

**ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL**

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**ESTUDIO DE LOS EXPONENTES DE LYAPUNOV PARA  
UN SISTEMA DE N JUNTURAS JOSEPHSON**

**TRABAJO PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE FÍSICO**

**PROYECTO DE INVESTIGACIÓN**

**RICARDO XAVIER RAMIREZ IZA**

`ricardo.ramirez@epn.edu.ec`

**DIRECTOR: RAMÓN XULVI-BRUNET, Ph.D**

`ramon.xulvi@epn.edu.ec`

**QUITO, AGOSTO 2020**

## DECLARACIÓN

Yo, RICARDO XAVIER RAMIREZ IZA, declaro bajo juramento que el trabajo aquí escrito es de mi autoría, que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional y que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

A través de la presente declaración cedo mis derechos de propiedad intelectual, correspondiente a este trabajo, a la Escuela Politécnica Nacional, según lo establecido en la Ley de Propiedad Intelectual, por su reglamento y por la normativa institucional vigente.

---

Ricardo Xavier Ramirez Iza

# CERTIFICACIÓN

Certifico que el presente trabajo fue desarrollado por RICARDO XAVIER RAMIREZ IZA, bajo mi supervisión.

---

Ramon Xulvi-Brunet, PhD  
Director de proyecto

## AGRADECIMIENTOS

Agradezco a mi familia por todo el apoyo que me han brindado a lo largo de mi vida. A mis hermanas, porque han crecido junto a mí y siempre han estado para cualquier situación, ya sea para pelear o ser un apoyo. A mis padres, por servirme de ejemplo en el largo camino de la vida y siempre estar dispuestos a brindarme un consejo para afrontar las dificultades. Quiero agradecer de manera especial a mi madre, que ha dedicado su vida a cuidar de nosotros, sus hijos, y lo ha hecho de una manera maravillosa. En fin, todo lo que soy se lo debo a mi familia y gracias a ellos es que he podido finalizar este trabajo.

También agradezco a Eliana, quien me acompañó a lo largo de toda mi carrera universitaria. Con quien siempre pude contar de manera incondicional y a quien siempre apoyaré de la misma manera. Quien me ayudó y me dio ánimos de enfrentar la vida. Quien me inspiró a ser mejor cada día. En fin, a quien representa y siempre representará mucho en mi vida.

Sin duda, debo agradecer a mis mejores amigos de “prepo”, Karol, Daya, Anita y Diego, por todos los momentos vividos a lo largo de mi época universitaria. Por todo el apoyo y buena vibra de cada uno. Que sepan que siempre voy a estar apoyándolos en cualquier proyecto o cualquier cosa cuando la necesiten. Gracias por ser como son, son los mejores. De manera especial quiero agradecer a Karo, que siempre ha estado para escucharme y darme algún consejo, y es una excelente persona, como todo el grupo.

Agradezco a mis mejores amigos de carrera, Marcelo, Javier, Dario y Andy. Todos los momentos vividos a lo largo de la carrera han hecho que este camino universitario sea de los mejores momentos. Siempre hubo espacio para una “asquerosa integración” y una conversación amena. Todo esto sin mencionar las tocaditas de la banda, los combos apostados y las amanecidas.

Así mismo quiero agradecer a todas las personas que he conocido en la carrera, entre ellos a Diego, Ale, Ricardo, Esteban, Eli, Christopher y Jenn. Durante los últimos semestres la pasamos excelente formando parte de asociación de Física.

También quiero agradecer a mi tutor, Dr. Ramon Xulvi-Brunet. Sin su guía para escribir este texto y las ideas aportadas al mismo, este trabajo no sería el mismo. Además, gracias a sus amplios conocimientos y su forma de enseñar, me ha inspirado a pensar dentro de un campo más amplio. Sin duda es uno de los mejores profesores y profesionales del departamento de Física. Por último, quiero agradecer a todos los profesores que han sido una guía académica y moral dentro de la carrera, entre ellos: Cristian Vasconez, Alvaro Dueñas, Leonardo Basile y Luis Lascano.

## **DEDICATORIA**

*A mi madre, Mirian*

*A mi padre, Egidio*

*A mis hermanas, Lizeth y Evelyn*

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Juntura Josephson . . . . .	1
1.1.1. Fabricación . . . . .	3
1.2. Modelo de Steward-McCumber . . . . .	3
1.2.1. Corriente de cuasi-partículas . . . . .	4
1.2.2. Corriente de capacitancia . . . . .	4
1.2.3. Corriente de pares de Cooper . . . . .	5
1.2.4. Ecuación del modelo . . . . .	5
1.3. Adimensionalización de la ecuación . . . . .	6
1.4. N-junturas . . . . .	6
1.5. Motivación y objetivo . . . . .	8
1.6. Outline . . . . .	9
<b>2. Sistemas dinámicos</b>	<b>10</b>
2.1. Sistemas dinámicos . . . . .	10
2.1.1. Atractores . . . . .	11
2.1.2. Sistema caótico . . . . .	11
2.1.3. Solución de sistemas dinámicos . . . . .	12
2.2. Exponentes de Lyapunov . . . . .	12
2.2.1. Evolución de los volúmenes de separación . . . . .	14
2.2.2. Evolución de los vectores de separación . . . . .	14
2.2.3. Obtención del espectro de Lyapunov . . . . .	16
2.3. Dimensión de Kaplan-Yorke . . . . .	19
2.4. Entropía de Kolmogorov . . . . .	21
2.5. Sección de Poincaré . . . . .	23
<b>3. Simulaciones numéricas</b>	<b>24</b>
3.1. Una juntura . . . . .	24
3.1.1. Ciclos límite . . . . .	24
3.1.2. Juntura poco amortiguada . . . . .	25
3.1.3. Subrutinas para el barrido . . . . .	26
3.1.4. Barridos $\alpha$ vs $\Omega$ . . . . .	27
3.1.5. Curvas $\langle v \rangle / \Omega$ vs $i_0$ . . . . .	29
3.1.6. Sección de Poincaré . . . . .	29
3.2. Tres junturas . . . . .	30

3.2.1. Subrutinas modificadas . . . . .	30
<b>4. Resultados</b>	<b>31</b>
4.1. Una juntura . . . . .	31
4.1.1. Relación de los bloqueos de fase con los exponentes de Lyapunov	32
4.1.2. Características de las curvas $\langle v \rangle / \Omega$ vs $i_0$ para diferentes valores de $i_1$ . . . . .	34
4.1.3. Histéresis . . . . .	38
4.1.4. Características de las curvas $\langle v \rangle / \Omega$ vs $i_0$ al disminuir el parámetro $\alpha$ . . . . .	39
4.1.5. Estándares de voltaje con histéresis . . . . .	41
4.2. Tres junturas . . . . .	43
4.3. Caracterización de soluciones caóticas en $i_0 = 0$ . . . . .	45
4.3.1. Una juntura . . . . .	46
4.3.2. Tres junturas . . . . .	49
<b>5. Conclusiones</b>	<b>52</b>
<b>A. Algoritmos</b>	<b>54</b>
A.1. Runge-Kutta Cash-Karp . . . . .	54
A.2. Descomposición QR . . . . .	55
A.3. Algoritmo para hallar el espectro de exponentes de Lyapunov . . . . .	56
A.4. Algoritmo para hallar la dimensión de Kaplan-Yorke . . . . .	57
A.5. Algoritmo para hallar $T$ . . . . .	57
A.6. Algoritmo para la sección de Poincaré . . . . .	57
<b>B. Programas</b>	<b>58</b>
B.1. Códigos comunes . . . . .	58
B.1.1. Runge-Kutta Cash-Karp . . . . .	58
B.1.2. Ortonormalización . . . . .	59
B.2. Barrido $\Omega$ vs $\alpha$ . . . . .	60
B.3. Curvas $\langle v \rangle / \Omega$ vs $i_0$ . . . . .	62
B.3.1. Una Juntura . . . . .	63
B.3.2. 3-Junturas . . . . .	66
B.4. Sección de Poincaré . . . . .	69
B.4.1. Una juntura . . . . .	69
B.4.2. 3-Junturas . . . . .	70

# Índice de figuras

1.1.	Juntura Josephson formada por dos películas superconductoras a, b y un material aislante. $L$ y $W$ son las dimensiones de la juntura . . . . .	2
1.2.	Circuito asociado al modelo de Steward-McCumber. La flecha representa una fuente de corriente, mientras que la espira dentro de un círculo representa el elemento Josephson . . . . .	4
1.3.	Arreglo de $N$ -Junturas Josephson . . . . .	7
2.1.	Volúmenes de separación $p$ -dimensionales de un sistema dinámico de dimensión $n = 3$ <b>a)</b> $p = 3$ <b>b)</b> $p = 2$ . . . . .	13
2.2.	Conjunto de Cantor . . . . .	19
2.3.	División de la longitud $L$ en $M$ cajas de longitud $\epsilon$ . . . . .	20
2.4.	División en cajas (de longitud $D$ ) de un espacio de fases de dimensión dos. Los $i_j$ son las etiquetas de las cajas por las que ha pasado la trayectoria cualquiera. . . . .	22
3.1.	Barridos $\alpha$ vs $\Omega$ , $\lambda_1 < -0.01$ rojo, $-0.01 \leq \lambda_1 \leq 0.01$ verde, $0.1 \geq \lambda_1$ morado. <b>a)</b> Con $i_1 = 2.5$ , <b>b)</b> Con $i_1 = 5$ , <b>c)</b> Con $i_1 = 10$ , <b>d)</b> Con $i_1 = 30$ , <b>e)</b> Con $i_1 = 50$ y <b>f)</b> Con $i_1 = 80$ . . . . .	28
4.1.	a) Bloqueos de fase sin histéresis b) Bloqueos de fase con histéresis . . .	32
4.2.	<b>a)</b> Curva $\langle v \rangle / \Omega$ vs $i_0$ , usando $\Omega = 2$ , $\alpha = 0.8$ , $i_1 = 80$ <b>b)</b> Curva mayor exponente de Lyapunov vs $i_0$ correspondiente a la curva <b>a)</b> . . . . .	33
4.3.	Acercamiento a la curva $\langle v \rangle / \Omega$ vs $i_0$ mostrada en Figura 4.2 <b>a)</b> . . . . .	34
4.4.	Curvas $\langle v \rangle / \Omega$ vs $i_0$ para diferentes parámetros <b>a)</b> $i_1 = 2.5$ , $\Omega = 3.2$ , $\alpha = 0.8$ <b>b)</b> $i_1 = 5$ , $\Omega = 3.75$ , $\alpha = 0.8$ <b>c)</b> $i_1 = 10$ , $\Omega = 3.5$ , $\alpha = 0.8$ <b>d)</b> $i_1 = 30$ , $\Omega = 3.4$ , $\alpha = 0.8$ <b>e)</b> $i_1 = 80$ , $\Omega = 3.5$ , $\alpha = 0.8$ <b>f)</b> $i_1 = 10$ , $\Omega = 3.5$ , $\alpha = 0.98$ . La línea roja (a) indica el aumento de $i_0$ , la celeste (b) su disminución. . . . .	36
4.5.	Máximo exponente de Lyapunov vs $i_0$ correspondiente a las 6 curvas $\langle v \rangle / \Omega$ vs $i_0$ de la Figura 4.4 en el mismo orden. La línea roja (a) indica el aumento de $i_0$ , la celeste (b) su disminución. . . . .	37
4.6.	<b>a)</b> Curva $\lambda_1$ vs $u$ para la curva paramétrica <b>b)</b> Atractores correspondientes a $i_0 = 0.92$ . . . . .	39



4.7. <b>a)</b> Curvas $\langle v \rangle / \Omega$ vs $i_0$ con variaciones del parámetro $\alpha$ para $\Omega = 3.2$ e $i_1 = 30$ . <b>b)</b> Curva $\lambda_1$ vs $i_0$ con variaciones del parámetro $\alpha$ para $\Omega = 3.2$ e $i_1 = 30$ . Tanto para <b>a)</b> como para <b>b)</b> , las curvas tituladas con a, b, c y d (rojo, celeste, morado y verde) corresponden a $\alpha = 0.45, 0.15, 0.05$ y $0.015$ respectivamente. . . . .	40
4.8. Curva $\langle v \rangle / \Omega$ vs $i_0$ para $\Omega = 3.2, \alpha = 0.015$ e $i_1 = 80$ <b>a)</b> Sin líneas de histéresis <b>b)</b> con líneas de histéresis . . . . .	41
4.9. Curva $\langle v \rangle / \Omega$ vs $i_0$ para $\Omega = 3.2, \alpha = 0.015$ e $i_1 = 5$ <b>a)</b> Sin líneas de histéresis <b>b)</b> con líneas de histéresis . . . . .	42
4.10. Curva $\langle v \rangle / \Omega$ vs $i_0$ para $\Omega = 3.2, \alpha = 0.0004$ e $i_1 = 80$ . . . . .	43
4.11. Curvas $\langle v \rangle / \Omega$ vs $i_0$ y sus correspondientes curvas de exponentes de Lyapunov para parámetros estudiados en una sola junta. La línea roja (a) representa una constante de acoplo $\sigma = 0.1$ mientras que la azul (b) representa un valor $\sigma = 0.6$ . <b>a)</b> y <b>b)</b> $\Omega = 2, \alpha = 0.8$ e $i_1 = 80$ <b>c)</b> y <b>d)</b> $\Omega = 3.2, \alpha = 0.004$ e $i_1 = 80$ . . . . .	44
4.12. Secciones de Poincaré con $i_1 = 2.5, i_0 = 0$ y $\Omega, \alpha$ <b>a)</b> $\Omega = 0.82, \alpha = 0.1$ <b>b)</b> $\Omega = 0.32, \alpha = 0.07$ <b>c)</b> $\Omega = 0.12, \alpha = 0.23$ <b>d)</b> $\Omega = 0.32, \alpha = 0.3$ . . .	46
4.13. Divergencia de trayectorias infinitesimalmente cercanas ( $10^{-6}$ ) con $i_1 = 2.5, i_0 = 0, \Omega, \alpha$ <b>a)</b> $\Omega = 0.82, \alpha = 0.1$ <b>b)</b> $\Omega = 0.32, \alpha = 0.07$ <b>c)</b> $\Omega = 0.12, \alpha = 0.23$ <b>d)</b> $\Omega = 0.32, \alpha = 0.32$ . . . . .	48
4.14. Secciones de Poincaré correspondientes al arreglo de 3 juntas Josephson en serie con $i_0 = 0, \Omega = 0.82, i_1 = 2.5$ y $\alpha = 0.1$ . Las gráficas <b>a)</b> , <b>b)</b> y <b>c)</b> tienen constante de acoplo $\sigma = 0.1$ mientras que la <b>d)</b> tiene un valor $\sigma = 0.6$ . Se grafica <b>a)</b> $\dot{\theta}_1$ vs $\theta_1$ <b>b)</b> $\dot{\theta}_2$ vs $\theta_2$ <b>c)</b> $\dot{\theta}_3$ vs $\theta_3$ <b>d)</b> $\dot{\theta}_1$ vs $\theta_1$ .	49
4.15. Separación de trayectorias infinitesimalmente cercanas correspondientes al arreglo de 3 juntas Josephson en serie con $i_0 = 0, \Omega = 0.82, i_1 = 2.5, \alpha = 0.1$ y separación inicial de $10^{-6}$ . Las gráficas <b>a)</b> , <b>b)</b> y <b>c)</b> tienen constante de acoplo $\sigma = 0.1$ mientras que la <b>d)</b> tiene un valor $\sigma = 0.6$ .	51

# Índice de tablas

4.1. Exponentes de Lyapunov, dimensiones de kaplan-Yorke (d), entropía de Kolmogorov (K) y tiempo de separación (T) correspondientes a las gráficas de la Figura 4.12 . . . . .	47
A.1. Constantes para el método Cash-Karp. . . . .	55

## Resumen

En los últimos años, las aplicaciones de la superconductividad se han extendido notablemente gracias a la juntura Josephson. Esta juntura es una unión formada por dos películas superconductoras separadas por un material aislante que se utiliza, entre otras muchas aplicaciones, para definir “estándares” de voltaje en física y encriptar imágenes en sistemas de telecomunicaciones. El correcto funcionamiento de cada una de estas dos aplicaciones depende de los valores de ciertos parámetros propios de la juntura, valores que definen un espacio de parámetros donde cada punto de este espacio determina propiedades dinámicas distintas en el sistema. Cuando la dinámica es no caótica, la juntura permite establecer voltajes constantes -que son los utilizados como estándares de voltaje-, mientras que cuando la dinámica es caótica, la juntura permite definir mecanismos de encriptación. Para clasificar la dinámica caótica y no caótica de distintas zonas del espacio de parámetros hemos utilizado los exponentes de Lyapunov, mediante los cuales hemos encontramos zonas que producen voltajes constantes y zonas que producen una dinámica caótica que, además, hemos caracterizamos mediante la entropía de Kolmogorov y la dimensión de Kaplan-Yorke. Algunos de los resultados obtenidos reproducen observaciones previamente establecidas en la literatura.

## Abstract

In the past years, many applications of superconductivity have been developed thanks to the Josephson junction. This junction is a union formed by two superconducting films separated by an insulating material that is used, among many other applications, to define voltage “standards” in physics and to encrypt images in telecommunication systems. The correct operation of these two applications depends on the values of certain parameters of the junction, values that define a parameter space where each point of this space causes different dynamic properties of the system. When the dynamic is non-chaotic, the junction allows to establish constant voltages -which are used as voltage standards-, while when the dynamic is chaotic, the junction allows to define encryption mechanisms. To classify the chaotic and non-chaotic dynamics for different zones in the parameter space we have used the Lyapunov exponents, through which we have found zones that produce constant voltages and zones that produces chaotic dynamics that, in addition, we have characterized through the Kolmogorov entropy and the Kaplan-Yorke dimension. Some of the results obtained reproduce previously observations established in the literature.

# Capítulo 1

## Introducción

En este capítulo se presentan conceptos relevantes de la juntura Josephson, sus aplicaciones más importantes y los materiales con los que se fabrica. Además, se presenta el modelo de Stewart-McCumber, que describe la dinámica de esta juntura y que será utilizado en este estudio.

### 1.1. Juntura Josephson

La superconductividad fue descubierta experimentalmente por Heike Kamerlingh Onnes en 1911 [1]. Kamerlingh observó que la resistencia eléctrica del mercurio desaparecía a la temperatura de  $4K$  [1, 2], fenómeno que se explica hoy en día mediante la teoría de Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS) [3]. Esta teoría establece que en los superconductores se forman los llamados pares de Cooper, que son dos electrones ligeramente ligados con espín entero. Al ser partículas de espín entero, son bosones y forman el condensado de Bose-Einstein cuando se encuentran a temperaturas cercanas a  $0K$ . Mediante estos pares de Cooper, la teoría BCS logra explicar fenómenos experimentales observados de la superconductividad como la resistencia eléctrica nula, el gap de energía en la energía de Fermi y la cuantización de flujo de corriente eléctrica[3].

En 1962 B. D Josephson predijo que podría existir una corriente neta de pares de Cooper entre dos películas delgadas superconductoras separadas por un material aislante [4]. Este fenómeno fue observado experimentalmente por Shapiro en 1963 [5] y hoy en día es llamado el “Efecto Josephson”.

El sistema en el que se produce el efecto Josephson, es decir, el sistema formado por dos películas delgadas superconductoras separadas por un material aislante, se conoce como juntura Josephson (Fig 1.1). Este tipo de junturas se utilizan en aplicaciones como los superconductores de interferencia cuántica (SQUID por sus siglas en inglés) [6, 7, 8], los estándares de voltaje [9], los convertidores analógico/digital [10, 11], las computadoras cuánticas [12, 13] y la encriptación de imágenes [14]. De todas las aplicaciones mencionadas, en este trabajo nos enfocaremos en los estándares de voltaje y en la encriptación de imágenes, aplicaciones que se detallarán más adelante.

Un estándar de voltaje es un valor de voltaje que sirve como referencia para calibrar varios tipos de dispositivos, como voltímetros o diodos Zener. El uso de las junturas Josephson en estándares de voltaje es posible porque al ser irradiadas con microondas

de alta frecuencia, entre 70 y 100  $GHz$ , producen voltajes constantes y muy estables conocidos como “bloqueos de fase” (que son los utilizados para calibrar dispositivos electrónicos [9]). Estos bloqueos de fase son directamente proporcionales a la frecuencia de las microondas con las que se irradia al sistema, por lo que la precisión de estos bloqueos depende de la precisión de dicha frecuencia. Actualmente, la frecuencia de las microondas puede ser controlada con gran precisión mediante un contador de frecuencias referenciado a un reloj atómico [9]. Por esta razón, los estándares de voltaje basados en junturas Josephson proveen una alta precisión (de alrededor de  $10nV$  [15]) a la hora de calibrar aparatos electrónicos.

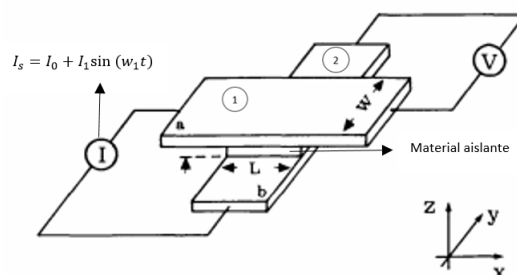


Figura 1.1: Juntura Josephson formada por dos películas superconductoras a, b y un material aislante.  $L$  y  $W$  son las dimensiones de la juntura

Una juntura Josephson produce voltajes del orden de los milivoltios, cuando la mayoría de los voltajes utilizados en ciencia son del orden de los voltios. Esto hace que una sola juntura no sea útil para establecer estándares de voltaje. Lo que se hace es montar arreglos de  $n$ -junturas Josephson, mediante los cuales si se obtiene bloqueos de fase en el orden de los voltios[16].

El uso de las junturas Josephson en estándares de voltaje ha sido posible gracias a Shapiro, Steward y McCumber. Shapiro fue el primero en observar bloqueos de fase en la juntura [5], mientras que Steward y McCumber proporcionaron la ecuación (se obtendrá en la siguiente sección) que describe el comportamiento de la juntura [17, 18]. La ecuación mencionada depende de varios parámetros, es no lineal y no se conoce una solución exacta para ella. Sin embargo, mediante esta ecuación se puede reproducir computacionalmente las observaciones de Shapiro.

La reproducibilidad de las observaciones de Shapiro está limitada al valor de los parámetros que él usó en la ecuación de Steward-McCumber. En 1980, Huberman, utilizando valores diferentes, observó una dinámica caótica (caos) en la juntura Josephson [19]. Esta dinámica se caracteriza por la sensibilidad a las condiciones iniciales y la aparente aleatoriedad de la evolución temporal del voltaje.

La dinámica caótica de este sistema (y de sistemas similares) está actualmente siendo utilizada para encriptar imágenes [20, 21]. Esto se realiza “contaminando” los datos de la imagen con datos caóticos obtenidos del sistema. De esta forma se obtiene una nueva imagen, en donde no se pueden identificar patrones debido al carácter aleatorio de los datos que se agregaron a la imagen original. Posteriormente, la imagen se descrypta quitando los datos caóticos [21].

Hasta este punto hemos revisado las dos aplicaciones de las junturas Josephson que se estudian en este trabajo. A continuación revisaremos los inconvenientes que se

presentan al usar la juntura Josephson en cada una de las dos aplicaciones. Dichos inconvenientes aparecen por las diferentes propiedades dinámicas que presenta la juntura, propiedades que dependen del valor de los parámetros usados en la ecuación de Steward-McCumber. Se ha observado que para los valores de los parámetros que dan soluciones caóticas, e incluso para algunos que dan soluciones no caóticas, los bloqueos de fase no aparecen ni para una ni para  $n$ -junturas [16]. Esto implica que no todos los valores de los parámetros son útiles para estándares de voltaje. Por otra parte, los valores de los parámetros que dan soluciones no caóticas no pueden ser usados en encriptación de imágenes, porque la falta de aleatoriedad permitiría que la imagen pueda ser descifrada fácilmente[21]. Es evidente, por tanto, que el valor de los parámetros de la juntura juega un papel fundamental en sus aplicaciones. No se conoce *a priori* qué conjunto de parámetros “sirve” para una aplicación u otra, por lo que se hace necesario un estudio del espacio de parámetros de la juntura.

### 1.1.1. Fabricación

La fabricación de las junturas Josephson (para sus diferentes aplicaciones) se hace con distintos materiales. Lo importante es que las películas delgadas se fabriquen de un material superconductor y que el material que separa las películas superconductoras sea un aislante a temperaturas cercanas a  $0K$ . Dependiendo de los materiales que se escoja y de las dimensiones con las que se realice la juntura, la dinámica de este sistema cambia, porque sus parámetros cambian [16].

En este trabajo, con el fin limitar el rango de parámetros a estudiar, se toma como referencia la juntura cuyas películas superconductoras están formadas por  $Nb$ , usualmente utilizado por su durabilidad y estabilidad química [11]. Por otra parte, el material que separa las dos películas superconductoras se toma como  $Al_2O_3$ . De esta forma, se tiene una configuración superconductor/ aislante/ superconductor, SIS por sus siglas en inglés. La configuración final de la juntura es  $Nb/Al_2O_3/Nb$  [22], que es conocida como juntura poco-amortiguada [9, 23] y cuyo rango de parámetros se utiliza en este trabajo.

## 1.2. Modelo de Steward-McCumber

El modelo de Steward-McCumber trata la juntura Josephson como un circuito en paralelo que consta de una fuente de corriente, una resistencia, un capacitor y un elemento Josephson [17, 18]. En la Fig 1.2, que corresponde al circuito del modelo de Steward-McCumber, la fuente de corriente se representa con una flecha y el elemento Josephson con una espira dentro de un círculo. Este circuito tiene esta forma porque se ha observado que en la juntura Josephson circulan tres corrientes diferentes, que circularían por la resistencia, el capacitor y el elemento Josephson [17]. Cabe mencionar que el circuito de la Fig 1.2 se obtiene del esquema presentado en la Fig 1.1.

En la Fig 1.2, la corriente  $I_s$  representa la corriente total suministrada a la juntura. Esta corriente total se compone de dos corrientes, una corriente que se genera por las microondas de alta frecuencia con las que se irradia a la juntura y una corriente

constante que se genera por una fuente de corriente aplicada a la juntura. Estas dos corrientes son parte de la configuración experimental de la juntura Josephson mediante la que se han observado bloqueos de fase.

Dentro del modelo de Steward-McCumber, la corriente generada por las microondas se modela mediante una corriente sinusoidal de amplitud  $I_1$  y frecuencia  $w_1$ , es decir,  $I_1 \sin(w_1 t)$ . Por otra parte, la fuente de corriente aplicada se modela como una corriente constante  $I_0$ . Así, la corriente total es

$$I_s = I_0 + I_1 \sin(w_1 t). \quad (1.1)$$

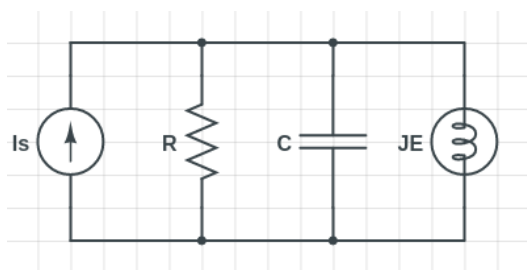


Figura 1.2: Circuito asociado al modelo de Steward-McCumber. La flecha representa una fuente de corriente, mientras que la espira dentro de un círculo representa el elemento Josephson

La corriente  $I_s$  tiene que ser igual a la suma de las tres corrientes que circulan por la juntura, corrientes que se detallan a continuación.

### 1.2.1. Corriente de cuasi-partículas

El enlace que une dos electrones para formar pares de Cooper en las películas superconductoras es muy débil, y se puede romper debido a pequeñas perturbaciones. Este hecho hace que existan electrones que en ocasiones estén ligados a un par de Cooper y en ocasiones no lo estén. A estos electrones se les llama cuasi-partículas, y se ha observado que pueden pasar de una película superconductora a otra, generando así una corriente de cuasi-partículas. Se ha demostrado teóricamente que la corriente de cuasi-partículas sigue la ley de Ohm [24],

$$I_q = \frac{V}{R}, \quad (1.2)$$

donde  $I_q$  es la corriente de cuasi-partículas,  $V$  es el voltaje en la juntura y  $R$  es una resistencia que depende de los materiales y de las dimensiones de la juntura [16].

### 1.2.2. Corriente de capacitancia

La configuración de la juntura Josephson (superconductor / aislante / superconductor) es similar a la de un capacitor (conductor / aislante / conductor) en donde se han reemplazado las láminas conductoras por láminas superconductoras. Esto implica



que existe una corriente de capacitancia en la juntura Josephson [17, 24], de manera que

$$I_{Ca} = C \frac{dV}{dt}, \quad (1.3)$$

donde  $I_{Ca}$  es la corriente de capacitancia,  $V$  es el voltaje en la juntura y  $C$  es la capacitancia que depende de los materiales y de las dimensiones de la juntura[16].

### 1.2.3. Corriente de pares de Cooper

Como ya ha sido mencionado, B.D Josephson descubrió que puede existir un paso de pares de Cooper (corriente de pares de Cooper) entre las películas superconductoras que conforman la juntura Josephson. Esta corriente está descrita por las ecuaciones de Josephson

$$I_j = I_c \sin(\theta), \quad (1.4)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{2eV}{\hbar}, \quad (1.5)$$

donde  $V$  es el voltaje en la juntura,  $I_j$  es la corriente de pares de Cooper,  $I_c$  es la corriente máxima de pares de Cooper (comúnmente llamada corriente crítica) que depende de los materiales de la juntura [24] y  $\theta$  es la diferencia de las fases de las funciones de onda correspondientes a las películas superconductoras [25]. La derivación de estas ecuaciones se encuentra en las referencias [4, 24, 25].

Las ecuaciones de Josephson, 1.4 y 1.5, son la base para el estudio de la juntura Josephson. La Ec 1.4 implica la existencia de una corriente no lineal que provoca la dinámica caótica de la juntura. Por otra parte, la Ec 1.5 establece una relación entre la diferencia de fases y el voltaje que, como se verá a continuación, ayuda a relacionar las corrientes en el modelo de Steward-McCumber.

### 1.2.4. Ecuación del modelo

Las tres corrientes en la juntura Josephson son la corriente de cuasipartículas, la corriente de capacitancia y la corriente de pares de Cooper. Estas tres corrientes, en el circuito de la Fig 1.2, pasan por la resistencia, el capacitor y el elemento Josephson, respectivamente.

El circuito de la Fig 1.2 permite relacionar las tres corrientes ya mencionadas con la corriente  $I_s$ , siendo esta última la suma de las tres anteriores  $I_s = I_j + I_{Ca} + I_q$ . Reemplazando las ecuaciones 1.1, 1.2, 1.3 y 1.4 en la suma de corrientes anterior, se obtiene:

$$I_0 + I_1 \sin(w_1 t) = I_c \sin(\theta) + C \frac{dV}{dt} + \frac{V}{R}. \quad (1.6)$$

Al substituir la Ec 1.5 en la Ec 1.6, la ecuación resultante es:

$$I_0 + I_1 \sin(w_1 t) = I_c \sin(\theta) + \frac{\hbar C}{2e} \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{\hbar}{2eR} \frac{d\theta}{dt}, \quad (1.7)$$

llamada ecuación de Steward-McCumber. Esta ecuación describe la dinámica de la juntura Josephson, es no lineal, y depende de los parámetros  $R$ ,  $C$ ,  $I_0$ ,  $I_1$ ,  $w_1$ ,  $\hbar$  y  $e$ .

### 1.3. Adimensionalización de la ecuación

La ecuación que describe a la juntura Josephson (Ec 1.7) depende de parámetros como  $\hbar$  y  $e$ , cuyos valores son muy pequeños. Para evitar trabajar con tales valores se opta por adimensionalizar la ecuación. Para hacerlo se introduce un tiempo adimensional definido por  $\tau = \omega_0 t$ , donde  $\omega_0$  es una frecuencia que tiene unidades de  $s^{-1}$ . Con el fin de reescribir la ecuación de manera adimensional, se definen los siguientes parámetros:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2eI_c}{\hbar C}}, \quad (1.8)$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{\hbar}{2eI_c R^2 C}}. \quad (1.9)$$

$$\Omega = \frac{w_1}{\omega_0}, \quad (1.10)$$

$$i_0 = \frac{I_0}{I_c}, \quad (1.11)$$

$$i_1 = \frac{I_1}{I_c}, \quad (1.12)$$

que se obtienen en el proceso de adimensionalización.

Finalmente, la ecuación, reescrita de forma adimensional y con los parámetros antes mencionados, es:

$$\ddot{\theta} + \alpha\dot{\theta} + \sin(\theta) = i_0 + i_1 \sin(\Omega\tau), \quad (1.13)$$

donde los puntos sobre  $\theta$  denotan una derivada temporal adimensional ( $\dot{\theta} = d\theta/d\tau$ ). Esta ecuación es no lineal debido a la presencia del  $\sin(\theta)$  y de  $\sin(\Omega\tau)$ . Además, depende de los parámetros  $i_0$ ,  $i_1$ ,  $\alpha$  y  $\Omega$ , que conforman el espacio de parámetros a estudiar en este trabajo. Dependiendo de las coordenadas dentro de este espacio de parámetros, la juntura presenta distintas propiedades dinámicas [16, 19].

Por otra parte, la Ec 1.5 se relaciona directamente con el voltaje. Esta ecuación sirve para relacionar la ecuación del modelo de Steward-McCumber con el voltaje. Por esta razón, se presenta la Ec 1.5 en forma adimensional,

$$v = \frac{2eV}{\omega_0 \hbar}, \quad (1.14)$$

donde  $v = \dot{\theta}$  es el voltaje adimensional.

### 1.4. N-junturas

Para obtener voltajes más altos en comparación a los que se obtiene con una sola juntura Josephson, estudiaremos arreglos de  $n$ -junturas Josephson en serie (Fig 4.11). Específicamente estudiamos estos arreglos porque se ha observado que el voltaje de cada juntura (en el arreglo) se suma y puede generar un voltaje en el orden de los voltios[16].

Los arreglos de  $n$ -junturas en serie se suelen colocar sobre un transmisor de microondas que tiene una resistencia propia ( $R_L$ ) [11, 26]. Esta resistencia atenúa la transmisión de las microondas con las que se irradia al sistema y también la transmisión de la corriente  $i_0$ . Tomando esto en cuenta, el circuito correspondiente al arreglo de  $n$ -junturas Josephson, dentro del modelo de Steward-McCumber, es el mostrado en la Fig 1.3. Con el fin de simplificar un poco el análisis, se toman junturas idénticas.

En el circuito mostrado en la Fig 1.3, la corriente  $I_s$  se divide en dos, la corriente  $I_{juntura}$  que pasa por las junturas Josephson y la corriente  $I_L$  que pasa por la resistencia  $R_L$ , de modo que,

$$I_0 + I_1 \sin(\omega t) = I_{juntura} + I_L. \quad (1.15)$$

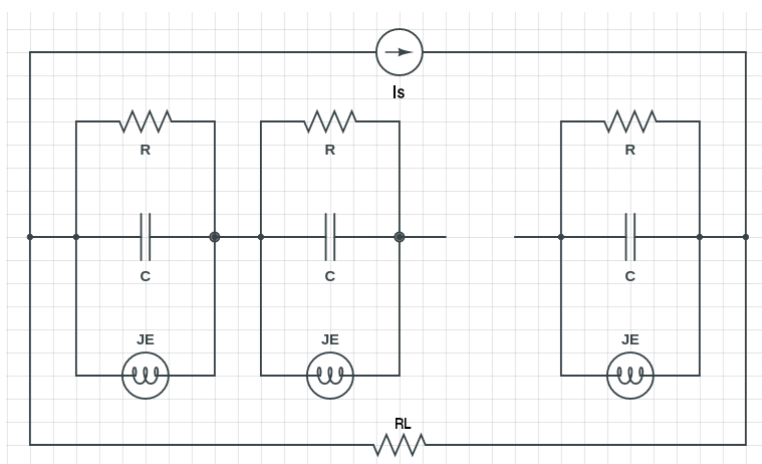


Figura 1.3: Arreglo de N-Junturas Josephson

La corriente en cada juntura del arreglo es similar a la que pasa por una sola juntura, es decir, se compone de tres corrientes: la de pares de Cooper, la de capacitancia y la de cuasi-partículas. Por esta razón, en cada juntura del arreglo, la corriente tiene la forma

$$I_{juntura} = I_c \sin(\theta_k) + \frac{\hbar C}{2e} \frac{d^2 \theta_k}{dt^2} + \frac{\hbar}{2eR} \frac{d\theta_k}{dt}, \quad (1.16)$$

donde el subíndice  $k$  denota la  $k$ -ésima juntura Josephson en el arreglo y  $k = 1, 2, \dots, n$ .

El voltaje en las  $n$ -junturas es igual al voltaje en la resistencia  $R_L$ . Así, se tiene que,

$$V_L = \sum_{k=1}^n V_k, \quad (1.17)$$

donde  $V_L = I_L R_L$  es el voltaje en la resistencia y  $V_k$  es el voltaje en la  $k$ -ésima juntura.

Finalmente, reemplazando las corrientes  $I_{juntura}$  e  $I_L$  en la Ec 1.15, se obtiene una ecuación que describe el comportamiento de la  $k$ -ésima juntura del arreglo de  $n$ -junturas,

$$I_0 + I_1 \sin(\omega t) = I_c \sin(\theta_k) + \frac{\hbar C}{2e} \frac{d^2 \theta_k}{dt^2} + \frac{\hbar}{2eR} \frac{d\theta_k}{dt} + \frac{\hbar}{2eR_L} \sum_{k=1}^n \frac{d\theta_k}{dt}. \quad (1.18)$$

De manera adimensional, la ecuación no lineal resultante es

$$\ddot{\theta}_k + \alpha \dot{\theta}_k + \alpha \sigma \sum_{k=1}^n \dot{\theta}_k + \sin(\theta_k) = i_0 + i_1 \sin(\Omega \tau), \quad (1.19)$$

donde  $\sigma$  es  $R/R_L$  y los parámetros  $\alpha$ ,  $i_0$ ,  $i_1$ ,  $\Omega$ , cumplen las mismas relaciones que para una sola juntura.

Las ecuaciones no lineales, obtenidas tanto para una juntura (Ec 1.13) como para  $n$ -junturas (Ec 1.19), suelen ser estudiadas mediante los exponentes de Lyapunov [27, 28, 29]. Estos exponentes son una medida del grado de caoticidad presente en un sistema [28, 30]. El mayor de los exponentes de Lyapunov se suele usar para determinar si el sistema se encuentra o no en una región caótica. Los demás exponentes pueden ser usados para determinar la dimensión de las soluciones [21], la entropía de Kolmogorov [31] y el tiempo de predicción de un sistema [32]. Los valores de la dimensión y de la entropía determinan si un sistema es útil o no en encriptación [21]. Con este contexto, los exponentes de Lyapunov servirán, en este trabajo, para estudiar y caracterizar la dinámica de la juntura Josephson, razón por la cual, en el Capítulo 2 se presentará una discusión más amplia.

## 1.5. Motivación y objetivo

La motivación para estudiar las junturas Josephson es que tienen gran aplicación en diversas ciencias, como la física [11], la medicina [6], la metrología [33] y la criptografía [21]. En la metrología se usan junturas Josephson como estándares de voltaje. Estos estándares han ayudado a mejorar significativamente la precisión de medidas experimentales de voltaje, lo que ha resultado muy importante en ciencia actual [33]. Por otra parte, en criptografía, se usan junturas Josephson para encriptar imágenes haciendo uso del caos en la juntura. Este caos hace posible una encriptación difícil de descifrar [21], razón por la cual, la juntura Josephson ha permitido un incremento en la seguridad de la transmisión de imágenes a través de internet. El uso de la juntura en estas aplicaciones, y su uso en diversas ramas de la ciencia, demuestra la utilidad de la misma.

El objetivo de este trabajo de titulación es estudiar los exponentes de Lyapunov correspondientes tanto a una juntura como a arreglos de  $n$ -junturas Josephson, para determinar conjuntos de parámetros que puedan ser utilizados en estándares de voltaje o en encriptación de imágenes. Para cumplir este objetivo, desarrollaremos un algoritmo numérico que nos permita calcular los exponentes de Lyapunov computacionalmente. El valor de estos exponentes nos permitirá diferenciar entre conjuntos de parámetros asociados a un comportamiento caótico de la juntura y conjuntos de parámetros asociados a un comportamiento no caótico. Se espera que al estudiar estos dos comportamientos obtengamos conjuntos de parámetros útiles en estándares de voltaje o en encriptación de imágenes.

Cabe mencionar que no hemos encontrado bibliografía correspondiente al estudio del espacio de parámetros mediante los exponentes de Lyapunov. Por esta razón, en

este trabajo de titulación, presentamos dicho estudio como una forma alternativa de estudiar el espacio de parámetros de la juntura Josephson.

## 1.6. Outline

Este trabajo de titulación está organizado de la siguiente manera. En el [Capítulo 2](#) se hace una revisión de conceptos importantes sobre los sistemas dinámicos. Se explicará los tipos de soluciones que se pueden encontrar en un sistema dinámico, la sección de Poincaré y toda la teoría necesaria para calcular los exponentes de Lyapunov computacionalmente. En el [Capítulo 3](#) se usa los exponentes de Lyapunov para determinar las posibles regiones útiles para los estándares de voltaje y la encriptación de imágenes. El [Capítulo 4](#) presenta los resultados de este estudio, que incluyen algunas regiones de parámetros para las que se obtiene bloqueos de fase y algunas regiones de parámetros que dan soluciones caóticas. Finalmente, en el [Capítulo 5](#), se presentan las conclusiones de este trabajo.

# Capítulo 2

## Sistemas dinámicos

Este capítulo expone varios conceptos importantes sobre los sistemas dinámicos, conceptos necesarios para entender la dinámica de la juntura Josephson. También se expone la teoría necesaria para desarrollar un código computacional capaz de calcular los exponentes de Lyapunov. Estos exponentes y la teoría desarrollada en este capítulo se utilizarán en los capítulos posteriores para estudiar a la juntura Josephson como sistema dinámico. De esta forma, seremos capaces de cumplir con los objetivos planteados en el primer capítulo.

### 2.1. Sistemas dinámicos

Un sistema dinámico es un sistema en el que sus estados temporales evolucionan de acuerdo a ecuaciones fijas que determinan cómo el sistema va de un estado a otro. Los sistemas dinámicos continuos vienen definidos por un sistema de ecuaciones diferenciales de la forma,

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{F}(x_1, \dots, x_n, t), \quad (2.1)$$

y son, usualmente, llamados flujos. En la [Ec 2.1](#),  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  es un vector de dimensión  $n$  que contiene las variables del sistema en un instante de tiempo  $t$  y  $\mathbf{F}(x_1, \dots, x_n, t) \in \mathbb{R}^n$  es un campo vectorial que determina cómo cambian las variables del sistema en el tiempo.

Un sistema dinámico como el mostrado en la [Ec 2.1](#) es un sistema dinámico no-autónomo porque  $\mathbf{F}$  depende explícitamente del tiempo. Un sistema de este tipo puede ser escrito como un sistema autónomo (sin dependencia temporal explícita) agregando una dimensión extra,  $\theta = \Omega t$ , donde  $\theta$  es la nueva variable (adimensional) y  $\Omega$  juega el papel de una frecuencia. De este modo, se aumenta en una ecuación el sistema, y el campo vectorial pasa a depender de  $\theta$ , es decir,  $\mathbf{F}(x_1, \dots, x_n, \theta) \in \mathbb{R}^{n+1}$ . Esto se menciona porque, como se verá a continuación, el sistema dinámico que describe a la juntura Josephson es no-autónomo.

El ya mencionado sistema dinámico de la juntura Josephson se puede obtener a partir de la ecuación,

$$\ddot{\theta} + \alpha \dot{\theta} + \sin(\theta) = i_0 + i_1 \sin(\Omega \tau), \quad (2.2)$$

que proviene del modelo de Steward-McCumber revisado en el [Capítulo 1](#). En primera instancia, se va a introducir dos variables,  $x_1 = \theta$  y  $x_2 = \dot{\theta}$ . Es evidente que  $\dot{x}_1$  es igual a  $x_2$ . Esta igualdad ( $\dot{x}_1 = x_2$ ) constituye la primera ecuación del sistema dinámico. Por otra parte, al despejar  $\dot{x}_2$  de [Ec 2.2](#) se obtiene  $\dot{x}_2 = i_0 + i_1 \sin(\Omega\tau) - \alpha x_2 - \sin(x_1)$ , que es la segunda ecuación del sistema dinámico. Estas dos ecuaciones conforman un sistema dinámico no autónomo. Para volverlo autónomo, se introduce una tercera variable,  $x_3 = \Omega\tau$ . De esta forma, se obtiene el siguiente sistema dinámico autónomo

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = i_0 + i_1 \sin(x_3) - \alpha x_2 - \sin(x_1), \\ \dot{x}_3 = \Omega, \end{cases} \quad (2.3)$$

que describe la dinámica de una sola junta. Cabe mencionar que  $x_2$  y  $x_3$  están dentro de una función seno, por lo que ambas variables pueden estar acotadas por cualquier intervalo de tamaño  $2\pi$ , por ejemplo  $[-\pi, \pi]$ . Esto implica que este sistema dinámico está acotado en  $x_2$  y  $x_3$ .

### 2.1.1. Atractores

Todo sistema dinámico sigue una trayectoria ( $\mathbf{x}(t)$ ) en el espacio de fases. Esta trayectoria, al cabo de un tiempo  $t$  lo suficientemente grande, evoluciona hacia un subconjunto de puntos del espacio de fases, conocido como atractor[30]. Estos atractores pueden ser un punto, un ciclo límite, o un atractor extraño. Cuando el atractor es un punto, la trayectoria evoluciona hacia un estado único. Se dice que el atractor es un ciclo límite cuando la trayectoria evoluciona hacia órbitas periódicas en el espacio de fases (ciclos), sin importar la forma de esta órbita. Finalmente, se tiene un atractor extraño cuando la trayectoria aparenta ser aleatoria y no se observa un periodo en ella, es decir, un atractor extraño es un subconjunto de puntos que tienen un carácter aleatorio.

Por otra parte, toda trayectoria  $\mathbf{x}(t)$  comienza con un transiente, que es el comportamiento de la trayectoria durante el intervalo de tiempo de va desde  $t=0$  hasta el instante en el que la trayectoria “cae” en el atractor. Una vez alcanzado el atractor, cualquiera que este sea, la trayectoria se queda en el atractor para  $t \rightarrow \infty$ . Cabe mencionar que, en este trabajo, muchas veces eliminaremos el transiente con el fin de trabajar únicamente con trayectorias que ya han “caído en el atractor”.

### 2.1.2. Sistema caótico

Se dice que un sistema es caótico cuando dicho sistema está acotado, presenta bifurcaciones y, para algunos valores de sus parámetros, tiene sensibilidad a las condiciones iniciales [34]. La sensibilidad a las condiciones iniciales significa que dos trayectorias, con condiciones iniciales infinitesimalmente cercanas, divergen exponencialmente. Por otra parte, que el sistema esté acotado significa que ninguna de las variables del sistema dinámico pueden tomar valores infinitos. Finalmente, que el sistema presente bifurcaciones significa que, al variar el valor de algún parámetro, se duplica el número de atractores del sistema. De todas las propiedades mencionadas, la más relevante para

este trabajo es la sensibilidad a las condiciones iniciales, porque está estrechamente relacionada con los exponentes de Lyapunov y es la que nos interesa en física por el tema de la predictibilidad.

### 2.1.3. Solución de sistemas dinámicos

Encontrar la solución de cualquier sistema dinámico significa encontrar la solución de su sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (ODE) de primer orden asociado. Dicho sistema de ecuaciones diferenciales, en sistemas caóticos, es un sistema de al menos tres ecuaciones que presentan no linealidad (como el sistema dinámico de la Juntura Josephson). Las ecuaciones no lineales dificultan encontrar soluciones teóricas del sistema dinámico, por lo que, para hallar soluciones de este tipo de sistemas, usualmente se utilizan algoritmos computacionales. Uno de los algoritmos más utilizados y el que se va a utilizar en este trabajo, es el Runge-Kutta Cash-Karp. Más detalles acerca de este Runge-Kutta y de su algoritmo se presentan en el [Apéndice A](#).

## 2.2. Exponentes de Lyapunov

Los exponentes de Lyapunov fueron introducidos en 1907 por Alexandre Lyapunov como una forma de estudio de sistemas dinámicos [35]. Estos exponentes son una medida de la separación de trayectorias con condiciones iniciales infinitesimalmente cercanas.

En sistemas de una dimensión, la idea de los exponentes de Lyapunov es fácil de entender. Para explicarla, usamos dos trayectorias con condiciones iniciales infinitesimalmente cercanas  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$ . A partir de ambas trayectorias definimos la “función de separación” (denotada por  $|z(t)|$ ) como el valor absoluto de la diferencia entre las dos trayectorias, es decir,  $|z(t)| = |x_2(t) - x_1(t)|$ . Esta función de separación es infinitesimal en  $t = 0$ , pero no necesariamente lo es para todo  $t$ . De hecho, se ha observado que al avanzar el tiempo  $t$ , la función de separación tiene un comportamiento exponencial [27], es decir,  $|z(t)| \approx e^{\lambda t} |z(0)|$ , donde  $\lambda$  es el exponente de Lyapunov. Dicho exponente se puede calcular mediante

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{|z(0)| \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln \frac{|z(t)|}{|z(0)|}, \quad (2.4)$$

y dependiendo de su valor, las trayectorias convergen o divergen más deprisa o menos deprisa, o su separación se mantiene constante. Por esta razón, a los exponentes de Lyapunov se los considera una medida de la separación de las trayectorias con condiciones infinitesimalmente cercanas. La existencia de los límites presentados en la [Ec 2.4](#) fue demostrada por Valery Oseledets [36].

A partir de la [Ec 2.4](#) se puede deducir que si  $\lambda$  es negativo, las trayectorias tienden a converger exponencialmente, mientras que si  $\lambda$  es positivo, las trayectorias tienden a divergir exponencialmente. Recordemos que las trayectorias que divergen exponencialmente están ligadas a soluciones caóticas, por lo que los exponentes de Lyapunov sirven para caracterizar soluciones caóticas de un sistema dinámico: si  $\lambda$  es positivo, la solución es caótica, mientras que si es negativo, es no caótica. Esta característica de los exponentes de Lyapunov es la razón principal por la cual los usamos en este trabajo.



En un sistema de una dimensión, se sobreentiende, existe solo un exponente de Lyapunov, mientras que para un sistema de  $n$  dimensiones, existen  $n$  exponentes de Lyapunov, uno por cada dimensión del sistema [37]. Estos  $n$  exponentes de Lyapunov definen el *espectro de Lyapunov*, que no es más que el conjunto formado por los  $n$  exponentes, es decir,  $\{\lambda_i\}$  con  $i = 1, 2, \dots, n$ . Dicho espectro es el que se pretende calcular en este trabajo.

Para proceder con el estudio de los  $n$  exponentes de Lyapunov de un sistema  $n$ -dimensional, introducimos dos definiciones: “vectores de separación” y “volumen de separación  $p$ -dimensional”. Los vectores de separación se definen como la resta de dos trayectorias con condiciones iniciales infinitesimalmente cercanas ( $\mathbf{x}_1(t) \in \mathbb{R}^n$  y  $\mathbf{x}_2(t) \in \mathbb{R}^n$ ):  $\mathbf{z}(t) = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$ , donde  $\mathbf{z}(t) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de separación. Por otra parte, el volumen de separación  $p$ -dimensional se define como el volumen del paralelogramo  $p$ -dimensional formado por  $p$  vectores de separación, y se denota por  $vol_p(t)$ , con  $p \leq n$ . Ejemplos de vectores de separación y de volúmenes de separación (asociados a un sistema de dimensión  $n = 3$ ) se muestran en la Fig 2.1. En la Fig 2.1 a) podemos observar un volumen de separación 3-dimensional formado por 3 vectores de separación, mientras que en la Fig 2.1 b) podemos observar un volumen de separación 2-dimensional formado por dos vectores de separación.

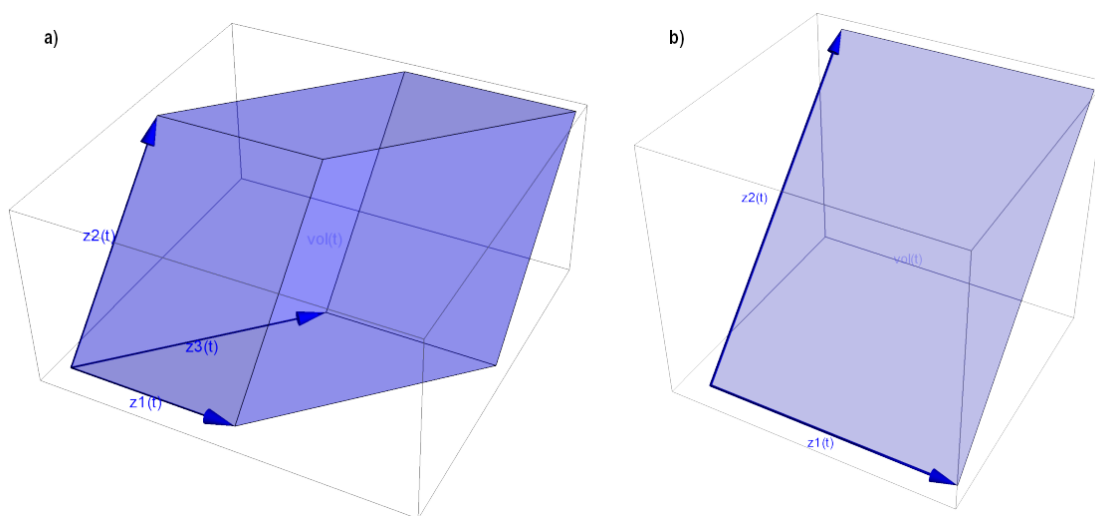


Figura 2.1: Volúmenes de separación  $p$ -dimensionales de un sistema dinámico de dimensión  $n = 3$  a)  $p = 3$  b)  $p = 2$

El volumen de separación se introduce como una forma de estudio del espectro de Lyapunov, porque, como se verá más adelante, los exponentes de Lyapunov y el volumen de separación tienen una relación directa. La relación mencionada es similar a la que existe entre la función de separación y el único exponente de Lyapunov en un sistema de una dimensión. Por otra parte, los vectores de separación son útiles a la hora de estudiar los volúmenes de separación matemáticamente.

### 2.2.1. Evolución de los volúmenes de separación

El volumen de separación  $p$ -dimensional, según Shimada [31] y Benettin [38], tiene un comportamiento exponencial relacionado con los  $p$  mayores exponentes de Lyapunov (de un sistema  $n$ -dimensional), es decir,  $vol_p(t) = e^{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_p} vol_p(0)$ . Se debe notar que para que la ecuación sea correcta, el espectro de Lyapunov debe ordenarse de mayor a menor ( $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ ). De esta forma, la suma de los  $p$  mayores exponentes de Lyapunov se puede calcular mediante

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{vol_p(0) \rightarrow 0} \ln \frac{vol_p(t)}{vol_p(0)}, \quad (2.5)$$

que es análoga a la Ec 2.4. De igual forma que para una dimensión, la existencia de los límites fue demostrada por Valery Oseledets [36].

A la suma de los  $p$  mayores exponentes de Lyapunov se la conoce como “exponente de orden  $p$ ” y se calcula mediante

$$\lambda(p) = \sum_{i=1}^p \lambda_i, \quad (2.6)$$

donde  $\lambda(p)$  es la notación del exponente de orden  $p$ .

La Ec 2.6 permite calcular cada componente del espectro de Lyapunov. Para calcular el  $i$ -ésimo componente del espectro, primero notemos que el exponente de orden  $p = i$  es  $\lambda(i) = \sum_{j=1}^i \lambda_j$  y que el de orden  $p = i - 1$  es  $\lambda(i - 1) = \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j$ . Las sumatorias mostradas solo difieren en el término  $\lambda_i$  y, por lo tanto, al restarlas obtendríamos  $\lambda_i$ , que es el  $i$ -ésimo exponente de Lyapunov. Es así que dicho exponente se puede calcular mediante

$$\lambda_i = \lambda(i) - \lambda(i - 1), \quad (2.7)$$

que, en general, permite calcular cualquier componente del espectro de Lyapunov mediante los exponentes de orden  $p$ .

En el anterior párrafo observamos que el cálculo del espectro de Lyapunov se puede hacer a través de los exponentes de orden  $p$ , exponentes que dependen de la evolución temporal del volumen de separación  $vol_p(t)$  formado por los vectores de separación  $\mathbf{z}_i(t)$ . Por esta razón, no se puede calcular el volumen de separación si no se conoce cómo evolucionan los vectores de separación.

### 2.2.2. Evolución de los vectores de separación

Para conocer como evolucionan los vectores de separación en el tiempo, consideremos trayectorias con condiciones iniciales infinitesimalmente cercanas,  $\mathbf{x}_1(t)$  y  $\mathbf{x}_0(t)$ , que pertenecen a un sistema de dimensión  $n$ . De estas trayectorias obtenemos el vector de separación  $\mathbf{z}(t) = \mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_0(t)$ , que en  $t = 0$  es infinitesimal. Reordenando la ecuación obtenemos  $\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{z}(t) + \mathbf{x}_0(t)$ . Después, al introducir este  $\mathbf{x}_1(t)$  en la Ec 2.1 y desarrollarla en serie Taylor para varias variables alrededor de  $\mathbf{x}_0(t)$ , se obtiene

$$\frac{d\mathbf{x}_1}{dt} = \frac{d\mathbf{x}_0}{dt} + \frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_0) + D\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)\mathbf{z} + O^2, \quad (2.8)$$

donde  $\mathbf{F}$  es el campo vectorial que determina como evoluciona el sistema dinámico y  $D\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)$  es la matriz jacobiana  $n \times n$  de  $\mathbf{F}$  en el punto  $\mathbf{x}_0$ . Tomando en cuenta que  $\frac{d\mathbf{x}_0}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_0)$ , se obtiene

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = D\mathbf{F}(\mathbf{x}_1)\mathbf{z}. \quad (2.9)$$

Del estudio de sistemas de ecuaciones diferenciales, se conoce que para todo sistema de  $n$  ecuaciones diferenciales (como el de la Ec 2.9) existen  $n$  soluciones particulares linealmente independientes. A estas soluciones las denotaremos como  $\mathbf{u}_i(t)$  donde  $i = 1, 2, \dots, n$ , y a sus componentes como  $u_{ji}$  donde  $j = 1, 2, \dots, n$ . La combinación lineal de estas soluciones particulares da la solución general, que puede ser escrita como

$$\mathbf{u}(t) = c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \dots + c_n\mathbf{u}_n, \quad (2.10)$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ \vdots \\ u_{n1} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} u_{12} \\ u_{22} \\ \vdots \\ u_{n2} \end{pmatrix} + \dots + c_n \begin{pmatrix} u_{1n} \\ u_{2n} \\ \vdots \\ u_{nn} \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

donde  $\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$  son constantes en la combinación lineal y  $\mathbf{u}(t)$  es la solución general del sistema (con componentes  $u_1, u_2, \dots, u_n$ ) evolucionada un tiempo  $t$ . Considerando nuestro sistema (Ec 2.9), el vector  $\mathbf{u}(t)$  corresponde al vector de separación  $\mathbf{z}(t)$  de la Ec 2.9, por lo que, a partir de aquí, reemplazaremos los  $\mathbf{u}$  por  $\mathbf{z}$ .

La Ec 2.10, considerando el vector de separación  $\mathbf{z}(t)$ , se puede escribir como multiplicación de matrices de la forma,

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & \cdots & z_{1n} \\ z_{21} & z_{22} & \cdots & z_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{n1} & z_{n2} & \cdots & z_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{M}(t)\mathbf{c}, \quad (2.13)$$

donde  $\mathbf{c}$  es el vector que contiene a las constantes y  $\mathbf{M}(t) = [\mathbf{z}_1(t), \mathbf{z}_2(t), \dots, \mathbf{z}_n(t)]$  es la matriz dependiente del tiempo que contiene las soluciones particulares del sistema y que es conocida como matriz fundamental. Por conveniencia, para que la matriz  $\mathbf{M}(\mathbf{0})$  sea la identidad, la constante  $\mathbf{c}$  se utilizará como el vector de separación inicial ( $\mathbf{c} = \mathbf{z}(\mathbf{0})$ ). De esta forma se obtiene

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{M}(t)\mathbf{z}(0), \quad (2.14)$$

ecuación que da el vector de separación para todo  $t$ .

Como ya ha sido mencionado, las columnas de la matriz  $\mathbf{M}$  son soluciones particulares del sistema, por lo que, la evolución temporal de cada columna de esta matriz está dada por la Ec 2.9. Así, en base a la Ec 2.9, se puede escribir la siguiente ecuación

$$\frac{d\mathbf{M}(t)}{dt} = D\mathbf{F}(\mathbf{x}_1)\mathbf{M}(t) \quad [39], \quad (2.15)$$

que describe la evolución de la matriz  $\mathbf{M}$  para todo  $t$ .

Mediante el desarrollo presentado en esta subsección, se ha obtenido el comportamiento de un vector de separación  $\mathbf{z}(\mathbf{t})$ , que depende de la matriz  $\mathbf{M}(t)$ . Tanto  $\mathbf{z}(\mathbf{t})$  como  $\mathbf{M}(t)$  son usados para construir volúmenes de separación matemáticamente. El estudio matemático de los volúmenes de separación, usando  $\mathbf{z}(\mathbf{t})$  y  $\mathbf{M}(t)$ , se presenta en la siguiente subsección. Dicho estudio servirá para construir el código computacional para calcular el espectro Lyapunov.

### 2.2.3. Obtención del espectro de Lyapunov

Para el estudio matemático de los volúmenes de separación se va a utilizar el producto exterior (denotado por  $\wedge$ ). Este producto es una operación matemática que cumple con las propiedades

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{u} = 0 \quad (2.16)$$

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}, \quad (2.17)$$

$$(c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2) \wedge \mathbf{v} = c_1 \mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{v} + c_2 \mathbf{u}_2 \wedge \mathbf{v}, \quad (2.18)$$

donde  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{u}_1$ ,  $\mathbf{u}_2$ ,  $\mathbf{v}$  son vectores y  $c_1$ ,  $c_2$  son escalares. El producto exterior es comúnmente usado para estudiar volúmenes  $p$ -dimensionales formados por  $p$  vectores, como los volúmenes de separación. Haciendo uso del producto exterior, el volumen de separación  $p$ -dimensional, formado por los vectores  $\{\mathbf{u}_i\}$ , con  $i = 1, 2, \dots, p$ , se define como

$$vol_p(\mathbf{u}_i) = \|\mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{u}_n\| = \left\| \bigwedge_{i=1}^p \mathbf{u}_i \right\| = \sqrt{\det(\mathbf{U}^T \mathbf{U})}, \quad (2.19)$$

donde  $\mathbf{U}$  es la matriz que tiene por columnas los vectores  $\mathbf{u}_i$ .

El producto exterior también cumple la siguiente propiedad importante

$$\frac{\|\bigwedge_{i=1}^p \mathbf{M}(t)\mathbf{u}_i\|}{\|\bigwedge_{i=1}^p \mathbf{u}_i\|} = \frac{\|\bigwedge_{i=1}^p \mathbf{M}(t)\mathbf{f}_i\|}{\|\bigwedge_{i=1}^p \mathbf{f}_i\|} \quad [37], \quad (2.20)$$

donde  $\{u_i\}$  y  $\{f_i\}$  son bases que generan el mismo espacio. La demostración de esta propiedad puede ser encontrada en las referencias [37, 40]. Esta propiedad nos dice que la variación de volumen producida por  $\mathbf{M}(\mathbf{t})$  en el volumen definido por los vectores  $\{u_i\}$   $\left(\frac{\|\bigwedge_{i=1}^p \mathbf{M}(t)\mathbf{u}_i\|}{\|\bigwedge_{i=1}^p \mathbf{u}_i\|}\right)$  es igual a la producida por el mismo  $\mathbf{M}(\mathbf{t})$  en el volumen definido por los vectores  $\{f_i\}$   $\left(\frac{\|\bigwedge_{i=1}^p \mathbf{M}(t)\mathbf{f}_i\|}{\|\bigwedge_{i=1}^p \mathbf{f}_i\|}\right)$  (siempre que dichos vectores generen el mismo espacio vectorial [31, 38]). Esta ecuación, más adelante, nos permitirá realizar un cambio de vectores a la hora de calcular volúmenes de separación computacionalmente.

Mediante el uso del producto exterior, los volúmenes de la Ec 2.6 se pueden escribir a partir de los vectores de separación, y se obtiene que

$$vol_p(t) = \|\mathbf{M}(t)\mathbf{z}_1(0) \wedge \mathbf{M}(t)\mathbf{z}_2(0) \wedge \dots \wedge \mathbf{M}(t)\mathbf{z}_p(0)\| \quad (2.21)$$

y

$$vol_p(0) = \|\mathbf{z}_1(0) \wedge \mathbf{z}_2(0) \wedge \dots \wedge \mathbf{z}_p(0)\|. \quad (2.22)$$

Con estos volúmenes se puede reescribir la Ec 2.6 de la forma

$$\lambda(p) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|\mathbf{M}(t)\mathbf{u}_1(0) \wedge \mathbf{M}(t)\mathbf{z}_2(0) \wedge \dots \wedge \mathbf{M}(t)\mathbf{u}_p(0)\|}{\|\mathbf{z}_1(0) \wedge \mathbf{u}_2(0) \wedge \dots \wedge \mathbf{z}_p(0)\|}, \quad (2.23)$$

$$\lambda(p) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|\bigwedge_{i=1}^p \mathbf{M}(t)\mathbf{z}_i(0)\|}{\|\bigwedge_{i=1}^p \mathbf{z}_i(0)\|} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|\bigwedge_{i=1}^p \mathbf{z}_i(t)\|}{\|\bigwedge_{i=1}^p \mathbf{z}_i(0)\|}, \quad (2.24)$$

donde  $\{\mathbf{z}_i(0)\}$  es la base que genera el volumen inicial y  $\mathbf{M}(t)\mathbf{z}_i(0)$  es el vector de separación evolucionado un tiempo  $t$  (según la Ec 2.14).

La obtención computacional del exponente de orden  $p$  mediante la Ec 2.24 tiene dos inconvenientes. El primer inconveniente tiene que ver con los ángulos de los vectores que conforman el volumen de separación. Estos ángulos, debido a la expansión y contracción exponencial que puede tener el volumen de separación, pueden llegar a ser muy pequeños[31, 37]. Cuando esto sucede, el volumen de separación puede ser muy cercano a cero, lo que suele comprometer la estabilidad numérica de nuestros algoritmos computacionales. El segundo problema tiene que ver con el valor numérico de la matriz  $\mathbf{M}(t)$ . Esta matriz puede llegar a tomar valores extremadamente altos, que la computadora interpreta como infinito (comprometiendo de nuevo la estabilidad numérica), para valores de  $t$  altos.

Para solucionar los problemas mencionados, consideremos la ecuación del exponente de orden  $p$  (Ec 2.24) reescrita de la forma

$$\lambda(p) = \lim_{m\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{m\tau} \ln \left( \frac{\|\bigwedge_{i=1}^p \mathbf{z}_i(m\tau)\|}{\|\bigwedge_{i=1}^p \mathbf{z}_i((m-1)\tau)\|} \frac{\|\bigwedge_{i=1}^p \mathbf{z}_i((m-1)\tau)\|}{\|\bigwedge_{i=1}^p \mathbf{z}_i((m-2)\tau)\|} \dots \frac{\|\bigwedge_{i=1}^p \mathbf{z}_i(2\tau)\| \|\bigwedge_{i=1}^p \mathbf{z}_i(\tau)\|}{\|\bigwedge_{i=1}^p \mathbf{z}_i(\tau)\| \|\bigwedge_{i=1}^p \mathbf{z}_i(0)\|} \right), \quad (2.25)$$

$$\lambda(p) = \lim_{m\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{m\tau} \sum_{l=1}^m \ln \left( \frac{\|\bigwedge_{i=1}^p \mathbf{z}_i(l\tau)\|}{\|\bigwedge_{i=1}^p \mathbf{z}_i((l-1)\tau)\|} \right), \quad (2.26)$$

donde se ha dividido el tiempo  $t$  en  $m$  tiempos  $\tau$ . Notemos que, en la Ec 2.26, si simplificamos los correspondientes  $\|\bigwedge_{i=1}^p \mathbf{z}_i(m\tau)\|$ , regresamos a la Ec 2.24. Por otra parte, podemos reescribir la Ec 2.26 como

$$\lambda(p) = \lim_{m\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{m\tau} \sum_{l=1}^m \ln \left( \frac{\|\bigwedge_{i=1}^p \mathbf{M}(\tau)\mathbf{z}_i((l-1)\tau)\|}{\|\bigwedge_{i=1}^p \mathbf{z}_i((l-1)\tau)\|} \right), \quad (2.27)$$

gracias a la Ec 2.14, que nos permite relacionar la matriz fundamental con los vectores de separación ( $\mathbf{M}(\tau)\mathbf{u}_i((l-1)\tau) = \mathbf{u}_i(l\tau)$ ). La Ec 2.27 implica evolucionar el volumen de separación en  $m$  tiempos  $\tau$ .

El término dentro del paréntesis en la Ec 2.27 es idéntico al de la relación presentada en la Ec 2.20. Como ya se mencionó, la Ec 2.20 permite intercambiar vectores que generen el mismo espacio. Por esta razón, podemos cambiar el conjunto de vectores de separación  $\{\mathbf{z}_i((l-1)\tau)\}$  (en la Ec 2.27) por un conjunto de vectores ortonormales contruidos a partir de los  $\{\mathbf{z}_i((l-1)\tau)\}$ , de manera que ambos conjuntos de vectores generen el mismo espacio vectorial.

El cambio de los vectores de separación por nuevos vectores ortonormales soluciona los problemas del código que se mencionaron. El problema de los ángulos pequeños se soluciona ortogonalizando los vectores de separación, mientras que el problema de los valores muy grandes se soluciona mediante la normalización de los vectores ortogonalizados. Es así que aplicar este procedimiento cada tiempo  $\tau$ , permite que los volúmenes de separación que se deben calcular, según [Ec 2.27](#), no comprometan la estabilidad numérica del código.

Después de considerar los posibles problemas en el código computacional, el siguiente paso es el cálculo de los volúmenes de separación de la [Ec 2.27](#), y para ello se va a usar el método conocido como descomposición **QR**. Este método se basa en que toda matriz  $\mathbf{U}$ , que tiene vectores  $\{\mathbf{u}_i\}$  como columnas, puede ser escrita como la multiplicación de una matriz  $\mathbf{Q}$ , cuyas columnas son vectores ortonormales ( $\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{I}$ ) y una matriz  $\mathbf{R}$  que es triangular superior. Esta multiplicación de matrices es muy útil porque el valor del volumen toma una forma bastante sencilla:  $vol_p(\mathbf{U}) = \sqrt{\det(\mathbf{U}^T \mathbf{U})} = \det(\sqrt{\mathbf{RQ}^T \mathbf{QR}})$  o  $vol_p(\mathbf{U}) = \prod_{k=1}^p r_{kk}$ , donde los  $r_{kk}$  son elementos de la diagonal de  $\mathbf{R}$ . Cabe mencionar que los vectores ortonormales de la matriz  $\mathbf{Q}$  pueden ser utilizados para realizar el cambio de vectores mencionado en el anterior párrafo (como se muestra en el [Apéndice A](#)).

Considerando la [Ec 2.27](#), si en esta ecuación se cambian todos los vectores de separación  $\mathbf{z}_i$  por vectores ortonormales, el denominador se vuelve la unidad y el numerador es el volumen formado por los  $r_{kk}$  de la descomposición **QR**. Así, el exponente de Lyapunov de orden  $p$  toma la siguiente forma

$$\lambda(p) = \lim_{m\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{m\tau} \sum_{l=1}^m \ln \left( \prod_{k=1}^p r_{kk}(l\tau) \right), \quad (2.28)$$

donde  $\prod_{k=1}^p r_{kk}(l\tau)$  es el volumen que se expande en la evolución temporal  $l$ , es decir,  $\|\bigwedge_{i=1}^p \mathbf{M}(\tau) \mathbf{u}_i((l-1)\tau)\| = \prod_{k=1}^p r_{kk}(l\tau)$ . Finalmente, para hallar el  $i$ -ésimo exponente de Lyapunov del espectro se reemplaza la [Ec 2.28](#) en la [Ec 2.7](#) y se obtiene

$$\lambda_i = \lim_{m\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{m\tau} \sum_{l=1}^m \ln \frac{\left( \prod_{k=1}^i r_{kk}(l\tau) \right)}{\left( \prod_{k=1}^{i-1} r_{kk}(l\tau) \right)}, \quad (2.29)$$

$$\lambda_i = \lim_{m\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{m\tau} \sum_{l=1}^m \ln(r_{ii}(l\tau)), \quad (2.30)$$

ecuación que permite calcular el espectro de Lyapunov mediante la descomposición **QR**.

Los algoritmos que construimos a partir de la teoría presentada en esta sección son dos: un algoritmo para la descomposición **QR** (basado en la ortonormalización de Gram-Schmidt) y un algoritmo para hallar el espectro de exponentes de Lyapunov. Ambos algoritmos se encuentran en el [Apéndice A](#), en donde se los trata con detalle.

## 2.3. Dimensión de Kaplan-Yorke

Estamos acostumbrados a que los objetos estudiados en geometría tengan una dimensión entera. Esta dimensión entera (que nos resulta intuitiva) la podemos obtener mediante distintas definiciones de dimensión, como la *dimensión tradicional*, la *dimensión capacitiva* [41] o la *dimensión de Kaplan-Yorke* [42].

La dimensión tradicional de un objeto, que es la que está más relacionada a nuestra intuición, puede ser vista como la cantidad de información necesaria para describir la posición de un punto en dicho objeto [42]. Por ejemplo, una esfera hueca es de dimensión dos porque se necesitan dos variables para determinar la posición de un punto sobre ella. Así mismo, una esfera maciza tiene dimensión tres porque se necesitan tres variables para determinar la posición de un punto de ella. De esta forma, una línea tiene dimensión uno, un área dimensión dos y en general, un volumen  $n$ -dimensional tiene dimensión  $n$ .

El inconveniente con la definición tradicional es que ésta no toma en cuenta objetos fractales, que son aquellos que presentan una estructura que se repite a varias escalas [43]. Un ejemplo simple de fractal es el conjunto de Cantor (Fig 2.2), que se construye a partir de un segmento de recta que se divide en tres tercios y se borra la parte del medio. Este proceso se repite iterativamente para cada segmento resultante (un número infinito de veces), generando así el conjunto de Cantor completo. La Fig 2.2 presenta solo cuatro iteraciones del conjunto de Cantor, y en ella se puede observar varios segmentos de recta. Estos segmentos de recta, a medida que las iteraciones del conjunto de Cantor se acercan al infinito, se vuelven puntos. Según la dimensión tradicional, los puntos tienen dimensión cero, mientras que los segmentos de recta tienen dimensión uno. Por esta razón, y debido a que el conjunto de Cantor se compone de segmentos de recta y de puntos, la dimensión asociada al conjunto de Cantor (según la dimensión tradicional) es ambigua, lo que indica que es necesario extender el concepto de dimensión. Cabe mencionar que los sistemas caóticos muchas veces generan atractores que tienen características fractales, por lo que, para hallar la dimensión de estos atractores también se necesita una extensión del concepto de dimensión.

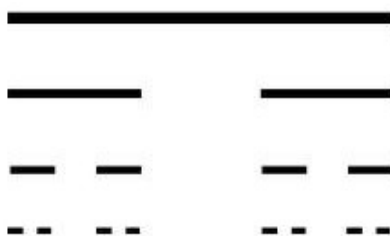


Figura 2.2: Conjunto de Cantor

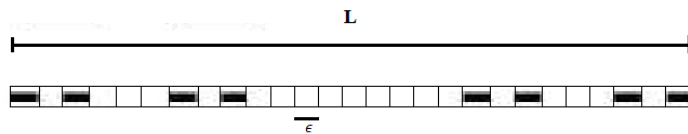


Figura 2.3: División de la longitud  $L$  en  $M$  cajas de longitud  $\epsilon$ .

Para extender el concepto de dimensión, consideramos la cuarta iteración del conjunto de Cantor que está presente a lo largo de una dimensión. A los ocho segmentos (dispuestos sobre la recta) que componen esta iteración, les vamos a asociar una longitud  $L$ , como se muestra en la Fig 2.3. Dividamos esta longitud en  $M$  cajas unidimensionales de longitud  $\epsilon$  (un valor real, positivo e infinitesimal), es decir,  $M(\epsilon) = L/\epsilon$ . En general, para un objeto que esté presente en más de una dimensión, las cajas son  $d$ -dimensionales, esto implica que el número de cajas es  $M(\epsilon) = L^d/\epsilon^d$ . Diremos que las cajas están ocupadas cuando un fragmento, o parte de un fragmento del conjunto de Cantor está dentro de la caja. Al número de cajas ocupadas lo denotaremos con  $N(\epsilon)$  y supondremos que la ecuación asociada a  $N(\epsilon)$  es similar a la del número de cajas totales [41]:  $N(\epsilon) = 1/\epsilon^d$ , donde se ha eliminado  $L$  por temas de generalización. Esta última ecuación solo puede devolver el número de cajas ocupado, si  $d$  es no entero. De esta forma, extendemos el concepto de dimensión a dimensiones no enteras. Por tanto, definimos la dimensión capacitiva como

$$d = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(N(\epsilon))}{\ln(1/\epsilon)}, \quad (2.31)$$

donde  $d$  es la dimensión capacitiva,  $N(\epsilon)$  son las cajas ocupadas,  $\epsilon$  es el tamaño en el que se dividen las cajas y los logaritmos provienen de despejar  $d$  de  $N(\epsilon) = 1/\epsilon^d$ . La idea de esta dimensión es usar únicamente las cajas ocupadas para obtener un valor de dimensión, que incluso puede ser no entero. Mediante esta definición, una línea tiene dimensión uno, un área dimensión dos y un volumen  $n$  dimensional, dimensión  $n$ . Así, se conservan los valores de la dimensión tradicional, pero se extiende la definición de dimensión a atractores con características fractales.

Otra forma de calcular la dimensión de los atractores es mediante la dimensión de Kaplan-Yorke que se define mediante

$$d_k = j + \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_j}{|\lambda_{j+1}|}, \quad (2.32)$$

donde  $\{\lambda_i\}$  con  $i = 1, 2, \dots, j, \dots, n$ , es el espectro de Lyapunov y  $j$  es el índice del menor exponente de Lyapunov que cumple  $\lambda_j \geq 0$ . Esta definición es la que usaremos en este trabajo para encontrar la dimensión de los atractores. El valor de esta dimensión nos dice cuan bueno es un atractor para encriptar imágenes [21], lo que nos permitirá saber si la juntura Josephson es útil o no para encriptar imágenes.

La dimensión de Kaplan-Yorke se relaciona con la dimensión capacitiva mediante la conjetura de Kaplan-Yorke. Esta conjetura establece que la dimensión capacitiva, descrita por la Ec 2.31 y la dimensión de Kaplan-Yorke, descrita por la Ec 2.32, son iguales, es decir

$$d_k = d \quad (2.33)$$



donde  $d$  es la dimensión capacitiva y  $d_k$  es la dimensión de Kaplan-Yorke. No se ha logrado desarrollar una prueba para esta conjetura pero tampoco se han encontrado casos donde no se cumpla [37].

Para explicar las ideas tras la conjetura de Kaplan-Yorke vamos a revisar la evolución de un volumen de separación 3-dimensional, que evoluciona mediante  $vol(t) = e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)t}$ , donde se toma la convención:  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$ . Al considerar estos tres exponentes en orden decreciente, y si el sistema se contrae en una de sus dimensiones,  $\lambda_3$  tiene que ser negativo. A este volumen se lo divide en cajas de longitud  $\epsilon$ , de igual manera que en la dimensión capacitiva. Cuando se disminuye el volumen debido a un exponente negativo, el valor de  $\epsilon$  disminuye de acuerdo a este exponente, para que el sistema siga dividido en cubos. De esta forma, el nuevo valor del volumen de los cubos es  $\epsilon^3 = e^{3\lambda_3 t}$ , que toma en cuenta la disminución del tamaño de los cubos. Así, se puede relacionar el número de cajas con los exponentes de Lyapunov mediante,  $N(\epsilon) = e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)t} / e^{3\lambda_3 t}$ , que sigue siendo el volumen total sobre el volumen de las cajas. Si se considera que  $N(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon^d}$ , se obtiene

$$\frac{L^d}{\epsilon^d} = e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)t} / e^{3\lambda_3 t}, \quad (2.34)$$

$$d_k = 2 + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{|\lambda_3|}, \quad (2.35)$$

donde  $d_k$  es la dimensión de Kaplan-Yorke. Generalizando para  $n$ -dimensiones, donde la expansión de un volumen está dada por  $vol(t) = e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)t}$  y suponiendo que la disminución del volumen de las cajas se da por el primer exponente de Lyapunov menor que cero  $\lambda_j$ , es decir  $\epsilon^n = e^{n\lambda_j t}$ , la dimensión de Kaplan Yorke se vuelve la mostrada en [Ec 2.32](#).

## 2.4. Entropía de Kolmogorov

En el contexto de la teoría de información, la información es la incertidumbre con la que una fuente envía un determinado mensaje. Este mensaje puede ser un conjunto de letras, funciones dependientes del tiempo  $f(t)$ , funciones dependientes del espacio  $f(x, y, z)$  o funciones dependientes del tiempo y espacio  $f(x, y, z, t)$ [44]. Tomando en cuenta que cada mensaje puede ser emitido con una cierta probabilidad, la información se define como

$$H = - \sum_i p_i \ln(p_i), \quad (2.36)$$

donde  $p_i$  es la probabilidad de que la fuente emita el mensaje  $i$ .

La información también puede ser vista como entropía, porque la forma de cálculo de la entropía (en física) es similar a la de la información. Ambas se calculan mediante la [Ec 2.36](#), pero, para la información,  $p_i$  es la probabilidad de que se envíe el mensaje  $i$ , mientras que para la entropía,  $p_i$  es la probabilidad de que el sistema se encuentre en el estado  $i$ . Considerando esta comparación, en general, cuando una fuente emite muchos mensajes (con probabilidades aleatorias  $p_i \neq 0$ ) tiene asociada una entropía mayor en contraste a una fuente que emite pocos mensajes (con probabilidades aleatorias  $p_i \neq 0$ ).

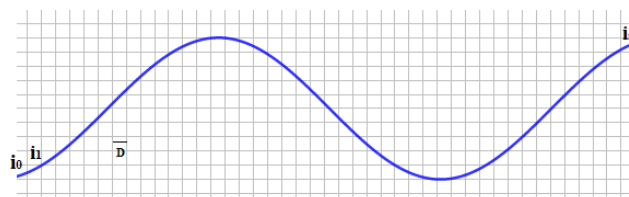


Figura 2.4: División en cajas (de longitud  $D$ ) de un espacio de fases de dimensión dos. Los  $i_j$  son las etiquetas de las cajas por las que ha pasado la trayectoria cualquiera.

Si se considera a la trayectoria de un sistema dinámico como un mensaje, es posible asociar la información a sistemas dinámicos. Esta asociación es idea fundamental de la entropía de Kolmogorov. Para explicar dicha entropía, primero vamos a calcular la información de una trayectoria cualquiera que se encuentra en un espacio de fases de dimensión  $d$ . Al mencionado espacio de fases lo dividimos en cajas de volumen  $D^d$  (Fig 2.4), donde  $D$  es la longitud de las cajas. Ahora, consideremos a  $P_{i_0 i_1 \dots i_n}$  como la probabilidad de que la trayectoria generada por el sistema dinámico siga el camino formado por la cajas  $i_0, i_1, \dots, i_n$ . De esta forma, la información asociada al sistema dinámico es

$$H_n = - \sum_{i_0 i_1 \dots i_n} P_{i_0 i_1 \dots i_n} \ln(P_{i_0 i_1 \dots i_n}), \quad (2.37)$$

donde se considera una sumatoria sobre todas las trayectorias posibles ( $i_0 i_1 \dots i_n$ ).

Por otra parte, consideremos que el sistema evoluciona en tiempos cortos  $\tau$  y que, en la evolución  $n\tau$ , la trayectoria pasa por la caja  $i_n$ . Al restar la información para un sistema con  $t = n\tau$  de la información para el sistema con  $t = (n+1)\tau$ , se obtiene cuánto aumenta la información en un intervalo de tiempo  $\tau$ . En otras palabras, se obtiene el aumento de la entropía en un tiempo  $\tau$ . Con estas ideas, la entropía de Kolmogorov se define como el promedio del aumento de la información en un intervalo de tiempo  $\tau$  [34]:

$$K = \lim_{\tau \rightarrow 0} \lim_{D \rightarrow 0} \lim_{N\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{n=0}^{N-1} (H_{n+1} - H_n), \quad (2.38)$$

$$K = - \lim_{\tau \rightarrow 0} \lim_{D \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{i_0 i_1 \dots i_{N-1}} P_{i_0 i_1 \dots i_{N-1}} \ln(P_{i_0 i_1 \dots i_{N-1}}), \quad (2.39)$$

que se relaciona directamente con la información y por lo tanto con la incertidumbre.

Se ha observado que la entropía de Kolmogorov se relaciona con los exponentes de Lyapunov mediante la ecuación [34],

$$K = \sum_{i=1}^j \lambda_i, \quad (2.40)$$

donde  $j$  es el índice del menor exponente de Lyapunov que cumple  $\lambda_j \geq 0$ . Esto implica que la Ec 2.40 es la suma de los exponentes de Lyapunov positivos. Recordemos que estos exponentes están ligados a la aparente aleatoriedad y por lo tanto se relacionan a la incertidumbre. Esta relación no ocurre con exponentes negativos, porque en ese caso

no hay aparente aleatoriedad. Por esta la razón, la entropía de Kolmogorov solo toma en cuenta los exponentes positivos.

Mediante la entropía de Kolmogorov se define el tiempo en que dos trayectorias con condiciones iniciales infinitesimalmente cercanas se separan, de la siguiente manera

$$T = \frac{\ln(L/\Delta)}{K} [32] \quad (2.41)$$

donde  $L$  es el intervalo en el que el sistema está acotado (depende de cada variable en el espacio de fases) y  $\Delta$  es la separación inicial de las trayectorias [32]. En esta ecuación  $T$  representa el tiempo en el que se puede obtener la misma solución a partir de dos condiciones iniciales separadas por un  $\Delta$ . Este tiempo  $T$  es útil cuando se quiere predecir un fenómeno a partir de un sistema caótico, porque en dichos sistemas las medidas se toman dentro de un intervalo de precisión, es decir, un  $\Delta$ . Un ejemplo de esto es la modelización climática [45].

## 2.5. Sección de Poincaré

La sección de Poincaré es un método usado para estudiar el comportamiento de las soluciones de un sistema dinámico. Consiste en seccionar el espacio de configuración (de dimensión  $n$ ) con hiperplanos de dimensión  $n - 1$  y observar el comportamiento del sistema en este hiperplano. De esta forma, la sección de Poincaré disminuye una dimensión al sistema. A manera de ejemplo, imaginemos un espacio de configuraciones de dimensión tres. En este plano, el sistema ha trazado una circunferencia. Si cortamos esta circunferencia con un plano de dimensión dos perpendicular a todos los vectores que unen el centro de la circunferencia con su borde, en el plano solo encontraríamos dos puntos.

En general, en el caso de un sistema de dimensión 3, cuando se atraviesa un plano de dimensión 2, en el plano se encuentran varios puntos que dependen de la trayectoria del sistema. Cuando esta trayectoria es un ciclo límite, la sección de Poincaré se caracteriza por presentar un número finito de puntos. Cuando la solución es un atractor extraño, el plano presenta puntos infinitos que tienden a formar figuras. Estas figuras tienden a repetirse a escalas más pequeñas, lo que se conoce como una figura fractal [43, 32]. Así, este método introducido por Poincaré es útil en el estudio de las soluciones, para visualizar los atractores del sistema.

En este trabajo, la sección de Poincaré servirá para caracterizar el sistema dinámico de forma paralela a la dimensión de Kaplan-Yorke y la entropía de Kolmogorov. Por esta razón, en el [Apéndice A](#), se presentan los algoritmos para obtener la sección de Poincaré, la entropía de Kolmogorov y la dimensión de Kaplan-Yorke.

# Capítulo 3

## Simulaciones numéricas

En este capítulo se determina el tipo de ciclos límite que son soluciones de la juntura Josephson. También se fijan intervalos para los parámetros  $\alpha$  y  $\Omega$ , correspondientes a la juntura poco-amortiguada, en los que se buscará regiones que provoquen una dinámica caótica o no caótica en la juntura. Por último, se introducen los códigos computacionales realizados para este trabajo.

### 3.1. Una juntura

Los estándares de voltaje que, como se ha dicho, son voltajes constantes usados para calibrar dispositivos electrónicos, se pueden conseguir mediante una o varias junturas Josephson. Recordemos que una juntura solo produce estándares de voltaje en el orden de los milivoltios, pero en ciencia se necesitan estándares en el orden de los voltios. Por esta razón se pretende estudiar arreglos de  $n$ -junturas Josephson, pero para hacerlo, es necesario realizar primero el estudio de una sola juntura.

#### 3.1.1. Ciclos límite

Como se mencionó en el [Capítulo 1](#), los estándares de voltaje son posibles debido a que al irradiar una juntura Josephson con microondas ésta produce voltajes constantes y estables llamados bloqueos de fase. Los bloqueos de fase, para ser más precisos, son un promedio temporal del voltaje (en la juntura Josephson) que se mantiene constante al variar el parámetro  $i_0$ . Dicho  $i_0$  está relacionado con la corriente constante en el modelo de Steward McCumber ( $i_0 = I_0/I_c$ ).

Recordemos que el promedio temporal de una función  $f(t)$  se define como  $\langle f(t) \rangle = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$ . Con esta definición, si el voltaje en función del tiempo de la juntura Josephson toma la forma de una función seno, el promedio temporal del voltaje será cero. Este promedio es un bloqueo de fase solo si su valor se mantiene constante al variar  $i_0$ . A diferencia de este ejemplo, en este trabajo buscamos bloqueos de fase diferentes de cero.

En general, al tomar el promedio temporal en la [Ec 1.14](#) se obtiene,

$$\langle V \rangle = \frac{\hbar\omega_0}{2e} \langle \dot{\theta} \rangle = \frac{\hbar\omega_0}{2e} \langle v \rangle, \quad (3.1)$$

donde  $v$  y  $\dot{\theta}$  son formas de denotar el voltaje adimensional y  $V$  es el voltaje.

Experimentalmente los bloqueos de fase se han encontrado para múltiplos enteros y fracciones del valor  $\hbar\omega_1/2e$ , es decir, para

$$\langle V \rangle = \frac{n}{m} \frac{\hbar\omega_1}{2e}, \quad (3.2)$$

donde  $n$  y  $m$  son enteros. Esta observación experimental, como se verá a continuación, proviene matemáticamente de un ciclo límite específico.

Por el teorema fundamental del cálculo sabemos que el promedio temporal de  $\dot{\theta}$  es  $\langle \dot{\theta} \rangle = \frac{1}{b-a} \int_a^b \frac{d\theta(\tau)}{d\tau} d\tau = \frac{1}{b-a} (\theta(b) - \theta(a))$ . Para realizar este promedio temporal, tomaremos un intervalo temporal  $(b-a)$  igual al período de las microondas con las que se irradia el sistema. A dicho período lo llamaremos  $T$  y toma un valor de  $2\pi m/\Omega$  (según el modelo de Steward-McCumber). Se toma este valor porque es el valor usado experimentalmente. Con estos antecedentes, y para obtener los bloqueos de fase mencionados en el párrafo anterior, se toma un ciclo límite

$$\theta(\tau + T) = \theta(\tau) + 2\pi n, \quad (3.3)$$

donde  $2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , es el término que expresa cuánto ha avanzado  $\theta$  en un tiempo  $T$ . A partir de este ciclo límite se encuentra que el valor del promedio temporal del voltaje es:

$$\langle v \rangle = \frac{1}{T} (\theta(\tau + T) - \theta(\tau)) = \frac{n}{m} \Omega, \quad (3.4)$$

$$\frac{\langle v \rangle}{\Omega} = \frac{n}{m}. \quad (3.5)$$

Finalmente, al reemplazar la [Ec 3.4](#) en la [Ec 3.1](#) se obtiene

$$\langle V \rangle = \frac{n}{m} \frac{\hbar\omega_1}{2e}, \quad (3.6)$$

donde  $m$  y  $n$  provienen del ciclo límite. Así, esta ecuación describe los bloqueos de fase observados experimentalmente mediante el ciclo límite presentado en [Ec 3.3](#).

Los bloqueos de fase ([Ec 3.6](#)), al ser constantes con respecto a  $i_0$ , pueden ser observados en la curva  $\langle V \rangle$  vs  $i_0$  como líneas horizontales. Sin embargo, en este trabajo no utilizaremos dichas curvas. En su lugar, utilizaremos curvas  $\langle v \rangle / \Omega$  vs  $i_0$  que son equivalentes a las  $\langle V \rangle$  vs  $i_0$  y que permiten una mejor visualización de los bloqueos de fase. Esta mejora en la visualización de los bloqueos de fase se da porque, según [Ec 3.5](#), en la curva  $\langle V \rangle / \Omega$  vs  $i_0$ , los bloqueos de fase se presentan solo en  $\langle v \rangle / \Omega = n/m$ . Por ejemplo, si  $m = 1$  y  $n = 5$ , observaremos una línea constante en  $\langle v \rangle / \Omega = 5$  que es un bloqueo de fase.

### 3.1.2. Juntura poco amortiguada

En este trabajo trataremos con juntas poco amortiguadas, que se caracterizan por tener un parámetro  $\alpha < 1$ . Para entender por que esta junta es llamada así, reescribamos la ecuación del modelo de Steward-McCumber de la siguiente manera

$$\ddot{\theta} = i_0 + i_1 \sin(\Omega\tau) - \alpha\dot{\theta} - \sin(\theta). \quad (3.7)$$

En esta ecuación se puede observar que el término  $\alpha\dot{\theta}$  es disipativo. Así, cuando  $\alpha$  es menor que uno, no hay tanta amortiguación como la que habría si  $\alpha$  fuera mayor que uno. Esta situación es similar a lo que ocurre en mecánica Newtoniana cuando se considera una resistencia proporcional a la velocidad.

En el [Capítulo 1](#) se mencionó que la juntura SIS más utilizada en estándares de voltaje es  $Nb/Al_2O_3/Nb$ . Esta juntura tiene corrientes críticas,  $I_c$ , entre  $[50 - 400]\mu A$ , mientras que las corrientes producidas por las microondas,  $I_1$ , son del orden de los  $mA$  [15, 26]. Por esta razón, para cubrir un amplio rango de posibilidades, en este trabajo consideraremos corrientes de  $i_1 = 2.5, 5, 10, 30, 50$  y  $80$ , donde  $i_1 = I_1/I_c$ . Se debe tomar en cuenta que, en general, el estudio se puede realizar para cualquier valor de  $i_1$ .

Recordemos que la [Ec 2.3](#) depende de cuatro parámetros:  $\alpha, \Omega, i_0$  e  $i_1$ . Los valores de  $i_1$  los elegimos en el párrafo anterior, mientras que los valores de  $\alpha$  los elegimos al inicio de esta subsección ( $\alpha < 1$ ). Así pues, nos queda escoger el valor de dos parámetros.

Se han observado bloqueos de fase en valores del parámetro  $\Omega \approx 3$  [46]. Por esta razón, en este trabajo, tomaremos el parámetro  $\Omega$  dentro de un intervalo de  $[0, 4]$ . Por otra parte, también se ha observado que los bloqueos de fase están ligados a exponentes de Lyapunov negativos [26], y que siempre existe un bloqueo de fase en  $i_0 = 0$  para los estándares de voltaje [16]. Estas observaciones significan que si calculamos los exponentes de Lyapunov en  $i_0 = 0$  (con cualquier valor de  $i_1, \alpha$  y  $\Omega$ ) obtendríamos exponentes positivos para los valores de  $i_1, \alpha$  y  $\Omega$  que no pueden ser usados como estándares de voltaje. De esta forma, los parámetros que estudiaremos (en este capítulo) son los siguientes:  $i_1 = 2.5, 5, 10, 30, 50, 80, i_0 = 0, \alpha = [0, 1]$  y  $\Omega = [0, 4]$ .

La idea del párrafo anterior, acerca de los exponentes de Lyapunov, nos va a permitir encontrar valores de los parámetros  $i_1, \alpha$  y  $\Omega$  que tienen potencial para ser usados como estándares de voltaje. Para implementar esta idea, vamos a fijar un valor de  $i_1$  (de los mencionados en el anterior párrafo) y vamos a hacer un barrido de  $\alpha$  y  $\Omega$  en los intervalos antes mencionados, en donde calcularemos los exponentes de Lyapunov para cada par ordenado  $(\Omega, \alpha)$ .

### 3.1.3. Subrutinas para el barrido

Para realizar el barrido  $\Omega$  vs  $\alpha$  construimos las subrutinas *barrido*, *exponentesbarr*, *ortogo*, *norm* y *prod*. Además, hicimos uso de dos subrutinas que se pueden encontrar en el *Numerical recipes in fortran 77*: *derivs* y *rkck*.

La subrutina *rkck*, ubicada en las páginas 60 y 61 del [Apéndice B](#), se presenta sin mayor variación de la que se puede encontrar en *Numerical recipes*. Por otra parte, a la subrutina *derivs*, que se encuentra en la página 64, la hemos modificado para que incluya el sistema dinámico asociado a la juntura Josephson y el sistema de ecuaciones diferenciales que guía la evolución de la matriz  $\mathbf{M}$ . Primero escribimos las tres ecuaciones correspondientes al sistema dinámico. Después, en base a estas tres ecuaciones, escribimos la matriz jacobiana del sistema. Por último, escribimos las ecuaciones correspondientes a la matriz  $\mathbf{M}$ . Las dos subrutinas mencionadas, *derivs* y *rkck*, son útiles para hallar el estado del sistema en cualquier instante de tiempo. Esta información es

útil para hallar los exponentes de Lyapunov siguiendo los algoritmos y programas que se encuentran en el [Apéndice A](#) y en el [Apéndice B](#) respectivamente, apéndices en donde se explica de manera detallada cada algoritmo y cada código usado en este trabajo.

Las subrutinas *ortogo*, *norm* y *prod*, que se encuentran en las páginas 61 y 62 de [Apéndice B](#), sirven para obtener la descomposición **QR** de una matriz. En la subrutina *ortogo* ingresa una matriz cuadrada cuyas columnas son los vectores de separación. Estos vectores se ortogonalizan con el método de Gram-Schmidt, para el cual se utiliza la subrutina *prod*, que da el producto punto entre dos vectores. Finalmente, se normalizan los vectores ortogonales mediante la subrutina *norm* y se almacenan sus módulos, que son los  $r_{ii}$  de la matriz **R** en la descomposición **QR**.

Los exponentes de Lyapunov, necesarios para el barrido, los obtenemos mediante el programa *exponentesbarr*. En este programa, el valor del parámetro  $i_0$  lo fijamos en cero, el valor del parámetro  $i_1$  lo fijamos escogiendo cualquier valor de  $i_1$  de entre los mencionados en la subsección anterior, mientras que los valores de los parámetros que faltan ( $\alpha$  y  $\Omega$ ) provienen de un programa externo. Con este conjunto de parámetros, el programa se encarga de evolucionar el sistema dinámico y la matriz **M** en intervalos de tiempo  $dt$  mediante *rkck*. Después de realizar estas evoluciones durante un tiempo  $\tau$ , este código ortormaliza los vectores por medio de *ortogo*, según lo expuesto en el [Apéndice A](#). Finalmente, el programa almacena los valores  $r_{ii}$ , obtenidos de la subrutina *ortogo*, como el vector llamado *modulos* y los suma en cada iteración de tiempo  $\tau$  para obtener el espectro de exponentes de Lyapunov. Cabe mencionar que hemos utilizado un  $dt = 0.01$  y un  $\tau = 1$  porque hemos obtenido buenos resultados con estos valores. Además, dentro de este programa hemos definido un criterio de finalización cuando se alcancen las 3000 ortonormalizaciones porque hemos observado que con este número de ortonormalizaciones las variaciones de los exponentes de Lyapunov son mínimas.

Los datos del barrido  $\Omega$  vs  $\alpha$  se obtienen mediante la subrutina *barrido*. En esta subrutina se define una grilla para los parámetros  $\Omega$  y  $\alpha$ , que se ha escogido con un valor de 0.01 para ambos parámetros. Utilizando esta grilla, el programa recorre todos los pares ordenados  $(\Omega, \alpha)$  posibles dentro de los intervalos  $\Omega = [0, 1]$  y  $\alpha = [0, 4]$ . Con cada par ordenado  $(\Omega, \alpha)$  se hace un llamado a *exponentesbarr* y se calcula los exponentes de Lyapunov correspondientes a ese par ordenado. Finalmente, se imprime el mayor exponente de Lyapunov junto a cada par ordenado  $(\Omega, \alpha)$  en un archivo.

Los datos obtenidos del código *barrido* son  $\Omega, \alpha, \lambda_1$ . Para obtener la gráfica del barrido, dividimos el mayor exponente de Lyapunov de cada par ordenado  $(\Omega, \alpha)$ , en tres intervalos según su valor. A cada intervalo le asignamos un color diferente. Estos intervalos y sus correspondientes colores los especificamos más adelante. Finalmente, utilizando *gnuplot*, graficamos  $\alpha$  vs  $\Omega$  y en cada par ordenado  $(\Omega, \alpha)$  colocamos un punto con el color correspondiente al mayor exponente de Lyapunov.

### 3.1.4. Barridos $\alpha$ vs $\Omega$

Las figuras [3.1 a\)](#)–[3.1 f\)](#) muestran los barridos ( $\alpha$  vs  $\Omega$ ) de exponentes de Lyapunov correspondientes a  $i_1 = 2.5, 5, 10, 30, 50$  y  $80$ , como se especifica en la descripción de la [Fig 3.1](#). Los colores e intervalos del mayor exponente de Lyapunov para realizar los barridos son: rojo para  $\lambda_1 < -0.01$ , azul para  $\lambda_1 > 0.01$  y verde para  $-0.01 \leq \lambda_1 \leq 0.01$ .

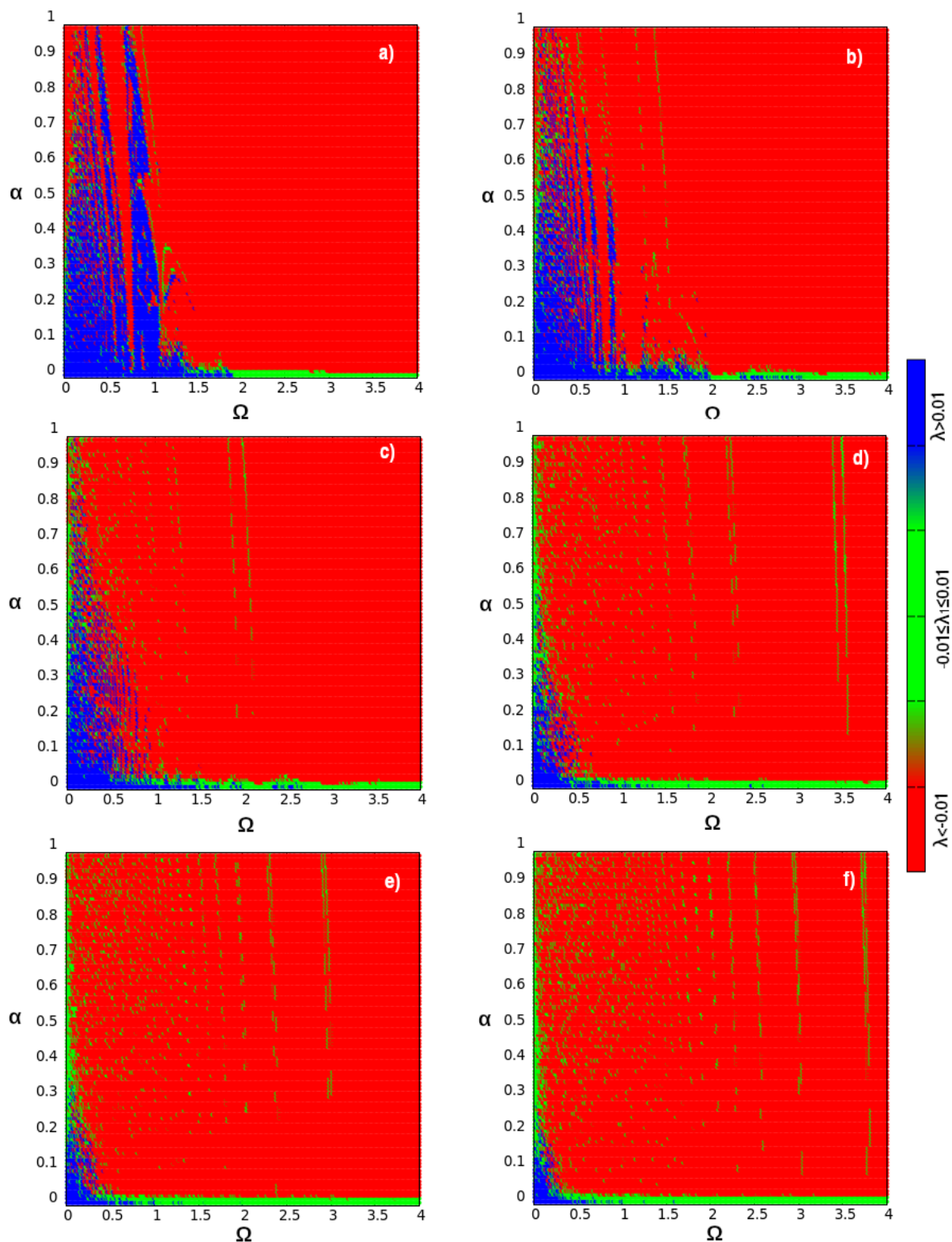


Figura 3.1: Barridos  $\alpha$  vs  $\Omega$ ,  $\lambda_1 < -0.01$  rojo,  $-0.01 \leq \lambda_1 \leq 0.01$  verde,  $0.1 \geq \lambda_1$  morado. a) Con  $i_1 = 2.5$ , b) Con  $i_1 = 5$ , c) Con  $i_1 = 10$ , d) Con  $i_1 = 30$ , e) Con  $i_1 = 50$  y f) Con  $i_1 = 80$



El intervalo  $\lambda_1 > 0.01$  corresponde a parámetros que dan soluciones caóticas y el intervalo  $\lambda_1 < -0.01$  corresponde a parámetros que dan soluciones no caóticas. Por otra parte, el intervalo  $-0.01 \leq \lambda_1 \leq 0.01$  corresponde a soluciones que no se sabe si son caóticas o no caóticas, porque el exponente de Lyapunov se encuentra muy cercano a cero y es posible que, por errores de cálculo computacional (propios del computador), el exponente varíe entre positivo y negativo.

Todas las gráficas presentadas en la Fig 3.1 muestran una región de color rojo para  $\Omega > 1$ . En esta región, con  $i_0 = 0$ , no se encuentra caos y es probable que con estos parámetros la juntura presente bloqueos de fase útiles en estándares de voltaje. Por esta razón, se va a escoger coordenadas  $(\alpha, \Omega)$  aleatorias dentro de esta región para graficar curvas  $\langle v \rangle / \Omega$  en función de  $i_0$  con el fin de encontrar bloqueos de fase.

Las regiones de color azul en la Fig 3.1, que corresponden a exponentes de Lyapunov positivos, dan soluciones caóticas y por lo tanto son de interés para la encriptación de imágenes. Por esta razón, se escogen coordenadas aleatorias  $(\alpha, \Omega)$  dentro de estas regiones para caracterizarlas mediante la sección de Poincaré, la dimensión de Kaplan-Yorke y la entropía de Kolmogorov.

Las últimas regiones a identificar son las que tienen color verde, que corresponden a un exponente de Lyapunov entre  $[-0.01, 0.01]$ . Estas regiones son de interés porque pueden o no presentar bloqueos de fase. Por esta razón, en las regiones verdes también graficaremos curvas  $\langle v \rangle / \Omega$  en función de  $i_0$  para hallar bloqueos de fase.

### 3.1.5. Curvas $\langle v \rangle / \Omega$ vs $i_0$

Para graficar las curvas  $\langle v \rangle / \Omega$  vs  $i_0$  creamos la subrutina *exponentesprom*. Esta subrutina, además de proporcionar los datos necesarios para graficar  $\langle v \rangle / \Omega$  vs  $i_0$ , proporciona los exponentes de Lyapunov para cada conjunto de parámetros en estudio. Así, esta subrutina también permite graficar la curva  $\lambda_1$  en función de  $i_0$ .

La subrutina *exponentesprom* evoluciona el sistema mediante *rkck*. Para esta evolución tomamos una grilla temporal  $dt = \frac{2\pi}{320\Omega}$ , es decir, el periodo de las microondas dividido en 320 partes. Tomamos este  $dt$  con el objetivo de tomar promedios del voltaje en un múltiplo exacto del periodo de las microondas ( $\frac{2\pi}{\Omega}$ ). El código de la subrutina *exponentesprom* ignora los 256 primeros periodos ( $\frac{2\pi}{\Omega}$ ) porque hemos observado que corresponden al transiente. Después de esos 256 periodos, el código almacena los valores de  $v$  (voltaje adimensional) y de  $t$  (tiempo adimensional) durante 256 periodos, para después integrarlos y obtener el promedio. Además, este código almacena el valor de los exponentes de Lyapunov.

Los datos finales para graficar la curva  $\langle v \rangle / \Omega$  vs  $i_0$  se obtienen mediante el programa *promedios*, en el que se integran los valores almacenados por *exponentesprom*. Después, el valor integrado se divide para el tiempo de integración y para la frecuencia. Finalmente, se imprime en un archivo los valores de  $\langle v \rangle / \Omega$ ,  $i_0$  y  $\lambda_1$ , valores que después se grafican con *gnuplot*.

### 3.1.6. Sección de Poincaré

Para hallar la sección de Poincaré escribimos la subrutina *poincare*. La idea de esta subrutina es evolucionar el sistema (mediante Runge-Kutta) durante un número de

iteraciones alto, en nuestro caso, 5000000 de iteraciones (*nstep*). Para cada iteración tomamos la misma grilla que en las curvas  $\langle v \rangle / \Omega$  vs  $i_0$ , es decir,  $dt = \frac{2\pi}{320\Omega}$ . Nuevamente eliminamos cierto número de iteraciones (en este caso 500 iteraciones) que hemos observado corresponden al transiente. Después de las iteraciones correspondientes al transiente, la subrutina *poincare* se encarga de escribir el valor de las variables  $v$  y  $\theta$  en un archivo, cada vez que la variable relacionada con la frecuencia ( $var(3)$  en el código) sea múltiplo de  $2\pi$ . Este valor en particular de  $var(3)$  significa  $var(3) = 2\pi$  que es el plano (en el espacio de fases) con el que se corta al sistema para obtener la sección de Poincaré. Cabe mencionar que este valor de  $var(3)$  se obtiene en 320 iteraciones debido a la grilla que se toma.

## 3.2. Tres juntas

El sistema dinámico para un arreglo de tres juntas cambia con respecto al sistema dinámico de una sola Juntura. En una sola junta hay tres variables, una correspondiente a  $v$ , otra a  $\theta$  y otra relacionada a la frecuencia. Por otra parte, cuando se tienen tres juntas, cada junta tendrá su propio  $v$  y su propio  $\theta$ , por lo que habrá tres variables de  $v$ , tres de  $\theta$  y una relacionada con la frecuencia. De esta forma, el sistema dinámico para tres juntas tiene 7 ecuaciones, lo que significa que cuando aumenta el número de juntas aumenta el número de ecuaciones. Este aumento de ecuaciones implica cambios en las subrutinas para graficar la curva  $\langle v \rangle / \Omega$  vs  $i_0$  y la sección de Poincaré

### 3.2.1. Subrutinas modificadas

El principal cambio del código para graficar las curvas  $\langle v \rangle / \Omega$  vs  $i_0$  se da en la subrutina *derivs*. En esta subrutina hemos reemplazado el sistema dinámico de una junta Josephson por el sistema dinámico correspondiente a tres juntas Josephson. Además, hemos modificado la matriz Jacobiana y la hemos adaptado al nuevo sistema de tres juntas. El código modificado se encuentra en las páginas 69 y 70 del [Apéndice B](#). Cabe mencionar que el resto de subrutinas funcionan de la misma manera que para una junta.

Con respecto a la sección de Poincaré, el cambio que implementamos en el código se debe a la imposibilidad de graficar en más de tres dimensiones. Esta complicación para graficar implica que, a pesar de lograr disminuir una dimensión del sistema mediante la sección de Poincaré, no podamos representar gráficamente las variables restantes del sistema. Por esta razón, modificamos el código de manera que permita graficar las variables del sistema en pares, es decir,  $\theta_i$  vs  $v_i$  para cada junta  $i$ , por separado. Esta separación se logra imprimiendo todas las variables en un archivo de datos y luego graficándolas en pares mediante *gnuplot*.

# Capítulo 4

## Resultados

En este capítulo se presentan los resultados de las simulaciones tanto para una como para tres juntas. Estos resultados incluyen varias curvas  $\langle v \rangle / \Omega$  vs  $i_0$  y  $\lambda_1$  vs  $i_0$  que, como se mencionó en el anterior capítulo, sirven para identificar bloqueos de fase. Para graficar estas curvas hemos utilizado regiones de parámetros donde el mayor exponente de Lyapunov, para  $i_0 = 0$ , es negativo. Con respecto a las regiones de parámetros en las que se obtuvo un exponente positivo, para  $i_0 = 0$ , hemos realizado caracterizaciones de algunos conjuntos de parámetros dentro de esta región, mediante la dimensión de Kaplan-Yorke, la entropía de Kolmogorov y la sección de Poincaré.

### 4.1. Una junta

Antes de presentar los resultados del estudio, recordemos que el espacio de parámetros para una junta Josephson se conforma por:

- Parámetro  $\Omega$ , que se relaciona con la frecuencia de las microondas con las que se irradia el sistema y con la frecuencia proveniente de la adimensionalización de las ecuaciones de Stewart-McCumber.
- Parámetro  $\alpha$ , que es un término resistivo relacionado con la capacitancia y con la resistencia.
- Parámetro  $i_1$ , que es el cociente de la corriente generada por las microondas y la corriente crítica.
- Parámetro  $i_0$ , que es la relación de la corriente aplicada a la junta con la corriente crítica.

Las relaciones entre estos parámetros se pueden encontrar en las ecuaciones 1.8 - 1.12.

En este capítulo, utilizando parámetros dentro de las regiones que no presentan caos (para  $i_0 = 0$ , Fig 3.1), graficamos curvas  $\langle v \rangle / \Omega$  vs  $i_0$  y  $\lambda_1$  vs  $i_0$  con el fin de identificar qué valores de los parámetros  $i_1$ ,  $\alpha$  y  $\Omega$  pueden ser usados en estándares de voltaje. Por otra parte, utilizando parámetros dentro de las regiones que presentan caos (para  $i_0 = 0$ , Fig 3.1), calculamos la dimensión de Kaplan-Yorke, la entropía de Kolmogorov y la sección de Poincaré, con el fin de saber qué tan bueno es un conjunto de parámetros  $i_1$ ,  $\alpha$  y  $\Omega$  para encriptación.

Debe señalarse que los bloqueos de fase que buscamos en este trabajo son de dos tipos. El primero de ellos se puede observar en la Fig 4.1 a) [16], en donde se observa una curva continua que presenta bloqueos de fase en diferentes intervalos de  $I_0$ , con  $I_0 \neq 0$ , donde  $I_0$  es la corriente aplicada a la juntura. Por su parte, en el segundo tipo de bloqueos, que se presentan en la Fig 4.1 b) [16], se observan voltajes constantes que tienen un corte con el eje  $I_0 = 0$ .

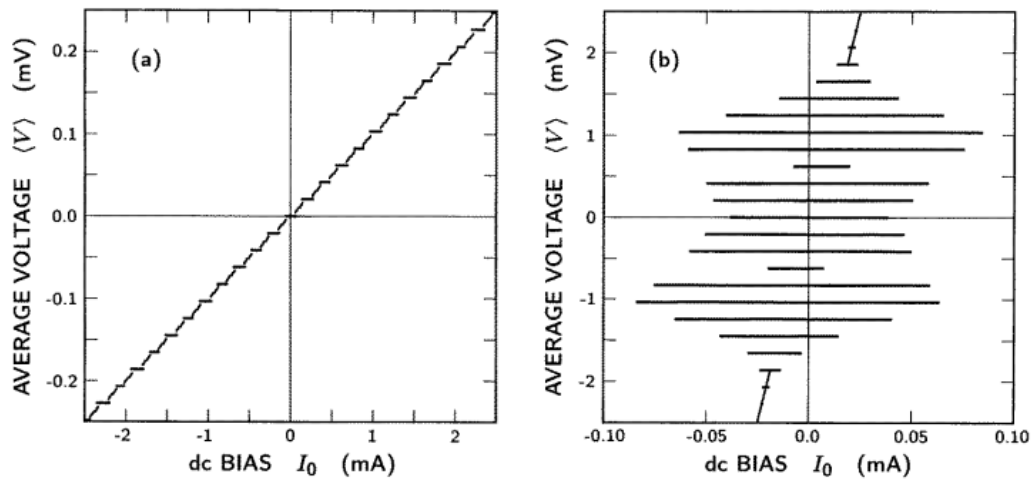


Figura 4.1: a) Bloqueos de fase sin histéresis b) Bloqueos de fase con histéresis

Los bloqueos de fase presentados en la Fig 4.1 b) se usan para realizar estándares de voltaje conocidos como “estándares de voltaje con histéresis”. Se llaman así porque al aumentar el valor de  $I_0$  y después disminuirlo, la gráfica  $\langle V \rangle$  vs  $I_0$  presenta curvas diferentes, similar a lo que sucede en la histéresis magnética. Estos estándares se caracterizan por tener voltajes con valores diferentes de cero cuando  $I_0 = 0$ . Son útiles porque se evita trabajar con un valor de  $I_0 \neq 0$ , que experimentalmente puede variar dentro de cierto rango y eliminar un bloqueo de fase [16].

Por su parte, los bloqueos presentados en Fig 4.1 a) se usan para realizar estándares de voltaje conocidos como “estándares de voltaje sin histéresis”. Estos estándares se caracterizan por presentar una sola curva independientemente de cómo varíe el parámetro  $I_0$ .

En las gráficas presentadas anteriormente, que fueron obtenidas por Kautz [16], se grafica  $\langle V \rangle$  vs  $I_0$  en lugar de  $\langle v \rangle / \Omega$  vs  $i_0$  (que es la gráfica usada en este trabajo). Como ya se mencionó en el capítulo anterior, en la gráfica  $\langle v \rangle / \Omega$  vs  $i_0$  es más fácil identificar bloqueos de fase, razón por la cual no usamos la curva  $\langle V \rangle$  vs  $I_0$ .

#### 4.1.1. Relación de los bloqueos de fase con los exponentes de Lyapunov

Con el fin de conocer si los parámetros de las regiones no caóticas antes mencionadas (para  $i_0 = 0$ ) producen los bloqueos de fase deseados, graficamos la curva  $\langle v \rangle / \Omega$  vs  $i_0$  para un conjunto de parámetros arbitrarios dentro de esta región. Dicho conjunto, escogido al azar, es:  $\Omega = 2$ ,  $\alpha = 0.8$  e  $i_1 = 80$ . Para estos parámetros, además de

la curva  $\langle v \rangle / \Omega$  vs  $i_0$  también presentamos la curva  $\lambda_1$  vs  $i_0$ . Esta última curva nos permite observar si existe una relación entre los bloqueos de fase y los exponentes de Lyapunov.

Cabe mencionar que a la curva  $\langle v \rangle / \Omega$  vs  $i_0$  la graficamos aumentando el valor de  $i_0$  desde 0 hasta 5 y luego disminuyendo el valor hasta 0 nuevamente (con el fin de observar si la curva presenta histéresis). En cada valor de  $i_0$  calculamos el promedio temporal del voltaje y lo colocamos en una gráfica para finalmente obtener la curva  $\langle v \rangle / \Omega$  vs  $i_0$ , que presentamos en la Fig 4.2 a). En dicha figura solo se observa una curva porque los valores de  $\langle v \rangle / \Omega$  son iguales al aumentar  $i_0$  y al disminuirlo.

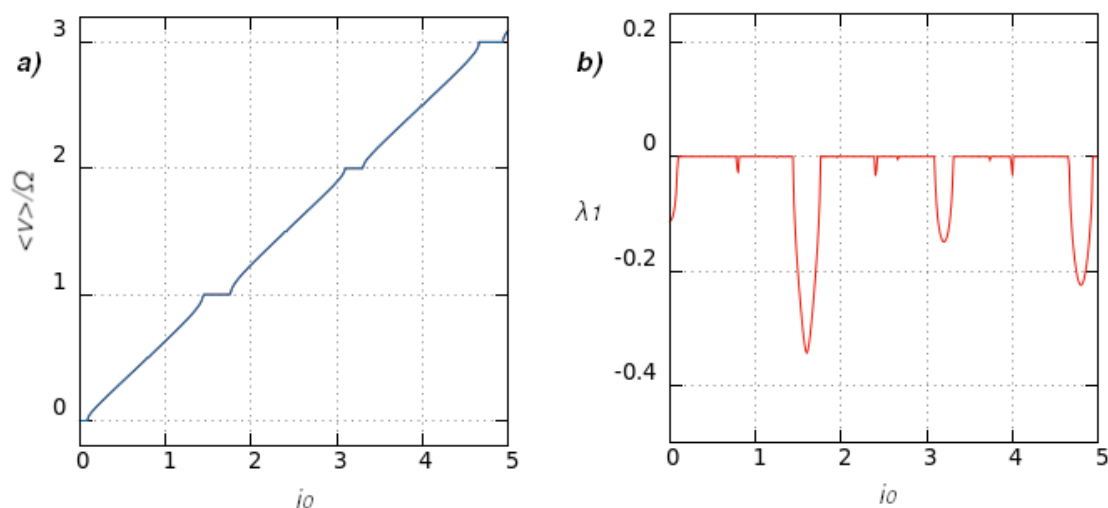


Figura 4.2: **a)** Curva  $\langle v \rangle / \Omega$  vs  $i_0$ , usando  $\Omega = 2$ ,  $\alpha = 0.8$ ,  $i_1 = 80$  **b)** Curva mayor exponente de Lyapunov vs  $i_0$  correspondiente a la curva **a)**

La Fig 4.2 a) muestra una curva sin cortes para todo valor de  $i_0$ . Para ciertos intervalos de  $i_0$  se observa un valor constante de  $\langle v \rangle / \Omega$ , que identificamos como bloqueos de fase. Por ejemplo, podemos mirar alrededor de  $i_0 = 0$ ,  $i_0 = 1.5$  e  $i_0 = 3.2$ , y observaremos líneas horizontales dentro de un intervalo de los  $i_0$  antes mencionados. Esta figura es muy parecida a la que se presentó para estándares de voltaje sin histéresis.

Recordemos que el voltaje adimensional es  $\langle v \rangle = n\Omega/m$ , donde  $n$  y  $m$  son dos números enteros. Tomando en cuenta esta ecuación, los bloqueos de fase de los  $i_0$  antes mencionados son los correspondientes a  $m = 1$  y  $n = 0, 1, 2$ . Estos valores dan las líneas horizontales encontradas en  $\langle v \rangle / \Omega = 0, 1, 2$ .

La Fig 4.2 b) muestra el mayor exponente de Lyapunov ( $\lambda_1$ ) en función de  $i_0$  para los parámetros  $\Omega = 2$ ,  $\alpha = 0.8$  e  $i_1 = 80$ , que son iguales a los usados en la Fig 4.2 a). Para realizar la gráfica hemos aumentado el valor de  $i_0$  desde 0 hasta 5 y luego lo hemos disminuido nuevamente hasta 0 (con el fin de observar si existe histéresis en esta curva). En cada valor de  $i_0$  hemos colocado el valor correspondiente al mayor exponente de Lyapunov, generando así la curva mostrada en color rojo.

En la curva de la Fig 4.2 b) se puede observar conjuntos de exponentes de Lyapunov negativos, que desde ahora llamaremos “pozos de Lyapunov” o “pozos”. Estos pozos de Lyapunov coinciden con los bloqueos de fase encontrados en la curva  $\langle v \rangle / \Omega$  vs  $i_0$  para  $i_0 = 0$ ,  $i_0 = 1.5$  e  $i_0 = 3.2$ .

En la Fig 4.2 b), además de los pozos de Lyapunov grandes, también se pueden observar pozos de Lyapunov pequeños en  $i_0 = 0.8, 2.4$  y  $4$ . Estos pozos parecen no corresponder a bloqueos de fase, porque a simple vista, en la curva  $\langle v \rangle / \Omega$  vs  $i_0$ , no se observan bloqueos de fase para estos valores de  $i_0$ . Para observar si estos pozos pequeños corresponden a bloqueos de fase, es necesario hacer un acercamiento en la curva  $\langle v \rangle / \Omega$  vs  $i_0$  en alguno de los valores de  $i_0$  mencionados.

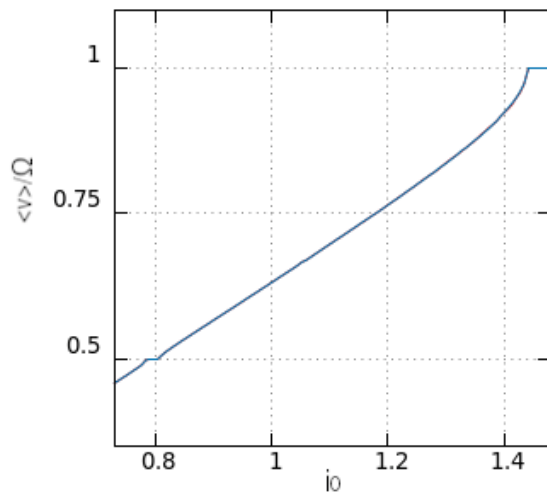


Figura 4.3: Acercamiento a la curva  $\langle v \rangle / \Omega$  vs  $i_0$  mostrada en Fig 4.2 a)

La Fig 4.3 muestra el valor  $\langle v \rangle / \Omega$  en función de  $i_0$  para los parámetros:  $\Omega = 2$ ,  $\alpha = 0.8$  e  $i_1 = 80$ . Esta curva es un acercamiento a la Fig 4.2 a) en el intervalo  $i_0 = (0.7, 1.5)$ .

En la curva  $\langle v \rangle / \Omega$  vs  $i_0$  de la Fig 4.3 podemos observar dos bloqueos de fase. Un bloqueo de fase se encuentra alrededor de  $i_0 = 1.5$ , y es el que se encontró a simple vista en la Fig 4.2 a). El otro bloqueo de fase se encuentra alrededor de  $i_0 = 0.8$  y corresponde al pozo pequeño que se encuentra en  $i_0 = 0.8$ . Es así que los exponentes de Lyapunov pueden ayudar a encontrar bloqueos de fase mediante los pozos de Lyapunov.

En esta subsección hemos encontrado bloqueos de fase útiles en estándares de voltaje sin histéresis, usando un conjunto de parámetros aleatorios dentro de la región no caótica antes mencionada (para  $i_0 = 0$ ). Cabe mencionar que los valores de  $m$  y  $n$  encontrados para los bloqueos de fase concuerdan con aquellos mencionados en el Capítulo 3. También hemos hallado una aparente relación entre el mayor exponente de Lyapunov y los bloqueos de fase. Esta relación tiene que ver con que encontramos pozos de Lyapunov que coinciden con bloqueos de fase, incluso cuando los bloqueos son muy pequeños y no se visualizan a simple vista. Así, los exponentes de Lyapunov pueden ser utilizados para detectar bloqueos de fase.

#### 4.1.2. Características de las curvas $\langle v \rangle / \Omega$ vs $i_0$ para diferentes valores de $i_1$

En esta subsección pretendemos observar el comportamiento de las curvas  $\langle v / \Omega \rangle$  vs  $i_0$  para los diferentes valores de  $i_1$  mencionados en el Capítulo 3, manteniéndonos con parámetros dentro de la región no caótica (para  $i_0 = 0$ ). Además, presentamos curvas

$\lambda_1$  vs  $i_0$  como una forma complementaria de analizar los bloqueos de fase. Con todo esto queremos saber si es mejor utilizar cierto valor de  $i_1$  para estándares de voltaje.

Las figuras 4.4 a)–4.4 f) muestran las curvas  $\langle v \rangle / \Omega$  en función de  $i_0$  para diferentes conjuntos de parámetros  $i_1$ ,  $\alpha$  y  $\Omega$ , que se especifican en la descripción de la Fig 4.4. Estas figuras se construyen de manera similar a las que fueron presentadas en la subsección anterior, es decir, aumentando el valor de  $i_0 = 0$  hasta el de  $i_0 = 4.5$ , para luego disminuirlo hasta  $i_0 = 0$  nuevamente, y colocando el valor  $\langle v \rangle / \Omega$  en cada valor de  $i_0$ . La diferencia principal radica en que, para estas figuras, a la curva que se obtiene al aumentar  $i_0$ , se le asigna el color rojo, mientras que a la que se obtiene al disminuir este parámetro, se le asigna el color azul.

En la Fig 4.4 a), alrededor del valor  $i_0 = 0.9$ , se puede observar una línea de color rojo y otra de color azul, es decir, dos curvas diferentes. Esto implica que el valor de  $\langle v \rangle / \Omega$ , cuando se aumenta  $i_0$ , es diferente al que se obtiene cuando se disminuye. Esta diferencia entre las curvas roja y azul es la histéresis que se mencionó al inicio del capítulo, y que también se puede observar a simple vista en las figuras 4.4 b) y 4.4 c) alrededor de  $i_0 = 0.9$  e  $i_0 = 0.7$ , respectivamente. Por otra parte, no se observa histéresis a simple vista en las figuras 4.4 d)–4.4 f).

Las figuras 4.4 a)–4.4 e) se graficaron con un parámetro  $\alpha = 0.8$ . De estas figuras, las tres primeras (4.4 a)–4.4 c)) presentan histéresis y las dos restantes no. Las figuras que presentan histéresis se han realizado para los tres valores de  $i_1$  más pequeños usados en este trabajo, es decir,  $i_1 = 2.5, 5$  y  $10$ . Por su parte, para los valores altos de  $i_1$  ( $30$  y  $50$ ), no se observa histéresis en este valor de  $\alpha$ . Al parecer, la histéresis para un  $\alpha$  dado desaparece cuando se trabaja con valores de  $i_1$  altos. Lo que implica que para estándares de voltaje sin histéresis se debe usar un valor de  $i_1$  alto.

Adelantándonos a la Subsección 4.1.4 y como una motivación para desarrollarla, presentamos la Fig 4.4 f) para un conjunto de parámetros que presentan histéresis y únicamente se varía el parámetro  $\alpha$ . Los parámetros de los que se habla son los mismos que se usaron para la Fig 4.4 c) a excepción de  $\alpha$ , que se ha tomado con un valor de  $0.98$ . El resultado obtenido al comparar las figuras 4.4 c) y 4.4 f) es una aparente reducción de la histéresis al aumentar el parámetro  $\alpha$ . Esto nos da un indicio de que podríamos disminuir este parámetro para obtener una histéresis más marcada y obtener estándares de voltaje con histéresis, es decir, que crucen el eje  $i_0 = 0$ . Cabe mencionar que en la Subsección 4.1.4 se realiza un análisis más completo al variar  $\alpha$ .

En cuanto a los bloqueos de fase, las figuras 4.4 a)– 4.4 f) presentan voltajes constantes que coinciden con los ciclos límite enunciados en el Capítulo 3, para diferentes valores de  $m$  y  $n$ .

Las figuras 4.5 a)–4.5 f) muestran el mayor exponente de Lyapunov en función de  $i_0$ . Estas gráficas se construyen en dos etapas. En la primera se aumenta el valor de  $i_0$  desde  $0$  hasta  $4.5$  y se coloca el valor del mayor exponente de Lyapunov en cada valor de  $i_0$  con color rojo. En la segunda etapa se disminuye el valor de  $i_0$  desde  $4.5$  hasta  $0$  y también se coloca el mayor exponente de Lyapunov, pero con color azul. Estas figuras se grafican con los mismos parámetros que las figuras mencionadas en el anterior párrafo.

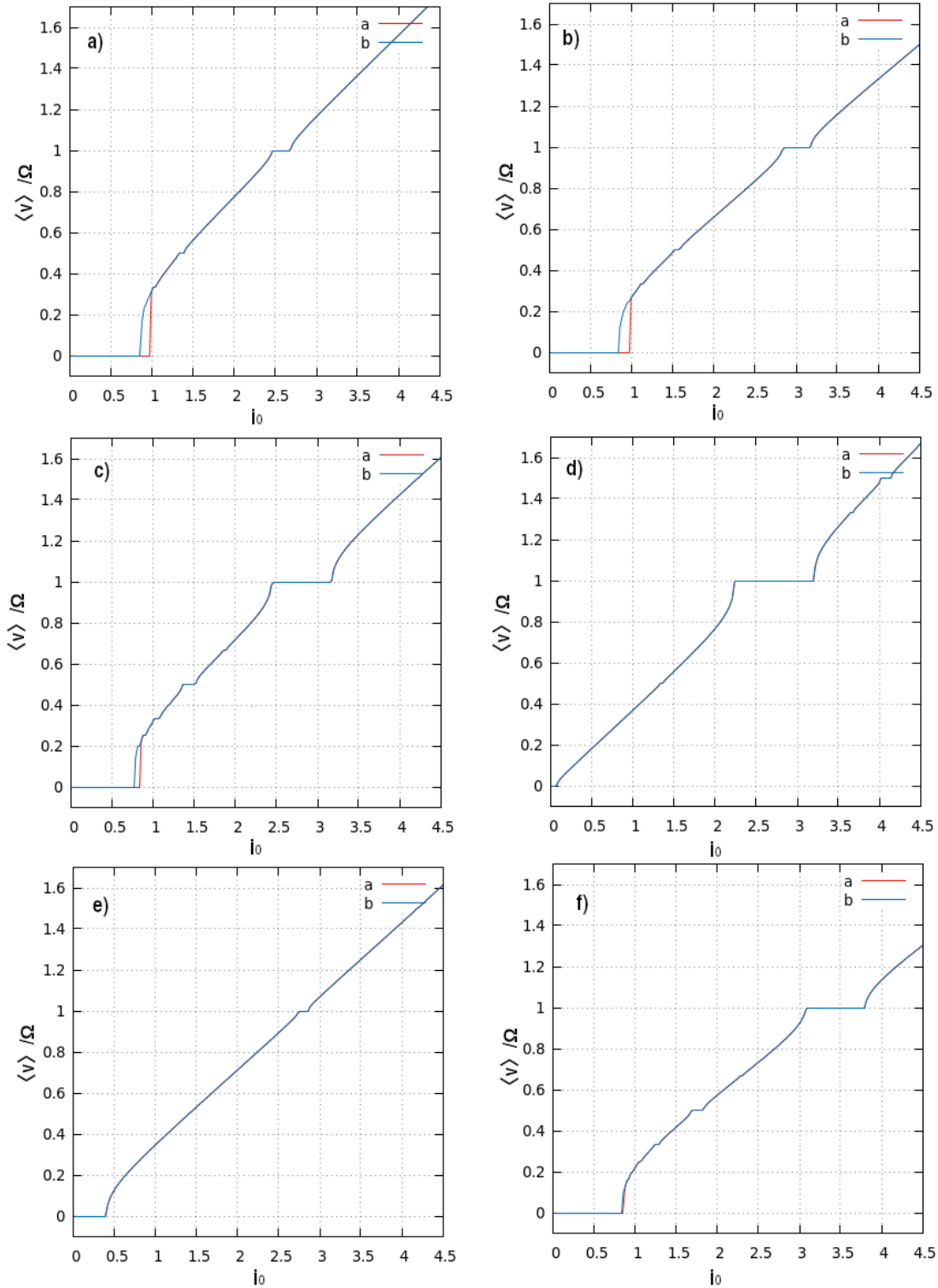


Figura 4.4: Curvas  $\langle v \rangle / \Omega$  vs  $i_0$  para diferentes parámetros a)  $i_1 = 2.5$ ,  $\Omega = 3.2$ ,  $\alpha = 0.8$  b)  $i_1 = 5$ ,  $\Omega = 3.75$ ,  $\alpha = 0.8$  c)  $i_1 = 10$ ,  $\Omega = 3.5$ ,  $\alpha = 0.8$  d)  $i_1 = 30$ ,  $\Omega = 3.4$ ,  $\alpha = 0.8$  e)  $i_1 = 80$ ,  $\Omega = 3.5$ ,  $\alpha = 0.8$  f)  $i_1 = 10$ ,  $\Omega = 3.5$ ,  $\alpha = 0.98$ . La línea roja (a) indica el aumento de  $i_0$ , la celeste (b) su disminución.



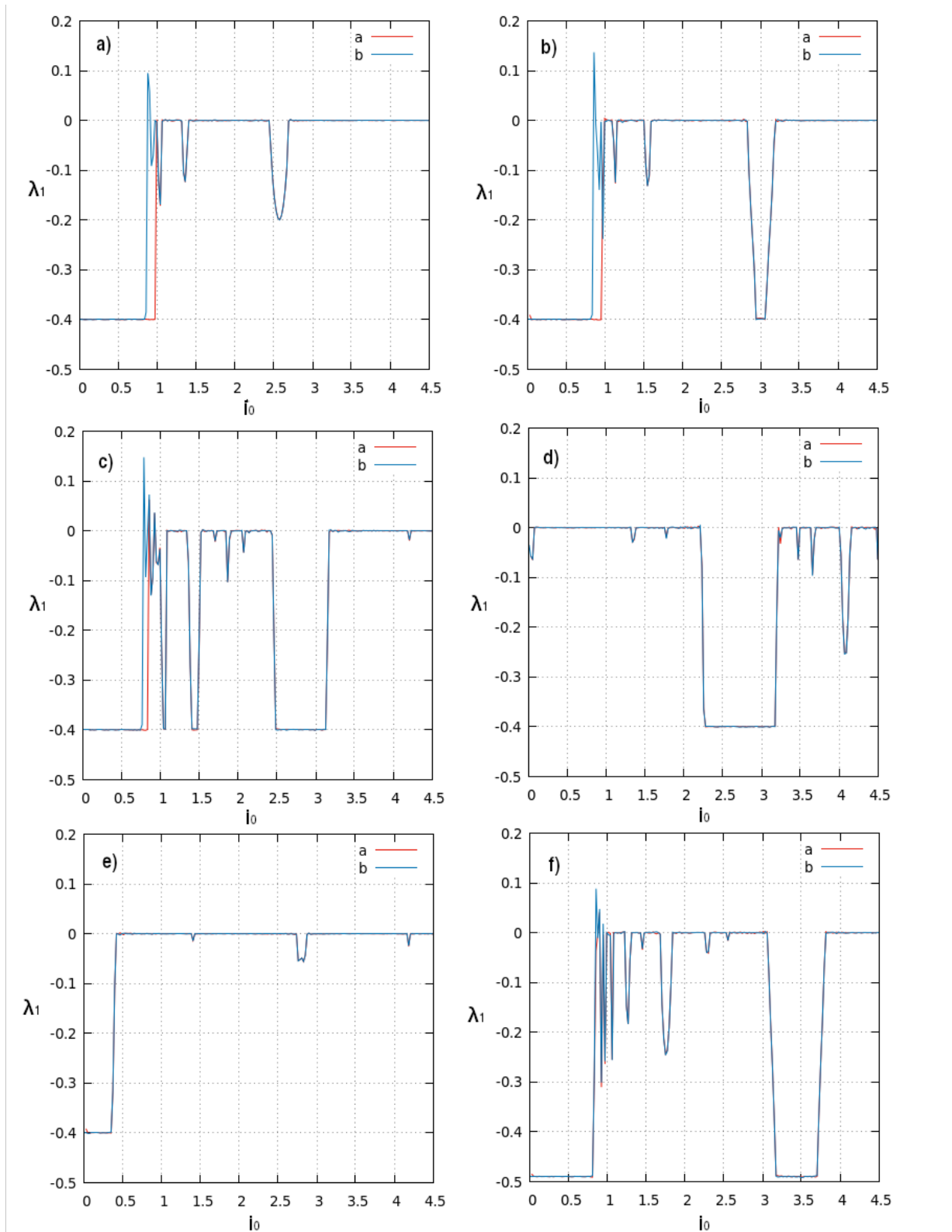


Figura 4.5: Máximo exponente de Lyapunov  $\lambda_1$  vs  $i_0$  correspondiente a las 6 curvas  $\langle v \rangle / \Omega$  vs  $i_0$  de la Fig. 4.4 en el mismo orden. La línea roja (a) indica el aumento de  $i_0$ , la celeste (b) su disminución.

En las figuras 4.5 a)– 4.5 c) se puede observar una línea roja y otra azul en el intervalo de  $i_0$  donde las correspondientes curvas  $\langle v \rangle / \Omega$  vs  $i_0$  presentan histéresis. Podemos especular que los exponentes de Lyapunov pueden ser utilizados para detectar histéresis mediante una doble línea en la gráfica de exponentes de Lyapunov. Por otra parte, en las figuras 4.5 a)– 4.5 f) se observa pozos de Lyapunov que nuevamente coinciden con los bloqueos de fase. Esta coincidencia es una confirmación de que los pozos de Lyapunov pueden ser usados para detectar bloqueos de fase y también es una confirmación de que los bloqueos de fase, observados en las curvas  $\langle v \rangle / \Omega$  vs  $i_0$ , existen.

En esta subsección observamos que para valores altos de  $i_1$  la juntura Josephson presenta bloqueos de fase sin histéresis. Este tipo de bloqueos de fase es útil para realizar estándares de voltaje sin histéresis, pues su gráfica es similar a la de la Fig 4.1 a). Por esta razón, un  $i_1$  alto es necesario en este tipo de estándares. Además, hemos obtenido una disminución de la histéresis para valores altos de  $\alpha$ , lo que indicaría que para este tipo de estándares de voltaje también es necesario un valor alto de  $\alpha$ .

### 4.1.3. Histéresis

Creemos que la histéresis en la juntura Josephson se debe a la existencia de múltiples atractores y que, dependiendo de las condiciones iniciales, el sistema evoluciona hacia un atractor u otro. En otras palabras, creemos que la histéresis de este sistema depende de las condiciones iniciales. Para probar esta hipótesis, en esta sección, comenzamos trabajando con un conjunto de parámetros fijo (que presente histéresis), en el cual buscaremos múltiples atractores y cómo influyen las condiciones iniciales.

El conjunto de parámetros que vamos a estudiar es el de la Fig 4.4 a) ( $i_1 = 2.5$ ,  $\Omega = 3.2$  y  $\alpha = 0.8$ ). En esta figura se observa histéresis para el intervalo  $i_0 = [0.85, 0.99]$ .

Fijaremos nuestra atención en el parámetro  $i_0 = 0.92$ . A este valor de  $i_0$  le corresponden dos valores de voltaje, que se deben a dos trayectorias (en el espacio de fases) con condiciones iniciales diferentes. Estas condiciones son dos puntos en el espacio de fases  $A$  y  $B$ , cuyos valores son  $A : \{\theta = 1.1402, v = -0.7563, \Omega\tau = 1.6953\}$  y  $B : \{\theta = 2.0265, v = -0.6503, \Omega\tau = 1.9198\}$ . Con  $A$  y  $B$  fijos, se desea saber qué sucede con el exponente de Lyapunov en puntos intermedios de una recta que una  $A$  y  $B$ . Para este fin, parametrizamos una recta de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \theta = u \\ v = 1.5872u - 2.5661 \\ \Omega\tau = 2.1469u - 2.4309 \end{cases} \quad (4.1)$$

donde  $u$  es el parámetro de la ecuación que va desde 1.1402 hasta 2.0265.

La Fig 4.6 a) presenta la curva  $\lambda_1$  en función del parámetro  $u$  de la curva paramétrica. Esta curva se construye variando el parámetro  $u$  desde 1.1402 hasta 2.0265 y en cada valor de dicho parámetro colocando su correspondiente exponente de Lyapunov. En esta figura se observa dos diferentes exponentes de Lyapunov, lo que implica que existen dos diferentes atractores para el conjunto de parámetros usado. Estos atractores se presentan en la Fig 4.6 b) y corresponden a los exponentes de Lyapunov encontrados en la Fig 4.6 a). El atractor morado corresponde a un  $\lambda_1 = -0.11$ , mientras que el verde corresponde a  $\lambda_1 = -0.4$ .

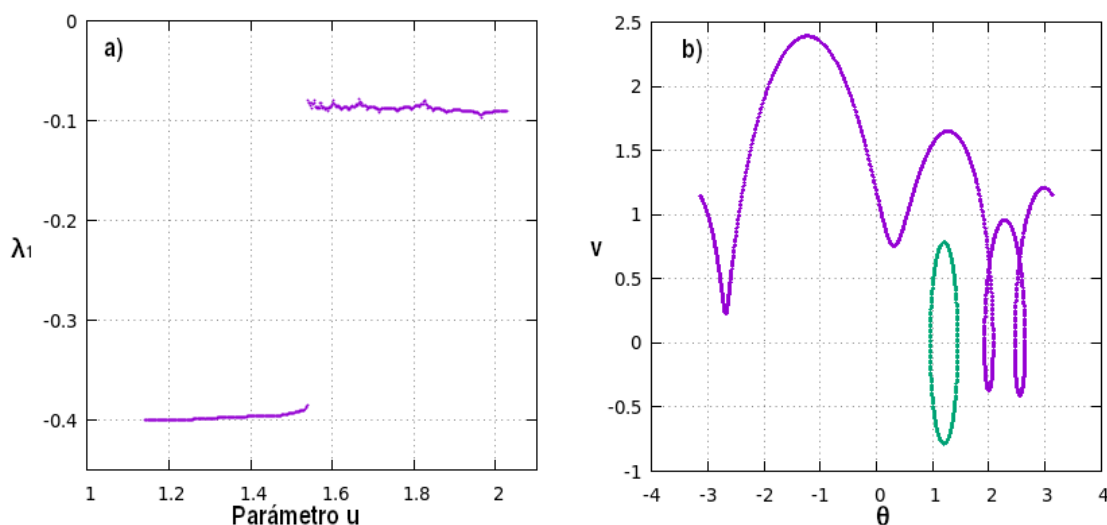


Figura 4.6: **a)** Curva  $\lambda_1$  vs  $u$  para la curva paramétrica **b)** Atractores correspondientes a  $i_0 = 0.92$

Se determinó que para todo  $i_0$ , un atractor similar al morado (Fig 4.6) es responsable de los promedios  $\langle v \rangle / \Omega \neq 0$ , mientras que uno similar al verde (Fig 4.6) es responsable de los promedios  $\langle v \rangle / \Omega = 0$ . Además, se encontró que para un valor de  $i_0 < 0.85$ , donde no hay histéresis, solo existe un atractor y tiene la misma forma que el atractor verde en la Fig 4.6 b). Por otra parte, para un valor de  $i_0 > 0.99$ , donde tampoco se presenta histéresis, también hay un único atractor, que tiene una forma similar al atractor morado en la Fig 4.6 b).

Con estos antecedentes, al comenzar la curva  $\langle v \rangle / \Omega$  vs  $i_0$ , cuando  $i_0 < 0.86$ , el atractor resultante es uno parecido al de color verde en la Fig 4.6. Cuando se aumenta  $i_0$ , las condiciones iniciales, dadas por las condiciones finales del  $i_0$  anterior, se encuentran cerca de un atractor con la forma del atractor de color verde. Por esta razón, el sistema evolucionará hacia un atractor similar al verde. Después, al alcanzar un valor  $i_0 > 0.99$  el atractor cambia, pues en esa zona solo existen atractores similares al atractor morado en la Fig 4.6. Al disminuir  $i_0$ , desde  $i_0 > 0.99$ , las condiciones iniciales, dadas por las condiciones finales del  $i_0$  anterior, se encuentran cerca de un atractor similar al morado. Por esta razón, el sistema se mantiene en un atractor similar al morado.

Los hechos presentados en el anterior párrafo implican que la histéresis se da por las condiciones iniciales (para cada  $i_0$ ). En caso de que existiesen más atractores, el cambio entre atractores dependería de las condiciones iniciales de cada  $i_0$  y no de que en el sistema se aumente o se disminuya  $i_0$ . Este razonamiento también explica la existencia de los estándares de voltaje con histéresis, en donde habrían varios atractores en  $i_0 = 0$  que dan los múltiples bloqueos de fase observados.

#### 4.1.4. Características de las curvas $\langle v \rangle / \Omega$ vs $i_0$ al disminuir el parámetro $\alpha$

Con la finalidad de saber si para valores bajos de  $\alpha$  obtenemos curvas  $\langle v / \Omega \rangle$  vs  $i_0$  que corten con el eje  $i_0 = 0$ , presentamos la Fig 4.7 a). En esta gráfica podemos

ver cuatro curvas  $\langle v \rangle / \Omega$  vs  $i_0$  con distintos colores. Cada color corresponde a un valor distinto de  $\alpha$ : rojo corresponde a  $\alpha = 0.45$ , azul corresponde a  $\alpha = 0.15$ , morado corresponde a  $\alpha = 0.05$  y verde corresponde a  $\alpha = 0.015$ . Cabe mencionar que hemos graficado estas curvas con un procedimiento similar al de las subsecciones anteriores, es decir, aumentando  $i_0$  hasta cierto valor y luego disminuyéndolo.

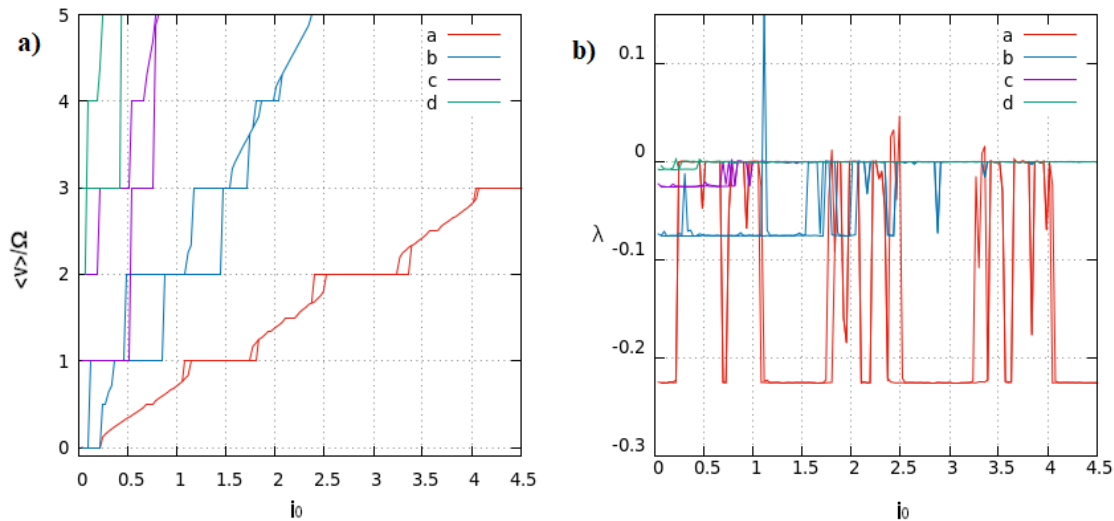


Figura 4.7: **a)** Curvas  $\langle v \rangle / \Omega$  vs  $i_0$  con variaciones del parámetro  $\alpha$  para  $\Omega = 3.2$  e  $i_1 = 30$ . **b)** Curva  $\lambda_1$  vs  $i_0$  con variaciones del parámetro  $\alpha$  para  $\Omega = 3.2$  e  $i_1 = 30$ . Tanto para **a)** como para **b)**, las curvas tituladas con a, b, c y d (rojo, celeste, morado y verde) corresponden a  $\alpha = 0.45$ ,  $0.15$ ,  $0.05$  y  $0.015$  respectivamente.

En la Fig 4.7 **a)** podemos observar que las cuatro curvas presentan histéresis. Esta histéresis es menos marcada en la curva roja ( $\alpha = 0.45$ ) y más marcada para las demás curvas ( $\alpha = 0.15, 0.05$  y  $0.015$ ). Este hecho parece indicar que la histéresis aumenta al disminuir en parámetro  $\alpha$ .

Por otra parte, podemos observar que las curvas  $\langle v \rangle / \Omega$  se acercan al eje  $i_0 = 0$  a medida que el parámetro  $\alpha$  disminuye. Por esta razón, observamos que la curva roja ( $\alpha = 0.45$ ) es la más alejada del eje  $i_0 = 0$  y que la curva verde ( $\alpha = 0.015$ ) es la más acercada al eje  $i_0 = 0$ . De hecho, la curva verde está tan cerca del eje  $i_0 = 0$  que presenta un bloqueo de fase diferente de cero ( $\langle v \rangle / \Omega \neq 0$ ) en  $i_0 = 0$ . Este bloqueo se encuentra a lo largo del intervalo  $i_0 = [0, 0.4]$  y tiene un valor de  $\langle v \rangle / \Omega = 3$ . Cabe mencionar que no solamente la curva verde presenta bloqueos de fase diferentes de cero, también podemos observar dos bloqueos de fase diferentes de cero en la curva morada ( $\alpha = 0.05$ ). En esta curva, el primer bloqueo de fase tiene un valor de  $\langle v \rangle / \Omega = 1$  dentro de un intervalo  $i_0 = [0, 0.5]$ , mientras que el segundo tiene un valor de  $\langle v \rangle / \Omega = 2$  dentro de un intervalo  $i_0 = [0, 0.2]$ .

Los hechos señalados en el párrafo anterior son una confirmación del indicio de que valores bajos de  $\alpha$  generan bloqueos de fase que cortan el eje  $i_0 = 0$ . Por esta razón, dichos valores de  $\alpha$  se estudian con más detalle en la siguiente subsección.

Las figura Fig 4.7 **b)** muestra el máximo exponente de Lyapunov  $\lambda_1$  en función de  $i_0$ . Los parámetros son los mismos que los mencionados anteriormente para las curvas

$\langle v \rangle / \Omega$  vs  $i_0$  (Fig 4.7 a)). Además, los colores de las curvas se mantienen para los diferentes valores de  $\alpha$ . Todas las curvas de la Fig 4.7 b) confirman los resultados obtenidos de las curvas  $\langle v \rangle / \Omega$  vs  $i_0$  de la Fig 4.7 a), en cuanto a bloqueos de fase e histéresis.

En esta subsección, mediante la variación del parámetro  $\alpha$ , hemos observado un aumento de la histéresis al disminuir el valor de  $\alpha$ . Cuando dicho parámetro alcanza el valor de  $\alpha = 0.05$  observamos que los bloqueos de fase cortan el eje  $i_0 = 0$ . Por esta razón, un valor de  $\alpha < 0.05$  podría ser útil para realizar estándares de voltaje con histéresis (como el mostrado en la Fig 4.1 b)). Dichos valores de  $\alpha$  se estudian en la siguiente subsección.

#### 4.1.5. Estándares de voltaje con histéresis

La idea de los estándares de voltaje con histéresis, como se mencionó al principio del capítulo, es usar bloqueos de fase que crucen el eje  $i_0 = 0$ . Las observaciones realizadas en las gráficas de la subsección anterior indican que estos bloqueos de fase se logran con un valor de  $\alpha$  bajo, menor que 0.05. Por esta razón, y para observar si esto es así, en esta sección se presentan tres curvas  $\langle v \rangle / \Omega$  vs  $i_0$  con el valor de  $\alpha$  menor que 0.05. Además, en estas curvas, variamos el valor de  $i_1$  para observar su influencia en los bloqueos de fase.

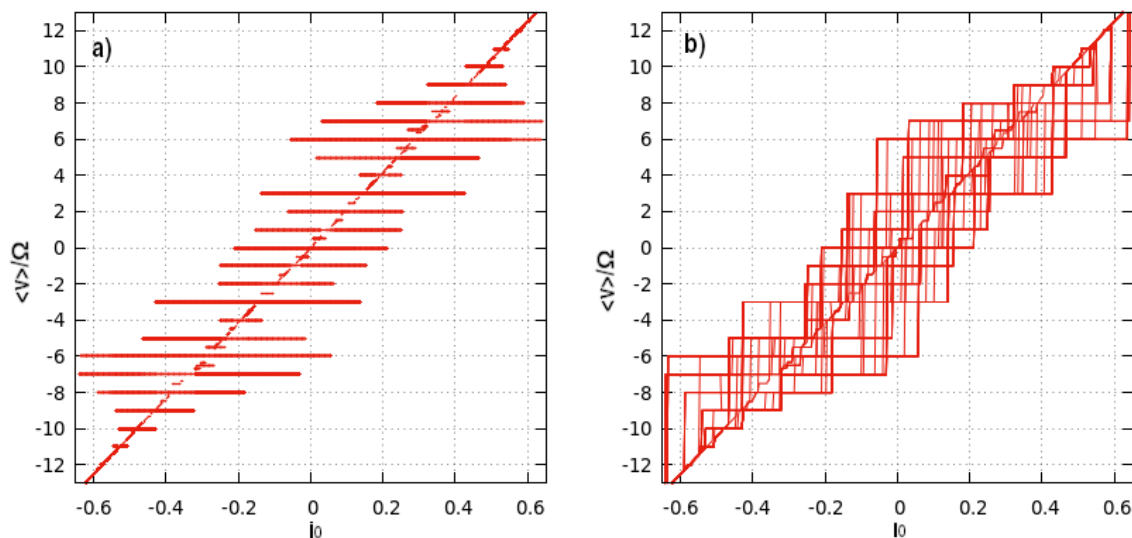


Figura 4.8: Curva  $\langle v \rangle / \Omega$  vs  $i_0$  para  $\Omega = 3.2$ ,  $\alpha = 0.015$  e  $i_1 = 80$  a) Sin líneas de histéresis b) con líneas de histéresis

La Fig 4.8 a) presenta el valor de  $\langle v \rangle / \Omega$  en función de  $i_0$  para los parámetros  $\Omega = 3.2$ ,  $i_1 = 80$  y  $\alpha = 0.015$ . Para construir esta figura se aumenta el valor de  $i_0$  desde  $-0.65$  hasta  $0.65$  y luego se lo disminuye hasta  $-0.65$  nuevamente. En cada valor de  $i_0$  se coloca su correspondiente valor de  $\langle v \rangle / \Omega$ . El procedimiento se repite 1000 veces con el fin de observar si se producen diferentes caminos de histéresis. Cabe considerar que en esta figura se colocan únicamente los puntos y no se los une con líneas.

La Fig 4.8 b) muestra los puntos de la gráfica anterior unidos con líneas, según el orden en el que aparecen. Por ejemplo, si luego del par ordenado  $(0,0)$ , se aumenta  $i_0$  y se obtiene  $(0.1,1)$  estos dos puntos se unen con una línea. Esta gráfica se puede ver como la gráfica de histéresis de la Fig 4.8 a), porque muestra los diferentes caminos que toma el valor de  $\langle v \rangle / \Omega$  cuando varía el valor de  $i_0$ .

En la Fig 4.8 a), los valores de  $\langle v \rangle / \Omega$  de las líneas horizontales que se observan concuerdan con los ciclos límite mencionados en el Capítulo 3, para diferentes  $m$  y  $n$ . Por ejemplo, los valores que están en  $\langle v \rangle / \Omega = 2$  corresponden a  $m = 1$  y  $n = 2$ . Estas líneas horizontales son bloqueos de fase porque, como podemos ver en Fig 4.8 b), los diferentes caminos de histéresis forman las líneas horizontales en Fig 4.8 a), es decir, un voltaje constante dentro de cierto intervalo de  $i_0$ . Todos los bloqueos de fase que se observan en la Fig 4.8 a) se pueden alcanzar variando el valor de  $i_0$ , de modo que siga uno de los caminos de la Fig 4.8 b) y que pase por el bloqueo de fase deseado.

Algunos de los bloqueos de fase presentes en la Fig 4.8 a) cruzan el eje  $i_0 = 0$ , como es el caso de  $\langle v \rangle / \Omega = 6, 4, 2$  y  $1$ . Es así que hemos encontrado bloqueos de fase que se pueden usar como estándares de voltaje con histéresis. Además, hemos comprobado que valores bajos de  $\alpha$  producen este tipo de estándares de voltaje.

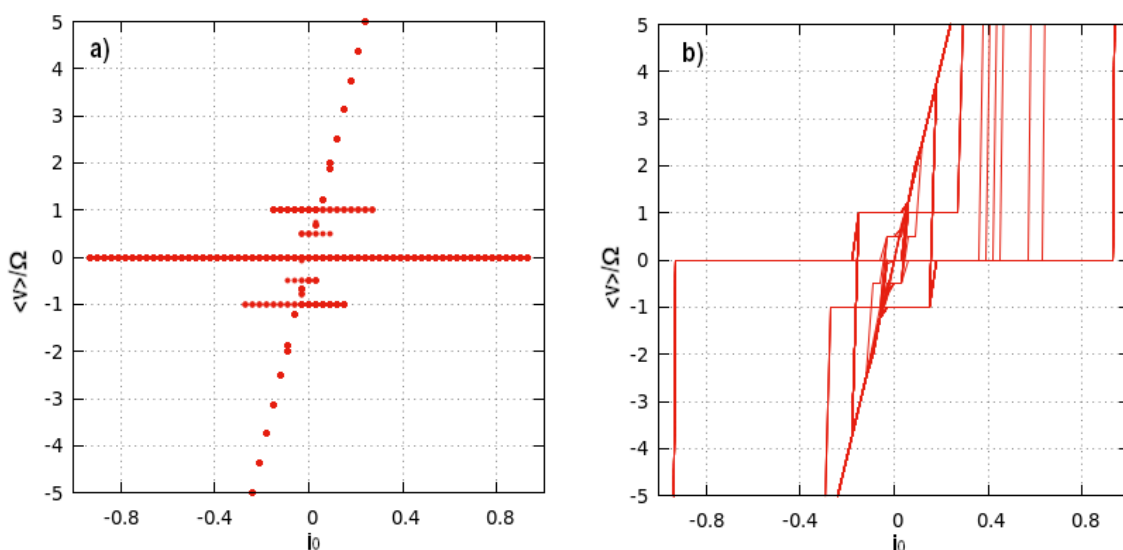


Figura 4.9: Curva  $\langle v \rangle / \Omega$  vs  $i_0$  para  $\Omega = 3.2$ ,  $\alpha = 0.015$  e  $i_1 = 5$  a) Sin líneas de histéresis b) con líneas de histéresis

La Fig 4.9 a) muestra el valor de  $\langle v \rangle / \Omega$  en función de  $i_0$  para los parámetros  $\Omega = 3.2$ ,  $i_1 = 5$  y  $\alpha = 0.015$ . Esta figura se realizó de la misma forma que la figura anterior (Fig 4.8), pero dentro de un intervalo  $i_0 = [-1.0, 1.0]$ . Por otra parte, la Fig 4.9 b), que contiene los caminos de histéresis, se construye uniendo los puntos de la Fig 4.9 a) en orden de aparición. Estas dos figuras se realizan con la intención de observar qué sucede con los bloqueos de fase para un  $i_1$  bajo en comparación con el de la figura anterior, que fue  $i_1 = 80$ .

En la Fig 4.9 a) se puede observar cinco bloqueos de fase. La cantidad de bloqueos de fase en esta figura es menor que la cantidad de bloqueos de fase de la figura para

$i_1 = 80$ ,  $\Omega = 3.2$  y  $\alpha = 0.015$ . En dicha figura se presentan 23 bloqueos de fase mientras que en la Fig 4.9 a), como ya se ha mencionado, se presentan solo 5 bloqueos de fase. Estas observaciones indican que el número de bloqueos de fase es mayor para valores de  $i_1$  altos. Por lo tanto, nuevamente es beneficioso escoger valores de  $i_1$  altos.

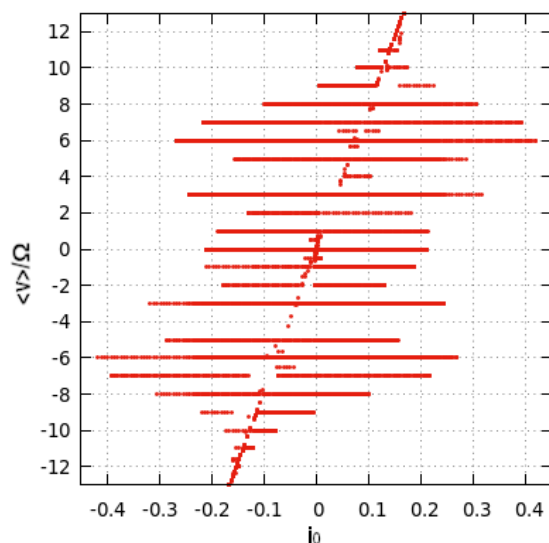


Figura 4.10: Curva  $\langle v \rangle / \Omega$  vs  $i_0$  para  $\Omega = 3.2$ ,  $\alpha = 0.0004$  e  $i_1 = 80$

La Fig 4.10 muestra una curva  $\langle v \rangle / \Omega$  en función de  $i_0$ . Esta figura se construye de la misma forma que las anteriores curvas  $\langle v \rangle / \Omega$  vs  $i_0$  presentadas en esta subsección. El objetivo de presentar esta figura es averiguar qué sucede con los bloqueos de fase cuando el parámetro  $\alpha$  está muy cercano a cero, en este caso  $\alpha = 0.0004$ . Con este valor de  $\alpha = 0.0004$ , se observa que la gráfica se acerca más al eje  $i_0 = 0$  en comparación con la Fig 4.8 a) y por lo tanto, más de los bloqueos de fase cruzan este eje. Esto implica que para realizar estándares de voltaje con histéresis es beneficioso escoger un  $\alpha$  cercano a cero, porque más bloqueos de fase cruzan el eje  $i_0 = 0$ .

En esta subsección se ha obtenido que, para estándares de voltaje con histéresis, es beneficioso escoger valores altos de  $i_1$ , porque dan mayor número de bloqueos de fase. También se encontró que es preferible usar un valor de  $\alpha$  cercano a cero, porque permite que la mayoría de bloqueos de fase crucen el eje  $i_0 = 0$ . Los parámetros así escogidos reproducen algunos estándares de voltaje presentados por Kautz en [16].

## 4.2. Tres juntas

En esta sección se va a utilizar algunos conjuntos de parámetros de la sección anterior que resultaron ser útiles en estándares de voltaje. Usando estos conjuntos de parámetros planteamos un arreglo de tres juntas y, mediante simulaciones, observamos si los bloqueos de fase aumentan su magnitud.

En este contexto, uno de los conjuntos de parámetros útiles en estándares de voltaje sin histéresis fue:  $i_1 = 80$ ,  $\alpha = 0.8$  y  $\Omega = 2$ . Por otra parte, uno de los que fueron útiles

en estándares de voltaje con histéresis fue:  $i_1 = 80$ ,  $\alpha = 0.004$  y  $\Omega = 3.2$ . Con estos dos conjuntos de parámetros se va a realizar curvas  $\langle v \rangle / \Omega$  vs  $i_0$  y  $\lambda_1$  vs  $i_0$  para observar lo que sucede con los bloqueos de fase.

Cabe recordar que para un arreglo de  $n$ -junturas tenemos un parámetro extra, que es  $\sigma$ . Este parámetro es el coeficiente de acoplo del arreglo ( $\sigma = R/R_L$ ). Si este valor es cero en el sistema de  $n$ -junturas, el sistema actúa como  $n$ -junturas separadas, pues las ecuaciones de cada juntura se vuelven independientes porque el acoplo entre ellas no existe ( $\sigma = 0$ ). Esta independencia en las ecuaciones implica que los voltajes de las junturas se suman. Por esta razón, para que el sistema de junturas que nosotros estudiamos no tenga mucha diferencia con un sistema de junturas separadas, tomamos valores bajos del parámetro  $\sigma$ .

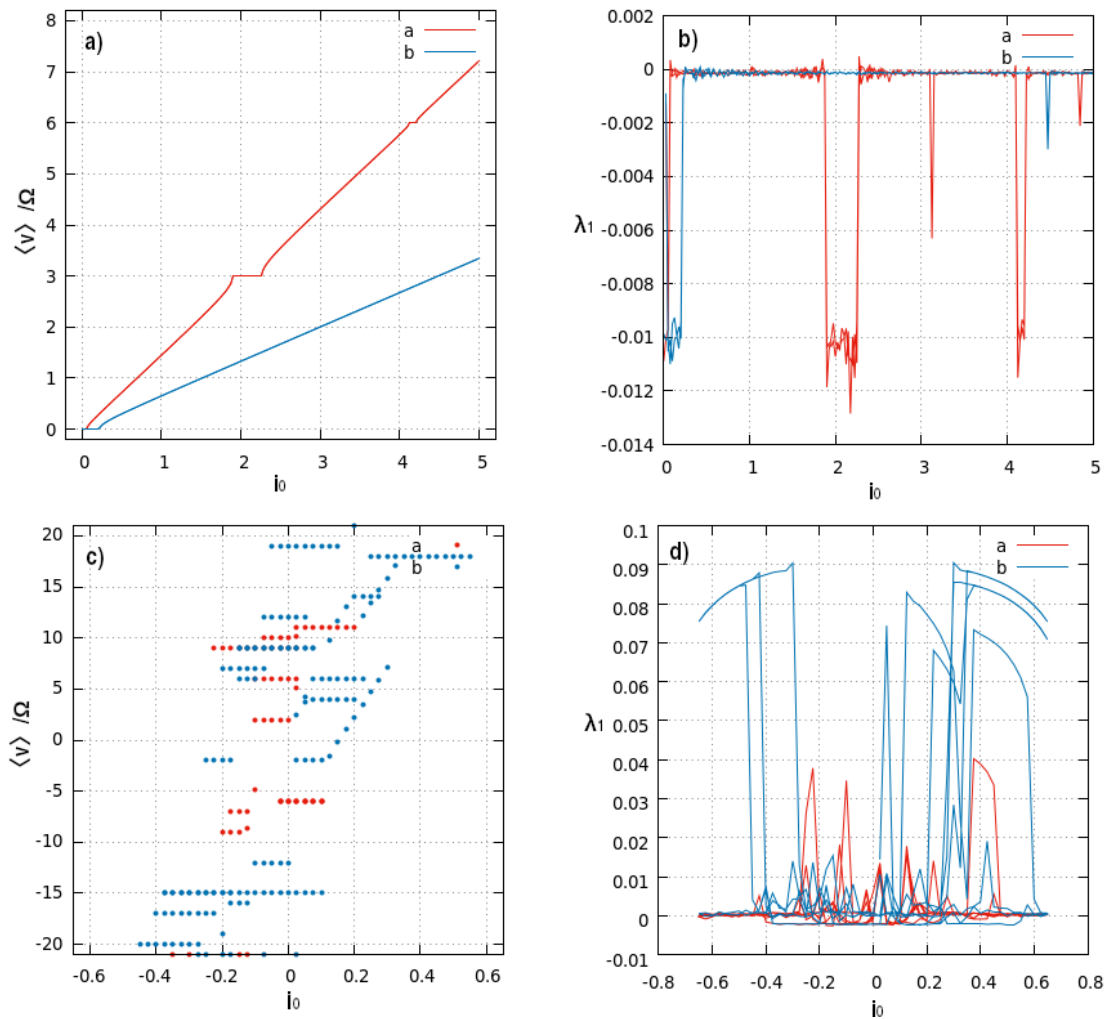


Figura 4.11: Curvas  $\langle v \rangle / \Omega$  vs  $i_0$  y sus correspondientes curvas de exponentes de Lyapunov para parámetros estudiados en una sola juntura. La línea roja (a) representa una constante de acoplo  $\sigma = 0.1$  mientras que la azul (b) representa un valor  $\sigma = 0.6$ . **a)** y **b)**  $\Omega = 2$ ,  $\alpha = 0.8$  e  $i_1 = 80$  **c)** y **d)**  $\Omega = 3.2$ ,  $\alpha = 0.004$  e  $i_1 = 80$

La Fig 4.11 a) muestra dos curvas  $\langle v \rangle / \Omega$  en función de  $i_0$  para el conjunto de



parámetros  $\Omega = 2$ ,  $\alpha = 0.8$  e  $i_1 = 80$ . La diferencia entre las dos curvas es la constante de acoplo  $\sigma$ , que para la curva roja toma un valor de 0.1 y para la azul de 0.6.

En la Fig 4.11 a), en la curva roja, podemos observar dos bloqueos de fase, en  $\langle v \rangle / \Omega = 3$  y 6, lo que quiere decir que con el arreglo hemos logrado aumentar el valor de los bloqueos de fase, pues con tres juntas se ha triplicado el valor de los bloqueos de fase que se observaron con una sola junta (con los mismos parámetros). Por su parte, en la curva azul, realizada con un valor más alto de  $\sigma$ , no se pueden observar a simple vista bloqueos de fase. Con estos antecedentes, al parecer es conveniente usar un valor bajo de  $\sigma$ . Esto tiene sentido pues, como se mencionó anteriormente, con un  $\sigma = 0$  el comportamiento sería el de tres juntas separadas y cada una aportaría de igual manera para producir los bloqueos de fase multiplicados por tres.

La Fig 4.11 b) muestra el mayor exponente de Lyapunov en función de  $i_0$  y corresponde a los parámetros usados en la Fig 4.11 a). Así mismo, la curva roja corresponde a un  $\sigma$  de 0.1 y la azul de 0.6. En esta curva se puede observar que los pozos de Lyapunov siguen correspondiendo con los bloqueos de fase en la curva roja. También se observa un pozo de Lyapunov en la curva azul en  $i_0 = 4.3$ , que corresponde a un bloqueo de fase diminuto en la curva azul de la Fig 4.11 a) para el mismo valor de  $i_0$ .

La Fig 4.11 c) muestra curvas  $\langle v \rangle / \Omega$  en función de  $i_0$  para el conjunto de parámetros ( $\Omega = 3.2$ ,  $\alpha = 0.004$  e  $i_1 = 80$ ), mientras que la Fig 4.11 d) muestra el mayor exponente de Lyapunov en función de  $i_0$  para los mismos parámetros. La curva azul se realiza con un  $\sigma$  de 0.1 y la azul de 0.6. En la Fig 4.11 c) solo se muestran algunos puntos de los bloqueos de fase (porque el tiempo que demora correr el algoritmo es muy grande).

En la Fig 4.11 c) se puede observar bloqueos de fase que cortan el eje  $i_0 = 0$ , como el que se muestra en  $\langle v \rangle / \Omega = 9$ , para la curva azul, y  $\langle v \rangle / \Omega = -6$ , para la curva roja. De esta manera hemos logrado triplicar el valor de los bloqueos de fase, pues aparecen en valores de  $\langle v \rangle / \Omega$  múltiplos de tres. Por su parte, los exponentes de Lyapunov correspondientes a estas curvas corroboran nuestros resultados mediante los pozos de Lyapunov presentes.

Con los arreglos de tres juntas se ha encontrado que los bloqueos triplican su valor. Por esta razón, la configuración usada en este trabajo puede ser usada para realizar estándares de voltaje, ya sea con histéresis o sin histéresis, siempre y cuando se use los parámetros mencionados en las secciones anteriores.

### 4.3. Caracterización de soluciones caóticas en $i_0 = 0$

En esta sección nos enfocaremos en la región de parámetros caóticos (para  $i_0 = 0$ ) que presentamos en el Capítulo 3, es decir, en la región azul de la Fig 3.1. Esta región de parámetros, por el hecho de presentar caos, puede ser utilizadas para encriptación, como se menciona en [20, 21]. Dichas soluciones deben ser caracterizadas para su correcto uso en encriptación, porque, según Guillen [20] y Silva[21], las soluciones óptimas para encriptación son aquellas con una dimensión de Kaplan-Yorke alta o una entropía de Kolmogorov alta. Tanto la entropía de Kolmogorov como la dimensión de Kaplan-Yorke, en este trabajo, se calculan mediante los algoritmos presentados en el Apéndice A.

Una forma de contrastar la información obtenida a partir de la dimensión de Kaplan-

Yorke y de la entropía de Kolmogorov es la sección de Poincaré. Por esta razón, en la presente sección, mostramos las gráficas de la sección de Poincaré para los conjuntos de parámetros que se caracterizan mediante la dimensión de Kaplan-Yorke y la entropía de Kolmogorov.

### 4.3.1. Una juntura

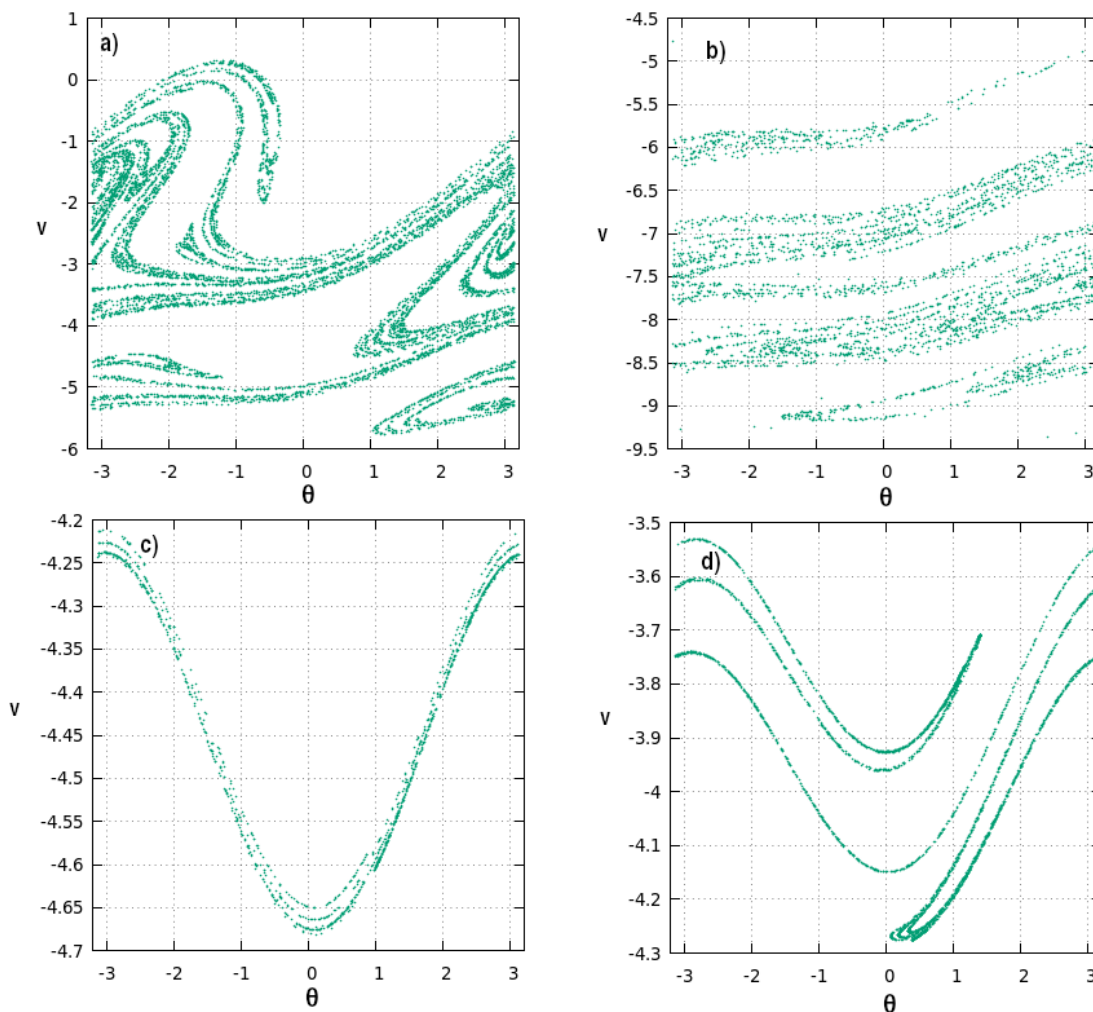


Figura 4.12: Secciones de Poincaré con  $i_1 = 2.5$ ,  $i_0 = 0$  y  $\Omega$ ,  $\alpha$  **a)**  $\Omega = 0.82$ ,  $\alpha = 0.1$  **b)**  $\Omega = 0.32$ ,  $\alpha = 0.07$  **c)**  $\Omega = 0.12$ ,  $\alpha = 0.23$  **d)**  $\Omega = 0.32$ ,  $\alpha = 0.3$

La Fig 4.12 a) muestra la sección de Poincaré para el conjunto de parámetros  $\Omega = 0.82$ ,  $\alpha = 0.1$ ,  $i_1 = 2.5$  e  $i_0 = 0$ . Esta figura se realiza colocando el par ordenado  $(\theta, v)$  en un plano cada vez que  $\tau\Omega = 2k\pi$ , donde  $k$  es un entero. Las figuras 4.12 b)–4.12 d) también presentan secciones de Poincaré realizadas de la misma manera. La diferencia con la primera figura son los parámetros. Los valores de los parámetros son  $(\Omega = 0.32, \alpha = 0.07, i_1 = 2.5, i_0 = 0)$ ,  $(\Omega = 0.12, \alpha = 0.23, i_1 = 2.5, i_0 = 0)$  y  $(\Omega = 0.32, \alpha = 0.3, i_1 = 2.5, i_0 = 0)$  para las figuras 4.12 b), 4.12 c) y 4.12 d) respectivamente. Los conjuntos de parámetros presentados fueron escogidos al azar

entre aquellos que en la [Fig 3.1](#) presentan un exponente de Lyapunov positivo, es decir, en la región caótica.

En la [Fig 4.12 a\)](#) se puede observar que los puntos de la sección de Poincaré forman una figura. Si observamos cerca del punto  $(1, -5.8)$  podemos observar que la figura se repite dentro de sí misma con un tamaño menor. Esto también se puede observar en diferentes puntos de la figura, como  $(-2, -1)$  o  $(3; -3)$ . Esto sugiere un comportamiento fractal y por lo tanto se espera una dimensión no entera. Este comportamiento también se puede observar en las figuras [4.12 b\)](#)– [4.12 d\)](#) en una menor cantidad.

<a href="#">Fig 4.12</a>	$\lambda_1$	$\lambda_2$	d	K	T
<b>a)</b>	0.21113	-0.31112	1.678	0.21113	77.21
<b>b)</b>	0.16969	-0.23696	1.705	0.16969	100.68
<b>c)</b>	0.05281	-0.28277	1.187	0.05281	317.36
<b>d)</b>	0.11618	-0.43558	1.266	0.11618	140.31

Tabla 4.1: Exponentes de Lyapunov, dimensiones de kaplan-Yorke (d), entropía de Kolmogorov (K) y tiempo de separación (T) correspondientes a las gráficas de la [Fig 4.12](#)

La [Tabla 4.1](#) presenta los exponentes de Lyapunov para las figuras antes mencionadas. Con estos exponentes se obtuvo la dimensión de Kaplan-Yorke ( $d_k$ ), la entropía de Kolmogorov (K) y el tiempo de separación de las curvas con condiciones iniciales infinitesimalmente cercanas  $T$ , que también se presentan en la [Tabla 4.1](#).

Para las cuatro gráficas de la [Fig 4.12](#), la dimensión de Kaplan-Yorke ([Tabla 4.1](#)) resulta no entera. Este resultado se esperaba porque sus secciones de Poincaré presentan comportamiento fractal, correspondientes a una solución caótica. Con estas observaciones, se ha comprobado que la dimensión de los atractores de las regiones no caóticas de la [Fig 3.1](#) es no entera y que su dinámica es caótica.

El atractor que tiene mayor dimensión de Kaplan-Yorke es el que se presenta en la [Fig 4.12 b\)](#) con 1.705. Por esta razón, el conjunto de parámetros asociado a esta figura es el mejor candidato para usarlo en encriptación, en caso de tomar una dimensión de Kaplan-Yorke alta como criterio. Por otra parte, si se toma como criterio una alta entropía de Kolmogorov, el mejor candidato es el conjunto de parámetros utilizado para graficar la [Fig 4.12 a\)](#). Sin embargo, en caso de querer dimensiones o entropías más altas, es necesario explorar otros conjuntos de parámetros, que en este trabajo no se realiza.

A continuación se presenta un análisis del tiempo de separación de trayectorias con condiciones infinitesimalmente cercanas. Dicho análisis es una forma de confirmar los valores de entropía de Kolmogorov obtenidos. Además, puede ser visto como una forma diferente de analizar el comportamiento caótico.

Las figuras [4.13 a\)](#), [4.13 b\)](#), [4.13 c\)](#) y [4.13 d\)](#) presentan el voltaje  $v$  en función del tiempo adimensional  $\tau$  para iguales parámetros  $i_0 = 0$ ,  $i_1 = 2.5$  y parámetros diferentes  $(\Omega = 0.82, \alpha = 0.1)$   $(\Omega = 0.32, \alpha = 0.07)$ ,  $(\Omega = 0.12, \alpha = 0.23)$  y  $(\Omega = 0.32, \alpha = 0.3)$  respectivamente. Las curvas azules corresponden a condiciones iniciales aleatorias ( $\mathbf{x}_0$ ), mientras que las rojas corresponden a las condiciones iniciales  $\mathbf{x}_0 + 10^{-6}$ .

En las figuras [4.13 a\)](#)–[4.13 d\)](#) se puede observar que las trayectorias, que comen-

zaron con condiciones iniciales separadas por un  $10^{-6}$ , se mantienen iguales durante un periodo de tiempo. Después de ese periodo de tiempo se comienza a apreciar diferencias en las trayectorias. En la Fig 4.13 a) se comienza a ver diferencias en  $\tau = 79$ , en la Fig 4.13 b) en  $\tau = 125$ , en la Fig 4.13 c) en  $\tau = 290$  y en la Fig 4.13 d) en  $\tau = 130$ . Estos tiempos son tiempos de separación de dos trayectorias.

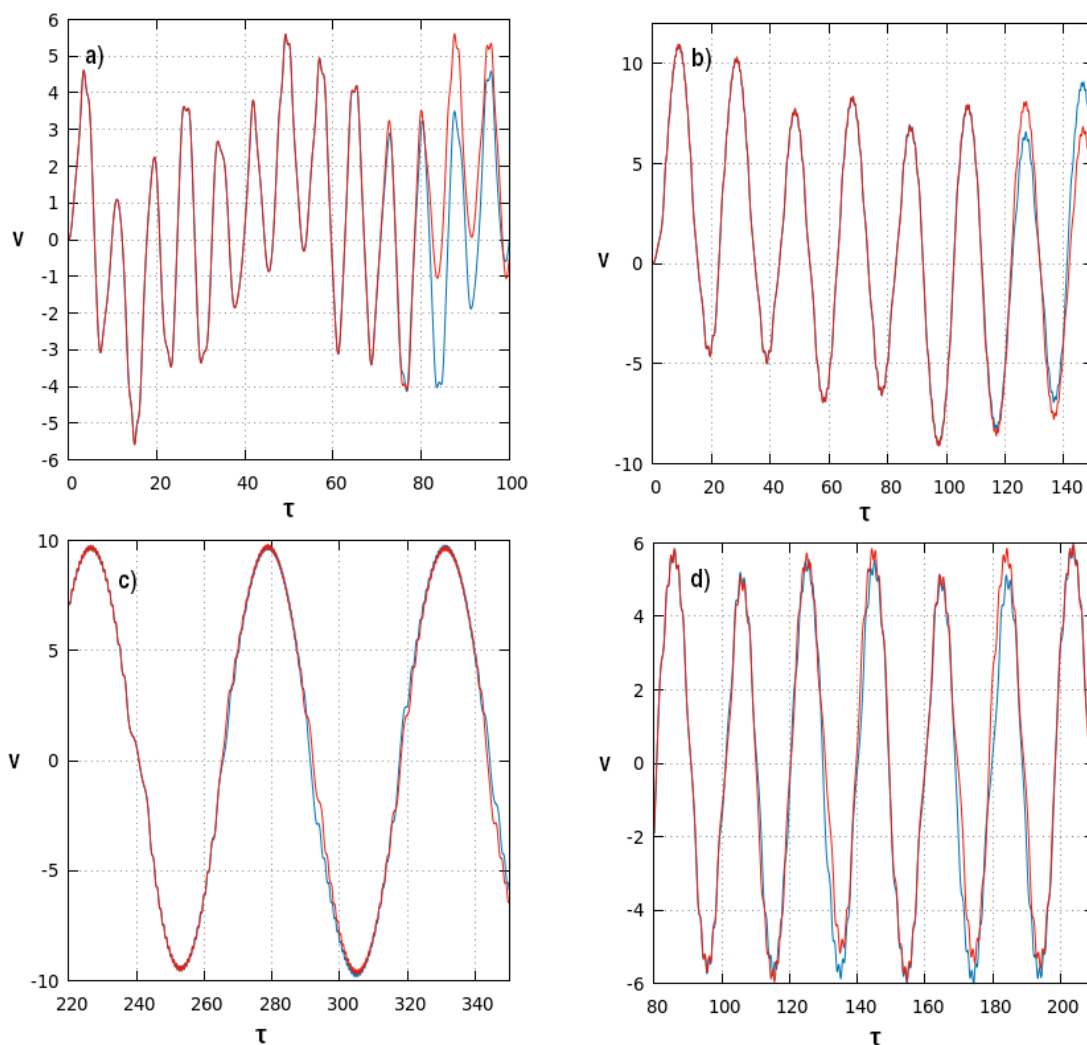


Figura 4.13: Divergencia de trayectorias infinitesimalmente cercanas ( $10^{-6}$ ) con  $i_1 = 2.5$ ,  $i_0 = 0$ ,  $\Omega$ ,  $\alpha$  a)  $\Omega = 0.82$ ,  $\alpha = 0.1$  b)  $\Omega = 0.32$ ,  $\alpha = 0.07$  c)  $\Omega = 0.12$ ,  $\alpha = 0.23$  d)  $\Omega = 0.32$ ,  $\alpha = 0.32$

Comparando los valores obtenidos de la gráfica con el valor obtenido mediante los exponentes de Lyapunov en Tabla 4.1, podemos observar que el valor  $T$  es una buena estimación del tiempo de separación. El caso con mejor coincidencia, entre el  $T$  predicho y el valor real es el mostrado en la Fig 4.13, a). El tiempo predicho por los exponentes es  $T = 77.21$ , mientras que el obtenido de la gráfica es 79. Alrededor de ese valor se comienzan a ver diferencias entre las gráficas. Es así que los exponentes de Lya-

punov pueden usarse para determinar el intervalo temporal en el que dos trayectorias se separan, cuando las condiciones iniciales tienen una incertidumbre  $\Delta$ .

### 4.3.2. Tres juntas

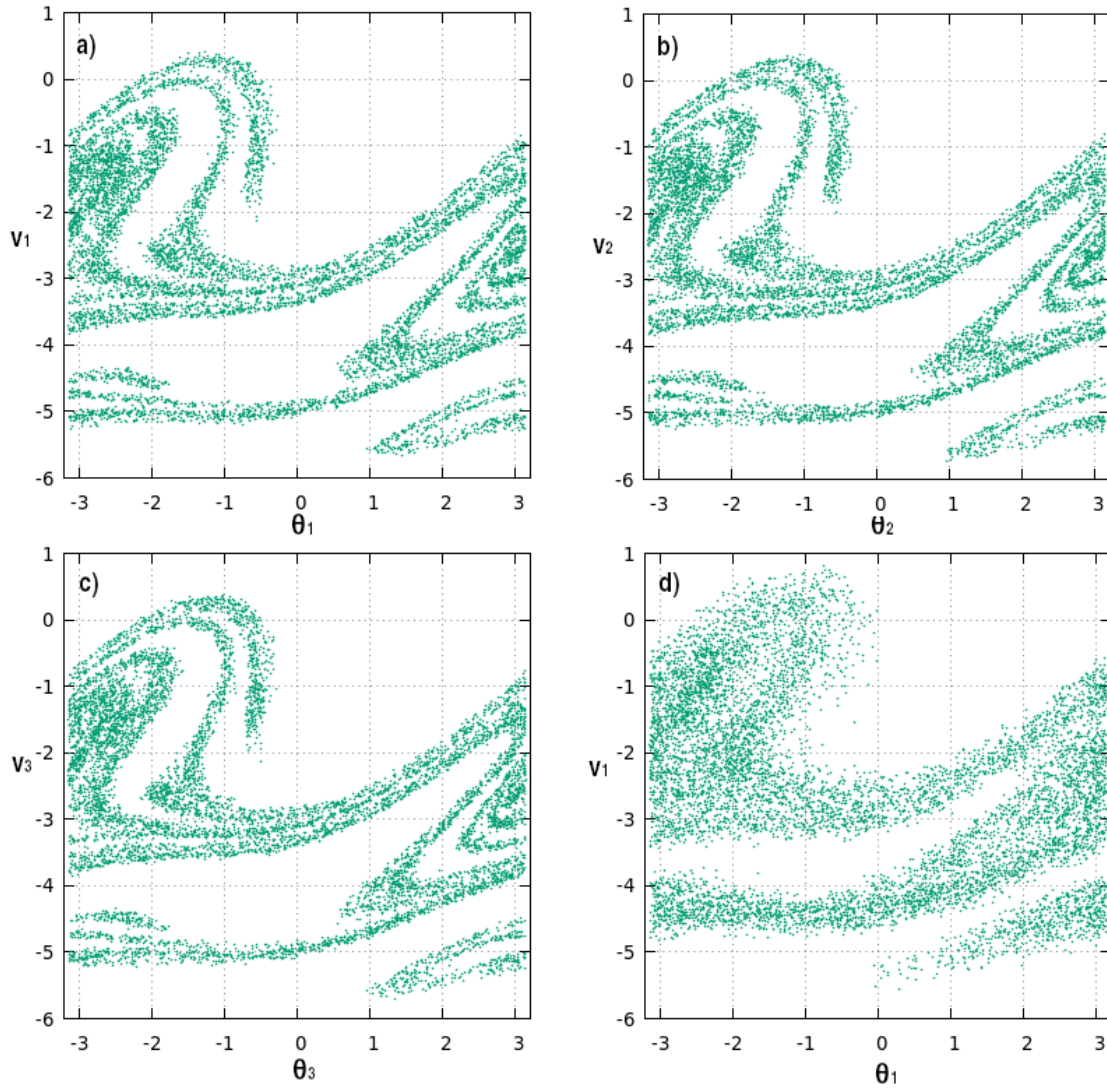


Figura 4.14: Secciones de Poincaré correspondientes al arreglo de 3 juntas Josephson en serie con  $i_0 = 0$ ,  $\Omega = 0.82$ ,  $i_1 = 2.5$  y  $\alpha = 0.1$ . Las gráficas **a)**, **b)** y **c)** tienen constante de acoplamiento  $\sigma = 0.1$  mientras que la **d)** tiene un valor  $\sigma = 0.6$ . Se grafica **a)**  $\dot{\theta}_1$  vs  $\theta_1$  **b)**  $\dot{\theta}_2$  vs  $\theta_2$  **c)**  $\dot{\theta}_3$  vs  $\theta_3$  **d)**  $\dot{\theta}_1$  vs  $\theta_1$

La Fig 4.14 **a)** presenta la sección de Poincaré de un arreglo de tres juntas Josephson. En esta figura se grafica las variables de la primera junta, es decir, el voltaje en la primera junta  $v_1$  en función de la fase  $\theta_1$ . Los puntos que se grafican son los pares ordenados  $(v_1, \theta_1)$  que se obtienen cada vez que  $\Omega\tau = 2k\pi$ , donde  $k$  es un entero, para el conjunto de parámetros ( $\Omega = 0.82$ ,  $\alpha = 0.1$ ,  $i_1 = 2.5$ ,  $i_0 = 0$  y  $\sigma = 0.1$ ). Las

figuras 4.14 b) y 4.14 c) también presentan la sección de Poincaré, pero para las dos juntas restantes, es decir, la 4.14 b), presenta  $v_2$  en función de la fase  $\theta_2$  y la 4.14 c) presenta  $v_3$  en función de la fase  $\theta_3$ . Estas figuras se presentan con el fin de observar lo que sucede con la dimensión en arreglos de  $n$ -juntas.

En las figuras 4.14 a), 4.14 b) y 4.14 c) se observan figuras similares a las obtenidas en la sección de Poincaré para estos mismos parámetros en una sola junta. Al igual que para una junta, para las tres figuras mencionadas se observa la característica fractal cerca del punto  $(-3, -3)$ . Por esta razón, la dimensión de Kaplan-Yorke debe ser no entera. Dicha dimensión, calculada mediante los exponentes de Lyapunov, es 6.8512 y que concuerda con la geometría fractal observada.

La Fig 4.14 d) presenta la sección de Poincaré para una de las juntas de un arreglo de tres juntas con parámetros  $\Omega = 0.82$ ,  $\alpha = 0.1$ ,  $i_1 = 2.5$ ,  $i_0 = 0$  y  $\sigma = 0.6$ . En esta figura no se puede observar el comportamiento fractal a simple vista como en las anteriores figuras, pero la dimensión que se obtiene es 5.4286, que también corresponde a una dimensión fractal. Puede ser que la característica fractal del atractor se observe en secciones de Poincaré que tomen en cuenta más dimensiones. Dichas secciones de Poincaré no se pueden presentar por la imposibilidad de graficar en más de tres dimensiones. Cabe mencionar que la Fig 4.14 d) se realizó para el mismo conjunto de parámetros que las figuras anteriores y solo cambió el parámetro  $\sigma = 0.6$ .

Las dimensiones de Kaplan-Yorke calculadas para los dos casos anteriores ( $\sigma = 0.1$  y  $\sigma = 0.6$ ) son no enteras y de una magnitud mayor que  $d_k = 5$ . Este valor es más alto que el obtenido para una sola junta. Esto significa que los arreglos de juntas Josephson pueden ser mejores para encriptar imágenes que las juntas solas, porque su dimensión de Kaplan Yorke es más alta. Por otra parte, la entropía de Kolmogorov para el arreglo de juntas es mayor que  $K = 0.3$ . Este valor de entropía, nuevamente mayor que para una junta, también sugiere que los arreglos de  $n$ -juntas son mejores que una sola junta en encriptación de imágenes.

La figura Fig 4.15 a) presenta las curvas  $v_1$  en función de  $\tau$  para condiciones infinitesimalmente cercanas, cuya separación es de  $10^{-6}$ , con el conjunto de parámetros ( $\Omega = 0.82$ ,  $i_0 = 0$ ,  $i_1 = 2.5$ ,  $\alpha = 0.1$  y  $\sigma = 0.1$ ). La curva roja tiene condiciones iniciales aleatorias, mientras que la azul tiene las mismas condiciones con una diferencia de  $10^{-6}$ . Las figuras 4.15 b) y 4.15 c) también presentan este tipo de curvas, pero en estas se grafica  $v_2$  en función de  $\tau$  y  $v_3$  en función de  $\tau$  respectivamente.

En las figuras 4.15 a), 4.15 b) y 4.15 c) se puede observar una diferencia entre las dos curvas en  $\tau = 45$ ,  $\tau = 43$  y  $\tau = 40$ . El valor que predicen los exponentes de Lyapunov es  $T = 38.24$ , que es un valor cercano a los reales. Esto indicaría que los exponentes de Lyapunov dan una buena estimación al tiempo de separación.

La Fig 4.15 d) presenta la curva  $v_1$  en función de  $\tau$  para el mismo conjunto de parámetros anterior a excepción de  $\sigma$ , que toma un valor de 0.6. En esta figura, se puede encontrar diferencias entre las dos curvas en  $\tau = 45$ , mientras que la predicción mediante los exponentes de Lyapunov nos da  $T = 44.21$ , que sigue siendo una buena estimación.

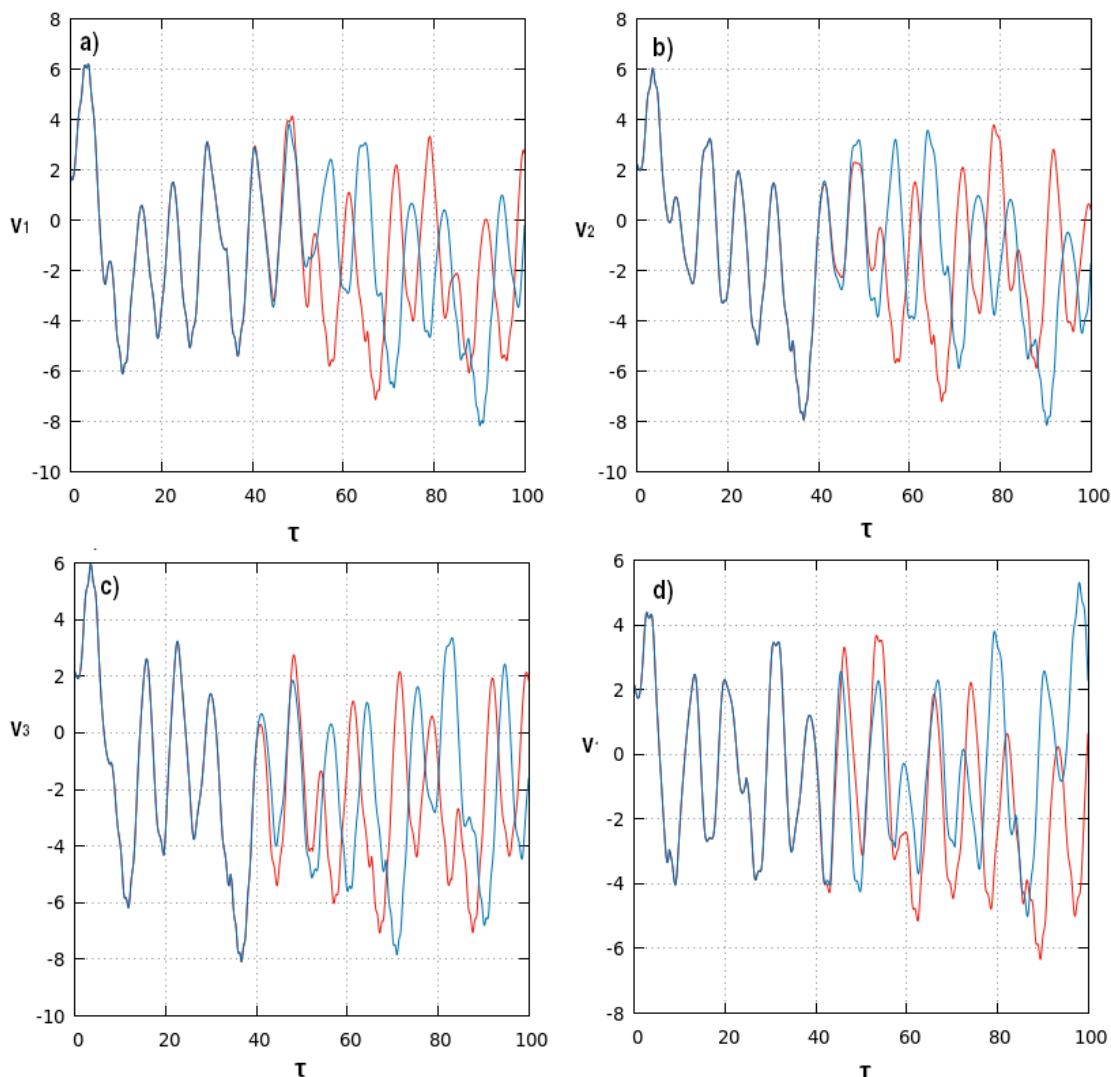


Figura 4.15: Separación de trayectorias infinitesimalmente cercanas correspondientes al arreglo de 3 junturas Josephson en serie con  $i_0 = 0$ ,  $\Omega = 0.82$ ,  $i_1 = 2.5$ ,  $\alpha = 0.1$  y separación inicial de  $10^{-6}$ . Las gráficas **a)**, **b)** y **c)** tienen constante de acoplamiento  $\sigma = 0.1$  mientras que la **d)** tiene un valor  $\sigma = 0.6$ .

En esta sección hemos caracterizado ciertos conjuntos de parámetros dentro de las regiones con exponentes de Lyapunov positivos (para  $i_0 = 0$ ). Dentro de estas regiones obtuvimos diferentes grados de caos, pero en general, toda esa región del espacio de parámetros sirve para la encriptación de imágenes, por el hecho de presentar caos. En esta sección también extendimos el análisis a tres junturas y obtuvimos que los arreglos de junturas son mejores para encriptación, porque la dimensión de Kaplan-Yorke y la entropía de Kolmogorov aumentan su valor. Además, observamos que para una juntura y para tres junturas los exponentes de Lyapunov son una buena estimación del tiempo de separación. Cabe mencionar que hemos aplicado varias técnicas (que están relacionadas entre sí, como vimos en el [Capítulo 2](#)) para tener más seguridad en cuanto a los resultados del grado de caoticidad y de que los algoritmos utilizados son correctos.

# Capítulo 5

## Conclusiones

En este trabajo estudiamos las zonas del espacio de parámetros de la juntura Josephson para determinar qué conjuntos de parámetros son utilizables en distintas aplicaciones. Para llevar a cabo el estudio, revisamos algunas herramientas importantes del campo de los sistemas dinámicos caóticos y construimos un programa computacional que permite calcular los exponentes de Lyapunov de un sistema dado.

Mediante el valor de los exponentes de Lyapunov clasificamos el espacio de parámetros en zonas con una dinámica caótica y zonas con una dinámica no caótica. A partir de esta clasificación, dentro de las zonas no caóticas, tomamos parámetros aleatorios y observamos si producen o no bloqueos de fase en la juntura, mientras que dentro de las zonas caóticas realizamos una caracterización mediante la entropía de Kolmogorov y la dimensión de Kaplan-Yorke.

Dentro de las zonas con dinámica no caótica, observando las curvas  $\langle v \rangle / \Omega$  vs  $i_0$  y  $\lambda_1$  vs  $i_0$ , hemos logrado identificar dos zonas del espacio de parámetros que pueden ser útiles en estándares de voltaje. La primera zona está delimitada por  $i_1 \geq 50$ ,  $\alpha \geq 0.8$ ,  $\Omega \geq 2$  y dentro de ella encontramos bloqueos de fase en curvas continuas y sin histéresis. Debido a las características de estas curvas, hemos concluido que esta región es ideal para realizar estándares de voltaje sin histéresis, como los presentados por Benz[46]. La segunda zona está delimitada por  $i_1 \geq 50$ ,  $\alpha \leq 0.015$ ,  $\Omega \geq 2$  y dentro de ella encontramos bloqueos de fase en curvas no continuas y con histéresis. Debido a las características de estas curvas, hemos determinado que esta región es ideal para realizar estándares de voltaje con histéresis, como los presentados por Kautz [16]. Además, hemos determinado que un parámetro  $\sigma = 0.1$  permite que los arreglos de  $n$ -junturas multipliquen por  $n$  el valor de los bloqueos de fase generados por junturas individuales.

Por otra parte, la zona con dinámica caótica está limitada por valores bajos de los parámetros  $i_1$ ,  $\Omega$  y  $\alpha$ . Dentro de esta zona hemos logrado, mediante los códigos implementados en este trabajo, calcular la entropía de Kolmogorov y la dimensión de Kaplan-Yorke de algunos parámetros. Los valores de la entropía de Kolmogorov fueron mayores que cero, mientras que los valores de la dimensión de Kaplan-Yorke fueron no enteros. Ambos valores hacen de la zona en estudio útil en encriptación de imágenes. Además, hemos utilizado un arreglo de tres junturas y hemos determinado que este arreglo es mejor para encriptar imágenes que una juntura individual, porque



la entropía de Kolmogorov y la dimensión de Kaplan-Yorke aumentan en arreglos de junturas.

Mediante estas conclusiones, es evidente que hemos logrado identificar zonas del espacio de parámetros útiles en estándares de voltajes o en encriptación de imágenes. Los parámetros útiles en estándares de voltaje (determinados en este trabajo) pueden ser usados por cualquier persona que desee realizar estándares de voltaje mediante las junturas Josephson. De igual manera, los parámetros útiles en encriptación de imágenes (también determinados en este trabajo) pueden ser usados por cualquier persona que desee encriptar imágenes en base a la juntura Josephson. Para generar estas dos aplicaciones, basta con construir junturas Josephson o arreglos de Junturas Josephson con los parámetros que hemos presentado. Cabe mencionar que varios conjuntos de parámetros ya se encuentran en la literatura [16]. La diferencia con dichos parámetros y los hemos encontrado radica en el método usado que en este caso se han utilizado los exponentes de Lyapunov. Esta forma de estudiar el espacio parámetros constituye un método alternativo a los que ya han sido presentados en la literatura, porque no hemos encontrado bibliografía relacionada con este método.

# Apéndice A

## Algoritmos

En este apéndice se presentan los algoritmos relacionados a la teoría expuesta en el [Capítulo 2](#).

### A.1. Runge-Kutta Cash-Karp

Las ecuaciones que describen la dinámica de la juntura Josephson ([Ec 2.3](#)) no tienen solución analítica. Por tanto, la solución del sistema debe ser encontrada computacionalmente. Existen varios algoritmos para hacerlo, pero en este trabajo utilizaremos un método Runge-Kutta, llamado Runge-Kutta Cash-Karp [\[47\]](#).

Un método Runge-Kutta es un método iterativo usado para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales numéricamente. Se realiza evaluando derivadas en puntos intermedios entre dos pasos iterativos sucesivos. La forma más general de este método es,

$$\mathbf{x}_{j+1} = \mathbf{x}_j + \Delta t \sum_{i=1}^s b_i \mathbf{k}_i \text{[47]}, \quad (\text{A.1})$$

donde  $\mathbf{x}_j$  es el vector de dimensión  $n$  que contiene las variables del sistema en el  $j$ -ésimo paso,  $\Delta t$  es el intervalo de tiempo que se evoluciona,  $b_i$  es un coeficiente que depende del método Runge-Kutta, los  $\mathbf{k}_i$  son vectores que se obtienen al evaluar el sistema en puntos intermedios (entre  $[\mathbf{x}_{j+1}, \mathbf{x}_j]$  y entre  $[t, t + \Delta t]$ ) y  $s$  es el número de veces que se evalúa  $\mathbf{k}_i$ . Los valores de  $\mathbf{k}_i$  se encuentran mediante

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{F}(t_j, \mathbf{x}_j), \quad (\text{A.2})$$

$$\mathbf{k}_2 = \mathbf{F}(t_j + c_2 \Delta t, \mathbf{x}_j + a_{21} \Delta t \mathbf{k}_1), \quad (\text{A.3})$$

$$\mathbf{k}_3 = \mathbf{F}(t_j + c_3 \Delta t, \mathbf{x}_j + \Delta t (a_{31} \mathbf{k}_1 + a_{32} \mathbf{k}_2)), \quad (\text{A.4})$$

⋮

$$\mathbf{k}_s = \mathbf{F}(t_j + c_s \Delta t, \mathbf{x}_j + \Delta t (a_{s1} \mathbf{k}_1 + a_{s2} \mathbf{k}_2 + \dots + a_{s,s-1} \mathbf{k}_{s-1})), \quad (\text{A.5})$$

donde los  $c_i$  con  $i = 1, 2, \dots, s$  y los  $a_{i,j}$  con  $i = 2, 3, \dots, s; j = 1, 2, \dots, s - 1$  son constantes escogidas para que el método sea consistente. El criterio para que el método sea consistente es  $\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} = c_i$  [\[47\]](#).

Las constantes  $c_i$ ,  $a_{ij}$  y  $b_i$ , en los métodos Runge-Kutta clásicos, se encuentran mediante una expansión en series de Taylor. En este trabajo se va a usar las constantes proporcionadas en el método Cash-Karp, que usa valores hasta  $s = 6$  para realizar un Runge-Kutta de orden 5. Los valores de  $c_i$ ,  $a_{ij}$  y  $b_i$  se muestran en la [Tabla A.1](#) [47, 48]. En esta tabla se debe notar que la primera columna contiene los  $c_i$ , la última fila contiene los  $b_i$ , finalmente, en los demás espacios, se encuentran los términos  $a_{ij}$ , comenzando desde  $a_{21} = 1/5$  y terminando con  $a_{65} = 253/4096$ .

$c_i$						
0						
1/5	1/5					
3/10	3/40	9/40				
3/5	3/10	-9/10	6/5			
1	-11/54	5/2	-70/27	35/27		
7/8	1631/55296	175/512	575/13824	44275/110592	253/4096	
$b_i$	37/378	0	260/621	125/594	0	512/1771

Tabla A.1: Constantes para el método Cash-Karp.

El algoritmo para implementar este Runge-Kutta es el siguiente:

1. Se define el tiempo  $\Delta t$  entre los pasos.
2. Se evalúa los vectores  $\mathbf{k}_i$  con  $i = 1, 2, \dots, 6$  según las ecuaciones [A.2-A.5](#).
3. Se calcula el siguiente paso mediante [Ec A.1](#).
4. Se repite el procedimiento hasta alcanzar el número de iteraciones o el tiempo  $t$  deseados.

## A.2. Descomposición QR

La descomposición QR permite escribir una matriz  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  como,

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{R}, \tag{A.6}$$

donde  $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  cumple que  $\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{I}$  y  $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  es una matriz triangular superior.

Existen varias formas de obtener esta descomposición. En este trabajo se usará el método de ortonormalización de Gram-Schmidt. Recordemos que este proceso de ortonormalización convierte un número de vectores cualquiera en ortonormales.

El primer proceso que se lleva a cabo es la ortogonalización. Consideraremos a las columnas de la matriz  $\mathbf{A}$  como los vectores iniciales ( $\{\mathbf{v}_i\}$  con  $i = 1, \dots, m$ ). Se va a construir vectores ortogonales a partir del conjunto de vectores  $\{\mathbf{v}_i\}$  y las ecuaciones de Gram-Schmidt para la ortogonalización, que son :

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1, \tag{A.7}$$

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}_1}{\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_1} \mathbf{w}_1, \tag{A.8}$$

$$\begin{aligned} & \vdots \\ \mathbf{w}_m &= \mathbf{v}_m + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\mathbf{v}_m \cdot \mathbf{w}_j}{\mathbf{w}_j \cdot \mathbf{w}_j} \mathbf{w}_j, \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

ecuaciones que devuelven vectores ortogonales  $\{\mathbf{w}_i\}$  con  $i = 1, \dots, m$ . Por último, los vectores se normalizan mediante

$$\mathbf{u}_i = \frac{1}{\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{w}_i} \mathbf{w}_i, \quad (\text{A.10})$$

y se obtienen los vectores ortonormales ( $\{\mathbf{u}_i\}$  con  $i = 1, \dots, m$ ) que se buscaban.

Las columnas de la matriz  $\mathbf{Q}$  están formadas por los vectores ortonormales obtenidos, de este modo cumplen que  $\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{I}$ . Por otra parte, la matriz  $\mathbf{R}$  tiene los valores

$$r_{ij} = \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_j, \quad (\text{A.11})$$

donde  $j \geq i$  para que sea triangular superior. De esta forma se cumple que  $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ .

El algoritmo para hallar la descomposición  $\mathbf{QR}$  es:

1. Partiendo de la matriz  $\mathbf{A}$  ingresada por el usuario, se escogen las columnas de esa matriz como los vectores a ortonormalizar  $\mathbf{v}_i$ .
2. Se ortonormaliza los vectores  $\mathbf{v}_i$  mediante las ecuaciones [A.7-A.9](#) y se obtiene los vectores  $\mathbf{w}_i$ .
3. Se normaliza los vectores  $\mathbf{w}_i$  para obtener así los vectores  $\mathbf{u}_i$  ortonormales.
4. Se construye la matriz  $\mathbf{Q}$ , que tiene como columnas los vectores  $\mathbf{u}_i$ .
5. Se construye la matriz  $\mathbf{R}$  mediante la [Ec A.11](#).

### A.3. Algoritmo para hallar el espectro de exponentes de Lyapunov

Ahora que ya sabemos implementar la integración de ecuaciones diferenciales y la descomposición  $\mathbf{QR}$  se puede explicar de manera completa la forma de hallar el espectro completo de exponentes de Lyapunov. El algoritmo que se va a usar es el siguiente:

1. Escoger el valor del tiempo  $\tau$  de modo que la matriz  $\mathbf{M}$  no tome valores muy grandes y un valor de  $m$  lo suficientemente grande para hacer que  $t \rightarrow \infty$ .
2. Escoger la base  $\{\mathbf{z}_i(0)\}$  que se evoluciona y multiplicar por  $\mathbf{M}(0) = \mathbf{I}$ , donde  $\mathbf{I}$  es la matriz identidad.
3. Evolucionar la [Ec 2.1](#) y la [Ec 2.15](#) hasta un tiempo  $\tau$  mediante Runge-Kutta Cash-Karp.

4. Realizar la descomposición  $\mathbf{QR}$ , y almacenar por separado los  $r_{ii}$  para ser sumados en cada iteración. Se evita calcular todos los  $r_{ij}$  porque no son útiles al calcular los exponentes de Lyapunov.
5. Ajustar la matriz  $\mathbf{M} = I$ , cambiar la base  $\{\mathbf{z}_i(\tau)\}$  por una base ortonormal proveniente de la descomposición  $\mathbf{QR}$ .
6. Repetir el procedimiento hasta alcanzar el valor deseado de  $m$ .
7. Dividir la suma total de los  $r_{ii}$  almacenados por separado para  $m\tau$ . De esta forma, se obtendrán los  $n$  exponentes de Lyapunov.

#### A.4. Algoritmo para hallar la dimensión de Kaplan-Yorke

El algoritmo para encontrar la dimensión de Kaplan-Yorke es el siguiente:

1. Hallar los exponentes de Lyapunov
2. Reemplazar los exponentes en la [Ec 2.32](#)

#### A.5. Algoritmo para hallar $T$

1. Encontrar los exponentes de Lyapunov.
2. Obtener la entropía de Kolmogorov mediante la [Ec 2.40](#).
3. Evolucionar el sistema para dos condiciones iniciales separadas por un  $\Delta$ .
4. De la evolución del sistema, determinar la amplitud  $L$  y reemplazar en [Ec 2.41](#).

#### A.6. Algoritmo para la sección de Poincaré

El algoritmo para la sección de Poincaré se basa en cortar el espacio de configuraciones mediante un hiper-plano de una dimensión inferior. En el presente trabajo, el plano que se va a usar es uno perpendicular a la variable tiempo ( $x_3$  en [Ec 2.3](#)), que corta al sistema cada  $\tau = 2m\pi/\Omega$ , donde  $\tau$  es el tiempo adimensional relacionado al sistema dinámico y  $m$  es un entero. De este modo, las dos coordenadas restantes conforman el hiperplano. El algoritmo es el siguiente:

1. Establecer cada cuanto corta el hiper-plano, es decir  $m$ .
2. Escribir las variables restantes como par ordenado.

# Apéndice B

## Programas

### B.1. Códigos comunes

#### B.1.1. Runge-Kutta Cash-Karp

```
subroutine rkck(var , dvardt , n , t , dt , varout , frec , alpha)
implicit none
integer :: n
real*8 :: dt , t
real*8 , dimension(n) :: dvardt , var , varout
integer , parameter :: NMAX=50
integer :: i
real*8 , dimension(NMAX) :: ak2 , ak3 , ak4 , ak5 , ak6 , vartemp
real*8 , parameter :: CA2=.2d0 , CA3=.3d0 , CA4=.6d0 , CA5=1.d0 , CA6=.875d0 , AB21=.2
d0 , AB31=3.d0/40.d0
real*8 , parameter :: AB32=9.d0/40.d0 , AB41=.3 , AB42=-.9d0 , AB43=1.2d0 , AB51=-11.
d0/54.d0 , AB52=2.5d0
real*8 , parameter :: AB53=-70.d0/27.d0 , AB54=35.d0/27.d0 , AB61=1631.d0/55296.
d0 , AB62=175.d0/512.d0
real*8 , parameter :: AB63=575.d0/13824.d0 , AB64=44275.d0/110592.d0 , AB65=253.
d0/4096.d0
real*8 , parameter :: BC1=37.d0/378.d0 , BC3=250.d0/621.d0 , BC4=125.d0/594.d0 ,
BC6=512.d0/1771.d0
real*8 , parameter :: DBC1=BC1-2825.d0/27648.d0 , DBC3=BC3-18575.d0/48384.d0
real*8 , parameter :: DBC4=BC4-13525.d0/55296.d0 , DBC5=-277.d0/14336.d0 , DBC6=
BC6-.25d0
real*8 :: frec , alpha
do i=1,n
!primer paso
vartemp(i)=var(i)+AB21*dt*dvardt(i)
enddo
call derivs(t+CA2*dt , vartemp , ak2 , frec , alpha) !aqui se obtiene k2
do i=1,n
!segundo paso
vartemp(i)=var(i)+dt*(AB31*dvardt(i)+AB32*ak2(i))
enddo
call derivs(t+CA3*dt , vartemp , ak3 , frec , alpha) !aqui se obtiene k3
do i=1,n
!tercer paso
vartemp(i)=var(i)+dt*(AB41*dvardt(i)+AB42*ak2(i)+AB43*ak3(i))
enddo
call derivs(t+CA4*dt , vartemp , ak4 , frec , alpha) !aqui se obtiene k4
```

```

do i=1,n          !cuarto paso
    vartemp(i)=var(i)+dt*(AB51*dvardt(i)+AB52*ak2(i)+AB53*ak3(i)+AB54
        *ak4(i))
enddo
call derivs(t+CA5*dt, vartemp, ak5, frec, alpha)    !Aqui se obtiene k5
do i=1,n          !quinto paso
    vartemp(i)=var(i)+dt*(AB61*dvardt(i)+AB62*ak2(i)+AB63*ak3(i)+AB64
        *ak4(i)+AB65*ak5(i))
enddo
call derivs(t+CA6*dt, vartemp, ak6, frec, alpha)    !aqui se obtiene k6
do i=1,n !aqui se obtiene el vector de salida
    varout(i)=var(i)+dt*(BC1*dvardt(i)+BC3*ak3(i)+BC4*ak4(i)+BC6*ak6(
        i))
enddo
end subroutine rkck

```

## B.1.2. Ortonormalización

```

subroutine ortogo(mat,n,modulos)
integer::n,i,j,k
real*8,dimension(n,n)::mat
real*8,dimension(n)::modulos,vec
real*8::modu
call norm(mat(:,1),n,modu)
modulos(1)=modu
do i=2,n
    vec=0.d0
    do j=1,i-1
        vec=vec+prod(mat(:,i),mat(:,j),n)*mat(:,j)
    enddo
    mat(:,i)=mat(:,i)-vec
    call norm(mat(:,i),n,modu)
    modulos(i)=modu
enddo

```

```

subroutine norm(v,n,modu)
integer::n,i
real*8,dimension(n)::v
real*8::modu
modu=prod(v,v,n)
modu=dsqrt(modu)
v=(1.d0/modu)*v
end subroutine

```

```

double precision function prod(v1,v2,n)
integer::n,i
real*8,dimension(n)::v1,v2
real*8::suma
suma=0.d0
do i=1,n
    suma=suma+v1(i)*v2(i)
enddo

```

```
prod=suma
end function
```

## B.2. Barrido $\Omega$ vs $\alpha$

```
subroutine barrido(delta , nfin)
integer , parameter :: n=12, nstep=300000, ndim=3
integer :: nfin
real*8:: delta
real*8:: dt , t , pi
real*8 , dimension(n) :: dvardt , var , varout
real*8 , dimension(ndim , ndim) :: Mat
real*8 , dimension(ndim) :: modulus , lya
integer :: co1 , co2 , i , nort , tau , clock
real*8:: frec , alpha , prueba , ra
call system_clock(clock)
call random_seed(clock)
dt= 0.01d0
delta=0.01d0
pi=dacos(-1.d0)
tau=1
co1=1
alpha=0.d0
open(file='barrido1500.dat' , unit=12, status='unknown')
do co1=1, nfin
    frec=0.d0
    alpha=alpha+delta
    do co2=1, 4*nfin
        frec=co2*delta
        var=0.d0
        t=0.0d0
        do i=1, ndim
            call random_number(ra)
            var(i)=pi*ra
        enddo
        call exponentesbarr(var , dvardt , n , t , dt , nstep , tau , frec ,
            alpha , lya)
        write(12,*) frec , alpha , lya
    enddo
enddo
close(12)
end subroutine barrido
```

```
subroutine exponentesbarr(var , dvardt , n , t , dt , nstep , tau , frec , alpha , lya)
implicit none
integer , parameter :: ndim=3
integer :: n , nstep
real*8:: eps , t , dt
real*8 , dimension(n) :: dvardt , var , varout
real*8 , dimension(ndim , ndim) :: Mat
real*8 , dimension(ndim) :: modulus , lya
```



```

real *8::frec , alpha
integer :: i , j , co , nort , k , tau , con
var=0.d0
t=0.0d0
!Cond iniciales de la matriz M
!La matriz M tiene vectores columna como vetores iniciales
Mat=0.d0
do i=1,ndim
    Mat(i , i)=1.d0
enddo
!Se evolucionan como variables cada espacio de la matriz
do j=1,ndim
    do i=1,ndim
        var(j*ndim+i)=Mat(j , i)
    enddo
enddo
nort=1
co=1
con=0
lya=0.d0
do while (co.eq.1)
    con=con+1
    call derivs(t , var , dvardt , frec , alpha)
    call rkck(var , dvardt , n , t , dt , varout , frec , alpha)
    var=varout
    t=t+dt
    Ortonormalizacion de Gramschimith
    if(int(t).eq.nort*tau) then
        !Lleno la matriz Mat
        do k=1,ndim
            do j=1,ndim
                Mat(k , j)=var(ndim*k+j)
            enddo
        enddo
        call ortogo(Mat , ndim , modulus)
        do j=1,ndim
            do k=1,ndim
                var(j*ndim+k)=Mat(j , k)
            enddo
        enddo
        do j=1,ndim
            lya(j)=lya(j)+dlog(modulos(j))
        enddo
        if(nort.gt.3000) co=0
        if(con.gt.nstep) co=0
        nort=nort+1
    endif
enddo
do j=1,ndim
    lya(j)=(1.d0/(nort*tau))*lya(j)
enddo

```

```
end subroutine exponentesbarr
```

```

subroutine derivs(t, var, dvardt, frec, alpha)
implicit none
real*8:: t, var(*), dvardt(*)
real*8:: i0, frec, i1, alpha, res
integer:: i, con, conja
integer, parameter:: ndim=3
real, dimension(ndim, ndim):: Jac
i0=0.0d0
i1=2.50d0
!Sistema dinamico
dvardt(1)=var(2)
dvardt(2)=i1*dsin(var(3))-alpha*var(2)-dsin(var(1))
dvardt(3)=frec
!Jacobiano DF(x)
Jac=0.d0
Jac(1,2)=1.d0
Jac(2,1)=-dcos(var(1))
Jac(2,2)=-alpha
Jac(2,3)=-i1*dcos(var(3))

do j=1, ndim*ndim
    dvardt(ndim+j)=0.d0
enddo
con=0
conja=1
!Ecuaciones defierenciales para evolucioanr la matriz M
do i=1, ndim*ndim
    con=con+1
    do j=1, ndim
        if(con.gt.ndim) conja=conja+1
        if(con.gt.ndim) con=1
        dvardt(ndim+i)=dvardt(ndim+i)+Jac(conja, j)*var((ndim+con)
            +(j-1)*ndim)
    enddo
enddo
end subroutine derivs

```

### B.3. Curvas $\langle v \rangle / \Omega$ vs $i_0$

```

subroutine integ(func, a, b, s, nit)
integer:: n
real*8:: a, b, s, al
integer:: nit, j
real*8:: del, suma, tnm, x
real*8, dimension(nit):: func
    tnm=nit
    del=(b-a)/nit
    x=a+0.5*del

```

```

        suma=0.
        do j=1,nit
            suma=suma+func(j)
            x=x+del
        enddo
        s=((b-a)*suma/tnm)
end subroutine integ

```

### B.3.1. Una Juntura

```

subroutine exponentesprom ( var , dvardt , n , t , htry , i0 , nstep , func , lya )
implicit none
integer , parameter :: ndim=3
integer :: nstep , n
real *8 :: htry , t , pi , dx
real *8 , dimension(n) :: dvardt , var , varscal , varout
real *8 , dimension(ndim , ndim) :: Mat
real *8 , dimension(ndim) :: modulus , lya
real *8 :: i0 , may
real *8 , dimension(nstep , 2) :: func
integer :: j , k , co , con , nort , ncy , nper , tau , nprom
pi=dacos(-1.d0)
ncy=320 !cuantas divisiones hay en un periodo
nper=256 !rechaza nper cantidad de periodos
nprom=256
tau=1

!Cond iniciales de la matriz M
!La matriz M tiene vectores columna como vectores iniciales
Mat=0.d0
do k=1,ndim
    Mat(k,k)=1.d0
enddo
!Se evolucionan como variables cada espacio de la matriz
do k=1,ndim
    do co=1,ndim
        var(k*ndim+co)=Mat(k,co)
    enddo
enddo
nort=1
lya=0.d0
co=1
con=0
do while (co.eq.1)
    con=con+1
    call derivs(t, var, dvardt, i0)
    call rkck(var, dvardt, n, t, htry, varout, i0)
    t=t+htry
    var=varout
    if(var(1).gt.pi) var(1)=var(1)-2*pi
    if(var(1).lt.-pi) var(1)=var(1)+2*pi
    if(var(3).gt.2*pi) var(3)=var(3)-2*pi

```

```

    if (con.gt.nper*ncy) then
        if (con-nper*ncy.gt.nprom*ncy) co=0
        func (con-nper*ncy,1)=var (2)
        func (con-nper*ncy,2)=t
    endif
    !Ortonormalizacion de Gramschimith
    if (int (t).eq.nort*tau) then
        !Lleno la matriz Mat
        do k=1,ndim
            do j=1,ndim
                Mat(k,j)=var (ndim*k+j)
            enddo
        enddo
        call ortogo (Mat,ndim,modulos)
        do j=1,ndim
            do k=1,ndim
                var (j*ndim+k)=Mat (j,k)
            enddo
        enddo
        do j=1,ndim
            lya (j)=lya (j)+dlog (modulos (j))
        enddo
        if (con.gt.nstep) co=0
        nort=nort+1
    endif
enddo
do j=1,ndim
    lya (j)=(1.d0/(nort*tau))*lya (j)
enddo
end subroutine exponentesprom

```

```

subroutine derivs(t,var,dvardt,i0)
real *8::t,var(*),dvardt(*)
real *8::i0,frec,i1,alpha
integer::i,con,conja
integer,parameter::ndim=3
real,dimension(n,n)::Jac
frec=3.2
i1=80.d0
alpha=0.82d0
dvardt(1)=var(2)
dvardt(2)=i0+i1*dsin(var(3))-alpha*var(2)-dsin(var(1))
dvardt(3)=frec
Jac(1,1)=0.d0
Jac(1,2)=1.d0
Jac(1,3)=0.d0
Jac(2,1)=-dcos(var(1))
Jac(2,2)=-alpha
Jac(2,3)=-i1*dcos(var(3))
Jac(3,1)=0.d0
Jac(3,2)=0.d0
Jac(3,3)=0.d0
do j=1,ndim*ndim

```

```

        dvardt(ndim+j)=0.d0
enddo
con=0
conja=1
do i=1,ndim*ndim
    con=con+1
    do j=1,ndim
        if(con.gt.ndim) conja=conja+1
        if(con.gt.ndim) con=1
        dvardt(ndim+i)=dvardt(ndim+i)+Jac(conja,j)*var((ndim+con)
            +(j-1)*ndim)
    enddo
enddo
end subroutine derivs

```

```

!Este codigo va en el main
program promedio
!implicit none
integer,parameter::n=12,nstep=410000,ndim=3
real*8::htry,t,pi
real*8,dimension(n)::dvardt,var,varsal,varout
real*8,dimension(ndim,ndim)::Mat
real*8,dimension(ndim)::modulos,lya
real*8,dimension(nstep,2)::func
real*8::dx,i0,a,b,s,Per,si,ra,ran
integer::i,ncy,nprom,reg,clock

reg=500!promedios calculados
pi=dacos(-1.d0)
dx=0.01d0!grilla de i_0
frec=3.2d0
Per=2.d0*pi/frec
ncy=320
nprom=256    !durante cuantos periodos se hace la integracion
htry= Per/float(ncy)

open(file='exponentesdelpromedio.dat',unit=14,status='unknown')
open(file='curvaiv.dat',unit=16,status='unknown')
call system_clock(clock)
call random_seed(clock)
call random_number(ra)
call random_number(ran)
i0=0.d0
var(1)=pi*ra
var(2)=pi*ran
t=0.d0
si=1.d0
do i=1,2*reg
    t=0.0d0
    if (i.ge.reg) si=-1.d0
    if (i.le.reg) si=1.d0
    i0=i0+si*dx
    call exponentesprom(var,dvardt,n,t,htry,i0,nstep,func,lya)
    a=func(1,2)

```

```

        b=func(ncy*nprom,2)
        call integ(func(:,1),a,b,s,ncy*nprom)
        write(16,*) i0, (s/(b-a))/frec
        write(14,*) i0, lya
        print*,i0, 'valor'
    enddo

close(14)
close(16)

contains

```

### B.3.2. 3-Junturas

```

subroutine exponentesprom(var,dvardt,n,t,htry,i0,nstep,func,lya)
implicit none
integer,parameter:: ndim=7
integer:: nstep,n
real*8:: htry,t,pi,dx
real*8,dimension(n):: dvardt,var,varscale,varout
real*8,dimension(ndim,ndim):: Mat
real*8,dimension(ndim):: modulos,lya
real*8:: i0,may
real*8,dimension(nstep,2):: func
integer:: j,k,co,con,nort,ncy,nper,tau,nprom
pi=dacos(-1.d0)
ncy=320 !cuantas divisiones hay en un periodo
nper=256 !rechaza nper cantidad de periodos
nprom=256
tau=1

!Cond iniciales de la matriz M
!La matriz M tiene vectores columna como vectores iniciales
Mat=0.d0
do k=1,ndim
    Mat(k,k)=1.d0
enddo
!Se evolucionan como variables cada espacio de la matriz
do k=1,ndim
    do co=1,ndim
        var(k*ndim+co)=Mat(k,co)
    enddo
enddo
nort=1
lya=0.d0
co=1
con=0
do while (co.eq.1)
    con=con+1
    call derivs(t,var,dvardt,i0)
    call rkck(var,dvardt,n,t,htry,varout,i0)
    t=t+htry

```

```

var=varout
if (var(1).gt.pi) var(1)=var(1)-2*pi
if (var(1).lt.-pi) var(1)=var(1)+2*pi
if (var(3).gt.pi) var(3)=var(3)-2*pi
if (var(3).lt.-pi) var(3)=var(3)+2*pi
if (var(5).gt.pi) var(5)=var(5)-2*pi
if (var(5).lt.-pi) var(5)=var(5)+2*pi
if (var(7).gt.2.d0*pi) var(7)=var(7)-2*pi
if (con.gt.nper*ncy) then
    if (con-nper*ncy.gt.nprom*ncy) co=0
    func(con-nper*ncy,1)=var(2)+var(4)+var(6)
    func(con-nper*ncy,2)=t
endif
!Ortonormalizacion de Gramschimith
if (int(t).eq.nort*tau) then
    !Lleno la matriz Mat
    do k=1,ndim
        do j=1,ndim
            Mat(k,j)=var(ndim*k+j)
        enddo
    enddo
    call ortogo(Mat,ndim,modulos)
    do j=1,ndim
        do k=1,ndim
            var(j*ndim+k)=Mat(j,k)
        enddo
    enddo
    do j=1,ndim
        lya(j)=lya(j)+dlog(modulos(j))
    enddo
    if (con.gt.nstep) co=0
    nort=nort+1
endif
enddo
do j=1,ndim
    lya(j)=(1.d0/(nort*tau))*lya(j)
enddo
end subroutine exponentesprom

```

```

subroutine derivs(t,var,dvardt,i0)
!subrutina que da las derivadas para 3 juntas
real*8::t,var(*),dvardt(*)
real*8::i0,frec,i1,alpha
integer::i,con,conja
integer,parameter::ndim=7
real,dimension(n,n)::Jac
res=0.6d0
frec=3.2d0
i1=10.d0
alpha=0.45d0

dvardt(1)=var(2)
dvardt(2)=i0+i1*dsin(var(7))-alpha*var(2)-dsin(var(1))-(alpha*res)*(var

```

```

      (4)+var(2)+var(6))
dvardt(3)=var(4)
dvardt(4)=i0+i1*dsin(var(7))-alpha*var(4)-dsin(var(3))-(alpha*res)*(var
      (4)+var(2)+var(6))
dvardt(5)=var(6)
dvardt(6)=i0+i1*dsin(var(7))-alpha*var(6)-dsin(var(5))-(alpha*res)*(var
      (4)+var(2)+var(6))
dvardt(7)=frec

Jac=0.d0
Jac(1,2)=1.d0
Jac(2,1)=-dcos(var(1))
Jac(2,2)=-alpha*(1.d0+res)
Jac(2,4)=-alpha*res
Jac(2,6)=-alpha*res
Jac(2,7)=-i1*dcos(var(7))
Jac(3,4)=1.d0
Jac(4,3)=-dcos(var(3))
Jac(4,4)=-alpha*(1.d0+res)
Jac(4,2)=-alpha*res
Jac(4,6)=-alpha*res
Jac(4,7)=-i1*dcos(var(7))
Jac(5,6)=1.d0
Jac(6,3)=-dcos(var(5))
Jac(6,6)=-alpha*(1.d0+res)
Jac(6,2)=-alpha*res
Jac(6,4)=-alpha*res
Jac(6,7)=-i1*dcos(var(7))

do j=1,ndim*ndim
      dvardt(ndim+j)=0.d0
enddo
con=0
conja=1
do i=1,ndim*ndim
      con=con+1
      do j=1,ndim
            if(con.gt.ndim) conja=conja+1
            if(con.gt.ndim) con=1
            dvardt(ndim+i)=dvardt(ndim+i)+Jac(conja,j)*var((ndim+con)
                  +(j-1)*ndim)
      enddo
enddo
end subroutine derivs

```

```

!Esto va en el main
program promedio
implicit none
integer , parameter :: n=56, nstep=410000, ndim=7
real*8 :: htry, t, pi
real*8, dimension(n) :: dvardt, var, varsca, varout
real*8, dimension(ndim, ndim) :: Mat
real*8, dimension(ndim) :: modulos, lya
real*8, dimension(nstep, 2) :: func

```



```

real *8::dx,i0 ,a,b,s ,Per ,si ,ra ,ran
integer :: i ,ncy ,nprom ,reg ,clock

reg=500!promedios calculados
pi=dacos(-1.d0)
dx=0.01d0!grilla de i_0
frec=3.2d0
Per=2.d0*pi/frec
ncy=320
nprom=256      !durante cuantos periodos se hace la integracion
htry= Per/float(ncy)

open(file='exponentesdelpromedio.dat',unit=14,status='unknown')
open(file='curvaiv.dat',unit=16,status='unknown')
call system_clock(clock)
call random_seed(clock)
do i=1,6
    call random_number(ra)
    var(i)=ra*pi
    print *,var(i)
enddo
i0=0.d0
t=0.d0
si=1.d0
do i=1,2*reg
    t=0.0d0
    if (i.ge.reg) si=-1.d0
    if (i0.le.reg) si=1.d0
    i0=i0+si*dx
    call exponentesprom(var,dvardt,n,t,htry,i0,nstep,func,lya)
    a=func(1,2)
    b=func(ncy*nprom,2)
    call integ(func(:,1),a,b,s,ncy*nprom)
    write(16,*) i0 , (s/(b-a))/frec
    write(14,*) i0 , lya
    print *,i0 , 'valor'
enddo

close(14)
close(16)

contains

```

## B.4. Sección de Poincaré

### B.4.1. Una junta

```

subroutine poincare(var,dvardt,n,t,htry,nstep)
    integer ,parameter :: ndim=3
    integer :: n,nstep
    real *8::t,htry
    real *8,dimension(n) :: dvardt,var,varsal,varout

```

```

real*8:: pi
integer:: co , nort , tau , con

open( file=' bifurcacion . dat ' , unit=16, status=' unknown ' )
pi=dacos(-1.d0)
nort=1
co=1
con=0
do while ( co . eq . 1 )
    con=con+1
    call derivs ( t , var , dvardt )
    call rkck ( var , dvardt , n , t , htry , varout )
    t=t+htry
    var=varout
    !Seccion de Poincare
    if( var ( 1 ) . gt . pi ) var ( 1 )=var ( 1 )-2*pi
    if( var ( 1 ) . lt . -pi ) var ( 1 )=var ( 1 )+2*pi
    if( mod ( con , 320 ) . eq . 0 ) then
        if ( nort . gt . 70000 ) co=0
        if( nort . gt . 5000 ) then
            write( 16 , ' ( f15 . 6 , f15 . 6 , f15 . 6 , f15 . 6 ) ' ) var
                ( 2 ) , var ( 1 ) , var ( 3 )
        endif
        var ( 3 )=var ( 3 )-2.d0*pi
    endif
enddo
close( 16 )
end subroutine poincare

```

### B.4.2. 3-Junturas

```

subroutine poincare ( var , dvardt , n , t , htry , nstep )
integer , parameter:: ndim=7
integer:: n , nstep
real*8:: t , htry
real*8 , dimension( n ):: dvardt , var , varsal , varout
real*8:: pi
integer:: co , nort , tau , con

open( file=' bifurcacion . dat ' , unit=16, status=' unknown ' )
pi=dacos(-1.d0)
nort=1
co=1
con=0

do while ( co . eq . 1 )
    con=con+1
    print * , con
    call derivs ( t , var , dvardt )
    call rkck ( var , dvardt , n , t , htry , varout )
    t=t+htry

```

```
var=varout
!Seccion de Poincare
if (var(1).gt.pi) var(1)=var(1)-2*pi
if (var(1).lt.-pi) var(1)=var(1)+2*pi
if (var(3).gt.pi) var(3)=var(3)-2*pi
if (var(3).lt.-pi) var(3)=var(3)+2*pi
if (var(5).gt.pi) var(5)=var(5)-2*pi
if (var(5).lt.-pi) var(5)=var(5)+2*pi
if(mod(con,320).eq.0) then
    if (con.gt.nstep) co=0
    if(con.gt.500) then
        write(16, '(f15.6, f15.6, f15.6, f15.6, f15.6,
            f15.6, f15.6)') var(2), var(1), var(4),
            var(3), var(6), var(5), t
    endif
    var(7)=var(7)-2.d0*pi
endif
enddo
close(16)
end subroutine poincare
```

# Bibliografía

- [1] Heike Kamerlingh Onnes. The disappearance of the resistivity of mercury. *Comm. Leiden*, 122:2, 1911.
- [2] HEIKE Kamerlingh Onnes. Investigations into the properties of substances at low temperatures, which have led, amongst other things, to the preparation of liquid helium. *Nobel lecture*, 4, 1913.
- [3] J Robert Schrieffer. *Theory of superconductivity*. CRC Press, 2018.
- [4] Brian David Josephson. Possible new effects in superconductive tunnelling. *Physics letters*, 1(7):251–253, 1962.
- [5] Sidney Shapiro. Josephson currents in superconducting tunneling: The effect of microwaves and other observations. *Physical Review Letters*, 11(2):80, 1963.
- [6] John Clarke. Squids. *Scientific American*, 271(2):46–53, 1994.
- [7] Sanjay P Singh. Magnetoencephalography: basic principles. *Annals of Indian Academy of Neurology*, 17(Suppl 1):S107, 2014.
- [8] Rainer Körber, Jan-Hendrik Storm, Hugh Seton, Jyrki P Mäkelä, Ritva Paetau, Lauri Parkkonen, Christoph Pfeiffer, Bushra Riaz, Justin F Schneiderman, Hui Dong, et al. Squids in biomagnetism: a roadmap towards improved healthcare. *Superconductor Science and Technology*, 29(11):113001, 2016.
- [9] Johannes Kohlmann, Ralf Behr, and Torsten Funck. Josephson voltage standards. *Measurement science and Technology*, 14(8):1216, 2003.
- [10] Tomu Wakamatsu, Yuki Yamanashi, and Nobuyuki Yoshikawa. High-speed superconductive decimation filter for sigma-delta analog to digital converter. In *Journal of Physics: Conference Series*, volume 871, page 012068. IOP Publishing, 2017.
- [11] Edward L Wolf, Gerald B Arnold, Michael A Gurvitch, and John F Zasadzinski. *Josephson Junctions: History, Devices, and Applications*. Pan Stanford, 2017.
- [12] Shailaj Shrivastava. Application of high- $t_c$  superconducting josephson junction devices. 6:517–523, 01 2019.

- 
- [13] Sergio Boixo, Sergei V Isakov, Vadim N Smelyanskiy, Ryan Babbush, Nan Ding, Zhang Jiang, Michael J Bremner, John M Martinis, and Hartmut Neven. Characterizing quantum supremacy in near-term devices. *Nature Physics*, 14(6):595, 2018.
- [14] Ge Zhang, Jun Ma, Ahmed Alsaedi, Bashir Ahmad, and Faris Alzahrani. Dynamical behavior and application in josephson junction coupled by memristor. *Applied Mathematics and Computation*, 321:290–299, 2018.
- [15] Clark A Hamilton, Charles Burroughs, and Kao Chieh. Operation of nist josephson array voltage standards. *Journal of research of the National Institute of Standards and Technology*, 95(3):219, 1990.
- [16] Richard L Kautz. Noise, chaos, and the josephson voltage standard. *Reports on Progress in Physics*, 59(8):935, 1996.
- [17] DE McCumber. Effect of ac impedance on dc voltage-current characteristics of superconductor weak-link junctions. *Journal of Applied Physics*, 39(7):3113–3118, 1968.
- [18] WC Stewart. Current-voltage characteristics of josephson junctions. *Applied Physics Letters*, 12(8):277–280, 1968.
- [19] BA Huberman, JP Crutchfield, and NH Packard. Noise phenomena in josephson junctions. *Applied Physics Letters*, 37(8):750–752, 1980.
- [20] Omar Guillén-Fernández, Ashley Meléndez-Cano, Esteban Tlelo-Cuautle, Jose Cruz Núñez-Pérez, and Jose de Jesus Rangel-Magdaleno. On the synchronization techniques of chaotic oscillators and their fpga-based implementation for secure image transmission. *PloS one*, 14(2), 2019.
- [21] Alejandro Silva-Juarez, Gustavo Rodriguez-Gomez, Luis Gerardo de la Fraga, Omar Guillen-Fernandez, and Esteban Tlelo-Cuautle. Optimizing the kaplan–yorke dimension of chaotic oscillators applying de and pso. *Technologies*, 7(2):38, 2019.
- [22] M Gurvitch, MA Washington, and HA Huggins. High quality refractory josephson tunnel junctions utilizing thin aluminum layers. *Applied Physics Letters*, 42(5):472–474, 1983.
- [23] Samuel P Benz. Superconductor-normal-superconductor junctions for programmable voltage standards. *Applied physics letters*, 67(18):2714–2716, 1995.
- [24] Antonio Barone and Gianfranco Paterno. *Physics and applications of the Josephson effect*. Wiley, 1982.
- [25] Richard P Feynman, RB Leighton, and M Sands. Lectures on physics, volume iii. *Quantum mechanics*, 1965.

- 
- [26] Johannes Kohlmann, Ralf Behr, and Torsten Funck. Josephson voltage standards. *Measurement science and Technology*, 14(8):1216, 2003.
- [27] Ludwig Arnold, Hans Crauel, and Jean-Pierre Eckmann. *Lyapunov exponents: proceedings of a conference held in Oberwolfach, May 28-June 2, 1990*. Springer, 2006.
- [28] Marco Sandri. Numerical calculation of lyapunov exponents. *Mathematica Journal*, 6(3):78–84, 1996.
- [29] Felix Miguel Carbonell Gonzalez, Juan Carlos Jimenez Sobrino, Rolando Jose Biscay Lirio, et al. Cálculo numérico de exponentes de lyapunov en ecuaciones diferenciales. Technical report, e-libro, Corp., 2008.
- [30] Robert C Hilborn et al. *Chaos and nonlinear dynamics: an introduction for scientists and engineers*. Oxford University Press on Demand, 2000.
- [31] Ipppei Shimada and Tomomasa Nagashima. A numerical approach to ergodic problem of dissipative dynamical systems. *Progress of theoretical physics*, 61(6):1605–1616, 1979.
- [32] Gregory L Baker and James A Blackburn. *The pendulum: a case study in physics*. Oxford University Press, 2005.
- [33] Samuel P Benz and Clark A Hamilton. Application of the josephson effect to voltage metrology. *Proceedings of the IEEE*, 92(10):1617–1629, 2004.
- [34] Heinz Georg Schuster and Wolfram Just. *Deterministic chaos: an introduction*. John Wiley & Sons, 2006.
- [35] Alexandre Liapounoff. Problème général de la stabilité du mouvement. In *Annales de la Faculté des sciences de Toulouse: Mathématiques*, volume 9, pages 203–474, 1907.
- [36] Valery Iustinovich Oseledets. A multiplicative ergodic theorem. characteristic lyapunov, exponents of dynamical systems. *Trudy Moskovskogo Matematicheskogo Obshchestva*, 19:179–210, 1968.
- [37] Jean J Souchay and Rudolf Dvorak. *Dynamics of small solar system bodies and exoplanets*, volume 790. Springer, 2010.
- [38] Giancarlo Benettin, Luigi Galgani, Antonio Giorgilli, and Jean-Marie Strelcyn. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for hamiltonian systems; a method for computing all of them. part 1: Theory. *Meccanica*, 15(1):9–20, 1980.
- [39] Viktor Vladimirovich Nemytskii. *Qualitative theory of differential equations*. Princeton University Press, 2015.
- [40] Werner Greub. Multilinear algebra, universitext, 1978.

- 
- [41] J Doyne Farmer. Chaotic attractors of an infinite-dimensional dynamical system. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 4(3):366–393, 1982.
- [42] J Doyne Farmer, Edward Ott, and James A Yorke. The dimension of chaotic attractors. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 7(1-3):153–180, 1983.
- [43] Jens Feder. *Fractals*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [44] Claude E Shannon. A mathematical theory of communication. *Bell system technical journal*, 27(3):379–423, 1948.
- [45] Lesley De Cruz, Sebastian Schubert, Jonathan Demaeyer, Valerio Lucarini, and Stéphane Vannitsem. Exploring the lyapunov instability properties of high-dimensional atmospheric and climate models. *arXiv preprint arXiv:1712.08242*, 2017.
- [46] Samuel P Benz, Clark A Hamilton, Charles J Burroughs, Todd E Harvey, and LA Christian. Stable 1 volt programmable voltage standard. *Applied physics letters*, 71(13):1866–1868, 1997.
- [47] Arieh Iserles. *A first course in the numerical analysis of differential equations*. Number 44. Cambridge university press, 2009.
- [48] William H Press and Saul A Teukolsky. Adaptive stepsize runge-kutta integration. *Computers in Physics*, 6(2):188–191, 1992.