

# **ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL**

**FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL Y AMBIENTAL**

**ANÁLISIS MODAL ESPECTRAL MEDIANTE EL USO DE  
VECTORES RITZ APLICADOS A UNA ESTRUCTURA**

**PROYECTO PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE  
INGENIERO CIVIL MENCIÓN ESTRUCTURAS**

**DARÍO ESTEBAN CARABALÍ IMBAQUINGO**  
**dariocarabali666@hotmail.com**

**DIRECTOR: Ing. M. Sc. EDGAR DAVID MORA MARTÍNEZ**  
**edgar.mora@epn.edu.ec**

**Quito Agosto 2020**

## **DECLARACIÓN**

Yo, Darío Esteban Carabalí Imbaquingo declaro que el trabajo aquí descrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y, que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

La Escuela Politécnica Nacional, puede hacer uso de los derechos correspondientes a este trabajo, según lo establecido por la Ley de Propiedad Intelectual, por su Reglamento y por la normativa institucional vigente.

---

DARÍO E. CARABALÍ IMBAQUINGO

## **CERTIFICACIÓN**

Certifico que el presente trabajo fue desarrollado por Darío Esteban Carabalí Imbaquingo bajo mi supervisión.

---

Ing. M. SC. EDGAR DAVID MORA MARTÍNEZ  
DIRECTOR DEL PROYECTO

## **DEDICATORIA**

A mi amada madre María gracias por su esfuerzo, dedicación, por inculcarme buenos valores, por apoyarme siempre en las buenas y en las malas y confiar en mi, pero sobre todo por todo el amor que me ha dado.

## **AGRADECIMIENTO**

A mi madre y hermano por todo el apoyo y confianza que me han brindado.

A mis abuelitos Víctor y María gracias por enseñarme valores como el respeto, la honestidad y lealtad y por su constante guía a lo largo de mi vida.

Al Ing. M. Sc Edgar David Mora que con sus enseñanzas, guías, observaciones y paciencia ha sido fundamental en la realización de este trabajo además de la confianza depositada en mi persona.

## INDICE DE CONTENIDO

DECLARACIÓN .....	I
CERTIFICACIÓN .....	II
DEDICATORIA.....	III
AGRADECIMIENTO.....	IV
LISTADO DE TABLAS .....	IX
LISTADO DE FIGURAS.....	XIV
RESUMEN .....	XVI
ABSTRACT .....	XVII
INTRODUCCIÓN .....	1
1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	1
1.2 JUSTIFICACIÓN.....	1
1.2.1 JUSTIFICACIÓN TEÓRICA.....	1
1.2.2 JUSTIFICACIÓN METODOLÓGICA.....	2
1.2.3 JUSTIFICACIÓN PRÁCTICA.....	2
1.3 IMPORTANCIA DEL USO DE VECTORES RITZ.....	2
1.4. OBJETIVOS .....	3
1.4.1. OBJETIVO GENERAL .....	3
1.4.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS.....	3
1.5 ALCANCE. ....	4
MARCO TEÓRICO.....	5
2.1. ANÁLISIS DINÁMICO DE ESTRUCTURAS. ....	5
2.1.1. ECUACIONES DE MOVIMIENTO .....	5
2.1.2 SOLUCIÓN DE LA RESPUESTA ESTRUCTURAL.....	7
2.2 CARACTERÍSTICAS DE LOS MODOS DE VIBRACIÓN. ....	9
2.2.1 ORTOGONALIDAD DE LOS MODOS DE VIBRACIÓN .....	9
2.2.2 NORMALIZACIÓN .....	9
2.2.3 EXPANSIÓN MODAL DE LOS DESPLAZAMIENTOS .....	10
2.3 SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE AUTOVALORES.....	10
2.3.1 INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DEL PROBLEMA DE AUTOVALORES.....	10
2.4. IDEALIZACIÓN DINÁMICA DE UNA ESTRUCTURA.....	13

2.4.1 RESTRICCIONES CINEMÁTICAS .....	13
2.5 MASA DISTRIBUIDA Y MASA CONCENTRADA .....	14
2.5.1 MASA DISTRIBUIDA .....	15
2.5.2 MATRIZ DE MASA CONCENTRADA.....	15
2.6 ANÁLISIS MODAL ESPECTRAL.....	17
2.6.1 RESPUESTA DE SISTEMAS DE VARIOS GRADOS DE LIBERTAD ANTE UNA EXCITACIÓN EN LA BASE .....	17
2.6.2 MÉTODOS DE COMBINACIÓN MODAL .....	19
2.7 MÉTODO DE RAYLEIGH-RITZ.....	21
2.8 GENERACIÓN DE VECTORES RITZ .....	24
2.9 ESTIMACIÓN DEL ERROR DEL VECTOR DE FUERZAS. ....	29
2.9.3 EJEMPLO DEL CÁLCULO DEL ERROR MEDIANTE EL USO DE VECTORES RITZ Y EL USO DE AUTOVALORES .....	32
MODELOS MATEMÁTICOS .....	35
3.1 MODELO MATEMÁTICO PARA PÓRTICOS PLANOS.....	35
3.1.1 MATRIZ DE RIGIDEZ PARA UN ELEMENTO PÓRTICO PLANO. ....	35
3.1.2 MATRIZ CONSISTENTE DE MASAS PARA UN ELEMENTO TIPO PÓRTICO. ....	46
3.2 MATRIZ DE RIGIDEZ PARA UN ELEMENTO TIPO PÓRTICO ESPACIAL .....	50
3.3 ANÁLISIS PSEUDO ESPACIAL .....	58
DESCRIPCIÓN DE LOS PROGRAMAS .....	63
4.1 LENGUAJE DE PROGRAMACIÓN .....	63
4.2 DESCRIPCIÓN GENERAL DEL PROGRAMA PÓRTICOS2D .....	63
4.2.1 DATOS DE ENTRADA .....	64
4.2.2 CÓDIGO GENERAL DEL PROGRAMA PORTICOS2D .....	72
4.3 DESCRIPCIÓN GENERAL DEL PROGRAMA PÓRTICOS3D .....	78
4.3.1 DATOS DE ENTRADA .....	78
4.3.2 CÓDIGO DEL GENERAL DEL PROGRAMA PORTICOS3D .....	86
4.4 PROGRAMA ANÁLISIS PSEUDO_ESPACIAL.....	93
4.3.2 CÓDIGO DEL GENERAL DEL PROGRAMA ANÁLISIS PSEUDOESPACIAL .....	100
MODELACIÓN COMPUTACIONAL .....	108

5.1 APLICACIÓN PROGRAMA PORTICOS2D .....	110
5.1.2 DEFINICIÓN DE PARÁMETROS .....	110
5.1.2 COMPARACIÓN DE RESULTADOS OBTENIDOS PROGRAMA PÓRTICOS2D .....	111
5.2 APLICACIÓN PROGRAMA PORTICOS3D .....	116
5.2.1 MODELO 1 .....	116
5.2.2 DEFINICIÓN DE PARÁMETROS MODELO 1 .....	117
5.2.3 COMPARACIÓN DE RESULTADOS OBTENIDOS PROGRAMA Pórticos3D Modelo1 .....	119
5.3 MODELO 2 .....	126
5.3.1 DEFINICIÓN DE PARÁMETROS MODELO 2 .....	126
5.3.2 COMPARACIÓN DE RESULTADOS OBTENIDOS PROGRAMA Pórticos3D Modelo 2 .....	128
5.4 MODELO 3 .....	134
5.4.1 DEFINICIÓN DE PARÁMETROS MODELO 3 .....	134
5.4.2 COMPARACIÓN DE RESULTADOS OBTENIDOS PROGRAMA Pórticos3D Modelo3 .....	137
5.3 APLICACIÓN PROGRAMA ANÁLISIS PSEUDOESPACIAL .....	143
5.5 MODELO 1 .....	143
5.5.1 DEFINICIÓN DE PARÁMETROS MODELO 1 .....	143
5.5.2 COMPARACIÓN DE RESULTADOS OBTENIDOS PROGRAMA ANÁLISIS PSEUDO ESPACIAL MODELO 1 .....	144
5.6 MODELO 2 .....	148
5.6.1 DEFINICIÓN DE PARÁMETROS MODELO 2 .....	148
5.6.2 COMPARACIÓN DE RESULTADOS OBTENIDOS PROGRAMA ANÁLISIS PSEUDO ESPACIAL MODELO 2 .....	149
5.7 MODELO 3 .....	155
5.7.1 DEFINICIÓN DE PARÁMETROS MODELO 3 .....	155
5.7.2 COMPARACIÓN DE RESULTADOS OBTENIDOS PROGRAMA ANÁLISIS PSEUDOESPACIAL MODELO 2 .....	155
CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES .....	159
6.1 CONCLUSIONES .....	159
6.2 RECOMENDACIONES .....	161

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	162
ANEXOS .....	164
RUTINAS REALIZADOS EN MATLAB PARA EL PROGRAMA.....	164
PORTICOS2D .....	164
A.1.1 FUNCIÓN DISCRETIZACIÓN .....	165
A.1.2 FUNCIÓN GRADOS DE LIBERTAD .....	169
A.1.3 FUNCIÓN MATRIZ DE RIGIDEZ Y DE MASAS PORTICOS2D.....	170
A.1.4 CALCULO PROPIEDADES DINÁMICAS .....	173
A.1.5 ESPECTRO DE DESPLAZAMIENTO .....	174
A.1.6 FUNCIÓN VECTOR DE COMPATIBILIDAD DE ACELERACIONES ....	176
A.1.7 FUNCIÓN ANÁLISIS MODAL.....	176
A.1.8 FUNCIÓN MASA MODAL EFECTIVA .....	183
A.1.9 FUNCIÓN COMBINACIÓN MODAL CQC .....	184
A.1.10 FUNCIÓN COMBINACIÓN MODAL SRSS .....	187
A.1.11 FUNCIÓN FUERZAS Y DESPLAZAMIENTOS POR ELEMENTO .....	189

## LISTADO DE TABLAS

<b>TABLA 3.1</b> CONDICIONES DE BORDE PARA CADA GRADO DE LIBERTAD DE UN ELEMENTO TIPO VIGA.....	42
<b>TABLA 5. 1</b> FACTORES NEC-15 PARA OBTENER EL ESPECTRO DE DESPLAZAMIENTOS PÓRTICO1 .....	110
<b>TABLA 5. 2</b> COMPARACIÓN DE LOS 20 PRIMEROS PERIODOS DE VIBRACIÓN MATLAB VS SAP2000 PÓRTICO1 .....	112
<b>TABLA 5. 3</b> ERROR PORCENTUAL DE LOS PERIODOS DE VIBRACIÓN PÓRTICO1 ENTRE LOS RESULTADOS DE MATLAB Y SAP2000.....	112
<b>TABLA 5. 4 COMPARACIÓN DE LAS DEFORMACIONES MÁXIMAS MATLAB VS SAP2000 PÓRTICO1 NODOS 36 Y 40</b> .....	113
<b>TABLA 5. 5</b> ERROR PORCENTUAL DE LAS DEFORMACIONES MÁXIMAS PÓRTICO 1 ENTRE LOS RESULTADOS DE MATLAB Y SAP2000.....	114
<b>TABLA 5. 6</b> COMPARACIÓN DE LAS ACCIONES MÁXIMAS MATLAB VS SAP2000 PÓRTICO1 ELEMENTOS 1,7 Y 8.....	114
<b>TABLA 5. 7</b> ERROR PORCENTUAL DE LAS ACCIONES MÁXIMAS PÓRTICO1 ENTRE MATLAB Y SAP2000 PARA LOS ELEMENTOS 1,7 Y 8 .....	115
<b>TABLA 5. 8</b> COMPARACIÓN REACCIONES EN LA BASE MATLAB VS SAP2000 PÓRTICO1 .....	115
<b>TABLA 5. 9</b> ERROR PORCENTUAL DE LAS REACCIONES EN LA BASE PÓRTICO1 ENTRE MATLAB Y SAP2000 .....	115
<b>TABLA 5. 10</b> COMPARACIÓN MASA MODAL EFECTIVA MATLAB VS SAP2000 PÓRTICO1 .....	115
<b>TABLA 5. 11</b> DIMENSIONES DE VIGAS Y COLUMNAS MODELO 1 .....	117
<b>TABLA 5. 12</b> CARGAS SOBRE LAS VIGAS MODELO 1 .....	117
<b>TABLA 5. 13</b> FACTORES NEC-15 PARA OBTENER EL ESPECTRO DE DESPLAZAMIENTOS MODELO 1.....	118
<b>TABLA 5. 14</b> COMPARACIÓN DE LOS 20 PRIMEROS PERIODOS DE VIBRACIÓN MATLAB VS SAP2000 MODELO 1 .....	119
<b>TABLA 5. 15</b> ERROR PORCENTUAL DE LOS PERIODOS DE VIBRACIÓN ENTRE LOS RESULTADOS DE MATLAB Y SAP2000 MODELO 1.....	120
<b>TABLA 5. 16</b> COMPARACIÓN DE LAS DEFORMACIONES MÁXIMAS MATLAB VS SAP2000 NODOS 2, 9, 12, 80 Y 78 MODELO 1.....	121
<b>TABLA 5. 17</b> ERROR PORCENTUAL DE LAS DEFORMACIONES MÁXIMAS ENTRE LOS RESULTADOS DE MATLAB Y SAP2000 MODELO 1.....	122
<b>TABLA 5. 18</b> COMPARACIÓN DE LAS ACCIONES MÁXIMAS MATLAB VS SAP2000 ELEMENTOS 56, 106 Y 152 MODELO 1 .....	123
<b>TABLA 5. 19</b> ERROR PORCENTUAL DE LAS ACCIONES MÁXIMAS ENTRE LOS RESULTADOS DE MATLAB Y SAP2000 MODELO 1.....	123

<b>TABLA 5. 20</b> COMPARACIÓN REACCIONES EN LA BASE MATLAB VS SAP2000 MODELO 1.....	124
<b>TABLA 5. 21</b> ERROR PORCENTUAL DE LAS REACCIONES EN LA BASE MODELO 1 ENTRE MATLAB Y SAP2000.....	124
<b>TABLA 5. 22</b> COMPARACIÓN REACCIONES EN LA BASE USANDO LA FUNCIÓN DISCRETIZACIÓN MODELO 1 MATLAB VS SAP2000 .....	124
<b>TABLA 5. 23</b> ERROR PORCENTUAL DE LAS REACCIONES EN LA BASE USANDO LA FUNCIÓN DISCRETIZACIÓN MODELO 1 ENTRE MATLAB Y SAP2000.....	125
<b>TABLA 5. 24</b> COMPARACIÓN MASA MODAL EFECTIVA MATLAB VS SAP2000 MODELO 1.....	125
<b>TABLA 5. 25</b> DIMENSIONES DE VIGAS Y COLUMNAS MODELO 2 .....	126
<b>TABLA 5. 26</b> CARGAS SOBRE LAS VIGAS MODELO 2 .....	127
<b>TABLA 5. 27</b> FACTORES NEC-15 PARA OBTENER EL ESPECTRO DE DESPLAZAMIENTOS MODELO 2.....	127
<b>TABLA 5. 28</b> COMPARACIÓN DE LOS 20 PRIMEROS PERIODOS DE VIBRACIÓN MATLAB VS SAP2000 MODELO 2.....	129
<b>TABLA 5. 29</b> ERROR PORCENTUAL DE LOS PERIODOS DE VIBRACIÓN ENTRE LOS RESULTADOS DE MATLAB Y SAP2000 MODELO 2.....	129
<b>TABLA 5. 30</b> COMPARACIÓN DE LAS DEFORMACIONES MÁXIMAS MATLAB VS SAP2000 NODOS 28, 63 ,64 Y 65 MODELO 2.....	130
<b>TABLA 5. 31</b> ERROR PORCENTUAL DE LAS DEFORMACIONES MÁXIMAS ENTRE LOS RESULTADOS DE MATLAB Y SAP2000 MODELO 2.....	131
<b>TABLA 5. 32</b> COMPARACIÓN DE LAS ACCIONES MÁXIMAS MATLAB VS SAP2000 ELEMENTOS 56, 74 Y 109 MODELO 2 .....	131
<b>TABLA 5. 33</b> ERROR PORCENTUAL DE LAS ACCIONES MÁXIMAS MODELO 2 ENTRE LOS RESULTADOS DE MATLAB Y SAP2000.....	132
<b>TABLA 5. 34</b> COMPARACIÓN REACCIONES EN LA BASE MATLAB VS SAP2000 MODELO 2.....	132
<b>TABLA 5. 35</b> ERROR PORCENTUAL DE LAS REACCIONES EN LA BASE MODELO2 ENTRE MATLAB Y SAP2000.....	133
<b>TABLA 5. 36</b> COMPARACIÓN REACCIONES EN LA BASE USANDO LA FUNCIÓN DISCRETIZACIÓN MODELO 2 MATLAB VS SAP2000 .....	133
<b>TABLA 5. 37</b> ERROR PORCENTUAL DE LAS REACCIONES EN LA BASE USANDO LA FUNCIÓN DISCRETIZACIÓN MODELO 2 ENTRE MATLAB Y SAP2000.....	133
<b>TABLA 5. 38</b> COMPARACIÓN MASA MODAL EFECTIVA MATLAB VS SAP2000 MODELO 2.....	133
<b>TABLA 5. 39</b> DIMENSIONES DE VIGAS Y COLUMNAS MODELO 3 .....	134
<b>TABLA 5. 40</b> CARGAS SOBRE LAS VIGAS MODELO 3 .....	135
<b>TABLA 5. 41</b> FACTORES NEC-15 PARA OBTENER EL ESPECTRO DE DESPLAZAMIENTOS MODELO 3.....	136

<b>TABLA 5. 42</b> COMPARACIÓN DE LOS 20 PRIMEROS PERIODOS DE VIBRACIÓN MATLAB VS SAP2000 MODELO 3.....	137
<b>TABLA 5. 43</b> ERROR PORCENTUAL DE LOS PERIODOS DE VIBRACIÓN MODELO 3 ENTRE LOS RESULTADOS DE MATLAB Y SAP2000.....	138
<b>TABLA 5. 44</b> COMPARACIÓN DE LAS DEFORMACIONES MÁXIMAS MATLAB VS SAP2000 NODOS 12, 36, 53 Y 64 MODELO 3.....	139
<b>TABLA 5. 45</b> ERROR PORCENTUAL DE LAS DEFORMACIONES MÁXIMAS ENTRE LOS RESULTADOS DE MATLAB Y SAP2000 MODELO 3.....	139
<b>TABLA 5. 46</b> COMPARACIÓN DE LAS ACCIONES MÁXIMAS MATLAB VS SAP2000 ELEMENTOS 50, 54 Y 58 MODELO 3 .....	140
<b>TABLA 5. 47</b> ERROR PORCENTUAL DE LAS ACCIONES MÁXIMAS MODELO 3 ENTRE LOS RESULTADOS DE MATLAB Y SAP2000 .....	141
<b>TABLA 5. 48</b> COMPARACIÓN REACCIONES EN LA BASE MATLAB VS SAP2000 MODELO 3.....	141
<b>TABLA 5. 49</b> ERROR PORCENTUAL DE LAS REACCIONES EN LA BASE ENTRE MATLAB Y SAP2000 MODELO3.....	141
<b>TABLA 5. 50</b> COMPARACIÓN REACCIONES EN LA BASE USANDO LA FUNCIÓN DISCRETIZACIÓN MODELO 3 MATLAB VS SAP2000 .....	142
<b>TABLA 5. 51</b> ERROR PORCENTUAL DE LAS REACCIONES EN LA BASE USANDO LA FUNCIÓN DISCRETIZACIÓN MODELO 3 ENTRE MATLAB Y SAP2000.....	142
<b>TABLA 5. 52</b> COMPARACIÓN MASA MODAL EFECTIVA MATLAB VS SAP2000 MODELO 3.....	142
<b>TABLA 5. 53</b> CORTE BASAL ESTÁTICO POR PISO MODELO 1.....	143
<b>TABLA 5. 54</b> COMPARACIÓN DE LOS 10 PRIMEROS PERIODOS DE VIBRACIÓN MATLAB VS SAP2000 MODELO 1 .....	144
<b>TABLA 5. 55</b> ERROR PORCENTUAL DE LOS PERIODOS DE VIBRACIÓN ENTRE LOS RESULTADOS DE MATLAB Y SAP2000 MODELO 1.....	145
<b>TABLA 5. 56</b> DESPLAZAMIENTOS DE PISO MATLAB MODELO 1 .....	145
<b>TABLA 5. 57</b> DESPLAZAMIENTOS DE PISO OBTENIDOS SAP2000 MODELO 1 .....	145
<b>TABLA 5. 58</b> ERROR PORCENTUAL DE LOS DESPLAZAMIENTOS DE PISO ENTRE LOS RESULTADOS DE MATLAB Y SAP2000 MODELO1.....	146
<b>TABLA 5. 59</b> COMPARACIÓN DERIVAS DE PISO MATLAB VS SAP2000 MODELO1.....	146
<b>TABLA 5. 60</b> ERROR PORCENTUAL DERIVAS DE PISO ENTRE LOS RESULTADOS DE MATLAB Y SAP2000 MODELO 1.....	146
<b>TABLA 5. 61</b> COMPARACIÓN CORTANTE BASAL DINÁMICO MATLAB VS SAP2000 MODELO 1 .....	146
<b>TABLA 5. 62</b> COMPARACIÓN MOMENTO EN LA BASE MATLAB VS SAP2000 MODELO 1.....	147

<b>TABLA 5. 63</b> COMPARACIÓN TORSIÓN EN LA BASE MATLAB VS SAP2000 MODELO 1.....	147
<b>TABLA 5. 64</b> COMPARACIÓN FACTORES DE PARTICIPACIÓN MODAL MATLAB VS SAP2000 MODELO 1.....	147
<b>TABLA 5.65</b> CORTE BASAL ESTÁTICO POR PISO MODELO 2.....	148
<b>TABLA 5. 66</b> COMPARACIÓN DE LOS PERIODOS DE VIBRACIÓN MATLAB VS SAP2000 MODELO 2.....	149
<b>TABLA 5. 67</b> ERROR PORCENTUAL DE LOS PERIODOS DE VIBRACIÓN ENTRE LOS RESULTADOS DE MATLAB Y SAP2000 MODELO 2.....	150
<b>TABLA 5. 68</b> DESPLAZAMIENTOS DE PISO MATLAB MODELO 2.....	151
<b>TABLA 5. 69</b> DESPLAZAMIENTOS DE PISO SAP2000 MODELO 2.....	151
<b>TABLA 5. 70</b> ERROR PORCENTUAL DE LOS DESPLAZAMIENTOS DE PISO ENTRE LOS RESULTADOS DE MATLAB Y SAP2000 MODELO 2.....	151
<b>TABLA 5. 71</b> COMPARACIÓN DERIVAS DE PISO MATLAB VS SAP2000 MODELO 2.....	152
<b>TABLA 5. 72</b> ERROR PORCENTUAL DERIVAS DE PISO ENTRE LOS RESULTADOS DE MATLAB Y SAP2000 MODELO 2.....	152
<b>TABLA 5. 73</b> COMPARACIÓN CORTANTE BASAL DINÁMICO MATLAB VS SAP2000 MODELO 2.....	153
<b>TABLA 5. 74</b> COMPARACIÓN MOMENTO EN LA BASE MATLAB VS SAP2000 MODELO 2.....	153
<b>TABLA 5. 75</b> COMPARACIÓN TORSIÓN EN LA BASE MATLAB VS SAP2000 MODELO 2.....	153
<b>TABLA 5. 76</b> COMPARACIÓN FACTORES DE PARTICIPACIÓN MODAL MATLAB VS SAP2000 MODELO 2.....	154
<b>TABLA 5. 77</b> CORTE BASAL ESTÁTICO POR PISO MODELO 3.....	155
<b>TABLA 5. 78</b> COMPARACIÓN DE LOS PERIODOS DE VIBRACIÓN MATLAB VS SAP2000 MODELO 3.....	156
<b>TABLA 5. 79</b> ERROR PORCENTUAL DE LOS PERIODOS DE VIBRACIÓN ENTRE LOS RESULTADOS DE MATLAB Y SAP2000 MODELO 3.....	156
<b>TABLA 5. 80</b> DESPLAZAMIENTOS DE PISO MATLAB MODELO 3.....	156
<b>TABLA 5. 81</b> DESPLAZAMIENTOS DE PISO SAP2000 MODELO 3.....	157
<b>TABLA 5. 82</b> ERROR PORCENTUAL DE LOS DESPLAZAMIENTOS DE PISO ENTRE LOS RESULTADOS DE MATLAB Y SAP2000 MODELO 3.....	157
<b>TABLA 5. 83</b> COMPARACIÓN DERIVAS DE PISO MATLAB VS SAP2000.....	157
<b>TABLA 5. 84</b> ERROR PORCENTUAL DERIVAS DE PISO ENTRE LOS RESULTADOS DE MATLAB Y SAP2000 MODELO 3.....	157
<b>TABLA 5. 85</b> COMPARACIÓN CORTANTE BASAL DINÁMICO MATLAB VS SAP2000 MODELO 3.....	158
<b>TABLA 5. 86</b> COMPARACIÓN MOMENTO EN LA BASE MATLAB VS SAP2000 MODELO 3.....	158

<b>TABLA 5. 87</b> COMPARACIÓN TORSIÓN EN LA BASE MATLAB VS SAP2000 MODELO 3.....	158
<b>TABLA 5. 88</b> COMPARACIÓN FACTORES DE PARTICIPACIÓN MODAL MATLAB VS SAP2000 MODELO 3.....	158

## LISTADO DE FIGURAS

<b>FIGURA 2.1</b> ELIPSE .....	11
<b>FIGURA 2.2</b> DEFORMACIONES INTERNAS DE UNA LOSA ANTE DOS TIPOS DE CARGA .....	13
<b>FIGURA 2.3</b> EDIFICIO.....	14
<b>FIGURA 2.4</b> VIGA CON MASA DISTRIBUIDA SOMETIDO A UNA CARGA INERCIAL PRODUCIDA POR LA ACELERACIÓN $\delta = 1$ .....	15
<b>FIGURA 2.5</b> MASAS CONCENTRADAS PARA UN SEGMENTO DE VIGA CON MASA DISTRIBUIDA .....	16
<b>FIGURA 2.6</b> REPRESENTACIÓN DEL PÓRTICO.....	42
<b>FIGURA 3. 1</b> ELEMENTO TIPO BARRA SOMETIDO A UN DESPLAZAMIENTO UNITARIO .....	35
<b>FIGURA 3. 2</b> ELEMENTO DIFERENCIAL DE VIGA SOMETIDO A UNA CARGA.....	37
<b>FIGURA 3. 3</b> GRADOS DE LIBERTAD DE UN ELEMENTO TIPO VIGA .....	39
<b>FIGURA 3. 4</b> DEFORMACIÓN DE UN ELEMENTO TIPO VIGA SOMETIDO A UN DESPLAZAMIENTO UNITARIO DE TRASLACIÓN EN EL EXTREMO IZQUIERDO.....	40
<b>FIGURA 3. 5</b> DEFORMACIÓN DE UN ELEMENTO TIPO VIGA SOMETIDO A UN DESPLAZAMIENTO UNITARIO DE ROTACIÓN EN EL EXTREMO IZQUIERDO .....	40
<b>FIGURA 3. 6</b> DEFORMACIÓN DE UN ELEMENTO TIPO VIGA SOMETIDO A UN DESPLAZAMIENTO UNITARIO DE TRASLACIÓN EN EL EXTREMO DERECHO .....	41
<b>FIGURA 3. 7</b> DEFORMACIÓN DE UN ELEMENTO TIPO VIGA SOMETIDO A UN DESPLAZAMIENTO UNITARIO DE ROTACIÓN EN EL EXTREMO DERECHO.....	41
<b>FIGURA 3. 8</b> GRADOS DE LIBERTAD DE UN ELEMENTO TIPO PÓRTICO PLANO EN COORDENADAS LOCALES.....	44
<b>FIGURA 3. 9</b> GRADOS DE LIBERTAD DE UN ELEMENTO TIPO PÓRTICO PLANO EN COORDENADAS LOCALES Y GLOBALES .....	45
<b>FIGURA 3. 10</b> ACELERACIONES Y FUERZAS EN LOS EXTREMOS DE UN ELEMENTO TIPO PÓRTICO PLANO.....	47
<b>FIGURA 3. 11</b> GRADOS DE LIBERTAD EN COORDENADAS LOCALES Y GLOBALES DE UN ELEMENTO TIPO PÓRTICO ESPACIAL.....	51
<b>FIGURA 3. 12</b> SISTEMA GLOBAL DE COORDENADAS (X,Y,Z) Y SISTEMA LOCAL DE COORDENADAS (x,y,x).....	53
<b>FIGURA 3. 13</b> POSICIÓN ESTÁNDAR DE LA SECCIÓN TRANSVERSAL PARA UN ELEMENTO VERTICAL.....	54
<b>FIGURA 3. 14</b> POSICIÓN ESTÁNDAR DE LA SECCIÓN TRANSVERSAL PARA UN ELEMENTO HORIZONTAL .....	55
<b>FIGURA 3. 15</b> POSICIÓN ESTÁNDAR DE LA SECCIÓN TRANSVERSAL PARA UN ELEMENTO TRANSVERSAL.....	56

<b>FIGURA 3. 16</b> GRADOS DE LIBERTAD POR PISO DE UN MODELO PISO RIGIDO.....	58
<b>FIGURA 3. 17</b> ACELERACIONES IMPUESTAS AL CUERPO RÍGIDO.....	61
<b>FIGURA 4.1</b> REPRESENTACIÓN DEL PÓRTICO.....	72
<b>FUGURA 4.2</b> NUMERACIÓN DE ELEMENTOS Y NODOS DEL PÓRTICO.....	73
<b>FUGURA 4. 3</b> NUMERACIÓN DE NODOS DEL PÓRTICO.....	86
<b>FUGURA 4.4</b> REPRESENTACIÓN DEL PÓRTICO ESPACIAL $F_u$ .....	100
<b>FIGURA 5. 1</b> PÓRTICO A SER ANALIZADO.....	110
<b>FIGURA 5.2</b> NUMERACIÓN DE NODOS Y ELEMENTOS.....	111
<b>FIGURA 5.3</b> VARIACIÓN DEL ERROR CON RESPECTO AL NÚMERO DE VECTORES RITZ Y LOS MODOS NATURALES PARA EL PÓRTICO1 .....	111
<b>FIGURA 5. 4</b> VISTA EN PLANTA MODELO 1 .....	116
<b>FIGURA 5.5</b> NUMERACIÓN DE NODOS MODELO 1 .....	118
<b>FIGURA 5.6</b> VARIACIÓN DEL ERROR CON RESPECTO AL NÚMERO DE VECTORES RITZ Y LOS MODOS NATURALES PARA EL MÓDELO 1 .....	119
<b>FIGURA 5. 7</b> VISTA EN PLANTA MODELO 2 .....	126
<b>FIGURA 5. 8</b> NUMERACIÓN DE NODOS MODELO 2 .....	128
<b>FIGURA 5.9</b> VARIACIÓN DEL ERROR CON RESPECTO AL NÚMERO DE VECTORES RITZ Y LOS MODOS NATURALES PARA EL MODELO 2.....	128
<b>FIGURA 5. 10</b> VISTA EN PLANTA MODELO 3.....	134
<b>FIGURA 5.11</b> NUMERACIÓN DE NODOS MODELO 3 .....	136
<b>FIGURA 5.12</b> VARIACIÓN DEL ERROR CON RESPECTO AL NÚMERO DE VECTORES RITZ Y LOS MODOS NATURALES PARA EL MODELO 3.....	137
<b>FIGURA 5.13</b> VARIACIÓN DEL ERROR CON RESPECTO AL NÚMERO DE VECTORES RITZ Y LOS MODOS NATURALES MODELO1 ANÁLISIS PSEUDO ESPACIAL.....	144
<b>FIGURA 5.14</b> VARIACIÓN DEL ERROR CON RESPECTO AL NÚMERO DE VECTORES RITZ Y LOS MODOS NATURALES MODELO 2 ANÁLISIS PSEUDO ESPACIAL.....	149
<b>FIGURA 5.15</b> VARIACIÓN DEL ERROR CON RESPECTO AL NÚMERO DE VECTORES RITZ Y LOS MODOS NATURALES MODELO3 ANÁLISIS PSEUDO ESPACIAL.....	155

## RESUMEN

El presente estudio trata acerca del uso de vectores Ritz aplicados a un análisis modal espectral, en este estudio se revisarán los aspectos teóricos que rigen el método de Rayleigh Ritz y su aplicación orientada hacia un análisis dinámico, mediante programas de análisis de estructuras realizados en el software Matlab.

El objetivo del uso de vectores Ritz es el de reducir los grados de libertad de la estructura, para esto los vectores Ritz solo toman en cuenta los grados de libertad que son excitados debido a la aplicación de fuerzas externas. De esta manera este método genera un menor trabajo de cómputo en el cálculo de frecuencias y formas modales de la estructura.

Los vectores Ritz representan un enfoque más eficiente para el cálculo de desplazamientos modales y fuerzas en los elementos de estructuras que están sujetas a cargas dinámicas.

Además de que se demostrara la diferencia entre el método de autovalores y vectores Ritz aplicados a un análisis dinámico.

## **ABSTRACT**

The present study deals with the use of Ritz vectors applied to a spectral modal analysis, in this study the theoretical aspects that govern the Rayleigh Ritz method and its application oriented towards a dynamic analysis will be reviewed, through structural analysis programs carried out in the Mat lab software.

The objective of using Ritz vectors is to reduce the degrees of freedom of the structure, for this the Ritz vectors only take into account the degrees of freedom that are excited due to the application of external forces. In this way, this method generates less computational work in calculating frequencies and modal forms of the structure.

Ritz vectors represent a more efficient approach to the calculation of modal displacements and forces in the elements of structures that are subject to dynamic loads.

In addition to demonstrating, the difference between the method of eigenvalues and Ritz vectors applied to a dynamic analysis.

# **CAPÍTULO 1**

## **INTRODUCCIÓN**

### **1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA**

En el análisis dinámico lineal de estructuras es aplicado el método de superposición modal en el que para encontrar las propiedades de vibración, frecuencias y modos naturales de una estructura se requiere resolver la ecuación característica, pero este método no es práctico para sistemas con un gran número de grados de libertad, debido a que los coeficientes y las raíces del polinomio característico son sensibles a errores de redondeo.(Chopra, 2014)

El análisis de autovalores determina las formas modales y frecuencias de un sistema de vibración libre no amortiguado, mientras que en el análisis mediante el uso de vector-Ritz se busca encontrar los modos que son excitados por una carga particular, proporcionando una mejor base que los vectores propios cuando se usan para análisis modal espectral o tiempo historia los cuales se basan en la superposición lineal.(Wilson, 2008)

El método de Rayleigh-Ritz se utilizaba para el análisis dinámico para calcular soluciones aproximadas, con el desarrollo de computadoras de alta velocidad, el uso de autovalores exactos comenzaron a sustituir al método de Rayleigh-Ritz como base del análisis dinámico. Actualmente el método modificado de Ritz proporciona resultados más precisos y además un menor trabajo de cómputo que el producido por el método de autovalores.(Wilson, 2008)

### **1.2 JUSTIFICACIÓN**

#### **1.2.1 JUSTIFICACIÓN TEÓRICA**

En el método de autovalores se determinan las formas modales y frecuencias de un sistema de vibración libre no amortiguado, al no tomarse en cuenta la distribución espacial de la carga dinámica muchas de las formas de modo que se calculan no participan en la respuesta dinámica generando así un mayor trabajo de cómputo, mientras que el uso de vectores Ritz si toma en cuenta la distribución espacial de la carga dinámica y busca encontrar los modos que son excitados por una carga en particular reduciendo así el número de modos generando resultados más precisos con un menor trabajo de cómputo (Oliva, 1992) .El presente estudio busca demostrar la aplicabilidad del uso de vectores-Ritz en un análisis modal

espectral y establecer las diferencia entre este método y el método de autovalores, mediante la aplicación de un programa de análisis estructural orientado al uso de vectores de Ritz y el método de autovalores además de que en el programa se implementara el cálculo del error mediante el método expuesto en Chopra (Chopra, 2014) en la inclusión del número de modos requeridos empleando vectores Ritz y el número de modos requeridos aplicando el método de autovalores los programas se los realizará en MATLAB(Matrix Laboratory, 2004).

### **1.2.2 JUSTIFICACIÓN METODOLÓGICA**

La metodología a emplearse en este estudio será de carácter comparativo. Para esto se realizarán tres programas en Matlab. Para: análisis de Pórticos en dos dimensiones, pórticos espaciales y análisis pseudo espacial, estos programas están orientados al análisis modal espectral dentro del rango lineal. En cada programa se utilizarán los modos obtenidos mediante el método de Autovalores y los modos obtenidos utilizando los vectores Ritz. Posteriormente se realizará un análisis comparativo y de precisión de los resultados obtenidos con los programas de Matlab con los resultados obtenidos con el programa SAP2000.

### **1.2.3 JUSTIFICACIÓN PRÁCTICA**

Los vectores Ritz son ampliamente utilizados para análisis dinámicos que involucran movimiento horizontal del suelo dando buenos resultados. Su beneficio es que encuentra los modos que son excitados por una carga particular de esta manera reduce el problema característico o de Autovalores permitiendo que el análisis dinámico se ejecute más rápido con el mismo nivel de precisión (Wilson, 2008) Mediante un programa orientado al análisis dinámico de estructuras, se pretende dar una guía del proceso para generar vectores Ritz, su aplicación y utilidad en un análisis dinámico.

## **1.3 IMPORTANCIA DEL USO DE VECTORES RITZ**

En el análisis dinámico lineal de estructuras generalmente la respuesta de la estructura solo se enfoca en las fuerzas producidas por una excitación en la base, pero en la práctica un análisis dinámico es precedido por un análisis estático debido a cargas muertas y vivas o la combinación de ambas.(Chopra, 2014)

La idealización estructural para el análisis estático depende de la complejidad de la estructura además de que el cálculo de fuerzas y desplazamientos depende del

número de los grados de libertad de la estructura, la misma idealización puede ser utilizada para un análisis dinámico, pero el considerar todos los grados de libertad puede ser innecesario, ya que solo unos pocos grados de libertad pueden ser suficientes para la respuesta dinámica de la estructura.(Chopra, 2014)

La parte más compleja en problemas de dinámica de estructuras es calcular los vectores y valores propios, este proceso requiere un gran número de operaciones numéricas que producen un gran esfuerzo computacional sobre todo cuando la estructura tiene un gran número de grados de libertad (Wilson, 2008), por esto es importante que los métodos que se utilicen para la obtención de estos valores se optimicen de forma que se reduzca el esfuerzo computacional empleado.

Debido a esta razón en el presente trabajo se aplicará el método de Rayleigh-Ritz el cual permite una selección adecuada de los grados de libertad que son excitados por cargas externas a la estructura (Wilson, 2008) mediante esta selección se reduce el número de grados de libertad considerados para el cálculo de frecuencias y formas modales de la estructura, el número de vectores Ritz seleccionados para el análisis dinámico convergen a la solución exacta produciendo resultados igual o más precisos que al emplear todos los grados de libertad para el análisis dinámico.(Wilson, 2008)

## **1.4. OBJETIVOS**

### **1.4.1. OBJETIVO GENERAL**

Demostrar la eficiencia y aplicabilidad del uso de vectores Ritz orientado a un análisis dinámico lineal, mediante la implementación de programas de análisis estructural.

### **1.4.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS**

- Comparar los periodos y frecuencias obtenidas aplicando el método de autovalores con los resultados obtenidos mediante el uso de vectores Ritz.
- Comparar los resultados de fuerzas cortantes, momentos flectores y desplazamientos máximos aplicando los dos métodos establecidos.
- Realizar tres programas en Matlab de análisis dinámico lineal de estructuras orientados a la aplicación de vectores Ritz.

## **1.5 ALCANCE.**

El presente trabajo abarcará la realización de programas orientados hacia el análisis dinámico lineal de estructuras empleando el método modal espectral mediante la aplicación de vectores Ritz.

En los programas no se incluye el modelamiento de elementos bidimensionales que se usan para modelar losas y muros, aunque si se podrá considerar la masa de la losa mediante la carga que la losa transmite a las vigas esto para el caso de pórticos planos y pórtico tridimensionales, ya que un análisis pseudo espacial tiene la ventaja de que toda la masa de la estructura se concentra en el centro de gravedad de la planta de cada piso.

## CAPÍTULO 2

### MARCO TEÓRICO.

#### 2.1. ANÁLISIS DINÁMICO DE ESTRUCTURAS.

El comportamiento dinámico de una estructura se da cuando se le aplican fuerzas o desplazamientos en la base, en la cual las fuerzas de inercia son igual a la masa de la estructura por la aceleración según la segunda ley de Newton. Si las fuerzas o desplazamientos se aplican lentamente las fuerzas inerciales pueden ser despreciadas dando como resultado un análisis estático, de acuerdo a la dinámica un análisis dinámico es consecuencia de un análisis estático. (Wilson, 2008)

##### 2.1.1. ECUACIONES DE MOVIMIENTO

El equilibrio de fuerzas de un sistema de varios grados de libertad con masa concentrada puede ser expresado como función del tiempo mediante la siguiente ecuación.

$$F(t)_I + F(t)_D + F(t)_S = F(t) \quad (2.1)$$

Donde los vectores de fuerza en función del tiempo son:

$F(t)_I$  Vector de las fuerzas de inercia actuantes sobre las masas nodales.

$F(t)_D$  Vector de fuerzas de amortiguamiento viscoso de disipación de energía.

$F(t)_S$  Vector de fuerzas internas de la estructura.

$F(t)$  Vector de fuerzas externas que actúa en la estructura.

Esta ecuación está basada en las leyes de la dinámica de Newton, siendo válida para sistemas lineales como no lineales si se plantea el equilibrio en base a la geometría de la deformada de la estructura. (Wilson, 2008)

Para varios sistemas estructurales, la aproximación del comportamiento lineal de la estructura se convierte la ecuación 2.1 al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden:

$$M\ddot{u}(t)_a + C\dot{u}(t)_a + Ku(t)_a = F(t) \quad (2.2)$$

$M$  Es la matriz de masas consistente de la estructura.

$C$  Es la matriz de amortiguamiento viscoso de la estructura.

$K$  Es la matriz de rigidez de la estructura.

$\ddot{u}(t)_a$  Aceleraciones nodales absolutas.

$\dot{u}(t)_a$  Velocidades nodales.

$u(t)_a$  Desplazamientos nodales.

$F(t)$  Fuerzas externas aplicadas en la estructura.

En el caso de una acción sísmica, la carga externa  $F(t)$  es igual a cero. Los movimientos sísmicos básicos están representados por las tres componentes de desplazamiento en la base  $u(t)_{ig}$  que se determinan en algún punto por debajo de la cimentación de la estructura. Por lo tanto se puede expresar la Ecuación 2.2 en términos de los desplazamientos  $u(t)_a$ , velocidades  $\dot{u}(t)_a$  y aceleraciones  $\ddot{u}(t)_a$  en términos relativos de la base.

Por lo tanto los desplazamientos, velocidades y aceleraciones absolutas pueden ser eliminados de la Ecuación (2.2) mediante el uso de las siguientes ecuaciones:

$$u_a(t) = u(t) + L_x u_{xg}(t) + L_y u_{yg}(t) + L_z u_{zg}(t) \quad (2.3 a)$$

$$\dot{u}_a(t) = \dot{u}(t) + L_x \dot{u}_{xg}(t) + L_y \dot{u}_{yg}(t) + L_z \dot{u}_{zg}(t) \quad (2.3 b)$$

$$\ddot{u}_a(t) = \ddot{u}(t) + L_x \ddot{u}_{xg}(t) + L_y \ddot{u}_{yg}(t) + L_z \ddot{u}_{zg}(t) \quad (2.3 c)$$

Donde  $L_i$  es el vector que contiene unos en los grados de libertad correspondientes a la dirección en la que actúa la aceleración y cero en las demás posiciones.

Al sustituir la Ecuación 2.3c en la ecuación 2.2 permite que las ecuaciones de equilibrio se expresen de la siguiente manera:

$$M\ddot{u}(t) + C\dot{u}(t) + Ku = -M_x L_x \ddot{u}_{xg}(t) - M_y L_y \ddot{u}_{yg}(t) - M_z L_z \ddot{u}_{zg}(t) \quad (2.4)$$

La ecuación 2.4 es válida por que las velocidades y desplazamientos de cuerpo rígido asociados con los movimientos en la base no provocan que se genere ninguna fuerza adicional de amortiguamiento estructural.

Existen varios métodos para la solución de la ecuación 2.4 cada uno de estos métodos tienen ventajas y desventajas dependiendo del tipo de estructura y carga (Wilson, 2008). Los métodos más utilizados son:

- Método de solución pasó a paso.
- Método de superposición modal.

Siendo el método más eficiente para el análisis dinámico es el de superposición modal después de estimar un conjunto de vectores ortogonales, este método permite desacoplar el sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden (Wilson, 2008).

## 2.1.2 SOLUCIÓN DE LA RESPUESTA ESTRUCTURAL

### 2.1.2.1 Solución para el caso no amortiguado.

Para vibración libre se tiene el siguiente sistema de n ecuaciones simultáneas diferenciales, de equilibrio.(García, 1998)

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = 0 \quad (2.5)$$

$[M]$  y  $[K]$  son las matrices de masas y de rigidez del sistema.

La solución para el sistema de ecuaciones tiene la siguiente forma:

$$\{u_i(t)\} = \{\phi^i\}f_i(t) \quad (2.6)$$

Con lo cual se obtiene una solución separable en un vector de amplitudes  $\{\phi^i\}$ , y una función del tiempo  $f_i(t)$ . Al derivar la ecuación 2.6 con respecto al tiempo se obtiene:

$$\{\ddot{u}_i(t)\} = \{\phi^i\}\ddot{f}_i(t) \quad (2.7)$$

Al reemplazar estas ecuaciones en la ecuación 2.5 se obtiene:

$$[M]\{\phi^i\}\ddot{f}_i(t) + [K]\{\phi^i\}f_i(t) = 0 \quad (2.8)$$

$$-\frac{\ddot{f}_i(t)}{f_i(t)} = \frac{\sum_{j=1}^n k_{ij}\phi_j^{(i)}}{\sum_{j=1}^n m\phi_j^{(i)}} \quad (2.9)$$

El lado derecho de la ecuación no depende del tiempo mientras que el lado izquierdo si, esto quiere decir que ambos lados de la ecuación son iguales a una constante, con lo que la ecuación 2.9 se separa en dos ecuaciones una que depende del tiempo y otra para la parte que no depende del tiempo. (García, 1998)

$$\ddot{f}_i(t) + w_i^2 f_i(t) = 0 \quad (2.10)$$

$$\sum_{j=1}^n (k_{ij} - w_i^2 m_{ij})\phi_j^{(i)} = 0 \quad (2.11)$$

La solución de la ecuación 2.10 es:

$$f_i(t) = A_i \text{sen} w_i(t) + B_i \text{cos} w_i(t) \quad (2.12)$$

Donde  $A_i$  y  $B_i$  son constantes que dependen de las condiciones iniciales y representan la amplitud del movimiento oscilatorio y  $w_i$  es la frecuencia natural. El cálculo de  $w_i$  se lo realiza con la siguiente ecuación matricial:

$$\left[ [K] - w_i^2 [M] \right] \{\phi^i\} = \{0\} \quad (2.13)$$

Donde las amplitudes del sistema  $\{\phi^i\} \neq 0$  ya que si las amplitudes son iguales a cero significa que la masa no cambia de su posición de equilibrio, por lo tanto la única parte de la ecuación que es igual a cero es  $[[K] - w_i^2[M]] = 0$ .

La ecuación 2.13 corresponde a un sistema de ecuaciones simultáneas homogéneas el cual tiene una solución no trivial solo si el determinante de la matriz es igual a cero. A esta ecuación se le conoce como ecuación característica del sistema.

$$\Delta = [[K] - w_i^2[M]] = 0 \quad (2.14)$$

Donde  $\Delta$  es el determinante característico del sistema de ecuaciones. Al desarrollar el determinante se obtiene un polinomio de orden  $2n$ , con potencias pares únicamente donde  $n$  es el número de grados de libertad del sistema, mediante la ecuación 2.14 se determinan las frecuencias naturales del sistema que se denominan también valores característicos o valores propios, las raíces del sistema son casi siempre reales y positivas a menos que se esté modelando un mecanismo cuyas condiciones iniciales produzcan raíces imaginarias. (García, 1998)

$$w_1^2 \leq w_2^2 \leq w_3^2 \leq w_4^2 \dots \dots \dots \leq w_n^2 \quad (2.15)$$

Las frecuencias se ordenan de menor a mayor donde la frecuencia menor es denominada frecuencia fundamental.

Los valores de las amplitudes armónicas se calculan reemplazando las frecuencias naturales en la ecuación 2.13 obteniéndose  $n$  ecuaciones del tipo:

$$[[K] - w_r^2[M]]\{\phi^r\} = \{0\} \quad r = 1, 2, \dots \dots n \quad (2.16)$$

Donde para cada valor de  $w_r$  existe un vector  $\{\phi^r\}$  que es una solución no trivial del sistema de ecuaciones simultáneas,  $\{\phi^r\}$  es un vector característico o modo de vibración, este vector está compuesto por elementos  $\phi_i^{(r)}$ , los cuales son números reales y no tienen un valor determinado, pues para cualquier escalar real  $\alpha_T, \alpha_T \{\phi^r\}$  también es solución del sistema de ecuaciones simultáneas homogéneas de la ecuación 2.16, esto quiere decir que la relación entre los diferentes términos del vector es fija y determinada. Por lo tanto a cada frecuencia  $w_r$  le corresponde un vector  $\{\phi^r\}$  que tiene una forma definida pero una amplitud arbitraria, como hay la posibilidad de que dos o más frecuencias sean iguales, en

ese caso cualquier combinación lineal de los modos correspondientes también es un modo. (García, 1998)

## 2.2 CARACTERÍSTICAS DE LOS MODOS DE VIBRACIÓN.

Los modos de vibración presentan tres características fundamentales las cuales son:

- Ortogonalidad
- Normalización
- Expansión modal de desplazamientos.

### 2.2.1 ORTOGONALIDAD DE LOS MODOS DE VIBRACIÓN

La propiedad de ortogonalidad a través de las matrices de masa  $[M]$  y rigidez  $[K]$  indica que los vectores modales componen un conjunto de vectores linealmente independientes, con lo cual cualquier configuración siempre puede expresarse como una combinación lineal de los modos por lo tanto los mismos pueden emplearse para describir cualquier movimiento del sistema. (García, 1998)

Los modos son ortogonales si cumplen con las siguientes condiciones:

$$\{\phi^{(s)}\}^T \times [M] \times \{\phi^r\} = \begin{cases} \neq 0 & \text{si } s = r \\ 0 & \text{si } s \neq r \end{cases} \quad (2.17)$$

$$\{\phi^{(s)}\}^T \times [K] \times \{\phi^r\} = \begin{cases} \neq 0 & \text{si } s = r \\ 0 & \text{si } s \neq r \end{cases} \quad (2.18)$$

### 2.2.2 NORMALIZACIÓN

El problema de vectores y valores propios de la ecuación 2.13 determina los modos naturales solo en forma de valores relativos es decir que las magnitudes que conforman cada modo no se encuentran definidas solo están relacionadas entre ellas. Si a uno de los elementos del vector se le asigna un valor cualquiera, los restantes  $n - 1$  términos quedan determinados de una forma única, a este proceso se lo denomina normalización y los vectores resultantes se los denominan modos normalizados.

La forma más común de normalización es con respecto a la matriz de masas  $[M]$  de la siguiente manera:

$$\{\phi^r\}^T [M] \{\phi^r\} = I \quad (2.19)$$

Donde  $I$  es la matriz identidad.

Este tipo de normalización es denominada conjunto ortonormal de masa se la realiza por comodidad y no tiene ninguna importancia desde el punto de vista de su sentido físico.

Los modos se organizan en una matriz modal  $[\Phi]$  de dimensiones  $n \times n$  en la cual cada columna representa a un modo de vibración, Los modos de vibración son propiedades del sistema que dependen de las propiedades de la rigidez y de la masa del sistema.

### 2.2.3 EXPANSIÓN MODAL DE LOS DESPLAZAMIENTOS

La expansión modal del vector de desplazamientos  $\{u_i(t)\}$  se emplean en el análisis de la respuesta de a la vibración forzada y de la respuesta sísmica de los sistemas con varios grados de libertad.(Chopra, 2014)

Cualquier conjunto de  $n$  vectores linealmente independientes puede utilizarse como una base para representar cualquier otro vector de orden  $n$ , una expansión modal de cualquier vector de desplazamientos se expresa como:

$$u = \sum_{r=1}^n \Phi^r q^r = \Phi q \quad (2.20)$$

Donde  $q^r$  son los multiplicadores escalares llamados coordenadas modales.

## 2.3 SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE AUTOVALORES

### 2.3.1 INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DEL PROBLEMA DE AUTOVALORES.

El problema de autovalores del tipo:

$$[A]\{x\} = \lambda[I]\{x\} = \lambda\{x\} \quad (2.21)$$

Donde  $[A]$  es una matriz simétrica de dimensiones  $n \times n$  y  $\{x\}$  es un vector de  $n \times 1$ , al multiplicar la ecuación 2.21 por  $\{x\}^t$  se obtiene:

$$\{x\}^t[A]\{x\} = \lambda[I]\{x\} = \lambda\{x\}\{x\}^t \quad (2.22)$$

El vector  $\{x\}$  puede normalizarse para obtener la siguiente expresión.

$$\{x\}^t\{x\} = |r|^2 = r^2 = 1 \quad (2.23)$$

$$\{x\}^t[A]\{x\} = \lambda \quad (2.24)$$

Lo cual corresponde a una ecuación cuadrática en las coordenadas

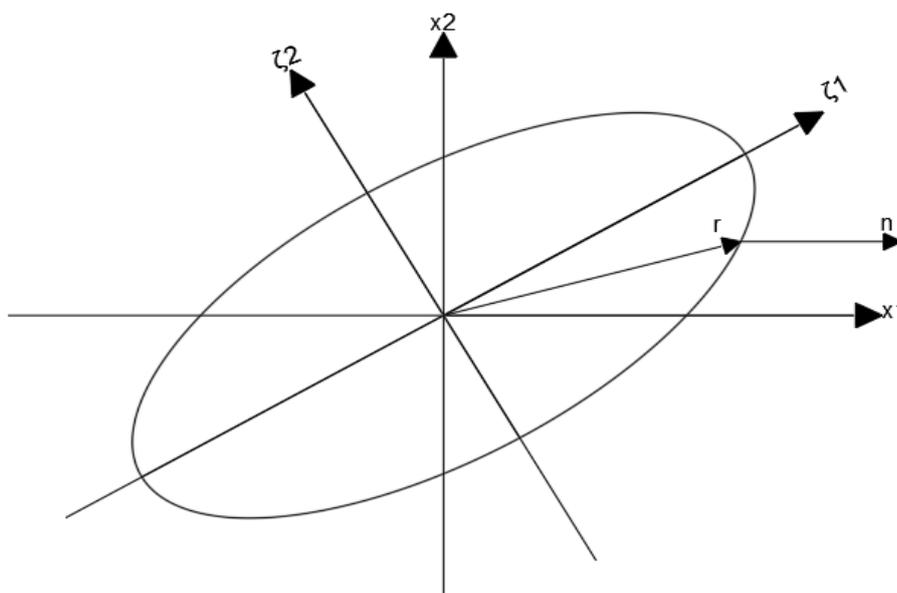
$x_1, x_2, \dots, x_n$  si  $n = 2$  la ecuación se convierte:

$$\frac{1}{\lambda}(a_{11}x_1^2 + (a_{12} + a_{21})x_1x_2 + a_{22}x_2^2) = \frac{1}{\lambda}(a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2) = 1 \quad (2.25)$$

Esta ecuación es la ecuación de una cónica con centro en el origen del sistema de coordenadas, la cónica que puede ser una hipérbola, elipse una parábola o un círculo con excentricidad igual a cero la forma de la cónica depende de los valores que tenga  $a_{ij}$ , si las deformaciones son pequeñas la cónica necesariamente debe ser una elipse. (García, 1998)

El vector normal  $\{n\}$  a la elipse en cualquier punto  $(x_1, x_2)$  al ser escrito en forma matricial es proporcional al vector  $[A]\{x\}$ , por lo que el problema de autovalores puede ser interpretado como el problema de encontrar las direcciones para las cuales el vector  $\{r\}$  y el vector  $\{n\}$  son paralelos, estas direcciones definen un sistema de coordenadas  $\varepsilon_1$  y  $\varepsilon_2$  los cuales corresponden a los ejes principales de la conca.(García, 1998)

FIGURA 2.1 ELIPSE



Fuente: (García, 1998)

La ecuación de la elipse en función de los ángulos principales  $\varepsilon_1$  y  $\varepsilon_2$  se expresa mediante la siguiente ecuación:

$$x_1 = \varepsilon_1 \cos \theta - \varepsilon_2 \sin \theta \quad (2.26)$$

$$x_2 = \varepsilon_1 \sin \theta + \varepsilon_2 \cos \theta$$

La expresión matricial de estas ecuaciones es:

$$\{x\} = [R]\{\varepsilon\} \quad (2.27)$$

Donde R es la matriz de rotación

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

Debido a que la matriz de rotación (R) es ortogonal su inversa es igual a su transpuesta, al reemplazar la ecuación 2.27 en la ecuación 2.25 se obtiene.

$$\frac{1}{\lambda} ([R]\{\varepsilon\})^T [A][R]\{\varepsilon\} = \frac{1}{\lambda} \{\varepsilon\}^T [R]^T [A][R]\{\varepsilon\} = 1 \quad (2.29)$$

$$\text{Si } B = [R]^T [A][R] \quad (2.30)$$

En donde los elementos de la matriz B son:

$$\begin{aligned} b_{11} &= a_{11} \cos^2 \theta + 2a_{12} \sin \theta \cos \theta + a_{22} \sin^2 \theta \\ b_{12} = b_{21} &= -(a_{11} - a_{12}) \sin \theta \cos \theta + a_{12} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \\ b_{22} &= a_{11} \sin^2 \theta - 2a_{12} \sin \theta \cos \theta + a_{22} \cos^2 \theta \end{aligned} \quad (2.31)$$

La matriz B se transforma en una matriz diagonal cuando:

$$\tan 2\theta = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}} \quad (2.32)$$

$$\text{entonces } b_{12} = b_{21} = 0$$

Los valores que satisfacen la ecuación difieren entre sí en un valor de  $\pi/2$  este valor es el correspondiente a las direcciones  $\varepsilon_1$  y  $\varepsilon_2$ , si  $\theta$  satisface la ecuación 2.32, la ecuación 2.29 se reduce a:

$$\frac{b_{11}}{\lambda} \varepsilon_1^2 + \frac{b_{22}}{\lambda} \varepsilon_2^2 = 1 \quad (2.33)$$

La ecuación 2.33 es la de una elipse, con sus ejes principales coincidiendo con los ejes  $\varepsilon_1$  y  $\varepsilon_2$ .

La solución al problema de valores propios puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \lambda_1 = b_{11} \quad \varepsilon_1 &= \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} & x_1 = [R]\{\varepsilon_1\} &= \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{Bmatrix} \\ \lambda_2 = b_{22} \quad \varepsilon_2 &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} & x_2 = [R]\{\varepsilon_2\} &= \begin{Bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Donde  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son los valores propios o frecuencias del problema s y  $x_1$  y  $x_2$  son los vectores propios o modos de vibración.

Por lo tanto la solución del problema de valores propios consiste en determinar los ejes principales de una cónica, la cual corresponde a la reducción de la ecuación 2.29 a su forma canónica:

$$\lambda_1 \varepsilon_1^2 + \lambda_2 \varepsilon_2^2 = \lambda \quad (2.34)$$

## 2.4. IDEALIZACIÓN DINÁMICA DE UNA ESTRUCTURA

Aunque el análisis modal espectral es un análisis dinámico todo análisis dinámico está precedido por un análisis estático de cargas vivas y muertas.

La idealización estructural para el análisis estático está determinado por la complejidad de la estructura y de los varios grados de libertad que tiene la estructura, la misma idealización puede ser utilizada para un análisis dinámico de una estructura, pero considerar todos los grados de libertad puede ser innecesario, ya que solo unos pocos grados de libertad pueden ser suficientes para describir el comportamiento de la estructura, la respuesta dinámica de muchas estructuras se puede representar bien por los primeros modos de vibración naturales de la estructura, y estos modos se pueden determinar con precisión a partir de una idealización estructural con menos grados de libertad que los requeridos para el análisis estático. (Chopra, 2014)

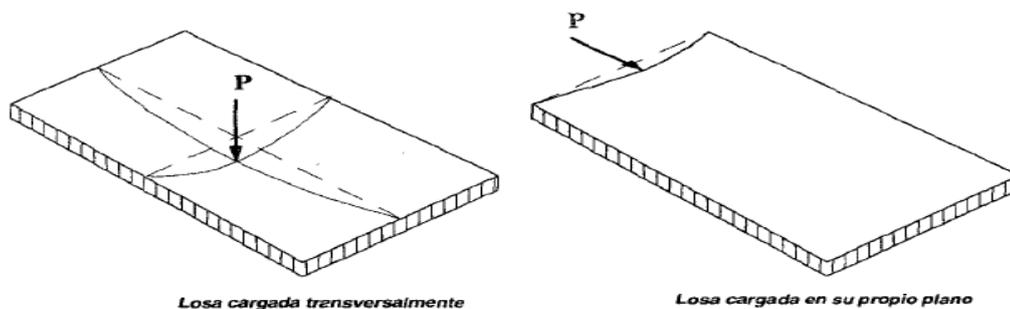
### 2.4.1 RESTRICCIONES CINEMÁTICAS

Las restricciones cinemáticas basadas en propiedades estructurales se pueden usar para reducir el número de grados de libertad en la idealización estructural para el análisis estático, esta idealización es el punto de partida para el análisis dinámico.

La configuración y las propiedades de una estructura pueden sugerir restricciones cinemáticas que expresan los desplazamientos de muchos grados de libertad en términos de un conjunto más pequeño de desplazamientos.

Por ejemplo, los diafragmas del piso (o losas) de un edificio de varios pisos, aunque flexibles en dirección vertical, generalmente son muy rígidas en su propio plano y pueden asumirse como rígidas sin introducir errores significativos.

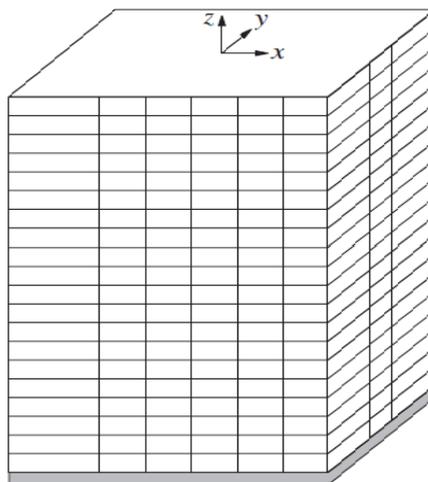
**FIGURA 2.2** DEFORMACIONES INTERNAS DE UNA LOSA ANTE DOS TIPOS DE CARGA



Fuente: (García, 1998)

Con este supuesto, los desplazamientos horizontales de todas las juntas en un nivel de piso están relacionados con los tres grados de libertad de cuerpo rígido del diafragma en su propio plano, Como resultado de esta restricción cinemática, el número de grados de libertad que se consideraría en un análisis estático puede reducirse casi a la mitad.

**FIGURA 2.3 EDIFICIO**



Fuente (Chopra, 2014)

Con esta consideración el edificio de la figura consta de 20 pisos con 320 nudos cada nudo tiene 12 grados de libertad dando un total de 3840 grados de libertad al considerarse que los diafragmas sean rígidos en su propio plano el sistema se reduce a 1980 grados de libertad.

Otra restricción cinemática que a veces se asume en el análisis de edificios es que las columnas son axialmente rígidas, esta suposición se usa en edificios esbeltos, con esta suposición el sistema se reduce a 1340 grados de libertad.

## **2.5 MASA DISTRIBUIDA Y MASA CONCENTRADA**

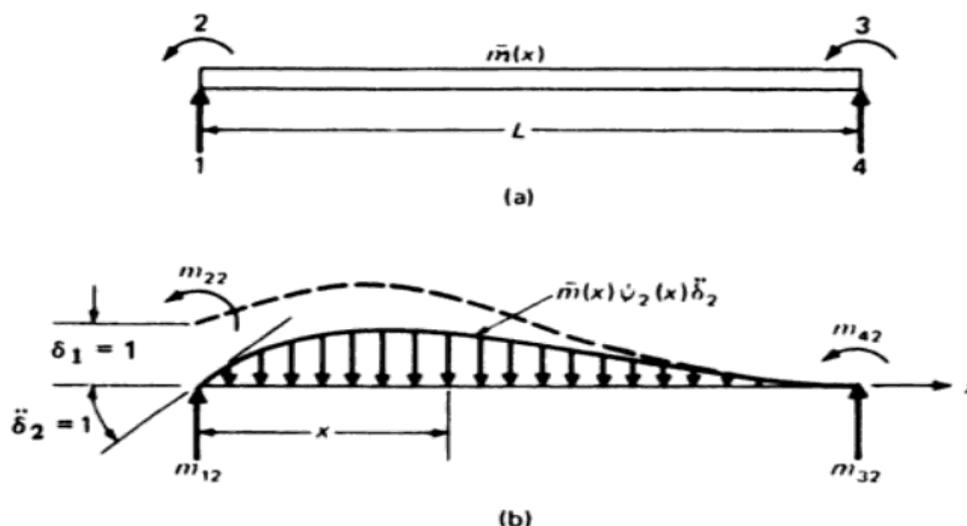
Para el análisis dinámico de estructuras, la matriz de masas comúnmente se modela de dos maneras distintas tal es el caso de concentrar la masa en unos pocos grados de libertad, o el caso de masa distribuida en el cual la masa proviene de los elementos estructurales que la conforman y la masa se distribuye en todos los grados de libertad de la estructura.(García, 1998)

### 2.5.1 MASA DISTRIBUIDA

Un sistema continuo es aquel en el cual tanto la masa como la rigidez se consideran como propiedades que se pueden asignar a un infinito grados de libertad, es decir que la masa no se puede concentrar en un solo grado de libertad (García, 1998), Uno de los métodos más utilizados para sistemas de masa distribuida es el método de Rayleigh, este método reduce el sistema de infinitos grados de libertad a un sistema con un número finito de grados de libertad, Sin embargo el método no es práctico para aplicaciones de la ingeniería y tampoco se puede automatizar para su implementación al análisis computacional. (Chopra, 2014)

Sin embargo, existe un método que permite disponer de las propiedades de masa distribuida concentrando los efectos en los extremos de los elementos, tal y como se lo hace para el cálculo de la matriz de rigidez. La matriz de masas del elemento se denomina matriz consistente de masa, se ensambla y opera de una manera similar a la matriz e rigidez del elemento.

**FIGURA 2.4** VIGA CON MASA DISTRIBUIDA SOMETIDO A UNA CARGA INERCIAL PRODUCIDA POR LA ACELERACIÓN  $\delta = 1$



Fuente (Paz, 1992)

La figura muestra un elemento viga con masa distribuida sometido a una carga inercial producida por la aceleración  $\delta = 1$ .

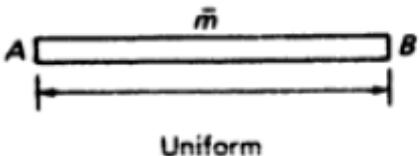
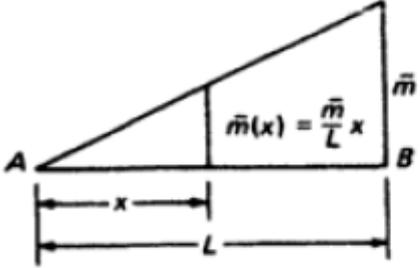
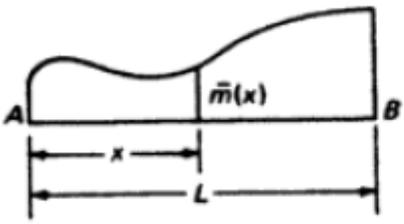
### 2.5.2 MATRIZ DE MASA CONCENTRADA

Concentrar la masa de la estructura en los grados de libertad que definen los desplazamientos de traslación es el método más simple para considerar las

propiedades inerciales de un sistema dinámico, la distribución de la masa en los nodos se determina mediante la estática. (Paz, 1992)

En el método de masa concentrada el efecto inercial provocado por los grados de libertad correspondiente a los giros de los nodos es igual a cero.

**FIGURA 2.5 MASAS CONCENTRADAS PARA UN SEGMENTO DE VIGA CON MASA DISTRIBUIDA**

Mass distribution	Lumped mass
 <p style="text-align: center;">Uniform</p>	$m_A = \frac{\bar{m}L}{2}$ $m_B = \frac{\bar{m}L}{2}$
 <p style="text-align: center;">Triangular</p>	$m_A = \frac{\bar{m}L}{6}$ $m_B = \frac{\bar{m}L}{3}$
 <p style="text-align: center;">General</p>	$m_A = \frac{\int_0^L (L-x)\bar{m}(x)dx}{L}$ $m_B = \frac{\int_0^L x\bar{m}(x)dx}{L}$

Fuente(Paz, 1992)

La matriz de masas concentradas es usualmente útil para análisis dinámicos rápidos debido a que es diagonal el tiempo de cómputo es menor que al usar la matriz consistente de masas, aunque produce resultados no tan precisos en comparación a la matriz consistente de masas cuya formulación se lo hará más adelante.

## 2.6 ANÁLISIS MODAL ESPECTRAL.

El análisis modal espectral es el método más utilizado dentro del análisis dinámico lineal de estructuras, debido a que permite desacoplar un sistema de ecuaciones diferenciales y transformarlo en un sistema de una ecuación de manera que cada modo es resuelto independientemente, para después volver a acoplar el sistema de ecuaciones y obtener la respuesta global de la estructura mediante el método de combinación modal. (Chopra, 2014)

Dentro de un análisis modal existen dos métodos para calcular los modos de vibración los cuales son:

1. Método de autovalores que determina las formas modales y frecuencias de un sistema de vibración libre no amortiguado.
2. Método mediante el uso de vectores Ritz el cual busca encontrar los modos que son excitados por fuerzas externas, los vectores Ritz representan una mejor base que el método de autovalores dentro de un análisis modal espectral o un análisis tiempo historia los cuales están basados en la superposición modal. (Chopra, 2014)

### 2.6.1 RESPUESTA DE SISTEMAS DE VARIOS GRADOS DE LIBERTAD ANTE UNA EXCITACIÓN EN LA BASE

La ecuación de equilibrio dinámico para una excitación en la base está dada por la ecuación 2.4

$$M\ddot{u}(t) + C\dot{u}(t) + Ku = -M_x L_x \ddot{u}_{xg}(t) - M_y L_y \ddot{u}_{yg}(t) - M_z L_z \ddot{u}_{zg}(t) \quad (2.4)$$

Si se desprecia el amortiguamiento y solo tomamos en cuenta que la estructura solo se mueve en una sola dirección la ecuación 2.4 se puede escribir como:

$$M\ddot{u}(t) + Ku = -M_x L_x \ddot{u}_g(t) \quad (2.35)$$

La ecuación 2.35 se puede expresar matricialmente para un sistema de varios grados de libertad.

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = -[M][L]\{u_g\} \quad (2.36)$$

Donde  $L$  es la matriz de compatibilidad que indica si la masa se encuentra en la dirección de la aceleración del suelo, las dimensiones de la matriz de compatibilidad son  $n \times 1$  si la aceleración del suelo se produce solo en una dirección,  $n \times 2$  si la

aceleración del suelo se produce en dos direcciones,  $n \times 3$  si la aceleración del suelo se produce en tres direcciones, donde  $n$  es el número de grados de libertad de la estructura. (García, 1998)

La ecuación 2.36 representa un sistema de ecuaciones diferenciales simultáneas de equilibrio dinámico de un sistema de varios grados de libertad sometido a una excitación en la base.

### 2.6.1.2 RESPUESTA ESPECTRAL

Para resolver la ecuación 2.36 se utiliza un vector de coordenadas modales desacoplados.

$$[u] = [\phi_n]\{\eta\} \quad (2.37)$$

Al derivar la ecuación 2.37 con respecto al tiempo.

$$[\ddot{u}] = [\phi_n]\{\ddot{\eta}\} \quad (2.38)$$

Reemplazando las ecuaciones 2.37 y 2.38 en la ecuación 2.36 y multiplicando por  $[\phi_n]^T$

$$[\phi_n]^T [M] [\phi_n] \{\ddot{\eta}\} + [\phi_n]^T [K] [\phi_n] \{\eta\} = -[\phi_n]^T [M] [L] \{u_g\} \quad (2.39)$$

$$[\phi_n]^T [M] [\phi_n] = [I]$$

$$[\phi_n]^T [K] [\phi_n] = [w^2]$$

$$[\phi_n]^T [M] [L] = [\Gamma]$$

La matriz  $[I]$  y  $[w^2]$  son matrices diagonales por lo cual el sistema de ecuaciones diferenciales se puede desacoplar, por lo cual se tiene un sistema de  $n$  ecuaciones independientes de un solo grado de libertad.

$$\ddot{\eta}_i + w_i^2 \eta = -\Gamma u_g \quad (2.40)$$

Si se aplica el amortiguamiento modal:

$$\ddot{\eta}_i + 2\xi_i w_i \dot{\eta}_i + w_i^2 \eta = -\Gamma u_g \quad (2.41)$$

De las ecuaciones 2.40 y 2.41 se calculan los valores de  $\{\eta(t)\}$  para cualquier tiempo, con la ecuación 2.37 se obtienen los desplazamientos para cualquier instante de tiempo.

En un análisis modal espectral el máximo valor que puede tener el desplazamiento relativo  $u$ , entre la base y la masa de un sistema de un grado de libertad sometido a una aceleración en su base  $u_g$ , es el valor que se obtiene del espectro de

desplazamiento  $Sd(T, \xi)$  para cada  $T$ . Este valor es amplificado por el coeficiente de participación modal  $\Gamma$  mediante la siguiente ecuación. (García, 1998)

$$(n_i)_{max} = |\Gamma_i Sd(T_i \xi_i)| \quad (2.42)$$

Donde  $\xi_i$  es el amortiguamiento modal el cual generalmente está implícito en el acelerograma que se utiliza.

Los desplazamientos modales máximos de cada modo pueden calcularse por medio de la ecuación:

$$\{u_{mod}^i\} = \{\phi^i\} (n_i)_{max} \quad (2.43)$$

Las fuerzas modales máximas se obtienen multiplicando la matriz de rigidez de la estructura por los desplazamientos modales de cada modo.

$$\{F_{mod}^i\} = [K] \{u_{mod}^i\} \quad (2.44)$$

### 2.6.2 MÉTODOS DE COMBINACIÓN MODAL

La ecuación 2.37 realiza implícitamente la superposición de las respuestas individuales de cada uno de los modos:

$$\begin{aligned} \{u\} &= [\phi] \{\eta\} = \sum_{i=1}^n \{\phi^{(i)}\} \eta_i(t) \\ &= \{\phi^{(1)}\} \eta_1(t) + \{\phi^{(2)}\} \eta_2(t) + \dots + \{\phi^{(n)}\} \eta_n(t) \\ &= \{u^{(1)}\} + \{u^{(2)}\} + \dots + \{u^{(n)}\} \end{aligned} \quad (2.45)$$

La ecuación 2.45 no es correcta debido a que los desplazamientos modales no se producen en el mismo instante por esta razón no es correcto sumar los desplazamientos mediante la ecuación 2.45. (García, 1998)

El cálculo de las respuestas modales individuales corresponden a los máximos valores que tendría cada una de las respuestas, estas respuestas pueden ser positivas o negativas, debido a esto resulta difícil encontrar una manera eficaz de combinarlos para obtener una respuesta apropiada, los métodos de combinación modal permiten combinar las respuestas individuales de cada modo de una manera adecuada. (García, 1998)

Los métodos de combinación modal más utilizados son el método de la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados y el método de la combinación cuadrática completa.

### 2.6.2.1 MÉTODO DE LA RAÍZ CUADRADA DE LA SUMA DE LOS CUADRADOS (SRSS)

El método de combinación modal SRSS obtiene la respuesta máxima del sistema al calcular la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las respuestas máximas de cada modo, este método proporciona una respuesta total del sistema precisa, pero no es recomendable usar cuando las frecuencias entre los modos son similares entre sí, debido a que este método no toma en cuenta el acoplamiento modal. (García, 1998)

La ecuación para combinar las respuestas máximas del sistema es la siguiente:

$$\bar{r} = \sqrt{\sum_{i=1}^n r_i^2} \quad (2.46)$$

Este método debe emplearse en los resultados máximos modales obtenidos, el resultado de cada parámetro obtenido siempre será positivo, pero debido a que las respuestas representan a un movimiento oscilatorio las respuestas pueden ser positivas o negativas, este aspecto es tomado en cuenta en la combinación de fuerzas de origen sísmico con fuerzas gravitacionales. (García, 1998)

### 2.6.2.2 MÉTODO DE LA COMBINACIÓN CUADRÁTICA COMPLETA (CQC)

El método de la combinación cuadrática completa fundamenta que la respuesta de los grados de libertad desacoplados son estadísticamente independientes, la combinación CQC incluye el efecto del acoplamiento entre modos que tienen periodos de vibración similares, de esta manera se incluye en la respuesta sísmica la contribución de la interacción entre los modos combinados. (García, 1998)

La forma de combinar los modos utilizando la combinación CQC está dada por la siguiente ecuación:

$$\bar{r} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (r_i r_j \rho_{ij})} \quad (2.47)$$

Donde  $r_i$  y  $r_j$  son las respuestas modales máximas para los modos  $i, j$  y el parámetro  $\rho_{ij}$  es el coeficiente de correlación entre modos este parámetro varía

entre cero y uno tomando el valor de uno cuando los valores de  $r_i$  y  $r_j$  son iguales es decir cuando son el mismo modo.

El coeficiente de correlación se calcula mediante la siguiente ecuación.

$$\rho_{ij} = \frac{8\sqrt{\xi_i \xi_j}(\xi_i + \beta_{ij}\xi_j)(\beta_{ij})^{3/2}}{(1 - \beta_{ij}^2)^2 + 4\xi_i \xi_j \beta_{ij}(1 + \beta_{ij}^2) + 4(\xi_i^2 + \xi_j^2)\beta_{ij}^2} \quad (2.48)$$

Donde

$\xi_i \xi_j$  son los coeficientes de amortiguamiento de los modos  $i, j$

$\beta_{ij} = \frac{w_i}{w_j}$  donde  $w_i$  y  $w_j$  son las frecuencias naturales de los modos  $i, j$

Cuando los coeficientes de amortiguamiento son los mismos para los modos  $i, j$  la ecuación 2.48 se puede escribir como:

$$\rho_{ij} = \frac{8\xi^2(1 + \beta_{ij})(\beta_{ij})^{3/2}}{(1 - \beta_{ij}^2)^2 + 4\xi^2\beta_{ij}(1 + \beta_{ij}^2)}$$

La manera más simple para utilizar la ecuación (2.47) es mediante el siguiente producto de matrices.

$$\bar{r}^2 = \{r\}_{1 \times n} [\rho]_{n \times n} \{r\}_{n \times 1}^T \quad (2.49)$$

## 2.7 MÉTODO DE RAYLEIGH-RITZ

El método de Rayleigh-Ritz es una extensión del método de Rayleigh sugerido por W. Ritz en 1909. Originalmente fue desarrollado para el cálculo de sistemas con masa y elasticidad distribuida. (Chopra, 2014)

En el análisis dinámico de estructuras el método de Raleigh-Ritz permite reducir el número de grados de libertad y encontrar aproximaciones a las frecuencias y modos naturales, toda forma del modo al usar vectores –Ritz es una combinación lineal de autovectores exactos por lo tanto el método siempre converge a la solución exacta.(Chopra, 2014)

### 2.7.1 REDUCCIÓN DE LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = sp(t) \quad (2.50)$$

En el método de Rayleigh, se expresan los desplazamientos de la estructura como  $u(t) = z(t)\psi$ , donde  $\psi$  es un vector de forma, esto reduce el sistema a un sistema con un solo grado de libertad lo cual permite el cálculo a un valor aproximado para la frecuencia natural fundamental. En el método de Rayleigh-Ritz, los

desplazamientos se expresan como una combinación lineal de varios vectores de forma  $\psi_j$ .

$$u(t) = \sum_{j=1}^j z_j(t)\psi_j = \Psi z(t) \quad (2.51)$$

donde  $z_j(t)$  son las coordenadas generalizadas y  $\psi_{j-j} = 1, 2, \dots, j$  son los vectores linealmente independientes que satisfagan las condiciones de contorno geométrico, al sustituir la transformación de Ritz en la ecuación 2.50

$$M\Psi\ddot{z} + C\Psi\dot{z} + K\Psi z = sp(t) \quad (2.52)$$

Al multiplicar la ecuación 2.52 por  $\Psi^T$  se obtiene:

$$\tilde{M}\ddot{z} + \tilde{C}\dot{z} + \tilde{K}z = \tilde{L}p(t) \quad (2.53)$$

donde:

$$\tilde{M} = \Psi^T M \Psi \quad \tilde{C} = \Psi^T C \Psi \quad \tilde{K} = \Psi^T K \Psi \quad \tilde{L} = \Psi^T s$$

Donde  $\tilde{M}$  y  $\tilde{K}$  ya no son matrices diagonales

La transformación de Ritz de la ecuación 2.51 permite reducir el conjunto original de  $n$  ecuaciones de la ecuación 2.50 a un conjunto más pequeño de ecuaciones mediante la ecuación 2.52 en coordenadas generalizadas  $z$ .

### 2.7.2 COCIENTE DE RAYLEIGH

El sistema de ecuaciones reducidas está basado en el principio de Rayleigh. Las aproximaciones a los modos naturales del sistema determinadas resolviendo el problema de valores propios asociados con la ecuación 2.52 representan la mejor solución entre todas las soluciones posibles que son combinaciones lineales de los vectores Ritz seleccionados. Esta solución es la mejor en el sentido de que la solución de las frecuencias naturales asociadas del sistema están más cercanas a las frecuencias verdaderas entre todos los valores aproximados posibles con los vectores Ritz seleccionados. (Chopra, 2014)

Cálculo del cociente de Rayleigh ( $\gamma$ )

$$\gamma = \frac{\phi^T K \phi}{\phi^T M \phi} \quad (2.54)$$

$\phi$  es un vector propio.

$$\tilde{\phi} = \Psi \chi \quad (2.55)$$

$\tilde{\phi}$  es una combinación lineal de vectores de Ritz.

Al reemplazar la ecuación 2.55 en la ecuación 2.54 se obtiene:

$$\gamma(\chi) = \frac{\chi^T \tilde{K} \chi}{\chi^T \tilde{M} \chi} = \frac{\tilde{K}(\chi)}{\tilde{M}(\chi)} \quad (2.56)$$

$$\tilde{K}_{ij} = \psi_i^T K \psi_j \quad \tilde{M}_{ij} = \psi_i^T M \psi_j$$

$\tilde{K}(\chi)$  y  $\tilde{M}(\chi)$  son escalares

La ecuación 2.56 se puede escribir como:

$$\gamma(\chi) = \frac{\sum_{i=1}^J \sum_{j=1}^J \chi_i \chi_j \tilde{K}_{ij}}{\sum_{i=1}^J \sum_{j=1}^J \chi_i \chi_j \tilde{M}_{ij}} \quad (2.57)$$

El cociente de Rayleigh no se puede determinar a partir de la ecuación 2.57 debido a que las coordenadas generalizadas  $\chi_n$  son desconocidas. Sin embargo, se sabe que:

$$w_1^2 \leq \gamma(\chi) \leq w_N^2 \quad (2.58)$$

Donde  $w_1$  y  $w_N$  son las frecuencias más alta y más baja.

La propiedad de que el cociente de Rayleigh es estacionario en la vecindad de los modos verdaderos de  $\chi$  debe cumplir la siguiente condición.

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \chi_i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, J \quad (2.59)$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \chi_i} = \frac{2\tilde{M} \sum_{j=1}^J \chi_j \tilde{K}_{ij} - 2\tilde{K} \sum_{j=1}^J \chi_j \tilde{M}_{ij}}{\tilde{M}^2}$$

Al reemplazar  $\gamma = \tilde{K}/\tilde{M}$  en la ecuación 2.57 la condición para que el cociente de Rayleigh sea estacionaria sería igual a:

$$\sum_{j=1}^J (\tilde{K}_{ij} - \gamma \tilde{M}_{ij}) \chi_j = 0 \quad i = 1, 2, \dots, J \quad (2.60)$$

Al escribir la ecuación 2.60 en forma matricial se obtiene una forma reducida del problema de autovalores.

$$\tilde{K} \chi = \gamma \tilde{M} \chi \quad (2.61)$$

Donde  $\chi$  es el vector de coordenadas generalizadas aún por determinar.

La solución de la ecuación 2.61 da como resultado los vectores y valores propios del sistema. Al sustituir  $\chi$  por  $\lambda$

$$\chi_n = \{\chi_{1n}, \chi_{2n}, \dots, \chi_{Jn}\}^T \quad (2.62)$$

El cálculo de valores propios da como resultado:

$$\tilde{w}_n = \sqrt{\rho n} \quad n = 1, 2, \dots, J \quad (2.63)$$

Que son aproximaciones de las frecuencias naturales  $w_n$ , al sustituir los vectores propios  $\chi_n$  en la ecuación (2.55) dan como resultado los siguientes vectores propios:

$$\tilde{\Phi}_n = \Psi \chi_n \quad n = 1, 2, \dots, J \quad (2.64)$$

La precisión de estos resultados aproximados es generalmente mejor para los modos más bajos que para los modos más altos. Por lo tanto, se deben incluir más vectores Ritz que el número de modos deseados. Las frecuencias aproximadas nunca son más bajas que la frecuencia fundamental y nunca más altas que las frecuencias más altas, una frecuencia aproximada se aproxima al valor exacto a medida que aumenta el número de vectores Ritz. (Chopra, 2014)

$$\tilde{w}_i \geq w_i \quad \tilde{w}_J \geq w_N \quad (2.65)$$

### 2.7.2 ORTOGONALIDAD APROXIMADA DE MODOS.

Los vectores propios  $\chi_n$  de la ecuación 2.60 satisfacen las condiciones de ortogonalidad:

$$\chi_n^T \tilde{K} \chi_r = 0 \quad \chi_n^T \tilde{M} \chi_r = 0 \quad n \neq r \quad (2.66)$$

Al usar la propiedad de la ecuación (2.66) en la ecuación (2.64) se puede demostrar la ortogonalidad entre modos.

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_n^T K \tilde{\Phi}_r &= 0 \quad \tilde{\Phi}_n^T M \tilde{\Phi}_r = 0 \quad n \neq r \\ \tilde{\Phi}_n^T K \tilde{\Phi}_r &= \chi_n^T \Psi^T K \Psi \chi_r = \chi_n^T \tilde{K} \chi_r = 0 \quad n \neq r \end{aligned}$$

La segunda ecuación de ortogonalidad se puede demostrar de la misma manera.

$$\chi_n^T \tilde{K} \chi_n = \tilde{w}_n^2 \quad \chi_n^T \tilde{M} \chi_n = 1 \quad (2.67)$$

## 2.8 GENERACIÓN DE VECTORES RITZ

El éxito del método Rayleigh-Ritz depende de qué tan bien las combinaciones lineales de vectores Ritz puedan aproximarse a los modos naturales de vibración. Por lo tanto, es importante que los vectores Ritz se seleccionen de manera adecuada. (Chopra, 2014)

### 2.8.1 GENERACIÓN DE VECTORES DEPENDIENTES DE CARGA

Las fuerzas externas que actúan en una estructura están dadas por el vector  $s$  el cual no varía en el tiempo, además la dependencia temporal de todas las fuerzas viene dada por la misma función escalar  $p(t)$ . (Chopra, 2014)

$$p(t) = s \quad (2.68)$$

El primer vector Ritz  $\psi_1$  se define como los desplazamientos estáticos debidos a las fuerzas ( $s$ ) aplicadas. Se determina resolviendo la ecuación

$$Ku_1 = s \quad (2.69)$$

Se normaliza el vector  $u_1$  con respecto a la masa.

$$\psi_1 = \frac{u_1}{\sqrt{u_1^T M u_1}} \quad (2.70)$$

De manera que se cumpla la condición de ortogonalidad.

$$\psi_1^T M \psi_1 = 1$$

El segundo vector Ritz  $\psi_2$  se determina a partir del vector  $u_2$  de los desplazamientos estáticos debido a las fuerzas aplicadas dadas por la distribución de la fuerza de inercia asociada con el primer vector Ritz  $\psi_1$ . El vector  $u_2$  se obtiene resolviendo

$$Ku_2 = M\psi_1 \quad (2.71)$$

Debido a que el vector  $u_2$  contiene un componente del vector anterior  $\psi_1$  se puede expresar como:

$$u_2 = \hat{\psi}_2 + a_{12}\psi_1 \quad (2.72)$$

donde  $\hat{\psi}_2$  es un vector ortogonal al vector anterior, y  $a_{12}\psi_1$  es el componente del vector anterior presente en  $u_2$ . El coeficiente  $a_{12}$  se determina premultiplicando ambos lados de la ecuación. (2.72) por  $\psi_1^T$  para obtener:

$$\begin{aligned} \psi_1^T M u_2 &= \psi_1^T M \hat{\psi}_2 + a_{12}(\psi_1^T M \psi_1) \\ a_{12} &= \psi_1^T M \psi_1 \end{aligned} \quad (2.73)$$

$$\hat{\psi}_2 = u_2 - a_{12}\psi_1 \quad (2.74)$$

Se normaliza el vector  $\hat{\psi}_2$  con respecto a la masa para obtener el segundo vector Ritz

$$\psi_2 = \frac{\hat{\psi}_2}{\sqrt{\psi_2^T M \hat{\psi}_2}} \quad (2.75)$$

Generalizando este procedimiento, el enésimo vector Ritz  $\psi_n$  se determina a partir del vector  $u_n$  de los desplazamientos estáticos debido a las fuerzas aplicadas dadas por la distribución de la fuerza de inercia asociada con el  $(n - 1)$  vector Ritz. El vector  $u_n$  se determina resolviendo:

$$Ku_n = M\psi_{n-1} \quad (2.76)$$

El vector  $u_n$  contendrá en general componentes de los vectores Ritz anteriores  $\psi_j$  y, por lo tanto, puede expresarse como:

$$u_n = \hat{\psi}_n + \sum_{j=1}^{n-1} a_{jn} \psi_j \quad (2.77)$$

donde  $\hat{\psi}_n$  es ortogonal a los vectores anteriores, y  $a_{jn}\psi_j$  son los componentes de los vectores anteriores presentes en  $u_n$ . El coeficiente  $a_{in}$  se determina pre multiplicando ambos lados de la ecuación 2.77 por  $\psi_i^T$ :

$$\psi_i^T M u_n = \psi_i^T M \hat{\psi}_n + \sum_{j=1}^{n-1} a_{jn} (\psi_i^T M \psi_j)$$

$$a_{in} = \psi_i^T M u_n \quad i = 1, 2, \dots, n - 1 \quad (2.78)$$

$$\hat{\psi}_n = u_n - \sum_{i=1}^{n-1} a_{in} \psi_i \quad (2.79)$$

Se normaliza el vector  $\psi_n$  con respecto a la masa.

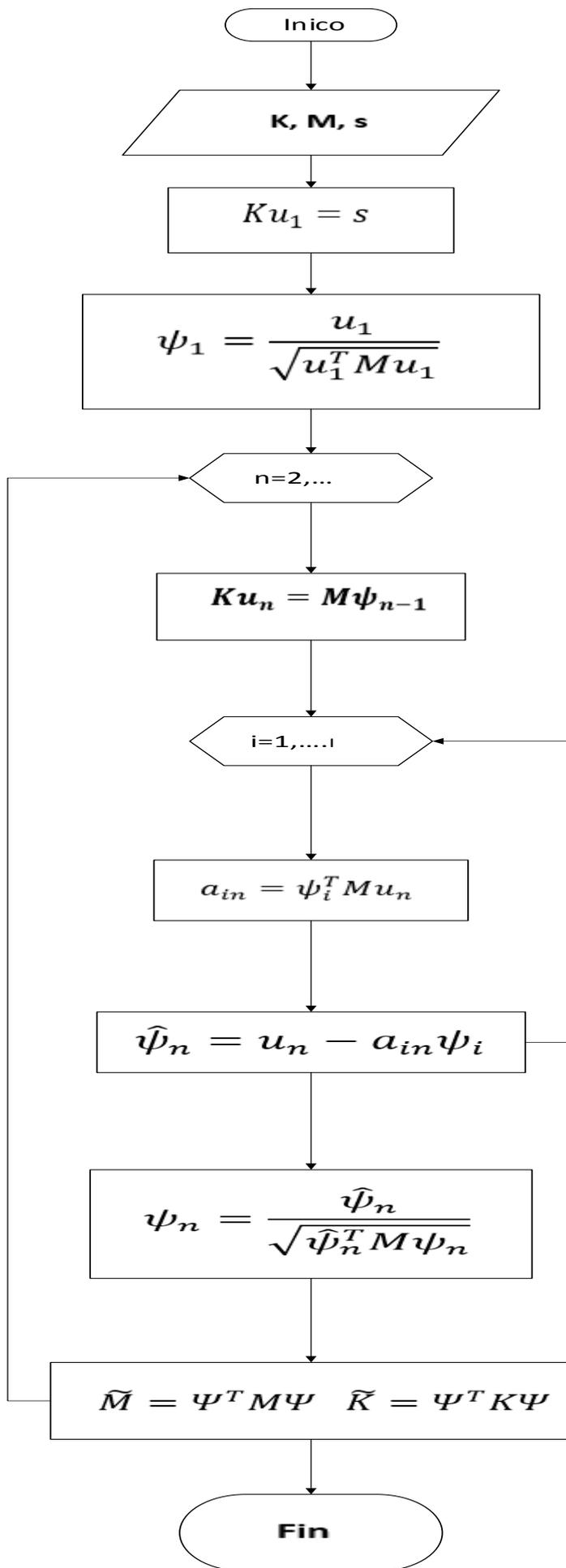
$$\psi_n = \frac{\hat{\psi}_n}{\sqrt{\psi_n^T M \hat{\psi}_n}} \quad (2.80)$$

La secuencia de los vectores  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_j$  son mutuamente de masa ortonormal y, por lo tanto, satisfacen el requisito de independencia lineal del método de Rayleigh-Ritz.

Mientras que en el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt las ecuaciones. (2.78) y (2.79) deberían teóricamente ser ortogonales a la masa el nuevo vector con respecto a todos los vectores anteriores. La implementación real de la computadora puede estar cargada de problemas de pérdida de la ortogonalidad debido a errores de redondeo numérico.

Para superar estas dificultades el proceso de Gram-Schmidt se modifica después del cálculo de cada  $a_{in}$  de la ecuación 2.78 , se calcula un vector mejorado  $\hat{\psi}_n$  con la ecuación 2.79 este vector mejorado se reemplaza en la ecuación 2.78 en lugar de  $u_n$  .(Chopra, 2014)

El proceso para hallar los vectores Ritz se presenta en el siguiente diagrama de flujo.



## 2.9 ESTIMACIÓN DEL ERROR DEL VECTOR DE FUERZAS.

Al aplicar el método de superposición modal en la solución de las ecuaciones de equilibrio dinámico, no todos los vectores calculados son representativos en la respuesta de la estructura, el cálculo de estos vectores que no son significativos en la respuesta de la estructura causan un esfuerzo computacional innecesario, por lo que es importante desarrollar una norma para el error a nivel de la generación del algoritmo, para conocer el momento cuando debe parar de generar nuevos vectores, siempre que se asegure una satisfactoria convergencia en las respuestas de interés. (Chopra, 2014)

### 2.9.1 NÚMERO DE MODOS REQUERIDOS MÉTODO DE AUTOVALORES

La respuesta modal máxima de una estructura  $r_{n0}$  depende de cuatro parámetros los cuales son:

$$r_{n0} = p_0 r^{st} \bar{r}_n R_{dn} \quad (2.81)$$

Donde:

$R_{dn}$  es el factor adimensional de amplificación dinámica para el  $n$ -ésimo modo del sistema de un grado de libertad excitado por la fuerza  $p(t)$ .

$\bar{r}_n$  es el factor adimensional de contribución modal para la cantidad de respuesta  $r$

$r^{st}$  es el valor estático de  $r$  debido a fuerzas externas  $s$ .

$p_0$  es el valor máximo de  $p(t)$ .

Las cantidades de  $r^{st}$  y  $\bar{r}_n$  dependen de la distribución espacial de las fuerzas externas  $s$  pero son independientes de la variación en el tiempo  $p(t)$  de las fuerzas,  $R_{dn}$  depende de  $p(t)$  pero es independiente de  $s$ . (Chopra, 2014)

El factor de contribución modal  $\bar{r}_n$  y el factor de amplificación dinámico  $R_{dn}$  influyen en la contribución de las respuestas relativas de los distintos modos de vibración y por tanto, en el número mínimo de modos que deben incluirse en el análisis dinámico. (Chopra, 2014)

En un análisis modal para obtener el valor exacto de la respuesta es necesario incluir el número máximo de modos, pero solo unos cuantos modos proporcionan resultados precisos, por lo general en el análisis de un sistema de  $N$  grados de libertad se incluyen solo los primeros  $J$  modos donde  $J$  puede ser mucho menor

que  $N$ , debido a esto la sumatoria de las contribuciones de todos los modos a la respuesta de la estructura se trunca. Por lo tanto solo es necesario calcular las frecuencias y los modos para los  $J$  primeros modos lo que implica un ahorro en el cálculo de la respuesta de la estructura.

La combinación de las contribuciones de todos los modos a la respuesta de la estructura se puede expresar mediante la siguiente ecuación.(Chopra, 2014)

$$r(t) = \sum_{n=1}^N r_n(t) = \sum_{n=1}^N r_n^{st} [w_n^2 u_n(t)] \quad (2.82)$$

Donde:

$w_n$  es la frecuencia para el  $n$ -ésimo modo del sistema de un grado de libertad.

$u_n$  es el desplazamiento asociado al  $n$ -ésimo modo del sistema de un grado de libertad.

Si se incluyen solo los primeros  $J$  modos el error en la respuesta estática se calcula mediante la siguiente ecuación.

$$e_J = 1 - \sum_{n=1}^J \bar{r}_n \quad (2.83)$$

Donde

$\bar{r}_n$  es el factor de contribución modal y se calcula mediante la siguiente ecuación:

$$\bar{r}_n = \frac{r_n^{st}}{r^{st}} \quad (2.84)$$

Donde

$r^{st}$  es el valor estático de  $r$  debido a las fuerzas externas  $s$

$$r^{st} = \sum r_n^{st} \quad (2.85)$$

El factor de participación modal  $\bar{r}_n$  cumple las siguientes propiedades

1. Son adimensionales
2. Son independientes de la manera en la que se normalicen los modos.

3. La suma de los factores de contribución modal es la unidad.

$$\sum_{n=1}^N \bar{r}_n = 1 \quad (2.86)$$

Para un valor fijo de  $J$  el error  $e_J$  depende de la distribución espacial  $s$  de las fuerzas aplicadas el error será cero si se incluyen todos los modos es decir  $J = N$

### 2.9.2 NÚMERO DE MODOS REQUERIDOS VECTORES-RITZ

El número de vectores Ritz dependientes de la carga que son incluidos dentro del análisis dinámico deberían ser suficientes para representar con precisión los vectores que describan la distribución espacial de las fuerzas, debido a que los vectores Ritz son ortogonales a la masa, el vector de fuerzas externas  $s$  puede expandirse mediante la propiedad de expansión modal de la siguiente manera. (Chopra, 2014)

$$s = \sum_{n=1}^N \tilde{\Gamma} M \psi_n \quad (2.87)$$

Donde

$\tilde{\Gamma}$  es el factor de participación modal

$\psi_n$  Es el n-esimo vector Ritz

$M$  Es la matriz de masas

$$\tilde{\Gamma} = \psi_n s \quad (2.88)$$

Los  $J$  vectores Ritz incluidos en el análisis dinámico proporcionan una aproximación a  $s$ , y un vector de error se puede definir como:

$$e_J = s - \sum_{n=1}^N \tilde{\Gamma} M \psi_n \quad (2.89)$$

Para poder comparar las aproximaciones al vector de cargas  $s$ , la ecuación 2.89 se normaliza dando como resultado:

$$e_J = \frac{s^T e_J}{s^T s} \quad (2.90)$$

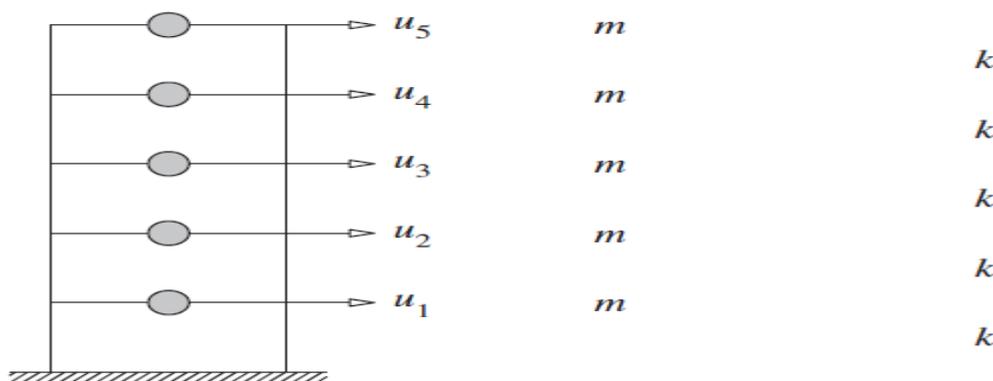
El error  $e_J$  será cero cuando se incluyan todos los vectores Ritz.

### 2.9.3 EJEMPLO DEL CÁLCULO DEL ERROR MEDIANTE EL USO DE VECTORES RITZ Y EL USO DE AUTOVALORES

Una vez formuladas las ecuaciones que permiten estimar el error que se produce en la inclusión del número de modos tanto mediante el uso de vectores Ritz o el uso de autovalores se procederá a ilustrar el proceso que se sigue mediante un ejemplo.

Como ejemplo se utilizará el siguiente pórtico con un solo grado de libertad por piso.

**FIGURA 2.6** REPRESENTACIÓN DEL PÓRTICO



Fuente (Chopra, 2014)

Las matrices de rigidez y de masa son las siguientes.

$$K = 31,56 \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}; M = 0,2591 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El vector de cargas externas es el siguiente

$$s1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La matriz modal normalizada es la siguiente

$$\phi = \begin{bmatrix} 0,334 & -0,895 & 1,172 & 1,077 & -0,604 \\ 0,641 & -1,172 & 0,338 & -0,8953 & 1,077 \\ 0,895 & -0,604 & -1,077 & -0,334 & -1,172 \\ 1,077 & 0,334 & -0,604 & 1,172 & 0,895 \\ 1,172 & 1,077 & 0,895 & -0,604 & -0,334 \end{bmatrix}$$

Para calcular el error en el número de modos empleados para el análisis mediante el uso de autovalores primero se utiliza la expansión modal del vector de cargas que está dada por la ecuación 2.87, el objetivo de utilizar la expansión modal del vector de cargas es asociar las cargas externas aplicadas con las fuerzas inerciales asociadas a los modos naturales

$$s = \sum_{n=1}^N \tilde{\Gamma} M \psi_n$$

$$s = \Phi^T \times s_1 \times M \times \Phi$$

$$s = \begin{bmatrix} 0,101 & -0,25 & 0,272 & -0,178 & 0,0554 \\ 0,194 & -0,327 & 0,077 & 0,148 & -0,093 \\ 0,272 & -0,178 & -0,25 & 0,055 & 0,101 \\ 0,327 & 0,093 & -0,148 & -0,194 & -0,077 \\ 0,356 & 0,3 & 0,208 & 0,106 & 0,028 \end{bmatrix}$$

Después se obtiene la fuerza resultante de cada modo es decir se suman las columnas de la matriz s

$$V = [1,2517 \quad -0,3621 \quad 0,1586 \quad -0,0632 \quad 0,015]$$

Se obtiene la respuesta estática de la estructura mediante la ecuación 2.85 la respuesta estática debe ser igual a uno.

Para calcular el error se utiliza la ecuación 2.83

$$e_1 = 1 - \left| \sum_{n=1}^5 \left( \frac{1,2516 - 1}{1} \right) \right| = 0,2517$$

$$e_2 = 1 - \left| \sum_{n=2}^5 \left( \frac{(1,2516 + (-0,3621)) - 1}{1} \right) \right| = 0,1104$$

$$e = [0,2517 \quad 0,1104 \quad 0,0481 \quad 0,0150 \quad 0]$$

Cálculo del error mediante vectores Ritz

Para calcular el error producido por los modos Ritz se sigue un proceso igual al que se usó para el cálculo del error mediante el uso de autovalores.

Primero se utiliza la ecuación 2.87

$$s = \sum_{n=1}^N \tilde{\Gamma} M \psi_n$$

$$s_1 = 0 + \sum_{n=1}^5 \psi_1^T \times s \times M \times \psi_1 = 0$$

$$s_2 = s_1 + \sum_{n=2}^5 \psi_2^T \times s \times M \times \psi_2 = 0$$

$$s = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0,9999]$$

Después se utiliza la ecuación 2.89

$$e = 10^{-13} \times [0,38 \quad -0,27 \quad 0,36 \quad -0,04 \quad 0,055]$$

Después se utiliza la ecuación 2.90

$$e = [0,54 \quad 0,12 \quad 0,01 \quad 0,0002 \quad 0]$$

El error calculado mediante los modos Ritz demuestra que estos convergen más rápido.

## CAPÍTULO 3

### MODELOS MATEMÁTICOS

#### 3.1 MODELO MATEMÁTICO PARA PÓRTICOS PLANOS

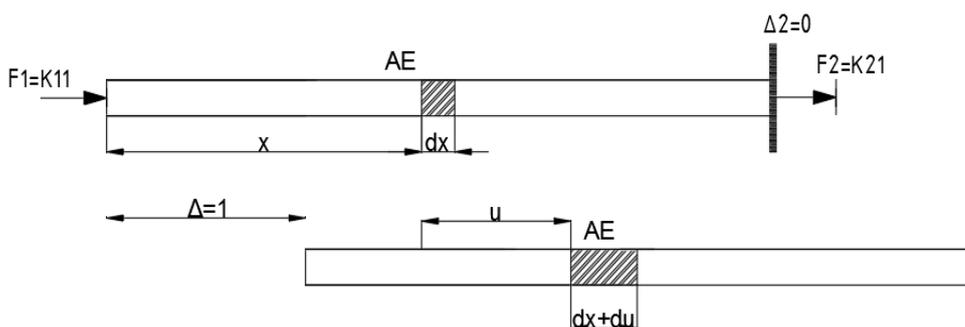
##### 3.1.1 MATRIZ DE RIGIDEZ PARA UN ELEMENTO PÓRTICO PLANO.

Un coeficiente de rigidez  $k_{ij}$  se define como la fuerza necesaria para provocar un desplazamiento unitario en el nodo  $i$  mientras que el nodo  $j$  se mantiene fijo. (Paz, 1992)

La matriz de rigidez de un elemento pórtico plano está compuesta por los efectos de flexión de un elemento viga con la inclusión de los efectos axiales de un elemento tipo barra.

Coeficientes de rigidez para un elemento tipo barra.

**FIGURA 3. 1** ELEMENTO TIPO BARRA SOMETIDO A UN DESPLAZAMIENTO UNITARIO



Fuente: Realizado por el autor

La figura 3.1 muestra un elemento tipo barra en el cual se aplica un desplazamiento unitario en el nodo manteniendo el nodo 2 fijo, el elemento diferencial  $dx$  después de la aplicación del desplazamiento ha sufrido un cambio en su longitud igual a  $du$  siendo su deformación por unidad de longitud igual a  $du/dx$ . Al aplicar la ley de Hooke se obtiene la siguiente ecuación:

$$du = \frac{F}{AE} dx \quad (3.1)$$

Al resolver la ecuación 3.1 se obtiene

$$u = \frac{Fx}{AE} + C \quad (3.2)$$

Donde C es la constante de integración,

Para el dominio  $0 \leq x \leq L$  se establecen las siguientes condiciones de frontera:

$$\forall x = 0 \quad u = 1 \quad \text{y} \quad \forall x = L \quad u = 1$$

Con estas condiciones de frontera se obtiene la función de forma correspondiente al desplazamiento unitario  $\Delta = 1$

$$u_1(x) = 1 - \frac{x}{L} \quad (3.3a)$$

De la misma forma se obtiene la función de forma al aplicar un desplazamiento unitario en el nodo 2 manteniendo el nodo uno fijo.

$$u_2(x) = \frac{x}{L} \quad (3.3b)$$

Al aplicar el principio del trabajo virtual se obtiene una expresión general para obtener los coeficientes de rigidez.

$$W_e = K_{ij} \Delta_i \quad (3.4)$$

Al ser  $\Delta_i = 1$  la ecuación 3.4 se simplifica

$$W_e = K_{ij}$$

La fuerza interna  $F(x)$  se obtiene aplicando la ecuación 3.1

$$F(x) = AE \frac{du}{dx} \quad (3.5)$$

El desplazamiento relativo del elemento diferencial es:

$$du_i = \frac{du_i}{dx} dx \quad (3.6)$$

El trabajo interno para el elemento diferencial se obtiene aplicando la siguiente ecuación:

$$dW_I = AE \frac{du_i(x)}{dx} \frac{du_j(x)}{dx} dx \quad (3.7)$$

Al integrar la ecuación 3.7 para el segmento de la barra:

$$W_I = \int_0^L AE \frac{du_i(x)}{dx} \frac{du_j(x)}{dx} dx \quad (3.8)$$

Igualando las ecuaciones 3.8 y 3.4 se obtiene la ecuación que permite calcular los coeficientes de rigidez para un elemento tipo barra.

$$K_{ij} = \int_0^L AE \frac{du_i(x)}{dx} \frac{du_j(x)}{dx} dx \quad (3.9)$$

Al utilizar las funciones de forma se obtienen los coeficientes de rigidez para un elemento tipo barra.

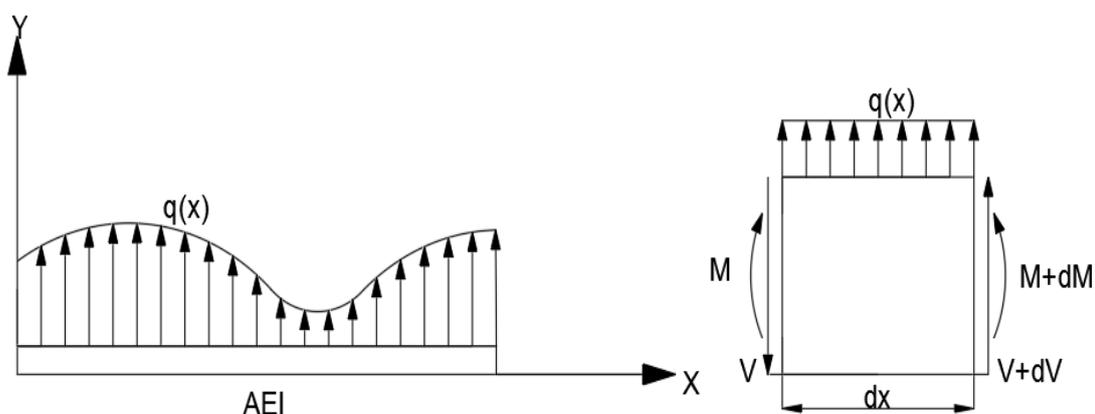
$$K_{11} = \int_0^L AE \left(-\frac{1}{L}\right) \left(-\frac{1}{L}\right) dx = \frac{AE}{L}$$

$$K_{12} = \int_0^L AE \left(-\frac{1}{L}\right) \left(\frac{1}{L}\right) dx = -\frac{AE}{L}$$

$$K = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

### 3.1.1.2 MATRIZ DE RIGIDEZ PARA UN ELEMENTO TIPO VIGA.

FIGURA 3. 2 ELEMENTO DIFERENCIAL DE VIGA SOMETIDO A UNA CARGA



Fuente: Realizado por el autor

La figura 3.2 muestra un elemento diferencial tipo viga sometido a una carga  $q(x)$  al realizar el equilibrio estático en el elemento diferencial se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\sum F_y = 0; \quad -V + (V + dV) + q(x)dx = 0$$

$$\sum M = 0; \quad -M + (M + dM) + Vdx - q(x)dx \frac{dx}{2} = 0$$

Donde  $q(x)$  es la carga por unidad de longitud,  $V$  es el esfuerzo de corte y  $M$  es el momento de flexión.

De las ecuaciones anteriores se deduce que:

$$\frac{dV}{dx} + q(x) = 0 \quad (3.11)$$

$$\frac{dM}{dx} = -V \quad (3.12)$$

Al aplicar la teoría de vigas de Bernoulli en la cual las secciones transversales permanecen planas durante la flexión se cumple que:

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = \frac{y}{\rho} \quad (3.13)$$

$\rho$  es el radio de curvatura de la elástica, otro de los aspectos de la teoría de vigas de Bernoulli es que las deformaciones son pequeñas por lo tanto la curvatura de la elástica es:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2v}{dx^2} \quad (3.14)$$

Al sustituir la ecuación 3.14 en la ecuación 3.13

$$\varepsilon_x = y \frac{d^2v}{dx^2} \quad (3.15)$$

Si se considera que la viga es linealmente elástica:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = Ey \frac{d^2v}{dx^2} \quad (3.16)$$

Donde  $E$  es el modulo de elasticidad.

De la relación entre solicitaciones y esfuerzos se obtiene la ecuación diferencial de la elástica.

$$M = \int_A \sigma_x y \, dA = Ey \frac{d^2v}{dx^2} \int_A y^2 \, dA$$

$$\int_A y^2 \, dA \text{ es el momento de inercia de la seccion}$$

$$\int_A y^2 \, dA = I$$

$$M = EI \frac{d^2v}{dx^2} \quad (3.17)$$

Al derivar dos veces la ecuación 3.17 y utilizando las ecuaciones 3.11 y 3.12

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2v}{dx^2} \right) - q(x) = 0 \quad (3.18)$$

Si  $E, I$  son constantes a lo largo de la viga la ecuación 3.18 se reduce a

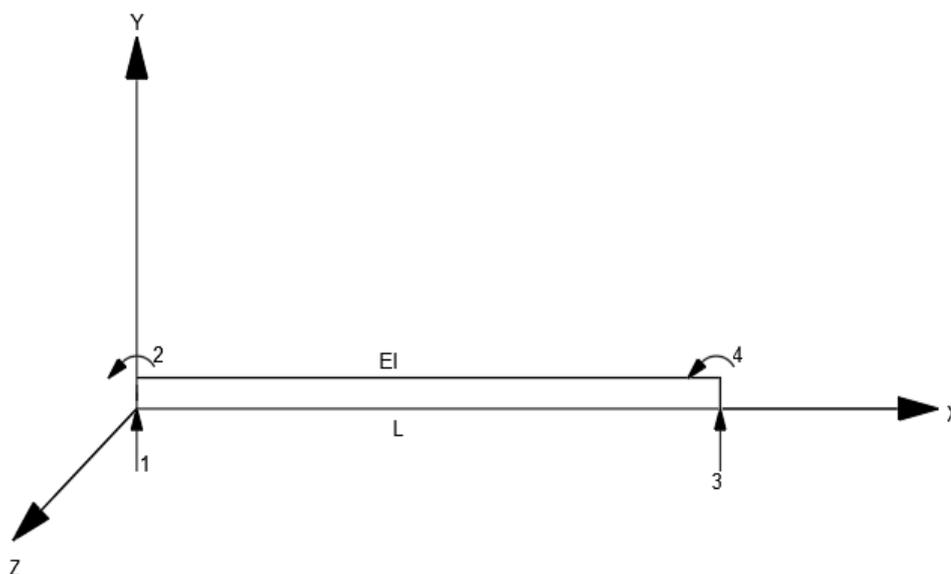
$$EI \frac{d^4v}{dx^4} - q(x) = 0 \quad (3.19)$$

Si la carga  $q(x)$  es igual a cero la ecuación 3.19 se reduce

$$\frac{d^4 v}{dx^4} = 0 \quad (3.20)$$

Para hallar las funciones de forma es necesario hacer una integración sucesiva partiendo de la ecuación 3.20 y aplicar un desplazamiento unitario en cada uno de los grados de libertad que tiene un elemento tipo viga.

**FIGURA 3. 3** GRADOS DE LIBERTAD DE UN ELEMENTO TIPO VIGA



Fuente: Realizado por el autor

$$\frac{d^3 v}{dx^3} = C1 \quad (3.21)$$

C1 es la constante de integración.

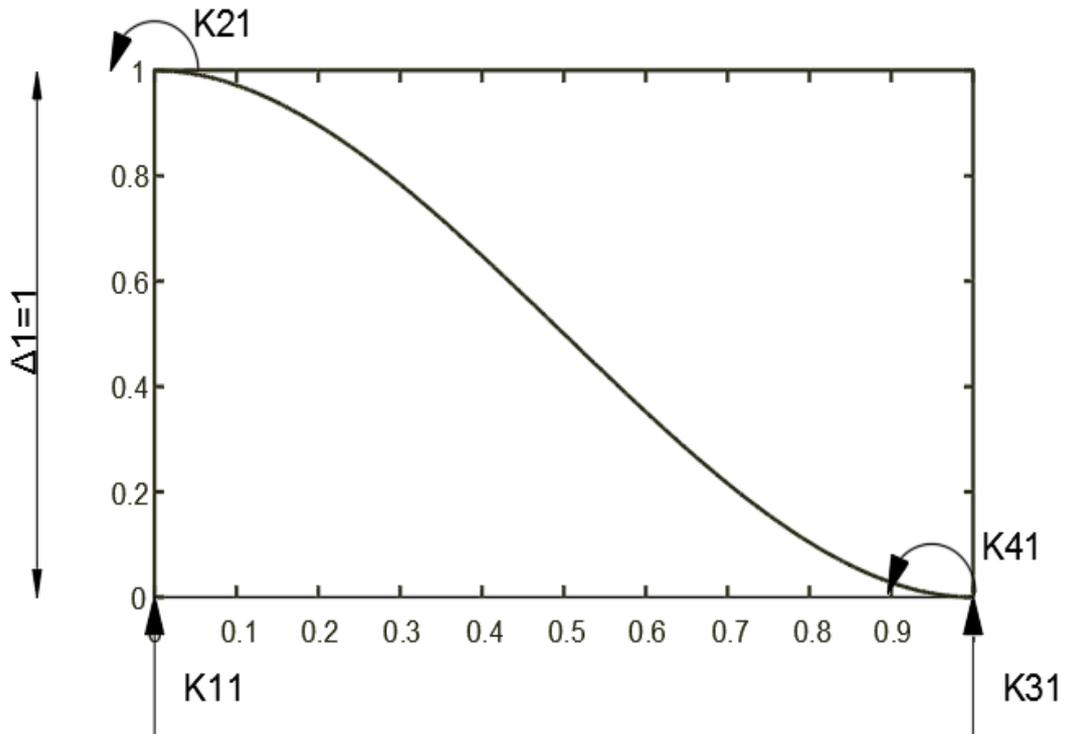
$$\frac{d^2 v}{dx^2} = C1x + C2 \quad (3.22)$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{2} C1x^2 + C2x + C3 \quad (3.23)$$

$$v = \frac{1}{6} C1x^3 + \frac{1}{2} C2x^2 + C3x + C4 \quad (3.24)$$

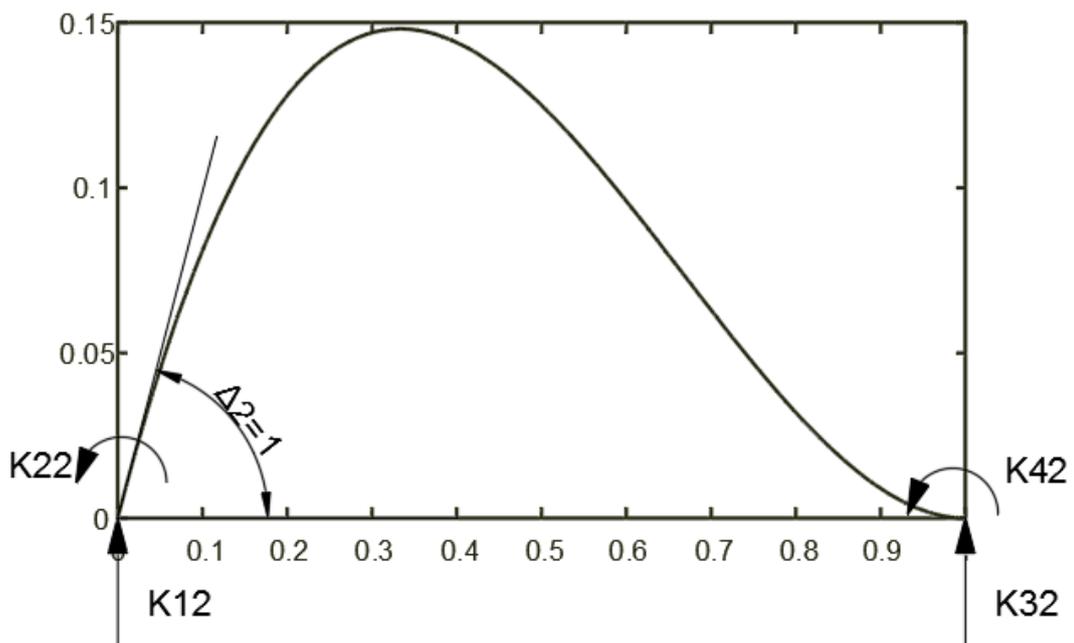
Al aplicar un desplazamiento unitario a cada grado de libertad de cada nodo permaneciendo el otro nodo fijo se establecen las condiciones de borde para cada grado de libertad aplicando el principio de trabajos virtuales.

**FIGURA 3. 4** DEFORMACIÓN DE UN ELEMENTO TIPO VIGA SOMETIDO A UN DESPLAZAMIENTO UNITARIO DE TRASLACIÓN EN EL EXTREMO IZQUIERDO



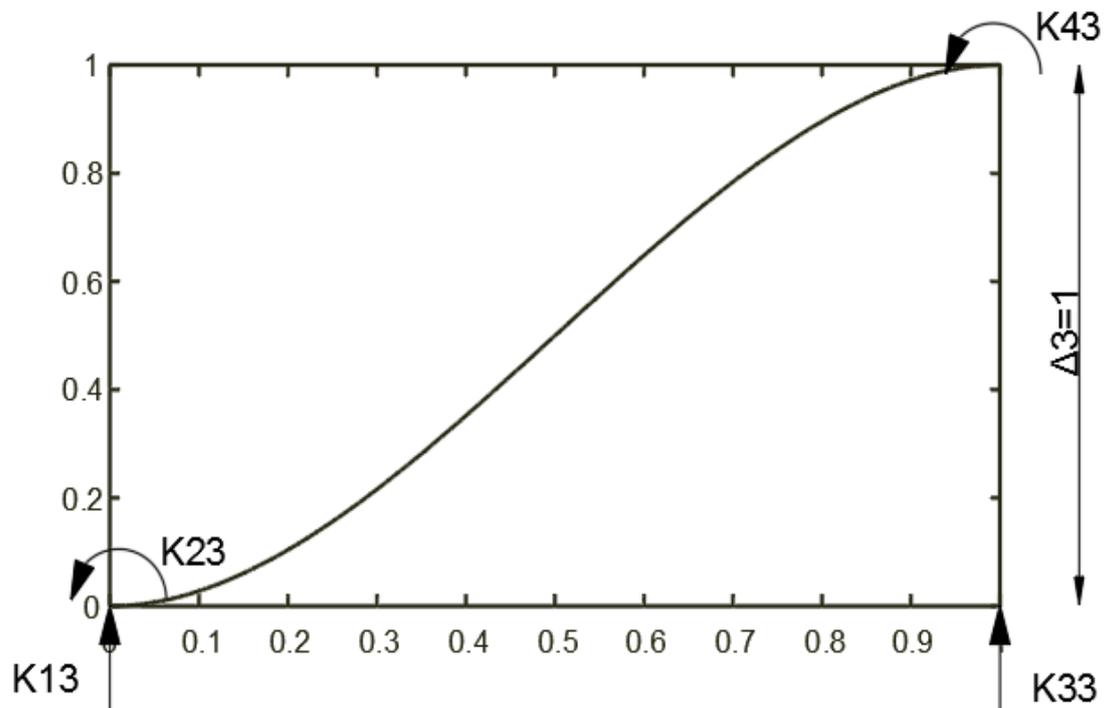
Fuente: Realizado por el autor

**FIGURA 3. 5** DEFORMACIÓN DE UN ELEMENTO TIPO VIGA SOMETIDO A UN DESPLAZAMIENTO UNITARIO DE ROTACIÓN EN EL EXTREMO IZQUIERDO



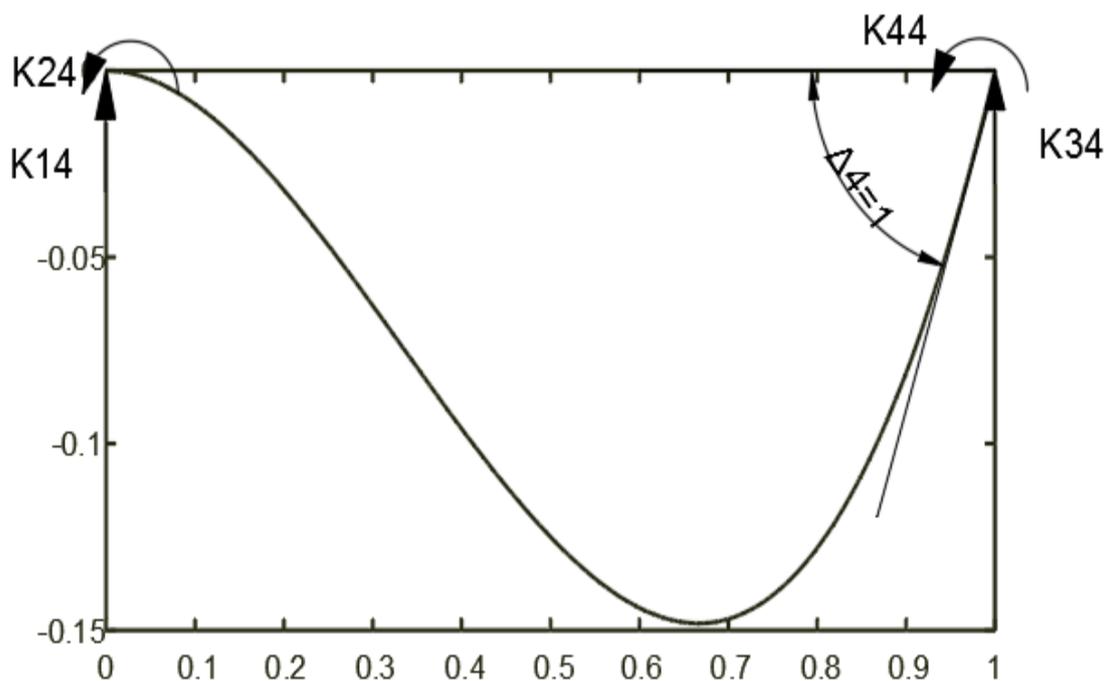
Fuente: Realizado por el autor

**FIGURA 3. 6** DEFORMACIÓN DE UN ELEMENTO TIPO VIGA SOMETIDO A UN DESPLAZAMIENTO UNITARIO DE TRASLACIÓN EN EL EXTREMO DERECHO



Fuente: Realizado por el autor

**FIGURA 3. 7** DEFORMACIÓN DE UN ELEMENTO TIPO VIGA SOMETIDO A UN DESPLAZAMIENTO UNITARIO DE ROTACIÓN EN EL EXTREMO DERECHO



Fuente: Realizado por el autor

**TABLA 3.1** CONDICIONES DE BORDE PARA CADA GRADO DE LIBERTAD DE UN ELEMENTO TIPO VIGA

	$vx ; x = 0$	$\frac{dv}{dx} ; x = 0$	$vx ; x = L$	$\frac{dv}{dx} ; L = 0$
$\Delta_1 = 1$	1	0	0	0
$\Delta_2 = 1$	0	1	0	0
$\Delta_3 = 1$	0	0	1	0
$\Delta_4 = 1$	0	0	0	1

Al usar las condiciones de borde para el grado de libertad 1 y haciendo uso de las ecuaciones 3.21 y 3.22 se calculan las constantes de integración.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{L^3}{6} & \frac{L^2}{2} & L & 0 \\ \frac{L^2}{2} & L & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C1 \\ C2 \\ C3 \\ C4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Al resolver el sistema se obtienen las constantes de integración.

$$C1 = \frac{12}{L^3} ; C2 = -\frac{6}{L^2} ; C3 = 0 ; C4 = 1$$

Al reemplazar las constantes en la ecuación 3.22 se obtiene la función de forma que está asociada al desplazamiento unitario del grado de libertad 1.

$$v1 = 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \quad (3.25a)$$

Las demás funciones de forma se obtienen aplicando el mismo proceso.

$$v2 = x\left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 \quad (3.25b)$$

$$v3 = 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \quad (3.25c)$$

$$v4 = \frac{x^2}{L}\left(\frac{x}{L} - 1\right) \quad (3.25d)$$

Los coeficientes de rigidez de un elemento tipo viga pueden obtenerse de la misma forma en las que se obtuvieron los coeficientes de rigidez para un elemento tipo barra, aplicando el principio de trabajo virtual.

El trabajo externo está dado por la ecuación 3.4

$$W_e = K_{ij}\Delta_i$$

Al ser  $\Delta_i = 1$  la ecuación 3.4 se simplifica

$$W_e = K_{ij}$$

El trabajo interno es realizado por las fuerzas elásticas durante el desplazamiento virtual, considerando el trabajo realizado por el momento flector se obtiene:

$$W_I = \int_0^L M(x) d\theta \quad (3.26)$$

Al reemplazar la ecuación 3.15 en la ecuación 3.24 se obtiene:

$$W_I = \int_0^L EI \frac{d^2 v_1(x)}{dx^2} d\theta \quad (3.27)$$

$M(x)$  es el momento flector de la viga y  $d\theta$  es el desplazamiento angular relativo.

La deformación angular  $d\theta$  está relacionada con la deformación transversal dada por la función de forma  $v_1$

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dx} &= \frac{d^2 v_1(x)}{dx^2} \\ d\theta &= \frac{d^2 v_1(x)}{dx^2} dx \end{aligned} \quad (3.28)$$

Igualando el trabajo virtual externo dado por la ecuación 3.4 con trabajo virtual interno dado por la ecuación 3.26 se obtiene:

$$K_{ij} = \int_0^L EI \frac{d^2 v_i(x)}{dx^2} \frac{d^2 v_j(x)}{dx^2} dx \quad (3.29)$$

Con la ecuación 3.29 y empleando las funciones de forma se calculan los coeficientes de rigidez para un elemento tipo viga:

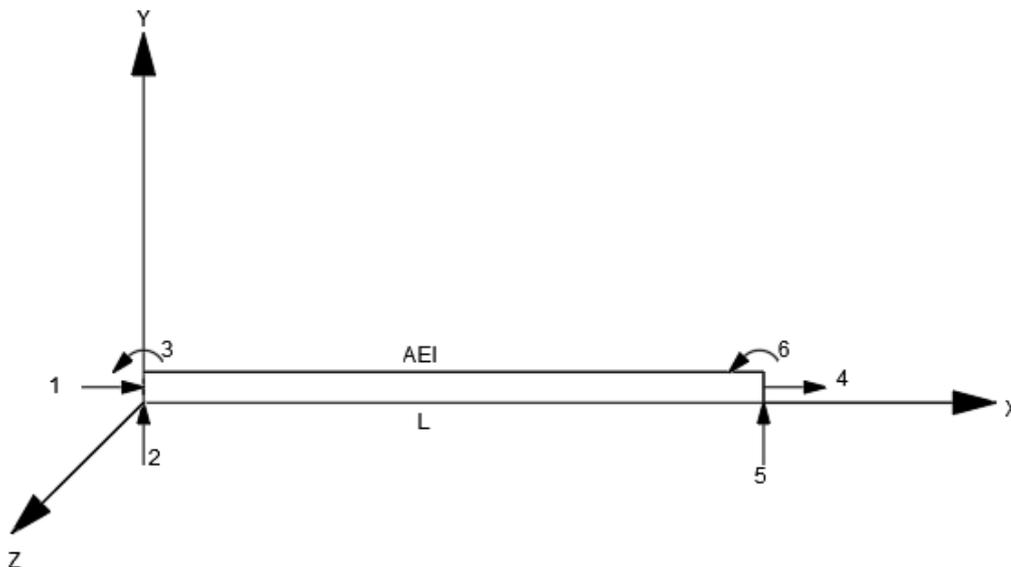
Por ejemplo el coeficiente de rigidez  $K_{11}$

$$K_{11} = EI \int_0^L \left( -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \right)^2 dx = \frac{12EI}{L^3}$$

La matriz de rigidez de un elemento tipo viga es:

$$K = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6 \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

**FIGURA 3. 8** GRADOS DE LIBERTAD DE UN ELEMENTO TIPO PÓRTICO PLANO EN COORDENADAS LOCALES



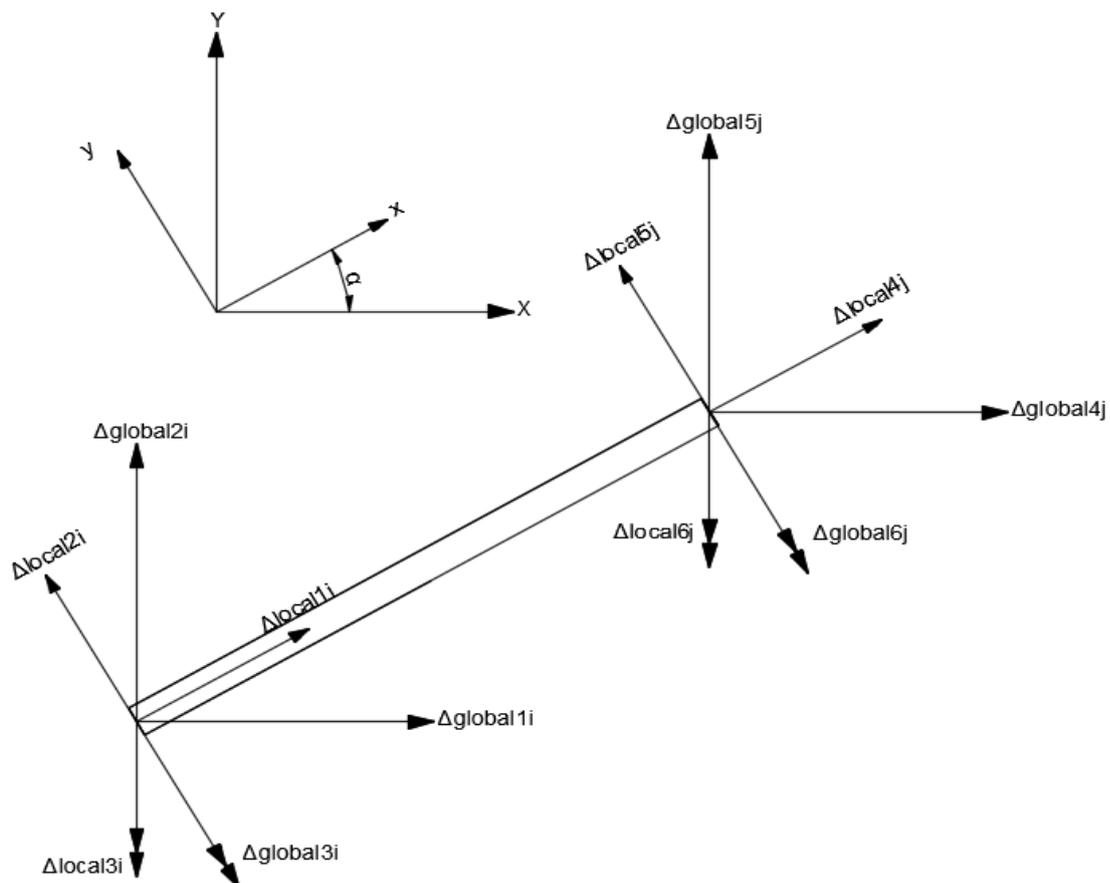
Fuente: Realizado por el autor

La matriz de rigidez en coordenadas locales del elemento tipo pórtico mostrado en la figura 3.8 se obtiene combinando la matriz de rigidez de un elemento tipo barra con la matriz de rigidez de un elemento tipo viga en una sola matriz.

$$k = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} \frac{AL^2}{I} & 0 & 0 & -\frac{AL^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6L & 0 & -12 & 6L \\ 0 & 6L & 4L^2 & 0 & -6L & 2L^2 \\ -\frac{AL^2}{I} & 0 & 0 & \frac{AL^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 12 & -6L \\ 0 & 6L & 2L^2 & 0 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

La ecuación 3.31 es para un elemento tipo pórtico con una orientación en específico, dado que una estructura está conformada por varios elementos con diferentes orientaciones su sistema de coordenadas local varía de un elemento a otro, para ensamblar la matriz de rigidez de la estructura, todas las matrices de cada elemento deben estar expresadas en un sistema coordinado en común, que es el sistema de coordenadas globales del sistema.

**FIGURA 3. 9** GRADOS DE LIBERTAD DE UN ELEMENTO TIPO PÓRTICO PLANO EN COORDENADAS LOCALES Y GLOBALES



Fuente: Realizado por el autor

La figura 3.9 muestra los grados de libertad de un elemento tipo pórtico en coordenadas locales y coordenadas globales.

Los desplazamientos en coordenadas globales también tienen dos desplazamientos traslacionales y un rotacional en cada nodo, la transformación de coordenadas da la relación entre el vector de desplazamientos en coordenadas locales y el vector de desplazamientos del mismo elemento en coordenadas globales.

### 3.1.1.2 MATRIZ DE TRANSFORMACIÓN PARA UN ELEMENTO PÓRTICO PLANO

La matriz de transformación de un elemento tipo pórtico para pasar de coordenadas locales a coordenadas globales es:

(3.32)

$$T = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Con la ecuación 3.32 se obtiene la matriz de rigidez del elemento en coordenadas globales.

$$K_e = T^T k T \quad (3.33)$$

La matriz de rigidez de la estructura se obtiene con la siguiente ecuación:

$$[K] = \sum_{i=1}^n T^{(i)T} k^{(i)} T^{(i)} \quad (3.34)$$

### 3.1.2 MATRIZ CONSISTENTE DE MASAS PARA UN ELEMENTO TIPO PÓRTICO.

Como se mencionó en el capítulo 2 la matriz consistente de masas permite disponer de las propiedades de masas distribuidas concentrando los efectos en los extremos de los elementos, tal y como se lo hace para el cálculo de la matriz de rigidez.

Al aplicar una aceleración ( $\ddot{u}$ ) en los extremos de un elemento pórtico plano, esta aceleración induce en el elemento aceleraciones transversales  $\ddot{y}(x)$  y aceleraciones longitudinales  $\ddot{x}(x)$ . Tomando un elemento diferencial a lo largo de la longitud del elemento  $dx$  y su correspondiente diferencial de masa  $dm$ , se presentan fuerzas inerciales diferenciales, al aplicar la segunda ley de Newton se obtiene:

$$df_y = \ddot{v}(x) dm \quad (3.35)$$

Para aceleraciones transversales y

$$df_x = \ddot{x}(x) dm \quad (3.36)$$

Para aceleraciones longitudinales.

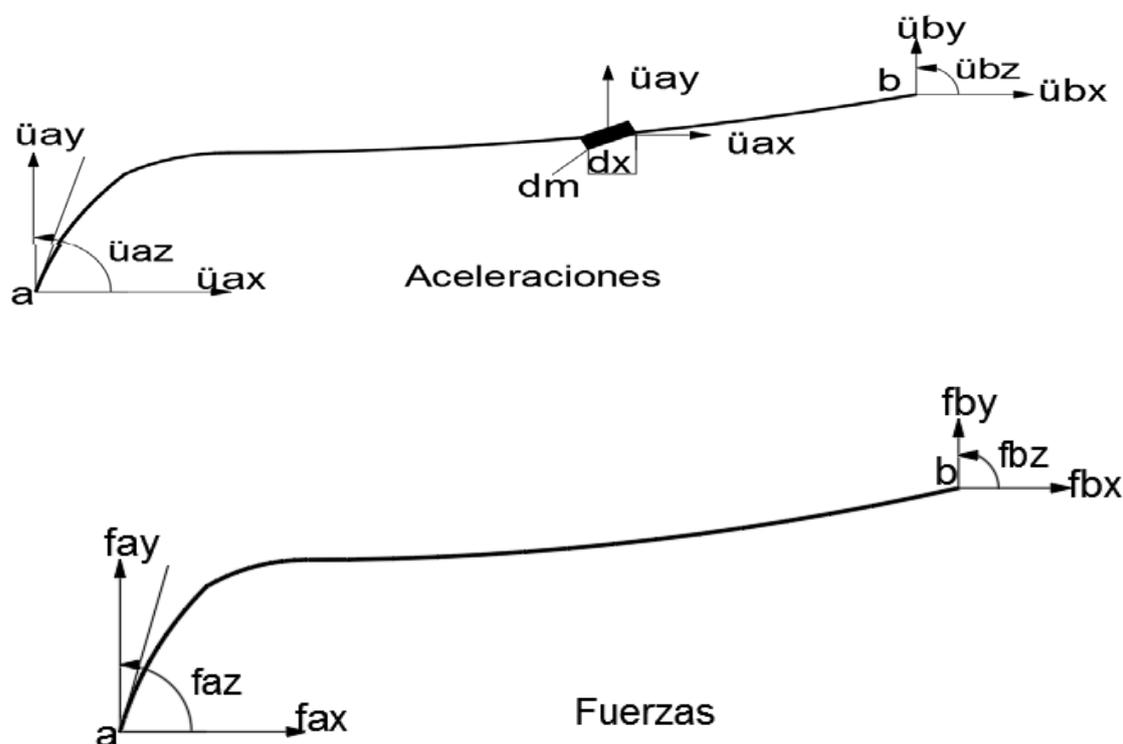
Estas ecuaciones son semejantes a las ecuaciones que describen la deformación de la elástica del elemento y son proporcionales a estas deformaciones, si se determinan los efectos que tienen todas las fuerzas inerciales diferenciales en los extremos del elemento se puede plantear la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{Bmatrix} f_{ax} \\ f_{ay} \\ f_z \\ f_{bx} \\ f_{by} \\ f_{bz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{axax} & m_{axay} & m_{axzz} & m_{axbx} & m_{axby} & m_{axbz} \\ m_{ayax} & m_{ayay} & m_{ayaz} & m_{aybx} & m_{ayby} & m_{aybz} \\ m_{azax} & m_{azay} & m_{azaz} & m_{azbx} & m_{azby} & m_{azbz} \\ m_{bxax} & m_{bxay} & m_{bxaz} & m_{bxbx} & m_{bxbby} & m_{bxbz} \\ m_{byax} & m_{byay} & m_{byaz} & m_{bybx} & m_{byby} & m_{bybz} \\ m_{bzax} & m_{bzay} & m_{bzaz} & m_{bzbx} & m_{bzby} & m_{bzbz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_{ax} \\ \ddot{u}_{ay} \\ \ddot{u}_{az} \\ \ddot{u}_{bx} \\ \ddot{u}_{by} \\ \ddot{u}_{bz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Para calcular los términos de la ecuación 3.35 primero se fijan los grados de libertad de cada nudo del elemento, se restringe uno de los nudos y al nudo que se encuentra libre se le impone una aceleración unitaria el proceso es similar al que se sigue para determinar los coeficientes de la matriz de rigidez.

La forma de la elástica del elemento es consistente con las deformaciones cuando están restringidos los grados de libertad del extremo del elemento. Las aceleraciones internas del elemento son proporcionales a la forma de la elástica, por lo que en cada diferencial de masa las fuerzas inerciales que se generan están definidas por las ecuaciones 3.35 y 3.36.

**FIGURA 3. 10** ACELERACIONES Y FUERZAS EN LOS EXTREMOS DE UN ELEMENTO TIPO PÓRTICO PLANO



Fuente (García, 1998)

Para encontrar el efecto de estas fuerzas diferenciales se utiliza el principio de Müller Breslau que dice: Las ordenadas de la línea de influencia de cualquier elemento de fuerza axial, cortante o momento flector de cualquier estructura son proporcionales a la curva de la elástica que se obtiene al retirar la restricción correspondiente al elemento de fuerza y reemplazarla por una deformación correspondiente en la estructura que se obtiene al retirar esa restricción. (Cheng, 2015)

La contribución de cualquiera de los grados de libertad en la fuerza  $f_{ij}$  en el extremo para una deformación de la elástica del elemento  $u_j(x)$  es:

$$df_{ij} = v_i(x)df = v_i(x)\ddot{v}_j(x)dm \quad (3.37)$$

El elemento tipo pórtico plano tiene una sección uniforme su masa por unidad de longitud es  $m/L$  donde  $m$  es la masa y  $L$  la longitud del elemento, y la aceleración  $\ddot{y}_j$  es proporcional a los desplazamientos  $y_j$  por lo tanto la ecuación 3.37 se convierte en:

$$df_{ij} = v_i(x)\ddot{v}_j(x)\frac{m}{L}dx \quad (3.38)$$

Al integrar la ecuación 2.38 se obtiene:

$$f_{ij} = \frac{m}{L} \int_0^L v_i(x)v_j(x)dx \quad (3.39)$$

Las formas de la elástica para una carga axial en cada extremo del elemento y debido a que la deformación se supone lineal, están dadas por las funciones de forma de las ecuaciones 3.4.

Para las otras formas de la elástica se utiliza la ecuación diferencial 3.20 y las funciones de forma están dadas por las ecuaciones 3.25

Al calcular las integrales se obtiene:

$$m_{axax} = \frac{m}{L} \int_0^L \left(1 - \frac{x}{L}\right) \left(1 - \frac{x}{L}\right) dx = \frac{m}{L}$$

$$m_{axbx} = \frac{m}{L} \int_0^L \left(1 - \frac{x}{L}\right) \left(\frac{x}{L}\right) dx = \frac{m}{6}$$

$$m_{ayay} = \frac{m}{L} \int_0^L \left(1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3\right)^2 dx = \frac{13m}{35}$$

$$m_{ayaz} = \int_0^L \left(1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3\right) \left(x - 2\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}\right) dx = \frac{11mL}{210}$$

Al calcular los demás términos se obtiene la matriz consistente de masas de un elemento pórtico plano en coordenadas locales.

$$[M] = \frac{mL}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 54 & -13L \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 13L & -3L^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 156 & -22L \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

Donde  $m$  es la masa del elemento expresada en  $tm/s^2$  y  $L$  es la longitud del elemento.

La matriz concentrada de masas uniformemente distribuida de un elemento tipo pórtico plano es:

$$[M] = \frac{mL}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

donde  $m$  es la masa y  $L$  la longitud del elemento.

La matriz de masas del elemento en coordenadas globales se obtiene de la misma forma que la matriz de rigidez del elemento en coordenadas globales.

(3.42)

$$M_e = T^T M T$$

El ensamble de la matriz de masas de la estructura es igual al proceso que se sigue para ensamblar la matriz de rigidez de la estructura.

$$[M] = \sum_{i=1}^n T^{(i)T} M_e^{(i)} T^{(i)} \quad (3.43)$$

## 3.2 MATRIZ DE RIGIDEZ PARA UN ELEMENTO TIPO PÓRTICO ESPACIAL

EL método empleado para el cálculo de los coeficientes de rigidez de un elemento tipo pórtico plano también se puede emplear para calcular los coeficientes de rigidez de un elemento pórtico espacial, la única diferencia es que un elemento tipo pórtico espacial tiene tres grados de libertad traslacionales y tres grados de libertad rotacionales en cada nodo.

Además de que es necesario obtener las funciones de forma para efectos torsionales característico de un elemento tipo parrilla.

### 3.2.1 EFECTOS DE TORSIÓN

Los coeficientes de rigidez torsionales se obtienen de igual forma que los coeficientes de rigidez de efectos axiales de un elemento tipo barra, esto se debe a que la derivación de las ecuaciones diferenciales para ambos casos tienen la misma forma matemática.

La ecuación diferencial para efectos torsionales está dada por la siguiente ecuación:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{T}{GJ} \quad (3.44)$$

Donde  $\theta$  es el desplazamiento angular,  $T$  es el momento de torsión,  $G$  es el módulo de elasticidad al esfuerzo cortante y  $J$  es la constante torsional de la sección transversal.

Las funciones de forma para efectos torsionales son iguales a las funciones de forma para efectos axiales dadas por las ecuaciones 3.3.

$$\theta_1(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad (3.45a)$$

$$\theta_2(x) = \frac{x}{L} \quad (3.45b)$$

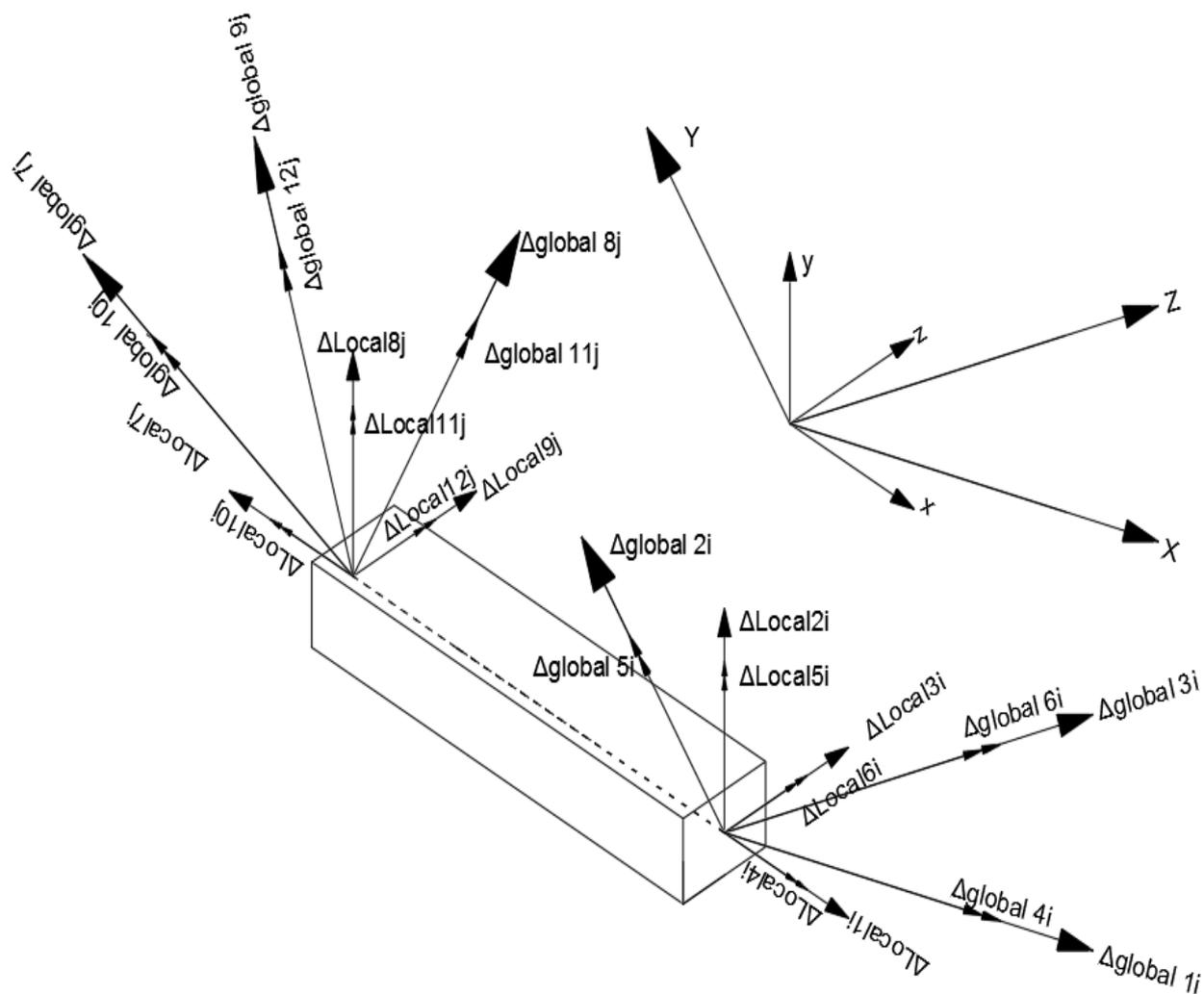
Los coeficientes de rigidez para efectos torsionales pueden ser calculados con la siguiente ecuación.

$$K_{ij} = \int_0^L JG \frac{d\theta_i(x)}{dx} \frac{d\theta_j(x)}{dx} dx \quad (3.46)$$

Al aplicar la ecuación 2.52 se obtienen los coeficientes de rigidez.

$$K = \frac{GJ}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

**FIGURA 3. 11** GRADOS DE LIBERTAD EN COORDENADAS LOCALES Y GLOBALES DE UN ELEMENTO TIPO PÓRTICO ESPACIAL



Fuente: Realizado por el autor

Matriz de rigidez de un elemento tipo pórtico espacial en coordenadas locales.

$$K = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

### 3.2.1.2 MATRIZ DE TRANSFORMACIÓN PARA UN ELEMENTO PÓRTICO ESPACIAL

Para definir la matriz de transformación de un elemento pórtico espacial se debe definir la posición y la orientación tridimensional del elemento.

Para obtener las componentes del elemento en dirección de los ejes locales x,y,z se suman las proyecciones de las componentes X,Y,Z en las direcciones correspondientes a cada uno de los ejes locales, la componente del elemento en dirección de los ejes locales x,y,z sería:

$$\begin{aligned} x &= X \cos xX + Y \cos xY + Z \cos xZ \\ y &= X \cos yX + Y \cos yY + Z \cos yZ \\ z &= X \cos zX + Y \cos zY + Z \cos zZ \end{aligned}$$

La matriz de transformación en coordenadas locales está dada por:

$$[T1] = \begin{bmatrix} \cos xX & \cos xY & \cos xZ \\ \cos yX & \cos yY & \cos yZ \\ \cos zX & \cos zY & \cos zZ \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

donde

$X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2$  son las coordenadas globales de los nodos del elemento y  $L$  la longitud del elemento.

$$c1 = \cos xX = \frac{X_2 - X_1}{L}$$

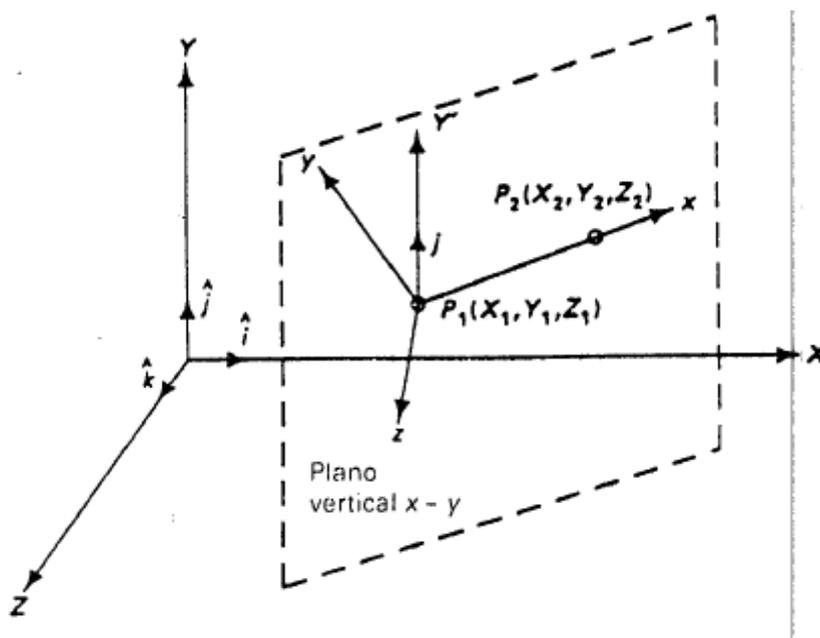
$$c2 = \cos xY = \frac{Y_2 - Y_1}{L}$$

$$c2 = \cos xZ = \frac{Z_2 - Z_1}{L}$$

Los cosenos necesarios para determinar la matriz de transformación generalmente se calculan a partir de las coordenadas globales de los dos puntos en los nodos del elemento, además de un dato adicional, este dato podría ser un ángulo de rotación o las coordenadas globales de un tercer punto ubicado en el plano x-y local del elemento. (Paz, 1992)

El ángulo de rotación es el ángulo por el cual el eje local y ha girado desde su posición estándar. La posición estándar se da cuando el plano local formado por los ejes locales x, y es vertical, este plano es paralelo al eje global Y. El ángulo de rotación  $\phi$  es medido desde el eje y hacia el eje  $y'$  y es positivo si la rotación alrededor del eje x es en sentido antihorario.

**FIGURA 3. 12** SISTEMA GLOBAL DE COORDENADAS (X,Y,Z) Y SISTEMA LOCAL DE COORDENADAS (x,y,x)



Fuente(Paz, 1992)

Al expresarse la ecuación 3.49 en función del ángulo de rotación  $\varnothing$  se obtiene:

$$[T1] = \begin{bmatrix} c1 & c2 & c3 \\ -\frac{c1c2}{d} \cos \varnothing - \frac{c3}{d} \sin \varnothing & d \cos \varnothing & \frac{c1}{d} \sin \varnothing - \frac{c2c3}{d} \cos \varnothing \\ \frac{c1c2}{d} \sin \varnothing + \frac{c3}{d} \cos \varnothing & -d \sin \varnothing & \frac{c1}{d} \cos \varnothing - \frac{c2c3}{d} \sin \varnothing \end{bmatrix} \quad (3.49a)$$

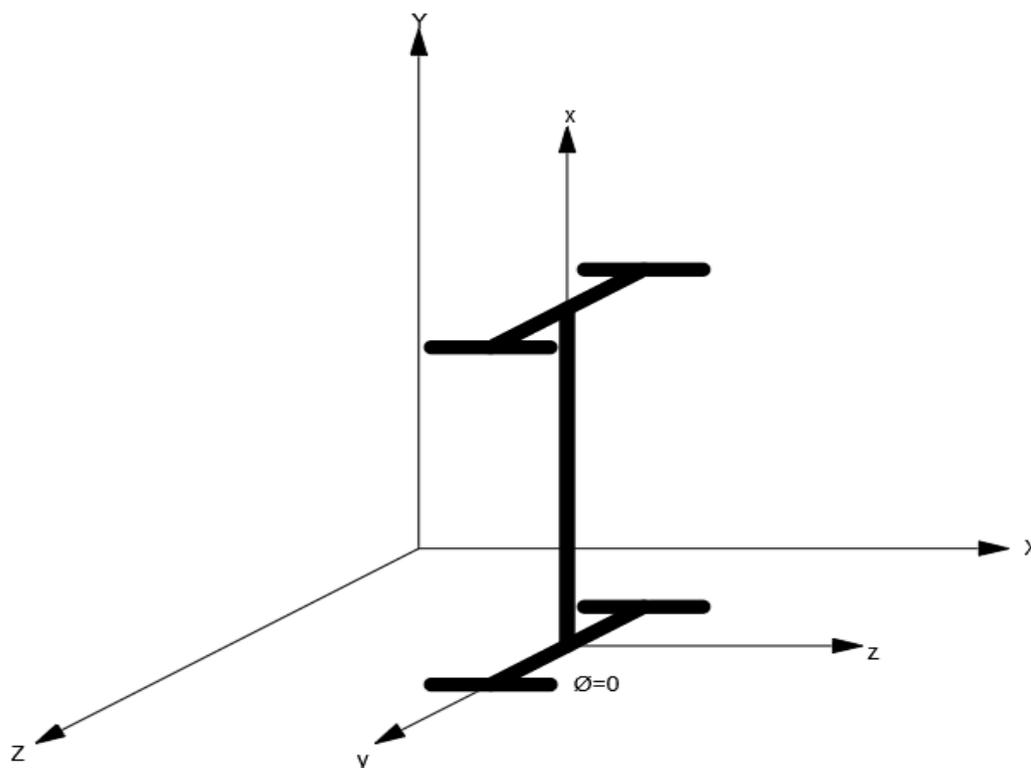
Donde

$$d = \sqrt{c1^2 + c3^2}$$

La matriz de la ecuación 3.49a no está definida cuando el eje de coordenadas local  $x$  es paralelo al eje global  $Y$ , en este caso el valor de  $d = 0$ .

Cuando el eje local  $x$  es paralelo al eje global  $Y$  el eje centroidal del elemento es vertical en este caso el ángulo de rotación  $\varnothing$  está definido como el ángulo en el que el eje local que ha girado alrededor del eje  $x$  desde su posición estándar definida para un elemento vertical, la posición estándar del elemento está dada cuando el eje local  $x$  es paralelo al eje global  $Z$ . (Paz, 1992)

**FIGURA 3. 13** POSICIÓN ESTÁNDAR DE LA SECCIÓN TRANSVERSAL PARA UN ELEMENTO VERTICAL



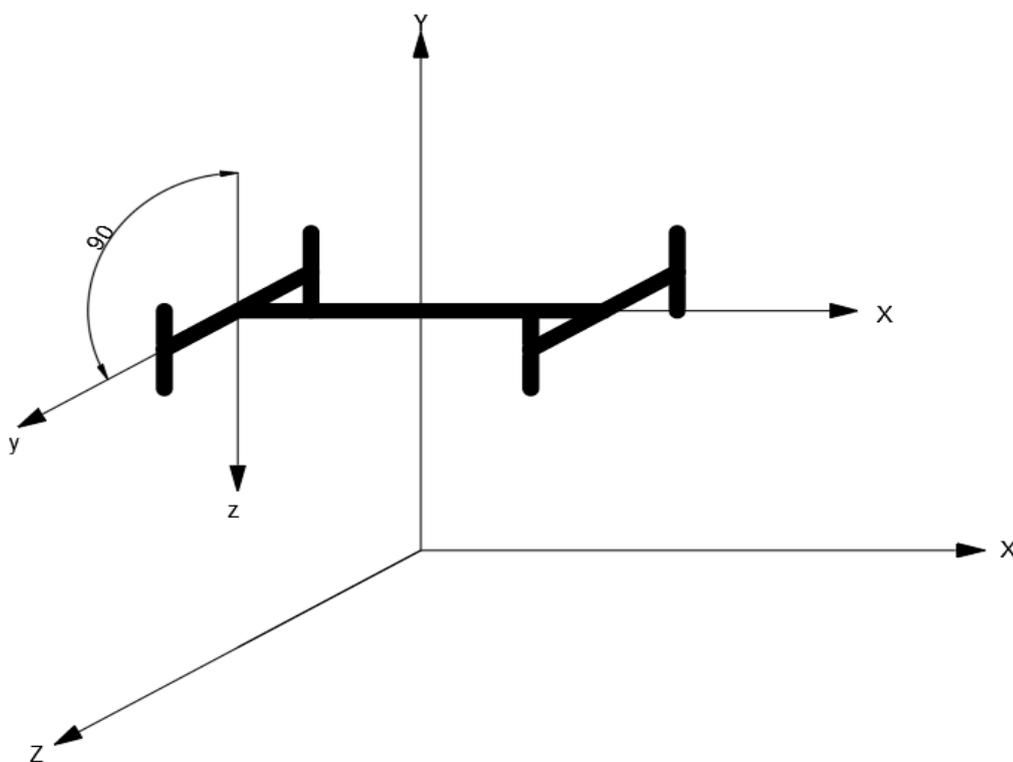
Fuente: Realizado por el autor

El ángulo de rotación  $\phi$  para un elemento vertical es positivo si el eje local  $y$  ha girado en sentido antihorario, por lo tanto la ecuación 3.49 se transforma en la siguiente ecuación.

$$[T1] = \begin{bmatrix} 0 & c & 0 \\ -c \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ c \sin \phi & 0 & \cos \phi \end{bmatrix} \quad (3.49b)$$

El coeficiente  $c$  es igual a 1 cuando el eje local  $x$  y el eje global  $Y$  tienen el mismo sentido y es igual a -1 cuando tienen sentido contrario.

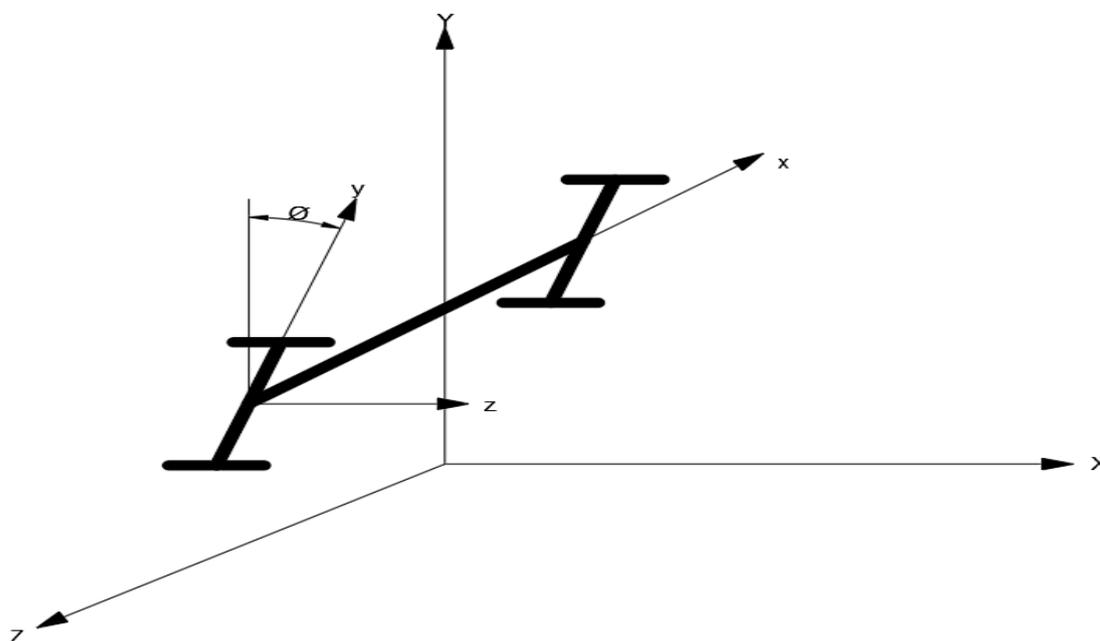
**FIGURA 3. 14** POSICIÓN ESTÁNDAR DE LA SECCIÓN TRANSVERSAL PARA UN ELEMENTO HORIZONTAL



Fuente: Realizado por el autor

Eje local  $x$  es paralelo al eje global  $Z$ , el eje local  $y$ , está rotado 90 con respecto al plano  $Y-x$

**FIGURA 3. 15** POSICIÓN ESTÁNDAR DE LA SECCIÓN TRANSVERSAL PARA UN ELEMENTO TRANSVERSAL



Fuente: Realizado por el autor

El eje local x no es paralelo al eje global X,Y,Z el eje local y está rotado un ángulo  $\phi$  con respecto al plano Y-x

La matriz de transformación para un elemento pórico espacial en función de las ecuaciones 3.49 según sea el caso.

$$[T] = \begin{bmatrix} [T1] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [T1] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [T1] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [T1] \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

La matriz de rigidez en coordenadas globales de un elemento tipo pórico espacial se calcula con la ecuación 3.33, la matriz de rigidez de la estructura se obtiene con la ecuación 3.34

### **3.2.2. MATRIZ CONSISTENTE DE MASAS DE UN ELEMENTO PÓRICO ESPACIAL EN COORDENADAS LOCALES.**

Los coeficientes de la matriz consistente de masas de un elemento tipo pórico espacial se obtienen de la misma forma que se obtuvieron los coeficientes de rigidez.

$$[M] = \frac{mL}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -70 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 0 & 0 & 0 & 22L & 0 & 54 & 0 & 0 & 0 & -13L \\ 0 & 0 & 156 & 0 & -22L & 0 & 0 & 0 & 54 & 0 & 13L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{140I_0}{A} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{70I_0}{A} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -22L & 0 & 4L^2 & 0 & 0 & 0 & -13L & 0 & -3L^2 & 0 \\ 0 & 22L & 0 & 0 & 0 & 4L^2 & 0 & 13L & 0 & 0 & 0 & -3L^2 \\ -70 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 0 & 0 & 0 & 13L & 0 & 156 & 0 & 0 & 0 & -22L \\ 0 & 0 & 54 & 0 & -13L & 0 & 0 & 0 & 156 & 0 & 22L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{70I_0}{A} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{140I_0}{A} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 13L & 0 & -3L^2 & 0 & 0 & 0 & 22L & 0 & 4L^2 & 0 \\ 0 & -13L & 0 & 0 & 0 & -3L^2 & 0 & -22L & 0 & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

### 3.2.3 MATRIZ CONCENTRADA DE MASAS ELEMENTO PÓRTICO ESPACIAL

$$[M] = \frac{mL}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{I_0}{A} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{I_0}{A} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

donde  $m$  es la masa,  $L$  la longitud del elemento,  $I_0$  la inercia polar de la sección y  $A$  es el área de la sección.

La matriz de masas en coordenadas globales ya sea la matriz consistente de masas o la matriz de masas concentradas se obtiene con la ecuación 3.42 y la matriz de masas de la estructura se obtiene con la ecuación 3.43

### 3.3 ANÁLISIS PSEUDO ESPACIAL

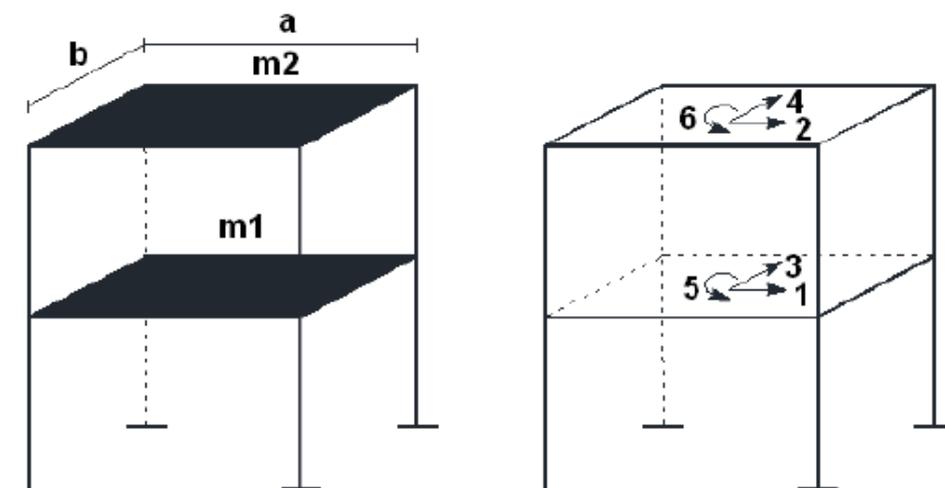
Una estructura espacial puede ser modelada como un ensamble de pórticos planos, con propiedades de rigidez solamente en sus planos respectivos, admitiendo que las rigideces ortogonales a sus planos son despreciables. (Aguiar, 2012)

Para el análisis Pseudo espacial de estructuras se considera que los pisos son infinitamente rígidos por lo cual la deformación axial de los elementos que se encuentren unidos por medio de un diafragma rígido o losa se considera despreciable para cada piso de cada pórtico teniendo así solo un desplazamiento lateral por piso, este modelo es llamado piso rígido y es utilizado únicamente para el análisis ante la componente horizontal del movimiento del suelo. (Aguiar, 2012)

Para este análisis dinámico se consideran tres grados de libertad por cada piso dos traslacionales que son las dos componentes horizontales del movimiento de la base y un momento de torsión en planta, los cuales se concentran generalmente en el centro de gravedad de cada piso.

La idealización del diafragma rígido es válida siempre y cuando la rigidez de las columnas sea mucho menor en comparación con la masa de la losa y las masas adheridas a ella. Esto se cumple generalmente en estructuras aporricadas, sin embargo, en estructuras en las cuales los muros estructurales contribuyan con un porcentaje considerable en la masa de la estructura puede introducir errores considerables.

**FIGURA 3. 16** GRADOS DE LIBERTAD POR PISO DE UN MODELO PISO RIGIDO



Fuente (Aguiar, 2003)

### 3.3.1 MATRIZ DE RIGIDEZ EN COORDENADAS DE PISO

La matriz de rigidez del sistema en coordenadas de piso o en coordenadas de diafragma rígido resulta de la suma de la rigidez lateral de cada pódico.

Para poder generar la matriz de rigidez de la estructura se siguen los siguientes pasos.

1. Se genera la matriz de rigidez de cada pódico en coordenadas globales mediante la ecuación 3.34

Debido a que el diafragma es infinitamente rígido las vigas no pueden tener deformaciones axiales para poder hacer esto es necesario realizar unos cambios en la matriz de transformación dada por la ecuación 3.32.

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

La ecuación 3.53 debe ser empleada únicamente en las vigas, para las columnas se usará la ecuación 3.32.

Para obtener la matriz de rigidez del pódico se utilizará la ecuación 3.34

2. Se condensan los grados de libertad rotacionales de los nudos.

Para esto los grados de libertad de traslación de la matriz de rigidez del pódico  $i$  se ubican en las primeras filas y columnas de la matriz, y en las filas inferiores y columnas del lado derecho los grados de libertad rotacionales y de efectos combinados de rotación y traslación.

$$K = \begin{bmatrix} k11_i & k12_i \\ k21_i & k22_i \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

Donde

$k11_i$  es la sub matriz que contiene los grados de libertad de traslación.

$k12_i, k21_i, k22_i$  son las sub matrices que contienen los grados de libertad rotacionales y de efectos combinados.

La matriz de rigidez lateral para cada pórtico se obtiene con la siguiente ecuación:

$$KL_i = k_{11i} - k_{12i}k_{22i}^{-1}k_{21i} \quad (3.55)$$

3. Se calcula la matriz de transformación de cada piso

Una vez que se obtienen las matrices de rigidez lateral de cada pórtico estas matrices se pasan a coordenadas de piso mediante la siguiente ecuación.

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \phi_i & 0 & \dots & 0 \\ \sin \phi_i & 0 & \dots & 0 \\ r_{1i} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \cos \phi_i \\ 0 & \dots & 0 & \sin \phi_i \\ 0 & \dots & 0 & r_{in} \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

Donde

$\phi_i$  es el ángulo que forma la orientación del pórtico con el eje x

$r_{in}$  es la distancia del pórtico  $i$  al centro de gravedad del piso  $n$

La dimensión de la matriz es de  $3 \times n$  filas y  $n$  columnas donde  $n$  es el número de pisos.

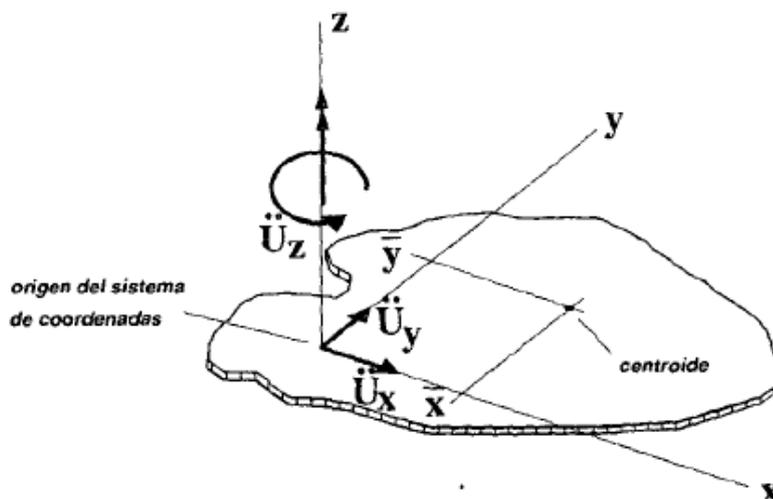
La matriz de rigidez de la estructura en coordenadas de piso se obtiene con la siguiente ecuación:

$$K_E = \sum_{i=1}^n T_i^T K L_i T_i \quad (3.57)$$

### 3.3.2 MATRIZ DE MASA CONCENTRADA PARA UN ANÁLISIS SEUDO ESPACIAL.

Las masas concentradas solo pueden ser aplicadas en el análisis dinámico de cuerpos rígidos sin embargo cuando la rigidez de los cuerpos es grande en comparación con la de otros, se considera que estos cuerpos son infinitamente rígidos, esta consideración simplifica la solución del problema dinámico, en un cuerpo rígido no existe la posibilidad de ninguna deformación interna, lo cual implica que la masa se pueda concentrar en el centro de masas del cuerpo.

FIGURA 3. 17 ACELERACIONES IMPUESTAS AL CUERPO RÍGIDO



Fuente (García, 1998)

Cuando al cuerpo rígido se le aplica aceleraciones en la base y una aceleración rotacional con respecto al eje perpendicular a la base, sumando todos los efectos que producen estas aceleraciones en cada uno de los elementos diferenciales de masa que conforman el cuerpo y tomando en cuenta que en un sólido rígido las fuerzas inerciales no producen deformaciones internas se pueden plantear las siguientes ecuaciones de equilibrio. Las fuerzas inerciales resultantes que producen las aceleraciones con respecto al origen de coordenadas tienen los siguientes valores:

$$F_x = M\ddot{u}_x - \bar{M}y\ddot{u}_z \quad (3.58)$$

$$F_y = M\ddot{u}_y - \bar{M}x\ddot{u}_z \quad (3.59)$$

$$F_z = -M\bar{y}\ddot{u}_x + M\bar{x}\ddot{u}_y + \left(\frac{M}{A}I_o + M(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)\right)\ddot{u}_z \quad (3.60)$$

Donde  $M$  es la masa total del cuerpo,  $A$  su área  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  son las distancias al centroide del cuerpo con respecto al origen de coordenadas y  $I_o$  es el momento polar de inercias con respecto al centroide del cuerpo, por lo tanto la matriz de masas expresada en forma matricial es la siguiente:

$$[M] = \begin{bmatrix} M & 0 & -\bar{y}M \\ 0 & M & \bar{x}M \\ -\bar{y}M & \bar{x}M & \left(\frac{M}{A}I_o + M(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)\right) \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

Cuando el centroide del cuerpo coincide con el sistema de coordenadas la ecuación 3.61 se puede escribir como:

$$[M] = \begin{bmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{M}{A} I_o\right) \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

## **CAPÍTULO 4**

### **DESCRIPCIÓN DE LOS PROGRAMAS**

En este capítulo se detalla el código principal de los programas que se han desarrollado, los programas desarrollados contienen las siguientes secciones como: Ingreso de datos, Ensamble de la matriz de rigidez del sistema, Ensamble de la matriz de masas del sistema, análisis modal espectral mediante el cálculo de autovalores y análisis modal espectral mediante el uso de vectores Ritz. Además, se explicarán las variables creadas y las funciones generadas dentro de cada uno de los programas

#### **4.1 LENGUAJE DE PROGRAMACIÓN**

Los programas se desarrollaron en el lenguaje de programación Matlab, Matlab es un programa que está orientado al uso de vectores y matrices, además de poseer una gran cantidad de funciones de cálculo y permite incorporar funciones realizadas por el usuario, esto permite que se pueda realizar el programa de una manera más rápida que al usarse otros lenguajes de programación.

#### **4.2 DESCRIPCIÓN GENERAL DEL PROGRAMA PÓRTICOS2D**

El programa Pórticos 2D permite realizar un análisis modal espectral mediante el uso de los modos naturales de vibración o mediante el uso de vectores Ritz, para poder realizar este análisis el programa Pórticos 2D cuente con varias sub rutinas las cuales ayudan a agilizar los cálculos.

Los resultados que se obtiene con el programa Porticos2D son: periodos de vibración y frecuencias, masa modal efectiva, Desplazamientos modales máximos combinados de cada nodo, fuerzas modales máximas combinadas tales como fuerzas axiales, cortantes y momentos de cada elemento que conforman el pórtico, cortante basal dinámico máximo combinado y fuerzas modales máximas combinadas en la base, el número de modos necesarios para alcanzar una participación modal mayor o igual al 90%.

El programa necesita de varios datos de entrada para su funcionamiento, posteriormente se ensamblan las matrices de rigidez y la matriz consistente de masas del sistema en coordenadas globales, luego continúa con el cálculo de las características dinámicas de la estructura las cuales son periodos, frecuencias y

modos de vibración, después se realiza el análisis dinámico modal espectral mediante los métodos de autovalores o mediante el uso de vectores Ritz.

#### **4.2.1 DATOS DE ENTRADA**

Los datos de entrada que necesita el programa Porticos 2D son los siguientes.

- Numeración de elementos y de Nodos  
Cada elemento y nodo que conformen el pórtico deben ser numerados los elementos y nodos que conforman el pórtico pueden numerarse como desee el usuario.
- Conectividad entre nodos  
Se deben ingresar la conectividad entre nodos que tiene cada elemento.
- Coordenadas de los nodos.  
Se deberán ingresar las coordenadas x-y de cada nodo.
- Propiedades geométricas.  
Las propiedades geométricas como el área, momento de inercia de cada elemento se deben ingresar.
- Propiedades del Material.  
Las propiedades del material que necesita el programa son el módulo de elasticidad y el peso específico.
- Nodos Restringidos.  
Se debe ingresar los nodos que tengan restricción de movimiento en alguno de sus grados de libertad.
- Cargas externas y cargas en los tramos.  
Las cargas externas deberán ingresarse en el mismo orden en el que se encuentran numerados los grados de libertad para cada nodo si existen cargas repartidas en las vigas y columnas solo se deberá ingresar la magnitud de la carga que le corresponda a cada elemento, ya que el programa Pórticos 2D cuenta con una subrutina orientada al cálculo de las acciones de empotramiento perfecto para cargas repartidas.
- Número de divisiones

Una vez que se ha realizado la numeración de elementos y se ha establecido la conectividad entre nodos además de que se ha ingresado las coordenadas de cada nodo si el usuario desea puede dividir cada elemento que conforma la estructura en elementos más pequeños para obtener resultados más precisos.

Esta división se la realiza mediante un parámetro que indica el número de divisiones en que se dividirá cada elemento.

- Parámetros para generar el espectro de desplazamientos en base a la NEC-15

Factor de Zonificación sísmica ( $z$ ).

Tipo de suelo ( $\Psi$ ).

Región de emplazamiento de la estructura ( $R_e$ )

Coefficiente de importancia de la estructura ( $I$ ).

Coefficiente de reducción y resistencia sísmica ( $S$ ).

Coefficientes de regularidad en planta y elevación ( $\alpha$ ).

- Dirección de la aceleración del suelo

Se debe ingresar un parámetro para identificar la dirección de aceleración del suelo para obtener el vector de compatibilidad de aceleraciones ya sea para los grados de libertad traslacionales o rotacionales.

- Tipo de combinación Modal

Se debe ingresar un parámetro para identificar el tipo de combinación modal que se desea realizar, el tipo de combinación modal puede ser la combinación cuadrática completa (CQC) o la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados (SRSS).

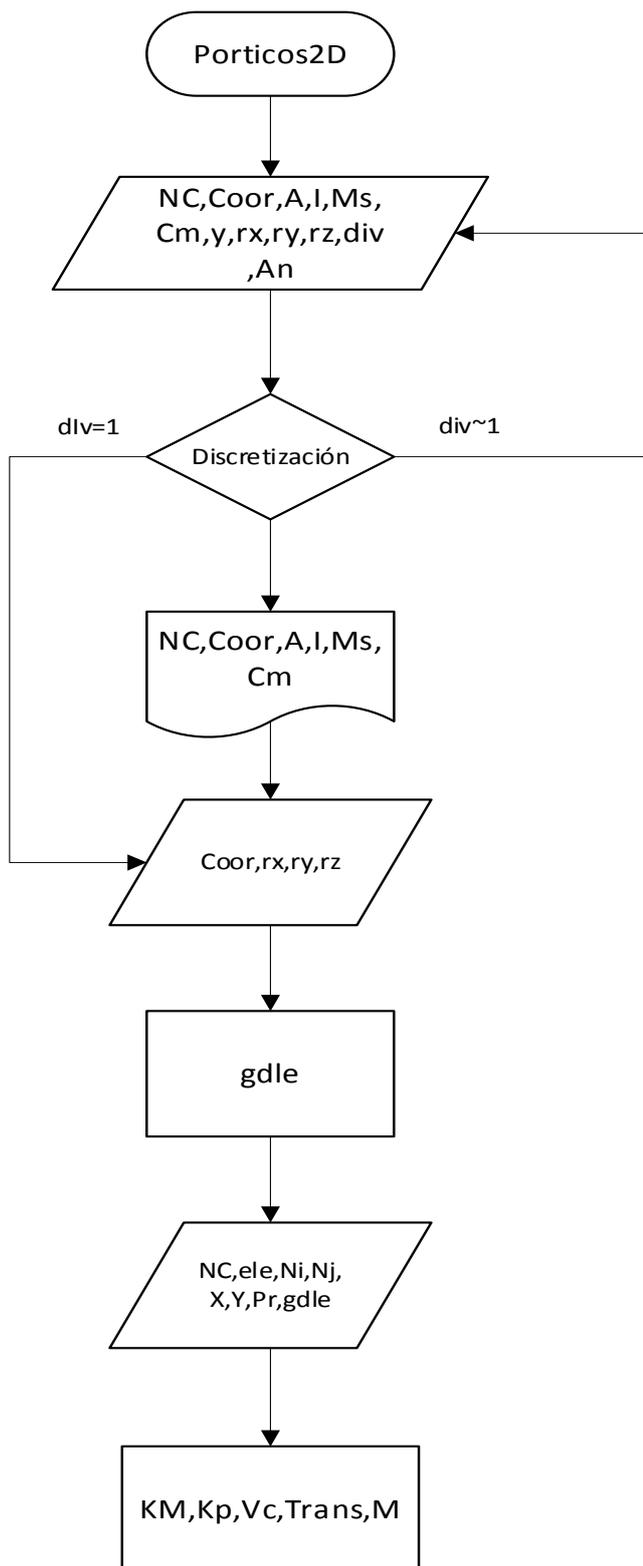
- Número de Modos a emplearse en la combinación modal

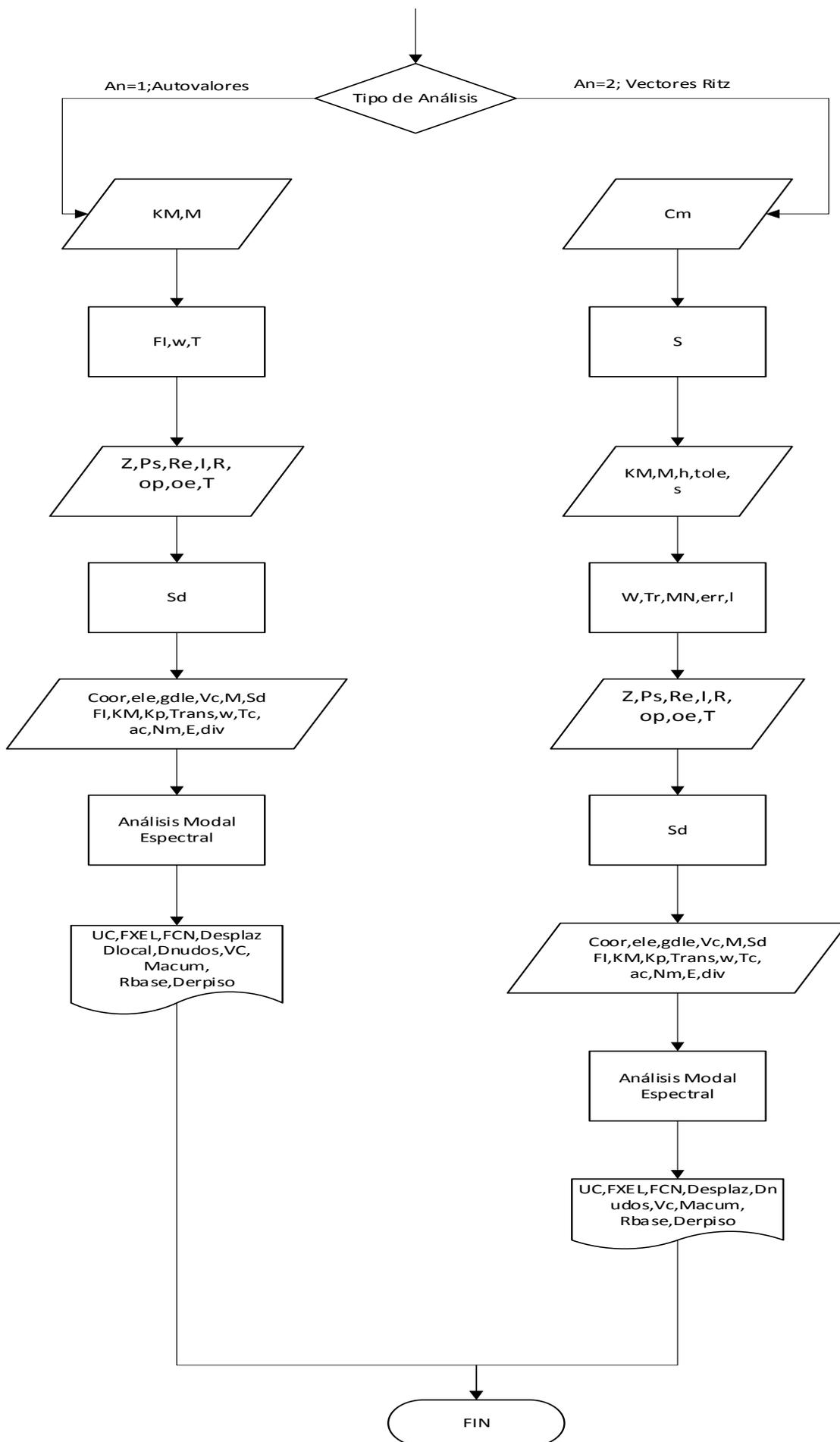
Se debe ingresar un parámetro que indique el número de modos a emplearse para la combinación modal, el programa utiliza la totalidad de los modos calculados o el número de modos necesarios para alcanzar un porcentaje de masa modal efectiva mayor o igual al 90%.

- Tolerancia

Se deberá ingresar la tolerancia de error para generar el número necesarios de vectores Ritz.

En el siguiente diagrama de flujo representa los pasos que sigue el programa Porticos2D.





## Donde

**NC:** Es la matriz donde se ingresa la conectividad entre nudos de cada elemento.

**Coor:** Es la matriz donde se ingresa las coordenadas de cada nodo.

**E:** Es el vector que contiene el módulo de elasticidad de cada elemento.

**A:** Es el vector que contiene el área de cada elemento.

**I:** Es el vector que contiene el momento de inercia de cada elemento.

**Ms:** Es el vector que contiene la masa que transfiere la losa a las vigas.

**Cm:** Es el vector de que contiene la carga que actúa sobre cada elemento.

**rx:** Es el vector que contiene los grados de libertad que tienen restricción de movimiento de traslación en dirección x.

**ry:** Es el vector que contiene los grados de libertad que tienen restricción de movimiento de traslación en dirección y.

**rz:** Es el vector que contiene los grados de libertad que tienen restricción de movimiento de rotación con respecto a un eje perpendicular al plano x-y.

**y:** Es el vector que contiene el peso específico de cada elemento dividido para la gravedad.

**div:** Es el número de divisiones en la que se dividirá cada elemento que conforma el pórtico.

**An:** La variable An indica si el análisis modal espectral se lo realiza mediante el uso de los modos naturales de vibración o mediante los modos Ritz.

**Discretización:** Esta función permite dividir cada elemento del pórtico en el número de partes que se indicó mediante la variable div, los datos de salida son las matrices NC, Coor y los vectores E, A, I, Ms la numeración de nodos y las coordenadas de los mismos no se modifica mediante la función Discretización debido a esto la numeración de nodos restringidos tampoco se ve afectada.

**Ni:** Es el vector que almacena el nodo inicial de cada elemento.

**Nj:** Es el vector que almacena el nodo final de cada elemento.

**X:** Es el vector que almacena las coordenadas en el eje x de cada nodo.

**Y:** Es el vector que almacena las coordenadas en el eje y de cada nodo.

**Pr:** Es la matriz que almacena las propiedades geométricas y de material de cada elemento del pórtico.

**ele:** Es el número de elementos que conforman el pórtico.

**gdle:** Esta función obtiene los grados de libertad de cada nodo almacenándolos en una matriz, los grados de libertad de cada nodo se generan de manera automática.

**KM:** Es la matriz de rigidez de la estructura en coordenadas globales.

**Kp:** Es el hiper matriz que contiene la matriz de rigidez de cada elemento que conforma la estructura en coordenadas globales.

**Vc:** Es la matriz que contiene los grados de libertad efectivos de cada elemento.

**Trans:** Es la hiper matriz que contiene la matriz de transformación de cada elemento.

**M:** Es la matriz consistente de masa de la estructura en coordenadas globales.

**FI:** Es la matriz que contiene los modos naturales de vibración.

**T:** Es el vector que contiene los periodos de vibración correspondientes a cada grado de libertad.

**w:** Es el vector que contiene los autovalores o frecuencias correspondientes a cada grado de libertad.

**Ps:** Es el tipo de suelo en el cual se encuentra la estructura varia del 1 al 6

**Re:** Es la región geográfica del Ecuador en la cual está ubicada la estructura varia del 1 al 3.

**R:** Es el coeficiente de reducción sísmica.

**I:** Es el coeficiente de importancia de la estructura.

**op y oe:** Son los coeficientes de irregularidad en planta y elevación de la estructura.

**Sd:** Es el vector que contiene los valores del espectro de respuesta de desplazamientos correspondientes a un periodo T.

**ac:** Es la variable que indica el sentido de la aceleración del terreno tomando valores del 1 a 2 correspondiente a las direcciones de los ejes x o y para los grados de libertad traslacionales y 3 para los grados de libertad rotacionales.

**Tc:** Es la variable que indica el tipo de combinación modal que se realizará, Tc es igual a uno para la combinación modal CQC y Tc es igual a 2 para la combinación modal SRSS.

**Nm:** Es la variable que indica el número de modos a emplearse para la combinación modal, Nm es igual a 1 si el número de modos es igual al número de modos

necesarios para alcanzar un porcentaje de masa modal efectiva mayor o igual al 90% y  $N_m$  es igual a dos para combinar todos los modos calculados.

**E:** Es el coeficiente de amortiguamiento de los modos necesario si utiliza la combinación cuadrática completa.

**h:** Es el contador que permite generar el número suficiente de vectores Ritz,  $h$  es igual a uno para iniciar la generación de vectores Ritz.

**tole:** Tole es la tolerancia de error para generar el número necesarios de vectores Ritz.

**s:** Es el vector que almacena las acciones de empotramiento perfecto debido a las cargas distribuidas que actúan en cada elemento.

**Wn:** Es la matriz que contienen los vectores Ritz generados.

**Tr:** Son los periodos de vibración correspondientes a cada vector Ritz generado.

**W:** Es el vector que contiene los autovalores o frecuencias correspondientes a cada grado de libertad.

**MN:** Es la matriz que contiene los modos Ritz normalizados con respecto a la masa.

**UC:** Es el vector que contiene los desplazamientos modales máximos combinados.

**FEXL:** Es la matriz que contiene las fuerzas modales máximas combinadas que actúan en cada elemento en coordenadas globales.

**FCN:** Es la matriz que contiene las fuerzas modales máximas combinadas que actúan en cada elemento en coordenadas locales.

**Desplaz:** Es la matriz que contiene los máximos desplazamientos modales combinados de cada elemento en coordenadas globales.

**Dlocal:** Es la matriz que contiene los máximos desplazamientos modales combinados de cada elemento en coordenadas locales.

**VC:** Es el Cortante basal dinámico máximo combinado.

**Mcum:** Es el vector que contiene la suma de la masa modal efectiva de cada modo que alcancen una masa mayor o igual al 90%.

**Rbase:** Es el vector que almacena las reacciones modales máximas combinadas en la base de la estructura.

**Derpiso:** Es el vector que almacena las derivas de piso modales máximas combinadas.

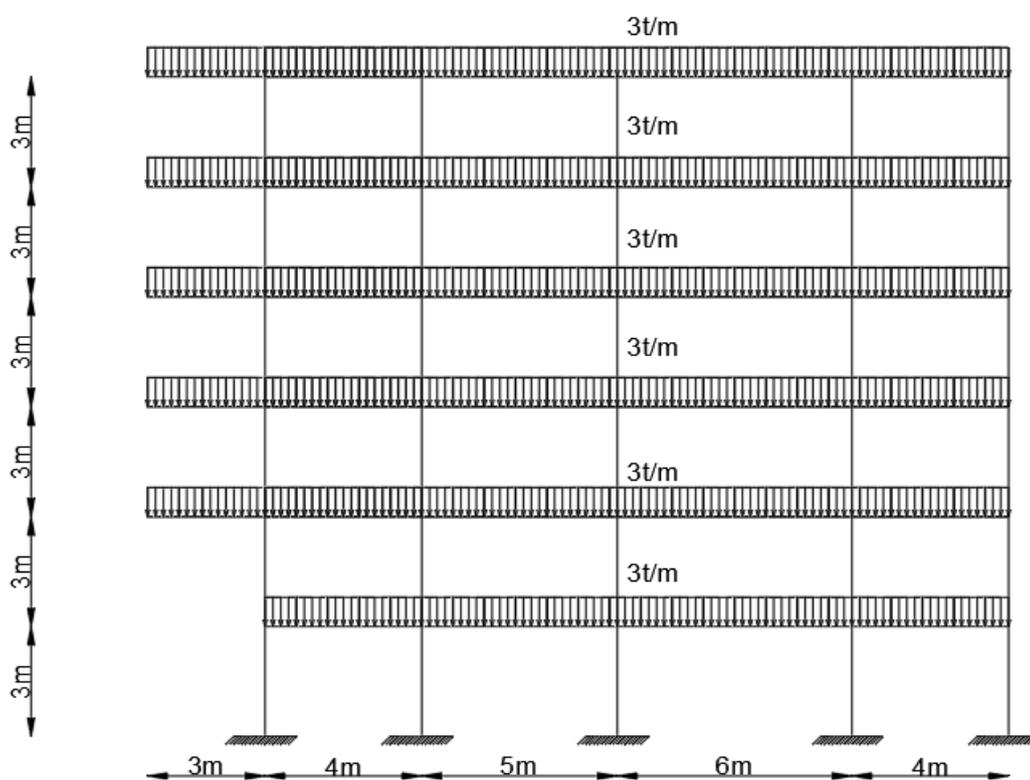
**Dnudos:** Es la matriz que almacena las deformaciones modales máximas combinadas de cada nodo.

#### 4.2.2 CÓDIGO GENERAL DEL PROGRAMA PORTICOS2D

Los datos de entrada del programa principal Porticos2D son para el siguiente pórtico.

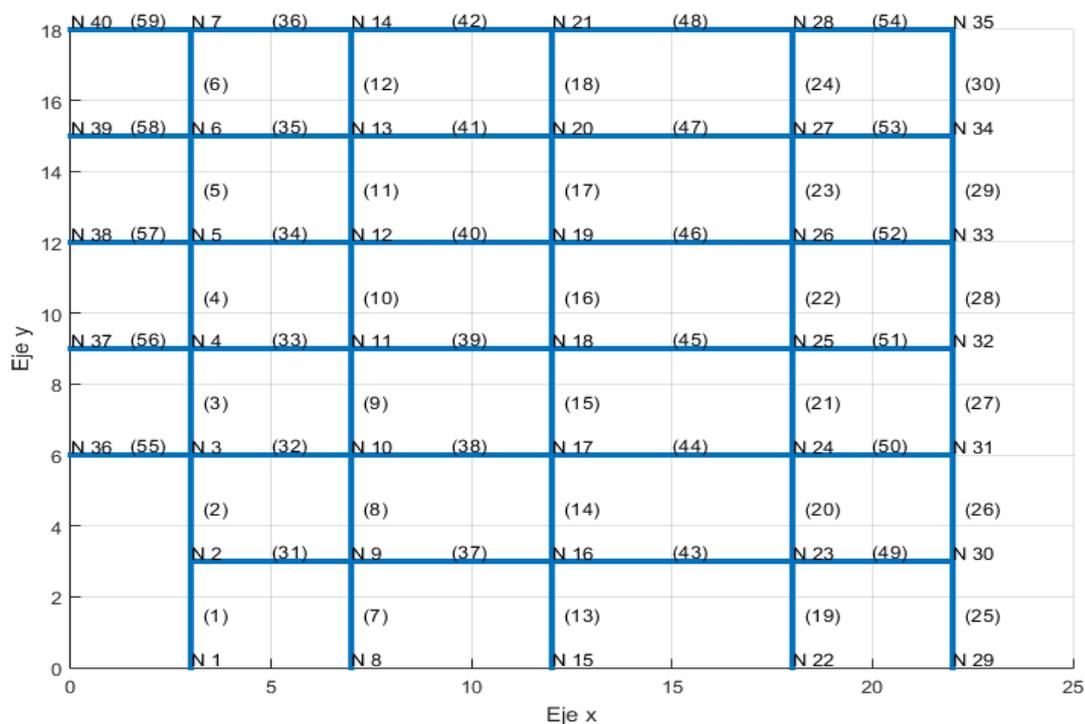
Todos los elementos son de sección rectangular cuyas dimensiones son de 0.3x0.4 un módulo de elasticidad de  $2.1 \times 10^6 \text{ t/m}^2$  y el peso específico del material es de  $2.4 \text{ t/m}^3$ .

**FIGURA 4.1** REPRESENTACIÓN DEL PÓRTICO



Fuente: Realizado por el autor

**FUGURA 4.2** NUMERACIÓN DE ELEMENTOS Y NODOS DEL PÓRTICO



Fuente: Realizado por el autor

### Programa Principal

```
%% Datos de Entrada
```

```
%%NC=Número de elementos columna 1 columna 2 Nudo inicial Ni,  
columna 3 nodo final NJ
```

```
NC=[(1:6)' (1:6)' (2:7)';(7:12)' (8:13)' (9:14)';(13:18)'  
(15:20)'(16:21)';(19:24)' (22:27)' (23:28)';(25:30)'  
(29:34)' (30:35)';(31:36)'(2:7)' (9:14)'(37:42)' (9:14)'  
(16:21)';(43:48)' (16:21)'(23:28)';(49:54)' (23:28)'  
(30:35)';(55:59)' (36:40)' (3:7)'];
```

```
%%Coor Nudo X Y
```

```
Coor=[(1:7)' 3*ones(7,1) (0:3:18)';(8:14)' 7*ones(7,1)  
(0:3:18)';(15:21)'12*ones(7,1) (0:3:18)';(22:28)'  
18*ones(7,1) (0:3:18)';(29:35)'22*ones(7,1)  
(0:3:18)';(36:40)' zeros(5,1) (6:3:18)'];
```

```
%%Vector de nudos inicial y final y vectores de coordenadas en  
x-y
```

```

Ni=NC(:,2); Nj=NC(:,3);X=Coor(:,2);Y=Coor(:,3);
%Restricciones
%rx restricción de los grados de libertad traslacionales en
dirección x
%ry restricción de los grados de libertad traslacionales en
dirección y
%rz restricción de los grados de libertad rotacionales rz
rx=[1 8 15 22 29];ry=[1 8 15 22 29];rz=[1 8 15 22 29];
%Propiedades geométricas y del material
ele=size(NC,1);
Es=2.1*10^6*ones(ele,1);
a=0.3*ones(ele,1);b=0.4*ones(ele,1);
A=a.*b; I=a.*b.^3/12;
%Masa por cargas en las vigas Ms t-m
Ms=zeros(ele,1);
Ms(31:ele)=3;
%% Tipo de Análisis
%An=1 para análisis mediante autovalores
%An=2 para análisis mediante Vectores Ritz
An=2;
%% Datos NEC-15 para generar el espectro de desplazamientos
%Factor de zonificación sísmica
z=2;
%Ps=Ingrese el tipo de suelo A B C D E F
%A=1 ;B=2 c=3 d=4 E=5 f=6
%Re=input=Ingrese la región Sierra=1 Costa=2 Oriente=3;
Ps=1; Re=1;Im=1;R=7;op=1;oe=1;
%% Datos dirección de aceleración del suelo
%ac puede tomar valores de 1 a 3
%1 para dirección x,2 para dirección y,3 para giros
ac=1;

```

```

%% Datos tipo de combinación Modal y Numero de modos a
emplearse

%Tc es el tipo de combinación modal que se desea realizar
%Tc=1 para combinación Modal CQC
%Tc=2 para combinación Modal SRSS
Tc=1;

E=0.05;%Amortiguamiento

%Nm es el número de modos que se desean combinar
%Nm=1 es el número de modos necesarios para alcanzar un 90%
de participación modal
%Nm=2 para combinar todos los modos
Nm=2;

%% Discretización de elementos
%div es el número de divisiones que se realizaran en cada
elemento
div=1;
if div~=1
[NC,Coor,A,I,Ms,Es]=Discretizacion(NC,Coor,div,A,I,Es,Ms);
    Ni=NC(:,2);
Nj=NC(:,3);X=Coor(:,2);Y=Coor(:,3);ele=size(NC,1);
end

%Cargas repartidas en elementos t/m
Cm=Ms;
Ms=Ms/9.80665; %T/m^3
%Peso especifico
y=2.4028/9.80665; %T/m^3

%Matriz de propiedades geométricas y del material Pr
%Si se incluye la masa de cargas en las vigas ingresar Pr de
la siguiente
%manera
%Pr=[ Es.*A Es.*I (y.*A)+Ms];

```

```

Pr=[ Es.*A Es.*I y.*A];
%Esquema grafico del Pórtico
Diagrama_Portico(X,Y,Ni,Nj,Coor,ele)
% Generación de los grados de libertad efectivos de cada
nodo.
sub rutina gdle genera los grados de libertad efectivos de
cada nodo
[gdle]=grados_de_libertad_Portico_2D(Coor,rx,ry,rz);
% Matrices de Rigidez y de Masas del Pórtico
[KM,Kp,Vc,Trans,M]=Matriz_de_Rigidez_Y_Masas_Porticos_2D(NC,e
le,Ni,Nj,X,Y,Pr,gdle);
% Calculo de los modos, frecuencias y modos de Vibración
if An==1
[FI,w,T]=Calculo_propiedades_dinamicas(KM,M);
TA=T;FA=FI;Wa=w;
% Espectro de desplazamientos
[Sd]=Espectro_de_desplazamiento(z,Ps,Re,Im,R,op,oe,T);
% Análisis Modal espectral Autovalores
[UC,FXEL,FCN,Desplaz,Dlocal,Dnudos,VC,Macum,Rbase,Derpiso]=An
alisis_Modal_Espectral(Coor,ele,gdle,Vc,M,Sd,FI,KM,Kp,Trans,w
,E,Tc,Nm,ac,div);
[Derx]=Calculo_Derivas(Ni,Nj,Y,ele,Desplaz);
figure(2)
Diagrama_Deformaciones(gdle,Ni,Nj,X,Y,Coor,ele,UC);
% Análisis modal espectral Modos Ritz
elseif An==2;
%Vectores Ritz
[s]=Vector_de_Cargas(Cm,Trans,Vc,gdle,ele,Ni,Nj,X,Y);
% Generación de Vectores Ritz
%h es el contador que permite generar el número suficiente de
vectores Ritz

```

```
h=1;
%tole es la tolerancia de error para generar el número
necesarios de vectores Ritz.
tole=0.00000001;
[W,Tr,MN,err,l]=Vectores_Ritz(KM,M,s,h,tole);
FI=MN;T=Tr;w=W;
%% Espectro de desplazamientos
[Sd]=Espectro_de_desplazamiento(z,Ps,Re,Im,R,op,oe,T);
%% Análisis Modal espectral Vectores Ritz
[UC,FXEL,FCN,Desplaz,Dlocal,Dnudos,VC,Macum,Rbase,Derpiso]=An
alisis_Modal_Espectral(Coor,ele,gdle,Vc,M,Sd,FI,KM,Kp,Trans,w
,E,Tc,Nm,ac,div);
[Derx]=Calculo_Derivas(Ni,Nj,Y,ele,Desplaz);
figure(3)
Diagrama_Deformaciones(gdle,Ni,Nj,X,Y,Coor,ele,UC);
end
```

### 4.3 DESCRIPCIÓN GENERAL DEL PROGRAMA PÓRTICOS3D

El programa Porticos3D ocupa las mismas variables y subrutinas que el programa Porticos2D aunque presenta algunas diferencias como el permitir al usuario el elegir usar la matriz consistente de masas o la matriz concentradas de masas para realizar el análisis, también permite elegir el número de vectores Ritz que se desean generar este cambio se debe porque al ser la matriz de rigidez y de masas de una dimensión mayor que la usada para un pórtico en el plano el tiempo de cómputo aumenta y al usar la subrutina para la generación de vectores Ritz del programa Porticos2D estos se calculan varias veces hasta que el error calculado sea menor a la tolerancia, esto produce un aumento significativo en el tiempo de cómputo y más para modelos que cuentan con un gran número de grados de libertad, por último se implementó una función para calcular el centroide de cada piso en base a los nodos que conforman dicho piso esto se lo hace para calcular la torsión en planta de cada piso con respecto al centroide de cada piso.

#### 4.3.1 DATOS DE ENTRADA

Los datos de entrada que necesita el programa Porticos3D son los siguientes.

- Numeración de elementos y de Nodos  
Cada elemento y nodo que conformen el pórtico deben ser numerados los elementos y nodos que conforman el pórtico pueden numerarse como desee el usuario.
- Conectividad entre nodos  
Se deben ingresar la conectividad entre nodos que tiene cada elemento.
- Coordenadas de los nodos.  
Se deberán ingresar las coordenadas x-y-z de cada nodo.
- Propiedades geométricas.  
Las propiedades geométricas como el área, momentos de inercia, constante de torsión y módulo de corte de cada elemento.
- gamma.  
Para elementos que no sean verticales, el ángulo gamma se define como la

Rotación del elemento alrededor de su eje local x, para elementos verticales, se define como el ángulo entre el eje global y el eje local Z, medido hacia el eje x global.

- Propiedades del Material.

Las propiedades del material que necesita el programa son el módulo de elasticidad y el peso específico.

- Nodos Restringidos.

Se debe ingresar los nodos que tengan restricción de movimiento en alguno de sus grados de libertad.

- Número de divisiones

Una vez que se ha realizado la numeración de elementos y se ha establecido la conectividad entre nodos además de que se ha ingresado las coordenadas de cada nodo si el usuario desea puede dividir cada elemento que conforma la estructura en elementos más pequeños para obtener resultados más precisos.

Esta división se la realiza mediante un parámetro que indica el número de divisiones en que se dividirá cada elemento.

- Nodos que conforman cada piso

Se debe ingresar los nodos que conforman cada piso, si la planta es la misma para todos los pisos solo se ingresa una vez esta información.

- Cargas externas y cargas en los tramos.

Las cargas externas que se toman en cuenta en este análisis son las cargas que se transfieren de la losa a las vigas solo los elementos viga deben contar con este dato, el tipo de carga es una carga repartida expresada en (T/m).

- Parámetros para generar el espectro de desplazamientos en base a la NEC-15

Factor de Zonificación sísmica (z).

Tipo de suelo (Psi).

Región de emplazamiento de la estructura (Re)

Coeficiente de importancia de la estructura (I).

Coeficiente de reducción y resistencia sísmica (S).

Coeficientes de regularidad en planta y elevación (op,oe).

- Dirección de aceleración del suelo

Se debe ingresar un parámetro para identificar la dirección de aceleración del suelo para obtener el vector de compatibilidad de aceleraciones ya sea para los grados de libertad traslacionales o rotacionales.

- Tipo de combinación Modal

Se debe ingresar un parámetro para identificar el tipo de combinación modal que se desea realizar, el tipo de combinación modal puede ser la combinación cuadrática completa (CQC) o la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados (SRSS).

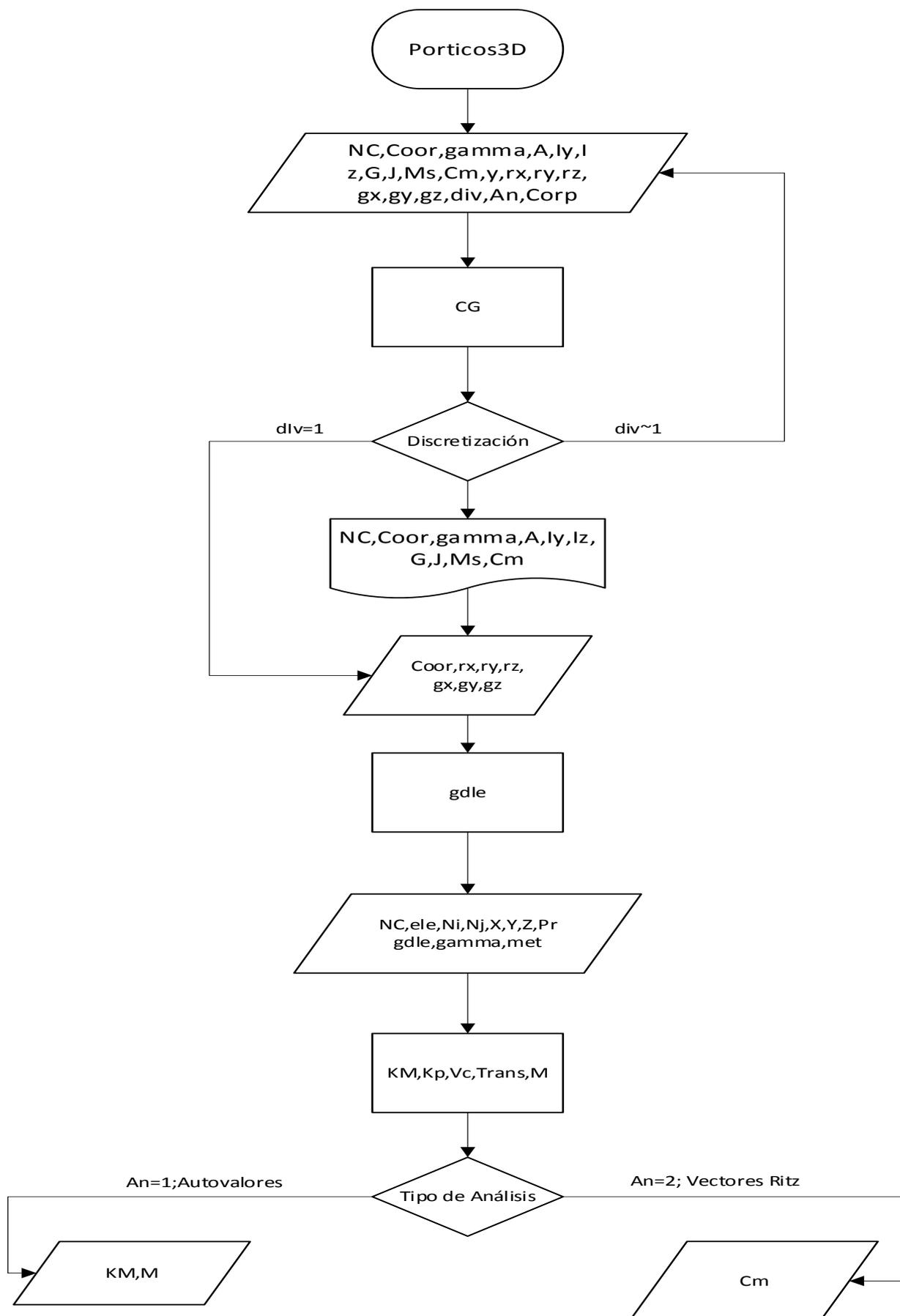
- Número de Modos a emplearse en la combinación modal

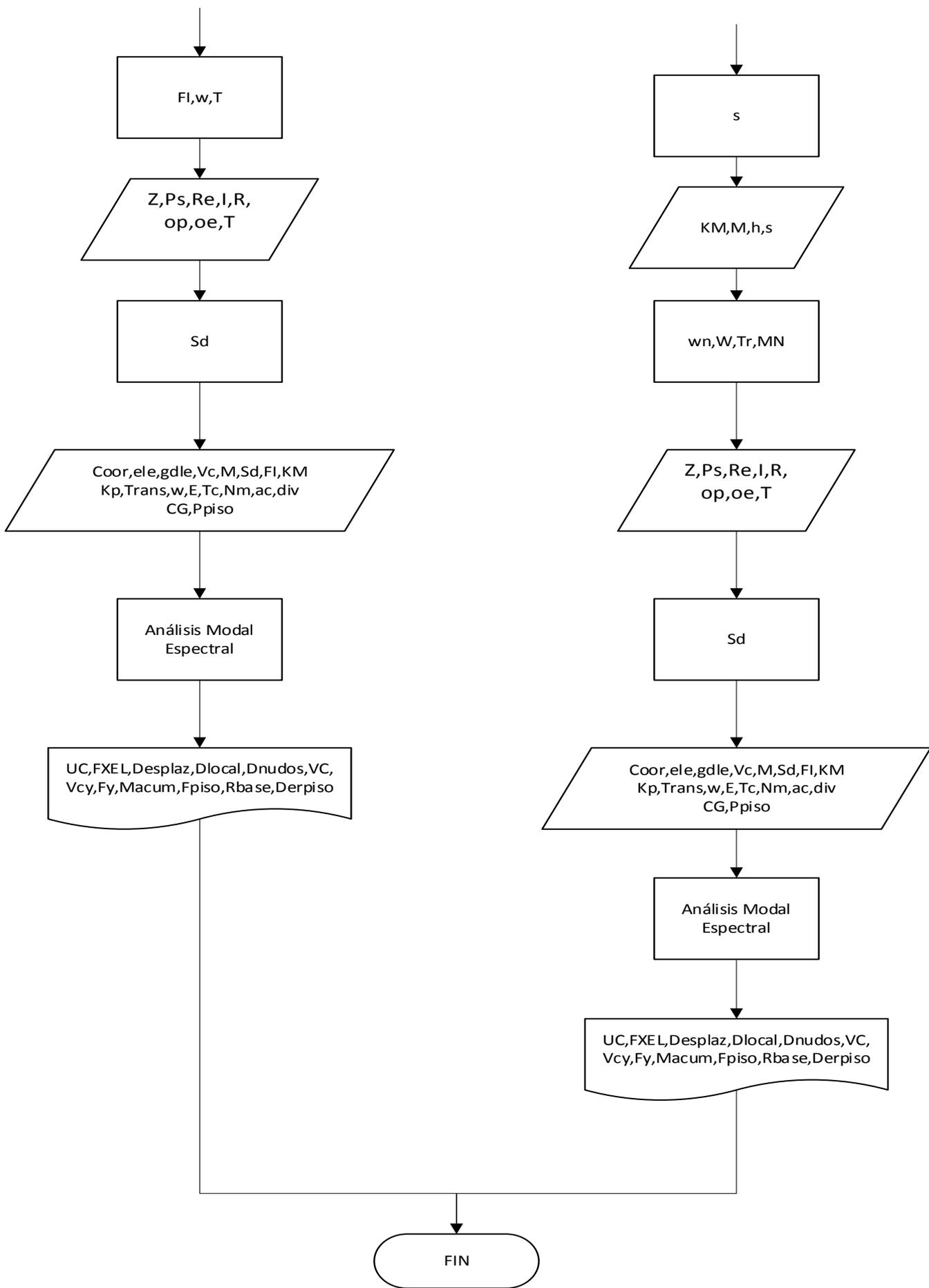
Se debe ingresar un parámetro que indique el número de modos a emplearse para la combinación modal, el programa utiliza la totalidad de los modos calculados o el número de modos necesarios para alcanzar un porcentaje de masa modal efectiva mayor o igual al 90%.

- Número de vectores Ritz que se desea generar.

Se deberá ingresar el número de vectores Ritz que se desea calcular.

En el siguiente diagrama de flujo representa los pasos que sigue el programa Porticos3D.





## Donde

**NC:** Es la matriz donde se ingresa la conectividad entre nudos de cada elemento.

**Coor:** Es la matriz donde se ingresa las coordenadas de cada nodo.

**gamma:** Es el vector que almacena el ángulo de rotación del elemento con respecto a su eje global y local según la orientación del elemento como ya se mencionó.

**Es:** Es el vector que contiene el módulo de elasticidad de cada elemento.

**A:** Es el vector que contiene el área de cada elemento.

**Iy, Iz:** Son los vectores que contienen los momentos de inercia de cada elemento con respecto a sus ejes principales.

**G:** Es el módulo de corte de cada elemento.

**J:** Es el vector que contiene la constante de torsión de cada elemento.

**Ms:** Es el vector de que contiene la masa que transfiere la losa a las vigas.

**Cm:** Es el vector de que contiene la carga que actúa sobre cada elemento (T/m).

**y:** Es el vector que contiene el peso específico de cada elemento.

**rx:** Es el vector que contiene los grados de libertad que tienen restricción de movimiento de traslación en dirección x.

**ry:** Es el vector que contiene los grados de libertad que tienen restricción de movimiento de traslación en dirección y.

**rz:** Es el vector que contiene los grados de libertad que tienen restricción de movimiento de traslación en dirección z.

**gx:** Es el vector que contiene los grados de libertad que tienen restricción de movimiento de rotación con respecto a un eje perpendicular al plano x-y.

**gy:** Es el vector que contiene los grados de libertad que tienen restricción de movimiento de rotación con respecto a un eje perpendicular al plano x-z.

**gz:** Es el vector que contiene los grados de libertad que tienen restricción de movimiento de rotación con respecto a un eje perpendicular al plano z-y.

**div:** Es el número de divisiones en la que se dividirá cada elemento que conforma el pórtico.

**An:** La variable An indica si el análisis modal espectral se lo realiza mediante el uso de los modos naturales de vibración o mediante los modos Ritz.

**Corp:** Es la celda que almacena los nodos que conforman cada piso de la estructura.

**CG:** Es la variable que almacena las coordenadas del centroide de cada planta del edificio.

**Discretización:** Esta función permite dividir cada elemento del pórtico en el número de partes que se indicó mediante la variable  $div$ , los datos de salida son las matrices  $NC$ ,  $Coor$  y los vectores  $E$ ,  $A$ ,  $I_y$ ,  $I_z$ ,  $G$ ,  $J$ ,  $\gamma$ ,  $M_s$  y  $C_m$ , la numeración de nodos y las coordenadas de los mismos no se modifica mediante la función Discretización debido a esto la numeración de nodos restringidos tampoco se ve afectada.

**gdle:** Esta función obtiene los grados de libertad de cada nodo almacenándolos en una matriz, los grados de libertad de cada nodo se generan de manera automática.

**KM:** Es la matriz de rigidez de la estructura en coordenadas globales.

**Kp:** Es la hiper matriz que almacena la matriz de rigidez de cada elemento que conforma la estructura en coordenadas globales.

**Vc:** Es la matriz que contiene los grados de libertad efectivos de cada nodo.

**Trans:** Es la hiper matriz que contiene la matriz de transformación de cada elemento.

**FI:** Es la matriz que contiene los modos de vibración.

**T:** Es el vector que contiene los periodos de vibración correspondientes a cada grado de libertad.

**w:** Es el vector que contiene los autovalores o frecuencias correspondientes a cada grado de libertad.

**Wn:** Es la matriz que contienen los vectores Ritz generados.

**Tr:** Son los periodos de vibración correspondientes a cada vector Ritz generado.

**W:** Es el vector que contiene los autovalores o frecuencias correspondientes a cada grado de libertad.

**MN:** Es la matriz que contiene los modos Ritz normalizados con respecto a la masa.

**Ps:** Es el tipo de suelo en el cual se encuentra la estructura varia del 1 al 6

**Re:** Es la región geográfica del Ecuador en la cual está ubicada la estructura varia del 1 al 3.

**R:** Es el coeficiente de reducción sísmica.

**I:** Es el coeficiente de importancia de la estructura.

**op y oe:** Son los coeficientes de irregularidad en planta y elevación de la estructura.

**ac:** Variable que define la dirección del sismo en dirección  $x$   $ac=1$ ;  $y$   $ac=2$ ;  $z$   $ac=3$ .

**E:** Es el coeficiente de amortiguamiento de los modos necesario si utiliza la combinación cuadrática completa.

**Tc:** Es la variable que indica el tipo de combinación modal que se realizará,  $T_c$  es igual a uno para la combinación modal CQC y  $T_c$  es igual a 2 para la combinación modal SRSS.

**Nm:** Es la variable que indica el número de modos a emplearse para la combinación modal,  $N_m$  es igual a 1 si el número de modos es igual al número de modos necesarios para alcanzar un porcentaje de masa modal efectiva mayor o igual al 90% y  $N_m$  es igual a dos para combinar todos los modos calculados.

**Sd:** Es el vector que contiene los valores del espectro de respuesta de desplazamientos correspondientes a un periodo  $T$ .

**s:** Es el vector de fuerzas externas.

**h:** Es el número de vectores Ritz que se desean generar.

**UC:** Es el vector que contiene los desplazamientos modales máximos combinados.

**FEXL:** Es la matriz que contiene las fuerzas modales máximas combinadas que actúan en cada elemento en coordenadas globales.

**FCN:** Es la matriz que contiene las fuerzas modales máximas combinadas que actúan en cada elemento en coordenadas locales.

**Desplaz:** Es la matriz que contiene los máximos desplazamientos modales combinados de cada elemento en coordenadas globales.

**Dlocal:** Es la matriz que contiene los máximos desplazamientos modales combinados de cada elemento en coordenadas locales.

**Vc:** Es el cortante basal dinámico máximo combinado en dirección  $x$ .

**Vcy:** Es el cortante basal dinámico máximo combinado en dirección  $z$ .

**Mcum:** Es el vector que contiene la suma de la masa modal efectiva de cada modo que alcancen una masa mayor o igual al 90%.

**Rbase:** Es el vector que almacena las reacciones modales máximas combinadas en la base de la estructura.

**Fpiso:** Matriz que almacena las máximas fuerzas modales combinadas de cada piso. Las fuerzas de piso son:  $F_x, F_y, F_z, M_x, M_y, M_z$ .

**Derpiso:** Es el vector que almacena las derivas de piso modales máximas combinadas.

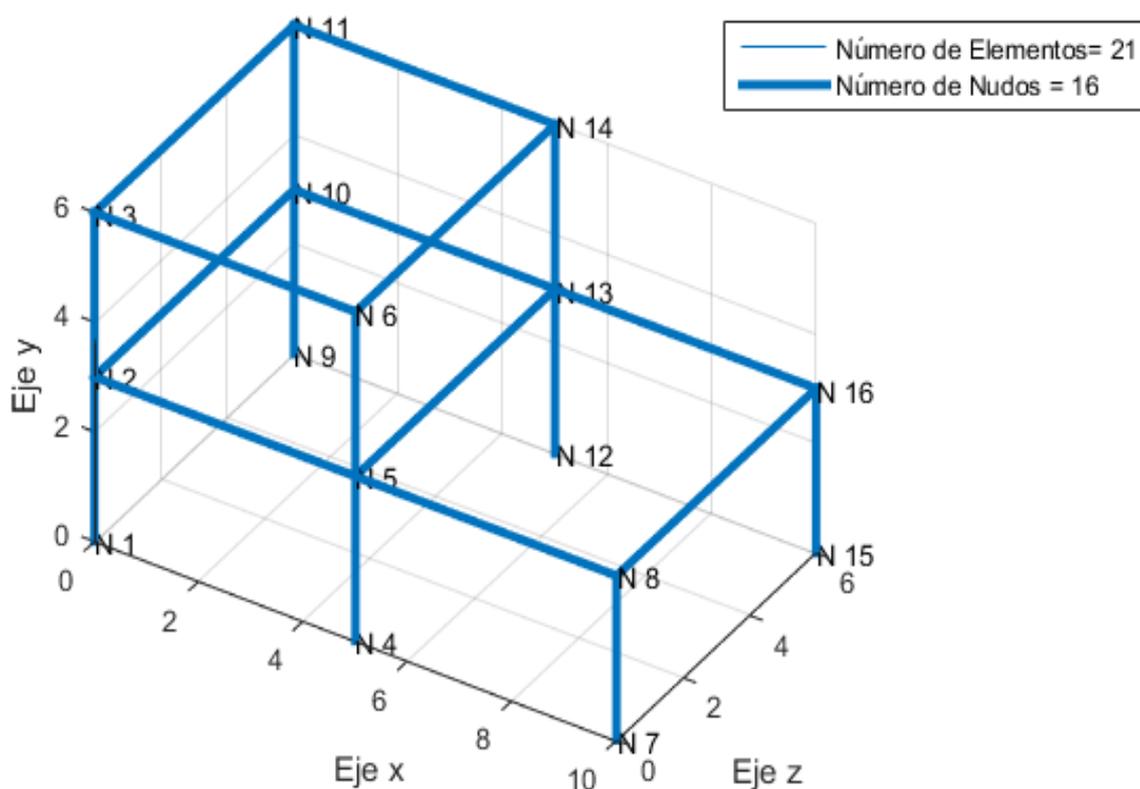
**Dnudos:** Es la matriz que almacena las deformaciones modales máximas combinadas de cada nodo.

#### 4.3.2 CÓDIGO DEL GENERAL DEL PROGRAMA PORTICOS3D

Los datos de entrada del programa principal Porticos3D son para el siguiente pórtico.

Todos los elementos son de sección rectangular cuyas dimensiones son de  $0.4 \times 0.4$  un módulo de elasticidad de  $2.1 \times 10^6 \text{ t/m}^2$  y el peso específico del material es de  $2.4 \text{ t/m}^3$ .

FIGURA 4. 3 NUMERACIÓN DE NODOS DEL PÓRTICO



Fuente: Realizado por el autor

**TABLA 4.1** CONECTIVIDAD DE NODOS DE CADA ELEMENTO DEL PÓRTICO Y CARGA APLICADA DE CADA ELEMENTO

#Elemento	Nodo inicial	Nodo final	Carga(T/m)
1	1	2	0
2	4	5	0
3	7	8	0
4	2	3	0
5	5	6	0
6	2	5	1,2
7	5	8	1,2
8	3	6	1,2
9	9	10	0
10	10	11	0
11	12	13	0
12	13	14	0
13	15	16	0
14	10	13	1,2
15	13	16	1,2
16	11	14	1,2
17	2	10	0
18	3	11	0
19	5	13	0
20	6	14	0
21	8	16	0

### Programa Principal

```
%% Ingreso de Datos
```

```
%NC=Numero de elementos columna 1 elementos columna 2 Ni y c3  
Nj
```

```
NC=[1 1 2;2 4 5;3 7 8;4 2 3;5 5 6;6 2 5;7 5 8;8 3 6;9 9 10;10  
10 11;11 12 13;12 13 14;13 15 16;14 10 13;15 13 16;16 11  
14;17 2 10;18 3 11;19 5 13;20 6 14;21 8 16];
```

```
%Coordenadas de cada nodo
```

```
Coor=[1 0 0 0;2 0 3 0;3 0 6 0;4 5 0 0;5 5 3 0;6 5 6 0;7 10 0  
0;8 10 3 0;9 0 0 6;10 0 3 6;11 0 6 6;12 5 0 6;13 5 3  
6;14 5 6 6;15 10 0 6;16 10 3 6];
```

```
Ni=NC(:,2); Nj=NC(:,3);X=Coor(:,2);Y=Coor(:,3);Z=Coor(:,4);  
ele=size(NC,1);
```

```

%Nodos que conforman la planta de cada piso
%Los nodos de piso pueden ingresarse desde el piso inferior
hasta el superior o desde la planta del último piso hasta la
primera planta
N1=[10 2 8 16 10];N2=[11 3 6 14 11];
Corp={N1,N2};
%Ppiso Indica que valor del centroide tiene cada piso
%hasta descender al primer piso
% Si los nodos de piso de la variable Corp se ingresan desde
el primer piso hasta el último piso Ppiso se ingresa como
Ppiso=[2 1]
%Si los nodos de piso de la variable Corp se ingresan desde
el último piso %hasta el primer piso Ppiso=[1 2]
Ppiso=[2 1];
%gamma=Para elementos que no sean verticales, el ángulo se
define como la
%rotación del elemento alrededor de su eje local x,para
elementos verticales, se
%define como el ángulo entre el eje global y el eje local Z,
medido hacia el eje x global.
gamma=[90*ones(5,1);0*ones(3,1);90*ones(5,1);0*ones(8,1)];
%Grados de Libertad restringidos
rx=[1 4 7 9 12 15];ry=[1 4 7 9 12 15];
rz=[1 4 7 9 12 15];gx=[1 4 7 9 12 15];
gy=[1 4 7 9 12 15];gz=[1 4 7 9 12 15];
%Propiedades geométricas
%Todas las unidades deben estar en metros y Toneladas
%Modulo de elasticidad Es T/m^2
Es=2.1*10^6*ones(ele,1);
a=0.4*ones(ele,1);b=0.4*ones(ele,1);
%Modulo de Cortante G

```

```

G = Es./(2*(1+0.2));
%Constante torsional J
J=(-0.21*(a./b).*(1-((a.^4)./(12*b.^4)))+1/3)).*b.*a.^3;
%Área y Momentos de Inercia con n respecto a los ejes
principales
A=a.*b; I=a.*b.^3/12;Iz=b.*a.^3/12;GJ=G.*J;
y=2.4028/9.81; %T/m^3
Ms (T/m)
Ms=zeros(ele,1);
Ms(6:8)=1.2;Ms(14:16)=1.2;
%% Datos NEC-15 para generar el espectro de desplazamientos
%Factor de zonificación sísmica
%z es el factor de zonificación sísmica de 1 al 6
z=2;
%Ps es el tipo de suelo
%Tipo A =a; Tipo B=2; TipoC=3;Tipo D=4;Tipo E=5;Tipo F=6
%A=1 ;B=2 c=3 d=4 E=5 f=6
% Re= es la región donde está ubicada la estructura
% Sierra=1 Costa=2 Oriente=3
%R es el coeficiente de reducción sísmica
%I es el coeficiente de importancia
%op y oe son los coeficientes de irregularidad en planta y
elevación
%T son los periodos de vibración de cada modo
Ps=1; Re=1;Im=1;R=7;op=1;oe=1;
%% Datos Dirección de la aceleración del suelo
%a es la dirección de la aceleración del terreno 1 si es en
dirección x
%2 si es en dirección y, 3 si es en dirección z
ac=3;

```

```

%% Datos tipo de combinación Modal y Numero de modos a
emplearse

%Tc es el tipo de combinación modal que se desea realizar
%Tc=1 para combinación Modal CQC
%Tc=2 para combinación Modal SRSS
Tc=1;

E=0.05; %Amortiguamiento

%Nm es el número de modos que se desean combinar
%Nm=1 es el numero de modos necesarios para alcanzar un 90%
de participación modal
%Nm=2 para combinar todos los modos
Nm=2;

%% Tipo de Análisis
%An=1 para análisis mediante autovalores
%An=2 para análisis mediante Vectores Ritz
An=2;

%% Discretización de elementos
%div es el número de divisiones en que se dividirá cada
elemento del pórtico
div=1;
if div~=1
[NC,Coor,A,I,Iz,GJ,G,Ms,gamma,Es]=Discretizacion(NC,Coor,div,
A,I,Iz,GJ,G,Es,Ms,gamma);
Ni=NC(:,2);Nj=NC(:,3);
X=Coor(:,2);Y=Coor(:,3);Z=Coor(:,4);
    ele=size(NC,1);
end

%Carga en las vigas
%Las cargas gravitacionales de la losa se usarán como fuerzas
que actúan en

```

```

%cada elemento para el análisis mediante el uso de Vectores
Ritz
Cm=Ms;
Ms=Ms/9.81; %T/m^3
%Matriz de propiedades geométricas y de material Pr
Pr=[ Es.*A Es.*I Es.*Iz GJ (y.*A)+Ms A I+Iz G];
%Cálculo del centro de gravedad de cada piso
[CG]=Calculo_Centroide(Corp,Coor);
%Diagrama del pórtico
Diagrama_Portico_Espacial(X,Y,Z,Ni,Nj,Coor,ele)
%% Grados de libertad Totales 6gdl/nudo
[gdle]=grados_de_libertad_Portico_3D(Coor,rx,ry,rz,gx,gy,gz);
% Calculo de las matrices de Rigidez y de Masas
%met=1 para matriz consistente de masas
%net =2 para matriz concentrada de masas
net=1;
[KM,Kp,Vc,Trans,M]=Matriz_de_Rigidez_y_de_Masas_Portico_espacial(NC,ele,Ni,Nj,X,Y,Z,Pr,gdle,gamma,met);
% Calculo de los modos, frecuencias y modos de Vibración
if An==1
[FI,w,T]=Calculo_propiedades_dinamicas(KM,M);
TA=T;FA=FI;Wa=w;
% Espectro de desplazamientos
[Sd]=Espectro_de_desplazamiento(z,Ps,Re,Im,R,op,oe,T);
% Análisis Modal espectral Autovalores
[UC,FXEL,FCN,Desplaz,Dlocal,Dnudos,VC,VCy,Fy,Macum,Fpiso,Rbase,Derpiso]=Analisis_Modal_Espectral(Coor,ele,gdle,Vc,M,Sd,FI,KM,Kp,Trans,w,E,Tc,Nm,ac,div,CG,Ppiso);
figure(2)
Diagrama_Deformaciones(gdle,Ni,Nj,X,Y,Z,Coor,ele,UC);
% Análisis Modal Espectral Modos Ritz

```

```

elseif An==2
%% Generación de Vectores Ritz
% s vector de cargas debido las acciones de empotramiento
perfecto
[s]=Vector_de_Cargas(Cm,Trans,Vc,gdle,ele,Ni,Nj,X,Y,Z);
% h es el número de vectores Ritz que se desean obtener
h=20*div;
[wn,W,Tr,MN]=Vectores_Ritz(KM,M,s,h);
FI=MN;T=Tr;w=W;
[Sd]=Espectro_de_desplazamiento(z,Ps,Re,Im,R,op,oe,T);
[UC,FXEL,FCN,Desplaz,Dlocal,Dnudos,VC,VCy,Fy,Macum,Fpiso,Rbase,Derpiso]=Analisis_Modal_Espectral(Coor,ele,gdle,Vc,M,Sd,FI,
KM,Kp,Trans,w,E,Tc,Nm,ac,div,CG,Ppiso);
figure(3)
Diagrama_Deformaciones(gdle,Ni,Nj,X,Y,Z,Coor,ele,UC);
end

```

#### **4.4 PROGRAMA ANÁLISIS PSEUDO\_ESPACIAL**

Al igual que el programa Porticos2D y Porticos3D este programa está orientado a realizar un análisis modal espectral ya sea por medio de los modos naturales de vibración o mediante el uso de los modos Ritz, este programa utiliza en su mayoría funciones del programa Porticos2D las cuales se aplican varias veces, más otras funciones generadas solo para el uso de este programa, este programa presenta algunas ventajas sobre el programa Porticos3D como:

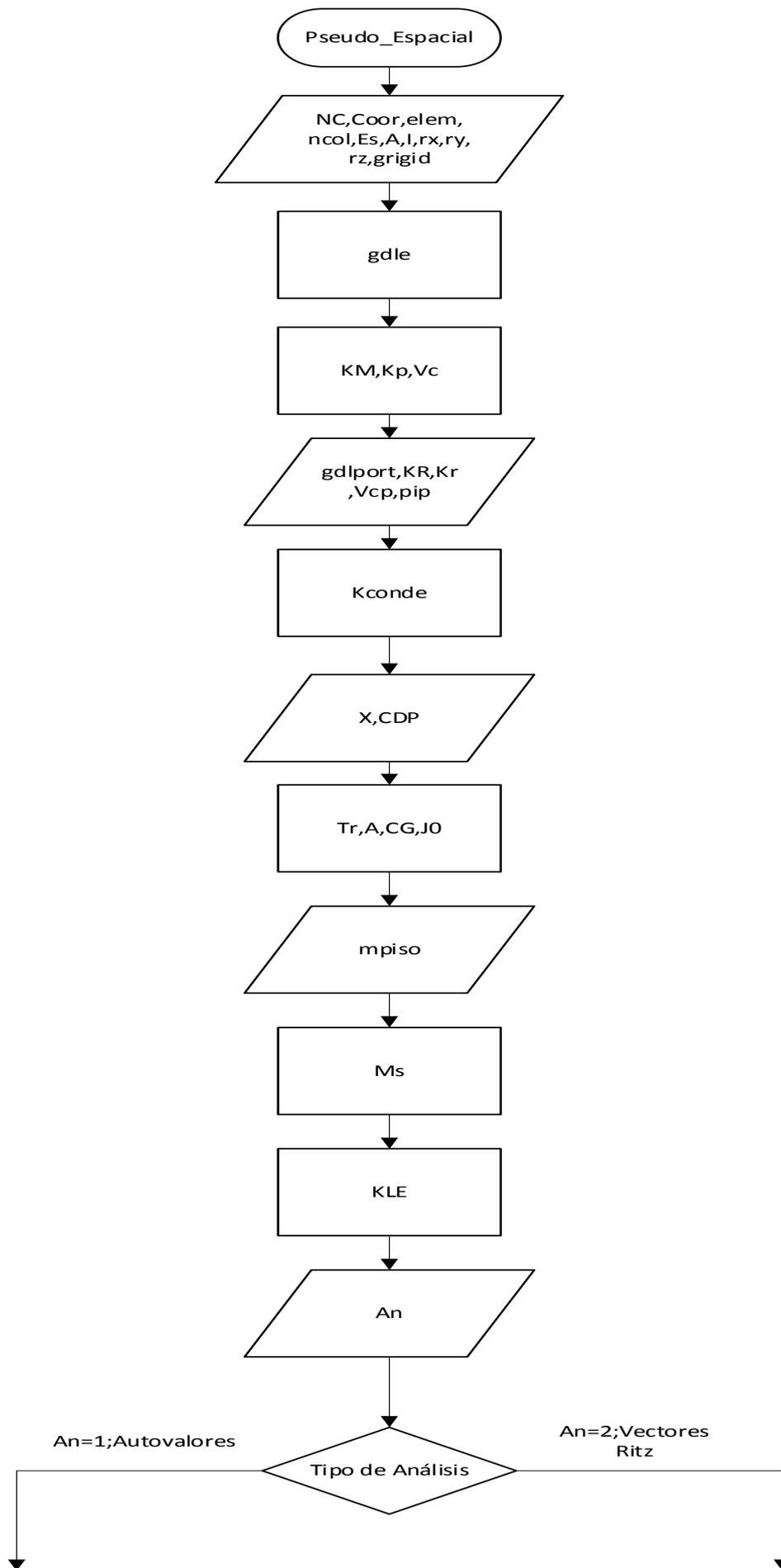
- El tiempo de ejecución del programa es menor.
- No es necesario calcular la matriz de masas de cada elemento que conforma la estructura.
- La masa de toda la estructura se asume que está concentrada en el centro de gravedad de la planta de cada piso.

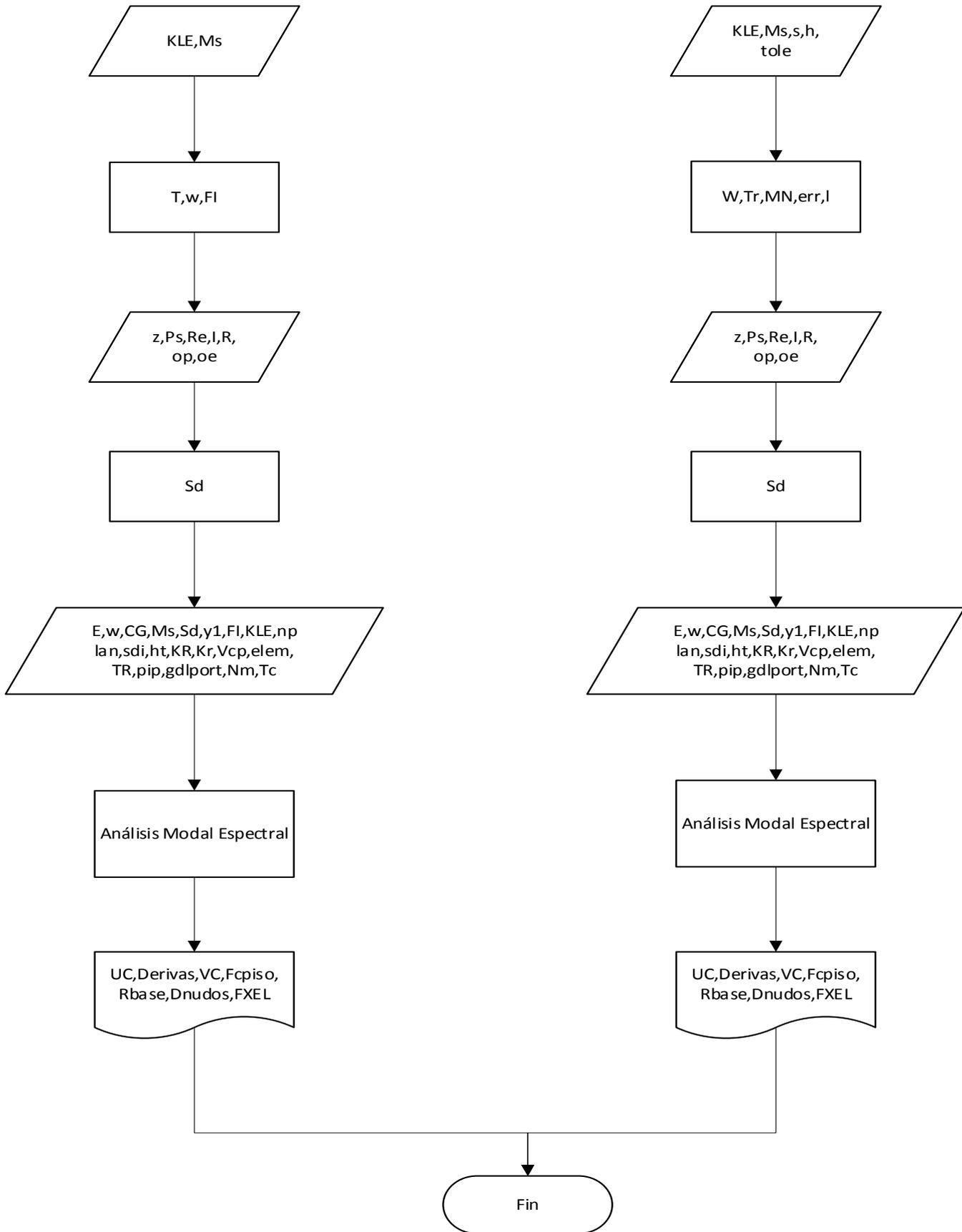
También presenta algunas desventajas como:

- No incluye todos los modos de vibración de la estructura tienen un máximo de  $3xN$  que es muy inferior al número de modos de un pórtico espacial.
- Es un análisis aproximado a un análisis espacial por lo que puede dar como resultado una estimación por debajo del verdadero comportamiento de la estructura.
- Debido a que es un análisis aproximado a un análisis espacial hay que tener cuidado en la interpretación de resultados principalmente en las fuerzas de cada elemento.

Los datos de entrada para cada pórtico son los mismos que los usados en el programa Porticos2D.

En el siguiente diagrama de flujo representa los pasos que sigue el programa Análisis Pseudo\_Espacial, se muestra dos diagramas de flujo el primero muestra el proceso que sigue el programa hasta encontrara la matriz de rigidez lateral de la estructura el segundo diagrama muestra el proceso que sigue el programa para realizar el análisis modal espectral.





Como se mencionó la mayoría de funciones que ocupa el programa Análisis PseudoEspacial son las mismas que las usadas en programa Porticos2D a excepción de la función Matriz\_de\_masa por esta razón tanto los datos de entrada como las funciones necesarias para obtener la matriz de rigidez de un pórtico plano se utilizaran las veces que sean necesarias hasta obtener la matriz de rigidez de todos los Porticos que conforman el pórtico espacial, además las variables como la matriz de rigidez de cada pórtico debe ser guardada en otra variable.

### **Donde**

**NC:** Es la matriz donde se ingresa la conectividad entre nudos de cada elemento.

**Coor:** Es la matriz donde se ingresa las coordenadas de cada nodo.

**elem:** Es un vector que contiene el número de elementos de cada pórtico que conforman el pórtico espacial.

**ncol:** Es el número de columnas que tiene el pórtico, los elementos columna deben ser los primeros en numerarse para el uso de este programa.

**Es:** Es el vector que contiene el módulo de elasticidad de cada elemento.

**A:** Es el vector que contiene el área de cada elemento.

**I:** Es el vector que contiene el momento de inercia de cada elemento.

**rx:** Es el vector que contiene los grados de libertad que tienen restricción de movimiento de traslación en dirección x.

**ry:** Es el vector que contiene los grados de libertad que tienen restricción de movimiento de traslación en dirección y.

**rz:** Es el vector que contiene los grados de libertad que tienen restricción de movimiento de rotación con respecto a un eje perpendicular al plano x-y.

**grigid:** Es la matriz que contiene los nudos que están conformando los elementos axialmente rígidos, estos nudos deben numerarse de izquierda a derecha, y comenzando desde el último piso hasta llegar al primer piso.

**gdle:** Esta función obtiene los grados de libertad de cada nodo almacenándolos en una matriz, los grados de libertad de cada nodo se generan de manera automática.

**KM:** Es la matriz de rigidez de la estructura en coordenadas globales del pórtico.

**Kp:** Es la hiper matriz que contiene la matriz de rigidez de cada elemento que conforma la estructura en coordenadas globales.

- Vc:** Es la matriz que contiene los grados de libertad efectivos de cada elemento.
- gdlport:** Es la celda que contiene los grados de libertad efectivos de los pórticos que conforman el pórtico espacial.
- KR:** Es la celda que almacena las matrices de rigidez de cada pórtico.
- Kr:** Es la celda que almacena las matrices de rigidez en coordenadas globales de cada elemento de cada pórtico.
- Vcp:** Es la celda que almacena los vectores de colocación de cada pórtico.
- pip:** En este vector se ingresan el número de pisos de cada pórtico, debido a que algunas estructuras presentan irregularidad en elevación algunos Porticos tendrán un mayor número de pisos que otros.
- Kconde:** Es la celda que contiene las matrices de rigidez condensadas de cada pórtico.
- x:** Es la celda que almacena las matrices que contienen las coordenadas de los vértices que definen la geometría de cada planta, estas coordenadas se deben ingresar desde la planta del primer piso hasta la del último piso.
- CDP:** Es la celda que contiene las matrices de las coordenadas de los vértices de cada pórtico que estén contenidos en la planta de cada piso.
- Tr:** Es la celda que almacena las matrices de transformación de cada pórtico para pasar cada uno de los pórticos a coordenadas de piso.
- A:** Es el vector que contiene el área de la planta de cada piso de la estructura.
- CG:** Es el vector que contiene el centroide de la planta de cada piso de la estructura.
- JO:** Es el vector que contiene el momento polar de inercias de la planta de cada piso.
- mpiso:** Es el vector en el que se ingresa la masa de cada piso en  $T/m^2$
- KLE:** Es la matriz de rigidez lateral de la estructura.
- Ms:** Es la matriz concentrada de masas de la estructura.
- An:** Este valor define el tipo de modos que se utilizaran en el análisis moda espectral ya sean estos los modos naturales de vibración o los modos Ritz.
- FI:** Es la matriz que contiene los modos naturales de vibración.
- T:** Es el vector que contiene los periodos de vibración correspondientes a cada grado de libertad.

**w:** Es el vector que contiene los autovalores o frecuencias correspondientes a cada grado de libertad.

**Ps:** Es el tipo de suelo en el cual se encuentra la estructura varia del 1 al 6

**Re:** Es la región geográfica del Ecuador en la cual está ubicada la estructura varia del 1 al 3.

**R:** Es el coeficiente de reducción sísmica.

**I:** Es el coeficiente de importancia de la estructura.

**op y oe:** Son los coeficientes de irregularidad en planta y elevación de la estructura.

**Sd:** Es el vector que contiene los valores del espectro de respuesta de desplazamientos correspondientes a un periodo T.

**y1:** Es el vector que contiene unos en los grados de libertad correspondientes a la dirección en la que actúa la aceleración.

**E:** Es el coeficiente de amortiguamiento de los modos necesario si utiliza la combinación cuadrática completa.

**nplan:** variable que contiene el número total de pisos de la estructura.

**sdi:** Variable que define la dirección del sismo en dirección x  $sdi=1$ ; z  $sdi=2$ .

**ht:** Vector que contiene la altura de cada piso con respecto a la base.

**Tc:** Es la variable que indica el tipo de combinación modal que se realizará, Tc es igual a uno para la combinación modal CQC y Tc es igual a 2 para la combinación modal SRSS.

**Nm:** Es la variable que indica el número de modos a emplearse para la combinación modal, Nm es igual a 1 si el número de modos es igual al número de modos necesarios para alcanzar un porcentaje de masa modal efectiva mayor o igual al 90% y Nm es igual a dos para combinar todos los modos calculados.

**h:** Es el contador que permite generar el número suficiente de vectores Ritz, h es igual a uno para iniciar la generación de vectores Ritz.

**s:** Es el vector de cargas externas aplicadas en el centroide de cada piso.

**tole:** Tole es la tolerancia de error para generar el número necesarios de vectores Ritz.

**MN:** Es la matriz que contiene los modos Ritz.

**Tr:** Son los periodos de vibración correspondientes a cada vector Ritz generado.

**W:** Es el vector que contiene las frecuencias correspondientes a cada vector Ritz.

**UC:** Es el vector que contiene los desplazamientos modales máximos combinados.

**Derivas:** Matriz que contiene las derivas de piso en dirección x en la primera columna y en dirección z en la segunda columna.

**VC:** Es el cortante basal dinámico máximo combinado.

**Fcpiso:** Es la matriz que contiene las fuerzas modales máximas de cada piso.

**Rbase:** Es el vector que contiene las reacciones en la base.

**FXEL:** Es la celda que contiene las fuerzas modales máximas combinadas que actúan en cada elemento de cada pórtico.

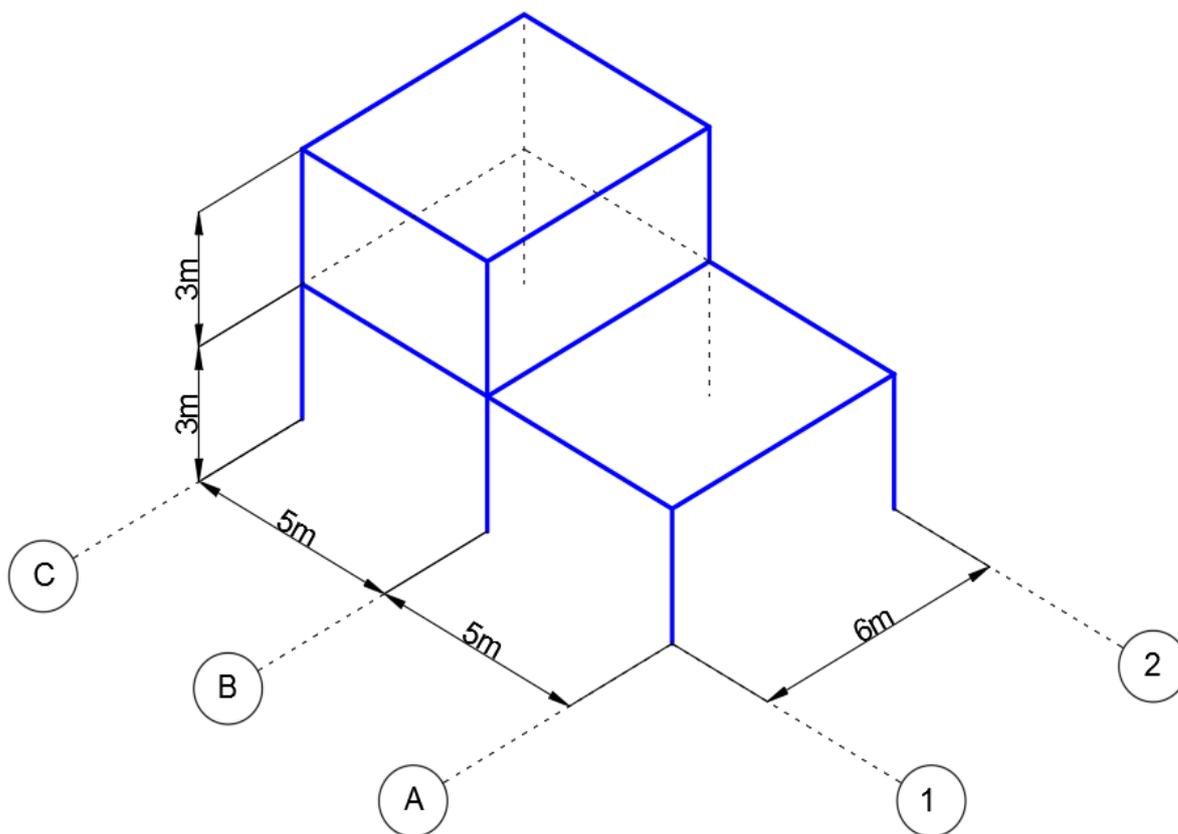
**Dnudos:** Es la celda que contiene los desplazamientos máximos combinadas de cada nodo de cada pórtico.

### 4.3.2 CÓDIGO DEL GENERAL DEL PROGRAMA ANÁLISIS PSEUDOESPACIAL

Los datos de entrada del programa principal Porticos3D son para el siguiente pórtico.

Todos los elementos son de sección rectangular cuyas dimensiones son de 0.4x0.4 un módulo de elasticidad de  $2.1 \times 10^6 \text{ t/m}^2$  la masa de cada pisos son 0,8 y 0,4  $\text{T/m}^2$

**FIGURA 4.4** REPRESENTACIÓN DEL PÓRTICO ESPACIAL



Fuente: Realizado por el autor

#### 4.4.2 Rutina Principal

```

%% Análisis Pseudo Espacial

%Las columnas deben ser los primeros elementos en numerarse,
las vigas al
%final
%Porticos eje palo X-Y
%NC=Numero de elementos columna 1 elementos columna 2 Ni y c3
NJ
NC=[1 1 2;2 2 3;3 4 5;4 5 6;5 7 8;6 2 5;7 5 8;8 3 6];
%Coordenadas de cada nodo
Coor=[1 0 0;2 0 3;3 0 6;4 5 0;5 5 3;6 5 6;7 10 0;8 10 3];
%ele Número total de elementos del pórtico
ele=size(NC,1);
%Elem es un vector que almacena el número total de elementos
de cada pórtico
elem=zeros(5,1);
elem(1:2)=ele;
%ncol=numero de columnas del pórtico i
ncol=5;
Ni=NC(:,2); Nj=NC(:,3);X=Coor(:,2);Y=Coor(:,3);
Diagrama_Portico(X,Y,Ni,Nj,Coor,ele)
%Propiedades Geométricas y de material
Es=22000*ones(ele,1);
a=0.4*ones(8,1);b=a;
A=a.*b; I=b.*a.^3/12;
%Propiedades
Pr=[ Es.*A Es.*I ];
%Restricciones
rx=[1 4 7];ry=[1 4 7];rz=[1 4 7];
%Conectividad entre nudos rígidos de elementos axialmente
rígidos Numerar de izquierda a derecha ya que si

```

```

%se repite algún nudo el programa reemplaza ese gdl
%Numerar desde los elementos del último piso hasta el primer
piso
grigid=[3 6;2 5;5 8];
%Subrutina que calcula los grados de libertad efectivos
[gdle]=grados_de_libertad(grigid,Coor,rx,ry,rz);
gdl1=gdle;gdl2=gdl1;
%KM=Matriz de rigidez del pórtico
[KM,Kp,Vc]=Matriz_Rigidez_por_elemento(NC,ele,Ni,Nj,X,Y,Pr,ncol,gdle);
%Para agilizar los cálculos los Porticos que son iguales se
guardan en otra variable ejemplo KM2=KM1
%Almacenamiento de variables
KM1=KM;
KM2=KM1;
Kp1=Kp;Kp2=Kp1;
Vc1=Vc;Vc2=Vc1;
%Porticos eje Y-Z
%% Pórtico eje C
NC=[1 1 2;2 3 4;3 2 4];
Coor=[1 0 0;2 0 3;3 6 0;4 6 3];
ele=size(NC,1);
elem(3)=ele;
Es=22000*ones(ele,1);
a=0.4*ones(ele,1);b=a;
A=a.*b; I=b.*a.^3/12;
Pr=[ Es.*A Es.*I ];
Ni=NC(:,2); Nj=NC(:,3);X=Coor(:,2);Y=Coor(:,3);
ncol=2;
Diagrama_Portico(X,Y,Ni,Nj,Coor,ele)
%Restricciones

```

```

rx=[1 3];ry=[1 3];rz=[1 3];
grigid=[2 4];
[gdle]=grados_de_libertad(grigid,Coor,rx,ry,rz);
gdlC=gdle;
[KM,Kp,Vc]=Matriz_Rigidez_por_elemento(NC,ele,Ni,Nj,X,Y,Pr,nc
ol,gdle);
KMC=KM;
KpC=Kp;
VcC=Vc;
%% Porticos eje B Y C
NC=[1 1 2;2 2 3;3 4 5;4 5 6;5 2 5;6 3 6];
Coor=[1 0 0;2 0 3;3 0 6;4 6 0;5 6 3;6 6 6];
ele=size(NC,1);
elem(4:5)=ele;
ncol=4;
Es=22000*ones(ele,1);
a=0.4*ones(ele,1);b=a;
A=a.*b; I=b.*a.^3/12;
Pr=[ Es.*A Es.*I ];
Ni=NC(:,2); Nj=NC(:,3);X=Coor(:,2);Y=Coor(:,3);
Diagrama_Portico(X,Y,Ni,Nj,Coor,ele)
rx=[1 4];ry=[1 4];rz=[1 4];
grigid=[3 6;2 5];
[gdle]=grados_de_libertad(grigid,Coor,rx,ry,rz);
gdlA=gdle;gdlB=gdlA;
[KM,Kp,Vc]=Matriz_Rigidez_por_elemento(NC,ele,Ni,Nj,X,Y,Pr,nc
ol,gdle);
KMA=KM;KMB=KMA;
KpA=Kp;KpB=KpA;
VcA=Vc;VcB=VcA;

```

```

%% Proceso de Ensamble de matriz de rigidez lateral Y Matriz
de Masa

%Las variables se almacenan en celdas debido a que estas
matrices son de

%diferente dimensión

%gdleport almacena los grados de libertad de cada pórtico
gdlport={gdl1,gdl2,gdlC,gdlA,gdlB};

%KR se almacenan todas las matrices de rigidez de cada
pórtico
KR={KM1 KM2 KMC KMA KMB};

%Kp son las matrices de rigidez de cada elemento de cada
pórtico en coordenadas globales
Kr={Kp1 Kp2 KpC KpA KpB};

%Vcp vector de colocación de cada pórtico
Vcp={Vc1 Vc2 VcC VcA VcB};

%pip es un vector que indica el número de pisos que tiene
cada

%pórtico este vector sirve para diferenciar los pórticos que
tengan distintas plantas
pip=[2 2 1 2 2];

%Condensación estática de la matriz de rigidez de cada
pórtico

%La función Kconde sirve para realizar la condensación
estática de cada pórtico
[Kconden]=Condensacion_Estatica(KR,pip);

%nplan es el número máximo de pisos
nplan=max(pip);

%Número de pisos de cada pórtico
conexp=pip;

%Coor1 son las coordenadas de la planta de cada pórtico

```

```

% en la fila 1 se ingresan las coordenadas en x y en la fila
2 las coordenadas en y de la planta si hay más de una planta
distinta ingresar otra matriz de coordenadas
%Deben ser ingresadas desde la planta del piso 1 hasta la
planta del nsimo piso
%Coor1 Coordenadas de la planta 1
%Coor2 Coordenadas de la planta2
Coor1=[0 10 10 0 0;0 0 6 6 0];Coor2=[0 5 5 0 0;0 0 6 6 0];
%CDP Son las coordenadas de los vértices de cada pórtico
contenidas en la planta de cada piso
%CDP1 son las coordenadas de los pórticos que estos
contenidos en la planta
%1 se ingresan los puntos de cada vértice de la siguiente
forma:
% x1 y1 x2 y2 esto se hace para cada vértice
%las coordenadas para cada planta deben ser ingresadas en el
mismo orden que fueron ingresados los pórticos
%Porticos 1,2,A,B,C están en la planta 1
CDP1=[0 0 10 0;0 6 10 6;10 0 10 6;5 0 5 6;0 0 0 6];
%CDP2 son las coordenadas de los pórticos que están
contenidos en la planta 2
%Porticos 1,2,A,B
CDP2=[0 0 5 0;0 6 5 6;5 0 5 6;0 0 0 6];
%x es la celda de almacenamiento de las coordenadas de cada
planta ingresar las coordenadas desde la planta del piso
inferior hasta la última
x={Coor1,Coor2};
%CDP es la celda que almacena las coordenadas de los pórticos
de cada planta
CDP={CDP1,CDP2};
%TR Es la matriz de transformación de cada pórtico
[TR,A,CG,J0]=Matriz_de_Transformacion(x,CDP,nplan,conexp);

```

%Masa de cada Piso se debe ingresar la masa en el siguiente orden desde la masa de la planta nsima hasta descender hasta el primer piso

```
mpiso=[0.8/9.81;0.4/9.81];%T/m^2
```

%Ms ensambla la matriz de masas

```
[Ms]=Ensamble_Matriz_Masas(mpiso,A,J0,nplan);
```

%Matriz de Rigidez Lateral de la estructura

```
[KLE]=Matriz_De_Rigidez_Lateral(Kconden,TR,nplan,KR);
```

%%Datos NEC15-DS

%% Espectro de respuesta

%Parámetros para generar el espectro de desplazamientos Según NEC15-Ds

%z es el factor de zonificación sísmica de 1 al 6

```
z=4;
```

%Ps es el tipo de suelo

%Tipo A =a; Tipo B=2; TipoC=3;Tipo D=4;Tipo E=5;Tipo F=6

```
%A=1 ;B=2 c=3 d=4 E=5 f=6
```

% Re= es la región donde está ubicada la estructura

% Sierra=1 Costa=2 Oriente=3

%R es el coeficiente de reducción sísmica

%I es el coeficiente de importancia

%op y oe son los coeficientes de irregularidad en planta y elevación

%T son los periodos de vibración de cada modo

```
Ps=4; Re=2;I=1;R=6;op=1;oe=0.9;
```

%para análisis en la dirección x sdi=1; para dirección y sdi=2

```
sdi=2;
```

%% Amaláís Modal Espectral Autovalores

```
An=2;
```

%Cálculo de propiedades dinámicas

```

if An==1
[FI,w,T]=Calculo_propiedades_dinamicas(KLE,Ms);
[Sd]=Espectro_de_desplazamiento(z,Ps,Re,I,R,op,oe,T);
ht=(3*nplan:-3:0)';
y1=zeros(3*nplan,1);
y1(sdi:3:3*nplan)=1;
E=0.05; %Amortiguamiento
Tc=1;Nm=1;
[UC,Derivas,VC,Fcpiso,Rbase,Dnudos,FXEL]=Analisis_Modal_Espec
tral(E,w,CG,Ms,Sd,y1,FI,KLE,nplan,sdi,ht,KR,Kr,Vcp,elem,TR,pi
p,gdlport,Nm,Tc);
elseif An==2
%% Vectores Ritz
h=1;%Es el primer vector Ritz nescesario para empezar a
generar los demás
s=[14.1951918;14.1951918;0;11.19352635;11.19352635;0];
tole=0.000001;%Tolerancia
[W,Tr,MN,err,l]=Modos_Ritz(KLE,Ms,s,h,tole);
T=Tr;
w=W;
FI=MN;
[Sd]=Espectro_de_desplazamiento(z,Ps,Re,I,R,op,oe,T);
ht=(3*nplan:-3:0)';
y1=zeros(3*nplan,1);
y1(sdi:3:3*nplan)=1;
E=0.05; %Amortiguamiento
Tc=2;Nm=1;
[UC,Derivas,VC,Fcpiso,Rbase,Dnudos,FXEL]=Analisis_Modal_Espec
tral(E,w,CG,Ms,Sd,y1,FI,KLE,nplan,sdi,ht,KR,Kr,Vcp,elem,TR,pi
p,gdlport,Nm,Tc);
end

```

## **CAPITULO 5**

### **MODELACIÓN COMPUTACIONAL**

En este capítulo se probará la capacidad de cálculo de los programas desarrollados mediante varias estructuras que servirán de ejemplo, se compararán las respuestas entre el método de autovalores y el uso de vectores Ritz así como el número de modos que se usaron en cada uno de estos métodos.

Debido a que SAP2000 es un programa de elementos finitos los resultados de SAP2000 se consideraran como exactos. Se compararán las respuestas obtenidas con cada programa con las respuestas obtenidas con SAP2000.

El número de modos utilizados para la combinación modal tanto para el análisis mediante vectores Ritz y los modos naturales de vibración en SAP2000 será el número de modos correspondiente al número de grados de libertad de cada modelo estudiado, debido a que en teoría el error en el número de modos empleados para cada método es cero cuando se utiliza un número de modos igual al número total de grados de libertad del sistema y por ende las respuestas obtenidas por los dos métodos serían las mismas.

El error porcentual se calculará comparando las respuestas obtenidas con los programas de Matlab mediante el uso de vectores Ritz y los modos naturales con los valores obtenidos con SAP2000 mediante el uso de los modos naturales de vibración.

Los resultados que se compararán para los programas Porticos2D yPorticos3D son:

1. Comparación entre el número de modos necesarios entre el uso de los modos naturales de vibración y el uso de vectores Ritz.
2. Los periodos de vibración.
3. Las deformaciones máximas.

Aunque los programas realizados calculan todas las deformaciones para cada nodo para el análisis de resultados se compararán solo las deformaciones máximas que se obtienen al comparar todas las deformaciones obtenidas con SAP2000 en cada dirección, estos resultados se compararán con los resultados obtenidos con los programas realizados para el nodo correspondiente.

4. Acciones Máximas

Se compararán solo las fuerzas máximas que se obtienen al comparar todos los elementos del pórtico para cada acción única es decir para el programa Porticos2D solo se compararán las respuestas máximas de Axial, Corte, Momento, para el Programa Porticos3D Axial (P), Corte en X (V2), Corte en Z (V3), Torsión (T), Momento con respecto plano X-Y (M2), Momento con respecto al eje Y-Z (M3).

5. Se compararán las respuestas globales de la estructura como son las reacciones en la base, para el programa Porticos2D estas son el Corte Basal Dinámico (FX), Fuerza en dirección vertical (FY) y Momento en la base (MY), para el programa Porticos3D las reacciones en la base son: Corte Basal Dinámico en dirección del eje x (FX), Corte Basal Dinámico en dirección del eje z (FZ), Fuerza vertical (FY), Momento con respecto al eje x (Mx), Momento con respecto al eje z (Mz) y momento con respecto al eje y o torsión (My).

Para el programa Porticos3D se compararán los resultados de reacciones en la base obtenidos al usar la función Discretización dividiendo cada elemento de la estructura en dos, esto se hace con el fin de verificar que de esta manera se obtienen resultados más precisos con respecto a los resultados de SAP2000.

6. Se compararán los factores de participación modal.

Para el programa Análisis PseudoEspacial se compararán los siguientes parámetros

1. Comparación entre el número de modos necesarios entre el uso de los modos naturales de vibración y el uso de vectores Ritz.
2. Los periodos de vibración.
3. Desplazamientos de piso.

Aunque el programa calcula las deformaciones de cada nodo de cada pórtico solo se compararán las deformaciones máximas que se producen en el centroide de cada piso.

4. Derivas de Piso.
5. Cortante Basal Dinámico.
6. Momento en la Base.
7. Torsión en la Base.
8. Factores de Participación Modal.

## 5.1 APLICACIÓN PROGRAMA PORTICOS2D

### 5.1.2 DEFINICIÓN DE PARÁMETROS

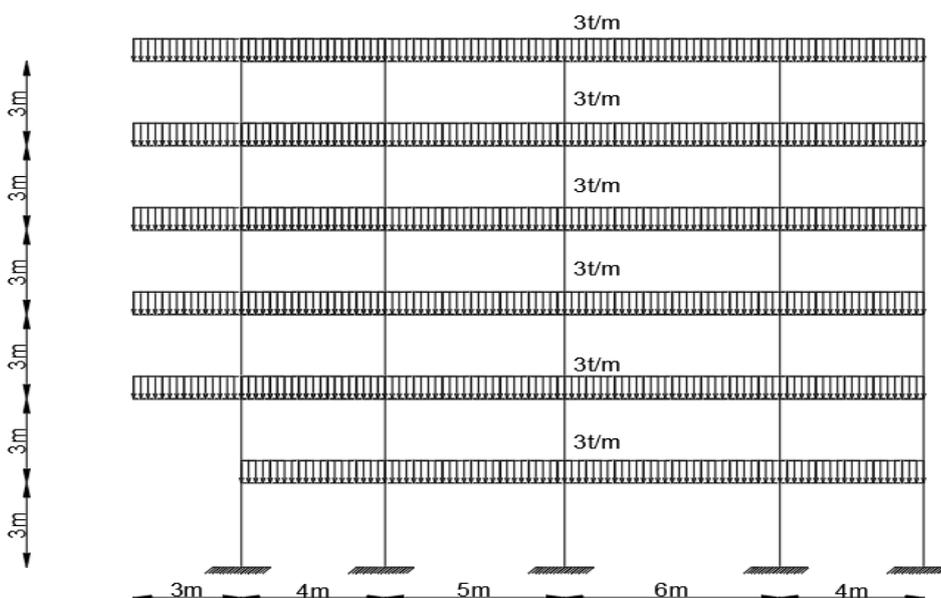
- Las secciones de las vigas y de las columnas son de  $0,3 \times 0,4(m)$ .
- El módulo de elasticidad del material es  $2.1 \times 10^6 t/m^2$
- El peso específico del material es  $2.4 t/m^3$ .
- Sobre las vigas se aplica una carga de  $3 t/m$ .
- Las columnas que se encuentran en la base están empotradas
- La aceleración del terreno es en la dirección x

Los parámetros para obtener el espectro de desplazamientos son los siguientes

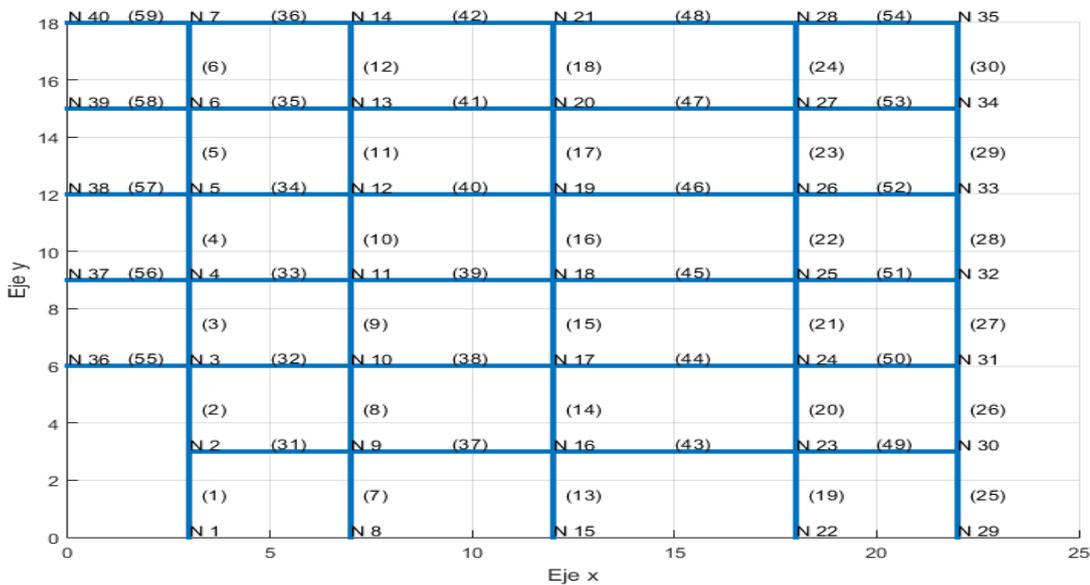
**TABLA 5. 1** FACTORES NEC-15 PARA OBTENER EL ESPECTRO DE DESPLAZAMIENTOS  
PÓRTICO1

Parámetros NEC15-DS	
Factor de zonificación sísmica(z)	2
Tipo de suelo(Ps)	1
Región (Re)	Sierra
Coefficiente de Importancia(I)	7
Coefficiente de irregularidad en planta(op)	1
Coefficiente de irregularidad en elevación (oe)	1
Coefficiente de reducción y resistencia sísmica [R]	7

**FIGURA 5. 1** PÓRTICO A SER ANALIZADO



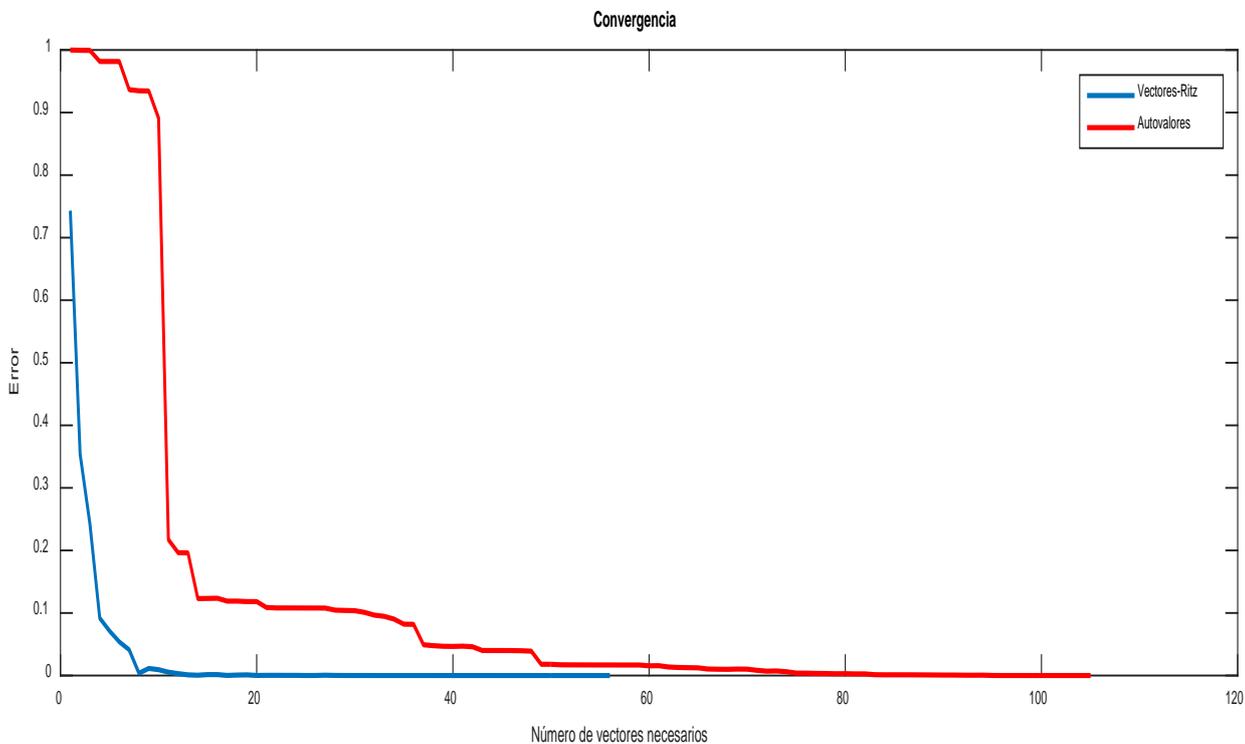
**FIGURA 5.2 NUMERACIÓN DE NODOS Y ELEMENTOS**



**5.1.2 COMPARACIÓN DE RESULTADOS OBTENIDOS PROGRAMA PÓRTICOS2D**

**1. Número de modos necesarios**

**FIGURA 5.3 VARIACIÓN DEL ERROR CON RESPECTO AL NÚMERO DE VECTORES RITZ Y LOS MODOS NATURALES PARA EL PÓRTICO1**



Los vectores Ritz necesarios para el análisis dinámico son 32 con una tolerancia de 0,00001 mientras que para obtener un error semejante aplicando el método de autovalores el número necesarios de modos son 100.

## 2. Periodos obtenidos

**TABLA 5. 2 COMPARACIÓN DE LOS 20 PRIMEROS PERIODOS DE VIBRACIÓN MATLAB VS SAP2000 PÓRTICO1**

Periodos de Vibración T(s)				
	Matlab	Matlab	SAP2000	SAP2000
#Modo	Vectores Ritz	Autovalores	Vectores Ritz	Autovalores
1	0,493226028	0,49322603	0,493494	0,493494
2	0,158196648	0,15819665	0,159844	0,159844
3	0,089256723	0,08925672	0,093988	0,093988
4	0,066463348	0,06646335	0,085699	0,085699
5	0,062301649	0,06230165	0,08148	0,08148
6	0,060223511	0,06022351	0,080348	0,080348
7	0,058470543	0,05847054	0,077513	0,077513
8	0,054583344	0,05458334	0,073669	0,073669
9	0,052550498	0,0525505	0,059136	0,059136
10	0,042569161	0,04256916	0,046219	0,046219
11	0,042533782	0,04253378	0,042513	0,042513
12	0,038334455	0,03833446	0,040034	0,040034
13	0,035915819	0,03591582	0,039817	0,039817
14	0,034678147	0,03467815	0,038562	0,038562
15	0,031044155	0,03104416	0,033696	0,033696
16	0,028747231	0,02874723	0,0313	0,0313
17	0,028268993	0,02826899	0,020467	0,020467
18	0,027196218	0,02719622	0,020087	0,020087
19	0,024513524	0,02451353	0,019402	0,019402
20	0,022012842	0,0220625	0,018549	0,018549

**TABLA 5. 3 ERROR PORCENTUAL DE LOS PERIODOS DE VIBRACIÓN PÓRTICO1 ENTRE LOS RESULTADOS DE MATLAB Y SAP2000**

#Modo	Error% Matlab Autovalores	Error% Vectores Ritz
1	0,054300926	0,054300926
2	1,030599572	1,030599572
3	5,03391601	5,03391601
4	22,44559665	22,44559665
5	23,53749547	23,53749547
6	25,04665855	25,04665855

CONTINUACIÓN TABLA 5.3

7	24,56679177	24,56679177
8	25,90730982	25,90730982
9	11,13619872	11,13619872
10	7,896836822	7,896836822
11	0,048884588	0,048884588
12	4,245253182	4,245253182
13	9,797778545	9,797778545
14	10,07171122	10,07171122
15	7,869909815	7,869909815
16	8,155807551	8,155812473
17	38,11986385	38,11986374
18	35,392151	35,392133
19	26,3453555	26,34534563
20	18,9417373	18,67401152

Los dos métodos empleados para calcular los periodos de vibración para cada modo arrojan resultados iguales.

### 3. Deformaciones Máximas combinadas

El programa Porticos2D calcula todas las deformaciones para cada nodo para el análisis de resultados se compararán solo las deformaciones máximas que se obtienen al comparar todas las deformaciones obtenidas en cada dirección.

**TABLA 5. 4** COMPARACIÓN DE LAS DEFORMACIONES MÁXIMAS MATLAB VS SAP2000  
PÓRTICO1 NODOS 36 Y 40

		Deformaciones Máximas			
		Vectores Ritz Matlab	Autovalores Matlab	Sap2000 Vectores Ritz	Sap2000 Autovalores
Nodo 40	$\Delta x(m)$	0,0037603	0,0037601	0,0038290	0,0038290
	$\Delta y(m)$	0,0002371	0,0002304	0,0002520	0,0002520
	$\Theta(rad)$	0,0000632	0,0000592	0,0000700	0,0000700
Nodo 36	$\Delta x(m)$	0,0015071	0,0015071	0,0015380	0,0015380
	$\Delta y(m)$	0,0007145	0,0007163	0,0007310	0,0007310
	$\Theta(rad)$	0,0002264	0,0002274	0,0002340	0,0002340

Donde

$\Delta x$  es el desplazamiento traslacional del nodo en dirección x

$\Delta y$  es el desplazamiento traslacional del nodo en dirección y

$\Theta$  es el desplazamiento rotacional o giro del nodo

**TABLA 5. 5** ERROR PORCENTUAL DE LAS DEFORMACIONES MÁXIMAS PÓRTICO 1 ENTRE LOS RESULTADOS DE MATLAB Y SAP2000

		Error Porcentual Deformaciones Máximas	
		Vectores Ritz Matlab	Autovalores Matlab
Nodo 40	$\Delta x$	1,795181951	1,799438792
	$\Delta y$	5,925744381	8,557655538
	$\Theta$	9,658901708	15,44846339
Nodo 36	$\Delta x$	2,00981306	2,007522066
	$\Delta y$	2,258293646	2,011584173
	$\Theta$	3,232716385	2,828650689

#### 4. Acciones Máximas combinadas

El programa Porticos2D calcula las fuerzas que actúan en cada elemento del pórtico para el análisis de resultados se compararán solo las fuerzas máximas que se obtienen al comparar todos los elementos del pórtico obtenidas para Axial, Corte y Momento.

**TABLA 5. 6** COMPARACIÓN DE LAS ACCIONES MÁXIMAS MATLAB VS SAP2000 PÓRTICO1 ELEMENTOS 1,7 Y 8

		Comparación de Fuerzas Máximas Matlab vs SAP2000			
		Vectores Ritz Matlab	Autovalores Matlab	Sap2000 Vectores Ritz	Sap2000 Autovalores
Elemento 1	Axial(T)	1,859	1,858800424	1,8329	1,8329
	Corte(T)	0,434	0,43432299	0,43	0,43
	Momento(T.m)	0,892	0,891994634	0,88773	0,88773
Elemento 7	Axial(T)	0,626	0,626430523	0,614	0,614
	Corte(T)	0,556	0,556229526	0,5484	0,5484
	Momento(T.m)	1,015	1,01464233	1,00378	1,00378
Elemento 8	Axial(T)	0,453	0,452585768	0,4457	0,4457
	Corte(T)	0,586	0,58571188	0,5768	0,5768
	Momento(T.m)	0,892	0,891992612	0,87856	0,87856

**TABLA 5. 7 ERROR PORCENTUAL DE LAS ACCIONES MÁXIMAS PÓRTICO1 ENTRE MATLAB Y SAP2000 PARA LOS ELEMENTOS 1,7 Y 8**

		Error Porcentual Entre Matlab y SAP2000	
		Vectores Ritz Matlab	Autovalores Matlab
Elemento 1	Axial	1,399149037	1,41308442
	Corte	0,991507483	1,005346448
	Momento	0,468415967	0,480397662
Elemento 7	Axial	2,029485412	2,024515201
	Corte	1,412635708	1,42770344
	Momento	1,069565832	1,082142457
Elemento 8	Axial	1,546005667	1,544933292
	Corte	1,547508294	1,545055533
	Momento	1,532940076	1,528935037

## 5. Reacciones en la Base

**TABLA 5. 8 COMPARACIÓN REACCIONES EN LA BASE MATLAB VS SAP2000 PÓRTICO1**

	Fuerzas Máximas en la base			
	Vectores Ritz Matlab	Autovalores Matlab	Sap2000 Vectores Ritz	Sap2000 Autovalores
FX (T)	2,473835635	2,474191859	2,4469	2,4469
Fy(T)	0,082355139	0,08234761	0,0434	0,0434
MY(T.m)	30,68361622	30,68361625	30,33386	30,33386

**TABLA 5. 9 ERROR PORCENTUAL DE LAS REACCIONES EN LA BASE PÓRTICO1 ENTRE MATLAB Y SAP2000**

	%Error Vectores Ritz Matlab vs SAP2000	%Error Autovalores Matlab vs SAP2000
FX	1,10080655	1,115364697
Fy	89,75838452	89,74103644
MY	1,153022479	1,153022548

## 6. Factores de Participación Modal

**TABLA 5. 10 COMPARACIÓN MASA MODAL EFECTIVA MATLAB VS SAP2000 PÓRTICO1**

Masa Modal efectiva SAP2000	Masa Modal efectiva Vectores Ritz	Masa Modal Efectiva Autovalores
83,1486	83,77088999	83,72946314
93,0184	93,58686141	93,54058032
Error% Masa Modal Efectiva Matlab Vs SAP2000	0,748407059	0,698584395
	0,61112792	0,561373143

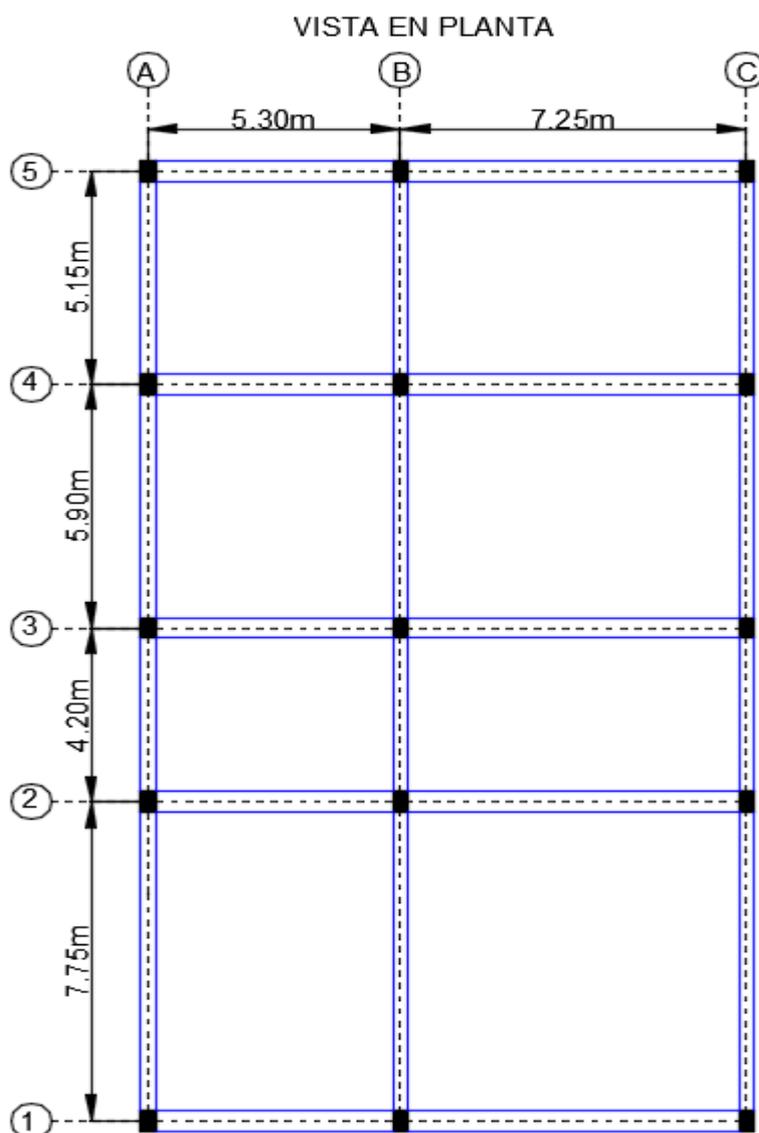
## 5.2 APLICACIÓN PROGRAMA PORTICOS3D

Para la aplicación del programa Porticos3D se presentan 3 modelos estructurales, un pórtico espacial regular en planta y elevación, y dos pórticos irregulares en planta y regulares en elevación.

Los elementos se numerarán en el siguiente orden primero se numerarán las columnas de abajo hacia arriba y después las vigas que pertenezcan al plano X-Y y finalmente las vigas que pertenezcan al plano X-Z, esta numeración de elementos se seguirá para todos los modelos que se estudiaran, aunque los elementos se pueden numerar en el orden que el usuario guste.

### 5.2.1 MODELO 1

FIGURA 5. 4 VISTA EN PLANTA MODELO 1



### 5.2.2 DEFINICIÓN DE PARÁMETROS MODELO 1

El módulo de elasticidad para cada elemento es de  $2,1 \times 10^6 T/m^2$  el peso específico del material es de  $2,4 T/m^3$  el espesor de la losa es de  $0,25 m$ , todos los pies de las columnas que se encuentran en la base del terreno se encuentran empotradas, las dimensiones de vigas y columnas y la carga que transfiere la losa a las vigas se presentan en las siguientes tablas.

**TABLA 5. 11** DIMENSIONES DE VIGAS Y COLUMNAS MODELO 1

Dimensiones		
Columnas ejes	Base(m)	Altura(m)
A	0,4	0,4
B	0,6	0,6
C	0,45	0,45
Vigas	0,5	0,5

**TABLA 5. 12** CARGAS SOBRE LAS VIGAS MODELO 1

Carga sobre vigas	Carga(T/m)
Vigas Ejes A-B-1	0,8904
Vigas Ejes B-C-1	1,218
Vigas Ejes A-B-2	1,72724813
Vigas Ejes B-C-2	2,15800015
Vigas Ejes A-B-3	1,72724813
Vigas Ejes B-C-3	2,09858449
Vigas Ejes A-B-4	1,7808
Vigas Ejes B-C-4	2,2380988
Vigas Ejes A-B-5	0,8904
Vigas Ejes B-C-5	1,07951446
Vigas Ejes A-1-2	1,12738909
Vigas Ejes A-2-3	0,7056
Vigas Ejes A-3-4	0,97634496
Vigas Ejes A-4-5	0,86408834
Vigas Ejes B-1-2	2,42143487
Vigas Ejes B-2-3	1,4112
Vigas Ejes B-3-4	1,96754496
Vigas Ejes B-4-5	1,72928834
Vigas Ejes C-1-2	1,96754496
Vigas Ejes C-2-3	1,72928834
Vigas Ejes C-3-4	1,29404579
Vigas Ejes C-4-5	0,7056

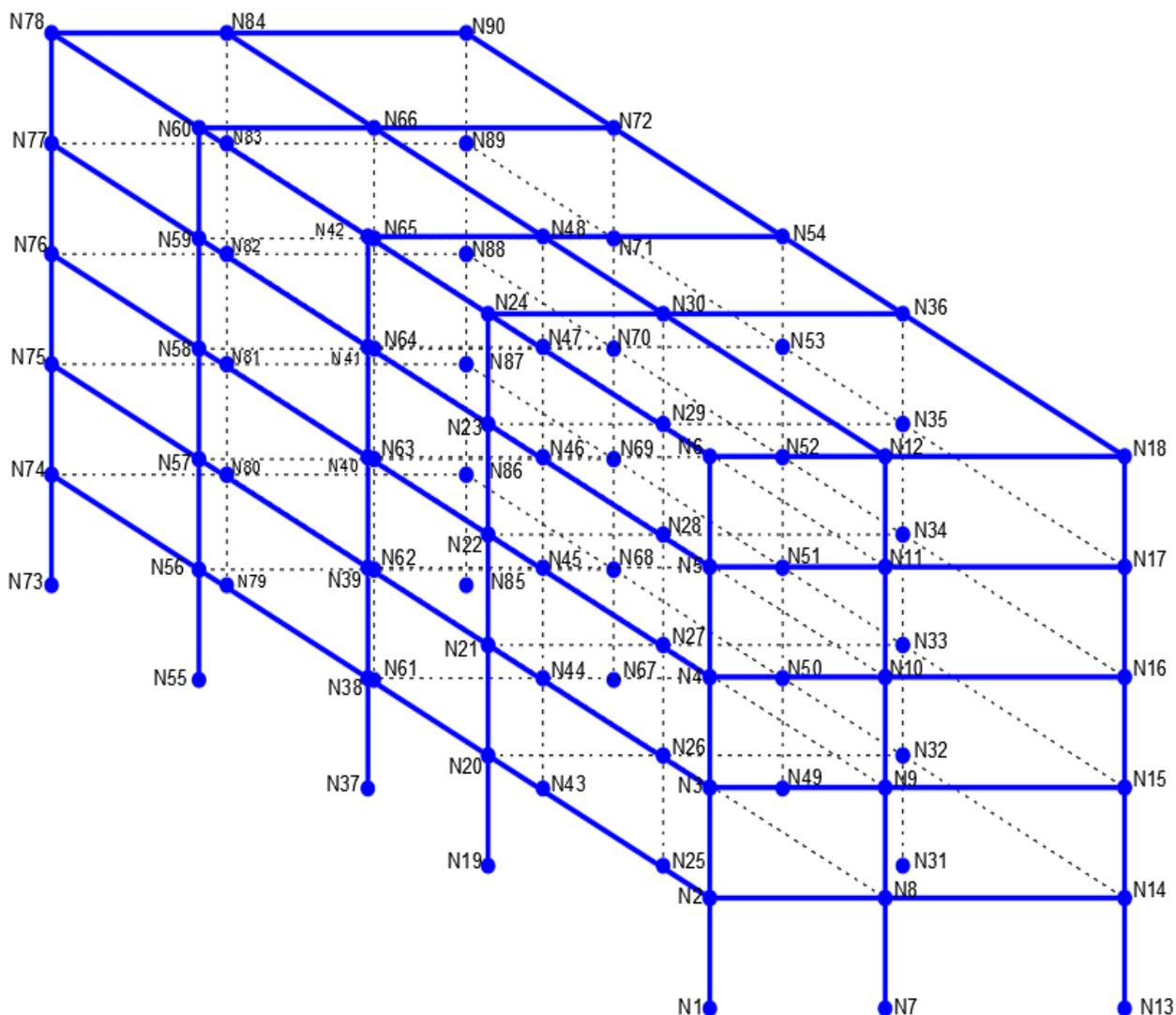
Los parámetros para obtener el espectro de desplazamientos son los siguientes

**TABLA 5. 13** FACTORES NEC-15 PARA OBTENER EL ESPECTRO DE DESPLAZAMIENTOS  
MODELO 1

Parámetros NEC15-DS	
Factor de zonificación sísmica(z)	2
Tipo de suelo(Ps)	1
Región (Re)	Sierra
Coefficiente de Importancia(I)	7
Coefficiente de irregularidad en planta(op)	1
Coefficiente de irregularidad en elevación (oe)	1
Coefficiente de reducción y resistencia sísmica [R]	7

La aceleración del terreno es en la dirección del eje Z.

**FIGURA 5.5** NUMERACIÓN DE NODOS MODELO 1

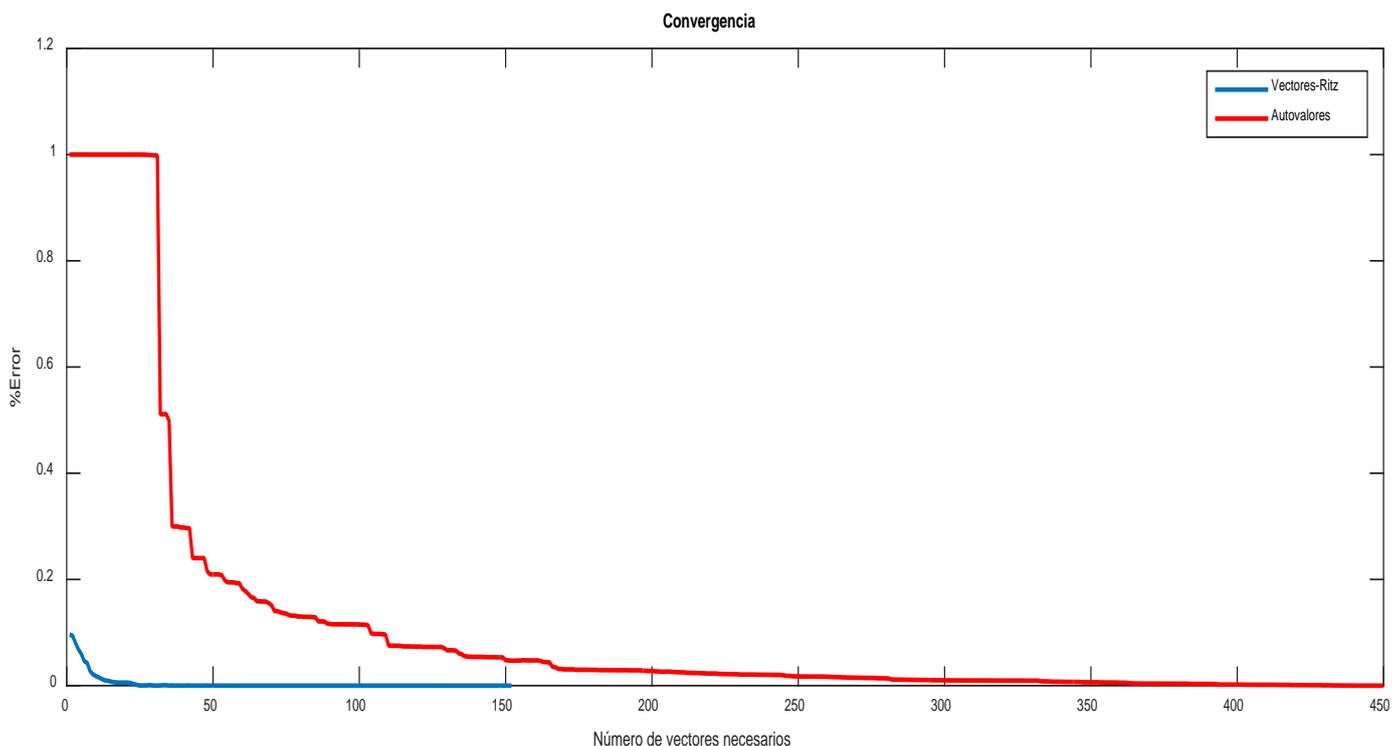


### 5.2.3 COMPARACIÓN DE RESULTADOS OBTENIDOS PROGRAMA Pórticos3D

#### Modelo1

#### 1. Número de Modos Necesarios

**FIGURA 5.6** VARIACIÓN DEL ERROR CON RESPECTO AL NÚMERO DE VECTORES RITZ Y LOS MODOS NATURALES PARA EL MÓDELO 1



Los vectores Ritz necesarios para el análisis dinámico son 152 con una tolerancia de  $8.3 \times 10^{-11}$  mientras que para obtener un error semejante aplicando el método de autovalores el número necesarios de modos serian 450, los modos Ritz convergen más rápido hacia la respuesta exacta empleando un número utilizando casi un tercio de los modos que emplea el método de autovalores.

#### 2. Periodos obtenidos

**TABLA 5. 14** COMPARACIÓN DE LOS 20 PRIMEROS PERIODOS DE VIBRACIÓN MATLAB VS SAP2000 MODELO 1

#Modo	Periodos T(s)			
	Vectores Ritz Matlab	Autovalores Matlab	Vectores Ritz SAP2000	Autovalores SAP2000
1	0,828127641	0,828127641	0,82816	0,82816
2	0,776732996	0,776732996	0,776418	0,776418
3	0,704171889	0,704171889	0,73405	0,73405

CONTINUACIÓN TABLA 5.14

4	0,372645488	0,372645488	0,403976	0,403976
5	0,35336179	0,35336179	0,379399	0,379399
6	0,263717367	0,263717367	0,263188	0,263188
7	0,245482887	0,245482887	0,245556	0,245556
8	0,231463895	0,231463895	0,23646	0,23646
9	0,210624488	0,210624488	0,232148	0,232148
10	0,204944969	0,204944969	0,216179	0,216179
11	0,198926061	0,198926061	0,215187	0,215187
12	0,191591842	0,191591842	0,210504	0,210504
13	0,150560068	0,150560068	0,168184	0,168184
14	0,149364805	0,149364805	0,161779	0,161779
15	0,147762834	0,147762834	0,157919	0,157919
16	0,145208788	0,145208788	0,144331	0,144331
17	0,1368462	0,1368462	0,139132	0,139132
18	0,134209513	0,134209513	0,1377	0,1377
19	0,129793945	0,129793945	0,136316	0,136316
20	0,124372851	0,124372851	0,132367	0,132367

**TABLA 5. 15** ERROR PORCENTUAL DE LOS PERIODOS DE VIBRACIÓN ENTRE LOS RESULTADOS DE MATLAB Y SAP2000 MODELO 1

#Modo	%Error Vectores Ritz Matlab	%Error Autovalores Matlab
1	0,003907336	0,003907336
2	0,04057045	0,04057045
3	4,070310118	4,070310118
4	7,755538076	7,755538076
5	6,862751301	6,862751301
6	0,201136324	0,201136324
7	0,02977442	0,02977442
8	2,11287551	2,11287551
9	9,271461295	9,271461295
10	5,196633955	5,196633955
11	7,556655133	7,556655133
12	8,984227579	8,984227579
13	10,47895861	10,47895861
14	7,6735518	7,6735518
15	6,431250461	6,431250461
16	0,608176925	0,608176925
17	1,642900508	1,642900508
18	2,534848886	2,534848886
19	4,784511464	4,784511464
20	6,039382322	6,039382322

### 3. Deformaciones Máximas combinadas

El programa Porticos3D calcula todas las deformaciones para cada nodo para el análisis de resultados se compararán solo las deformaciones máximas que se obtienen al comparar todas las deformaciones obtenidas con SAP2000 en cada dirección, estos resultados se compararan con los resultados obtenidos con el programa Porticos3D para el nodo correspondiente.

**TABLA 5. 16** COMPARACIÓN DE LAS DEFORMACIONES MÁXIMAS MATLAB VS SAP2000  
NODOS 2, 9, 12, 80 Y 78 MODELO 1

		Deformaciones Máximas			
		Vectores Ritz Matlab	Autovalores Matlab	Vectores Ritz SAP2000	Autovalores SAP2000
Nodo 2	$\Delta x(m)$	1,240E-05	1,444E-05	1,200E-05	1,200E-05
	$\Delta z(m)$	1,191E-03	1,195E-03	1,208E-03	1,208E-03
	$\Delta y(m)$	2,063E-05	2,042E-05	2,100E-05	2,100E-05
	$\Theta x(rad)$	3,834E-04	3,849E-04	3,860E-04	3,860E-04
	$\Theta z(rad)$	1,989E-06	2,656E-06	2,117E-06	2,117E-06
	$\Theta y(rad)$	2,384E-05	2,278E-05	2,800E-05	2,800E-05
Nodo 9	$\Delta x(m)$	2,253E-05	3,062E-05	2,300E-05	2,300E-05
	$\Delta z(m)$	2,669E-03	2,674E-03	2,664E-03	2,664E-03
	$\Delta y(m)$	2,582E-05	2,584E-05	2,600E-05	2,600E-05
	$\Theta x(rad)$	5,001E-04	5,000E-04	4,990E-04	4,990E-04
	$\Theta z(rad)$	3,205E-06	3,688E-06	3,185E-06	3,185E-06
	$\Theta y(rad)$	7,378E-06	4,818E-06	6,505E-06	6,505E-06
Nodo 12	$\Delta x(m)$	3,267E-05	4,895E-05	4,100E-05	4,100E-05
	$\Delta z(m)$	5,967E-03	5,965E-03	5,949E-03	5,949E-03
	$\Delta y(m)$	3,802E-05	3,801E-05	3,900E-05	3,900E-05
	$\Theta x(rad)$	1,763E-04	1,741E-04	1,750E-04	1,750E-04
	$\Theta z(rad)$	4,166E-06	1,633E-06	2,970E-06	2,970E-06
	$\Theta y(rad)$	5,688E-06	5,149E-06	6,563E-06	6,563E-06
Nodo 78	$\Delta x(m)$	4,454E-05	5,689E-05	5,100E-05	5,100E-05
	$\Delta z(m)$	5,858E-03	5,869E-03	5,893E-03	5,893E-03
	$\Delta y(m)$	9,623E-05	9,547E-05	9,700E-05	9,700E-05
	$\Theta x(rad)$	1,086E-04	1,066E-04	1,110E-04	1,110E-04
	$\Theta z(rad)$	3,890E-06	2,085E-06	2,795E-06	2,795E-06
	$\Theta y(rad)$	1,969E-05	1,638E-05	1,600E-05	1,600E-05
Nodo 80	$\Delta x(m)$	1,707E-05	1,782E-05	1,500E-05	1,500E-05
	$\Delta z(m)$	1,019E-03	1,020E-03	1,017E-03	1,017E-03
	$\Delta y(m)$	3,093E-05	3,095E-05	3,100E-05	3,100E-05
	$\Theta x(rad)$	4,537E-04	4,544E-04	4,530E-04	4,530E-04
	$\Theta z(rad)$	5,794E-06	6,197E-06	4,933E-06	4,933E-06
	$\Theta y(rad)$	6,115E-06	4,954E-06	7,167E-06	7,167E-06

Donde

$\Delta x$  Es la deformación traslacional del nodo en dirección x

$\Delta y$  Es la deformación traslacional del nodo en dirección y

$\Delta z$  Es la deformación traslacional del nodo en dirección z

$\Theta x$  Es la deformación rotacional del nodo en dirección x

$\Theta y$  Es la deformación rotacional del nodo en dirección y

$\Theta z$  Es la deformación rotacional del nodo en dirección z

**TABLA 5. 17 ERROR PORCENTUAL DE LAS DEFORMACIONES MÁXIMAS ENTRE LOS RESULTADOS DE MATLAB Y SAP2000 MODELO 1**

		%Error Vectores Ritz	%Error Autovalores
Nodo 2	$\Delta x$	3,3464	20,3682
	$\Delta z$	1,3858	1,0910
	$\Delta y$	1,7653	2,7853
	$\Theta x$	0,6631	0,2961
	$\Theta z$	6,0384	25,4713
	$\Theta y$	14,8485	18,6435
Nodo 9	$\Delta x$	2,0520	33,1109
	$\Delta z$	0,2050	0,3730
	$\Delta y$	0,6926	0,6040
	$\Theta x$	0,2186	0,1997
	$\Theta z$	0,6420	15,7804
	$\Theta y$	13,4236	25,9361
Nodo 12	$\Delta x$	20,3230	19,3951
	$\Delta z$	0,3076	0,2668
	$\Delta y$	2,5236	2,5270
	$\Theta x$	0,7525	0,5138
	$\Theta z$	40,2581	45,0147
	$\Theta y$	13,3386	21,5403
Nodo 78	$\Delta x$	12,6691	11,5434
	$\Delta z$	0,5920	0,4086
	$\Delta y$	0,7903	1,5813
	$\Theta x$	2,1908	3,9562
	$\Theta z$	39,1649	25,3859
	$\Theta y$	23,0810	2,4004
Nodo 80	$\Delta x$	13,7672	18,7694
	$\Delta z$	0,2015	0,3015
	$\Delta y$	0,2174	0,1546
	$\Theta x$	0,1517	0,3184
	$\Theta z$	17,4485	25,6194
	$\Theta y$	14,6719	30,8727

#### 4. Acciones Máximas combinadas

Se compararán solo las fuerzas máximas que se obtienen al comparar todos los elementos del pórtico obtenidas para Axial (P), Corte en X (V2), Corte en Z (V3), Torsión (T), Momento con respecto plano X-Y (M2), Momento con respecto al eje Y-Z (M3)

**TABLA 5. 18** COMPARACIÓN DE LAS ACCIONES MÁXIMAS MATLAB VS SAP2000  
ELEMENTOS 56, 106 Y 152 MODELO 1

		Fuerzas Máximas			
		Vectores Ritz Matlab	Autovalores Matlab	Vectores Ritz SAP2000	Autovalores SAP2000
Elemento 56	P(T)	4,6836	4,6810	4,6644	4,6644
	V2 (T)	0,0500	0,0350	0,0386	0,0386
	V3(T)	4,5064	4,5196	4,4983	4,4983
	T(T.m)	0,0214	0,0271	0,0278	0,0278
	M2(T.m)	9,6726	9,6984	9,6541	9,6541
	M3(T.m)	0,0880	0,0605	0,0624	0,0624
Elemento 106	P(T)	7,7950	7,8006	7,7949	7,7949
	V2 (T)	0,0865	0,1221	0,0756	0,0756
	V3(T)	3,4289	3,4396	3,4221	3,4221
	T(T.m)	0,0326	0,0342	0,0382	0,0382
	M2(T.m)	8,5583	8,5813	8,5411	8,5411
	M3(T.m)	0,0891	0,1349	0,1490	0,1490
Elemento 152	P(T)	0,2469	0,2545	0,2258	0,2258
	V2 (T)	2,9975	2,9992	2,9897	2,9897
	V3(T)	0,0464	0,0364	0,0446	0,0446
	T(T.m)	0,0065	0,0065	0,0057	0,0057
	M2(T.m)	0,0947	0,0752	0,0832	0,0832
	M3(T.m)	6,3225	6,3263	6,3061	6,3061

**TABLA 5. 19** ERROR PORCENTUAL DE LAS ACCIONES MÁXIMAS ENTRE LOS  
RESULTADOS DE MATLAB Y SAP2000 MODELO 1

		%Error Vectores Ritz	%Error Autovalores
Elemento 56	P	0,4115	0,3563
	V2	29,6363	9,3006
	V3	0,1806	0,4730
	T	23,0806	2,5097
	M2	0,1918	0,4585
	M3	40,8838	3,1558
Elemento 106	P	0,0015	0,0734
	V2	14,4667	61,4774
	V3	0,1993	0,5101
	T	14,6641	10,3001
	M2	0,2016	0,4713
	M3	40,1718	9,4704

## CONTINUACIÓN TABLA 5.19

Elemento 152	P	9,3652	12,7163
	V2	0,2594	0,3193
	V3	3,9869	18,2824
	T	13,9076	15,0652
	M2	13,7979	9,6061
	M3	0,2610	0,3209

**5. REACCIONES EN LA BASE****TABLA 5. 20** COMPARACIÓN REACCIONES EN LA BASE MATLAB VS SAP2000 MODELO 1

	Fuerzas Máximas en la Base			
	Vectores Ritz Matlab	Autovalores Matlab	Sap2000 Vectores Ritz	Sap2000 Autovalores
FX (T)	0,176934994	0,214864164	0,1132	0,1132
FZ(T)	38,42859151	38,48329945	38,6532	38,6532
FY(T)	0,599767647	0,671130436	0,2026	0,2026
Mx(T.m)	404,8782916	404,81861	406,89798	406,89798
Mz(T.m)	1,098967146	0,973978622	1,29117	1,29117
My(T.m)	241,1394117	241,4827041	239,41114	239,41114

**TABLA 5. 21** ERROR PORCENTUAL DE LAS REACCIONES EN LA BASE MODELO 1 ENTRE MATLAB Y SAP2000

	%Error Vectores Ritz Matlab vs SAP2000	%Error Autovalores Matlab vs SAP2000
FX	56,30299789	89,80933195
FZ	0,581086403	0,439551052
FY	196,0353638	231,2588529
Mx	0,496362353	0,511029819
Mz	14,8859448	24,56619793
My	0,721884424	0,865274718

**TABLA 5. 22** COMPARACIÓN REACCIONES EN LA BASE USANDO LA FUNCIÓN DISCRETIZACIÓN MODELO 1 MATLAB VS SAP2000

	Fuerzas Máximas en la Base			
	Vectores Ritz Matlab	Autovalores Matlab	Sap2000 Vectores Ritz	Sap2000 Autovalores
FX (T)	0,074386628	0,05226418	0,1132	0,1132
FZ(T)	38,49847699	38,41394015	38,6532	38,6532
FY(T)	0,050731874	0,050737592	0,2026	0,2026
Mx(T.m)	406,4935496	406,5497946	406,89798	406,89798
Mz(T.m)	0,792210857	0,485445953	1,29117	1,29117
My(T.m)	240,820625	240,5440676	239,41114	239,41114

**TABLA 5. 23** ERROR PORCENTUAL DE LAS REACCIONES EN LA BASE USANDO LA FUNCIÓN DISCRETIZACIÓN MODELO 1 ENTRE MATLAB Y SAP2000

	%Error Vectores Ritz Matlab vs SAP2000	%Error Autovalores Matlab vs SAP2000
FX	34,28743088	53,83022981
FZ	0,400285113	0,618991041
FY	74,95958813	74,95676587
Mx	0,099393574	0,085570678
Mz	38,64395418	62,40263068
My	0,588729925	0,473214227

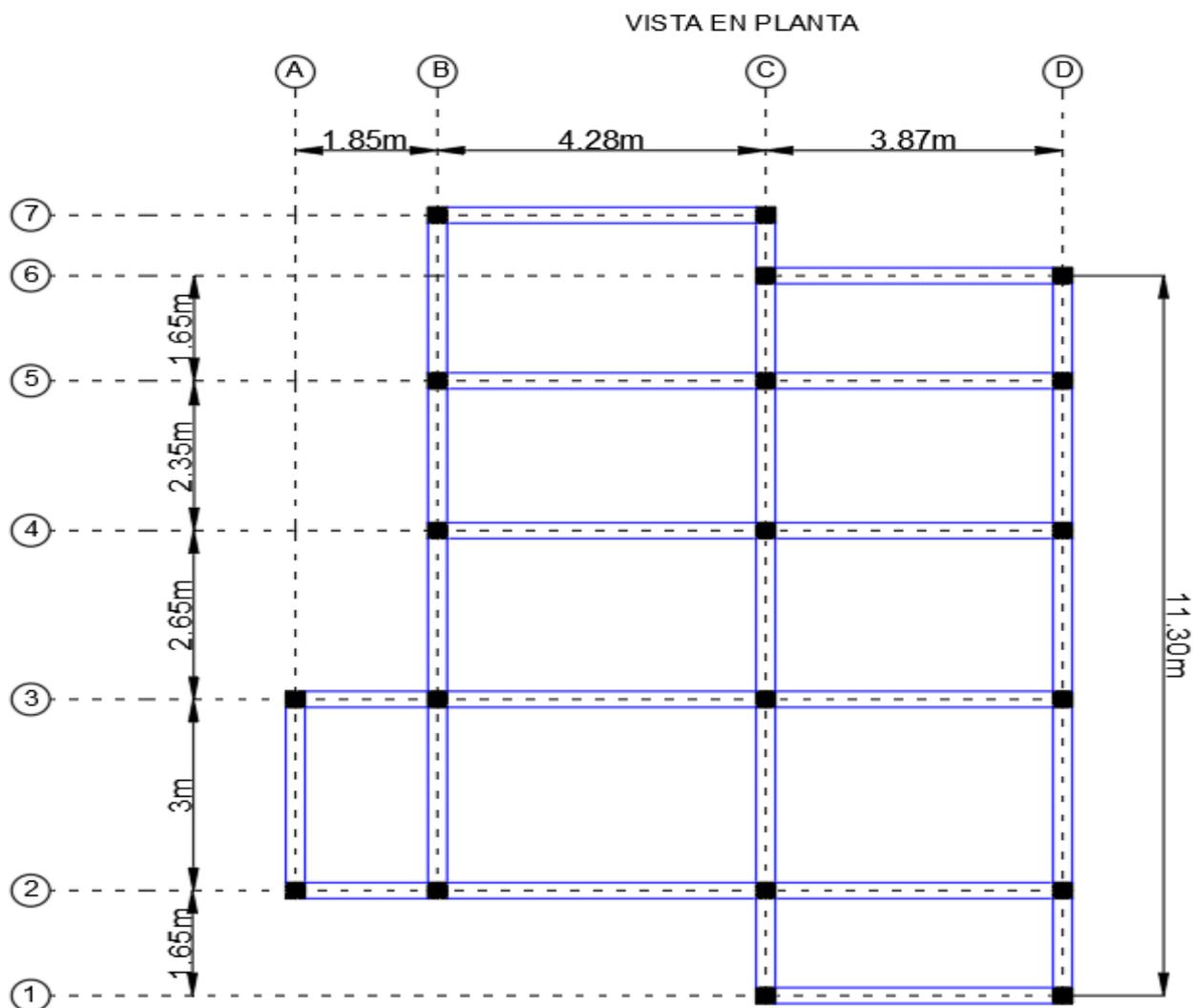
## 6. Factores de Participación Modal

**TABLA 5. 24** COMPARACIÓN MASA MODAL EFECTIVA MATLAB VS SAP2000 MODELO 1

Factores de Participación Modal							
Matlab Vectores Ritz	0,0001	82,7584	82,7596	82,7598	82,7600	82,7604	93,3377
Matlab Autovalores	0,0001	82,6778	82,6791	82,6793	82,6795	82,6798	93,2469
SAP2000 Vectores Ritz	0,0003	82,6063	82,6112	82,6114	82,6116	82,6121	92,9907
SAP2000 Autovalores	0,0003	82,6063	82,6112	82,6114	82,6116	82,6121	92,9907
Error% Masa Modal Efectiva Matlab vs SAP2000	55,9159	0,1841	0,1796	0,1796	0,1797	0,1795	0,3732

## 5.3 MODELO 2

FIGURA 5. 7 VISTA EN PLANTA MODELO 2



### 5.3.1 DEFINICIÓN DE PARÁMETROS MODELO 2

El módulo de elasticidad para cada elemento es de  $2,1 \times 10^6 T/m^2$  el peso específico del material es de  $2,4 T/m^3$  el espesor de la losa es de  $0,25 m$ , todos los pies de las columnas que se encuentran en la base del terreno se encuentran empotradas, las dimensiones de vigas y columnas y la carga que transfiere la losa a las vigas se presentan en las siguientes tablas.

TABLA 5. 25 DIMENSIONES DE VIGAS Y COLUMNAS MODELO 2

	Dimensiones	
	Base(m)	Altura(m)
Columnas	0,3	0,3
Vigas	0,4	0,4

**TABLA 5. 26 CARGAS SOBRE LAS VIGAS MODELO 2**

Cargas sobre Vigas (T/m)	Vigas (T/m)
Vigas Ejes A-B-1	0,27
Vigas Ejes A-B-2	0,31
Vigas Ejes B-C-2	0,66
Vigas Ejes C-D-2	1,03
Vigas Ejes A-B-3	0,31
Vigas Ejes B-C-3	1,24
Vigas Ejes C-D-3	1,2
Viga sejes B-C-4	1,1
Vigas Ejes C-D-4	1,07
Vigas Ejes B-C-5	1,09
Vigas Ejes C-D-5	0,91
Vigas Ejes C-D-6	0,3
Vigas Ejes B-C-7	0,57
Vigas Ejes A-2-3	0,36
Vigas Ejes A-3-4	0,44
Vigas Ejes A-4-5	0,39
Vigas Ejes A-5-7	0,44
Vigas Ejes B-1-2	0,28
Vigas Ejes B-2-3	1
Vigas Ejes B-3-4	0,89
Vigas Ejes B-4-5	0,79
Vigas Ejes B-5-7	0,73
Vigas Ejes C-1-2	0,28
Vigas Ejes C-2-3	0,5
Vigas Ejes C-3-4	0,45
Vigas Ejes C-4-5	0,4
Vigas Ejes B-5-6	0,3

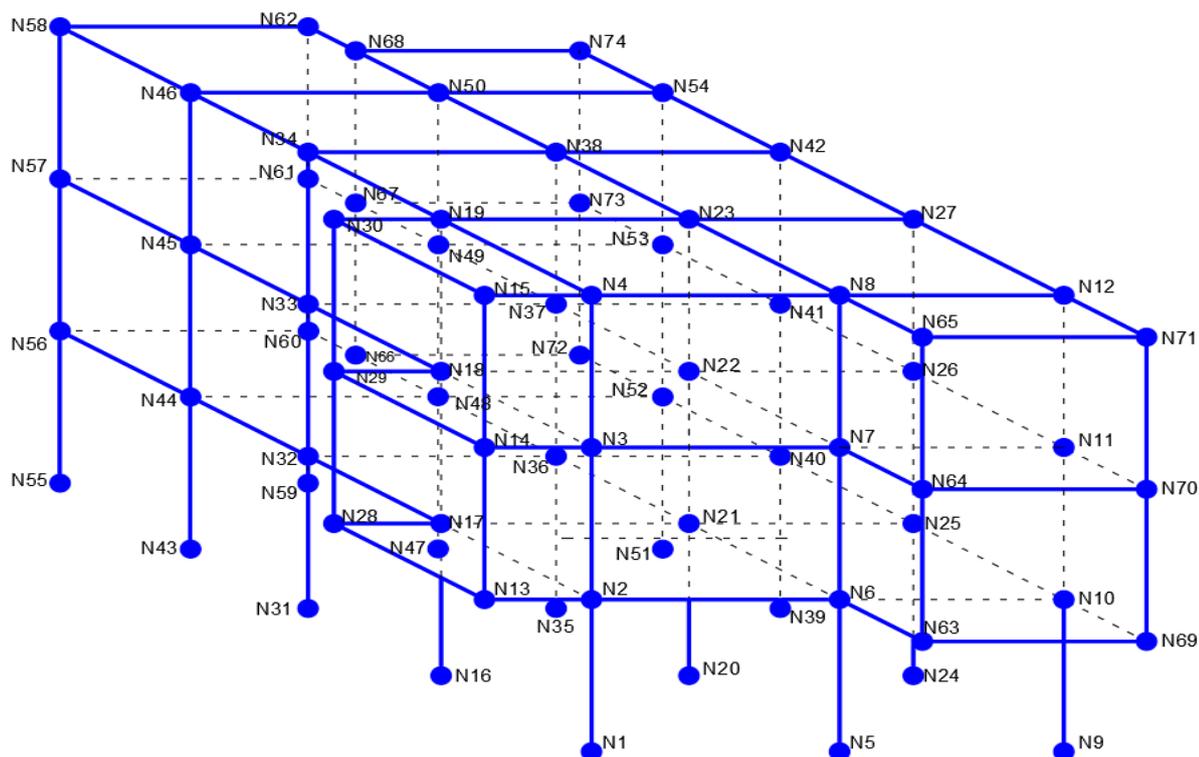
Los parámetros para obtener el espectro de desplazamientos son los siguientes

**TABLA 5. 27 FACTORES NEC-15 PARA OBTENER EL ESPECTRO DE DESPLAZAMIENTOS MODELO 2**

Parámetros NEC15-DS	
Factor de zonificación sísmica(z)	4
Tipo de suelo(Ps)	4
Región (Re)	Costa
Coficiente de Importancia(I)	1
Coficiente de irregularidad en planta(op)	0,9
Coficiente de irregularidad en elevación (oe)	1
Coficiente de reducción y resistencia sísmica [R]	6

La aceleración del terreno es en la dirección del eje Z.

**FIGURA 5. 8 NUMERACIÓN DE NODOS MODELO 2**

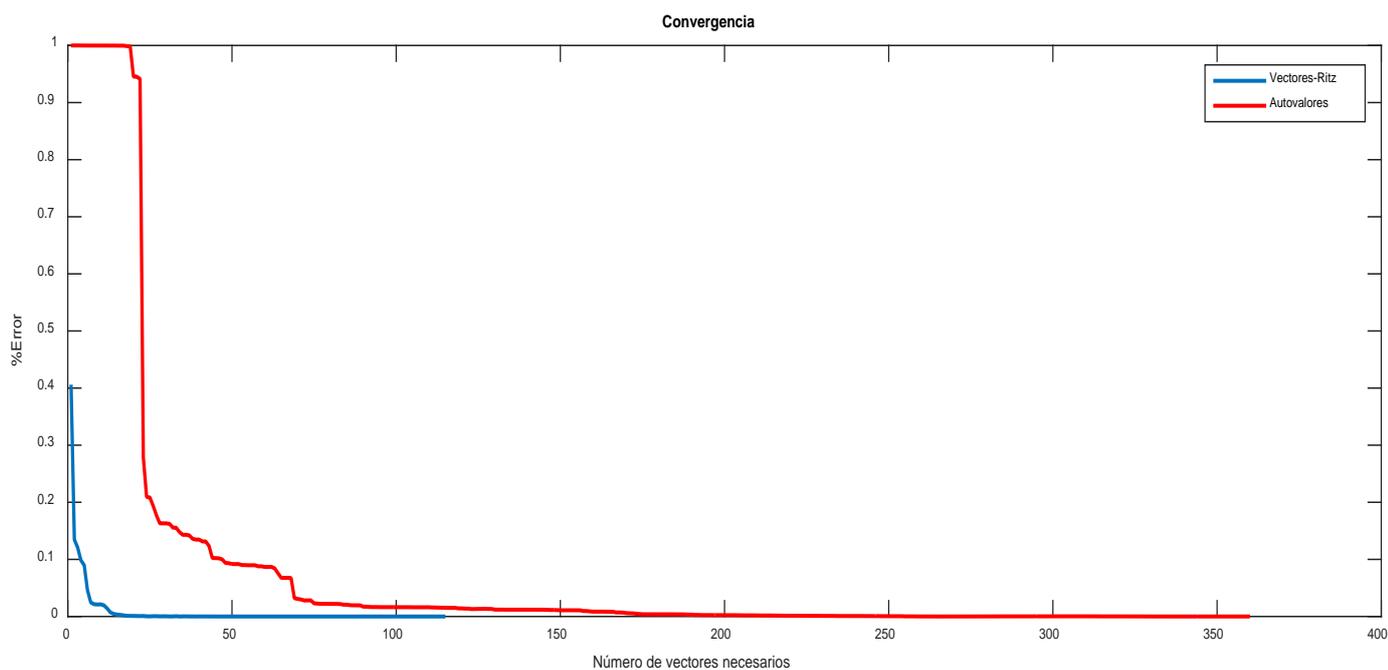


### 5.3.2 COMPARACIÓN DE RESULTADOS OBTENIDOS PROGRAMA Pórticos3D

#### Modelo 2

#### 1 Número de Modos Necesarios

**FIGURA 5.9 VARIACIÓN DEL ERROR CON RESPECTO AL NÚMERO DE VECTORES RITZ Y LOS MODOS NATURALES PARA EL MODELO 2**



## 2. Periodos obtenidos

**TABLA 5. 28** COMPARACIÓN DE LOS 20 PRIMEROS PERIODOS DE VIBRACIÓN MATLAB VS SAP2000 MODELO 2

#Modo	Periodos (s)			
	Vectores Ritz Matlab	Autovalores Matlab	Vectores Ritz SAP2000	Autovalores SAP2000
1	0,568297848	0,56829785	0,570662	0,570662
2	0,524527591	0,52452759	0,525151	0,525151
3	0,462661664	0,46266166	0,4822	0,4822
4	0,184475532	0,18447553	0,186564	0,186564
5	0,175306787	0,17530679	0,176999	0,176999
6	0,159790524	0,15979052	0,166326	0,166326
7	0,150828431	0,15082843	0,158296	0,158296
8	0,117398933	0,11739893	0,124502	0,124502
9	0,116457837	0,11645784	0,123176	0,123176
10	0,109615559	0,10961556	0,117937	0,117937
11	0,10680339	0,10680339	0,111891	0,111891
12	0,102143222	0,10214322	0,109027	0,109027
13	0,09376867	0,09376867	0,10115	0,10115
14	0,091607886	0,09160789	0,098305	0,098305
15	0,083572041	0,08357204	0,09628	0,09628
16	0,082597372	0,08259737	0,08932	0,08932
17	0,071317524	0,07131752	0,07935	0,07935
18	0,068206921	0,06820692	0,076653	0,076653
19	0,067792385	0,06779239	0,071246	0,071246
20	0,065711727	0,06571173	0,070652	0,070652

**TABLA 5. 29** ERROR PORCENTUAL DE LOS PERIODOS DE VIBRACIÓN ENTRE LOS RESULTADOS DE MATLAB Y SAP2000 MODELO 2

#Modo	%Error Vectores Ritz Matlab	%Error Autovalores Matlab
1	0,41428229	0,41428229
2	0,118710437	0,118710437
3	4,051915484	4,051915484
4	1,119437771	1,119437771
5	0,9560577	0,9560577
6	3,929316915	3,929316915
7	4,717471927	4,717471927
8	5,705183142	5,705183142
9	5,454116816	5,454116816
10	7,055835878	7,055835878
11	4,546934084	4,546934084
12	6,313828817	6,313828817
13	7,297409563	7,297409563
14	6,812587197	6,812587197

CONTINUACIÓN TABLA 5.29

15	13,19896035	13,19896035
16	7,526452873	7,526452873
17	10,12284273	10,12284273
18	11,01858928	11,01858928
19	4,847450425	4,847450425
20	6,992403691	6,992403691

### 3. Deformaciones Máximas combinadas

**TABLA 5. 30** COMPARACIÓN DE LAS DEFORMACIONES MÁXIMAS MATLAB VS SAP2000  
NODOS 28, 63 ,64 Y 65 MODELO 2

		Deformaciones Máximas			
		Vectores Ritz Matlab	Autovalores Matlab	Vectores Ritz SAP2000	Autovalores SAP2000
Nodo 28	$\Delta x(m)$	6,283E-04	4,241E-04	6,150E-04	6,150E-04
	$\Delta z(m)$	8,299E-03	8,581E-03	8,387E-03	8,387E-03
	$\Delta y(m)$	7,143E-04	1,031E-03	7,210E-04	7,210E-04
	$\Theta x(rad)$	7,027E-04	7,088E-04	7,070E-04	7,070E-04
	$\Theta z(rad)$	3,160E-04	4,991E-04	3,180E-04	3,180E-04
	$\Theta y(rad)$	3,335E-04	4,163E-04	3,510E-04	3,510E-04
Nodo 63	$\Delta x(m)$	1,167E-03	1,831E-03	1,197E-03	1,197E-03
	$\Delta z(m)$	7,583E-03	7,479E-03	7,591E-03	7,591E-03
	$\Delta y(m)$	2,066E-03	1,941E-03	2,068E-03	2,068E-03
	$\Theta x(rad)$	1,359E-03	1,288E-03	1,358E-03	1,358E-03
	$\Theta z(rad)$	5,995E-05	5,852E-05	5,900E-05	5,900E-05
	$\Theta y(rad)$	1,103E-04	1,990E-04	1,220E-04	1,220E-04
Nodo 64	$\Delta x(m)$	1,563E-03	2,320E-03	1,591E-03	1,591E-03
	$\Delta z(m)$	1,339E-02	1,321E-02	1,339E-02	1,339E-02
	$\Delta y(m)$	2,047E-03	1,922E-03	2,050E-03	2,050E-03
	$\Theta x(rad)$	1,359E-03	1,299E-03	1,360E-03	1,360E-03
	$\Theta z(rad)$	7,574E-05	1,349E-04	7,600E-05	7,600E-05
	$\Theta y(rad)$	1,192E-04	1,990E-04	1,360E-04	1,360E-04
Nodo 65	$\Delta x(m)$	1,850E-03	2,378E-03	1,877E-03	1,877E-03
	$\Delta z(m)$	1,712E-02	1,685E-02	1,713E-02	1,713E-02
	$\Delta y(m)$	2,024E-03	1,899E-03	2,027E-03	2,027E-03
	$\Theta x(rad)$	1,204E-03	1,141E-03	1,209E-03	1,209E-03
	$\Theta z(rad)$	4,074E-05	7,408E-05	4,100E-05	4,100E-05
	$\Theta y(rad)$	1,111E-04	1,960E-04	1,320E-04	1,320E-04

**TABLA 5. 31 ERROR PORCENTUAL DE LAS DEFORMACIONES MÁXIMAS ENTRE LOS RESULTADOS DE MATLAB Y SAP2000 MODELO 2**

		%Error Vectores Ritz	%Error Autovalores
Nodo 28	$\Delta x$	2,16131	31,03377
	$\Delta z$	1,05156	2,30974
	$\Delta y$	0,92775	43,01341
	$\Theta x$	0,61133	0,25090
	$\Theta z$	0,64269	56,93780
	$\Theta y$	4,98850	18,61216
Nodo 63	$\Delta x$	2,52466	52,92748
	$\Delta z$	0,09989	1,47252
	$\Delta y$	0,08607	6,15347
	$\Theta x$	0,05852	5,15989
	$\Theta z$	1,61709	0,81926
	$\Theta y$	9,56516	63,14203
Nodo 64	$\Delta x$	1,78748	45,82995
	$\Delta z$	0,02336	1,40347
	$\Delta y$	0,13258	6,26469
	$\Theta x$	0,05579	4,46310
	$\Theta z$	0,34253	77,54957
	$\Theta y$	12,33234	46,35755
Nodo 65	$\Delta x$	1,44222	26,70363
	$\Delta z$	0,02531	1,59283
	$\Delta y$	0,16396	6,32248
	$\Theta x$	0,38022	5,58522
	$\Theta z$	0,62576	80,67357
	$\Theta y$	15,86543	48,50257

#### 4. Acciones Máximas combinadas

**TABLA 5. 32 COMPARACIÓN DE LAS ACCIONES MÁXIMAS MATLAB VS SAP2000 ELEMENTOS 56, 74 Y 109 MODELO 2**

		Fuerzas Máximas			
		Vectores Ritz Matlab	Autovalores Matlab	Vectores Ritz SAP2000	Autovalores SAP2000
Elemento 56	P(T)	1,483174755	1,002882702	1,5026	1,5026
	V2 (T)	0,20577281	0,383722724	0,1951	0,1951
	V3(T)	4,372176609	4,472791654	4,4021	4,4021
	T(T.m)	0,011695563	0,019348735	0,01365	0,01365
	M2(T.m)	6,752139049	6,90646919	6,79799	6,79799
	M3(T.m)	0,350973994	0,656669557	0,33233	0,33233
Elemento 74	P(T)	17,54033499	17,00917175	17,5641	17,5641
	V2 (T)	0,226356205	0,401513876	0,2109	0,2109
	V3(T)	3,867688044	3,831988424	3,872	3,872
	T(T.m)	0,016059392	0,033976221	0,01742	0,01742
	M2(T.m)	6,258355662	6,196498766	6,26511	6,26511
	M3(T.m)	0,342782996	0,615004943	0,32116	0,32116

CONTINUACIÓN TABLA 5.32

Elemento 109	P(T)	1,579684151	1,578581652	1,5738	1,5738
	V2 (T)	9,699773077	9,651112492	9,6695	9,6695
	V3(T)	0,162740074	0,169097483	0,1452	0,1452
	T(T.m)	0,484742772	0,511683762	0,47684	0,47684
	M2(T.m)	0,113766207	0,124305936	0,14552	0,14552
	M3(T.m)	8,327949755	8,265827616	8,31814	8,31814

**TABLA 5. 33** ERROR PORCENTUAL DE LAS ACCIONES MÁXIMAS MODELO 2 ENTRE LOS RESULTADOS DE MATLAB Y SAP2000

		%Error Vectores Ritz	%Error Autovalores
Elemento 56	P	1,29277554	33,25684135
	V2	5,470430632	96,6800226
	V3	0,679752651	1,605862059
	T	14,3182213	41,74897331
	M2	0,674478064	1,595753885
	M3	5,610084666	97,59562981
Elemento 74	P	0,135304437	3,159446001
	V2	7,328689141	90,38116437
	V3	0,111362489	1,033356827
	T	7,810605812	95,04145153
	M2	0,107808775	1,095132151
	M3	6,73278002	91,49487576
Elemento 109	P	0,373881724	0,303828416
	V2	0,313077996	0,190159867
	V3	12,07994075	16,45832137
	T	1,657321618	7,30722291
	M2	21,82091339	14,57810884
	M3	0,117932071	0,628895211

**5. Reacciones en la Base.****TABLA 5. 34** COMPARACIÓN REACCIONES EN LA BASE MATLAB VS SAP2000 MODELO 2

	Fuerzas Máximas en la Base			
	Vectores Ritz Matlab	Autovalores Matlab	Sap2000 Vectores Ritz	Sap2000 Autovalores
FX (T)	4,255859967	7,616260931	4,1126	4,1126
FZ(T)	56,76167293	56,41051637	56,9218	56,9218
FY(T)	0,446022533	0,38181667	0,4735	0,4735
Mx(T.m)	378,9799571	376,2901672	382,07281	382,07281
Mz(T.m)	28,20481155	50,30456648	28,562	28,562
My(T.m)	323,1476991	321,1485432	328,4108	328,4108

**TABLA 5. 35** ERROR PORCENTUAL DE LAS REACCIONES EN LA BASE MODELO2 ENTRE MATLAB Y SAP2000

	%Error Vectores Ritz Matlab vs SAP2000	%Error Autovalores Matlab vs SAP2000
FX	3,483440329	85,19333101
FZ	0,281310631	0,898221117
FY	5,803055328	19,36289964
Mx	0,809493056	1,513492363
Mz	1,250572256	76,12410363
My	1,602596791	2,21133313

**TABLA 5. 36** COMPARACIÓN REACCIONES EN LA BASE USANDO LA FUNCIÓN DISCRETIZACIÓN MODELO 2 MATLAB VS SAP2000

	Fuerzas Máximas en la Base			
	Vectores Ritz Matlab	Autovalores Matlab	Sap2000 Vectores Ritz	Sap2000 Autovalores
FX (T)	4,207819261	5,775749512	4,1126	4,1126
FZ(T)	57,03378784	56,85513196	56,9218	56,9218
FY(T)	0,445262286	0,429444252	0,4735	0,4735
Mx(T.m)	383,3198513	382,4353324	382,07281	382,07281
Mz(T.m)	28,12566703	38,5556649	28,562	28,562
My(T.m)	324,696866	323,6797671	328,4108	328,4108

**TABLA 5. 37** ERROR PORCENTUAL DE LAS REACCIONES EN LA BASE USANDO LA FUNCIÓN DISCRETIZACIÓN MODELO 2 ENTRE MATLAB Y SAP2000

	%Error Vectores Ritz Matlab vs SAP2000	%Error Autovalores Matlab vs SAP2000
FX	2,315305665	40,44034216
FZ	0,196739807	0,117122159
FY	5,963614427	9,30427614
Mx	0,32638838	0,094883078
Mz	1,52766953	34,98937363
My	1,130880586	1,440583839

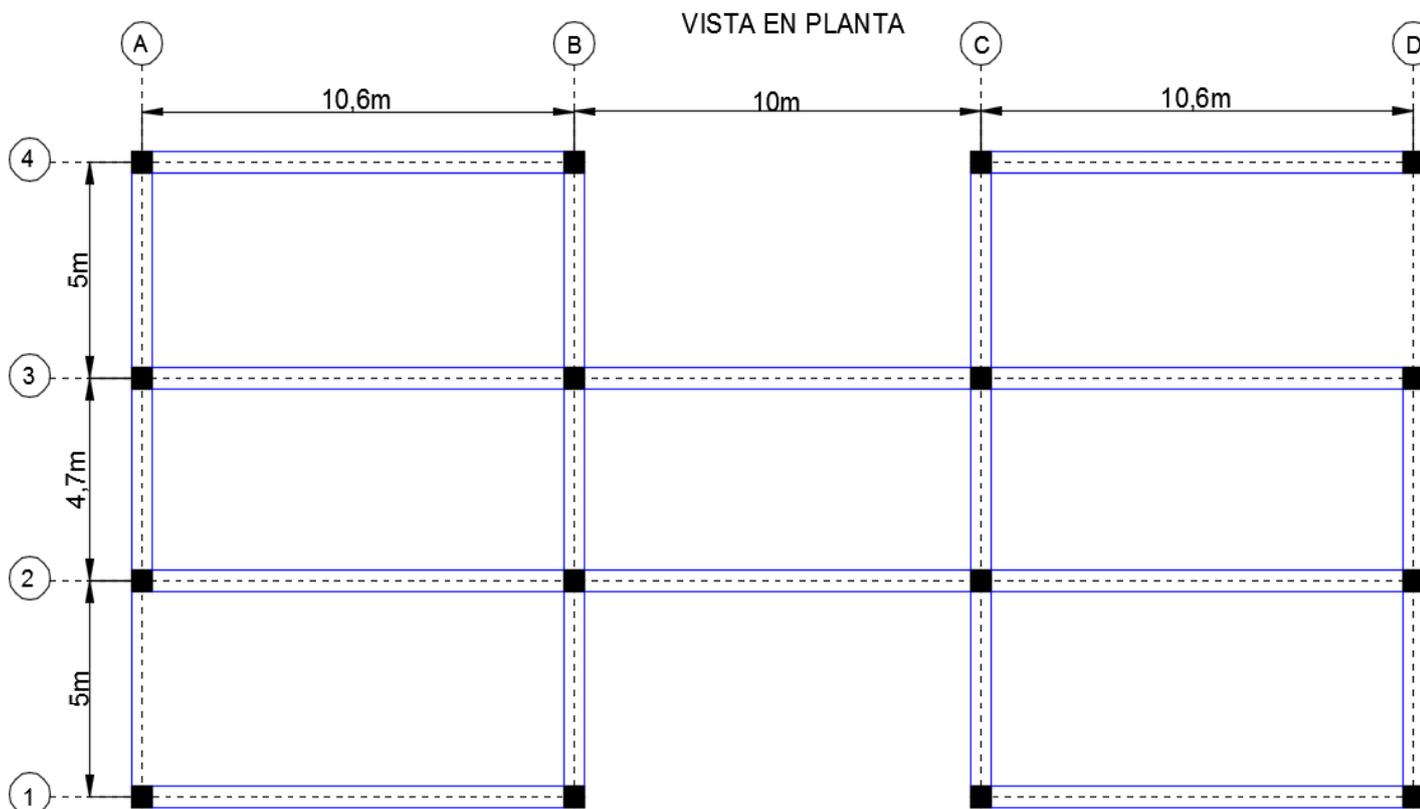
## 6. Factores de Participación Modal

**TABLA 5. 38** COMPARACIÓN MASA MODAL EFECTIVA MATLAB VS SAP2000 MODELO 2

Factores de Participación Modal		
Matlab Vectores Ritz	0,683593282	91,33881766
Matlab Autovalores	0,683573336	91,33615259
SAP2000 Vectores Ritz	0,6257	91,1076
SAP2000 Autovalores	0,6257	91,1076
%Error Vectores RITZ Matlab vs SAP2000	9,252562206	0,253785262
%Error Autovalores Matlab vs SAP2000	9,249374428	0,250860067

## 5.4 MODELO 3

FIGURA 5. 10 VISTA EN PLANTA MODELO 3



### 5.4.1 DEFINICIÓN DE PARÁMETROS MODELO 3

El módulo de elasticidad para cada elemento es de  $2,1 \times 10^6 T/m^2$  el pesi específico del material es de  $2,4 T/m^3$ , el espesor de la losa es de  $0,3 m$  las dimensiones de vigas y columnas y la carga que transfiere la losa a las vigas se presentan en las siguientes tablas.

TABLA 5. 39 DIMENSIONES DE VIGAS Y COLUMNAS MODELO 3

Dimensiones Columnas		
Columnas Ejes	a(m)	h(m)
A-1	0,31	0,31
A-2	0,34	0,34
A-3	0,34	0,34
A-4	0,31	0,31
B-1	0,31	0,31
B-2	0,38	0,38
B-3	0,38	0,38
B-4	0,31	0,31
C-1	0,31	0,31
C-2	0,38	0,38

CONTINUACIÓN TABLA 5.39

C-3	0,38	0,38
C-4	0,31	0,31
D-1	0,31	0,31
D-2	0,34	0,34
D-3	0,38	0,38
D-4	0,31	0,31
Vigas	0,5	0,5

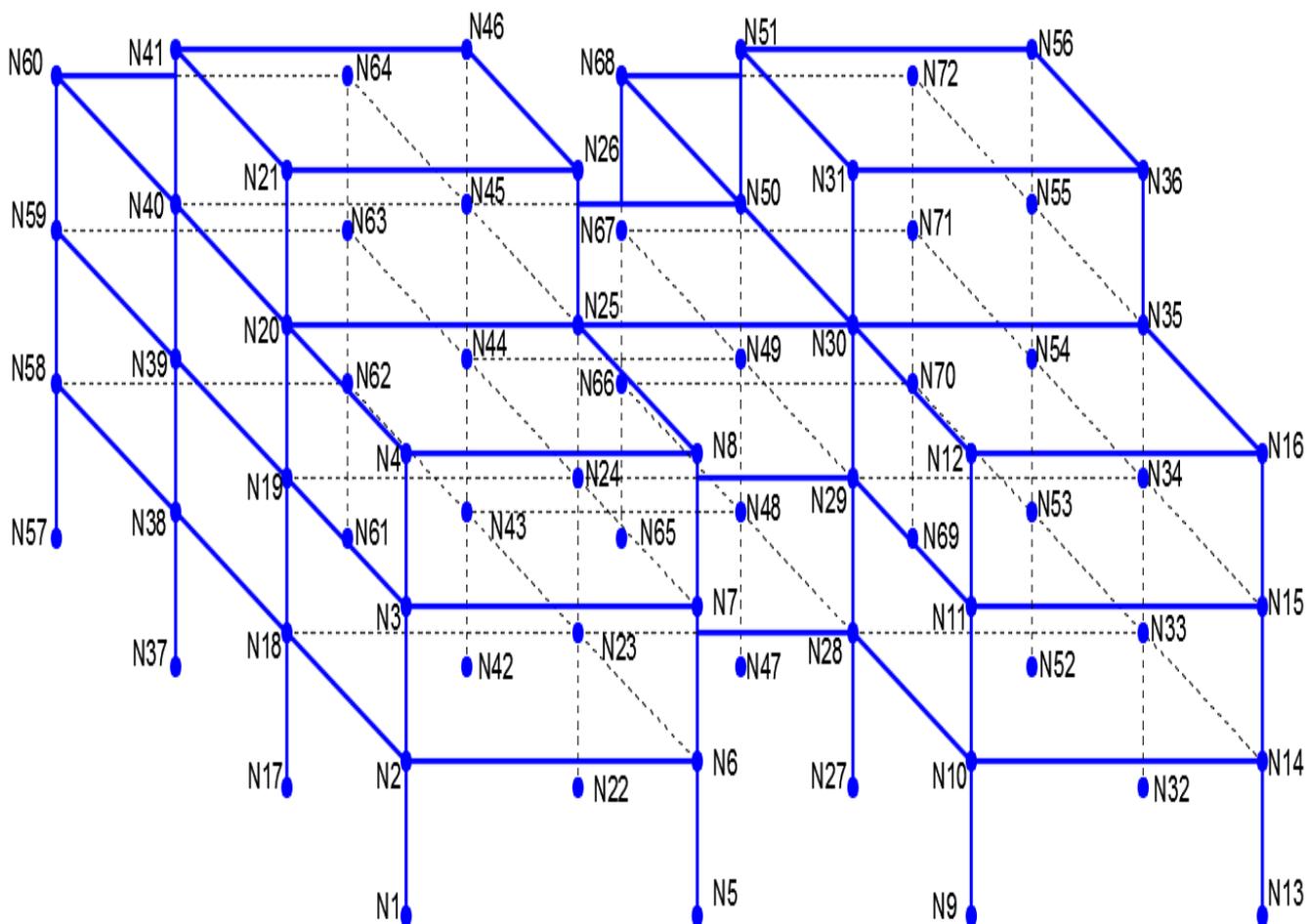
TABLA 5. 40 CARGAS SOBRE LAS VIGAS MODELO 3

Cargas	Sobres	Vigas
Piso	Ejes	Carga(T/m)
1-3	A-B-1	1,27765041
1-3	A-B-2	2,48984048
4	A-B-2	1,27765041
1-3	A-B-3	2,48984048
4	A-B-3	1,21219007
1-3	A-B-4	1,27765041
1-3	B-C-1	1,265
1-3	B-C-2	2,4541
1-3	B-C-3	1,1891
1-3	C-D-1	1,27765041
1-3	C-D-2	2,48984048
4	C-D-2	1,27765041
1-3	C-D-3	2,48984048
4	C-D-3	1,21219007
1-3	C-D-4	1,27765041
1-3	A-1-2	0,92
1-4	A-2-3	0,8648
1-3	A-3-4	0,92
1-3	B1-2	1,84
1-3	B2-3	1,7296
4	B2-3	0,8648
1-3	B3-4	0,92
1-3	C1-2	1,84
1-3	C2-3	1,7296
4	C2-3	0,8648
1-3	C3-4	0,92
1-3	D1-2	0,92
1-4	D2-3	0,8648
1-3	D3-4	0,92

**TABLA 5. 41** FACTORES NEC-15 PARA OBTENER EL ESPECTRO DE DESPLAZAMIENTOS  
**MODELO 3**

Parámetros NEC15-DS	
Factor de zonificación sísmica(z)	4
Tipo de suelo(Ps)	4
Región (Re)	Costa
Coefficiente de Importancia(I)	1
Coefficiente de irregularidad en planta(op)	0,9
Coefficiente de irregularidad en elevación (oe)	0,9
Coefficiente de reducción y resistencia sísmica [R]	6

**FIGURA 5.11** NUMERACIÓN DE NODOS MODELO 3

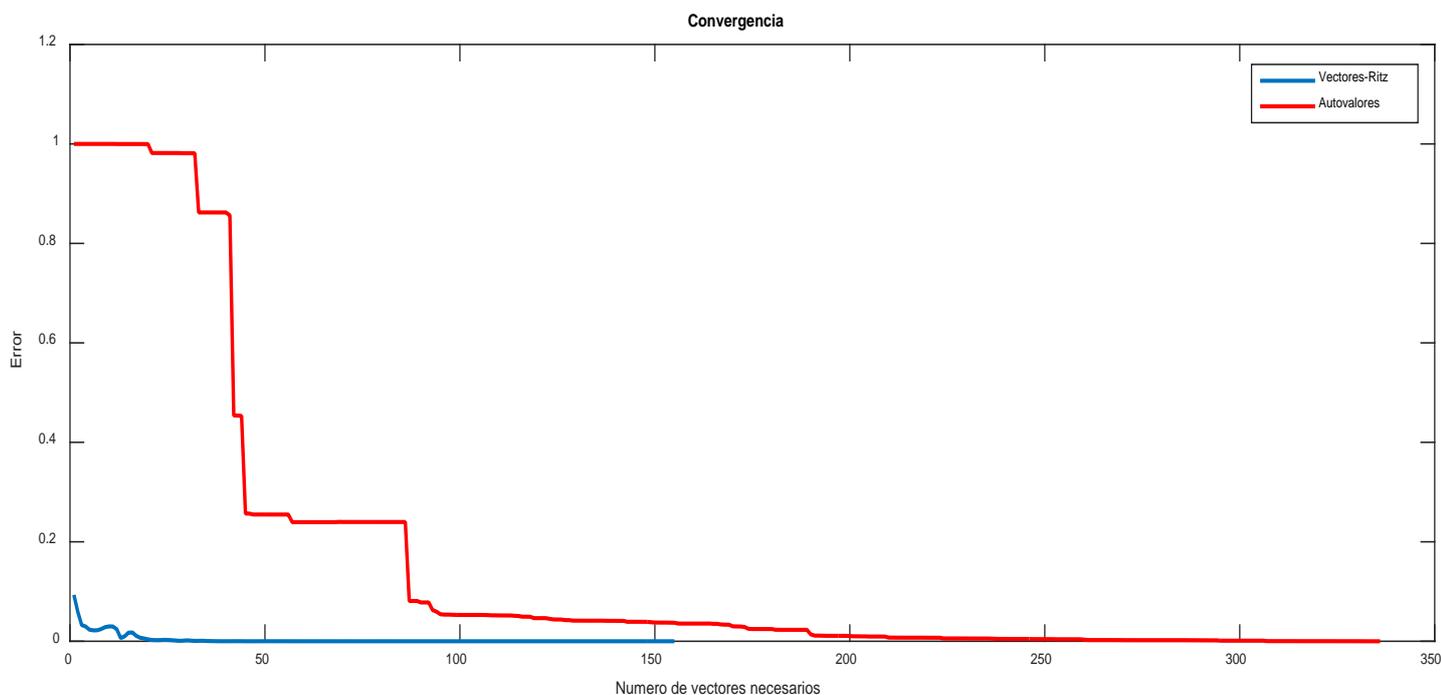


### 5.4.2 COMPARACIÓN DE RESULTADOS OBTENIDOS PROGRAMA Pórticos3D

#### Modelo3

#### 1. Número de Modos Necesarios

**FIGURA 5.12** VARIACIÓN DEL ERROR CON RESPECTO AL NÚMERO DE VECTORES RITZ Y LOS MODOS NATURALES PARA EL MODELO 3



#### 2. Periodos obtenidos

**TABLA 5. 42** COMPARACIÓN DE LOS 20 PRIMEROS PERIODOS DE VIBRACIÓN MATLAB VS SAP2000 MODELO 3

#Modo	Periodos (s)			
	Vectores Ritz Matlab	Autovalores Matlab	Vectores Ritz SAP2000	Autovalores SAP2000
1	0,979262579	0,979262579	0,978155	0,978155
2	0,842862768	0,842862768	0,841326	0,841326
3	0,803403916	0,803403916	0,835735	0,835735
4	0,528506996	0,528506996	0,642238	0,642238
5	0,519830027	0,519830027	0,590254	0,590254
6	0,372433893	0,372433893	0,412915	0,412915
7	0,348577032	0,348577032	0,349674	0,349674
8	0,329143839	0,329143839	0,341413	0,341413
9	0,302048778	0,302048778	0,318134	0,318134
10	0,298578196	0,298578196	0,296257	0,296257
11	0,295337224	0,295337224	0,294527	0,294527
12	0,277027905	0,277027905	0,283773	0,283773

CONTINUACIÓN TABLA 5.42

13	0,274759818	0,274759818	0,2784	0,2784
14	0,246248035	0,246248035	0,273697	0,273697
15	0,228917771	0,228917771	0,273152	0,273152
16	0,218511267	0,218511267	0,240872	0,240872
17	0,214969945	0,214969945	0,221075	0,221075
18	0,211676422	0,211676422	0,21612	0,21612
19	0,208594061	0,208594061	0,21471	0,21471
20	0,207740049	0,207740049	0,21335	0,21335

**TABLA 5. 43** ERROR PORCENTUAL DE LOS PERIODOS DE VIBRACIÓN MODELO 3 ENTRE  
LOS RESULTADOS DE MATLAB Y SAP2000

#Modo	%Error Vectores Ritz Matlab	%Error Autovalores Matlab
1	0,113231468	0,113231468
2	0,182660257	0,182660257
3	3,868580851	3,868580851
4	17,7085448	17,7085448
5	11,93113021	11,93113021
6	9,803738567	9,803738567
7	0,313711728	0,313711728
8	3,593642018	3,593642018
9	5,056115221	5,056115221
10	0,783507433	0,783507433
11	0,275093335	0,275093335
12	2,376933277	2,376933277
13	1,307536774	1,307536774
14	10,02896076	10,02896076
15	16,19399782	16,19399782
16	9,283242791	9,283242791
17	2,761531072	2,761531072
18	2,056069601	2,056069601
19	2,848464791	2,848464791
20	2,629459035	2,629459035

### 3. Deformaciones Máximas combinadas

**TABLA 5. 44** COMPARACIÓN DE LAS DEFORMACIONES MÁXIMAS MATLAB VS SAP2000  
NODOS 12, 36, 53 Y 64 MODELO 3

		Deformaciones Máximas			
		Vectores Ritz Matlab	Autovalores Matlab	Vectores Ritz SAP2000	Autovalores SAP2000
Nodo 12	$\Delta x(m)$	4,045E-02	4,039E-02	4,059E-02	4,059E-02
	$\Delta z(m)$	1,605E-04	1,689E-04	1,630E-04	1,630E-04
	$\Delta y(m)$	1,811E-04	1,812E-04	1,860E-04	1,860E-04
	$\Theta x(rad)$	3,044E-05	3,145E-05	3,100E-05	3,100E-05
	$\Theta z(rad)$	1,128E-03	1,131E-03	1,128E-03	1,128E-03
	$\Theta y(rad)$	7,350E-04	7,013E-04	6,390E-04	6,390E-04
Nodo 36	$\Delta x(m)$	4,955E-02	4,961E-02	4,956E-02	4,956E-02
	$\Delta z(m)$	6,577E-04	6,811E-04	7,250E-04	7,250E-04
	$\Delta y(m)$	2,465E-04	2,471E-04	2,530E-04	2,530E-04
	$\Theta x(rad)$	1,792E-05	2,485E-05	9,837E-06	9,837E-06
	$\Theta z(rad)$	7,010E-04	7,034E-04	6,930E-04	6,930E-04
	$\Theta y(rad)$	1,242E-04	1,276E-04	7,500E-05	7,500E-05
Nodo 53	$\Delta x(m)$	1,454E-02	1,452E-02	1,457E-02	1,457E-02
	$\Delta z(m)$	2,412E-04	2,235E-04	2,520E-04	2,520E-04
	$\Delta y(m)$	1,209E-04	1,211E-04	1,250E-04	1,250E-04
	$\Theta x(rad)$	1,974E-05	1,965E-05	2,200E-05	2,200E-05
	$\Theta z(rad)$	3,653E-03	3,649E-03	3,637E-03	3,637E-03
	$\Theta y(rad)$	1,076E-04	1,260E-04	8,800E-05	8,800E-05
Nodo 64	$\Delta x(m)$	4,102E-02	4,101E-02	4,119E-02	4,119E-02
	$\Delta z(m)$	2,502E-04	2,445E-04	2,000E-04	2,000E-04
	$\Delta y(m)$	1,868E-04	1,868E-04	1,900E-04	1,900E-04
	$\Theta x(rad)$	3,471E-05	3,437E-05	3,400E-05	3,400E-05
	$\Theta z(rad)$	1,138E-03	1,138E-03	1,138E-03	1,138E-03
	$\Theta y(rad)$	6,047E-04	6,529E-04	5,940E-04	5,940E-04

**TABLA 5. 45** ERROR PORCENTUAL DE LAS DEFORMACIONES MÁXIMAS ENTRE LOS  
RESULTADOS DE MATLAB Y SAP2000 MODELO 3

		%Error Vectores Ritz	%Error Autovalores
Nodo 12	$\Delta x$	0,356589184	0,496305709
	$\Delta z$	1,522075843	3,648397311
	$\Delta y$	2,633613292	2,555523661
	$\Theta x$	1,796447328	1,441007482
	$\Theta z$	0,00921774	0,29664124
	$\Theta y$	15,03127356	9,746667754

CONTINUACIÓN TABLA 5.45

Nodo 36	$\Delta x$	0,023800276	0,093780426
	$\Delta z$	9,282705791	6,050294745
	$\Delta y$	2,572299904	2,315389828
	$\Theta x$	82,20939448	152,5864656
	$\Theta z$	1,154166256	1,504908944
	$\Theta y$	65,54237201	70,07030701
Nodo 53	$\Delta x$	0,214703713	0,337280894
	$\Delta z$	4,296693429	11,29752273
	$\Delta y$	3,26501794	3,153652185
	$\Theta x$	10,25939874	10,66705434
	$\Theta z$	0,427148377	0,33675225
	$\Theta y$	22,29981158	43,15770068
Nodo 64	$\Delta x$	0,404702744	0,43803434
	$\Delta z$	25,09109526	22,26879098
	$\Delta y$	1,70484232	1,695317514
	$\Theta x$	2,078020664	1,078978107
	$\Theta z$	0,033017809	0,037004149
	$\Theta y$	1,803581568	9,921621384

#### 4. Acciones Máximas combinadas

**TABLA 5. 46** COMPARACIÓN DE LAS ACCIONES MÁXIMAS MATLAB VS SAP2000  
ELEMENTOS 50, 54 Y 58 MODELO 3

		Fuerzas Máximas			
		Vectores Ritz Matlab	Autovalores Matlab	Vectores Ritz SAP2000	Autovalores SAP2000
Elemento 50	P(T)	0,83864359	0,810406136	0,8962	0,8962
	V2 (T)	16,06118472	16,0365472	16,1227	16,1227
	V3(T)	0,162321294	0,126819531	0,1289	0,1289
	T(T.m)	0,046156228	0,05003018	0,05559	0,05559
	M2(T.m)	0,227755745	0,172967012	0,18865	0,18865
	M3(T.m)	27,85207922	27,81350545	27,93847	27,93847
Elemento 54	P(T)	0,834544555	0,809283598	0,8985	0,8985
	V2 (T)	16,05907977	16,03534701	16,1215	16,1215
	V3(T)	0,359615105	0,189391942	0,2691	0,2691
	T(T.m)	0,062224408	0,078724428	0,05165	0,05165
	M2(T.m)	0,204377623	0,275834514	0,12843	0,12843
	M3(T.m)	27,85342131	27,81540688	27,94035	27,94035
Elemento 58	P(T)	9,784743435	9,796008082	10,1119	10,1119
	V2 (T)	9,433363426	9,420456971	9,495	9,495
	V3(T)	0,2213183	0,201966111	0,2286	0,2286
	T(T.m)	0,059076721	0,06915209	0,04828	0,04828
	M2(T.m)	0,346590186	0,287795835	0,32622	0,32622
	M3(T.m)	16,98890153	16,96662074	17,06596	17,06596

**TABLA 5. 47 ERROR PORCENTUAL DE LAS ACCIONES MÁXIMAS MODELO 3 ENTRE LOS RESULTADOS DE MATLAB Y SAP2000**

		%Error Vectores Ritz	%Error Autovalores
Elemento 50	P	6,422272942	9,573071144
	V2	0,381544543	0,53435713
	V3	25,92807885	1,614017981
	T	16,97026812	10,00147468
	M2	20,72925773	8,313271947
	M3	0,309217993	0,447284869
Elemento 54	P	7,118023926	9,929482659
	V2	0,38718626	0,53439811
	V3	33,63623373	29,62023717
	T	20,47320053	52,41902744
	M2	59,13542272	114,7742073
	M3	0,311122407	0,447178074
Elemento 58	P	3,235361946	3,123962049
	V2	0,649147704	0,785076665
	V3	3,185345585	11,65087028
	T	22,36272038	43,2313384
	M2	6,24430936	11,77860492
	M3	0,451533186	0,58209007

## 5. Reacciones en la Base

**TABLA 5. 48 COMPARACIÓN REACCIONES EN LA BASE MATLAB VS SAP2000 MODELO 3**

	Fuerzas Máximas en la Base			
	Vectores Ritz Matlab	Autovalores Matlab	Sap2000 Vectores Ritz	Sap2000 Autovalores
FX (T)	157,2414538	157,3756792	158,5982	158,5982
FZ(T)	0,052916032	0,069482684	0,1656	0,1656
FY(T)	0,00827924	0,0081693	0,0117	0,0117
Mx(T.m)	0,38745967	0,52071323	0,62098	0,62098
Mz(T.m)	1200,765106	1200,581153	1210,60004	1210,60004
My(T.m)	1155,724685	1156,711242	1186,22363	1186,22363

**TABLA 5. 49 ERROR PORCENTUAL DE LAS REACCIONES EN LA BASE ENTRE MATLAB Y SAP2000 MODELO3**

	%Error Vectores Ritz Matlab vs SAP2000	%Error Autovalores Matlab vs SAP2000
FX	0,855461312	0,770828939
FZ	68,04587463	58,04185732
FY	29,23726839	30,1769242
Mx	37,60512903	16,1465378
Mz	0,812401619	0,82759676
My	2,571095712	2,487927849

**TABLA 5. 50** COMPARACIÓN REACCIONES EN LA BASE USANDO LA FUNCIÓN DISCRETIZACIÓN MODELO 3 MATLAB VS SAP2000

	Fuerzas Máximas en la Base			
	Vectores Ritz Matlab	Autovalores Matlab	Sap2000 Vectores Ritz	Sap2000 Autovalores
FX (T)	157,6904276	157,5118515	158,5982	158,5982
FZ(T)	0,053827017	0,070229009	0,1656	0,1656
FY(T)	0,009933398	0,009404505	0,0117	0,0117
Mx(T.m)	0,388814123	0,521144156	0,62098	0,62098
Mz(T.m)	1204,410693	1204,678666	1210,60004	1210,60004
My(T.m)	1159,024643	1157,712108	1186,22363	1186,22363

**TABLA 5. 51** ERROR PORCENTUAL DE LAS REACCIONES EN LA BASE USANDO LA FUNCIÓN DISCRETIZACIÓN MODELO 3 ENTRE MATLAB Y SAP2000

	%Error Vectores Ritz Matlab vs SAP2000	%Error Autovalores Matlab vs SAP2000
FX	0,572372454	0,684969008
FZ	67,49576246	57,59117813
FY	15,09916533	19,61961742
Mx	37,38701362	16,07714329
Mz	0,51126276	0,48912719
My	2,29290553	2,40355367

## 6 Factores de Participación Modal

**TABLA 5. 52** COMPARACIÓN MASA MODAL EFECTIVA MATLAB VS SAP2000 MODELO 3

Factores de Participación Modal							
Matlab Vectores Ritz	86,0320	86,0320	86,0356	86,0357	86,0357	86,0440	94,0722
Matlab Autovalores	85,9335	85,9335	85,9372	85,9373	85,9373	85,9455	93,9645
SAP2000 Vectores Ritz	86,0498	86,0508	86,0573	86,0576	86,0578	86,0594	93,1736
SAP2000 Autovalores	86,0498	86,0508	86,0573	86,0576	86,0578	86,0594	93,1736
%Error Vectores RITZ Matlab vs SAP2000	0,0207	0,0219	0,0252	0,0254	0,0256	0,0179	0,9644
%Error Autovalores Matlab vs SAP2000	0,1351	0,1363	0,1396	0,1398	0,1400	0,1323	0,8489

### 5.3 APLICACIÓN PROGRAMA ANÁLISIS PSEUDOESPACIAL

Para la aplicación del programa análisis PseudoEspacial se presentan 3 modelos los dos primeros son los mismos que se utilizaron en el programa Porticos3D, el tercer modelo será uno semejante al tercer modelo utilizado en el programa Porticos3D.

Para el uso de vectores Ritz como carga externa se han utilizado las cargas por sismo que actúan en el centroide de cada planta es decir el corte basal estático que actúa en las direcciones X, Z de cada planta, solo se analizarán los resultados obtenidos de los Porticos que se encuentren en el plano de la dirección de a aceleración del suelo, ya que las acciones de los Porticos que se encuentren en la misma dirección son más relevantes.

Aunque el programa Análisis Pseudoespacial calcula las fuerzas de cada elemento de cada pórtico que conforma la estructura espacial y también calcula las deformaciones de cada nodo de cada pórtico que conforman el pórtico espacial solo se compararan los desplazamientos de piso y solo las acciones máximas de los Porticos que se encuentren en la misma dirección del sismo elegido para el análisis.

### 5.5 MODELO 1

#### 5.5.1 DEFINICIÓN DE PARÁMETROS MODELO 1

Las dimensiones geométricas de los elementos que conforman los Porticos de la estructura son las mismas que ya se utilizaron en el modelo 1 aplicado en el programa Porticos3D. Para este análisis se necesita la masa que actúa en el centro de gravedad de cada planta se calculó la masa de piso, para este caso la masa de piso es de  $0,8679 \text{ T/m}^2$  mientras que el cortante basal estático que actúa en el centro de gravedad de cada piso se presenta en la siguiente tabla.

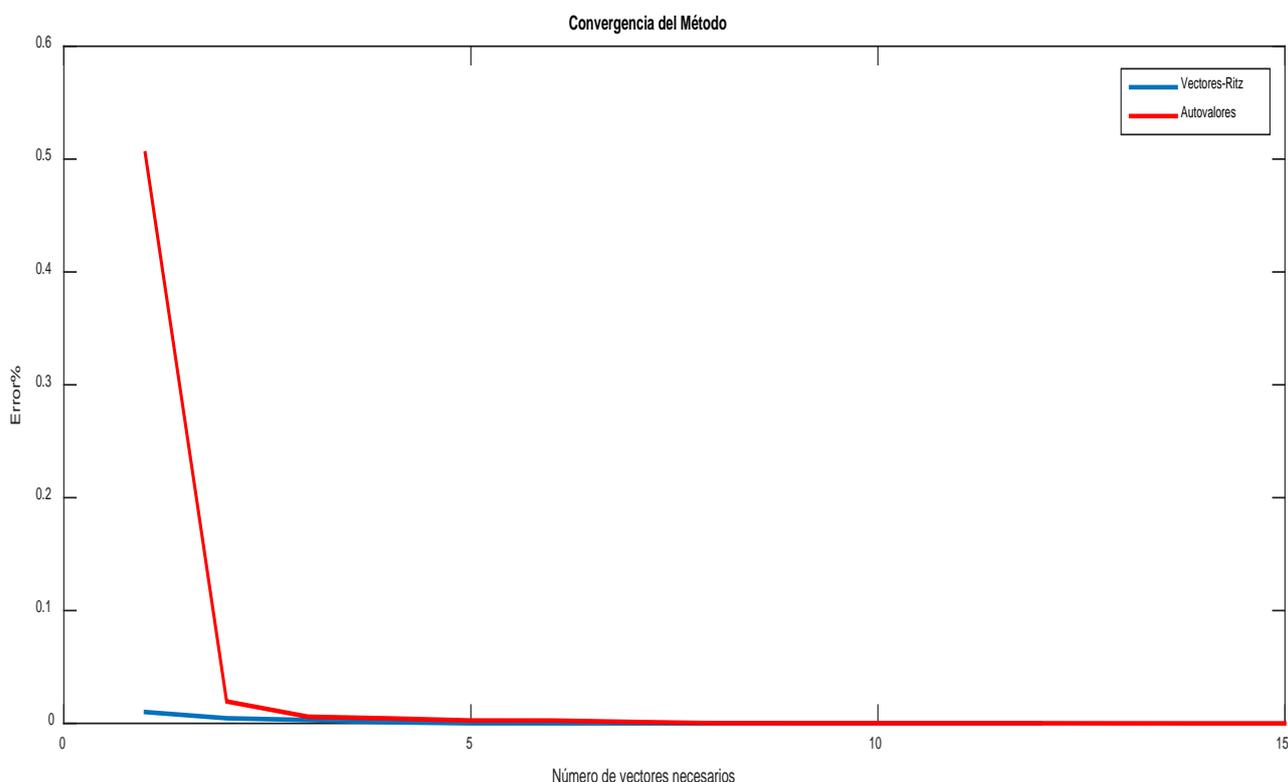
**TABLA 5. 53** CORTE BASAL ESTÁTICO POR PISO MODELO 1

V(T)	Piso	h(m)	Vx(T)	Vz(T)
38,50815684	1	3	1,67713691	1,67713691
	2	6	3,50798144	3,50798144
	3	9	5,40170918	5,40170918
	4	12	7,33746523	7,33746523
	5	15	9,30508608	9,30508608

## 5.5.2 COMPARACIÓN DE RESULTADOS OBTENIDOS PROGRAMA ANÁLISIS PSEUDO ESPACIAL MODELO 1

### 1. Número de Modos Necesarios

**FIGURA 5.13** VARIACIÓN DEL ERROR CON RESPECTO AL NÚMERO DE VECTORES RITZ Y LOS MODOS NATURALES MODELO1 ANÁLISIS PSEUDO ESPACIAL



### 2 Periodos obtenidos

**TABLA 5. 54** COMPARACIÓN DE LOS 10 PRIMEROS PERIODOS DE VIBRACIÓN MATLAB VS SAP2000 MODELO 1

#Modo	Periodos T(s)			
	Matlab Vectores Ritz	Matlab Autovalores	SAP2000 Vectores Ritz	SAP2000 Autovalores
1	0,764767244	0,764767244	0,763683	0,763683
2	0,720339635	0,720339635	0,718508	0,718508
3	0,612611719	0,612611719	0,578215	0,578215
4	0,237051688	0,237051688	0,23678	0,23678
5	0,226223932	0,226223932	0,225643	0,225643
6	0,191984332	0,191984332	0,184243	0,184243
7	0,127088016	0,127088016	0,126957	0,126957
8	0,123513193	0,123513193	0,123228	0,123228
9	0,104592826	0,104592828	0,101378	0,101378
10	0,082712277	0,082822794	0,082741	0,082741

**TABLA 5. 55 ERROR PORCENTUAL DE LOS PERIODOS DE VIBRACIÓN ENTRE LOS RESULTADOS DE MATLAB Y SAP2000 MODELO 1**

#Modo	%Error Vectores Ritz Matlab	%Error Autovalores Matlab
1	0,14197561	0,14197561
2	0,254922074	0,254922074
3	5,948776688	5,948776688
4	0,114742597	0,114742597
5	0,25745642	0,25745642
6	4,201696793	4,201696793
7	0,103197468	0,10319747
8	0,23143496	0,231434968
9	3,171127541	3,171129689
10	0,034714596	0,098855352

### 3. Desplazamientos de Piso

**TABLA 5. 56 DESPLAZAMIENTOS DE PISO MATLAB MODELO 1**

Piso	Desplazamientos de Piso					
	Vectores Ritz MATLAB			Autovalores Matlab		
	$\Delta x(m)$	$\Delta z(m)$	$\Theta(rad)$	$\Delta x(m)$	$\Delta z(m)$	$\Theta(rad)$
5	0,00568911	4,93E-05	0,00011191	0,00568411	0,00010011	0,00015464
4	0,00503172	4,42E-05	9,94E-05	0,00501786	8,9403E-05	0,0001372
3	0,00394557	3,51E-05	7,84E-05	0,00394157	7,0898E-05	0,00010836
2	0,00251501	2,30E-05	5,05E-05	0,00253144	4,6101E-05	7,015E-05
1	0,00097058	9,38E-06	1,99E-05	0,00098796	1,857E-05	2,7893E-05

**TABLA 5. 57 DESPLAZAMIENTOS DE PISO OBTENIDOS SAP2000 MODELO 1**

Piso	Desplazamientos de Piso					
	Vectores Ritz SAP2000			Autovalores SAP2000		
	$\Delta x(m)$	$\Delta z(m)$	$\Theta(rad)$	$\Delta x(m)$	$\Delta z(m)$	$\Theta(rad)$
5	0,005752	0,000033	0,000102	0,005752	0,000033	0,000102
4	0,00508	0,000029	0,000091	0,00508	0,000029	0,000091
3	0,003993	0,000023	0,000072	0,003993	0,000023	0,000072
2	0,002567	0,000015	0,000047	0,002567	0,000015	0,000047
1	0,001002	6,133E-06	0,000019	0,001002	6,133E-06	0,000019

**TABLA 5. 58** ERROR PORCENTUAL DE LOS DESPLAZAMIENTOS DE PISO ENTRE LOS RESULTADOS DE MATLAB Y SAP2000 MODELO1

Piso	%Error Vectores Ritz Matlab			%Error Autovalores Matlab		
	$\Delta x$	$\Delta z$	$\Theta$	$\Delta x$	$\Delta z$	$\Theta$
5	1,09333278	49,266388	9,71119716	1,18023353	203,367801	51,6112336
4	0,95043089	52,387608	9,24159558	1,22317522	208,287241	50,7728464
3	1,18780504	52,785616	8,8998953	1,28807268	208,253594	50,4944056
2	2,02526681	53,013235	7,44780049	1,38536087	207,340969	49,2553289
1	3,13527558	52,931341	4,79083997	1,40100625	202,787404	46,8077947

#### 4. Derivas de Piso

**TABLA 5. 59** COMPARACIÓN DERIVAS DE PISO MATLAB VS SAP2000 MODELO1

Piso	Derivas de Piso			
	Matlab	Matlab	SAP2000	SAP2000
	Vectores Ritz	Autovalores	Vectores Ritz	Autovalores
5	0,000240057	0,00024112	0,000245	0,000245
4	0,000373951	0,00037516	0,000382	0,000382
3	0,000477281	0,00047772	0,000487	0,000487
2	0,000516479	0,00051601	0,000528	0,000528
1	0,000329885	0,00032932	0,000338	0,000338

**TABLA 5. 60** ERROR PORCENTUAL DERIVAS DE PISO ENTRE LOS RESULTADOS DE MATLAB Y SAP2000 MODELO 1

Piso	%Error Vectores Ritz Matlab	%Error Autovalores Matlab
5	2,017692442	1,583319662
4	2,1070663	1,789438385
3	1,995635328	1,906115872
2	2,181942699	2,27010061
1	2,400839143	2,567858251

#### 5. Cortante Basal Dinámico

**TABLA 5. 61** COMPARACIÓN CORTANTE BASAL DINÁMICO MATLAB VS SAP2000 MODELO

1

	Corte Basal (T) SAP2000	Corte Basal(T) Matlab	%Error Matlab vs SAP2000
Vectores Ritz	32,9344	32,31718635	1,874069812
Autovalores	32,9344	32,2820855	1,980647889

## 6. Momento en la Base

**TABLA 5. 62** COMPARACIÓN MOMENTO EN LA BASE MATLAB VS SAP2000 MODELO 1

	Momento en la Base(T.m) SAP2000	Momento en la Base(T.m) Matlab	%Error Matlab vs SAP2000
Vectores Ritz	346,7823	342,107492	1,348052645
Autovalores	346,7823	342,1675431	1,330735993

## 7. Torsión en la Base

**TABLA 5. 63** COMPARACIÓN TORSIÓN EN LA BASE MATLAB VS SAP2000 MODELO 1

	Torsión en la base(T.m) SAP2000	Torsión en la base(T.m) Matlab	%Error Matlab vs SAP20000
Vectores Ritz	358,32148	371,647643	3,719052245
Autovalores	358,32148	371,2439833	3,606399278

## 8. Factores de Participación Modal

**TABLA 5. 64** COMPARACIÓN FACTORES DE PARTICIPACIÓN MODAL MATLAB VS  
SAP2000 MODELO 1

Factores de Participación Modal				
Matlab Vectores Ritz	80,8132494	80,8234635	82,620711	93,4047503
Matlab Autovalores	80,04512919	80,0552462	81,835411	92,5169493
SAP2000 Vectores Ritz	80,8123	80,8183	81,835	92,6105
SAP2000 Autovalores	80,8123	80,8183	81,835	92,6105
%Error Matlab vs SAP2000 Vectores RITZ	0,001174822	0,006389022	0,96011604	0,85762442
%Error Matlab vs SAP2000 Autovalores	0,949324314	0,944159674	0,00050228	0,10101518

## 5.6 MODELO 2

El modelo 2 se modelara de tres formas distintas debido a que los pórticos de los ejes A,1 y 6 que contiene este modelo no tienen restricciones en la base y para realizar un análisis pseudo espacial es necesario calcular por separado la matriz de rigidez de cada pórtico de cada eje que conforman la estructura, en este tipo de pórticos las matrices de rigidez obtenidas son matrices mal condicionadas o singulares, para evitar tener este tipo de matrices se plantean tres alternativas las cuales son.

1. En los pórticos A, 1 y 6 se incluirán dos elementos tipo columna con dimensiones despreciable para no afectar la matriz de rigidez del pórtico original estas columnas estarán empotradas en la base.
2. Se modelará la estructura sin incluir los pórticos A, 1 y 6.
3. Los pórticos A, 1 y 6 se modelarán como unas restricciones de rodillos para los pórticos transversales a estos.

Los resultados con las distintas formas de modelar se presentarán en las siguientes tablas.

### 5.6.1 DEFINICIÓN DE PARÁMETROS MODELO 2

Las dimensiones y modulo de elasticidad de cada elemento son las mismas que se utilizaron para el modelo 2 del programa Porticos3D, La masa de piso es de  $0,9 \text{ T}/\text{m}^2$  , el cortante basal estático que actúa en el centro de gravedad de cada piso se presentan en la siguiente tabla.

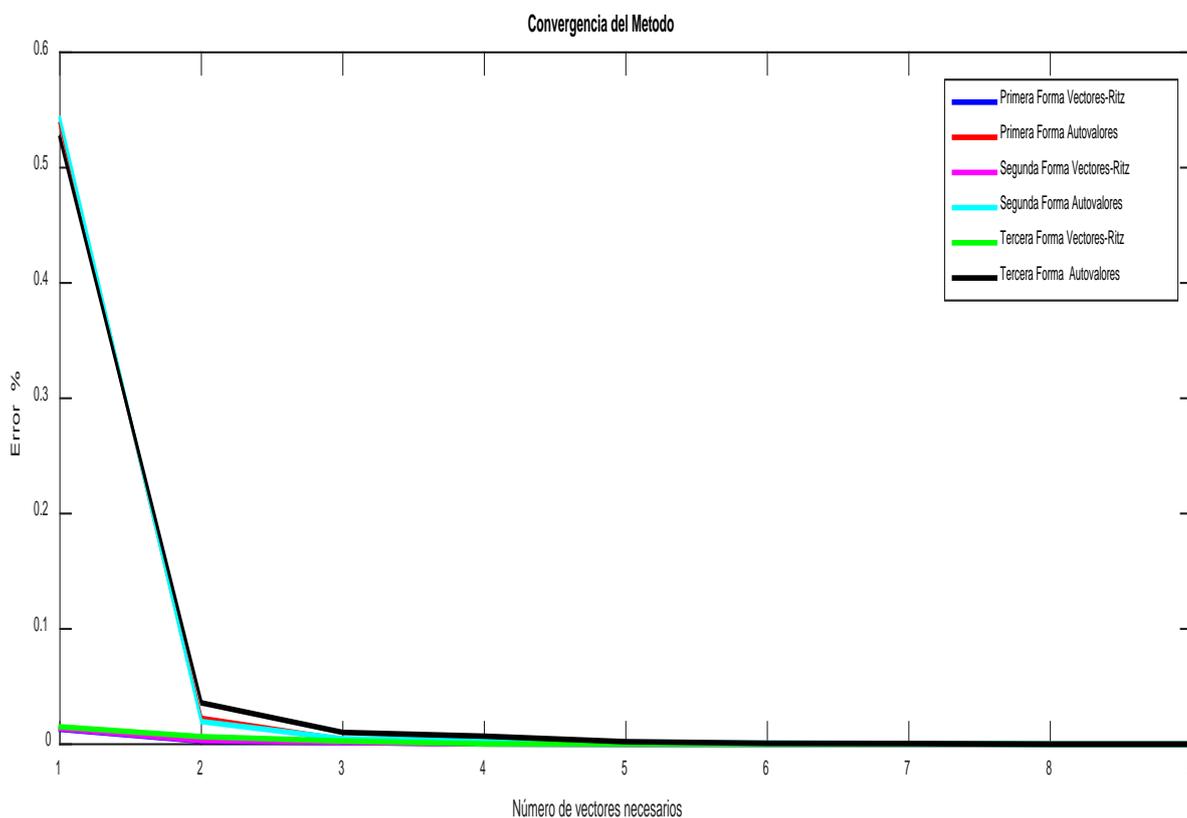
**TABLA 5.65 CORTE BASAL ESTÁTICO POR PISO MODELO 2**

V(t)	Piso	h(m)	Fx(T)	Fz(T)
35,3250701	3	9	12,4892983	12,4892983
	2	6	8,32619887	8,32619887
	1	3	4,16309944	4,16309944

### 5.6.2 COMPARACIÓN DE RESULTADOS OBTENIDOS PROGRAMA ANÁLISIS PSEUDO ESPACIAL MODELO 2

#### 1 Número de Modos Necesarios

**FIGURA 5.14** VARIACIÓN DEL ERROR CON RESPECTO AL NÚMERO DE VECTORES RITZ Y LOS MODOS NATURALES MODELO 2 ANÁLISIS PSEUDO ESPACIAL



#### 2. Periodos obtenidos

**TABLA 5. 66** COMPARACIÓN DE LOS PERIODOS DE VIBRACIÓN MATLAB VS SAP2000 MODELO 2

	#Modo	Periodos T(s)			
		Matlab	Matlab	SAP2000	SAP2000
		Vectores Ritz	Autovalores	Vectores Ritz	Autovalores
Primera Forma	1	0,558903194	0,558903194	0,526	0,526
	2	0,510124047	0,510124047	0,489	0,489
	3	0,447825803	0,447825803	0,391	0,391
	4	0,180511967	0,180511967	0,171	0,171
	5	0,170185391	0,170185391	0,163	0,163
	6	0,146232632	0,146232632	0,128	0,128
	7	0,100925315	0,100925315	0,1	0,1
	8	0,100318357	0,100318357	0,098	0,098
	9	0,077130408	0,077130408	0,076	0,076

CONTINUACIÓN TABLA 5.66

Segunda Forma	1	0,561001614	0,561001614	0,526	0,526
	2	0,511212265	0,511212265	0,489	0,489
	3	0,450513881	0,450513881	0,391	0,391
	4	0,182461149	0,182461149	0,171	0,171
	5	0,171315874	0,171315874	0,163	0,163
	6	0,148607712	0,148607712	0,128	0,128
	7	0,11044462	0,11044462	0,1	0,1
	8	0,107440966	0,107440966	0,098	0,098
	9	0,090171416	0,090171416	0,076	0,076
Tercera Forma	1	0,524001245	0,524001245	0,526	0,526
	2	0,488998518	0,488998518	0,489	0,489
	3	0,424658918	0,424658918	0,391	0,391
	4	0,174924145	0,174924145	0,171	0,171
	5	0,166482155	0,166482155	0,163	0,163
	6	0,14263551	0,14263551	0,128	0,128
	7	0,110247353	0,110247353	0,1	0,1
	8	0,107312995	0,107312995	0,098	0,098
	9	0,090004569	0,090004569	0,076	0,076

**TABLA 5. 67** ERROR PORCENTUAL DE LOS PERIODOS DE VIBRACIÓN ENTRE LOS RESULTADOS DE MATLAB Y SAP2000 MODELO 2

	#Modo	%Error Vectores Ritz Matlab	%Error Autovalores Matlab
Primera Forma	1	6,255360087	6,255360087
	2	4,319845955	4,319845955
	3	14,53345342	14,53345342
	4	5,56255392	5,56255392
	5	4,408215457	4,408215457
	6	14,24424376	14,24424376
	7	0,925314825	0,925314825
	8	2,365670151	2,365670151
	9	1,487378391	1,487378391
Segunda Forma	1	6,654299267	6,654299267
	2	4,542385434	4,542385434
	3	15,22094132	15,22094132
	4	6,702426303	6,702426303
	5	5,101763075	5,101763075
	6	16,09977533	16,09977533
	7	10,44461953	10,44461953
	8	9,633638514	9,633638514
	9	18,6465996	18,6465996

CONTINUACIÓN TABLA 5.67

Tercera Forma	1	0,379991357	0,379991357
	2	0,000303106	0,000303106
	3	8,608418874	8,608418874
	4	2,294821623	2,294821623
	5	2,136291599	2,136291599
	6	11,43399241	11,43399241
	7	10,24735342	10,24735342
	8	9,503056464	9,503056464
	9	18,42706496	18,42706496

### 3. Desplazamientos de Piso

TABLA 5. 68 DESPLAZAMIENTOS DE PISO MATLAB MODELO 2

		Desplazamientos de Piso					
		Vectores Ritz MATLAB			Autovalores Matlab		
		Piso	$\Delta x(m)$	$\Delta z(m)$	$\Theta(rad)$	$\Delta x(m)$	$\Delta z(m)$
Primera Forma	3	0,00025514	0,01615748	1,24E-04	0,00050063	0,01614104	0,00016716
	2	0,00019141	0,0122506	8,51E-05	0,00037712	0,01224435	1,16E-04
	1	1,22E-04	0,00650602	4,01E-05	0,00020417	6,51E-03	5,36E-05
Segunda Forma	3	3,71E-04	0,01613202	1,78E-04	6,45E-04	0,01612682	1,60E-04
	2	2,85E-04	0,01237302	1,57E-04	4,92E-04	0,01236879	1,44E-04
	1	1,43E-04	0,00648469	5,77E-05	2,47E-04	6,48E-03	5,06E-05
Tercera Forma	3	4,72E-04	0,01365919	1,08E-03	6,29E-04	0,01302828	1,50E-03
	2	3,10E-04	0,01086431	8,29E-04	3,99E-04	0,01032686	1,16E-03
	1	1,09E-04	0,00603107	4,08E-04	1,03E-04	5,66E-03	5,75E-04

TABLA 5. 69 DESPLAZAMIENTOS DE PISO SAP2000 MODELO 2

		Desplazamientos de Piso					
		Vectores Ritz SAP2000			Autovalores SAP2000		
		Piso	$\Delta x(m)$	$\Delta z(m)$	$\Theta(rad)$	$\Delta x(m)$	$\Delta z(m)$
	3	0,001656	0,014645	0,000082	0,001656	0,014645	0,000082
	2	0,001306	0,01143	0,000059	0,001306	0,01143	0,000059
	1	0,000746	0,006483	0,000036	0,000746	0,006483	0,000036

**TABLA 5. 70 ERROR PORCENTUAL DE LOS DESPLAZAMIENTOS DE PISO ENTRE LOS RESULTADOS DE MATLAB Y SAP2000 MODELO 2**

		%Error Vectores Ritz Matlab			%Error Autovalores Matlab		
		Piso	$\Delta x(m)$	$\Delta z(m)$	$\Theta(rad)$	$\Delta x(m)$	$\Delta z(m)$
Primera Forma	3	84,5930768	10,3276068	50,6954382	69,7684617	10,2153376	103,847689
	2	85,343479	7,17932674	44,2212911	71,1243196	7,12467339	96,4725837
	1	83,6914926	0,35506982	11,4362506	72,631006	0,38226005	48,8316029

CONTINUACIÓN TABLA 5.70

Segunda Forma	3	77,5850272	10,1537856	116,824641	61,0608522	10,1182936	94,9551733
	2	78,1910026	8,25038429	166,590963	62,2934887	8,21336865	144,056408
	1	80,8448312	0,02600267	60,3734406	66,9095052	0,00114448	40,4387075
Tercer Forma	3	71,5238684	6,73139817	1214,0324	62,0429254	11,0393817	1725,58673
	2	76,2449838	4,94919163	1,30E+03	69,43815	9,65124725	1860,19662
	1	85,4040953	6,97099645	1034,00184	86,1942026	12,6509761	1498,09819

#### 4. Derivas de Piso

TABLA 5. 71 COMPARACIÓN DERIVAS DE PISO MATLAB VS SAP2000 MODELO 2

		Derivas de Piso			
		Matlab	Matlab	SAP2000	SAP2000
	Piso	Vectores Ritz	Autovalores	Vectores Ritz	Autovalores
Primera Forma	3	0,001320033	0,001316681	0,001121	0,001121
	2	0,001926795	0,001924127	0,001694	0,001694
	1	0,002168673	0,002169261	0,002164	0,002164
Segunda Forma	3	0,001270915	0,001276342	0,001121	0,001121
	2	0,001964525	0,001966432	0,001694	0,001694
	1	0,002169163	0,002170227	0,002164	0,002164
Tercera Forma	3	0,000931823	0,000900698	0,001121	0,001121
	2	0,001611711	0,001555409	0,001694	0,001694
	1	0,002010357	0,001887612	0,002164	0,002164

TABLA 5. 72 ERROR PORCENTUAL DERIVAS DE PISO ENTRE LOS RESULTADOS DE MATLAB Y SAP2000 MODELO 2

		Piso	%Error Vectores	%Error
			Ritz Matlab	Autovalores Matlab
Primera Forma		3	17,75492698	17,4559725
		2	13,74229865	13,58481648
		1	0,215945419	0,243097949
Segunda Forma		3	13,37334472	13,85740984
		2	15,96959117	16,08219288
		1	0,238578301	0,287760222
Tercera Forma		3	16,87569802	19,65225675
		2	4,857661653	8,181293783
		1	7,099964569	12,77206998

## 5. Cortante Basal Dinámico

**TABLA 5. 73** COMPARACIÓN CORTANTE BASAL DINÁMICO MATLAB VS SAP2000 MODELO

2

		Corte Basal (T) SAP2000	Corte Basal(T) Matlab	%Error Matlab vs SAP2000
Primera Forma	Vectores Ritz	48,0791	48,56974224	1,020489652
	Autovalores	48,0791	48,58426662	1,050699001
Segunda Forma	Vectores Ritz	48,0791	48,57002857	1,021085186
	Autovalores	48,0791	48,59026697	1,063179149
Tercera Forma	Vectores Ritz	48,0791	46,59333216	3,090257178
	Autovalores	48,0791	43,52328586	9,475664357

## 6. Momento en la Base

**TABLA 5. 74** COMPARACIÓN MOMENTO EN LA BASE MATLAB VS SAP2000 MODELO 2

		Momento en la Base(T.m) SAP2000	Momento en la Base(T.m) Matlab	%Error Matlab vs SAP2000
Primera Forma	Vectores Ritz	331,23861	329,6921894	0,466859998
	Autovalores	331,23861	330,3240111	0,276114826
Segunda Forma	Vectores Ritz	331,23861	329,6939995	0,466313539
	Autovalores	331,23861	330,3238996	0,276148474
Tercera Forma	Vectores Ritz	331,23861	314,3300499	5,1046465
	Autovalores	331,23861	294,3333758	11,14158588

## 6. Torsión en la Base

**TABLA 5. 75** COMPARACIÓN TORSIÓN EN LA BASE MATLAB VS SAP2000 MODELO 2

		Torsión en la Base(T.m) SAP2000	Torsión en la Base(T.m) Matlab	%Error Matlab vs SAP2000
Primera Forma	Vectores Ritz	296,87971	285,0788152	3,974975176
	Autovalores	296,87971	287,7644524	3,070353855
Segunda Forma	Vectores Ritz	296,87971	285,4376514	3,854105968
	Autovalores	296,87971	287,9369508	3,012250058
Tercera Forma	Vectores Ritz	296,87971	273,5251744	7,86666613
	Autovalores	296,87971	258,877329	12,80059893

## 8. Factores de Participación Modal

**TABLA 5. 76** COMPARACIÓN FACTORES DE PARTICIPACIÓN MODAL MATLAB VS SAP2000  
MODELO 2

		Factores de Participación Modal				
Primera Forma	Matlab Vectores Ritz	0,02222232	89,3943421	89,6207361	89,6570441	98,7745556
	Matlab Autovalores	0,02222232	89,3943421	89,6207361	89,6570441	98,7745556
	SAP2000 Vectores Ritz	1,42	91,17	91,21	91,43	99,34
	SAP2000 Autovalores	1,42	91,17	91,21	91,43	99,34
	%Error Matlab vs SAP2000	98,43504786	1,94763393	1,74242288	1,93914023	0,56920109
	%Error Matlab vs SAP2000 Autovalores	98,43504786	1,94763393	1,74242288	1,93914023	0,56920109
Segunda Forma	Matlab Vectores Ritz	0,02222232	89,3943421	89,6207361	89,6570441	98,7745556
	Matlab Autovalores	0,02222232	89,3943421	89,6207361	89,6570441	98,7745556
	SAP2000 Vectores Ritz	1,42	91,17	91,21	91,43	99,34
	SAP2000 Autovalores	1,42	91,17	91,21	91,43	99,34
	%Error Matlab vs SAP2000	98,43504786	1,94763393	1,74242288	1,93914023	0,56920109
	%Error Matlab vs SAP2000 Autovalores	98,43504786	1,94763393	1,74242288	1,93914023	0,56920109
Tercera Forma	Matlab Vectores Ritz	0,032436259	82,9418953	91,5544063	-	-
	Matlab Autovalores	0,032436259	82,9418953	91,5544063	-	-
	SAP2000 Vectores Ritz	1,42	91,17	91,21	91,43	99,34
	SAP2000 Autovalores	1,42	91,17	91,21	91,43	99,34
	%Error Matlab vs SAP2000	97,71575641	9,02501337	0,37759708	-	-
	%Error Matlab vs SAP2000 Autovalores	97,71575641	9,02501337	0,37759708	-	-

## 5.7 MODELO 3

### 5.7.1 DEFINICIÓN DE PARÁMETROS MODELO 3

Las dimensiones geométricas de los elementos que conforman los pórticos de la estructura son las mismas que ya se utilizaron en el modelo 3 aplicado en el programa Porticos3D solo se incluyeron dos elementos tipo viga en el último piso. Para este análisis se necesita la masa que actúa en el centro de gravedad de cada planta se calculó la masa de piso, para este caso la masa de piso es de  $0,8620 T/m^2$  para los pisos del 1 al 3 mientras que para el piso 4 la masa de piso es  $0,9353 T/m^2$ , el cortante basal estático que actúa en el centro de gravedad de cada piso se presenta en la siguiente tabla.

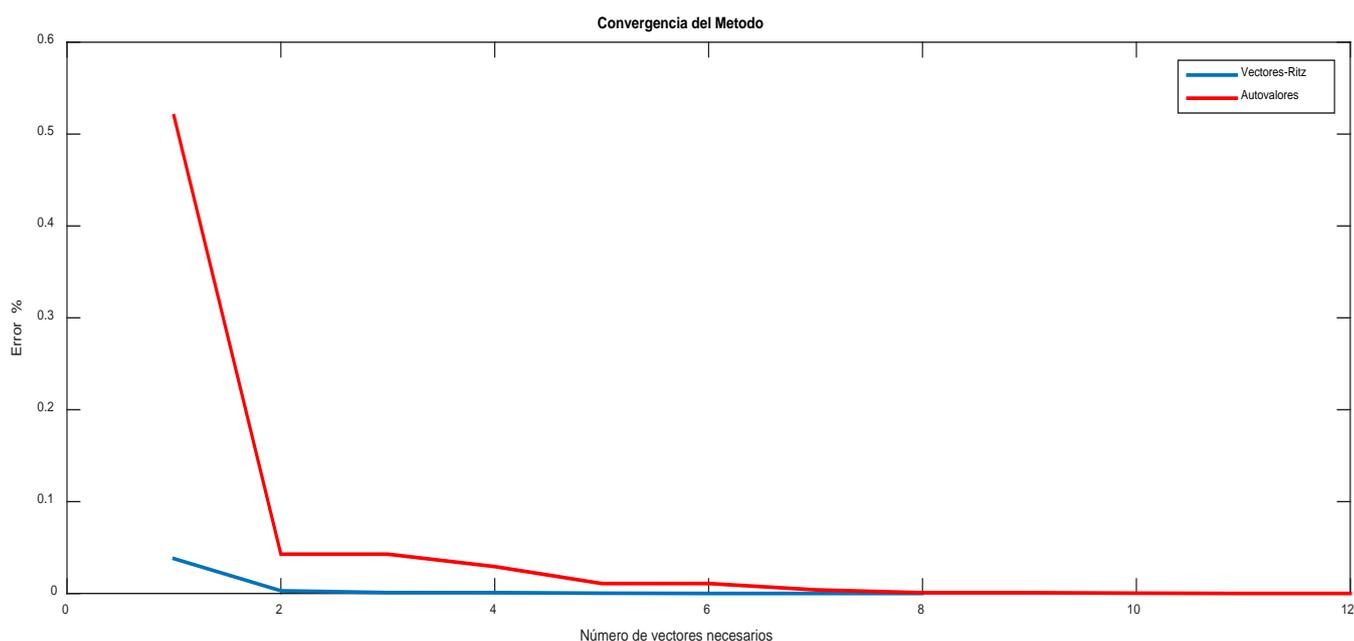
**TABLA 5. 77 CORTE BASAL ESTÁTICO POR PISO MODELO 3**

V(T)	Piso	h(m)	Vx(T)	Vz(T)
125,982278	1	3	8,84115155	8,84115155
	2	6	17,7731408	17,7731408
	3	9	26,7397405	26,7397405
	4	12	35,7288904	35,7288904

### 5.7.2 COMPARACIÓN DE RESULTADOS OBTENIDOS PROGRAMA ANÁLISIS PSEUDOESPACIAL MODELO 2

#### 1. Número de Modos Necesarios

**FIGURA 5.15 VARIACIÓN DEL ERROR CON RESPECTO AL NÚMERO DE VECTORES RITZ Y LOS MODOS NATURALES MODELO3 ANÁLISIS PSEUDO ESPACIAL**



## 2. Periodos obtenidos

**TABLA 5. 78** COMPARACIÓN DE LOS PERIODOS DE VIBRACIÓN MATLAB VS SAP2000  
MODELO 3

#Modo	Periodos (s)			
	Vectores Ritz Matlab	Autovalores Matlab	Vectores Ritz SAP2000	Autovalores SAP2000
1	0,942936522	0,942936522	0,942435	0,942435
2	0,861737792	0,861737792	0,811989	0,811989
3	-	0,724672854	0,711326	0,711326
4	0,323906578	0,323906578	0,323008	0,323008
5	0,312463096	0,312463096	0,291462	0,291462
6	-	0,256884158	0,251964	0,251964
7	0,217228735	0,217228735	0,208282	0,208282
8	0,209102144	0,209102144	0,199449	0,199449
9	-	0,182813789	0,178607	0,178607
10	0,165445543	0,165445543	0,154904	0,154904
11	0,155023153	0,155023153	0,152843	0,152843
12	-	0,142038205	0,139619	0,139619

**TABLA 5. 79** ERROR PORCENTUAL DE LOS PERIODOS DE VIBRACIÓN ENTRE LOS  
RESULTADOS DE MATLAB Y SAP2000 MODELO 3

#Modo	%Error Vectores Ritz Matlab	%Error Autovalores Matlab
1	0,053215562	0,053215562
2	6,126781461	6,126781461
3	-	1,876334299
4	0,278190685	0,278190685
5	7,205432003	7,205432003
6	-	1,95272261
7	4,295491295	4,295491295
8	4,839906028	4,839906028
9	-	2,355332723
10	6,805210604	6,805210604
11	1,426400022	1,426400022
12	-	1,732718699

## 3. Desplazamientos de Piso

**TABLA 5. 80** DESPLAZAMIENTOS DE PISO MATLAB MODELO 3

Piso	Desplazamientos de Piso					
	Vectores Ritz MATLAB			Autovalores Matlab		
	$\Delta x(m)$	$\Delta z(m)$	$\Theta(rad)$	$\Delta x(m)$	$\Delta z(m)$	$\Theta(rad)$
4	0,0340	0,0000	0,0000	0,0340	0,0000	0,0000
3	0,0294	0,0000	0,0000	0,0294	0,0000	0,0000
2	0,0213	0,0000	0,0000	0,0213	0,0000	0,0000
1	0,0097	0,0000	0,0000	0,0097	0,0000	0,0000

**TABLA 5. 81** DESPLAZAMIENTOS DE PISO SAP2000 MODELO 3

Piso	Desplazamientos de Piso					
	Vectores Ritz SAP2000			Autovalores SAP2000		
	$\Delta x(m)$	$\Delta z(m)$	$\Theta(rad)$	$\Delta x(m)$	$\Delta z(m)$	$\Theta(rad)$
4	0,03388	0	0	0,03388	0	0
3	0,029358	0	0	0,029358	0	0
2	0,021281	0	0	0,021281	0	0
1	0,009754	0	0	0,009754	0	0

**TABLA 5. 82** ERROR PORCENTUAL DE LOS DESPLAZAMIENTOS DE PISO ENTRE LOS RESULTADOS DE MATLAB Y SAP2000 MODELO 3

Piso	%Error Vectores Ritz Matlab			%Error Autovalores Matlab		
	$\Delta x$	$\Delta z$	$\Theta$	$\Delta x$	$\Delta z$	$\Theta$
4	0,27159034	0	0	0,27159034	0	0
3	0,03947388	0	0	0,03947388	0	0
2	0,06642091	0	0	0,06642091	0	0
1	0,29209613	0	0	0,29209613	0	0

#### 4. Derivas de Piso

**TABLA 5. 83** COMPARACIÓN DERIVAS DE PISO MATLAB VS SAP2000

Piso	Derivas de Piso			
	Matlab	Matlab	SAP2000	SAP2000
	Vectores Ritz	Autovalores	Vectores Ritz	Autovalores
4	0,001660633	0,001660633	0,001661	0,001661
3	0,002765078	0,002765078	0,002817	0,002817
2	0,003859056	0,003859056	0,003945	0,003945
1	0,003241836	0,003241836	0,003335	0,003335

**TABLA 5. 84** ERROR PORCENTUAL DERIVAS DE PISO ENTRE LOS RESULTADOS DE MATLAB Y SAP2000 MODELO 3

Piso	%Error Vectores Ritz Matlab	%Error Autovalores Matlab
	4	0,02207199
3	1,843150311	1,843150311
2	2,178555568	2,178555568
1	2,793513809	2,793513809

## 5. Cortante Basal Dinámico

**TABLA 5. 85** COMPARACIÓN CORTANTE BASAL DINÁMICO MATLAB VS SAP2000 MODELO 3

	Corte Basal (T) SAP2000	Corte Basal(T) Matlab	%Error Matlab vs SAP2000
Vectores Ritz	107,0759	106,4638902	0,571566313
Autovalores	107,0759	106,4638902	0,571566313

## 6. Memento en la Base

**TABLA 5. 86** COMPARACIÓN MOMENTO EN LA BASE MATLAB VS SAP2000 MODELO 3

	Momento en la Base(T.m) SAP2000	Momento en la Base(T.m) Matlab	%Error Matlab vs SAP2000
Vectores Ritz	842,17657	841,6174617	0,066388494
Autovalores	842,17657	841,6174617	0,066388494

## 7. Torsión en la Base

**TABLA 5. 87** COMPARACIÓN TORSIÓN EN LA BASE MATLAB VS SAP2000 MODELO 3

	Torsión en la Base(T.m) SAP2000	Torsión en la Base(T.m) Matlab	%Error Matlab vs SAP2000
Vectores Ritz	787,00778	782,5095932	0,571555574
Autovalores	787,00778	782,5095932	0,571555574

## 8. Factores de Participación Modal

**TABLA 5. 88** COMPARACIÓN FACTORES DE PARTICIPACIÓN MODAL MATLAB VS SAP2000 MODELO 3

Factores de Participación Modal				
Matlab Vectores Ritz	85,9167326	85,9167326	-	95,2679141
Matlab Autovalores	85,9167326	85,9167326	85,9167326	95,2679141
SAP2000 Vectores Ritz	85,82	85,82	85,94	95,31
SAP2000 Autovalores	85,82	85,82	85,94	95,31
%Error Matlab vs SAP2000 Vectores RITZ	0,1127157	0,1127157	-	0,04415687
%Error Matlab vs SAP2000 Autovalores	0,1127157	0,1127157	0,02707399	0,04415687

## CAPÍTULO 6

### CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

#### 6.1 CONCLUSIONES

En el presente estudio mediante los programas realizados en Matlab se ha demostrado la utilidad de los vectores Ritz para análisis dinámico lineal, en los modelos realizados en los programas Porticos2D y Porticos3D el número de modos empleados fue casi la tercera parte que el número empleado mediante el método de los Autovalores demostrando así que el método de los vectores Ritz converge más rápido a la solución exacta con un número menor de modos, permitiendo un ahorro en el esfuerzo computacional.

El vector de inicio para generar los vectores Ritz depende del vector de fuerzas externas que actúa en la estructura para que el método tenga una buena convergencia, en el presente trabajo se han probado varios vectores de fuerzas externas como: un vector de fuerzas externas con valores aleatorios aplicados en cada nodo, un vector unitario de fuerzas externas aplicados en los grados de libertad traslacionales y un vector de fuerzas externas debido a las acciones de empotramiento perfecto, produciendo la mejor convergencia del método el vector de fuerzas debido a las acciones de empotramiento perfecto.

Aunque en teoría el error calculado en base al vector de cargas converge a cero cuando se emplea un número de modos correspondientes a la totalidad de los grados de libertad de la estructura, en las estructuras que poseen muchos grados de libertad esta convergencia nunca ocurre, el error calculado tiene un valor máximo que esta entre  $1 \times 10^{-10} \leq e \leq 1 \times 10^{-11}$ .

En los modelos analizados se ha podido comprobar que los vectores Ritz son de gran utilidad en modelos con muchos grados de libertad como es el caso de los modelos utilizados en los programas Porticos2D y Porticos3D, para los modelos utilizados en el programa Análisis Pseudoespacial por ser modelos con pocos grados de libertad la utilidad de los vectores Ritz es la misma que el método de los Autovalores.

De los resultados obtenidos con los modelos analizados se puede afirmar que los vectores Ritz alcanzan más rápido una masa modal efectiva mayor o igual al 90%, siendo la diferencia más notoria en el modelo 3 empleado en el programa Análisis

Pseudoespacial que presenta una irregularidad en planta y elevación en el cual se necesitaron menos modos para alcanzar una masa modal efectiva mayor o igual al 90%.

Los resultados obtenidos con los programas Porticos2D y Porticos3D el error porcentual de los parámetros obtenidos con los vectores Ritz presentan un error menor que los obtenidos con el método de Autovalores, con el programa Análisis Pseudoespacial el error porcentual de los parámetros obtenidos mediante el uso de vectores Ritz son ligeramente mayor que los obtenidos con método de Autovalores. Los resultados de los desplazamientos y fuerzas de los pórticos que se encuentran en la misma dirección de la aceleración del terreno presentan resultados con un error porcentual menor o igual al 3% comparando con los resultados obtenidos con SAP2000, mientras que el error porcentual que se presenta en los pórticos que no se encuentren en la misma dirección de la aceleración del terreno es mucho mayor, aunque la magnitud de los mismos no es relevante.

En el modelo 2 utilizado en el programa Análisis Pseudoespacial se presentaron errores considerables en los parámetros calculados esto se debe a que los pórticos de los ejes A,1 y 6 que contiene este modelo no tienen restricciones en la base, debido a esto este tipo de pórticos se modelan como un mecanismo y no como un pórtico. De otra manera se produciría un error al momento de realizar la condensación estática y posteriormente al calcular la matriz de rigidez lateral de la estructura. Este error se da principalmente porque las matrices de rigidez de estos pórticos son matrices singulares o están mal condicionadas. De las tres formas que se analizaron, la que obtuvo los mejores resultados comparando con los resultados obtenidos con SAP2000, fue en el cual los pórticos de los ejes A, 1 y 6 no se incluyeron para el análisis de la estructura.

Los resultados obtenidos con los programas Porticos2D y Porticos3D pueden ser más preciso al dividir cada elemento en elementos más pequeños, aunque esto conlleva a un mayor esfuerzo computacional.

## 6.2 RECOMENDACIONES

Para los programas Porticos2D y Porticos3D se ha realizado una rutina que permite dividir cada elemento de la estructura en elementos más pequeños, sin la necesidad de ingresar datos adicionales de los que se ingresan en un inicio el único dato que se debe ingresar es el número de divisiones que se desea realizar, el número de divisiones será la misma para todos los elementos, esto se lo hizo con el fin de obtener resultados más precisos, pero la limitante es que el costo computacional aumenta y la capacidad de almacenamiento para el cálculo de vectores y valores propios mediante la función de Matlab es rebasada esto se puede solucionar mediante el método de condensación estática aplicada a problemas dinámicos.

Para el programa Análisis Pseudoespacial se recomienda no modelar estructuras que contengan pórticos los cuales no tengan restricciones en la base, como es el caso del modelo 2 en el cual los pórticos que se encuentran en los ejes A, 1 y 6 no contienen restricciones en la base, una alternativa puede ser no incluir los pórticos que no contengan restricciones en la base para el análisis.

Los programas realizados están sujetos a ser modificados ampliados y mejorados, en los programas realizados existen varias rutinas a ser mejoradas, una de ellas puede ser:

La rutina vector de cargas de los programas Porticos2D y Porticos3D solo está programada para calcular las acciones por empotramiento perfecto producidas por una carga uniforme, por lo que sería beneficioso que se modifique esta rutina para calcular las acciones por empotramiento perfecto para otro tipo de cargas.

Otra de las rutinas a ser mejoradas es la rutina combinación modal principalmente en la parte en la que se realiza el cálculo de la torsión en la base y la torsión en planta de cada piso.

Se recomienda investigar otras alternativas respecto al vector inicial de cargas para calcular el vector de inicialización para generar los vectores Ritz.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Aguiar, R. (2003). *Análisis Sísmico Por Desempeño*. In *Escuela Politécnica del Ejército (Primera Edición)*. Quito: Centro de Investigaciones Científicas Escuela Politécnica del Ejército.
2. Aguiar, R. (2012). *Dinámica de Estructuras con CEINCI-LAB (Cuarta Edición)*.
3. Bathe, K. (1996). *Finite-Element-Procedures*. New Jersey.
4. Bhatt, P. (2002). *Programing the Dynamic Analysis of Structures*. New York.
5. Cheng, F. (2015). *Matrix Analysis of Structural Dynamics*. New York, USA: Marcel Dekker, INC.
6. Chopra, A. K. (2014). *Dinámica de Estructuras (Cuarta Edición)*. Mexico: PEARSON EDUCACION.
7. Clough, R., & Penzien, J. (2002). *Dynamics of structures*. In *Earthquake Engineering Handbook (Third Edition)*.
8. Garcia, L. E. (1998). *Dinamica estructural aplicada la diseño sísmico*. Bogotá.
9. Humar, J. L. (2001). *Dynamics-of-structures (second edi)*. Ottawa.
10. James, D. (1991). *STATIC AND DYNAMICS ANALYSIS OF STRCUTURES with An Emphasis on Mechanics and Computer Matrix Methods (G. M. Gladwell, Ed.)*. Ontario, Canada.
11. Kassimali, A. (2009). *Matrix Analysis of structures*. In *Mycological Research (Second, Edition)*. Souther Illinios.
12. Liu, G., & Quek, S. (2004). *The Finite Element Method A practical course*.
13. Matrix Laboratory. (2004). *Manual de Matlab*.
14. Meirovitch, L. (2000). *Fundamentals of vibrations*. In *McGRAW-HILL (Ed.), Handbook of Machinery Dynamics*.
15. NEC-SE-CG. (2015). *Peligro sísmico (Norma Ecuatoriana de la Construcción)*. Quito: Cámara de la Construcción de Quito.
16. Oliva, E. A. (1992). *Análisis dinámico de estructuras con equipos livianos*. *Revista Internacional de Métodos Numéricos Para Cálculo y Diseño En Ingeniería*, 8(4), 407–416.
17. Paz, M. (1992). *Dinámica Estructural; Teoría Y Cálculo - Mario Paz.(Tercera Edición)*.
18. Paz, M., & Leigh, W. (2001). *INTEGRATED MATRIX ANALYSIS OF STRUCTURES Theory and Computation*. Norwell, Massachusetts: Kluwer Academic.
19. Petyt, M. (2010). *Introduction to Finite Element Vibration Analysis*. In *Cambridge University (Second Edition)*.

20. Przemieniecki, J. (1969). *Theory of matrix structural analysis*.
21. Quarteroni, A., & Saleri, F. (2006). *CÁLCULO CIENTÍFICO con MATLAB y Octave*.
22. Rossi, R. E. (2007). *INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS DE VIBRACIONES CON ELEMENTOS FINITOS*. Bahía Blanca.
23. Singiresu, R. (2011). *Vibraciones mecánicas*. In P. Education (Ed.), Prentice Hall (Quinta edition).
24. Smith, I. M., Griffiths, D. V., & Margetts, L. (2015). *Programming the Finite Element Method*. In *Programming the Finite Element Method: Fourth Edition (Fourth Edition)*.
25. *Structural Anlysis Program*. Structural Anlysis Program. Computers and Structures Inc.
26. Tena, A. (2007). *Análisis de Estructuras con metodos Matriciales (Primera Edición)*. Mexico: LIMUSA.
27. Wilson, E. L. (2008). *Análisis Estático y Dinámico de Estructuras*. In I. Computers and Structures (Ed.), *The British Journal of Psychiatry (Cuarta Edition)*

**ANEXOS**  
**RUTINAS REALIZADOS EN MATLAB PARA EL PROGRAMA**  
**PORTICOS2D**

### A.1.1 FUNCIÓN DISCRETIZACIÓN

```

function[NC,Coor,A,I,Ms,Es]=Discretizacion(NC,Coor,div,A,I,Es,M
s)
%Esta función permite dividir los elementos del pórtico que se
ingresaron inicialmente mediante la variable div que solo puede
tomar valores enteros positivos, sin que se vea afectada la
numeración de nodos ingresada inicialmente ni tampoco la
numeración de nodos restringidos.
%Se modifica la matriz que contiene la numeración de elementos
con su respectiva conectividad entre nodos, así como las
propiedades geométricas y de material.
ele=size(NC,1);
Ni=NC(:,2); Nj=NC(:,3);X=Coor(:,2);Y=Coor(:,3);
c=0;
%% Generación de coordenadas de cada nodo de cada elemento
original al dividirse.
%Cx almacena las coordenadas en x de cada elemento original
dimensión (div+1)*ele debido a cada elemento contiene 1 nodo
más por cada elemento es decir un elemento contiene 2 nodos
este elemento al dividirse en 2 tendría 3 nodos.
%Cy almacena las coordenadas de cada nodo de cada elemento en
dirección y l es un contador
cx=zeros((div+1)*(ele),1);
cy=zeros((div+1)*(ele),1);
l=0;
for i=1:ele
%Cálculo de la longitud de cada elemento ingresado
inicialmente
    Lx=X(Nj(i))-X(Ni(i));
    Ly=Y(Nj(i))-Y(Ni(i));
% Generación de las coordenadas de cada nodo de cada elemento
    for j=1:div+1

```

```

    c=j+1;
%Coordenadas nodos iniciales
    if j==1
        cx(c)=X(Ni(i));
        cy(c)=Y(Ni(i));
%Coordenadas Nodos Finales debido a errores de redondeo es
esta condición
        elseif j==div+1
            cx(c)=X(Nj(i));
            cy(c)=Y(Nj(i));
% Coordenadas nodos intermedios
        else
            cx(c)=(Lx/div)+cx(c-1);
            cy(c)=(Ly/div)+cy(c-1);
        end
    end
    l=c;
end
%N vector que almacena los nodos correspondientes a las
coordenadas inicialmente ingresadas de cada nodo de cada
elemento
N=zeros((div+1)*(ele),1);
for ii=1:size(cx,1)
    for jj=1:size(Coor,1)
        if (cx(ii,1)==Coor(jj,2)) && (cy(ii,1)==Coor(jj,3))
            N(ii)=Coor(jj,1);
        end
    end
end
end
%c almacena el número máximo de nodos ingresados inicialmente
c=max(N);

```

```

%enc almacena el índice de correspondientes a los nodos que
se generaron los nodos que se generaran se numeraran a partir
del número máximo de nodos
%ingresados inicialmente
enc=find(N==0);
%Numeración de nodos que se generaron en cada elemento
for k=1:size(enc,1)
    N(enc(k))=c+k;
end
%c3 matriz de numeración de nodos y sus coordenadas en x,y
c3=[N cx cy];
%Se extraen los índices de los únicos
[valores_unicos, ind_unicos] = unique(N);
%Se extraen los índices de los nodos repetidos
ae=setdiff(1:length(N), ind_unicos);
corx=cx;
cory=cy;
%Se eliminan los nodos repetidos
N(ae)=[];
%Se eliminan las coordenadas de los nodos repetidos
corx(ae)=[];
cory(ae)=[];
%Coor2 matriz de Coordenadas de los nodos totales generados
Coor2=[N corx cory];
%% Conectividad entre nodos y elemento
%NI1 vector que almacena el índice del nodo inicial de los
nodos
%generados
NI1=zeros(div*ele,1);
for hh=1:size(cx,1)
    NI1(hh,1)=c3(hh,1);

```

```

v=mod(hh,(div+1));
if v==0
    NI1(hh,1)=0;
end
end
elni=find(NI1==0);
%Se eliminan los nodos que se repitan en algún elemento
NI1(elni)=[];
%Índice de los nodos finales de cada elemento
NJ1=zeros(div*ele,1);
%pos vector que contiene los índices
pos=1:div+1:size(cx,1);
d=zeros(size(cx,1),1);
d(pos)=pos;
for hh=1:size(cy,1)
    if hh==d(hh)
        NJ1(hh,1)=0;
    else
        NJ1(hh,1)=c3(hh,1);
    end
end
elnif=find(NJ1==0);
NJ1(elnif)=[];
%Matriz de elementos con su respectiva conectividad de nodos
NC=[ (1:size(NJ1,1))' NI1 NJ1];
Coor=zeros(size(Coor2,1),3);
or=sort(Coor2(:,1));
for kk=1:size(Coor2,1)
    for ll=1:size(Coor2,1)
        if or(kk,1)==Coor2(ll)
            Coor(kk,1:3)=Coor2(ll,1:3);
        end
    end
end

```

```

        end
    end
end
ele=size(NC,1);
%% Propiedades geométricas
ri=(1:div:ele)';rj=(div:div:ele)';
amod=zeros(ele,1);
imod=zeros(ele,1);
Msmod=zeros(ele,1);
Esmod=zeros(ele,1);
for jj=1:ele/div
    amod(ri(jj):rj(jj))=A(jj);
    imod(ri(jj):rj(jj))=I(jj);
    Msmod(ri(jj):rj(jj))=Ms(jj);
    Esmod(ri(jj):rj(jj))=Es(jj);
end
A=amod;I=imod;Ms=Msmod;Es=Esmod;
end

```

### A.1.2 FUNCIÓN GRADOS DE LIBERTAD

```

function [gdle]=grados_de_libertad_Portico_2D(Coor,rx,ry,rz)
%gdle matriz que contiene los grados de libertad efectivos de
cada nodo
%Coor matriz que contiene las coordenadas de cada nodo
%rx restricción de los grados de libertad traslacionales en
dirección x
%ry restricción de los grados de libertad traslacionales en
dirección y
%rz restricción de los grados de libertad rotacionales rz
%Grados de libertad efectivos
gdle=ones(3,max(max(Coor(:,1)))));
gdle(1,rx)=0;gdle(2,ry)=0;gdle(3,rz)=0;

```

```

cont=0;
for j=1:size(Coor,1)
    for i=1:3
        gdle(i,j);
        if (gdle(i,j)~=0)
            cont=cont+1;
            gdle(i,j)=cont;
        else gdle(i,j)=0;
        end
    end
end
end

```

### A.1.3 FUNCIÓN MATRIZ DE RIGIDEZ Y DE MASAS PORTICOS2D

```

Function [KM,Kp,Vc,Trans,M]=Matriz_de_Rigidez_Y_Masas_Porticos
_2D(NC,ele,Ni,Nj,X,Y,Pr,gdle)

```

%KM es la matriz de rigidez de la estructura

%M es la matriz consistente de masas de la estructura

%Kp es la hipermatriz que contiene la matriz de rigidez de cada elemento en Coordenadas globales

%Vc es la matriz que contiene los grados de libertad de los elementos del pórtico

%Trans es la hipermatriz que contiene la matriz de transformación de cada elemento

%NC matriz que contiene conectividad entre nodos de cada elemento

%ele es el número de elementos que conforman el pórtico

%Ni Nodos iniciales

%Nj Nodos finales

%X coordenadas en x de los nodos

%Y coordenadas en y de los nodos

%Pr es la matriz que contiene las propiedades geométricas y de material de cada elemento

```

%gdle es la matriz que contiene los grados de libertad
efectivos de cada nodo
Kp=zeros(6,6,ele);
Trans=zeros(6,6,ele);
Me=zeros(6,6,ele);
for k=1:ele
    xi=X(Ni(k) );
    yi=Y(Ni(k));
    xj=X(Nj(k));
    yj=Y(Nj(k));
    ell=sqrt((xi-xj)^2+(yi-yj)^2);
    %Cosenos y senos directores
    cs=(xj-xi)/ell;sn=(yj-yi)/ell;
    EI=Pr(k,2);
    EA=Pr(k,1);
    m=Pr(k,3);
    e1=EA/ell; e2=(12*EI/(ell)^3);
    e3=EI/ell;e4=(6*EI/(ell)^2);
    %Matriz de Rigidez del elemento en coordenadas Locales
    Km=[e1 0 0 -e1 0 0;0 e2 e4 0 -e2 e4;0 e4 4*e3 0 -e4
        2*e3;-e1 0 0 e1 0 0;0 -e2 -e4 0 e2 -e4;0 e4 2*e3 0 -
        e4 4*e3];
    %Matriz consistente de masas del elemento en coordenadas
    locales
    me=(m*ell/420)*[140 0 0 70 0 0;0 156 22*ell 0 54 -
        13*ell;0 22*ell 4*ell^2 0 13*ell -3*ell^2;
        70 0 0 140 0 0;0 54 13*ell 0 156 -22*ell;0 -13*ell -
        3*ell^2 0 -22*ell 4*ell^2];
    %Matriz de transformación de cada elemento
    T=[cs sn 0 0 0 0;-sn cs 0 0 0 0;0 0 1 0 0 0;0 0 0 cs sn
        0;0 0 0 -sn cs 0;0 0 0 0 0 1];

```

```

    %Matriz de Rigidez del elemento en coordenadas globales
    Kp(:, :, k)=T'*Km*T;

%Matriz consistente de Masas del elemento en coordenadas
globales
    Me(:, :, k)=T'*me*T;

    %Se almacenan las matrices de transformación de cada
elemento
    Trans(:, :, k)=T;
end

KE=zeros(max(max(gdle(:, :))),max(max(gdle(:, :))));
E=zeros(max(max(gdle(:, :))),max(max(gdle(:, :))));
Vc=zeros(ele,6);

%Ensamble de la matriz de rigidez y de Masas
for e1=1:ele
    Vc(e1,1:3)=gdle(:, NC(e1,2));
    Vc(e1,4:6)=gdle(:, NC(e1,3));
end

for j=1:ele
    for e2=1:6
        ii=Vc(j,e2);
        if ii==0
            continue
        end
        for m=1:6
            jj=Vc(j,m);
            if jj==0
                continue
            end
            KE(ii, jj)=Kp(e2,m,j)+KE(ii, jj);
            E(ii, jj)=Me(e2,m,j)+E(ii, jj);
        end
    end
end

```

```
end
```

```
end
```

```
KM=KE;
```

```
M=E;
```

```
end
```

#### A.1.4 CALCULO PROPIEDADES DINÁMICAS

```
function [FI,w,T]=Calculo_propiedades_dinamicas(KM,M)
```

```
%FI es la matriz Modal
```

```
%w son las frecuencias asociadas a cada modo
```

```
%T es el periodo de vibración asociado a cada modo
```

```
[FI,w2]=eig(KM,M);
```

```
w=sort(diag(w2).^0.5);
```

```
T=2*pi./w;
```

```
[w,or]=sort(diag(w2));
```

```
%Se ordenan los modos
```

```
FI=FI(:,or);
```

```
%Normalización de los modos con respecto a la Masa
```

```
dim=size(FI);
```

```
co=zeros(dim(2),1);
```

```
for c=1:length(FI(1,:))
```

```
    co(c)=FI(:,c)'*M*FI(:,c);
```

```
end
```

```
MN=zeros(length(FI(:,1)),length(FI(1,:)));
```

```
for c=1:length(FI(1,:))
```

```
    MN(:,c)=FI(:,c)/power(co(c),0.5);
```

```
end
```

```
FI=MN;
```

```
end
```

### A.1.5 ESPECTRO DE DESPLAZAMIENTO

```

function Sd]=Espectro_de_desplazamiento(z,Ps,Re,Im,R,op,oe,T)
%Sd son los valores del espectro de desplazamientos
correspondientes a cada periodo
%z Factor de zonificación sísmica
%Ps tipo de suelo
%Re Región
%I coeficiente de importancia de la estructura
%R coeficiente de reducción sísmica
%op coeficiente de irregularidad en planta
%oe coeficiente de irregularidad en elevación
%T es el periodo de vibración de cada modo
if Ps==1
    Ps=1; r=1;
elseif Ps==2
    Ps=2;r=1;
elseif Ps==3
    Ps=3;r=1;
elseif Ps==4
    Ps=4;r=1;
elseif Ps==5;
    Ps=5;r=1.5;
elseif Ps==6
    Ps=6;
end
Z=0;
Factores=[0.15 0.25 0.30 0.35 0.40 Z;
    ones(1,6)*0.9;ones(1,6);1.4 1.3 1.25 1.23 1.2 1.18;
    1.6 1.4 1.3 1.25 1.2 1.12;1.8 1.4 1.25 1.11 1
    0.85;ones(1,6)*0.9;ones(1,6);
    1.36 1.28 1.19 1.15 1.11 1.06;1.62 1.45 1.36 1.28

```

```

1.19 1.11;2.1 1.75 1.7 1.65 1.6
1.5;ones(1,6)*0.75;ones(1,6)*0.75;0.85 0.94 1.02
1.06 1.11 1.23; 1.02 1.06 1.11 1.19 1.28 1.40;1.5
1.6 1.7 1.8 1.9 2];
Z=Factores(1,z);
Fa=Factores(Ps+1,z);
Fd=Factores(Ps+6,z);
Fs=Factores(Ps+11,z);
% Espectro de respuesta elástico
%Periodo límite de vibración en el espectro sísmico elástico
if Re==1
    n=1.8;
elseif Re==2
    n=2.48;
elseif Re==3
    n=2.60;
end
Tc=0.55*Fs*Fd/Fa;
T0=0.1*Fs*Fd/Fa;
Sa=zeros(1,length(T));
for i=1:length(T)
    if T(i)<T0
        Sa(i)=Z*Fa*(1+((n-1)*(T(i)/T0)));
    elseif T0<T(i) && T(i)<Tc
        Sa(i)=n*Z*Fa;
    elseif T(i)>Tc
        Sa(i)=n*Z*Fa*(Tc/T(i))^r;
    end
end
Sd=9.81*(T.^2).*(Sa'.*Im)./((R*op*oe)*4*pi^2);
end

```

### A.1.6 FUNCIÓN VECTOR DE COMPATIBILIDAD DE ACELERACIONES

```
function[y1]=Vector_de_compatibilidad_de_aceleraciones(KM,gdle,ac)

%y1 es el vector de compatibilidad de aceleraciones
%KM matriz de rigidez del sistema
%gdle grados de libertad efectivos de cada nodo
%ac dirección de la aceleración

y1=zeros(size(KM,1),1);
for i=1:size(gdle,2)
    c=gdle(ac,i);
    if c==0
        continue
    end
    y1(c)=1;
end
end
```

### A.1.7 FUNCIÓN ANÁLISIS MODAL

```
Function[Felement,Fym,Vbasal,Meff,Umod,Momencum,Upiso,h,Flocal,Ulocal]=Analisis_Modal(ele,gdle,Vc,M,Sd,y1,FI,Kp,KM,Coor,Trans,div)

%Esta Función permite realizar un análisis Modal
%% Variables de Entrada
%ele:Número total de elementos del pórtico.
%gdle: Matriz de grados de libertad efectivos de cada nodo.
%Vc: Matriz que contiene los grados de libertad de los nodos que conforman cada elemento.
%Matriz de Masas en coordenadas globales del pórtico.
%Sd: Vector que almacena los desplazamientos espectrales correspondiente a cada periodo.
%y1: Vector de compatibilidad de aceleraciones.
%FI: Matriz modal.
```

%Kp: Hipermatriz de rigidez de cada elemento en coordenadas globales.

%KM: Matriz de rigidez del pórtico en coordenadas globales.

%Coord: Matriz que almacena las coordenadas de cada nodo.

%Trans: Hipermatriz contiene las matrices de transformación de cada elemento.

%div: Variable que define en cuantas partes se divide cada elemento del pórtico.

%% Variables de Salida

%Felement: Matriz que almacena las fuerzas de cada elemento del pórtico producidas por cada modo de vibración.

%Fy: Matriz que almacena las fuerzas verticales inerciales máximas por cada modo.

%Vbasal: Vector que almacena las fuerzas horizontales inerciales máximas por cada modo.

%Meff Vector que almacena la masa modal efectiva por cada modo.

%Umod: Matriz de desplazamientos espectrales máximos.

%Momencum: Matriz que almacena los momentos acumulados en cada piso del pórtico por cada modo.

%Upiso: Celda que almacena los desplazamientos horizontales todos los nodos

%que conforman los pisos del pórtico por cada modo.

%h: Vector que almacena la altura de cada piso con respecto a la base.

%Flocal: Matriz que almacena las fuerzas de cada elemento del pórtico en coordenadas locales producidas por cada modo.

%Ulocal: Matriz que almacena los desplazamientos en coordenadas locales de los nodos que conforman

%cada elemento del pórtico por cada modo.

%% Proceso

%AL=Masa asociada a cada modo

al=FI'\*M\*y1;

```

Meff=al.^2;
nmax=abs(al.*Sd);
Tl=diag(nmax);
%% Desplazamientos de los nudos
Umod=FI*Tl;%
%% Fuerzas inerciales máximas
dim=size(Umod);
desp=zeros(6,1);
Fmod=KM*Umod;
%% Fuerzas en los elementos de la estructura producidas por
cada Modo
%Rang es la matriz que contiene los índices que ocupan las
acciones de cada elemento en la columna 1 está el índice de la
posición de inicio en la columna 2 la posición final como cada
elemento tiene 6 acciones va de 6 en 6
%desp almacena los desplazamientos modales de cada nodo que
conforma cada elemento, desp extrae los desplazamientos modales
de Umod para esto se usan %la matriz que contiene los grados
de libertad de cada nodo de cada %elemento
%dimensión de Felement es de [12*N elementos, Nmodos}
Felement=zeros(6*ele,dim(2)); Rang=[(1:6:6*max(ele))'
(6:6:6*max(ele))' ];
Flocal=zeros(6*ele,dim(2));
Ulocal=zeros(6*ele,dim(2));
for jk=1:dim(2)
    for il=1:ele
        for jl=1:6
            desp(jl)=Vc(il,jl);
            if desp(jl)==0
                desp(jl)=desp(jl);
            else

```

```

        desp(jl)=Umod(desp(jl),jk);
    end
end
Felement(Rang(il,1):Rang(il,2),jk)=Kp(:, :, il)*desp;

Flocal(Rang(il,1):Rang(il,2),jk)=Trans(:, :, il)*Kp(:, :, il)*desp
P
    Ulocal(Rang(il,1):Rang(il,2),jk)=Trans(:, :, il)*desp;
end
end
%% Cortante basal en dirección x
%Col es un índice que nos da la dimensión del número de modos
%nc almacena los grados de libertad traslacionales en
dirección x
%A encuentra los grados de libertad que están restringidos en
dirección x
%Vmod almacena las fuerzas cortantes en dirección x
producidas por cada modo
col=size(Fmod);
nc=(gdle(1,:));
A=find(nc==0);
%s eliminan los grados de libertad restringidos
nc(A)=[];
Vmod=zeros(size(nc,2),col(2));
for ik=1:col(2)
    for jk=1:size(nc,2)
        Vmod(jk,ik)=Fmod(nc(jk),ik);
    end
end
end
%% Cortante basal en dirección x
%Col es un índice que nos da la dimensión del numero de modos

```

```

%ny almacena los grados de libertad traslacionales en dirección
z
%B encuentra los grados de libertad que están restringidos en
dirección z
%Vmody almacena las fuerzas cortantes en dirección z producidas
por cada modo
ny=(gdle(2,:));
B=find(ny==0);
ny(B)=[];
Fmody=zeros(size(ny,2),col(2));
for ik=1:col(2)
    for jk=1:size(ny,2)
        Fmody(jk,ik)=Fmod(ny(jk),ik);
    end
end
end
%% Cortante Basal máximo producido en cada modo
Vbasal=ones(1,size(nc,2))*Vmod;
Fym=ones(1,size(ny,2))*Fmody;
%% Cortante Basal de cada Piso
%Py es un vector que encuentra las coordenadas únicas que
contiene cada nodo en el ejes y esto se hace con el fin de
identificar el numero de pisos de la estructura.
Py=unique(Coor(:,3));
%V almacena los nodos que se encuentren en el mismo nivel es
decir en el mismo piso mediante las coordenadas que se
ingresaron, se utiliza una
%celda debido a que la dimensión varia de pisos en piso si la
planta de cada piso no tiene el mismo número de nodos
V={};
for i=1:size(Py,1)
    V{i}=(find(Coor(:,3)==Py(i)))';
end

```

```

end

%Vnudo almacena los grados de libertad en x de cada piso
Vnudo={};
for j=1:size(V,2)
    Vnudo{j}=gdle(1,V{j});
end

%Vpiso extrae las fuerzas modales que se producen en
dirección x
%Estas fuerzas se extraen de la matriz Fmod
%Empieza desde 2 debido a que la base es el nivel 0
Vpiso={};
for j=2:size(V,2)
    Vpiso{j-1}=Fmod(Vnudo{j}(1,:),:);
end

%Vxppiso contiene las fuerzas modales en dirección x de cada
piso la dimensión es de Vxppiso[Npisos,Nmodos]
Vxppiso=zeros(size(Vpiso,2),size(Fmod,2));
for jj=1:size(Vpiso,2)
    Vxppiso(jj,:)=ones(1,size(Vpiso{jj},1))*Vpiso{jj};
end

%Vxacum matriz que acumula las fuerzas en dirección x de cada
piso de cada modo Debido a que las fuerzas se deben acumular
desde el piso superior hasta el
%inferior y como las fuerzas de piso están numeradas desde el
piso inferior hasta el superior, este orden debe invertirse
para calcular el cortante en la base la variable cont permite
cambiar el orden de los pisos
Vxacum=zeros(size(Vpiso,2),size(Fmod,2));
cont=size(Vpiso,2):-1:1;
for jh=1:size(Vpiso,2)
    if jh==1

```

```

        Vxacum(jh,:) = Vxpiso(cont(jh),:);
    else
        Vxacum(jh,:) = Vxpiso(cont(jh),:) + Vxacum(jh-1,:);

    end

end

cu = (div:div:size(Py,1));
if div~=1
    Vxacum = Vxacum((div:div:end),:);
    Py = Py(1:div:end);
end

%% Momento en la base por producida por cada Modo
%%Momento por piso
% h contiene la altura a la que se encuentra cada piso debido
a que en el
% calculo de la fuerza cortante se invirtio el orden h se
ordena en forma
% descendente
h = sort(Py, 'descend');
%%Momencum almacena los momentos de piso de cada modo
Momencum = zeros(size(Vxacum,1), size(Fmod,2));
for jh=1:size(Vxacum,1)
    if jh==1
        Momencum(jh,:) = (h(jh) - h(jh+1)) * Vxacum((jh),:);
    else
        Momencum(jh,:) = (h(jh) - h(jh+1)) * Vxacum((jh),:) + Momencum(jh-
1,:);
    end
end

%%Desplazamientos de piso
%%Upiso almacena los desplazamientos de cada piso en la x o z

```

```

%ad=1 por que es en dirección x las derivas
%Upiso almacena los desplazamientos máximos modales de los
nodos que se encuentren en el mismo piso
ad=1;
Upiso={};
for j=2:size(V,2)
    Upiso{j-1}=Umod(Vnudo{j}(ad,:),:);
end
if div~=1
    UD=Upiso;
    Upiso={};
    for ji=1:size(Vxacum,1)
        Upiso{ji}=UD{cu(ji)};
    end
end
end
end

```

### A.1.8 FUNCIÓN MASA MODAL EFECTIVA

```

function [Macum]=Masa_Modal_efectiva(Meff)
%Maccum es la masa modal efectiva acumulada
%Meff es la masa modal de cada modo
%Masa Total
acum=sum(Meff);
%Porcentaje de masa de cada Modo
Ap=Meff.*100/acum;
%Numero de modos que aportan con masa >=90%
Macum=Ap(1);
for ij=2:length(Meff)
    if Macum<=90
        Macum(ij)=Macum(ij-1)+Ap(ij);
    else
        break
    end
end

```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

### A.1.9 FUNCIÓN COMBINACIÓN MODAL CQC

```
function[UC,VC,FES,Rbase,Derpiso,Flocal,Ulocal]=Combinacion
_Modal_CQC(w,Nmod,E,Umod,Vbasal,Fym,Felement,Momencum,Upiso,h
,Flocal,Ulocal)
```

```
%UC Desplazamientos modales máximos combinados
```

```
%FC fuerzas modales inerciales máximas combinadas
```

```
%VC Cortante basal máximo dinámico
```

```
%VC Cortante basal dinámico en dirección x
```

```
%Fy es la fuerza máxima en dirección y
```

```
%FES Vector que contiene las fuerzas combinadas de cada
elemento de la estructura
```

```
%Mbase Momento en la base
```

```
%Derpiso Es el vector que almacena las derivas de piso
combinadas que se producen en la dirección x
```

```
%Bij coeficiente que relaciona la frecuencia del modo i con la
frecuencia del modos j
```

```
%E es el amortiguamiento
```

```
%Ro coeficiente de correlación ente el modo i y el modo j
```

```
Bij=zeros(length(Nmod));
```

```
for ij=1:length(Nmod)
```

```
    for ej=1:length(Nmod)
```

```
        Bij(ej,ij)=w(ej)/w(ij);
```

```
    end
```

```
end
```

```
Be=Bij';
```

```
Ro=zeros(length(Nmod));
```

```
for ij=1:(length(Nmod))
```

```
    for ej=1:length(Nmod)
```

```

        Ro(ij,ej)=(8*E^2*(1+Be(ij,ej))*(Be(ij,ej))^(3/2))/((1-
Be(ij,ej)^2)^2+(4*E^2*Be(ij,ej)*(1+Be(ij,ej)^2)^2));
    end
end
%Dimension de los arreglos
UQ=Umod(:,1:length(Nmod));
UC=zeros(length(Umod),1);
Flocalc=zeros(size(Felement,1),1);
Ulocalc=zeros(size(Felement,1),1);
FES=zeros(size(Felement,1),1);
%% Combinación Modal de los desplazamientos modales
for ij=1:(size(Umod,1))

UC(ij)=sqrt(UQ(ij,1:length(Nmod))*Ro*UQ(ij,1:length(Nmod))');
end
%% Combinación modal de las fuerzas modales de cada elemento
for ik=1:size(Felement,1)

FES(ik)=sqrt(Felement(ik,1:length(Nmod))*Ro*Felement(ik,1:len
gth(Nmod))');

Flocalc(ik)=sqrt(Flocal(ik,1:length(Nmod))*Ro*Flocal(ik,1:len
gth(Nmod))');

Ulocalc(ik)=sqrt(Ulocal(ik,1:length(Nmod))*Ro*Ulocal(ik,1:len
gth(Nmod))');
end
%% Cortante en la base
VQ=Vbasal(1,1:length(Nmod));FQy=Fym(1,1:length(Nmod));
VC=sqrt(VQ*Ro*VQ');
Fy=sqrt(FQy*Ro*FQy');

```

```

cont=size(Momencum,1):-1:1;
%% Momento en la base
Mpisozeros(size(Momencum,1),1);
for ii=1:size(Momencum,1)
Mpisozeros(ii)=sqrt(Momencum(ii,1:length(Nmod))*Ro*(Momencum(ii,1:
length(Nmod)))');
end
Mbase=Mpisozeros(end);
Rbase=[VC Fy Mbase];
%% Derivas de pisos en la dirección de análisis
Uxpisozeros(size(Upisozeros,2),size(Umod,2));
Unxp={};
for jj=1:size(Upisozeros,2)
    for ij=1:size(Upisozeros{jj},1)
Unxp{jj}(ij,:)=sqrt(Upisozeros{jj}(ij,1:length(Nmod))*Ro*Upisozeros{jj}
(ij,1:length(Nmod)))');
    end
end
Umax=zeros(size(Upisozeros,2),1);
for jj=1:size(Upisozeros,2)
    Umax(cont(jj))=max(Unxp{jj}(:,1));
end
%%Derivas de piso
Derpisozeros(size(Umax,1),1);
for ju=1:size(Umax,1)
%%Debido a que los nudos son numerados desde abajo hacia
arriba
if ju==size(Umax,1)
    Derpisozeros(ju,1)=Umax(ju,1)/(h(ju)-h(ju+1));
else
    Derpisozeros(ju,1)=(Umax(ju)-Umax(ju+1))/((h(ju)-h(ju+1)));
end

```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

### A.1.10 FUNCIÓN COMBINACIÓN MODAL SRSS

```
function[UC,VC,FES,Rbase,Derpiso,Flocalc,Ulocalc]=Combinacion
_Modal_SRSS(Nmod,Umod,Vbasal,Felement,Fym,Momencum,Upiso,h,Flocalc,Ulocalc)
```

```
%UC Desplazamientos modales máximos combinados
```

```
%FC fuerzas modales inerciales máximas combinadas
```

```
%VC Cortante basal máximo dinámico
```

```
%Fy es la fuerza máxima en dirección y
```

```
%FES Vector que contiene las fuerzas combinadas de cada
elemento de la estructura
```

```
%Mbase Momento en la base
```

```
%Derpiso Es el vector que almacena las derivas de piso
combinadas que se producen en la dirección x
```

```
%Dimensión de arreglos
```

```
UQ=Umod(:,1:length(Nmod));
```

```
UC=zeros(length(Umod),1);
```

```
Flocalc=zeros(size(Felement,1),1);
```

```
Ulocalc=zeros(size(Felement,1),1);
```

```
FES=zeros(size(Felement,1),1);
```

```
%% Combinación Modal de los desplazamientos modales
```

```
for ij=1:(size(Umod,1))
```

```
    UC(ij)=sqrt(sum((UQ(ij,1:length(Nmod)).^2)));
```

```
end
```

```
%% Combinación modal de las fuerzas modales de cada elemento
```

```
for ik=1:size(Felement,1)
```

```
    FES(ik)=sqrt(sum(Felement(ik,1:length(Nmod)).^2));
```

```
    Flocalc(ik)=sqrt(sum(Flocalc(ik,1:length(Nmod)).^2));
```

```
    Ulocalc(ik)=sqrt(sum(Ulocalc(ik,1:length(Nmod)).^2));
```

```

end
%% Cortante en la base
VQ=Vbasal(1,1:length(Nmod));FQy=Fym(1,1:length(Nmod));
VC=sqrt(sum(VQ.^2));Fy=sqrt(sum(FQy.^2));
cont=size(Momencum,1):-1:1;
%% Momento en la base
Mpiso=zeros(size(Momencum,1),1);
for ii=1:size(Momencum,1)
    Mpiso(ii)=sqrt(sum(Momencum(ii,1:length(Nmod)).^2));
end
Mbase=Mpiso(end);
Rbase=[VC Fy Mbase];
%% Derivas de pisos en la direccion de analisis
Uxpiso=zeros(size(Upiso,2),size(Umod,2));
Unxp={};
for jj=1:size(Upiso,2)
    for ij=1:size(Upiso{jj},1)
        Unxp{jj}(ij,:)=sqrt(sum(Upiso{jj}(ij,1:length(Nmod)).^2));
    end
end
Umax=zeros(size(Upiso,2),1);
for jj=1:size(Upiso,2)
    Umax(cont(jj))=max(Unxp{jj}(:,1));
end
%%Derivas de piso
Derpiso=zeros(size(Umax,1),1);
for ju=1:size(Umax,1)
    %%Debido a que los nudos son numerados desde abajo hacia
    arriba
    if ju==size(Umax,1) || ju==1

```

```

    Derpiso(ju,1)=Umax(ju,1)/(h(ju)-h(ju+1));
else
    Derpiso(ju,1)=(Umax(ju)-Umax(ju+1))/((h(ju)-h(ju+1)));
end
end
end

```

### A.1.11 FUNCIÓN FUERZAS Y DESPLAZAMIENTOS POR ELEMENTO

```

function[FXEL,FCN,Desplaz,Dlocal,Dnudos]=Fuerzas_Y_Desplazamientos_Por_Elemento(FES,UC,ele,Vc,Flocalc,Ulocalc,gdle)
Rang=[(1:6:6*(ele))' (6:6:6*(ele))' ];
FXEL=zeros(6,ele);
FCN=zeros(6,ele);
Dlocal=zeros(6,ele);
%FXEL: Fuerzas en cada elemento en coordenadas globales
%FCN: Fuerzas por elemento en coordenadas Locales
for i=1:ele
    FXEL(1:6,i)=FES(Rang(i,1):Rang(i,2),1);
    FCN(1:6,i)=Flocalc(Rang(i,1):Rang(i,2),1);
    Dlocal(1:6,i)=Ulocalc(Rang(i,1):Rang(i,2),1);
end
%Desplazamientos por nudo
Dnudos=zeros(size(gdle,1),size(gdle,2));
for k=1:size(gdle,2)
    for g=1:size(gdle,1)
        if gdle(g,k)==0
            Dnudos(g,k)=0;
        else
            Dnudos(g,k)=UC(gdle(g,k));
        end
    end
end
end

```

```
%Desplazamientos por elemento
Desplaz=zeros(6,ele);
for i=1:ele
    for j=1:6;
        if Vc(i,j)==0
            Desplaz(j,i)=0;
        else
            Desplaz(j,i)=UC(Vc(i,j));
        end
    end
end
end
end
```

