

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS

**ESTUDIO DE LA TRANSFERENCIA DE ENERGÍA ENTRE
ESCALAS EN LA TURBULENCIA DEL PLASMA EN LA
MAGNETOSFERA TERRESTRE**

**TRABAJO DE TITULACIÓN PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE
FÍSICO**

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

PAULINA ALEXANDRA QUIJIA PILAPAÑA

paulina.quijia@epn.edu.ec

DIRECTOR: LUCA SORRISO-VALVO, PHD.

luca.sorriso@epn.edu.ec

Quito, Julio, 2020

DECLARACIÓN

Yo PAULINA ALEXANDRA QUIJIA PILAPAÑA, declaro bajo juramento que el trabajo aquí escrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

A través de la presente declaración cedo mis derechos de propiedad intelectual, correspondientes a este trabajo, a la Escuela Politécnica Nacional, según lo establecido por la Ley de Propiedad Intelectual, por su reglamento y por la normatividad institucional vigente.



Paulina Alexandra Quijia Pilapaña

CERTIFICACIÓN

Certifico que el presente trabajo fue desarrollado por PAULINA ALEXANDRA QUIJIA PILAPAÑA, bajo mi supervisión.

A handwritten signature in blue ink, appearing to read 'Luca Sorriso-Valvo', written in a cursive style.

Luca Sorriso-Valvo, PhD.
Director del Proyecto

AGRADECIMIENTO

A mis padres, Ana y Joselito, por el apoyo constante, las lecciones de vida y por lo que soy. A mi hermana, Gabriela *Gurt Yogurt*, por tanto amor e inspiración, siempre te acompañaré y alumbraré tu camino. A mi dos pequeños, Silas y Grizzly, por su tierna mirada, cariño y compañía. A mi tía Blanca por las locas y divertidas conversaciones. A mi tía Patricia, que me aconsejó y se preocupó siempre por mí y por mi familia. A mis primas, Verito, Carito y Moni, que son las mujeres que me han acompañado en la vida y en las locuras (*pay primis*). A mis abuelitas, *mami Cristina* y *mami Georgina*, y a toda mi familia, por estar pendiente de mí.

A mi tutor, Luca Sorriso-Valvo, por compartir sus conocimientos conmigo, por su dedicación, valiosísimos aportes y excelente predisposición en la realización de este trabajo. Al Dr. Christian Vásquez, por su colaboración y consejos en este trabajo. A Federico Fraternali, PhD., su colaboración en este proyecto.

A Dannes, por ser siempre mi apoyo incondicional, por las enseñanzas, los abrazos y los *mimos* que me mantuvieron animada durante la realización de este trabajo. A Boris, por ayudarme a formar mi "magnífica" personalidad y por darme lecciones para mejorar mi vida. A mi grupo de amigos del pueblo (*Tarea de b...*): *Sapillo*, *Kathy*, *Darichi*, *Ronichi* y *Joss*, y a *Kevin P.* por acompañarme a disfrutar la vida y por comportarse como verdaderos amigos cuando le he necesitado, todos ustedes son muy divertidos y les agradezco también el tiempo compartido. A mis pocos pero increíbles amigos de la universidad, Fer, Adalí, Álvaro y Andrés, por ser increíbles y por acompañarme en la vida universitaria (son unos loquillos), jamás olvidaré los buenos momentos acompañados de risas y los despechos académicos (*jaja*). Finalmente, al baloncesto y a mis entrenadores, los cuales me han dado lecciones muy valiosas y han acompañado mi vida y formación.

DEDICATORIA

“A mis primos, Ariel, Enzo y Owen. Aprovechen la vida y esfuércense por ser personas maravillosa. Su familia los quiere y los apoyará siempre.”

Paulina Quijia

Índice general

Declaración de Autoría	I
Índice de Figuras	VII
Índice de Tablas	IX
Resumen	X
Abstract	XI
1. Introducción	1
2. Marco Teórico	5
2.1. Descripción y características de un plasma	5
2.2. Aproximación cinética	9
2.2.1. Ecuación de Vlasov	10
2.3. Aproximación Magnetohidrodinámica	11
2.3.1. Variables de Elsässer	15
2.3.2. Ondas de Alfvén	17
2.3.3. Magnetohidrodinámica Hall	18
2.4. Turbulencia	19
2.4.1. Leyes de escala de las ecuaciones MHD	20
2.4.2. Cascada de Richardson	22
2.4.3. Incrementos de velocidad y de campo magnético	23
2.4.4. Espectros de energía, funciones de distribución de probabilidad y funciones de estructura	24
2.5. Fenomenología de la turbulencia MHD	26
2.5.1. Hipótesis de Kolmogorov	27
2.5.2. Espectro de Kolmogorov	29
2.5.3. Efecto Alfvén: Espectro de Kraichnan	30
2.5.4. Leyes de escala de la funciones de estructura	32
2.5.5. Intermitencia en la turbulencia	32
2.6. Ley de Yaglom	35
2.7. Proxy de la tasa de transferencia de energía local	37

3. Descripción de los datos	38
3.1. Introducción	38
3.2. El espacio circuniterrestre	38
3.3. Misión Magnetospheric Multiscale	40
3.4. Presentación de los datos experimentales	43
4. Análisis de turbulencia e intermitencia	51
4.1. Introducción	51
4.2. Espectros de energía	52
4.3. Análisis de intermitencia	56
5. Validación de la ley de escala global y local	64
5.1. Introducción	64
5.2. Validación de la ley de Yaglom	65
5.3. Validación de la ley Hall-Yaglom	67
5.4. Ley de escala de la transferencia local de energía	70
6. Conclusiones	76
6.1. Seguimiento	81
A. Hipótesis de Taylor	82
Bibliografía	84

Índice de figuras

2.1. Cascada de Richardson.	23
2.2. Espectros de energía del componente de flujo (círculos blancos) y componente lateral (círculos negros) de las fluctuaciones de velocidad en el dominio del tiempo en un chorro. [21]	30
2.3. PDFs de los incrementos de los campos cambian de forma con la escala. [7]	33
2.4. Cascada de Richardson intermitente. Las diferencias locales de la transferencia de energía están representadas por la concentración de estructuras activas o regiones del espacio.	34
3.1. Ilustración esquemática del espacio circunplanetario. [51]	39
3.2. Órbita de la misión MMS. En azul, líneas de campo del viento solar; en verde, líneas de campo cerradas; en rojo, líneas de campo abiertas; y en negro órbitas, que se desea seguir. [34]	41
3.3. Ilustración de la misión MMS.	42
3.4. Ilustración de las inestabilidades de Kelvin-Helmholtz.	44
3.5. Desde arriba: velocidad, densidad de partículas, temperatura, campo magnético y densidad de corriente medidas por el MMS1 el 8 de septiembre del 2015 durante 78.5 min entre 10 : 07 : 04 UT y 11 : 25 : 34 UT.	45
3.6. Un sub-intervalo de cinco minutos del intervalo de datos MMS1, que empieza a las 10 : 30 : 04 UT el día 8 de septiembre del 2015. Desde arriba hacia abajo: componente x de la velocidad, densidad de partículas, temperatura, componente x del campo magnético y la componente x de la densidad de corriente.	48
3.7. Selección de intervalos. En rojos regiones de alta temperatura, y en azul regiones de baja temperatura.	49
3.8. Histogramas de la velocidad, campo magnético, densidad de corriente eléctrica, densidad iónica y temperatura, desde la fila de arriba hacia abajo. Área gris: intervalo completo (KHI); área roja: intervalos de la capa límite magnetosférica (BL); área azul: intervalos de la magnetosheath (MS).	50
4.1. Funciones de autocorrelación de las componentes del campo magnético en las regiones MS y BL.	53

4.2. Espectros de potencia de las componentes del campo magnético realizados mediante la transformada de Fourier; en gris la ley de potencia $-5/3$ como referencia.	54
4.3. Espectros de potencia de las componentes del campo magnético en la región BL (izquierda) y en la región MS (derecha). [38]	54
4.4. Espectros de potencia de las componentes de la velocidad en la región BL (izquierda) y en la región MS (derecha). [38]	55
4.5. Espectros de potencia de los campos de Elsässer en la región BL (izquierda) y en la región MS (derecha). [38]	55
4.6. Distribuciones de $\Delta B_y(\Delta t)/\sigma_{B_y}$ en BL (izquierda) y MS (derecha).	57
4.7. Funciones de estructura de la velocidad en las regiones BL y MS	60
4.8. ESS de la velocidad en las regiones BL y MS	61
4.9. Exponentes de ESS de la velocidad en las regiones BL y MS	62
4.10. Kurtosis de los incrementos de B_y como función de Δt con los ajustes de ley de potencia en las dos regiones MS y BL; línea negra en $K = 3$	63
5.1. Ley de Politano-Pouquet para la magnetosfera (MS, azul) y la capa límite magnetosférica (rojo, BL). Puntos completamente pintados indican flujos positivos mientras que puntos vacíos representan de flujos negativos.	66
5.2. Izquierda: Detalle de las dos contribuciones diferentes a la ley de Politano-Pouquet para la capa límite magnetosférica. Derecha: lo mismo para la magnetosheath. En negro referencia de ley de escala lineal.	67
5.3. Ley de Politano-Pouquet con las contribuciones Hall adicionales. Puntos completamente pintados indican flujos positivos mientras que puntos vacíos representan de flujos negativos.	69
5.4. Izquierda: Detalle de las cuatro contribuciones diferentes a la ley Hall-Politano-Pouquet para la capa límite magnetosférica. Derecha: lo mismo para la magnetosheath.	70
5.5. PDF del proxy positivo para diferentes escalas en la capa límite magnetosférica (paneles superiores) y para la magnetosheath (paneles inferiores).	73
5.6. Parámetro de escala c obtenido del ajuste de las funciones de distribución LET para las diferente contribuciones y para el total, para la capa límite magnetosférica (panel superior) y para la magnetosheath (panel inferior). Las líneas continuas representan ajustes de ley de potencia $c \propto \Delta t^\gamma$	75

Índice de tablas

3.1. Valores medios de magnitudes importantes.	47
4.1. Valores resultantes del ajuste de los índices espectrales α y tiempos de correlación τ_c .	56
4.2. Parámetros de la intermitencia.	63
5.1. Valores de la tasa de transferencia de energía media.	70

Resumen

El espacio circunterrestre está formado por un plasma magnetizado donde ocurren fenómenos de física de plasmas que han sido bien estudiados desde el punto de vista magnetohidrodinámico (MHD). En el presente trabajo, las propiedades de la turbulencia observadas en los dos lados de la Inestabilidad de Kelvin-Helmholtz (KHI) en la capa límite magnetosférica terrestre son comparadas. En particular, se estudian espectros, intermitencia y la ley de escala del momento de tercer orden, como también la distribución del proxy de la tasa de transferencia de energía turbulenta. El análisis se realiza utilizando datos de uno de los satélites de la misión MMS cuando éste cruzó la KHI. Dos regiones, una en la magnetosheath, la otra en la magnetósfera, se estudian por separado y se comparan sus comportamientos turbulentos desde las aproximaciones MHD y Hall-MHD.

Abstract

The circumterrestrial space is made up of a magnetized plasma where physic phenomena that have been well studied in the magnetohydrodynamics framework occur. In this work, the properties of turbulence observed on the two sides of the Kelvin-Helmholtz Instability (KHI) in the terrestrial magnetospheric boundary layer are compared. In particular, spectra, intermittency and the third-order moment scaling are studied, as well as the distribution of a local energy transfer rate proxy. The analysis is performed using MMS data from one satellite longitudinal crossing of the KHI. Two regions, one in the magnetosheath, the other in the magnetosphere, are studied separately as well as their turbulent behaviors from the MHD and Hall-MHD approximations.

Capítulo 1

Introducción

Aproximadamente el 99.9% del universo visible se encuentra en estado de plasma [1]. El plasma que constituye el espacio interplanetario y circuterrestre se caracteriza por ser relativamente frío, poco colisional, magnetizado y turbulento. Inmediatamente después de las primeras misiones espaciales, que confirmaron la presencia de plasma en el espacio, se comprendió que su expansión en el sistema solar no es adiabática, y que su dinámica debía necesariamente incluir mecanismos de calentamiento local. A pesar de los sucesivos 60 años de estudio, hoy todavía no se conocen estos mecanismos, que representa uno de los problemas abiertos más interesantes de la física. En este sentido, estudios teóricos y numéricos se acompañan con análisis experimental de datos *in situ*, lo que hace del viento solar un caso único en la astrofísica. Por otra parte, el plasma espacial es el único “laboratorio” natural de plasmas no colisionales para estos estudios, debido al hecho de que todavía no es posible reproducir las condiciones de plasmas astrofísicos en laboratorios terrestres. Actualmente, hay varios satélites orbitando nuestro planeta y recogiendo datos para facilitar el estudio de la física de plasmas, su comportamiento y sus procesos. Algunos de los satélites que se dedican al estudio de los procesos de plasmas se encuentran en la misión *Magnetospheric Multiscale (MMS)*, enviado por la NASA, que se ubica en la magnetopausa terrestre, y que consta de cuatro satélites idénticos que tienen como objetivo principal observar la estructura tridimensional de la reconexión magnética en su ambiente. [33]

La magnetopausa terrestre se caracteriza por la naturaleza turbulenta del plasma que la constituye, así como por la presencia de inestabilidades y complicados procesos de interacción entre partículas y radiación [1, 2]. Estos procesos están conectados por múltiples escalas espaciales y temporales. Hoy se están obteniendo nuevos datos de misiones espaciales de la NASA (en particular MMS y Parker Solar Probe) y de la ESA (Solar Orbiter), que permiten un estudio más profundo de la turbulencia en el espacio y de los procesos asociados. Entonces es oportuno disfrutar de esta disponibilidad de datos y contribuir a la comprensión básica de fenómenos de base importantes, como son los procesos de turbulencia y disipación de energía en plasmas.

La comprensión de estos procesos es necesaria para numerosos sistemas físicos, tanto teóricos como aplicados. Por ejemplo, algunos de los impedimentos en realizar la fusión nuclear son debidos a la destrucción del confinamiento por causa de turbulencia y disipación de energía en los plasmas de fusión. También existen numerosas aplicaciones en la industria, medicina, etc. Aún mas directa es la relación de la investigación propuesta con los estudios de clima espacial, o sea de la relación entre Sol y la Tierra, que se basa justamente en el acoplamiento entre el flujo turbulento del viento solar y la estructura de equilibrio dinámico de la magnetosfera. Finalmente, desde un punto de vista de conocimiento fundamental, comprender los mecanismos de funcionamiento de los plasma espaciales permitirá una mejor interpretación de las observaciones remotas de plasmas astrofísicos, donde es imposible tomar medidas directas, y sólo se pueden medir los fotones generados por los procesos.

En los flujos turbulentos, la energía asociada con estructuras e inestabilidades a gran escala se transporta hacia escalas cada vez más pequeñas a través de una cascada, debido a las interacciones no lineales entre las fluctuaciones magnéticas y de velocidad, a lo largo del llamado *rango inercial* [39] donde se puede utilizar la aproximación magnetohidrodinámica (MHD). Estas interacciones producen la formación de estructuras de escala pequeña (vórtices, discontinuidades, capas de corriente), resultantes de la transferencia inhomogénea de la energía proporcionando disipación de energía turbulenta. Cuando la energía alcanza escalas del orden

de o menores que las escalas típicas de iones y electrones (por ejemplo, el radio de Larmor protónico o la longitud inercial), se produce una cascada turbulenta diferente. De tal manera, se supone hoy que hay una contribución de la turbulencia a la disipación de la energía [32]. En esas escalas la aproximación MHD ya no funciona y se debe considerar otra aproximación, como por ejemplo la Hall-MHD (HMHD), o la descripción completa dada por la teoría cinética.

Mientras los fluidos y plasmas terrestres se caracterizan muchas veces por ser colisionales y en equilibrio termodinámico, los plasmas heliosféricos son poco colisionales, no termalizados, y las velocidades de sus partículas se distribuyen según leyes no Maxwellianas. Por esto, no existen procesos de disipación de energía que se puedan aproximar con disipación fluida o resistiva. Al día de hoy, no se conocen con exactitud los procesos de interacción entre partículas y campos responsables de la disipación de la energía, o sea de su transformación irreversible en formas desordenadas, como aumento de temperatura o partículas aceleradas, y más en general, resultante en aumento de la entropía del sistema. En estos plasmas, surgen procesos cinéticos de plasmas débilmente colisionales, como la amortiguación no lineal de ondas, inestabilidades cinéticas, colisiones de partículas y reconexión magnética, que convierten la energía almacenada en las fluctuaciones del campo en energía y aceleración de partículas, y calentamiento de plasma. [47]

En este trabajo se estudian las propiedades estadísticas de la turbulencia con el objetivo de facilitar el estudio de los procesos disipativos de la física de plasmas que ocurren en las regiones de pequeña escala a través de estructuras intermitentes donde se acumula la energía. En particular, nos concentraremos en la observación experimental del flujo de energía turbulenta. La identificación de tales regiones, el estudio de las propiedades estadísticas de estas estructuras de pequeña escala, y de las características de sus fluctuaciones en una región de la magnetopausa terrestre constituyen el objetivo principal de este trabajo.

El presente trabajo está estructurado en seis capítulos. Un primer capítulo de introducción en el que se plantea el problema a estudiar y su importancia. En el segundo capítulo se presenta la base teórica del trabajo donde se introducen los

conceptos principales de la magnetohidrodinámica, Hall-MHD y la turbulencia. En el tercer capítulo se presentan la misión MMS y los datos experimentales, que son medidas *in situ*, es decir, series temporales, que se midieron en el sistema magnetopausa terrestre mediante los instrumentos a bordo de la misión MMS. En el cuarto capítulo se analizan las propiedades estadísticas de la turbulencia y de estructuras intermitentes, y se comparan los resultados para las diferentes regiones descritas en el capítulo 3. En el capítulo 5 se realiza la comparación de observaciones de la tasa de transferencia de energía MHD y Hall-MHD en las regiones identificadas, además de la validación de las leyes de Yaglom y Hall-Yaglom tanto globales como locales. Finalmente, el sexto capítulo presenta las conclusiones encontradas en este trabajo.

Capítulo 2

Marco Teórico

En el presente capítulo se muestra una introducción general a la física de plasmas, y se propone la base teórica en la que se enmarca el problema de estudio.

2.1. Descripción y características de un plasma

El plasma es considerado como el “cuarto estado” de la materia y su medio incluye partículas cargadas [1]. Cuando un sólido se calienta suficientemente como para que el movimiento térmico de los átomos rompa la estructura cristalina se forma un líquido. Cuando un líquido se calienta lo suficiente se forma un gas [2]. Cuando el gas se calienta tal que los átomos chocan unos con otros y la temperatura es suficientemente alta para que la energía cinética de los átomos supere la energía de enlace de los orbitales, se obtiene un plasma o gas ionizado [3]. Debido a que algunas propiedades del plasma están relacionadas con sus efectos térmicos, se define la velocidad térmica $v_{e,i}$ como la velocidad de una partícula típica, como son los electrones (e), y los iones positivos (i):

$$v_{e,i} = \sqrt{\frac{k_B T_{e,i}}{m_{e,i}}}, \quad (2.1)$$

donde k_B es la constante de Boltzmann (1.3807×10^{-23} J/K), $T_{e,i}$ es la temperatura media de las partículas del gas y $m_{e,i}$ la masa del electrón y de los iones positivos [6].

Un plasma es una colección de iones positivos y electrones a una densidad suficientemente baja como para despreciar interacciones de rango corto [4]. Algunas propiedades del plasma resultan de la interacción de Coulomb de rango largo, por lo tanto son propiedades colectivas que implican interacciones simultáneas de varias partículas [1, 4, 5]. El plasma, en promedio, es un gas cuasineutral cuando está en equilibrio, es decir, electrostáticamente neutro para el observador externo, mientras que la distribución aleatoria de partículas cargadas y sus campos eléctricos se cancelan mutuamente. La cuasineutralidad del plasma implica igual densidad de partículas cargadas opuestamente o:

$$\sum_s Z_s n_s = 0, \quad (2.2)$$

donde Z_s es el estado de carga de la especie s y n_s es la densidad numérica de la especie s , es decir iones o electrones.

Es importante considerar que el plasma debe mantenerse eléctricamente neutro como comportamiento colectivo. Si los electrones son desplazados de su posición de equilibrio se genera un campo eléctrico de tal manera que intenta restaurar la neutralidad del plasma empujando a los electrones a su posición original. Debido a la inercia, los electrones oscilarán alrededor de sus posiciones de equilibrio con una frecuencia característica, la cual se conoce como frecuencia del plasma. Esta oscilación es tan rápida que los iones pesados no pueden seguir el movimiento de los electrones por lo que se considera a los iones como fijos; es decir, la frecuencia del electrón es la más importante porque caracteriza el movimiento colectivo del plasma cuando este se perturba [8]. La frecuencia del plasma, ω_{pe} , es la frecuencia típica de oscilación de un plasma, y se obtiene como solución del oscilador asociado con el balance entre la fuerza electrostática y la inercia:

$$\omega_{pe} = \sqrt{\frac{4\pi n_e e^2}{m_e}}, \quad (2.3)$$

donde n_e es la densidad de electrones y e la carga del electrón [7]. Debido a su definición, en los experimentos donde se puede medir la frecuencia del plasma también se puede utilizar para calcular la densidad de electrones en un plasma [9].

Otra de las características fundamentales del comportamiento de un plasma es su habilidad para proteger los potenciales externos que se aplican dentro de una pequeña región [4]. En un plasma, los electrones son atraídos a las cercanías de un ion y protegen su campo electrostático del resto del plasma. Se define la longitud de Debye, λ_D , como la medida de la distancia sobre la cual se siente la influencia de un potencial externo de otras partículas cargadas dentro del plasma [1].

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{k_B T_e}{4\pi n_e e^2}}, \quad (2.4)$$

donde T es la temperatura promedio electrónica y e es la carga del electrón [7, 9]. En escalas de longitud más grandes que la longitud de Debye un plasma responde colectivamente a una carga dada, perturbación de carga o campo eléctrico impuesto. La distancia de blindaje de Debye es la máxima longitud de escala sobre la cual un plasma puede apartarse significativamente de la neutralidad de carga [1-3, 9]. Para que un plasma exhiba comportamiento colectivo la longitud de Debye debe ser mucho más pequeña que su longitud característica de tal manera que la mayoría de las partículas del plasma no sean influenciadas por un potencial externo. Consecuentemente, la carga en el plasma interactúa colectivamente solo con las cargas que están dentro de su esfera de Debye tal que su efecto en las otras cargas sea despreciable.

Para que el blindaje de Debye sea válido el número de partículas (N_D) dentro de una esfera de Debye debe ser suficientemente grande, es decir,

$$N_D = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{k_B T}{n_e^{1/3} e^2} \right)^{3/2}. \quad (2.5)$$

No todos los gases ionizados son plasmas. Las condiciones que un gas ionizado debe satisfacer para ser llamado plasma son:

1. $\lambda_D < L$, donde L es una longitud característica del plasma en cuestión,
2. $N_D \gg 1$,
3. $\omega_{pe}/\omega_c > 1$, donde ω_c es la frecuencia de colisión de electrones con partículas neutras.

Los plasmas responden fuertemente a los campos electromagnéticos, y por lo tanto, el efecto de las fuerzas eléctricas y magnéticas es crucial para comprender el comportamiento del plasma [10]. Si un campo magnético externo \mathbf{B} está presente, lo cual es común en los plasmas, entonces se define la frecuencia ciclotrón de iones y electrones como la frecuencia a la cual los iones y electrones giran alrededor de las líneas de campo magnético:

$$\Omega_{e,i} = \frac{eB}{cm_{e,i}}, \quad (2.6)$$

donde c es la velocidad de la luz [7]. Así también, las partículas se mueven periódicamente en órbitas helicoidales que consisten en rotaciones perpendiculares a \mathbf{B} sobre el centro de orientación con un radio ciclotrón:

$$R_{e,i} = \frac{cm_{e,i}v_{\perp}}{eB}, \quad (2.7)$$

donde v_{\perp} es la componente de la velocidad de la partícula perpendicular al campo magnético \mathbf{B} . [16]

Estas magnitudes se utilizan para describir las condiciones de un plasma y para utilizar aproximaciones. Los valores típicos de las magnitudes mencionadas varían para cada sistema de plasmas que son caracterizados por valores diferentes de densidad y temperatura. Algunos ejemplos de plasmas en regímenes diferentes son

el medio interestelar, la ionosfera terrestre, la corona solar, los plasmas para la fusión magnética, el viento solar, la magnetosfera terrestre, entre otros.

2.2. Aproximación cinética

Debido a que en un plasma típico existe una gran cantidad de partículas que interactúan no es posible describir el movimiento de cada partícula desde las ecuaciones de Maxwell y la fuerza de Lorentz. Por lo tanto, se suele utilizar una aproximación estadística para analizar su dinámica. [10, 11]

La aproximación cinética del plasma tiene sus raíces en la mecánica estadística, y describe el comportamiento del plasma a escala microscópica en términos de la función de distribución de partículas $f_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ en el espacio de fases. El estado dinámico de un conjunto de partículas en un plasma en el tiempo t se puede describir por la posición $\mathbf{r} = (x, y, z)$ y la velocidad $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ de su centro de masas. Combinando la información de la posición y la velocidad tenemos su ubicación (\mathbf{r}, \mathbf{v}) en un espacio de fases 6-dimensional [12]. La función de distribución se expresa como la densidad numérica de partículas en un elemento del espacio de fases 6-dimensional en el tiempo t , por lo tanto f_s es una función dependiente de 7 variables:

$$f_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \frac{d^6 N_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}{d^3 r d^3 v}, \quad (2.8)$$

donde $d^6 N_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ es el número de partículas s dentro del elemento de volumen $d^3 r d^3 v$ [9]. Se asume que la densidad de puntos representativos en el espacio de fases no varía rápidamente de un elemento de volumen a otro, por lo que f_s puede ser considerada como una función continua, al igual que sus argumentos [12]. Debido a que la densidad de partículas puede variar en el tiempo y espacio, la densidad numérica de partículas n_s se define como el momento de velocidad de orden cero de la función de distribución, la cual es una variable macroscópica definida en el

espacio de configuraciones como el número de partículas de tipo s por unidad de volumen [10],

$$n_s(\mathbf{r}, t) = \int_v f_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v. \quad (2.9)$$

Un plasma es homogéneo cuando la función de distribución no depende de \mathbf{r} ; es anisotrópico cuando depende de la orientación del vector de velocidad \mathbf{v} , pero es isotrópico cuando solo depende de la magnitud $v = |\mathbf{v}|$; en este sentido, la función de distribución caracteriza el plasma. Un plasma en equilibrio térmico se caracteriza por una función de distribución homogénea, isotrópica y dependiente del tiempo. En el sentido estadístico, la función de distribución provee una descripción completa del sistema, a partir de ella se pueden deducir todas las variables macroscópicas para las partículas s . Sin embargo, uno de los problemas de la aproximación cinética está en determinar la función de distribución para un determinado sistema [9, 12].

2.2.1. Ecuación de Vlasov

Uno de los casos de estudio en la aproximación cinética es considerar la contribución de los campos externos más la contribución de los campos internos promediados generados por las interacciones de largo rango y despreciar las interacciones binarias, o sea las colisiones entre partículas [12].

En la ecuación de Vlasov, también llamada ecuación de Boltzmann no colisional, se desprecia el efecto de colisiones o interacciones de rango corto. Ésto se obtiene cuando se considera el comportamiento del plasma para intervalos de tiempo mucho más pequeños que el tiempo típico asociado a las colisiones binarias [9, 10, 13].

Las partículas en un elemento en cierta posición en el espacio de fases \mathbf{v} - \mathbf{r} se mueven continuamente en el campo electromagnético a otra posición; el número total de partículas en el elemento se conserva y $f_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ obedece una ecuación de continuidad que toma la forma:

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_s + \frac{q_s}{m_s} \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_s = 0, \quad (2.10)$$

donde \mathbf{v} es la velocidad de la partícula s , \mathbf{E} es el campo eléctrico, \mathbf{B} es el campo magnético y c es la velocidad de la luz [9, 10, 13, 14]. Esta ecuación diferencial parcial fue formulada por el físico teórico ruso Anatoly Alexandrovich Vlasov para la descripción del plasma en 1938 y discutida a detalle en su trabajo “The vibrational properties of an electron gas” [9].

Para obtener un sistema cerrado de ecuaciones, se combina la ecuación de Vlasov para las funciones de distribución con las ecuaciones de Maxwell:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi\rho_c; \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0; \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}; \end{aligned} \quad (2.11)$$

que determinan los campos eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ y magnético $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ y proveen expresiones para la densidad de carga ρ_c y densidad de corriente \mathbf{J} , las cuales se definen como los momentos de la función de distribución:

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_s q_s \int_{\mathbf{v}} f_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v; \quad (2.12)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \sum_s q_s \int_{\mathbf{v}} \mathbf{v} f_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v; \quad (2.13)$$

y que deben ser resueltas simultáneamente [9, 10, 13, 16].

2.3. Aproximación Magnetohidrodinámica

En algunos casos no es necesario determinar la evolución de las funciones de distribución y es suficiente determinar cómo se comportan las variables macroscópicas

del plasma en el tiempo y el espacio [10]. La evolución de estos parámetros se puede determinar en términos de una aproximación de fluido macroscópico, cuyas ecuaciones son análogas a las ecuaciones de la hidrodinámica pero generalmente más complicadas [10, 16], debido a la presencia de interacciones electromagnéticas [7, 19, 20]. Sin embargo, es posible considerar al plasma como un fluido no neutro cuando las escalas en consideración son suficientemente grandes para despreciar los fenómenos relacionados con los efectos “cinéticos”: colisiones entre partículas, efectos de giro de ciclotrón, dinámicas dentro del radio de Debye, y oscilaciones de plasma. En este caso, se puede despreciar los detalles de la dinámica de una sola partícula y observar el movimiento de grupo de éstas [7]; es decir, se introduce una aproximación fluida. El plasma se considera como una superposición de dos fluidos interactuantes, cada uno compuesto por un mismo tipo de partículas y gobernado por un sistema (no cerrado) de ecuaciones de tipo fluido-dinámico [7]. Al despreciar la dinámica de las colisiones, el plasma se considera siempre localmente termalizado por intercambio de energía entre las partículas, de tal manera que las funciones de distribución de las partículas, antes descritas por la ecuación de Vlasov, se aproximan a Maxwellianas [10, 19]. Esta aproximación, llamada *magnetohidrodinámica (MHD)* es válida sólo cuando las escalas temporales de las perturbaciones o variaciones de nuestro interés son más grandes que el tiempo típico de termalización; esta condición se conoce como *equilibrio termodinámico local* [7, 19].

Para utilizar la descripción magnetohidrodinámica del plasma se deben satisfacer ciertas suposiciones y así poder simplificar las ecuaciones fluidas. Las partículas en cuestión son principalmente electrones de masa m_e y protones de masa m_p , o incluso iones pesados. Dado a que $m_e \sim 2000m_p$, los términos que contengan m_e/m_p se pueden despreciar con respecto a la unidad o a m_p/m_e , lo cual corresponde a despreciar la inercia de los electrones [7]. En el plasma, los electrones y protones pueden interactuar a través de las interacciones de Coulomb de tal manera que las partículas oscilan a la frecuencia del plasma ω_{pe} . Consideramos escalas temporales grandes tal que no se puedan “ver” las oscilaciones del plasma. Entonces, el plasma puede ser visto como un fluido de protones descrito por

ecuaciones fluido-dinámicas, seguida por una corriente de electrones que obedece la ley de Ohm. La corriente sigue el flujo con un retraso del orden del tiempo de separación, el cual no se detecta, por lo tanto puede ser despreciado. Para escalas temporales más grandes que el recíproco de la frecuencia del plasma ($1/\omega_{pe}$), y para escalas espaciales más grandes que la longitud de Debye (λ_D), se asegura la cuasineutralidad de carga y se puede considerar al plasma eléctricamente neutro. Por último, como nos concierne el régimen non-relativista, por lo tanto, se pueden despreciar todas las contribuciones del orden $(v/c)^2$ [7, 19].

Bajo las condiciones mencionadas, se puede escribir las leyes de conservación de densidad de masa ρ , velocidad del flujo \mathbf{v} y energía interna por unidad de masa U [20]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (2.14)$$

$$\rho \left[\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \right] \mathbf{v} = \mathbf{f} - \nabla p + \nabla \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}, \quad (2.15)$$

$$\rho \left[\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \right] U = -p(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla \cdot \mathbf{q} + \sum_{i,j} \sigma_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_j} + Q. \quad (2.16)$$

En (2.15), \mathbf{f} representa la fuerza externa por unidad de volumen que actúa sobre el fluido; $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ es el tensor de esfuerzos excluyendo la contribución de la presión cinética p , que se trata por separado. En la ecuación (2.16), \mathbf{q} representa el flujo de calor y Q es el calor que se produce dentro del sistema. En muchos casos, como el plasma que se trata en este trabajo, no hay fuerzas externas sobre el sistema y solo está presente la fuerza de Lorentz; de hecho, la fuerza gravitacional es despreciable en comparación con la fuerza resultante de interacciones electromagnéticas. Por lo tanto, la fuerza se puede escribir como:

$$\mathbf{f} = \frac{1}{c} \mathbf{J} \times \mathbf{B}, \quad (2.17)$$

donde no se considera la contribución del campo eléctrico debido a la cuasineutralidad. Se aplica el mismo argumento para los términos de calor; así, el efecto Joule es la única fuente de calor.

Para incluir las propiedades electromagnéticas del plasma, las ecuaciones de momentos deben acoplarse a las ecuaciones de Maxwell. En el caso de cuasineutralidad y en el régimen no-relativista, las ecuaciones de Maxwell son:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0; \quad (2.18)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0; \quad (2.19)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad (2.20)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}, \quad (2.21)$$

las cuales van acompañadas de la ley de Ohm, que en el marco MHD, se escribe en su forma generalizada como:

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \eta \nabla^2 \mathbf{B}, \quad (2.22)$$

donde η es la resistividad del plasma.

Como se mencionó antes, el sistema de ecuaciones no está cerrado y se necesita una hipótesis de cierre. Se puede utilizar una ecuación de estado para cerrar el sistema para reducir el número de incógnitas; en el caso de la magnetosfera terrestre, en el límite de validez de la descripción MHD, el plasma se comporta como un gas perfecto y entonces se puede utilizar la ecuación de estado $p = k_B \rho T / m$ para eliminar la presión cinética de las ecuaciones. Así se puede reescribir la ecuación para la energía (2.16) en términos de densidad y presión, que son magnitudes que se pueden medir experimentalmente. Utilizando la fuerza por interacciones electromagnéticas (2.17), la última ecuación de Maxwell (2.21), la ley de Ohm (2.22) y considerando que las fuentes de flujo de calor son despreciables, se puede

reescribir las ecuaciones de conservación como:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (2.23)$$

$$\rho \left[\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \right] \mathbf{v} = \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - \nabla p + \nabla \cdot \bar{\bar{\sigma}}, \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) + \frac{c^2 \eta}{4\pi} \nabla^2 \mathbf{B}, \quad (2.25)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \right] \left(\frac{p}{\rho} \right) = 0, \quad (2.26)$$

donde la resistividad η se supone constante. La (2.25) es la ecuación de inducción en la que se considera el acople entre la velocidad y el campo magnético. La fuerza de Lorentz que aparece en (2.24) describe la reacción del campo magnético por la velocidad del fluido. La ley de Ohm y las ecuaciones de Maxwell completan el conjunto de ecuaciones necesarias para describir el plasma en la aproximación MHD.

Las incógnitas ρ , p , \mathbf{v} y \mathbf{B} son vistas en un sistema de referencia que se mueve con el flujo y representan campos obtenidos como promedios sobre volúmenes de espacio más pequeños que las escalas donde ocurren los fenómenos que nos interesan, pero más grandes que las escalas colisionales ($\sim \lambda_D$), como lo requiere la aproximación efectuada. Nótese que para cerrar el sistema se necesita encontrar una expresión para el tensor de esfuerzo tal que no introduzca nuevas variables. Típicamente, esto se realiza por medio de una aproximación viscosa, en cuyo caso: $\nabla \cdot \bar{\bar{\sigma}} \simeq \nu \nabla^2 \mathbf{v}$, donde ν es el coeficiente de viscosidad del fluido de iones.

2.3.1. Variables de Elsässer

Las ecuaciones de MHD se pueden simplificar considerablemente en el caso de fluido incompresible, es decir, cuando la densidad de masa $\rho = \text{constante}$, que expresa la condición $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ en la ley de conservación de masa. Además, introduciendo la variable:

$$\mathbf{b}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{B}}{\sqrt{4\pi\rho}}, \quad (2.27)$$

que tiene dimensiones de velocidad, las ecuaciones de la magnetohidrodinámica (2.23)-(2.26) se pueden escribir de manera más compacta; introduciendo la viscosidad cinética ν y el coeficiente de difusión magnética $\mu = c^2\eta/(4\pi\rho)$; la forma que toman es:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = (\nabla \times \mathbf{b}) \times \mathbf{b} - \nabla \left(p + \frac{B^2}{8\pi} \right) + \nu \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{b}) + \mu \nabla^2 \mathbf{b}, \quad (2.29)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{b} = 0. \quad (2.30)$$

Las ecuaciones anteriores se pueden escribir de manera aun más compacta si se introducen las variables de Elsässer:

$$\mathbf{z}^\pm = \mathbf{v} \pm \mathbf{b}. \quad (2.31)$$

Estas variables son muy útiles cuando se quiere estudiar las correlaciones entre las fluctuaciones de velocidad y campo magnético. Con las variables de Elsässer, las ecuaciones de MHD se escriben:

$$\frac{\partial \mathbf{z}^\pm}{\partial t} + (\mathbf{z}^\mp \cdot \nabla) \mathbf{z}^\pm = -\frac{1}{\rho} \nabla \left(p + \frac{B^2}{8\pi} \right) + \frac{\nu + \mu}{2} \nabla^2 \mathbf{z}^+ + \frac{\nu - \mu}{2} \nabla^2 \mathbf{z}^-, \quad (2.32)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{z}^\pm = 0. \quad (2.33)$$

Expresar las ecuaciones MHD en términos de las variables de Elsässer es muy útil porque hace más fácil e intuitivo el análisis de los fenómenos de procesos de turbulencia. Es importante notar que el término no lineal es proporcional a las dos variables, entonces la no-linealidad desaparece si uno de los campos de Elsässer se hace 0, es decir, el resultado $\mathbf{z}^\mp = 0$ y $\mathbf{z}^\pm \neq 0$ es un resultado de ecuaciones no lineales (fluctuaciones alfvénicas).

2.3.2. Ondas de Alfvén

Es importante describir dos características que serán útiles así como las ecuaciones MHD, éstas son la *ley del hielo* y la propagación de las *ondas de Alfvén*.

Teorema de Alfvén (Ley del hielo). En el límite de resistividad nula ($\eta = 0$) se puede considerar despreciable el término difusivo de la ecuación de inducción; el parámetro que valida el teorema que se enuncia a continuación es el número de Reynolds magnético, que describe el balance entre el término no lineal y el disipativo en la ecuación de inducción:

$$R_m = \frac{c_A l}{\mu}. \quad (2.34)$$

Si $R_m \gg 1$, para un campo magnético en el cual se mueve un fluido perfectamente conductor (como el plasma de la magnetosfera terrestre), se cumple que *el flujo del campo magnético que atraviesa un circuito cerrado que se mueve con el fluido es constante en el tiempo* [19, 20]. Eso significa que líneas de fuerza del campo magnético están “congeladas” dentro del plasma, y deben moverse juntos. Por ejemplo, un movimiento del plasma resulta en el arrastre del campo magnético, para que se cumpla el teorema de Alfvén.

Ondas de Alfvén. Las ondas que se puede propagar en un plasma son de diversa naturaleza, pero las más importantes y características en la aproximación MHD son las ondas de Alfvén. Éstas son ondas transversales incompresibles que se derivan de la parte longitudinal de la fuerza de Lorentz y se propagan a lo largo de la línea de fuerza del campo magnético. Su relación de dispersión se obtiene linealizando, para perturbaciones de pequeña amplitud, las ecuaciones MHD en el caso ideal e incompresible; en tal hipótesis el campo magnético y la velocidad se pueden descomponer en un valor medio $B_0 = \langle B(x, t) \rangle$ y una parte fluctuante con valor medio nulo δB : $B = B_0 + \delta B$, mientras que la densidad ρ es constante y la resistividad y la viscosidad son nulas. Sea c_A la velocidad de Alfvén a la longitud

característica l :

$$\mathbf{c}_A = \frac{\mathbf{B}_0}{\sqrt{4\pi\rho}}, \quad (2.35)$$

la relación de dispersión que se obtiene en el espacio de Fourier después de linealizar las ecuaciones es:

$$\omega = \pm \mathbf{k} \cdot \mathbf{c}_A,$$

donde ω es la frecuencia de oscilación de la onda. Es interesante que, comparando las soluciones, para las perturbaciones δB y δv se encuentra una relación de correlación dada por:

$$\frac{\delta B}{B_0} = \mp \frac{\delta v}{c_A}, \quad (2.36)$$

la cual nos dice que si las ondas de Alfvén se propagan en la misma dirección del campo medio, entonces las fluctuaciones Alfvénicas tienen signo opuesto, es decir, están anticorrelacionadas; en el caso opuesto, cuando las ondas se propagan en dirección opuesta al campo medio, entonces las fluctuaciones están correlacionadas.

2.3.3. Magnetohidrodinámica Hall

La magnetohidrodinámica Hall (Hall-MHD) es importante para la dinámica de plasmas en escalas de longitud más pequeñas que la escala inercial del ion pero más grandes que la escala inercial del electrón [31].

La esencia de la física Hall-MHD está contenida en la ley de Ohm. Si escribimos (2.22) de forma general:

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} - \frac{1}{nec} \mathbf{J} \times \mathbf{B} = \eta \nabla^2 \mathbf{B}, \quad (2.37)$$

donde \mathbf{J} es la densidad de corriente [31]. El último término de la izquierda en la ecuación (2.37) se identifica como término Hall y considera los efectos dispersivos debido a las corrientes Hall que se generan en el plasma cuando los electrones se desacoplan de los iones. Este término modifica las ecuaciones MHD de tal manera que el conjunto de ecuaciones Hall-MHD incompresible es:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = (\nabla \times \mathbf{b}) \times \mathbf{b} - \nabla \left(p + \frac{B^2}{8\pi} \right) + \nu \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (2.38)$$

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{b}) - d_i \nabla \times (\mathbf{j} \times \mathbf{b}) + \mu \nabla^2 \mathbf{b}, \quad (2.39)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{b} = 0, \quad (2.40)$$

donde $d_i = c/\omega_{pi}$ es la longitud inercial de los iones y $\mathbf{j} = \mathbf{J}/\sqrt{4\pi\rho}$ [31, 32].

2.4. Turbulencia

La evolución espacio-temporal de un fluido incompresible en ausencia de fuerzas externas está descrita por las ecuaciones de Navier-Stokes (N-S) [21]:

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathbf{v}}{\delta t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v}, \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Estas ecuaciones no tienen solución analítica debido a que existe un término no lineal; sólo se pueden resolver si se linealizan, es decir, cuando se desprecia o cuando se trata adecuadamente el término $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$. Cuando el término no lineal es grande, las soluciones que se obtienen por integración numérica resultan, en general, turbulentas. Para estimar que tan turbulento es un sistema se debe evaluar la importancia del término no lineal en las ecuación. Para esto se utiliza el *número de Reynolds* (R) que se define como la relación entre el término no lineal y el término lineal (disipativo) $\nu \nabla^2 \mathbf{v}$. A una escala de longitud característica l , velocidad característica V y viscosidad ν [19, 21]:

$$R = \frac{Vl}{\nu}. \quad (2.42)$$

La turbulencia es un proceso independiente que surge cuando R supera un valor crítico ($R > R_C$). Cuando R es pequeño (cuando el término no lineal empieza

a no ser despreciable) aparecen grandes estructuras turbulentas (vórtices) que se forman a una escala típica l (por ejemplo, el tamaño de un obstáculo en el fluido) y se superponen al movimiento del fluido. Conforme el número de Reynolds crece, se forman estructuras turbulentas de todas las dimensiones (de todas las escalas) cuyo movimiento se superpone al ya existente; la energía se transfiere de vórtices más grandes a estructuras más y más pequeñas debido a las interacciones no lineales. Cuando $R \gg R_C$, la turbulencia está completamente desarrollada, el movimiento será caótico y existirán vórtices de todas las escalas debido a superposiciones de diferentes estructuras sobre un amplio rango de escalas [21]. Las escalas grandes, en las que se inyecta energía al sistema desde una fuerza externa y donde empiezan a aparecer vórtices, se llaman *escalas integrales*. Las escalas a las que la disipación es dominante pertenecen al *rango disipativo*. En este rango, se concentra el efecto de la viscosidad ν del fluido, por lo tanto los vórtices se “relentizan” al ceder energía al fluido en forma de calor. Entre estos dos rangos, el término dominante en las ecuaciones es el término no lineal. Aquí, la transferencia de energía entre estructuras de gran escala a estructuras de escala más pequeña prevalece en la dinámica del sistema. Este rango de transferencia de energía se le conoce como *rango inercial* [7]. El rango inercial es de gran importancia en el estudio de la turbulencia porque la forma en la que la energía se transfiere entre las estructuras ayuda en la comprensión de las propiedades estadísticas del fluido turbulento. [19]

2.4.1. Leyes de escala de las ecuaciones MHD

Consideramos las ecuaciones MHD (2.23)-(2.26) despreciando los términos disipativos. Introducimos las transformaciones de escala definiendo la longitud característica l , el tiempo característico t , el factor de escala λ , y el exponente característico de escala para el tiempo α ,

$$l \rightarrow \lambda l', \quad t \rightarrow \lambda^\alpha t', \quad (2.43)$$

Suponiendo que los campos que obedecen las ecuaciones MHD también obedecen leyes de escala con exponentes característicos, tal que:

$$\mathbf{v} \rightarrow \lambda^h \mathbf{v}', \quad \mathbf{B} \rightarrow \lambda^\beta \mathbf{B}', \quad p \rightarrow \lambda^\nu p', \quad \rho \rightarrow \lambda^\mu \rho'; \quad (2.44)$$

se puede ver las relaciones que los exponentes característicos h , β , ν , μ deben cumplir para que las ecuaciones MHD se mantengan invariantes.

Teniendo en cuenta que $\nabla \sim 1/l$ e introduciendo las relaciones (2.44) en las ecuaciones MHD, se obtiene que las leyes de escala deben ser del tipo:

$$l \rightarrow \lambda l', \quad t \rightarrow \lambda^{1-h} t', \quad \mathbf{v} \rightarrow \lambda^h \mathbf{v}', \quad \mathbf{B} \rightarrow \lambda^\beta \mathbf{B}', \quad p \rightarrow \lambda^{2\beta} p', \quad \rho \rightarrow \lambda^{2(\beta-h)} \rho'. \quad (2.45)$$

Para que las ecuaciones MHD se mantengan invariantes para cualquier valor de h y β , deben cumplirse las siguientes relaciones entre los exponentes de escala: $\alpha = 1 - h$, $\mu = 2(\beta - h)$, y $\nu = 2\beta$, para el mismo factor de escala en todas las ecuaciones. Las magnitudes tienen diferentes exponentes de escala, en particular no existe ninguna relación entre el exponente de escala de la velocidad y el del campo magnético. Nótese que en el caso incompresible, $\rho = \text{const}$, (cuando la densidad no posee leyes de escala) el exponente de escala es el mismo para la velocidad y el campo magnético, $\beta = h$.

En las relaciones de escala (2.45) existen algunas combinaciones que se mantienen invariantes para cambios de escala, es particular $\delta B_l / l^\beta$ y $\delta v_l / l^h$ se mantienen invariantes. Por lo tanto estamos interesados en las relaciones de escala de las fluctuaciones de campos, que permanecen invariantes ante transformaciones de escala de las ecuaciones MHD [7, 19]. Estas relaciones de escala se deben mantener válidas también cuando el número de Reynolds es grande y el flujo es turbulento, por lo cual serán características de los regímenes turbulentos.

2.4.2. Cascada de Richardson

La turbulencia se caracteriza por la existencia de estructuras (vórtices, remolinos) que transportan energía a escalas cada vez más pequeñas. Este proceso de transferencia se llama *cascada turbulenta* y es consecuencia de la no-linealidad de las ecuaciones. Este fenómeno de cascada fue introducido por Lewis Richardson en 1922, posteriormente fue desarrollado por Andrei Kolmogorov (1941) y sucesivamente por Robert Kraichnan (1965) para el caso de la MHD [7].

En el modelo de Richardson, se introduce una jerarquía de estructuras sobre un rango de escalas características $l_n = l_0 r^n$ donde $0 < r < 1$ es un factor multiplicativo y l_0 es la escala integral (donde se inyecta energía al sistema a razón de ε por unidad de masa). En este modelo, a cada estructura presente a la escala ($n = 0, 1, 2, \dots, N$) le sigue $1/r^{n+1}$ estructuras de escala l_{n+1} , donde la energía se transfiere a razón constante ε fragmentándose a lo largo de la cascada hasta la escala de Kolmogorov η , a la que la energía se disipa debido a los efectos de la viscosidad. El número total de estructuras a la escala n está dado por el número de estructuras en la escala integral multiplicado por un factor r^{-3n} , de modo que el volumen total ocupado por las estructuras se mantiene constante en cada paso de la cascada. [21]

La figura 2.1 es una representación de la cascada de Richardson, de donde se notan dos características particulares. La primera es la *invariancia* de escala: el hecho de que el espacio esté lleno de estructuras a cada paso de escala, implica que la energía está repartida en igual cantidad entre las estructuras de igual escala y que la tasa de transferencia de energía permanece constante a lo largo de toda la cascada. Esto corresponde a la invariancia de escala de las ecuaciones MHD. La segunda característica es la *localidad* de las interacciones entre las estructuras: como se ve en la figura, la energía en la región inercial se intercambia sólo entre estructuras de escalas cercanas. Estas dos suposiciones son básicas en la fenomenología de Kolmogorov, que veremos más adelante. [19, 21]

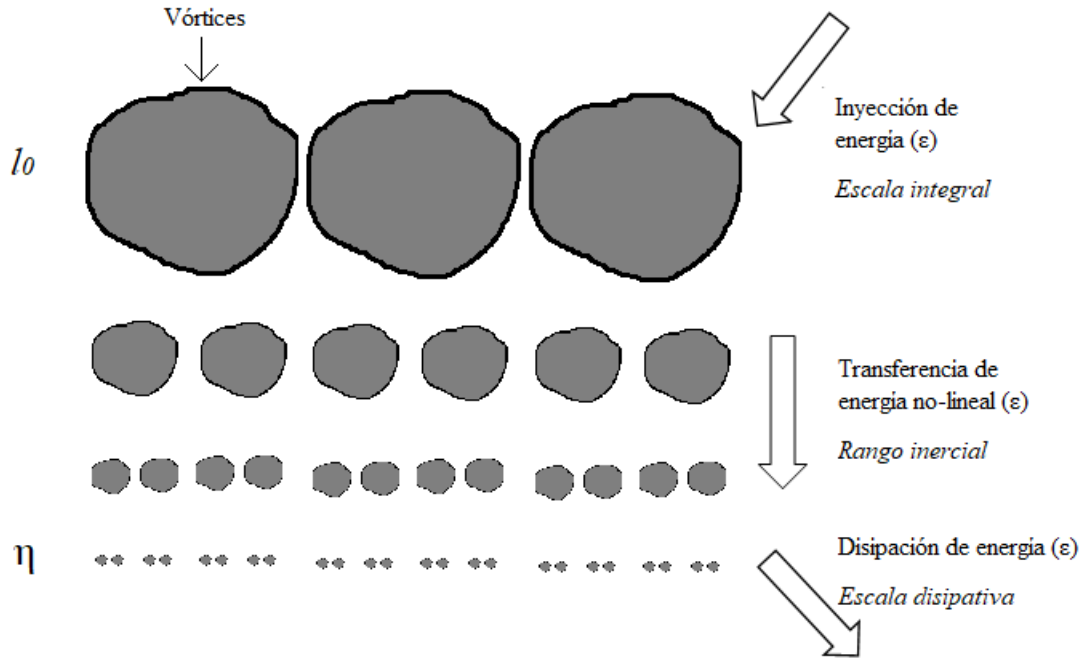


FIGURA 2.1: Cascada de Richardson.

2.4.3. Incrementos de velocidad y de campo magnético

Los estudios de la turbulencia se realizan, desde el punto de vista experimental, mediante el análisis de variables que representan incrementos en varias escalas de campos como la velocidad y el campo magnético. Para un campo estocástico, se definen las variables:

$$\delta\psi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r} + \mathbf{l}, t) - \psi(\mathbf{r}, t). \quad (2.46)$$

Estas variables pueden dar información sobre la presencia de estructuras en el campo a una escala dada l , como remolinos y vórtices. Los incrementos de campo son variables estocásticas y por lo tanto su descripción necesita un enfoque estadístico [19, 21].

2.4.4. Espectros de energía, funciones de distribución de probabilidad y funciones de estructura

Los espectros de energía son una poderosa herramienta para el análisis de la turbulencia. De hecho, permiten la descripción de las características de la cascada energética. En particular, se encuentra que el espectro de energía de un campo turbulento tiene un comportamiento de ley de potencia:

$$E(k) \sim k^{-\alpha}, \quad (2.47)$$

que define el rango inercial de la cascada energética [7, 21]. Esto es consecuencia de las propiedades de invariancia de escala de las ecuaciones en el rango inercial.

Un enfoque diferente de la turbulencia se basa en el estudio de las propiedades estadísticas de los incrementos $\delta\psi_l$ definidos por (2.46) [21]. En el caso homogéneo e isotrópico, los valores medios de las diferencias $|\delta\psi_l(\mathbf{r}, t)|^2$ están relacionados al espectro $E(k)$ [19].

Como vamos a manejar variables estocásticas, un enfoque estadístico puede proveer información sobre las propiedades físicas del sistema. En particular, es interesante reproducir las propiedades estadísticas de la turbulencia; entonces es posible introducir una descripción probabilística de la turbulencia a través de las *funciones de distribución de probabilidad (PDF)* de los incrementos de campo (o fluctuaciones) a varias escalas.

Si se conoce la PDF, $P(x)$, de una variable estocástica x , es posible calcular el conjunto infinito de los momentos [21]:

$$\langle x^n \rangle = \int x^n P(x) dx. \quad (2.48)$$

A su vez, llevando estas cantidades al espacio de Fourier y regresando al espacio físico, se obtiene:

$$P(x) = \frac{1}{2\pi} \int dk \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(ik)^m}{m!} \langle x^m \rangle e^{-ikx}, \quad (2.49)$$

por lo tanto, se puede calcular la PDF de una variable estadística si se conoce todos los momentos $\langle x^m \rangle$ y viceversa [21]. Es decir, si experimentalmente utilizamos el teorema ergódico para calcular el conjunto de los momentos podemos vincular la PDF a los momentos $\langle x^m \rangle$ [7, 19, 23]. En los estudios experimentales de la turbulencia, se pueden entonces utilizar equivalentemente las PDFs o sus momentos.

Si la PDF es gaussiana, se puede demostrar que ésta sólo necesita los primeros dos momentos para estar completamente determinada. El momento de primer orden es la media $\langle x \rangle$, que puede ser anulada trasladando la PDF a una nueva. El momento de segundo orden es la varianza $\sigma^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle$.

Por otro lado, si la $P(x)$ no es gaussiana, para describirla completamente a través de los momentos, y entonces para caracterizar el fenómeno físico en cuestión, se necesitan todos los momentos $\langle x^m \rangle$ que, en principio, son infinitos. [7, 19, 21, 23]

El análisis espectral no provee una descripción completa de las propiedades estadísticas del campo, a menos que éste tenga una PDF gaussiana. De hecho, los espectros son una representación del momento de segundo orden. Para campos no gaussianos, las propiedades de la turbulencia se pueden describir utilizando las *funciones de estructura longitudinales* que representan los momentos de órdenes más altos del campo. Las funciones de estructura se definen como [7, 19, 21]:

$$S_q(l) = \langle \delta\psi_l^q \rangle = \left\langle \left\{ [\boldsymbol{\psi}(\mathbf{r} + \mathbf{l}) - \boldsymbol{\psi}(\mathbf{r})] \cdot \frac{\mathbf{l}}{l} \right\}^q \right\rangle \quad (2.50)$$

Las (2.50) son cantidades medibles; lo que consiste en una estimación del parámetro ζ_q obtenido mediante la relación [21]:

$$S_q(l) \sim l^{\zeta_q}$$

Este enfoque es el mismo que en el estudio de las propiedades características de la PDF de $\delta\psi_l$. [7, 19]

2.5. Fenomenología de la turbulencia MHD

El estudio fenomenológico de la turbulencia se basa en el análisis dimensional y de las leyes de escala de las magnitudes características. Las soluciones de las ecuaciones N-S o MHD no son parte activa del análisis, por lo que no se busca encontrar soluciones al problema del movimiento, pero es suficiente establecer relaciones importantes para el conocimiento estadístico del fenómeno.

Las variables involucradas en el sistema para el análisis fenomenológico son: una escala de longitud característica l , fluctuaciones características de la velocidad y del campo magnético a la escala l , que denotamos con δv_l y δb_l , un tiempo característico t_l , un número de Reynolds característico local $R_l = l\delta v_l/\nu$, y la tasa de transferencia media de energía ε_l . Esta última cantidad se define en fluidos como:

$$\varepsilon_l = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \langle \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r} + \mathbf{l}) \rangle, \quad (2.51)$$

que en general es función de la escala l [22]; la operación de media se realiza sobre todo el espacio ocupado por el fluido. Para el caso MHD, la tasa de transferencia media de energía se adapta utilizando la velocidad generalizada \mathbf{z}^\pm en lugar de la velocidad \mathbf{v} . Entonces, se define la tasa de transferencia media de la *pseudoenergía* como [22]:

$$\varepsilon_l = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \langle \mathbf{z}^\pm(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{z}^\pm(\mathbf{r} + \mathbf{l}) \rangle; \quad (2.52)$$

se obtiene:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} (\varepsilon^\pm + \varepsilon^\mp), \quad (2.53)$$

con lo cual se toma en cuenta las contribuciones magnética y cinética en la transferencia de energía [22]. Nótese que en el caso en el que la velocidad y el campo magnético tengan el mismo exponente característico (caso incompresible) esto se

traduce, en términos de las variables de Elsässer, en el hecho de que los dos modos z^+ y z^- también tienen el mismo exponente característico. Por lo tanto, en el entorno del análisis fenomenológico de las ecuaciones MHD incompresibles, es equivalente escribir las leyes de escala en términos de la velocidad o de las variables de Elsässer [7, 19].

2.5.1. Hipótesis de Kolmogorov

La teoría desarrollada por Kolmogorov en 1941 (K41) es el resultado más importante en la descripción de fluidos turbulentos. Esta teoría provee un enfoque fenomenológico de la turbulencia a partir de análisis dimensionales. A continuación se enuncian las dos hipótesis sobre las cuales se basa la *K41* (del libro de Frisch, 1995) [21]:

1. Primera hipótesis de similitud

para $R \gg R_{crit}$ todas las propiedades estadísticas de las escalas pequeñas son unívoca y universalmente determinadas por la escala l , por la tasa media de disipación de energía ε y por la viscosidad ν ;

2. Segunda hipótesis de similitud

para $R \rightarrow \infty$ todas las propiedades estadísticas de las escalas pequeñas son unívoca y universalmente determinadas por la escala l y por la tasa media de disipación de energía ε , y son independientes de la viscosidad ν ;

Se entiende por “escalas pequeñas” a las escalas lejanas del rango de inyección, es decir, al límite $l \rightarrow 0$; $R \rightarrow \infty$ equivale a suponer ausencia de disipación. La segunda hipótesis se puede explicar con argumentos dimensionales: definimos el *número de Reynolds local* como [21]:

$$R_l = \frac{\delta v_l l}{\nu}; \quad (2.54)$$

nótese que R_l crece con l , entonces cuando $R \gg R_{crit}$, es decir, a grandes escalas, el término viscoso de las ecuaciones MHD es despreciable en comparación al término no-lineal, por lo tanto el efecto de la viscosidad es nulo. Como ν es despreciable, se supone que todas las cantidades relativas a las escala $l \gg \eta$ no dependen de la viscosidad. [19]

Ahora, mediante análisis dimensional, es posible calcular la tasa de transferencia (o disipación) de energía en función de l y δv_l . Sea t_l el tiempo típico que equivale al tiempo necesario para que se transfiera la energía desde la escala l a las escalas más pequeñas o más grandes; esta consideración permite dar una estimación del flujo de energía por unidad de tiempo y de masa:

$$\varepsilon \sim \frac{\delta v_l^2}{t_l}, \quad (2.55)$$

que dimensionalmente es $[V^2]/[T]$ [21]. Este flujo de energía será igual, en el rango inercial, a la tasa de disipación media de energía ε . Así mismo, el tiempo característico de transferencia de energía se puede considerar como el tiempo de giro de un remolino, que por análisis dimensional es $t_l \sim l/\delta v_l$, de modo que se puede obtener una ley de escala para los incrementos del campo [21]:

$$\delta v_l \sim \varepsilon^{1/3} l^{1/3}; \quad (2.56)$$

esta expresión se denomina *ley de Kolmogorov*. Si se aplica la ley de Kolmogorov a la escala integral l_0 obtenemos $v_0 \sim \varepsilon^{1/3} l_0^{1/3}$; utilizando esta relación en la (2.56) podemos tener una ley de escala para la velocidad [21]:

$$\delta v_l \sim v_0 \left(\frac{l}{l_0} \right)^{1/3}, \quad (2.57)$$

donde $h = 1/3$ es el exponente de escala. Nótese que, la ley de escala de la transferencia de energía deberá ser $\varepsilon \rightarrow \lambda^{1-3h} \varepsilon'$, y $h = 1/3$ es la única elección que garantiza la invariancia de escala de ε a lo largo de la cascada [7, 19, 21, 23].

A escalas más pequeñas, la viscosidad empieza a tener efecto sobre las estructuras turbulentas. Por análisis dimensional se obtiene el tiempo típico asociado a los efectos disipativos $t_l^{(\nu)} \sim l^2/\nu$. Igualando $t_l^{(\nu)}$ al tiempo típico t_l se encuentra la escala a la cual los términos disipativos son comparables con los términos de transferencia no-lineal:

$$\eta \sim \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad (2.58)$$

llamada *escala de Kolmogorov* [21]. El hecho de que $t_l^{(\nu)}$ sea más rápido en l respecto a t_l garantiza que tarde o temprano los dos tiempos vayan a coincidir, es decir, cuando empieza la disipación de energía [7, 19].

2.5.2. Espectro de Kolmogorov

Trasladando los resultados del análisis dimensional, se puede encontrar la tendencia del espectro de energía asociado al movimiento turbulento. Si sustituimos la longitud típica l por un número de onda $k \sim 1/l$ se puede trasladar los resultados sobre la ley de escala al espacio espectral [23]. En particular, se puede construir una energía cinética por unidad de masa $E(k) dk$, relativo a las estructuras de número de onda k , a través de la tasa de disipación ε y k ; de hecho, teniendo en cuenta que $\delta v_l^2 \sim kE(k)$, y si se utiliza la relación (2.56) en el rango inercial, se obtiene [24]:

$$E(k) \sim \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}. \quad (2.59)$$

El espectro es una ley de potencia en k y se denomina *espectro de Kolmogorov*. El espectro de ley de potencia (2.59) ha sido verificado en datos experimentales (ver Fig. 2.2) y simulaciones numéricas de flujos turbulentos [7, 21, 23, 24].

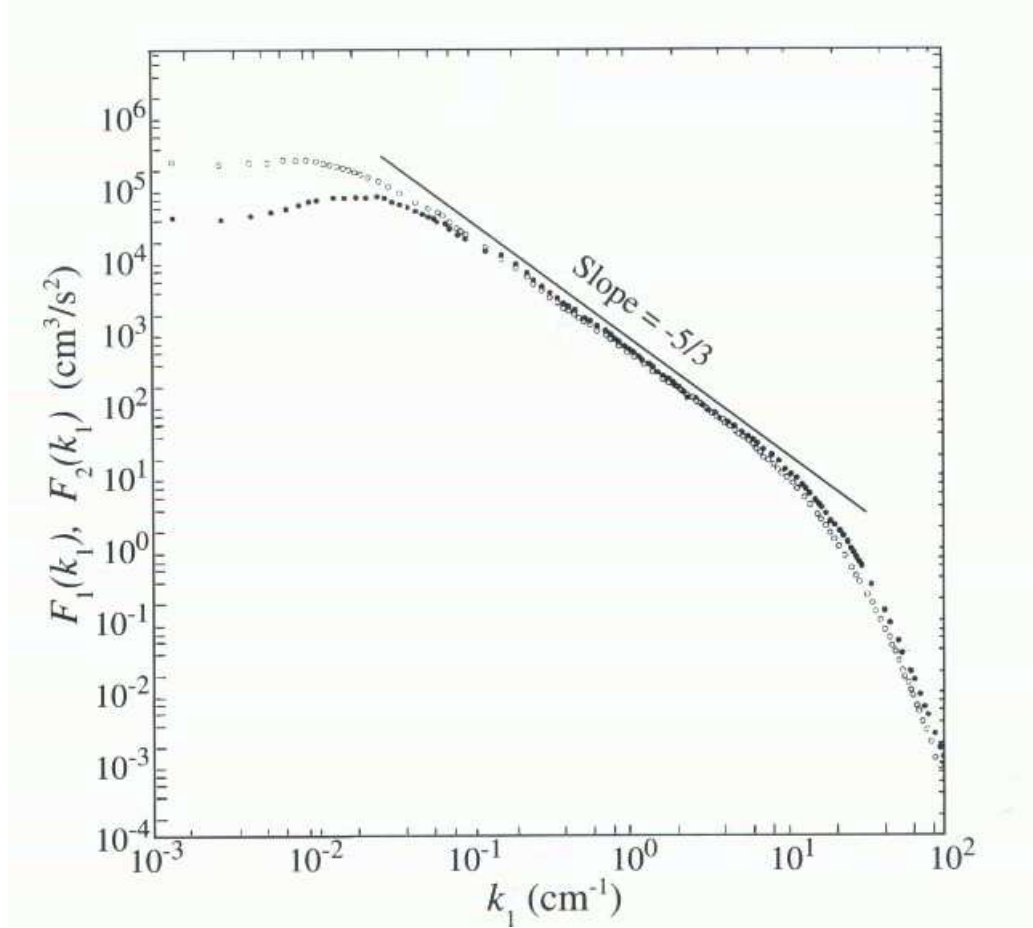


FIGURA 2.2: Espectros de energía del componente de flujo (círculos blancos) y componente lateral (círculos negros) de las fluctuaciones de velocidad en el dominio del tiempo en un chorro. [21]

2.5.3. Efecto Alfvén: Espectro de Kraichnan

Cuando se realiza el análisis dimensional en la turbulencia de plasmas, es posible que las fluctuaciones del campo magnético y de la velocidad (debidas a la propagación de las ondas de Alfvén) modifiquen las interacciones entre las estructuras turbulentas; se debe tener en cuenta esta modificación en el análisis fenomenológico. Entonces analizamos qué sucede con el flujo de energía a través de las variables z^\pm .

Como en la K41, suponemos una cascada energética que se debe a las interacciones no-lineales entre estructuras turbulentas δz^+ y δz^- , y suponemos que esto genera un espectro característico análogo al caso fluido con un rango de inyección, un rango inercial y un rango disipativo. Además, suponemos que las leyes de escala

a lo largo de la cascada son leyes de potencia en el rango inercial, es decir, que el flujo de energía no depende de la escala [19]. Bajo estas suposiciones, se puede calcular, a través de análisis dimensional, el flujo de energía entre escalas:

$$\Pi_l^\pm \sim \frac{|\delta z^\pm(l)|^2}{t_l^\pm}, \quad (2.60)$$

donde t_l representa la duración típica de la transferencia de energía [7, 21]. Las fluctuaciones Alfvénicas se propagan en dirección opuesta a lo largo de las líneas del campo magnético (como se puede ver en la ec. (2.33)) por lo que las estructuras interactuantes están separadas por un tiempo $t_A \sim l/c_A$, de tal manera que el tiempo actual de interacción se modifica (disminuye). Si el tiempo característico no-lineal de las fluctuaciones es $t_{NL}^\pm \sim l/\delta z_l^\mp$, entonces el tiempo de interacción es:

$$t_l^\pm \sim \frac{(t_{NL}^\pm)^2}{t_A^\pm} \sim \frac{lc_A}{\delta v^2}, \quad (2.61)$$

que resulta de considerar el número de interacciones no-lineales que ocurren en un tiempo de Alfvén, t_{NL}^\pm/t_A^\pm , y considerando un comportamiento de escala similar entre los campos de Elsässer y la velocidad $\delta z^+ \sim \delta z^- \sim \delta v$ [21, 26].

Entonces, el flujo de energía, correspondiente a la tasa de transferencia de energía ε^\pm , se puede escribir como [21]:

$$\Pi_l^\pm \sim \varepsilon^\pm \sim \frac{\delta v^4}{lc_A}, \quad (2.62)$$

por lo tanto, la ley de escala para la velocidad (o campo magnético, o campos de Elsässer) se modifica por el efecto Alfvén:

$$\delta v_l \sim v_0 \left(\frac{l}{l_0} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad (2.63)$$

tal que $h = 1/4$ [26]. Entonces el espectro también se modifica [7, 26]:

$$E(k) \sim c_A^{\frac{1}{2}} \varepsilon^{\frac{1}{2}} k^{-\frac{3}{2}}. \quad (2.64)$$

El índice espectral $-3/2$ es la ley de potencia del espectro con efecto Alfvénico y se llama *espectro Kraichnan* [7, 19, 22].

2.5.4. Leyes de escala de la funciones de estructura

Aplicando las leyes de escala de Kolmogorov y Kraichnan a los incrementos de los campos (2.57) y (2.63), se puede calcular la ley de escala para las funciones de estructura:

$$S_l^{(q)} = \langle \delta \psi_l^q \rangle \sim l^{\frac{q}{m}}, \quad (2.65)$$

donde $m = 4$ cuando el efecto Alfvénico desfasa las estructuras interactuantes [26], y $m = 3$ cuando este efecto es despreciable [24]. Es importante notar que en el modelo que se acaba de describir, o sea el modelo de Kolmogorov llamado K41, el exponente de escala característico ζ_q de las funciones de estructura, es una función lineal del momento de orden q , es decir: $\zeta_q = q/m$ [7, 19, 21, 22].

2.5.5. Intermitencia en la turbulencia

Los resultados experimentales de la K41 muestran que el espectro de energía está bien determinado por $E(k) \sim k^{-5/3}$ (al menos dentro de errores experimentales aceptables), pero el comportamiento lineal del exponente de escala de las funciones de estructura con el orden de los momentos no se observa. La K41 es la base de estudio de la turbulencia e incluye los fundamentos principales. Sin embargo, es necesario seguir desarrollando el enfoque de la turbulencia. Mientras el análisis experimental se utilizaba para análisis espectral, la K41 funcionaba adecuadamente porque sólo se estudiaba el momento de segundo orden. A medida que se desarrollaban técnicas experimentales más precisas, se podía investigar momentos más

altos, por lo que se necesitó de interpretaciones diferentes. El punto más discutido en la teoría de Kolmogorov (K41) es la distribución uniforme de la tasa de transferencia de energía a través de las escalas [27].

Se pudo observar que el exponente de escala ζ_q se desviaba bastante de una relación lineal [21]. Además, la PDF de los incrementos de la velocidad (o cualquier campo) δv_l eran gaussianas solamente en la escala integral, y se hacían menos gaussianas mientras más pequeña era la escala. Lo que se observaba es que conforme la escala se hacía más pequeña, más altas eran las “colas” de la función de distribución, como se puede ver en la Fig. 2.3. Como consecuencia de esto, los momentos, representados por las funciones de estructura, tenían una escala diferente, y esto se puede observar mediante los exponentes de escala, los cuales difieren de la predicción de la K41, $\zeta_q \sim q/3$. Este comportamiento se debe a que existen valores de incrementos de velocidad grandes, y con mayor probabilidad que en una estadística gaussiana. Consecuentemente, la tendencia de los incrementos δv_l es *intermitente* [21, 27]. Así, ε también posee el mismo tipo de fenomenología, es decir, experimentalmente se observa regiones explosivas de disipación seguidas de periodos de relativa calma. Por esta razón, las correcciones a la K41 se denominan *correcciones intermitentes*. [19, 21]

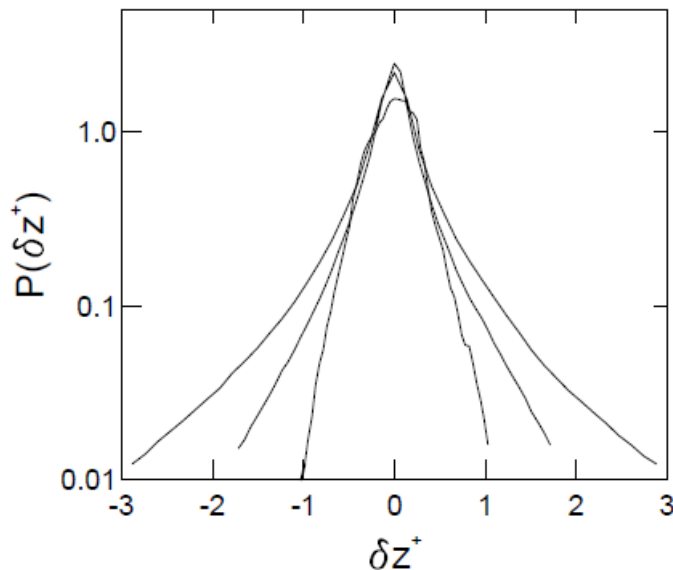


FIGURA 2.3: PDFs de los incrementos de los campos cambian de forma con la escala. [7]

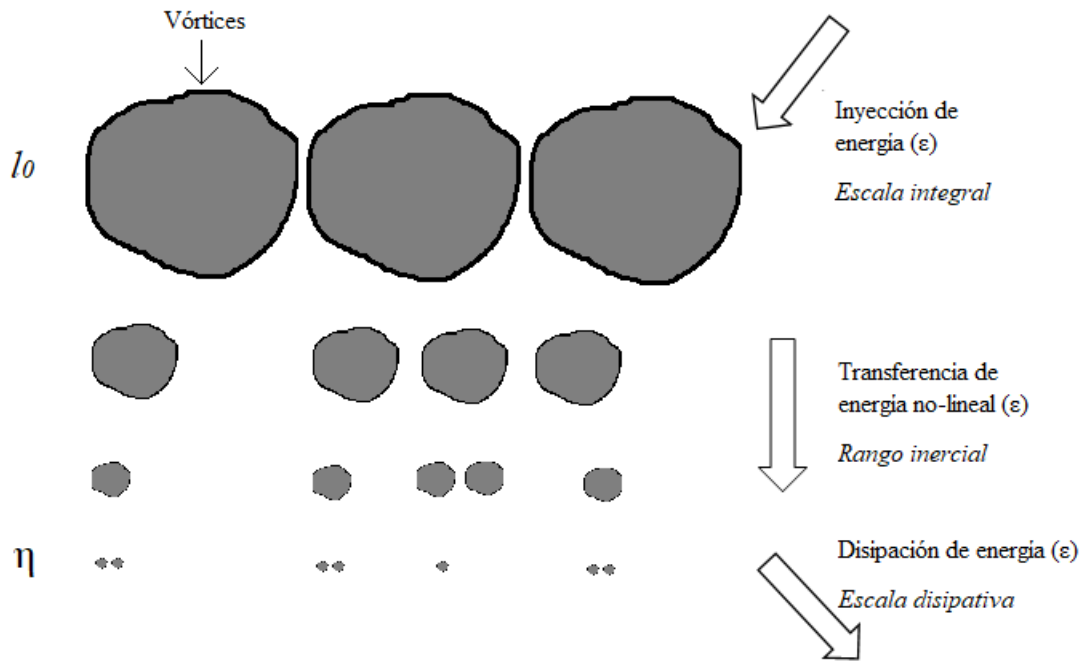


FIGURA 2.4: Cascada de Richardson intermitente. Las diferencias locales de la transferencia de energía están representadas por la concentración de estructuras activas o regiones del espacio.

Recordemos la figura de la cascada de Richardson que utilizamos para introducir el concepto de turbulencia, la misma que puede ser modificada para entender el concepto de intermitencia. Una de las ideas principales sobre la cual se basa la K41 es que la tasa media de transferencia de energía ϵ controla la cascada no-lineal. En ese punto no se consideraba la distribución espacial de ϵ , es más, la idea de universalidad del modelo sugería que se distribuía uniformemente. Sin embargo, en el caso intermitente, deberíamos reafirmar que sólo el valor medio *global* de la tasa de transferencia de energía es constante a través de la cascada, mientras que su valor local puede ser una función fluctuante (estocástica) que presenta zonas de actividad y zonas de inactividad que se alternan. Como se puede ver en la Figura [2.4](#). La Figura de la cascada de Richardson modificada muestra la concentración de estructuras activas en posiciones del espacio definidas; estas concentraciones se vuelven más y más evidentes conforme decrece la escala [\[7, 21\]](#).

2.6. Ley de Yaglom

La intermitencia de los campos invalida la K41 para funciones de estructura de altos órdenes. Sin embargo, existen algunas relaciones para las funciones de estructura de bajos órdenes que se derivan de las ecuaciones dinámicas. Un resultado muy importante y bien conocido en la turbulencia hidrodinámica es la ley de Kolmogorov 4/5, que relaciona el momento de tercer orden de la velocidad con la tasa de disipación de la energía. Se puede obtener de manera análoga una *ley de Yaglom* que se extiende a la turbulencia MHD [24, 28].

La ley de Yaglom (revisada por Politano y Pouquet en 1998) asumiendo homogeneidad, isotropía e incompresibilidad es:

$$Y(\mathbf{r}, l) = \left\langle |\Delta \mathbf{z}^\pm(\mathbf{r}, l)|^2 \Delta z_\parallel^\mp(\mathbf{r}, l) \right\rangle = -\frac{4}{3} \varepsilon l, \quad (2.66)$$

donde \mathbf{r} es la separación entre dos incrementos de campo, l es la escala característica, $\Delta \mathbf{z}^\pm$ son los incrementos de los campos de Elsässer y el subíndice \parallel indica la componente longitudinal, es decir, la componente paralela a la velocidad media [28, 29]. Para una serie temporal en plasmas, usando la hipótesis de Taylor (ver Apéndice A) $r = t \langle v \rangle$ para intercambiar los argumentos de espacio (r) y tiempo (t) mediante la velocidad media $\langle v \rangle$, se puede reescribir la ley de Yaglom (o ley de Politano-Pouquet) como:

$$Y(t, \Delta t) = \left\langle |\Delta \mathbf{z}^\pm(t, \Delta t)|^2 \Delta z_\parallel^\mp(t, \Delta t) \right\rangle = -\frac{4}{3} \varepsilon \Delta t \langle v \rangle, \quad (2.67)$$

donde Δt es la escala temporal [30]; $\mathbf{z}^\pm = \mathbf{v} \pm \mathbf{B}/\sqrt{4\pi\rho}$ son las variables de Elsässer que acoplan la velocidad del plasma \mathbf{v} y el campo magnético \mathbf{B} expresado en unidades de velocidad a través de la densidad de masa ρ . (2.67) prescribe una relación de escala lineal entre el momento de tercer orden de la tasa de transferencia de energía y la tasa media de disipación de energía ε . Desarrollando los términos

de los campos de Elsässer, (2.67) puede ser escrita en términos de la velocidad y el campo magnético:

$$Y = \langle (\Delta v^2 + \Delta b^2) \Delta v_{\parallel} - 2(\Delta \mathbf{v} \cdot \Delta \mathbf{b}) \Delta b_{\parallel} \rangle = -\frac{4}{3}\varepsilon \Delta t \langle v \rangle; \quad (2.68)$$

el término $(\Delta v^2 + \Delta b^2) \Delta v_{\parallel}$ está asociado a la energía cinética y magnética transportada por las fluctuaciones de velocidad, y $2(\Delta \mathbf{v} \cdot \Delta \mathbf{b}) \Delta b_{\parallel}$ está asociado con la correlación velocidad-campo magnético acoplada a las fluctuaciones magnéticas longitudinales. [30]

En el marco de estudio Hall-MHD se incluyen los mismos efectos que tiene la MHD, así como la ley de potencia del espectro y los efectos intermitentes. Así también, se tiene para el marco Hall-MHD, considerando la densidad de corriente, una *ley de Yaglom-Hall* bajo las mismas consideraciones (homogeneidad, isotropía e incompresibilidad):

$$\begin{aligned} Y_H &= \langle (\Delta v^2 + \Delta b^2) \Delta v_{\parallel} - 2(\Delta \mathbf{v} \cdot \Delta \mathbf{b}) \Delta b_{\parallel} + d_i [2(\Delta \mathbf{b} \cdot \Delta \mathbf{j}) \Delta b_{\parallel} - \Delta b^2 \Delta j_{\parallel}] \rangle \\ &= -\frac{4}{3}\varepsilon \Delta t \langle v \rangle, \end{aligned} \quad (2.69)$$

donde d_i es la longitud inercial de los iones; los dos últimos términos representan la contribución Hall a la transferencia de energía: $2(\Delta \mathbf{b} \cdot \Delta \mathbf{j}) \Delta b_{\parallel}$ representa las fluctuaciones campo magnético-densidad de corriente acopladas a las fluctuaciones magnéticas longitudinales, y $\Delta b^2 \Delta j_{\parallel}$ representa la energía magnética transportada por la corriente eléctrica en la dirección del flujo [32]. En general, se esperaría que estos efectos adicionales sean aditivos, por lo tanto, desde una perspectiva teórica la ley de tercer orden de Hall (ley Hall-Yaglom) representa una mejor medida de la tasa de transferencia de energía cerca de las escalas cinéticas, comparadas con la MHD. [46]

2.7. Proxy de la tasa de transferencia de energía local

Las propiedades de la cascada turbulenta pueden ser estudiadas utilizando un proxy de la tasa de transferencia de energía local (LET), la cual indica la contribución de las fluctuaciones al flujo de energía en cada posición (o, como en este caso, en cada tiempo a través de la hipótesis de Taylor). Con base en la Ec. (2.68), se define un proxy heurístico de la tasa de transferencia de energía local (LET) a la escala Δt introduciendo la cantidad [30]:

$$\varepsilon(t, \Delta t) = -\frac{3}{4} \frac{(\Delta v^2 + \Delta b^2) \Delta v_{\parallel} - 2(\Delta \mathbf{v} \cdot \Delta \mathbf{b}) \Delta b_{\parallel}}{\Delta t \langle v \rangle}, \quad (2.70)$$

donde $\varepsilon(t, \Delta t)$ depende del tiempo y de la escala, y los términos de la derecha se describieron en la sección anterior. A cada escala, los incrementos de los campos en la serie temporal pueden ser asociados al valor local de $\varepsilon(t, \Delta t)$.

De la misma manera se puede definir una versión del proxy de la tasa LET para la ley (2.69) para estudiar las contribuciones Hall en cada escala [46]:

$$\varepsilon(t, \Delta t) = -\frac{3}{4} \frac{(\Delta v^2 + \Delta b^2) \Delta v_{\parallel} - 2(\Delta \mathbf{v} \cdot \Delta \mathbf{b}) \Delta b_{\parallel} + di [2(\Delta \mathbf{b} \cdot \Delta \mathbf{j}) \Delta b_{\parallel} - \Delta b^2 \Delta j_{\parallel}]}{\Delta t \langle v \rangle}. \quad (2.71)$$

El procedimiento para obtener (2.70) y (2.71) desprecia varias contribuciones a la ley de escala, las cuales, en (2.68) y (2.69) respectivamente, están suprimidas por un promedio sobre la gran muestra y por lo tanto proveen solo una aproximación de la verdadera tasa de transferencia de energía local.

Capítulo 3

Descripción de los datos

3.1. Introducción

El objetivo de este trabajo es describir la turbulencia en plasmas del espacio circun-terrestre. Para realizar esta tarea es necesario analizar diferentes datos de varios sistemas físicos como la magnetosfera terrestre. Esto se puede llevar a cabo mediante el laboratorio ‘natural’ de plasmas que tenemos a disposición. Los datos que se obtienen son turbulentos, por lo que es un fenómeno complejo. En este capítulo se introducen los sistemas turbulentos, se describe el conjunto de datos y los métodos experimentales.

3.2. El espacio circun-terrestre

El espacio circun-terrestre está formado por un plasma tenue y magnetizado, que constituye la magnetosfera terrestre. El campo magnético es el del dipolo terrestre, mientras que el plasma, principalmente electrones y protones, con una componente menor de partículas α y de iones más pesados, es de origen mixto: una parte es material ionizado de la alta atmósfera terrestre, otra es el plasma de origen solar. De hecho, la magnetosfera terrestre está sumergida en un flujo de plasma supersónico y muy tenue (pocas partículas por cm^3): el viento solar (o *solar wind*).

El viento solar irradia desde la corona solar en todo el espacio interplanetario, formando una bola de plasma en expansión que alcanza la orbita de Plutón. Durante su expansión, el viento solar impacta contra la bola de plasma magnetosférico, estirando el campo del dipolo magnético terrestre (por la ley de hielo de Alfvén) en dirección hacia afuera con respecto al sol. Esto genera la forma característica de la magnetosfera, que es más comprimida del lado del sol, y estirada por el lado opuesto. Una representación esquemática se muestra en la Figura 3.1.

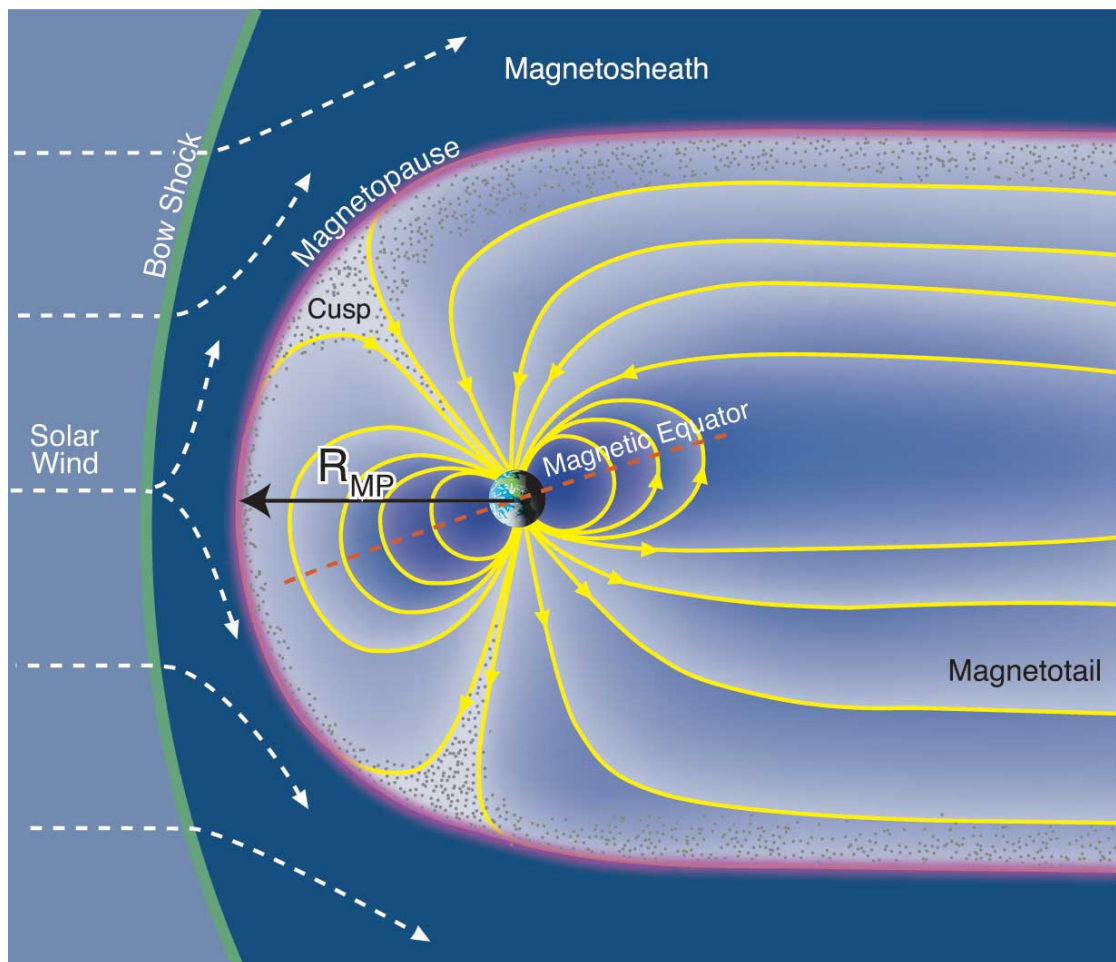


FIGURA 3.1: Ilustración esquemática del espacio circunplanetario. [51]

Debido a la alta velocidad de expansión del viento solar (típicamente del orden de 500 km/s) el impacto con el plasma en reposo (con respecto a la Tierra) de la magnetosfera genera una onda de choque (el *bow shock*, indicado con una línea verde en la parte izquierda de la Figura) en el lado “día”, generando una discontinuidad entre el viento solar y la propia magnetosfera. Hacia abajo del bow shock, se encuentra una región de plasma solar desacelerado por el impacto, llamada

magnetosheath (MS), donde el plasma es típicamente muy caótico y mezclado, por haber recién cruzado la onda de choque. Esta región, donde el campo magnético del viento solar decrece, es una zona de transición que tiene su otra frontera en la *magnetopausa* (línea morada en la Figura), o sea una zona donde el campo magnético de la tierra desaparece y empieza, hacia afuera, el campo del viento solar. Detrás de la magnetopausa, empieza la región de la propia magnetosfera, donde el plasma posee características un poco diferentes en términos de densidad, temperatura y velocidad promedio, y de niveles de fluctuaciones de la temperatura. La región cerca de la magnetopausa, donde existe un fuerte gradiente de los varios parámetros del plasma y de campo magnético, se conoce como capa límite magnetosférica, o *magnetospheric boundary layer* (BL). Más lejos de la magnetopausa, la dinámica del plasma está dominada por la rotación de la tierra y de su dipolo magnético, junto con la interacción con el viento solar, de manera muy complicada.

La región de interés para este trabajo es justamente alrededor de la magnetopausa, ahí donde ocurren numerosos fenómenos de física de plasmas y de magnetohidrodinámica de sumo interés para la comunidad científica internacional. Estos fenómenos, principalmente asociados al fuerte gradiente y a la conexión entre la magnetosfera y el espacio interplanetario, son responsables de la continua inyección de plasma del viento solar en el espacio circunplanetario, de la penetración de partículas energéticas, de las modulaciones de las corrientes magnetosféricas que producen variaciones importantes del campo geomagnético, y, por lo tanto, controlan los eventos del clima espacial (o *space weather*).

3.3. Misión Magnetospheric Multiscale

En septiembre del 2015, la misión *Magnetospheric Multiscale* (MMS) de la NASA se ubicó en la magnetopausa terrestre con el objetivo de estudiar cómo los campos magnéticos de la Tierra y del Sol se conectan y desconectan en la región circunplanetaria. MMS consta de cuatro satélites idénticos equipados de instrumentos que

miden *in situ* varias cantidades, como campos electromagnéticos y partículas, necesarias para la descripción de la dinámica del plasma [33]. Los cuatro satélites de la misión MMS están dispuestos en un arreglo tetraedral a distancias variables, con el objetivo de proporcionar medidas tridimensionales de los parámetros y para permitir el estudio de la geometría de los fenómenos. Para obtener una descripción completa de las varias regiones del espacio circunterrestre, siguen órbitas elípticas alrededor de la Tierra a través del campo magnético que rodea nuestro planeta (ver Fig. 3.2). En la Fig. 3.3 se puede ver la disposición de cuatro satélites en una ilustración explicativa.

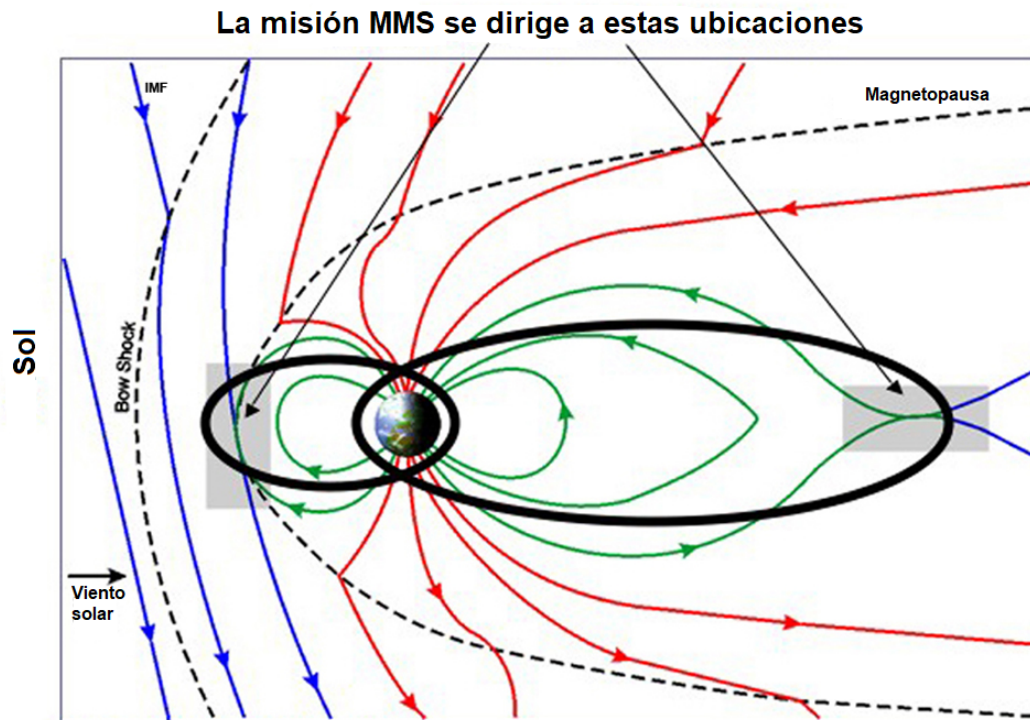


FIGURA 3.2: Órbita de la misión MMS. En azul, líneas de campo del viento solar; en verde, líneas de campo cerradas; en rojo, líneas de campo abiertas; y en negro órbitas, que se desea seguir. [34]

Cada satélite lleva instrumentos idénticos de alta precisión y resolución: analizadores de plasma, para medir la función de distribución de velocidades de iones y electrones, y para calcular sus momentos (por ejemplo densidad, velocidad, y temperatura); detectores de partículas energéticas; magnetómetros e instrumentos de campo eléctrico; así como también dispositivos que protegen los instrumentos. Con

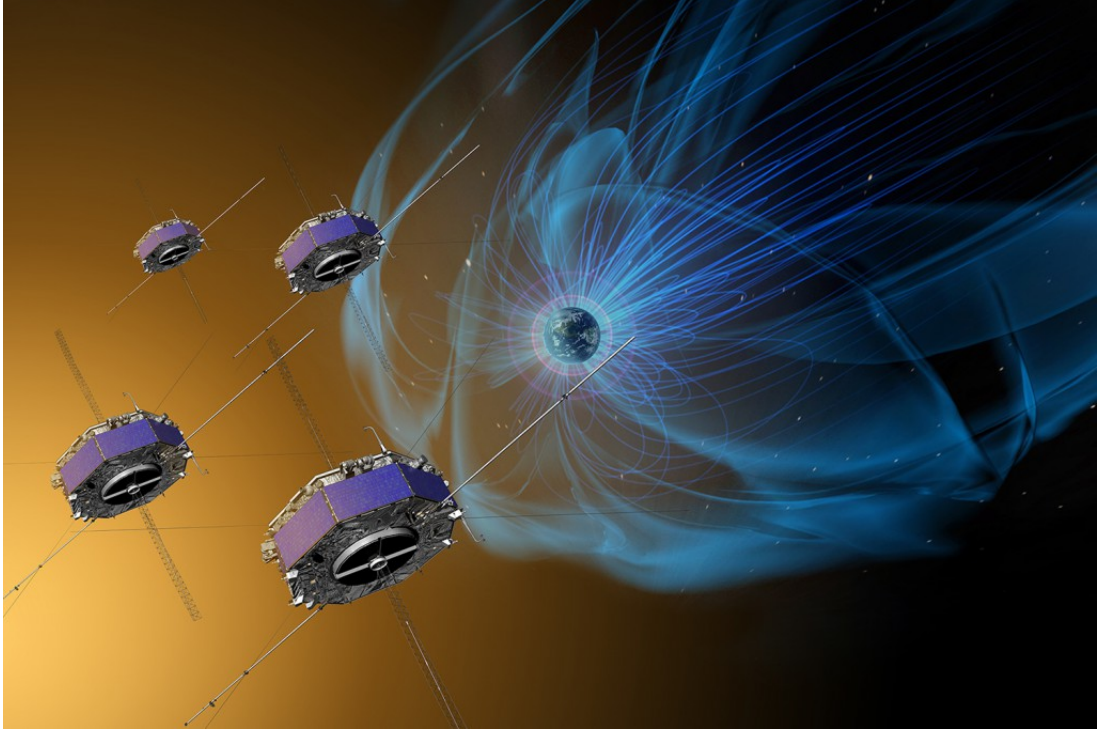


FIGURA 3.3: Ilustración de la misión MMS.

respeto a este trabajo, es de nuestro interés estudiar las medidas siguientes: el campo magnético (\mathbf{B}) que se obtienen a través del instrumento *Fluxgate Magnetometer* (*FGM*); los momentos de la función de distribución de iones: densidad (ρ), velocidad (\mathbf{v}), y temperatura (T), que se miden con el *Fast Particle Investigation* (*FPI*); así mismo, de las distribuciones de iones y electrones se obtiene la densidad de corriente \mathbf{J} . Estas cantidades se pueden descargar de la base de datos de la misión MMS a través de la página web <https://lasp.colorado.edu/mms/sdc/public/>. Los datos han sido previamente corregidos y confirmados con respecto a errores de medidas, y eventos particulares (como impacto con átomos neutros que producen emisión anómala de electrones) han sido descartados. Estos datos se utilizan en el presente estudio experimental de la turbulencia e intermitencia MHD y Hall-MDH.

3.4. Presentación de los datos experimentales

Los datos que vamos a analizar en este trabajo se tomaron de solamente uno de los cuatro satélites de la misión MMS (en particular, MMS1) cuando éste se encontraba en la magnetopausa terrestre, pasando de la capa límite de la magnetosfera a la magnetosheath. Durante este periodo, la órbita del satélite experimentó transiciones continuas de una región a otra. Estas fueron identificadas como debida a la presencia de una inestabilidad de Kelvin-Helmholtz (KHI) (Fig. 3.4). Esta es una inestabilidad clásica que se produce cuando dos fluidos de densidad diferente se mueven con un flujo diferencial entre ellos. Al crecer de la diferencia de velocidad, se generan vórtices en la frontera entre los dos fluidos, que tienen dimensión y periodicidad dependientes de las condiciones del fluido (dimensión de las capas, velocidades, densidades) que ha producido una ondulación de la frontera entre las dos regiones. Tales vórtices producen una mezcla de los dos fluidos en una región central, que es más eficaz cuanto más desarrollada es la inestabilidad. Normalmente, en la región de mezcla se produce una turbulencia bien desarrollada, que completa el *mixing* de los dos gases. En el caso en estudio, los dos fluidos son, por un lado el plasma del viento solar penetrado en la magnetosheath, más denso y con velocidad alta alrededor de la magnetosfera, y por otro lado el plasma magnetosférico, menos denso y más lento, lo que genera un fuerte gradiente de velocidad entre los dos plasmas. Cabe recordar que el plasma, al encontrarse en estas escalas en el régimen MHD, apoya la inestabilidad fluida de KH. Al cruzar el satélite transversalmente la región de ondas de Kelvin-Helmoltz, se han medido alternativamente las dos regiones, separadas por una discontinuidad. El evento ha sido analizado a fondo en previos estudios [30, 35-37]. En este periodo de medida, los instrumentos a bordo del satélite MMS1 tomaron muestras cada 0.15s por un tiempo aproximado de 78.5min. Esto equivale a tener 31398 muestras de las diferentes las cantidades y sus componentes.

En la Fig. 3.5 se muestra algunos datos obtenidos. Desde arriba: magnitud de la velocidad, densidad de iones positivos, temperatura, magnitud del campo magnético

y la magnitud de la densidad de corriente de iones positivos. El sistema de referencia sobre el que se midieron las cantidades mencionadas es un sistema cartesiano en el que el eje x está a lo largo de línea que une la Tierra y el sol; el eje y está sobre el plano de la órbita del satélite (sobre el plano eclíptico), y el eje z es normal a este plano en dirección norte.

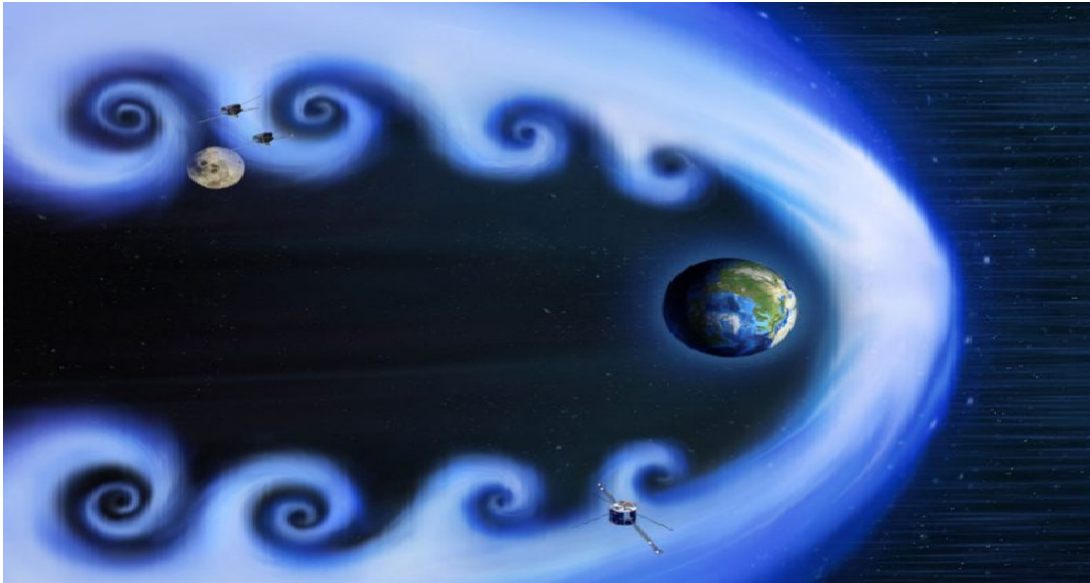


FIGURA 3.4: Ilustración de las inestabilidades de Kelvin-Helmholtz.

Como se puede notar, los datos son turbulentos e irregulares, así como se esperaba.

Analizando con más atención las señales, se nota la presencia de frecuentes cambios repentinos de algunas cantidades. Esto es más evidente en la Fig. 3.6, en la cual se puede observar un acercamiento en un periodo de 5 min para diferentes magnitudes. En esta figura se puede identificar fácilmente la presencia de dos regiones muy distintas con diferentes propiedades (o sea, dos plasmas diferentes), separadas por regiones de transición que se presentan como discontinuidades.

Como se estudió en varios trabajos [35, 36], esta alternancia se debe a que el MMS1 estuvo midiendo una región de interfase entre el plasma de la MS, más externo, y el del BL, más interno. Las discontinuidades evidencian los tiempos en que el satélite cruza la frontera neta entre las dos regiones (o sea la magnetopausa), pasando de una a otra. En este particular caso, se determinó que el periodo característico de las estructuras de KH es alrededor de 1 minuto, correspondiente a un vector

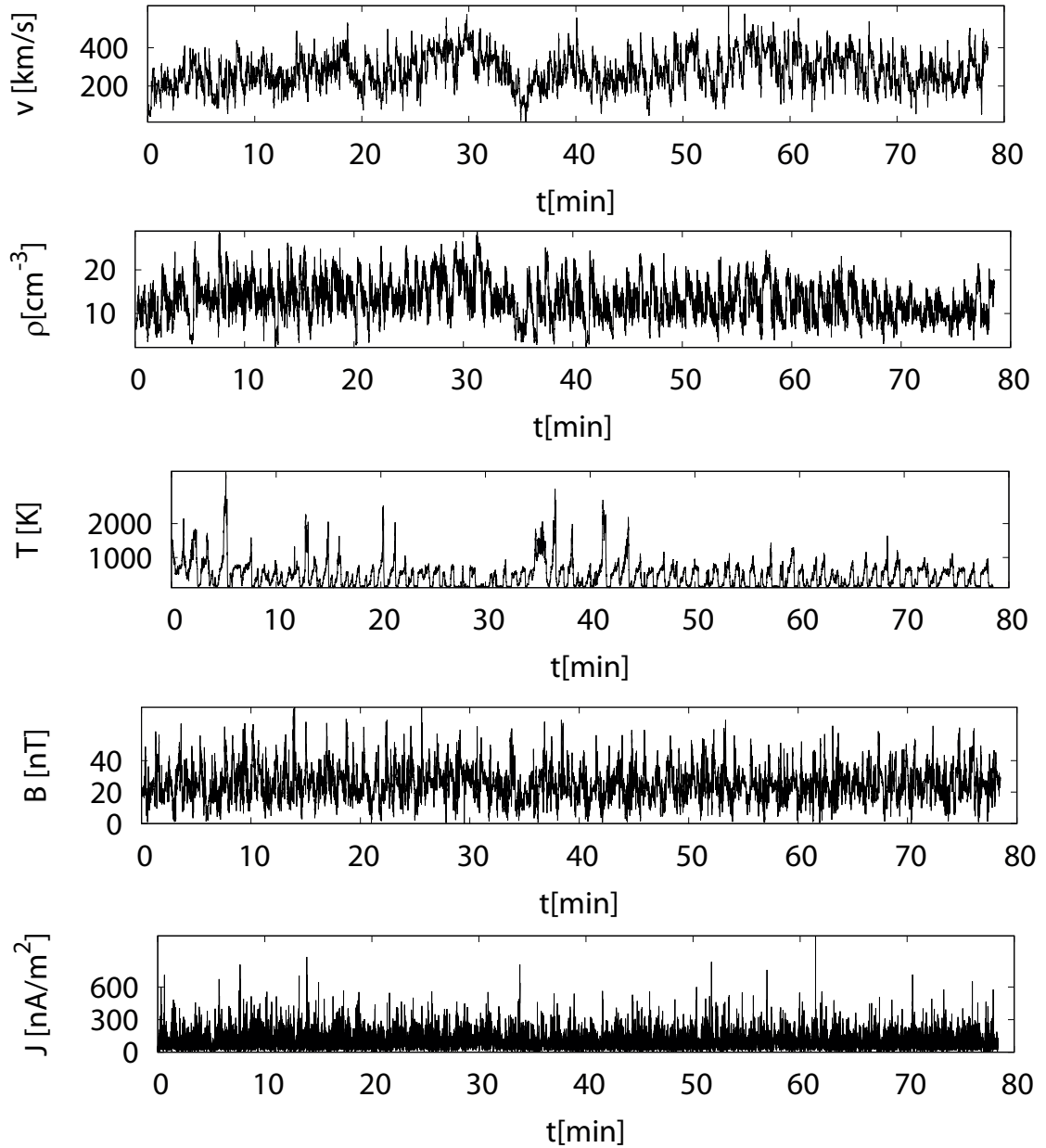


FIGURA 3.5: Desde arriba: velocidad, densidad de partículas, temperatura, campo magnético y densidad de corriente medidas por el MMS1 el 8 de septiembre del 2015 durante 78.5 min entre 10 : 07 : 04 UT y 11 : 25 : 34 UT.

de onda (o sea el tamaño de los vortices de KH) del orden de 200 km, según la hipótesis de Taylor [35, 36].

Como en principio las dos regiones poseen características diferentes (como será evidente en los histogramas de los campos más adelante), siendo compuestos de plasmas de diferentes regiones (la magnetosfera y la magnetosheath), el análisis

de turbulencia no puede hacerse sobre toda la muestra, porque justamente el plasma no es homogéneo, y las propiedades estadísticas sufrirían de la mezcla de dos procesos físicos diferentes, así como de la presencia de las discontinuidades introducida en la serie temporal por la frontera. Por lo tanto, es importante identificar y seleccionar periodos homogéneos para separar las dos regiones mencionadas y efectuar el análisis por separado.

En la Fig. 3.7 se muestra un ejemplo de la metodología de selección de los intervalos homogéneos. En la figura, está reproducida la temperatura de iones, durante un periodo reducido correspondiente a 5 minutos de datos. Aquí se puede notar muy evidentemente que hay dos regiones bien definidas con valores de temperatura homogéneos y estables, con transiciones que ocurren cuando una estructura de la ondulación de la KHI atraviesa el satélite. Además, se nota que los valores típicos de temperatura son bastante similares entre regiones análogas, por lo cual se elige la temperatura como parámetro para la selección. Como se indica en la figura, solo se seleccionan regiones completamente incluidas en cada una de las dos regiones homogéneas, cuidadosamente descartando todas las medidas en regiones de transición. Las flechas de diferentes colores evidencian las porciones de la muestra que pertenecen a las dos regiones. Por medio de esta técnica, del conjunto de datos completo de la temperatura fueron identificados y seleccionados 59 intervalos de baja temperatura y 24 intervalos con alta temperatura para así también separar los otros campos. Esta selección de intervalos fue realizada manualmente, observando todo el conjunto de datos de la temperatura en periodos cortos de tiempo, como en la Fig. 3.7. Más en detalle, los criterios utilizados para considerar o no un intervalo fueron:

1. el intervalo debe tener más que 50 muestras para tener una estadística aceptable;
2. el campo de temperatura debe ser aproximadamente homogéneo y estacionario;
3. no deben existir discontinuidades ni fluctuaciones extremas;

4. no se deben mezclar regiones de MS y de BL;
5. la temperatura no puede ser superior a $T_{MS} = 250$ K para la MS y no puede ser menor de $T_{BL} = 400$ K para la BL;
6. los intervalos no deben tener datos perdidos o vacíos, es decir, que el instrumento no haya tenido algún de problema al tomar la medida.

La Fig. 3.8 presenta los histogramas de las magnitudes que se utilizan en ese trabajo. Es importante notar que en los histogramas grises, que representan la muestra completa, solamente en el caso de la temperatura se puede diferenciar completamente dos poblaciones de valores, mientras que para los otros parámetros la distribución (gris) está siempre demasiado mezclada, y no se puede separar las dos regiones. Esto indica que la temperatura es un buen parámetro para separar las regiones. Eso se evidencia aún más al observar los histogramas de las dos regiones (en azul para la magnetosheath y en rojo para el magnetospheric boundary layer) después de separarlas según la metodología descrita antes, confirmando que las dos regiones se separan perfectamente y sin las superposiciones que se observan en los histogramas separados de los otros parámetros. De lo que se puede concluir que la región de menor temperatura tiene mayor densidad de partículas. Esta región se identifica como magnetosheath. Por lo contrario, la región con alta temperatura y baja densidad de iones es la capa límite magnetosférica [30, 35, 36].

Para completar esta presentación, en la Tabla 3.1 se indican los valores medios de algunas magnitudes de importancia para este trabajo (velocidad, campo magnético, densidad y temperatura) calculadas sobre el conjunto de sub-intervalos de cada región por separado (MS o BL).

TABLA 3.1: Valores medios de magnitudes importantes.

Región	$\langle v \rangle$ [km/s]	$\langle B \rangle$ [nT]	$\langle \rho \rangle$ [cm ⁻³]	$\langle T \rangle$ [K]
MS	353 ± 58	29 ± 8	18 ± 3	144 ± 12
BL	229 ± 70	23 ± 10	12 ± 2	652 ± 94

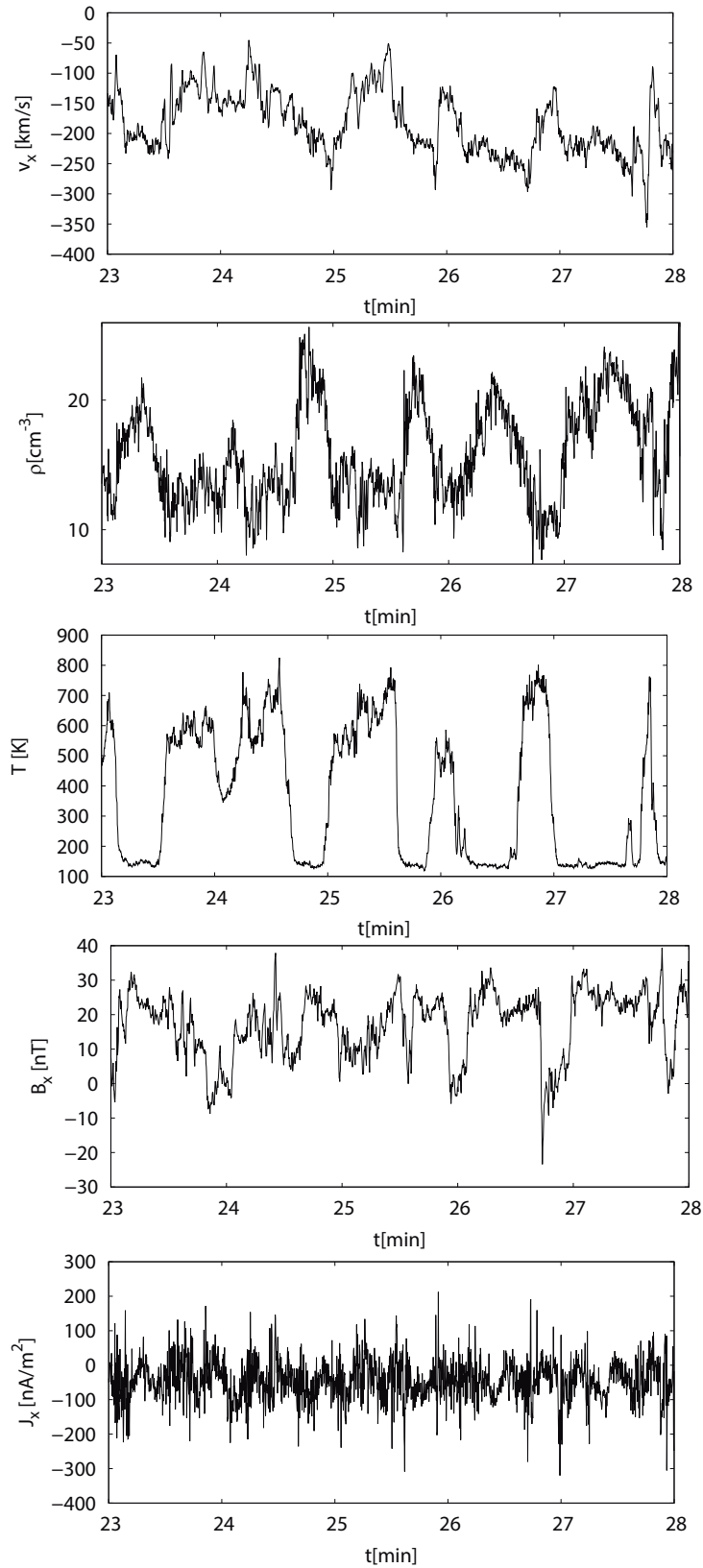


FIGURA 3.6: Un sub-intervalo de cinco minutos del intervalo de datos MMS1, que empieza a las 10 : 30 : 04 UT el día 8 de septiembre del 2015. Desde arriba hacia abajo: componente x de la velocidad, densidad de partículas, temperatura, componente x del campo magnético y la componente x de la densidad de corriente.

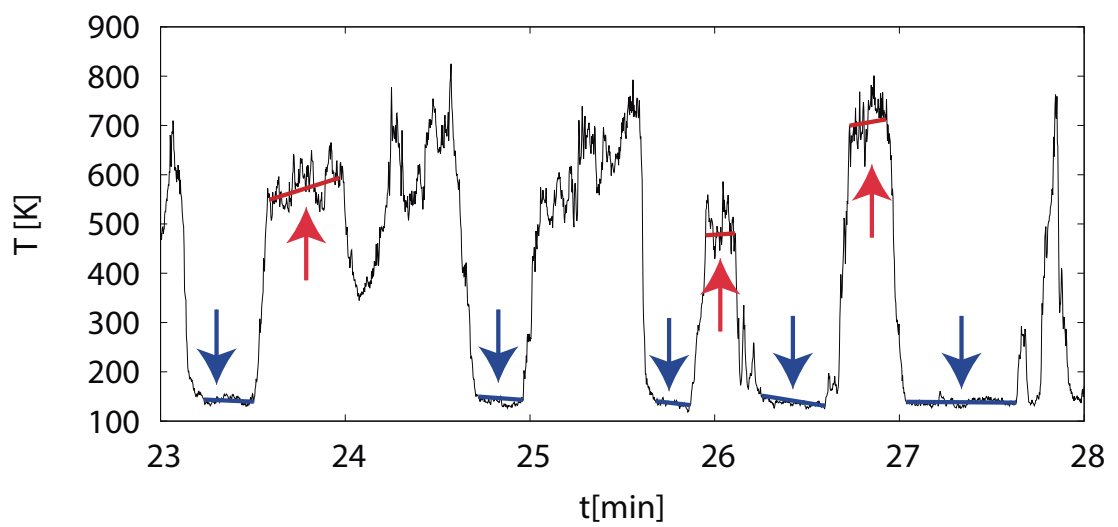


FIGURA 3.7: Selección de intervalos. En rojos regiones de alta temperatura, y en azul regiones de baja temperatura.

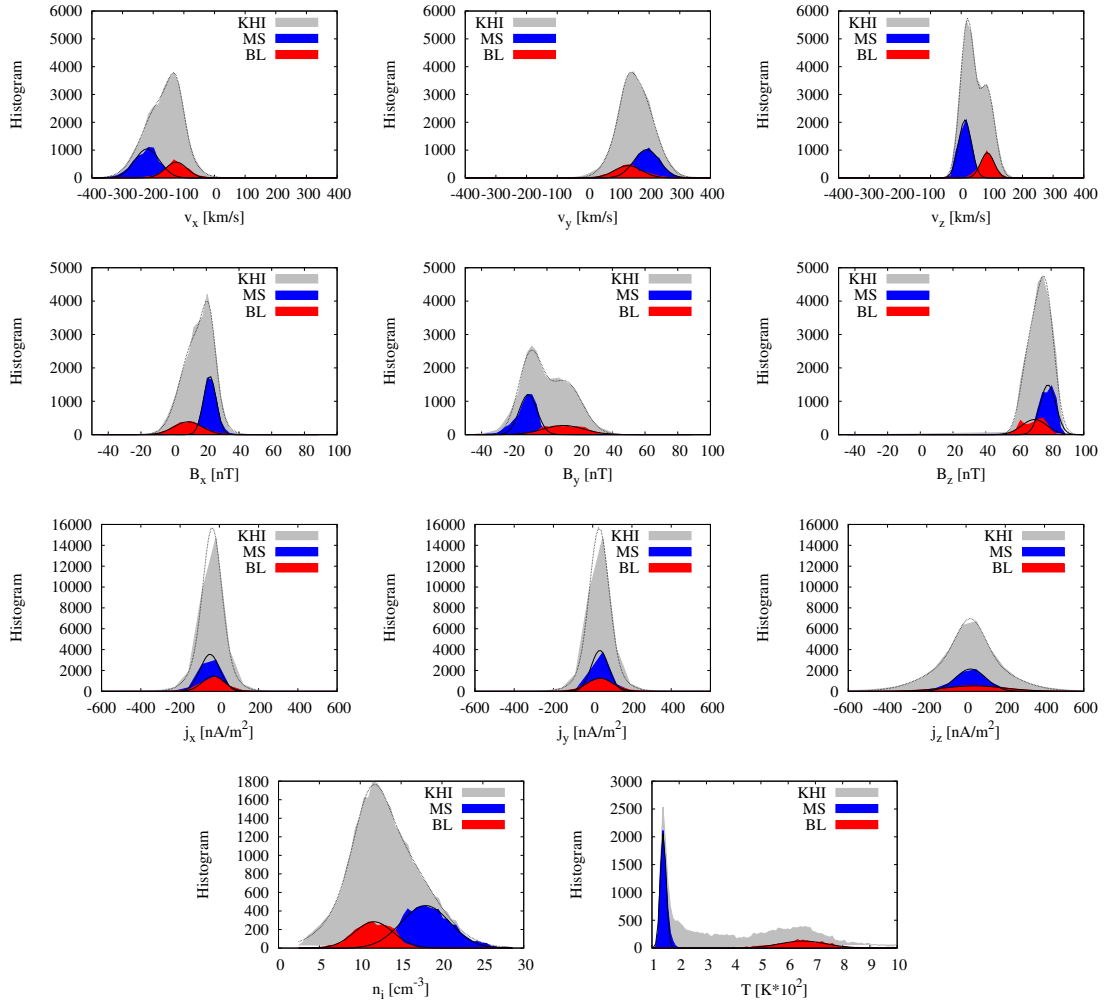


FIGURA 3.8: Histogramas de la velocidad, campo magnético, densidad de corriente eléctrica, densidad iónica y temperatura, desde la fila de arriba hacia abajo. Área gris: intervalo completo (KHI); área roja: intervalos de la capa límite magnetosférica (BL); área azul: intervalos de la magnetosheath (MS).

Capítulo 4

Análisis de turbulencia e intermitencia

4.1. Introducción

En este capítulo se quiere determinar las propiedades de la turbulencia en las dos regiones identificadas en el capítulo previo. Los indicadores básicos de una cascada turbulenta se obtienen a través del análisis de propiedades de escala de los campos. La función de autocorrelación y, equivalentemente, la densidad espectral de potencia (Power spectral density, PSD) de las fluctuaciones (incrementos) proveen estimaciones de primer orden de las propiedades de escala del sistema. También, se puede obtener información sobre la intermitencia a través de leyes de escala anómalas de las propiedades estadísticas de los incrementos de campos. Esto permite obtener indicadores de una cascada turbulenta. En este capítulo se presentan los estimadores estándar de las propiedades mencionadas y se comparan por primera vez para las dos regiones descritas en la sección anterior.

4.2. Espectros de energía

En turbulencia, los espectros de energía siguen leyes de potencia en el número de onda (k), con predicciones como $k^{-5/3}$ según la K41 [24] y $k^{-3/2}$ según Kraichnan [26] en la escala inercial. Las predicciones de las leyes de potencia se basan en suposiciones para la escala temporal de la transferencia de energía no-lineal. Si la física asociada a estas interacciones no-lineales cambia, entonces se espera que la ley de potencia cambie. Utilizando la frecuencia f en lugar del vector de onda k (a través de la hipótesis de Taylor, o sea $f = k\langle v \rangle$), se puede calcular el espectro, e incluso así, se encuentra un comportamiento de ley de potencia en la frecuencia, con el mismo exponente porque la velocidad promedio $\langle v \rangle$ es constante [35].

Así también, el espectro de potencia se define como la transformada de Fourier de la función de autocorrelación [40]. Para un campo u dependiente del tiempo t la función de autocorrelación se define como:

$$A_c(\Delta t) = \frac{\langle u(t + \Delta t) u(t) \rangle}{\sigma^2}, \quad (4.1)$$

donde Δt es una escala temporal variable, σ^2 es la varianza de u y $\langle \dots \rangle$ representa un promedio sobre el ensamble, en este caso en el tiempo [40]. En la Figura 4.1 se observa las funciones de autocorrelación de las componentes del campo magnético calculadas en las dos regiones MS y BL mediante series temporales. Como es previsible, la función de autocorrelación decae desde el valor 1 hasta llegar a 0 y se observa que en esta región A_c sigue una ley exponencial $A_c \sim e^{-\Delta t/\tau_c}$, donde τ_c define el tiempo de correlación de la variable en el sistema. En la Tabla 4.1 se muestran los tiempos de correlación para la velocidad y el campo magnético obtenidos a través del ajuste de la función de autocorrelación. Como se observa, los campos están correlacionados por intervalos cortos de tiempo. Estos tiempos dan una idea del intervalo del rango inercial, sin embargo, no es un indicador total, puesto que lo que se estudia, como se verá a continuación, son las fluctuaciones de los campos correlacionados unos con otros.

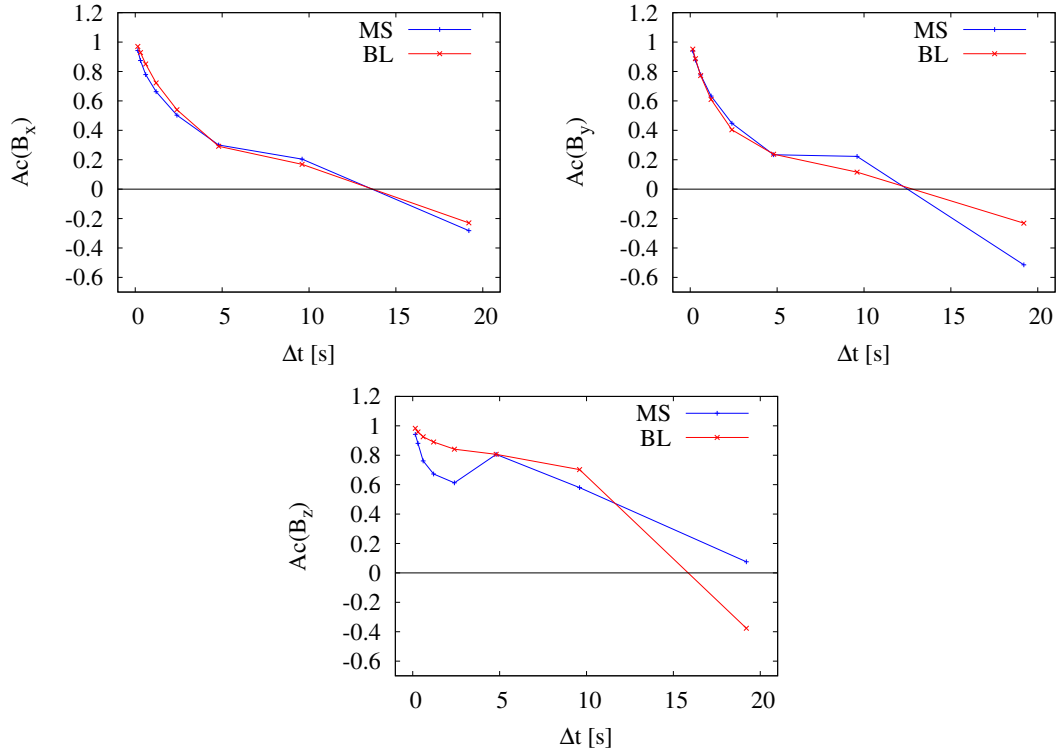


FIGURA 4.1: Funciones de autocorrelación de las componentes del campo magnético en las regiones MS y BL.

En la Figura [4.2](#) se muestran los espectros de potencia de las componentes del campo magnético en la magnetosheath obtenidos calculando las transformadas rápidas de Fourier (Fast Fourier Transform, FFT) y el cuadrado de sus coeficientes para cada sub-intervalo, para luego calcular el promedio entre todos los sub-intervalos. Sin embargo, dado a que los sub-intervalos son muy cortos, los espectros resultan irregulares y no se logra determinar la ley potencia en las fluctuaciones de baja frecuencia debido a la limitación por el tamaño de los intervalos, por lo que esta técnica resulta ineficiente. Por esta razón, se muestran aquí los resultados del análisis espectral utilizando una técnica más apropiada para este tipo de señales.

En las Figuras [4.3](#), [4.4](#) y [4.5](#) se muestran los espectros de potencia del campo magnético, de la velocidad y de los campos de Elsässer en los intervalos BL y MS, que son de la autoría de Federico Franterale, PhD., quien colaboró en la realización de este trabajo. Estas PSDs fueron realizadas mediante dos técnicas diferentes para comparar las dos regiones por separado. Las líneas gruesas muestran el espectro obtenido mediante el método *sub-samples (SS)*, mientras que las

curvas delgadas muestran los espectros obtenidos mediante el algoritmo *compressed sensing (CS)* [38]; en gris se muestra un referencia de la ley de potencia $-5/3$.

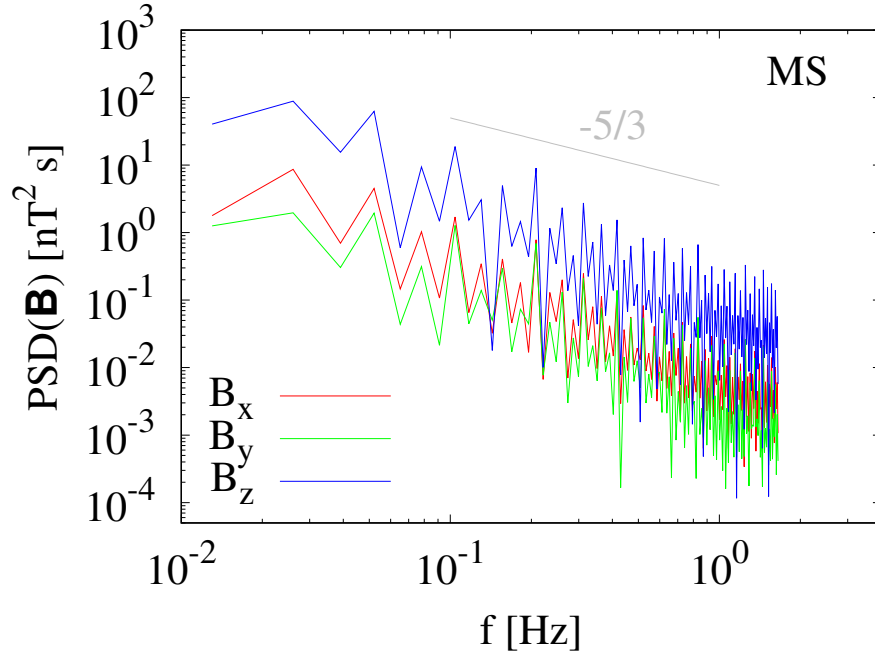


FIGURA 4.2: Espectros de potencia de las componentes del campo magnético realizados mediante la transformada de Fourier; en gris la ley de potencia $-5/3$ como referencia.

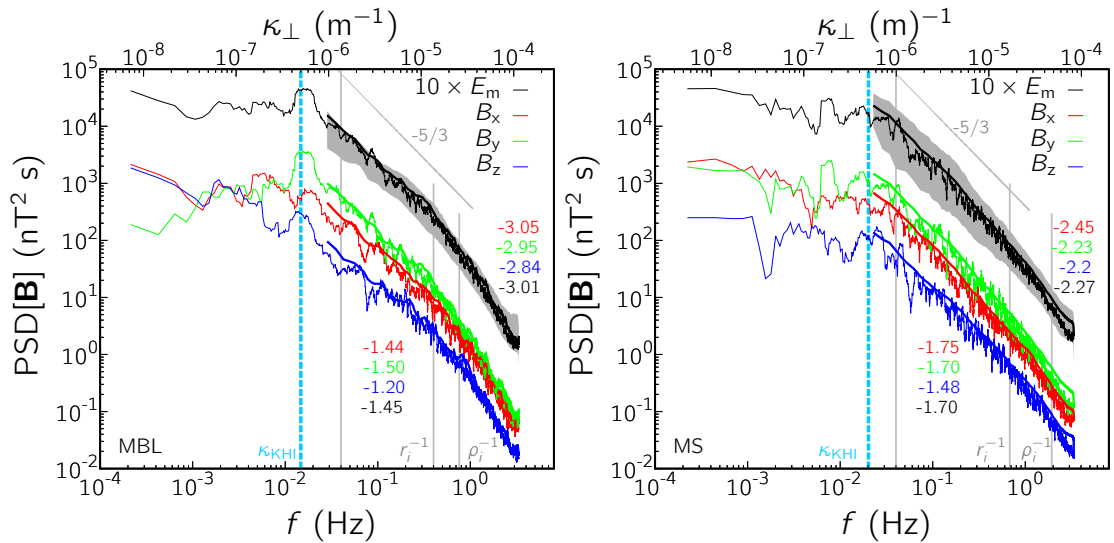


FIGURA 4.3: Espectros de potencia de las componentes del campo magnético en la región BL (izquierda) y en la región MS (derecha). [38]

Para interés de este trabajo, en el rango inercial (que en términos de frecuencia es la primera región delimitada por dos líneas grises verticales) los campos mencionados presentan leyes de potencia bien definidas. En la Tabla 4.1 se muestran los valores

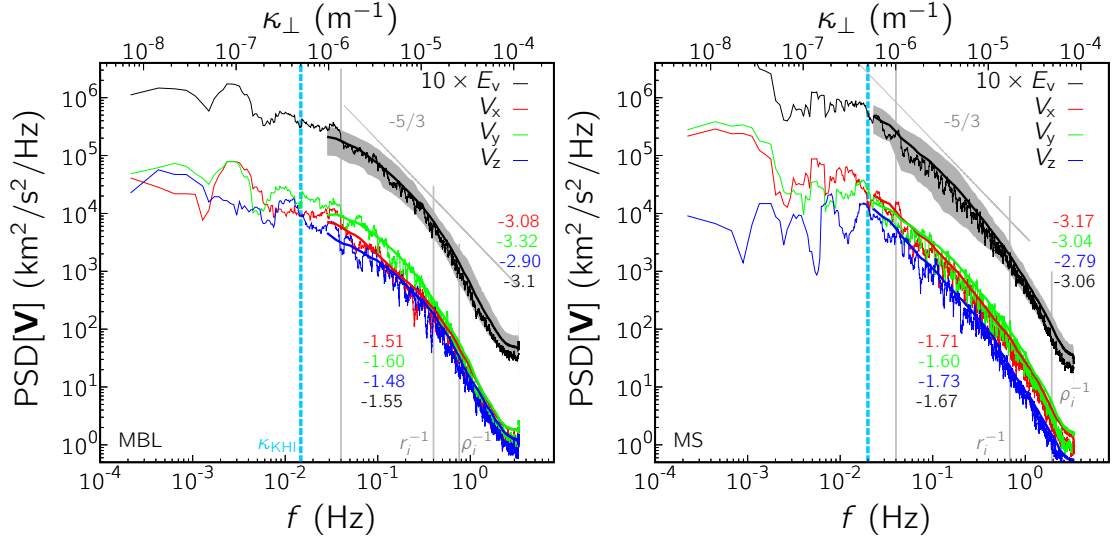


FIGURA 4.4: Espectros de potencia de las componentes de la velocidad en la región BL (izquierda) y en la región MS (derecha). [38]

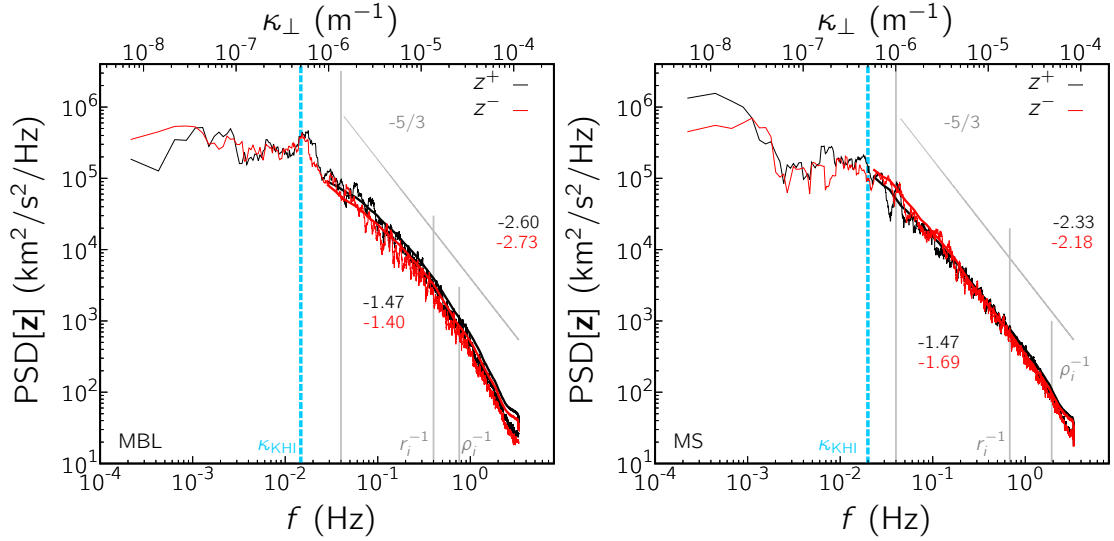


FIGURA 4.5: Espectros de potencia de los campos de Elsässer en la región BL (izquierda) y en la región MS (derecha). [38]

de los índices espectrales obtenidos del ajuste de la ley de potencia en el rango inercial para las componentes de los campos, dentro de una discrepancia de 3.5% con respecto a los índices espectrales en la escala inercial. Los espectros tienen tendencias como la predicción de Kolmogorov con índices espectrales $\sim 5/3$ para todas las componentes y en las dos regiones, lo cual es compatible con los valores estándar para la turbulencia MHD [35, 36, 38, 39], lo cual confirma la presencia de un rango inercial turbulento.

En general, se puede observar que los espectros en la región MS presentan una ley

TABLA 4.1: Valores resultantes del ajuste de los índices espectrales α y tiempos de correlación τ_c

Campos	Índice espectral		τ_c [s]	
	BL	MS	BL	MS
B_x	1.44	1.75	4.2 ± 0.3	4.5 ± 0.6
B_y	1.50	1.70	3.0 ± 0.3	3.7 ± 0.7
B_z	1.20	1.48	29 ± 4	15 ± 5
v_x	1.51	1.71	3.9 ± 0.3	4.2 ± 0.4
v_y	1.60	1.60	2.6 ± 0.1	4.6 ± 0.5
v_z	1.48	1.73	2.1 ± 0.3	9 ± 2
z^+	1.47	1.47	-	-
z^-	1.40	1.69	-	-

de potencia más evidente y con mas potencia (espectro más alto), mientras que en BL la potencia es más baja; la ley de escala es menos definida y el espectro es un poco más curvo. Esto es más evidente para el espectro de velocidad (Fig. 4.4), mientras que para el campo magnético ambas regiones muestran una ley de potencia bien desarrollada. Por consiguiente, los espectros de las variables de Elsässer también presentan una ley de potencia más definida en la magnetosheath. Esta información, además de representar una observación original, también será importante para la correcta interpretación de los resultados de este trabajo, así como se detalla en las conclusiones.

4.3. Análisis de intermitencia

Las fluctuaciones turbulentas, usualmente, están caracterizadas por la intermitencia, que en este caso se refiere a la estadística dependiente de la escala de las fluctuaciones de los campos. Una manera de examinar la intermitencia es considerando la distribución (y/o su momentos) de incrementos temporales de los campos (magnético y velocidad) estandarizados, dado por (por ejemplo para el campo magnético, e igualmente para la velocidad):

$$\frac{\Delta B_i(\Delta t)}{\sigma_{B_i}} = \frac{B_i(t + \Delta t) - B_i(t)}{\sqrt{\langle (B_i(t + \Delta t) - B_i(t))^2 \rangle}}, \quad (4.2)$$

donde i denota la componente de \mathbf{B} , Δt es la escala temporal de estudio, y $\langle \dots \rangle$ representa un promedio que, en este estudio, se realiza sobre el tiempo [35]. Mediante las medidas de MMS1, es posible calcular los incrementos temporales de los campos.

La Figura 4.6 muestra un ejemplo de las funciones de distribución, en este caso de $\Delta B_y(\Delta t)/\sigma_{B_y}$ (PDFs) para varias escalas temporales. Como se puede ver, las colas de las PDFs no siguen una distribución Gaussiana, pues se “levantan” para escalas temporales más pequeñas. En BL, se observa que para una escala temporal $\Delta t = 0.6s$ (línea roja) la cola es más alta que para $\Delta t = 4.8s$ (línea verde), donde la PDF se acerca a la de una Gaussiana; esto es lo que se espera de la turbulencia en general. En MS, se observa un comportamiento similar. Las pequeñas diferencias entre la intermitencia en BL y MS podrían ser debido a que el rango inercial presenta leyes de escala diferentes para los espectros, sugiriendo una diferente evolución y desarrollo de la turbulencia. Esto es visible en los espectros de potencia de B_y en la Fig. 4.3, donde se observa que el rango inercial de MS es más grande que el de BL (en términos de frecuencia f).

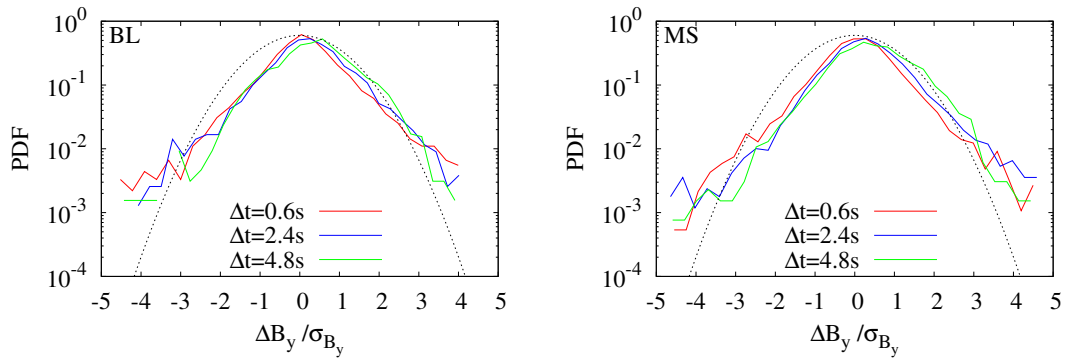


FIGURA 4.6: Distribuciones de $\Delta B_y(\Delta t)/\sigma_{B_y}$ en BL (izquierda) y MS (derecha).

Una medida alternativa relacionada con la intermitencia se basa en examinar la pendiente de las funciones de estructura (o sea de los momentos de la función de distribución de las fluctuaciones) del campo magnético o de la velocidad. La función de estructura temporal para la velocidad puede ser definida como:

$$S_q(\Delta t) = \langle |v_i(t) - v_i(t + \Delta t)|^q \rangle, \quad (4.3)$$

donde i es el índice para una componente (x, y, z) de la velocidad, y q es el exponente que caracteriza el orden del momento [35]. Se puede definir una cantidad análoga para las componentes del campo magnético. En un sistema turbulento, se espera que las funciones de estructura sigan leyes de potencia como $S_q \sim \Delta t^{\zeta_q}$. Desviaciones de ζ_q de una ley lineal con q indican un rompimiento global de la auto-similitud en la turbulencia y la naturaleza intermitente de las estructuras de escala pequeña [44].

En las Figura 4.7 se muestran las funciones de estructura para la velocidad con valores de q desde 1 hasta 4. Ordenes más altos son excluidos por el tamaño de la muestra que se analiza (una regla aproximada para estimar el máximo orden alcanzable es $q_{max} = \log(N) - 1$, donde N es el numero de puntos disponibles en el ensamble). Se observa que $S_q(\Delta t)$ muestra un cambio en la pendiente de ley de potencia cerca de $\Delta t \approx 1s$, lo cual aproximadamente coincide con el inverso de la frecuencia donde las leyes de potencia de los espectros cambian (Fig. 4.4), es decir, el rango inercial. Los exponentes de escala ζ_q obtenidos del ajuste de la ley de potencia en una región aproximada al rango inercial se muestran en la Fig. 4.9 tanto para la velocidad como para el campo magnético, en círculos azules para MS y cuadrados rojos para BL. En ocasiones, cuando las leyes de escala de momentos de orden más alto no son evidentes, se utiliza la Auto-Similitud Extendida (*Extended Self-Similarity*, ESS) [35] para tener los exponentes de ley de escala (Fig. 4.8). Esta técnica se basa en disfrutar la relación de ley de potencia para un orden dado \hat{q} , o sea $S_{\hat{q}} \sim \Delta t^{\zeta_{\hat{q}}}$ para obtener que $S_q \sim \Delta t^{\zeta_q} \sim S_{\hat{q}}^{\xi_q} \sim (\Delta t^{\zeta_{\hat{q}}})^{\xi_q}$, por lo cual se puede obtener los exponentes $\zeta_q = \xi_q \zeta_{\hat{q}}$. Para elegir el orden \hat{q} , normalmente se suele considerar el momento S_q que mejor se ajusta a una ley de potencia en Δt , así como para obtener un buen exponente $\zeta_{\hat{q}}$, y utilizar éste en lugar de la escala temporal para determinar la ley de escala de las funciones de estructura. Se observa de la Fig. 4.7 que la función de estructura de tercer orden es la que sigue una ley de potencia bien definida. Por esto, se realiza la ESS con S_q vs. S_3 para

encontrar los exponentes generalizados de ley de escala ξ_q . Sigue que los exponentes de escala de las funciones de estructura se pueden obtener como $\zeta_q = \xi_q \zeta_3$. En la Fig. 4.8 se muestran las funciones de estructura de las tres componentes de velocidad con técnica ESS. Los ajustes en ley de potencia, bien observados en un rango de más de dos décadas, son indicados. Después de calcular los exponentes ζ_q para todos los campos de interés (campo magnético y velocidad), se puede observar sus dependencias en el orden q , como se muestra en los seis paneles de la Fig. 4.9. La desviación de una ley lineal es evidente en unos casos, mientras que para otras componentes la dependencia parece más lineal, o sea sin intermitencia.

Una parametrización cuantitativa de la intermitencia se puede lograr modelizando los exponentes de ley de escala anómalos [39, 45]. El modelo utilizado en este trabajo es el *p-model*, desarrollado para la descripción de la turbulencia de Navier-Stokes y adaptado a los plasmas. El modelo se basa en una cascada turbulenta multiplicativa multifractal, y predice una dependencia del orden de los exponentes de la ley de escala dado por:

$$\xi_q = 1 - \log_2 [P^{qH} + (1 - P)^{qH}], \quad (4.4)$$

donde $P \in [0.5, 1]$ es un parámetro asociado a la intermitencia, tal que un valor de P grande corresponde a mayor intermitencia [45]. El parámetro H es el exponente de Hurst de la componente, que describe el nivel de irregularidad del campo. Esto se obtiene del exponente de escala de la función de estructura del tercer orden según la relación $\zeta_3 = 3H$. Las líneas en la Fig. 4.9 representan los ajustes del *p-model* y los parámetros de intermitencia P resultantes, así como los exponentes de Hurst H , se muestran en la tabla 4.2. Debido a los errores de medida grandes, no es posible concluir sobre las diferencias entre las diferentes regiones. Sin embargo, se nota en la Fig. 4.9 que unas componentes resultan más intermitentes en la BL que en la MS (por ejemplo al v_x y B_z), mientras en otras ocasiones la BL es más intermitente (por ejemplo en v_z). En general, parece que la intermitencia es más fuerte en la BL, siendo mayor que en la MS en cuatro casos de seis.

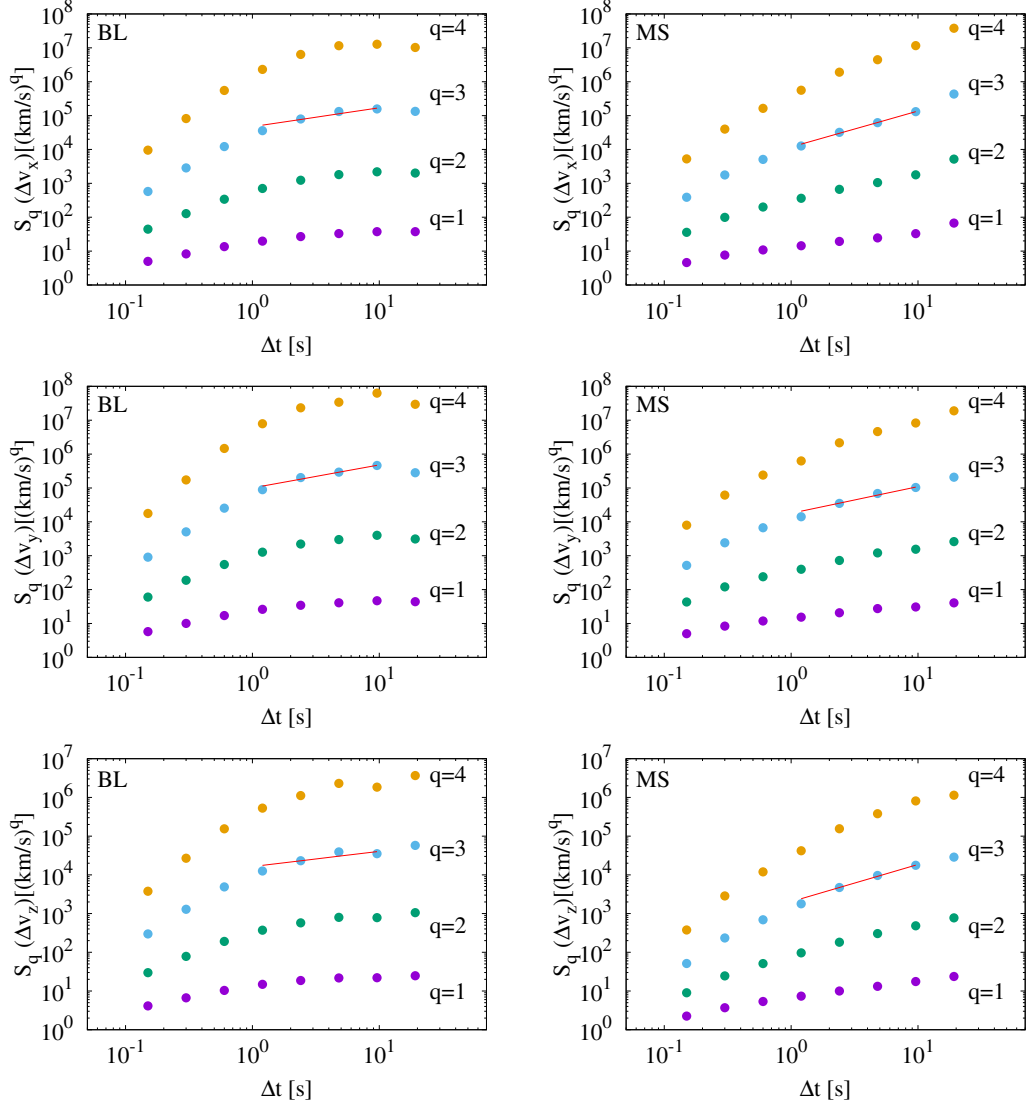


FIGURA 4.7: Funciones de estructura de la velocidad en las regiones BL y MS

Finalmente, se puede utilizar otro parámetro de medida cuantitativa de la intermitencia. La *kurtosis* es un parámetro utilizado para la descripción de la turbulencia, y se define como el momento de cuarto orden normalizado de un campo, en este caso, las fluctuaciones o incrementos del campo magnético (o velocidad):

$$K_i(\Delta t) = \frac{\langle \Delta B_i^4 \rangle}{\langle \Delta B_i^2 \rangle^2}, \quad (4.5)$$

donde el subíndice i indica la componente x , y o z del campo [39]. En un sistema turbulento, se espera que las distribuciones de $\Delta B_i(\Delta t)/\sigma_{B_i}$ sean Gaussianas en largas escalas. Para una distribución Gaussiana, se puede calcular que la kurtosis

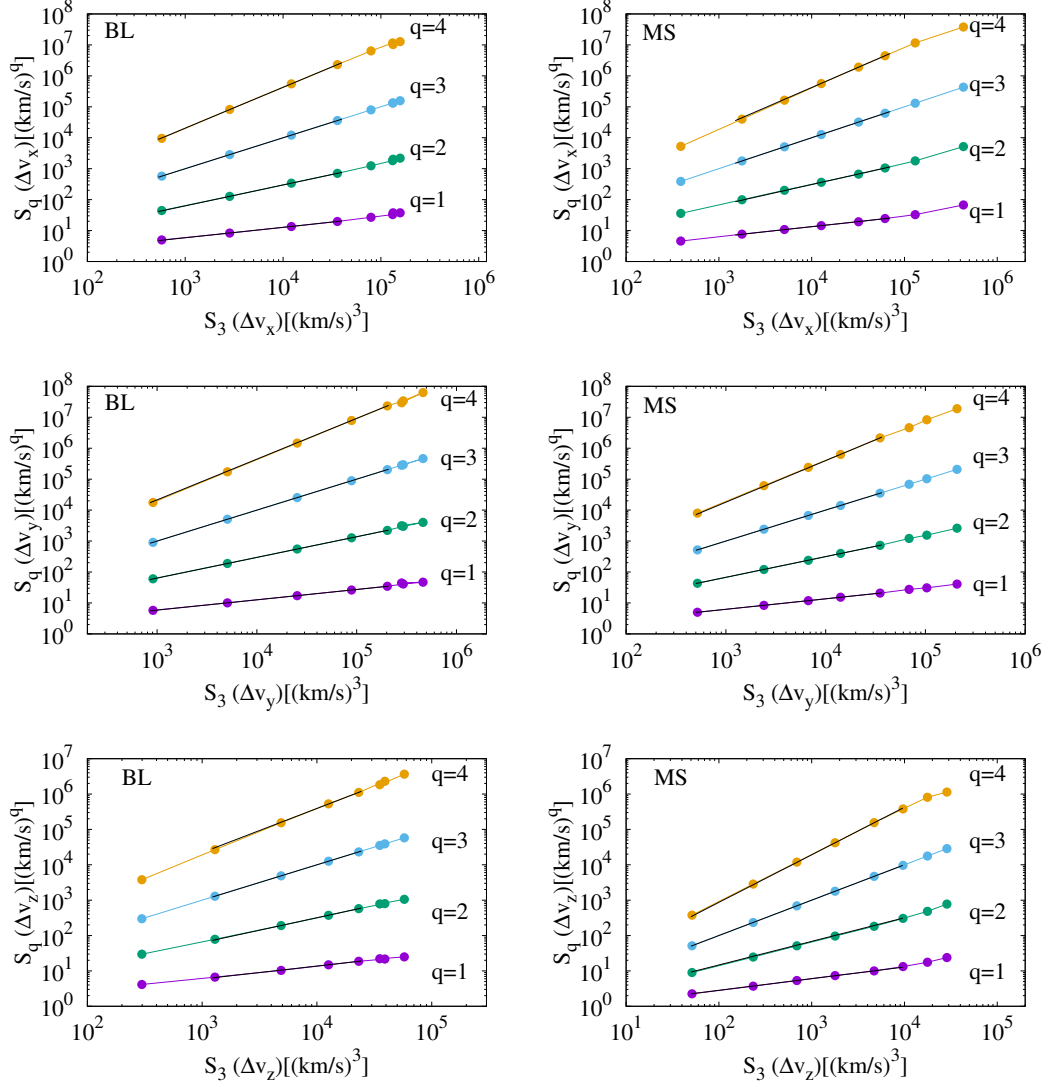


FIGURA 4.8: ESS de la velocidad en las regiones BL y MS

es $K = 3$. Esto se observa cuando las fluctuaciones no están correlacionadas. Al revés, cuando la escala decrece y las colas de las distribuciones de las fluctuaciones se levantan, se obtendrán valores más altos $K > 3$, lo cual se asocia a estructuras intermitentes [21]. Por las relaciones de invariancia de escala de las ecuaciones MHD, la kurtosis debería tener una ley de potencia en la escala $K \sim \Delta t^{-\kappa}$, y el exponente de escala κ está relacionado a la eficiencia del mecanismo de transferencia de energía en la cascada o a la forma de las estructuras intermitentes. Un ejemplo de kurtosis en función de Δt se muestra en la Fig. 4.10 para la componente y del campo magnético, para las dos regiones. Así, la formación de estructuras de escala pequeña, típicas de la intermitencia, se pueden evidenciar por el incremento de la

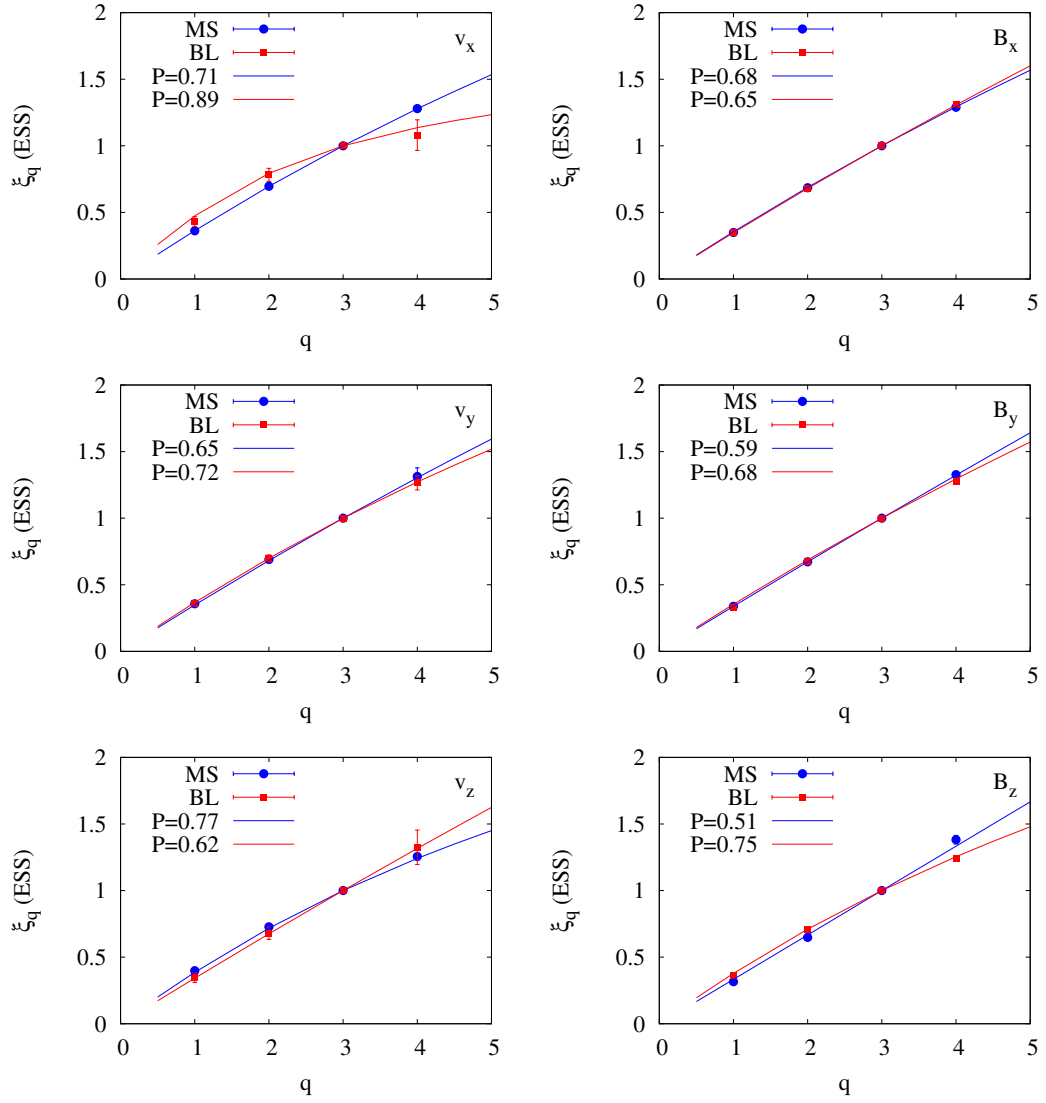


FIGURA 4.9: Exponentes de ESS de la velocidad en las regiones BL y MS

kurtosis de las fluctuaciones como una ley de potencia (aproximadamente) hacia las escalas pequeñas. Sin embargo, se nota un rango de ley de potencia $K \sim \Delta t^{-\kappa}$, aproximadamente correspondiente al rango inercial observado en el espectro. Ajustes en la ley de potencia se han indicado con líneas continuas, y los parámetros de escala κ se indican en la Tabla 4.2. De la misma manera se calculan los exponentes de ley de potencia para todas las componentes del campo magnético y de la velocidad. En la Tabla 4.2 se muestran los valores de los ajustes para el exponente κ con su respectiva incertidumbre. En la misma tabla se muestran los valores más altos de kurtosis K_{max} medidos al fondo del rango inercial. Estos valores indican la máxima desviación de una PDF Gaussiana en la cascada turbulenta. en este caso,

los valores son bastantes similares para todas las componentes, con la exclusión de la B_z en la MS. Por ello, no se comentará ulteriormente esta observación.

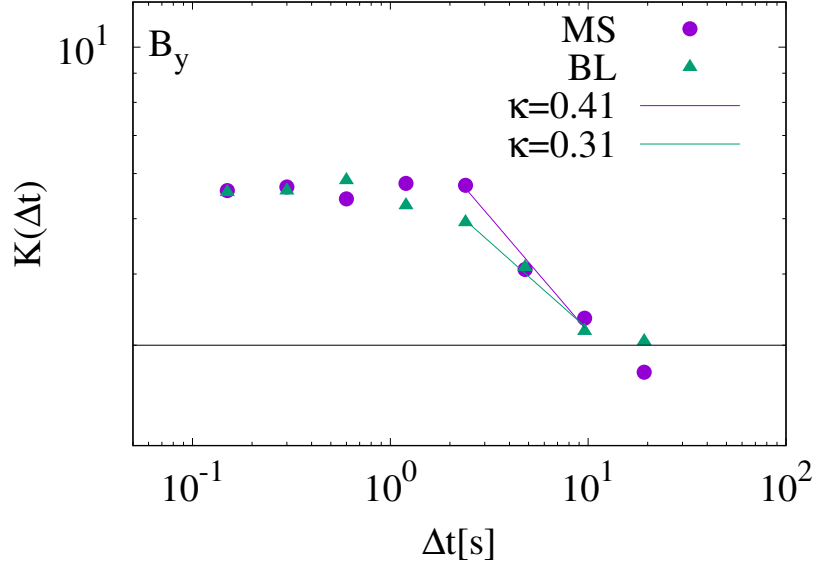


FIGURA 4.10: Kurtosis de los incrementos de B_y como función de Δt con los ajustes de ley de potencia en las dos regiones MS y BL; línea negra en $K = 3$.

TABLA 4.2: Parámetros de la intermitencia.

Región	Campo	H	P	κ	K_{max}
MS	v_x	0.35 ± 0.01	0.71 ± 0.30	0.05 ± 0.02	4.6
	v_y	0.26 ± 0.04	0.65 ± 0.29	0.27 ± 0.08	4.4
	v_z	0.32 ± 0.02	0.77 ± 0.35	0.16 ± 0.03	4.6
	B_x	0.23 ± 0.02	0.68 ± 0.33	0.14 ± 0.06	4.5
	B_y	0.31 ± 0.02	0.59 ± 0.43	0.41 ± 0.06	5.8
	B_z	0.30 ± 0.01	0.51 ± 0.49	0.43 ± 0.50	9.9
BL	v_x	0.19 ± 0.05	0.89 ± 0.43	0.32 ± 0.05	4.8
	v_y	0.23 ± 0.02	0.72 ± 0.34	0.17 ± 0.09	4.8
	v_z	0.13 ± 0.07	0.62 ± 0.26	0.09 ± 0.10	4.3
	B_x	0.42 ± 0.01	0.65 ± 0.34	0.16 ± 0.08	5.0
	B_y	0.22 ± 0.01	0.68 ± 0.33	0.31 ± 0.03	5.8
	B_z	0.07 ± 0.07	0.75 ± 0.38	0.20 ± 0.03	5.1

Capítulo 5

Validación de la ley de escala global y local

5.1. Introducción

En los plasmas débilmente colisionales, como los plasmas del medio interplanetario y circunplanetario, no es posible determinar de manera simple el tipo de procesos disipativos, y por consiguiente no es fácil medir de manera cuantitativa la cantidad de energía que se transporta en la cascada turbulenta. Un método para derivar la tasa de transferencia de energía es usar la ley de Yaglom, un teorema que relaciona la función de estructura de tercer orden con la tasa de energía media de la cascada, y representa una de las relaciones fundamentales en la teoría de turbulencia [21]. En este trabajo, se ha observado evidencia de la cascada MHD y Hall-MHD en la capa límite magnetosférica (BL) y en la magnetosheath (MS), y se ha obtenido una medida directa de la transferencia de energía turbulenta. En este capítulo se comparan observaciones de la tasa de transferencia de energía turbulenta MHD y Hall-MHD en las dos regiones de la KHI, además de la validación de la ley de escala lineal entre el tercer orden de tasa de transferencia de energía y la tasa de disipación de energía media. Por otro lado, es importante conocer como está distribuida la disipación y transferencia la energía en el espacio a cada escala, por

esa razón, en este capítulo también se presenta el proxy heurístico y mediante su función de distribución se puede describir el flujo de energía local en el espacio.

5.2. Validación de la ley de Yaglom

Se ha demostrado que las fluctuaciones observadas en los plasmas turbulentos MHD siguen la ley Yaglom o Politano-Pouquet dada por:

$$Y = \langle (\Delta v^2 + \Delta b^2) \Delta v_{\parallel} - 2 (\Delta \mathbf{v} \cdot \Delta \mathbf{b}) \Delta b_{\parallel} \rangle = -\frac{4}{3} \varepsilon \Delta t \langle v \rangle, \quad (5.1)$$

la cual predice una dependencia lineal de la escala para el momento del tercer orden mixto [29]. Esta ecuación normalmente está en términos de las variables de Elsässer $\mathbf{b} = \mathbf{B}/\sqrt{4\pi\rho}$, por lo que es necesario normalizar el campo magnético \mathbf{B} en términos de la densidad de masa de los iones ρ . Además, en la ley de Yaglom, existen términos longitudinales $(\Delta v_{\parallel}, \Delta b_{\parallel})$ que deben ser calculados; esto se refiere a la componente paralela a la velocidad media, es decir, la proyección del vector sobre la dirección de la velocidad. Por esto, en cada sub-intervalo se ha estimado el vector velocidad media, y se han proyectado las fluctuaciones de velocidad y de campo magnético (en unidades de Alfvén) a lo largo de esta dirección para obtener las Δv_{\parallel} y Δb_{\parallel} . Para cada sub-intervalo, se ha calculado los términos que aparecen en la Ecuación (5.1), y juntando todos los sub-intervalos de cada región se ha construido el ensamble para calcular las medias.

La Fig. 5.1 muestra la validación de la ley de Yaglom para plasmas MHD en la capa límite magnetosférica (rojo) y en la magnetosheath (azul); en línea punteada negra una referencia de ley de escala lineal. Por comparación inmediata, se observa que en la BL la transferencia de energía debe ser un orden de magnitud más grande que en la MS. En la figura, los símbolos llenos indican un flujo positivo de energía, mientras los símbolos vacíos indican un cambio de signo del flujo. Esto normalmente se puede asociar con la dirección del flujo de energía: en el caso positivo, de las grandes escalas hacia las escalas más pequeñas (cascada *directa*), en

el caso negativo de las escalas más pequeñas hacia escalas más grandes (cascada *inversa*). Los ajustes lineales de estas leyes en el rango inercial, a pesar de ser muy aproximados, proveen una estimación de la tasa de transferencia de energía media $\langle \epsilon \rangle$. En BL se identifica una región de escala lineal aproximada en el rango $0.6 - 9.6s$, en donde se realizó el ajuste y el valor de la tasa de transferencia de energía media resultante es $\langle \epsilon \rangle = 60 \pm 11 [MJkg^{-1}s^{-1}]$, lo cual concuerda, en orden de magnitud, con observaciones realizadas previamente en otras regiones [30]. Esta observación constituye la primera estimación de la tasa de transferencia de energía turbulenta en la región de la *boundary layer* magnetosférica. De igual forma, se observa una región con tendencia de escala lineal en el rango $0.6 - 4.8s$ en MS y el valor obtenido del ajuste es $\langle \epsilon \rangle = 1.2 \pm 0.3 [MJkg^{-1}s^{-1}]$, mucho más bajo que en el BL, y en concordancia con resultados recién publicados [46]. Los valores para las dos regiones se encuentran en la tabla 5.1 con sus respectivas incertidumbres.

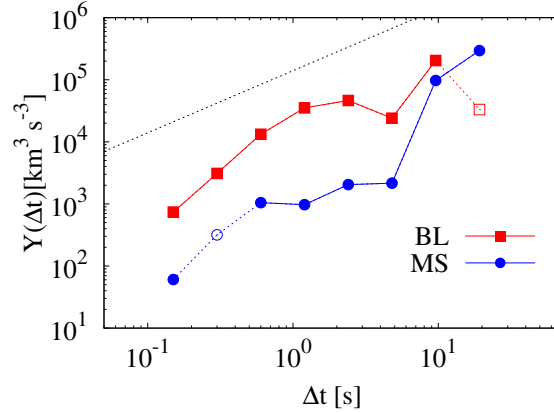


FIGURA 5.1: Ley de Politano-Pouquet para la magnetosfera (MS, azul) y la capa límite magnetosférica (rojo, BL). Puntos completamente pintados indican flujos positivos mientras que puntos vacíos representan de flujos negativos.

Como hemos visto, se puede detallar la ley de Yaglom como combinación de términos asociados a la energía cinética y magnética, así como a términos de helicidad cruzada. Así se pueden identificar dos contribuciones principales: una relacionada con la energía cinética y magnética $Y_e = (\Delta v^2 + \Delta b^2) \Delta v_{\parallel}$, y una con la correlación campo magnético-velocidad $Y_c = -2(\Delta \mathbf{v} \cdot \Delta \mathbf{b}) \Delta b_{\parallel}$; cada término provee transferencia de energía independientemente del otro término. Estos términos se presentan por separado, junto con el momento total Y en la Fig. 5.2. Se puede

observar que los términos Y_e y Y_c difícilmente presentan una ley de escala lineal independiente en los mismos rangos mencionados anteriormente, pues la ley de Politano-Pouquet sólo predice que la combinación (suma) de todos los términos es una función lineal de la escala. De la figura, donde se ha indicado como antes, puntos vacíos representan la parte negativa del flujo de energía; se nota que ambas contribuciones son importantes, siendo las líneas del mismo orden.

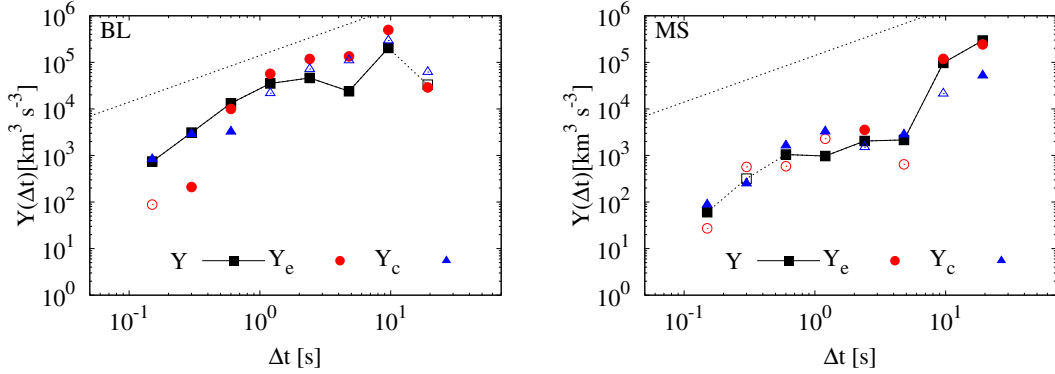


FIGURA 5.2: Izquierda: Detalle de las dos contribuciones diferentes a la ley de Politano-Pouquet para la capa límite magnetosférica. Derecha: lo mismo para la magnetosheath. En negro referencia de ley de escala lineal.

5.3. Validación de la ley Hall-Yaglom

La extensión de la ley de tercer orden a la dinámica de escala más pequeña es la ley de Hall-Yaglom o Hall-Politano-Pouquet [32]:

$$\begin{aligned}
 Y_H &= \langle (\Delta v^2 + \Delta b^2) \Delta v_{\parallel} - 2(\Delta \mathbf{v} \cdot \Delta \mathbf{b}) \Delta b_{\parallel} + di [2(\Delta \mathbf{b} \cdot \Delta \mathbf{j}) \Delta b_{\parallel} - \Delta b^2 \Delta j_{\parallel}] \rangle \\
 &= -\frac{4}{3} \varepsilon \Delta t \langle v \rangle;
 \end{aligned}
 \tag{5.2}$$

esta relación permite conocer la tasa de transferencia de energía a escalas más pequeñas, cerca de la escala cinética pero aún dentro del rango inercial, donde la cascada energética continúa debido a los términos Hall. Cabe recalcar que, mientras la aproximación MHD es válida sin dudas en la región de escalas grandes,

en estas escalas la ecuación de Hall-MHD solamente es una aproximación, porque se desprecian efectos de interacción onda-partícula descritos solamente por la ecuación de Vlasov. Entonces, lo que sigue es una descripción aproximada de la dinámica, que provee una información incompleta pero útil sobre la transferencia de energía a escalas iónicas. La ecuación (5.2) está en términos de $\mathbf{j} = \mathbf{J}/\sqrt{4\pi\rho}$, entonces se normaliza la corriente \mathbf{J} en términos de la densidad de masa de los iones ρ . La ley Hall-Yaglom tiene un nuevo término longitudinal: Δj_{\parallel} , el cual se calcula proyectando las fluctuaciones de la densidad de corriente a lo largo de la dirección de la velocidad media. Se han calculado los términos de la ecuación (5.2) para cada sub-intervalo de cada región para luego juntarlos y construir el ensamble para calcular los valores medios.

En la Fig. 5.3 se presenta la ley Hall-Yaglom en las regiones BL (rojo) y MS (azul), y una referencia de escala lineal en línea punteada negra. En la figura, los símbolos llenos y vacíos representan, como antes, flujos positivos y negativos, respectivamente. Como se puede observar en la figura, la ley lineal no se ve mejorada con adición de términos Hall, pues no se observa una ley de escala lineal debido a que tenemos flujo energético alternado negativo y positivo en el rango inercial. La razón por la que no se observa la ley de escala lineal Hall-Yaglom podría ser debido a que las contribuciones Hall (corrientes Hall) son muy fuertes tal que rompen la ley de escala no sólo en la parte iónica (cerca de d_i), sino también en el rango inercial. Estas corrientes podrían ser de origen ajeno a la cascada turbulenta, como por ejemplo debidas a eventos de reconexión magnética u otros procesos de física de plasmas. Esto significa que la física contenida en los términos Hall no es suficiente para la descripción de la turbulencia, por lo que será necesario agregar otros términos de tipo Vlasov que, hasta ahora, aún no se conocen. Sin embargo, es posible estimar la tasa de transferencia de energía media $\langle \varepsilon \rangle$ mediante un ajuste en la ley de escala lineal. En este caso, se considera el valor absoluto de los momentos del tercer orden, a pesar de que ésta sea una fuerte aproximación con respecto a la ley teórica. Igualmente, el valor obtenido puede ser una estimación del orden de magnitud de la transferencia de energía. En las regiones BL y MS se observa una tendencia muy aproximadamente lineal con la escala en el rango $0.15 - 4.8s$. Los

valores de la tasa de transferencia de energía media se muestran en la Tabla 5.1. La diferencia de magnitud de $\langle \varepsilon \rangle$ entre las dos regiones sigue siendo grande, tal que para BL es mayor que para MS.

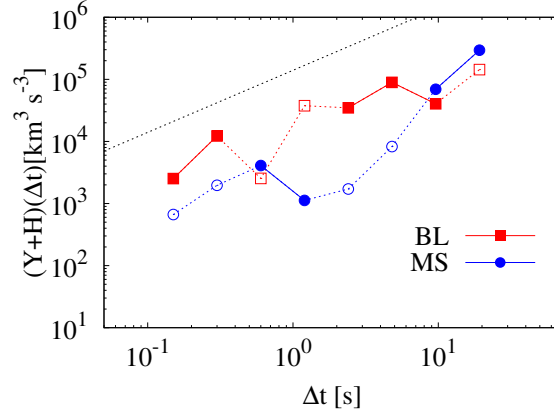


FIGURA 5.3: Ley de Politano-Pouquet con las contribuciones Hall adicionales. Puntos completamente pintados indican flujos positivos mientras que puntos vacíos representan de flujos negativos.

De igual manera se detallan las contribuciones a la tasa de transferencia de energía y la combinación Y_H de todas las contribuciones en la Figura 5.4. Donde, además de los términos Y_e y Y_c , se muestran las contribuciones Hall: $H_1 = 2d_i (\Delta \mathbf{b} \cdot \Delta \mathbf{j}) \Delta b_{\parallel}$ se asocia a la energía por las fluctuaciones campo magnético-densidad de corriente acopladas a las fluctuaciones magnéticas y $H_2 = -d_i \Delta b^2 \Delta j_{\parallel}$ representa la energía magnética transportada por la corriente eléctrica en dirección del flujo. De la figura 5.4 se observa que, en las dos regiones, las contribuciones Hall son importantes debido a que sus magnitudes son del mismo orden de las contribuciones MHD. Nuevamente, los puntos vacíos indican la parte negativa del flujo de energía, mientras que los puntos completamente pintados representan la parte positiva del flujo energético. Mientras no es posible identificar leyes de escala para cada contribución, es evidente que los términos de Hall, con sus cambios de signo repentinos, afectan fuertemente la relación lineal del flujo total de energía.

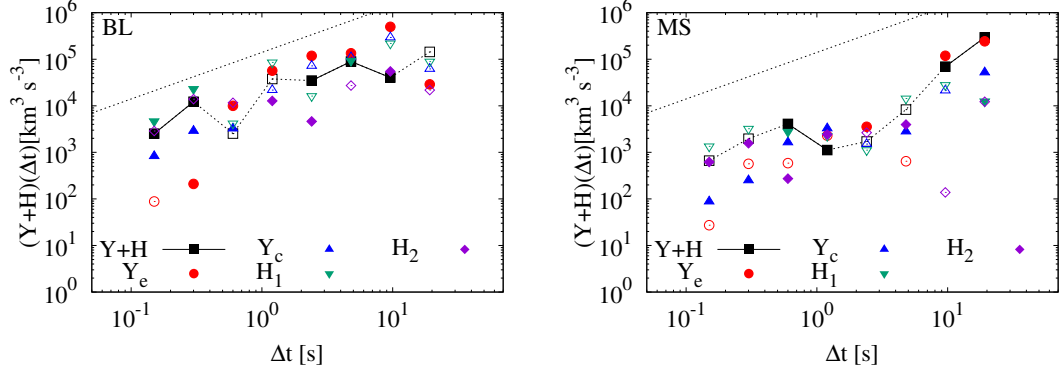


FIGURA 5.4: Izquierda: Detalle de las cuatro contribuciones diferentes a la ley Hall-Politano-Pouquet para la capa límite magnetosférica. Derecha: lo mismo para la magnetosheath.

TABLA 5.1: Valores de la tasa de transferencia de energía media.

—	Región	$[M J k g^{-1} s^{-1}]$
		$\langle \varepsilon \rangle$
MHD	BL	60 ± 11
	MS	1.2 ± 0.3
Hall-MHD	BL	60 ± 6
	MS	3.0 ± 0.7

5.4. Ley de escala de la transferencia local de energía

Como es bien conocido, y como se ha demostrado en los capítulos previos, en los flujos turbulentos la disipación y la transferencia de energía, no están distribuidas de manera homogénea en el espacio. En esta Sección se analizan las propiedades estadísticas de la distribución espacial (o como en nuestro caso la distribución temporal, gracias a la hipótesis de Taylor) de las varias contribuciones a las leyes de Yaglom y Hall-Yaglom, a diferentes escalas. Para realizar una descripción del flujo de energía local a partir de nuestras series temporales de datos espaciales, a partir de la ley (5.1) se puede omitir la operación de promedio, obteniendo así una serie temporal de un proxy heurístico de las tasas de transferencia de energía local (Local Energy Transfer, LET) a una escala dada Δt la cual puede ser estimada mediante la cantidad [30]:

$$\varepsilon = -\frac{3(\Delta v^2 + \Delta b^2)\Delta v_{\parallel} - 2(\Delta \mathbf{v} \cdot \Delta \mathbf{b})\Delta b_{\parallel} + di[2(\Delta \mathbf{b} \cdot \Delta \mathbf{j})\Delta b_{\parallel} - \Delta b^2\Delta j_{\parallel}]}{\Delta t \langle v \rangle}, \quad (5.3)$$

donde $\varepsilon \equiv \varepsilon(t, \Delta t)$ depende de ambos el tiempo y la escala, y todos los términos de la derecha ya se describieron en las secciones anteriores. Los dos primeros términos de la fracción corresponden al LET MHD y cuando se adiciona el último término (términos Hall) se obtiene el LET Hall-MHD. La LET es útil para identificar regiones donde la energía se transfiere a escalas más pequeñas [48] y un análisis de esto se puede realizar mediante sus las propiedades estadísticas que, como se verá, son dependientes de la escala [49].

En las secciones anteriores se observó que los valores resultantes de la ley de Yaglom tienen valores negativos que se interpretan como un flujo de energía de escalas pequeñas a escalas grandes. Ocurre algo similar para cada escala con la LET, donde se identifican proxies con valores $\varepsilon_{>0}$ y $\varepsilon_{<0}$; esto nos podría dar información de la dirección local del flujo de energía. Por lo tanto, en este trabajo se separaron los dos proxies para describir sus propiedades estadísticas.

Para caracterizar las propiedades estadísticas de la LET se calcularon, para cada región, la función de distribución de probabilidad de las dos variables, $\varepsilon_{>0}$ y $\varepsilon_{<0}$, a diferentes escalas para poder realizar un ajuste de ley de potencia (como se verá a continuación) y para observar si las colas de la distribución son diferentes entre las varias componentes de las dos regiones.

En la Figura 5.5 se muestra ejemplos de PDFs para $\varepsilon_{>0}$ en BL y MS para tres escalas diferentes: puntos azules $\Delta t = 0.15s$, cuadrados rojos $\Delta t = 1.2s$ y triángulos verdes $\Delta t = 4.8s$. Se observa, en el marco de referencia MHD, que para grandes valores del proxy la forma de la función $P(\varepsilon_{>0})$ cambia, y que la mayoría de datos están en el centro de la distribución (pequeños valores del proxy). En este trabajo, es de interés las grandes explosiones de los valores $\varepsilon_{>0}$ representadas por las colas de la derecha. Además, se nota una dependencia de escala en las PDFs, lo cual indica la presencia de valores intermitentes de la transferencia de energía. Lo que

se espera es que conforme disminuya la escala las colas aumenten; esto se observa entre las escalas $1.2s$ y $4.8s$, las cuales están aproximadamente dentro del rango inercial propuesto previamente. La escala $0.15s$ no cumple con lo esperado y no es parte del rango inercial propuesto, pero si agregamos términos cinéticos (los cuales no se conocen) al proxy propuesto, tal vez se podría mejorar la observación. Se muestran también en la Figura 5.5, las PDFs del LET considerando el aporte de las corrientes Hall (paneles de la derecha); en BL no se identifica una PDF donde se pueda estudiar la relación entre la escala y el comportamiento de las colas lo que podría ser debido a que las contribuciones Hall son muy fuertes en esta región. Por lo contrario, en MS sí se observa el comportamiento esperado, pues, aunque las diferencias son demasiado pequeñas, se observa que para una escala pequeña, la cola se levanta, lo que indica valores de intermitentes y altos de energía; a su vez, también se ve mejorado el comportamiento de las colas en función de la escala, pues para la escala $1.2s$ la cola está más levantada que las otras escalas más grandes.

El comportamiento de escala de las PDFs de ε a diferentes escalas puede ser descrito a través de modelos estándar [48]; se ha comprobado que en plasmas MHD para este tipo de datos, las PDFs se comportan aproximadamente como una función exponencial *estirada* (stretched exponential function) [48-50]:

$$P(|\varepsilon|) \sim \exp(-b|\varepsilon|^c) \quad (5.4)$$

donde b es un valor relacionado con el valor más probable de la distribución y $c \equiv c(\Delta t)$ es el parámetro que controla la forma de las colas de la PDF. En particular, $c = 2$ indica una distribución Gaussiana y $c = 1$ indica una exponencial. Los valores $0 < c < 1$ se asocian a una distribución cuyas colas pueden aproximarse cada vez más a una ley de potencia conforme disminuye c . Este modelo describe adecuadamente el caso de las escalas pequeñas en la turbulencia, donde existen estructuras intermitentes que controlan la estadística y aportan al crecimiento de las colas [50].

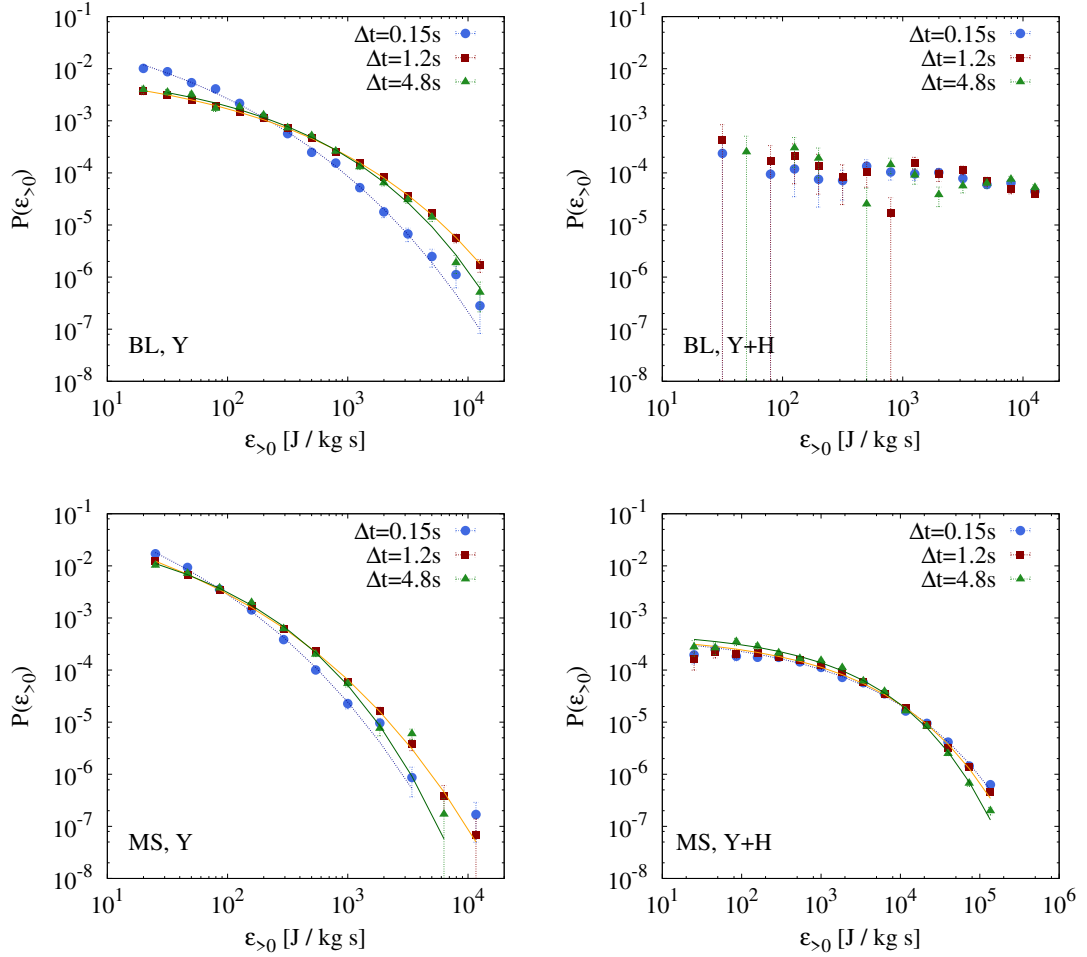


FIGURA 5.5: PDF del proxy positivo para diferentes escalas en la capa límite magnetosférica (paneles superiores) y para la magnetosheath (paneles inferiores).

Un ejemplo de este tipo de ajuste a la PDF se muestra en la Figura 5.5 para el caso $\varepsilon_{>0}$ en BL. En línea azul entrecortada el ajuste de la PDF para la escala 0.15s, en línea continua amarilla el ajuste para 1.2s y en línea verde continua para 4.8s. De manera similar se observa para los proxies en MS, y en las dos regiones con las contribuciones de los términos Hall.

El parámetro que controla la curvatura de las colas de las PDFs es c , por lo tanto es posible describir la dependencia de escala de $P(|\varepsilon|)$ a través de $c(\Delta t)$, la cual sigue una ley de potencia en la escala: $c(\Delta t) \sim \Delta t^\gamma$. [39] La Figura 5.6 muestra el comportamiento de escala del parámetro de forma c para las diferentes contribuciones: $\varepsilon_b = -3\Delta b^2 \Delta v_{\parallel} / 4\Delta t \langle v \rangle$ en triángulos violeta es la contribución de

energía magnética, $\varepsilon_v = -3\Delta v^2 \Delta v_{\parallel} / 4\Delta t \langle v \rangle$ en cuadrados rojos es la contribución de energía cinética, $\varepsilon_c = 3(\Delta \mathbf{v} \cdot \Delta \mathbf{b}) \Delta b_{\parallel} / 2\Delta t \langle v \rangle$ en asteriscos verdes es la contribución cross-helicity, $\varepsilon = \varepsilon_v + \varepsilon_b + \varepsilon_c$ en puntos azules es el proxy total MHD, y $\varepsilon_H = \varepsilon - 3d_i [2(\Delta \mathbf{b} \cdot \Delta \mathbf{j}) \Delta b_{\parallel} - \Delta b^2 \Delta j_{\parallel}] / 4\Delta t \langle v \rangle$ en rombos amarillos es el proxy total en aproximación Hall-MHD. El panel superior muestra el caso para el conjunto de datos en BL, y en el panel inferior se muestra el caso para el conjunto de datos MS. En BL, los términos Hall no tienen una distribución ajustable con una función stretched exponencial, así que el parámetro c para ε_H no se representa. Por otro lado, en la MS el caso Hall sí está representado. Se nota que en ambas regiones los parámetros relativos a las distribuciones de los términos individuales no siguen una ley de potencia, pero su suma muestra claramente una ley de potencia $c \sim \Delta t^{\gamma}$ (indicada en línea azul para ε en los dos paneles y en naranja continua para ε_H en el panel inferior), con $\gamma = 0.12 \pm 0.1$ en BL (panel superior, línea continua azul) y $\gamma = 0.26 \pm 0.03$ en MS (panel inferior, línea continua azul) en el marco de referencia MHD; considerando la contribución Hall se observa la ley de potencia del parámetro c en la escala con $\gamma = 0.08 \pm 0.02$ (panel inferior en línea naranja continua).

Esta observación sugiere que el proxy representa las propiedades de la cascada turbulenta, en concordancia con la ley de Politano-Pouquet. Por lo tanto, el proxy LET proporciona una muy buena representación del flujo de energía. La diferencia entre las dos regiones es evidente en el hecho que los términos Hall-MHD parecen poseer leyes de escala, como se espera de la simetría de las ecuaciones Hall-MHD, sólo en el caso de la MS. En BL, estos términos son dominados por unas distribuciones que no sigue leyes de escala, y por lo tanto podemos asumir que no es derivada de una cascada turbulenta. La causa de esta diferencia no es clara.

Finalmente, se nota que las colas negativas de las distribuciones son muy similares a las colas positivas. Por falta de tiempo, la confirmación de esta observación a través del estudio detallado de las leyes de escala de las colas negativas se deja para un trabajo futuro.

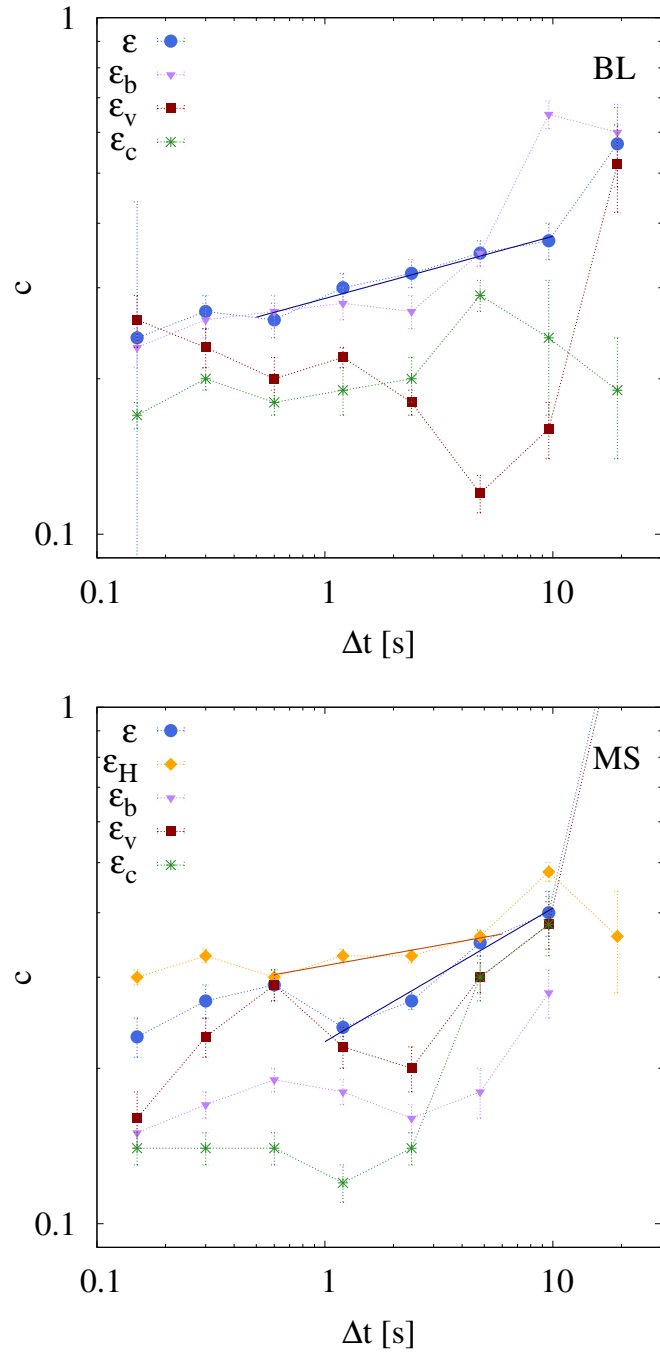


FIGURA 5.6: Parámetro de escala c obtenido del ajuste de las funciones de distribución LET para las diferente contribuciones y para el total, para la capa límite magnetosférica (panel superior) y para la magnetosheath (panel inferior). Las líneas continuas representan ajustes de ley de potencia $c \propto \Delta t^\gamma$.

Capítulo 6

Conclusiones

En el presente proyecto de investigación, se han utilizado los resultados de la misión espacial NASA/MMS para estudiar la turbulencia presente en una región de Inestabilidad Kelvin-Helmholtz observada en la magnetosfera terrestre.

Dentro de la región de KHI, se han identificado dos sub-regiones, ambas turbulentas, donde el plasma y los campos presentan varias propiedades estadísticas diferentes. Éstas se definen principalmente por la diferencia de la temperatura del plasma que las compone: la magnetosheath (MS) puede ser identificada por tener baja temperatura y alta densidad de iones positivos, mientras que la capa límite magnetosférica (BL) tiene alta temperatura y baja densidad de iones.

Una vez separadas las dos regiones, se pudo evidenciar la presencia de cascadas turbulentas tanto en el plasma de MS como en BL mediante el estudio de los espectros de potencia de los campos magnéticos, velocidad y campos de Elsässer. Primeramente, se nota que la potencia evidenciada por el espectro es más alta en la MS, donde las fluctuaciones son evidentemente más grandes. Segundo, se observa que los campos cumplen (aproximadamente) con la ley de potencia según Kolmogorov para la turbulencia; sin embargo, se encontró que los índices espectrales son más cercanos a $5/3$ en MS, mientras que en BL son menores (en valor absoluto) que $5/3$. Estas diferencias parecen indicar un diferente nivel de desarrollo de la turbulencia en las dos regiones. Además, observando el rango de frecuencia donde

se observa la ley de potencia de los espectros, se obtiene una estimación del rango inercial de la turbulencia MHD que, según los espectros observados, es: para BL de $3 \cdot 10^{-2}$ Hz a $3 \cdot 10^{-1}$ Hz ($3.3 - 33.3$) s y para MS de $3 \cdot 10^{-2}$ Hz a $6 \cdot 10^{-1}$ Hz ($1.6 - 33.3$) s.

Para examinar más en detalle la turbulencia, es necesario utilizar las funciones de distribución (PDFs) de las fluctuaciones de los campos a diferentes escalas, que indican la presencia de remolinos, capas de corrientes, y otras estructuras fluidas o magnéticas. Como ejemplo, se mostraron las PDFs de las fluctuaciones de la componente y del campo magnético en las dos regiones BL y MS para diferentes escalas. Se evidencia que conforme disminuye la escala las colas de las PDFs se levantan y se desvían de una función Gaussiana, indicando la presencia creciente de estructuras de escala pequeña generadas por la cascada turbulenta. Éste es el típico fenómeno de la intermitencia en la turbulencia. Se nota que los cambios en las colas son diferentes para BL y MS, lo cual indica diferentes estructuras intermitentes; estas pequeñas diferencias podrían ser porque las regiones presentan diferente rango inercial como se observa en los espectros, o sea, nuevamente por causa de un diferente nivel de desarrollo de la turbulencia. Se nota que, en ambos casos, la diferencia entre las colas para escalas diferentes no es grande, pero sí es considerable el desvío de la distribución Gaussiana. Esto indica un comportamiento generalmente poco intermitente, o sea con una moderada variación con la escala, pero con presencia de muchas estructuras de escala pequeña.

Para analizar la intermitencia, además de las PDFs se pueden utilizar otros indicadores equivalentes, como la pendiente de las funciones de estructura $S_q \approx \Delta t^{\zeta_q}$ de las fluctuaciones de los campos. Así se pudo identificar un intervalo del rango inercial que empieza alrededor de $1.2s$, donde se observa un cambio en la pendiente de $S_q(\Delta t)$; esto, aproximadamente, coincide con el límite inferior del rango inercial propuesto por los espectros. El extremo superior del rango es variable y depende mucho de la componente que se analiza. Cuando las leyes de escala de las funciones de estructura no son evidentes (típicamente por causa de escasa convergencia estadística de las muestras, y en particular en este caso posiblemente debido a la presencia de las numerosas estructuras de escala pequeña), se utiliza

el método ESS, con el cual se obtiene los exponentes de escala alternativos ξ_q , que también permiten de calcular los exponentes ζ_q . Se conoce que en un sistema turbulento intermitente los exponentes ζ_q se desvían de una ley lineal con el orden del momento q de S_q . Así, por medio de nuestras medidas, se evidenció el nivel de intermitencia en las diferentes componentes de los campos. Para tener un indicador más cuantitativo de la intermitencia de una región, se utilizó el clásico *p-model* de la turbulencia fluida para realizar una modelización de los exponentes de ley de escala anómalos. El modelo se basa en dos parámetros. Con el parámetro H se describe que tan irregular es el campo y con P que tanta intermitencia tiene el sistema. Se concluye que los campos de la región MS son más irregulares que los campos de BL (en acuerdo con una mayor potencia espectral). Sin embargo, BL tiene mayor intermitencia que MS porque, en general, los campos de BL tienen un valor de P más grande que para MS (Tabla [4.2](#)).

El último indicador de intermitencia utilizado es la relación entre el momento de cuarto orden y el cuadrado del momento de segundo orden, o sea la kurtosis $K \sim \Delta t^{-\kappa}$. En particular, $K > 3$ indica la presencia de estructuras intermitentes. Además, la relación PDFs- K es tal que cuando la escala decrece la cola de la PDF se levanta y $K > 3$. El valor de K nos dice entonces que tan fuerte es la intermitencia. En la Tabla [4.2](#) se muestran los valores máximos obtenidos para la kurtosis para todos los campos, de donde se evidencia que para todos los campos $K_{max} > 3$ cerca del rango inercial, lo que confirma la presencia de intermitencia, sobre todo en BL. Como se observa en la tabla, la intermitencia es débilmente más fuerte en BL, lo cual concuerda con resultados anteriores. Por otro lado, el exponente de escala κ está relacionado con el mecanismo de eficiencia de la transferencia de energía en la cascada y con la intermitencia desarrollada. En ambos casos, este exponente indica la presencia de moderada intermitencia, así como es sugerido por el corto rango de validez de una ley de potencia.

Para estudiar el nivel del transporte de energía turbulenta a través de las escalas, se ha realizado la validación de las leyes de Yaglom y Hall-Yaglom, mediante la dependencia lineal de la escala con el momento de tercer orden. Se evidencia la tendencia lineal de la ley de Yaglom en las dos regiones, MS y BL, en un corto

rango inercial. El promedio de la tasa de transferencia de energía entre escalas es mayor en un orden de magnitud para BL que para MS, lo cual da una idea de la cantidad de energía que se transfiere. En un caso ideal, se esperaba que los términos debidos a las corrientes Hall mejoren la linealidad de la ley, sin embargo, en la ley se observa intervalos de energía negativa, por lo cual no se observa la linealidad. Aún así, se observa que los términos Hall son importantes porque son del mismo orden de las contribuciones debidas a las energías cinética, magnética y el aporte cross-helicity. De igual manera se calcula una estimación del promedio de energía que se transfiere a través de las escalas, y de igual manera se tiene que esta cantidad es mayor en BL en un orden de magnitud. De todas formas, es evidente que la ley Hall-MHD no es válida en estos datos de plasma espacial. Esta discrepancia con la previsión teórica puede ser debido a la joven edad de la turbulencia, o a la presencia de corrientes anómalas, generadas por procesos físicos del plasma, y probablemente debidas a la proximidad con el “bow shock” y con el fuerte gradiente de velocidad que genera la KHI.

Finalmente, mediante el estudio de las propiedades estadísticas de un proxy heurístico de la tasa de transferencia de energía local, ε , se determinó que para escalas pequeñas, en el rango inercial, las colas de las PDFs de este flujo de energía se levantan, lo cual indica la existencia de valores altos e intermitentes de ε que aportan en la transferencia de energía. En otras palabras, se confirma que la transferencia de energía está localizada en el espacio y no es homogénea. La transferencia local de energía normalmente se puede modelizar según la teoría de las desviaciones extremas, por lo cual se ha realizado un ajuste exponencial *stretched* a las PDFs, cuyos parámetros son, nuevamente, indicadores de intermitencia a cierta escala. El parámetro $c \sim \Delta t^\gamma$ de la ley exponencial, indica como se comportan las colas de las PDFs. En este estudio, se han modelado por separado las varias contribuciones a las leyes de Yaglom en los casos MHD y Hall-MHD. Mientras los términos de contribución MHD pueden ser modelados en ambas regiones, los términos Hall sólo se modelan en la MS. En la BL, estos términos tienen colas altas e irregulares, indicando la presencia de fuertes corrientes Hall que, al no ser modelizados, no parecen ser generados por una cascada turbulenta. Además, en el caso presentado,

el resultado del ajuste muestra un comportamiento que confirma, para ambas regiones, la presencia de propiedades de escala solamente para los términos totales de tipo MHD (BL) o ambas HMD y Hall-MHD (MS), de acuerdo con la ley de Yaglom y de Hall-Yaglom.

Interpretamos ahora los resultados previamente descritos para evidenciar las diferencias y similitudes entre las dos regiones.

Cabe recordar que la MS está constituida de plasma que acaba de pasar por una región de choque, o sea el “bow shock” terrestre, debido al impacto del plasma del viento solar supersónico contra el de la magnetosfera que es más estacionario. Se supone entonces que la turbulencia podría estar recién desarrollada. Al revés, en la región de BL, el plasma es principalmente magnetosférico, que todavía no ha sido impactado por el bow shock, y por consecuencia su turbulencia podría ser más “antigua”, con un nivel de fluctuaciones más bajo (menor potencia en el espectro), y más intermitencia (exponentes de escala de las funciones de estructuras más curvados). Todo esto está bien observado en los resultados presentados. Adicionalmente, las leyes de Yaglom y las leyes de escala de sus componentes locales muestran también un mayor aporte de energía en el caso BL, sugiriendo el mayor desarrollo de la turbulencia en el rango MHD, y al mismo tiempo la mayor presencia de fuertes corrientes Hall no generadas por la cascada turbulenta. Con respecto a la observación de un espectro más alto (exponente negativo mas pequeño) en el BL, es posible que este también sea debido a la mayor presencia de estructuras de corriente, de origen ajeno a la cascada turbulenta, que proporcionan más energía en las fluctuaciones de alta frecuencia.

Por todo lo evidenciado, se concluye que las dos regiones presentan una turbulencia sólo moderadamente desarrollada, pero con varias diferencias, incluso el nivel de contaminaciones debidas a estructuras no necesariamente originadas por la turbulencia, lo que es normalmente observado en los complejos plasmas espaciales. En particular, como se espera, el plasma del BL se encuentra en una situación de mayor desarrollo de la turbulencia con respecto al MS, pero con mayor presencia

adicional de estructuras de corriente de escala pequeña. Éstas causan una contribución anómala de los términos Hall a la transferencia de energía, un exponente espectral más pequeño (más potencia en las escalas pequeñas), así como más intermitencia en los campos. Todo esto sugiere que la turbulencia en las dos regiones todavía no ha sido mezclada por la KHI, lo que se va a producir en una región más lejana del punto de activación de la inestabilidad. Desafortunadamente, todavía no existen medidas de este tipo de evento, por lo cual no se puede estimar el alcance de la región de *pre-mixing*, ni donde se podrá considerar como completo el *mixing* debido a la KHI.

6.1. Seguimiento

- Sería interesante continuar con el estudio estadístico del proxy LET y analizar eventos intensos caracterizados por regiones de acumulación de energía y estudiar sus efectos sobre la función de distribución de velocidad (Velocity distribution function, VDF) de los protones para encontrar evidencia de procesos disipativos.
- También sería de importancia comparar los resultados obtenidos con simulaciones numéricas híbridas Vlasov-Maxwell en plasmas.

Apéndice A

Hipótesis de Taylor

La hipótesis de Taylor es un instrumento para el análisis de datos en la turbulencia, la cual permite medir indiferentemente en el dominio del tiempo y del espacio, y para poder pasar del uno al otro a través de una transformación lineal. J. L. Taylor propuso una hipótesis en la cual los comportamientos de tiempo y espacio (a lo largo de la dirección media del movimiento) de una variable q de fluido están simplemente relacionados por la velocidad U (a lo largo de la misma dirección).

Sea u la velocidad de un fluido vista desde un sistema de referencia que se mueve con el flujo medio, sea v la velocidad media en el sistema de referencia laboratorio, y sea $U = \langle v \rangle_t$ la velocidad media del fluido vista desde el sistema laboratorio. Entonces la relación entre u y v sera [7]:

$$v(x, t) = u(x - Ut, t) + U. \quad (\text{A.1})$$

Se puede definir la *intensidad de turbulencia* como $I_T = \langle u^2 \rangle^{1/2} / U$, siendo el numerador la varianza de la velocidad en el sistema de referencia del flujo medio. Si $I_T \ll 1$, se ve que para una posición fija $x = x_0$, en la parte de la derecha de la Ecuación (A.1) el término $u(x - Ut, t)$ varía con el tiempo predominantemente debido al argumento $x_0 - Ut$; de hecho, las variaciones temporales de u en t son despreciables respecto a la velocidad media U . En otras palabras, a medida

que pasa el tiempo, la variación de v no está determinada por las fluctuaciones temporales de u , sino por las fluctuaciones espaciales. En medidas experimentales, esto significa que la velocidad media del flujo es más grande que la evolución temporal del mismo flujo, tal que el instrumento está tomando medidas, en el dominio del tiempo, de una "fotografía" del flujo capturando su estructura espacial. Si el tiempo de muestreo es ΔT entonces la fotografía del flujo tiene una resolución espacial ΔX ; esto se traduce a decir: intervalos de tiempo ΔT y longitudes ΔX son equivalentes y relacionados por [19]:

$$\Delta X = U \Delta T. \quad (\text{A.2})$$

Cuando la hipótesis de Taylor se verifica, es posible cambiar del dominio de tiempo al dominio espacial, y comparar diferentes tipos de datos.

En este trabajo se ha hecho uso de la hipótesis de Taylor. Es importante establecer si la relación entre los comportamientos en tiempo y en espacio se mantiene y el grado de validez de tal aproximación; para los datos utilizados en esta proyecto de titulación, en el rango inercial, se ha realizado la validación de la hipótesis de Taylor en la magnetosheath [*Sorriso-Valvo et al., 2019*] y en la capa límite magnetosférica [*Stawarz et al., 2016*] en trabajos previos.

Bibliografía

- [1] N. A. Krall, A. W. Trivelpiece, Principles of plasma physics, 1ra. ed., McGraw-Hill, Inc., United States of America (1973).
- [2] R. J. Goldston, P. H. Rutherford, Introduction to plasmas Physics, 1ra. ed., Taylor and Francis Group, New York (1995).
- [3] T. M. York, Hain-Bin Tang, Introduction to plasmas and plasma dynamics, 3ra. ed., Academic press, New York (2015).
- [4] F. F. Chen, Introduction to plasmas physics, 1ra. ed., Plenum press, New York (1974).
- [5] D. A. Gurnett, A. Bhattacharjee, Introduction to plasmas physics with space and laboratory applications, 1ra. ed., Cambridge university press, Cambridge (2005).
- [6] H. G. Booker, Cold plasma waves, Volumen 1. Springer Sciences & Business Media (2012).
- [7] L. Sorriso-Valvo, Thesis: Intermittency in plasma turbulence, Università degli Studi della Calabria, Calabria (2001).
- [8] R. Fitzpatrick, Plasmas physics, an introduction, Taylor & Francis Group, New York (2015).
- [9] A. Enriquez, Tesis: Análisis de inestabilidades two-stream en los casos límite de beam-plasma y gentle-bump en plasmas cinéticos no colisionales, usando algoritmos tipo particle-in-cell no relativistas, Escuela Politécnica Nacional, Quito (2019).

- [10] E. Kilpua and H. Koskinen, Introduction to Plasma Physics., Hong Kong, (2015).
- [11] V. B. Baranov, Kinetic and Hydrodynamic Approaches in Space Plasma., Lomonosov Moscow State University, Moscú, (2017).
- [12] J. A. Bittencourt, Fundamentals of plasma physics., Springer Science and Business Media, (2013).
- [13] K. Chaudhary, A. M. Imam, S. Z. Haider Rizvi, J. Ali., Plasma Kinetic Theory, IntechOpen, Malaysia, (2018)
- [14] G. Colonna, Boltzmann and Vlasov Equations in Plasma Physics, 10.1088/978-0-7503-1200-4-1, (2018)
- [15] G. Colonna, An ontroduction to kinetic plasma theories.,International School of Space Science, [Consultado el 9 de abril del 2020], Disponible en https://www.cifs-iss.org/presentazioni/2017-september/2017_09_18-19_Consolini.pdf, Italia (2017)
- [16] S. Poedts, Kinetic Plasma Theory (KT-1), Bélgica: KU Leuven,
- [17] J. P. H. Goedbloed, S. Poedts, Principles of Magnetohydrodynamic, Cambridge University Press, United Kingdom (2004).
- [18] F. F. Chen, Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion, 3ra. ed., Springer, Suiza (2016).
- [19] L. Sorriso-Valvo, Tesis Laurea, Università degli Studi della Calabria, Calabria (1997).
- [20] A. I. Akhiezer, R. V. Polovin, A. G. Sitenko y K. N. Stepanov, Plasma electrodynamics, Vol. 2 Linear theory, Pergamon, New York (1975).
- [21] E. Frisch, Turbulence, Cambridge University Press, Gran Bretaña (1995).
- [22] D. Biskam, Magnetohydrodynamic Turbulence, Cambridge University Press, New York (2003).

- [23] P. Dmitruk, Tesis Doctoral, Universidad de Buenos Aires, Buenos Aires (1999).
- [24] A. N. Kolmogorov, Local structure of turbulence in incompressible fluid, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **30**, 9-13 (1941), (en Ruso), traducido en "Kolmogorov ideas 50 years on", *Proc. R. Soc. Lond. A*, **434**, 9-13, Edición J.C.R. Hunt y O.M Phillips (1995).
- [25] A. N. Kolmogorov, A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high Reynolds number, *J. Fluid Mech.*, **13**, 82-85 (1962).
- [26] R. H. Kraichnan, Inertial-range spectrum of hydrodynamic turbulence, *Phys. Fluids*, **8**, 1385 (1965).
- [27] L. D. & E. M. Lifshitz, Fluids Mechanics, 2da edición, Pergamon, Oxford (1987).
- [28] R. Bruno y V. Carbone, Lecture notes on physics: Turbulence in the solar wind, Springer, Suiza (2016).
- [29] H. Politano y A. Pouquet, Dynamical length scales for turbulent magnetized flows, *Geophys. Res. Lett.*, **25**, 273 (1998).
- [30] L. Sorriso-Valvo, F. Catapano, A. Retinò, O. Le Contel, D. Perrone, O. W. Roberts, J. Y. Caburn, V. Panebianco, F. Valentini, S. Perri, A. Greco, F. Malara, V. Carbone, P. Veltri, O. Pezzi, F. Fraternali, F. Di Mare, R. Marino, B. Giles, T. E. Moore, C. T. Russell, R. B. Torbert, J. L Burch y Y. B. Khotyaintsev, Turbulence-Driven Ion Beams in the Magnetospheric Kelvin-Helmholtz Instability, *Phys. Rev. Lett.*, **122**, 035102 (2019).
- [31] J. D. Huba, Hall Magnetohydrodynamics- A tutorial, parte de las series de libro the Lecture Notes in Physics (LNP, volumen 615), Washington (2003).
- [32] R. Ferrand, S. Galtier, F. Sahraoui, R. Meyrand, N. Andrés y S. Banerjee, On exact laws in incompressible Hall magnetohidrodinamics turbulence, *Astrophys. J.*, **881**(1), 50 (2019).

- [33] NASA Official: Guan Le, Magnetospheric Multiscale code 461, [Consultado el 20 de Junio del 2020], Disponible en <https://mms.gsfc.nasa.gov/>, EEUU (2020).
- [34] Rob Garner, Magnetospheric Multiscale, [Consultado el 1 de Junio del 2020], Disponible en https://www.nasa.gov/mission_pages/mms/index.html, EEUU (2020).
- [35] J. E. Stawarz, S. Eriksson, F. D. Wilder, R. E. Ergun, S. J. Schwartz, A. Pouquet, J. L. Burch, B. L. Giles, Y. Khotyaintsev, O. Le Contel, P.-A. Lindqvist, W. Magnes, C. J. Pollock, C. T. Russell, R. J. Strangeway, R. B. Torbert, L. A. Avanov, J. C. Dorelli, J. P. Eastwood, D. J. Gershman, K. A. Goodrich, D. M. Malaspina, G. T. Marklund, L. Mirioni y A. P. Sturner, Observations of turbulence in a Kelvin-Helmholtz event on 8 September 2015 by the Magnetospheric Multiscale mission, *J. Geophys. Res. Space Physics*, **121**, 11,021–11,034 (2016), doi:10.1002/2016JA023458.
- [36] S. Eriksson, B. Lavraud, F. D. Wilder, J. E. Stawarz, B. L. Giles, J. L. Burch, W. Baumjohann, R. E. Ergun, P.-A. Lindqvist, W. Magnes, C. J. Pollock, C. T. Russell, Y. Saito, R. J. Strangeway, R. B. Torbert, D. J. Gershman, Yu. V. Khotyaintsev, J. C. Dorelli, S. J. Schwartz, L. Avanov, E. Grimes, Y. Vernisse, A. P. Sturner, T. D. Phan, G. T. Marklund, T. E. Moore, W. R. Paterson y K. A. Goodrich, Magnetospheric Multiscale observations of magnetic reconnection associated with Kelvin-Helmholtz waves, *Geophys. Res. Lett.*, **43**, 5606–5615 (2016) , doi:10.1002/2016GL068783.
- [37] F. D. Wilder, R. E. Ergun, S. J. Schwartz, D. L. Newman, S. Eriksson, J. E. Stawarz, M. V. Goldman, K. A. Goodrich, D. J. Gershman, D. M. Malaspina, J. C. Holmes, A. P. Sturner, J. L. Burch, R. B. Torbert, P.-A. Lindqvist, G. T. Marklund, Y. Khotyaintsev, R. J. Strangeway, C. T. Russell, C. J. Pollock, B. L. Giles, J. C. Dorrelli, L. A. Avanov, W. R. Patterson, F. Plaschke y W. Magnes, Observations of large-amplitude, parallel, electrostatic waves associated with the Kelvin-Helmholtz instability by the magnetospheric multiscale mission, *Geophys. Res. Lett.*, **43**, 8859–8866 (2016), doi:10.1002/2016GL070404.

- [38] F. Fraternale, N. V. Pogorelov, J. D. Richardson y D. Tordella, Magnetic turbulence spectra and intermittency in the heliosheath and in the local interstellar medium. *Astrophys. J.*, **872**, 40 (2018), doi: 10.3847/1538-4357/aafd30.
- [39] L. Sorriso-Valvo, G. De Via, F. Fraternale, A. Gurchumelia, S. Perri, G Nigro, F. Catapano, A. Retinò, C. Chen, E. Yardanova, O. Pezzi, K. Chargazia, O. Kharshiladze, D. Kvaratskhelia, C. Vásconez, R. Marino, O. Le Contel, B. Giles, Thomas. Moore, R. Torbert y J. Burch, Sign singularity of the local energy transfer in space plasma turbulence, *Front. Phys*, **108**, 7 (2019), doi: 10.3389/fphy.2019.00108.
- [40] Y. X. Huang, F. G. Schmitt, Z. M. Lu y Y. L. Liu, Autocorrelation function of velocity increments time series in fully developed turbulence, *Europhys. Lett.*, **86**, 4 (2009).
- [41] K. R. Sreenivasan, Fractals and multifractals in fluid turbulence, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **23**, 539-600 (1991).
- [42] C. -Y-. Tu y E. Marsch, MHD structures, waves and turbulence in the solar wind: Observations and theories, *Space Sci. Rev.*, **73**, 1-210 (1995).
- [43] H. Politano y A. Pouquet, Model of intermittency in magnetohydrodynamic turbulence, *Phys. Rev. E*, **52**, 636-641 (1995).
- [44] R. Bruno y V. Carbone, The solar wind as turbulence laboratory, *Living Rev. Solar Phys.*, **10**, 2 (2013), doi:10.12942/lrsp-2013-2.
- [45] R. Bruno, Intermittency in solar wind turbulence from fluid to kinetic scales, *Earth and Space Science*, **6**, 656-672 (2019), doi:10.1029/2018EA000535.
- [46] R. Bandyopadhyay, L. Sorriso-Valvo, A. Chasapis, P. Hellinger, W. H. Matthaeus, A. Verdini, S. Landi, L. Franci, L. Matteini, B. L. Giles, D. J. Gershman, T. E. Moore, C. J. Pollock, C. T. Russell, R. J. Strangeway, R. B. Torbert y J. L. Burch, In Situ Observation of Hall Magnetohydrodynamic Cascade in Space Plasma, *Phys. Rev. Lett.*, **124**, 225101 (2020), doi: 10.1103/PhysRevLett.124.225101.

- [47] R. Marino, L. Sorriso-Valvo, V. Carbone, A. Noullez, R. Bruno y B. Bavasano, Heating the solar wind by a magnetohydrodynamic turbulent energy cascade, *Astrophys. J.*, **677**, L71-L74 (2008).
- [48] L. Sorriso-Valvo, D. Perrone, O. Pezzi, F. Valentini, S. Servidio e I. Zouganelis, Local energy transfer rate and kinetic processes: the fte of turbulent energy in two-dimensional hybrid Vlasov-Maxwell numerical simulations, *J. Plasma Phys.*, **84**, 725840201 (2018), doi: 10.1017/S0022377818000302.
- [49] L. Sorriso-Valvo, F. Carbone, S. Perri, A. Greco, R. Marino y R. Bruno , On the statistical properties of turbulent energy transfer rate in the inner heliosphere, *Solar Phys.*, **293**, 10 (2018), doi: 10.1007/s11207-017-1229-6.
- [50] L. Sorriso-Valvo, R. Marino, L. Lijoi, S. Perri y V. Carbone, Self-consistent cascading distribution of solar wind turbulence fluctuations, *Astrophys. J.*, **807**, 86 (2015), doi: 10.1088/0004-637X/807/1/86.
- [51] Laboratory for Atmospheric and Space Physics. Créditos: Fran Bagenal y Steve Bartlett, [Consultado el 30 de Junio del 2020], Disponible en <https://lasp.colorado.edu/home/mop/>, EEUU (2020).