

**ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL**

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**SOBRE EL PROBLEMA DE CAUCHY PARA LA  
ECUACIÓN DEL CALOR FRACCIONARIA**

**TRABAJO DE TITULACIÓN PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL  
TÍTULO DE MATEMÁTICO**

**PROYECTO DE INVESTIGACIÓN**

**GEREMY GABRIEL LOACHAMÍN SUNTAXI**

geremy.loachamin@epn.edu.ec

**DIRECTOR: OSCAR RENÉ JARRÍN GALÁRRAGA**

or.jarrin@uta.edu.ec

**CODIRECTOR: MIGUEL ÁNGEL YANGARI SOSA**

miguel.yangari@epn.edu.ec

**Quito, marzo, 2020**

## DECLARACIÓN

Yo GEREMY GABRIEL LOACHAMÍN SUNTAXI, declaro bajo juramento que el trabajo aquí escrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

A través de la presente declaración cedo mis derechos de propiedad intelectual, correspondientes a este trabajo, a la Escuela Politécnica Nacional, según lo establecido por la ley de Propiedad Intelectual, por su reglamento y por la normativa institucional vigente.

---

Geremy Gabriel Loachamín Suntaxi

## CERTIFICACIÓN

Certifico que el presente trabajo fue desarrollado por GEREMY GABRIEL LOACHAMÍN SUNTAXI, bajo nuestra supervisión.

---

Dr. Oscar René Jarrín Galárraga

DIRECTOR

---

Dr. Miguel Ángel Yangari Sosa

CODIRECTOR

## AGRADECIMIENTOS

*Quiero agradecer muy sinceramente a los profesores Oscar Jarrín, Fernando Cortez y Miguel Yangari por haberme apoyado a lo largo de este año y pico en el que trabajamos juntos. Gracias por su tiempo, por su paciencia y por compartir conmigo sus conocimientos y su labor como profesionales de las matemáticas.*

*Agradezco a mis padres Jesús y Mélida por su confianza, honestidad y compañía, por su esfuerzo, apoyo y preocupación diaria, y sobre todo por vivir mis proyectos y logros con tanta emoción como yo. Gracias David, Lisette, Andrés y Tatiana por escucharme y estar siempre.*

*Gracias a todos los que me acompañaron durante mi carrera, en especial a Eduardo y Miguel, y a los profesores: Diego Chamorro, Zuly Salinas, David Pazmiño y Chistian Nuñez quienes también me motivaron y apoyaron en esta etapa.*

*Sin ánimo de olvidar a alguien, concluyo agradeciendo a todas las personas cuyos nombres quizás no aparezcan en estas líneas pero que aprecio y más de una vez me expresaron su apoyo e incluso en la medida de lo posible aportaron en mi formación y en la redacción de este trabajo.*

**DEDICATORIA**

*À l'ensemble des gens que j'appelle ma famille.*

# Índice general

Introducción	1
Capítulo 1. Herramientas de base	7
1 La clase de Schwartz. . . . .	7
2 La transformada de Fourier en la clase de Schwartz. . . . .	14
3 El espacio de las distribuciones temperadas. . . . .	34
4 La transformada de Fourier en el espacio de las distribuciones temperadas. . . . .	42
5 La transformada de Fourier de las distribuciones homogéneas. . . . .	45
Capítulo 2. Introducción al operador laplaciano fraccionario	55
1 Definición en variable de Fourier. . . . .	55
2 Definición como operador de convolución . . . . .	59
3 Definición como operador de integral singular . . . . .	64
Capítulo 3. Espacios de Sobolev fraccionarios	72
1 Espacios de Sobolev no homogéneos . . . . .	72
2 Algunas propiedades de los espacios de Sobolev no homogéneos. . . . .	79
3 Espacios de Sobolev homogéneos . . . . .	83
4 Algunas propiedades de los espacios de Sobolev homogéneos . . . . .	87
Capítulo 4. Ecuación del calor fraccionaria	95
1 Motivación probabilística: Caminata aleatoria con saltos arbitrariamente largos . . . . .	95

2	Soluciones mild y algunas estimaciones . . . . .	99
3	Existencia y unicidad de soluciones mild en los espacios de Sobolev frac- cionarios . . . . .	114
4	Regularidad maximal de las soluciones mild . . . . .	128
	Conclusiones	134
	Apéndice	139
	Bibliografía	149

## Introducción

El presente trabajo de titulación corresponde a un estudio matemático riguroso sobre el *problema de Cauchy para la ecuación del calor fraccionaria*:

$$(PF) \begin{cases} \partial_t u(t, x) + (-\Delta)^{s/2} u(t, x) = f(t, x), & (t, x) \in ]0, T] \times \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

donde  $0 < s < 2$ ,  $0 < T \leq +\infty$ ,  $f: [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  y  $u_0: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  son los datos del problema, y  $u: [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es su solución.

Por lo tanto, se tratará su buen planteamiento en el sentido de Hadamard en el marco de los espacios de Sobolev y la regularidad de sus soluciones *mild*. Siendo el mayor aporte un estudio detenido de la regularidad maximal (en variable de espacio) de estas soluciones.

La característica principal del problema (PF) es la aparición de un término de difusión fraccionario  $(-\Delta)^{s/2}u$ , con  $0 < s < 2$ , en lugar del término de difusión clásico  $-\Delta u$ , donde  $(-\Delta)^{s/2}$  denota al operador *laplaciano fraccionario* y  $\Delta$  denota al operador laplaciano clásico. Precisamente, las ecuaciones en derivadas parciales en las que interviene el *laplaciano fraccionario* son de gran interés actual en el mundo académico por sus aplicaciones en temas como: elasticidad (Dipierro et al., 2015), turbulencia (Bakunin, 2008), finanzas (Barndorff-Nielsen y Shephard, 2001) o incluso las caminatas aleatorias con saltos largos, modelo estocástico del cual la ecuación del calor fraccionaria se deduce de forma natural (Bucur y Valdinoci, 2016). Así vemos que el problema estudiado en este trabajo no es



una expresión matemática carente de significado<sup>1</sup> por lo que un estudio teórico de este problema y de las propiedades de sus soluciones es completamente necesario.

La forma en la que se estudiará el *problema de Cauchy para la ecuación del calor fraccionaria* (PF) seguirá un procedimiento análogo al que se realiza para el problema clásico, el cual puede ser revisado a detalle en Lemarié-Rieusset (2016). Este procedimiento se basa esencialmente en herramientas del análisis armónico; principalmente en la transformada de Fourier y en cómo esta interviene en la caracterización de los espacios de Sobolev.

Por esta razón se ha dividido este trabajo en cuatro capítulos. En el primer capítulo: *Herramientas de base* se recogen las herramientas teóricas necesarias para tratar el problema (PF), empezando por estudiar la clase de Schwartz que nos da un marco funcional adecuado en el cual podremos definir la transformada de Fourier y estudiar sus propiedades. Luego, por dualidad se extenderá la noción de transformada de Fourier al espacio de las distribuciones temperadas, para finalmente hacer un breve estudio de las distribuciones homogéneas y su transformada de Fourier, pues estas aparecerán de manera natural en el estudio del operador *laplaciano fraccionario*.

En el segundo capítulo: *Introducción al operador laplaciano fraccionario*, paulatinamente nos dedicaremos a comprender al operador *laplaciano fraccionario*, sus propiedades y caracterizaciones (en variable de Fourier: a través de la transformada de Fourier, y en variable de espacio: como operador de convolución y como operador de integral singular).

---

<sup>1</sup>Como se pudo evidenciar, la ecuación del calor fraccionaria está relacionada con diversas aplicaciones de gran relevancia académica actual, y aunque las mismas motivan su estudio, este trabajo prescinde de estas interpretaciones y más bien se concentra en su tratamiento matemático riguroso.

En el tercer capítulo: *Espacios de Sobolev fraccionarios* se estudiarán los espacios de Sobolev no homogéneos y homogéneos, y algunas de sus principales propiedades, aprovechando el hecho de que estos espacios pueden ser caracterizados a través del operador *laplaciano fraccionario*.

En el cuarto y último capítulo: *Ecuación del calor fraccionaria*, empezaremos haciendo una breve deducción de esta ecuación a partir del modelo estocástico de caminata aleatoria con saltos largos, para luego concentrarnos totalmente en tratar el problema (PF). Así, se partirá por definir la solución *fundamental* del problema (PF), noción en la que nos apoyaremos para estudiar las soluciones *mild* de (PF). Luego, se realizarán *estimaciones de energía*, de donde extraeremos información valiosa sobre la regularidad e integrabilidad de los datos del problema (PF), y que además nos permitirá encontrar los espacios funcionales adecuados donde se construirán las soluciones *mild*. Usando el teorema de punto fijo de Picard, estableceremos un resultado de existencia y unicidad de la solución *mild* de (PF) en los espacios de Sobolev homogéneos.

Finalmente, se abordará el resultado más importante de este trabajo: *la regularidad maximal de las soluciones mild*. En un estudio reciente: *Regularity in  $L_p$  Sobolev Spaces of Solutions to Fractional Heat Equations*, Grubb (2018), a través de la teoría de operadores pseudodiferenciales se estudió la regularidad maximal (en variables de espacio y tiempo) de las soluciones *débiles* de la ecuación del calor fraccionaria en el marco de los espacios de Sobolev anisotrópicos no homogéneos. En cambio, nosotros estudiaremos la regularidad maximal (en variable de espacio) de las soluciones *mild* del problema (PF) de la siguiente manera: usando la transformada de Fourier y puesto que dichas soluciones cuentan con una estructura explícita escribiéndose como la suma de dos términos, haremos un estudio detallado de la regularidad que alcanza cada término en el marco de los espacios de Sobolev homogéneos para luego identificar el término que limita la ganancia

maximal de regularidad de la solución mild.

En esencia, este es un estudio distinto al realizado por Grubb (2018), tanto en las herramientas (del análisis armónico) empleadas como en el análisis que se hace de cada uno de los dos términos que constituyen la solución mild de (PF), donde se establece que uno de ellos es tan regular como se desee mientras que el otro término indica la ganancia de regularidad maximal la cual está directamente relacionada con el orden de homogeneidad del laplaciano fraccionario.

Para concluir esta introducción, es importante mencionar que otro de los objetivos de este trabajo de titulación es la comprensión, manipulación y aplicación de las herramientas de base presentadas en los Capítulos 1 y 3, las cuales, como particularmente se apreciará a lo largo de todo este trabajo, son de gran utilidad dentro del estudio de las ecuaciones en derivadas parciales. Si bien la teoría expuesta en ambos capítulos es totalmente clásica, esta ha sido ilustrada con ejemplos originales. Todo lector que esté relacionado con estas herramientas puede concentrarse directamente en los Capítulos 2 y 4.

## Notaciones

A lo largo de este documento trabajaremos sobre todo el espacio  $\mathbb{R}^n$  dotado del producto escalar usual:

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad \text{para todo } x, y \in \mathbb{R}^n,$$

el cual induce la norma euclidiana definida como:

$$|x| = \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n.$$

Además, consideraremos a  $\mathbb{R}^n$  como el espacio medido  $(\mathbb{R}^n, \text{Bor}(\mathbb{R}^n), dx)$ , donde  $\text{Bor}(\mathbb{R}^n)$  denota la  $\sigma$ -álgebra de los conjuntos borelianos de  $\mathbb{R}^n$  y  $dx$  la medida de Lebesgue.

## Espacios funcionales

Con el propósito de facilitar la labor del lector introducimos las siguientes notaciones y definiciones, pues en el documento las mismas aparecerán con mucha frecuencia.

Un *multi-índice*  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  es una  $n$ -upla ordenada de números naturales. Dado  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  un multi-índice, la cantidad  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ , denota su tamaño. Así también,  $|\alpha|$  indica el orden total de diferenciación de  $\partial^\alpha f = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n} f$ , donde  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  es una función al menos  $|\alpha|$ -veces diferenciable.

Para  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  y  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$  un multi-índice, definimos  $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ , que verifica lo siguiente:

$$|x^\alpha| \leq C_{n,\alpha} |x|^{|\alpha|},$$

donde  $C_{n,\alpha}$  es una constante que depende de la dimensión del espacio  $n$  y del multi-índice  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ . Cabe mencionar que no se verifica la desigualdad estricta contraria (para más detalles se sugiere revisar la página 95 de Grafakos (2008)). Sin embargo, sí se verifica la siguiente relación:

$$|x|^k \leq C_{n,k} \sum_{|\beta|=k} |x^\beta|, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (0.1)$$

Por otro lado, el espacio de funciones  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  cuyas derivadas de al menos orden  $N \in \mathbb{N}$  son continuas es notado por  $\mathcal{C}^N(\mathbb{R}^n)$ . Así mismo, el espacio de las funciones

infinitamente diferenciables sobre  $\mathbb{R}^n$  se nota por  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) = \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^N(\mathbb{R}^n)$ ; y el espacio de funciones  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$  con soporte compacto (o funciones test) sobre  $\mathbb{R}^n$  por  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ .

Una de las propiedades más interesantes y útiles dentro de este marco es la *regla de Leibniz (multidimensional)*, que dice que para todo  $f, g \in \mathcal{C}^{|\alpha|}(\mathbb{R}^n)$  y todo  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  multi-índice, se tiene que

$$\partial^\alpha(fg) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha_1}{\beta_1} \cdots \binom{\alpha_n}{\beta_n} \partial^\beta f \partial^{\alpha-\beta} g,$$

donde  $\beta \in \mathbb{N}^n$  es un multi-índice y  $\beta \leq \alpha$  significa que  $\beta_k \leq \alpha_k$ , para todo  $1 \leq k \leq n$ .

Luego, para  $1 \leq p \leq +\infty$  definimos los *espacios de Lebesgue* como:

$$L^p(\mathbb{R}^n) = \{f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ medible y } \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < +\infty\},$$

donde

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad \text{si } 1 \leq p < +\infty,$$

y si  $p = +\infty$ :

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \text{ess } |f(x)|.$$

## Herramientas de base

### 1. La clase de Schwartz

El propósito de esta primera sección es hacer una corta introducción a la clase de Schwartz pues este espacio funcional nos facilita un marco de trabajo apropiado para definir la transformada de Fourier y estudiar sus principales propiedades.

**Definición 1.1.** Una función  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  pertenece a la clase de Schwartz si  $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$  y si para todo par de multi-índices  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$  se verifica que

$$\rho_{\alpha,\beta}(\varphi) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| < +\infty, \quad (1.1)$$

donde la cantidad  $\rho_{\alpha,\beta}(\varphi)$  es conocida como semi-norma de Schwartz de  $\varphi$ .

El conjunto de todas las funciones de la clase de Schwartz definidas sobre  $\mathbb{R}^n$  es notado por  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . La clase de Schwartz es un espacio vectorial sobre el campo de los números complejos  $\mathbb{C}$  con la suma y el producto por un escalar usuales para funciones.

#### Observación 1.1.

- Notemos que para todo par de multi-índices  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$  la cantidad  $\rho_{\alpha,\beta}$  es una semi-norma sobre el espacio  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . En efecto, si consideramos la función  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  definida como:

$$\begin{aligned} \varphi: \quad \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto e^{-|x_1|^2}, \end{aligned}$$

y el multi-índice  $\alpha = (0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{N}^n$  se tiene que  $\partial^\alpha \varphi = 0$ , es decir,  $\rho_{0,\alpha}(\varphi) = 0$ , pero  $\varphi \neq 0$ .

- En la ecuación (1.1), que la cantidad  $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)|$  sea finita significa que  $\varphi$  y todas sus derivadas decrecen en el infinito más rápido que el inverso de cualquier polinomio; de ahora en adelante, nos referiremos a esta propiedad como decrecimiento rápido.

Los siguientes ejemplos nos permiten distinguir y visualizar cómo son los elementos de la clase de Schwartz.

**EJEMPLO 1.1.**

1. La función  $x \mapsto e^{-|x|^2}$ , con  $x \in \mathbb{R}^n$ , es un elemento de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , pues es el resultado de la composición de funciones  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$  y además decrece lo suficientemente rápido en el infinito, esto por el conocido comportamiento de la función exponencial.
2. En cambio, la función definida por la expresión  $e^{-|x|}$ , con  $x \in \mathbb{R}^n$ , no pertenece a  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , pues a pesar de tener un decrecimiento rápido en el infinito, esta función no es diferenciable en el origen.
3. Finalmente, notemos que la función  $g(x) = \frac{1}{1+|x|^4}$ , con  $x \in \mathbb{R}^n$ , tampoco es un elemento de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , pues a pesar de que esta función verifica que  $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,  $g$  no decrece lo suficientemente rápido al infinito. En realidad,  $g$  decrece como el inverso de un polinomio de orden 4.

**Observación 1.2.** Como se pudo apreciar en la Definición 1.1 y en el Ejemplo 1.1, para que una función  $\varphi$  esté en la clase de Schwartz debe cumplir dos propiedades fundamentales:  $\varphi$  es una función en  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$  y  $\varphi$  tiene la propiedad de decrecimiento rápido en el infinito. Así, las funciones de la clase de Schwartz poseen dos propiedades que son de gran utilidad: regularidad e integrabilidad (gracias al decrecimiento rápido en el infinito).

Antes de continuar con nuestro estudio, conviene hacer un breve comentario acerca de la estructura topológica de la clase de Schwartz.

La topología de la que está dotada  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  es la topología más débil que deja continua a la familia formada por las semi-normas  $\rho_{\alpha,\beta}$ , con  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$  multi-índices. Bajo esta topología las operaciones suma, producto por escalar y diferenciación son continuas.

Una *sub-base* para esta topología viene dada por los conjuntos abiertos que contienen al origen:

$$\{\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : \rho_{\alpha,\beta}(\varphi) < r\},$$

para todo  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$  multi-índices y todo  $r \in \mathbb{Q}^+$ . Así, el origen puede ser dotado de una base numerable y en consecuencia  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  es un espacio *localmente convexo*. (Ver el Capítulo 4. de Reed y Simon (1970)).

Notemos además que si  $\rho_{\alpha,\beta}(\varphi) = 0$  para todo par de multi-índices  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$  entonces  $\varphi = 0$ . Esto significa que la familia de semi-normas separa puntos y por lo tanto este espacio es *metrizable* con la métrica  $d$ , definida como sigue:

$$d(\varphi, \psi) = \sum_{j=1}^{+\infty} 2^{-j} \frac{\rho_j(\varphi - \psi)}{1 + \rho_j(\varphi - \psi)}, \quad \text{para todo } \varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

y donde  $\rho_j$  es una numeración de todas las semi-normas  $\rho_{\alpha,\beta}$ . (Ver el Capítulo 4. de Reed y Simon (1970)).

En conclusión,  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  es un espacio vectorial topológico localmente convexo, separado y completo con la métrica  $d$ , es decir, es un *espacio de Fréchet*. Para más detalles se pueden revisar los libros Reed y Simon (1970) y Chamorro (2018).

Con esto en mente, nos interesa caracterizar la noción de convergencia en la clase de Schwartz dotada con esta topología. Para ello introducimos la siguiente



**Definición 1.2.** Sean  $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  una sucesión de elementos de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  y  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Decimos que la sucesión  $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  converge a  $\varphi$  en  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  si para todo  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$  multi-índices se tiene

$$\rho_{\alpha, \beta}(\varphi_k - \varphi) \rightarrow 0, \quad \text{cuando } k \rightarrow +\infty.$$

Como la clase de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  es *metrizable* con la métrica  $d$ , entonces la topología inducida por esta métrica es equivalente a la topología inducida por la familia de seminormas de la forma  $\rho_{\alpha, \beta}$  (el lector interesado en profundizar en estos detalles puede revisar la Sección 1.2 de Batic (2016)) por lo que la noción de convergencia dada arriba es equivalente a la convergencia dada por la métrica  $d$ .

Una vez establecidas estas nociones el siguiente paso es estudiar algunas propiedades de los elementos de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  para lo cual es útil observar que el decrecimiento rápido al infinito se puede caracterizar como sigue.

**Proposición 1.1.** Sea  $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ .  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  si y sólo si para todo entero positivo  $N$  y todo multi-índice  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  existe una constante positiva  $C_{N, \alpha, \varphi}$  tal que

$$|\partial^\alpha \varphi(x)| \leq C_{N, \alpha, \varphi} (1 + |x|)^{-N}, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n.$$

**DEMOSTRACIÓN.** Supongamos que  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Entonces, para un entero positivo  $N$  y un multi-índice  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  tenemos

$$\begin{aligned} |\partial^\alpha \varphi(x)| &= \frac{(1 + |x|)^N}{(1 + |x|)^N} |\partial^\alpha \varphi(x)| \\ &\leq \frac{C_N (1 + |x|^N)}{(1 + |x|)^N} |\partial^\alpha \varphi(x)| \\ &\leq C_N (1 + |x|)^{-N} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left[ (1 + |x|^N) |\partial^\alpha \varphi(x)| \right] \\ &\leq C_N (1 + |x|)^{-N} \left[ \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\partial^\alpha \varphi(x)| + \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (|x|^N |\partial^\alpha \varphi(x)|) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C_N (1 + |x|)^{-N} \left[ \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\partial^\alpha \varphi(x)| + c_{n,N} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left( \sum_{|\beta|=N} |x^\beta \partial^\alpha \varphi(x)| \right) \right] \\
&\leq C_N (1 + |x|)^{-N} \left[ \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\partial^\alpha \varphi(x)| + c_{n,N} \sum_{|\beta|=N} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\beta \partial^\alpha \varphi(x)| \right],
\end{aligned}$$

para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ . Entonces,

$$|\partial^\alpha \varphi(x)| \leq C_N (1 + |x|)^{-N} \left[ \rho_{0,\alpha}(\varphi) + c_{n,N} \sum_{|\beta|=N} \rho_{\beta,\alpha}(\varphi) \right],$$

para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ . Además, puesto que  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , la cantidad

$$C_{N,\alpha,\varphi} = C_N \left[ \rho_{0,\alpha}(\varphi) + c_{n,N} \sum_{|\beta|=N} \rho_{\beta,\alpha}(\varphi) \right],$$

es finita. Por lo tanto,

$$|\partial^\alpha \varphi(x)| \leq C_{N,\alpha,\varphi} (1 + |x|)^{-N},$$

para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Recíprocamente, supongamos que  $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ , y que además para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  se verifica la siguiente relación:

$$|\partial^\alpha \varphi(x)| \leq C_{N,\alpha,\varphi} (1 + |x|)^{-N},$$

para todo entero positivo  $N$  y todo multi-índice  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ . En particular, para  $N = |\beta| + 1$ , con  $\beta \in \mathbb{N}^n$  un multi-índice cualquiera, se sigue que

$$|x^\beta (\partial^\alpha \varphi)(x)| \leq |x^\beta| |(\partial^\alpha \varphi)(x)| \leq C_{N,\alpha,\beta,\varphi} |x|^{|\beta|} (1 + |x|)^{-N} < +\infty,$$

pues, gracias a que  $N > |\beta|$  esto implica que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{|x|^{|\beta|}}{(1 + |x|)^N} < +\infty.$$

En consecuencia,  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . □

Esta caracterización nos permite estudiar la relación entre la clase de Schwartz y otros espacios funcionales que aparecerán frecuentemente en nuestro estudio.

**Corolario 1.1.** *El espacio de funciones test definidas sobre  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , está contenido estrictamente en  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .*

DEMOSTRACIÓN. Sean  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  y  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$  multi-índices, entonces

$$\begin{aligned} \rho_{\alpha, \beta}(\varphi) &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| \\ &\leq \sup_{|x| \leq M} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| + \sup_{|x| > M} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)|. \end{aligned}$$

Luego,

$$\rho_{\alpha, \beta}(\varphi) \leq c_{n, \alpha} \left( \sup_{|x| \leq M} |x|^{|\alpha|} |\partial^\beta \varphi(x)| + \sup_{|x| > M} |x|^{|\alpha|} |\partial^\beta \varphi(x)| \right). \quad (1.2)$$

Ahora, tomando  $M > 0$  suficientemente grande de modo que si  $|x| > M$  entonces  $x \notin \text{supp}(\varphi)$ , y puesto que  $\text{supp}(\partial^\beta \varphi) \subset \text{supp}(\varphi)$ , para todo  $\beta \in \mathbb{N}^n$  multi-índice, se tiene

$$\sup_{|x| > M} |x|^{|\alpha|} |\partial^\beta \varphi(x)| = 0. \quad (1.3)$$

Por otro lado, como la bola cerrada  $\overline{B}_M = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq M\}$  es compacta y  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , entonces la función  $\partial^\beta \varphi$  alcanza su valor máximo en  $\overline{B}_M$ . Así,

$$\sup_{|x| \leq M} |\partial^\beta \varphi(x)| < +\infty. \quad (1.4)$$

Por lo tanto, si usamos en la desigualdad (1.2) la información obtenida en (1.3) y (1.4), tenemos

$$\rho_{\alpha, \beta}(\varphi) \leq c_{n, \alpha} M^{|\alpha|} \sup_{|x| \leq M} |\partial^\beta \varphi(x)| < +\infty.$$

La contención es estricta pues como se vio en el Ejemplo 1.1, la función  $x \mapsto e^{-|x|^2}$ , con  $x \in \mathbb{R}^n$ , es un elemento de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , sin embargo esta función no tiene soporte compacto.

□

**Corolario 1.2.** *La clase de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  está estrictamente contenida en el espacio  $L^p(\mathbb{R}^n)$ , con  $1 \leq p \leq +\infty$ .*

DEMOSTRACIÓN. Sea  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Por la Proposición 1.1 (página 10), para  $1 \leq p < +\infty$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^p dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |C_{N,0,\varphi} (1 + |x|)^{-N}|^p dx \\ &\leq (C_{N,0,\varphi})^p \left[ \int_{|x| \leq 1} (1 + |x|)^{-Np} dx + \int_{|x| > 1} (1 + |x|)^{-Np} dx \right] \\ &\leq (C_{N,0,\varphi})^p \left[ \sup_{|x| \leq 1} (1 + |x|)^{-Np} \int_{|x| \leq 1} dx + \int_{|x| > 1} (1 + |x|)^{-Np} dx \right], \end{aligned}$$

para todo  $N \in \mathbb{N}$ . Luego, puesto que para  $x \in \mathbb{R}^n$  la función  $x \mapsto (1 + |x|)^{-Np}$  es continua y la bola unitaria cerrada de  $\mathbb{R}^n$ , notada por  $\overline{B}_1$ , es compacta, entonces se verifica que

$$\sup_{|x| \leq 1} (1 + |x|)^{-Np} < +\infty.$$

De este modo,

$$\sup_{|x| \leq 1} (1 + |x|)^{-Np} \int_{|x| \leq 1} dx \leq c_n \sup_{|x| \leq 1} (1 + |x|)^{-Np} < +\infty. \quad (1.5)$$

Por otro lado, si usamos la estimación puntual  $(1 + |x|)^{-Np} \leq |x|^{-Np}$ , dada para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ , tenemos

$$\int_{|x| > 1} (1 + |x|)^{-Np} dx \leq \int_{|x| > 1} |x|^{-Np} dx.$$

Luego, si en la integral del lado derecho de la desigualdad anterior hacemos un cambio de variable a coordenadas radiales, es decir, tomando  $\rho = |x|$ , obtenemos:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\rho^{n-1}}{\rho^{Np}} d\rho = \left. \frac{\rho^{n-Np}}{n-Np} \right|_1^{+\infty} < +\infty, \quad (1.6)$$

siempre que  $N > n/p$ . Así, de (1.5) y (1.6), para  $N > n/p$ , se sigue que  $\|\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$  es también una cantidad finita, es decir,  $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^n)$ .

Finalmente, notemos que para  $p = +\infty$  se tiene directamente

$$\|\varphi(x)\|_{L^\infty} = \rho_{0,0}(\varphi) < +\infty.$$

En consecuencia,  $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

Al igual que antes podemos concluir que la contención es estricta, pues existen funciones en  $L^p(\mathbb{R}^n)$ , con  $1 \leq p \leq +\infty$  que no pertenecen a  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , por ejemplo: la función indicatriz definida sobre la bola unitaria cerrada de  $\mathbb{R}^n$  verifica  $\mathbb{1}_{\overline{B}_1} \in L^p(\mathbb{R}^n)$ , con  $1 \leq p \leq +\infty$ , sin embargo,  $\mathbb{1}_{\overline{B}_1}$  no es una función continua.  $\square$

## 2. La transformada de Fourier en la clase de Schwartz.

La transformada de Fourier es una herramienta importante dentro del análisis armónico y el estudio de las ecuaciones en derivadas parciales. La razón por la que definiremos primero la transformada de Fourier en la clase de Schwartz es porque como hemos observado, sus elementos tienen dos propiedades fundamentales: *decrecimiento rápido* y *regularidad*, donde el decrecimiento rápido nos permitirá mostrar que la transformada de Fourier está bien definida para las funciones de la clase de Schwartz, mientras que la regularidad nos ayudará a estudiar cómo se comporta la transformada de Fourier con respecto a la derivación. Esta última propiedad será fundamental al momento de dar una

primera definición del operador laplaciano fraccionario en el Capítulo 2.

**Definición 1.3** (Transformada de Fourier en la clase de Schwartz). *Sea  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .*

*La transformada de Fourier de  $\varphi$ , que será notada por  $\widehat{\varphi}$ , se define como:*

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx, \quad \text{para todo } \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (1.7)$$

En el próximo resultado se verifica que la expresión dada en (1.7) está bien definida para todo  $\xi \in \mathbb{R}^n$ .

**Proposición 1.2.** *Si  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , entonces*

$$\|\widehat{\varphi}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

DEMOSTRACIÓN. Notemos que

$$|\widehat{\varphi}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)| |e^{-2\pi i x \cdot \xi}| dx, \quad \text{para todo } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Luego, como  $|e^{-2\pi i x \cdot \xi}| = 1$ , entonces

$$|\widehat{\varphi}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)| dx, \quad \text{para todo } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Por otro lado, notemos que gracias al Corolario 1.2 (página 13) se tiene que  $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , por lo que la integral del lado derecho de la última desigualdad está bien definida. Finalmente, tomando el supremo sobre  $\mathbb{R}^n$  en el lado izquierdo de la desigualdad anterior, se sigue que

$$\|\widehat{\varphi}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

□

**Observación 1.3.** *Por la Proposición 1.2 vemos que el espacio  $L^1(\mathbb{R}^n)$  es suficiente para definir la transformada de Fourier. Sin embargo, como se mencionó al inicio de esta*

sección, queremos estudiar cómo se comporta la transformada de Fourier con respecto a la derivación, por lo que un marco de trabajo más adecuado es el de la clase de Schwartz que, como mostramos en el Corolario 1.2, (página 13) verifica  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ .

**Observación 1.4.** *A partir de la Proposición 1.2, podemos concluir que la transformada de Fourier es un operador continuo de  $L^1(\mathbb{R}^n)$  a  $L^\infty(\mathbb{R}^n)$  (ver Teorema 1.1. de la página 2 de Stein y Weiss (1971)).*

Por otro lado, examinemos el siguiente ejemplo que será de gran utilidad en la demostración de la Proposición 1.9 (página 28).

**EJEMPLO 1.2.** *Dada la función*

$$\begin{aligned} h: \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto h(x) = e^{-\pi|x|^2}. \end{aligned}$$

*Se tiene que  $\widehat{h}(\xi) = h(\xi)$  para todo  $\xi \in \mathbb{R}^n$ .*

En efecto, primero es necesario verificar que para  $x_j \in \mathbb{R}$ , con  $j \in \{1, \dots, n\}$  fijo, la función

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi(x_j+it)^2} dx, \end{aligned}$$

es una función constante.

Si derivamos  $\varphi$  con respecto a  $t$ , tenemos:

$$\frac{d}{dt} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi(x_j+it)^2} dx \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} (-2\pi i(x_j + it)) e^{-\pi(x_j+it)^2} dx = i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dx} e^{-\pi(x_j+it)^2} dx = 0.$$

Así,  $\varphi(t) = \varphi(0) = 1$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

Ahora, para encontrar la transformada de Fourier de la función  $h$  usamos la expresión dada en la Definición 1.3 (página 15):

$$\widehat{h}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi|x|^2} e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi \sum_{j=1}^n x_j^2 - 2\pi i \sum_{j=1}^n x_j \xi_j} dx.$$

Gracias al *teorema de Fubini* podemos escribir

$$\widehat{h}(\xi) = \prod_{j=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x_j^2 - 2\pi i x_j \xi_j} dx_j. \quad (1.8)$$

Por otro lado, notemos que se tiene

$$-(\sqrt{\pi}x_j + \sqrt{\pi}i\xi_j)^2 - \pi\xi_j^2 = -\pi x_j^2 - 2\pi i x_j \xi_j.$$

Reemplazando esta última identidad en la ecuación (1.8) y usando el hecho de que  $\varphi(\xi_j) = 1$ , para todo  $\xi_j \in \mathbb{R}$ , se sigue que

$$\prod_{j=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\sqrt{\pi}x_j + \sqrt{\pi}i\xi_j)^2 - \pi\xi_j^2} dx_j = \prod_{j=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi(x_j + i\xi_j)^2 - \pi\xi_j^2} dx_j = \prod_{j=1}^n \varphi(\xi_j) e^{-\pi\xi_j^2} = e^{-\pi|\xi|^2},$$

como se quería.

Este ejemplo es interesante porque nos ofrece una función en la clase de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  que coincide con su transformada de Fourier. Este hecho será de gran utilidad en cálculos posteriores.

En este momento introduciremos algunas notaciones que nos permitirán hacer un estudio de las propiedades de la transformada de Fourier en la clase de Schwartz.

**Definición 1.4.** Sean  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ,  $y \in \mathbb{R}^n$  y  $\lambda > 0$ . Definimos la *traslación*, *dilatación* y *reflexión* de la función  $\varphi$ , respectivamente, como:

$$\tau^y(\varphi)(x) = \varphi(x - y),$$

$$\varphi_\lambda(x) = \varphi(\lambda x),$$



$$\tilde{\varphi}(x) = \varphi(-x),$$

para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ .

En la siguiente proposición veremos qué efecto tiene la transformada de Fourier sobre las operaciones introducidas en la Definición 1.4.

**Proposición 1.3.** Sean  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ,  $y \in \mathbb{R}^n$  y  $\lambda > 0$ . Para todo  $\xi \in \mathbb{R}^n$  tenemos las siguientes propiedades:

1.  $\widehat{\tilde{\varphi}}(\xi) = \tilde{\widehat{\varphi}}(\xi)$ ,
2.  $\widehat{\overline{\varphi}}(\xi) = \overline{\tilde{\widehat{\varphi}}(\xi)}$ , donde  $\overline{\varphi}$  denota el conjugado complejo de la función  $\varphi$ ,
3.  $\widehat{\tau^y(\varphi)}(\xi) = (e^{-2\pi i y \cdot \xi}) \widehat{\varphi}(\xi)$ ,
4.  $(e^{2\pi i(\cdot) \cdot y} \varphi)^\wedge(\xi) = \tau^y(\widehat{\varphi})(\xi)$ ,
5.  $(\varphi_\lambda)^\wedge(\xi) = \lambda^{-n} \widehat{\varphi}_{1/\lambda}(\xi)$ .

DEMOSTRACIÓN.

1. Sabemos por definición de reflexión de una función  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  que:

$$\widehat{\tilde{\varphi}}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\varphi}(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(-x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx, \quad \text{para todo } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Luego, haciendo el cambio de variable  $y = -x$ , obtenemos

$$\widehat{\tilde{\varphi}}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) e^{2\pi i y \cdot \xi} dy, \quad \text{para todo } \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (1.9)$$

Por otro lado,

$$\tilde{\widehat{\varphi}}(\xi) = \widehat{\varphi}(-\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) e^{2\pi i y \cdot \xi} dy, \quad \text{para todo } \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (1.10)$$

Así, de las ecuaciones (1.9) y (1.10) se sigue el resultado.

2. Haciendo uso de las propiedades del conjugado de un número complejo y puesto que estamos integrando sobre todo  $\mathbb{R}^n$  tenemos que

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\varphi(x)} e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\varphi(x) e^{2\pi i x \cdot \xi}} dx = \overline{\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{2\pi i x \cdot \xi} dx}.$$

Además, de la identidad dada en (1.10), se sigue que

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \widetilde{\widetilde{\varphi}}(\xi),$$

para todo  $\xi \in \mathbb{R}^n$ .

3. En cambio, para todo  $y \in \mathbb{R}^n$ , por la definición de traslación de una función  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  se tiene que

$$\widehat{\tau^y \varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \tau^y \varphi(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x - y) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx,$$

para todo  $\xi \in \mathbb{R}^n$ .

Haciendo el cambio de variable  $z = x - y$ , reescribimos lo anterior como:

$$\widehat{\tau^y \varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(z) e^{-2\pi i (z+y) \cdot \xi} dz = e^{-2\pi i y \cdot \xi} \widehat{\varphi}(\xi),$$

para todo  $\xi \in \mathbb{R}^n$ .

4. Así mismo, para todo  $y \in \mathbb{R}^n$  se tiene

$$\begin{aligned} (e^{2\pi i (\cdot) \cdot y} \varphi)^\wedge(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} (e^{2\pi i x \cdot y} \varphi(x)) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{-2\pi i x \cdot (\xi - y)} dx \\ &= \widehat{\varphi}(\xi - y) = \tau^y(\widehat{\varphi})(\xi), \end{aligned}$$

para todo  $\xi \in \mathbb{R}^n$ .

5. Ahora, para  $\lambda > 0$  usamos la definición de dilatación de una función de la siguiente manera:

$$(\varphi_\lambda)^\wedge(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\lambda(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\lambda x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx.$$

Luego, tomando  $z = \lambda x$  tenemos:

$$(\varphi_\lambda)^\wedge(\xi) = \lambda^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(z) e^{-2\pi i z \cdot (\xi/\lambda)} dz = \lambda^{-n} \widehat{\varphi}(\xi/\lambda) = \lambda^{-n} \widehat{\varphi}_{1/\lambda}(\xi),$$

para todo  $\xi \in \mathbb{R}^n$ , como se quería. □

El próximo resultado será de mucha ayuda en la deducción de resultados posteriores como por ejemplo: en las demostraciones de las Proposiciones 1.9 y 1.10 de las páginas 28 y 30, respectivamente.

**Proposición 1.4.** Si  $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , entonces tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}(x) \psi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \widehat{\psi}(x) dx.$$

DEMOSTRACIÓN. Empecemos notando que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}(x) \psi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\xi) e^{-2\pi i \xi \cdot x} d\xi \right) \psi(x) dx, \quad \text{para todo } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Luego, por el *teorema de Fubini* tenemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}(x) \psi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\xi) \left( \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) e^{-2\pi i \xi \cdot x} dx \right) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\xi) \widehat{\psi}(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \widehat{\psi}(x) dx,$$

de donde se tiene el resultado. □

Notemos que por la Definición 1.1 (página 7), si  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , entonces  $\partial^\alpha \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , para todo multi-índice  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ . Así, es posible calcular la transformada de Fourier de  $\partial^\alpha \varphi$ . Recordemos que esta propiedad será fundamental para dar una primera definición

del operador laplaciano fraccionario en el Capítulo 2, por lo que es preciso enunciar el siguiente resultado.

**Proposición 1.5.** *Si  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  y  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  un multi-índice, entonces*

$$(\partial_x^\alpha \varphi)^\wedge(\xi) = (2\pi i \xi)^\alpha \widehat{\varphi}(\xi), \quad \text{para todo } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

DEMOSTRACIÓN. Integrando por partes y gracias a que  $\varphi$  decae rápidamente al infinito, se tiene que:

$$\begin{aligned} (\partial_x^\alpha \varphi)^\wedge(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} \partial_x^\alpha \varphi(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \partial_x^\alpha (e^{-2\pi i x \cdot \xi}) dx \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) (-2\pi i \xi)^\alpha e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \\ &= (2\pi i \xi)^\alpha \widehat{\varphi}(\xi), \end{aligned}$$

para todo  $\xi \in \mathbb{R}^n$  y todo  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  multi-índice. □

**Observación 1.5.** *La propiedad anterior nos da una nueva forma (más sencilla) de estudiar la regularidad de la función  $\varphi$  en el sentido de que al aplicar la transformada de Fourier sobre la derivada de orden  $|\alpha|$  de esta función, la operación de derivación es sustituida por la multiplicación por el polinomio  $(2\pi i \xi)^\alpha$  en la variable  $\xi$ .*

Un ejemplo interesante que ilustra la Proposición 1.5 y que además será de gran utilidad en el Capítulo 2 es observar cuál es la acción del operador laplaciano clásico sobre una función mediante la transformada de Fourier.

EJEMPLO 1.3. *Para  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , se tiene que*

$$\widehat{\Delta \varphi}(\xi) = -(2\pi)^2 |\xi|^2 \widehat{\varphi}(\xi),$$

donde  $\Delta$  denota el operador laplaciano clásico.

Recordemos que para  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  se tiene

$$\Delta\varphi = \sum_{\alpha \in S} \partial_x^\alpha \varphi, \quad (1.11)$$

donde  $S = \{2e_i; i = 1, \dots, n\}$ , con  $e_i$  el  $i$ -ésimo vector de la base canónica de  $\mathbb{R}^n$ .

Entonces, por la Proposición 1.5 (página 21), para todo  $\xi \in \mathbb{R}^n$ , tenemos

$$\widehat{\Delta\varphi}(\xi)z = \left( \sum_{\alpha \in S} \partial_x^\alpha \varphi \right)^\wedge(\xi) = \sum_{\alpha \in S} (\partial_x^\alpha \varphi)^\wedge(\xi) = \sum_{j=1}^n (2\pi i \xi_j)^2 \widehat{\varphi}(\xi) = (2\pi i)^2 \widehat{\varphi}(\xi) \sum_{j=1}^n \xi_j^2.$$

Así,

$$\widehat{\Delta\varphi}(\xi)z = -(2\pi)^2 |\xi|^2 \widehat{\varphi}(\xi).$$

El siguiente resultado nos proporciona una fórmula para calcular  $\partial_\xi^\alpha \widehat{\varphi}$ , para todo multi-índice  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ .

**Proposición 1.6.** Sean  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  y  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  un multi-índice. Se tiene que

$$(\partial_\xi^\alpha \widehat{\varphi})(\xi) = [(-2\pi i x)^\alpha \varphi]^\wedge(\xi), \quad \text{para todo } \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (1.12)$$

DEMOSTRACIÓN. Primero, para  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  un multi-índice cualquiera tenemos:

$$\partial_\xi^\alpha \widehat{\varphi}(\xi) = \partial_\xi^\alpha \left( \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \right), \quad \text{para todo } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Entonces del *teorema de derivación bajo el signo de la integral* se sigue que

$$\begin{aligned} \partial_\xi^\alpha \widehat{\varphi}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} \partial_\xi^\alpha (\varphi(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi}) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \partial_\xi^\alpha (e^{-2\pi i x \cdot \xi}) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) (-2\pi i x)^\alpha e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \\ &= [(-2\pi i x)^\alpha \varphi]^\wedge(\xi). \end{aligned}$$

□

**Observación 1.6.** *La transformada de Fourier de una función  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  verifica que  $\widehat{\varphi} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ .*

En efecto, como  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  se tiene que para todo multi-índice  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  la función  $(-2\pi ix)^\alpha \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ , por lo tanto, gracias a la ecuación (1.6):  $\partial_\xi^\alpha \widehat{\varphi}$  está bien definida para todo punto  $\xi \in \mathbb{R}^n$ . Luego, puesto que  $(-2\pi ix)^\alpha \varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$  en consecuencia  $[(-2\pi ix)^\alpha \varphi]^\wedge$  es uniformemente continua (ver la página 107 de Grafakos (2008)). De este modo, como el multi-índice  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  es arbitrario, se sigue que  $\widehat{\varphi} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

Una consecuencia inmediata de la Proposición 1.6 (página 22), es que la transformada de Fourier de una función en la clase de Schwartz también pertenece a la clase de Schwartz.

**Corolario 1.3.** *Si  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , entonces  $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .*

DEMOSTRACIÓN. Primero, de la Observación 1.6, sabemos que  $\widehat{\varphi} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Resta verificar que  $\widehat{\varphi}$  es una función a decrecimiento rápido. Así, de la Proposición 1.6 (página 22), tenemos:

$$|\xi^\alpha (\partial^\beta \widehat{\varphi})(\xi)| = |\xi^\alpha [(-2\pi i \cdot)^\beta \varphi]^\wedge(\xi)|, \quad (1.13)$$

para todo  $\xi \in \mathbb{R}^n$  y todo par de multi-índices  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ .

Luego, para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  y todo multi-índice  $\beta \in \mathbb{N}^n$ , definimos la función  $\psi_\beta(x) = x^\beta \varphi(x)$ . Así, de la ecuación (1.13) se sigue que

$$|\xi^\alpha (\partial^\beta \widehat{\varphi})(\xi)| = \xi^\alpha \left| \int_{\mathbb{R}^n} (-2\pi ix)^\beta \varphi(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \right| = \left| (-2\pi i)^{|\beta|} \xi^\alpha \int_{\mathbb{R}^n} \psi_\beta(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \right|,$$

de donde, gracias a la Proposición 1.5 (página 21) podemos reescribir el lado derecho de igualdad anterior como:

$$|\xi^\alpha (\partial^\beta \widehat{\varphi})(\xi)| = \left| \frac{(-2\pi i)^{|\beta|}}{(-2\pi i)^{|\alpha|}} (-2\pi i \xi)^\alpha \widehat{\psi}_\beta(\xi) \right| \leq \frac{(2\pi)^{|\beta|}}{(2\pi)^{|\alpha|}} |(\partial^\alpha \psi_\beta)^\wedge(\xi)|, \quad (1.14)$$

lo cual es posible pues la función  $\psi_\beta$  pertenece a la clase de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Entonces, de las ecuaciones (1.13), (1.14) y de la Proposición 1.2 (página 15), se sigue que

$$\rho_{\alpha,\beta}(\widehat{\varphi}) \leq c_{\alpha,\beta} \|(\partial^\alpha \psi_\beta)^\wedge\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq c_{\alpha,\beta} \|\partial^\alpha \psi_\beta\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}, \quad (1.15)$$

donde  $c_{\alpha,\beta} = \frac{(2\pi)^{|\beta|}}{(2\pi)^{|\alpha|}}$ . El lado derecho de la desigualdad anterior es finita pues  $\partial^\alpha \psi_\beta$  también pertenece a la clase Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .  $\square$

Otra propiedad importante es que la transformada de Fourier es un operador lineal de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  en  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . En efecto, por el Corolario 1.3 sabemos que si  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , entonces  $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Luego, para todo  $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  y todo  $\lambda$  escalar complejo, tenemos:

$$\widehat{\lambda\varphi + \psi} = \lambda\widehat{\varphi} + \widehat{\psi}.$$

Este resultado se sigue directamente gracias a la Definición 1.3 (página 15).

Continuando con este breve repaso, ahora definiremos el producto de convolución de funciones en la clase de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .

**Definición 1.5.** Sean  $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Definimos el producto de convolución de  $\varphi$  con  $\psi$ , notado por  $\varphi * \psi$ , como:

$$(\varphi * \psi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y)\psi(y)dy, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n. \quad (1.16)$$

Antes de estudiar la transformada de Fourier del producto de convolución es necesario verificar que esta operación es cerrada en la clase de Schwartz.

**Proposición 1.7.** Si  $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , entonces  $\varphi * \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .

DEMOSTRACIÓN. Usando el teorema de derivación bajo el signo de la integral tenemos que para todo multi-índice  $\beta \in \mathbb{N}^n$ ,

$$\begin{aligned} \partial_x^\beta (\varphi * \psi)(x) &= \partial_x^\beta \left( \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y)\psi(y)dy \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \partial_x^\beta (\varphi(x-y)\psi(y)) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_x^\beta \varphi)(x-y)\psi(y)dy \\ &= (\partial_x^\beta \varphi * \psi)(x). \end{aligned}$$

Pero como  $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ , con  $1 \leq p \leq +\infty$ , por las desigualdades de Young se sigue que

$$\|\partial_x^\beta (\varphi * \psi)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \|\partial_x^\beta \varphi * \psi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|\partial_x^\beta \varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|\psi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < +\infty,$$

y puesto que el multi-índice  $\beta \in \mathbb{N}^n$  es arbitrario esto implica que  $\varphi * \psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

Ahora, sea  $N \in \mathbb{N}$ . Estudiemos la siguiente cantidad:

$$\begin{aligned} & \left| (1 + |x|)^N \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y)\psi(y)dy \right| \\ & \leq c_N (1 + |x|^N) \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x-y)| |\psi(y)| dy \right) \\ & \leq c_N \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x-y)| |\psi(y)| dy + \int_{\mathbb{R}^n} |x|^N (|\varphi(x-y)| |\psi(y)|) dy \right) \\ & \leq c_N \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x-y)| |\psi(y)| dy + \int_{\mathbb{R}^n} (|x-y| + |y|)^N (|\varphi(x-y)| |\psi(y)|) dy \right) \\ & \leq c_N \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x-y)| |\psi(y)| dy + \int_{\mathbb{R}^n} (|x-y|^N |\varphi(x-y)|) |\psi(y)| + |\varphi(x-y)| (|y|^N |\psi(y)|) dy \right) \\ & \leq c_N \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x-y)| |\psi(y)| dy + c_{n,\varphi} \int_{\mathbb{R}^n} |\psi(y)| dy + c_{n,\psi} \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x-y)| dy \right). \end{aligned}$$

Luego, gracias a las desigualdades de Hölder tenemos

$$\left| (1 + |x|)^N \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y)\psi(y)dy \right| \leq c_N \left( \|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|\psi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + c_{n,\varphi} \|\psi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} + c_{n,\psi} \|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \right).$$



Entonces de la Proposición 1.1 (página 10) podemos concluir que en efecto  $\varphi * \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . □

Una vez que hemos verificado que el producto de convolución de funciones en  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  está bien definida en  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  se tiene el siguiente resultado.

**Proposición 1.8.** Sean  $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Tenemos que  $\widehat{\varphi * \psi} = \widehat{\varphi} \widehat{\psi}$ .

DEMOSTRACIÓN. Por definición de convolución se tiene que

$$\widehat{\varphi * \psi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi * \psi)(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y) \psi(y) dy \right) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx,$$

para todo  $\xi \in \mathbb{R}^n$ . Además, por el *teorema de Fubini* escribimos

$$\widehat{\varphi * \psi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y) e^{-2\pi i y \cdot \xi} \left( \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y) e^{-2\pi i (x-y) \cdot \xi} dx \right) dy,$$

para todo  $\xi \in \mathbb{R}^n$ , y puesto que la integral sobre todo  $\mathbb{R}^n$  es invariante con respecto a traslaciones tenemos:

$$\widehat{\varphi * \psi}(\xi) = \widehat{\varphi}(\xi) \left( \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y) e^{-2\pi i y \cdot \xi} dy \right) = \widehat{\varphi}(\xi) \widehat{\psi}(\xi),$$

para todo  $\xi \in \mathbb{R}^n$ . □

**Observación 1.7.** Lo que la Proposición 1.8 expresa es que si aplicamos la transformada de Fourier al producto de convolución de dos funciones en la clase de Schwartz, obtenemos una expresión más sencilla: el producto puntual de las transformadas de Fourier de dichas funciones.

**Observación 1.8.** Tanto la Proposición 1.5 (página 21) como la Proposición 1.8 (página 26) hacen que la transformada de Fourier sea de notable importancia dentro del estudio de las ecuaciones en derivadas parciales.

Vamos a ilustrar esto con el siguiente ejemplo: consideremos la *ecuación de Poisson*

$$-\Delta\varphi = \psi \quad \text{sobre } \mathbb{R}^n, \quad (1.17)$$

donde  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  es un dato y  $\varphi$  es la solución buscada. Luego, tomando de manera formal la transformada de Fourier en ambos lados de esta ecuación y gracias al Ejemplo 1.3 (página 21) obtenemos

$$(2\pi)^2 |\xi|^2 \widehat{\varphi}(\xi) = \widehat{\psi}(\xi),$$

y entonces para todo  $\xi \neq 0$  se sigue que

$$\widehat{\varphi}(\xi) = (2\pi)^{-2} |\xi|^{-2} \widehat{\psi}(\xi). \quad (1.18)$$

Como se puede ver, al tomar la transformada de Fourier en la *ecuación de Poisson* (que es una *ecuación diferencial parcial elíptica*) se transforma en una ecuación algebraica lo que nos permite extraer mucha más información sobre la transformada de Fourier de la solución  $\varphi$ .

Notemos que para estudiar la ecuación de Poisson, hasta el momento solo hemos usado la propiedad de la transformada de Fourier con respecto a la derivación. Más adelante seguiremos desarrollando este mismo ejemplo, y entonces requeriremos la propiedad de la transformada de Fourier con respecto al producto de convolución, apreciando su utilidad.

Ahora, recordemos que la transformada de Fourier está definida sobre todo  $\mathbb{R}^n$  por lo que es coherente aplicar esta técnica a la ecuación de Poisson pues también hemos considerado esta ecuación en todo el espacio  $\mathbb{R}^n$ .

Por último, notemos que la expresión obtenida al aplicar la transformada de Fourier se encuentra en *variable de Fourier*, esto nos motiva a buscar la manera de recuperar la solución  $\varphi$  en *variable de espacio*, por esta razón es ahora necesario introducir la noción

de transformada de Fourier inversa.

**Definición 1.6.** Sea  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Definimos la transformada inversa de Fourier de la función  $\varphi$ , que será notada por  $\check{\varphi}$ , como:

$$\check{\varphi}(x) = \widehat{\varphi}(-x), \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n.$$

**Observación 1.9.** Notemos que de la Definición 1.3 (página 15) y la Definición 1.6 (página 28) se puede deducir la siguiente identidad:

$$\check{\varphi}(x) = \widetilde{\varphi}(x), \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n,$$

es decir, la transformada de Fourier inversa de  $\varphi$  no es más que la reflexión de la transformada de Fourier.

El siguiente resultado justifica el hecho de que el operador dado en la Definición 1.6, es precisamente el operador inverso de la transformada de Fourier.

**Proposición 1.9** (Inversión de Fourier). Para  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , tenemos:

$$(\widehat{\varphi})^\vee(x) = \varphi(x) = (\check{\varphi})^\wedge(x), \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n.$$

DEMOSTRACIÓN. La idea de esta demostración es probar primero la siguiente identidad:

$$\varphi(x) = (\widehat{\varphi})^\vee(x), \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n.$$

Así,

$$(\widehat{\varphi})^\vee(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}(\xi) e^{2\pi i \xi \cdot x} d\xi, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n. \quad (1.19)$$

Por otro lado, puesto que para todo  $\xi \in \mathbb{R}^n$ ,  $h(\varepsilon\xi) = e^{-\pi|\varepsilon\xi|^2}$  converge puntualmente a 1, cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , Entonces, a partir de la ecuación (1.19) y del *teorema de convergencia*

dominada de Lebesgue tenemos:

$$(\widehat{\varphi})^\vee(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}(\xi) e^{2\pi i \xi \cdot x} e^{-\pi |\varepsilon \xi|^2} d\xi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}(\xi) \psi_\varepsilon(\xi) d\xi, \quad (1.20)$$

donde para todo  $\xi \in \mathbb{R}^n$ , definimos la función  $\psi_\varepsilon(\xi) = e^{2\pi i \xi \cdot x} e^{-\pi |\varepsilon \xi|^2}$ , con  $x \in \mathbb{R}^n$  y  $\varepsilon > 0$ .

Luego, usando la Proposición 1.4 (página 20) en el término del lado derecho de la igualdad anterior obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}(\xi) \psi_\varepsilon(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\xi) \widehat{\psi}_\varepsilon(\xi) d\xi. \quad (1.21)$$

Ahora, usando los numerales 4. y 5. de la Proposición 1.3 (página 18) podemos calcular la transformada de Fourier de  $\psi_\varepsilon$  como sigue:

$$\widehat{\psi}_\varepsilon(\xi) = \left[ e^{2\pi i (\cdot) \cdot x} e^{-\pi |\cdot|^2} \right]^\wedge(\xi) = \left[ \tau^x \left( e^{-\pi |\cdot|^2} \right) \right]^\wedge(\xi) = \left[ \left( e^{-\pi |\cdot|^2} \right)_\varepsilon \right]^\wedge(\xi - x),$$

entonces

$$\widehat{\psi}_\varepsilon(\xi) = \varepsilon^{-n} \left( e^{-\pi |\cdot|^2} \right)^\wedge \left( \frac{\xi - x}{\varepsilon} \right),$$

para todo  $x, \xi \in \mathbb{R}^n$  y gracias al Ejemplo 1.2 (página 16) se tiene que

$$\widehat{\psi}_\varepsilon(\xi) = \varepsilon^{-n} \left( e^{-\pi |\cdot|^2} \right)^\wedge \left( \frac{\xi - x}{\varepsilon} \right) = \varepsilon^{-n} e^{-\pi \left| \frac{\xi - x}{\varepsilon} \right|^2} = \gamma_\varepsilon(\xi - x).$$

De este modo, la ecuación (1.21) se escribe como:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}(\xi) \psi_\varepsilon(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\xi) \varepsilon^{-n} e^{-\pi \left| \frac{\xi - x}{\varepsilon} \right|^2} d\xi = (\varphi * \gamma_\varepsilon)(x), \quad (1.22)$$

para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ . Luego, notemos que como  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  entonces  $\varphi$  es uniformemente continua y pertenece a  $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Así, por el Teorema 1.2.19 de la página 25 de Grafakos (2008), para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  tenemos que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (\varphi * \gamma_\varepsilon)(x) = \varphi(x). \quad (1.23)$$

Finalmente, haciendo  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  en la ecuación (1.22) y gracias a (1.20) y (1.23) se sigue que

$$(\widehat{\varphi})^\vee(x) = \varphi(x).$$

Resta mostrar que  $(\widehat{\varphi})^\vee = (\check{\varphi})^\wedge$ . De la Observación 1.9 (página 28) tenemos que  $(\widehat{\varphi})^\vee = \widehat{\check{\varphi}}$ . Consecuentemente, por el primer numeral de la Proposición 1.3 (página 18) podemos escribir  $(\widehat{\varphi})^\vee = (\widehat{\check{\varphi}})^\wedge$  y nuevamente gracias a Observación 1.9 (página 28) se tiene que  $(\widehat{\varphi})^\vee = (\check{\varphi})^\wedge$ , como se quería.  $\square$

Como se mencionó en la Observación 1.9 (página 28), la transformada de Fourier inversa no es más que la reflexión de la transformada de Fourier por lo que este operador verifica las mismas propiedades que la transformada de Fourier dadas en las Proposiciones 1.3, 1.4, 1.5, 1.8 y en el Corolario 1.3. En particular, respecto a la derivación y la convolución tenemos respectivamente:

$$(\partial^\alpha \varphi)^\vee(x) = (-2\pi i x)^\alpha \check{\varphi}(x), \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.24)$$

$$(\varphi \psi)^\vee(x) = \check{\varphi}(x) * \check{\psi}(x), \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n. \quad (1.25)$$

Ahora, enunciaremos tres identidades bastante útiles para nuestro estudio que relacionan la transformada de Fourier y su transformada inversa.

**Proposición 1.10.** *Si  $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , entonces se verifica:*

1.  $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \overline{\psi(x)} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}(x) \overline{\widehat{\psi}(x)} dx$  (Relación de Parseval),
2.  $\|\widehat{\varphi}\|_{L^2} = \|\varphi\|_{L^2} = \|\check{\varphi}\|_{L^2}$  (Identidad de Plancherel),
3.  $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \psi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}(x) \check{\psi}(x) dx.$

DEMOSTRACIÓN.

1. Como se tiene  $\widehat{\psi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  entonces calculemos su correspondiente transformada de Fourier. Por los dos primeros numerales de la Proposición 1.3 (página 18) se tiene:

$$\widehat{\widehat{\psi}}(\xi) = \widehat{\widehat{\psi}}(\xi), \quad \text{para todo } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Luego, por la Definición 1.6 (página 28), tenemos que

$$\widehat{\widehat{\psi}}(\xi) = \widehat{\widehat{\psi}}(\xi), \quad \text{para todo } \xi \in \mathbb{R}^n,$$

y por último, usando la fórmula de inversión de Fourier obtenemos que

$$\widehat{\widehat{\psi}}(\xi) = \widehat{\widehat{\psi}}(\xi), \quad \text{para todo } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Además, a partir de la identidad anterior y del primer numeral de la Proposición 1.4 (página 20), para  $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  se sigue que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \overline{\psi}(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \widehat{\widehat{\psi}}(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}(x) \overline{\widehat{\psi}}(x) dx.$$

2. Ahora, a partir de la identidad probada en el numeral anterior, para  $\psi = \varphi$  se sigue que:

$$\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \overline{\varphi}(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}(x) \overline{\widehat{\varphi}}(x) dx = \|\widehat{\varphi}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2.$$

Por otro lado, como  $\check{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , por la relación de Parseval y la fórmula de inversión de Fourier tenemos:

$$\|\check{\varphi}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} \check{\varphi}(x) \overline{\check{\varphi}}(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\check{\varphi}}(x) \overline{\widehat{\check{\varphi}}}(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \overline{\varphi}(x) dx = \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2.$$

3. Gracias a la fórmula de inversión de Fourier tenemos la siguiente identidad

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \psi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \widehat{\widehat{\psi}}(x) dx,$$

y usando el resultado dado en la Proposición 1.4 (página 20) en el lado derecho de la igualdad anterior, tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\psi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}(x)\check{\psi}(x)dx.$$

□

La identidad de Plancherel es de nuestro particular interés pues nos permite relacionar directamente una función  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  con su transformada de Fourier y su transformada inversa a través de la norma  $\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ . Esta identidad será de gran utilidad en el Capítulo 3 cuando introduzcamos los espacios de Sobolev.

Recordemos que en la Definición 1.2 (página 10) describimos la noción de convergencia en  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Sin embargo, esta noción se vuelve mucho más interesante cuando interactúa con la transformada de Fourier como se presenta a continuación.

**Proposición 1.11.** Sean  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  y  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .

1. Si  $\varphi_j \rightarrow \varphi$  en  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , entonces  $\widehat{\varphi}_j \rightarrow \widehat{\varphi}$  en  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .
2. Si  $\varphi_j \rightarrow \varphi$  en  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , entonces  $\check{\varphi}_j \rightarrow \check{\varphi}$  en  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .

DEMOSTRACIÓN.

1. Sean  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$  multi-índices, como  $\varphi_j \rightarrow \varphi$  en  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , entonces de la desigualdad (1.15) sabemos que

$$\begin{aligned} \rho_{\alpha, \beta}(\widehat{\varphi}_j - \widehat{\varphi}) &\leq c_{\alpha, \beta} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \partial^\alpha \left( x^\beta (\varphi_j - \varphi)(x) \right) \right| dx \\ &\leq c_{\alpha, \beta} \left( \int_{|x| \leq 1} \left| \partial^\alpha \left( x^\beta (\varphi_j - \varphi) \right) (x) \right| dx + \int_{|x| > 1} \left| \partial^\alpha \left( x^\beta (\varphi_j - \varphi) \right) (x) \right| dx \right) \\ &\leq c_{\alpha, \beta} \left[ C_n \sup_{|x| \leq 1} \left| \partial^\alpha \left( x^\beta (\varphi_j - \varphi)(x) \right) \right| + \sup_{|x| > 1} \left( |x|^{n+1} \left| \partial^\alpha \left( x^\beta (\varphi_j - \varphi)(x) \right) \right| \right) \int_{|x| > 1} |x|^{-(n+1)} dx \right]. \end{aligned}$$

Ahora, cambiando a coordenadas radiales la última integral tenemos:

$$\rho_{\alpha,\beta}(\widehat{\varphi}_j - \widehat{\varphi}) \leq c_{\alpha,\beta} \left[ C_n \sup_{|x| \leq 1} \left| \partial^\alpha \left( x^\beta (\varphi_j - \varphi)(x) \right) \right| + \sup_{|x| > 1} \left( |x|^{n+1} \left| \partial^\alpha \left( x^\beta (\varphi_j - \varphi)(x) \right) \right| \right) \int_1^{+\infty} \rho^{-2} d\rho \right].$$

Además, puesto que  $|x|^{n+1} \leq c_n \sum_{|\sigma|=n+1} |x^\sigma|$ , con  $\sigma \in \mathbb{N}^n$ , y de la desigualdad anterior se sigue que

$$\begin{aligned} \rho_{\alpha,\beta}(\widehat{\varphi}_j - \widehat{\varphi}) &\leq c_{\alpha,\beta,n} \left( \sup_{|x| \leq 1} \left| \partial^\alpha \left( x^\beta (\varphi_j - \varphi)(x) \right) \right| + \sup_{|x| > 1} \sum_{|\sigma|=n+1} \left| x^\sigma \partial^\alpha \left( x^\beta (\varphi_j - \varphi)(x) \right) \right| \right) \\ &\leq c_{\alpha,\beta,n} \left( \sup_{|x| \leq 1} \left| \partial^\alpha \left( x^\beta (\varphi_j - \varphi)(x) \right) \right| + \sum_{|\sigma|=n+1} \sup_{|x| > 1} \left| x^\sigma \partial^\alpha \left( x^\beta (\varphi_j - \varphi)(x) \right) \right| \right) \\ &\leq c_{\alpha,\beta,n} \left( \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| \partial^\alpha \left( x^\beta (\varphi_j - \varphi)(x) \right) \right| + \sum_{|\sigma|=n+1} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| x^\sigma \partial^\alpha \left( x^\beta (\varphi_j - \varphi)(x) \right) \right| \right). \end{aligned}$$

Luego, por la regla de Leibniz (multidimensional) tenemos que

$$\rho_{\alpha,\beta}(\widehat{\varphi}_j - \widehat{\varphi}) \leq c_{\alpha,\beta,n,a} \left( \sum_{\substack{a \leq \alpha \\ a \leq \beta}} \rho_{\beta-a, \alpha-a}(\varphi_j - \varphi) + \sum_{|\sigma|=n+1} \sum_{\substack{a \leq \alpha \\ a \leq \beta}} \rho_{\sigma+\beta-a, \alpha-a}(\varphi_j - \varphi) \right),$$

y haciendo  $j \rightarrow +\infty$  se concluye que

$$\rho_{\alpha,\beta}(\widehat{\varphi}_j - \widehat{\varphi}) \rightarrow 0.$$

2. La demostración de este segundo numeral es completamente análoga a la anterior gracias a que las relaciones dadas en la desigualdad (1.15) y en la Proposición 1.2 (página 15) también se verifican para la transformada de Fourier inversa.

□

Puesto que la clase de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  es un espacio metrizable este último resultado implica que tanto la transformada de Fourier como la transformada de Fourier inversa son operadores (secuencialmente) continuos.



**Observación 1.10.** *Notemos que gracias a la continuidad de la transformada de Fourier y de su transformada inversa, y a la fórmula de inversión de Fourier podemos concluir que este operador es un homeomorfismo de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  en  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .*

Para concluir esta sección, volvamos al ejemplo de la *ecuación de Poisson* presentada en la página 27. Recordemos que buscamos recuperar la solución  $\varphi$  en variable de espacio; para esto es natural aplicar a priori la transformada de Fourier inversa en la ecuación (1.18) de la página 27. Así, gracias a la expresión dada en la ecuación (1.25) de la página 30 y la fórmula de inversión de Fourier obtenemos:

$$\varphi(x) = \left[ (|\cdot|^{-2})^\vee \widehat{\psi} \right]^\vee(x) = \left[ (|\cdot|^{-2})^\vee * \psi \right](x). \quad (1.26)$$

Al observar la ecuación (1.26) surge la necesidad de estudiar el término  $(|\cdot|^{-2})^\vee$ , pero la función  $|\cdot|^{-2}$  no pertenece a la clase de Schwartz pues no es continua en el origen ni mucho menos decrece rápido. Por esta razón es necesario pasar a un marco más general que incluya funciones como:  $|\cdot|^{-2}$ , y donde además podamos definir la noción de transformada de Fourier.

### 3. El espacio de las distribuciones temperadas.

El motivo por el cual se introduce el espacio de las distribuciones temperadas es porque en la práctica necesitamos estudiar funciones más complejas, en el sentido de que estas se salen del marco de los espacios funcionales con los que hemos tratado hasta el momento, u otros objetos matemáticos que no necesariamente son funciones pero que irán apareciendo en nuestro estudio. Por ejemplo, funciones como la dada por la expresión:  $|\cdot|^{-2}$ , que como vimos no pertenece a la clase de Schwartz. Adicionalmente, nos gustaría de alguna manera contar con algunas de las buenas propiedades de la clase de Schwartz e incluso poder extender nociones como la de transformada de Fourier. Pensando en todo

esto consideremos la siguiente definición.

**Definición 1.7.** *Definimos el espacio de las distribuciones temperadas, notado por  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ , como el espacio dual topológico de la clase de Schwartz.*

Además, para todo  $g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  y para todo  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , escribimos  $\langle g, \varphi \rangle$  para representar la acción de  $g$  sobre  $\varphi$  y donde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denotará el *producto en dualidad entre  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  y  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ .*

A continuación presentamos una caracterización de las distribuciones temperadas que nos proporciona una manera muy útil y sencilla de verificar si un funcional lineal definido sobre  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  es una distribución temperada.

**Proposición 1.12.** *Un funcional lineal  $g$  definido sobre  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  es una distribución temperada si y sólo si existen  $C > 0$  y  $k, m$  enteros positivos tales que*

$$|\langle g, \varphi \rangle| \leq C \sum_{\substack{|\alpha| \leq m \\ |\beta| \leq k}} \rho_{\alpha, \beta}(\varphi), \quad \text{para todo } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \quad (1.27)$$

La prueba de este resultado puede ser revisado en la Proposición 5.15 de la página 166 de Folland (1999).

Ahora vamos a usar la caracterización dada en la Proposición 1.12 para dar algunos ejemplos de distribuciones temperadas.

EJEMPLO 1.4.

1. *Las funciones en  $L^p(\mathbb{R}^n)$ , con  $1 \leq p \leq +\infty$ , pueden ser vistas como distribuciones temperadas a través de la identificación  $g \in L^p(\mathbb{R}^n) \mapsto L_g$ , donde  $L_g$  es el funcional lineal siguiente:*

$$L_g: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\varphi \longmapsto \langle L_g, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)g(x)dx.$$

Por las desigualdades de Hölder sabemos que para  $1 \leq p, q \leq +\infty$  tales que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  se verifica:

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)g(x)dx \right| \leq \|\varphi\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \quad (1.28)$$

Luego, sea  $k \in \mathbb{N}$ , entonces

$$\begin{aligned} & \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^q dx \right)^{1/q} \\ & \leq \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \left( \int_{|x|<1} |\varphi(x)|^q dx + \int_{|x|\geq 1} |\varphi(x)|^q dx \right)^{1/q} \\ & \leq \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \left( (\rho_{0,0}(\varphi))^q \int_{|x|<1} dx + \int_{|x|\geq 1} \frac{|x|^{kq}}{|x|^{kq}} |\varphi(x)|^q dx \right)^{1/q} \\ & \leq \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \left( c_n (\rho_{0,0}(\varphi))^q + C_{n,k} \int_{|x|\geq 1} \frac{1}{|x|^{kq}} \sum_{|\alpha|=k} |x^\alpha|^q |\varphi(x)|^q dx \right)^{1/q} \\ & \leq \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \left( c_n (\rho_{0,0}(\varphi))^q + C_{n,k} \sum_{|\alpha|=k} (\rho_{\alpha,0}(\varphi))^q \int_{|x|\geq 1} \frac{1}{|x|^{kq}} dx \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Cambiando a coordenadas radiales la integral del lado derecho de la última desigualdad tenemos

$$\begin{aligned} & \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^q dx \right)^{1/q} \\ & \leq \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \left( c_n (\rho_{0,0}(\varphi))^q + C_{n,k} \sum_{|\alpha|=k} (\rho_{\alpha,0}(\varphi))^q \int_1^{+\infty} \frac{r^{n-1}}{r^{kq}} dr \right)^{1/q} \\ & \leq \left( c_{n,g} (\rho_{0,0}(\varphi))^q + C_{n,k,g} \sum_{|\alpha|=k} (\rho_{\alpha,0}(\varphi))^q \right)^{1/q}, \end{aligned}$$

para  $k > n/q$ . Así, volviendo a la desigualdad (1.28) y por la Proposición 1.12 (página 35), concluimos que  $g$  es una distribución temperada.

2. Definimos la masa de Dirac en el punto  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $\delta_{x_0}$  por:

$$\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \varphi(x_0), \quad \text{para todo } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Vale la pena mencionar que  $\delta_{x_0}$  es una medida y no una función. Con esto en mente, verifiquemos que  $\delta_{x_0}$  es una distribución temperada, para ello consideremos  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , entonces

$$|\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle| = |\varphi(x_0)| \leq \rho_{0,0}(\varphi),$$

y por la Proposición 1.12 (página 35), se sigue el resultado.

3. Un ejemplo de una distribución temperada que no es una función ni una medida es el valor principal de Cauchy, que sobre  $\mathbb{R}$  está dado por:

$$\left\langle v.p. \frac{1}{x}, \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx, \quad \text{para todo } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

En efecto, para  $0 < \varepsilon < 1$ , fijo, estudiemos la cantidad:

$$\left| \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right| \leq \left| \int_{\varepsilon < |x| < 1} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right| + \left| \int_{|x| \geq 1} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right|.$$

Puesto que  $\frac{1}{x}$  es una función impar, entonces se tiene  $\int_{\varepsilon < |x| < 1} \frac{dx}{x} = 0$ . Usando esto último en el primer término del lado derecho de la desigualdad anterior y por el teorema del valor medio se tiene que

$$\left| \int_{\varepsilon < |x| < 1} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right| \leq \int_{\varepsilon < |x| < 1} \left| \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} \right| dx \leq \int_{\varepsilon < |x| < 1} \frac{|\varphi'(y)| |x|}{|x|} dx \leq 2(1 - \varepsilon) \rho_{0,1}(\varphi). \quad (1.29)$$

Ahora, estudiemos el término restante

$$\left| \int_{|x| \geq 1} \varphi(x) \frac{dx}{x} \right| \leq \rho_{1,0}(\varphi) \int_{|x| \geq 1} \frac{dx}{|x|^2} \leq c_n \rho_{1,0}(\varphi). \quad (1.30)$$

En consecuencia, usando (1.29), (1.30) y haciendo  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , obtenemos

$$\left| \left\langle v.p. \frac{1}{x}, \varphi \right\rangle \right| \leq 2\rho_{0,1}(\varphi) + c_n \rho_{1,0}(\varphi),$$

de este modo, si aplicamos nuevamente la Proposición 1.12 (página 35), obtenemos el resultado deseado.

4. Finalmente, es interesante observar el siguiente ejemplo. Consideremos la función

$$\begin{aligned} h: \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto e^{|x|^2}, \end{aligned}$$

y notemos que  $h$  es una función localmente integrable. Sin embargo,  $h$  no es una distribución temperada, pues si esta función fuese una distribución temperada, entonces podríamos usar la identificación dada en el primer numeral de este ejemplo, como sigue:

$$\langle L_h, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{|x|^2} dx, \quad \text{para todo } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

pero en particular para  $\varphi(x) = e^{-|x|^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  se tiene:

$$\langle L_h, h \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} e^{|x|^2} dx,$$

y por lo tanto el corchete de dualidad, que en este caso se escribe mediante una integral, diverge.

En la Sección 1 de este capítulo habíamos comparado algunos espacios funcionales con la clase de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , ahora es natural preguntarse qué relación existe entre los espacios duales de dichos espacios funcionales y el espacio de las distribuciones temperadas  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ . Antes de responder esta pregunta es necesario introducir el siguiente espacio.

**Definición 1.8.** Dado que  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  es un espacio vectorial topológico, notamos por  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  a su dual topológico. Los elementos de  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  son llamados distribuciones.

Para todo  $h \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  y para todo  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , escribimos  $\langle h, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)}$  para representar la acción de  $h$  sobre  $\varphi$ , donde  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)}$  denotará el producto en dualidad entre  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  y  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ .

**Observación 1.11.** Gracias al Corolario 1.1 (página 12) sabemos que  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , lo cual implica que  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ . (Ver la sección 2.3.2 de Grafakos (2008)).

En la Sección 2 estudiamos varias propiedades para  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  con las que nos gustaría contar en el marco de las distribuciones temperadas  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ . Para ello primero enunciaremos algunas notaciones y definiciones análogas a las conocidas para  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  usando el producto en dualidad entre  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  y  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .

**Observación 1.12.** De ahora en adelante, dadas  $g_1, g_2 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  escribiremos  $g_1 = g_2$  en el sentido de las distribuciones temperadas si y solo si

$$\langle g_1, \varphi \rangle = \langle g_2, \varphi \rangle \quad \text{para todo } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

**Definición 1.9.** Sean  $g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  y  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  un multi-índice. Definimos la derivada de orden  $|\alpha|$  de  $g$  en el sentido de las distribuciones temperadas como:

$$\langle \partial^\alpha g, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle g, \partial^\alpha \varphi \rangle, \quad \text{para todo } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

**EJEMPLO 1.5.** Sea  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  un multi-índice. Calculemos la derivada de orden  $|\alpha|$  de la masa de Dirac  $\partial^\alpha \delta_{x_0}$ . Para ello consideremos  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  arbitrario. Entonces

$$\langle \partial^\alpha \delta_{x_0}, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle \delta_{x_0}, \partial^\alpha \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \varphi(x_0).$$

**Definición 1.10.** La traslación, la dilatación y la reflexión de una distribución temperada  $g$  están definidas para todo  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  como sigue:

$$\langle \tau^y(g), \varphi \rangle = \langle g, \tau^{-y}(\varphi) \rangle,$$

$$\langle g_\lambda, \varphi \rangle = \langle g, \lambda^{-n}(\varphi_{1/\lambda}) \rangle,$$

$$\langle \tilde{g}, \varphi \rangle = \langle g, \tilde{\varphi} \rangle,$$

con  $y \in \mathbb{R}^n$  y  $\lambda > 0$ .

**EJEMPLO 1.6.** Notemos que la masa de Dirac en el origen  $\delta_0$  coincide con su reflexión, es decir,  $\tilde{\delta}_0 = \delta_0$  en el sentido de las distribuciones temperadas. Además,  $(\delta_0)_\lambda = \lambda^{-n}\delta_0$ , para todo  $\lambda > 0$ , y  $\tau^y(\delta_0) = \delta_y$  para todo  $y \in \mathbb{R}^n$ .

**Definición 1.11.** Sean  $g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  y  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , definimos el producto de convolución entre  $g$  y  $\psi$  por

$$\langle g * \psi, \varphi \rangle = \langle g, \tilde{\psi} * \varphi \rangle, \quad \text{para todo } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

**EJEMPLO 1.7.** Para  $\delta_{x_0} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  y  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ,  $\psi * \delta_{x_0}$  se identifica con la función:

$$\begin{aligned} \psi * \delta_{x_0} : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \psi(x - x_0). \end{aligned}$$

En efecto, para  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  tenemos

$$\begin{aligned} \langle \psi * \delta_{x_0}, \varphi \rangle &= \langle \delta_{x_0}, \tilde{\psi} * \varphi \rangle \\ &= (\tilde{\psi} * \varphi)(x_0) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x - x_0)\varphi(x)dx. \end{aligned}$$

En este ejemplo podemos además observar que la convolución con la masa de Dirac en el origen  $\delta_0$  se identifica con el operador identidad.

Continuando con nuestro estudio, ahora vamos a definir el producto entre una distribución temperada y una función.

**Definición 1.12.** Sean  $g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  y  $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ , tal que  $h$  y todas sus derivadas tengan a lo más crecimiento polinomial al infinito, es decir,

$$|(\partial^\alpha h)(x)| \leq C(1 + |x|)^{k_\alpha}, \quad (1.31)$$

para todo  $\alpha$  multi-índice y algún  $k_\alpha > 0$ . Entonces el producto entre  $h$  y  $g$  está definido por

$$\langle hg, \varphi \rangle = \langle g, h\varphi \rangle, \quad \text{para todo } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \quad (1.32)$$

**Observación 1.13.** La desigualdad dada en la ecuación (1.31) nos permite controlar el crecimiento de la función  $h$  y de todas sus derivadas de modo que estas crezcan como un polinomio de grado  $k_\alpha$ , esto permite que  $h\varphi$  pertenezca a la clase de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  y entonces el producto de dualidad dado en la ecuación (1.32) está bien definido. Para ilustrar la Definición 1.12 revisemos el siguiente ejemplo.

**EJEMPLO 1.8.** Consideremos la masa de Dirac en el origen  $\delta_0$  que como vimos es una distribución temperada, y la función  $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$  dada por la expresión  $h(x) = e^{-|x|^2}$ , entonces por la ecuación (1.32) tenemos

$$\langle h\delta_0, \varphi \rangle = \langle \delta_0, h\varphi \rangle = h(0)\varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle, \quad \text{para todo } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Así,  $h\delta_0 = \delta_0$  en el sentido de las distribuciones temperadas.



#### 4. La transformada de Fourier en el espacio de las distribuciones temperadas.

Análogamente a lo hecho en la sección anterior para dar sentido en  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  a algunas nociones y operaciones estudiadas en  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , aprovecharemos la relación dada por el producto de dualidad entre  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  y  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  para poder extender las definiciones de transformada de Fourier y transformada de Fourier inversa de la clase de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  al espacio de las distribuciones temperadas  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ .

**Definición 1.13.** Sea  $g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ . Definimos la transformada de Fourier  $\hat{g}$  y la transformada inversa de Fourier  $\check{g}$  de la distribución temperada  $g$  como:

$$\langle \hat{g}, \varphi \rangle = \langle g, \hat{\varphi} \rangle \quad y \quad \langle \check{g}, \varphi \rangle = \langle g, \check{\varphi} \rangle,$$

para todo  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .

Recordemos que la Observación 1.11 (página 39) nos dice que se tiene  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ , por lo que es natural preguntarse si es posible extender aún más esta noción de transformada de Fourier al espacio de las distribuciones  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ . El siguiente ejemplo muestra que esto no es posible.

**EJEMPLO 1.9.** Consideremos  $h \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  tal que

$$\langle h, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{\pi|x|^2} \varphi(x) dx, \quad \text{para todo } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n). \quad (1.33)$$

Así, de manera análoga a la Definición 1.13 tenemos

$$\langle \hat{h}, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)} = \langle h, \hat{\varphi} \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{\pi|\xi|^2} \hat{\varphi}(\xi) d\xi, \quad \text{para todo } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n). \quad (1.34)$$

En particular, consideremos  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  dada por

$$\varphi(x) = \theta e^{-\pi|x|^2},$$

con  $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  tal que  $\hat{\theta} > 0$ . Ahora, usando la Proposición 1.8 (página 26) y el Ejemplo 1.2 (página 16) calculamos la transformada de Fourier de  $\varphi$  como sigue:

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \left( \theta e^{-\pi|\cdot|^2} \right)^\wedge(\xi) = \left( \widehat{\theta * e^{-\pi|\cdot|^2}} \right)(\xi) = \left( \widehat{\theta} * e^{-\pi|\cdot|^2} \right)(\xi).$$

Aplicando esto último en la ecuación (1.34) tenemos

$$\langle h, \widehat{\varphi} \rangle_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{\pi|\xi|^2} \left( \widehat{\theta} * e^{-\pi|\cdot|^2} \right)(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} e^{\pi|\xi|^2} \left( \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\theta}(\eta) e^{-\pi|\xi-\eta|^2} d\eta \right) d\xi,$$

y puesto que  $\widehat{\theta} > 0$  se tiene

$$\begin{aligned} \langle h, \widehat{\varphi} \rangle_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} &> \int_{\mathbb{R}^n} e^{\pi|\xi|^2} \left( \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\theta}(\eta) e^{-\pi|\xi|^2 - \pi|\eta|^2} d\eta \right) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{\pi|\xi|^2 - \pi|\xi|^2} \left( \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\theta}(\eta) e^{-\pi|\eta|^2} d\eta \right) d\xi = C \int_{\mathbb{R}^n} d\xi = +\infty, \end{aligned}$$

donde  $C = \left( \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\theta}(\eta) e^{-\pi|\eta|^2} d\eta \right) < +\infty$ .

En conclusión,  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  es el espacio funcional más grande en el que la transformada de Fourier está bien definida.

Veamos ahora algunos ejemplos útiles sobre la transformada de Fourier de distribuciones temperadas:

#### EJEMPLO 1.10.

1. Como vimos toda función  $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ , con  $1 \leq p \leq +\infty$ , puede ser vista como una distribución temperada. De este modo, un ejercicio interesante es calcular su transformada de Fourier. Así, de la Definición 1.13 (página 42) tenemos

$$\left\langle \widehat{L}_g, \varphi \right\rangle = \langle L_g, \widehat{\varphi} \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \widehat{\varphi}(x) dx, \quad \text{para todo } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

2. La masa de Dirac en el punto  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ :  $\delta_{x_0}$ , también es una distribución temperada y su correspondiente transformada de Fourier se obtiene como sigue:

$$\langle \widehat{\delta_{x_0}}, \varphi \rangle = \langle \delta_{x_0}, \widehat{\varphi} \rangle = \widehat{\varphi}(x_0) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{-2\pi i x \cdot x_0} dx, \quad \text{para todo } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

En consecuencia,  $\widehat{\delta_{x_0}}$  se identifica con la función  $g(x) = e^{-2\pi i x \cdot x_0}$ , donde  $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ . En particular, para  $x_0 = 0$  se tiene  $\widehat{\delta}_0 = 1$  en el sentido de las distribuciones temperadas.

3. Por último, vamos a calcular la transformada de Fourier del valor principal de Cauchy sobre  $\mathbb{R}$ , entonces

$$\begin{aligned} \left\langle \left( v.p. \frac{1}{x} \right)^\wedge, \varphi \right\rangle &= \left\langle v.p. \frac{1}{x}, \widehat{\varphi} \right\rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x| > \varepsilon} \widehat{\varphi}(x) \frac{dx}{x} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x| > \varepsilon} \left( \int_{\mathbb{R}} \varphi(\xi) e^{-2\pi i \xi \cdot x} d\xi \right) \frac{dx}{x} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}} \varphi(\xi) \left( \int_{|x| > \varepsilon} [\cos(2\pi \xi \cdot x) - i \sin(2\pi \xi \cdot x)] \frac{dx}{x} \right) d\xi \\ &= - \int_{\mathbb{R}} i \varphi(\xi) \left( \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x| > \varepsilon} \sin(2\pi \xi \cdot x) \frac{dx}{x} \right) d\xi. \end{aligned}$$

De momento, supongamos la identidad:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x| > \varepsilon} \sin(2\pi \xi \cdot x) \frac{dx}{x} = \pi \operatorname{sgn}(\xi),$$

la cual mostraremos a detalle en el **Apéndice A** (página 139). Así, tenemos que

$$\left\langle \left( v.p. \frac{1}{x} \right)^\wedge, \varphi \right\rangle = - \int_{\mathbb{R}} i \pi \operatorname{sgn}(\xi) \varphi(\xi) d\xi.$$

De este modo,  $\left( v.p. \frac{1}{x} \right)^\wedge$  se identifica con la función  $-i\pi \operatorname{sgn}(\xi)$ .

Como se esperaba, las principales propiedades de la transformada de Fourier estudiadas para  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  pueden ser extendidas por dualidad (y en los casos correspondientes,

usando las Definiciones 1.9, 1.10, 1.11 de la página 39) al espacio  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ .

**Proposición 1.13.** Sean  $g, h \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ,  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ,  $y \in \mathbb{R}^n$ ,  $b$  un escalar complejo,  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  un multi-índice y  $\lambda > 0$ . Tenemos las siguientes propiedades en el sentido de las distribuciones:

1.  $(\tilde{g})^\wedge = (\hat{g})^\sim$ ,
2.  $\widehat{\tau^y(g)} = (e^{-2\pi iy \cdot \xi}) \hat{g}$ ,
3.  $(e^{2\pi ix \cdot y} g)^\wedge = \tau^y(\hat{g})$ ,
4.  $\hat{g}_\lambda = \lambda^{-n} (\hat{g})_{1/\lambda}$ ,
5.  $(\partial^\alpha g)^\wedge = (2\pi i \xi)^\alpha \hat{g}$ ,
6.  $\partial^\alpha \hat{g} = ((-2\pi i x)^\alpha g)^\wedge$ ,
7.  $(\tilde{g})^\wedge = (\hat{g})^\vee = g$ ,
8.  $\widehat{\varphi * g} = \hat{\varphi} \hat{g}$ ,
9.  $\widehat{\varphi g} = \hat{\varphi} * \hat{g}$ .

Este resultado se sigue directamente por dualidad y analogía a las Proposiciones 1.3, 1.5, 1.8 y la Definición 1.13 (páginas 18, 21, 26 y 42, respectivamente). Por este motivo no daremos los detalles de la demostración de esta proposición, sin embargo, esta puede ser revisada como parte de la Proposición 2.3.22 de la página 120 de Grafakos (2008).

## 5. La transformada de Fourier de las distribuciones homogéneas.

Recordemos nuestro ejemplo de la ecuación de Poisson dada en la ecuación (1.17) de la página 27. De manera más precisa, recordemos que queremos estudiar la función  $|\cdot|^{-2}$

y su transformada de Fourier inversa  $(|\cdot|^{-2})^\vee$  pues es uno de los términos que aparece en la ecuación (1.26) de la página 34. Sin embargo, uno de los primeros problemas que enfrentamos es el hecho de que la función  $|\cdot|^{-2}$  tampoco pertenece a los espacios  $L^p(\mathbb{R}^n)$  con  $1 \leq p \leq +\infty$ . Analicemos brevemente esto en dos casos.

*Primer caso:* si  $1 \leq p < +\infty$ , entonces integrando y haciendo un cambio de variable a coordenadas radiales tenemos:

$$\left( \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-2p} dx \right)^{1/p} = \left( \int_0^1 \rho^{-2p+n-1} d\rho + \int_1^{+\infty} \rho^{-2p+n-1} d\rho \right)^{1/p}.$$

Notemos que por un lado, si  $p < n/2$  entonces

$$\int_0^1 \rho^{-2p+n-1} d\rho = \frac{\rho^{-2p+n}}{-2p+n} \Big|_0^1 < +\infty \quad \text{y} \quad \int_1^{+\infty} \rho^{-2p+n-1} d\rho = \frac{\rho^{-2p+n}}{-2p+n} \Big|_1^{+\infty} = +\infty,$$

mientras que si  $p > n/2$  entonces

$$\int_0^1 \rho^{-2p+n-1} d\rho = \frac{\rho^{-2p+n}}{-2p+n} \Big|_0^1 = +\infty \quad \text{y} \quad \int_1^{+\infty} \rho^{-2p+n-1} d\rho = \frac{\rho^{-2p+n}}{-2p+n} \Big|_1^{+\infty} < +\infty.$$

Así también, si  $p = n/2$  entonces

$$\int_0^{+\infty} \rho^{-1} d\rho = +\infty.$$

En todos los casos, la conclusión es la misma. Así, para todo  $1 \leq p < +\infty$  se tiene que

$$\left( \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-2p} dx \right)^{1/p} = +\infty.$$

*Segundo caso:* si  $p = \infty$ , entonces

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \text{ess } |x|^{-2} = +\infty.$$

Así, vemos que funciones como:  $|\cdot|^{-2}$ , que aparecerán con frecuencia en nuestro estudio, no pertenecen a espacios funcionales usuales como los espacios de Lebesgue. Por esta razón, surge la necesidad de estudiar a estas funciones en el marco (más general) de las distribuciones temperadas a través de la siguiente definición:

**Definición 1.14** (Distribución homogénea). Sean  $z \in \mathbb{R}$  y  $n \in \mathbb{N}$  la dimensión de  $\mathbb{R}^n$ .

1. Para  $z > -n$ , definimos  $\Phi_z$  como:

$$\langle \Phi_z, \varphi \rangle = C_{z,n} \int_{\mathbb{R}^n} |x|^z \varphi(x) dx, \quad \text{para todo } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \quad (1.35)$$

donde  $C_{z,n} = \frac{\pi^{\frac{n+z}{2}}}{\Gamma(\frac{n+z}{2})} > 0$ .

2. Para  $z \leq -n$  y para  $N \in \mathbb{N}$  el entero más pequeño tal que  $z > -N - n - 1$ ,

definimos la distribución  $\Phi_z$  como:

$$\begin{aligned} \langle \Phi_z, \varphi \rangle = C_{z,n} \int_{|x| \leq 1} |x|^z \left( \varphi(x) - \sum_{|\alpha| \leq N} \frac{\partial^\alpha \varphi(0)}{\alpha!} x^\alpha \right) dx \\ + \sum_{|\alpha| \leq N} b_{z,n,\alpha} \langle \partial^\alpha \delta_0, \varphi \rangle + C_{z,n} \int_{|x| > 1} |x|^z \varphi(x) dx, \end{aligned} \quad (1.36)$$

para todo  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , donde  $b_{z,n,\alpha} = \frac{1}{\alpha!} \frac{1}{z+n+|\alpha|} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \theta^\alpha d\theta$ .

**Observación 1.14.** En la Definición 1.14, la expresión dada en la ecuación (1.35) está bien definida cuando  $z > -n$ .

En efecto, primero notemos que si  $z > -n$ , entonces  $\Phi_z$  coincide con la función  $C_{z,n} |\cdot|^z$  que pertenece a  $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$  por lo que la expresión dada en (1.35) está bien definida.

Por otro lado, vemos que si  $z \leq -n$ , entonces la función  $|\cdot|^z$  no es localmente integrable, pues no es integrable en una vecindad del origen, lo que implica que (1.35) no está bien definido en  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Por ejemplo, consideremos  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  dado como:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 2, \end{cases}$$

entonces

$$\langle \Phi_z, \varphi \rangle = C_{z,n} \int_{|x| \leq 1} |x|^z dx + C_{z,n} \int_{1 \leq |x| \leq 2} |x|^z \varphi(x) dx,$$

donde el término  $\int_{|x| \leq 1} |x|^z dx$  diverge pues  $z \leq -n$ . Si cambiamos esta integral a coordenadas radiales, obtenemos lo siguiente:

$$\int_{|x| \leq 1} |x|^z dx = \int_0^1 \rho^{z+n-1} d\rho = \frac{\rho^{z+n}}{z+n} \Big|_0^1 = +\infty.$$

Esta dificultad nos motiva a buscar una formulación equivalente a la dada en (1.35), la cual nos ayude a extender la noción de  $\Phi_z$  para cuando  $z \leq -n$ , por lo que ahora daremos una breve deducción de la expresión (1.36).

Sean  $z > -n$  y  $N \in \mathbb{N}$ . Como vimos, las funciones  $|\cdot|^z$ , con  $z \leq -n$  no son integrables en una vecindad del origen por lo que para evitar dificultades más adelante introduciremos la expansión en series de Taylor de orden  $N$  de  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  alrededor del origen. Así, por el primer numeral de la Definición 1.14 (página 47) tenemos que

$$\begin{aligned} C_{z,n} \int_{\mathbb{R}^n} |x|^z \varphi(x) dx &= C_{z,n} \left[ \int_{|x| < 1} |x|^z \varphi(x) dx + \int_{|x| > 1} |x|^z \varphi(x) dx \right] \\ &= C_{z,n} \left[ \int_{|x| < 1} |x|^z \left( \varphi(x) - \sum_{|\alpha| \leq N} \frac{\partial^\alpha \varphi(0)}{\alpha!} x^\alpha + \sum_{|\alpha| \leq N} \frac{\partial^\alpha \varphi(0)}{\alpha!} x^\alpha \right) dx + \int_{|x| > 1} |x|^z \varphi(x) dx \right] \\ &= C_{z,n} \left[ \int_{|x| < 1} |x|^z \left( \varphi(x) - \sum_{|\alpha| \leq N} \frac{\partial^\alpha \varphi(0)}{\alpha!} x^\alpha \right) dx + \sum_{|\alpha| \leq N} \frac{\partial^\alpha \varphi(0)}{\alpha!} \int_{|x| < 1} |x|^z x^\alpha dx + \int_{|x| > 1} |x|^z \varphi(x) dx \right]. \end{aligned}$$

Luego, cambiando a coordenadas polares en la integral  $\int_{|x| < 1} |x|^z x^\alpha dx$ , es decir, tomando  $x = r\theta$  con  $0 < r < 1$  y  $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$ , se tiene

$$\begin{aligned} C_{z,n} \left[ \int_{|x| < 1} |x|^z \left( \varphi(x) - \sum_{|\alpha| \leq N} \frac{\partial^\alpha \varphi(0)}{\alpha!} x^\alpha \right) dx + \sum_{|\alpha| \leq N} \frac{\partial^\alpha \varphi(0)}{\alpha!} \left( \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \theta^\alpha d\theta \right) \int_0^1 r^{z+n-1+|\alpha|} dr + \int_{|x| > 1} |x|^z \varphi(x) dx \right] \\ = C_{z,n} \left[ \int_{|x| < 1} |x|^z \left( \varphi(x) - \sum_{|\alpha| \leq N} \frac{\partial^\alpha \varphi(0)}{\alpha!} x^\alpha \right) dx + \sum_{|\alpha| \leq N} \partial^\alpha \varphi(0) \frac{1}{\alpha!} \left( \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \theta^\alpha d\theta \right) \frac{1}{z+n+|\alpha|} + \int_{|x| > 1} |x|^z \varphi(x) dx \right] \\ = C_{z,n} \left[ \int_{|x| < 1} |x|^z \left( \varphi(x) - \sum_{|\alpha| \leq N} \frac{\partial^\alpha \varphi(0)}{\alpha!} x^\alpha \right) dx + b_{z,n,\alpha} \sum_{|\alpha| \leq N} \partial^\alpha \varphi(0) + \int_{|x| > 1} |x|^z \varphi(x) dx \right], \end{aligned}$$

donde  $b_{z,n,\alpha} = \frac{1}{\alpha!} \frac{1}{z+n+|\alpha|} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \theta^\alpha d\theta$  y las dos integrales que aparecen en la expresión anterior convergen absolutamente cuando  $z > -N - n - 1$ .

**Observación 1.15.** *En la Definición 1.14 (página 47), la expresión dada en la ecuación (1.36) está bien definida para todo  $z \leq -n$  y para  $N \in \mathbb{N}$  el entero más pequeño tal que  $z > -N - n - 1$ .*

En efecto, en la ecuación (1.36) vemos que cuando  $z \leq -n$ ,  $\Phi_z$  coincide con la función  $C_{z,n} |\cdot|^z$  fuera de una vecindad del origen, en nuestro caso:  $B_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ . En cambio, cerca del origen la expresión dada en la ecuación (1.36) nos permite estudiar de manera más cuidadosa la singularidad de la función  $C_{z,n} |\cdot|^z$  siempre que  $z \leq -n$  (y para  $N \in \mathbb{N}$  el entero más pequeño tal que  $z > -N - n - 1$ ) a través de una aproximación en series Taylor alrededor del origen.

En conclusión, para  $z > -n$  vemos que  $\Phi_z$  coincide con la función  $C_{z,n} |\cdot|^z \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ , mientras que para  $z \leq -n$  (y para  $N \in \mathbb{N}$  el entero más pequeño que verifica  $z > -N - n - 1$ ),  $\Phi_z$  ya no es una función sino solo una distribución temperada pues su estructura involucra a la masa de Dirac.

Recordemos que el objetivo de esta sección es calcular la transformada de Fourier de las distribuciones homogéneas, por lo que ahora vamos a verificar que estas son distribuciones temperadas.

**Proposición 1.14.** *Para todo  $z \in \mathbb{R}$ ,  $\Phi_z \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ .*

DEMOSTRACIÓN. Sea  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , para  $z > -n$  y  $M > 0$  tenemos que

$$|\langle \Phi_z, \varphi \rangle| = \left| C_{z,n} \int_{\mathbb{R}^n} |x|^z \varphi(x) dx \right|$$



$$\begin{aligned}
&\leq C_{z,n} \left( \int_{|x|\leq 1} |x|^z |\varphi(x)| dx + \int_{|x|>1} |x|^z |\varphi(x)| dx \right) \\
&\leq C_{z,n} \left( \rho_{0,0}(\varphi) \int_{|x|\leq 1} |x|^z dx + \int_{|x|>1} |x|^{z-M} |x|^M |\varphi(x)| dx \right) \\
&\leq C_{z,n} \left( \rho_{0,0}(\varphi) \int_{|x|\leq 1} |x|^z dx + C_{n,N} \int_{|x|>1} |x|^{z-M} \sum_{|\alpha|=M} |x^\alpha \varphi(x)| dx \right).
\end{aligned}$$

Así, tomando  $M > z + n$  se sigue que

$$|\langle \Phi_z, \varphi \rangle| \leq C_{z,n} \rho_{0,0}(\varphi) + C_{n,M} \sum_{|\alpha|=M} \rho_{\alpha,0}(\varphi). \quad (1.37)$$

Ahora, para  $z \leq -n$  tenemos:

$$\begin{aligned}
|\langle \Phi_z, \varphi \rangle| &\leq C_{z,n} \int_{|x|>1} |x|^z |\varphi(x)| dx \\
&\quad + C_{z,n} \int_{|x|\leq 1} |x|^z \left| \varphi(x) - \sum_{|\alpha|\leq M} \frac{\partial^\alpha \varphi(0)}{\alpha!} x^\alpha \right| dx + \sum_{|\alpha|\leq M} b_{z,n,\alpha} |\langle \partial^\alpha \delta_0, \varphi \rangle|.
\end{aligned}$$

Estudiemos cada uno de los términos que aparecen en el lado derecho de la desigualdad anterior:

Como  $z \leq -n$  y cambiando a coordenadas radiales el primer término, se tiene:

$$\begin{aligned}
C_{z,n} \int_{|x|>1} |x|^z |\varphi(x)| dx &\leq C_{z,n} \rho_{0,0}(\varphi) \int_{|x|>1} |x|^z dx \\
&\leq C_{z,n} \rho_{0,0}(\varphi) \int_1^{+\infty} \rho^{z+n-1} d\rho \leq \frac{C_{z,n}}{z+n} \rho_{0,0}(\varphi) < +\infty.
\end{aligned}$$

En cambio, el segundo término se puede escribir para  $z > -n - M - 1$  como:

$$\begin{aligned}
&C_{z,n} \int_{|x|\leq 1} |x|^z \left| \varphi(x) - \sum_{|\alpha|\leq M} \frac{\partial^\alpha \varphi(0)}{\alpha!} x^\alpha \right| dx \\
&= C_{z,n} \int_{|x|\leq 1} |x|^z \left| \sum_{|\alpha|\geq 0} \frac{\partial^\alpha \varphi(0)}{\alpha!} x^\alpha - \sum_{|\alpha|\leq M} \frac{\partial^\alpha \varphi(0)}{\alpha!} x^\alpha \right| dx \\
&= C_{z,n} \int_{|x|\leq 1} |x|^z \left| \sum_{|\alpha|\geq M+1} \frac{\partial^\alpha \varphi(0)}{\alpha!} x^\alpha \right| dx
\end{aligned}$$

$$\leq C_{z,n} \int_{|x| \leq 1} |x|^z |\partial^\alpha \varphi(x)| dx,$$

con  $|\alpha| = M + 1$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} C_{z,n} \int_{|x| \leq 1} |x|^z \left| \varphi(x) - \sum_{|\alpha| \leq M} \frac{\partial^\alpha \varphi(0)}{\alpha!} x^\alpha \right| dx &\leq C_{z,n} \int_{|x| \leq 1} \sum_{|\beta|=z} |x^\beta \partial^\alpha \varphi(x)| dx \\ &\leq C_{z,n} \sum_{|\beta|=z} \rho_{\alpha,\beta}(\varphi) < +\infty. \end{aligned}$$

Finalmente, por el Ejemplo 1.5 (página 39), tenemos que:

$$\sum_{|\alpha| \leq M} b_{z,n,\alpha} |\langle \partial^\alpha \delta_0, \varphi \rangle| = \sum_{|\alpha| \leq M} b_{z,n,\alpha} |\partial^\alpha \varphi(0)| \leq \sum_{|\alpha| \leq M} b_{z,n,\alpha} \rho_{0,\alpha}(\varphi) < +\infty.$$

□

Una vez mostrado que  $\Phi_z$  es una distribución temperada podemos calcular su transformada de Fourier como sigue:

**Proposición 1.15** (Teorema 2.4.6, Grafakos (2008), Transformada de Fourier de distribuciones homogéneas). *Para  $z \in \mathbb{R}$  tenemos que*

$$\widehat{\Phi}_z = \Phi_{-(z+n)}, \quad (1.38)$$

*en el sentido de las distribuciones temperadas.*

DEMOSTRACIÓN. Sea  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , busquemos una expresión para  $\widehat{\Phi}_z$ . Usando la definición Definición 1.14 (página 47), cuando  $z > -n$  tenemos

$$\langle \widehat{\Phi}_z, \varphi \rangle = \langle \Phi_z, \widehat{\varphi} \rangle = C_{z,n} \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^z \widehat{\varphi}(\xi) d\xi.$$

Luego, cambiando a coordenadas polares, esto es tomando  $\xi = \rho\phi$  con  $\rho \geq 0$  y  $\phi \in \mathbb{S}^{n-1}$ , entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^z \widehat{\varphi}(\xi) d\xi = \int_0^{+\infty} \rho^{z+n-1} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \widehat{\varphi}(\rho\phi) d\phi d\rho$$

$$= \int_0^{+\infty} \rho^{z+n-1} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{-2\pi i x \cdot (\rho \phi)} dx d\phi d\rho.$$

Nuevamente, haciendo un cambio a coordenadas polares en  $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{-2\pi i x \cdot (\rho \phi)} dx$ , tomando  $x = r\theta$  con  $r > 0$  y  $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$  y por el *teorema de Fubini* se tiene:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^z \widehat{\varphi}(\xi) d\xi = \int_0^{+\infty} \rho^{z+n-1} r^{n-1} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \varphi(r\theta) \left( \int_{\mathbb{S}^{n-1}} e^{-2\pi i (r\theta) \cdot (\rho \phi)} d\phi \right) d\theta dr d\rho. \quad (1.39)$$

Ahora, como la integral sobre  $\mathbb{S}^{n-1}$  es invariante con respecto a rotaciones, definimos

$$w(r) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} e^{-2\pi i r \cdot (\theta \phi)} d\phi = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} e^{-2\pi i r \cdot (\phi_1)} d\phi, \quad \text{para todo } r > 0,$$

donde  $\phi_1$  es la primera componente de  $\phi$ .

Luego, notemos que lo anterior implica que la siguiente cantidad es independiente de  $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$ :

$$w(r\rho) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} e^{-2\pi i (r\theta) \cdot (\rho \phi)} d\phi d\theta.$$

Así, reescribiendo la expresión en (1.39) tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^z \widehat{\varphi}(\xi) d\xi = \int_0^{+\infty} \left( \int_0^{+\infty} \rho^{z+n-1} w(r\rho) d\rho \right) \left( \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \varphi(r\theta) r^{n-1} d\theta \right) dr. \quad (1.40)$$

Finalmente, haciendo el cambio de variable  $y = r\rho$ , entonces de la expresión (1.40) tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^z \widehat{\varphi}(\xi) d\xi &= \int_0^{+\infty} r^{-(z+n)} \left( \int_0^{+\infty} y^{z+n-1} w(y) dy \right) \left( \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \varphi(r\theta) r^{n-1} d\theta \right) dr \\ &= C_{z,n} \int_0^{+\infty} r^{-(z+n)} \left( \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \varphi(r\theta) r^{n-1} d\theta \right) dr = C_{z,n} \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-(z+n)} \varphi(x) dx, \end{aligned} \quad (1.41)$$

donde  $C_{z,n} = \int_0^{+\infty} y^{z+n-1} w(y) dy$ .

Resta mostrar que  $C_{z,n}$  es en efecto una constante. Puesto que los cálculos que llevan a este resultado son demasiado técnicos, incluimos los mismos en el **Apéndice B** (página 142).

Sin embargo, para el caso particular  $-n < z < -n + 1/2$  vemos que  $C_{z,n} < +\infty$ . Como

$$\widehat{\Phi}_z = \Phi_{-(z+n)}, \quad (1.42)$$

en el sentido de las distribuciones temperadas, si cambiamos a coordenadas polares las integrales dadas en la ecuación (1.41), y consideramos  $\varphi(x) = e^{-\pi|x|^2}$ , obtenemos:

$$\int_0^{+\infty} r^{z+n-1} e^{-\pi r^2} dr = C_{z,n} \int_0^{+\infty} r^{-(z+n)+n-1} e^{-\pi r^2} dr.$$

Ahora, tomando  $v = \pi r^2$  en la identidad anterior, tenemos:

$$C_{z,n} = \frac{\pi^{-\frac{z+n}{2}} \int_0^{+\infty} v^{\frac{z+n}{2}-1} e^{-v} dv}{\pi^{\frac{z}{2}} \int_0^{+\infty} v^{-\frac{z}{2}-1} e^{-v} dv} = \frac{\pi^{-\frac{z+n}{2}} \Gamma\left(\frac{z+n}{2}\right)}{\pi^{\frac{z}{2}} \Gamma\left(-\frac{z}{2}\right)},$$

para todo  $-n < z < -n + 1/2$ , de donde se sigue el resultado.

Finalmente, la demostración del caso  $z \leq -n$  resulta ser demasiado técnica para nuestros intereses por lo que no la incluiremos. Sin embargo, el lector puede revisarla en el Teorema 2.4.6. de la página 128 de Grafakos (2008).  $\square$

Volviendo a la ecuación de Poisson dada en (1.17) de la página 27, y una vez comprendidas las nociones de distribución homogénea y su transformada de Fourier, para todo  $n \in \mathbb{N}$ , la solución para esta ecuación se puede construir de la siguiente manera:

$$\varphi = (|\cdot|^{-2})^\vee * \psi = \check{\Phi}_{-2} * \psi,$$

donde la distribución homogénea  $\Phi_{-2}$ , por un lado, para  $-2 > -n$  (es decir,  $n > 2$ ), viene dada como en el primer numeral de la Definición 1.14 (página 47), mientras que

para  $-2 \leq -n < 0$  y  $N = 4$  (es decir,  $n = 1, 2$ ),  $\Phi_{-2}$  está definida como en el segundo numeral de la Definición 1.14 (página 47).

Luego, ayudados por la Proposición 1.15 (página 51) calculamos  $\check{\Phi}_{-2}$  tomando la transformada de Fourier inversa en ambos lados de la ecuación (1.38) de la página 51. Así, se tiene que

$$\Phi_z = \left(\widehat{\Phi}_z\right)^\vee = \check{\Phi}_{-(z+n)} = \check{\Phi}_{-2}.$$

A partir de esta última identidad queremos encontrar  $z \in \mathbb{R}$  tal que  $z + n = 2$ , por lo tanto, tomando  $z = 2 - n$  se sigue que  $\check{\Phi}_{-2} = \Phi_{2-n}$ .

En conclusión, la solución para la ecuación de Poisson dada en (1.17), página 27, estaría dada por

$$\varphi = \Phi_{2-n} * \psi, \quad \text{en } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n).$$

Este método para encontrar la solución de una ecuación en derivadas parciales nos motiva a querer adaptarlo y replicarlo para nuestra *ecuación del calor fraccionaria*. Esta idea preliminar se desarrollará en detalle en el Capítulo 4, pero antes es necesario empezar a estudiar al operador laplaciano fraccionario y sus propiedades.

## Introducción al operador laplaciano fraccionario

Como nuestro propósito es estudiar la ecuación del calor fraccionaria, es tiempo de dar una definición rigurosa y estudiar algunas de las principales propiedades del operador laplaciano fraccionario. Partiremos de una definición dada a través de la transformada de Fourier, noción que fue introducida en la Sección 2 del Capítulo 1, hasta obtener una forma integral para este operador la cual nos permitirá deducir propiedades importantes para nuestro estudio.

### 1. Definición en variable de Fourier

A medida que desarrollemos las próximas secciones, las herramientas proporcionadas en el Capítulo 1 aparecerán con frecuencia empezando por la transformada de Fourier en la clase de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  que resulta ser una herramienta muy útil a la hora de estudiar al operador laplaciano fraccionario.

En efecto, recordemos que de acuerdo al Ejemplo 1.3 de la página 21, la acción del operador laplaciano clásico  $\Delta$ , en variable de Fourier, para todo  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  está dado de la siguiente manera:

$$[(-\Delta)\varphi]^\wedge(\xi) = (2\pi)^2 |\xi|^2 \hat{\varphi}(\xi), \quad \text{para todo } \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (2.1)$$

Notemos que en (2.1) la acción del laplaciano clásico sobre una función en la clase de Schwartz está dada por la multiplicación con el símbolo  $|\xi|^2$ . Entonces, por analogía, una primera definición natural del operador laplaciano fraccionario en variable de Fourier es usando el símbolo  $|\xi|^s$ , con  $\xi \in \mathbb{R}^n$  y  $0 < s < 2$ , en lugar de  $|\xi|^2$ .

**Definición 2.1** (Laplaciano fraccionario a través de la transformada de Fourier).

Sean  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  y  $0 < s < 2$ . Definimos

$$\left[(-\Delta)^{s/2} \varphi\right]^\wedge(\xi) = (2\pi)^s |\xi|^s \widehat{\varphi}(\xi), \quad \text{para todo } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

**Observación 2.1.** Basta considerar  $0 < s < 2$ , pues dado  $s \in \mathbb{R}$  siempre es posible escribir  $s$  como la suma de un número entero y un número decimal menor que uno, de este modo basta estudiar al operador laplaciano fraccionario cuando su índice pertenece al intervalo  $]0, 1[$ .

**Observación 2.2.** Si bien es natural dar la Definición 2.1, por ahora solo tenemos que el laplaciano fraccionario es un operador bien definido puntualmente para elementos de la clase de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .

**Observación 2.3.** Para todo  $g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  y para todo  $0 < s < 2$ , la definición del operador laplaciano fraccionario puede ser extendida al espacio  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  como:

$$\left[(-\Delta)^{s/2} g\right]^\wedge = (2\pi)^s |\cdot|^s \widehat{g}, \quad \text{en } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n),$$

siempre que el producto  $|\cdot|^s \widehat{g}$  esté bien definido.

Por ejemplo, si consideramos la masa de Dirac en el origen  $\delta_0$ , por la expresión dada aquí arriba y para todo  $0 < s < 2$ , tenemos que

$$\left[(-\Delta)^{s/2} \delta_0\right]^\wedge = (2\pi)^s |\cdot|^s \widehat{\delta}_0, \quad \text{en } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n),$$

donde el producto  $|\cdot|^s \widehat{\delta}_0$  está bien definido en  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ , pues del Ejemplo 1.10 sabemos que  $\widehat{\delta}_0 = 1$  en  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ . De este modo,

$$\left[(-\Delta)^{s/2} \delta_0\right]^\wedge = (2\pi)^s |\cdot|^s, \quad \text{en } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n).$$

Ahora, estudiemos algunas propiedades del laplaciano fraccionario:  $(-\Delta)^{s/2}$ , con  $0 < s < 2$ . La primera propiedad trata sobre el hecho de que el operador laplaciano fraccionario es un operador diferencial homogéneo.

Recordemos entonces que un operador diferencial  $D$  es un operador homogéneo de grado  $\sigma \in \mathbb{R}$ , si para todo  $\lambda > 0$  y todo  $g$  en el dominio del operador se verifica:

$$D(g_\lambda(x)) = \lambda^\sigma (Dg)_\lambda(x), \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n,$$

donde  $g_\lambda$  denota la dilatación de  $g$ .

Observemos que el operador laplaciano fraccionario es un operador de derivación fraccionaria homogéneo de grado  $0 < s < 2$ , pues para  $\lambda > 0$  y  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  tenemos

$$\begin{aligned} \left[(-\Delta)^{s/2} \varphi_\lambda\right]^\wedge(\xi) &= (2\pi)^s |\xi|^s (\varphi_\lambda)^\wedge(\xi) \\ &= (2\pi)^s |\xi|^s \left[\lambda^{-n} (\widehat{\varphi}_{1/\lambda})(\xi)\right] \\ &= \lambda^s (2\pi)^s \lambda^{-n} |\xi/\lambda|^s \widehat{\varphi}(\xi/\lambda). \end{aligned}$$

Ahora, por la Definición 2.1 tenemos que  $\left[(-\Delta)^{s/2} \varphi\right]^\wedge(\xi) = (2\pi)^s |\xi|^s \widehat{\varphi}(\xi)$ , con lo cual

$$\left[(-\Delta)^{s/2} \varphi_\lambda\right]^\wedge(\xi) = \lambda^s \lambda^{-n} \left[(-\Delta)^{s/2} \varphi\right]^\wedge(\xi/\lambda) = \lambda^s \left[\left[(-\Delta)^{s/2} \varphi\right]_\lambda\right]^\wedge(\xi), \quad (2.2)$$

para todo  $\xi \in \mathbb{R}^n$ . Así, tomando la transformada de Fourier inversa en ambos lados de la ecuación (2.2) finalmente obtenemos:

$$(-\Delta)^{s/2} \varphi_\lambda(x) = \lambda^s \left[(-\Delta)^{s/2} \varphi\right]_\lambda(x), \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.3)$$

La siguiente propiedad que enunciaremos nos muestra cómo se comporta el laplaciano fraccionario respecto a la distribución de su exponente de derivación fraccionaria  $0 < s < 2$ .



**Proposición 2.1.** Para  $0 < s_1, s_2 < 2$  y  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , tenemos que

$$(-\Delta)^{(s_1+s_2)/2}\varphi = (-\Delta)^{s_1/2} [(-\Delta)^{s_2/2}\varphi] = (-\Delta)^{s_2/2} [(-\Delta)^{s_1/2}\varphi]. \quad (2.4)$$

DEMOSTRACIÓN. Notemos que para todo  $\xi \in \mathbb{R}^n$  se tiene que

$$\begin{aligned} [(-\Delta)^{(s_1+s_2)/2}\varphi] \wedge(\xi) &= (2\pi)^{(s_1+s_2)} |\xi|^{(s_1+s_2)} \widehat{\varphi}(\xi) \\ &= (2\pi)^{s_1} |\xi|^{s_1} [(2\pi)^{s_2} |\xi|^{s_2} \widehat{\varphi}(\xi)] \\ &= (2\pi)^{s_1} |\xi|^{s_1} [((-\Delta)^{s_2/2}\varphi) \wedge(\xi)] \\ &= [(-\Delta)^{s_1/2} ((-\Delta)^{s_2/2}\varphi)] \wedge(\xi). \end{aligned}$$

Así también,

$$\begin{aligned} [(-\Delta)^{s_1/2} ((-\Delta)^{s_2/2}\varphi)] \wedge(\xi) &= (2\pi)^{s_1} |\xi|^{s_1} [((-\Delta)^{s_2/2}\varphi) \wedge(\xi)] \\ &= (2\pi)^{s_1} |\xi|^{s_1} [(2\pi)^{s_2} |\xi|^{s_2} \widehat{\varphi}(\xi)] \\ &= (2\pi)^{s_2} |\xi|^{s_2} [(2\pi)^{s_1} |\xi|^{s_1} \widehat{\varphi}(\xi)] \\ &= (2\pi)^{s_2} |\xi|^{s_2} [((-\Delta)^{s_1/2}\varphi) \wedge(\xi)] \\ &= [(-\Delta)^{s_2/2} ((-\Delta)^{s_1/2}\varphi)] \wedge(\xi), \end{aligned}$$

para todo  $\xi \in \mathbb{R}^n$ . □

Las equivalencias dadas en la ecuación (2.4) nos muestran que el orden de derivación del laplaciano fraccionario, al escribirse como la suma de dos índices fraccionarios  $0 < s_1, s_2 < 2$ , puede verse como la composición del laplaciano fraccionario de orden  $s_1$  con el de orden  $s_2$  y viceversa.

## 2. Definición como operador de convolución

Por el momento contamos con una definición puntual del laplaciano fraccionario en variable de Fourier dado en la Definición 2.1 (página 56). Ahora nos gustaría tener una caracterización de este operador pero en variable espacial. Por todo lo hecho en la sección anterior podemos intuir que una forma natural para obtener esta caracterización (en variable espacial) es aplicar la transformada de Fourier inversa en la Definición 2.1 (página 56), pues por el numeral 9. de la Proposición 1.13 (página 45) el producto de una función y una distribución temperada se convierte en un producto de convolución. De este modo, para todo  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  tenemos

$$(-\Delta)^{s/2} \varphi = [(2\pi)^s |\cdot|^s \hat{\varphi}]^\vee = [(2\pi)^s |\cdot|^s]^\vee * \varphi. \quad (2.5)$$

Dado que se tiene  $-n < 0 < s < 2$ , la función  $C_{s,n} |\cdot|^s \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$  puede verse como la distribución homogénea  $\Phi_s$  dada como en el primer numeral de la Definición 1.14 (página 47).

Así, gracias a la Proposición 1.15 (página 51) sabemos que para todo  $z \in \mathbb{R}$  se tiene:

$$\hat{\Phi}_z = \Phi_{-(z+n)}, \quad (2.6)$$

en el sentido de las distribuciones temperadas, y como queremos encontrar  $\check{\Phi}_s$  tomamos la transformada de Fourier inversa en ambos lados de la ecuación (2.6) de donde obtenemos:

$$\Phi_z = \left( \hat{\Phi}_z \right)^\vee = \check{\Phi}_{-(z+n)}.$$

Tomando  $z \in \mathbb{R}$  tal que  $s = -(z + n)$ , (es decir,  $z = -(s + n)$ ), se sigue que

$$\check{\Phi}_s = \Phi_{-(n+s)}, \quad (2.7)$$

en el sentido de las distribuciones temperadas.

Notemos que si  $n > 0$  y  $0 < s < 2$ , entonces  $-(n + s) < -n$ , lo que implica que  $(|\cdot|^s)^\vee = \Phi_{-(n+s)}$  es una distribución temperada dada por la expresión escrita en la ecuación (1.36) de la página 47, que no proviene de una función localmente integrable, por lo que no se debe confundir la distribución temperada  $\Phi_{-(n+s)}$  definida sobre  $\mathbb{R}^n$  con la función  $|\cdot|^{-(n+s)}$  definida sobre  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Lo que si podemos decir en este caso es que se tiene la identidad

$$(|\cdot|^s)^\vee = C |\cdot|^{-(n+s)},$$

fuera de una vecindad del origen.

Gracias a la ecuación (2.7) podemos reescribir la expresión dada en (2.5) para obtener una nueva caracterización del operador laplaciano fraccionario, la cual presentamos a continuación:

**Definición 2.2** (Laplaciano fraccionario como operador de convolución). Sean  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  y  $0 < s < 2$ . Definimos

$$(-\Delta)^{s/2} \varphi = \varphi * K_s, \tag{2.8}$$

en el sentido de las distribuciones temperadas, donde

$$K_s = [(2\pi)^s |\cdot|^s]^\vee = (2\pi)^s C_{n,s} \Phi_{-(n+s)}, \tag{2.9}$$

con  $C_{s,n} = \frac{\pi^{\frac{n+s}{2}}}{\Gamma(\frac{n+s}{2})}$ . La distribución temperada  $K_s \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  es conocida como núcleo de convolución.

El próximo resultado establece que el operador  $(-\Delta)^{s/2}$  dado como en (2.8) está bien definido de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  en  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

**Proposición 2.2.** Si  $g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  y  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , entonces  $g * \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Adicionalmente, esta función se define puntualmente como:

$$(g * \varphi)(x) = \langle g, \varphi(x - \cdot) \rangle, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.10)$$

Además, para todo multi-índice  $\alpha$  existen constantes  $C_\alpha, k_\alpha > 0$  tales que

$$|\partial^\alpha (g * \varphi)(x)| \leq C_\alpha (1 + |x|)^{k_\alpha} \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.11)$$

Nótese que la deducción de la expresión dada en (2.10) sigue las siguientes líneas generales: sea  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , entonces de las Definiciones 1.11 y 1.5 (páginas 40 y 24, respectivamente), tenemos

$$\begin{aligned} \langle g * \varphi, \psi \rangle &= \langle g, \tilde{\varphi} * \psi \rangle = \left\langle g, \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\varphi}(\cdot - x) \psi(x) dx \right\rangle \\ &= \left\langle g, \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x - \cdot) \psi(x) dx \right\rangle. \end{aligned}$$

Luego, gracias a la linealidad y continuidad de las distribuciones temperadas (ver Proposición 1.12 de la página 35) se puede mostrar que

$$\langle g * \varphi, \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \langle g, \varphi(x - \cdot) \rangle \psi(x) dx.$$

Esta última identidad nos permite identificar la función  $g * \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$  de la siguiente manera:

$$(g * \varphi)(x) = \langle g, \varphi(x - \cdot) \rangle, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n.$$

La demostración completa y detallada de la Proposición 2.2 puede ser revisada en el Teorema 2.3.20 de la página 116 de Grafakos (2008).

Ahora, como  $K_s \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  vemos de esta manera que la Proposición 2.2 implica que  $(-\Delta)^{s/2} \varphi = \varphi * K_s \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Además, se tiene que la función  $(-\Delta)^{s/2} \varphi$  puntualmente viene dado por:

$$(-\Delta)^{s/2} \varphi(x) = \langle K_s, \varphi(x - \cdot) \rangle, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.12)$$

**Observación 2.4.** *El laplaciano fraccionario puede verse como un operador que verifica:*

$$(-\Delta)^{s/2} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n).$$

En efecto, gracias a la identidad (2.12) vemos que el operador laplaciano fraccionario está bien definido de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  en  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Por otro lado, se puede mostrar que el operador laplaciano fraccionario está bien definido sobre otros espacios funcionales, como por ejemplo los espacios de Hölder (ver Stinga (2018)).

Una vez que hemos dado una primera definición del laplaciano fraccionario en variable de espacio, escrita en la ecuación (2.12), es natural preguntarse si existe alguna conexión entre el laplaciano fraccionario y el laplaciano clásico. Precisamente, la siguiente proposición trata sobre los casos límites del laplaciano fraccionario  $(-\Delta)^{s/2}$ , es decir, cuando  $s = 0$  y  $s = 2$ , donde podremos establecer un vínculo entre dichos operadores como sigue:

**Proposición 2.3** (Proposición 4.4, Di Nezza et al. (2012)). *Para  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$*

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} (-\Delta)^{s/2} \varphi = L_\varphi \quad \text{y} \quad \lim_{s \rightarrow 2^-} (-\Delta)^{s/2} \varphi = L_{(-\Delta)\varphi}, \quad (2.13)$$

*en el sentido de las distribuciones temperadas, donde los límites  $L_\varphi, L_{(-\Delta)\varphi} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  están definidos como:*

$$\langle L_\varphi, \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \psi(x) dx \quad \text{y} \quad \langle L_{(-\Delta)\varphi}, \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} (-\Delta)\varphi(x) \psi(x) dx$$

*para todo  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .*

DEMOSTRACIÓN. Sean  $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , entonces de la ecuación (2.5) se sigue que

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0^+} \langle (-\Delta)^{s/2} \varphi, \psi \rangle &= \lim_{s \rightarrow 0^+} \langle [(2\pi)^s |\cdot|^s \widehat{\varphi}] \check{\psi}, \psi \rangle \\ &= \lim_{s \rightarrow 0^+} \langle [(2\pi)^s |\cdot|^s \widehat{\varphi}], \check{\psi} \rangle \\ &= \lim_{s \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} (2\pi)^s |\xi|^s \widehat{\varphi}(\xi) \check{\psi}(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Luego, por el *teorema de convergencia dominada de Lebesgue* y el numeral 3. de la Proposición 1.10 (página 30) se sigue que:

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \langle (-\Delta)^{s/2} \varphi, \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}(\xi) \check{\psi}(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\xi) \psi(\xi) d\xi = \langle L_\varphi, \psi \rangle.$$

Análogamente, por el *teorema de convergencia dominada de Lebesgue* y el numeral 3. de la Proposición 1.10 (página 30) tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 2^-} \langle (-\Delta)^{s/2} \varphi, \psi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{s \rightarrow 2^-} (2\pi)^s |\xi|^s \widehat{\varphi}(\xi) \check{\psi}(\xi) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (2\pi)^2 |\xi|^2 \widehat{\varphi}(\xi) \check{\psi}(\xi) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} [(-\Delta)\varphi]^\wedge(\xi) \check{\psi}(\xi) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (-\Delta)\varphi(\xi) \psi(\xi) d\xi = \langle L_{(-\Delta)\varphi}, \psi \rangle, \end{aligned}$$

como se quería. □

Analicemos brevemente el último resultado. En la expresión

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} (-\Delta)^{s/2} \varphi = L_\varphi,$$

tenemos que el índice fraccionario  $s/2$  tiende a cero por lo derecha, y donde la distribución  $L_\varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  que se identifica con la función  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , lo cual puede entenderse como si derivamos cero veces  $\varphi$  que como sabemos el resultado es la misma función. De manera

similar, cuando

$$\lim_{s \rightarrow 2^-} (-\Delta)^{s/2} \varphi = L_{(-\Delta)} \varphi,$$

vemos que el índice fraccionario  $s/2$  tiende a 1 por la izquierda, y que gracias al Ejemplo 1.4 (página 35) tenemos que la distribución  $L_{(-\Delta)} \varphi$  se identifica con el laplaciano clásico.

Este resultado es importante dentro del estudio de las ecuaciones en derivadas parciales porque nos permite conectar las nociones de derivación clásica con las de derivación fraccionaria a través de los límites dados en la ecuación (2.13).

### 3. Definición como operador de integral singular

En la Sección 2 de este capítulo definimos al operador laplaciano fraccionario como un producto de convolución pero en la práctica esta definición resultar difícil de manipular por lo que vamos a introducir una definición equivalente.

Para  $0 < s < 2$ , consideremos el operador:

$$\begin{aligned} T_s: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow L^1(\mathbb{R}^n) \\ \varphi &\longmapsto T_s \varphi, \end{aligned}$$

donde, para cada  $x \in \mathbb{R}^n$  definimos

$$T_s \varphi(x) = \frac{C_{n,s}}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{2\varphi(x) - \varphi(x+y) - \varphi(x-y)}{|y|^{n+s}} dy, \quad (2.14)$$

donde  $C_{n,s} > 0$  es una constante que depende de la dimensión del espacio  $n$  y del índice fraccionario  $s$ . Decimos que la expresión  $T_s \varphi(x)$  está en forma de *cociente diferencial* de grado  $s$ .

Así, primero verifiquemos que  $T_s \varphi(x)$  está bien definido para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  y para todo  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . En efecto, para  $M > 0$  escribimos

$$|T_s \varphi(x)| = \left| \frac{C_{n,s}}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{2\varphi(x) - \varphi(x+y) - \varphi(x-y)}{|y|^{n+s}} dy \right|$$

$$= \frac{C_{n,s}}{2} \left[ \int_{|y| \leq M} \frac{|2\varphi(x) - \varphi(x+y) - \varphi(x-y)|}{|y|^{n+s}} dy + \int_{|y| > M} \frac{|2\varphi(x) - \varphi(x+y) - \varphi(x-y)|}{|y|^{n+s}} dy \right]. \quad (2.15)$$

Para estimar la primera expresión, fijamos  $M > 0$  suficientemente pequeño y usamos la expansión en series de Taylor de segundo orden de  $\varphi$  en una vecindad del origen, de este modo obtenemos:

$$\begin{aligned} \int_{|y| \leq M} \frac{|2\varphi(x) - \varphi(x+y) - \varphi(x-y)|}{|y|^{n+s}} dy &\leq \int_{|y| \leq M} \frac{2|D^2\varphi(x)||y|^2}{|y|^{n+s}} dy \\ &\leq 2\|D^2\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_0^M \rho^{1-s} d\rho < +\infty, \end{aligned}$$

pues  $0 < s < 2$ . Luego, para estimar la segunda expresión usamos el hecho que para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  se verifica:  $\varphi(x) \leq \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$ , de donde:

$$\begin{aligned} \int_{|y| > M} \frac{|2\varphi(x) - \varphi(x+y) - \varphi(x-y)|}{|y|^{n+s}} dy &\leq \int_{|y| > M} \frac{4\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}}{|y|^{n+s}} dy \\ &\leq 4\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_M^{+\infty} \rho^{-s-1} d\rho < +\infty, \end{aligned}$$

nuevamente gracias a que  $0 < s < 2$ .

También hace falta verificar el hecho de que  $T_s\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , pero para comodidad del lector pondremos todos los cálculos correspondientes a este punto en el **Apéndice C** (página 144).

Una vez bien definido el operador  $T_s$  podemos enunciar el siguiente resultado:

**TEOREMA 2.1** (Lema 2.1, Bucur y Valdinoci (2016)). *Para  $0 < s < 2$  y  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , se tiene que*

$$T_s\varphi = (-\Delta)^{s/2}\varphi.$$



DEMOSTRACIÓN. Puesto que  $T_s\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$  aplicamos la transformada de Fourier en la ecuación (2.14) y, gracias al *teorema de Fubini* tenemos que

$$\begin{aligned}
(T_s\varphi)^\wedge(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} T_s\varphi(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \\
&= \frac{C_{n,s}}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \left[ \int_{\mathbb{R}^n} \frac{2\varphi(x) - \varphi(x+y) - \varphi(x-y)}{|y|^{n+s}} dy \right] e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \\
&= \frac{C_{n,s}}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|y|^{n+s}} \left[ \int_{\mathbb{R}^n} (2\varphi(x) - \varphi(x+y) - \varphi(x-y)) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \right] dy \\
&= \frac{C_{n,s}}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|y|^{n+s}} \left[ \int_{\mathbb{R}^n} 2\varphi(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx - \int_{\mathbb{R}^n} \tau^{-y}\varphi(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx - \int_{\mathbb{R}^n} \tau^y\varphi(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \right] dy.
\end{aligned}$$

Luego por el numeral 3. de la Proposición 1.3 de la página 18 se sigue que:

$$\begin{aligned}
(T_s\varphi)^\wedge(\xi) &= \frac{C_{n,s}}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{2\widehat{\varphi}(\xi) - e^{2\pi i y \cdot \xi} \widehat{\varphi}(\xi) - e^{-2\pi i y \cdot \xi} \widehat{\varphi}(\xi)}{|y|^{n+s}} dy \\
&= \frac{C_{n,s}}{2} \widehat{\varphi}(\xi) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{2 - e^{2\pi i y \cdot \xi} - e^{-2\pi i y \cdot \xi}}{|y|^{n+s}} dy.
\end{aligned}$$

Si usamos la fórmula de Euler en la expresión anterior podemos reescribirla como:

$$(T_s\varphi)^\wedge(\xi) = C_{n,s} \widehat{\varphi}(\xi) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(2\pi y \cdot \xi)}{|y|^{n+s}} dy.$$

Ahora, tomando  $z = |\xi| y$ , con  $|\xi| \neq 0$  se tiene que:

$$(T_s\varphi)^\wedge(\xi) = C_{n,s} \widehat{\varphi}(\xi) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos\left(2\pi \frac{z}{|\xi|} \cdot \xi\right)}{\left|\frac{z}{|\xi|}\right|^{n+s}} \frac{1}{|\xi|^n} dz = C_{n,s} |\xi|^s \widehat{\varphi}(\xi) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos\left(2\pi \frac{z}{|\xi|} \cdot \xi\right)}{|z|^{n+s}} dz. \quad (2.16)$$

Notando  $J(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos\left(2\pi \frac{z}{|\xi|} \cdot \xi\right)}{|z|^{n+s}} dz$ , estudiemos este término. Veamos primero que  $J$  es invariante con respecto a rotaciones. En efecto, si consideramos una rotación  $R$  y su transpuesta  $R^t$  tenemos:

$$J(R\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos\left(2\pi \frac{z}{|R\xi|} \cdot R\xi\right)}{|z|^{n+s}} dz = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos\left(2\pi \frac{R^t z}{|\xi|} \cdot \xi\right)}{|R^t z|^{n+s}} dz = J(\xi),$$

como se quería.

Por otro lado, para una rotación  $R_1$  tal que  $R_1 e_1 = \frac{\xi}{|\xi|}$ , con  $e_1 = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$  se sigue que:

$$J(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(2\pi z \cdot R_1 e_1)}{|z|^{n+s}} dz = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(2\pi R_1^t z \cdot e_1)}{|R_1^t z|^{n+s}} dz,$$

y tomando  $w = 2\pi R_1^t z$  se tiene:

$$J(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(w \cdot e_1)}{\left|\frac{w}{2\pi}\right|^{n+s}} \frac{|\det R_1^t|}{(2\pi)^n} dw,$$

pero como  $R_1$  es una matriz ortogonal se tiene  $|\det R_1^t| = 1$ , entonces

$$J(\xi) = (2\pi)^s \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(w_1)}{|w|^{n+s}} dw. \quad (2.17)$$

Resta ver que el término  $\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(w_1)}{|w|^{n+s}} dw$  es una cantidad finita. Para ello procederemos como sigue:

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(w_1)}{|w|^{n+s}} dw \right| \leq \int_{|w| \leq M} \frac{|1 - \cos(w_1)|}{|w|^{n+s}} dw + \int_{|w| > M} \frac{|1 - \cos(w_1)|}{|w|^{n+s}} dw, \quad \text{con } M > 0.$$

En el primer término del lado derecho de la identidad anterior, usamos la expansión en serie de Taylor de segundo orden de la función coseno en una vecindad del origen y puesto que  $0 < s < 2$  obtenemos:

$$\begin{aligned} \int_{|w| \leq M} \frac{|1 - \cos(w_1)|}{|w|^{n+s}} dw &= \int_{|w| \leq M} \frac{\left| 1 - \left( 1 - \frac{w_1^2}{2!} + o(|w_1|^3) \right) \right|}{|w|^{n+s}} dw \\ &\leq C \int_{|w| \leq M} \frac{|w^2| + |w|^3}{|w|^{n+s}} dw \\ &\leq C \int_0^M \frac{\rho^2 + \rho^3}{\rho^{n+s}} \rho^{n-1} d\rho < +\infty. \end{aligned}$$

Luego, para el segundo término tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_{|w| > M} \frac{|1 - \cos(w_1)|}{|w|^{n+s}} dw &\leq \int_{|w| > M} \frac{|1| + |\cos(w_1)|}{|w|^{n+s}} dw \\ &\leq \int_{|w| > M} \frac{2}{|w|^{n+s}} dw = \int_M^{+\infty} \frac{2}{\rho^{n+s}} \rho^{n-1} d\rho < +\infty, \end{aligned}$$

de donde se sigue que en efecto

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(w_1)}{|w|^{n+s}} dw < +\infty.$$

Así, tomando  $C_{n,s} = \left( \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(w_1)}{|w|^{n+s}} dw \right)^{-1}$  y de las ecuaciones (2.16), (2.17), finalmente obtenemos:

$$(T_s \varphi)^\wedge(\xi) = (2\pi)^s |\xi|^s \widehat{\varphi}(\xi), \quad \text{para todo } \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (2.18)$$

Tomando la transformada inversa en la ecuación (2.18) y por la ecuación (2.14) de la página 64, se puede concluir que ambas definiciones son equivalentes.  $\square$

En consecuencia, tenemos una tercera caracterización del laplaciano fraccionario en variable espacial:

$$(-\Delta)^{s/2} \varphi(x) = \frac{C_{n,s}}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{2\varphi(x) - \varphi(x+y) - \varphi(x-y)}{|y|^{n+s}} dy. \quad (2.19)$$

Con esta definición se puede ver claramente que  $(-\Delta)^{s/2}$  es un operador no local, pues en este caso estamos integrando sobre todo  $\mathbb{R}^n$  por lo que es necesario conocer todos los valores de  $\varphi$ , a diferencia del operador laplaciano clásico  $(-\Delta)$  que por definición (ver el Ejemplo 1.3 de la página 21) es un operador diferencial y por lo tanto es un operador local.

En la práctica, manipular  $(-\Delta)^{s/2}$  en forma de cociente diferencial como en (2.19) es mucho más fácil que cuando está expresado como el producto de convolución dado en la Definición 2.2 (página 60), pues esta última definición incluye el término  $K_s$  dado en la ecuación (2.9) que es una distribución homogénea de grado  $-(n+s)$ .

Finalmente, estudiemos con un poco más de detalle la expresión dada en (2.19) que como vemos tiene una singularidad en  $y = 0$  por lo que nos concentraremos en ver cómo

se comporta esta integral cerca del origen. De manera más precisa, observando el término:

$$\frac{|2\varphi(x) - \varphi(x+y) - \varphi(x-y)|}{|y|^{n+s}},$$

notamos que la singularidad en  $y = 0$  logra ser controlada por los tres términos que aparecen en el numerador:  $2\varphi(x) - \varphi(x+y) - \varphi(x-y)$ , pues juntos se comportan aproximadamente como los términos  $|D^2\varphi(x)||y|^2$ . Sin embargo, si solo contamos con los términos  $\varphi(x) - \varphi(x+y)$  o  $\varphi(x) - \varphi(x-y)$  el efecto descrito antes desaparece, en realidad el comportamiento producido por estos pares de términos es aproximadamente como  $|\nabla\varphi(x)||y|$  que no es suficiente para controlar dicha singularidad. Para solventar este problema introduciremos el valor principal de Cauchy como se presenta a continuación:

**Proposición 2.4** (Teorema 1, Stinga (2018)). *Si  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  y  $0 < s < 2$ , entonces para todo  $x \in \mathbb{R}^n$*

$$(-\Delta)^{s/2}\varphi(x) = C_{n,s} \text{V.P.} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{|x-y|^{n+s}} dy := C_{n,s} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x-y|>\varepsilon} \frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{|x-y|^{n+s}} dy. \quad (2.20)$$

DEMOSTRACIÓN. Notemos que:

$$\begin{aligned} & \frac{C_{n,s}}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{2\varphi(x) - \varphi(x+y) - \varphi(x-y)}{|y|^{n+s}} dy \\ &= \frac{C_{n,s}}{2} \left[ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|y|>\varepsilon} \frac{2\varphi(x) - \varphi(x+y) - \varphi(x-y)}{|y|^{n+s}} dy \right] \\ &= \frac{C_{n,s}}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{|y|>\varepsilon} \frac{\varphi(x) - \varphi(x+y)}{|y|^{n+s}} dy + \int_{|y|>\varepsilon} \frac{\varphi(x) - \varphi(x-y)}{|y|^{n+s}} dy \right]. \end{aligned}$$

Haciendo los cambios de variable  $w = x+y$  y  $z = x-y$  en el primer y segundo término, respectivamente, tenemos:

$$\begin{aligned} & \frac{C_{n,s}}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{2\varphi(x) - \varphi(x+y) - \varphi(x-y)}{|y|^{n+s}} dy \\ &= \frac{C_{n,s}}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{|y|>\varepsilon} \frac{\varphi(x) - \varphi(w)}{|x-w|^{n+s}} dw + \int_{|y|>\varepsilon} \frac{\varphi(x) - \varphi(z)}{|x-z|^{n+s}} dz \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= C_{n,s} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x-w|>\varepsilon} \frac{\varphi(x) - \varphi(w)}{|x-w|^{n+s}} dw \\
&= C_{n,s} \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\varphi(x) - \varphi(w)}{|x-w|^{n+s}} dw,
\end{aligned}$$

de donde se sigue el resultado. □

Si hacemos el cambio de variable  $z = x - y$  en la expresión dada en la ecuación (2.20) tenemos:

$$(-\Delta)^{s/2} \varphi(x) = C_{n,s} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|z|>\varepsilon} \frac{\varphi(x) - \varphi(x-z)}{|z|^{n+s}} dz, \quad (2.21)$$

donde al igual que en la ecuación (2.19) existe una singularidad en  $z = 0$ , sin embargo, vemos que en el numerador solo aparecen los términos:  $\varphi(x) - \varphi(x-z)$  que como habíamos mencionado se comportan aproximadamente como  $|\nabla\varphi(x)| |y|$  que no son suficientes para contrarrestar la singularidad de (2.21). Entonces podemos ver con mayor claridad la necesidad de haber introducido el valor principal de Cauchy.

**Observación 2.5.** *La expresión dada en Proposición 2.4 (página 69) corresponde al laplaciano fraccionario escrito como integral singular a través del valor principal de Cauchy. Sin embargo, para  $0 < s < 1$  no es necesario usar el valor principal.*

En efecto, si usamos la expansión en serie de Taylor de primer orden de  $\varphi$  en una vecindad de  $x - y$  y para  $M > 0$  suficientemente pequeño tenemos:

$$\begin{aligned}
&C_{n,s} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x-y|>\varepsilon} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{|x-y|^{n+s}} dy \\
&= C_{n,s} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{\varepsilon < |x-y| < M} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{|x-y|^{n+s}} dy + \int_{|x-y| \geq M} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{|x-y|^{n+s}} dy \right] \\
&\leq C_{n,s} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{\varepsilon < |x-y| < M} \frac{|\nabla\varphi(x)| |x-y|}{|x-y|^{n+s}} dy + \int_{|x-y| \geq M} \frac{2 \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}}{|x-y|^{n+s}} dy \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C_{n,s} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{\varepsilon < |x-y| < M} \|\nabla\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} |x-y|^{1-n-s} dy + \int_{|x-y| \geq M} \frac{2\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}}{|x-y|^{n+s}} dy \right] \\
&\leq C_{n,s} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \|\nabla\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_\varepsilon^M \rho^{-s} d\rho + 2\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_M^{+\infty} \frac{\rho^{n-1}}{\rho^{n+s}} d\rho \right] < +\infty,
\end{aligned}$$

siempre que  $0 < s < 1$ .

## Espacios de Sobolev fraccionarios

En el Capítulo 4 vamos a construir soluciones para la ecuación del calor fraccionaria, por lo que ahora es necesario hacer un breve estudio del marco funcional sobre el cual realizaremos dicha construcción: los espacios de Sobolev.

La razón de considerar los espacios de Sobolev es precisamente porque como veremos al desarrollar este capítulo, estos nos permiten estudiar la regularidad de las distribuciones temperadas a través del tamaño de sus derivadas medido en la norma de los espacios de Lebesgue  $L^p(\mathbb{R}^n)$  con  $1 \leq p \leq +\infty$ . En nuestro caso usaremos únicamente el espacio de Lebesgue  $L^2(\mathbb{R}^n)$  pues como veremos en el próximo capítulo este espacio aparece de manera natural en nuestro estudio.

Si bien los espacios de Sobolev son una herramienta importantísima dentro de las ecuaciones en derivadas parciales, nuestro interés en este momento es hacer una breve introducción de estos espacios donde solo nos ocuparemos en revisar las propiedades que usaremos en el Capítulo 4 para construir soluciones de la ecuación del calor fraccionaria, siempre tomando en cuenta que estamos trabajando sobre todo  $\mathbb{R}^n$ . Para un estudio más completo sobre estos espacios se recomienda al lector revisar los libros: Adams (1975), Bahouri et al. (2011), Grafakos (2008) y Haroske y Triebel (2008).

### 1. Espacios de Sobolev no homogéneos

Empecemos estudiando los espacios de Sobolev no homogéneos con orden de regularidad entera de manera que entendiendo sus propiedades podamos extender esta noción a un orden de regularidad real, lo cual nos permitirá definir los espacios de Sobolev no

homogéneos fraccionarios. Más adelante, en la Sección 3 de este capítulo se justificará por qué estos espacios son llamados *no homogéneos*. Así, presentamos la siguiente definición:

**Definición 3.1** (Espacios de Sobolev no homogéneos de orden entero positivo). *Sea  $k \in \mathbb{N}$ . Definimos el espacio de Sobolev no homogéneo de orden  $k$ , que notaremos por  $H^k(\mathbb{R}^n)$ , como:*

$$H^k(\mathbb{R}^n) = \{g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \|g\|_{H^k} < +\infty\},$$

donde

$$\|g\|_{H^k} = \|g\|_{L^2} + \sum_{0 < |\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha g\|_{L^2}, \quad (3.1)$$

con  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  un multi-índice.

Notemos que por definición  $H^k(\mathbb{R}^n)$  es el espacio formado por las distribuciones temperadas  $g$  que verifican  $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$  y  $\partial^\alpha g \in L^2(\mathbb{R}^n)$  para todo multi-índice  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  tal que  $0 < |\alpha| \leq k$ . De este modo, con la expresión  $\|g\|_{H^k}$  dada en la ecuación (3.1) estamos midiendo el tamaño de  $g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  y el de todas sus derivadas de orden menor o igual que  $k \in \mathbb{N}$  con la norma de  $L^2(\mathbb{R}^n)$ .

El espacio  $H^k(\mathbb{R}^n)$  es un espacio de Banach dotado con la norma  $\|\cdot\|_{H^k}$  dada como en la ecuación (3.1) (la demostración de este resultado puede ser revisada en el Teorema 3.3 de la página 56 de Haroske y Triebel (2008)). El parámetro  $k \in \mathbb{N}$  indica la regularidad de los elementos del espacio  $H^k(\mathbb{R}^n)$ . Así, vemos que si  $k = 0$ , se tiene que  $H^0(\mathbb{R}^n) = L^2(\mathbb{R}^n)$ .

Conviene recordar que el objetivo de esta sección es introducir rápidamente los espacios de Sobolev no homogéneos de regularidad fraccionaria, mientras que sus principales



propiedades, que también son verificadas por los espacios de Sobolev de regularidad entera, serán estudiadas con mayor detalle en la Sección 2. Por esta razón empezaremos caracterizando los espacios de Sobolev usando una cantidad equivalente a la norma  $\|\cdot\|_{H^k}$  definida en (3.1). Antes de continuar es necesario introducir la siguiente notación:

*Diremos que  $a, b \in \mathbb{R}$  son equivalentes, lo cual notaremos por  $a \approx b$ , si existen dos constantes  $c_1, c_2 > 0$ , independientes de  $a$  y  $b$ , tales que verifican:  $c_1 a \leq b \leq c_2 a$ .*

La proposición que enunciaremos ahora, establece dos cantidades equivalentes a la norma  $\|\cdot\|_{H^k}$  las cuales son formuladas a través de la transformada de Fourier.

**Proposición 3.1.** *Sea  $k \in \mathbb{N}$ . Para todo  $g \in H^k(\mathbb{R}^n)$  se tiene que*

$$\|g\|_{H^k} \approx \left( \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^k |\widehat{g}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \approx \|\widehat{g}\|_{L^2} + \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2k} |\widehat{g}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}. \quad (3.2)$$

DEMOSTRACIÓN. Sea  $g \in H^k(\mathbb{R}^n)$ . Por la ecuación (3.1) se sigue que

$$\|g\|_{H^k}^2 = \left( \|g\|_{L^2} + \sum_{0 < |\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha g\|_{L^2} \right)^2 \leq c_k \left( \|g\|_{L^2}^2 + \sum_{0 < |\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha g\|_{L^2}^2 \right). \quad (3.3)$$

Por otro lado, por la identidad de Plancherel (página 30) y el numeral 5. de la Proposición 1.13 (página 45) tenemos:

$$\begin{aligned} \|g\|_{L^2}^2 + \sum_{0 < |\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha g\|_{L^2}^2 &= \|\widehat{g}\|_{L^2}^2 + \sum_{0 < |\alpha| \leq k} \|\widehat{\partial^\alpha g}\|_{L^2}^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{g}(\xi)|^2 d\xi + \sum_{0 < |\alpha| \leq k} \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\partial^\alpha g}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{g}(\xi)|^2 d\xi + \sum_{0 < |\alpha| \leq k} \int_{\mathbb{R}^n} |(2\pi\xi)^\alpha \widehat{g}(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq C_{n,\alpha} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{g}(\xi)|^2 d\xi + \sum_{0 < |\alpha| \leq k} \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2|\alpha|} |\widehat{g}(\xi)|^2 d\xi \right) \\ &\leq C_{n,\alpha} \left[ \sum_{0 < |\alpha| \leq k} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{g}(\xi)|^2 d\xi + \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2|\alpha|} |\widehat{g}(\xi)|^2 d\xi \right) \right]. \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\|g\|_{L^2}^2 + \sum_{0 < |\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha g\|_{L^2}^2 &\leq C_{n,\alpha} \sum_{0 < |\alpha| \leq k} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^{2|\alpha|}) |\widehat{g}(\xi)|^2 d\xi \\
&\leq C_{n,\alpha} \sum_{0 < |\alpha| \leq k} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^{|\alpha|} |\widehat{g}(\xi)|^2 d\xi \\
&\leq C_{n,\alpha} \sum_{0 < |\alpha| \leq k} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^k |\widehat{g}(\xi)|^2 d\xi \\
&\leq C_{n,\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^k |\widehat{g}(\xi)|^2 d\xi.
\end{aligned}$$

Usando esta última estimación en la desigualdad (3.3) se tiene que

$$\|g\|_{H^k}^2 \leq C_{k,n,\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^k |\widehat{g}(\xi)|^2 d\xi. \quad (3.4)$$

Nuevamente, por la definición de la norma  $\|\cdot\|_{H^k}$  dada en la ecuación (3.1), la identidad de Plancherel (página 30) y el numeral 5. de la Proposición 1.13 (página 45) tenemos:

$$\begin{aligned}
\|g\|_{H^k}^2 &= \left( \|g\|_{L^2} + \sum_{0 < |\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha g\|_{L^2} \right)^2 \\
&\geq \|g\|_{L^2}^2 + \sum_{0 < |\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha g\|_{L^2}^2 \\
&= \|\widehat{g}\|_{L^2}^2 + \sum_{0 < |\alpha| \leq k} \|\widehat{\partial^\alpha g}\|_{L^2}^2 \\
&\geq \|\widehat{g}\|_{L^2}^2 + \sum_{|\alpha|=k} \|\widehat{\partial^\alpha g}\|_{L^2}^2 \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{g}(\xi)|^2 d\xi + \sum_{|\alpha|=k} \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\partial^\alpha g}(\xi)|^2 d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{g}(\xi)|^2 d\xi + \sum_{|\alpha|=k} \int_{\mathbb{R}^n} |(2\pi\xi)^\alpha \widehat{g}(\xi)|^2 d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{g}(\xi)|^2 d\xi + \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha|=k} |(2\pi\xi)^\alpha|^2 |\widehat{g}(\xi)|^2 d\xi.
\end{aligned}$$

Además de la relación dada en (0.1) de la página 5, se sigue que

$$\|g\|_{H^k}^2 \geq C_{n,\alpha} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{g}(\xi)|^2 d\xi + \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2k} |\widehat{g}(\xi)|^2 d\xi \right),$$

con lo cual

$$\|g\|_{H^k}^2 \geq C_{n,\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^{2k}) |\widehat{g}(\xi)|^2 d\xi, \quad (3.5)$$

y gracias a la estimación puntual:  $(1 + |\xi|^{2k}) \geq C_k (1 + |\xi|^2)^k$ , (ver el Lema 4.2.1 de la página 218 de Chamorro (2018)), se tiene que

$$\|g\|_{H^k}^2 \geq C_{k,n,\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^k |\widehat{g}(\xi)|^2 d\xi. \quad (3.6)$$

En conclusión, por las ecuaciones (3.4) y (3.6) obtenemos:

$$\|g\|_{H^k} \approx \left( \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^k |\widehat{g}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}.$$

Por otro lado, de la ecuación (3.4) y nuevamente por la estimación puntual  $(1 + |\xi|^{2k}) \geq C_k (1 + |\xi|^2)^k$ , tenemos:

$$\|g\|_{H^k}^2 \leq C_{n,\alpha,k} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^k |\widehat{g}(\xi)|^2 d\xi \leq C_{n,\alpha,k} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^{2k}) |\widehat{g}(\xi)|^2 d\xi. \quad (3.7)$$

Así, las estimaciones dadas en (3.5) y (3.7) muestran que

$$\|g\|_{H^k} \approx \|\widehat{g}\|_{L^2} + \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2k} |\widehat{g}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2},$$

como se quería. □

De manera más precisa, la primera equivalencia:

$$\|g\|_{H^k} \approx \left( \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^k |\widehat{g}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2},$$

nos permite estudiar la regularidad de  $g \in H^k(\mathbb{R}^n)$  a través del decrecimiento al infinito de su transformada de Fourier  $\widehat{g} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ , puesto que  $g \in H^k(\mathbb{R}^n)$  es equivalente a decir

que  $(1 + |\cdot|^2)^{k/2} \widehat{g} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ , pero para asegurar esta última condición es necesario que  $\widehat{g}$  decaiga en el infinito más rápido que la función  $\xi \mapsto (1 + |\xi|^2)^{-k/2}$ .

La segunda equivalencia:

$$\|g\|_{H^k} \approx \|\widehat{g}\|_{L^2} + \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2k} |\widehat{g}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2},$$

puede relacionarse directamente con el operador laplaciano fraccionario de la siguiente manera: recordemos que en particular para  $k$  un entero positivo se tiene:

$$\left[ (-\Delta)^{k/2} \varphi \right]^\wedge(\xi) = (2\pi)^k |\xi|^k \widehat{\varphi}(\xi), \quad \text{para todo } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Así,

$$\|g\|_{H^k} \approx \|\widehat{g}\|_{L^2} + \left( \int_{\mathbb{R}^n} \left| \left[ (-\Delta)^{k/2} g \right]^\wedge(\xi) \right|^2 d\xi \right)^{1/2} \approx \|\widehat{g}\|_{L^2} + \left\| \left[ (-\Delta)^{k/2} g \right]^\wedge \right\|_{L^2}.$$

Finalmente, por la identidad de Plancherel (página 30) se sigue que

$$\|g\|_{H^k} \approx \|g\|_{L^2} + \left\| (-\Delta)^{k/2} g \right\|_{L^2}. \quad (3.8)$$

Esta última equivalencia nos dice que  $g \in H^k(\mathbb{R}^n)$  si y solo si  $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$  y  $(-\Delta)^{k/2} g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ . Dicho de otro modo, para verificar que  $g \in H^k(\mathbb{R}^n)$  se debe controlar (con respecto a la norma del espacio  $L^2(\mathbb{R}^n)$ ) el tamaño de la distribución temperada  $g$  y el de  $(-\Delta)^{k/2} g$ . La equivalencia dada en (3.8) nos ayuda a extender la definición de espacio de Sobolev no homogéneo a cualquier índice de regularidad real no negativo como sigue:

**Definición 3.2** (Espacios de Sobolev no homogéneos fraccionarios de orden no negativo). *Sea  $\sigma \geq 0$ . Definimos el espacio de Sobolev no homogéneo fraccionario de orden  $\sigma$ , que notaremos por  $H^\sigma(\mathbb{R}^n)$ , como:*

$$H^\sigma(\mathbb{R}^n) = \{g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \|g\|_{H^\sigma} < +\infty\},$$

donde

$$\|g\|_{H^\sigma} = \|g\|_{L^2} + \left\| (-\Delta)^{\sigma/2} g \right\|_{L^2}. \quad (3.9)$$

Es importante notar que para la norma  $\|\cdot\|_{H^\sigma}$ , con  $\sigma \geq 0$ , dada en la expresión (3.9) se puede obtener una equivalencia análoga a la dada en la Proposición 3.1 (página 74), resultado que enunciamos a continuación:

**Proposición 3.2.** *Para todo  $\sigma \geq 0$  y para todo  $g \in H^\sigma(\mathbb{R}^n)$  tenemos*

$$\|g\|_{H^\sigma} \approx \left( \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^\sigma |\widehat{g}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}. \quad (3.10)$$

La demostración de esta proposición es análoga a la de Proposición 3.1 (página 74) por lo que no la incluiremos.

Por otro lado, notemos que la anterior equivalencia nos permite extender la definición del espacio de Sobolev no homogéneo fraccionario no negativo a un orden de regularidad  $\sigma \in \mathbb{R}$  negativo, como sigue:

**Definición 3.3** (Espacios de Sobolev no homogéneos fraccionarios de orden negativo). *Sea  $\sigma < 0$ . Definimos el espacio de Sobolev no homogéneo fraccionario de orden  $\sigma$ , que notaremos por  $H^\sigma(\mathbb{R}^n)$ , como:*

$$H^\sigma(\mathbb{R}^n) = \{g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \|g\|_{H^\sigma} < +\infty\},$$

donde

$$\|g\|_{H^\sigma} = \left( \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^\sigma |\widehat{g}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}. \quad (3.11)$$

Observemos que para  $\sigma < 0$  debemos definir la norma  $\|\cdot\|_{H^\sigma}$  como en (3.11), pues la expresión dada en la ecuación (3.9) no necesariamente está bien definida para todo

$g \in H^\sigma(\mathbb{R}^n)$ , con  $\sigma < 0$ , ya que estos espacios (de regularidad negativa) contienen distribuciones temperadas que no necesariamente pertenecen al espacio  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . Para ilustrar esto, estudiemos el siguiente ejemplo:

**EJEMPLO 3.1.** *La masa de Dirac en el origen  $\delta_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  pertenece a los espacios  $H^\sigma(\mathbb{R}^n)$  con  $\sigma < -\frac{n}{2}$ .*

En efecto, sea  $\sigma < -n/2$ . Como  $\widehat{\delta}_0 = 1$  en el sentido de las distribuciones temperadas, podemos escribir:

$$\begin{aligned} \|\delta_0\|_{H^\sigma}^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^\sigma |\widehat{\delta}_0|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^\sigma d\xi \\ &= \int_{|\xi| < 1} (1 + |\xi|^2)^\sigma d\xi + \int_{|\xi| \geq 1} (1 + |\xi|^2)^\sigma d\xi. \end{aligned}$$

Luego, cambiando a coordenadas radiales las dos integrales del lado derecho de la identidad anterior y usando para  $\rho > 1$  la estimación  $(1 + \rho^2)^\sigma \leq \rho^{2\sigma}$ , obtenemos

$$\|\delta_0\|_{H^\sigma}^2 = \int_0^1 (1 + \rho^2)^\sigma \rho^{n-1} d\rho + \int_1^{+\infty} (1 + \rho^2)^\sigma \rho^{n-1} d\rho \leq c \left( \int_0^1 d\rho + \int_1^{+\infty} \rho^{2\sigma+n-1} d\rho \right),$$

con  $c > 0$ . Finalmente, notemos que

$$\int_0^1 d\rho = 1 \quad y \quad \int_1^{+\infty} \rho^{2\sigma+n-1} d\rho = \frac{\rho^{2\sigma+n}}{2\sigma+n} \Big|_1^{+\infty} < +\infty,$$

siempre que  $\sigma < -\frac{n}{2}$ . Lo que muestra que, en efecto,  $\delta_0$  pertenece a los espacios  $H^\sigma(\mathbb{R}^n)$  con  $\sigma < -\frac{n}{2}$ .

## 2. Algunas propiedades de los espacios de Sobolev no homogéneos.

Una vez definidos los espacios de Sobolev no homogéneos  $H^\sigma(\mathbb{R}^n)$  para todo  $\sigma \in \mathbb{R}$ , ahora nos encargaremos en revisar algunas de las propiedades más importantes de estos espacios que serán usadas en nuestro estudio posterior, específicamente en el Capítulo 4.

Empecemos viendo cómo se relacionan los espacios de Sobolev no homogéneos entre sí.

**Proposición 3.3** (Relación de inclusión). *Sean  $\sigma_1 < 0 < \sigma_2$  números reales, entonces se tienen las inclusiones estrictas y continuas:*

$$H^{\sigma_2}(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n) \subset H^{\sigma_1}(\mathbb{R}^n).$$

DEMOSTRACIÓN. Para  $g \in H^{\sigma_2}(\mathbb{R}^n)$

$$\|g\|_{L^2} \leq \|g\|_{L^2} + \left\| (-\Delta)^{\sigma_2/2} g \right\|_{L^2} = \|g\|_{H^{\sigma_2}},$$

con lo cual  $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ . Además, hay que notar que esta inclusión es estricta pues existen funciones en  $L^2(\mathbb{R}^n)$  que no pertenecen a  $H^{\sigma_2}(\mathbb{R}^n)$ . Por ejemplo, la función indicatriz definida sobre la bola unitaria abierta de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{1}_{B_1} \in L^2(\mathbb{R}^n)$  pero  $\mathbf{1}_{B_1} \notin H^{\sigma_2}(\mathbb{R}^n)$  para todo  $\sigma_2 \geq n/2$  (ver la página 62 de Haroske y Triebel (2008)).

Por otro lado, para  $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ , de la estimación puntual  $(1 + |\xi|^2)^{\sigma_1} \leq 1$  (con  $\sigma_1 < 0$ ) y la identidad de Plancherel (página 30) obtenemos:

$$\|g\|_{H^{\sigma_1}} = \left( \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^{\sigma_1} |\widehat{g}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \leq \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{g}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} = \|g\|_{L^2},$$

lo que significa que  $g \in H^{\sigma_1}(\mathbb{R}^n)$ . Al igual que antes la inclusión es estricta pues como vimos en el Ejemplo 3.1 (página 79), la masa de Dirac en el origen  $\delta_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  pertenece a los espacios  $H^\sigma(\mathbb{R}^n)$  con  $\sigma < -\frac{n}{2}$  pero  $\delta_0 \notin L^2(\mathbb{R}^n)$ . □

**Observación 3.1.** *Notemos que si  $\sigma > 0$  entonces los elementos de  $H^\sigma(\mathbb{R}^n)$  son funciones pues  $H^\sigma(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ , mientras que si  $\sigma < 0$  los elementos del espacio  $H^\sigma(\mathbb{R}^n)$  no necesariamente son funciones sino, en general, son distribuciones temperadas.*

**Observación 3.2.** *Las inclusiones dadas en la Proposición 3.3 (página 80) son continuas y no compactas, pues trabajamos sobre todo el espacio  $\mathbb{R}^n$ .*

Por otro lado, con respecto a la estructura de los espacios de Sobolev no homogéneos fraccionarios se tiene el siguiente resultado:

**Proposición 3.4.** *Para  $\sigma \in \mathbb{R}$ , los espacios  $H^\sigma(\mathbb{R}^n)$  son espacios de Hilbert con el producto escalar:*

$$(g, h)_{H^\sigma(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^\sigma \widehat{g}(\xi) \overline{\widehat{h}(\xi)} d\xi, \quad (3.12)$$

el cual induce una norma equivalente a la norma  $\|\cdot\|_{H^\sigma}$ .

DEMOSTRACIÓN. Consideremos la aplicación:

$$\begin{aligned} T: H^\sigma(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n) \\ g &\longmapsto Tg = (1 + |\cdot|^2)^{\sigma/2} \widehat{g}. \end{aligned}$$

Para empezar, notemos que  $T$  está bien definida pues  $g \in H^\sigma(\mathbb{R}^n)$ . Ahora, mostremos que  $T$  define una isometría entre  $H^\sigma(\mathbb{R}^n)$  y  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . En efecto, sea  $g \in H^\sigma(\mathbb{R}^n)$ , entonces

$$\|Tg\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |Tg(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^\sigma |\widehat{g}(\xi)|^2 d\xi = \|g\|_{H^\sigma}^2.$$

Luego, mostremos que  $T$  es sobreyectiva. Así, sea  $h \in L^2(\mathbb{R}^n)$ . Definimos

$$g = \left[ (1 + |\cdot|^2)^{-\sigma/2} h \right]^\sim,$$

donde  $g \in H^\sigma(\mathbb{R}^n)$  pues

$$\|g\|_{H^\sigma}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^\sigma \left| \left[ (1 + |\cdot|^2)^{-\sigma/2} h \right]^\sim(\xi) \right|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} |h(\xi)|^2 d\xi,$$

y además se tiene que

$$\begin{aligned} Tg(\xi) &= (1 + |\xi|^2)^{\sigma/2} \widehat{g}(\xi) \\ &= (1 + |\xi|^2)^{\sigma/2} \left\{ \left[ (1 + |\cdot|^2)^{-\sigma/2} h \right]^\sim \right\}^\wedge(\xi) \\ &= (1 + |\xi|^2)^{\sigma/2} (1 + |\xi|^2)^{-\sigma/2} h(\xi) \\ &= h(\xi), \end{aligned}$$



para todo  $\xi \in \mathbb{R}^n$ . Por lo tanto,  $T$  es un isomorfismo isométrico entre  $H^\sigma(\mathbb{R}^n)$  y  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , lo que nos permite concluir que  $H^\sigma(\mathbb{R}^n)$ , con  $\sigma \in \mathbb{R}$ , es un espacio de Hilbert con el producto escalar  $(g, h)_{H^\sigma(\mathbb{R}^n)}$  dado como en (3.12).  $\square$

Continuando con las propiedades de los espacios de Sobolev no homogéneos, revisemos la siguiente proposición:

**Proposición 3.5** (Proposición 1.57, Bahouri et al. (2011)). *Para  $\sigma \in \mathbb{R}$ , la clase de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  es densa en los espacios  $H^\sigma(\mathbb{R}^n)$ .*

DEMOSTRACIÓN. Sea  $g \in H^\sigma(\mathbb{R}^n)$  entonces la función

$$\begin{aligned} h: \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \xi &\longmapsto (1 + |\xi|^2)^{\sigma/2} \widehat{g}(\xi), \end{aligned} \tag{3.13}$$

es un elemento de  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . Así, puesto que la clase de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  es densa en el espacio  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , entonces existe  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de elementos de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  tal que  $h_n \rightarrow h$  en  $L^2(\mathbb{R}^n)$ .

Además, para todo  $n \in \mathbb{N}$ , las funciones

$$\begin{aligned} g_n: \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \xi &\longmapsto \left[ \frac{h_n(\xi)}{(1 + |\xi|^2)^{\sigma/2}} \right] \checkmark, \end{aligned} \tag{3.14}$$

pertenecen a  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  pues  $h_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Además, el término  $\frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\sigma/2}}$  decrece aproximadamente como un polinomio y es una función  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

Luego, gracias a que  $h_n \rightarrow h$  en  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , tenemos:

$$\begin{aligned} \|g - g_n\|_{H^\sigma} &= \left( \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^\sigma |\widehat{g}(\xi) - \widehat{g}_n(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \\ &= \left( \int_{\mathbb{R}^n} \left| (1 + |\xi|^2)^{\sigma/2} \widehat{g}(\xi) - h_n(\xi) \right|^2 d\xi \right)^{1/2} \end{aligned}$$

$$= \left( \int_{\mathbb{R}^n} |h(\xi) - h_n(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \rightarrow 0,$$

cuando  $n \rightarrow +\infty$ . □

Este último resultado será fundamental para poder determinar el espacio dual topológico de los espacios  $H^\sigma(\mathbb{R}^n)$ , con  $\sigma$  un número real positivo, como veremos a continuación.

**Proposición 3.6.** *Sea  $\sigma \geq 0$ , el espacio  $H^{-\sigma}(\mathbb{R}^n)$  es el espacio dual topológico de  $H^\sigma(\mathbb{R}^n)$ .*

La demostración de esta proposición puede ser revisada con todo detalle en la Proposición 1.58 de la página 40 de Bahouri et al. (2011).

### 3. Espacios de Sobolev homogéneos

Recordemos que cuando  $\sigma \geq 0$  la norma de los espacios de Sobolev  $H^\sigma(\mathbb{R}^n)$  está dada por:

$$\|g\|_{H^\sigma} = \|g\|_{L^2} + \left\| (-\Delta)^{\sigma/2} g \right\|_{L^2},$$

para todo  $g \in H^\sigma(\mathbb{R}^n)$ . Sin embargo, en el Capítulo 4, donde estudiaremos la ecuación del calor fraccionaria, veremos que en ciertas ocasiones es necesario controlar únicamente la cantidad  $\left\| (-\Delta)^{\sigma/2} g \right\|_{L^2}$ . Esto motiva a enunciar la siguiente definición.

**Definición 3.4** (Espacios de Sobolev homogéneos fraccionario). *Sea  $\sigma \in \mathbb{R}$ . Definimos el espacio de Sobolev homogéneo fraccionario de orden  $\sigma$ , que notaremos por  $\dot{H}^\sigma(\mathbb{R}^n)$ , como:*

$$\dot{H}^\sigma(\mathbb{R}^n) = \left\{ g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \hat{g} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \quad y \quad \|g\|_{\dot{H}^\sigma} < +\infty \right\},$$

donde

$$\|g\|_{\dot{H}^\sigma} = \left\| (-\Delta)^{\sigma/2} g \right\|_{L^2}. \quad (3.15)$$

En particular, si  $\sigma = k \in \mathbb{N}$  entonces los espacios  $\dot{H}^k(\mathbb{R}^n)$  son llamados espacios de Sobolev homogéneos de orden entero positivo  $k$ , para los cuales, siguiendo líneas similares a las hechas para la deducción de la estimación (3.8) de la página 77, se puede verificar que

$$\left\| (-\Delta)^{\sigma/2} g \right\|_{L^2} \approx \sum_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha g\|_{L^2}. \quad (3.16)$$

**Observación 3.3.** Para cualquier  $\sigma \in \mathbb{R}$ , el espacio  $\dot{H}^\sigma(\mathbb{R}^n)$  es un espacio normado.

La condición  $\hat{g} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$  excluye a todos los polinomios (vistos como distribuciones temperadas) de los espacios de Sobolev homogéneos. En efecto, consideremos el polinomio de orden  $k \in \mathbb{N}$ :  $P(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} x^\alpha$ , donde  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  es un multi-índice y  $x \in \mathbb{R}^n$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \langle \hat{P}, \varphi \rangle &= \langle P, \hat{\varphi} \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha| \leq k} \xi^\alpha \hat{\varphi}(\xi) d\xi \\ &= \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(2\pi i)^{|\alpha|}} (\partial^\alpha \varphi)^\wedge(\xi) d\xi \\ &= \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{1}{(2\pi i)^{|\alpha|}} [(\partial^\alpha \varphi)^\wedge]^\vee(0) \\ &= \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{1}{(2\pi i)^{|\alpha|}} (\partial^\alpha \varphi)(0), \end{aligned}$$

y usando el Ejemplo 1.5 (página 39) se sigue que

$$\langle \hat{P}, \varphi \rangle = \left\langle \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{1}{(-2\pi i)^{|\alpha|}} \partial^\alpha \delta_0, \varphi \right\rangle.$$

Por lo tanto,

$$\hat{P} = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{1}{(-2\pi i)^{|\alpha|}} \partial^\alpha \delta_0, \quad \text{en } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n),$$

de donde vemos que  $\hat{P} \notin L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ .

De este modo, por la equivalencia dada en (3.16) podemos concluir que, en efecto,  $\|\cdot\|_{\dot{H}^\sigma}$  es una norma (ver la Proposición 1.34 de la página 26 de Bahouri et al. (2011)).

A continuación, introduciremos la noción de homogeneidad de un espacio funcional, la cual nos permitirá justificar más adelante, en la Proposición 3.7 (página 86), por qué los espacios de Sobolev  $\dot{H}^\sigma(\mathbb{R}^n)$  con  $\sigma \in \mathbb{R}$  son llamados homogéneos.

**Definición 3.5** (Homogeneidad). *Sea  $E$  un espacio normado definido como:*

$$E = \{g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \|g\|_E < +\infty\}.$$

*Si para todo  $g \in E$  se verifica*

$$\|g_\lambda\|_E = \lambda^\sigma \|g\|_E,$$

*con  $\lambda > 0$ ,  $\sigma \in \mathbb{R}$  y  $g_\lambda$  representa la dilatación de  $g$ , entonces decimos que  $E$  es un espacio homogéneo de orden  $\sigma$ .*

Para ilustrar la Definición 3.5 revisemos el siguiente ejemplo:

**EJEMPLO 3.2.** *Los espacios de Lebesgue  $L^p(\mathbb{R}^n)$ , con  $1 \leq p \leq +\infty$ , son espacios homogéneos de orden  $-n/p$ .*

En efecto, sean  $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$  con  $1 \leq p < +\infty$  y  $\lambda > 0$ . Entonces, haciendo el cambio de variable  $y = \lambda x$  para  $x \in \mathbb{R}^n$  obtenemos

$$\|g_\lambda\|_{L^p} = \left( \int_{\mathbb{R}^n} |g(\lambda x)|^p dx \right)^{1/p} = \left( \lambda^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|^p dy \right)^{1/p} = \lambda^{-n/p} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|^p dy \right)^{1/p},$$

de donde

$$\|g_\lambda\|_{L^p} = \lambda^{-n/p} \|g\|_{L^p}. \quad (3.17)$$

Finalmente, sean  $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  y  $\lambda > 0$ . Nuevamente, tomando  $y = \lambda x$ , se tiene que

$$\|g_\lambda\|_{L^\infty} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \operatorname{ess} |g(\lambda x)| = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \operatorname{ess} |g(y)| = \|g\|_{L^\infty}.$$

La noción de homogeneidad dada en la Definición 3.5 (página 85) nos permite clasificar los espacios de Sobolev en homogéneos y no homogéneos. Por lo tanto, empezaremos verificando el hecho de que los espacios  $\dot{H}^\sigma(\mathbb{R}^n)$  con  $\sigma \in \mathbb{R}$  son espacios homogéneos.

**Proposición 3.7.** *Los espacios  $\dot{H}^\sigma(\mathbb{R}^n)$  son espacios homogéneos de orden  $\sigma - n/2$ .*

DEMOSTRACIÓN. Gracias a la ecuación (2.3) de la página 57, sabemos que el operador laplaciano fraccionario es un operador homogéneo de grado  $\sigma$ , que junto a la relación dada en la ecuación (3.17), para  $p = 2$ , nos permiten deducir lo siguiente:

$$\left\| (-\Delta)^{\sigma/2} g_\lambda \right\|_{L^2} = \left\| \lambda^\sigma \left( (-\Delta)^{\sigma/2} g \right)_\lambda \right\|_{L^2} = \lambda^\sigma \left\| \left( (-\Delta)^{\sigma/2} g \right)_\lambda \right\|_{L^2} = \lambda^{\sigma-n/2} \left\| (-\Delta)^{\sigma/2} g \right\|_{L^2}, \quad (3.18)$$

de donde se concluye el resultado.  $\square$

**Observación 3.4.** *Los espacios  $H^\sigma(\mathbb{R}^n)$  con  $\sigma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  no verifican la noción de homogeneidad dada en la Definición 3.5 (página 85).*

En efecto, sean  $g \in H^\sigma(\mathbb{R}^n)$  y  $\lambda > 0$ . Si  $\sigma > 0$  sabemos que

$$\|g_\lambda\|_{H^\sigma} = \|g_\lambda\|_{L^2} + \left\| (-\Delta)^{\sigma/2} g_\lambda \right\|_{L^2}.$$

De este modo, usando las ecuaciones (3.17) y (3.18), tenemos:

$$\|g_\lambda\|_{H^\sigma} = \lambda^{-n/2} \|g\|_{L^2} + \lambda^{\sigma-n/2} \left\| (-\Delta)^{\sigma/2} g \right\|_{L^2}, \quad (3.19)$$

de donde se ve que los espacios de  $H^\sigma(\mathbb{R}^n)$  con  $\sigma > 0$  no verifican la Definición 3.5 (página 85), pues los dos términos que aparecen en el lado derecho de la ecuación (3.19) tienen distintos grados de homogeneidad.

Ahora, si  $s < 0$ . Tomando  $\eta = \xi/\lambda$ , con  $\xi \in \mathbb{R}^n$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \|g_\lambda\|_{H^\sigma} &= \left( \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^\sigma |\widehat{g}_\lambda(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \\ &= \left( \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^\sigma |\lambda^{-n} \widehat{g}(\xi/\lambda)|^2 d\xi \right)^{1/2} \\ &= \left( \int_{\mathbb{R}^n} (1 + \lambda^2 |\eta|^2)^\sigma |\lambda^{-n} \widehat{g}(\eta)|^2 \lambda^n d\eta \right)^{1/2} \\ &= \lambda^{-n/2} \left( \int_{\mathbb{R}^n} (1 + \lambda^2 |\eta|^2)^\sigma |\widehat{g}(\eta)|^2 d\eta \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Sin embargo, vemos que no es posible extraer el coeficiente  $\lambda^2$  de la expresión  $(1 + \lambda^2 |\eta|^2)^\sigma$ . En consecuencia, los espacios  $H^\sigma(\mathbb{R}^n)$ , con  $\sigma < 0$ , tampoco verifican la Definición 3.5 (página 85).

#### 4. Algunas propiedades de los espacios de Sobolev homogéneos

Ahora es momento de revisar las propiedades de los espacios de Sobolev homogéneos más útiles para nuestro estudio de las soluciones de la ecuación del calor fraccionaria.

En lo posible, a lo largo de esta sección, también trataremos de hacer un estudio comparativo con los espacios de Sobolev no homogéneos. Partamos revisando cuál es la relación entre los espacios de Sobolev homogéneos y no homogéneos.

**Proposición 3.8.** *Sea  $\sigma \in \mathbb{R}$ .*

1. Si  $\sigma \geq 0$ , entonces el espacio  $H^\sigma(\mathbb{R}^n)$  está estrictamente contenido en el espacio  $\dot{H}^\sigma(\mathbb{R}^n)$ .

2. Si  $\sigma < 0$ , entonces el espacio  $\dot{H}^\sigma(\mathbb{R}^n)$  está estrictamente contenido en el espacio  $H^\sigma(\mathbb{R}^n)$ .

DEMOSTRACIÓN.

1. Sean  $\sigma \geq 0$  y  $g \in H^\sigma(\mathbb{R}^n)$ . Se tiene que

$$\|g\|_{\dot{H}^\sigma} = \left\| (-\Delta)^{\sigma/2} g \right\|_{L^2} \leq \|g\|_{L^2} + \left\| (-\Delta)^{\sigma/2} g \right\|_{L^2} = \|g\|_{H^\sigma},$$

con lo cual,  $g \in \dot{H}^\sigma(\mathbb{R}^n)$ .

Resta mostrar que la contención  $H^\sigma(\mathbb{R}^n) \subset \dot{H}^\sigma(\mathbb{R}^n)$  es estricta. Para esto consideremos  $g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  tal que

$$\hat{g}(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{si } |\xi| \geq 1 \\ |\xi|^{|\alpha|} & \text{si } |\xi| < 1, \end{cases}$$

con  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  un multi-índice tal que  $-\left(\sigma + \frac{n}{2}\right) < |\alpha| < -\frac{n}{2}$ .

Veamos que  $g \in \dot{H}^\sigma(\mathbb{R}^n)$ . Para ello estudiemos la cantidad

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2\sigma} |\hat{g}(\xi)|^2 d\xi = \int_{|\xi| < 1} |\xi|^{2\sigma} |\xi|^{2|\alpha|} d\xi. \quad (3.20)$$

Ahora, si hacemos un cambio de variable a coordenadas radiales en el lado derecho de la ecuación (3.20), obtenemos:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2\sigma} |\hat{g}(\xi)|^2 d\xi = \int_0^1 \rho^{2\sigma+2|\alpha|+n-1} d\rho = \frac{\rho^{2\sigma+2|\alpha|+n}}{2\sigma+2|\alpha|+n} \Big|_0^1 < +\infty,$$

ya que  $|\alpha| > -\left(\sigma + \frac{n}{2}\right)$ . Sin embargo, veamos que  $g \notin H^\sigma(\mathbb{R}^n)$ . En efecto, estudiemos la cantidad:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{g}(\xi)|^2 d\xi = \int_{|\xi| < 1} |\xi|^{2|\alpha|} d\xi. \quad (3.21)$$

Nuevamente, haciendo un cambio de variable a coordenadas radiales en el lado derecho de la ecuación (3.21) se tiene

$$\int_{|\xi|<1} |\xi|^{2|\alpha|} d\xi = \int_0^1 \rho^{2|\alpha|+n-1} d\rho = \frac{\rho^{2|\alpha|+n}}{2|\alpha|+n} \Big|_0^1 = +\infty,$$

pues  $|\alpha| < -\frac{n}{2}$ . En consecuencia, el espacio  $H^\sigma(\mathbb{R}^n)$  está estrictamente contenido en el espacio  $\dot{H}^\sigma(\mathbb{R}^n)$  para todo  $\sigma \geq 0$ .

2. Por otro lado, sean  $\sigma < 0$  y  $g \in \dot{H}^\sigma(\mathbb{R}^n)$ . Se sigue que

$$\begin{aligned} \|g\|_{H^\sigma} &= \left( \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^\sigma |\widehat{g}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \\ &\leq \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2\sigma} |\widehat{g}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^\sigma} \left\| (-\Delta)^{\sigma/2} g \right\|_{L^2} \\ &\leq \frac{1}{(2\pi)^\sigma} \|g\|_{\dot{H}^\sigma}, \end{aligned}$$

lo que muestra que  $g \in H^\sigma(\mathbb{R}^n)$ .

Notemos que en este caso la contención es estricta porque si consideramos  $g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  tal que

$$\widehat{g}(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{si } |\xi| \geq 1 \\ |\xi|^{|\alpha|} & \text{si } |\xi| < 1, \end{cases}$$

donde ahora  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  es un multi-índice que verifica la relación  $-\frac{n}{2} < |\alpha| < -\left(\sigma + \frac{n}{2}\right)$ , vemos que  $g \notin \dot{H}^\sigma(\mathbb{R}^n)$ . En efecto,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2\sigma} |\widehat{g}(\xi)|^2 d\xi = \int_{|\xi|<1} |\xi|^{2\sigma} |\xi|^{2|\alpha|} d\xi. \quad (3.22)$$



Luego, haciendo un cambio de variable a coordenadas radiales en el lado derecho de la ecuación (3.22), obtenemos:

$$\int_{|\xi|<1} |\xi|^{2\sigma+2|\alpha|} d\xi = \int_0^1 \rho^{2\sigma+2|\alpha|+n-1} d\rho = \frac{\rho^{2\sigma+2|\alpha|+n}}{2\sigma+2|\alpha|+n} \Big|_0^1 = +\infty,$$

debido a que  $|\alpha| < -\left(\sigma + \frac{n}{2}\right)$ .

Por último, veamos que  $g \in H^\sigma(\mathbb{R}^n)$ . Notar que

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^\sigma |\widehat{g}(\xi)|^2 d\xi \leq \int_{|\xi|<1} |\xi|^{2|\alpha|} d\xi. \quad (3.23)$$

Nuevamente, haciendo un cambio de variable a coordenadas radiales en el lado derecho de la ecuación (3.23), se tiene que

$$\int_{|\xi|<1} |\xi|^{2|\alpha|} d\xi = \int_0^1 \rho^{2|\alpha|+n-1} d\rho = \frac{\rho^{2|\alpha|+n}}{2|\alpha|+n} \Big|_0^1 < +\infty,$$

pues  $|\alpha| > -\frac{n}{2}$ .

□

Recordemos que los espacios de Sobolev no homogéneos son comparables mediante la relación de inclusión dada en la Proposición 3.3 (página 80). Sin embargo, como veremos a continuación, no es posible comparar los espacios de Sobolev homogéneos entre sí.

**Observación 3.5.** *No existe relación de inclusión entre los espacios de Sobolev homogéneos fraccionarios.*

En efecto, sean  $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}$ . Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $\sigma_1 < \sigma_2$  y consideremos  $g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  tal que

$$\widehat{g}(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{si } |\xi| \leq 1 \\ |\xi|^{|\alpha|} & \text{si } |\xi| > 1, \end{cases}$$

con  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  un multi-índice tal que  $-\left(\sigma_2 + \frac{n}{2}\right) < |\alpha| < -\left(\sigma_1 + \frac{n}{2}\right)$ .

Veamos que  $g \in \dot{H}^{\sigma_1}(\mathbb{R}^n)$ . Para ello estudiemos la cantidad

$$\int_{|\xi|>1} |\xi|^{2\sigma_1+2|\alpha|} d\xi.$$

Ahora, haciendo un cambio de variable a coordenadas radiales en la integral anterior, tenemos:

$$\int_{|\xi|>1} |\xi|^{2\sigma_1+2|\alpha|} d\xi = \int_1^{+\infty} \rho^{2\sigma_1+2|\alpha|+n-1} d\rho = \frac{\rho^{2\sigma_1+2|\alpha|+n}}{2\sigma_1+2|\alpha|+n} \Big|_1^{+\infty} < +\infty,$$

pues  $|\alpha| < -\left(\sigma_1 + \frac{n}{2}\right)$ .

Así también, veamos que  $g \notin \dot{H}^{\sigma_2}(\mathbb{R}^n)$ . En efecto, estudiemos la cantidad:

$$\int_{|\xi|>1} |\xi|^{2\sigma_2+2|\alpha|} d\xi.$$

De manera similar, haciendo un cambio de variable a coordenadas radiales en la última integral, se sigue que

$$\int_{|\xi|>1} |\xi|^{2\sigma_2+2|\alpha|} d\xi = \int_1^{+\infty} \rho^{2\sigma_2+2|\alpha|+n-1} d\rho = \frac{\rho^{2\sigma_2+2|\alpha|+n}}{2\sigma_2+2|\alpha|+n} \Big|_1^{+\infty} = +\infty,$$

pues  $|\alpha| > -\left(\sigma_2 + \frac{n}{2}\right)$ .

Por otro lado, si ahora consideramos  $h \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  tal que

$$\hat{h}(\xi) = \begin{cases} |\xi|^{|\alpha|} & \text{si } |\xi| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |\xi| > 1, \end{cases} \quad (3.24)$$

con  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  un multi-índice tal que  $-\left(\sigma_2 + \frac{n}{2}\right) < |\alpha| < -\left(\sigma_1 + \frac{n}{2}\right)$ , y haciendo un estudio similar al anterior, se tiene que

$$\int_{|\xi|\leq 1} |\xi|^{2\sigma_1+2|\alpha|} d\xi = \int_0^1 \rho^{2\sigma_1+2|\alpha|+n-1} d\rho = \frac{\rho^{2\sigma_1+2|\alpha|+n}}{2\sigma_1+2|\alpha|+n} \Big|_0^1 = +\infty,$$

y

$$\int_{|\xi| \leq 1} |\xi|^{2\sigma_2 + 2|\alpha|} d\xi = \int_0^1 \rho^{2\sigma_2 + 2|\alpha| + n - 1} d\rho = \frac{\rho^{2\sigma_2 + 2|\alpha| + n}}{2\sigma_2 + 2|\alpha| + n} \Big|_0^1 < +\infty.$$

Esto muestra que  $h \in \dot{H}^{\sigma_2}(\mathbb{R}^n)$ , pero  $h \notin \dot{H}^{\sigma_1}(\mathbb{R}^n)$ .

En el próximo resultado se mostrará que a pesar de no existir una relación de inclusión entre los espacios de Sobolev homogéneos, podemos asegurar que dada una distribución temperada que pertenece a dos espacios de Sobolev homogéneos de distinto orden de regularidad  $\dot{H}^{\sigma_1}(\mathbb{R}^n)$ ,  $\dot{H}^{\sigma_2}(\mathbb{R}^n)$ , con  $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}$ , esta distribución temperada también pertenece a todos los espacios de Sobolev homogéneos cuyos ordenes están entre  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ .

**Proposición 3.9** (Proposición 1.32., Bahouri et al. (2011), Desigualdad de interpolación). Sean  $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}$  y  $g \in \dot{H}^{\sigma_1}(\mathbb{R}^n) \cap \dot{H}^{\sigma_2}(\mathbb{R}^n)$ . Para todo  $\sigma = \theta\sigma_1 + (1 - \theta)\sigma_2$ , con  $0 \leq \theta \leq 1$ , se tiene

$$\|g\|_{\dot{H}^\sigma} \leq \|g\|_{\dot{H}^{\sigma_1}}^\theta \|g\|_{\dot{H}^{\sigma_2}}^{1-\theta}.$$

DEMOSTRACIÓN. Notemos que de la expresión dada en la ecuación (3.15) (página 84) y la identidad de Plancherel (página 30), se sigue que

$$\begin{aligned} \|g\|_{\dot{H}^\sigma} &= \left\| (-\Delta)^{\sigma/2} g \right\|_{L^2} = \left( \int_{\mathbb{R}^n} |2\pi\xi|^{2\sigma} |\widehat{g}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \\ &= \left( \int_{\mathbb{R}^n} |2\pi\xi|^{2(\theta\sigma_1 + (1-\theta)\sigma_2)} |\widehat{g}(\xi)|^{2(\theta + (1-\theta))} d\xi \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Luego, puesto que  $\frac{1}{\theta}, \frac{1}{1-\theta}$  son exponentes conjugados, es decir, verifican  $\theta + (1 - \theta) = 1$ , entonces por la desigualdad de Hölder se tiene que

$$\begin{aligned} \|g\|_{\dot{H}^\sigma} &= \left( \int_{\mathbb{R}^n} |2\pi\xi|^{2\theta\sigma_1} |\widehat{g}(\xi)|^{2\theta} |2\pi\xi|^{2(1-\theta)\sigma_2} |\widehat{g}(\xi)|^{2(1-\theta)} d\xi \right)^{1/2} \\ &\leq \left( \int_{\mathbb{R}^n} |2\pi\xi|^{2\sigma_1} |\widehat{g}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\theta/2} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |2\pi\xi|^{2\sigma_2} |\widehat{g}(\xi)|^2 d\xi \right)^{(1-\theta)/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\| (-\Delta)^{\sigma_1/2} g \right\|_{L^2}^\theta \left\| (-\Delta)^{\sigma_2/2} g \right\|_{L^2}^{1-\theta} \\
&= \|g\|_{\dot{H}^{\sigma_1}}^\theta \|g\|_{\dot{H}^{\sigma_2}}^{1-\theta}.
\end{aligned}$$

□

Recordemos que de acuerdo a la Proposición 3.5 (página 82), la clase de Schwartz es densa en los espacios de Sobolev no homogéneos. Sin embargo, en los espacios de Sobolev homogéneos ya no contamos con esta propiedad como veremos a continuación:

**Observación 3.6.** Para  $\sigma \leq -n/2$ , la clase de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  no está contenida en el espacio  $\dot{H}^\sigma(\mathbb{R}^n)$ .

Para ilustrar esta última observación revisemos el siguiente ejemplo.

Consideremos la función  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  tal que

$$\hat{\varphi}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\xi| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |\xi| \geq 2. \end{cases}$$

Luego, para  $\sigma \leq -n/2$ , se tiene que

$$\|\varphi\|_{\dot{H}^\sigma}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2\sigma} |\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi = \int_{|\xi| \leq 1} |\xi|^{2\sigma} d\xi + \int_{1 \leq |\xi| \leq 2} |\xi|^{2\sigma} |\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi.$$

Por otro lado, cambiando a coordenadas radiales la primera integral del lado derecho de la ecuación anterior, tenemos:

$$\int_{|\xi| \leq 1} |\xi|^{2\sigma} d\xi = \int_0^1 \rho^{2\sigma+n-1} d\rho = \left. \frac{\rho^{2\sigma+n}}{2\sigma+n} \right|_0^1 = +\infty,$$

pues  $\sigma \leq -n/2$ .

Así, hemos encontrado un elemento de la clase de Schwartz que no pertenece a  $\dot{H}^\sigma(\mathbb{R}^n)$  con  $\sigma \leq -n/2$ , como se quería.

El próximo resultado nos da información sobre la regularidad de las derivadas fraccionarias de los elementos de los espacios de Sobolev homogéneos.

**Proposición 3.10** (Derivación fraccionaria). *Sean  $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}$  y  $g \in \dot{H}^{\sigma_1}(\mathbb{R}^n)$ . Se tiene que*

$$\|(-\Delta)^{\sigma_2/2} g\|_{\dot{H}^{\sigma_1-\sigma_2}} = \|g\|_{\dot{H}^{\sigma_1}}.$$

DEMOSTRACIÓN. Por la expresión dada en (3.15) (página 84), se tiene que

$$\begin{aligned} \|(-\Delta)^{\sigma_2/2} g\|_{\dot{H}^{\sigma_1-\sigma_2}} &= \|(-\Delta)^{(\sigma_1-\sigma_2)/2} ((-\Delta)^{\sigma_2/2} g)\|_{L^2} \\ &= \left( \int_{\mathbb{R}^n} |2\pi\xi|^{2(\sigma_1-\sigma_2)} |2\pi\xi|^{2\sigma_2} |\hat{g}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \\ &= \left( \int_{\mathbb{R}^n} |2\pi\xi|^{2\sigma_1} |\hat{g}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \\ &= \|(-\Delta)^{\sigma_1/2} g\|_{L^2} = \|g\|_{\dot{H}^{\sigma_1}}. \end{aligned}$$

Lo que muestra que  $(-\Delta)^{\sigma_2/2} g \in \dot{H}^{\sigma_1-\sigma_2}(\mathbb{R}^n)$ . □

**Observación 3.7.** *La Proposición 3.10 nos indica que dada  $g \in \dot{H}^{\sigma_1}(\mathbb{R}^n)$ , sus derivadas fraccionarias de orden  $\sigma_2$  pertenecen al espacio  $\dot{H}^{\sigma_1-\sigma_2}(\mathbb{R}^n)$ , es decir, estas derivadas son  $\sigma_2$ -veces más regulares que  $g \in \dot{H}^{\sigma_1}(\mathbb{R}^n)$  si  $\sigma_2 < 0$  o son  $\sigma_2$ -veces menos regulares que  $g \in \dot{H}^{\sigma_1}(\mathbb{R}^n)$  si  $\sigma_2 \geq 0$ .*

Para terminar esta sección introduciremos una proposición que será muy útil en el Capítulo 4 y cuya demostración puede ser revisada en el Teorema 1.36 de la página 27 de Bahouri et al. (2011).

**Proposición 3.11.** *Sea  $|\sigma| < n/2$ , el espacio  $\dot{H}^{-\sigma}(\mathbb{R}^n)$  es el espacio dual topológico de  $\dot{H}^{\sigma}(\mathbb{R}^n)$ .*

## Ecuación del calor fraccionaria

### 1. Motivación probabilística: Caminata aleatoria con saltos arbitrariamente largos

A continuación presentamos un modelo estocástico, a partir del cual, es posible deducir de manera natural la *ecuación del calor fraccionaria*. Este modelo describe el movimiento aleatorio de una partícula en el látice  $h\mathbb{Z}^n$ , con  $h > 0$ , donde además se le permite a la partícula ir de una posición a otra (dentro del látice) incluso si la distancia que las separa es arbitrariamente grande. Este tipo de movimiento es también conocido como *caminata aleatoria con saltos arbitrariamente largos*.

Dicho esto, consideremos sobre  $\mathbb{Z}^n$ , la  $\sigma$ -álgebra:  $\mathcal{P}(\mathbb{Z}^n)$ , de este modo la probabilidad de salto de una partícula viene dada mediante una función de distribución de probabilidad  $P$  definida como sigue: la probabilidad de que ocurra el evento  $A \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}^n)$  está dada por:

$$P(A) = C_s \sum_{k \in A} \mathcal{K}_s(k), \quad (4.1)$$

con  $C_s = \frac{1}{\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \mathcal{K}_s(k)} < +\infty$ , y donde para  $0 < s < 2$ , la función  $\mathcal{K}_s: \mathbb{Z}^n \rightarrow [0, +\infty[$  tiene la siguiente expresión:

$$\mathcal{K}_s(k) = \begin{cases} |k|^{-(n+s)} & \text{si } k \neq 0 \in \mathbb{Z}^n \\ 0 & \text{si } k = 0 \in \mathbb{Z}^n, \end{cases} \quad (4.2)$$

$\mathcal{K}_s$  es conocido como núcleo homogéneo, para más detalles se sugiere revisar Valdinoci (2009).

Aquí vale la pena notar que como  $P$  es una distribución de probabilidad entonces verifica  $P(\mathbb{Z}^n) = 1$ . Adicionalmente, gracias a que  $\mathcal{K}_s(0) = 0$ , podemos asegurar que la partícula no se queda fija en una misma posición sino que eventualmente esta saltará a otra posición.

Una vez definida la probabilidad  $P$ , es hora de describir el modelo de estudio. Para ello, pensemos en una caminata aleatoria sobre el látice  $h\mathbb{Z}^n$ , y vayamos precisando cada uno de los términos que aparecen en el modelo. Así,  $h > 0$  denota el tamaño de la discretización espacial. Por otro lado, notaremos por  $\tau_h > 0$ , el tamaño de discretización temporal (que depende de  $h$ ) con la siguiente escala:  $\tau_h = h^s$ , para  $0 < s < 2$ , pues nos permitirá reconstruir al laplaciano fraccionario como operador de integral singular (ver Valdinoci (2009)). Finalmente, notemos por  $u(t, x)$  la probabilidad de que una partícula en el tiempo  $t \in \tau_h\mathbb{Z}$  esté en la posición  $x \in h\mathbb{Z}^n$ .

Suponemos entonces que una partícula que está en la posición  $x \in h\mathbb{Z}^n$  se mueve bajo la siguiente ley de probabilidad: en cada paso de tiempo  $\tau_h$  la partícula toma un valor  $k \in \mathbb{Z}^n$  de acuerdo a la distribución de probabilidad  $P$  dada en (4.1), y entonces se mueve hacia la posición  $hk$ . Además, debido a las fórmulas (4.1), (4.2) podemos ver que los saltos arbitrariamente largos se realizarán con una probabilidad muy pequeña. Así, si la partícula en un tiempo  $t > 0$ , fijo, está en una posición  $x$  y esta sigue la ley de probabilidad anterior, entonces en el tiempo  $t + \tau_h$  estará en la posición  $x + hk$  (ver la Figura 1).

Notemos que para  $t > 0$ , fijo, la probabilidad  $u(t + \tau_h, x)$  de que una partícula en el tiempo  $t + \tau_h > 0$  se encuentre en la posición  $x \in h\mathbb{Z}^n$ , de acuerdo a la ley de probabilidad total, es igual a la suma de las probabilidades  $u(t, x - hk)$  de que la partícula en el tiempo  $t > 0$  estuvo en la posición  $x - hk$  (con  $k \in \mathbb{Z}^n$ ), multiplicado por la probabilidad de haber

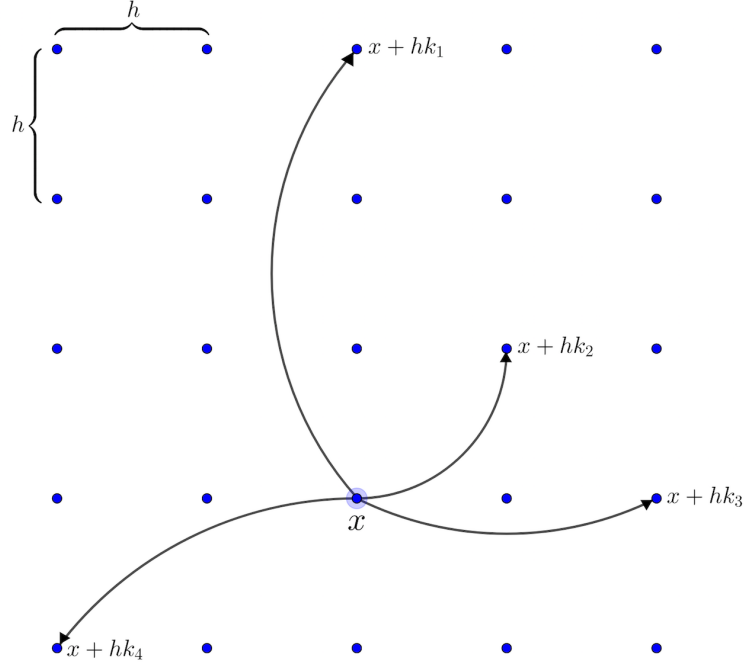


FIGURA 1. Caminata aleatoria con saltos largos sobre el látice  $h\mathbb{Z}^2$

$(k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{Z}^2)$ .

salido de dicho  $hk$ , es decir,

$$u(t + \tau_h, x) = C_s \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \mathcal{K}_s(k) u(t, x - hk),$$

Restando en la ecuación anterior el término  $u(t, x)$  y gracias a que  $P$  es una medida de probabilidad, se sigue que

$$\begin{aligned} u(t + \tau_h, x) - u(t, x) &= C_s \left[ \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \mathcal{K}_s(k) u(t, x - hk) - \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \mathcal{K}_s(k) u(t, x) \right] \\ &= C_s \left[ \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \mathcal{K}_s(k) [u(t, x - hk) - u(t, x)] \right] \end{aligned}$$

Luego, dividiendo la expresión anterior para  $\tau_h$  y usando la definición  $\mathcal{K}_s$  dada en la ecuación (4.2), tenemos

$$\frac{u(t + \tau_h, x) - u(t, x)}{\tau_h} = C_s \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \frac{\mathcal{K}_s(k)}{\tau_h} [u(t, x - hk) - u(t, x)]$$



$$\begin{aligned}
&= C_s \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} h^{-s} |k|^{-(n+s)} [u(t, x - hk) - u(t, x)] \\
&= C_s \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} h^n |hk|^{-(n+s)} [u(t, x - hk) - u(t, x)],
\end{aligned}$$

entonces,

$$\frac{u(t + \tau_h, x) - u(t, x)}{\tau_h} = C_s h^n \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \mathcal{K}_s(hk) [u(t, x - hk) - u(t, x)], \quad (4.3)$$

donde el término dado en (4.3) corresponde a una aproximación en sumas de Riemann. Entonces, haciendo  $\tau_h = h^s \rightarrow 0^+$ , es decir, tomando el límite de la caminata aleatoria discreta se sigue que

$$\partial_t u(t, x) = C_s \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{K}_s(y) [u(t, x - y) - u(t, x)] dy = -C_s \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|y| > \varepsilon} \frac{u(t, x) - u(t, x - y)}{|y|^{n+s}} dy, \quad (4.4)$$

para todo  $t > 0$  fijo. Lo que muestra que la caminata aleatoria con saltos arbitrariamente largos en el límite produce una integral singular con un núcleo homogéneo. Recordemos que precisamente esta integral, gracias a la ecuación (2.21) de la página 70, corresponde a una caracterización del laplaciano fraccionario. Así, la expresión dada en (4.4) se puede reescribir como:

$$\partial_t u(t, x) + (-\Delta)^{s/2} u(t, x) = 0, \quad (4.5)$$

para todo  $t > 0$  y todo  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Como hemos podido observar, la ecuación del calor fraccionaria nos permite describir modelos muchos más diversos que los de difusión clásica como la caminata aleatoria con saltos largos que acabamos de analizar, por lo que el estudio teórico de las propiedades de sus soluciones es necesario, siendo este nuestro propósito a lo largo de las próximas secciones.

## 2. Soluciones mild y algunas estimaciones

Empezaremos recordando rápidamente que el problema de Cauchy para la ecuación del calor clásica viene dado por:

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) - \Delta u(t, x) = f(t, x), & (t, x) \in ]0, T] \times \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (4.6)$$

donde

- $f: [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ : representa una fuente externa de calor.
- $u_0: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ : representa la temperatura en el tiempo inicial  $t = 0$ .

La función  $u: [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , que físicamente representa la temperatura en un tiempo  $t \in [0, T]$  y en un punto  $x \in \mathbb{R}^n$ , es la solución para (4.6).

- $0 < T \leq +\infty$ : es el tiempo máximo en el que existe la solución  $u$  durante el cual actúa la fuente de calor externa.

Además, en el problema (4.6) el término  $\partial_t u$  describe la variación de  $u$  con respecto al tiempo, mientras que  $\Delta u$  es el término que explica la difusión del calor, donde  $\Delta$  denota al operador laplaciano clásico dado en la ecuación (1.11) de la página 22.

La idea de nuestro estudio consiste en reemplazar en la ecuación (4.6), el término de difusión clásico  $-\Delta u$  por el término de difusión fraccionario  $(-\Delta)^{s/2} u$ , con  $0 < s < 2$ , que como pudimos ver, en la sección anterior, aparece de manera natural en ciertos modelos probabilísticos y, para el cual, hemos estudiado algunas de sus caracterizaciones, ya sea en variable de Fourier como en variable espacial, y esta última como operador de convolución o como operador de integral singular, que se presentaron en el Capítulo 2.

Consideramos entonces, para  $0 < s < 2$ , el problema de Cauchy para la ecuación del calor fraccionaria:

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) + (-\Delta)^{s/2} u(t, x) = f(t, x), & (t, x) \in ]0, T] \times \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (4.7)$$

donde, al igual que en el problema (4.6):  $0 < T \leq +\infty$ ,  $f: [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  y  $u_0: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  son datos del problema (4.7), y  $u: [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es su solución.

Una vez planteado el problema de estudio, nos concentraremos en dar una definición de *solución mild* para el problema de Cauchy (4.7). Pero antes es necesario introducir la noción de *solución fundamental* de esta ecuación, pues como veremos en la siguiente sección, la *solución fundamental* es primordial para construir las *soluciones mild*.

Así, empecemos considerando la siguiente ecuación:

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) + (-\Delta)^{s/2} u(t, x) = 0, & (t, x) \in ]0, T] \times \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) = \delta_0, & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (4.8)$$

donde,  $\delta_0$  denota la masa de Dirac en el origen definida en el segundo numeral del Ejemplo 1.4 (página 35).

Entonces, tomando la transformada de Fourier (en variable de espacio) en el problema (4.8), obtenemos para todo  $\xi \in \mathbb{R}^n$  fijo, la siguiente ecuación diferencial ordinaria (en tiempo) homogénea a valor inicial:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \hat{u}(t, \xi) + (2\pi)^s |\xi|^s \hat{u}(t, \xi) = 0, & (t, \xi) \in ]0, T] \times \mathbb{R}^n, \\ \hat{u}(0, \xi) = \hat{\delta}_0 = 1, & \xi \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (4.9)$$

La solución de la ecuación (4.9) viene dada por la siguiente expresión:

$$\hat{u}(t, \xi) = c e^{-(2\pi)^s |\xi|^s t}.$$

Luego, usando la condición inicial  $\widehat{u}(0, \xi) = 1$ , tenemos que  $c = 1$ . De este modo, definimos

$$\widehat{P}_s(t, \xi) = e^{-(2\pi)^s |\xi|^s t},$$

la solución de la ecuación diferencial ordinaria (en tiempo) (4.9).

**Observación 4.1.** *En el problema (4.8) se considera la masa de Dirac en el origen  $\delta_0$  como dato inicial pues nos ayuda a estudiar de manera más precisa la estructura de la solución fundamental.*

En efecto, puesto que en la expresión  $\widehat{u}(t, \xi) = ce^{-(2\pi)^s |\xi|^s t}$ , la constante  $c = \widehat{\delta}_0 = 1$  en el sentido de las distribuciones temperadas, esto hace que nos despreocupemos de los posibles valores que pueda tomar  $c$  y en esencia nos permite concentrarnos en la función  $\widehat{P}_s(t, \xi) = e^{-(2\pi)^s |\xi|^s t}$ .

A partir de la expresión  $\widehat{P}_s$  daremos una definición de *solución fundamental*, que como mencionamos nos ayudará posteriormente a construir la *solución mild* para el problema (4.7). Pero antes será necesario revisar algunas propiedades de  $\widehat{P}_s$ .

**Observación 4.2.** *Notemos que si  $0 < s < 2$ , entonces para cualquier  $t > 0$ ,  $\widehat{P}_s(t, \cdot)$  no pertenece a  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , pues no es diferenciable en el origen.*

**Proposición 4.1.** *Para cualesquier  $0 < s < 2$  y  $t > 0$ ,  $\widehat{P}_s(t, \cdot) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ .*

DEMOSTRACIÓN. En efecto, sean  $0 < s < 2$  y  $t > 0$ . Se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left| \widehat{P}_s(t, \xi) \right| d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(2\pi)^s |\xi|^s t} d\xi.$$

Ahora, cambiando a coordenadas radiales la integral del lado derecho tenemos:

$$\int_0^{+\infty} \rho^{n-1} e^{-(2\pi)^s \rho^s t} d\rho = \int_0^{p^*} \rho^{n-1} e^{-(2\pi)^s \rho^s t} d\rho + \int_{p^*}^{+\infty} \rho^{n-1} e^{-(2\pi)^s \rho^s t} d\rho, \quad (4.10)$$

donde  $p^* = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{n+1}{st} \right)^{1/s} > 0$  es tal que

$$e^{-(2\pi)^s \rho^s t} \leq \rho^{-(n+1)}, \quad (4.11)$$

para todo  $\rho \geq p^*$ . Así, usando (4.11) en la ecuación (4.10) tenemos:

$$\int_0^{+\infty} \rho^{n-1} e^{-(2\pi)^s \rho^s t} d\rho \leq \int_0^{p^*} \rho^{n-1} e^{-(2\pi)^s \rho^s t} d\rho + \int_{p^*}^{+\infty} \rho^{-2} d\rho.$$

Basta notar que para  $\rho > 0$ , la función  $\rho \mapsto \rho^{n-1} e^{-(2\pi)^s \rho^s t}$  es continua, con lo cual

$$\int_0^{p^*} \rho^{n-1} e^{-(2\pi)^s \rho^s t} d\rho < +\infty,$$

y que además,

$$\int_{p^*}^{+\infty} \rho^{-2} d\rho = \frac{1}{p^*} < +\infty,$$

de donde se sigue el resultado. □

La idea ahora es usar la transformada de Fourier inversa para de este modo obtener una expresión de  $P_s$  con  $0 < s < 2$ , en variable espacial.

**Definición 4.1** (Solución Fundamental). *Sea  $0 < s < 2$ . Llamaremos solución fundamental de la ecuación del calor fraccionaria a la función:*

$$P_s(t, x) = \left( e^{-(2\pi)^s |\cdot|^s t} \right) \checkmark(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \cdot \xi} e^{-(2\pi)^s |\xi|^s t} d\xi,$$

para todo  $t > 0$  y todo  $x \in \mathbb{R}^n$ .

**Observación 4.3.** *En general, no se dispone de una fórmula explícita para  $P_s$ , salvo en el caso  $s = 1$  donde  $P_s$  puede escribirse como:*

$$P_1(t, x) = \left( e^{-2\pi |\cdot| t} \right) \checkmark(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \frac{1}{(1 + |x|^2 t)^{\frac{n+1}{2}}},$$

para todo  $t > 0$  y todo  $x \in \mathbb{R}^n$ . Para más detalles de este resultado, se puede revisar la página 108 de Grafakos (2008).

Revisemos ahora algunas propiedades de la *solución fundamental*. Así, para  $x \in \mathbb{R}^n$  fijo, empecemos estudiando la regularidad en variable de tiempo de la función  $P_s$ .

**Proposición 4.2.** *Sea  $0 < s < 2$ . Para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  fijo,  $P_s(\cdot, x)$  es una función de clase  $\mathcal{C}^1([0, +\infty[)$ .*

DEMOSTRACIÓN. Notemos que para todo  $t > 0$ , por el teorema de derivación bajo el signo de la integral, se tiene que

$$\begin{aligned}\partial_t P_s(t, x) &= \partial_t \left( \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \cdot \xi} e^{-(2\pi)^s |\xi|^s t} d\xi \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial t} \left( e^{2\pi i x \cdot \xi} e^{-(2\pi)^s |\xi|^s t} \right) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} -(2\pi)^s |\xi|^s e^{2\pi i x \cdot \xi} e^{-(2\pi)^s |\xi|^s t} d\xi.\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\partial_t P_s(t, x) = \left( -(2\pi)^s |\cdot|^s e^{-(2\pi)^s |\cdot|^s t} \right) \checkmark(x), \quad (4.12)$$

lo cual está bien definido pues para todo  $t > 0$ , la función dada por la expresión  $-(2\pi)^s |\cdot|^s e^{-(2\pi)^s |\cdot|^s t}$  pertenece a  $L^1(\mathbb{R}^n)$ . Así,  $P_s(\cdot, x)$  es diferenciable y continua en tiempo.

Ahora, veamos que  $\partial_t P_s(t, x)$  es continua para todo  $t > 0$  fijo. En efecto, sea  $\tau > 0$ .

Estudiemos la cantidad

$$\begin{aligned}& \left| \int_{\mathbb{R}^n} (2\pi)^s |\xi|^s e^{2\pi i x \cdot \xi} e^{-(2\pi)^s |\xi|^s t} d\xi - \int_{\mathbb{R}^n} (2\pi)^s |\xi|^s e^{2\pi i x \cdot \xi} e^{-(2\pi)^s |\xi|^s \tau} d\xi \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} (2\pi)^s |\xi|^s e^{2\pi i x \cdot \xi} \left( e^{-(2\pi)^s |\xi|^s t} - e^{-(2\pi)^s |\xi|^s \tau} \right) d\xi \right|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} (2\pi)^s |\xi|^s \left| e^{-(2\pi)^s |\xi|^s t} - e^{-(2\pi)^s |\xi|^s \tau} \right| d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (2\pi)^s |\xi|^s e^{-(2\pi)^s |\xi|^s t} \left| 1 - e^{-(2\pi)^s |\xi|^s (\tau-t)} \right| d\xi.
\end{aligned}$$

Ahora, notemos que para todo  $t > 0$ ,

$$|\xi|^s e^{-(2\pi)^s |\xi|^s t} \left| 1 - e^{-(2\pi)^s |\xi|^s (\tau-t)} \right| \leq 2 |\xi|^s e^{-(2\pi)^s |\xi|^s t},$$

donde la función definida por  $\xi \in \mathbb{R}^n \mapsto 2 |\xi|^s e^{-(2\pi)^s |\xi|^s t}$  está en  $L^1(\mathbb{R}^n)$ . Entonces, haciendo  $\tau \rightarrow t$ , por el teorema de convergencia dominada de Lebesgue y la continuidad de la función exponencial, se sigue que

$$\int_{\mathbb{R}^n} (2\pi)^s |\xi|^s e^{-(2\pi)^s |\xi|^s t} \left| 1 - e^{-(2\pi)^s |\xi|^s (\tau-t)} \right| d\xi \rightarrow 0.$$

Por lo tanto,  $P_s(\cdot, x)$  es una función de clase  $\mathcal{C}^1([0, +\infty[)$ . □

Ahora, para  $t > 0$  fijo, estudiemos la regularidad de  $P_s$  en variable de espacio.

**Proposición 4.3.** *Sea  $\sigma \geq 0$ , entonces se tiene que  $P_s(t, \cdot) \in H^\sigma(\mathbb{R}^n)$  para todo  $t > 0$ .*

DEMOSTRACIÓN. Notemos que  $P_s(t, \cdot) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  para todo  $t > 0$  y todo  $0 < s < 2$ .

Luego,

$$\begin{aligned}
\|P_s(t, \cdot)\|_{H^\sigma}^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^\sigma \left| \widehat{P}_s(t, \xi) \right|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^\sigma e^{-2(2\pi)^s |\xi|^s t} d\xi \\
&= \int_{|\xi| \leq 1} (1 + |\xi|^2)^\sigma e^{-2(2\pi)^s |\xi|^s t} d\xi + \int_{|\xi| > 1} (1 + |\xi|^2)^\sigma e^{-2(2\pi)^s |\xi|^s t} d\xi,
\end{aligned}$$

para todo  $t > 0$ .

Estudiemos por separado las dos últimas integrales. Si  $|\xi| \leq 1$  y puesto que  $\sigma \geq 0$ , tenemos la siguiente estimación:  $(1 + |\xi|^2)^\sigma \leq 2^\sigma$ , de este modo

$$\int_{|\xi| \leq 1} (1 + |\xi|^2)^\sigma e^{-2(2\pi)^s |\xi|^s t} d\xi \leq 2^\sigma \int_{|\xi| \leq 1} e^{-2(2\pi)^s |\xi|^s t} d\xi < +\infty,$$

pues la función dada por la expresión  $e^{-(2\pi)^s|\xi|^s t}$  es una función continua en variable de Fourier para todo  $t > 0$ .

Por otro lado, cuando  $|\xi| > 1$  tenemos que  $(1 + |\xi|^2)^\sigma < (2|\xi|^2)^\sigma$ , de este modo

$$\int_{|\xi|>1} (1 + |\xi|^2)^\sigma e^{-2(2\pi)^s|\xi|^s t} d\xi < 2^\sigma \int_{|\xi|>1} |\xi|^{2\sigma} e^{-2(2\pi)^s|\xi|^s t} d\xi < +\infty,$$

pues la función dada por la expresión  $|\xi|^{2\sigma} e^{-(2\pi)^s|\xi|^s t}$  pertenece a  $L^1(\mathbb{R}^n)$ , para todo  $\sigma \in \mathbb{R}$ .

□

En este momento, vale la pena considerar la siguiente inyección de Sobolev, pues como veremos en la Corolario 4.1, nos permitirá mejorar las propiedades de regularidad de  $P_s(t, \cdot)$ , para todo  $t > 0$ .

**Observación 4.4.** *Cuando  $\sigma > n/2$  se tiene la inclusión  $H^\sigma(\mathbb{R}^n) \subset L^\infty(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ .*

La prueba de este resultado puede ser revisado en el Teorema 1.66 (página 44) de Bahouri et al. (2011).

Por lo tanto, gracias a la observación anterior tenemos el siguiente resultado.

**COROLARIO 4.1.** *Sea  $0 < s < 2$ , entonces para todo  $t > 0$  fijo, la función  $P_s(t, \cdot)$  es una función de clase  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Sea  $t > 0$  fijo, por la Proposición 4.3 sabemos que  $P_s(t, \cdot) \in H^\sigma(\mathbb{R}^n)$  para todo  $\sigma \geq 0$ , así, para todo multi-índice  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  se tiene que  $\partial^\alpha P_s(t, \cdot) \in H^{\sigma-|\alpha|}(\mathbb{R}^n)$ , para todo  $\sigma \geq 0$ . En particular,  $\partial^\alpha P_s(t, \cdot) \in H^{\sigma-|\alpha|}(\mathbb{R}^n)$ , para  $\sigma > |\alpha| + n/2$ , es decir,  $\sigma - |\alpha| > n/2$ . Entonces, gracias a la Observación 4.4 podemos concluir que  $\partial^\alpha P_s(t, \cdot) \in$



$L^\infty(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$  y como el multi-índice  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  es arbitrario, obtenemos que en efecto la función  $P_s(t, \cdot)$  es una función de clase  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$  en variable de espacio.  $\square$

Una vez revisadas las propiedades de regularidad de  $P_s$ , tanto en variable espacial como en variable temporal, procedemos a verificar que  $P_s$  satisface el problema (4.8).

**Proposición 4.4.** *Sea  $0 < s < 2$ . La función  $P_s$  verifica la ecuación:*

$$\partial_t P_s(t, x) + (-\Delta)^{s/2} P_s(t, x) = 0,$$

para todo  $t > 0$  y todo  $x \in \mathbb{R}^n$ .

DEMOSTRACIÓN. De la ecuación (4.12) de la página 103, sabemos que para  $0 < s < 2$ ,

$$\partial_t P_s(t, x) = - \left( (2\pi)^s |\cdot|^s e^{-(2\pi)^s |\cdot|^s t} \right) \checkmark(x). \quad (4.13)$$

Por otro lado, calculado la transformada de Fourier en variable espacial de  $(-\Delta)^{s/2} P_s(t, \cdot)$  tenemos:

$$\left[ (-\Delta)^{s/2} P_s(t, \cdot) \right] \hat{\cdot}(\xi) = (2\pi)^s |\xi|^s \widehat{P}_s(t, \xi) = (2\pi)^s |\xi|^s e^{-(2\pi)^s |\xi|^s t},$$

para todo  $t > 0$  y  $\xi \in \mathbb{R}^n$ . Finalmente, tomando transformada de Fourier inversa en variable espacial en la ecuación anterior, se sigue que

$$(-\Delta)^{s/2} P_s(t, x) = \left( (2\pi)^s |\cdot|^s e^{-(2\pi)^s |\cdot|^s t} \right) \checkmark(x). \quad (4.14)$$

Así, de (4.13) y (4.14) se sigue el resultado.  $\square$

Adicionalmente, es necesario verificar que esta solución satisface la condición inicial  $P_s(0, \cdot) = \delta_0$ .

**Proposición 4.5.** *Sea  $0 < s < 2$ . Se tiene*

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} P_s(t, \cdot) = \delta_0, \quad \text{en } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n).$$

DEMOSTRACIÓN. Sea  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Por la Definición 1.13 de la página 42, tenemos

$$\langle P_s(t, \cdot), \varphi \rangle = \left\langle \left( e^{-(2\pi)^s |\cdot|^s t} \right) \checkmark, \varphi \right\rangle = \left\langle e^{-(2\pi)^s |\cdot|^s t}, \check{\varphi} \right\rangle,$$

de donde, gracias al teorema de convergencia dominada de Lebesgue se sigue que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \langle P_s(t, \cdot), \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{t \rightarrow 0^+} e^{-(2\pi)^s |x|^s t} \check{\varphi}(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \check{\varphi}(x) dx = \langle 1, \check{\varphi} \rangle = \langle \delta_0, \varphi \rangle,$$

como se quería. □

De acuerdo a la Observación 4.3 (página 102) sabemos que, en general,  $P_s$  no tiene una formulación explícita en variable espacial, por lo que nuestro interés ahora será establecer una caracterización de  $P_s$  a través de la cual podamos deducir  $P_s(t, \cdot) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , para  $0 < s < 2$ .

**Observación 4.5.** *Sea  $0 < s < 2$ . Para todo  $t > 0$  y para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ , se tiene*

$$P_s(t, x) = \frac{1}{t^{n/s}} P_s \left( 1, \frac{1}{t^{1/s}} x \right).$$

En efecto, sean  $t > 0$  y  $x \in \mathbb{R}^n$ . Entonces escribimos

$$P_s(t, \cdot) = \left( e^{-(2\pi)^s |\cdot|^s t} \right) \checkmark(x).$$

Luego, reescribiendo el lado derecho de la ecuación anterior como una dilatación (en tiempo) y usando el numeral 4 de la Proposición 1.13 (página 45), tenemos que:

$$\left( e^{-(2\pi)^s |\cdot|^s t} \right) \checkmark(x) = \left( \left( e^{-(2\pi)^s |\cdot|^s} \right)_{t^{1/s}} \right) \checkmark(x) = \frac{1}{t^{n/s}} \left( e^{-(2\pi)^s |\cdot|^s} \right) \checkmark \left( \frac{x}{t^{1/s}} \right) = \frac{1}{t^{n/s}} P_s \left( 1, \frac{x}{t^{1/s}} \right),$$

como se quería.

Consecuentemente, revisemos el siguiente resultado en el que se establece  $P_s(t, \cdot) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , para  $0 < s < 2$ .

**Proposición 4.6.** *Sea  $0 < s < 2$ . Entonces, existe una constante  $c > 0$  tal que para todo  $t > 0$*

$$\|P_s(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq c.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea  $t > 0$  fijo. Por la Observación 4.5 sabemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |P_s(t, x)| dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{1}{t^{n/s}} P_s \left( 1, \frac{1}{t^{1/s}} x \right) \right| dx.$$

Ahora, haciendo el cambio de variable  $y = \frac{1}{t^{1/s}} x$  en la integral del lado derecho de la identidad anterior, tenemos:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |P_s(t, x)| dx = \int_{\mathbb{R}^n} |P_s(1, y)| dy,$$

así, tomando  $c = \int_{\mathbb{R}^n} |P_s(1, y)| dy$ , donde  $c$  es una cantidad finita e independiente de  $t > 0$ . En efecto, por el Teorema 1.1. de Cabré y Roquejoffre (2013) sabemos que para  $M > 0$  suficientemente grande existe  $C > 0$ , de modo que se verifica la siguiente relación:  $P_s(1, x) = C |x|^{-(n+s)}$  para todo  $|x| > M$ . En consecuencia,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |P_s(1, x)| dx &= \int_{|x| \leq M} |P_s(1, x)| dx + \int_{|x| > M} |P_s(1, x)| dx \\ &= \int_{|x| \leq M} |P_s(1, x)| dx + \int_{|x| > M} C |x|^{-(n+s)} dx. \end{aligned}$$

Luego, puesto que  $P_s(1, \cdot)$  es una función de clase  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ , se sigue que

$$\int_{|x| \leq M} |P_s(1, x)| dx < +\infty.$$

Por otro lado, estudiemos la integral  $\int_{|x| > M} C |x|^{-(n+s)} dx$ . Aquí, conviene cambiar esta integral a coordenadas radiales, de donde

$$\int_M^{+\infty} C \rho^{-(s+1)} d\rho = C \frac{M^{-s}}{s} < +\infty.$$

□

Una vez estudiadas las principales propiedades de la solución fundamental  $P_s$ , las cuales serán de gran utilidad en lo que resta de este capítulo y, sin perder de vista que nuestro propósito ahora es construir las soluciones mild del problema de Cauchy para la ecuación del calor fraccionaria a partir de la solución fundamental  $P_s$ , volvamos al problema (4.7), pero esta vez suponiendo que los datos  $u_0$  y  $f$  son funciones en la clase de Schwartz y que existe  $u$  suficientemente regular y con decrecimiento rápido tal que verifica esta ecuación.

Así, procederemos a realizar *estimaciones a priori*, teniendo en mente que estos cálculos no son rigurosos, sino más bien son formales, en el sentido de que estamos asumiendo un escenario general en el que todos los elementos del problema dado en (4.7) son suficientemente regulares y suficientemente integrables. La motivación de estos cálculos es que nos proporcionarán información valiosa sobre la estructura de las *soluciones mild* del problema (4.7) y sobre el espacio funcional donde debemos construir dichas soluciones.

Entonces, tomando nuevamente la transformada de Fourier, en variable de espacio, en el problema (4.7), obtenemos para todo  $\xi \in \mathbb{R}^n$  la siguiente ecuación diferencial ordinaria (en tiempo) a valor inicial:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \hat{u}(t, \xi) + (2\pi)^s |\xi|^s \hat{u}(t, \xi) = \hat{f}(t, \xi), & (t, \xi) \in ]0, T] \times \mathbb{R}^n, \\ \hat{u}(0, \xi) = \hat{u}_0(\xi), & \xi \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

donde su solución se puede escribir como sigue:

$$\hat{u}(t, \xi) = \widehat{P}_s(t, \xi) \hat{u}_0(\xi) + \int_0^t \widehat{P}_s(t - \tau, \xi) \hat{f}(\tau, \xi) d\tau.$$

Finalmente, tomando transformada de Fourier inversa en variable de espacio, podemos concluir que la solución  $u$  se escribe a priori como:

$$u(t, x) = (P_s(t, \cdot) * u_0)(x) + \int_0^t (P_s(t - \tau, \cdot) * f(\tau, \cdot))(x) d\tau,$$

para todo  $t > 0$  y  $x \in \mathbb{R}^n$ . Esta expresión es conocida como fórmula de Duhamel.

**Definición 4.2** (Solución mild). *Sea  $0 < s < 2$ . Llamaremos solución mild del problema de Cauchy para la ecuación del calor fraccionaria a toda función  $u$  tal que pueda expresarse como:*

$$u(t, x) = (P_s(t, \cdot) * u_0)(x) + \int_0^t (P_s(t - \tau, \cdot) * f(\tau, \cdot))(x) d\tau, \quad (4.15)$$

para todo  $t > 0$  y todo  $x \in \mathbb{R}^n$ , donde la función  $P_s$  está dada en la Definición 4.1 de la página 102.

La idea ahora es determinar el espacio funcional en el cual construiremos de manera rigurosa las *soluciones mild* del problema (4.7) de la página 100. Este espacio funcional es conocido como espacio de energía.

## 2.1. Espacio de Energía

Para hallar el espacio de energía procedemos como sigue: multiplicamos puntualmente la ecuación  $\partial_t u(t, x) + (-\Delta)^{s/2} u(t, x) = f(t, x)$  por la solución  $u(t, x)$  e integramos sobre  $\mathbb{R}^n$ . Así,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \partial_t u(t, x) u(t, x) dx + \int_{\mathbb{R}^n} (-\Delta)^{s/2} u(t, x) u(t, x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(t, x) u(t, x) dx. \quad (4.16)$$

Ahora, estudiemos por separado cada uno de los términos de la identidad anterior.

Notemos primero que gracias a la identidad  $\partial_t (u^2(t, x)) = 2u(t, x) \partial_t u(t, x)$  y al teorema de derivación bajo el signo de la integral tenemos:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \partial_t u(t, x) u(t, x) dx = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \partial_t (u^2(t, x)) dx$$

$$= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^n} u^2(t, x) dx,$$

entonces,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \partial_t u(t, x) u(t, x) dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2. \quad (4.17)$$

Por otro lado, usando la relación de Parseval dado en la Proposición 1.10 (página 30), se sigue que para todo  $t > 0$ :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (-\Delta)^{s/2} u(t, x) u(t, x) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} [(-\Delta)^{s/2} u(t, \cdot)]^\wedge(\xi) \hat{u}(t, \xi) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (2\pi)^s |\xi|^s \hat{u}(t, \xi) \hat{u}(t, \xi) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (2\pi)^{s/2} |\xi|^{s/2} \hat{u}(t, \xi) (2\pi)^{s/2} |\xi|^{s/2} \hat{u}(t, \xi) d\xi, \end{aligned}$$

y volviendo a la variable de espacio tenemos:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (-\Delta)^{s/2} u(t, x) u(t, x) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} (-\Delta)^{s/4} u(t, x) (-\Delta)^{s/4} u(t, x) dx \\ &= \|(-\Delta)^{s/4} u(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2, \end{aligned}$$

de este modo

$$\int_{\mathbb{R}^n} (-\Delta)^{s/2} u(t, x) u(t, x) dx = \|u(t, \cdot)\|_{\dot{H}^{s/2}(\mathbb{R}^n)}^2. \quad (4.18)$$

Luego, usando las ecuaciones (4.17) y (4.18), podemos reescribir la ecuación (4.16)

como:

$$\frac{d}{dt} \|u(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + 2 \|u(t, \cdot)\|_{\dot{H}^{s/2}(\mathbb{R}^n)}^2 = 2 \int_{\mathbb{R}^n} f(t, x) u(t, x) dx. \quad (4.19)$$

Integrando esta última identidad en variable de tiempo sobre el intervalo  $[0, t]$ , con  $t < T$  se tiene

$$\int_0^t \frac{d}{d\tau} \|u(\tau, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau + 2 \int_0^t \|u(\tau, \cdot)\|_{\dot{H}^{s/2}(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau = 2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} f(\tau, x) u(\tau, x) dx d\tau,$$

de donde, por el teorema fundamental del cálculo se sigue que

$$\|u(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 - \|u(0, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + 2 \int_0^t \|u(\tau, \cdot)\|_{\dot{H}^{s/2}(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau = 2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} f(\tau, x) u(\tau, x) dx d\tau,$$

así,

$$\|u(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + 2 \int_0^t \|u(\tau, \cdot)\|_{\dot{H}^{s/2}(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau = \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + 2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} f(\tau, x) u(\tau, x) dx d\tau. \quad (4.20)$$

La identidad dada en la ecuación (4.20) se conoce como igualdad de energía y nos proporciona información importante sobre los espacios funcionales donde debemos considerar los datos  $u_0$  y  $f$ , y el espacio funcional natural donde debemos construir la *solución mild* del problema (4.7).

En efecto, como el primer término del lado derecho de (4.20) es la cantidad  $\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2$ , es natural suponer que el dato inicial  $u_0$  verifica  $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ .

Por otro lado, como  $\|u(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2$  es una cantidad positiva, de (4.20) tenemos:

$$2 \int_0^t \|u(\tau, \cdot)\|_{\dot{H}^{s/2}(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau \leq \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + 2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} f(\tau, x) u(\tau, x) dx d\tau,$$

y tomando el límite cuando  $t \rightarrow T$  se tiene

$$2 \int_0^T \|u(\tau, \cdot)\|_{\dot{H}^{s/2}(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau \leq \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + 2 \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} f(\tau, x) u(\tau, x) dx d\tau.$$

De esta última desigualdad podemos deducir que la solución  $u$  debe verificar

$$u \in L^2(0, T, \dot{H}^{s/2}(\mathbb{R}^n)),$$

pues esto permite dar sentido a la cantidad

$$\int_0^t \|u(\tau, \cdot)\|_{\dot{H}^{s/2}(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau.$$

Además, de la Proposición 3.11 (página 94), sabemos que el dual topológico del espacio  $\dot{H}^{s/2}(\mathbb{R}^n)$  es el espacio  $\dot{H}^{-s/2}(\mathbb{R}^n)$  para todo  $|s| < n/2$ , y así, podemos escribir

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} f(\tau, x) u(\tau, x) dx d\tau &= \int_0^T \langle f(\tau, \cdot), u(\tau, \cdot) \rangle_{\dot{H}^{-s/2}(\mathbb{R}^n) \times \dot{H}^{s/2}(\mathbb{R}^n)} d\tau \\ &\leq \int_0^T \|f(\tau, \cdot)\|_{\dot{H}^{-s/2}(\mathbb{R}^n)} \|u(\tau, \cdot)\|_{\dot{H}^{s/2}(\mathbb{R}^n)} d\tau, \end{aligned}$$

y adicionalmente, usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz en variable temporal, obtenemos la siguiente relación:

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} f(\tau, x) u(\tau, x) dx d\tau \leq \left( \int_0^T \|f(\tau, \cdot)\|_{\dot{H}^{-s/2}(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau \right)^{1/2} \left( \int_0^T \|u(\tau, \cdot)\|_{\dot{H}^{s/2}(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau \right)^{1/2}. \quad (4.21)$$

Así, vemos que una hipótesis natural es que el dato  $f \in L^2(0, T, \dot{H}^{-s/2}(\mathbb{R}^n))$ .

Luego, reemplazando la desigualdad (4.21) en la identidad (4.20) se sigue para todo  $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} \|u(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 &+ 2 \int_0^t \|u(\tau, \cdot)\|_{\dot{H}^{s/2}(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau \\ &\leq \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + 2 \left( \int_0^t \|f(\tau, \cdot)\|_{\dot{H}^{-s/2}(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau \right)^{1/2} \left( \int_0^t \|u(\tau, \cdot)\|_{\dot{H}^{s/2}(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

y en consecuencia,

$$\|u(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \leq \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + 2 \left( \int_0^t \|f(\tau, \cdot)\|_{\dot{H}^{-s/2}(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau \right)^{1/2} \left( \int_0^t \|u(\tau, \cdot)\|_{\dot{H}^{s/2}(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau \right)^{1/2},$$

de donde, al tomar el supremo en variable temporal sobre el intervalo  $[0, T]$  se tiene

$$\sup_{t \in [0, T]} \|u(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \leq \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + 2 \left( \int_0^T \|f(\tau, \cdot)\|_{\dot{H}^{-s/2}(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau \right)^{1/2} \left( \int_0^T \|u(\tau, \cdot)\|_{\dot{H}^{s/2}(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau \right)^{1/2},$$



es decir, la solución de (4.7), además debe verificar

$$u \in L^\infty(0, T, L^2(\mathbb{R}^n)).$$

Ya establecidas las condiciones naturales requeridas sobre los datos y la solución del problema (4.7), podemos dar la siguiente definición:

**Definición 4.3.** *Al espacio  $L^\infty(0, T, L^2(\mathbb{R}^n)) \cap L^2(0, T, \dot{H}^{s/2}(\mathbb{R}^n))$ , donde se quiere construir la solución mild de (4.7) se lo denomina espacio de energía.*

Observemos además que para construir una solución mild de (4.7) en el *espacio de energía* definido antes y, de acuerdo a la información obtenida de las *estimaciones a priori*, debemos considerar las siguientes hipótesis sobre los datos del problema (4.7):

$$u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n) \quad \text{y} \quad f \in L^2(0, T, \dot{H}^{-s/2}(\mathbb{R}^n)).$$

### 3. Existencia y unicidad de soluciones mild en los espacios de Sobolev fraccionarios

Gracias a lo hecho en la Sección 2 de este capítulo, tenemos una idea más clara de los espacios funcionales naturales donde debemos considerar cada uno de los datos y donde debemos construir la *solución mild* de la ecuación del calor fraccionaria (4.7). Así, ya podemos enunciar un resultado de existencia y unicidad de la *solución mild* para este problema.

**TEOREMA 4.1** (Existencia y unicidad de la solución mild en el espacio de energía).

*Sean  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $n \geq 2$ ,  $0 < s < 2$  y  $0 < T \leq +\infty$ . Sean, también,  $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$  un dato inicial, y  $f \in L^2(0, T, \dot{H}^{-s/2}(\mathbb{R}^n))$ . Existe una única función*

$$u \in L^\infty(0, T, L^2(\mathbb{R}^n)) \cap L^2(0, T, \dot{H}^{s/2}(\mathbb{R}^n)), \quad (4.22)$$

que es solución mild (dada como en la Definición 4.2 (página 110)) de la ecuación del calor fraccionaria (4.7), y que además, para todo  $t \in [0, T]$  verifica la igualdad de energía:

$$\begin{aligned} \|u(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + 2 \int_0^t \|u(\tau, \cdot)\|_{\dot{H}^{s/2}(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau &= \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \\ &+ 2 \int_0^t \langle f(\tau, \cdot), u(\tau, \cdot) \rangle_{\dot{H}^{-s/2}(\mathbb{R}^n) \times \dot{H}^{s/2}(\mathbb{R}^n)} d\tau. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Para mostrar el Teorema 4.1, antes introduciremos un resultado bastante útil dentro del análisis funcional y las ecuaciones diferenciales parciales conocido como: *teorema de punto fijo de Picard*, que nos permite concluir la existencia y unicidad de *soluciones mild*.

**TEOREMA 4.2** (Teorema de punto fijo de Picard). *Sean  $(E, \|\cdot\|_E)$  un espacio de Banach,  $U_0 \in E$  y  $B: E \times E \rightarrow E$  una forma bilineal y continua, es decir, existe una constante  $C_B > 0$  tal que para todo  $u, v \in E$  se tiene*

$$\|B(u, v)\|_E \leq C_B \|u\|_E \|v\|_E. \quad (4.24)$$

*Si además, se verifica la condición:*

$$4C_B \|U_0\|_E < 1, \quad (4.25)$$

*entonces, existe  $u \in E$  solución del problema de punto fijo:*

$$u = U_0 + B(u, u), \quad (4.26)$$

*y, que además, es la única solución de (4.26) en la bola  $B_E(0, 2\|U_0\|_E)$ .*

La demostración de este resultado puede revisarse a detalle en el **Apéndice D** de la página 146.

La idea de la demostración del Teorema 4.1 es precisamente una aplicación del Teorema 4.2, pues si recordamos, la *solución mild* para el problema (4.7) está dado por:

$$u(t, x) = (P_s(t, \cdot) * u_0)(x) + \int_0^t (P_s(t - \tau, \cdot) * f(\tau, \cdot))(x) d\tau,$$

la cual puede formularse como un problema de punto fijo abstracto.

Primero, consideremos el espacio de Banach

$$E = L^\infty(0, T, L^2(\mathbb{R}^n)) \cap L^2(0, T, \dot{H}^{s/2}(\mathbb{R}^n)),$$

dotado de la norma

$$\|\cdot\|_E = \sup_{t \in [0, T]} \|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \left( \int_0^T \|\cdot\|_{\dot{H}^{s/2}(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau \right)^{1/2}.$$

Además, consideremos

$$U_0(t, x) = (P_s(t, \cdot) * u_0)(x) + \int_0^t (P_s(t - \tau, \cdot) * f(\tau, \cdot))(x) d\tau,$$

para todo  $t > 0$  y para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ , y asumamos que

$$B(u, v) = 0,$$

para todo  $u, v \in E$ .

Notemos que hemos definido  $U_0$  como la solución mild de la ecuación (4.7), pues esta formulación mild depende únicamente de los datos del problema y de la solución fundamental. Adicionalmente, como el problema (4.7) es una ecuación lineal con respecto a  $u$ , es suficiente considerar la forma bilineal  $B(\cdot, \cdot) = 0$ . Sin embargo, si el problema es no lineal la forma bilineal  $B(\cdot, \cdot)$  no necesariamente debe ser nula. Dicho esto, pasemos a mostrar la existencia y unicidad de la solución mild.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 4.1.

*Existencia de la solución mild de la ecuación del calor fraccionaria (4.7).*

Con  $U_0$  y  $B(\cdot, \cdot)$  definidas arriba, verifiquemos las hipótesis del Teorema 4.2. Así, empecemos mostrando que  $U_0 \in E$ , es decir,  $\|U_0\|_E < +\infty$ .

En efecto, por definición de la norma del espacio  $E$  tenemos:

$$\begin{aligned} \|U_0\|_E = \sup_{t \in [0, T]} & \left\| P_s(t, \cdot) * u_0 + \int_0^t P_s(t - \tau, \cdot) * f(\tau, \cdot) d\tau \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ & + \left( \int_0^T \left\| P_s(t, \cdot) * u_0 + \int_0^t P_s(t - \tau, \cdot) * f(\tau, \cdot) d\tau \right\|_{\dot{H}^{s/2}(\mathbb{R}^n)}^2 dt \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Así, estudiemos por separado cada uno de los dos términos que aparecen sumados en el lado derecho de la identidad anterior. Partamos analizando la cantidad:

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, T]} & \left\| P_s(t, \cdot) * u_0 + \int_0^t P_s(t - \tau, \cdot) * f(\tau, \cdot) d\tau \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ & \leq \sup_{t \in [0, T]} \|P_s(t, \cdot) * u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \sup_{t \in [0, T]} \left\| \int_0^t P_s(t - \tau, \cdot) * f(\tau, \cdot) d\tau \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

Ahora, sea  $0 \leq t \leq T$  fijo, hagamos estimaciones para cada uno de los términos que aparecen en el lado derecho de la desigualdad anterior.

Por un lado, de las desigualdades de Young en variable de espacio, se sigue que

$$\|P_s(t, \cdot) * u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \|P_s(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Luego, por la Proposición 4.6 (página 108) tenemos que existe  $c > 0$ , independiente del tiempo, tal que

$$\|P_s(t, \cdot) * u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq c \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

en consecuencia,

$$\sup_{t \in [0, T]} \|P_s(t, \cdot) * u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq c \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} < +\infty. \quad (4.28)$$

Por otro lado, puesto que  $(L^2(\mathbb{R}^n))' = L^2(\mathbb{R}^n)$  tenemos que

$$\left\| \int_0^t P_s(t - \tau, \cdot) * f(\tau, \cdot) d\tau \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \sup_{\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq 1} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_0^t (P_s(t - \tau, \cdot) * f(\tau, \cdot))(x) d\tau \right) \varphi(x) dx \right|.$$

Entonces, notando por  $\tilde{P}_s$  la reflexión en variable espacial de  $P_s$ , y para todo  $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$

tal que  $\|\varphi\|_{L^2} \leq 1$ , se sigue que

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_0^t (P_s(t - \tau, \cdot) * f(\tau, \cdot))(x) d\tau \right) \varphi(x) dx \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_0^t \left( \int_{\mathbb{R}^n} P_s(t - \tau, x - y) f(\tau, y) dy \right) d\tau \right) \varphi(x) dx \right| \\ &= \left| \int_0^t \left( \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^n} P_s(t - \tau, x - y) \varphi(x) dx \right) f(\tau, y) dy \right) d\tau \right| \\ &= \left| \int_0^t \left( \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^n} P_s(t - \tau, -(y - x)) \varphi(x) dx \right) f(\tau, y) dy \right) d\tau \right| \\ &= \left| \int_0^t \left( \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{P}_s(t - \tau, y - x) \varphi(x) dx \right) f(\tau, y) dy \right) d\tau \right| \\ &\leq \int_0^t \left| \int_{\mathbb{R}^n} \left( \tilde{P}_s(t - \tau, \cdot) * \varphi \right) (y) f(\tau, y) dy \right| d\tau, \end{aligned}$$

Adicionalmente, por la Proposición 3.11 (página 94), el espacio dual de  $\dot{H}^{s/2}(\mathbb{R}^n)$  es el espacio  $\dot{H}^{-s/2}(\mathbb{R}^n)$ , para todo  $s < n$ , entonces requerimos que  $n \geq 2$ , y en consecuencia

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} \left( \tilde{P}_s(t - \tau, \cdot) * \varphi \right) (y) f(\tau, y) dy \right| \leq \left\| \tilde{P}_s(t - \tau, \cdot) * \varphi \right\|_{\dot{H}^{s/2}(\mathbb{R}^n)} \|f(\tau, \cdot)\|_{\dot{H}^{-s/2}(\mathbb{R}^n)},$$

e integrando en tiempo de 0 a  $t$ , tenemos

$$\int_0^t \left| \int_{\mathbb{R}^n} \left( \tilde{P}_s(t - \tau, \cdot) * \varphi \right) (y) f(\tau, y) dy \right| d\tau \leq \int_0^t \left\| \tilde{P}_s(t - \tau, \cdot) * \varphi \right\|_{\dot{H}^{s/2}(\mathbb{R}^n)} \|f(\tau, \cdot)\|_{\dot{H}^{-s/2}(\mathbb{R}^n)} d\tau.$$

Ahora, usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz en variable de tiempo en el lado derecho de la desigualdad anterior, tenemos

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \left\| \tilde{P}_s(t - \tau, \cdot) * \varphi \right\|_{\dot{H}^{s/2}(\mathbb{R}^n)} \|f(\tau, \cdot)\|_{\dot{H}^{-s/2}(\mathbb{R}^n)} d\tau \\
& \leq \left( \int_0^t \left\| \tilde{P}_s(t - \tau, \cdot) * \varphi \right\|_{\dot{H}^{s/2}(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau \right)^{1/2} \left( \int_0^t \|f(\tau, \cdot)\|_{\dot{H}^{-s/2}(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau \right)^{1/2} \\
& \leq \left( \int_0^t \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^s \left| \left( \tilde{P}_s(t - \tau, \cdot) * \varphi \right)^\wedge(\xi) \right|^2 d\xi \right) d\tau \right)^{1/2} \left( \int_0^T \|f(\tau, \cdot)\|_{\dot{H}^{-s/2}}^2 d\tau \right)^{1/2} \\
& = \left( \int_0^t \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^s \left| \tilde{P}_s(t - \tau, \xi) \right|^2 |\widehat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi \right) d\tau \right)^{1/2} \left( \int_0^T \|f(\tau, \cdot)\|_{\dot{H}^{-s/2}}^2 d\tau \right)^{1/2} \\
& = \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\varphi}(\xi)|^2 \left( \int_0^t |\xi|^s e^{-2(2\pi)^s |\xi|^s (t-\tau)} d\tau \right) d\xi \right)^{1/2} \left( \int_0^T \|f(\tau, \cdot)\|_{\dot{H}^{-s/2}}^2 d\tau \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Luego, tomando  $\zeta = t - \tau$  en el primer término del lado derecho de la desigualdad anterior, se sigue que

$$\begin{aligned}
& \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\varphi}(\xi)|^2 \left( \int_0^t |\xi|^s e^{-2(2\pi)^s |\xi|^s \zeta} d\zeta \right) d\xi \right)^{1/2} \left( \int_0^T \|f(\tau, \cdot)\|_{\dot{H}^{-s/2}}^2 d\tau \right)^{1/2} \\
& \leq \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\varphi}(\xi)|^2 \left( \int_0^{+\infty} |\xi|^s e^{-2(2\pi)^s |\xi|^s \zeta} d\zeta \right) d\xi \right)^{1/2} \left( \int_0^T \|f(\tau, \cdot)\|_{\dot{H}^{-s/2}}^2 d\tau \right)^{1/2} \\
& = c \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \left( \int_0^T \|f(\tau, \cdot)\|_{\dot{H}^{-s/2}}^2 d\tau \right)^{1/2} \\
& = c \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \left( \int_0^T \|f(\tau, \cdot)\|_{\dot{H}^{-s/2}(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau \right)^{1/2},
\end{aligned}$$

y puesto que  $\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq 1$ , se sigue que

$$\left\| \int_0^t P_s(t - \tau, \cdot) * f(\tau, \cdot) d\tau \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq c \left( \int_0^T \|f(\tau, \cdot)\|_{\dot{H}^{-s/2}}^2 d\tau \right)^{1/2}.$$

Así,

$$\sup_{t \in [0, T]} \left\| \int_0^t P_s(t - \tau, \cdot) * f(\tau, \cdot) d\tau \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq c \left( \int_0^T \|f(\tau, \cdot)\|_{\dot{H}^{-s/2}}^2 d\tau \right)^{1/2} < +\infty. \quad (4.29)$$

Ahora, estudiemos el término  $\left( \int_0^T \|U_0\|_{\dot{H}^{s/2}(\mathbb{R}^n)}^2 dt \right)^{1/2}$ . Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} & \left( \int_0^T \left\| P_s(t, \cdot) * u_0 + \int_0^t P_s(t - \tau, \cdot) * f(\tau, \cdot) d\tau \right\|_{\dot{H}^{s/2}(\mathbb{R}^n)}^2 dt \right)^{1/2} \\ & \leq c \left( \int_0^T \|P_s(t, \cdot) * u_0\|_{\dot{H}^{s/2}(\mathbb{R}^n)}^2 dt \right)^{1/2} + \left( \int_0^T \left\| \int_0^t P_s(t - \tau, \cdot) * f(\tau, \cdot) d\tau \right\|_{\dot{H}^{s/2}(\mathbb{R}^n)}^2 dt \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Procedamos a realizar estimaciones para cada uno de los términos que aparecen en el lado derecho de esta última desigualdad.

Así, notemos que

$$\begin{aligned} & \left( \int_0^T \|P_s(t, \cdot) * u_0\|_{\dot{H}^{s/2}(\mathbb{R}^n)}^2 dt \right)^{1/2} \\ & = \left( \int_0^T \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^s |(P_s(t, \cdot) * u_0)^\wedge(\xi)|^2 d\xi \right) dt \right)^{1/2} \\ & = \left( \int_0^T \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^s |\widehat{P}_s(t, \xi) \widehat{u}_0(\xi)|^2 d\xi \right) dt \right)^{1/2} \\ & = \left( \int_0^T \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^s |e^{-(2\pi)^s |\xi|^s t} \widehat{u}_0(\xi)|^2 d\xi \right) dt \right)^{1/2} \\ & = \left( \int_0^T \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^s e^{-2(2\pi)^s |\xi|^s t} |\widehat{u}_0(\xi)|^2 d\xi \right) dt \right)^{1/2} \\ & = \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{u}_0(\xi)|^2 \left( \int_0^T |\xi|^s e^{-2(2\pi)^s |\xi|^s t} dt \right) d\xi \right)^{1/2} \\ & \leq \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{u}_0(\xi)|^2 \left( \int_0^{+\infty} |\xi|^s e^{-2(2\pi)^s |\xi|^s t} dt \right) d\xi \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

de donde se tiene que

$$\left( \int_0^T \|P_s(t, \cdot) * u_0\|_{\dot{H}^{s/2}(\mathbb{R}^n)}^2 dt \right)^{1/2} \leq c \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{u}_0(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} < +\infty. \quad (4.30)$$

Por otro lado, estudiemos la cantidad

$$\left( \int_0^T \left\| \int_0^t P_s(t - \tau, \cdot) * f(\tau, \cdot) d\tau \right\|_{\dot{H}^{s/2}(\mathbb{R}^n)}^2 dt \right)^{1/2}$$

$$\begin{aligned}
&= \left( \int_0^T \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^s \left| \left( \int_0^t P_s(t-\tau, \cdot) * f(\tau, \cdot) d\tau \right)^\wedge(\xi) \right|^2 d\xi \right) dt \right)^{1/2} \\
&= \left( \int_0^T \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^s \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} \left( \int_0^t (P_s(t-\tau, \cdot) * f(\tau, \cdot))(x) d\tau \right) dx \right|^2 d\xi \right) dt \right)^{1/2} \\
&= \left( \int_0^T \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^s \left| \int_0^t \left( \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} (P_s(t-\tau, \cdot) * f(\tau, \cdot))(x) dx \right) d\tau \right|^2 d\xi \right) dt \right)^{1/2} \\
&\leq \left( \int_0^T \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^s \left| \int_0^t (P_s(t-\tau, \cdot) * f(\tau, \cdot))^\wedge(\xi) d\tau \right|^2 d\xi \right) dt \right)^{1/2} \\
&\leq \left( \int_0^T \left( \int_{\mathbb{R}^n} \left| |\xi|^{s/2} \int_0^t \widehat{P}_s(t-\tau, \xi) \widehat{f}(\tau, \xi) d\tau \right|^2 d\xi \right) dt \right)^{1/2},
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
&\left( \int_0^T \left\| \int_0^t P_s(t-\tau, \cdot) * f(\tau, \cdot) d\tau \right\|_{\dot{H}^{s/2}(\mathbb{R}^n)}^2 dt \right)^{1/2} \\
&\leq \left( \int_0^T \left( \int_{\mathbb{R}^n} \left| |\xi|^{s/2} \int_0^t e^{-(2\pi)^s |\xi|^s (t-\tau)} \widehat{f}(\tau, \cdot) d\tau \right|^2 d\xi \right) dt \right)^{1/2}. \quad (4.31)
\end{aligned}$$

Pero, para todo  $\xi \in \mathbb{R}^n$  fijo, tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_0^t e^{-(2\pi)^s |\xi|^s (t-\tau)} \widehat{f}(\tau, \xi) d\tau &= \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[0, +\infty[}(t) e^{-(2\pi)^s |\xi|^s (t-\tau)} \mathbf{1}_{[0, t[}(\tau) \widehat{f}(\tau, \xi) d\tau \\
&= \left( \mathbf{1}_{[0, +\infty[} e^{-(2\pi)^s |\xi|^s (\cdot)} \star \mathbf{1}_{[0, t[} \widehat{f}(\cdot, \xi) \right) (t), \quad (4.32)
\end{aligned}$$

donde el símbolo  $\star$  denota el producto en convolución en variable temporal. Entonces, tomando en la identidad anterior transformada de Fourier en tiempo, que en adelante notaremos por  $\mathcal{F}_t$ , se sigue que:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}_t \left( \mathbf{1}_{[0, +\infty[} e^{-(2\pi)^s |\xi|^s (\cdot)} \star \mathbf{1}_{[0, t[} \widehat{f}(\cdot, \xi) \right) (r) \\
&= \mathcal{F}_t \left( \mathbf{1}_{[0, +\infty[} e^{-(2\pi)^s |\xi|^s (\cdot)} \right) (r) \mathcal{F}_t \left( \mathbf{1}_{[0, t[} \widehat{f}(\cdot, \xi) \right) (r),
\end{aligned}$$

para todo  $r \in \mathbb{R}$ , donde  $r$  denota la variable de Fourier en tiempo.



Luego, notemos que la función  $t \mapsto \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(t)e^{-(2\pi)^s|\xi|^s t}$  pertenece a  $L^1(\mathbb{R})$ , así

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left( \mathbf{1}_{[0,+\infty[} e^{-(2\pi)^s|\xi|^s(\cdot)} \right) (r) &= \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(t) e^{-2\pi i t \cdot r} e^{-t|\xi|^s} dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-2\pi i t \cdot r} e^{-t|\xi|^s} dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t(2\pi i r + |\xi|^s)} dt \\ &= \frac{c}{2\pi i r + |\xi|^s}, \end{aligned}$$

con  $c > 0$ . De este modo,

$$\mathcal{F}_t \left( \mathbf{1}_{[0,+\infty[} e^{-(2\pi)^s|\xi|^s(\cdot)} \star \mathbf{1}_{[0,t[} \widehat{f}(\cdot, \xi) \right) (r) = \frac{c}{2\pi i r + |\xi|^s} \mathcal{F} \left( \mathbf{1}_{[0,t[} \widehat{f}(\cdot, \xi) \right) (r). \quad (4.33)$$

Entonces, reemplazando la identidad (4.32) en la ecuación (4.31) y usando la identidad de Plancherel (página 30) en variable de tiempo, tenemos

$$\begin{aligned} & \left( \int_0^T \left\| \int_0^t P_s(t-\tau, \cdot) * f(\tau, \cdot) d\tau \right\|_{\dot{H}^{s/2}(\mathbb{R}^n)}^2 dt \right)^{1/2} \\ &= \left( \int_0^T \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{s/2} \left| \mathbf{1}_{[0,+\infty[} e^{-(2\pi)^s|\xi|^s(\cdot)} \star \mathbf{1}_{[0,t[} \widehat{f}(\cdot, \xi) \right| (t) \right|^2 d\xi \right) dt \right)^{1/2} \\ &= \left( \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[0,T[}(t) \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{s/2} \left| \mathbf{1}_{[0,+\infty[} e^{-(2\pi)^s|\xi|^s(\cdot)} \star \mathbf{1}_{[0,t[} \widehat{f}(\cdot, \xi) \right| (t) \right|^2 d\xi \right) dt \right)^{1/2} \\ &= \left( \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{s/2} \left| \mathbf{1}_{[0,T[}(t) \left( \mathbf{1}_{[0,+\infty[} e^{-(2\pi)^s|\xi|^s(\cdot)} \star \mathbf{1}_{[0,t[} \widehat{f}(\cdot, \xi) \right) (t) \right|^2 d\xi \right) dt \right)^{1/2} \\ &= \left( \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{s/2} \left| \mathcal{F}_t \left( \mathbf{1}_{[0,T[} \left( \mathbf{1}_{[0,+\infty[} e^{-(2\pi)^s|\xi|^s(\cdot)} \star \mathbf{1}_{[0,t[} \widehat{f}(\cdot, \xi) \right) \right) (r) \right|^2 d\xi \right) dr \right)^{1/2} \\ &= \left( \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{s/2} \left[ \mathcal{F}_t \left( \mathbf{1}_{[0,T[} \right) \star \mathcal{F}_t \left( \mathbf{1}_{[0,+\infty[} e^{-(2\pi)^s|\xi|^s(\cdot)} \star \mathbf{1}_{[0,t[} \widehat{f}(\cdot, \xi) \right) \right] (r) \right|^2 d\xi \right) dr \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Ahora, usando la ecuación (4.33) en la última identidad tenemos

$$\begin{aligned} & \left( \int_0^T \left\| \int_0^t P_s(t-\tau, \cdot) * f(\tau, \cdot) d\tau \right\|_{\dot{H}^{s/2}(\mathbb{R}^n)}^2 dt \right)^{1/2} \\ & \leq \left( \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{s/2} \int_{\mathbb{R}} \left( \frac{c}{2\pi i \tau + |\xi|^s} \right) \mathcal{F}_t \left( \mathbf{1}_{[0,T[} \right) (r-\tau) \mathcal{F}_t \left( \mathbf{1}_{[0,t[} \widehat{f}(\cdot, \xi) \right) (\tau) d\tau \right|^2 d\xi \right) dr \right)^{1/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left( \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}^n} \left| |\xi|^{-s/2} \int_{\mathbb{R}} \left( \frac{c |\xi|^s}{2\pi i \tau + |\xi|^s} \right) \mathcal{F}_t(\mathbf{1}_{[0,T]})(r - \tau) \mathcal{F}_t(\mathbf{1}_{[0,t]} \hat{f}(\cdot, \xi))(\tau) d\tau \right|^2 d\xi \right) dr \right)^{1/2} \\
&\leq C \left( \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}^n} \left| |\xi|^{-s/2} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}_t(\mathbf{1}_{[0,T]})(r - \tau) \mathcal{F}_t(\mathbf{1}_{[0,t]} \hat{f}(\cdot, \xi))(\tau) d\tau \right|^2 d\xi \right) dr \right)^{1/2} \\
&\leq C \left( \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}^n} \left| |\xi|^{-s/2} \left[ \mathcal{F}_t(\mathbf{1}_{[0,T]} \star \mathcal{F}_t(\mathbf{1}_{[0,t]} \hat{f}(\cdot, \xi)) \right](r) \right|^2 d\xi \right) dr \right)^{1/2} \\
&\leq C \left( \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}^n} \left| \mathcal{F}_t(|\xi|^{-s/2} \mathbf{1}_{[0,T]} \mathbf{1}_{[0,t]} \hat{f}(\cdot, \xi))(r) \right|^2 d\xi \right) dr \right)^{1/2},
\end{aligned}$$

donde

$$C = \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \left( \sup_{\tau \in \mathbb{R}} \left| \frac{c |\xi|^s}{2\pi i \tau + |\xi|^s} \right| \right),$$

la cual es una cantidad finita pues para todo  $\xi \in \mathbb{R}^n$  tenemos

$$\left| \frac{c |\xi|^s}{2\pi i \tau + |\xi|^s} \right| \leq c.$$

Luego, usando la identidad de Plancherel (página 30) en variable de tiempo, tenemos

$$\begin{aligned}
&\left( \int_0^T \left\| \int_0^t P_s(t - \tau, \cdot) * f(\tau, \cdot) d\tau \right\|_{\dot{H}^{s/2}(\mathbb{R}^n)}^2 dt \right)^{1/2} \\
&\leq C \left( \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}^n} \left| |\xi|^{-s/2} \mathbf{1}_{[0,T]}(t) \hat{f}(\cdot, \xi)(t) \right|^2 d\xi \right) dt \right)^{1/2} \\
&= C \left( \int_0^T \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{-s} |\hat{f}(\cdot, \xi)(t)|^2 d\xi \right) dt \right)^{1/2} \\
&\leq C \left( \int_0^T \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{-s} |\hat{f}(\cdot, \xi)(t)|^2 d\xi \right) dt \right)^{1/2},
\end{aligned}$$

entonces

$$\left( \int_0^T \left\| \int_0^t P_s(t - \tau, \cdot) * f(\tau, \cdot) d\tau \right\|_{\dot{H}^{s/2}(\mathbb{R}^n)}^2 dt \right)^{1/2} \leq C \left( \int_0^T \|f(t, \cdot)\|_{\dot{H}^{-s/2}(\mathbb{R}^n)}^2 dt \right)^{1/2}. \quad (4.34)$$

Volviendo a (4.27) de la página 117 y de las estimaciones (4.28), (4.29), (4.30) y (4.34)

tenemos:

$$\|U_0\|_E \leq c \left[ \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \left( \int_0^T \|f(t, \cdot)\|_{\dot{H}^{-s/2}(\mathbb{R}^n)}^2 dt \right)^{1/2} \right]$$

$$+ C \left[ \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \left( \int_0^T \|f(t, \cdot)\|_{\dot{H}^{-s/2}(\mathbb{R}^n)}^2 dt \right)^{1/2} \right].$$

En consecuencia,

$$\|U_0\|_E \leq C \left[ \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \left( \int_0^T \|f(t, \cdot)\|_{\dot{H}^{-s/2}(\mathbb{R}^n)}^2 dt \right)^{1/2} \right], \quad (4.35)$$

donde  $C$  es una constante positiva.

De otra parte, recordemos que hemos definido  $B(u, v) = 0$  para todo  $u, v \in E$ . Así, para toda constante  $C_B > 0$  se verifica la desigualdad (4.24) de la página 115.

Ahora, queremos verificar la condición (4.25) de la página 115 y para ello vamos a tomar

$$C_B = \frac{1}{8C \left[ \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \left( \int_0^T \|f(t, \cdot)\|_{\dot{H}^{-s/2}(\mathbb{R}^n)}^2 dt \right)^{1/2} \right]}.$$

Luego, de la desigualdad (4.35) tenemos

$$4C_B \|U_0\|_E \leq 4C_B \left[ C \left( \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \left( \int_0^T \|f(t, \cdot)\|_{\dot{H}^{-s/2}(\mathbb{R}^n)}^2 dt \right)^{1/2} \right) \right] = \frac{1}{2} < 1.$$

De este modo, por el Teorema 4.2, existe  $u \in L^\infty(0, T, L^2(\mathbb{R}^n)) \cap L^2(0, T, \dot{H}^{s/2}(\mathbb{R}^n))$  solución de la ecuación de punto fijo

$$u = U_0 + B(u, u) = (P_s(t, \cdot) * u_0)(x) + \int_0^t (P_s(t - \tau, \cdot) * f(\tau, \cdot))(x) d\tau,$$

que, además, es única en la bola  $B_E(0, 2\|U_0\|_E)$ .

*Unicidad de la solución mild de la ecuación del calor fraccionaria (4.7):*

Notemos que de momento solo tenemos unicidad de la solución sobre  $B_E(0, 2\|U_0\|_E)$ .

Así, supongamos que existe otra solución mild  $v \in E$  del problema (4.7) con los mismos

datos  $u_0$  y  $f$ . Entonces, por la Definición 4.2 (Solución mild) de la página 110 podemos escribir:

$$v(t, x) = (P_s(t, \cdot) * u_0)(x) + \int_0^t (P_s(t - \tau, \cdot) * f(\tau, \cdot))(x) d\tau,$$

que al igual que la solución  $u$ , está dada únicamente en términos de la solución fundamental  $P_s$ , y de los datos  $u_0$  y  $f$ . Así, tenemos la unicidad de la solución mild  $u$  en todo el espacio de energía  $L^\infty(0, T, L^2(\mathbb{R}^n)) \cap L^2(0, T, \dot{H}^{s/2}(\mathbb{R}^n))$ .

*La solución mild verifica la ecuación del calor fraccionaria (4.7) (en el sentido de las distribuciones temperadas):*

Mostremos que la *solución mild*  $u$ , satisface para todo  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$  la siguiente relación:

$$\langle \partial_t u, \varphi \rangle + \langle (-\Delta)^{s/2} u, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle. \quad (4.36)$$

En efecto, sea  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ , entonces

$$\begin{aligned} \langle \partial_t u, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}} \partial_t \left[ (P_s(t, \cdot) * u_0)(x) + \int_0^t (P_s(t - \tau, \cdot) * f(\tau, \cdot))(x) d\tau \right] \varphi(t, x) dt dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}} \left[ (\partial_t P_s(t, \cdot) * u_0)(x) + \partial_t \left( \int_0^t ((P_s(t, \cdot) P_s(-\tau, \cdot)) * f(\tau, \cdot))(x) d\tau \right) \right] \varphi(t, x) dt dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}} \left[ (\partial_t P_s(t, \cdot) * u_0)(x) + \partial_t \left( \left( P_s(t, \cdot) \int_0^t P_s(-\tau, \cdot) * f(\tau, \cdot) d\tau \right) (x) \right) \right] \varphi(t, x) dt dx, \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} \langle \partial_t u, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}} \left[ (\partial_t P_s(t, \cdot) * u_0)(x) + \left( \partial_t P_s(t, \cdot) \int_0^t P_s(-\tau, \cdot) * f(\tau, \cdot) d\tau \right) (x) \right. \\ &\quad \left. + \left( P_s(t, \cdot) \partial_t \left( \int_0^t P_s(-\tau, \cdot) * f(\tau, \cdot) d\tau \right) \right) (x) \right] \varphi(t, x) dt dx, \quad (4.37) \end{aligned}$$

para todo  $0 \leq t < T$  y  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Además, de la Proposición 4.4 (página 106) sabemos que  $\partial_t P_s(t, x) = -(-\Delta)^{s/2} P_s(t, x)$ , y usando esta identidad en el lado derecho de la ecuación (4.37) tenemos:

$$\begin{aligned}
\langle \partial_t u, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}} \left[ \left( -(-\Delta)^{s/2} P_s(t, \cdot) * u_0 \right) (x) \right. \\
&\quad \left. + \left( -(-\Delta)^{s/2} P_s(t, \cdot) \int_0^t P_s(-\tau, \cdot) * f(\tau, \cdot) d\tau \right) (x) \right. \\
&\quad \left. + (P_s(t, \cdot) (P_s(-t, \cdot) * f(t, \cdot))) (x) \right] \varphi(t, x) dt dx,
\end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}} \left[ -(-\Delta)^{s/2} (P_s(t, \cdot) * u_0) (x) \right. \\
&\quad \left. - (-\Delta)^{s/2} \left( \int_0^t (P_s(t - \tau, \cdot) * f(\tau, \cdot)) (x) d\tau \right) (x) + f(t, x) \right] \varphi(t, x) dt dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}} \left[ -(-\Delta)^{s/2} \left( (P_s(t, \cdot) * u_0) + \int_0^t P_s(t - \tau, \cdot) * f(\tau, \cdot) d\tau \right) (x) + f(t, x) \right] \varphi(t, x) dt dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}} \left[ -(-\Delta)^{s/2} u(t, x) + f(t, x) \right] \varphi(t, x) dt dx \\
&= \left\langle -(-\Delta)^{s/2} u + f, \varphi \right\rangle,
\end{aligned}$$

para todo  $0 \leq t < T$  y  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Resta verificar que la solución mild  $u$  satisface la condición inicial  $u(0, \cdot) = u_0$ . Para ello mostremos que se tiene:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} u(t, \cdot) = u_0, \quad \text{en } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n).$$

Sea  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , entonces gracias al teorema de convergencia dominada de Lebesgue y a la Proposición 4.5 (página 106), para todo  $t > 0$ , se sigue que

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow 0^+} \langle u(t, \cdot), \psi \rangle &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} \left[ (P_s(t, \cdot) * u_0) (x) + \int_0^t (P_s(t - \tau, \cdot) * f(\tau, \cdot)) (x) d\tau \right] \psi(x) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[ (P_s(t, \cdot) * u_0) (x) + \int_0^t (P_s(t - \tau, \cdot) * f(\tau, \cdot)) (x) d\tau \right] \psi(x) dx \\
&= \langle \delta_0 * u_0, \psi \rangle = \langle u_0, \psi \rangle.
\end{aligned}$$

Notemos que al verificarse  $u \in L^\infty(0, T, L^2(\mathbb{R}^n)) \cap L^2(0, T, \dot{H}^{s/2}(\mathbb{R}^n))$ , entonces para todo  $n \geq 2$  y todo  $0 \leq t < T$  se sigue que

$$\partial_t u \in L^2(0, T, \dot{H}^{-s/2}(\mathbb{R}^n)) \quad \text{y} \quad (-\Delta)^{s/2} u \in L^2(0, T, \dot{H}^{-s/2}(\mathbb{R}^n)).$$

En efecto, como  $u \in L^2(0, T, \dot{H}^{s/2}(\mathbb{R}^n))$ , por la Proposición 3.10 (página 94) se tiene que  $(-\Delta)^{s/2} u \in L^2(0, T, \dot{H}^{-s/2}(\mathbb{R}^n))$ . Luego, de la ecuación (4.36) sabemos que

$$\partial_t u = f - (-\Delta)^{s/2} u, \quad \text{en } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n),$$

y puesto que  $f \in L^2(0, T, \dot{H}^{-s/2}(\mathbb{R}^n))$ , entonces podemos concluir que el término  $\partial_t u$  verifica  $\partial_t u \in L^2(0, T, \dot{H}^{-s/2}(\mathbb{R}^n))$ .

*Igualdad de energía:*

Al inicio de la subsección 2.1 (página 110) de este capítulo, se realizó una serie de estimaciones a priori, suponiendo suficiente regularidad e integrabilidad sobre los datos  $u_0$  y  $f$  hasta obtener la ecuación (4.20) de la página 112:

$$\|u(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + 2 \int_0^t \|u(\tau, \cdot)\|_{\dot{H}^{s/2}(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau = \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + 2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} f(\tau, x) u(\tau, x) dx d\tau.$$

Ahora, puesto que por hipótesis  $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$  y  $f \in L^2(0, T, \dot{H}^{-s/2}(\mathbb{R}^n))$ , siguiendo las mismas líneas hechas en la subsección 2.1 (página 110), podemos obtener la misma identidad dada arriba. Si además, usamos la dualidad entre los espacios  $\dot{H}^{s/2}(\mathbb{R}^n)$  y  $\dot{H}^{-s/2}(\mathbb{R}^n)$  dada en la Proposición 3.11 (página 94), se sigue que:

$$\begin{aligned} \|u(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + 2 \int_0^t \|u(\tau, \cdot)\|_{\dot{H}^{s/2}(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau \\ = \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + 2 \int_0^t \langle f(\tau, \cdot), u(\tau, \cdot) \rangle_{\dot{H}^{-s/2}(\mathbb{R}^n) \times \dot{H}^{s/2}(\mathbb{R}^n)} d\tau. \end{aligned}$$

□

La hipótesis  $n \geq 2$  es necesaria pues en la demostración hemos usado el resultado de dualidad entre los espacios  $\dot{H}^{s/2}(\mathbb{R}^n)$  y  $\dot{H}^{-s/2}(\mathbb{R}^n)$  dado en la Proposición 3.11 (página 94), el cual requiere esta condición.

#### 4. Regularidad maximal de las soluciones mild

El objetivo principal de esta sección es estudiar la regularidad en variable de espacio de la *solución mild*  $u$  en el marco de los espacios de Sobolev fraccionarios.

Recordemos que en el Teorema 4.1 (página 114), a partir de los datos  $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$  y  $f \in L^2(0, T, \dot{H}^{-s/2}(\mathbb{R}^n))$ , la solución mild verifica  $u \in L^2(0, T, \dot{H}^{s/2}(\mathbb{R}^n))$ , y entonces para casi todo tiempo  $t \in [0, T]$  se tiene que  $u(t, \cdot) \in \dot{H}^{s/2}(\mathbb{R}^n)$ , lo que nos da una primera información sobre la regularidad en variable de espacio de la solución  $u$ .

Con el próximo resultado, dada  $u$  la *solución mild* del problema de Cauchy para la ecuación del calor fraccionaria (4.7), vamos a determinar cuál es su ganancia *maximal* de regularidad (en variable de tiempo) en el marco de los espacios de Sobolev homogéneos.

**TEOREMA 4.3** (Regularidad maximal de las soluciones mild). *Sean  $0 < T \leq +\infty$ ,  $0 < s < 2$  y  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $n \geq 2$ . Sean  $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$  un dato inicial,  $f \in L^2(0, T, \dot{H}^{-s/2}(\mathbb{R}^n))$  y*

$$u(t, x) = (P_s(t, \cdot) * u_0)(x) + \int_0^t (P_s(t - \tau, \cdot) * f(\tau, \cdot))(x) d\tau,$$

*la solución mild de la ecuación del calor fraccionaria (4.7) obtenida en el Teorema 4.1, que verifica  $u \in L^\infty(0, T, L^2(\mathbb{R}^n)) \cap L^2(0, T, \dot{H}^{s/2}(\mathbb{R}^n))$ .*

1. *Si el dato inicial  $u_0$  verifica además  $u_0 \in \dot{H}^{s_1}(\mathbb{R}^n)$ , con  $s_1 \in \mathbb{R}$ , entonces para todo  $s_2 \geq s_1$  tenemos*

$$\sup_{t \in ]0, T]} t^{(s_2 - s_1)/s} \|P_s(t, \cdot) * u_0\|_{\dot{H}^{s_2}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|u_0\|_{\dot{H}^{s_1}(\mathbb{R}^n)}. \quad (4.38)$$

2. Si la fuente exterior  $f$  verifica además  $f \in L^2(0, T, \dot{H}^{s_1}(\mathbb{R}^n))$ , con  $s_1 \in \mathbb{R}$ , entonces para  $s_2 = s_1 + s$ , donde  $s$  es el orden de homogeneidad del laplaciano fraccionario, se tiene que

$$\int_0^T \left\| \int_0^t P_s(t - \tau, \cdot) * f(\tau, \cdot) d\tau \right\|_{\dot{H}^{s_2}(\mathbb{R}^n)}^2 dt \leq C \int_0^T \|f(t, \cdot)\|_{\dot{H}^{s_1}(\mathbb{R}^n)}^2 dt. \quad (4.39)$$

Como se indicó, el objetivo de este teorema es estudiar la ganancia maximal de regularidad que puede tener la solución mild  $u$  a partir de una regularidad inicial (en variable de espacio) de los datos  $u_0$  y  $f$  en el espacio  $\dot{H}^{s_1}(\mathbb{R}^n)$ , con  $s_1 \in \mathbb{R}$ .

Recordemos que la *solución mild*  $u$  se escribe como la suma de dos términos:

$$u(t, x) = (P_s(t, \cdot) * u_0)(x) + \int_0^t (P_s(t - \tau, \cdot) * f(\tau, \cdot))(x) d\tau.$$

Así, en el primer punto del teorema anterior estudiamos la regularidad (en variable de espacio) del término  $P_s(t, \cdot) * u_0$ , pues en la estimación (4.38) vemos que a partir de la información  $u_0 \in \dot{H}^{s_1}(\mathbb{R}^n)$  obtenemos que  $P_s(t, \cdot) * u_0 \in \dot{H}^{s_2}(\mathbb{R}^n)$ , donde  $s_2$  es cualquier número real mayor o igual que  $s_1$ . Este hecho nos permite concluir que  $P_s(t, \cdot) * u_0$  es tan regular como se desea.

**Observación 4.6.** Para todo tiempo  $t > 0$ , el término  $P_s(t, \cdot) * u_0 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

En efecto, para  $u_0 \in \dot{H}^{s_1}(\mathbb{R}^n)$ , con  $s_1 \in \mathbb{R}$ , por la estimación (4.38) dada en el primer numeral del teorema anterior podemos concluir que para todo  $0 < t \leq T$  se tiene:

$$P_s(t, \cdot) * u_0 \in \bigcap_{s_2 \geq s_1} \dot{H}^{s_2}(\mathbb{R}^n). \quad (4.40)$$

Además, de la Proposición 4.6 (página 108) sabemos que  $P_s(t, \cdot) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , para todo  $t > 0$ , y por hipótesis también se tiene que  $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ , entonces por las desigualdades



de Young se sigue que

$$P_s(t, \cdot) * u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n). \quad (4.41)$$

Recordemos que para  $s > 0$  se verifica  $H^s(\mathbb{R}^n) = \dot{H}^s(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ . En consecuencia, de (4.40) y (4.41) tenemos que

$$P_s(t, \cdot) * u_0 \in \bigcap_{s_2 \geq \max\{s_1, 0\}} H^{s_2}(\mathbb{R}^n).$$

Ahora, de la Proposición 3.3 (página 80) tenemos que  $H^{s_2}(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$  para todo  $s_2 > 0$ . Por lo tanto,

$$P_s(t, \cdot) * u_0 \in \bigcap_{s_2 \geq 0} H^{s_2}(\mathbb{R}^n). \quad (4.42)$$

A partir de (4.42) y procediendo como en la demostración del Corolario 4.1 (página 105) concluimos que  $P_s(t, \cdot) * u_0 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ , para todo tiempo  $t > 0$ .

Por otro lado, en el segundo punto del teorema anterior se estudia la regularidad (en variable de espacio) del término  $\int_0^t P_s(t - \tau, \cdot) * f(\tau, \cdot) d\tau$ . Precisamente, si observamos la estimación (4.39) tenemos que a partir de la información  $f \in L^2(0, T, \dot{H}^{s_1})$  el término  $\int_0^t P_s(t - \tau, \cdot) * f(\tau, \cdot) d\tau \in \dot{H}^{s_2}$ , con  $s_2 = s_1 + s$ , lo que significa que existe una restricción en la ganancia de regularidad. En efecto, recordemos que para el término  $P_s(t, \cdot) * u_0$  se tiene una ganancia de regularidad donde el parámetro  $s_2 \in \mathbb{R}$  es cualquiera que verifica  $s_2 \geq s_1$ , mientras que para el término  $\int_0^t P_s(t - \tau, \cdot) * f(\tau, \cdot) d\tau$  esta ganancia viene dada por  $s_2 = s_1 + s$ .

La limitación en la ganancia de regularidad del término aquí arriba reposa esencialmente en el hecho de que la constante  $C > 0$  que aparece en la estimación (4.39) está dada por

la expresión

$$C = \left[ \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \left( \sup_{v \in [0, T]} \left| \frac{c |\xi|^{s_2 - s_1}}{2\pi i v + |\xi|^s} \right| \right) \right]^2, \quad (4.43)$$

la cual es una cantidad finita solamente si  $s_2 = s_1 + s$ .

Finalmente, dado que la solución mild está compuesta por estos dos términos vemos que su ganancia *maximal* de regularidad está limitada por la regularidad maximal del segundo término.

La idea de la próxima demostración es utilizar de manera conveniente una doble transformada de Fourier: en variable de espacio y en variable de tiempo.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 4.3. Sean  $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$  y  $t > 0$  fijo.

1. Supongamos que  $s_2 \geq s_1$ , entonces

$$\begin{aligned} \|P_s(t, \cdot) * u_0\|_{\dot{H}^{s_2}(\mathbb{R}^n)}^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s_2} |(P_s(t, \cdot) * u_0)^\wedge(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s_2} |\widehat{P}_s(t, \xi)|^2 |\widehat{u}_0(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2(s_2 - s_1)} e^{-2(2\pi)^s |\xi|^s t} |\xi|^{2s_1} |\widehat{u}_0(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \left( |\xi|^{2(s_2 - s_1)} e^{-2(2\pi)^s |\xi|^s t} \right) \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s_1} |\widehat{u}_0(\xi)|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Ahora, tomando  $z = t^{1/s} \xi$  se sigue que

$$\|P_s(t, \cdot) * u_0\|_{\dot{H}^{s_2}(\mathbb{R}^n)} \leq \left[ \sup_{z \in \mathbb{R}^n} \left( |z|^{2(s_2 - s_1)} e^{-2(2\pi)^s |z|^s} \right) \right]^{1/2} t^{-(s_2 - s_1)/s} \|u_0\|_{\dot{H}^{s_1}(\mathbb{R}^n)},$$

donde,

$$\left[ \sup_{z \in \mathbb{R}^n} \left( |z|^{2(s_2 - s_1)} e^{-2(2\pi)^s |z|^s} \right) \right]^{1/2} < +\infty,$$

gracias al decrecimiento rápido de la función exponencial y a que  $s_2 \geq s_1$ .

2. Por otro lado, de la identidad de Plancherel (página 30) en variable de tiempo, tenemos que

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \left\| \int_0^t P_s(t-\tau, \cdot) * f(\tau, \cdot) d\tau \right\|_{\dot{H}^{s_2}(\mathbb{R}^n)}^2 dt \\
&= \int_0^T \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s_2} \left| \left( \int_0^t P_s(t-\tau, \cdot) * f(\tau, \cdot) d\tau \right)^\wedge(\xi) \right|^2 d\xi \right) dt \\
&\leq \int_0^T \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s_2} \left| \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(\tau) \mathbf{1}_{[0,t]}(\tau) \widehat{P}_s(t-\tau, \xi) \widehat{f}(\tau, \xi) d\tau \right|^2 d\xi \right) dt \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s_2} \left( \int_{\mathbb{R}} \left| \left[ \mathbf{1}_{[0,T]} \left( \left( \mathbf{1}_{[0,+\infty[} \widehat{P}_s(\cdot, \xi) \right) \star \left( \mathbf{1}_{[0,t]} \widehat{f}(\cdot, \xi) \right) \right) \right] (t) \right|^2 dt \right) d\xi \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s_2} \left( \int_{\mathbb{R}} \left| \left[ \mathcal{F}_t \left( \mathbf{1}_{[0,T]} \right) \star \left( \mathcal{F}_t \left( \mathbf{1}_{[0,+\infty[} \widehat{P}_s(\cdot, \xi) \right) \mathcal{F}_t \left( \mathbf{1}_{[0,t]} \widehat{f}(\cdot, \xi) \right) \right) \right] (r) \right|^2 dr \right) d\xi.
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \left\| \int_0^t P_s(t-\tau, \cdot) * f(\tau, \cdot) d\tau \right\|_{\dot{H}^{s_2}(\mathbb{R}^n)}^2 dt \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s_1} \left( \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} \left( \frac{c|\xi|^{s_2-s_1}}{2\pi i v + |\xi|^s} \right) \mathcal{F}_t \left( \mathbf{1}_{[0,T]} \right) (v-r) \mathcal{F}_t \left( \mathbf{1}_{[0,t]} \widehat{f}(\cdot, \xi) \right) (v) dv \right|^2 dr \right) d\xi \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s_1} \left( \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}_t \left( \mathbf{1}_{[0,T]} \right) (v-r) \mathcal{F}_t \left( \mathbf{1}_{[0,t]} \widehat{f}(\cdot, \xi) \right) (v) dv \right|^2 dr \right) d\xi \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s_1} \left( \int_{\mathbb{R}} \left| \left[ \mathcal{F}_t \left( \mathbf{1}_{[0,T]} \right) \star \mathcal{F}_t \left( \mathbf{1}_{[0,t]} \widehat{f}(\cdot, \xi) \right) \right] (r) \right|^2 dr \right) d\xi \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s_1} \left( \int_{\mathbb{R}} \left| \mathcal{F}_t \left( \mathbf{1}_{[0,T]} \widehat{f}(\cdot, \xi) \right) (r) \right|^2 dr \right) d\xi.
\end{aligned}$$

Nuevamente, usando la identidad de Plancherel (página 30) en variable de tiempo, se sigue que

$$\begin{aligned}
\int_0^T \left\| \int_0^t P_s(t-\tau, \cdot) * f(\tau, \cdot) d\tau \right\|_{\dot{H}^{s_2}(\mathbb{R}^n)}^2 dt &\leq C \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s_1} \left( \int_{\mathbb{R}} \left| \mathbf{1}_{[0,T]}(t) \widehat{f}(t, \xi) \right|^2 dt \right) d\xi \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s_1} \left( \int_0^T \left| \widehat{f}(t, \xi) \right|^2 dt \right) d\xi \\
&\leq C \int_0^T \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s_1} \left| \widehat{f}(t, \xi) \right|^2 d\xi \right) dt,
\end{aligned}$$

donde

$$C = \left[ \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \left( \sup_{v \in [0, T]} \left| \frac{c |\xi|^{s_2 - s_1}}{2\pi i v + |\xi|^s} \right| \right) \right]^2 < +\infty,$$

siempre que  $s_2 = s_1 + s$ .

Por lo tanto, para  $s_2 = s_1 + s$  tenemos que

$$\int_0^T \left\| \int_0^t P_s(t - \tau, \cdot) * f(\tau, \cdot) d\tau \right\|_{\dot{H}^{s_2}(\mathbb{R}^n)}^2 dt \leq C \int_0^T \|f\|_{\dot{H}^{s_1}(\mathbb{R}^n)}^2 dt.$$

□

## Conclusiones

El objetivo principal de esta tesis fue el estudio del *problema de Cauchy para la ecuación del calor fraccionaria*:

$$(PF) \begin{cases} \partial_t u(t, x) + (-\Delta)^{s/2} u(t, x) = f(t, x), & (t, x) \in ]0, T] \times \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

donde  $0 < s < 2$ ,  $0 < T \leq +\infty$ . De manera más precisa, estudiamos la existencia y unicidad de sus soluciones mild

$$u(t, x) = (P_s(t, \cdot) * u_0)(x) + \int_0^t (P_s(t - \tau, \cdot) * f(\tau, \cdot))(x) d\tau, \quad (4.44)$$

en el marco de los espacios de Sobolev (ver el Teorema 4.1 de la página 114) y adicionalmente se trató de forma rigurosa la regularidad maximal de dichas soluciones (ver el Teorema 4.3 de la página 128), de modo que este estudio pueda ser contrastado con el resultado conocido para el caso clásico: *regularidad maximal del núcleo del calor* (ver el punto correspondiente a la regularidad maximal de las soluciones mild de la página 136).

Las conclusiones que se derivan del presente trabajo justamente hacen referencia a las herramientas y métodos estudiados y aplicados para lograr los objetivos planteados, las cuales presentamos a continuación.

### Herramientas de base

A lo largo del presente trabajo de titulación se introdujeron y utilizaron algunas herramientas clásicas del análisis armónico como: la transformada de Fourier y los espacios de Sobolev, ambas de gran relevancia en el estudio de las ecuaciones en derivadas parciales

pues por un lado la transformada de Fourier de acuerdo al numeral 5. de la Proposición 1.13 (página 45) nos permite dar sentido y tratar de manera sencilla la regularidad de una distribución temperada: si aplicamos la transformada de Fourier sobre la derivada de orden  $|\alpha|$  de una distribución temperada, la operación de derivación es sustituida por la multiplicación por el polinomio  $(2\pi i\xi)^\alpha$  en la variable  $\xi$ . Por otro lado, los espacios de Sobolev miden la regularidad de las distribuciones temperadas y pueden caracterizarse a través de la transformada de Fourier. Si además recordamos que estamos tratando el problema (PF) sobre todo el espacio  $\mathbb{R}^n$ , vemos que resulta natural emplear estas herramientas del análisis armónico para su estudio.

Notemos también que estas herramientas no son solo útiles para la ecuación del calor (clásica o fraccionaria), sino que también nos permiten abordar diversas ecuaciones en derivadas parciales como por ejemplo: la ecuación de Poisson estudiada en la página 27, la ecuación de onda o las ecuaciones de Navier-Stokes (ver Lemarié-Rieusset (2016)), siempre que estén definidas sobre todo  $\mathbb{R}^n$ .

### **Buen planteamiento en el sentido de Hadamard**

El Teorema 4.1 (página 114) corresponde a un resultado de existencia y unicidad de las soluciones mild para el problema (PF), cuya demostración aprovecha el hecho de que la formulación de estas soluciones, dada en la ecuación (4.44), puede ser expresada como un problema de punto fijo en el marco de los espacios de Sobolev, por lo que para construir dichas soluciones se hizo uso del Teorema 4.2 (Teorema de punto fijo de Picard) de la página 115. Mientras que la unicidad de estas soluciones sobre todo el espacio de energía  $L^\infty(0, T, L^2(\mathbb{R}^n)) \cap L^2(0, T, \dot{H}^{s/2}(\mathbb{R}^n))$  se obtiene nuevamente gracias a la formulación de la solución mild  $u$ , pues en el caso lineal esta se escribe únicamente en función de la solución fundamental  $P_s$  y los datos  $u_0$  y  $f$ .

El buen planteamiento de (PF) en el sentido de Hadamard se termina de verificar con la dependencia continua de la solución mild  $u$  con respecto a los datos  $u_0$  y  $f$  establecida por la *igualdad de energía* dada en la ecuación (4.23) de la página 115.

### Regularidad maximal de las soluciones mild

La mayor contribución de este trabajo es el estudio de la regularidad maximal de las soluciones mild para la ecuación del calor fraccionaria, presentado en el Teorema 4.3 (página 128). Para la demostración de este resultado se usó el hecho de que la solución mild  $u$ , dada como en la ecuación (4.44) de la página 134, se escribe como la suma de dos términos: en el primer término interviene el dato inicial  $u_0$ , mientras que en el segundo término interviene la fuente externa  $f$ . Esta la formulación explícita de  $u$  nos permite usar la transformada de Fourier para estudiar su regularidad en variable de espacio.

De manera más precisa, se verificó que a partir de la regularidad (medida en variable de espacio) de los datos  $u_0$  y  $f$  dada en el espacio de Sobolev homogéneo  $\dot{H}^{s_1}(\mathbb{R}^n)$ , con  $s_1 \in \mathbb{R}$ , la regularidad maximal que alcanza la solución mild  $u$  de la ecuación (4.44) de la página 134, es de  $s_1 + s$ , donde  $s$  es el orden de homogeneidad del laplaciano fraccionario. Esta limitación en la regularidad es causada por la regularidad del término correspondiente al dato  $f$  (ver la ecuación (4.43) de la página 131).

Vemos también que esta última conclusión es coherente con el caso clásico, pues si hacemos un breve contraste con el resultado de regularidad maximal del núcleo del calor (ver Lemarié-Rieusset (2016)), se muestra que a partir de los datos  $f \in L^2(0, T, H^{s_1}(\mathbb{R}^n))$  y  $u_0 \in H^{s_1}(\mathbb{R}^n)$ , con  $s_1 \in \mathbb{R}$ , la solución mild  $u \in L^\infty(0, T, H^{s_1}(\mathbb{R}^n)) \cap L^2(0, T, H^{s_1+2}(\mathbb{R}^n))$ , verifica

$$(PC) \begin{cases} \partial_t u(t, x) - \Delta u(t, x) = f(t, x), & (t, x) \in ]0, T] \times \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

es decir, que a partir de considerar datos en el espacio  $H^{s_1}(\mathbb{R}^n)$  su solución mild no puede ganar mayor regularidad (en variable de espacio) que 2, valor que corresponde el orden de homogeneidad del operador laplaciano clásico, similar a lo que mostramos para el caso fraccionario en el que la ganancia de regularidad en variable de espacio es igual a  $s$ , que corresponde al orden de homogeneidad del laplaciano fraccionario.

### **Futuros estudios**

Este primer trabajo sobre la ecuación del calor fraccionaria abre la puerta a estudios posteriores que son de relevancia en la investigación actual. Por ejemplo, si añadimos un término de transporte en el problema (PF) de la página 134, obtenemos de esta manera una gran variedad de modelos matemáticos de reacción-difusión que resultan interesantes para investigaciones futuras, ver por ejemplo: Brandolese y Karch (2008), Colombo y De Rosa (2018), Chamorro y Menozzi (2016).

Por otro lado, sabemos que los resultados logrados en esta investigación pueden ser extendidos a problemas más generales, reemplazando en (PF) al laplaciano fraccionario por un operador pseudodiferencial (Grubb, 2018), y usando herramientas propias de la *teoría de operadores pseudodiferenciales* (ver Friedman (2008), Ladyzhenskaya et al. (1968) y Lions y Magenes (1968)). Así también, estos resultados pueden ser extendidos a espacios funcionales que miden la regularidad de las funciones de manera más fina como los espacios de Besov.

Para terminar, el estudio de la ecuación de calor fraccionaria motiva la siguiente pregunta interesante: ¿qué sucede en cuanto a la estabilidad de esta ecuación cuando  $s \rightarrow 2^-$ ? Intuitivamente, se puede pensar que la familia de soluciones de la ecuación del calor fraccionaria  $(u_s)_{0 < s < 2}$  debe converger en algún sentido a la solución  $u$  de la ecuación del calor clásica cuando  $s \rightarrow 2^-$ . De momento se tiene un primer resultado



para la ecuación del calor fraccionaria sobre dominios acotados y regulares, con un dato inicial  $u_0 = 0$  (ver Biccari y Hernández-Santamaría (2018)), por lo que un proyecto de investigación en el corto plazo trataría de establecer resultados análogos para la misma ecuación del calor fraccionaria pero definida sobre todo el espacio  $\mathbb{R}^n$  y con un dato inicial  $u_0$  cualquiera.

## Apéndice

### Apéndice A

El propósito de este apéndice es establecer la siguiente identidad:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\lambda x)}{x} dx = \pi \operatorname{sgn}(\lambda), \quad \text{para todo } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Empecemos mostrando que para todo  $0 < a < b < +\infty$  tenemos

$$\left| \int_a^b \frac{\sin(x)}{x} dx \right| \leq 2. \quad (4.45)$$

En efecto, estudiemos esta estimación por casos.

Primer caso: si  $b \leq 1$ , entonces

$$\left| \int_a^b \frac{\sin(x)}{x} dx \right| \leq \int_a^b \frac{|\sin(x)|}{|x|} dx \leq \int_a^1 dx = 1 - a \leq 1.$$

Segundo caso: si  $a \leq 1 \leq b$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b \frac{\sin(x)}{x} dx \right| &= \left| \int_a^1 \frac{\sin(x)}{x} dx - \int_b^1 \frac{\sin(x)}{x} dx \right| \\ &\leq \int_a^1 \frac{|\sin(x)|}{|x|} dx + \int_b^1 \frac{|\sin(x)|}{|x|} dx \\ &\leq \int_a^1 dx + \int_b^1 dx = 2 - a - b \leq 2. \end{aligned}$$

Tercer caso: si  $a \geq 1$ . Integrando por partes tenemos:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b \frac{\sin(x)}{x} dx \right| &= \left| -\frac{\cos(x)}{x} \Big|_a^b - \int_a^b \frac{\cos(x)}{x^2} dx \right| \\ &\leq \left| \frac{\cos(a)}{a} \right| + \left| \frac{\cos(b)}{b} \right| + \int_a^b \frac{1}{x^2} dx \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \leq 2.$$

Por otro lado, para  $a > 0$  definimos

$$I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} e^{-ax} dx.$$

Mostremos que  $I(a)$  es continua en cero y diferenciable en  $a$ . Gracias a la acotación dada en (4.45) tenemos que

$$\lim_{a \rightarrow 0} I(a) = \lim_{a \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} e^{-ax} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} \lim_{a \rightarrow 0} e^{-ax} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = I(0).$$

Por lo tanto,  $I$  es continua. Además,

$$\begin{aligned} \frac{dI(a)}{da} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{I(a+h) - I(a)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} e^{-(a+h)x} dx - \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} e^{-ax} dx}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} \left( \frac{e^{-(a+h)x} - e^{-ax}}{h} \right) dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} \left[ \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{e^{-(a+h)x} - e^{-ax}}{h} \right) \right] dx \\ &= - \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} \frac{d(e^{-ax})}{da} dx \\ &= - \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} x e^{-ax} dx \\ &= - \int_0^{+\infty} \sin(x) e^{-ax} dx \\ &= \frac{ae^{-ax} \sin(x) + e^{-ax} \cos(x)}{1+a^2} \Big|_0^{+\infty} \\ &= -\frac{1}{1+a^2}. \end{aligned}$$

Luego, integrando la función  $\frac{dI(a)}{da}$  tenemos:

$$I(a) = - \int \frac{1}{1+a^2} da = -\arctan(a) + c. \quad (4.46)$$

De otra parte, gracias a la acotación dada en (4.45) podemos calcular el siguiente límite

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} I(a) = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} e^{-ax} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} \lim_{a \rightarrow +\infty} e^{-ax} dx = 0.$$

Así, de la identidad anterior se sigue que

$$0 = \lim_{a \rightarrow +\infty} I(a) = \lim_{a \rightarrow +\infty} -\arctan(a) + c = \frac{\pi}{2} + c, \quad (4.47)$$

de donde,  $c = \frac{\pi}{2}$  y por lo tanto

$$I(a) = \frac{\pi}{2} - \arctan(a),$$

de este modo,  $I(0) = \frac{\pi}{2}$ .

Notemos que para  $\lambda \in \mathbb{R}$ , la función  $\frac{\sin(\lambda x)}{x}$  es par, entonces

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\lambda x)}{x} dx = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\lambda x)}{x} dx. \quad (4.48)$$

Ahora, haciendo el cambio de variable  $y = \lambda x$  en la integral del lado derecho de la ecuación (4.48) tenemos

$$\operatorname{sgn}(\lambda) \int_0^{+\infty} \frac{\sin(y)}{y} dy = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(\lambda).$$

Finalmente, reemplazando esto último en (4.48) obtenemos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\lambda x)}{x} dx = \pi \operatorname{sgn}(\lambda).$$

como se quería.

## Apéndice B

Mostremos que en la Proposición 1.15 (página 51), la cantidad

$$C_{z,n} = \int_0^{+\infty} y^{z+n-1} w(y) dy < +\infty, \quad (4.49)$$

para todo  $z \in \mathbb{R}$  y todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Así, si  $n = 1$  entonces notemos que

$$\begin{aligned} w(y) &= \int_{S^0} e^{-2\pi iy \cdot \varphi} d\varphi \\ &= e^{-2\pi iy} + e^{2\pi iy} \\ &= \cos(2\pi y) - i \sin(2\pi y) + \cos(2\pi y) + i \sin(2\pi y) \\ &= 2 \cos(2\pi y), \end{aligned}$$

por lo que la ecuación (4.49) se puede reescribir como:

$$C_{z,1} = 2 \int_0^{+\infty} y^z \cos(2\pi y) dy < +\infty,$$

pues converge condicionalmente para  $-1 < z < 0$ .

Si  $n \geq 2$  entonces, puesto que

$$|w(y)| = \left| \int_{S^{n-1}} e^{-2\pi iy \cdot \varphi} d\varphi \right| \leq \int_{S^{n-1}} d\varphi = |S_{n-1}|,$$

donde  $|S_{n-1}|$  denota la medida de  $S_{n-1}$ , entonces la integral dada en (4.49) converge cerca del origen cuando  $z > -n$ , por lo que basta estudiar  $w(y)$  para  $|y| \geq 1$ . Entonces, si usamos en la ecuación (4.49) la fórmula

$$\int_{S^{n-1}} f(y, \varphi) d\varphi = \int_{-1}^1 \int_{S^{n-2}} f(r, \theta) (1-r^2)^{(n-2)/2} d\theta (1-r^2)^{-1/2} dr, \quad |y| \geq 0,$$

dada en el Apéndice D.2. de la página 441 de Grafakos (2008), donde  $f$  es una función definida sobre  $S^{n-1}$ , obtenemos

$$w(y) = c_n \int_{-1}^1 e^{2\pi i y \cdot r} (1-r^2)^{(n-2)/2} (1-r^2)^{-1/2} dr,$$

con  $c_n > 0$  es una constante. Luego, por la definición de función de Bessel  $J_v$ :

$$J_v(y) = c_v \int_{-1}^1 e^{iyr} (1-r^2)^{v-1/2} dr,$$

dada en el Apéndice B.1. de la página 425 de Grafakos (2008), donde  $v > -1/2$  y  $y \geq 0$ , tenemos que

$$w(y) = c_n J_{(n-2)/2}(2\pi y),$$

Así, por el comportamiento asintótico para la función de Bessel descrito en el Apéndice B.7. de la página 431 de Grafakos (2008) se sigue que

$$|w(y)| = c_n |J_{(n-2)/2}(2\pi y)| \leq c_n y^{1/2},$$

cuando  $n-2 > -1/2$  y  $y \geq 1$ . De este modo, vemos que para  $n \geq 2$  la integral (4.49) converge cuando  $z < -n + 1/2$ .

## Apéndice C

Verifiquemos que  $T_s\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , para todo  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .

En efecto,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |T_s\varphi(x)| dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left[ \frac{C_{n,s}}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|2\varphi(x) - \varphi(x+y) - \varphi(x-y)|}{|y|^{n+s}} dy \right] dx.$$

Luego, para  $M, N > 0$  reescribimos lo anterior como:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |T_s\varphi(x)| dx &= \frac{C_{n,s}}{2} \left\{ \int_{|x| \leq M} \left[ \int_{|y| \leq N} \frac{|2\varphi(x) - \varphi(x+y) - \varphi(x-y)|}{|y|^{n+s}} dy \right] dx \right. \\ &\quad + \int_{|x| > M} \left[ \int_{|y| \leq N} \frac{|2\varphi(x) - \varphi(x+y) - \varphi(x-y)|}{|y|^{n+s}} dy \right] dx \\ &\quad \left. + \int_{\mathbb{R}^n} \left[ \int_{|y| > M} \frac{|2\varphi(x) - \varphi(x+y) - \varphi(x-y)|}{|y|^{n+s}} dy \right] dx \right\}. \quad (4.50) \end{aligned}$$

De otra parte, usando la expansión en series de Taylor de segundo orden de  $\varphi$  en una vecindad del origen tenemos:

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \nabla\varphi(x) \cdot y + \frac{y^t D^2\varphi(x) y}{2!} + o(|y|^3), \quad (4.51)$$

$$\varphi(x-y) = \varphi(x) - \nabla\varphi(x) \cdot y + \frac{y^t D^2\varphi(x) y}{2!} + o(|y|^3), \quad (4.52)$$

y reemplazando (4.51) y (4.52) en la expresión dada en (4.50) obtenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |T_s\varphi(x)| dx &\leq \frac{C_{n,s}}{2} \left\{ \int_{|x| \leq M} \left[ \int_{|y| \leq N} \frac{2 \left| \frac{y^t D^2\varphi(x) y}{2!} + o(|y|^3) \right|}{|y|^{n+s}} dy \right] dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{|x| > M} \left[ \int_{|y| \leq N} \frac{2 \left| \frac{y^t D^2\varphi(x) y}{2!} + o(|y|^3) \right|}{|y|^{n+s}} dy \right] dx + \int_{\mathbb{R}^n} \left[ \int_{|y| > M} \frac{4|\varphi(x)|}{|y|^{n+s}} dy \right] dx \right\}. \end{aligned}$$

Así, también para  $N > 0$  suficientemente pequeño y por el teorema de Fubini se sigue que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |T_s \varphi(x)| dx \leq \frac{C_{n,s}}{2} \left\{ \int_{|x| \leq M} \left[ \int_{|y| \leq N} \frac{|D^2 \varphi(x)| |y|^2}{|y|^{n+s}} dy \right] dx \right. \\ \left. + \int_{|y| \leq N} \left[ \int_{|x| > M} \frac{|D^2 \varphi(x)| |y|^2}{|y|^{n+s}} dx \right] dy + \int_{|y| > M} \left[ \int_{\mathbb{R}^n} \frac{4|\varphi(x)|}{|y|^{n+s}} dx \right] dy \right\}.$$

Por último, como  $0 < s < 2$  tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |T_s \varphi(x)| dx \leq \frac{C_{n,s}}{2} \left\{ \int_{|x| \leq M} \left[ \int_{|y| \leq N} \|D^2 \varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} |y|^{-n-s+2} dy \right] dx \right. \\ \left. + \int_{|y| \leq N} \|D^2 \varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} |y|^{-n-s+2} dy + \int_{|y| > M} \frac{4\|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}}{|y|^{n+s}} dy \right\}, \quad (4.53)$$

entonces,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |T_s \varphi(x)| dx \leq \frac{C_{n,s}}{2} \left\{ \|D^2 \varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_0^M \left[ \int_0^N \rho^{-n-s+2} d\rho \right] d\sigma \right. \\ \left. + \|D^2 \varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \int_0^N \rho^{-n-s+2} d\rho + 4\|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \int_0^M \frac{1}{\rho^{n+s}} d\rho \right\} < +\infty. \quad (4.54)$$



## Apéndice D

DEMOSTRACIÓN DE LA TEOREMA 4.2 DEL CAPÍTULO 4. La idea de la demostración es construir iterativamente la solución del problema de punto fijo a partir del dato inicial  $U_0$ , con este propósito definimos

$$U_{n+1} = U_0 - B(U_n, U_n).$$

Ahora, notemos que para todo  $n \in \mathbb{N}$  y  $\delta = 1/4C_B > 0$  se tiene que  $\|U_n\|_E < 2\delta$ .

En efecto, notemos que  $\|U_0\|_E < \delta \leq 2\delta$ . Luego, por inducción supongamos que para  $n = k \in \mathbb{N}$  se tiene  $\|U_k\|_E < 2\delta$ , que junto con la continuidad de la forma bilineal  $B(\cdot, \cdot)$  implica que

$$\begin{aligned} \|U_{k+1}\|_E &= \|U_0 - B(U_k, U_k)\|_E \\ &\leq \|U_0\|_E + \|B(U_k, U_k)\|_E \\ &\leq \|U_0\|_E + C_B \|U_k\|_E^2 \\ &\leq \delta + C_B(2\delta)^2, \end{aligned}$$

pero como  $0 < 4C_B\delta < 1$ , se sigue que  $\|U_{k+1}\|_E \leq 2\delta$ . Esto muestra que para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $U_n \in \overline{B}(0, 2\delta)$ .

Ahora mostremos que la sucesión  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de Cauchy en  $E$ , para ello analicemos la siguiente cantidad

$$\begin{aligned} \|U_{n+1} - U_n\|_E &= \|(U_0 - B(U_n, U_n)) - (U_0 - B(U_{n-1}, U_{n-1}))\|_E \\ &= \|B(U_{n-1}, U_{n-1}) - B(U_n, U_n)\|_E \\ &= \|B(U_{n-1}, U_{n-1}) + B(U_{n-1}, U_n) - B(U_{n-1}, U_n) - B(U_n, U_n)\|_E \\ &= \|B(U_{n-1}, U_n - U_{n-1}) - B(U_n - U_{n-1}, e_n)\|_E \end{aligned}$$

$$\leq \|B(U_{n-1}, U_n - U_{n-1})\|_E + \|B(U_n - U_{n-1}, U_n)\|_E,$$

y nuevamente por la continuidad de la forma bilineal  $B(\cdot, \cdot)$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \|U_{n+1} - U_n\|_E &\leq C_B \|U_{n-1}\|_E \|U_n - U_{n-1}\|_E + C_B \|e_n\|_E \|U_n - U_{n-1}\|_E \\ &\leq 4C_B \delta \|U_n - U_{n-1}\|_E \\ &\leq (4C_B \delta)^2 \|U_{n-1} - U_{n-2}\|_E. \end{aligned}$$

Así, por recursividad se sigue que

$$\|U_{n+1} - U_n\|_E \leq (4C_B \delta)^n \|U_1 - U_0\|_E,$$

además, puesto que  $0 < 4C_B \delta < 1$ , al hacer  $n \rightarrow +\infty$  obtenemos

$$\|U_{n+1} - U_n\|_E \leq (4C_B \delta)^n \|U_1 - U_0\|_E \rightarrow 0,$$

de donde se sigue que en efecto  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de Cauchy en  $E$ . Adicionalmente, como  $E$  es un espacio de Banach entonces existe  $u \in E$  tal que  $\|u\| \leq 2\delta$  y verifica el problema de punto fijo dado en la ecuación (4.26) de la página 115.

De este modo, haciendo  $n \rightarrow +\infty$ , en el problema  $U_{n+1} = U_0 + B(U_n, U_n)$ , se tiene que  $u = U_0 + B(u, u)$ .

Finalmente, verifiquemos la unicidad de la solución. Sean  $u, v \in E$  soluciones del problema de punto fijo dado en la ecuación (4.26) de la página 115 con datos  $U_0, V_0 \in E$ , entonces

$$\begin{aligned} \|u - v\|_E &= \|(U_0 - B(u, u)) - (V_0 - B(v, v))\|_E \\ &\leq \|U_0 - V_0\|_E + \|B(u, u) + B(v, u) - B(v, u) - B(v, v)\|_E \\ &\leq \|U_0 - V_0\|_E + \|B(u - v, u)\|_E + \|B(v, u - v)\|_E \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \|U_0 - V_0\|_E + C_B \|u - v\|_E \|u\|_E + C_B \|v\|_E \|u - v\|_E \\ &\leq \|U_0 - V_0\|_E + 4C_B \delta \|u - v\|_E, \end{aligned}$$

y puesto que  $0 < 4C_B \delta < 1$ , entonces

$$\|u - v\|_E \leq \frac{1}{4C_B \delta} \|U_0 - V_0\|_E.$$

Así, tomando  $U_0 = V_0$  se sigue el resultado. □

## Bibliografía

- Adams, R. (1975). *Sobolev Spaces* (primera ed.), volumen 65 de *Pure and Applied Mathematics Series*. Massachusetts, Estados Unidos: Academic Pres. Inc.
- Bahouri, H. Chemin, J. y Danchin, R. (2011). *Fourier Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations* (primera ed.), volumen 343 de *Comprehensive Studies in Mathematics*. New York, Estados Unidos: Springer.
- Bakunin, O. (2008). *Turbulence and diffusion: Scaling Versus Equations* (primera ed.). Synergetics. Berlín, Alemania: Springer.
- Barndorff-Nielsen, O. y Shephard, N. (2001). *Modelling by Lévy Processes for Financial Econometrics. Applications in Finance* (primera ed.), (pp. 283–318). Boston, Estados Unidos: Springer.
- Batic, D. (2016). *Introduction to General Topology* (primera ed.). New York, Estados Unidos: Springer.
- Biccari, U. y Hernández-Santamaría, V. (2018). The poisson equation from non-local to local. *Electronic Journal of Differential Equations*, 1–13.
- Brandolese, L. y Karch, G. (2008). Far field asymptotics of solutions to convection equation with anomalous diffusion. *Journal of Evolution Equations*, 8, 307–326.
- Brezis, H. (2011). *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations* (primera ed.). Universitext. Nueva York, Estados Unidos: Springer.
- Bucur, C. y Valdinoci, E. (2016). *Nonlocal Diffusion and Applications* (primera ed.), volumen 20 de *Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana*. Milán, Italia: Springer.

- Cabré, X. y Roquejoffre, J. (2013). The influence of fractional diffusion in fisher-kpp equations. *Communications in Mathematical Physics*, 320, 679–722.
- Caffarelli, L. y Silvestre, L. (2006). An extension problem related to the fractional laplacian. *Estados Unidos: Communications in Partial Differential Equations*, 32, 1245–1260.
- Chalendar, I. y Fricain, E. (2011). *Compléments en Analyse Cours et Exercices* (primera ed.). Master (Mathématiques Pures). Lyon, Francia: Université de Lyon.
- Chamorro, D. (2018). *Espacios de Lebesgue y de Lorentz: Teoría de la Medida y Teoría de la Integración* (segunda ed.), volumen 1 de *Colecciones Matemáticas Universitarias*. París, Francia: Asociación Amarun.
- Chamorro, D. y Menozzi, S. (2016). Fractional operators with singular drift: Smoothing properties and morrey–campanato spaces. *Revista Matemática Iberoamericana*, 32, 1445–1499.
- Colombo, M. y De Rosa, L. (2018). *Regularity in Time of Hölder Solutions of Euler and Hypodissipative Navier-Stokes Equations*. Massachusetts, Estados Unidos: NASA ADS.
- Di Nezza, E. Palatucci, G. y Valdinoci, E. (2012). Hitchhiker’s guide to the fractional sobolev spaces. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, 136, 521–573.
- Dipierro, S. Palatucci, G. y Valdinoci, E. (2015). *Dislocation Dynamics in Crystals: A Macroscopic Theory in a Fractional Laplace Setting* (primera ed.), volumen 333. Berlín, Alemania: Springer.
- Evans, L. (2010). *Partial Differential Equations* (segunda ed.), volumen 19 de *Graduate Texts in Mathematics*. California, Estados Unidos: American Mathematical Society.
- Folland, G. (1999). *Real Analysis, Modern Techniques and Their Applications* (segunda ed.). Pure and Applied Mathematics. New York, Estados Unidos: Wiley Intersciences.

- Friedman, A. (2008). *Partial Differential Equations* (primera ed.). Dover Books on Mathematics. Massachusetts, Estados Unidos: Courier Corporation.
- Grafakos, L. (2008). *Classical Fourier Analysis* (segunda ed.), volumen 249 de *Graduate Texts in Mathematics*. New York, Estados Unidos: Springer.
- Grubb, G. (2018). Regularity in lp sobolev spaces of solutions to fractional heat equations. *Journal of Functional Analysis*, 274, 2634–2660.
- Haroske, D. y Triebel, H. (2008). *Distributions, Sobolev Spaces, Elliptic Equations* (primera ed.). EMS Textbooks in Mathematics. Freiburg, Alemania: European Mathematical Society.
- Kreyszig, E. (1978). *Introduction Funtional Analysis with Applications* (primera ed.). Nueva York, Estados Unidos: John Wiley and Sons. Inc.
- Ladyzhenskaya, O. Solonnikov, V. y Uraltzeva, N. (1968). Linear and quasilinear equations of parabolic type. *Amer. Math. Soc.*, 23, 1–667.
- Lemarié-Rieusset, P. (2002). *Recent develoments in the Navier-Stokes Problem* (primera ed.), volumen 19 de *Graduate Texts in Mathematics*. París, Francia: CRC Press.
- Lemarié-Rieusset, P. (2016). *The Navier-Stokes problem in the 21st Century* (primera ed.). París, Francia: CRC Press.
- Lions, J. y Magenes, E. (1968). *Problemes aux limites non homogenes et applications* (primera ed.), volumen 1 de *Graduate Texts in Mathematics*. París, Francia: Ediciones Dunod.
- Mitrea, D. (2013). *Distributions, Partial Differential Equations, and Harmonic Analysis* (primera ed.). Universitext. Nueva York, Estados Unidos: Springer.
- Reed, M. y Simon, B. (1970). *Methods of Modern Mathematical Physics: Functional Analysis* (primera ed.), volumen 1 de *Graduate Texts in Mathematics*. Londres, Inglaterra: Academic Press, Inc.

- Silvestre, L. (2005). *Regularity of the Obstacle Problem for a Fractional Power of the Laplace Operators*. Tesis de PhD, Texas, Estados Unidos: University of Texas.
- Stein, E. y Weiss, G. (1971). *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Space* (primera ed.). Nueva Jersey, Estados Unidos: Princeton University Press.
- Stinga, P. (2018). User's guide to the fractional laplacian and the method of semigroups. *Fractional Differential Equations*, 32, 235–266.
- Valdinoci, E. (2009). From the long jump random walk to the fractional laplacian. *Boletín de la Sociedad Española de Matemática Aplicada*, 49, 33–44.
- Xu, K. (2018). *The Fractional Laplacian for the Fractional PDEs* (segunda ed.). Graduate Texts in Mathematics. California, Estados Unidos: Stanford University.