w \in C^2(\overline{\Omega})$. Entonces*

$$(i) \int_{\Omega} \Delta v dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \nu} dS,$$

$$(ii) \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla w dx = - \int_{\Omega} v \Delta w dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial w}{\partial \nu} v dS,$$

$$(iii) \int_{\Omega} (v \Delta w - w \Delta v) dx = \int_{\partial\Omega} \left(v \frac{\partial w}{\partial \nu} - w \frac{\partial v}{\partial \nu} \right) dS.$$

Proposición 2.3.4. $C_0^\infty(\Omega)$ es denso en $W_0^{1,p}(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$.

Proposición 2.3.5 (Desigualdad de Hölder). *Sean $f \in L^p(\Omega)$ y $g \in L^q(\Omega)$ con $1 \leq p, q \leq \infty$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces $fg \in L^1(\Omega)$ y además*

$$\int_{\Omega} |fg| dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}. \quad (2.6)$$

Proposición 2.3.6 (Desigualdad de Minkowski). *Supongamos que $1 \leq p \leq \infty$ y $u, v \in L^p(\Omega)$. Entonces*

$$\|u + v\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L^p(\Omega)}.$$

Proposición 2.3.7 (Desigualdad de Poincaré). *Supongamos que $1 \leq p < \infty$. Entonces existe una constante positiva C_p (que depende de Ω y p) tal que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C_p \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega). \quad (2.7)$$

En particular, la expresión $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ es una norma sobre $W_0^{1,p}(\Omega)$, y es equivalente a la norma $\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$; sobre $H_0^1(\Omega)$ la expresión $\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i}$ es un producto escalar que induce la norma $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ la cual es equivalente a la norma $\|u\|_{H^1(\Omega)}$.

A continuación se presenta la herramienta básica de las ecuaciones diferenciales parciales elípticas para mostrar la existencia de una solución débil.

Proposición 2.3.8 (Lax-Milgram). *Sea H un espacio de Hilbert. Supongamos que $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $(w, v) \mapsto a(w, v)$ es una forma bilineal continua y coerciva, es decir, $a(\cdot, \cdot)$ se dice*

(i) *continua si existe $C > 0$ tal que*

$$|a(w, v)| \leq C \|w\|_H \|v\|_H, \quad \forall w, v \in H;$$

(ii) *coerciva si existe $M > 0$ tal que*

$$a(w, w) \geq M \|w\|_H^2 \quad \forall w \in H.$$

Entonces, para todo $\psi \in H^*$, existe un único $\hat{w} \in H$ tal que

$$a(\hat{w}, v) = \langle \psi, v \rangle, \quad \forall v \in H.$$

Más aún, si $a(\cdot, \cdot)$ es simétrica, entonces se puede caracterizar \hat{w} por la propiedad

$$\hat{w} \in H \quad \text{y} \quad \frac{1}{2}a(\hat{w}, \hat{w}) - \langle \psi, \hat{w} \rangle = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2}a(v, v) - \langle \psi, v \rangle \right\}.$$

Proposición 2.3.9. *Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Se tienen las siguientes desigualdades:*

(i) *Si $0 < p < 1$, entonces $(|a| + |b|)^p \leq |a|^p + |b|^p$, y $|a|^p - |b|^p \leq |a - b|^p$.*

(ii) *Si $1 \leq p < +\infty$, entonces $(|a| + |b|)^p \leq 2^{p-1} |a|^p + |b|^p$.*

Proposición 2.3.10. *Sea $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $W^{1,1}(\Omega)$ tal que $v_n \rightarrow v$ en $W^{1,1}(\Omega)$, entonces*

$$v_n \rightarrow v \text{ en } L^1(\Omega) \quad , \quad \nabla v_n \rightarrow \nabla v \text{ en } L^1(\Omega) \quad \text{y} \quad (\partial_i v_n) \rightarrow \partial_i v \text{ en } L^1(\Omega), \quad (2.8)$$

para todo $i = 1, \dots, n$.

Proposición 2.3.11. *Sea $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ con $1 \leq p < \infty$. Entonces las siguientes propiedades son equivalentes:*

(i) *$u = 0$ sobre $\partial\Omega$.*

(ii) *$u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Proposición 2.3.12. Sea $F \in H^{-1}(\Omega)$. Entonces existen funciones $f_0, f_1, f_2, \dots, f_n \in L^2(\Omega)$ tal que

$$\langle F, v \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} = \int_{\Omega} f_0(x) v(x) dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} f_i(x) \partial_i v(x) dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

y

$$\|F\| = \max_{0 \leq i \leq n} \|f_i\|_{L^2(\Omega)}.$$

Si Ω es acotado se puede tomar $f_0 = 0$.

Proposición 2.3.13 (Desigualdad de Gronwall, forma diferencial). Sea $\eta(\cdot)$ una función real valuada, no negativa y absolutamente continua sobre $[0, T]$ tal que satisface para casi todo punto $t \in [0, T]$ la desigualdad diferencial

$$\eta'(t) \leq \phi(t) \eta(t) + \Psi(t), \quad (2.9)$$

donde $\phi(t)$ y $\Psi(t)$ son no negativas y Lebesgue integrables sobre $[0, T]$. Entonces

$$\eta(t) \leq e^{\int_0^t \phi(s) ds} \left[\eta(0) + \int_0^t \Psi(s) ds \right], \quad (2.10)$$

para todo $0 \leq t \leq T$. En particular, si

$$\eta' \leq \phi \eta \quad \text{sobre } [0, T] \quad \text{y} \quad \eta(0) = 0, \quad (2.11)$$

entonces $\eta \equiv 0$ sobre $[0, T]$.

Capítulo 3

Problema de Control Óptimo

3.1. Descripción del Problema

El problema de control óptimo que se desea analizar es el siguiente:

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} \min_{(y,u) \in H_0^1(\Omega) \times H^1(\Omega)} J(y,u) = \frac{1}{2} \|y - y_d\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \beta Q(u) \\ s.a \left\{ \begin{array}{l} Ay = u + f, \quad \text{en } \Omega \\ y = 0, \quad \text{sobre } \partial\Omega \end{array} \right. \end{array} \right.$$

donde α, β con constantes positivas, $p > 1$, f es una función dada en $L^2(\Omega)$ y Q es una función que va de $H_0^1(\Omega)$ en \mathbb{R} , cuya ley de asignación es:

$$Q(u) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n |\partial_i u(x)|^{\frac{1}{p}} dx = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} |\partial_i u(x)|^{\frac{1}{p}} dx.$$

Además A es un operador uniformemente elíptico en forma de divergencia (ver las definiciones 2.2.1 y 2.2.2), donde $a_{ij}, c_0 \in L^\infty(\Omega)$, a priori, y $c_0 \geq 0$ casi todo punto en $x \in \Omega$.

Primero analizaremos la existencia de soluciones de la ecuación diferencial parcial (EDP) de estado. Con esto, podemos redefinir el problema (P) como un problema de optimización sin restricciones. Esto permitirá plantear un sistema de ecuaciones para la posterior implementación numérica.

Entonces queremos resolver la siguiente EDP

$$(E.E) \left\{ \begin{array}{l} Ay = u + f, \quad \text{en } \Omega \\ y = 0, \quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{array} \right.$$

debido a la condición de borde de la EDP, se toma el espacio solución $H_0^1(\Omega)$. Así,

la formulación variacional para (E.E) se sigue a continuación. Para $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (u(x) + f(x)) \varphi(x) dx &= \int_{\Omega} \mathcal{A}y(x) \varphi(x) dx \\ &= \int_{\Omega} \left[- \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ij}(x) \partial_i y(x)) + c_0 y(x) \right] \varphi(x) dx \\ &= - \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ij}(x) \partial_i y(x)) \varphi(x) dx \\ &\quad + \int_{\Omega} c_0 y(x) \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Usando la fórmula de integración por partes (Proposición 2.3.2) se tiene

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (u(x) + f(x)) \varphi(x) dx &= \sum_{i,j=1}^n \left[\int_{\Omega} a_{ij}(x) \partial_i y(x) \partial_i \varphi(x) dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{\partial\Omega} a_{ij}(x) \partial_i y(x) \varphi(x) \nu^i dS \right] + \int_{\Omega} c_0 y(x) \varphi(x) dx. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Dado que $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, el segundo término del lado derecho de (3.1) es cero, así se obtiene

$$\int_{\Omega} (u(x) + f(x)) \varphi(x) dx = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij}(x) \partial_i y(x) \partial_i \varphi(x) dx + \int_{\Omega} c_0 y(x) \varphi(x) dx, \quad (3.2)$$

para todo $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Adicionalmente, gracias a la proposición 2.3.4 con $p = 2$, $C_0^\infty(\Omega)$ es denso en $H_0^1(\Omega)$. En consecuencia, la ecuación (3.2) se cumple para todo $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. De esta manera, se puede definir como es una solución débil de (E.E) como se sigue a continuación.

3.2. Estudio de la Ecuación de Estado

Definición 3.2.1 (Solución débil para (E.E)). Diremos que $y \in H_0^1(\Omega)$ es solución débil de (E.E) si ésta satisface (3.2) para todo $\varphi \in H_0^1(\Omega)$.

Uno de los teoremas que permiten encontrar soluciones débiles para las EDP es el teorema de Lax-Milgram (Teorema 2.3.8). Por tanto, se tiene que definir una forma bilineal continua y coerciva, y un funcional lineal y continuo sobre un espacio de Hilbert.

Se sabe que $H_0^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert, así se definen la forma bilineal y el

funcional de la siguiente manera:

- Forma Bilineal: $a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$a(w, v) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{i,j}(x) \partial_i w(x) \partial_i v(x) dx + \int_{\Omega} c_0 w(x) v(x) dx. \quad (3.3)$$

- Funcional: $L : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$L(v) = \int_{\Omega} (u(x) + f(x)) v(x) dx. \quad (3.4)$$

Podemos demostrar que (3.3) es una forma bilineal continua y coerciva, y (3.4) es un funcional lineal y continuo. En efecto, la linealidad para los dos operadores se tiene gracias a la linealidad de la integral.

Por un lado, para (3.3), sean $w, v \in H_0^1(\Omega)$, cualesquiera, tenemos:

$$\begin{aligned} |a(w, v)| &\leq \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} |a_{i,j}(x)| |\partial_i w(x)| |\partial_i v(x)| dx + \int_{\Omega} c_0 |w(x)| |v(x)| dx \\ &\leq \sum_{i,j=1}^n \sup_{x \in \Omega} |a_{i,j}(x)| \int_{\Omega} |\partial_i w(x)| |\partial_i v(x)| dx + \sup_{x \in \Omega} |c_0(x)| \int_{\Omega} |w(x)| |v(x)| dx \\ &\leq \max_{0 \leq i,j \leq n} \left\{ \sup_{x \in \Omega} |a_{i,j}(x)| \right\} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} |\partial_i w(x)| |\partial_i v(x)| dx \\ &\quad + \|c_0\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{\Omega} |w(x)| |v(x)| dx \end{aligned} \quad (3.5)$$

Tomando el primer término del lado derecho en (3.5) y usando la desigualdad de Hölder (Proposición 2.3.5), se tiene la siguiente acotación:

$$\max_{0 \leq i,j \leq n} \left\{ \sup_{x \in \Omega} |a_{i,j}(x)| \right\} = \left\| (a_{ij})_{i,j} \right\|_{L^\infty(\Omega)} \quad (3.6)$$

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} |\partial_i w(x)| |\partial_i v(x)| dx = \int_{\Omega} |\nabla w(x)| |\nabla v(x)| dx \leq \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.7)$$

Combinando (3.6) y (3.7), el primer término del lado derecho de (3.5) está acotado por

$$\max_{0 \leq i,j \leq n} \left\{ \sup_{x \in \Omega} |a_{i,j}(x)| \right\} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial w(x)}{\partial x_i} \right| \left| \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} \right| dx \leq C_0 \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}, \quad (3.8)$$

donde $C_0 = \left\| (a_{ij})_{i,j} \right\|_{L^\infty(\Omega)}$. Luego, en el segundo término del lado derecho en (3.5) se

tiene la siguiente acotación:

$$\|c_0\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{\Omega} |w(x)| |v(x)| dx \leq \|c_0\|_{L^\infty(\Omega)} \|w\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} . \quad (3.9)$$

Gracias a la desigualdad de Poincaré (Proposición 2.3.7) en (3.9), existe una constante C_1 que depende de c_0 y Ω tal que

$$\|c_0\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{\Omega} |w(x)| |v(x)| dx \leq C_1 \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} . \quad (3.10)$$

Combinando (3.8) y (3.10) en (3.5), se sigue

$$|a(w, v)| \leq C \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} ,$$

para cierta constante positiva C . Finalmente, la Proposición 2.3.7 nos da una equivalencia de normas en $H_0^1(\Omega)$, por tanto

$$|a(w, v)| \leq M \|w\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} ,$$

lo cual muestra que $a(\cdot, \cdot)$ es continua.

Además, dado que \mathcal{A} es un operador elíptico y $c_0 \geq 0$ en casi todo punto $x \in \Omega$, se tiene que para $w \in H_0^1(\Omega)$ y $\zeta = \nabla w$ en (2.3) $a(\cdot, \cdot)$ verifica

$$\begin{aligned} a(w, w) &= \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x) \partial_i w(x) \partial_j w(x) dx + \int_{\Omega} c_0 w(x) w(x) dx \\ &\geq \int_{\Omega} \theta |\nabla w(x)|^2 dx \\ &\geq \theta \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)}^2 . \end{aligned}$$

Al hacer uso nuevamente de la Proposición 2.3.7, existe $\alpha > 0$ tal que

$$a(w, w) \geq \alpha \|w\|_{H_0^1(\Omega)}^2 , \quad (3.11)$$

donde α depende de la constante de elípticidad y la equivalencia de normas del Teorema 2.3.7. La desigualdad (3.11) muestra que el operador $a(\cdot, \cdot)$ es coercivo en $H_0^1(\Omega)$

Por otro lado, para (3.4), de manera análoga se mostrará que L es continuo. Sea

$v \in H_0^1(\Omega)$, cualquiera. Dado que $u \in H_0^1(\Omega)$ y $f \in L^2(\Omega)$, $u + f \in L^2(\Omega)$, así:

$$\begin{aligned} |L(v)| &\leq \int_{\Omega} |u(x) + f(x)| |v(x)| dx \\ &\leq \|u + f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq M \|v\|_{H_0^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

donde $M = C_p \|u + f\|_{L^2(\Omega)}$. Esto muestra que L es continua.

Por tanto, se han verificado las hipótesis del Teorema de Lax-Milgram (Proposición 2.3.8), en consecuencia podemos concluir que existe un único $\hat{y} \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$a(\hat{y}, \varphi) = \langle L, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \quad (3.12)$$

Así, para cada control $u \in H_0^1(\Omega)$ existe una única función $\hat{y} \in H_0^1(\Omega)$ tal que verifica (3.2) para todo $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, en otras palabras $\hat{y} \in H_0^1(\Omega)$ es una solución débil de (E.E). En particular, tomando $\varphi = \hat{y}$ en (3.12), gracias a la coercividad de $a(\cdot, \cdot)$ y la continuidad de L se obtiene la siguiente acotación

$$\|\hat{y}\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{C_p}{\alpha} \|u + f\|_{L^2(\Omega)} \leq C_f \|u\|_{H_0^1(\Omega)}, \quad (3.13)$$

para cierta constante C_f que depende de f y α .

3.3. Operador de Control-Estado

Gracias al análisis desarrollado en la sección 3.1, se puede definir el operador de control estado de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathcal{G} : H_0^1(\Omega) &\longrightarrow H_0^1(\Omega) \\ u &\longmapsto \mathcal{G}(u) = y, \end{aligned}$$

tal que y es la solución de la ecuación (E.E) asociada a u , el cual es un operador no acotado densamente definido (ver Definición 2.2.4). Nótese que por la linealidad de la ecuación de estado, se puede escribir $y = \mathcal{G}u = Su + y_f$, con y_f solución de

$$\begin{cases} Ay_f = f, & \text{en } \Omega \\ y_f = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

y S el operador $u \longmapsto Su = y_u$ tal que y_u satisface la ecuación

$$a(y_u, \varphi) = \int_{\Omega} u(x) \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

El principio de superposición asegura que S es lineal y además y_f es fijo. Por tanto \mathcal{G} es un operador afín, el cual es, además, \mathcal{G} es continuo por (3.13).

Observación 3.3.1. *Gracias a la inyección lineal y continua $I : H_0^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$, consideraremos el operador de control estado $\mathcal{G} = I\mathcal{G}$ en lugar de \mathcal{G} , cuando sea pertinente.*

Observación 3.3.2. *A partir de la Observación 3.3.1 y sin riesgo a confusión, notaremos por S al operador de control estado de $H_0^1(\Omega)$ en $L^2(\Omega)$, con el fin que el operador adjunto de S esté también definido en $L^2(\Omega)$.*

3.4. Formulación del Problema Regularizado

Después de haber encontrado una solución para la ecuación de estado, podemos reemplazar el operador de control estado en la función J del problema (P), dando como resultado un problema de minimización sin restricciones como sigue:

$$(PCO) \quad \left\{ \begin{array}{l} \min_{u \in H^1(\Omega)} J(u) = \frac{1}{2} \|Su + y_f - y_d\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \beta Q(u) . \end{array} \right.$$

Las dificultades que presenta el problema (PCO) es la no convexidad y la no diferenciabilidad de la función de costo $J(u)$, a causa de la función Q . La no convexidad del integrando de Q se aprecia en la figura 3.1 con $n = 2$); observe que el integrando decrece rápidamente cuando se acerca a un entorno del cero. Esto representa un reto al tratar de encontrar una solución, ya que no es posible usar el método directo para demostrar la existencia de un control del problema (PCO), además de la formulación numérica.

Hipótesis 1. *Suponemos que existe un control óptimo local $u \in H_0^1(\Omega)$ para (PCO).*

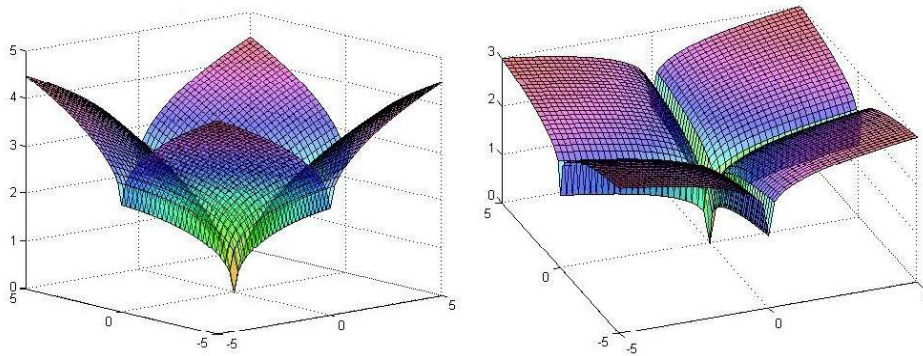


Figura 3.1: Integrando de la función Q , para valores de $p = 2$ y $p = 4$ respectivamente.

El procedimiento que se seguirá en el presente trabajo de investigación es, formular un problema regularizado de (PCO), tal que tienda al problema original (PCO), y que sea mas sencillo de tratar. Luego, se obtendrán las condiciones de óptimalidad del problema regularizado para definir posteriormente un algoritmo numérico.

Para regularizar el problema (PCO), se usará la misma función regularizante de Huber considerado en [Mer19] para cada derivada parcial. La función regularizante es de la forma:

$$h_{p,\gamma}(x) = \begin{cases} \frac{\gamma^{p-1}}{p} |x|^p, & \text{si } x \in \left[-\frac{1}{\gamma}, \frac{1}{\gamma}\right], \\ |x| + \frac{1-p}{\gamma} \frac{1}{p}, & \text{caso contrario.} \end{cases} \quad (3.14)$$

Así, implementando $h_{p,\gamma}$ en el problema (PCO) se obtiene un problema regularizado de la forma:

$$(\text{PCO}_\gamma) \quad \left\{ \begin{array}{l} \min_{u \in H^1(\Omega)} J_\gamma(u) = \frac{1}{2} \|Su + y_f - y_d\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \beta Q_{p,\gamma}(u) \end{array} \right. ,$$

donde

$$Q_{p,\gamma}(u) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n h_{p,\gamma} \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right)^{\frac{1}{p}} dx .$$

Hipótesis 2. *Suponemos que existe un control óptimo local u_γ para PCO_γ .*

¿Cómo regulariza la función de Huber, $h_{p,\gamma}$, el problema (PCO)? La función $h_{p,\gamma}$, debido a su definición, hace que el integrando de la función Q en un entorno del cero sea “mas suave”, es decir, evita el decrecimiento rápido del integrando de la función Q mientras se acerca al cero. En [Mer19] se sugiere tomar $\gamma \gg 1$ para que el problema se regularice en un entorno del cero. En las figuras 3.2 y 3.4 se aprecia el resultado de la regularización de Huber para el problema (PCO_γ) cuando $n = 2$ y $p = 2, p = 4$, donde consta el grafo del integrando y las curvas de nivel en las figuras 3.3 y 3.5, respectivamente (en las curvas de nivel se aprecia mucho mas la regularización):

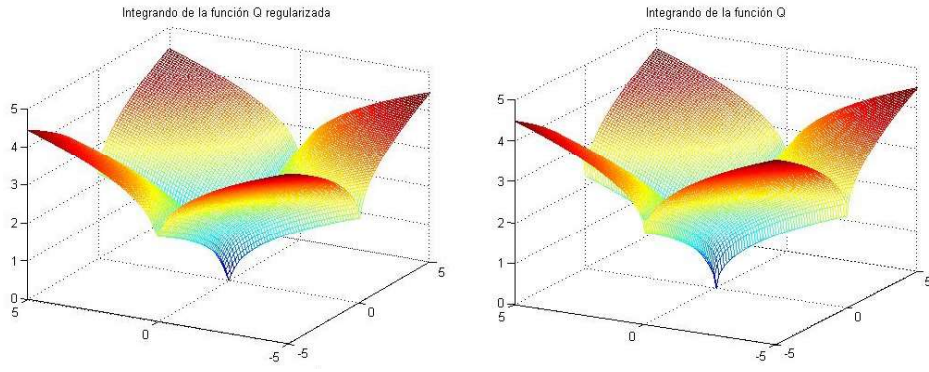


Figura 3.2: Integrandos de $Q_{p,\gamma}$ y Q , con $p = 2$ y $\gamma = 5$.

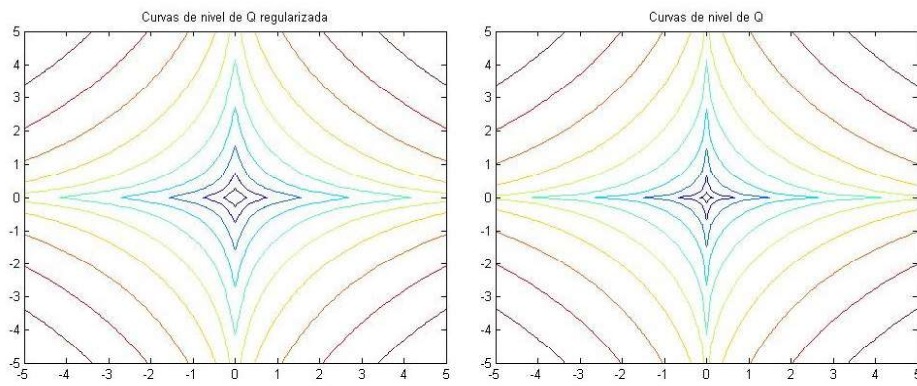


Figura 3.3: Curvas de nivel de $Q_{p,\gamma}$ y Q , con $p = 2$ y $\gamma = 5$.

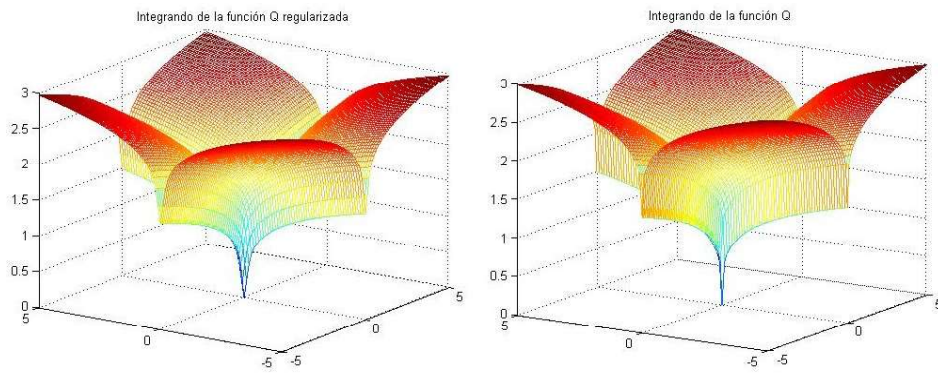


Figura 3.4: Integrandos de $Q_{p,\gamma}$ y Q , con $p = 4$ y $\gamma = 5$.

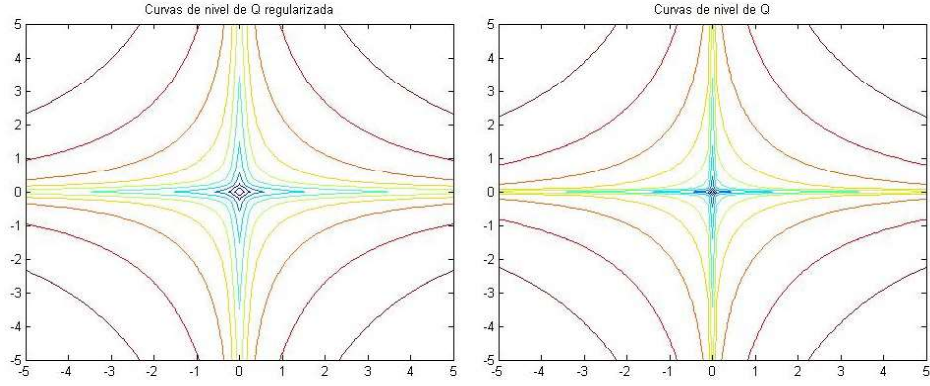


Figura 3.5: Curvas de nivel de $Q_{p,\gamma}$ y Q , con $p = 4$ y $\gamma = 5$.

Notemos que mientras γ sea cada vez mas grande, el problema (PCO_γ) tiende al problema (PCO) . Definido de esta manera el operador $Q_{p,\gamma}$ tiene la siguiente propiedad de continuidad.

Lema 3.4.1. *Sea $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $W^{1,1}(\Omega)$ tal que $v_n \rightarrow v$ en $W^{1,1}(\Omega)$, cuando $n \rightarrow \infty$, entonces*

$$Q_{p,\gamma}(v_n) \rightarrow Q_{p,\gamma}(v), \text{ cuando } n \rightarrow \infty, \quad (3.15)$$

para todo $p > 1$ y todo $\gamma > 0$.

Demostración. Lo que se quiere demostrar es que si $n \rightarrow \infty$, entonces

$$|Q_{p,\gamma}(v_n) - Q_{p,\gamma}(v)| = \left| \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} h_{p,\gamma}(\partial_i v_n(x))^{\frac{1}{p}} - h_{p,\gamma}(\partial_i v(x))^{\frac{1}{p}} dx \right| \rightarrow 0. \quad (3.16)$$

Dividimos la demostración por casos de igual manera que en [Mer19, Lema 2.], se definen los siguientes conjuntos:

$$\Omega_{n,1} = \left\{ x \in \Omega : |\partial_i v_n(x)| \leq \frac{1}{\gamma}, |\partial_i v(x)| \leq \frac{1}{\gamma} \right\},$$

$$\Omega_{n,2} = \left\{ x \in \Omega : |\partial_i v_n(x)| > \frac{1}{\gamma}, |\partial_i v(x)| > \frac{1}{\gamma} \right\},$$

$$\Omega_{n,3} = \Omega_{n,3,1} \cup \Omega_{n,3,2},$$

donde

$$\Omega_{n,3,1} = \left\{ x \in \Omega : |\partial_i v_n(x)| > \frac{1}{\gamma}, |\partial_i v(x)| \leq \frac{1}{\gamma} \right\},$$

$$\Omega_{n,3,2} = \left\{ x \in \Omega : |\partial_i v_n(x)| \leq \frac{1}{\gamma}, |\partial_i v(x)| > \frac{1}{\gamma} \right\}.$$

Se usarán dichos conjuntos para estimar (3.16) de acuerdo a la ley de asignación de la función de regularización de Huber (3.14).

Para la i -ésima derivada parcial se en:

- $\Omega_{n,1}$ se tiene:

$$\begin{aligned} I_{n,1} &= \left| \int_{\Omega_{n,1}} h_{p,\gamma}(\partial_i v_n(x))^{\frac{1}{p}} - h_{p,\gamma}(\partial_i v(x))^{\frac{1}{p}} dx \right| \\ &\leq \int_{\Omega_{n,1}} \left| \left(\frac{\gamma^{p-1}}{p} \right)^{\frac{1}{p}} |\partial_i v_n(x)| - \left(\frac{\gamma^{p-1}}{p} \right)^{\frac{1}{p}} |\partial_i v(x)| \right| dx \\ &= \left(\frac{\gamma^{p-1}}{p} \right)^{\frac{1}{p}} \int_{\Omega_{n,1}} \left| |\partial_i v_n(x)| - |\partial_i v(x)| \right| dx. \end{aligned}$$

Por la desigualdad triangular inversa, $\Omega_{n,1} \subseteq \Omega$ y la Proposición 2.3.10, si $n \rightarrow \infty$ se sigue que

$$I_{n,1} \leq \left(\frac{\gamma^{p-1}}{p} \right)^{\frac{1}{p}} \int_{\Omega} |\partial_i v_n(x) - \partial_i v(x)| dx \rightarrow 0. \quad (3.17)$$

- $\Omega_{n,2}$ se tiene:

$$\begin{aligned} I_{n,2} &= \left| \int_{\Omega_{n,2}} h_{p,\gamma}(\partial_i v_n(x))^{\frac{1}{p}} - h_{p,\gamma}(\partial_i v(x))^{\frac{1}{p}} dx \right| \\ &\leq \int_{\Omega_{n,2}} \left| \left(|\partial_i v_n(x)| + \frac{1}{\gamma} \frac{1-p}{p} \right)^{\frac{1}{p}} - \left(|\partial_i v(x)| + \frac{1}{\gamma} \frac{1-p}{p} \right)^{\frac{1}{p}} \right| dx. \quad (3.18) \end{aligned}$$

Usando el resultado (i), en particular para $a, b > 0$, de la Proposición 2.3.9 y dado que

$$\begin{aligned} |\partial_i v_n(x)| > \frac{1}{\gamma} &\implies |\partial_i v_n(x)| + \frac{1}{\gamma} \frac{1-p}{p} > \frac{1}{\gamma p} > 0, \\ |\partial_i v(x)| > \frac{1}{\gamma} &\implies |\partial_i v(x)| + \frac{1}{\gamma} \frac{1-p}{p} > \frac{1}{\gamma p} > 0, \end{aligned}$$

en (3.18) se tiene

$$\begin{aligned} I_{n,2} &\leq \int_{\Omega_{n,2}} |\partial_i v_n(x) - \partial_i v(x)|^{\frac{1}{p}} dx \\ &= \int_{\Omega} |\partial_i v_n(x) - \partial_i v(x)|^{\frac{1}{p}} 1_{\Omega_{n,2}}(x) dx, \quad (3.19) \end{aligned}$$

donde

$$1_{\Omega_{n,2}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \Omega_{n,2}, \\ 0, & \text{si } x \in \Omega \setminus \Omega_{n,2}. \end{cases}$$

Luego, ya que $1_{\Omega_{n,2}} \in L^\infty(\Omega)$ y $L^\infty(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$ se tiene que $1_{\Omega_{n,2}} \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$. Usando la desigualdad de Hölder en (3.19) y puesto que $\partial_i v_n \rightarrow \partial_i v$ en $L^1(\Omega)$, entonces si $n \rightarrow \infty$ se sigue que

$$\begin{aligned} I_{n,2} &\leq \|1_{\Omega_{n,2}}\|_{L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)} \left(\int_{\Omega} |\partial_i v_n(x) - \partial_i v(x)| dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq |\Omega|^{\frac{p-1}{p}} \|\partial_i v_n - \partial_i v\|_{L^1(\Omega)}^{\frac{1}{p}} \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (3.20)$$

- $\Omega_{n,3}$. Sin pérdida de generalidad se considera $\Omega_{n,3,1}$ puesto que en $\Omega_{n,3,2}$ se intercambian los papeles de $|\partial_i v_n(x)|$ por $|\partial_i v(x)|$. Por un lado, en $\Omega_{n,3,1}$ se tiene la siguiente acotación

$$|\partial_i v_n(x)| \leq \frac{1}{\gamma} < |\partial_i v(x)|. \quad (3.21)$$

Por otro lado, gracias a (3.21) se tiene

$$\begin{aligned} |\partial_i v(x)| \leq \frac{1}{\gamma} &\Rightarrow \gamma |\partial_i v(x)| \leq 1 \\ &\Rightarrow \gamma^p |\partial_i v(x)|^p \leq \gamma |\partial_i v(x)| \\ &\Rightarrow \gamma^{p-1} |\partial_i v(x)|^p \leq |\partial_i v(x)| \leq \frac{1}{\gamma} \\ &\Rightarrow \left(\frac{\gamma^{p-1}}{p} \right) |\partial_i v(x)|^p \leq \frac{|\partial_i v(x)|}{p} \leq \frac{1}{\gamma p} \\ &\Rightarrow \left(\frac{\gamma^{p-1}}{p} \right) |\partial_i v(x)|^p \leq \frac{1}{\gamma p}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Además,

$$\frac{1}{\gamma} < |\partial_i v_n(x)| \Rightarrow \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma} \frac{1-p}{p} < |\partial_i v_n(x)| + \frac{1}{\gamma} \frac{1-p}{p} \quad (3.24)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\gamma p} < |\partial_i v_n(x)| + \frac{1}{\gamma} \frac{1-p}{p}. \quad (3.25)$$

Combinando (3.23) y (3.25) se tiene

$$0 \leq \left(\frac{\gamma^{p-1}}{p} \right) |\partial_i v(x)|^p < |\partial_i v_n(x)| + \frac{1}{\gamma} \frac{1-p}{p}. \quad (3.26)$$

Gracias a (3.26), se puede usar la Proposición 2.3.9 lo que implica que

$$\begin{aligned}
I_{n,3,1} &= \left| \int_{\Omega_{n,3,1}} h_{p,\gamma}(\partial_i v_n(x))^{\frac{1}{p}} - h_{p,\gamma}(\partial_i v(x))^{\frac{1}{p}} dx \right|, \\
&\leq \int_{\Omega_{n,3,1}} |h_{p,\gamma}(\partial_i v_n(x)) - h_{p,\gamma}(\partial_i v(x))|^{\frac{1}{p}} dx, \\
&= \int_{\Omega_{n,3,1}} \left| |\partial_i v_n(x)| + \frac{1}{\gamma} \frac{1-p}{p} - \left(\frac{\gamma^{p-1}}{p} \right) |\partial_i v(x)|^p \right|^{\frac{1}{p}} dx, \\
&= \int_{\Omega_{n,3,1}} \left(|\partial_i v_n(x)| + \frac{1}{\gamma} \frac{1-p}{p} - \left(\frac{\gamma^{p-1}}{p} \right) |\partial_i v(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}} dx. \quad (3.27)
\end{aligned}$$

Tomando el intervalo $[0, |\partial_i v_n(x)| - 1/\gamma]$, el cual esta bien definido gracias a (3.24), se pueden definir las siguientes funciones real valuadas en dicho intervalo como sigue:

$$\eta(t) = t, \quad \phi(t) = 0, \quad y \quad \Psi(t) = \gamma^{p-1} \left(t + \frac{1}{\gamma} \right)^{p-1}.$$

Notar que $\eta(\cdot)$, $\phi(\cdot)$ y $\Psi(\cdot)$ son no negativas y $\eta(\cdot)$ es absolutamente continua sobre $\left[0, |\partial_i v_n(x)| - \frac{1}{\gamma}\right]$. Además,

$$\begin{aligned}
0 \leq t \leq |\partial_i v_n(x)| - \frac{1}{\gamma} &\Rightarrow \frac{1}{\gamma} \leq t + \frac{1}{\gamma} \leq |\partial_i v_n(x)| \\
&\Rightarrow 1 \leq \gamma \left(t + \frac{1}{\gamma} \right) \leq \gamma |\partial_i v_n(x)| \\
&\Rightarrow 1 \leq \gamma^{p-1} \left(t + \frac{1}{\gamma} \right)^{p-1} \leq \gamma^{p-1} |\partial_i v_n(x)|^{p-1} \\
&\Rightarrow 1 \leq \Psi(t) \leq \gamma^{p-1} |\partial_i v_n(x)|^{p-1},
\end{aligned}$$

lo que muestra que $\eta(\cdot)$, $\phi(\cdot)$ y $\Psi(\cdot)$ satisfacen la desigualdad diferencial

$$\eta'(t) \leq \phi(t) \eta(t) + \Psi(t).$$

Por la desigualdad de Gronwall (Proposición 2.3.13) se concluye que

$$\eta(t) \leq \eta(0) + \int_0^t \Psi(s) ds, \quad \forall t \in \left[0, |\partial_i v_n(x)| - \frac{1}{\gamma}\right]$$

para todo $0 \leq t \leq |\partial_i v_n(x)| - \frac{1}{\gamma}$, es decir,

$$t \leq \int_0^t \gamma^{p-1} \left(s + \frac{1}{\gamma}\right)^{p-1} ds = \left(\frac{\gamma^{p-1}}{p}\right) \left(t + \frac{1}{\gamma}\right)^p - \frac{1}{\gamma p}, \quad (3.28)$$

para todo $t \in \left[0, |\partial_i v_n(x)| - \frac{1}{\gamma}\right]$. En particular para $t = |\partial_i v_n(x)| - \frac{1}{\gamma}$ en (3.28) se sigue:

$$\begin{aligned} |\partial_i v_n(x)| - \frac{1}{\gamma} &\leq \left(\frac{\gamma^{p-1}}{p}\right) |\partial_i v_n(x)|^p - \frac{1}{\gamma p} \\ \Rightarrow |\partial_i v_n(x)| + \frac{1}{\gamma p} - \frac{1}{\gamma} &\leq \left(\frac{\gamma^{p-1}}{p}\right) |\partial_i v_n(x)|^p \\ \Rightarrow |\partial_i v_n(x)| + \frac{1}{\gamma} \frac{1-p}{p} &\leq \left(\frac{\gamma^{p-1}}{p}\right) |\partial_i v_n(x)|^p. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Remplazando (3.29) en (3.27) y luego usando la proposición 2.3.9, si $n \rightarrow \infty$ se sigue

$$\begin{aligned} I_{n,3,1} &\leq \left(\frac{\gamma^{p-1}}{p}\right)^{\frac{1}{p}} \int_{\Omega_{n,3,1}} (|\partial_i v_n(x)|^p - |\partial_i v(x)|^p)^{\frac{1}{p}} dx \\ &\leq \left(\frac{\gamma^{p-1}}{p}\right)^{\frac{1}{p}} \int_{\Omega_{n,3,1}} \left| |\partial_i v_n(x)| - |\partial_i v(x)| \right| dx \\ &\leq \left(\frac{\gamma^{p-1}}{p}\right)^{\frac{1}{p}} \int_{\Omega_{n,3,1}} |\partial_i v_n(x) - \partial_i v(x)| dx \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Por tanto, si $n \rightarrow \infty$

$$I_{n,3} = I_{n,3,1} + I_{n,3,2} \rightarrow 0. \quad (3.30)$$

Combinando (3.17), (3.20) y (3.30), en la i -ésima derivada parcial, si $n \rightarrow \infty$, se tiene

$$\left| \int_{\Omega} h_{p,\gamma}(\partial_i v_n(x))^{\frac{1}{p}} - h_{p,\gamma}(\partial_i v(x))^{\frac{1}{p}} dx \right| = I_{n,1} + I_{n,2} + I_{n,3} \rightarrow 0. \quad (3.31)$$

Finalmente, usando (3.31), $|Q_{p,\gamma}(v_n) - Q_{p,\gamma}(v)| \rightarrow 0$, cuando $n \rightarrow \infty$. Lo que muestra el resultado de continuidad de la función regularizante $Q_{p,\gamma}$. \square

3.5. Condiciones Necesarias de Optimalidad

En esta sección se planteará un sistema de óptimalidad para el problema (PCO_γ) usando la teoría de optimización para funciones DC; para ello es necesario expresar el problema (PCO_γ) como una diferencia de funciones convexas. Se usará la siguiente función

$$u \mapsto \kappa_\gamma \beta \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} |\partial_i u(x)| dx, \quad (3.32)$$

para representar J_γ de la siguiente manera:

$$J_\gamma(u) = G(u) - H(u),$$

donde G y H son funciones que van desde $H_0^1(\Omega)$ en \mathbb{R} , cuyas leyes de asignación son:

$$G(u) = \frac{1}{2} \|Su + y_f - y_d\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \kappa_\gamma \beta \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} |\partial_i u(x)| dx, \quad (3.33)$$

$$H(u) = \beta \left(\kappa_\gamma \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} |\partial_i u(x)| dx - Q_{p,\gamma}(u) \right). \quad (3.34)$$

Aquí la constante κ_γ está definida de tal forma que la función H sea convexa, es decir

$$\kappa = \frac{\gamma^{\frac{p-1}{p}}}{p^{\frac{1}{p}}}.$$

Antes de mostrar que las funciones G y H son convexas, presentamos un lema que será de ayuda en las siguientes secciones.

Lema 3.5.1. *La función*

$$j: \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty)$$

$$z \longmapsto j(z) = \begin{cases} \kappa |z| - \left(|z| + \frac{1}{\gamma} \frac{1-p}{p} \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{si } |z| > \frac{1}{\gamma}, \\ 0, & \text{si } |z| \leq \frac{1}{\gamma}, \end{cases}$$

es no negativa, convexa y continuamente diferenciable. Su derivada viene dada por

$$j'(z) = \begin{cases} \kappa \operatorname{sign}(z) - \frac{1}{p} \left(|z| + \frac{1}{\gamma} \frac{1-p}{p} \right)^{\frac{1-p}{p}} \operatorname{sign}(z), & \text{si } |z| > \frac{1}{\gamma}, \\ 0, & \text{si } |z| \leq \frac{1}{\gamma}. \end{cases}$$

La demostración de este resultado se puede consultar en [Mer19].

Para mostrar que la función H es convexa, se debe operar con la expresión (3.32) y la función $Q_{p,\gamma}$, para tener un esquema mas sencillo de tratar; se detalla a continuación el procedimiento:

$$\begin{aligned} H(u) &= \beta \left(\kappa_\gamma \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} |\partial_i u(x)| dx - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} h(\partial_i u(x))^{\frac{1}{p}} dx \right) \\ &= \beta \left[\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left(\kappa_\gamma |\partial_i u(x)| - h(\partial_i u(x))^{\frac{1}{p}} \right) dx \right]. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Si consideramos la i -ésima componente se tiene

$$\begin{aligned} \kappa_\gamma |\partial_i u(x)| - h(\partial_i u(x))^{\frac{1}{p}} &= \begin{cases} \kappa_\gamma |\partial_i u(x)| - \left(\frac{\gamma^{p-1}}{p} |\partial_i u(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{si } |\partial_i u(x)| \leq \frac{1}{\gamma}, \\ \kappa_\gamma |\partial_i u(x)| - \left(|\partial_i u(x)| + \frac{1}{\gamma} \frac{1-p}{p} \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{si } |\partial_i u(x)| > \frac{1}{\gamma}, \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & \text{si } |\partial_i u(x)| \leq \frac{1}{\gamma}, \\ \kappa_\gamma |\partial_i u(x)| - \left(|\partial_i u(x)| + \frac{1}{\gamma} \frac{1-p}{p} \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{si } |\partial_i u(x)| > \frac{1}{\gamma}. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.36)$$

Usando la función j del Lema 3.5.1, la ecuación (3.36) se puede escribir como:

$$\kappa_\gamma |\partial_i u(x)| - h(\partial_i u(x))^{\frac{1}{p}} = j(\partial_i u(x)), \quad (3.37)$$

para todo $i = 1, \dots, n$. Así, reemplazando (3.37) en (3.35), la función H se escribe como:

$$H(u) = \beta \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} j(\partial_i u(x)) dx. \quad (3.38)$$

Teorema 3.5.1. *Las funciones G y H definidas en (3.33) y (3.38), respectivamente, son convexas.*

Demostración. Primero demostremos la convexidad de G . Sean $v_1, v_2 \in H_0^1(\Omega)$ y $t \in [0, 1]$, cualesquiera y escribimos $\tau = y_f - y_d$. Para el primer término de G , si $v_1 = v_2$

obtenemos trivialmente

$$\|S(tv_1 + (1-t)v_2) + \tau\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq t\|Sv_1 + \tau\|_{L^2(\Omega)}^2 + (1-t)\|Sv_2 + \tau\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (3.39)$$

Si $v_1 \neq v_2$, notaremos $\widehat{v}_i = Sv_i + \tau$, para $i = 1, 2$. Efectivamente, la desigualdad de Minkowski (Proposición 2.3.6), la linealidad de S y puesto que $(t^2 - t) \leq 0$, se sigue

$$\begin{aligned} \|S(tv_1 + (1-t)v_2) + \tau\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \|tSv_1 + (1-t)Sv_2 + t\tau + (1-t)\tau\|_{L^2(\Omega)}^2, \\ &= \|t\widehat{v}_1 + (1-t)\widehat{v}_2\|_{L^2(\Omega)}^2, \\ &\leq \left(t\|\widehat{v}_1\|_{L^2(\Omega)} + (1-t)\|\widehat{v}_2\|_{L^2(\Omega)} \right)^2, \\ &\leq t^2\|\widehat{v}_1\|_{L^2(\Omega)}^2 + (1-t)^2\|\widehat{v}_2\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + 2t(1-t)\|\widehat{v}_1\|_{L^2(\Omega)}\|\widehat{v}_2\|_{L^2(\Omega)}, \\ &= t^2\|\widehat{v}_1\|_{L^2(\Omega)}^2 + (1-t)^2\|\widehat{v}_2\|_{L^2(\Omega)}^2 + t\|\widehat{v}_1\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad - t\|\widehat{v}_1\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2t(1-t)\|\widehat{v}_1\|_{L^2(\Omega)}\|\widehat{v}_2\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + (1-t)\|\widehat{v}_2\|_{L^2(\Omega)}^2 - (1-t)\|\widehat{v}_2\|_{L^2(\Omega)}^2, \\ &= (t^2 - t) \left(\|\widehat{v}_1\|_{L^2(\Omega)}^2 - 2\|\widehat{v}_1\|_{L^2(\Omega)}\|\widehat{v}_2\|_{L^2(\Omega)} \right. \\ &\quad \left. + \|\widehat{v}_2\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + t\|\widehat{v}_1\|_{L^2(\Omega)}^2 + (1-t)\|\widehat{v}_2\|_{L^2(\Omega)}^2, \\ &= (t^2 - t) \left(\|\widehat{v}_1\|_{L^2(\Omega)} - \|\widehat{v}_2\|_{L^2(\Omega)} \right)^2 \\ &\quad + t\|\widehat{v}_1\|_{L^2(\Omega)}^2 + (1-t)\|\widehat{v}_2\|_{L^2(\Omega)}^2, \\ &\leq t\|\widehat{v}_1\|_{L^2(\Omega)}^2 + (1-t)\|\widehat{v}_2\|_{L^2(\Omega)}^2, \\ &\leq t\|Sv_1 + \tau\|_{L^2(\Omega)}^2 + (1-t)\|Sv_2 + \tau\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Es decir, verifica desigualdad (3.39). Para el segundo término de G , repetimos el mismo procedimiento anterior tomando en cuenta que el gradiente es lineal y obtenemos

$$\|\nabla(tv_1 + (1-t)v_2)\|_{L^2(\Omega)} \leq t\|\nabla v_1\|_{L^2(\Omega)} + (1-t)\|\nabla v_2\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.40)$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} |\partial_i(tv_1 + (1-t)v_2)(x)| dx &= \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} (|t\partial_i v_1(x)| + |(1-t)\partial_i v_2(x)|) dx, \\ &\leq \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} (t|\partial_i v_1(x)| + (1-t)|\partial_i v_2(x)|) dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= t \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} |\partial_i v_1(x)| dx \\
&\quad + (1-t) \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} |\partial_i v_2(x)| dx. \tag{3.41}
\end{aligned}$$

Ya que $\alpha, \beta, \kappa > 0$ junto con (3.39), (3.40) y (3.41) se tiene

$$G(tv + (1-t)p) \leq tG(v) + (1-t)G(p).$$

Por otro lado, para H en (3.38) la convexidad se sigue observando que es la suma de composición de funciones convexas. \square

Una vez que se ha expresado la función J_γ como la diferencia de funciones convexas es importante analizar las propiedades de diferenciabilidad de G y H para poder describir el sistema de optimalidad. Empecemos por la función H .

Teorema 3.5.2. *La función $H : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, definida por (3.38) es Gâteaux diferenciable, cuya derivada en $u \in H_0^1(\Omega)$ está definida por*

$$H'(u; \cdot) = \sum_{i=1}^n (\beta w_i, \cdot)_{L^2(\Omega)}, \tag{3.42}$$

donde $w_i \in L^2(\Omega)$ depende de $\partial_i u$, p y γ , y está dado por

$$w_i(x) = \begin{cases} \left[\kappa - \frac{1}{p} \left(|\partial_i u(x)| + \frac{1}{\gamma} \frac{1-p}{p} \right)^{\frac{1-p}{p}} \right] \text{sign}(\partial_i u(x)), & \text{si } |\partial_i u(x)| > \frac{1}{\gamma}, \\ 0, & \text{si } |\partial_i u(x)| \leq \frac{1}{\gamma}, \end{cases} \tag{3.43}$$

para todo $i = 1, \dots, n$. Identificamos $H'(u; \cdot)$ con $\beta \sum_{i=1}^n w_i \in L^2(\Omega)$.

Demostración. En primer lugar, consideramos el operador de superposición asociado a j que será notado nuevamente por j sin riesgo a confusión. Además, se define j_i como

$$j_i : H_0^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega), \quad [j_i(u)](x) = j(\partial_i u(x)), \tag{3.44}$$

casi todo punto $x \in \Omega$. Observemos que $j_i = j \circ T_i$, para todo $i = 1, \dots, n$.

Los operadores j y T_i están definidas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
j : L^2(\Omega) &\longrightarrow L^2(\Omega) \\
u &\longmapsto j(u) = j(u), & [j(u)](x) &= j(u(x)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_i : H_0^1(\Omega) &\longrightarrow L^2(\Omega) & [T_i(u)](x) &= \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) . \\ u &\longmapsto T_i(u) = \partial_i u, \end{aligned}$$

casi todo punto $x \in \Omega$, para todo $i = 1, \dots, n$, y tienen las siguientes propiedades:

- El operador j está bien definido y es Gâteaux diferenciable de $L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$.
- Los operadores T_i son lineales y continuas de $H_0^1(\Omega)$ en $L^2(\Omega)$ para todo $i = 1, \dots, n$.

En efecto para j , dado que j es continuamente diferenciable, j es Carathéodory y satisface, gracias a (3.29), que

$$|j(z)| \leq \kappa_\gamma |z| + \left| |z| + \frac{1-p}{\gamma} \right|^{\frac{1}{p}} \leq 2\kappa_\gamma |z|. \quad (3.45)$$

En consecuencia si $u \in L^2(\Omega)$ de (3.45) se tiene

$$\|j(u)\|_{L^2(\Omega)} \leq 2\kappa_\gamma \|u\|_{L^2(\Omega)} < \infty,$$

lo que muestra que j está bien definido de $L^2(\Omega)$ en $L^2(\Omega)$. Además, j' es Carathéodory y satisface la siguiente acotación:

$$0 < |j'(z)| = \left| \kappa - \frac{1}{p} \left(|z| + \frac{1-p}{\gamma} \right)^{\frac{1-p}{p}} \right| < \kappa, \quad \text{para } |z| > \frac{1}{\gamma}.$$

Por tanto, del Teorema 2,7 de [AP95, pg.19] se tiene que j es Gâteaux diferenciable cuya derivada en u , en la dirección h viene dada por

$$[j'(u; h)](x) = j'(u(x)) h(x), \quad (3.46)$$

casi todo punto $x \in \Omega$.

Luego para los operadores T_i , tomando $u_1, u_2 \in H_0^1(\Omega)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ cualesquiera se obtiene:

$$T_i(u_1 + \lambda u_2) = \frac{\partial(u_1 + \lambda u_2)}{\partial x_i} = \frac{\partial u_1}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial u_2}{\partial x_i} = T_i(u_1) + \lambda T_i(u_2),$$

lo que muestra que T_i es lineal para todo $i = 1, \dots, n$. Más aún,

$$\begin{aligned}
\|T_i(u_1)\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \|\partial_i u_1\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\leq \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} |\partial_i u_1(x)|^2 dx \\
&= \int_{\Omega} |\nabla u_1(x)|^2 dx \\
&= \|\nabla u_1\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\leq C \|u_1\|_{H_0^1(\Omega)}^2,
\end{aligned}$$

para cierta constante positiva que depende Ω . Es decir T_i es continua para todo $i = 1, \dots, n$.

La Gâteaux diferenciabilidad de j y el hecho de que $T_i \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega), L^2(\Omega))$ implican que j_i es Gâteaux diferenciable. En efecto sean $u, h \in H_0^1(\Omega)$ y $t > 0$, cualesquiera.

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow 0} \frac{j_i(u + th) - j_i(u)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{j \circ T_i(u + th) - j \circ T_i(u)}{t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{j(T_i(u + th)) - j(T_i(u))}{t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{j(T_i(u) + tT_i(h)) - j(T_i(u))}{t} \\
&= j'(T_i(u); T_i(h)),
\end{aligned}$$

lo cual muestra que j_i es Gâteaux diferenciable y gracias a la ecuación (3.46) su derivada en $u \in H^1(\Omega)$ en la dirección $h \in H^1(\Omega)$ viene dada por:

$$\begin{aligned}
[j_i'(u; h)] &= [j'(T_i(u); T_i(h))] \\
&= j'([T_i(u)]) [T_i(h)] \\
&= j'(\partial_i u) \partial_i h.
\end{aligned}$$

Debido que j_i es Gâteaux diferenciable podemos usar el Teorema 1,8 de [AP95, pg. 13] para emplear el Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue y concluir que

H es Gâteaux diferenciable como sigue

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [H(u + th) - H(u)] &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left[\beta \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} [j_i(u + th)](x) - [j_i(u)](x) dx \right], \\ &= \beta \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{[j_i(u + th)](x) - [j_i(u)](x)}{t} dx, \\ &= \beta \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} j'_i(\partial_i u(x)) \partial_i h(x) dx \end{aligned}$$

para todo $i = 1, \dots, n$. Hemos demostrado que H es Gâteaux diferenciable y su derivada en el punto $u \in H_0^1(\Omega)$ en la dirección $h \in H_0^1(\Omega)$ viene dado por

$$H'(u; h) = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \beta j'_i(\partial_i u(x)) \partial_i h(x) dx = \sum_{i=1}^n (\beta w_i, \partial_i h)_{L^2(\Omega)}$$

□

Nos ocuparemos de estudiar las propiedades de diferenciabilidad de la función G . Para ello recordemos la forma de G :

$$G(u) = \underbrace{\frac{1}{2} \|Su + y_f - y_d\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2}_{\mathcal{F}(u)} + \kappa_\gamma \beta \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} |\partial_i u(x)| dx. \quad (3.47)$$

La función G se puede ver entonces como la suma de la función \mathcal{F} y la función (3.32). Es decir, G consta de una parte diferenciable en el sentido usual (la función \mathcal{F}) y de otra que no lo es. El siguiente resultado muestra que \mathcal{F} es Fréchet diferenciable y da una expresión de su derivada.

Teorema 3.5.3. *La función $\mathcal{F} : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, definida por*

$$v \mapsto \mathcal{F}(v) = \frac{1}{2} \|Su + y_f - y_d\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

es Fréchet diferenciable, cuya derivada en $u \in H_0^1(\Omega)$ está definida por

$$\mathcal{F}'(u)[h] = (Su + y_f - y_d, Sh)_{L^2(\Omega)} + \alpha (\nabla u, \nabla h)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall h \in H_0^1(\Omega). \quad (3.48)$$

Demostración. La función \mathcal{F} se puede ver como la suma de productos escalares en el espacio de Hilbert $L^2(\Omega)$. Verifiquemos que la derivada de $\mathcal{F} : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ está dada por (3.48).

Sea $h \in H_0^1(\Omega)$, cualquiera y consideremos $\tau = y_f - y_d$. Gracias a la linealidad de

S y las propiedades del producto interno en $L^2(\Omega)$, por un lado se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(u+h) - \mathcal{F}(u) &= \frac{1}{2} (S(u+h) + \tau, S(u+h) + \tau)_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + \frac{\alpha}{2} (\nabla(u+h), \nabla(u+h))_{L^2(\Omega)} \\
&\quad - \frac{1}{2} (Su + \tau, Su + \tau)_{L^2(\Omega)} - \frac{\alpha}{2} (\nabla u, \nabla u)_{L^2(\Omega)}, \\
&= \frac{1}{2} (Su + \tau + Sh, Su + \tau + Sh)_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + \frac{\alpha}{2} (\nabla u + \nabla h, \nabla u + \nabla h)_{L^2(\Omega)} \\
&\quad - \frac{1}{2} (Su + \tau, Su + \tau)_{L^2(\Omega)} - \frac{\alpha}{2} (\nabla u, \nabla u)_{L^2(\Omega)}, \\
&= \frac{1}{2} (Su + \tau, Su + \tau)_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2} (Sh, Sh)_{L^2(\Omega)} + (Su + \tau, Sh)_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + \frac{\alpha}{2} (\nabla u, \nabla u)_{L^2(\Omega)} + \frac{\alpha}{2} (\nabla h, \nabla h)_{L^2(\Omega)} + \alpha (\nabla u, \nabla h)_{L^2(\Omega)} \\
&\quad - \frac{1}{2} (Su + \tau, Su + \tau)_{L^2(\Omega)} - \frac{\alpha}{2} (\nabla u, \nabla u)_{L^2(\Omega)}, \\
&= \frac{1}{2} (Sh, Sh)_{L^2(\Omega)} + (Su + \tau, Sh)_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + \frac{\alpha}{2} (\nabla h, \nabla h)_{L^2(\Omega)} + \alpha (\nabla u, \nabla h)_{L^2(\Omega)}. \tag{3.49}
\end{aligned}$$

Por otro lado, de (3.49) y la definición de $\mathcal{F}'(u)[h]$ se sigue que

$$\mathcal{F}(u+h) - \mathcal{F}(u) - \mathcal{F}'(u)[h] = \frac{1}{2} (Sh, Sh)_{L^2(\Omega)} + \frac{\alpha}{2} (\nabla h, \nabla h)_{L^2(\Omega)}. \tag{3.50}$$

Finalmente, de la continuidad de S , la Proposición 2.3.7 y (3.50) se obtiene

$$\frac{|\mathcal{F}(u+h) - \mathcal{F}(u) - \mathcal{F}'(u)[h]|}{\|h\|_{H_0^1(\Omega)}} \leq C \|h\|_{H_0^1(\Omega)} = O\left(\|h\|_{H_0^1(\Omega)}\right),$$

para cualquier $u \in H_0^1(\Omega)$, lo cual muestra que \mathcal{F} es Fréchet diferenciable en $H_0^1(\Omega)$. \square

Sabemos que G no es diferenciable en el sentido usual. Sin embargo, el subdiferencial de G (ver Definición 2.2.5) existe y se puede caracterizar por lo siguiente:

$$\partial G(u) = \mathcal{F}'(u) + \partial \left(\beta \kappa_\gamma \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} |\partial_i u(x)| dx \right).$$

Se hará uso de de la teoría de subdiferenciales convexos en espacios de Lebesgue [CV20], debido a la presencia del término no diferenciable (3.32) en el sentido usual (Fréchet y Gâteaux diferenciable). A continuación se presentan algunos resultados que

permitirán dar una caracterización del subdiferencial de la función (3.32). Sus demostraciones se pueden consultar en [CV20, cap. 4].

Proposición 3.5.1. Sean $F : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ convexa, $x \in \text{dom}F$ y $\lambda > 0$. Entonces

$$\partial(\lambda F)(x) = \lambda(\partial F(x)) := \{\lambda\zeta : \zeta \in \partial F(x)\}.$$

Proposición 3.5.2 (Regla de la Suma). Sean $F, B : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ convexas y $x \in \text{dom}F \cap \text{dom}B$. Entonces

$$\partial F(x) + \partial B(x) \subset \partial(F + B)(x). \quad (3.51)$$

La igualdad se cumple si existe $x_0 \in (\text{dom}F)^\circ \cap \text{dom}B$

Proposición 3.5.3 (Regla de la Cadena). Sean X, Y espacios de Banach. Sean $F : Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ convexa, $B \in \mathcal{L}(X, Y)$ y $x \in \text{dom}(F \circ B)$. Entonces

$$\partial(F \circ B)(x) \supset B^* \partial F(Bx) := \{B^* y^* : y^* \in \partial F(Bx)\}, \quad (3.52)$$

donde B^* es el adjunto de B . La igualdad se tiene si existe $x_0 \in X$ tal que $Bx_0 \in (\text{dom}F)^\circ$.

Proposición 3.5.4. Sean $f : \mathbb{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una función propia convexa y semicontinua inferior, y $F : L^p(\Omega) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ con $1 \leq p < \infty$ tal que

$$F(u) = \begin{cases} \int_{\Omega} f(u(x)) dx, & \text{si } f \circ u \in L^1(\Omega), \\ \infty, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Entonces se tiene para todo $u \in \text{dom}F$ con $q = \frac{p}{p-1}$ que

$$\partial F(u) = \{v \in L^q(\Omega) : v(x) \in \partial f(u(x)), \text{ en casi todo punto } x \in \Omega\}.$$

Cabe mencionar que el subdiferencial de la norma en $L^1(\Omega)$ se puede caracterizar mediante de la Proposición 3.5.4.

Proposición 3.5.5. Sea $F : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ convexa y Gâteaux diferenciable en x . Entonces

$$\partial F(x) = \{F'(x, \cdot)\}.$$

Con ayuda de las Proposiciones 3.5.1, 3.5.2 y 3.5.3 planteamos el siguiente resultado de la función (3.32).

Teorema 3.5.4. *El subdiferencial de la función (3.32) viene dado para $u \in H_0^1(\Omega)$, por:*

$$\partial \left(\beta \kappa_\gamma \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} |\partial_i(\cdot)| dx \right) (u) = -\beta \kappa_\gamma \sum_{k=1}^n \left(\operatorname{div} \circ \dot{i}_k \right) \partial \|\cdot\|_{L^1(\Omega)} (\partial_k u) .$$

Demostración. Notemos que la función (3.32) se puede escribir como la suma de normas en $L^1(\Omega)$ de las derivadas parciales de $u \in H_0^1(\Omega)$, por tanto dicha función es convexa. Así, gracias a la Proposición 3.5.1 se tiene que

$$\partial \left(\beta \kappa_\gamma \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} |\partial_i(\cdot)| dx \right) (u) = \beta \kappa_\gamma \partial \left(\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} |\partial_i(\cdot)| dx \right) (u) . \quad (3.53)$$

Ahora, nos centraremos en la forma de un elemento de

$$\partial \left(\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} |\partial_i(\cdot)| dx \right) (u) . \quad (3.54)$$

Sea $u \in H_0^1(\Omega)$, cualquiera. Definamos los siguientes operadores que se usarán para reescribir la función (3.54):

$$\begin{aligned} P_i : (L^2(\Omega))^n &\longrightarrow L^2(\Omega) \\ v &\longmapsto P_i(v) = v_i , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla : H_0^1(\Omega) &\longrightarrow (L^2(\Omega))^n \\ v &\longmapsto \nabla(v) = (\partial_1 v, \dots, \partial_n v)^T . \end{aligned}$$

El operador P_i es la proyección canónica y ∇ es el operador no acotado densamente definido del gradiente (ver Definición 2.2.4). Entonces el subdiferencial (3.54) se puede reescribir como sigue:

$$\partial \left(\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} |\partial_i(\cdot)| dx \right) (u) = \partial \left(\sum_{i=1}^n (\|\cdot\|_{L^1(\Omega)} \circ P_i \circ \nabla) \right) (u) . \quad (3.55)$$

Por un lado, gracias a la Proposición 3.5.2 y usando (3.55) el subdiferencial de (3.54) es:

$$\partial \left(\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} |\partial_i(\cdot)| dx \right) (u) = \sum_{i=1}^n \partial (\|\cdot\|_{L^1(\Omega)} \circ P_i \circ \nabla) (u) . \quad (3.56)$$

Por otro lado, ya que $\|\cdot\|_{L^1(\Omega)}$ es convexa y P_i y ∇ son operadores lineales y

continuos. Es decir, $P_i \circ \nabla \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega), L^2(\Omega))$. De la Proposición 3.5.3 se tiene

$$\partial(\|\cdot\|_{L^1(\Omega)} \circ P_i \circ \nabla)(u) = \nabla^* \circ P_i^* \partial \|\cdot\|_{L^1(\Omega)}(P_i \circ \nabla u). \quad (3.57)$$

El hecho de que los dos operadores sean lineales y continuos establece la existencia de los operadores adjuntos asociados a la proyección P_i^* y el gradiente

$$\nabla^* : (L^2(\Omega))^2 \longrightarrow H^{-1}(\Omega).$$

Mas aún, su composición $\nabla^* \circ P_i^*$ está bien definida por la continuidad de los operadores. A continuación se describe la forma de los operadores adjuntos asociados a la proyección y gradiente, respectivamente.

- **Operador proyección:** Para cada $v \in L^2(\Omega)$ existe $q \in (L^2(\Omega))^2$ tal que $P_k^* v = q$. Además se cumple que

$$(P_k u, v)_{L^2(\Omega)} = (u, P_k^* v)_{(L^2(\Omega))^2}, \quad \forall u \in (L^2(\Omega))^2, \forall v \in L^2(\Omega). \quad (3.58)$$

Desarrollando el término del lado izquierdo de (3.58) se tiene

$$\begin{aligned} (P_k u, v)_{L^2(\Omega)} &= (u_k, v)_{L^2(\Omega)}, \\ &= (u_1, 0)_{L^2(\Omega)} + \dots + (u_k, v)_{L^2(\Omega)} + \dots + (u_n, 0)_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Tomando $\widehat{w} \in (L^2(\Omega))^2$ tal que $\widehat{w} = (\widehat{w}_1, \dots, \widehat{w}_n)^T$ es

$$\widehat{w}_i = \begin{cases} v, & \text{si } i = k, \\ 0, & \text{si } i \neq k. \end{cases}$$

De esta manera podemos escribir (3.59) de la siguiente manera

$$(P_k u, v)_{L^2(\Omega)} = \sum_{i=1}^n (u_k, \widehat{w}_k)_{L^2(\Omega)} = (u, \widehat{w})_{(L^2(\Omega))^2},$$

Luego,

$$(u, q)_{(L^2(\Omega))^2} = (u, \widehat{w})_{(L^2(\Omega))^2}, \implies (u, q - \widehat{w})_{(L^2(\Omega))^2} = 0, \quad (3.60)$$

para todo $u \in (L^2(\Omega))^2$. En consecuencia $q = \widehat{w}$ y por tanto $P_k^* v = \widehat{w}$. Es decir, $\dot{i}_k = P_k^*$.

- No es objeto de estudio del presente proyecto de investigación la dualidad de los

operadores gradiente y divergencia, de manera que consideramos $\nabla^* = -\text{div}$ y referimos el estudio de la dualidad entre dichos operadores a [KZ12, Teorema 6.2, pg. 12].

Sustituyendo los adjuntos de la proyección y el gradiente en (3.57) y a su vez reemplazando en (3.56) se tiene que

$$\partial \left(\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} |\partial_i(\cdot)| dx \right) (u) = - \sum_{k=1}^n \left(\text{div} \circ \dot{i}_k \right) \partial \|\cdot\|_{L^1(\Omega)} (\partial_k u) .$$

Luego, concatenando la forma del subdiferencial de (3.54) junto con (3.53) obtenemos el resultado deseado. \square

Inmediatamente presentamos el resultado sobre el subdiferencial de G .

Teorema 3.5.5. *El subdiferencial de G en $u \in H_0^1(\Omega)$ viene caracterizado por*

$$\partial G(u) = \mathcal{F}'(u) - \beta \kappa_{\gamma} \sum_{k=1}^n \left(\text{div} \circ \dot{i}_k \right) \partial \|\cdot\|_{L^1(\Omega)} (\partial_k u) . \quad (3.61)$$

Demostración. Sea $u \in H_0^1(\Omega)$, cualquiera. De la Proposición 3.5.2 se sigue que

$$\begin{aligned} \partial G(u) &= \partial \left(\mathcal{F} + \beta \kappa_{\gamma} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} |\partial_i(\cdot)| dx \right) (u) , \\ &= \partial \mathcal{F}(u) + \partial \left(\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} |\partial_i(\cdot)| dx \right) (u) . \end{aligned}$$

Por un lado, ya que \mathcal{F} es convexa y Fréchet diferenciable (ver Teorema 3.5.3), entonces \mathcal{F} es convexa y Gâteaux diferenciable. Luego, de la Proposición 3.5.5 se tiene que $\partial \mathcal{F}(u) = \{\mathcal{F}'(u)\}$. Por otro lado, el Teorema 3.5.4 nos da la forma del subdiferencial de la expresión (3.32).

En consecuencia, el subdiferencial de G es tal que

$$\partial G(u) = \mathcal{F}'(u) - \beta \kappa_{\gamma} \sum_{k=1}^n \left(\text{div} \circ \dot{i}_k \right) \partial \|\cdot\|_{L^1(\Omega)} (\partial_k u) .$$

\square

La definición de un mínimo local para un problema DC de acuerdo a [Ho17, pg. 33] y adaptado a espacios funcionales es

Definición 3.5.1 (Mínimo Local). Una función u^* se dice que es un mínimo local de un problema DC si $u^* \in \text{dom}G \cap \text{dom}H$ y existe una vecindad U de u^* tal que

$$G(u) - H(u) \geq G(u^*) - H(u^*), \quad \forall u \in U.$$

Seguidamente de [Mer19, Proposición 1, pg. 10] citamos la condición de punto crítico como lema en el presente proyecto de investigación.

Proposición 3.5.6. Sea G y H , las funciones convexas definidas en (3.33) y (3.34). Si \bar{u} es un mínimo local de la función de $J_\gamma = G - H$, entonces \bar{u} satisface la siguiente condición de punto crítico:

$$\partial H(\bar{u}) \subset \partial G(\bar{u}).$$

Demostración. Sea u^* un mínimo local de J_γ , cualquiera. La definición de mínimo local (Definición 3.5.1), con $U = H_0^1(\Omega)$, muestra el resultado directamente como sigue:

$$\begin{aligned} G(u) - H(u) &\geq G(\bar{u}) - H(\bar{u}), \quad \forall u \in H_0^1(\Omega), \\ G(u) - G(\bar{u}) &\geq H(u) - H(\bar{u}), \quad \forall u \in H_0^1(\Omega). \end{aligned} \quad (3.62)$$

Por consiguiente, si $u \in \partial H(\bar{u})$ de la desigualdad (3.62) se tiene que $u \in \partial H(\bar{u})$. \square

Después de calcular los subdiferenciales de G y H , junto con la Proposición 3.5.6 podemos dar un sistema de optimalidad del problema (PCO $_\gamma$) con el siguiente resultado.

Teorema 3.5.6. Sea \bar{u} una solución del problema (PCO $_\gamma$), entonces existe $\hat{y} = \mathcal{S} \bar{u}$ en $H_0^1(\Omega)$, un estado adjunto $\phi \in H_0^1(\Omega)$, unos multiplicadores en $\zeta_i \in L^2(\Omega)$ y $w_i \in L^2(\Omega)$ dado por (3.43), para $i = 1, \dots, n$, tal que satisface el siguiente sistema de optimalidad

$$\begin{aligned} A\hat{y} &= \bar{u} + f, \quad \text{en } \Omega, \\ \hat{y} &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{aligned} \quad (3.63)$$

$$\begin{aligned} A^*\phi &= \bar{y} - y_d, \quad \text{en } \Omega, \\ \phi &= 0, \quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{aligned} \quad (3.64)$$

$$\phi - \alpha \Delta \bar{u} - \beta \sum_{i=1}^n (\kappa_\gamma \partial_i \zeta_i + w_i) = 0, \quad (3.65)$$

$$\begin{aligned}
\zeta_i(x) &= 1, & \text{si } \partial_i \bar{u}(x) > 0, \\
\zeta_i(x) &= -1, & \text{si } \partial_i \bar{u}(x) < 0, \\
|\zeta_i(x)| &\leq 1, & \text{si } \partial_i \bar{u}(x) = 0, \\
&& \text{casi todo punto } x \in \Omega, \quad 1 \leq i \leq n.
\end{aligned} \tag{3.66}$$

Demostración. La ecuación (3.63) es una consecuencia del estudio de la ecuación de estado, con lo cual se definió el operador de control estado en la Sección 3.3, dando la equivalencia de (3.63) con $\mathcal{S} \bar{u} = \hat{y}$.

Ya que H es convexa y Gâteaux diferenciable (Teorema 3.5.1 y Teorema 3.5.2, respectivamente) la Proposición 3.5.5 nos indica que el único elemento del subdiferencial de H es la derivada de Gâteaux en \bar{u} , i.e., existen $w_i \in L^2(\Omega)$ dados por (3.43) tal que

$$w = H'(\bar{u}) = \beta \sum_{i=1}^n w_i. \tag{3.67}$$

Además, la condición de necesaria de optimalidad para problemas DC - Proposición 3.5.6 - nos indica que

$$w \in \partial G(\bar{u}) \subset L^2(\Omega).$$

De la Observación 3.3.2 sabemos que el operador de control estado S es un operador no acotado densamente definido. Por tanto se cumple que

$$(Su, v)_{L^2(\Omega)} = (u, S^*v)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega), \forall v \in L^2(\Omega).$$

Usando la segunda fórmula de Green (Proposición 2.3.3) se puede determinar $\mathcal{F}'(\bar{u})$. Para $u \in H_0^1(\Omega)$, se tiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}'(\bar{u})[u] &= (S\bar{u} + y_f - y_d, Su)_{L^2(\Omega)} + \alpha (\nabla \bar{u}, \nabla u)_{L^2(\Omega)}, \\
&= (S^*(\hat{y} - y_d), u)_{L^2(\Omega)} - \alpha (\Delta \bar{u}, u)_{L^2(\Omega)}, \\
&= (S^*(\hat{y} - y_d) - \alpha \Delta \bar{u}, u)_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Definimos el estado adjunto $\phi \in H_0^1(\Omega)$ como la solución de la ecuación adjunta

$$\begin{aligned}
A^* \phi &= \bar{y} - y_d, & \text{en } \Omega, \\
\phi &= 0, & \text{sobre } \partial\Omega.
\end{aligned}$$

De lo cual obtenemos (3.64) y podemos escribir $\phi = S^*(\hat{y} - y_d)$ (S^* denota el operador de control estado de la ecuación adjunta) y $\mathcal{F}'(\bar{u}) = \phi - \alpha \Delta \bar{u}$.

Adicionalmente del Teorema 3.5.4, un elemento del subdiferencial de la expresión

(3.32) es de tal que existen $\zeta_k \in \partial \|\cdot\|_{L^1(\Omega)}(\partial_k \bar{u})$ tal que

$$q = -\beta \kappa_\gamma \sum_{k=1}^n (\operatorname{div} \circ i_k) \zeta_k \quad \text{y} \quad \zeta_k(x) \in \begin{cases} \{1\}, & \text{si } \partial_x \bar{u}(x) > 0, \\ \{-1\}, & \text{si } \partial_x \bar{u}(x) < 0, \\ [-1, 1], & \text{si } \partial_x \bar{u}(x) = 0, \end{cases}$$

para todo $k = 1, \dots, n$, en casi todo punto $x \in \Omega$. El aspecto de $\zeta_k(x)$ viene dado por la Proposición 3.5.4 y obtenemos (3.66).

La expresión de q junto con la forma de $\mathcal{F}'(\bar{u})$ nos permite escribir

$$\phi - \alpha \Delta \bar{u} - \beta \sum_{i=1}^n (\kappa_\gamma \partial_i \zeta_i + w_i) = 0, \quad (3.68)$$

lo cual es (3.65). □

Observación 3.5.1. *Se usará la formulación variacional de la ecuación (3.65), la cual es*

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \phi v dx + \int_{\Omega} \nabla \bar{u} \cdot \nabla v dx + \beta \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} [\kappa_\gamma \zeta_i \partial_i v + w_i v] dx &= 0, \\ \int_{\Omega} \phi v dx + \int_{\Omega} \nabla \bar{u} \cdot \nabla v dx + \beta \int_{\Omega} \kappa_\gamma \zeta_0 \nabla v dx + \beta \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} w_i v dx &= 0, \end{aligned}$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$. El vector $\zeta_0 \in (L^2(\Omega))^n$ está compuesto de los multiplicadores del Teorema 3.5.6.

Capítulo 4

Implementación Numérica

4.1. Algoritmo DC

En un principio la técnica DC fue estudiada en \mathbb{R}^n dando como resultado un esquema sencillo del algoritmo en el cual interactúan el problema primal y dual [TDLV14]. Luego, Giles Auchmuty desarrolló esta técnica en espacios funcionales [Auc89], dando la facilidad de usar la técnica DC en el contexto de este proyecto de titulación.

Para entender el algoritmo DC, consideraremos el caso en \mathbb{R}^n puesto que la idea del algoritmo no cambia en espacios funcionales. No nos enfocaremos en los detalles del algoritmo, por lo referimos al lector a [DLT].

Consideremos una función DC f , i.e., $f(x) = g(x) - h(x)$. El problema primal viene dado por

$$(P) \quad \eta = \inf \{ f(x) = g(x) - h(x) : x \in \mathbb{R}^n \},$$

y su problema dual es

$$(D) \quad \eta^* = \sup \{ f(x) = h^*(y) - g^*(y) : y \in \mathbb{R}^n \}.$$

Nótese que si \bar{x} es una solución del problema primal, éste satisface la condición de punto crítico DC. Asimismo, si \bar{y} es una solución del problema dual satisface la condición de punto crítico DC. Es decir,

$$\partial h(\bar{x}) \subset \partial g(\bar{x}), \quad \partial g^*(\bar{y}) \subset \partial h^*(\bar{y}),$$

donde g^* es el conjugado de g , el cual se expresa como

$$g^*(y) = \sup \{ f(x) = h^*(y) - g^*(y) : y \in \mathbb{R}^n \}.$$

De esta manera, el algoritmo DC consiste en construir sucesiones tanto del problema primal como del problema dual. Esta construcción de sucesiones da como resultado el siguiente algoritmo DC:

1. Para un punto inicial $x_0 \in \text{dom}g$,
2. encontrar

$$y^k \in \partial h(x^k) = \operatorname{argmin} \{h^*(y^k) - \langle y^k, x^k \rangle : y^k \in \mathbb{R}^n\},$$

3. encontrar

$$x^{k+1} \in \partial g^*(y^k) = \operatorname{argmin} \{g(x^{k+1}) - \langle x^{k+1}, y^k \rangle : x^{k+1} \in \mathbb{R}^n\}.$$

A partir de este esquema DC y usando algunos resultados de [Auc89] adaptados a nuestro problema se puede usar dicho algoritmo definido por

1. Para un punto inicial $u_0 \in H_0^1(\Omega)$,
2. encontrar $v^k \in \partial H(u^k)$,
3. luego encontrar $u^{k+1} \in \partial G^*(v^k)$.

Por un lado, gracias a la ecuación (3.67), encontrar v^k se reduce a calcular w_i , con $i = 1, \dots, n$, dado por (3.43) y expresar v^k como la suma de dichos w_i . Esta operación resulta sencilla ya que no dependemos de encontrar una forma explícita del conjugado de H .

Por otro lado, las propiedades del argmax nos ayudan a determinar el subdiferencial de G^* de modo que

$$\partial G^*(v^k) = \operatorname{argmax} \{\langle v^k, u^{k+1} \rangle - G(u^{k+1}) : u^{k+1} \in H_0^1(\Omega)\},$$

de lo cual se puede obtener u^{k+1} resolviendo el siguiente problema de control óptimo

$$\min \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \|Su^{k+1} + y_f - y_d\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2} \|\nabla u^{k+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ + \kappa_\gamma \beta \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} |\partial_i u^{k+1}(x)| dx - \beta \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} w_i u^{k+1} dx \end{array} : u^{k+1} \in H_0^1(\Omega) \right\}. \quad (4.1)$$

Aproximaremos (4.1) mediante el método de elementos finitos (F.E.M). La siguiente sección describe el procedimiento.

4.2. Aproximación por F.E.M

En esta sección y en la siguiente consideramos $n = 2$, $\Omega = (a, b) \times (a, b)$, el operador diferencial de segundo orden $A = \Delta$ y $\tau = y_f - y_d$. Tomemos una partición homogénea del intervalo (a, b) de tamaño m , donde $h = \frac{1}{m}$ es el tamaño de la malla y llamamos $M = (m - 1)^2$.

Nuestro interés es resolver (4.1) con el método de elementos finitos de Lagrange, de modo que para evitar confusión con los índices resolveremos el problema

$$\text{mín} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \|Su + \tau\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ + \kappa_\gamma \beta \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} |\partial_i u(x)| dx - \beta \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} w_i u dx \end{array} : u \in H_0^1(\Omega) \right\}. \quad (4.2)$$

De [QV94], sabemos que existe una familia de subespacios de dimensión finita

$$\mathcal{V} = \{V_h : h > 0\}$$

tal que $\text{span}(\mathcal{V})$ es denso en $H_0^1(\Omega)$. De modo que, si $u \in H_0^1(\Omega)$ existen $\bar{u}_k \in \mathbb{R}$ tal que (abusando de la notación)

$$u = \sum_{k=1}^M \bar{u}_k \varphi_k. \quad (4.3)$$

Analizamos los 4 términos de (4.2) por separado como sigue:

1. Al reemplazar (4.3) en el primer término y usando la linealidad de S obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|Su + \tau\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \frac{1}{2} (Su + \tau, Su + \tau)_{L^2(\Omega)} \\ &= \frac{1}{2} (Su, Su)_{L^2(\Omega)} + (Su, \tau)_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2} (\tau, \tau)_{L^2(\Omega)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^M \bar{u}_k \bar{u}_j (S\varphi_k, S\varphi_j)_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \sum_{k=1}^M \bar{u}_k (S\varphi_k, \tau)_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2} (\tau, \tau)_{L^2(\Omega)} \\ &= \frac{1}{2} \vec{u}^T \mathbf{S} \vec{u} + \vec{b}^T \vec{u} + c, \end{aligned} \quad (4.4)$$

donde \mathbf{S} es una matriz de $M \times M$, \vec{b} es un vector de M y c es una constante tal

que

$$\mathbf{S}_{k,j} = (S\varphi_k, S\varphi_j)_{L^2(\Omega)}, \quad b_k = (S\varphi_k, \tau)_{L^2(\Omega)}, \quad c = \frac{1}{2} (\tau, \tau)_{L^2(\Omega)}.$$

2. Asimismo, en el segundo término se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{2} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \frac{\alpha}{2} (\nabla u, \nabla u)_{H_0^1(\Omega)} \\ &= \frac{\alpha}{2} \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^M \bar{u}_k \bar{u}_j (\nabla \varphi_k, \nabla \varphi_j)_{L^2(\Omega)} \\ &= \frac{\alpha}{2} \vec{u}^T \mathbf{A} \vec{u}, \end{aligned} \tag{4.5}$$

donde \mathbf{A} la matriz de rigidez de $M \times M$ tal que

$$\mathbf{A}_{k,j} = (\nabla \varphi_k, \nabla \varphi_j)_{L^2(\Omega)}.$$

3. En el tercer término asumimos que el valor absoluto tiene una representación en \mathcal{V} , de donde se sigue que

$$\begin{aligned} \kappa_\gamma \beta \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} |\partial_i u(x)| dx &= \kappa_\gamma \beta \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^M |\bar{u}_k| \int_{\Omega} |\partial_i \varphi_k(x)| dx \\ &= \sum_{k=1}^M |\bar{u}_k| \left[\kappa_\gamma \beta \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} |\partial_i \varphi_k(x)| dx \right] \\ &= \vec{d}^T |\vec{u}|, \end{aligned} \tag{4.6}$$

donde $|\vec{u}|$ representa el vector de valores absolutos de \vec{u} y \vec{d} es un vector de tamaño M tal que

$$d_k = \kappa_\gamma \beta \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} |\partial_i \varphi_k(x)| dx.$$

4. Finalmente, en el cuarto término tenemos

$$\begin{aligned} \beta \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} w_i u dx &= \sum_{k=1}^M \bar{u}_k \left[\beta \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} w_i \varphi_k dx \right] \\ &= \vec{w}^T \vec{u}, \end{aligned} \tag{4.7}$$

donde \vec{w} es un vector de tamaño M tal que

$$w_k = \beta \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} w_i \varphi_k dx.$$

De esto, tenemos el problema discreto de minimización

$$\text{mín} \left\{ f(\vec{u}) = \frac{1}{2} \vec{u}^T (\mathbf{S} + \alpha \mathbf{A}) \vec{u} + (\vec{b} - \vec{w})^T \vec{u} + \vec{d}^T |\vec{u}| + c : \vec{u} \in \mathbb{R}^M \right\}. \quad (4.8)$$

La matriz \mathbf{A} y del vector \vec{d} se pueden obtener explícitamente con los elementos finitos φ_k con $k = 1, \dots, M$. La matriz \mathbf{S} y los vectores \vec{b} y \vec{w} se obtendrán usando integración numérica con el método del trapecio.

Necesitamos definir los elementos finitos de Lagrange φ_k en dos dimensiones para una malla cuadrada uniforme.

Observación 4.2.1. Si tomamos $u \in H_0^1(\Omega)$, no consideramos los elementos finitos en el borde, puesto que valen cero. De modo que si el tamaño del mallado es m , obtenemos M elementos finitos. La figura 4.2 es un ejemplo del número de elementos finitos para un tamaño de malla m .

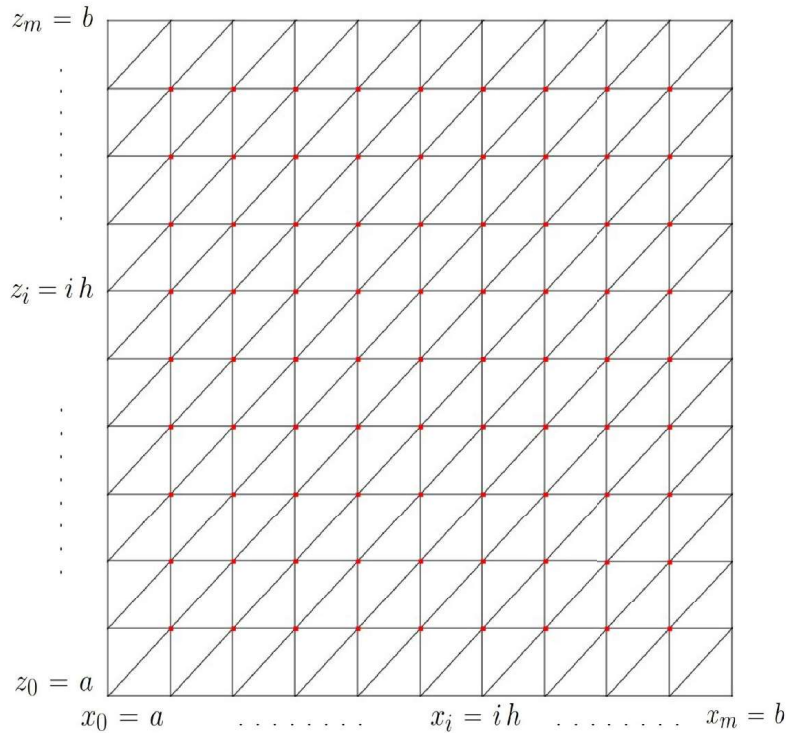


Figura 4.1: Los puntos rojos denotan el elemento finito en la malla de $[a, b] \times [a, b]$

Observación 4.2.2. Podemos ver que el soporte del k -ésimo elemento finito puede ser descompuesto en $\Omega_{k,1}$, $\Omega_{k,2}$, $\Omega_{k,3}$, $\Omega_{k,4}$, $\Omega_{k,5}$ y $\Omega_{k,6}$, como ilustra la figura 4.2.

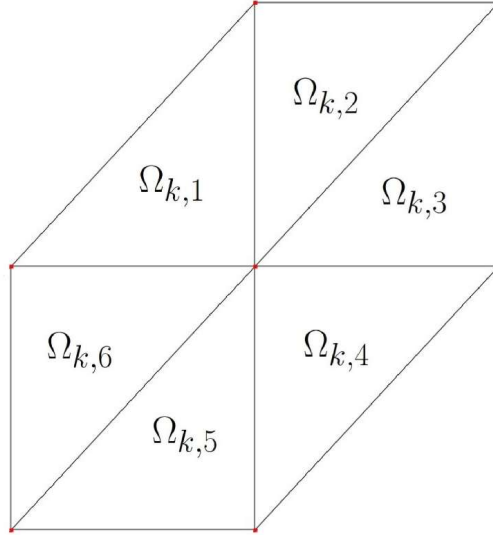


Figura 4.2: Soporte del k -ésimo elemento finito en la malla de $[a, b] \times [a, b]$

Para obtener la forma explícita de los elementos finitos, introducimos la siguiente asignación en los índices de los elementos:

$$k \mapsto (j, l), \quad \text{donde} \quad j = \lceil \frac{k}{m-1} \rceil, \quad l = j - (k-1)(m-1).$$

De esta manera, un elemento finito se escribe como

$$\varphi_k(x_1, x_2) = \varphi_{j,l}(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x}{h} - \frac{y}{h} + (l - j + 1), & \text{si } (x_1, x_2) \in \Omega_{k,1}, \\ -\frac{y}{h} + l + 1, & \text{si } (x_1, x_2) \in \Omega_{k,2}, \\ -\frac{x}{h} + j + 1, & \text{si } (x_1, x_2) \in \Omega_{k,3}, \\ -\frac{x}{h} + \frac{y}{h} + (j - l + 1), & \text{si } (x_1, x_2) \in \Omega_{k,4}, \\ \frac{y}{h} - (l - 1), & \text{si } (x_1, x_2) \in \Omega_{k,5}, \\ \frac{x}{h} - (j - 1), & \text{si } (x_1, x_2) \in \Omega_{k,6}, \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases} \quad (4.9)$$

Una vez que tenemos la forma de los elementos finitos φ_k podemos obtener explícitamente las matrices de rigidez y masa asociados al operador diferencial laplaciano.

Por un lado, la matriz de rigidez viene dado por el producto en $L^2(\Omega)$ de los gradientes de los elementos finitos, es decir la matriz \mathbf{A} . Por otro lado, la matriz de masa viene dado por el producto en $L^2(\Omega)$ de los elementos finitos. Tanto la matriz de masa como la matriz de rigidez son matrices tridiagonales por bloques de tamaño $M^2 \times M^2$ como se muestra a continuación

- Matriz de Rigidez:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_1 & -I & & & & & & & & & \\ -I & A_1 & -I & & & & & & & & \\ & -I & A_1 & -I & & & & & & & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & & & & & \\ & & & & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \\ & & & & & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ & & & & & & -I & A_1 & -I & & \\ & & & & & & -I & A_1 & & & \end{pmatrix}_{M^2 \times M^2},$$

donde I es la matriz identidad y A_1 es una matriz tridiagonal como sigue

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & & & & & & & & & \\ -1 & 4 & -1 & & & & & & & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & & & & & & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & & & & & \\ & & & & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \\ & & & & & -1 & 4 & & & & \end{pmatrix}_{M \times M},$$

- Matriz de Masa:

$$\mathbf{M} = \frac{h^2}{2} \begin{pmatrix} M_1 & M_2 & & & & & & & & & \\ M_3 & M_1 & M_2 & & & & & & & & \\ & M_3 & M_1 & M_2 & & & & & & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & & & & & & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & & & & & \\ & & & & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \\ & & & & & & M_3 & M_1 & M_2 & & \\ & & & & & & M_3 & M_1 & & & \end{pmatrix}_{M^2 \times M^2},$$

donde

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{6} & & & \\ \frac{1}{6} & 1 & \frac{1}{6} & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \frac{1}{6} & 1 \end{pmatrix}_{M \times M}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & & & \\ & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & & \\ & & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & \cdot \\ & & & & \frac{1}{6} \end{pmatrix}_{M \times M},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & & & & \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & & & \\ & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \\ & & & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}_{M \times M}.$$

El vector \vec{d} es sencillo de obtener debido a (4.9), así

$$\vec{d} = 2h\kappa_\gamma\beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Observación 4.2.3. *El vector \vec{d} es positivo en cada componente, esta es una característica importante para el desarrollo numérico.*

Ya que el operador S es el operador de control estado, los elementos de \mathcal{S} se obtienen al resolver la siguiente ecuación

$$\begin{cases} \Delta y_k = \varphi_k, & \text{en } \Omega \\ y_k = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.10)$$

para todo $k = 1, \dots, M^2$. En otras palabras, basta con resolver el sistema $\mathbf{A}\vec{y}_k = M_k^T$, donde M_k es la k -ésima fila de la matriz de masa, para todo $k = 1, \dots, M^2$. Cabe mencionar que la matriz de rigidez es estrictamente diagonal dominante, por tanto el sistema lineal posee un única solución.

Finalmente, usamos la regla del trapecio en dos dimensiones para una partición

uniforme, como se sigue

$$\int_a^b \int_c^d f(x_1, x_2) dy dx = \frac{h^2}{2} \left[f(a, c) + f(a, d) + f(b, c) + f(b, d) + 2 \sum_{i=1}^N [f(a, x_2^i) + f(b, x_2^i)] + 2 \sum_{i=1}^N [f(x_1^i, c) + f(x_1^i, d)] + 4 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N f(x_1^i, x_2^j) \right],$$

para aproximar la integral

$$\int_{\Omega} y_k y_j dx, \quad \forall k, j = 1, \dots, M^2,$$

y obtener los elementos de la matriz \mathbf{S} .

La regla del trapecio también será usada para aproximar las integrales

$$\int_{\Omega} y_k \tau dx \quad \text{y} \quad \int_{\Omega} w_i \varphi_k dx, \quad \forall k = 1, \dots, M^2,$$

de modo que podamos obtener los vectores \vec{b} y \vec{w} respectivamente.

4.3. Adaptación del DCA al problema (PSR-R)

En esta sección notaremos, sin riesgo a confusión, como u al vector discretizado \vec{u} (similar los vectores propuestos \vec{b} , \vec{w}).

Recordemos que los métodos de descenso toman distintos nombres a partir de la elección del paso de descenso p_k , como por ejemplo: el método de descenso del gradiente, método del descenso del gradiente conjugado, método de Newton, etc. Uno de los algoritmos numéricos más eficientes es el Algoritmo BFGS puesto que para la dirección de descenso aproxima la Hessiana con el gradiente de la función, [NW06]. Es decir, que necesitamos que la función a minimizar sea al menos diferenciable una vez.

La función f descrita en (4.8) no es tan sencilla de implementar numéricamente mediante el algoritmo BFGS debido a la presencia de un término no diferenciable (valor absoluto). El hecho de que la función f no sea diferenciable nos impide calcular una dirección de descenso, implementar las condiciones de Wolfe para encontrar el paso de descenso y verificar el criterio de parada en el algoritmo BFGS.

Sin embargo, se puede abordar estos problemas implementando la misma idea de los métodos de descenso con el subgradiente de la función. El problema con esta forma de implementar es que no necesariamente un elemento del subdiferencial hace que el

método descendente, es por eso que no son considerados métodos de descenso como tal. De modo que si queremos que el método con subgradiientes sea un método de descenso es necesario realizar una elección previa a la actualización en cada paso, tomando el mejor valor que desciende en cada iteración [BXM03]. Otra técnica que se usa para aproximar numéricamente el problema (4.8) son los *proximal-point methods* [PB⁺14].

Una vez resuelto el problema de minimización (4.8) es necesario definir un criterio de parada del DCA adaptado a nuestro problema. El criterio de parada que se sugiere en [Mer19] es tomar la norma de la diferencia de los elementos del subdiferencial de la penalización del paso anterior y el paso actual. Adaptando dicho criterio a nuestro problema, se reduce a considerar ρ_{k+1} elemento del subdiferencial de la expresión (3.32) como la suma de los multiplicadores ζ_i dados por el Teorema 3.5.6, i.e., de la ecuación (3.65) tenemos que

$$\rho_{k+1} = \frac{1}{\beta \kappa_\gamma} \left(\phi_{k+1} - \alpha \Delta u_{k+1} - \beta \sum_{i=1}^2 w_{i,k+1} \right) \in \partial \left(\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} |\partial_i u(x)| dx \right).$$

Así, nuestro criterio de parada es

$$\|\rho_{k+1} - \rho_k\| \leq tol, \quad (4.11)$$

donde *tol* es una tolerancia determinada.

Algoritmo 1 (DCA para (PSR-R))

Dado una función inicial u_0 , tolerancia de convergencia $tol > 0$,

matrices de masa \mathbf{M} , rigidez \mathbf{A} y vectores b, d, w .

$k \leftarrow 0$

while criterio de parada $> tol$

 Calcule w_1 y w_2 dados por la ecuación (3.43);

 Resuelva el problema (4.8) con alguna técnica
 mencionada anteriormente;

 Calcule el costo de J_γ usando las matrices de masa y rigidez;

 Actualice el criterio de parada;

$k \leftarrow k + 1$;

end

4.4. Evidencia Numérica

A fin de investigar el proceso numérico del DCA hemos implementado el Algoritmo 1 de la sección anterior usando el lenguaje de programación MATLAB. Para resolver el problema (4.8) se usó el algoritmo del subgradiente de descenso de [BXM03].

Consideramos los siguientes datos para el problema **(P)**: $\Omega = (0,1) \times (0,1)$, $f = 0$, $y_d = e^{-\cos(2\pi xy)^2}/0,1$.

El algoritmo se resolvió con los parámetros iniciales $\alpha = 0,2$ y $\beta = 0,005$. Luego de varios experimentos en el Algoritmo 1 se apreció que mientras β se acercaba a al parámetro α , en un rango de $0,05 - 0,00005$, el control óptimo mostraba la sparcidad es sus derivadas parciales, es decir, el control u tiende a ser constante o cero.

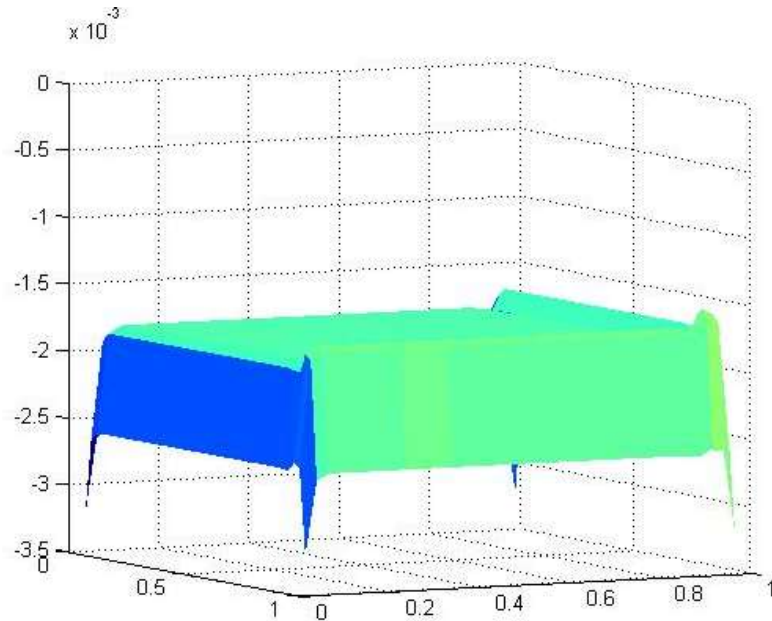


Figura 4.3: Solución, u , del problema (PCO_γ) con $\beta = 0,009$

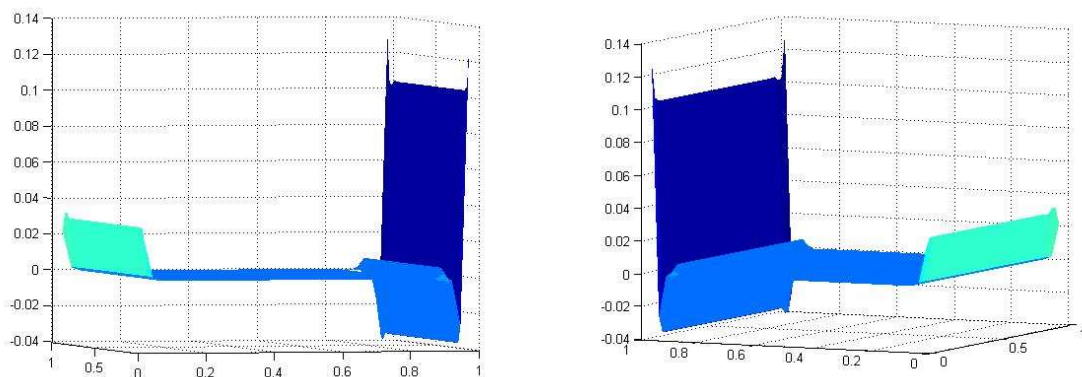


Figura 4.4: Derivadas parciales, $\partial_1 u$ y $\partial_2 u$ respectivamente

Es interesante verificar que si la solución del problema (PCO_γ) fuera cero, entonces el valor mínimo es la norma de y_d en $L^2(\Omega)$, siendo $0,050447$. Sin embargo, la solución alcanzada nos da un valor de la función objetivo de $0,037035$ lo que nos indica que el algoritmo si está resolviendo el problema.

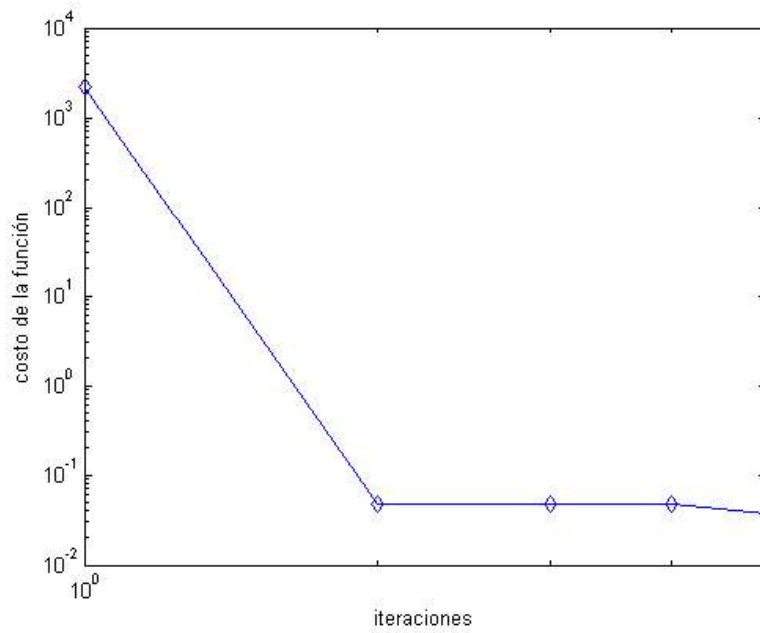


Figura 4.5: Costo de la función J_γ en cada iteración.

Por otro lado, se usó el Algoritmo 1 de [Mer19, sección 4] modificado al problema (\mathbf{P}) , junto con los parámetros considerados en este proyecto de investigación. Los resultados que aportaron fueron similares a la resolución con elementos finitos. El control muestra sparcidad en las derivadas parciales cuando β se hace más pequeño.

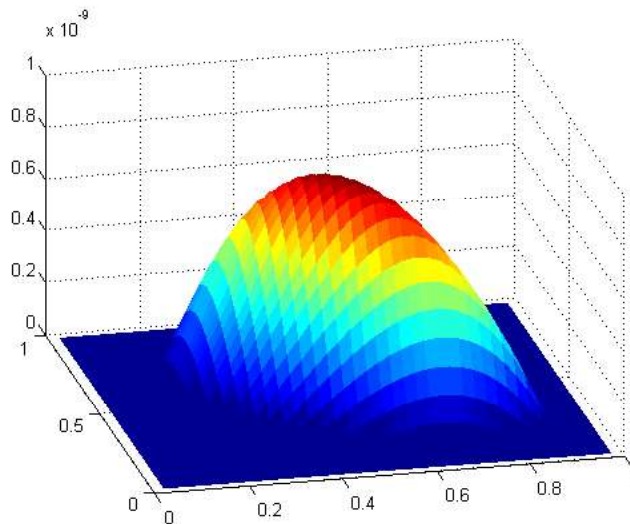


Figura 4.6: Solución, u , del problema (PCO_γ) con $\beta = 0,0005$.

Nótese que las soluciones demuestran la sparcidad del control en las derivadas parciales para valores de β más pequeños que α , ver las figuras 4.4 y 4.4. En los dos casos, el Algoritmo 1 tuvo una rápida ejecución (aproximadamente de 4 y 6 iteraciones para

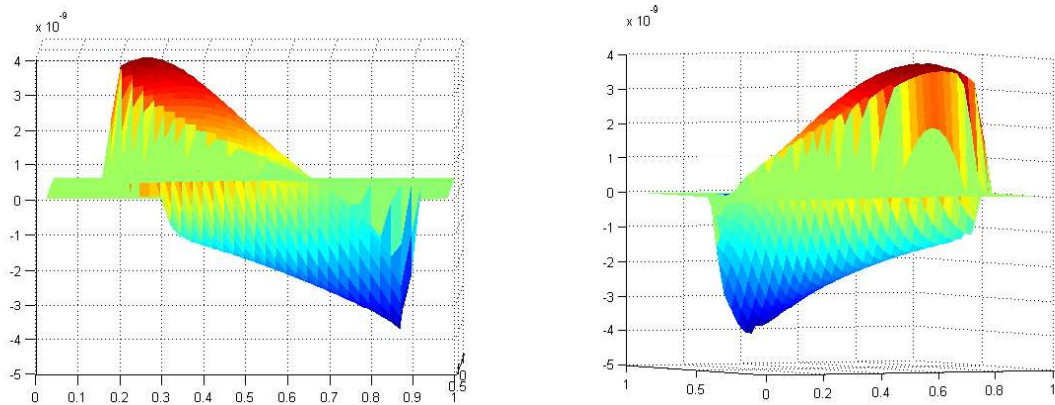


Figura 4.7: Derivadas parciales, $\partial_1 u$ y $\partial_2 u$ respectivamente.

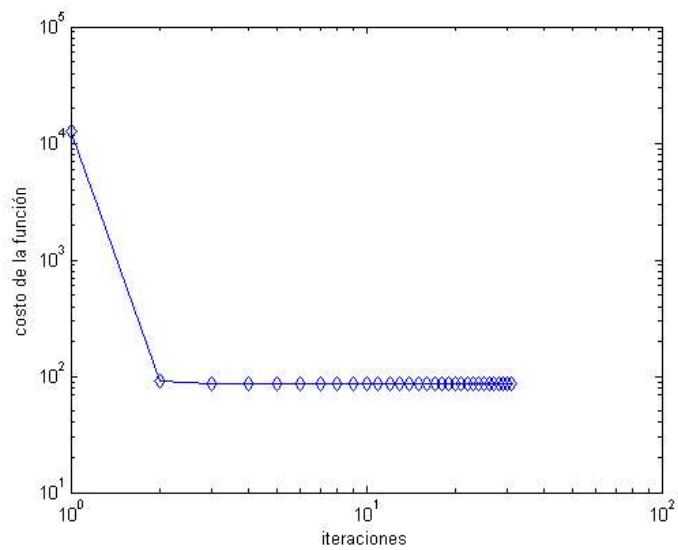


Figura 4.8: Costo de la función J_γ en cada iteración.

elementos finitos y diferencias finitas, respectivamente), con un número de iteraciones distintas en la solución del problema (4.8) (9 iteraciones) y el problema (4.2) (5 iteraciones) con elementos finitos y diferencias finitas, respectivamente.

Capítulo 5

Conclusiones y Recomendaciones

El problema de control óptimo (**P**) deja una brecha abierta para seguir investigando el aspecto teórico, ya que se ha asumido la existencia de un control óptimo.

Unas de las primeras ideas fue investigar las propiedades de los espacios $L^p(\Omega)$ con $0 < p < 1$ y poder usar el método directo. Se sugiere profundizar en los espacios $L^p(\Omega)$ con $0 < p < 1$ para la posible demostración de existencia de un control óptimo.

Una de las herramientas que se usó durante el periodo de investigación fue el análisis convexo en espacios de Lebesgue, un tema nuevo que no había estudiado en las materias de pregrado. Las nociones básicas del análisis convexo en espacios de Lebesgue es un tema que ha enriquecido mis conocimientos en el área de optimización.

La experimentación numérica fue un desafío al momento de programar en el lenguaje de MATLAB, ya que los métodos aprendidos durante los años de estudio de pregrado no abarcan problemas con términos no diferenciales. De modo que se requirió el investigar los métodos de subgradientes de descenso o proximal-point methods para implementar al problema propuesto.

Los resultados numéricos pueden presentar varios errores de aproximación debido a la integración numérica y la complejidad de los métodos de descenso que usan subdiferenciales.

Se recomienda que en la planificación de pregrado de Matemática Aplicada se incluya como sujeto de estudio métodos que aproximen numéricamente problemas con términos no diferenciales. A fin de que los estudiantes pueden usar como herramientas de investigación.

El presente proyecto de investigación proporciona un interés en investigar problemas que involucren sparcidad en el gradiente y sus aplicaciones, como la recuperación de señales e imágenes.

Bibliografía

- [AP95] A. Ambrosetti and G. Prodi. *A Primer of Nonlinear Analysis*. Number 34 in Cambridge studies in advanced mathematics. Cambridge University Press, 1995.
- [Auc89] Giles Auchmuty. Duality algorithms for nonconvex variational principles. *Numerical Functional Analysis and Optimization - NUMER FUNC ANAL OPTIMIZ*, 10:211–264, 03 1989.
- [Bre11] Haim Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer Science+Business Media, 2011.
- [BXM03] Stephen Boyd, Lin Xiao, and Almir Mutapcic. Subgradient methods. *lecture notes of EE392o, Stanford University, Autumn Quarter*, 2004:2004–2005, 2003.
- [Cha04] Antonin Chambolle. An algorithm for total variation minimization and applications. *Journal of Mathematical imaging and vision*, 20(1-2):89–97, 2004.
- [CV20] Christian Clason and Tuomo Valkonen. Introduction to nonsmooth analysis and optimization, 2020.
- [DLT] Tao Dinh and Hoai An Le Thi. Recent advances in dc programming and dca. In *Transactions on Computational Collective Intelligence XIII*, pages 1–37.
- [Eva10] Lawrence C. Evans. *Partial Differential Equations, Second Edition*. American Mathematical Society Providence, 2010.
- [Ho17] Vinh Thanh Ho. *Advanced machine learning techniques based on DC programming and DCA*. Theses, Université de Lorraine, December 2017.
- [HW13] Michael Hintermüller and Tao Wu. Nonconvex tv^q -models in image restoration: analysis and a trust-region regularization-based superlinearly convergent solver. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 6(3):1385–1415, 2013.

- [KZ12] Mikael Kurula and Hans Zwart. The duality between the gradient and divergence operators on bounded lipschitz domains. *University of Twente*, 2012.
- [Mer19] Pedro Merino. A difference-of-convex functions approach for sparse pde optimal control problems with nonconvex costs. *Computational Optimization and Applications*, 74(1):225–258, 2019.
- [NW06] Jorge Nocedal and Stephen Wright. *Numerical optimization*. Springer Science & Business Media, 2006.
- [PB⁺14] Neal Parikh, Stephen Boyd, et al. Proximal algorithms. *Foundations and Trends[®] in Optimization*, 1(3):127–239, 2014.
- [QV94] Alfio Quarteroni and Alberto Valli. *Numerical Approximation of Partial Differential Equations*, volume 23 of *Computational Mathematics 23*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 01 1994.
- [TDLV14] Hoai An Le Thi, Tao Pham Dinh, Hoai Minh Le, and Xuan Thanh Vo. Dc approximation approaches for sparse optimization, 2014.