ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS

ANÁLISIS DE UN PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN EN ESPACIOS DE EXPONENTE VARIABLE CON APLICACIONES EN EL FILTRADO DE RUIDO DE IMÁGENES

TRABAJO DE TITULACIÓN PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE MATEMÁTICA

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

MARÍA DE LOS ÁNGELES SILVA BALAREZO
maria.silva@epn.edu.ec

DIRECTOR: SERGIO ALEJANDRO GONZÁLEZ ANDRADE, Ph.D.
sergio.gonzalez@epn.edu.ec

QUITO, NOVIEMBRE 2020

Declaración

Yo, María de los Ángeles Silva Balarezo, declaro bajo juramento que el trabajo aquí descrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y, que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

La Escuela Politécnica Nacional puede hacer uso de los derechos correspondientes a este trabajo, según lo establecido por la Ley de la Propiedad Intelectual, por su Reglamento y por la normatividad institucional vigente.

María de los Ángeles Silva Balarezo

Certificación

Certifico que el presente trabajo fue realizado y desarrollado por María de los Ángeles Silva Balarezo, bajo mi supervisión.

SERGIO ALEJANDRO GONZALEZ ANDRADE

Firmado digitalmente por SERGIO ALEJANDRO GONZALEZ ANDRADE
Fecha: 2020.12.02 15:40:44 -05'00'

Sergio Alejandro González Andrade, Ph.D.
Director

AGRADECIMIENTOS

A Dios por poner en mi vida a personas maravillosas.

A mi madre Fanny y mis tíos Susana y Luis por su cariño y apoyo durante este tiempo, gracias por unir esfuerzos y haberme brindado la oportunidad de estudiar, les estaré eternamente agradecida.

A mi familia, por su amor, ejemplo de unión y por siempre estar presentes.

A mi director de tesis Sergio González, por su guía profesional, su amabilidad y por el tiempo dedicado a la supervisión de este trabajo, gracias porque a pesar de los imprevistos y de los cambios a los que tuvimos que adaptarnos siempre conté con su apoyo.

A mis queridos amigos, Andy, por cada enseñanza direccionada a escribir este documento. Leo, por esa forma tan particular de darme ánimo a lo largo de este camino. A mi querida amiga Pris, por todas esas horas de estudio que compartimos y por esa amistad sincera.

A Pablo, Any, Sofy, Pao, Cristian y Pedro, gracias por la amistad, la paciencia y sobre todo por los maravillosos consejos, ustedes han sido mi soporte.

A todas y cada una de esas incríbles personas que conocí a lo largo de la carrera, llevo gratos recuerdos de todos ustedes. Son muchos los que me tendieron una mano amiga y estoy muy agradecida por ello, la etapa universitaria no hubiese sido la misma sin ustedes.

Maru

DEDICATORIA

A la memoria de mis abuelos y bisabuelos.
Ustedes siempre serán mi ejemplo y motivación, los amo.

Índice general

Resumen

En este trabajo se hace un estudio de las principales propiedades de los espacios de Lebesgue y Sobolev con exponente variable y en base a ese estudio se plantea un problema de optimización asociado al filtrado de ruido en imágenes.
Para el estudio de existencia y unicidad de soluciones en este problema que involucra un funcional con exponente variable utilizaremos el método directo del cálculo de variaciones. Para ello, previamente se da un breve repaso de algunos resultados de Análisis funcional, Teoría de la medida, Espacios de Lesbesgue y Sobolev y Cálculo variacional, haciendo énfasis en el estudio de los espacios semimodulares y espacios de amalgama, herramientas esenciales para la construcción y tratamiento de esta aplicación.

Abstract

In this work, we study the main properties of the Lebesgue and Sobolev spaces with a variable exponent. Further, based on this study we propose an optimization problem associated to image denoising.
In order to study existence and uniqueness of solutions for this problem, which involves a functional with variable exponent, we use the direct method in the calculus of variations. In this aim, a brief review of functional analysis, measure theory, Lesbesgue and Sobolev spaces, and calculus of variations is carried out. In particular, we focus on the study of semi-modular spaces and amalgam spaces, which are essential tools for construction and treatment of this application.

Capítulo 1

Introducción

El objetivo de este trabajo de titulación es garantizar la existencia y unicidad de soluciones para el problema:

$$\min_u J(u) := \int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx + \frac{\lambda}{2} \int_\Omega |u - f|^2 dx, \tag{1.1}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un subconjunto abierto, acotado y suave, $\lambda \geq 0$, $p : \Omega \to [1, \infty)$ es una función medible tal que $1 < p^- < p(x) < p^+ \leq 2$ con $p^+ := \operatorname{ess\,sup}_{x\in\Omega} p(x)$, $p^- := \operatorname{ess\,inf}_{x\in\Omega} p(x)$ y $f \in L^2(\Omega)$. En este trabajo analizamos teóricamente este problema y discutimos brevemente su aplicación al filtrado de ruido en imágenes.

Dentro de los modelos clásicos para tratar este tipo de aplicaciones se consideran funcionales del tipo

$$\min_u J(u) := \int_\Omega |\nabla u|^p dx + \frac{\lambda}{2} \int_\Omega |u - f|^2 dx, \tag{1.2}$$

Aquí, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un subconjunto abierto y acotado, $1 \leq p \leq 2$, $\lambda \geq 0$ y $f \in L^2(\Omega)$. Existe una gran cantidad de bibliografía respecto al estudio de existencia y unicidad de soluciones para (1.2), por ejemplo, [16] y [11].

El problema (1.1) es una generalización para los modelos (1.2), antes mencionados, dado que el exponente deja de ser un valor fijo y se convierte en una función. Este es, precisamente, el enfoque que nos dan los espacios de Lebesgue con exponente variable $L^{p(\cdot)}$: dejar el dominio intacto y hacer variar el exponente. Por este motivo, estamos interesados en estudiar el problema (1.1) en este tipo de espacios, donde las condiciones que son impuestas sobre $p(\cdot)$ están ligadas a hacer uso de las propiedades de los espacios de Lebesgue y Sobolev de exponente variable.

En el estudio de existencia y unicidad de soluciones para problemas que involucran funcionales con exponentes variables se tienen resultados en [2] y [15]. Sin embargo, nuestro problema está formado por la suma de una componente con exponente variable y otra con exponente fijo, lo que nos obliga a considerar el tratamiento que se debe dar al mismo para minimizarlo en un espacio adecuado.

Así, siguiendo las ideas en [1], se introduce la noción de *espacios de amalgama*. Estos espacios permiten trabajar simultáneamente con espacios de exponente variable y espacios de exponente constante y constituyen una herramienta fundamental para tratar el comportamiento local y global de una función de manera conjunta.

El presente trabajo está estructurado de la siguiente manera: en el Capítulo 2 se estudian las definiciones y herramientas fundamentales del análisis funcional tales como: espacio normado, función convexa, espacio de Banach, espacio dual, reflexivo y también se presentan las nociones más importantes de Teoría de la medida pues varias de las propiedades presentadas posteriormente guardan una estrecha relación con estas.

Se presentan también las definiciones clásicas de espacios de Lebesgue y Sobolev como en [6] y [13], mismos que se convierten en la particularización de los espacios de exponente variable, motivo principal de nuestro estudio y la base para el desarrollo del presente trabajo. Finalmente, abordamos ciertas nociones de cálculo variacional, primordiales para analizar la existencia de soluciones de (1.1).

En el Capítulo 3 estudiaremos los espacios semimodulares y modulares como una introducción al estudio de los espacios de Lebesgue y Sobolev de exponente variable y sus propiedades, además de algunas características y similitudes que comparten con los espacios de Lebesgue y Sobolev de exponente constante. Junto con sus características más elementales, se introduce también el funcional $||\cdot||_{L^{p(\cdot)}}$ mismo que determina estos espacios. En la última sección de este capítulo se introduce la definición formal de espacio de amalgama y, siguiendo las ideas de [1], se definen los espacios $X^{p(\cdot)}(\Omega)$ y $X_0^{p(\cdot)}(\Omega)$, donde precisamente podemos garantizar que la componente variable de (1.1), cuyos elementos pertenecen a este espacio sea semicontinua inferior (l.s.c) en $L^2(\Omega)$.

En el Capítulo 4 estableceremos nuestros resultados principales que permitirán garantizar la existencia y unicidad de soluciones para el funcional planteado en $L^2(\Omega)$ y en $X_0^{p(\cdot)}(\Omega)$.

La existencia de soluciones está fundamentada en el uso de los métodos directos del cálculo de variaciones y en la noción de semicontinuidad débil, mientras que la unicidad de soluciones se obtiene gracias a que el funcional planteado es estrictamente convexo.

Finalizamos el capítulo con una descripción del proceso de eliminación del ruido en imágenes y la relación que existe con el funcional (1.1) planteado, las conclusiones y el trabajo que se puede realizar a futuro.

Capítulo 2

Preliminares

En este capítulo se presenta un breve resumen de los principales resultados que serán utilizados en este trabajo, los mismos que son bastante conocidos y fueron tomados principalmente de [6], [9] y [10].

Aquí, se expone una serie de tópicos que resultan fundamentales en el carácter explicativo de este trabajo, y en su mayor parte estos resultados no tendrán demostración.

2.1. Resultados básicos

Definición 2.1.1. *Sea $A \subset \mathbb{R}$ un subconjunto no vacío. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ cumple*

$$\forall a \in A : \quad \lambda \leq a$$

entonces se dice que λ es una cota inferior de A. Si, además, λ cumple

$$\forall \epsilon > 0, \exists a \in A : \quad a \leq \lambda + \epsilon,$$

entonces λ se llamará ínfimo de A y se notará por $\text{ínf}\, A = \lambda$.

Proposición 2.1.1. *Sea $A \subset \mathbb{R}$ un subconjunto no vacío y $\beta \in \mathbb{R}$*

- $\text{ínf}\, A \leq \beta$ *si y solo si, para todo $\epsilon > 0$, existe $a \in A$ tal que, $a \leq \beta + \epsilon$.*
- $\text{ínf}\, A < \beta$ *si y solo si, existe $a \in A$ tal que, $a < \beta$.*

Definición 2.1.2. *Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Una función $||\cdot|| : X \to \mathbb{R}$ es conocida como norma sobre X si se cumplen los siguientes enunciados, para $x, y \in X$ y $\lambda \in \mathbb{R}$:*

- $||x|| \geq 0$ *y* $||x|| = 0$ *si y solo si* $x = 0$.
- $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$. (Desigualdad triangular)

- $||\lambda x|| \leq |\lambda|||x||$. (Homogeneidad)

Si $||\cdot||$ *es una norma sobre* X *entonces* $\{X, ||\cdot||\}$ *se conoce como espacio normado.*

Definición 2.1.3. *Un espacio normado* $\{X, ||\cdot||\}$ *se dice completo si toda sucesión de Cauchy converge, es decir, existe el límite en* X*. Un espacio normado completo es conocido como espacio de Banach.*

Definición 2.1.4. *Un conjunto* $C \subset \mathbb{R}^n$ *es convexo si para todo* $u, v \in C$

$$\lambda u + (1-\lambda)v \in C \quad \text{para todo} \quad \lambda \in [0,1].$$

Definición 2.1.5. *Sea* X *un espacio de Banach y* $C \subset X$ *un conjunto convexo, un funcional* $f : C \to \mathbb{R}$ *se dice convexo si*

$$f(\lambda u + (1-\lambda)v) \leq \lambda f(u) + (1-\lambda) f(v)$$

para todo $\lambda \in [0,1]$ *y todo* $u, v \in C$*. El funcional se dice estrictamente convexo si en la desigualdad anterior reemplazamos* $\leq$ *por* $<$*, siempre que* $u \neq v$ *y* $\lambda \in (0,1)$*.*

Definición 2.1.6. *El espacio de todos los funcionales lineales y acotados* $F : X \to \mathbb{R}$*, donde* X *es un espacio de Banach se notará por* X^* *y se conoce como el espacio dual de* X*, mientras que al espacio dual de* X^* *se notará por* X^{**} *y se conocerá como espacio bidual.*

Definición 2.1.7. *Sea* X *un espacio de Banach,* X^{**} *su bidual y* $J : X \to X^{**}$ *la inyección canónica de* X *en* X^{**}*. El espacio* X *se dice reflexivo si* J *es sobreyectiva, es decir,* $J(X) = X^{**}$*.*

Proposición 2.1.2. *Sea* X *un espacio de Banach reflexivo y* $M \subset X$ *un subespacio lineal cerrado. Entonces* M *es reflexivo.*

Demostración. Para la demostración ver [6, p. 70]. □

Teorema 2.1.1. *Toda sucesión acotada en un espacio de Banach reflexivo tiene una subsucesión débilmente convergente.*

Demostración. Para la demostración ver [6, p. 76]. □

2.2. Teoría de la medida

Definición 2.2.1. *Sea Ω un conjunto. Una colección $\mathcal{F}$ de subconjuntos de Ω es llamada σ-álgebra si:*

a) $\emptyset \in \mathcal{F}$.

b) $A \in \mathcal{F}$, *entonces,* $A^C \in \mathcal{F}$.

c) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$, *donde,* $A_n \in \mathcal{F}$, $\forall n$.

Observación 2.2.1. *Un conjunto Ω dotado de una σ-álgebra $(\Omega, \mathcal{F})$ será llamado espacio medible. Los elementos de la σ-álgebra $\mathcal{F}$ serán denominados conjuntos $\mathcal{F}$-medibles.*

Definición 2.2.2. *Una función $\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ se dice que es una medida si:*

a) $\mu(\emptyset) = 0$,

b) para toda sucesión de elementos disjuntos $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{F}$,

$$\mu\left(\bigcup_{i\geq 1} A_i\right) = \sum_{i\geq 1} \mu(A_i),$$

esta propiedad se conoce como σ-aditividad de μ.

Observación 2.2.2. $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *es conocido como espacio medido.*

Definición 2.2.3. *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio medido. Una medida μ es σ-finita si existe una sucesión numerable $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de la σ-álgebra $\mathcal{F}$ tales que*

$$\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

y tales que para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $\mu(A_n) < +\infty$.

Definición 2.2.4. *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio medido. Un conjunto $A \in \mathcal{F}$ es σ-finito con respecto a la medida μ si es la unión numerable de conjuntos de $\mathcal{F}$ de μ-medida finita.*

Definición 2.2.5. *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio medido. Diremos que una medida es no atómica (ver [12, p. 13]) si para todo $A \in \mathcal{F}$ de medida positiva y todo β tal que $0 < \beta < \mu(A)$, existe un subconjunto B de A tal que $\mu(B) = \beta$.*

Definición 2.2.6. *Los conjuntos $A \in \mathcal{F}$ tal que $\mu(A) = 0$ se conocen como conjuntos de medida nula o cero.*

Definición 2.2.7. *En un espacio medido $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ una parte D de Ω es μ-despreciable si está contenida en un conjunto $A \in \mathcal{F}$ de μ-medida nula; es decir,*

$$D \subset A \in \mathcal{F} \quad \text{y} \quad \mu(A) = 0.$$

Definición 2.2.8. *Decimos que cierta propiedad se cumple en casi todo punto (c.t.p) si el conjunto de puntos para los cuales la propiedad no es cierta es un conjunto de medida nula o cero.*

Observación 2.2.3. *Algunos documentos también pueden referirse a esta propiedad con la abreviación a.e (de la expresión almost everywhere) , a.a (de la expresión almost all) y algunos otros trabajos generalmente más viejos usan también la abreviación p.p. (de la expresión francesa presque partout). En este trabajo usaremos la notación (a.e).*

Definición 2.2.9. *Diremos que un espacio medido $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ es completo si todo conjunto μ-despreciable es $\mathcal{F}$-medible.*

Definición 2.2.10 (Función Simple)**.** *Sea un espacio medido de medida σ-finita $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Decimos que una aplicación f definida sobre Ω a valores en $\mathbb{K}$ es una función simple si toma un número finito de valores $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ y si los conjuntos imágenes recíprocas $f^{-1}(\alpha_k)$ con $0 \leq k \leq n$ pertenecen a $\mathcal{F}$. Las funciones simples son, entonces, combinaciones lineales finitas de funciones indicatrices de conjuntos medibles y se las puede escribir de la forma*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \chi_{A_k}(x),$$

con $\alpha_k \in \mathbb{K}$ y A_k una colección de conjuntos disjuntos de $\mathcal{F}$. Notaremos con $S(\Omega, \mu)$ el conjunto de funciones simples definidas sobre Ω.

Observación 2.2.4. *Se dice que f es una función simple no negativa si los coeficientes $\alpha_k \geq 0$.*

Teorema 2.2.1 (Aproximación por funciones simples)**.** *Sean un espacio medido $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ y A un subconjunto de Ω que pertenece a $\mathcal{F}$. Si $f : A \to [0, +\infty]$ es una función medible y $f(x) \geq 0$ entonces existe una sucesión creciente $(f_n)_{n\geq 1}$ de funciones simples tales que*

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x) \quad \text{para todo} \quad x \in A.$$

Demostración. Para la demostración ver [17, p. 313]. □

Finalmente, presentamos los teoremas clásicos de la teoría de integración y sus demostraciones se pueden encontrar en [17, p. 318-322].

Teorema 2.2.2 (Teorema de convergencia monótona)**.** *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio medido, completo y σ-finito. Sea (f_n) una sucesión de funciones μ-medibles tal que*

a) $f_1 \leq f_2 \leq \cdots \leq f_n \leq f_{n+1} \leq \cdots$ *a.e en* Ω,

b) $\sup_n \int_\Omega f_n < \infty$.

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n d\mu = \int_\Omega f d\mu.$$

Observación 2.2.5. *Notaremos por $L^1(\Omega, \mu)$ o simplemente $L^1(\Omega)$ al espacio de funciones integrables de Ω en $\mathbb{R}$.*

Teorema 2.2.3 (Teorema de convergencia dominda de Lebesgue)**.** *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio medido, completo y σ-finito. Sea (f_n) una sucesión de funciones μ-medibles tal que*

a) $f_n \to f$ *μ-a.e. en* Ω,

b) existe una función $g \in L^1(\Omega, \mu)$ tal que $|f_n| \leq g$ μ-a.e para todo $n \in \mathbb{N}$.

Entonces $f \in L^1(\Omega, \mu)$ y

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n d\mu = \int_\Omega f d\mu.$$

Lema 2.2.1 (Lema de Fatou)**.** *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio medido, completo y σ-finito. Sea (f_n) una sucesión de funciones μ-medibles tal que*

a) para todo n, $f_n \geq 0$ a.e en Ω,

b) $\sup_n \int f_n < \infty$.

Para a.e $x \in \Omega$ fijamos $f(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x) \leq +\infty$. Entonces $f \in L^1(\Omega, \mu)$ y

$$\int_\Omega f d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n d\mu.$$

2.3. Espacios de exponente constante

La versión clásica de los espacios de Lebesgue y Sobolev, es decir, aquella cuyo exponente es una constante resulta de vital importancia para el desarrollo de este trabajo pues constituye la base para entender el comportamiento de los espacios de exponente variable presentados en el siguiente capítulo.

Definición 2.3.1 (Espacio de Lebesgue)**.** *Sea* Ω *un subconjunto abierto de* $\mathbb{R}^n$ *y* $p \in \mathbb{R}$ *con* $1 < p < \infty$*. Se define el espacio*

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} : f \text{ es medible y } |f|^p \in L^1(\Omega) \right\}.$$

Este espacio está dotado de la norma

$$||f||_{L^p} = ||f||_p = \left[\int_\Omega |f(x)|^p d\mu \right]^{1/p}.$$

Observación 2.3.1. $L^p(\Omega)$ *es un espacio cuyos elementos son clases de equivalencia de funciones. La relación de equivalencia está determinada por* $f = g$ *en casi todo punto (c.t.p) de* Ω*. Haciendo un abuso de lenguaje hablaremos de funciones en vez de clases de funciones y sus representantes.*

Definición 2.3.2 (Espacio de Sobolev)**.** *Sea* $m \in \mathbb{N}$ *y* p *un número real, tal que* $1 \leq p < \infty$*. El espacio de funciones* $f \in L^p(\Omega)$*, cuya derivada* $D^\alpha f$ *existe para* $|\alpha| \leq m$ *y pertenece a* $L^p(\Omega)$*, se denota por* $W^{m,p}(\Omega)$ *y se conoce como espacio de Sobolev, donde* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$ *es un multi-índice con* $\alpha_i \geq 0$ *un entero tal que*

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^N \alpha_i \quad \text{y} \quad D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \cdots \partial_{x_N}^{\alpha_N}}.$$

Este espacio está dotado de la norma

$$||f||_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} ||D^\alpha f||_p^p \right)^{1/p}.$$

Teorema 2.3.1. L^p*, con* $1 < p < \infty$*, es un espacio de Banach reflexivo.*

Demostración. Para la demostración ver [6, p. 93-95]. □

Se notará por $C_0^1(\Omega)$ al conjunto de funciones continuas una vez diferenciables con soporte compacto.

Definición 2.3.3 (Espacio $W_0^{1,p}$)**.** *Sea* $1 \leq p < \infty$*. Denotamos por* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *a la clausura de* $C_0^1(\Omega)$ *en* $W^{1,p}(\Omega)$*.*

El espacio $W_0^{1,p}$ equipado con la norma de $W^{1,p}$ es un espacio de Banach y, para $1 < p < \infty$, es reflexivo.

Definición 2.3.4. *Un espacio de Banach* X *se dice que está inmerso continuamente en otro espacio de Banach* Y*,* $X \hookrightarrow Y$*, si* $X \subset Y$ *y existe una constante* $c > 0$ *tal que* $||x||_Y \leq c||x||_X$ *para todo* $x \in X$*.*

Corolario 2.3.2. *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto abierto y $1 \leq p \leq \infty$. Se tiene*

$$\begin{array}{llll} W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega), & \text{donde} & \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}, & \text{si} \quad p < n, \\ W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{q}(\Omega), & \text{para todo} & q \in [p, +\infty), & \text{si} \quad p = n, \\ W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{\infty}(\Omega), & & & \text{si} \quad p > n. \end{array}$$

Estas inmersiones son continuas.

Demostración. Para la demostración ver [6, p. 285]. □

2.4. Cálculo de variaciones

El cálculo de variaciones es una de las ramas clásicas de la matemática. En el siglo XIX surgió el problema que podría ser considerado como el más famoso del cálculo de variaciones, el estudio de la integral de Dirichlet. La importancia de este problema se debe a su relación con la ecuación de Laplace y sus métodos para resolver eran, esencialmente, lo que ahora se conoce como los *métodos directos* del cálculo de variaciones. El problema de las superficies mínimas también ha tenido una fuerte influencia en el cálculo de las variaciones y éste por su parte fue formulado por Lagrange en 1762, (ver [9]).

Todos estos problemas, de forma general, involucran funcionales con la siguiente estructura

$$J(u) := \int_\Omega f(x, u(x), \nabla u(x)) dx,$$

donde,

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, es un conjunto abierto y acotado.
- Un punto en Ω está denotado por $x = (x_1, \ldots, x_n)$.
- $u : \Omega \to \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, $u = (u^1, \cdots, u^N)$ y por lo tanto

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u^j}{\partial x_i} \right)_{1 \leq i \leq n}^{1 \leq j \leq N} \in \mathbb{R}^{N \times n}.$$

- $f : \Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{N \times n} \to \mathbb{R}$, $f = f(x, u, \xi)$ es una función dada.

Asociado al funcional J se presenta el problema de minimización

$$m := \text{ínf}\{J(u) : u \in X\},$$

lo que significa que se quiere encontrar $\overline{u} \in X$ tal que

$$m = J(\overline{u}) \leq J(u) \quad \text{para cada} \quad u \in X.$$

X representa el espacio de funciones admisibles.

Por su parte, la idea fundamental de los *métodos directos* se basa en la extensión del Teorema de Weierstrass a funciones definidas en espacios de dimensión infinita. Esta técnica consiste en minimizar un funcional $J(u)$, definido en un espacio de funciones admisibles para u, donde $J(u)$ sea acotado inferiormente. Así, podemos afirmar que

$$\inf_{u} J(u) = j$$

existe sobre el conjunto de todas las funciones admisibles. Luego por la definición de j, se puede construir una sucesión de funciones $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, llamada *sucesión minimizante*, tal que

$$\lim_{n\to\infty} J(u_n) = j.$$

Si la sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene límite $\overline{u}$ y si J es continua, se tendría que

$$J(\overline{u}) = J(\lim_{n\to\infty} u_n) = \lim_{n\to\infty} J(u_n).$$

Entonces

$$J(\overline{u}) = j,$$

lo que implica que $\overline{u}$ es solución del problema variacional. Además, las funciones de la sucesión minimizante $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pueden tomarse como soluciones aproximadas del problema. Con esto, se tiene que para resolver un problema variacional dado, mediante el método directo del cálculo de variaciones, se deben seguir los siguientes pasos.

1. Definir una sucesión minimizante $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. Demostrar que la sucesión minimizante es acotada.

3. Usar las propiedades del espacio para extraer una subsucesión convergente. (criterios de compacidad)

4. Demostrar que el límite de la sucesión es un elemento del conjunto admisible.

5. Usar propiedades de continuidad del funcional a minimizar para demostrar que el límite de la sucesión es un mínimo.

Usualmente, la continuidad del funcional se puede reemplazar por una condición más débil. Así, dentro de este contexto, también se puede hacer uso de las siguientes definiciones y propiedades:

Definición 2.4.1. *Sean X un espacio de Banach real y x_0 un punto en X. Se dice que $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es semicontinua inferior (l.s.c) en x_0 si para $\epsilon > 0$ existe $\eta > 0$ tal que*

$$f(x_0) - \epsilon < f(x) \qquad \forall x \in B(x_0, \eta).$$

Definición 2.4.2. *Una función $\varphi : E \to (-\infty, +\infty]$ se dice semicontinua inferior si para cada $\eta \in \mathbb{R}$, el conjunto*

$$[\varphi \leq \eta] = \{x \in E : \varphi(x) \leq \eta\}$$

es cerrado.

Teorema 2.4.1. *Si $f : X \to \mathbb{R}$ es una función convexa y continua sobre un espacio de Banach X, entonces es débilmente semicontinua inferior (w.l.s.c), es decir, para cada sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, tal que $u_n \rightharpoonup u$ cuando $n \to \infty$, se verifica que*

$$\liminf_{n\to\infty} f(u_n) \geq f(u).$$

Demostración. Para la demostración ver [18, p. 47]. □

Definición 2.4.3. *Se dice sucesión minimizante de un funcional J sobre un conjunto K a una sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que*

$$u_n \in K \quad \forall n \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} J(u_n) = \inf_{u\in K} J(u) := j.$$

Observación 2.4.1. *Gracias a la definición de ínfimo siempre es posible tomar una sucesión minimizante. En efecto, es claro que $j \leq J(u)$ para todo $u \in K$. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ siempre existe $u_n \in K$ tal que*

$$j \leq J(u_n) \leq j + \frac{1}{n}$$

pues, caso contrario, $j + \frac{1}{n} \leq J(u)$ para todo $u \in K$, lo que contradice la condición de ínfimo de j.

Entonces tenemos una sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $j \leq J(u_n) \leq j + \frac{1}{n}$. Tomando $n \to \infty$, se tiene que, $j \leq \lim_{n\to\infty} J(u_n) \leq j$ y entonces $\lim_{n\to\infty} J(u_n) = j$.

Capítulo 3

Espacios con exponente variable

Alrededor del año 1931 el matemático polaco Wladyslaw Orlicz escribió el primer artículo sobre los espacios de Lebesgue con exponente variable. Años más tarde el interés sobre este tipo de espacios fue creciendo y los últimos diez años han constituido un gran avance en su estudio y en el de sus aplicaciones.

En este capítulo se hace un resumen de las principales propiedades que serán utilizadas en este trabajo. En la sección de espacios semimodulares se realizarán las demostraciones de varios resultados por la importancia de los mismos. Estas ideas serán utilizadas en las demostraciones de las dos secciones siguientes en donde se introducen los espacios de Lebesgue y Sobolev de exponente variable, parte fundamental en nuestro estudio.

Para los resultados que se presentan sin demostración se invita al lector a revisar [12].

3.1. Espacios semimodulares: Propiedades básicas

Previo a introducir los espacios de Lebesgue con exponente variable resulta valioso presentar la noción de *modular*, una generalización de la norma. Las principales ideas para este capítulo fueron obtenidas de [12].

Observación 3.1.1. *A lo largo de este trabajo consideramos el campo* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$*, es decir, trabajamos con espacios reales.*

Definición 3.1.1. *Sea* X *un* $\mathbb{K}$*-espacio vectorial, se dice que* $\varrho : X \to [0, \infty]$ *es un semimodular en* X *si cumple las siguientes propiedades:*

a) $\varrho(0) = 0$.

b) $\varrho(\lambda x) = \varrho(x) \quad \forall x \in X, \quad \lambda \in \mathbb{K} \quad \text{con} \quad |\lambda| = 1.$

c) ϱ *es convexa.*

d) ϱ *es continua por la izquierda, es decir, para cada* $x \in X$

$$\lim_{\lambda \to 1^-} \varrho(\lambda x) = \varrho(x).$$

e) $\varrho(\lambda x) = 0, \quad \forall \lambda > 0$, *implica* $x = 0$.

Un semimodular es llamado modular si:

f) $\varrho(x) = 0$ *implica* $x = 0$.

Un semimodular se dice continuo si:

g) el mapeo $\lambda \mapsto \varrho(\lambda x)$ *es continuo en* $[0, \infty)$ $\forall x \in X$.

Definición 3.1.2. *Sea* (A, Σ, μ) *un espacio medido, completo y* σ*-finito. Se notará por* $L^0(A, \mu)$ *al espacio de las funciones* μ*-medibles en* A*. En el caso especial de que* μ *sea la medida de Lebesgue n-dimensional,* Ω *un subconjunto de* $\mathbb{R}^n$ μ*-medible y* Σ *la* σ*-álgebra de los subconjuntos* μ*-medibles de* Ω*, se escribe* $L^0(\Omega) := L^0(\Omega, \mu)$.

Un ejemplo de modular está dador por $\int_\Omega |f(x)|^p dx$ en $L^0(\Omega)$, como se muestra a continuación.

Lema 3.1.1. *Si* $1 \leq p < \infty$, *entonces*

$$\varrho_p(f) := \int_\Omega |f(x)|^p dx$$

define un modular continuo en $L^0(\Omega)$.

Demostración. Se tiene que $\varrho_p(0) = 0$, se cumple inmediatamente. Mientras que para $|\lambda| = 1$, se sigue que

$$\varrho_p(\lambda f) = \int_\Omega |\lambda f(x)|^p dx = |\lambda|^p \int_\Omega |f(x)|^p dx = \varrho_p(f), \quad \forall f \in L^0(\Omega).$$

Por otro lado, sean $f, g \in L^0(\Omega)$ y $\alpha \in (0, 1)$, usando la desigualdad triangular para $|\cdot|$ y la convexidad de $t \mapsto |t|^p$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\varrho_p(\alpha f + (1 - \alpha g)) &= \int_\Omega |(\alpha f + (1 - \alpha)g)(x)|^p dx \\
&\leq \int_\Omega (\alpha |f(x)| + (1 - \alpha)|g(x)|)^p dx \\
&\leq \int_\Omega (\alpha |f(x)|^p + (1 - \alpha)|g(x)|^p) dx \\
&= \alpha \int_\Omega |f(x)|^p dx + (1 - \alpha) \int_\Omega |g(x)|^p dx \\
&= \alpha \varrho_p(f) + (1 - \alpha)\varrho_p(g).
\end{aligned}$$

A continuación, se verifica que ϱ_p es continua por la izquierda. Así, nótese que

$$\lim_{\lambda\to 1^-} \varrho_p(\lambda f) = \lim_{\lambda\to 1^-} \int_\Omega |\lambda f(x)|^p dx = \lim_{\lambda\to 1^-} |\lambda|^p \int_\Omega |f(x)|^p = \varrho_p(f).$$

Para el literal e) se tiene que

$$0 = \varrho_p(\lambda f) = \int_\Omega |\lambda f(x)|^p dx = |\lambda|^p \int_\Omega |f(x)|^p dx$$

para todo $\lambda > 0$, de donde

$$\int_\Omega |f(x)|^p dx = 0.$$

De la desigualdad de Chebyshev (ver [3, p. 34]), se tiene que para todo entero $n \geq 1$

$$\mu\left(\left\{x \in \Omega : |f(x)|^p \geq \frac{1}{n}\right\}\right) \leq n \int_\Omega |f(x)|^p dx = 0.$$

Dado que

$$\{x \in \Omega : |f(x)|^p \neq 0\} = \bigcup_{n\geq 1} \left\{x \in \Omega : |f(x)|^p \geq \frac{1}{n}\right\}$$

y de la subaditividad de la medida se tiene que

$$\begin{aligned}
\mu\left(\{x \in \Omega : |f(x)|^p \neq 0\}\right) &= \mu\left(\bigcup_{n\geq 1} \left\{x \in \Omega : |f(x)|^p \geq \frac{1}{n}\right\}\right) \\
&\leq \sum_{n\geq 1} \mu\left(\left\{x \in \Omega : |f(x)|^p \geq \frac{1}{n}\right\}\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $f = 0$ μ-a.e.

Por lo anterior, se sigue inmediatamente que si $\varrho_p(f) = 0$ entonces $f = 0$. Finalmente verifiquemos que $\varrho_p(\lambda f)$ es continuo en $[0, \infty)$, para todo $f \in L^0(\Omega)$. Para esto basta verificar la continuidad por la derecha, ya que previamente se mostró que ϱ_p es continua por la izquierda, así,

$$\lim_{\lambda\to 1^+} \varrho_p(f) = \lim_{\lambda\to 1^+} \int_\Omega |\lambda f(x)|^p dx = \lim_{\lambda\to 1^+} |\lambda|^p \int_\Omega |f(x)|^p dx = \varrho_p(f),$$

con lo que se muestra que $\varrho_p(f)$ es un modular continuo en $L^0(\Omega)$. □

En el ejemplo anterior podemos notar que el *modular* que se define es una norma equivalente a la conocida $||\cdot||_{L^p(\Omega)}$ en los espacios de Lebesgue clásicos.

Si ϱ es un semimodular en X, gracias a que $\varrho(0) = 0$, convexo y no negativo, se sigue que $\lambda \mapsto \varrho(\lambda x)$ es no decreciente en $[0, \infty)$ para $x \in X$. Más aún,

$$\begin{aligned} \varrho(\lambda x) &= \varrho(|\lambda| x) \leq |\lambda| \varrho(x) \quad \text{para todo} \quad |\lambda| \leq 1, \\ \varrho(\lambda x) &= \varrho(|\lambda| x) \geq |\lambda| \varrho(x) \quad \text{para todo} \quad |\lambda| \geq 1. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Definición 3.1.3. *Si ϱ es un semimodular o modular en X, entonces*

$$X_\varrho = \{x \in X : \lim_{\lambda \to 0} \varrho(\lambda x) = 0\}, \tag{3.2}$$

es llamado espacio semimodular o espacio modular, respectivamente.

Ya que $\varrho(\lambda x) = \varrho(|\lambda| x)$, es suficiente exigir que $\lim_{\lambda \to 0} \varrho(\lambda x) = 0$ para $\lambda \in (0, \infty)$. Por lo tanto, se puede definir X_ϱ de forma alternativa

$$X_\varrho := \{x \in X : \varrho(\lambda x) < \infty \quad \text{para algún} \quad \lambda > 0\}, \tag{3.3}$$

puesto que para $\lambda_1 \leq \lambda$, y usando (3.1), se tiene que

$$\varrho(\lambda_1 x) = \varrho\left(\frac{\lambda_1}{\lambda} \lambda x\right) \leq \frac{\lambda_1}{\lambda} \varrho(\lambda x) \to 0$$

cuando $\lambda_1 \to 0$.

Teorema 3.1.1. *Sea ϱ un semimodular en X. Entonces X_ϱ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial.*

Demostración. Ya que $\varrho(0) = 0$, es inmediato que $0 \in X_\varrho$. Sean $x, y \in X_\varrho$ y $\alpha \in \mathbb{K} \backslash \{0\}$. Como $x \in X_\varrho$ entonces $\varrho(\lambda x) < \infty$, para algún $\lambda > 0$. Por otro lado, $\varrho(\alpha x) = \varrho(|\alpha| x)$ y con $\lambda = |\alpha|$, se concluye que $\varrho(\alpha x) < \infty$ y por lo tanto $\alpha x \in X_\varrho$.

Haciendo uso de la convexidad de ϱ, se tiene,

$$0 \leq \varrho(\lambda(x + y)) = \varrho\left(\frac{1}{2} 2\lambda x + \frac{1}{2} 2\lambda y\right) \leq \frac{1}{2} \varrho(2\lambda x) + \frac{1}{2} \varrho(2\lambda y) \to 0,$$

si $\lambda \to 0$. Se sigue que $x + y \in X_\varrho$, lo que implica que X_ϱ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. □

Teorema 3.1.2.

$$||x||_\varrho = \inf\left\{\lambda > 0 : \varrho\left(\frac{1}{\lambda} x\right) \leq 1\right\}, \tag{3.4}$$

es una norma y se conoce como la norma de Luxemburg.

Demostración. i) $||x||_\varrho = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Supongamos que $x = 0$ entonces es claro que $\varrho(\frac{x}{\lambda}) = 0 \leq 1$, para todo $\lambda > 0$ y, por lo tanto, $||x||_\varrho = 0$. Ahora, tenemos que $||x||_\varrho = 0$, entonces $\varrho(\gamma x) \leq 1$, para todo $\gamma > 0$. Por otro lado, sea $\beta \in (0,1]$

$$\varrho(\lambda x) = \varrho\left(\beta \frac{\lambda x}{\beta}\right) \leq \beta \varrho\left(\frac{\lambda x}{\beta}\right) \leq \beta,$$

esto implica que $\varrho(\lambda x) = 0$ para todo $\lambda > 0$, entonces $x = 0$.

ii) $||\alpha x||_\varrho = |\alpha| ||x||_\varrho$.

$$\begin{aligned} ||\alpha x||_\varrho &= \text{ínf}\left\{\lambda > 0 : \varrho\left(\frac{\alpha x}{\lambda}\right) \leq 1\right\} \\ &= \text{ínf}\left\{\frac{\lambda|\alpha|}{|\alpha|} > 0 : \varrho\left(\frac{|\alpha| x}{\lambda|\alpha|/|\alpha|}\right) \leq 1\right\} \\ &= |\alpha|\, \text{ínf}\left\{\frac{\lambda}{|\alpha|} > 0 : \varrho\left(\frac{x}{\lambda/|\alpha|}\right) \leq 1\right\}. \end{aligned}$$

Tomando $\beta = \frac{\lambda}{|\alpha|}$, se tiene que

$$\begin{aligned} ||\alpha x||_\varrho &= |\alpha|\, \text{ínf}\left\{\beta > 0 : \varrho\left(\frac{x}{\beta}\right) \leq 1\right\} \\ &= |\alpha| ||x||_\varrho. \end{aligned}$$

iii) $||x + y||_\varrho \leq ||x||_\varrho + ||y||_\varrho$.

Fijemos $\lambda_1 > ||x||_\varrho$ y $\lambda_2 > ||y||_\varrho$ tal que $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$. Entonces $\varrho(\frac{x}{\lambda_1}) \leq 1$ y $\varrho(\frac{y}{\lambda_2}) \leq 1$. Usando la convexidad de ϱ

$$\varrho\left(\frac{x+y}{\lambda}\right) = \varrho\left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\frac{x}{\lambda_1} + \frac{\lambda_2}{\lambda}\frac{y}{\lambda_2}\right) \leq \frac{\lambda_1}{\lambda}\varrho\left(\frac{x}{\lambda_1}\right) + \frac{\lambda_2}{\lambda}\varrho\left(\frac{y}{\lambda_2}\right) \leq 1$$

por lo tanto $||x + y||_\varrho \leq \lambda_1 + \lambda_2$, si tomamos el ínfimo sobre todo λ_1 y λ_2 se concluye que $||x + y||_\varrho \leq ||x||_\varrho + ||y||_\varrho$.

□

Observación 3.1.2. $\{X_\varrho, ||\cdot||_\varrho\}$ *es un espacio normado. La norma en el teorema anterior es conocida también como el funcional de Minkowski.*

Ejemplo 3.1.1. *Sea $1 \leq p < \infty$. El espacio modular $(L^0(\Omega))_\varrho$ coincide con el espacio de Lebesgue clásico $L^p(\Omega)$ dotado de la norma usual.*

Así, para $\lambda = 1$, se tiene que

$$\begin{aligned}
(L^0(\Omega))_\varrho &= \{f \in L^0(\Omega) : \varrho(f) < \infty\} \\
&= \left\{ f \in L^0(\Omega) : \int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty \right\} \\
&= L^p(\Omega).
\end{aligned}$$

Mientras que para la norma

$$\begin{aligned}
||f||_{\varrho_p} &= \text{ínf} \left\{ \lambda > 0 : \varrho\left(\frac{1}{\lambda} f\right) \leq 1 \right\} \\
&= \text{ínf} \left\{ \lambda > 0 : \int_\Omega \left| \frac{1}{\lambda} f(x) \right|^p dx \leq 1 \right\} \\
&= \text{ínf} \left\{ \lambda > 0 : \frac{1}{\lambda^p} \int_\Omega |f(x)|^p dx \leq 1 \right\} \\
&= ||f||_p^p \,\text{ínf} \left\{ \lambda > 0 : \lambda^p \geq 1 \right\} \\
&= ||f||_p^p.
\end{aligned}$$

A continuación, se presenta la *propiedad de la bola unidad* o *propiedad de la bola unidad de norma-modular* cuyo objetivo es estudiar la bola unidad cerrada y abierta en X_ϱ.

Lema 3.1.2 (Propiedad de la bola unidad de norma-modular). *Sea ϱ un semimodular en X. Entonces $||x||_\varrho \leq 1$ y $\varrho(x) \leq 1$ son equivalentes. Si ϱ es continuo entonces también se tiene equivalencia entre $||x||_\varrho < 1$ y $\varrho(x) < 1$ y $||x||_\varrho = 1$ y $\varrho(x) = 1$.*

Demostración. Supongamos que $\varrho(x) \leq 1$, se quiere mostrar que $||x||_\varrho \leq 1$. Usando la Proposición 2.1.1 y tomando $\epsilon > 0$, es claro que $\lambda = 1 \in \{\lambda > 0 : \varrho(x/\lambda) \leq 1\}$. Puesto que $\varrho(x) \leq 1$, y $\lambda \leq 1 + \epsilon$, se sigue el resultado. Supongamos ahora que $||x||_\varrho \leq 1$ entonces $\varrho(x/\lambda) \leq 1$ para todo $\lambda > 1$. Dado que ϱ es continuo por la izquierda, se tiene que $\varrho(x/\lambda) = \varrho(x)$ y se concluye que $\varrho(x) \leq 1$.

Supongamos que ϱ es continua y que $||x||_\varrho < 1$. De la Proposición 2.1.1 se tiene que existe $\lambda < 1$ tal que $\varrho(x/\lambda) \leq 1$. Aplicando (3.1) se tiene que $\varrho(x) = \varrho(\lambda \frac{x}{\lambda}) \leq \lambda\varrho(x/\lambda) \leq \lambda < 1$. Suponiendo ahora que $\varrho(x) < 1$, se tiene que gracias a la continuidad de ϱ, existe $\gamma > 1$, con $\varrho(\gamma x) < 1$. Entonces $||\gamma x||_\varrho \leq 1$ y, por lo tanto, $||x||_\varrho \leq 1/\gamma < 1$.

Sean ahora ϱ continuo y $||x||_\varrho = 1$. Por absurdo, supongamos que $\varrho(x) \neq 1$, de donde, $\varrho(x) < 1$ y por lo mostrado anteriormente tenemos que $||x||_\varrho < 1$, lo cual es una contradicción. Sea $\varrho(x) = 1$, debemos mostrar que $||x||_\varrho = 1$. Por absurdo, supongamos que $||x||_\varrho \neq 1$. Si $||x||_\varrho < 1$ tenemos que $\varrho(x) < 1$, lo cual es una contradicción. Y si $||x||_\varrho > 1$ entonces $\varrho(x) > 1$, que nuevamente contradice lo supuesto y por lo tanto se tiene la equivalencia entre $||x||_\varrho = 1$ y $\varrho(x) = 1$. □

Corolario 3.1.3. *Sea ϱ un semimodular en X y $x \in X_\varrho$.*

a) Si $||x||_\varrho \leq 1$ entonces $\varrho(x) \leq ||x||_\varrho$.

b) Si $1 < ||x||_\varrho$ entonces $||x||_\varrho \leq \varrho(x)$.

c) $||x||_\varrho \leq \varrho(x) + 1$.

Demostración.

a) Supongamos que $||x||_\varrho = 0 \leq 1$ entonces $\varrho(x) = \varrho(0) = 0 \leq ||x||_\varrho$. Ahora supongamos que $0 < ||x||_\varrho \leq 1$, se tiene

$$\left|\left|\frac{x}{||x||_\varrho}\right|\right|_\varrho = 1$$

y por la propiedad de la bola unidad se tiene la equivalencia con $\varrho\left(\frac{x}{||x||_\varrho}\right) \leq 1$, dado que $||x||_\varrho \leq 1$ se sigue que $1/||x||_\varrho \geq 1$ y de la propiedad (3.1)

$$1 \geq \varrho\left(\frac{x}{||x||_\varrho}\right) \geq \frac{1}{||x||_\varrho}\varrho(x)$$

de donde se concluye que $\varrho(x) \leq ||x||_\varrho$.

b) Supongamos que $||x||_\varrho > 1$, entonces para $1 < \lambda < ||x||_\varrho$ se tiene que $\varrho(x/\lambda) > 1$, aplicando (3.1)

$$1 < \varrho\left(\frac{x}{\lambda}\right) \leq \frac{1}{\lambda}\varrho(x)$$

es decir, $\varrho(x) > \lambda$ para cualquier λ arbitrario, en particular para $||x||_\varrho$ de donde se sigue el resultado.

c) Se sigue inmediatamente del literal anterior.

□

Definición 3.1.4. *Sea ϱ un semimodular en X y $x_k, x \in X_\varrho$, se dice que x_k es ϱ-convergente a x si existe $\lambda > 0$ tal que $\varrho(\lambda(x_k - x)) \to 0$.*

Teorema 3.1.4. *Sea ϱ un semimodular en X. Entonces ϱ es débilmente semicontinuo inferior en X_ϱ, es decir,*

$$\varrho(x) \leq \liminf_{k\to\infty} \varrho(x_k)$$

para todo $x_k, x \in X_\varrho$ con $x_k \to x$ cuando $k \to \infty$.

Demostración. Esta demostración se la realizará solo para el caso $\varrho(x) < \infty$. Sean $x_k, x \in X_\varrho$. De la definición de ϱ-convergencia se tiene que existe $\gamma > 0$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} \varrho(\gamma(x - x_k)) = 0.$$

Sea $\epsilon \in (0, 1/2)$. Por la convexidad de ϱ se tiene

$$\begin{aligned}
\varrho((1-\epsilon)x) &= \varrho\left(\frac{1}{2}x + \frac{1-2\epsilon}{2}(x - x_k) + \frac{1-2\epsilon}{2}x_k\right) \\
&\leq \frac{1}{2}\varrho(x) + \frac{1}{2}\varrho((1-2\epsilon)(x - x_k) + (1-2\epsilon)x_k) \\
&\leq \frac{1}{2}\varrho(x) + \frac{1}{2}\varrho\left(2\epsilon\left(\frac{1-2\epsilon}{2\epsilon}\right)(x - x_k) + (1-2\epsilon)x_k\right) \\
&\leq \frac{1}{2}\varrho(x) + \frac{2\epsilon}{2}\varrho\left(\frac{1-2\epsilon}{2\epsilon}(x - x_k)\right) + \frac{1-2\epsilon}{2}\varrho(x_k).
\end{aligned}$$

Tomando el límite cuando $k \to \infty$ tenemos

$$\varrho((1-\epsilon)x) \leq \frac{1}{2}\varrho(x) + \frac{1-2\epsilon}{2}\liminf_{k\to\infty} \varrho(x_k).$$

Tomando $\epsilon \to 0^+$ y puesto que ϱ es continuo por la izquierda

$$\varrho(x) \leq \frac{1}{2}\varrho(x) + \frac{1}{2}\liminf_{k\to\infty} \varrho(x_k).$$

Ya que $\varrho(x) < \infty$ se concluye que $\varrho(x) \leq \liminf_{k\to\infty} \varrho(x_k)$. □

Observación 3.1.3. *De este teorema se deduce que los conjuntos* $\{x \in X : \varrho(x) \leq \alpha\}$ *son cerrados para cada* $\alpha \in [0, \infty)$. *Dado que estos conjuntos son convexos, se deduce que también están cerrados con respecto a la topología débil de* X_ϱ.

3.2. Modulares conjugados y espacios semimodulares duales

Sea X un espacio normado. Entonces, X^* es notado como el espacio dual de X, es decir, el conjunto de todos los funcionales lineales y acotados de X en $\mathbb{K}$. Dotado de la norma

$$||x^*||_{X^*} := \sup_{||x||_X \leq 1} |\langle x^*, x\rangle|$$

es un espacio de Banach. Usaremos la notación $\langle x^*, x\rangle := x^*(x)$.

Definición 3.2.1. *Sea* ϱ *un semimodular en* X. *Notaremos por* X^*_ϱ *al espacio dual de*

$(X_\varrho, ||\cdot||_\varrho)$. *Más aún, se define* $\varrho^* : X_\varrho^* \to [0,\infty]$ *por*

$$\varrho^*(x^*) := \sup_{x\in X_\varrho} (|\langle x^*, x\rangle| - \varrho(x)).$$

A ϱ^* *se conoce como el semimodular conjugado de* ϱ.

De la ecuación anterior, se sigue que

$$|\langle x^*, x\rangle| \leq \varrho(x) + \varrho^*(x^*)$$

para todo $x \in X_\varrho$ y $x^* \in X_\varrho^*$. Esta desigualdad es una generalización de la *desigualdad de Young.*

Si el lector desea conocer más propiedades sobre estos espacios puede consultar [12, p. 29-34].

3.3. Espacios de Musielak-Orlicz: Propiedades básicas

Después de conocer los espacios modulares y semimodulares, nos enfocaremos en los espacios concretos donde el modular está dado por la integral de una función real.

Definición 3.3.1. *Una función* $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty]$ *convexa, continua por la izquierda, con* $\varphi(0) = 0$, $\lim_{t\to 0^+} \varphi(t) = 0$ *y* $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = \infty$ *se conocerá como* Φ*-función. Más aún se dirá positiva si* $\varphi(t) > 0$, *para todo* $t > 0$.

Lema 3.3.1. *Toda* Φ*-función es semicontinua inferior.*

Demostración. La demostración se sigue del Teorema 3.1.4 y del Lema 2.3.2 en [12, p. 35]. □

Ejemplo 3.3.1. *Sea* $1 \leq p < \infty$. *Se definen*

$$\tilde{\varphi}_p(t) := \frac{1}{p}t^p \qquad \text{y} \qquad \bar{\varphi}_p(t) := t^p$$

para todo $t \geq 0$.

Entonces $\tilde{\varphi}_p$ *y* $\bar{\varphi}_p$ *son* Φ*-funciones continuas y positivas. En efecto, se tiene que*

- $\tilde{\varphi}_p(0) = \frac{1}{p}(0)^p = 0.$
- $\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{p}t^p = \frac{1}{p}\lim_{t\to 0^+} t^p = 0.$
- $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{p}t^p = \frac{1}{p}\lim_{t\to\infty} t^p = \infty.$

- *La convexidad de $\tilde{\varphi}$ se cumple ya que la segunda derivada $\tilde{\varphi}''(t) > 0$.*
- *Finalmente,*

$$\lim_{\lambda\to 1^-} \tilde{\varphi}_p(\lambda t) = \lim_{\lambda\to 1^-} \frac{1}{p}\lambda^p t^p = \frac{1}{p}t^p \lim_{\lambda\to 1^-} \lambda^p = \frac{1}{p}t^p = \tilde{\varphi}_p(t)$$

lo que garantiza la continuidad por la izquierda, la continuidad por la derecha se verifica de forma similar y por lo tanto $\tilde{\varphi}$ es continua y dado que $\tilde{\varphi} > 0$, se tiene que es positiva. Para $\bar{\varphi}$, la demostración es similar.

Definición 3.3.2. *Sea (A, Σ, μ) un espacio medido, completo y σ-finito. Una función real $\varphi : A \times [0, \infty) \to [0, \infty]$ se dice que es una Φ-función generalizada sobre (A, Σ, μ) si:*

a) $\varphi(y, \cdot)$ *es una Φ-función para cada $y \in A$.*

b) $y \mapsto \varphi(y, t)$ *es medible para cada $t \geq 0$.*

Si φ es una Φ-función en (A, Σ, μ) se escribe $\varphi \in \Phi(A, \mu)$. Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un subconjunto abierto y μ la medida de Lebesgue n-dimensional diremos que $\varphi \in \Phi(\Omega)$. En lo que sigue se asumirá que la medida μ es no nula.

Observación 3.3.1. *Una Φ- función es una Φ-función generalizada si fijamos $\varphi(y, t) := \varphi(t)$, para $y \in A$ y $t \in [0, \infty)$.*

Es importante por lo tanto verificar que cada Φ-función generalizada genera un semimodular en $L^0(A, \mu)$ y de ahí se presenta el siguiente lema.

Lema 3.3.2. *Si $\varphi \in \Phi(A, \mu)$ y $f \in L^0(A, \mu)$, entonces $\varphi(|f(y)|)$ es μ-medible y*

$$\varrho_\varphi(f) = \int_A \varphi(|f(y)|) d\mu(y)$$

es un semimodular en $L^0(A, \mu)$.

Demostración. Empezamos por verificar que $\varphi(f(\cdot))$ es medible, para ello dividimos la función f en su parte positiva y negativa y consideramos el caso $f \geq 0$. Por el Teorema de aproximación de funciones simples crecientes, Teorema 2.2.1, existe una sucesión creciente de funciones simples no negativas que converge punto a punto a f y notaremos, $f_k \nearrow f$. Entonces f_k se puede escribir como una combinación lineal finita de funciones indicatrices de conjuntos medibles. Así, usando la convexidad de φ se tiene

$$\varphi(|f_k(y)|) = \sum_j \varphi(\alpha_j^k) \cdot \chi_{A_j^k(y)}.$$

Tomando el límite se tiene que $\varphi(f_k(y)) \nearrow \varphi(f(y))$ y como $\varphi(f_k(y))$ es medible su límite $\varphi(f(\cdot))$ es medible.

De la definición de Φ-función se sigue que $\varrho_\varphi(0) = \int_\Omega \varphi(0)d\mu(y) = 0$. Por otro lado,

$$\varrho_\varphi(\lambda f) = \int_\Omega \varphi(|\lambda||f(y)|)d\mu(y) = \int_\Omega \varphi(|f(y)|)d\mu(y) = \varrho_\varphi(f)$$

para $|\lambda| = 1$. La convexidad de ϱ_φ se obtiene directamente de la convexidad de φ y de la linealidad de la integral. Puesto que φ es continua por la izquierda y monótona se tiene

$$0 \leq \varphi(\lambda f(y)) \to \varphi(f(y))$$

cuando $\lambda \to 1^-$ y aplicando el Teorema 2.2.2 (Teorema de convergencia monótona) se sigue $\varrho_\varphi(\lambda f) \to \varrho_\varphi(f)$. Ahora, supongamos que $\varrho_\varphi(\lambda f) = 0$ para todo $\lambda > 0$, es decir, $\int_A \varphi(|\lambda f(y)|)d\mu(y) = 0$ para todo $\lambda > 0$, lo cual implica que para cualquier $k \in \mathbb{N}$

$$\varphi(kf(y)) = 0 \quad \text{para todo} \quad y \in A.$$

Como $\mathbb{N}$ es contable, $\varphi(kf(y)) = 0$ para todo $y \in A$ y para todo $k \in \mathbb{N}$.

Sabemos que $\varphi(0) = 0$ y como φ es convexa

$$\varphi(\lambda f(y)) = 0 \quad \text{para todo} \quad y \in A \quad \text{y} \quad \text{para todo} \quad \lambda > 0.$$

Como $\lim_{t\to\infty} \varphi(y,t) := \varphi(t) = \infty$, para todo $y \in A$ se concluye que $|f(y)| = 0$ a.e $y \in A$, lo que implica que $f = 0$. Con esto se muestra que ϱ_φ es un semimodular en $L^0(A, \mu)$. $\square$

Como $\varphi \in \Phi(A, \mu)$ genera un semimodular, se presenta su correspondiente espacio semimodular.

Definición 3.3.3. *Sea (A, Σ, μ) un espacio medido, σ-finito y completo. Sea $\varphi \in \Phi(A, \mu)$ y ϱ_φ dado por*

$$\varrho_\varphi(f) = \int_A \varphi(|f(y)|)d\mu(y)$$

para todo $f \in L^0(A, \mu)$. Entonces el espacio semimodular

$$(L^0(A, \mu))_{\varrho_\varphi} = \{f \in L^0(A, \mu) : \varrho_\varphi(\lambda f) < \infty \quad \text{para algún} \quad \lambda > 0\}$$

será conocido como espacio de Orlicz y se notará por $L^\varphi(A, \mu)$ o simplemente L^φ. La norma $||\cdot||_{\varrho_\varphi}$ se notará por $||\cdot||_\varphi$ y está dada por

$$||f||_\varphi = \inf \left\{ \lambda > 0 : \varrho_\varphi\left(\frac{f}{\lambda}\right) \leq 1 \right\}.$$

Observación 3.3.2. *En la definición anterior, tomando*

$$\varrho_\varphi(f) = \int_A \varphi(y, |f(y)|)d\mu(y)$$

para todo $f \in L^0(A, \mu)$*, se obtiene el correspondiente espacio semimodular* L^φ *que será conocido como espacio de Musielak-Orlicz.*

Teorema 3.3.1. *Sea* $\varphi \in \Phi(A, \mu)$*. Entonces* $L^\varphi(A, \mu)$ *es un espacio de Banach.*

Demostración. Para la demostración ver [12, p 38-40]. □

Observación 3.3.3. *De aquí en adelante tomaremos como* Φ*-función generalizada a* φ *con* $\varphi = \tilde{\varphi}$ *o* $\varphi = \bar{\varphi}$ *definidas como en el Ejemplo 3.3.1 y solo de ser necesario se realizará alguna aclaración.*

Definición 3.3.4. *Sea* φ *una* Φ*-función. Se notará por* $\varphi^*(\cdot)$ *a la función conjugada de* $\varphi(\cdot)$*, tal que*

$$\varphi^*(u) = \sup_{t \geq 0}(tu - \varphi(t))$$

para todo $u \geq 0$*.*

3.4. Espacios de Lebesgue con exponente variable

Una vez que tenemos a nuestra disposición la estructura de espacios de Lebesgue y Sobolev clásicos, la caracterización para este tipo de espacios de funciones con exponente variable será similar y el lector observará que algunos resultados expuestos aquí son generalizaciones de los espacios antes mencionados.

Suena razonable pensar en una conexión entre estos dos tipos de espacios sobre todo por la importancia que tiene $L^p(\Omega)$ con p (constante) y sus aplicaciones en distintos campos de la matemática, en especial de las ecuaciones diferenciales parciales. Así, el objetivo principal de esta sección es presentar a manera de comparación, relaciones de índole teórico entre los espacios de Lebesgue y Sobolev de exponente constante y aquellos de exponente variable con el fin de adquirir las herramientas necesarias para desarrollar el Capítulo 4.

Esta sección es de especial importancia pues constituye el primer acercamiento con los aspectos teóricos de los espacios de Lebesgue con exponente variable. Así, empezamos por mostrar que la principal diferencia entre los conocidos espacios de Lebesgue L^p y los espacios de Lebesgue con exponente variable $L^{p(\cdot)}$ está en la forma de su exponente. Para el primero, p es una constante, mientras que para el segundo, $p(\cdot)$ es una función de Ω en $[1, \infty]$, donde Ω es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$.

Definición 3.4.1. *Sea (A, Σ, μ) un espacio medido, completo y σ-finito. Se define como $\mathcal{P}(A, \mu)$ al conjunto de todas las funciones μ-medibles $p : A \to [1, \infty]$. A las funciones $p \in \mathcal{P}(A, \mu)$ se conocen como exponentes variables en A.*

Sea $p \in \mathcal{P}(A, \mu)$. Definimos,

- $p^- := p_A^- := ess\, inf_{y \in A}\, p(y)$.
- $p^+ := p_A^+ := ess\, sup_{y \in A}\, p(y)$.
- $p' \in \mathcal{P}(A, \mu)$, se conoce como el *exponente variable dual* de p y está dado por

$$\frac{1}{p(y)} + \frac{1}{p'(y)} = 1.$$

Si $p^+ < \infty$, entonces p se conoce como *exponente variable acotado.*
Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, abierto. Si μ es la medida de Lebesgue, se escribirá

$$\mathcal{P}(\Omega) := \mathcal{P}(\Omega, \mu).$$

Observación 3.4.1. *A lo largo de este trabajo, nos enfocaremos en el estudio de los espacios cuyo exponente sea $p \in \mathcal{P}(A, \mu)$ tal que $p : A \to [1, \infty)$.*

Para definir los espacios de Lebesgue con exponente variable, necesitamos conocer la Φ- función generalizada correspondiente. De ahí, es natural considerar las funciones $\bar{\varphi}$ y $\tilde{\varphi}$ como en el Ejemplo 3.3.1.
Así, para $p \in \mathcal{P}(A, \mu)$ de define, para $y \in A$ y $t \geq 0$

$$\tilde{\varphi}_{p(\cdot)}(y, t) := \tilde{\varphi}_{p(y)}(t) = \frac{1}{p(y)} t^{p(y)} \quad \text{y} \quad \bar{\varphi}_{p(\cdot)}(y, t) := \bar{\varphi}_{p(y)}(t) = t^{p(y)},$$

ambas, Φ-funciones generalizadas. En particular, $\bar{\varphi}_{p(\cdot)}$ será utilizada para definir los espacios de exponente variable.

Definición 3.4.2. *Sea $p \in \mathcal{P}(A, \mu)$ y $\varphi_{p(\cdot)} := \bar{\varphi}_{p(\cdot)}$. Se define el semimodular,*

$$\varrho_{p(\cdot)}(f) := \int_A \varphi_{p(x)}(|f(x)|)dx = \int_A |f(x)|^{p(x)} dx.$$

Observación 3.4.2. *De la misma manera se puede definir el semimodular para $\tilde{\varphi}_{p(\cdot)}$.*

Definición 3.4.3. *Sea $p \in \mathcal{P}(A, \mu)$. Se define el espacio de Lebesgue con exponente variable como*

$$L^{p(\cdot)}(A, \mu) = \left\{ f \in L^0(A, \mu) : \int_A |f(x)|^{p(x)} dx < \infty \right\}$$

con la norma

$$||f||_{L^{p(\cdot)}(A,\mu)} = \text{ínf}\left\{\lambda > 0 : \int_A \left|\frac{f(x)}{\lambda}\right|^{p(x)} dx \leq 1\right\}.$$

Lema 3.4.1. *Si $p \in \mathcal{P}(\Omega)$, entonces $\varrho_{p(\cdot)}(f) \leq 1$ y $||f||_{p(\cdot)} \leq 1$ son equivalentes. Para $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ se tiene*

a) Si $||f||_{p(\cdot)} \leq 1$ entonces $\varrho_{p(\cdot)}(f) \leq ||f||_{p(\cdot)}$.

b) Si $||f||_{p(\cdot)} > 1$ entonces $||f||_{p(\cdot)} \leq \varrho_{p(\cdot)}(f)$.

Demostración. Supongamos que $\varrho(f)_{p(\cdot)} \leq 1$, se quiere mostrar que $||f||_{p(\cdot)} \leq 1$. Usando la definición del ínfimo, y tomando $\epsilon > 0$, es claro que $\lambda = 1 \in \{\lambda > 0 : \varrho(f/\lambda) \leq 1\}$, puesto que $\varrho(f)_{p(\cdot)} \leq 1$, y $\lambda \leq 1+\epsilon$, de donde se sigue el resultado. Supongamos ahora que $||f||_{p(\cdot)} \leq 1$ entonces $\varrho_{p(\cdot)}(f/\lambda) \leq 1$ para todo $\lambda > 1$ ya que $\varrho_{p(\cdot)}$ es continuo por la izquierda se tiene que $\varrho_{p(\cdot)}(f/\lambda) = \varrho(f)_{p(\cdot)}$ y se concluye que $\varrho(f)_{p(\cdot)} \leq 1$.

a) Supongamos que $||f||_{p(\cdot)} = 0 \leq 1$ entonces $\varrho_{p(\cdot)}(f) = \varrho_{p(\cdot)}(0) = 0 \leq ||f||_{p(\cdot)}$. Ahora, supongamos que $0 < ||f||_{\varrho} \leq 1$. Se tiene que

$$\left|\left|\frac{f}{||f||_{p(\cdot)}}\right|\right|_{p(\cdot)} = 1,$$

y por lo mostrado anteriormente, se tiene la equivalencia con $\varrho_{p(\cdot)}\left(\frac{f}{||f||_{\varrho}}\right) \leq 1$. Dado que $||f||_{p(\cdot)} \leq 1$, se sigue $1/||f||_{p(\cdot)} \geq 1$, y de (3.1)

$$1 \geq \varrho\left(\frac{f}{||f||_{p(\cdot)}}\right) \geq \frac{1}{||f||_{p(\cdot)}}\varrho_{p(\cdot)}(x),$$

lo que implicará que $\varrho_{p(\cdot)}(f) \leq ||f||_{p(\cdot)}$.

b) Supongamos que $||f||_{p(\cdot)} > 1$, entonces para $1 < \lambda < ||f||_{p(\cdot)}$ se tiene que $\varrho_{p(\cdot)}(f/\lambda) > 1$, aplicando (3.1)

$$1 < \varrho_{p(\cdot)}\left(\frac{f}{\lambda}\right) \leq \frac{1}{\lambda}\varrho_{p(\cdot)}(f)$$

es decir, $\varrho_{p(\cdot)}(f) > \lambda$ para cualquier λ arbitrario, en particular para $||f||_{p(\cdot)}$ de donde se sigue el resultado.

□

Proposición 3.4.1. *Sea $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ y p una función medible de Ω en $[1, \infty)$. Entonces, se tiene que*

$$\sigma^{-}(||f||_{p(\cdot)}) \leq \int_{\Omega} |f(x)|^{p(x)} dx \leq \sigma^{+}(||f||_{p(\cdot)}) \tag{3.5}$$

donde $\sigma^-(s) := \text{mín}\{s^{p^-}, s^{p^+}\}$ *y* $\sigma^+(s) := \text{máx}\{s^{p^-}, s^{p^+}\}$ *para* $s \geq 0$.

Demostración. Si $0 < ||f||_{p(\cdot)} \leq 1$ entonces (3.5) es equivalente a mostrar que

$$||f||_{p(\cdot)}^{p^+} \leq \int_\Omega |f(x)|^{p(x)} dx \leq ||f||_{p(\cdot)}^{p^-}.$$

Se define $\varrho(f) := \int_\Omega |f(x)|^{p(x)} dx$ y usaremos sus propiedades de semimodular. Así, el lado derecho de la desigualdad se escribe como $\varrho(f) \leq ||f||_{p(\cdot)}^{p^-}$, de donde se sigue que $\frac{\varrho(f)^{1/p^-}}{||f||_{p(\cdot)}} \leq 1$. Usando la homogeneidad de la norma tenemos que $\left|\left|\frac{\varrho(f)^{1/p^-}}{f}\right|\right|_{p(\cdot)} \leq 1$ y aplicando el Lema 3.4.1 esto equivale a mostar que

$$\int_\Omega \left(\frac{\varrho(f)^{1/p^-}}{|f(x)|}\right)^{p(x)} dx \leq 1.$$

Del Lema 3.4.1 tenemos que $\varrho(f) \leq 1$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} \varrho(f)^{1/p(x)} &\geq \varrho(f)^{1/p^-}, \\ \varrho(f) &\geq \varrho(f)^{p(x)/p^-}. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left(\frac{\varrho(f)^{1/p^-}}{|f(x)|}\right)^{p(x)} dx &\leq \int_\Omega \frac{\varrho(f)}{|f(x)|^{p(x)}} dx \\ &= \varrho(f) \int_\Omega \frac{1}{|f(x)|^{p(x)}} dx \\ &= 1. \end{aligned}$$

Para el lado izquierdo de la desigualdad. Se debe mostrar que $||f||_{p(\cdot)}^{p^+} \leq \varrho(f)$, es decir, $||f||_{p(\cdot)} \leq \varrho(f)^{1/p^+}$. Por homogeneidad, se tiene que $\left|\left|\frac{f}{\varrho(f)^{1/p^+}}\right|\right|_{p(\cdot)} \leq 1$ y por el Lema 3.4.1 esto es equivalente a mostrar que $\int_\Omega \left(\frac{|f(x)|}{\varrho(f)^{1/p^+}}\right)^{p(x)} dx \leq 1$. Usando el Lema 3.4.1 se sigue que $\varrho(f) \leq \varrho(f)^{p(x)/p^+}$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left(\frac{|f(x)|}{\varrho(f)^{1/p^+}}\right)^{p(x)} dx &\leq \int_\Omega \frac{|f(x)|^{p(x)}}{\varrho(f)} dx \\ &= \frac{1}{\varrho(f)} \int_\Omega |f(x)|^{p(x)} dx \\ &= \frac{1}{\varrho(x)} \varrho(x) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Supongamos ahora que $||f||_{p(\cdot)} > 1$, entonces (3.5) equivale a mostrar que

$$||f||_{p(\cdot)}^{p^-} \leq \int_\Omega |f(x)|^{p(x)} dx \leq ||f||_{p(\cdot)}^{p^+}.$$

El lado derecho de la desigualdad se escribe como $\varrho(f) \leq ||f||_{p(\cdot)}^{p^+}$, de donde se sigue que $\frac{\varrho(f)^{1/p^+}}{||f||_{p(\cdot)}} \leq 1$. Usando la homogeneidad de la norma tenemos que $\left|\left|\frac{\varrho(f)^{1/p^+}}{f}\right|\right|_{p(\cdot)} \leq 1$ y aplicando el Lema 3.4.1 esto equivale a mostar que

$$\int_\Omega \left(\frac{\varrho(f)^{1/p^+}}{|f(x)|}\right)^{p(x)} dx \leq 1.$$

Gracias al Lema 3.4.1 tenemos que $\varrho(f) > 1$ y, por lo tanto

$$\begin{aligned} \varrho(f)^{1/p(x)} &\geq \varrho(f)^{1/p^+}, \\ \varrho(f) &\geq \varrho(f)^{p(x)/p^+}. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left(\frac{\varrho(f)^{1/p^+}}{|f(x)|}\right)^{p(x)} dx &\leq \int_\Omega \frac{\varrho(f)}{|f(x)|^{p(x)}} dx \\ &= \varrho(f) \int_\Omega \frac{1}{|f(x)|^{p(x)}} dx \\ &= 1. \end{aligned}$$

El lado izquierdo de la desigualdad se debe mostrar $||f||_{p(\cdot)}^{p^-} \leq \varrho(f)$, es decir, $||f||_{p(\cdot)} \leq \varrho(f)^{1/p^-}$, por homogeneidad se tiene $\left|\left|\frac{f}{\varrho(f)^{1/p^-}}\right|\right|_{p(\cdot)} \leq 1$ y por el Lema 3.4.1 esto es equivalente a mostrar que $\int_\Omega \left(\frac{|f(x)|}{\varrho(f)^{1/p^-}}\right)^{p(x)} dx \leq 1$. Del Lema 3.4.1 se sigue que $\varrho(f) \leq \varrho(f)^{p(x)/p^-}$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left(\frac{|f(x)|}{\varrho(f)^{1/p^-}}\right)^{p(x)} dx &\leq \int_\Omega \frac{|f(x)|^{p(x)}}{\varrho(f)} dx \\ &= \frac{1}{\varrho(f)} \int_\Omega |f(x)|^{p(x)} dx \\ &= \frac{1}{\varrho(f)} \varrho(f) \\ &= 1. \end{aligned}$$

□

Teorema 3.4.1. *Sea $p \in \mathcal{P}(A,\mu)$ entonces $L^{p(\cdot)}(A,\mu)$ es un espacio de Banach.*

Demostración. Para la demostración revisar [12, p 76]. $\square$

A continuación, se presentan el lema de Fatou, convergencia monótona y convergencia dominada para espacios de Lebesgue con exponente variable.

Lema 3.4.2. *Sea $p \in \mathcal{P}(A,\mu)$ y f_k, f, $g \in L^0(A,\mu)$.*

a) Si $f_k \to f$ μ-a.e entonces

$$\int_A |f(x)|^{p(x)}dx \leq \liminf_{k\to\infty} \int_A |f_k(x)|^{p(x)}dx.$$

b) Si $|f_k| \nearrow |f|$ μ-a.e entonces

$$\int_A |f(x)|^{p(x)}dx = \liminf_{k\to\infty} \int_A |f_k(x)|^{p(x)}dx.$$

c) Si $f_k \to f$ μ-a.e, $|f_k| \leq |g|$ μ-a.e y $\varrho_\varphi(\lambda g) < \infty$ entonces

$$f_k \to f \text{ en } L^{p(\cdot)}(\Omega).$$

Demostración.

a) Aplicando la semicontinuidad inferior y el Lema de Fatou, se tiene que

$$\begin{aligned}
\varrho_{p(\cdot)}(f) &= \int_A \varphi_{p(x)}(|f(x)|)dx \\
&= \int_A |f(x)|^{p(x)}dx \\
&\leq \int_A \liminf_{k\to\infty} |f_k(x)|^{p(x)}dx \\
&\leq \liminf_{k\to\infty} \int_A |f_k(x)|^{p(x)}dx \\
&= \liminf_{k\to\infty} \varrho_{p(\cdot)}(f_k).
\end{aligned}$$

b) Sea $|f_k| \nearrow |f|$, ya que $\varphi(\cdot)$ es monótona y continua por la izquierda se tiene $0 \leq \varphi(|f_k(\cdot)|) \nearrow \varphi(|f(\cdot)|)$ a.e. Aplicando el teorema de convergencia monótona se tiene que

$$\begin{aligned}
\varrho_{p(\cdot)}(f) &= \int_A \varphi_{p(x)}(|f(x)|)dx \\
&= \int_A \lim_{k\to\infty} |f_k(x)|^{p(x)}dx \\
&= \lim_{k\to\infty} \int_A |f_k(x)|^{p(x)}dx \\
&= \lim_{k\to\infty} \varrho_{p(\cdot)}(f_k).
\end{aligned}$$

c) Supongamos que $f_k \to f$ a.e, y además que $|f_k| \leq |g|$ y $\varrho_\varphi(\lambda g) < \infty$ para cada $\lambda > 0$. Entonces $|f_k - f| \to 0$ a.e, $|f| \leq |g|$ y $|f_k - f| \leq |f_k| + |f| \leq 2|g|$. Ya que $\varrho(2\lambda g) < \infty$ podemos usar el Teorema de convergencia dominada de Lebesgue

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \varrho_{p(\cdot)}(\lambda|f - f_k|) &= \int_A \varphi\left(\lim_{k\to\infty} \lambda|f(y) - f_k(y)|\right) d\mu(y) \\
&= \int_A \left(\lim_{k\to\infty} \lambda|f(y) - f_k(y)|\right)^{p(x)} dx \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ya que $\lambda > 0$ es arbitrario y por la Definición 3.1.4 se tiene que $f_k \to f$ en $L^{p(\cdot)}$.

□

Teorema 3.4.2. *Si $p \in \mathcal{P}(A, \mu)$ entonces $\varrho_{p(\cdot)}(f)$ es débilmente semicontinua inferior, es decir, si $f_k \rightharpoonup f$ en $L^{p(\cdot)}(A, \mu)$*

$$\int_A |f(x)|^{p(x)}dx \leq \liminf_{k\to\infty} \int_A |f_k(x)|^{p(x)}dx$$

Demostración. Para la demostración de este teorema se puede ver [12, p 77, 39, 40]. □

El espacio $L^{p(\cdot)}(A, \mu)$ es *circular*, *sólido*, cumple con el *lema de Fatou* para la norma y la *propiedad de Fatou* (ver [12]), es decir,

- $||f||_{p(\cdot)} = ||\,|f|\,||_{p(\cdot)}$ para todo $f \in L^{p(\cdot)}(A, \mu)$.
- Si $f \in L^{p(\cdot)}(A, \mu)$, $g \in L^0(A, \mu)$ y $0 \leq |g| \leq |f|$ μ-a.e entonces $g \in L^{p(\cdot)}(A, \mu)$ y $||g||_{p(\cdot)} \leq ||f||_{p(\cdot)}$.
- Si $f_k \to f$ μ-a.e entonces $||f||_{p(\cdot)} \leq \liminf_{k\to\infty} ||f_k||_{p(\cdot)}$.
- Si $|f_k| \nearrow |f|$ μ-a.e con $f_k \in L^{p(\cdot)}(A, \mu)$ y $\sup_k ||f_k||_{p(\cdot)} < \infty$ entonces $f \in L^{p(\cdot)}(A, \mu)$ y $||f_k||_{p(\cdot)} \nearrow ||f||_{p(\cdot)}$ respectivamente.

Lema 3.4.3. *Sea $p \in \mathcal{P}(A,\mu)$. Entonces el conjunto de funciones simples $S(A,\mu)$ está contenido en $L^{p(\cdot)}(A,\mu)$ y*

$$\text{mín}\{1,\mu(E)\} \leq ||\chi_E||_{\tilde{\varphi}_{p(\cdot)}} \leq \text{máx}\{1,\mu(E)\},$$

para cada conjunto medible $E \subset A$.

Demostración. Para la demostración ver [12, p. 78]. □

Lema 3.4.4. *Sea $s \in \mathcal{P}(A,\mu)$. Entonces*

$$\frac{1}{2}\,\text{mín}\{\mu(A)^{\frac{1}{s^+}},\mu(A)^{\frac{1}{s^-}}\} \leq ||1||_{L^{s(\cdot)}(A,\mu)} \leq 2\,\text{máx}\{\mu(A)^{\frac{1}{s^+}},\mu(A)^{\frac{1}{s^-}}\}$$

para cada conjunto medible A, con $\mu(A) > 0$.

Demostración. Para la demostración ver [12, p. 78]. □

Lema 3.4.5. *Si $1 \leq q \leq \infty$, entonces $(\tilde{\varphi}_q)^* = \tilde{\varphi}_{q'}$.*

Demostración. Sea $1 < q < \infty$ y $\tilde{\varphi}_q(a) = \frac{1}{q}a^q$, gracias al Teorema 2.6.8 en [12, p. 54] tenemos que $(\varphi^*)' = (\varphi')^{-1}$, usando este resultado podemos obtener φ_q^* con facilidad. Así, $\tilde{\varphi}_q'(a) = a^{q-1}$, su función inversa está dada por $(\tilde{\varphi}_q')^{-1}(a) = a^{\frac{1}{q-1}}$. Por otro lado, con $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$ se puede ver que $\frac{1}{q-1} = q' - 1$ y por tanto tenemos que

$$(\tilde{\varphi}_q^*)'(a) = (\varphi_q')^{-1}(a) = a^{\frac{1}{q-1}} = a^{q'-1}.$$

Finalmente, integrando sobre a tenemos que $\varphi_q^*(a) = \frac{1}{q'}a^{q'} = \tilde{\varphi}_{q'}(a)$. Para el caso $q = 1$ y siguiendo la Definición 3.3.4 se tiene

$$(\varphi_1)^*(a) = \sup_{t\geq 0}(ta - \tilde{\varphi}_1(t)) = \sup_{t\geq 0}(ta - t) = \sup_{t\geq 0}(t(a-1)) = \infty \cdot \chi_{(1,\infty)}(a) = \tilde{\varphi}_\infty(a)$$

para todo $a \geq 0$.

Si $q = \infty$, usando el Corolario 2.6.3 (ver [12, p. 52]) y el caso $q = 1$ tenemos que $(\varphi^*)^* = \varphi$ y por lo tanto

$$\tilde{\varphi}_1(a) = (\tilde{\varphi}_1)^{**}(a) = (\tilde{\varphi}_1^*)^*(a) = (\tilde{\varphi}_\infty)^*(a)$$

para todo $a \geq 0$. □

Lema 3.4.6 (Desigualdad de Young)**.** *Sean $p, q, s \in [0,\infty]$ con*

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$$

Entonces para todo $a, b \geq 0$

$$\varphi_s(ab) \leq \varphi_p(a) + \varphi_q(b), \tag{3.6}$$

$$\bar{\varphi}_s(ab) \leq \frac{s}{p}\bar{\varphi}_p(a) + \frac{s}{q}\bar{\varphi}_q(b), \tag{3.7}$$

donde se usa la convención $\frac{s}{p} = \frac{s}{q} = 1$ para $s = p = q = \infty$. Más aún si $1 \leq s < \infty$ entonces para todo $a \geq 0$

$$\tilde{\varphi}_p(a) = \sup_{b \geq 0}(\tilde{\varphi}_s(ab) - \tilde{\varphi}_q(b)). \tag{3.8}$$

Demostración. Esta demostración se hará para $\varphi := \tilde{\varphi} = \bar{\varphi}$ definidas anteriormente.

Sea $s = \infty$. Entonces necesariamente $p = q = \infty$ y para $a, b \in [0, 1]$ se sigue

$$\varphi_\infty(ab) = 0.$$

Por otro lado, si $a > 1$ o $b > 1$

$$\varphi_p(a) = \infty \quad \text{y} \quad \varphi_q(b) = \infty$$

por lo tanto, la desigualdad de Young se cumple directamente en estos casos.

Sea $1 \leq s < \infty$. Para demostrar (3.6) con $\varphi = \tilde{\varphi}$, basta mostrar (3.8). Supongamos que $s = 1$, entonces $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ y $p = \frac{q}{q-1} = q'$. Usando el Lema 3.4.5 se tiene que $\tilde{\varphi}_p = (\tilde{\varphi}_q)^*$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_p(a) = (\tilde{\varphi}_q)^*(a) &= \sup_{b \geq 0}(ab - \tilde{\varphi}_q(b)) \\ &= \sup_{b \geq 0}(\tilde{\varphi}_1(ab) - \tilde{\varphi}_q(b)) \end{aligned}$$

para todo $a, b \geq 0$. Si $1 < s < \infty$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{s} &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \\ 1 &= \frac{s}{p} + \frac{s}{q} \\ 1 &= \frac{1}{p/s} + \frac{1}{q/s} \end{aligned}$$

y $(\tilde{\varphi}_{p/s})^* = \tilde{\varphi}_{q/s}$ por el Lema 3.4.5, usando el caso $s = 1$, se tiene que

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_p(a) &= \frac{1}{s}\tilde{\varphi}_{p/s}(a^s)\\ &= \frac{1}{s}\sup_{b\geq 0}(a^s b^s - \tilde{\varphi}_{q/s}(b^s))\\ &= \sup_{b\geq 0}(\tilde{\varphi}_s(ab) - \tilde{\varphi}_q(b))\end{aligned}$$

para todo $a, b \geq 0$.

Si $s = \infty$ entonces $s = p = q = \infty$ y (3.7) se sigue de (3.6) ya que $\bar{\varphi}_\infty = \tilde{\varphi}_\infty$.

Supongamos ahora que $1 \leq s < \infty$. Tomemos $s \leq p$, $s \leq q$ y usando (3.8)

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}_s(ab) = s\frac{1}{s}(ab)^s &= s\tilde{\varphi}(ab)\\ &\leq s(\tilde{\varphi}_p(a) + \tilde{\varphi}_q(b))\\ &= \frac{s}{p}a^p + \frac{s}{q}b^q\\ &= \frac{s}{p}\bar{\varphi}_p(a) + \frac{s}{q}\bar{\varphi}_q(b)\\ &\leq \bar{\varphi}_p(a) + \bar{\varphi}_q(b)\end{aligned}$$

para todo $a, b \geq 0$.

Finalmente mostraremos (3.6) para $\varphi = \bar{\varphi}$ y $1 \leq s < \infty$. Supongamos que $s \leq p$ y $s \leq q$

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}_s(ab) = s\frac{1}{s}(ab)^s &= s\tilde{\varphi}_s(ab)\\ &\leq s(\tilde{\varphi}_p(a) + \tilde{\varphi}_q(b))\\ &= \frac{s}{p}\bar{\varphi}_p(a) + \frac{s}{q}\bar{\varphi}_q(b)\end{aligned}$$

para $a, b \geq 0$. □

Lema 3.4.7 (Desigualdad de Hölder)**.** *Sean $p, q, s \in \mathcal{P}(A, \mu)$ tal que*

$$\frac{1}{s(y)} = \frac{1}{p(y)} + \frac{1}{q(y)}$$

para μ-a.e $y \in A$. Entonces

$$\varrho_{s(\cdot)} \leq \varrho_{p(\cdot)}(f) + \varrho_{q(\cdot)}(g) \tag{3.9}$$

$$||fg||_{s(\cdot)} \leq 2||f||_{p(\cdot)}||g||_{q(\cdot)}. \tag{3.10}$$

para todo $f \in L^{p(\cdot)}(A, \mu)$ y $g \in L^{q(\cdot)}(A, \mu)$.

Cuando $s = p = q = \infty$ *se tiene que* $\frac{s}{p} = \frac{s}{q} = 1$.

Demostración. Sean $f \in L^{p(\cdot)}$ y $g \in L^{q(\cdot)}$ entonces f, g son funciones medibles y por lo tanto su producto fg es medible. Entonces (3.9) se obtiene integrando (3.6) sobre todo $y \in A$.

Si $||f||_{p(\cdot)} \leq 1$ y $||g||_{q(\cdot)} \leq 1$, entonces por el Lema 3.4.1, se sigue

$$\varrho_{p(\cdot)}(f) \leq 1 \quad \text{y} \quad \varrho_{q(\cdot)}(g) \leq 1.$$

Por otro lado, aplicando (3.1) y (3.9)

$$\varrho_{s(\cdot)}\left(\frac{1}{2}fg\right) \leq \frac{1}{2}\varrho_{s(\cdot)}(fg) \leq \frac{1}{2}(\varrho_{p(\cdot)}(f) + \varrho_{q(\cdot)}(g)) \leq \frac{1}{2}(2) = 1.$$

Aplicando el Lema 3.4.1,

$$\left|\left|\frac{1}{2}fg\right|\right|_{s(\cdot)} \leq 1$$

y por homogeneidad de la norma $||fg||_{s(\cdot)} \leq 2$. Supongamos que $||f||_{p(\cdot)} > 0$ y $||g||_{q(\cdot)} > 0$, por lo tanto $\left|\left|\frac{f}{||f||_{p(\cdot)}}\right|\right|_{p(\cdot)} = 1$, aplicando el Lema 3.4.1, $\varrho_{p(\cdot)}\left(\frac{f}{||f||_{p(\cdot)}}\right) \leq 1$. De forma similar se tiene que $\left|\left|\frac{g}{||g||_{q(\cdot)}}\right|\right|_{q(\cdot)} = 1$ y entonces $\varrho_{q(\cdot)}\left(\frac{g}{||g||_{q(\cdot)}}\right) \leq 1$. Por otro lado, usando (3.9)

$$\begin{aligned}\varrho_{s(\cdot)}\left(\frac{f}{||f||_{p(\cdot)}}\frac{g}{||g||_{q(\cdot)}}\right) &\leq \varrho_{p(\cdot)}\left(\frac{f}{||f||_{p(\cdot)}}\right) + \varrho_{q(\cdot)}\left(\frac{g}{||g||_{q(\cdot)}}\right)\\ &\leq 2.\end{aligned}$$

Aplicando el Lema 3.4.1

$$\left|\left|\frac{f}{||f||_{p(\cdot)}}\frac{g}{||g||_{q(\cdot)}}\right|\right|_{s(\cdot)} \leq 2 \quad \text{multiplicando la desigualdad por} \quad ||f||_{p(\cdot)}||g||_{q(\cdot)}$$

se concluye $||fg||_{s(\cdot)} \leq 2||f||_{p(\cdot)}||g||_{q(\cdot)}$. □

3.5. Inmersiones

En la teoría de espacios de Lebesgue con exponente constante se dice que $L^p(A)$ es subespacio de $L^q(A)$ con $p, q \in [1, \infty]$ si y solo si $p \geq q$ y $|A| < \infty$. Para caracterizar las inmersiones en espacios de Lebesgue con exponente variable entonces es natural usar una condición similar.

Diremos entonces que $L^{p(\cdot)}(A) \hookrightarrow L^{q(\cdot)}(A)$ si existe una constante $K > 0$ tal que

$$||f||_{q(\cdot)} \leq K||f||_{p(\cdot)}$$

donde K se conoce como la *constante de inmersión.*

Lema 3.5.1. *Sea $p, q \in \mathcal{P}(A, \mu)$ y definamos al exponente $r \in \mathcal{P}(A, \mu)$ como*

$$\frac{1}{r(y)} := \max\left\{\frac{1}{q(y)} - \frac{1}{p(y)}, 0\right\}$$

para todo $y \in A$.

a) Si $q \leq p$ μ-a.e and $1 \in L^{r(\cdot)}(A, \mu)$ entonces $L^{p(\cdot)}(A, \mu) \hookrightarrow L^{q(\cdot)}(A, \mu)$ con norma menor o igual a $2||1||_{L^{r(\cdot)}(A)}$.

b) Si la medida μ es no atómica y $L^{p(\cdot)}(A, \mu) \hookrightarrow L^{q(\cdot)}(A, \mu)$ entonces $q \leq p$ μ-a.e y $||1||_{L^{r(\cdot)}(A)} \leq 4K$ con $K > 0$.

Demostración. Se realizará la demostración del literal a) y para la demostración del literal b) se recomienda, ver [12, p. 83].

Supongamos que $q \leq p$ y que

$$\frac{1}{r(y)} = \frac{1}{q(y)} - \frac{1}{p(y)}$$

aplicando la desigualdad de Hölder con

$$\frac{1}{q(y)} = \frac{1}{r(y)} + \frac{1}{p(y)}$$

se concluye que

$$||f||_{q(\cdot)} \leq 2||1||_{r(\cdot)}||f||_{p(\cdot)}$$

□

Para una revisión más profunda de las siguientes propiedades y sus demostraciones, se puede consultar [12].

Si $\mu(A) < \infty$ por el Lema 3.4.3 y\o Lema 3.4.4 la condición $1 \in L^{r(\cdot)}(\Omega)$ siempre se cumple y por lo tanto se tiene el siguiente corolario:

Corolario 3.5.1. *Sea $p, q \in \mathcal{P}(A, \mu)$ y sea la medida μ no atómica con $\mu(A) < \infty$ entonces $L^{p(\cdot)}(A, \mu) \hookrightarrow L^{q(\cdot)}(A, \mu)$ si y solo si $q \leq p$ μ-a.e en A. La constante de la inmersión es menor o igual a $2(1 + \mu(A))$ y $2\max\{\mu(A)^{(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})^+, (\frac{1}{q}-\frac{1}{p})^-}\}$.*

Sean X, Y espacios de Banach, a la intersección, $X \cap Y := \{f : f \in X, f \in Y\}$ se dotará de la norma

$$||f||_{X\cap Y} := \text{máx}\{||f||_X, ||f||_Y\}.$$

Teorema 3.5.2. *Sea $p, q, r \in \mathcal{P}(A, \mu)$ con $p \leq q \leq r$ μ-a.e en A. Entonces*

$$L^{p(\cdot)}(A, \mu) \cap L^{r(\cdot)}(A, \mu) \hookrightarrow L^{q(\cdot)}(A, \mu) \hookrightarrow L^{p(\cdot)}(A, \mu) + L^{r(\cdot)}(A, \mu)$$

Las constantes de inmersión son menores o iguales a 2.

Demostración. Para la demostración ver [12, p. 86]. □

Teorema 3.5.3. *Sea $p \in \mathcal{P}(A, \mu)$ con $1 < p^- \leq p^+ < \infty$. Entonces $L^{p(\cdot)}(A, \mu)$ es reflexivo.*

Demostración. Para la demostración ver [12, p. 89]. □

Después de presentar la propiedad de reflexividad para espacios de Lebesgue con exponente variable podemos notar que al igual que en la teoría de los espacios de Lebesgue clásicos, la condición $1 < p^- \leq p^+ < \infty$ se asemeja al hecho de que los L^p son reflexivos para $1 \leq p < \infty$.

3.6. Espacios de Sobolev con exponentes variables

El estudio de los espacios de Sobolev obedece a la importancia que estos tienen dentro del estudio de las soluciones de las ecuaciones diferenciales parciales.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, empezaremos con la definición de derivada débil.

Definición 3.6.1. *Supongamos $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Sea $\alpha := (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n_0$ un multi-índice. Si existe $g \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que*

$$\int_\Omega u \frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}\psi}{\partial^{\alpha_1}x_1\cdots\partial^{\alpha_n}x_n}dx = (-1)^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}\int_\Omega \psi g dx$$

$\forall \psi \in C_0^\infty(\Omega)$. *Entonces g se conoce como derivada débil de u con respecto a α.*

Observación 3.6.1. $\mathbb{N}_0$ *representa a los números naturales incluido el cero.*

Observación 3.6.2. *A la derivada débil g se notará como $\partial_\alpha u$ mientras que al gradiente débil de u, $\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$, se notará como ∇u. Escribiremos $\partial_j u$ para $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ con $j = 1, \ldots, n$. De manera general se escribirá ∇^k_u para denotar al tensor con entradas $\partial_\alpha u$, $|\alpha| = k$.*

Observación 3.6.3. *Si una función u tiene derivada clásica entonces tiene también derivada débil (ver [6]).*

Definición 3.6.2. *La función $u \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ pertenece al espacio $W^{k,p(\cdot)}(\Omega)$ donde $k \in \mathbb{N}_0$ y $p \in \mathcal{P}(\Omega)$ si sus derivadas parciales $\partial_\alpha u$ con $|\alpha| \leq k$ existen y pertenecen a $L^{p(\cdot)}(\Omega)$.*

La norma para los espacios de Sobolev con exponente variable se define como

$$||u||_{W^{k,p(\cdot)}(\Omega)} := \text{ínf}\left\{\lambda > 0 : \int_\Omega \left|\frac{\nabla u}{\lambda}\right|^{p(x)} dx \leq 1\right\}.$$

Para $k \in \mathbb{N}$ el espacio $W^{k,p(\cdot)}(\Omega)$ es llamado *espacio de Sobolev* y sus elementos se conocen como *funciones de Sobolev.*

Observación 3.6.4. *Es fácil ver que*

$$W^{0,p(\cdot)}(\Omega) = L^{p(\cdot)}(\Omega).$$

De la forma usual se define:

Definición 3.6.3. *Una función u pertenece a $W^{k,p(\cdot)}_{loc}(\Omega)$ si $u \in W^{k,p(\cdot)}(U)$ para cualquier abierto $U \subset\subset \Omega$. La notación $\subset\subset$ significa que $\overline{U} \subset \Omega$ es compacto.*

Observación 3.6.5. *Se notará $||u||_{W^{k,p(\cdot)}(\Omega)}$, por $||u||_{k,p(\cdot)}$.*

Teorema 3.6.1. *Sea $p \in \mathcal{P}(\Omega)$. El espacio $W^{k,p(\cdot)}(\Omega)$ es un espacio de Banach reflexivo si $1 < p^- \leq p^+ < \infty$.*

Demostración. Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $W^{k,p(\cdot)}(\Omega)$, debemos mostrar que existe $u \in W^{k,p(\cdot)}(\Omega)$ tal que $u_n \to u$ en $W^{k,p(\cdot)}(\Omega)$. Como $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in W^{k,p(\cdot)}(\Omega)$ se tiene que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ y sus derivadas parciales débiles existen $\partial_\alpha u \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ para $|\alpha| \leq k$ donde $k \in \mathbb{N}_0$.

Como $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ es un espacio de Banach y $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy entonces existe $u \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ tal que $u_n \to u$ en $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ y $\partial_\alpha u$ en $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ tal que $\partial_\alpha u_n \to \partial_\alpha u$ en $L^{p(\cdot)}(\Omega)$.

Sea $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$. Como $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in W^{k,p(\cdot)}(\Omega)$ se tiene

$$\int\limits_\Omega u_n \partial_\alpha \psi dx = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega \psi \partial_\alpha u_n dx.$$

La convergencia fuerte en $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ implica la convergencia débil y entonces

$$\int_\Omega u_n \partial_\alpha \psi dx \to \int_\Omega u \partial_\alpha \psi dx \quad \text{y} \quad \int\limits_\Omega \psi \partial_\alpha u_n dx \to \int_\Omega \psi \partial_\alpha u dx$$

cuando $n \to \infty$.

Puesto que $\partial_\alpha u$ es la derivada débil de u se concluye que $u \in W^{k,p(\cdot)}(\Omega)$ y $u_n \to u$ en $W^{k,p(\cdot)}(\Omega)$.

Por otro lado, $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ es reflexivo para $1 < p^- \leq p^+ < \infty$ (Teorema 3.5.3) y para $u \mapsto (u, \nabla u)$ el espacio $W^{k,p(\cdot)}(\Omega)$ es un subespacio cerrado de $L^{p(\cdot)}(\Omega) \times (L^{p(\cdot)}(\Omega))^n$, entonces $W^{k,p(\cdot)}(\Omega)$ es reflexivo para $1 < p^- \leq p^+ < \infty$. □

Lema 3.6.1. *Si* $|\Omega| < \infty$ *entonces* $W^{k,p(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow W^{k,p^-}(\Omega)$.

Demostración. Basta mostrar que

$$||\nabla u||_{p^-} \leq C||\nabla u||_{p(\cdot)}$$

para $C > 0$. Como $p^- \leq p$ y por el Corolario 3.5.1 se sigue que

$$L^{p(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^-}(\Omega)$$

de donde se obtiene el resultado. □

Un espacio funcional es un *latice* si el mínimo y el máximo puntual de cualquier par de elementos pertenecen al espacio. La siguiente proposición nos dice que el espacio de Sobolev de exponente variable de primer orden cumple con esta propiedad.

Proposición 3.6.1. *Sea* $p \in \mathcal{P}(\Omega)$. *Si* $u, v \in W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ *entonces* $\max\{u, v\}$ *y* $\min\{u, v\}$ *están en* $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ *con*

$$\nabla \max(u, v)(x) = \begin{cases} \nabla u(x) & \text{a.e } x \in \{u \geq v\} \\ \nabla v(x) & \text{a.e } x \in \{v \geq u\} \end{cases}$$

y

$$\nabla \min(u, v)(x) = \begin{cases} \nabla u(x) & \text{a.e } x \in \{u \leq v\} \\ \nabla v(x) & \text{a.e } x \in \{v \leq u\}. \end{cases}$$

En particular $|u| \in W^{1,p(\cdot)}$ *y* $|\nabla |u|| = |\nabla u|$ *a.e en* Ω.

Demostración. Para la demostración ver [12, p. 250]. □

Definición 3.6.4. *Sea* $p \in \mathcal{P}(\Omega)$ *y* $k \in \mathbb{N}$. *El espacio de Sobolev* $W_0^{k,p(\cdot)}(\Omega)$ *con valores cero en la frontera se define como la clausura del conjunto de funciones* $W^{k,p(\cdot)}$ *con soporte compacto i.e*

$$\{u \in W^{k,p(\cdot)}(\Omega) : u = u\chi_K \quad \textit{para un compacto} \quad K \subset \Omega\}$$

en $W^{k,p(\cdot)}(\Omega)$.

Notaremos a la clausura de $C_0^\infty(\Omega)$ en $W^{k,p(\cdot)}(\Omega)$ como

$$H_0^{k,p(\cdot)}(\Omega).$$

Por otro lado, tenemos que $C_0^\infty(\Omega) \subset W_0^{k,p(\cdot)}(\Omega)$.

Teorema 3.6.2. *Sea $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. El espacio $W_0^{k,p(\cdot)}(\Omega)$ es un espacio de Banach. Si $1 < p^- \leq p^+ < \infty$ es reflexivo.*

Demostración. Como $W_0^{k,p(\cdot)}(\Omega)$ es un subespacio cerrado entonces gracias a la Proposición 2.1.2 y el Teorema 3.6.1 se sigue el resultado. □

3.7. Desigualdades Sobolev, Poincaré e Inmersiones

Luego de tratar las propiedades básicas de los espacios de Lebesgue con exponente variable, la intención de esta sección es mostrar otros resultados necesarios para el estudio de los exponentes de este tipo y su aplicación a las ecuaciones diferenciales parciales. Es por ello que se presenta la noción de *log-Hölder continuidad* que aporta un criterio de regularidad al exponente p . A pesar que no utilizaremos estos resultados en el problema principal de este trabajo, resulta de gran interés abordarlos para futuros trabajos.

Definición 3.7.1 (Log-Hölder continuidad). *Decimos que $\alpha : \Omega \to \mathbb{R}$ es localmente log-Hölder continua sobre Ω si existe una constante $c_1 > 0$ tal que*

$$|\alpha(x) - \alpha(y)| \leq \frac{c_1}{log(e + 1/|x-y|)}$$

para todo $x, y \in \Omega$. Por otro lado, se dice que α cumple con una condición log-Hölder de decaimiento si existe $\alpha_\infty \in \mathbb{R}$ y una constante $c_2 > 0$ tal que

$$|\alpha(x) - \alpha_\infty| \leq \frac{c_2}{log(e + |x|)}$$

para todo $x \in \Omega$. Se dice que α es globalmente log-Hölder continua en Ω si es localmente log-Hölder continua y cumple con la condición log-Hölder de decaimiento. A las constantes c_1 y c_2 se las conoce como constante log-Hölder local y constante log-Hölder de decaimiento respectivamente. El máximo $\max(c_1, c_2)$ se conoce como la constante log-Hölder de α.

Definición 3.7.2. *Se define el siguiente tipo de exponentes variables*

$$\mathcal{P}^{log}(\Omega) := \left\{ p \in \mathcal{P}(\Omega) : \frac{1}{p} \text{ es globalmente log-Hölder continua} \right\}.$$

Se notará $c_{log}(p)$ o c_{log} a la constante log-Hölder de $\frac{1}{p}$. Si Ω no es acotado se define p_∞ por $\frac{1}{p_\infty} := \lim_{|x|\to\infty} \frac{1}{p(x)}$. Notaremos convenientemente $\frac{1}{\infty} := 0$.

Con el fin de estudiar el funcionamiento de propiedades tales como la desigualdad de Poincaré y las inmersiones en estos espacios, resulta importante abordar las siguientes definiciones:

Definición 3.7.3. *Sea $0 < \alpha < n$. Para f medible se define $I_\alpha f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$*

$$I_\alpha f(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}} dy.$$

El operador I_α se conoce como operador potencial de Riesz y $|x|^{\alpha-n}$ se conoce como kernel de Riesz.

Si la función f es definida sobre Ω entonces la integral se debe tomar sobre todo Ω, es decir, $I_\alpha f = I_\alpha(\chi_\Omega f)$ usando la extensión por cero.

Definición 3.7.4 (Bolas y cubos de John)**.** *Un dominio acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es llamado un dominio α-John, $\alpha > 0$, si existe $x_0 \in \Omega$ (centro de John) tal que cada punto en Ω puede unirse a x_0 por un camino rectificable γ (camino de John) parametrizado tal que*

$$B\left(\gamma(t), \frac{1}{\alpha} t\right) \subset \Omega$$

para todo $t \in [0, l(\gamma)]$, donde $l(\gamma)$ es la longitud de γ. La bola $B\left(x_0, \frac{1}{2\alpha} diam(\Omega)\right)$ se conoce como bola de John.

Ejemplo 3.7.1. *Toda bola y cubo son dominios de Lipschitz ya que una bola es un dominio 1-John mientras que un cubo es un dominio $\sqrt{n}$-John.*

Observación 3.7.1. *Se define*

$$\langle u \rangle_\Omega := \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u(x) dx.$$

Lema 3.7.1.

a) Para cada $u \in W_0^{1,1}(\Omega)$, la desigualdad

$$|u| \le c I_1 |\nabla u|$$

se cumple a.e en Ω con una constante c que depende solo de la dimensión n.

b) *Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio acotado α-John, entonces existe una bola $B \subset \Omega$ y una constante c tal que*

$$|u(x) - \langle u \rangle_B| \leq cI_1|\nabla u|(x), \quad \text{a.e en } \Omega,$$

para cada $u \in W^{1,1}(\Omega)$. La bola B cumple que $|B| \leq |\Omega| \leq c'|B|$ donde las constantes c y c' depende de la dimensión de n y α.

Demostración. Para la demostración, revisar [12, p. 253-254]. □

Teorema 3.7.1 (Desigualdad de Poincaré)**.** *Sea $p \in \mathcal{P}^{log}(\Omega)$*

a) *Para cada $u \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$, la desigualdad*

$$||u||_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \leq c\, diam(\Omega)||\nabla u||_{L^{p(\cdot)}(\Omega)},$$

donde c es una constante que depende solo de la dimensión n y de $c_{log}(p)$.

b) *Si Ω es un dominio acotado α-John, entonces*

$$||u - \langle u \rangle_\Omega||_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \leq c\, diam(\Omega)||\nabla u||_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}$$

para $u \in W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$. La constante c depende de la dimensión n, α y $c_{log}(p)$, definida en 3.7.2.

Demostración.

a) Sea $u \in W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ gracias al Lema 3.6.1 se tiene que $W^{1,p(\cdot)}(\Omega) \subset W^{1,p^-}(\Omega)$ y por lo tanto $u \in W^{1,p^-}(\Omega) \subset W^{1,1}(\Omega)$. Usando el Lema 3.7.1 y la teoría de operadores maximales (Lema 6.1.4) [12] se tiene que

$$||u||_{p(\cdot)} \leq C(n)I_1(|\nabla u|) \leq C diam(\Omega)||\nabla u||_{p(\cdot)}.$$

b) Para la demostración se invita al lector a revisar [12, p. 255-256].

□

De aquí en adelante, asumimos que el exponente p es log-Hölder continuo con $1 \leq p^- \leq p^+ < \infty$.

Definición 3.7.5. *Se define al exponente conjugado de Sobolev puntual como*

$$p^*(x) := \frac{np(x)}{n - p(x)},$$

cuando $p(x) < n$ y $p^*(x) = \infty$ en otro caso.

Teorema 3.7.2. *Sea $p \in \mathcal{P}^{log}(\Omega)$ tal que $1 \leq p^- \leq p^+ < n$.*

a) Para cada $u \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$, la desigualdad

$$||u||_{L^{p^*(\cdot)}(\Omega)} \leq c||\nabla u||_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}$$

se cumple para una constante c que depende de la dimensión n, $c_{log}(p)$ y p^+.

b) Si Ω es un dominio acotado α-John, entonces

$$||u - \langle u\rangle_\Omega||_{L^{p^*(\cdot)}(\Omega)} \leq c||\nabla u||_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}$$

para $u \in W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$. La constante c depende de n, α, $c_{log}(p)$ y p^+.

Corolario 3.7.3. *Sea Ω un dominio α-John acotado y $p \in \mathcal{P}^{log}(\Omega)$. Sea $q \in \mathcal{P}(\Omega)$ y asumimos que $q \leq p^*$. Entonces*

$$W^{1,p(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(\cdot)}(\Omega),$$

donde la constante de inmersión depende de α, $|\Omega|$, n, $c_{log}(p)$ y q^+.

Demostración. Sea $r \in (1, n)$ tal que $r^* \geq q^+$, por hipótesis se tiene que $q \leq p^*$ se tiene por el Corolario 3.5.1 $L^{p^*} \hookrightarrow L^{q(\cdot)}$, por otro lado $q(x) \leq q^+ \leq r^*$ y por lo tanto $L^{r^*} \hookrightarrow L^{q(\cdot)}$, de donde $L^{\text{mín}\{r^*,p^*\}} \hookrightarrow L^{q(\cdot)}$, aplicando el Corolario 3.5.1 y el Lema 3.4.4

$$\begin{aligned}
||u||_{q(\cdot)} &= ||u - \langle u\rangle_\Omega + \langle u\rangle_\Omega||_{q(\cdot)} \\
&= ||u - \langle u\rangle_\Omega||_{q(\cdot)} + ||\langle u\rangle_\Omega||_{q(\cdot)} \\
&\leq 2(1 + |\Omega|)||u - \langle u\rangle_\Omega||_{\text{mín}\{p^*(\cdot),r^*\}} + |\langle u\rangle_\Omega|||1||_{q(\cdot)} \\
&\leq 2(1 + |\Omega|)||u - \langle u\rangle_\Omega||_{\text{mín}\{p^*(\cdot),r^*\}} + \text{máx}\{|\Omega|^{\frac{1}{q^+}-1}, 1\}||u||_1 \\
&\leq 2(1 + |\Omega|)\,\text{máx}\{|\Omega|^{\frac{1}{q^+}-1}, 1\}\left(||u - \langle u\rangle_\Omega||_{\text{mín}\{p^*(\cdot),r^*\}} + ||u||_{p(\cdot)}\right).
\end{aligned}$$

Ya que $\text{mín}\{r^*, p^*\} \in \mathcal{P}(\Omega)$, gracias al Teorema 3.7.2(b) y el Corolario 3.5.1

$$||u - \langle u\rangle_\Omega||_{\text{mín}\{p^*(\cdot),r^*\}} \leq c||\nabla u||_{\text{mín}\{p(\cdot),r\}} \leq c(1 + |\Omega|)||\nabla u||_{p(\cdot)}.$$

Reemplazando esta deisgualdad en la anterior se tiene

$$\begin{aligned}
||u||_{q(\cdot)} &\leq 2(1 + |\Omega|)\,\text{máx}\{|\Omega|^{\frac{1}{q^+}-1}, 1\}\left(c(1 + |\Omega|)||\nabla u||_{p(\cdot)} + ||u||_{p(\cdot)}\right) \\
&\leq c\left(||\nabla u||_{p(\cdot)} + ||u||_{p(\cdot)}\right) \\
&\leq c||u||_{1,p(\cdot)}
\end{aligned}$$

□

Lema 3.7.2. *Sea Ω un dominio acotado α-John y sea $p \in \mathcal{P}^{log}(\Omega)$ tal que $1 \leq p^- \leq p^+ < n$. Entonces*

$$||u - \langle u \rangle_\Omega||_{L^{p^*(\cdot)}(\Omega)} \leq c||\nabla u||_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}$$

para $u \in W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$. La constante c depende de la dimensión n, p^+, $c_{log}(p)$, α y $diam(\Omega)$.

Demostración. Ver la demostración en [12, p. 266-268]. □

3.8. Inmersiones compactas

A continuación se presentan dos resultados interesantes sobre inmersiones compactas con el fin de mostrar su comportamiento en este tipo de espacios. Para encontrar un mayor desarrollo este tema y las demostraciones de los resultados se invita al lector a revisar [12, p. 272-275].

Teorema 3.8.1. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado y sea $p \in \mathcal{P}^{log}(\Omega)$. Entonces*

$$W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^{p(\cdot)}(\Omega).$$

Corolario 3.8.2. *Sea Ω un dominio acotado y sea $p \in \mathcal{P}^{log}(\Omega)$ tal que $p^+ < n$. Entonces*

$$W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^{p^*(\cdot)-\epsilon}(\Omega).$$

para cada $\epsilon \in (0, n')$.

Observación 3.8.1. *Existen más resultados de inmersión con condiciones más fuertes sobre el exponente, se invita al lector a revisar [12].*

3.9. Espacios de Amalgama

En el estudio de espacios funcionales es común tratar el comportamiento local y global de las funciones por separado, criterios tales como monotonía, diferenciabilidad e integrabilidad, por ejemplo. Sin embargo, los espacios de *amalgama* de Wiener (o *espacios de amalgama*) son una clase de espacios de funciones cuya norma trata las propiedades locales y globales simultáneamente. Más formalmente se expresa la siguiente definición basada en [8].

Definición 3.9.1. *El espacio de amalgama $W(B, C)$ es definido como el espacio de todas las funciones f con componente local B y componente global C.*

Es así que, siguiendo la idea de [1], se define un espacio de amalgama con *exponente variable* de la siguiente forma:

$$X^{p(\cdot)}(\Omega) := \left\{ u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^{p(\cdot)}(\Omega) \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \dots, n \right\}$$

con la norma

$$||u||_{X^{p(\cdot)}(\Omega)} := (||u||_2^2 + ||\nabla u||_{p(\cdot)}^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{para} \quad u \in X^{p(\cdot)}(\Omega).$$

Se define $X_0^{p(\cdot)}(\Omega)$ como el subespacio de $X^{p(\cdot)}(\Omega)$ tal que

$$X_0^{p(\cdot)}(\Omega) := X^{p(\cdot)}(\Omega) \cap W_0^{1,p^-}(\Omega)$$

con $||u||_{X_0^{p(\cdot)}(\Omega)} := ||u||_{X^{p(\cdot)}(\Omega)}$.

Previo al análisis de la existencia y unicidad de soluciones que se abordará en el siguiente capítulo es necesario mostrar los siguientes resultados.

Proposición 3.9.1. *$X_0^{p(\cdot)}(\Omega)$ es un subespacio cerrado de $X^{p(\cdot)}(\Omega)$.*

Demostración. Es claro que $X_0^{p(\cdot)}(\Omega) \subset \overline{X_0^{p(\cdot)}(\Omega)}$. Ahora, sea $u \in \overline{X_0^{p(\cdot)}(\Omega)}$. Entonces existe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $X_0^{p(\cdot)}(\Omega)$ tal que $u_n \to u$ en $X^{p(\cdot)}(\Omega)$, y por lo tanto, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{p(\cdot)}(\Omega)$ y $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in W_0^{1,p^-}(\Omega)$, como $u_n \to u$ en $X^{p(\cdot)}(\Omega)$ es claro que $u \in X^{p(\cdot)}(\Omega)$. Como $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión convergente en $W_0^{1,p^-}(\Omega)$ entonces u está en $W_0^{1,p^-}(\Omega)$ y se concluye que $u \in X_0^{p(\cdot)}(\Omega)$ y por lo tanto es un espacio cerrado. $\square$

Proposición 3.9.2. *$X_0^{p(\cdot)}(\Omega)$ es un espacio de Banach reflexivo.*

Demostración. Por los Teoremas 2.3.1 y 3.5.3 se tiene que $L^2(\Omega)$ y $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ son espacios de Banach reflexivos. Por lo tanto $X^{p(\cdot)}(\Omega)$ es un espacio de Banach reflexivo. Así, dado que $X_0^{p(\cdot)}(\Omega)$ es un subespacio cerrado de Banach, por la Proposición 3.9.1 y la Proposición 2.1.2, se sigue el resultado. $\square$

Proposición 3.9.3. *Si Ω es acotado y suave, entonces*

$$X^{p(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow X^{p^-}(\Omega).$$

Demostración. Ya que $p^- \leq p$ y gracias al Corolario 3.5.1 tenemos que $L^{p(\cdot)} \hookrightarrow L^{p^-}(\Omega)$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}||u||^2_{X^{p^-}} &= ||u||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla u||^2_{L^{p^-}(\Omega)} \\ &\leq ||u||^2_{L^2(\Omega)} + C^2||\nabla u||^2_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \\ &\leq \text{máx}(1, C^2)(||u||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla u||^2_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}) \\ &= C||u||^2_{X^{p(\cdot)}(\Omega)}.\end{aligned}$$

$\square$

Proposición 3.9.4. *Si Ω es acotado y suave, con $1 < p^- \leq p(\cdot) \leq p^+ \leq 2$, entonces*

$$X^{p^-}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,p^-}(\Omega).$$

Demostración. De las inmersiones clásicas de Lebesgue se tiene que $L^2(\Omega) \hookrightarrow L^{p^-}(\Omega)$ y por lo tanto

$$\begin{aligned}||u||_{W^{1,p^-}} &= ||u||_{L^{p^-}(\Omega)} + ||\nabla u||_{L^{p^-}(\Omega)} \\ &\leq C||u||_{L^2(\Omega)} + ||\nabla u||_{L^{p^-}(\Omega)} \\ &\leq \text{máx}(1, C)(||u||_{L^2(\Omega)} + ||\nabla u||_{L^{p^-}(\Omega)}) \\ &= C||u||_{X^{p^-}(\Omega)}.\end{aligned}$$

$\square$

Proposición 3.9.5. *Si Ω es acotado y suave, entonces*

$$W^{1,p^+}(\Omega) \cap L^2(\Omega) \hookrightarrow X^{p(\cdot)}(\Omega).$$

Demostración. Es conveniente recordar que para la intersección de conjuntos usamos la norma definida por $||\cdot||_{W^{1,p^+}(\Omega)\cap L^2(\Omega)} := \text{máx}\{||\cdot||_{W^{1,p^+}(\Omega)}, ||\cdot||_{L^2(\Omega)}\}$.

Aplicando el Corolario 3.5.1 con $p^+ \leq p$ se tiene que $L^{p^+}(\Omega) \hookrightarrow L^{p(\cdot)}(\Omega)$ y entonces

$$\begin{aligned}||u||^2_{X^{p(\cdot)}} &= ||u||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla u||^2_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \\ &\leq ||u||^2_{L^2(\Omega)} + C^2||\nabla u||^2_{L^{p^+}(\Omega)} \\ &\leq \text{máx}(1, C^2)(||u||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla u||^2_{L^{p^+}(\Omega)}) \\ &\leq C||u||^2_{W^{1,p^+}(\Omega)\cap L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

$\square$

Proposición 3.9.6. *Si Ω es acotado y suave, entonces*

$$X^{p^+}(\Omega) \hookrightarrow X^{p(\cdot)}(\Omega).$$

Demostración. Como $L^{p^+}(\Omega) \hookrightarrow L^{p(\cdot)}(\Omega)$ tenemos

$$\begin{aligned}||u||^2_{X^{p(\cdot)}} &= ||u||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla u||^2_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \\ &\leq ||u||^2_{L^2(\Omega)} + C^2||\nabla u||^2_{L^{p^+}(\Omega)} \\ &\leq \text{máx}(1, C^2)(||u||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla u||^2_{L^{p^+}(\Omega)}) \\ &= C||u||^2_{X^{p^+}(\Omega)}.\end{aligned}$$

□

Teorema 3.9.1. *Si Ω es acotado y suave, entonces*

$$W^{1,p^+}(\Omega) \cap L^2(\Omega) \hookrightarrow X^{p(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,p^-}(\Omega) \cap L^2(\Omega). \quad (3.11)$$

Demostración. Sea $\mu(\Omega) < \infty$, del Corolario 3.5.1 y gracias a que $p^- \leq p(\cdot) \leq p^+$ se tiene que $L^{p(\cdot)} \hookrightarrow L^{p^-}$ y $L^{p^+} \hookrightarrow L^{p(\cdot)}$. Empezaremos por mostrar que $X^{p(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,p^-}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$, es decir, verificaremos que $||u||_{W^{1,p^-}(\Omega) \cap L^2(\Omega)} \leq C||u||_{X^{p(\cdot)}(\Omega)}$ para $C > 0$, para la intersección tomaremos la norma del máximo entre la norma de cada conjunto y por lo tanto se tienen dos casos:

i) $||u||_{W^{1,p^-}(\Omega)} \leq C||u||_{X^{p(\cdot)}(\Omega)}$.

Gracias a la Proposición 3.9.4 se tiene que $X^{p^-}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,p^-}(\Omega)$, entonces existe $C > 0$ tal que

$$||u||_{W^{1,p^-}(\Omega)} \leq C||u||_{X^{p^-}(\Omega)}. \quad (3.12)$$

Por otro lado, de la Proposición 3.9.3 tenemos que $X^{p(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow X^{p^-}(\Omega)$ y entonces existe $C > 0$ tal que

$$||u||_{X^{p^-}(\Omega)} \leq C||u||_{X^{p(\cdot)}(\Omega)}. \quad (3.13)$$

Reemplazando (3.13) en (3.12) se sigue el resultado.

ii) $||u||_{L^2(\Omega)} \leq C||u||_{X^{p(\cdot)}(\Omega)}$.

Basta mostrar que $W^{1,p^-}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ lo cual es cierto por las clásicas inmersiones vistas en el Corolario 2.3.2 y se tiene

$$||u||_{L^2(\Omega)} \leq C||u||_{W^{1,p^-}(\Omega)} \quad (3.14)$$

para $C>0$, como $X^{p^-}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,p^-}(\Omega)$, es decir,

$$||u||_{W^{1,p^-}(\Omega)} \leq c||u||_{X^{p^-}(\Omega)}. \tag{3.15}$$

Reemplazamos (3.15) en (3.14) y se obtiene

$$||u||_{L^2(\Omega)} \leq C||u||_{X^{p^-}(\Omega)}, \tag{3.16}$$

usando que $X^{p(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow X^{p^-}(\Omega)$ en (3.16) se concluye el resultado.

Finalmente mostremos que $W^{1,p^+}(\Omega) \cap L^2(\Omega) \hookrightarrow X^{p(\cdot)}(\Omega)$, por lo que debemos mostrar que $||u||_{X^{p(\cdot)}(\Omega)} \leq C||u||_{W^{1,p+}(\Omega)\cap L^2(\Omega)}$. Como $W^{1,p^+}(\Omega) \cap L^2(\Omega) \hookrightarrow X^{p^+}(\Omega)$, gracias a la Proposición 3.9.5 se tiene

$$||u||_{X^{p^+}(\Omega)} \leq C||u||_{W^{1,p^+}(\Omega)\cap L^2(\Omega)}, \tag{3.17}$$

para $C>0$. Por otro lado, $X^{p^+}(\Omega) \hookrightarrow X^{p(\cdot)}(\Omega)$ y con esto

$$||u||_{X^{p(\cdot)}(\Omega)} \leq C||u||_{X^{p^+}(\Omega)} \tag{3.18}$$

para $C>0$. Reemplazando (3.18) en (3.17), se concluye que

$$||u||_{X^{p(\cdot)}(\Omega)} \leq C||u||_{W^{1,p+}(\Omega)\cap L^2(\Omega)}.$$

$\square$

Capítulo 4

Planteamiento del problema y su aplicación al filtrado de ruido en imágenes

El presente capítulo es el objetivo final de este trabajo. Aquí, se prueba que existe solución para el problema (4.1) y se muestra que esta es única. Este estudio está basado en la Proposición 3.4.1, la cual juega un papel fundamental al establecer las estimas de energía necesarias.

Resulta también importante entender la relación que existe entre el problema (4.1) y la eliminación de ruido en imágenes. Por este motivo, se presenta una breve exposición de las principales formas de tratar este tipo de aplicaciones haciendo uso de funcionales que involucran exponentes variables para posteriormente mostrar el trabajo futuro que se puede realizar en base a las ideas de [5].

4.1. Análisis de existencia y unicidad de soluciones en $L^2(\Omega)$

En esta sección, se prueba que existe solución para el problema (4.1) y se muestra que esta es única en $L^2(\Omega)$. Con este fin, se usan varias de las ideas descritas en [1] y de la sección de Espacios de Amalgama, presentada anteriormente. El espacio $X_0^{p(\cdot)}$ será fundamental, pues nos permitirá definir una representación del operador diferencial en forma variacional adecuada para aplicar el método directo del cálculo de variaciones.

Nos enfocamos en el estudio del problema:

$$\min_{u \in L^2(\Omega)} J(u) := \int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx + \frac{\lambda}{2} \int_\Omega |u - f|^2 dx, \tag{4.1}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un subconjunto abierto, acotado y suave, $\lambda \geq 0$, $p : \Omega \to [1, \infty)$ es una función medible tal que $1 < p^- < p(x) < p^+ \leq 2$ y $f \in L^2(\Omega)$.

Teorema 4.1.1. *Sea $1 < p^- < p(x) < p^+ \leq 2$. Entonces el problema (4.1) tiene solución única $\bar{u} \in L^2(\Omega)$.*

Demostración. Se define $\phi : L^2(\Omega) \to [0, \infty]$ como

$$\phi(w) = \begin{cases} \int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\nabla w(x)|^{p(x)} dx, & \text{si } w \in X_0^{p(\cdot)}(\Omega), \\ +\infty, & \text{caso contrario .} \end{cases} \tag{4.2}$$

Note que el funcional $J(\cdot)$ se puede reescribir de la siguiente manera

$$J(u) = \phi(u) + \frac{\lambda}{2} ||u - f||^2_{L^2(\Omega)}. \tag{4.3}$$

Para demostrar la existencia y unicidad de soluciones se procederá usando el método directo del cálculo de variaciones. Para esto, debemos mostrar que J está acotado inferiormente y que es semicontinuo inferior. En efecto, se tiene que

i) $J(\cdot)$ está acotado inferiormente pues gracias a la Proposición 3.4.1

$$J(u) \geq \frac{1}{p^+} \sigma^-(||\nabla u_n||_{p(\cdot)}) + \frac{\lambda}{2} ||u - f||^2_{L^2(\Omega)} \geq 0.$$

Podemos concluir, entonces, que existe $\hat{u} \in L^2(\Omega)$ tal que

$$\hat{u} = \inf_{u \in L^2(\Omega)} J(u).$$

ii) $J(\cdot)$ es débilmente semicontinua inferior. Primero, notemos que $|| \cdot - f||^2_{L^2(\Omega)}$ es convexa y continua en $L^2(\Omega)$, y, por lo tanto, débilmente semicontinua inferior (w.l.s.c) (Definición 2.4.1).

Por otro lado, verificaremos que para todo $\eta \in \mathbb{R}$, el epígrafo de ϕ,

$$[\phi \leq \eta] = \{u \in L^2(\Omega) : \phi(u) \leq \eta\}, \tag{4.4}$$

es cerrado en $L^2(\Omega)$, lo que garantiza que ϕ es semicontinua inferior en $L^2(\Omega)$ (Definición 2.4.2).

Sea $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $[\phi \leq \eta]$ tal que $w_n \to w$ en $L^2(\Omega)$. Se debe mostrar que $w \in [\phi \leq \eta]$. Usando la Proposición 3.4.1, se tiene

$$\frac{1}{p^+} \sigma^-(||\nabla w_n||_{p(\cdot)}) \leq \frac{1}{p^+} \int_\Omega |\nabla w_n(x)|^{p(x)} dx \leq \phi(w_n) \leq \eta \tag{4.5}$$

para todo $\eta \in \mathbb{R}$. Ahora, dada la definición de σ^-, se considerarán dos casos:

a) $\sigma^-(||\nabla w_n||_{p(\cdot)}) = ||\nabla w_n||_{p(\cdot)}^{p^+}$. Así, (4.5) se escribe como

$$\frac{1}{p^+}||\nabla w_n||_{p(\cdot)}^{p^+} = \frac{1}{p^+}\sigma^-(||\nabla w_n||_{p(\cdot)}) \leq \eta,$$

y dado que $1 < p^- \leq p^+ \leq 2$, se concluye que

$$||\nabla w_n||_{p(\cdot)} \leq (\eta p^+)^{1/p^+}.$$

Tomemos $\beta^+ = (\eta p^+)^{1/p^+}$. Es claro, que $\beta^+ > 0$ y no depende de n, por lo que $||\nabla w_n||_{p(\cdot)}$ es acotado.

b) $\sigma^-(||\nabla w_n||_{p(\cdot)}) = ||\nabla w_n||_{p(\cdot)}^{p^-}$. Para este caso, se procede de manera similar al literal anterior y se obtiene que

$$||\nabla w_n||_{p(\cdot)} \leq (\eta p^+)^{1/p^-},$$

con $\beta^- = (\eta p^+)^{1/p^-} > 0$, que no depende de n.

Puesto que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión convergente en $L^2(\Omega)$ entonces es acotada en $L^2(\Omega)$. De a) y b), y tomando $\beta := \max\{\beta^+, \beta^-\}$, se tiene que $(\nabla w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada en $L^{p(\cdot)}$ y por lo tanto $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada en $X^{p(\cdot)}(\Omega)$, es decir, existe $\kappa > 0$, independiente de n, tal que

$$||w_n||_{X^{p(\cdot)}(\Omega)}^2 = ||w_n||_2^2 + ||\nabla w_n||_{p(\cdot)}^2 \leq \kappa.$$

Por el Teorema 3.9.1 se tiene que

$$||w_n||_{W^{1,p^-}(\Omega)\cap L^2(\Omega)} \leq c||w_n||_{X^{p(\cdot)}},$$

y ya que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada en $X^{p(\cdot)}(\Omega)$, tenemos que

$$||w_n||_{W^{1,p^-}(\Omega)\cap L^2(\Omega)} \leq c||w_n||_{X^{p(\cdot)}} \leq c\kappa := \gamma, \quad \text{con} \quad \gamma > 0.$$

De la desigualdad anterior se tiene que

$$\max\{||w_n||_{W^{1,p^-}(\Omega)}, ||w_n||_{L^2(\Omega)}\} = ||w_n||_{W^{1,p^-}(\Omega)\cap L^2(\Omega)} \leq \gamma,$$

de donde se sigue que

$$||w_n||_{W^{1,p^-}(\Omega)} \leq \gamma \quad \text{y} \quad ||w_n||_{L^2(\Omega)} \leq \gamma.$$

De la definición de p^- y el Ejemplo 3.1.1, podemos tratar al espacio $W_0^{1,p^-}(\Omega)$ como un espacio de Sobolev clásico y dotarlo de la norma inducida por $W^{1,p^-}(\Omega)$, es decir, $||w||_{W^{1,p^-}(\Omega)} := ||\nabla w||_{L^{p^-}(\Omega)}$, esto, junto con $||w_n||_{W^{1,p^-}(\Omega)} \leq \gamma$, nos permite concluir que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada en $W_0^{1,p^-}(\Omega)$. Dado que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada en $X^{p(\cdot)}(\Omega)$ y en $W_0^{1,p^-}(\Omega)$, se concluye que es acotada en $X_0^{p(\cdot)}(\Omega)$.

Gracias a la Proposición 3.9.2 y al Teorema 2.1.1 (Teorema de Banach-Eberlien-Šmulian) podemos extraer una subsucesión de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, notada de la misma forma, tal que

$$w_n \rightharpoonup w \quad \text{en} \quad X_0^{p(\cdot)}(\Omega) \quad \text{cuando} \quad n \to \infty.$$

Ya que $X_0^{p(\cdot)}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$, se define $\hat{\phi} : X_0^{p(\cdot)}(\Omega) \to [0, \infty]$, la función restricción de ϕ al espacio $X_0^{p(\cdot)}(\Omega)$. Se tiene entonces que $\hat{\phi}$ es continua y convexa en $X_0^{p(\cdot)}(\Omega)$, y por lo tanto $\hat{\phi}$ es débilmente semicontinua inferior en $X_0^{p(\cdot)}(\Omega)$. Así

$$\liminf_{n\to\infty} \hat{\phi}(w_n) \geq \hat{\phi}(w).$$

Como $\hat{\phi}(w) = \phi(w)$ para cada $w \in X_0^{p(\cdot)}(\Omega)$, se tiene que

$$\phi(w) = \hat{\phi}(w) \leq \liminf_{n\to\infty} \hat{\phi}(w_n). \tag{4.6}$$

Por hipótesis, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está en $[\phi \leq \eta]$, es decir, $\phi(w_n) \leq \eta$ y puesto que $\hat{\phi}(w_n) = \phi(w_n)$ para cada $w \in X_0^{p(\cdot)}(\Omega)$, se sigue que $\hat{\phi}(w_n) = \phi(w_n) \leq \eta$. Este hecho, junto con (4.6) nos permite concluir que

$$w \in [\phi \leq \eta],$$

lo que implica que el conjunto $[\phi \leq \eta]$ es cerrado en $L^2(\Omega)$ y así, ϕ es semicontinua inferior (l.s.c) en $L^2(\Omega)$.

Ya que ϕ es l.s.c y convexa entonces es w.l.s.c, además, $|| \cdot - f||^2_{L^2(\Omega)}$ es w.l.s.c entonces J es débilmente semicontinua inferior.

Finalmente, sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión minimizante en $L^2(\Omega)$, es decir, tal que

$$J(u_n) \to \hat{u} = \inf_{u\in L^2(\Omega)} J(u) \quad \text{cuando} \quad n \to \infty.$$

Veamos que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada en $L^2(\Omega)$. En efecto, si no lo estuviera para n suficientemente grande

$$||u_n||_{L^2(\Omega)} > M$$

para cualquier $M > 0$.

Por otro lado, $J(u_n)$ es acotada pues es convergente. Luego,

$$\begin{aligned} J(u_n) &\geq \frac{1}{p^+}\sigma^-(||\nabla u_n||_{p(\cdot)}) + \frac{\lambda}{2}||u_n - f||^2_{L^2(\Omega)} \\ &\geq \frac{1}{p^+}\sigma^-(||\nabla u_n||_{p(\cdot)}) + \frac{\lambda}{2}||u_n||_{L^2(\Omega)} - \frac{\lambda}{2}||f||_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

tomando el límite cuando $||u_n||_{L^2(\Omega)} \to \infty$, se tiene que

$$\lim_{||u_n||_{L^2(\Omega)}\to\infty} J(u_n) = +\infty,$$

lo que contradice que $J(u_n)$ está acotada.

Gracias al Teorema 2.1.1 se puede extraer una subsucesión débilmente convergente en $L^2(\Omega)$ tal que

$$u_n \rightharpoonup \bar{u} \quad \text{cuando} \quad n \to \infty.$$

Ya que J es débilmente semicontinua inferior, se tiene

$$\hat{u} = \lim_{n\to\infty} J(u_n) = \liminf_{n\to\infty} J(u_n) \geq J(\bar{u}) \geq \hat{u}$$

es decir, $J(\bar{u}) = \hat{u}$, de donde se concluye que $\bar{u}$ minimiza a J.

Así, como ϕ es convexa y $u \to ||u - f||^2_{L^2(\Omega)}$ es estrictamente convexa, entonces J es estrictamente convexa y el mínimo es único. □

4.2. Análisis de existencia y unicidad de soluciones en $X_0^{p(\cdot)}(\Omega)$

De manera análoga al resultado presentado en la sección anterior, podemos encontrar solución única para el problema (4.7) en $X_0^{p(\cdot)}(\Omega)$.

En esta sección nos enfocamos en el estudio del problema:

$$\min_{u\in X_0^{p(\cdot)}(\Omega)} J(u) := \int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx + \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |u-f|^2 dx, \tag{4.7}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un subconjunto abierto, acotado y suave, $\lambda \geq 0$, $p : \Omega \to [1, \infty)$ es una función medible tal que $1 < p^- < p(x) < p^+ \leq 2$ y $f \in L^2(\Omega)$.

Teorema 4.2.1. *Sea $1 < p^- < p(x) < p^+ \leq 2$. Entonces el problema (4.7) tiene solución única $\bar{u} \in X_0^{p(\cdot)}(\Omega)$.*

Demostración. Se procederá usando el método directo del cálculo de variaciones. Para esto, debemos mostrar que J está acotado inferiormente y que es débilmente semicontinuo inferior (w.l.s.c) en $X_0^{p(\cdot)}(\Omega)$.

i) $J(\cdot)$ está acotado inferiormente. En efecto, gracias a la Proposición 3.4.1, se tiene que
$$J(u) \geq \frac{1}{p^+}\sigma^-(||\nabla u_n||_{p(\cdot)}) + \frac{\lambda}{2}||u-f||^2_{L^2(\Omega)} \geq 0.$$
Podemos concluir, entonces, que existe $\hat{u} \in X_0^{p(\cdot)}(\Omega)$ tal que
$$\hat{u} = \inf_{u \in X_0^{p(\cdot)}(\Omega)} J(u).$$

ii) $J(\cdot)$ es débilmente semicontinuo inferior. Para ello, escribimos el funcional en (4.7) como la suma de dos componentes $\phi : X_0^{p(\cdot)}(\Omega) \to \mathbb{R}$ y $G : X_0^{p(\cdot)}(\Omega) \to \mathbb{R}$, dados por:
$$\phi(u) := \int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u(x)|^{p(x)}dx \quad \text{y} \quad G(u) := \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |u-f|^2 dx.$$

a) Verificamos que $\phi(u) := \int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u(x)|^{p(x)}dx$ es continuo en $X_0^{p(\cdot)}(\Omega)$.
Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X_0^{p(\cdot)}(\Omega)$, tal que $u_n \to u$ con $u \in X_0^{p(\cdot)}(\Omega)$, queremos mostrar que $\phi(u_n) \to \phi(u)$.
Como $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente en $X_0^{p(\cdot)}(\Omega)$ se tiene que
$$\begin{aligned} u_n \to u \quad &\text{en} \quad L^2(\Omega) \quad \text{y} \\ \nabla u_n \to \nabla u \quad &\text{en} \quad L^{p(\cdot)}(\Omega). \end{aligned}$$
Por otro lado,
$$\left|\frac{1}{p(x)}|\nabla u_n(x)|^{p(x)}\right| \leq \frac{1}{p^-}|\nabla u_n(x)|^{p(x)},$$
y dado que $\{\nabla u_n\} \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ entonces $\frac{1}{p^-}|\nabla u_n(x)|^{p(x)} \in L^1(\Omega)$, aplicando el Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue se sigue que
$$\phi(u_n) = \int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u_n(x)|^{p(x)}dx \to \int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u(x)|^{p(x)}dx = \phi(u).$$

b) Verificamos que ϕ es estrictamente convexo en $X_0^{p(\cdot)}(\Omega)$.
Sean $u, v \in X_0^{p(\cdot)}(\Omega)$ y $\alpha \in (0,1)$ y usando la convexidad de $u \to u^{p(x)}$ para

$1 < p^- < p(x) < p^+ \leq 2$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\phi(\alpha u + (1-\alpha)v) &= \int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\nabla(\alpha u + (1-\alpha)v)(x)|^{p(x)} dx \\
&= \int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\alpha \nabla u(x) + (1-\alpha)\nabla v(x)|^{p(x)} dx \\
&\leq \alpha \int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\nabla u(x)|^{p(x)} dx + (1-\alpha) \int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\nabla v(x)|^{p(x)} dx \\
&= \alpha \phi(u) + (1-\alpha)\phi(v).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, ϕ es convexa y continua en $X_0^{p(\cdot)}(\Omega)$, y del Teorema 2.4.1 se sigue que ϕ es débilmente semicontinua inferior .

Por otro lado, nótese que G se puede escribir como $G(u) := \frac{\lambda}{2}||u-f||^2_{L^2(\Omega)}$.

a) Verificamos que $G(u) := \frac{\lambda}{2}||u-f||^2_{L^2(\Omega)}$ es continuo en $X_0^{p(\cdot)}(\Omega)$.
Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X_0^{p(\cdot)}(\Omega)$, tal que $u_n \to u$ con $u \in X_0^{p(\cdot)}(\Omega)$, queremos mostrar que $G(u_n) \to G(u)$.
Como $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente en $X_0^{p(\cdot)}(\Omega)$ se tiene que

$$\begin{aligned}
u_n \to u \quad &\text{en} \quad L^2(\Omega) \quad \text{y} \\
\nabla u_n \to \nabla u \quad &\text{en} \quad L^{p(\cdot)}(\Omega),
\end{aligned}$$

lo que implica, directamente, que

$$G(u_n) = \frac{\lambda}{2}||u_n - f||^2_{L^2(\Omega)} \to \frac{\lambda}{2}||u-f||^2_{L^2(\Omega)} = G(u).$$

b) Verificamos que G es estrictamente convexo en $X_0^{p(\cdot)}(\Omega)$.
Sean $u, v \in X_0^{p(\cdot)}(\Omega)$ y $\alpha \in (0,1)$ y usando la convexidad estricta de $u \to u^2$

$$\begin{aligned}
G(\alpha u + (1-\alpha)v) &= \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |\alpha u + (1-\alpha)v - f|^2 dx \\
&= \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |\alpha u + (1-\alpha)v - \alpha f - (1-\alpha)f|^2 dx \\
&= \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |\alpha(u-f) + (1-\alpha)(v-f)|^2 dx \\
&< \frac{\lambda}{2}\int_\Omega (\alpha|u-f|^2 + (1-\alpha)|v-f|^2) dx \\
&= \alpha\frac{\lambda}{2}\int_\Omega |u-f|^2 dx + (1-\alpha)\frac{\lambda}{2}\int_\Omega |v-f|^2 dx \\
&= \alpha G(u) + (1-\alpha)G(v).
\end{aligned}$$

De a) y b) se tiene que G es continua y convexa en $X_0^{p(\cdot)}(\Omega)$. Nuevamente, del Teorema 2.4.1 se sigue que G es débilmente semicontinua inferior en $X_0^{p(\cdot)}(\Omega)$.

Ya que ϕ y G son w.l.s.c entonces J es débilmente semicontinua inferior en $X_0^{p(\cdot)}(\Omega)$.

Finalmente, sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión minimizante en $X_0^{p(\cdot)}(\Omega)$, es decir, tal que

$$J(u_n) \to \hat{u} = \inf_{u\in X_0^{p(\cdot)}(\Omega)} J(u) \quad \text{cuando} \quad n\to\infty.$$

Probemos que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada en $X_0^{p(\cdot)}(\Omega)$. Nótese que la Proposición 3.4.1 y la desigualdad triangular inversa, implican que

$$\begin{aligned} J(u_n) &\geq \frac{1}{p^+}\sigma^-(||\nabla u_n||_{p(\cdot)}) + \frac{\lambda}{2}||u_n - f||^2_{L^2(\Omega)} \\ &\geq \frac{1}{p^+}\sigma^-(||\nabla u_n||_{p(\cdot)}) + \frac{\lambda}{2}||u_n||_{L^2(\Omega)} - \frac{\lambda}{2}||f||_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Por otro lado, nótese que la norma $||u||_{X_0^{p(\cdot)}(\Omega)} = (||u||_2^2 + ||\nabla u||^2_{p(\cdot)})^{1/2}$. Por tanto, si $||u||_{X_0^{p(\cdot)}(\Omega)} \to +\infty$, se sigue que $||u||^2_{L^2(\Omega)} \to +\infty$ o $||\nabla u_n||^2_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \to +\infty$. Así, si $||u_n||_{X_0^{p(\cdot)}(\Omega)} \to +\infty$, de (4.8) se sigue que $J(u_n) \to +\infty$, lo que implica que

$$\lim_{||u_n||_{X_0^{p(\cdot)}(\Omega)}\to\infty} J(u_n) = +\infty.$$

Concluimos que J es coerciva lo que, gracias a [9], implica que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ debe ser acotada.

Gracias al Teorema 2.1.1 se puede extraer una subsucesión débilmente convergente en $X_0^{p(\cdot)}(\Omega)$ tal que

$$u_n \rightharpoonup \bar{u} \quad \text{cuando} \quad n\to\infty.$$

Ya que J es débilmente semicontinua inferior, se tiene

$$\hat{u} = \lim_{n\to\infty} J(u_n) = \liminf_{n\to\infty} J(u_n) \geq J(\bar{u}) \geq \hat{u}$$

es decir, $J(\bar{u}) = \hat{u}$, de donde se concluye que $\bar{u}$ minimiza a J.

Más aún, como ϕ es convexa y G es estrictamente convexa, entonces J es estrictamente convexa y el mínimo es único. □

Una de las propiedades que podemos asumir sobre el exponente $p(\cdot)$ es la log-Hölder continuidad, con la cual, el análisis realizado sobre la existencia y unicidad de soluciones en el Teorema 4.2.1 se lo traslada a los espacios $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)\cap L^2(\Omega)$ y $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)\cap L^2(\Omega)$ mismos que siguiendo las ideas de [1] y gracias al Corolario 8.2.6 de [12] coinciden con $X^{p(\cdot)}(\Omega)$ y $X_0^{p(\cdot)}(\Omega)$, respectivamente.

Así, la propiedad de log-Hölder continuidad en (4.7), nos permite, generar otro posible camino de abordar el problema. Es por ello que resulta interesante presentar un bosquejo de la demostración de la siguiente proposición.

Proposición 4.2.1. *Sea Ω un conjunto suave y acotado. Si $p(\cdot)$ es log-Hölder continuo entonces $W^{1,p(\cdot)}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ y $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ coinciden con $X^{p(\cdot)}(\Omega)$ y $X_0^{p(\cdot)}(\Omega)$, respectivamente.*

Demostración. i) $X^{p(\cdot)}(\Omega) = W^{1,p(\cdot)}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$.

De la definición de $X^{p(\cdot)}(\Omega)$ es claro que

$$W^{1,p(\cdot)}(\Omega) \cap L^2(\Omega) \subset X^{p(\cdot)}(\Omega).$$

Por otro lado, sea $u \in X^{p(\cdot)}(\Omega)$, es decir, $u \in L^2(\Omega)$ tal que $\nabla u \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$. Usando el Corolario 8.2.6 de [12], existe una constante $C > 0$ tal que

$$||u - \langle u \rangle_\Omega||_{p(\cdot)} \leq C||\nabla u||_{p(\cdot)} \quad \text{para} \quad u \in L^1_{loc}(\Omega) \quad \text{con} \quad |\nabla u| \in L^{p(\cdot)}(\Omega).$$

Entonces se sigue

$$X^{p(\cdot)}(\Omega) \subset W^{1,p(\cdot)}(\Omega) \cap L^2(\Omega).$$

ii) $X_0^{p(\cdot)}(\Omega) = W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$.

Del Teorema 11.2.7 en [12] tenemos

$$W_0^{1,p^-}(\Omega) \cap W^{1,p(\cdot)}(\Omega) \subset W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega).$$

La inclusión

$$W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega) \subset W_0^{1,p^-}(\Omega) \cap W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$$

se sigue de la definición de estos espacios. Por lo tanto tenemos la igualdad

$$W_0^{1,p^-}(\Omega) \cap W^{1,p(\cdot)}(\Omega) = W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega). \tag{4.9}$$

Así, gracias al literal i) y a (4.9), se tiene

$$\begin{aligned} X_0^{p(\cdot)}(\Omega) &= X^{p(\cdot)}(\Omega) \cap W_0^{1,p^-}(\Omega) \\ &= W^{1,p(\cdot)}(\Omega) \cap L^2(\Omega) \cap W_0^{1,p^-}(\Omega) \\ &= W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega) \cap L^2(\Omega). \end{aligned}$$

□

Observación 4.2.1. *En resumen, de la proposición anterior podemos resaltar la importancia de la hipótesis de log-Hölder continuidad, ya que gracias a ella, tenemos que* $X_0^{p(\cdot)}(\Omega) = W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ *y , por lo tanto, al considerar esta propiedad para el exponente* $p(\cdot)$ *en el Teorema 4.2.1 se obtiene la existencia y unicidad de soluciones en* $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$.

4.3. Imágenes

El procesamiento digital de imágenes es un conjunto de técnicas cuyo objetivo fundamental es obtener, a partir de la imagen original, otra final de mejor calidad o facilitar la búsqueda de información.

Uno de estos procesos es conocido como *proceso de filtrado de ruido* y dentro de sus objetivos están:

- *Suavizar la imagen*, lo que consiste en reducir la cantidad de variaciones de intensidad entre píxeles vecinos.
- *Eliminar ruido*, lo que permite eliminar aquellos píxeles cuyo nivel de intensidad es muy diferente al de sus vecinos y cuyo origen puede estar tanto en el proceso de adquisición de la imagen como en el de transmisión.
- *Realzar y detectar bordes*, buscamos detectar los píxeles donde se produce un cambio brusco en la función intensidad.

Por tanto, se consideran los filtros como operaciones que se aplican a los píxeles de una imagen digital para optimizarla, enfatizar cierta información o conseguir un efecto especial en ella. El impacto de esta disciplina ha sido enorme y afecta a áreas tales como: medicina, telecomunicaciones, procesos industriales, entretenimiento, entre otras.

Los modelos de restauración de imágenes en espacios de Lebesgue con exponente fijo han sido ampliamente estudiados y los aspectos más importantes son los siguientes:

Cuando $p = 1$, el problema (1.2) es conocido como *Total Variation Problem* o *TV-problem*, varios trabajos como [7] y [4] muestran que se obtienen excelentes resultados en la preservación de bordes al momento de reconstruir las imágenes.

En este contexto, aparece la idea de *difusión*, una técnica, cuyo objetivo es reducir el ruido de la imagen sin eliminar partes relevantes del contenido de la misma, tales como bordes, líneas u otros detalles que son importantes para su interpretación.

Cuando se considera $p = 2$ se tiene una difusión isotrópica la cual resuelve el problema de escalamiento o *staircasing* que tiende a generar efectos de escalera en regiones planas y un efecto de zigzag en los bordes, lo que reduce significativamente la similitud estructural.

Por otro lado, para los diferentes valores $1 < p < 2$ se tiene una difusión anisotrópica que puede ser efectiva en la reconstrución de regiones lisas por partes y esta se asemeja al proceso donde una imagen genera una familia parametrizada de imágenes sucesivamente más y más borrosas basadas en un proceso de difusión, pero cada imagen resultante es una combinación entre la imagen original y un filtro que depende del contenido local de la imagen original.

Dadas las fortalezas para los diferentes valores del exponente p, es natural seguir una idea similar para que el problema (4.1) se adapte a la reconstrucción de imágenes.

En este contexto, se propone un modelo para restauración de imágenes que busca recuperar una imagen u, de una imagen con ruido f que ya ha sido observada; ambas imágenes están relacionas por $f = u + ruido$.

Así, el problema de minimización propuesto está dado por:

$$\min_u J(u) := \int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx + \frac{\lambda}{2} \int_\Omega |u - f|^2 dx \tag{4.10}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un subconjunto abierto, acotado y suave, $\lambda \geq 0$, $p : \Omega \to [1, \infty)$ es una función medible tal que $1 < p^- < p(x) < p^+ \leq 2$ y $f \in L^2(\Omega)$.

Los funcionales con exponente variable $1 < p(x) \leq 2$, donde $p = p(x)$ dependen de la ubicación, x, en la imágen. De esta manera, la dirección y la velocidad de difusión en cada ubicación dependen del comportamiento local.

El parámetro λ es un peso que controla directamente la importancia del término de fidelidad en el funcional y varios trabajos como: [19], [20], [16] y [11] muestran que la elección adecuada del mismo mejora los experimentos numéricos que se realizan en el reconocimiento de bordes en la imagen y su valor está asociado con la mejor solución encontrada.

Dentro de este contexto, la elección adecuada del exponente, es parte fundamental en el análisis de ciertos efectos como el staircasing, pues su estudio dependerá de la forma de $p(\cdot)$. En algunos casos, como se menciona en [5], se considera regularizar el exponente con un término que dependa de la imagen u o de los datos f, además de introducir un kernel gaussiano.

Tratar numéricamente este problema, junto con el análisis sobre el exponente es un trabajo necesario que hace parte de la investigación futura.

Conclusiones y Trabajo futuro

Conclusiones

1. Los espacios de Lebesgue y Sobolev con exponente variable son una generalización de los espacios de Lebesgue y Sobolev con exponente constante.

2. Los espacios de Lebesgue y Sobolev con exponente variable tienen propiedades similares a los espacios de Lebesgue y Sobolev con exponente constante.

3. Gracias al Teorema 4.1.1, es posible demostrar la existencia y unicidad de soluciones del problema (4.1) en $L^2(\Omega)$.

4. Definir ϕ como en (4.2) nos permite mostrar la semicontinuidad débil de una componente con exponente variable en un espacio con exponente fijo, en este caso, $L^2(\Omega)$.

5. Gracias al Teorema 4.2.1, es posible demostrar la existencia y unicidad de soluciones del problema (4.7) en $X_0^{p(\cdot)}(\Omega)$.

Trabajo futuro

El trabajo futuro se centra en resolver numéricamente el problema (4.10) siguiendo un trabajo análogo al realizado en [14] y [5], además de considerar:

a) Plantear condiciones sobre los exponentes $p(\cdot)$ para mejorar los resultados que se obtengan.

b) Definir algún tipo de diferenciabilidad sobre los espacios de exponente variable.

Bibliografía

[1] G. Akagi and K. Matsuura. Nonlinear diffusion equations driven by the p(·)-laplacian. *Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA*, 20:37–64, 2012.

[2] M. Allaoui, A. E. Amrouss, and A. Ourraoui. Existence and uniqueness of solution for p(x)-laplacian problems. *Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática*, 33(1):225–232, 2014.

[3] R. G. Bartle. *Elements of Integration*. John Wiley & Sons, 1995.

[4] P. Blomgren, T. Chan, P. Mulet, and C. Wong. Total variation image restoration: numerical methods and extensions. In *Proceedings of International Conference on Image Processing*. IEEE Comput. Soc.

[5] E. M. Bollt, R. Chartrand, S. Esedoḡlu, P. Schultz, and K. R. Vixie. Graduated adaptive image denoising: local compromise between total variation and isotropic diffusion. *Advances in Computational Mathematics*, 31(1-3):61–85, jul 2008.

[6] H. Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer New York, 2010.

[7] A. Chambolle and P.-L. Lions. Image recovery via total variation minimization and related problems. *Numerische Mathematik*, 76(2):167–188, apr 1997.

[8] E. Cordero and F. Nicola. Pseudodifferential operators on L^p, Wiener amalgam and modulation spaces. *International Mathematics Research Notices, 2010(10):1860–1893, 2010.*

[9] B. Dacorogna. *Introduction to the Calculus of Variations*. Imperial College PR, 2004.

[10] B. Dacorogna. *Direct Methods in the Calculus of Variations*. Springer Nature, 2007.

[11] M. D'Elia, J. C. D. los Reyes, and A. M. Trujillo. Bilevel parameter optimization for nonlocal image denoising models. 2019. http://arxiv.org/abs/1912.02347v3.

[12] L. Diening, P. Harjulehto, P. Hästö, and M. Ruzicka. *Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents*. Springer Berlin Heidelberg, 2011.

[13] L. C. Evans. *Partial Differential Equations (Graduate Studies in Mathematics, Vol. 19)*. Amer Mathematical Society, 1998.

[14] S. González-Andrade. A preconditioned descent algorithm for variational inequalities of the second kind involving the p-laplacian operator. *Computational Optimization and Applications*, 66(1):123–162, jul 2016.

[15] P. Iliaş. Dirichlet problem with p(x)-laplacian. *Mathematical Reports (Bucureşti)*, 1:43–56, 2008.

[16] J. C. D. L. Reyes, C.-B. Schönlieb, and T. Valkonen. The structure of optimal parameters for image restoration problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 434(1):464–500, feb 2016.

[17] W. Rudin. *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw-Hill Education - Europe, 1976.

[18] F. Tröltzsch. *Optimal Control of Partial Differential Equations Theory, Methods and Applications*. American Mathematical Society Providence, Rhode Island, 2005.

[19] W. Wang, S. Kong, A. Razi, and X. Feng. Image regularity and fidelity measure with a two-modality potential function. *Mathematical Problems in Engineering*, 2017:1–14, 2017.

[20] W. Zhang, Y. Cao, R. Zhang, L. Li, and Y. Wen. Image denoising via l_0 gradient minimization with effective fidelity term. *Mathematical Problems in Engineering*, 2015:1–11, 2015.