

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS

EL FORMALISMO DE LA MÉTRICA DE JACOBI EN LA
DINÁMICA DE AGUJEROS DE GUSANO CARGADOS:
CURVATURA GAUSSIANA Y TRAYECTORIAS ELÍPTICAS

TRABAJO PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE FÍSICO

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

DIEGO SEBASTIÁN DOMÍNGUEZ GAVILANES

diego.dominguez@epn.edu.ec

DIRECTOR: OSCAR LASSO ANDINO, PH.D

oscar.lasso@udla.edu.ec

CODIRECTOR: CHRISTIAN LEONARDO VÁSCONEZ VEGA, PH.D

christian.vasconez@epn.edu.ec

Quito, noviembre de 2020

Abstract

This work revisits the derivation of the trajectories of a particle in a Morris-Thorne type charged wormhole space-time. In contrast to the conventional approach, where the trajectory of the particle is calculated via the geodesics equation, we use a restricted form of the Hamilton-Jacobi variational principle, namely the Jacobi-Maupertuis principle. Such formulation allows us to calculate the equations of motion reducing the complexity of the problem. In addition, the calculations show that the Gaussian curvature of the relativistic Jacobi metric, is negative at the throat, allowing for an alternative characterization of a wormhole space-time. Interestingly, in the non-relativistic approximation, the Gaussian curvature is useful to study the Kepler problem, since the algebraic sign of the Gaussian curvature makes possible a natural classification of orbits as hyperbolic, parabolic or elliptic. Even though this process reduces the n -dimensional manifold problem to finding an $(n - 1)$ -dimensional geodesic, the Jacobi metric has enough information to derive the whole dynamics of the system.

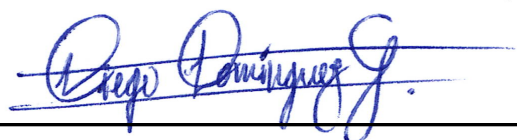
Resumen

Este trabajo revisa la deducción de las ecuaciones de las trayectorias de una partícula en un espacio tiempo de agujero de gusano con carga del tipo Morris-Thorne. En contraste al acercamiento convencional, donde las trayectorias de la partículas son calculadas a través de la ecuación de las geodésicas, usamos una forma restringida del principio variacional de Hamilton-Jacobi conocida como el principio de Jacobi-Maupertuis. Esta formulación nos permite calcular las ecuaciones de movimiento evitando muchas de las complicaciones que aparecen en la deducción clásica. Además, los cálculos muestran que la curvatura Gaussiana de la métrica de Jacobi relativista, es negativa en la garganta, permitiendo una caracterización alternativa de un espacio-tiempo de agujero de gusano. De manera interesante, en la aproximación no relativista, la curvatura Gaussiana hace posible una clasificación natural de las órbitas como hiperbólicas, parabólicas o elípticas. A pesar que este proceso reduce el problema sobre la variedad n -dimensional a encontrar una geodésica $(n - 1)$ -dimensional, la métrica de Jacobi contiene suficiente información para deducir la dinámica completa del sistema.

Declaración de Autoría

Yo, Diego Sebastián Domínguez Gavilanes, declaro bajo juramento que el trabajo aquí escrito es de mi autoría, que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional y que he consultado todas las referencias bibliográficas citadas en este documento.

A través de la presente declaración cedo mis derechos de propiedad intelectual, correspondientes a este trabajo, a la Escuela Politécnica Nacional según lo establecido por la Ley de Propiedad Intelectual, por su reglamento y normativa institucional vigente.



Diego Sebastián Domínguez Gavilanes

Certificación

Certificamos que el presente trabajo fue desarrollado por DIEGO SEBASTIÁN DOMÍNGUEZ GAVILANES, bajo nuestra supervisión.

Oscar Lasso Andino, Ph.D
Director del Proyecto

Christian Vásquez, Ph.D
Codirector del Proyecto

Agradecimientos

En primer lugar, agradezco eternamente a mi familia por su apoyo incondicional. No conozco a personas más ejemplares y he sido extremadamente afortunado de aprender las mejores lecciones de ustedes. A mis padres que son mi orgullo y mi soporte. A mis hermanos, que sin duda han sido una de las partes más importante de mi vida: Xavi, Dario y Dani que tuvimos la oportunidad de crecer juntos y vivir un sinnúmero de experiencias formidables, travesuras y emociones. No tengo las palabras suficientes para expresar lo orgulloso que me hace ser su hermano. A mis hermanas Anahí y Valentina que son mi alegría e inspiración.

Deseo también agradecer a mis grandes amigos que han hecho de estos últimos años los mejores. A Jacobo por sus invaluable consejos; realmente ha sido todo un honor todas esas horas invertidas en el tan noble pasatiempo de derrotar campers. A Oscar, Ros y Josue quienes desde el primer año de la universidad han sido mis grandes amigos, cuya felicidad y amistad no ha sido desgastada por el paso del tiempo, en especial a Steve que siempre supo ver el lado positivo de toda circunstancia y por mostrarme el mundo con otros ojos... desde el skateboard hasta el más profundo análisis del subconsciente. A todos los amigos de la facultad de ingeniería eléctrica y electrónica, fue un placer haber compartido las aulas con gente tan brillante. Entre todas las increíbles personas que he conocido, quiero expresar mis más sinceros agradecimientos a Evelyn, quien nunca dejó de creer en mí y me brindó su apoyo sin condición en mis tiempos más oscuros. Su inmensurable amor, comprensión, y todo el tiempo que compartió conmigo me los llevo siempre en mi corazón. Por ello estoy en deuda eterna. Para ser sincero, fuiste tú quién me dio la valentía que me faltaba para seguir el camino profesional más emocionante que existe. Me gustaría también mencionar a Gene, cuya amistad pura y sincera me enseñó que el verdadero conocimiento es más valioso cuando lo compartes.

Muchas gracias a mis amigos de la gloriosa carrera de Física, cuya constancia impulsó mi curiosidad científica. También estoy muy agradecido por todas las valiosas horas de discusión, de investigación y de amistad que Alex invirtió en nuestra búsqueda de la esencia de las leyes de la naturaleza, su perseverancia es un ejemplo a seguir. A mis maestros que supieron transmitir sus conocimientos de la mejor forma posible y cuyas bases me permitirán llegar muy lejos. Aquí quiero hacer una mención muy especial a Nicolás, que más que mi profesor, tengo el orgullo de llamar amigo y consejero. Su curiosa forma de ver el mundo y los viajes de enseñanza por los mejores destinos de Ecuador me dieron invaluable lecciones de humildad, dedicación y nuestra misión como impulsores del desarrollo de la sociedad.

Deseo agradecer de todo corazón a Ale, mi pilar emocional e intelectual en estos últimos años. Su gran capacidad, alegría, energía y sobre todo su amor son algunas de mis inspiraciones para ser el mejor físico que pueda hacer de mí. Disfruto enormemente de tu compañía no solo por las increíbles conversaciones o por los pasatiempos que compartimos sino porque como dice un prestigioso adagio “transire suum pectus mundoque potiri”, hemos aprendido a ir más allá de uno mismo para dominar el mundo.

Mi inmensa gratitud para mi tutor Oscar, quien brillantemente me supervisó a lo largo de la elaboración de este proyecto. Sus consejos y gran paciencia fueron esenciales. Las valiosas conversaciones sobre el estado del arte, los límites de la teoría y las oportunidades que ofrece la ciencia han sido una guía invaluable tanto para el desarrollo de este trabajo como para mis futuras aspiraciones profesionales.

Finalmente, agradezco y dedico esta obra a todos quienes contribuyen día a día con el desarrollo de nuestro país. Es necesario un cambio urgente que solo se logrará con mucho trabajo.

Índice general

Abstract	I
Resumen	II
Declaración de Autoría	III
Certificación	IV
Agradecimientos	V
Índice de Figuras	IX
Índice de Cuadros	X
Abreviaciones	XI
Convenciones	XII
1. Introducción	1
1.1. Relatividad General de Einstein	3
1.1.1. Principio de Equivalencia	3
1.1.2. Tensor Métrico	5
1.1.3. Ecuaciones de Campo	6
1.1.4. Formalismo Lagrangiano	8
1.2. Algunas soluciones de las ecuaciones de campo	10
1.2.1. Solución de Schwarzschild	10
1.2.2. Solución de Reissner-Nordström (RN)	11
1.2.3. Solución de Kerr	12
1.2.4. Soluciones Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker (FLRW)	13
2. Agujeros de Gusano	15
2.1. Propiedades de un Agujero de Gusano	16
2.2. Métrica de Morris-Thorne	17
2.2.1. Embebimiento	17
2.2.2. Los Tensores de Riemann, Ricci y Einstein	19

2.2.3. El Tensor Energía-Impulso	20
2.2.4. La Función de Exoticidad	21
2.2.5. Condiciones de Energía	22
2.3. Agujeros de Gusano Cargados	22
2.3.1. Agujero con campo escalar	23
2.3.2. Agujero con carga eléctrica	25
2.4. Agujeros de Gusano Cargados Modificados	26
3. El formalismo de la métrica de Jacobi y la curvatura Gaussiana	28
3.1. Hamiltoniano Natural	29
3.2. La métrica de Jacobi no relativista	31
3.3. Cantidades Conservadas y la constante de Clairaut	32
3.4. La métrica de Jacobi relativista	33
3.5. Curvatura Gaussiana	35
3.6. Problema de Kepler	36
4. Dinámica de agujeros de gusano y la métrica de Jacobi	39
4.1. La métrica de Jacobi para agujeros de gusano estáticos	40
4.2. Métrica con función de redshift $\Phi = 0$	41
4.2.1. Órbitas circulares	42
4.2.2. Curvatura Gaussiana	45
4.2.3. Clasificación de órbitas del problema de Kepler	45
4.3. Métrica de agujero de gusano cargado con $\Phi \neq 0$	49
5. Conclusiones	51
A. Condiciones de Energía	54
A.1. Cantidades Observables	54
A.2. Formulación Matemática	55
A.2.1. Condición Nula de Energía (CNE)	56
A.2.2. Condición Débil de Energía (CdE)	56
A.2.3. Condición Fuerte de Energía (CFE)	56
A.2.4. Condición Dominante de Energía (CDE)	57
A.2.5. Condición Nula de Energía Promediada (CNEP)	57
A.2.6. Condición Débil de Energía Promediada (CdEP)	58
A.2.7. Condición Fuerte de Energía Promediada (CFEP)	58
A.3. Algunas Violaciones conocidas	58
A.3.1. Campos Escalares Clásicos	59
A.3.2. Efecto Casimir	59
A.3.3. Evaporación de Hawking	60
B. Conexión de Spin	61
B.1. Definición	61
B.2. El Formalismo de Cartan	62
B.3. Ejemplo de aplicación: Curvatura Gaussiana	63

C. Temperatura de Hawking	65
C.1. Temperatura de un agujero negro	66
D. Algunas funciones especiales	69
D.1. Integrales elípticas	69
D.2. Integral Elíptica de primer tipo	70
D.3. Integral Elíptica de segundo tipo	71
D.4. Funciones elípticas de Jacobi	71
Bibliografía	72

Índice de figuras

2.1.	Diagrama de embebimiento de una sección bidimensional a lo largo del plano ecuatorial $t = \text{const}$, $\theta = \pi/2$ de un agujero de gusano con función de forma (de izquierda a derecha): $b(r) = b_0/r^2$ y $b(r) = b_0$	18
3.1.	Ejemplo de las trayectorias del problema clásico de Kepler. Cuando $E > 0$, $E = 0$ y $E < 0$ tenemos órbitas hiperbólica (púrpura), parabólicas (rojo) y elípticas (azul) respectivamente.	37
4.1.	Gráfico polar de la trayectoria de una partícula con distancia radial inicial $l_0 = 4$ en un agujero de gusano cargado con tamaño de garganta $\sqrt{b_0^2 - q} = 1,5$. La única órbita estable es aquella para la cual $C = 1/\sqrt{b_0^2 - q}$	43
4.2.	Gráfico polar de la trayectoria estable de una partícula proveniente de una distancia radial $l_0 \rightarrow \infty$ en un agujero de gusano cargado con tamaño de garganta $\sqrt{b_0^2 - q} = 2$	43
4.3.	Gráfico polar de una trayectoria abierta con distancia radial inicial $l_0 = 4$ en un agujero de gusano cargado con tamaño de garganta $\sqrt{b_0^2 - q} = 1,5$	44
4.4.	Gráfico polar de una trayectoria abierta de una partícula proveniente de una distancia radial $l_0 \rightarrow \infty$ en un agujero de gusano cargado con tamaño de garganta $\sqrt{b_0^2 - q} = 1,5$	44
4.5.	Gráfico polar de una trayectoria estable del problema de Kepler en un agujero de gusano cargado con tamaño de garganta $\sqrt{b_0^2 - q} = 10$	47
4.6.	Arriba: Trayectoria cerrada de la partícula (azul) y garganta del agujero de gusano (rojo) como funciones de ϕ . Abajo: La curvatura Gaussiana es negativa cuando r es grande (puntos hiperbólicos) y es igual a cero en un solo punto (punto parabólico). Conforme ϕ se incrementa, la curvatura alcanza un valor positivo constante (trayectoria elíptica) correspondiente a la curvatura de la garganta del agujero de gusano.	47
4.7.	Gráfico polar de una trayectoria abierta del problema de Kepler en un agujero de gusano cargado con tamaño de garganta $\sqrt{b_0^2 - q} = 10$	48
4.8.	Arriba: Trayectoria abierta de la partícula (azul) y garganta del agujero de gusano (rojo) como funciones de ϕ . Abajo: La curvatura Gaussiana como una función de ϕ es cíclica y negativa (puntos hiperbólicos) para todos los valores de ϕ excepto para un conjunto contable de puntos para los cuales $K_g = 0$ (puntos parabólicos).	48

Índice de cuadros

1.	Algunos ejemplos de magnitudes física en unidades naturales.	XII
4.1.	Clasificación de trayectorias para $0 < r^2/2(b_0^2 - q) \leq \sqrt{2} - 1$	46
4.2.	Clasificación de trayectorias para $\sqrt{2} - 1 < r^2/2(b_0^2 - q) < 1/2$	46
4.3.	Clasificación de trayectorias para $r^2/2(b_0^2 - q) \geq 1/2$	46

Abreviaciones

RE	R elatividad E special
RG	R elatividad G eneral
ECE	E cuaciones de C ampo de E instein
RN	R eissner N ordström
FLRW	F riedman L emaitre R obertson W alker
CNE	C ondición N ula de E nergía
CdE	C ondición d ébil de E nergía
CFE	C ondición F uerte de E nergía
CDE	C ondición D ominante de E nergía
MT	M orris- T horne

Convenciones

Como en muchos textos concernientes a física teórica, usaremos métricas con signatura Lorentziana $(-, +, +, +)$ y se trabajará en unidades tales que

$$c = G = 4\pi\epsilon_0 = 1.$$

donde

$$c = \text{velocidad de la luz} = 2,9979 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$$

$$G = \text{Constante de gravitación universal} = 6,6743 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

$$4\pi\epsilon_0 = \text{permitividad del vacío} = 1,1126 \times 10^{-10} \text{ C}^2 \text{ s}^2 \text{ kg}^{-1} \text{ m}^{-3}$$

En consecuencia la masa, la longitud, el tiempo, la energía, el momentum y la carga eléctrica tienen unidades de longitud. Por tal motivo, se escoge una unidad arbitraria de longitud m (comúnmente 1 m) para representar todas las magnitudes físicas. En el sistema de unidades naturales, los factores del Cuadro 1 son la unidad, por definición. Para hacer las conversiones, multiplicamos o dividimos los factores G , c y $4\pi\epsilon_0$ con los exponentes apropiados para obtener las unidades SI deseadas.

CUADRO 1: Algunos ejemplos de magnitudes física en unidades naturales.

Magnitud	Unidad SI	Unidad Natural	Factor	Unidad natural \rightarrow Unidad SI
Masa	kg	m	$c^2 G^{-1}$	$1 \text{ m} \rightarrow 1.3466 \times 10^{27} \text{ kg}$
Longitud	m	m	1	$1 \text{ m} \rightarrow 1 \text{ m}$
Tiempo	s	m	c^{-1}	$1 \text{ m} \rightarrow 3.3356 \times 10^{-9} \text{ s}$
Energía	$\text{kg m}^2 \text{s}^{-2}$	m	$c^4 G^{-1}$	$1 \text{ m} \rightarrow 1.2102 \times 10^{44} \text{ kg m}^2 \text{s}^{-2}$
Momentum	kg m s^{-1}	m	$c^3 G^{-1}$	$1 \text{ m} \rightarrow 4.0370 \times 10^{35} \text{ kg m s}^{-1}$
Velocidad	m s^{-1}	adimensional	c	$1 \rightarrow 2.9979 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$
Momentum Angular	$\text{kg m}^2 \text{s}^{-1}$	m^2	$c^3 G^{-1}$	$1 \text{ m}^2 \rightarrow 4.037 \times 10^{35} \text{ kg m}^2 \text{s}^{-1}$
Fuerza	kg m s^{-2}	adimensional	$c^4 G^{-1}$	$1 \rightarrow 1.2102 \times 10^{44} \text{ kg m s}^{-2}$
Densidad de Energía	$\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-2}$	m^{-2}	$c^4 G^{-1}$	$1 \text{ m}^{-2} \rightarrow 1.2102 \times 10^{44} \text{ kg m}^{-1} \text{s}^{-2}$
Aceleración	m s^{-2}	m^{-1}	c^2	$1 \text{ m}^{-1} \rightarrow 8.9875 \times 10^{16} \text{ m s}^{-2}$
Carga escalar	$\text{C} = \text{A} \cdot \text{s}$	m.	$(4\pi\epsilon_0)^{1/2} c^2 G^{-1/2}$	$1 \text{ m} \rightarrow 1.1621 \times 10^{17} \text{ C}$

Capítulo 1

Introducción

There was difficulty reconciling the Newtonian theory of gravitation with its instantaneous propagation of forces with the requirements of special relativity; and Einstein working on this difficulty was led to a generalization of his relativity—which was probably the greatest scientific discovery that was ever made.

P.A.M Dirac

La Relatividad General es una teoría del espacio, tiempo y gravitación formulada por A. Einstein [1] en 1915. Fue vista como una teoría revolucionaria, parcialmente porque requiere de un nuevo enfoque que contradice muchas de las nociones más intuitivas y profundamente arraigadas de la mecánica clásica, como la existencia de un tiempo absoluto. Por ejemplo, la Relatividad Especial muestra que dos eventos que ocurren simultáneamente en un sistema de referencia inercial (sistema de referencia no acelerado), pueden ser no simultáneos en otro sistema. La Relatividad General extiende este concepto para sistemas no inerciales (sistemas acelerados) y reformula las leyes de gravitación usando una descripción geométrica.

Originalmente la Relatividad General surge de la necesidad de resolver ciertas incompatibilidades teóricas y prácticas de la teoría de Newton: la teoría clásica, no explica por qué la gravedad es una fuerza de acción a distancia que actúa instantáneamente entre dos cuerpos masivos. En el ámbito experimental, Le Verrier descubrió en 1859 a partir de datos observacionales[2], que la teoría no predice correctamente la magnitud de la precesión del perihelio de Mercurio. De hecho, solamente con el uso de la Relatividad

General es posible encontrar la magnitud correcta, al reconocer a la gravedad como un efecto geométrico de la curvatura del espacio-tiempo.

A raíz del éxito inicial de la Relatividad General, desde 1915, se ha realizado un considerable esfuerzo para relacionar esta teoría con otras áreas de la física. En astronomía, el descubrimiento de objetos compactos altamente energéticos, i.e. fuentes compactas de rayos X y quásares, motivó el desarrollo de soluciones particulares que muestran que el colapso gravitacional y campos gravitacionales fuertes juegan un papel importante [3]. Otro factor que impulsó el interés en la Relatividad General fue la búsqueda de una teoría de gravedad a cortas distancias y altas energías [4], donde los efectos cuánticos no pueden ser ignorados [5], como en la cercanía de objetos astrofísicos compactos. Una de las evidencias más fuertes que respaldan la necesidad de buscar dicha teoría es la predicción de la creación de partículas en el campo gravitacional de un agujero negro [6].

En la actualidad, la Relatividad General cuenta con una increíble cantidad de evidencia experimental, que va desde la medición de la desviación de la luz al pasar por las cercanías del Sol [7] hasta la detección de radiación gravitacional [8] y la observación directa de agujeros negros [9]. Estos logros surgieron del estudio teórico de la Relatividad General. Tales descubrimientos siguen un mismo programa: primero consideramos una distribución plausible de materia y a través de las ecuaciones de campo de Einstein (ECE), determinamos la métrica del espacio-tiempo que satisface las ECE correspondientes. Igualmente, es posible el estudio en dirección contraria: podemos considerar una métrica extraña con algunas propiedades de interés y entonces encontramos la fuente de materia responsable de tal geometría espacio-temporal. Este último enfoque ha permitido el descubrimiento de soluciones novedosas a las ECE: los agujeros de gusano. A pesar que dichas soluciones violan las condiciones clásicas de energía, ciertos descubrimientos en el área de la mecánica cuántica harían posible su existencia. Antes de empezar el recuento sobre los agujeros de gusano, presentamos un breve repaso de la Teoría de la Relatividad General.

1.1. Relatividad General de Einstein

De acuerdo con la teoría de gravitación de Einstein, no hay campo de fuerza gravitacional en el sentido clásico. La noción clásica de un campo de fuerzas es reemplazada por un espacio-tiempo curvado. Debido a que no es necesario ningún campo de fuerzas, se considera a la teoría de Einstein como una teoría puramente geométrica: “la materia le dice al espacio como curvarse y el espacio le dice a la materia como moverse” [10].

1.1.1. Principio de Equivalencia

El punto de partida conceptual de la Relatividad General tiene que ver con el hecho que la masa aparece en dos contextos físicos distintos: como la *masa gravitacional* m_g de un cuerpo; y como una medida de la resistencia de un cuerpo a cambiar su estado de movimiento, es decir, la *masa inercial*, m_i , de un cuerpo. Si la segunda ley de Newton se combina con la ley de gravitación de Newton, para una partícula con una masa gravitacional m_g y masa inercial m_i a una distancia $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$ medida desde el centro de un cuerpo esférico de masa gravitacional M , podemos escribir

$$-\frac{m_g M}{r^2} \mathbf{e}_r = m_i \mathbf{a}.$$

La aceleración de la partícula es

$$\mathbf{a} = -\frac{GM}{r^2} \frac{m_g}{m_i} \mathbf{e}_r. \quad (1.1)$$

Notemos que la aceleración depende del cociente entre la masa gravitacional e inercial de la partícula. Los experimentos han mostrado sin excepción, que cuerpos hechos de distintos materiales caen con igual aceleración bajo las mismas circunstancias. Dicho de otra forma, se sabe que m_g/m_i tiene el mismo valor numérico para todos los cuerpos. Esta observación se conoce como el *principio de equivalencia débil*. Además, se ha observado experimentalmente que el cociente m_g/m_i parece ser siempre igual a 1. Einstein reconoció este hecho como una hipótesis fundamental de su teoría, lo cual implica que la ecuación 1.1 no posee ningún factor que dependa de las propiedades de la partícula, sino solamente de su posición en el campo gravitacional. En otras palabras, la aceleración de la partícula en un campo gravitacional podría ser una propiedad intrínseca del espacio-tiempo.

Estos postulados dan forma al fundamento conceptual de la Relatividad General. Una consecuencia [11] del principio de equivalencia débil es que la “influencia” de un campo gravitacional sobre todos los experimentos mecánicos locales puede ser simulada por un sistema de referencia acelerado en una región sin gravedad. Consecuentemente, toda “influencia” de un campo gravitacional sobre un experimento mecánico local puede ser “transformada” a un sistema de referencia sujeto a caída libre. El principio de equivalencia fuerte generaliza esta noción para incluir no solo procesos mecánicos, sino procesos de naturaleza arbitraria.

Es importante mencionar la diferencia entre un sistema de referencia inercial F_{RE} en Relatividad Especial y un sistema de referencia inercial F_{RG} en Relatividad General. Los sistemas de referencia en la Relatividad Especial son sistemas de referencia sin aceleración de extensión arbitraria en un espacio libre de campos gravitacionales, i.e. espacio-tiempo plano. El sistema de referencia inercial en Relatividad General es un sistema local sujeto a caída libre en un espacio-tiempo curvo. Haciendo uso de esta distinción, el principio de equivalencia fuerte se enuncia:

Para todo proceso físico Q_1 en F_{RG} existe un proceso físico Q_2 en un sistema de referencia inercial F_{RE} en un espacio-tiempo de Minkowski tal que se observa que Q_2 en F_{RE} es idéntico a Q_1 observado en F_{RG} [12].

Las leyes de la naturaleza son independientes del sistema de coordenadas, y por lo tanto, se espera que sus expresiones matemáticas también lo sean. Así, las ecuaciones de la Relatividad General deben ser ecuaciones tensoriales¹. Considerando la discusión anterior, los requerimientos de una teoría de la Relatividad General se suelen resumir [14] en dos principios básicos:

1. El principio de covarianza, que establece que la métrica $g_{\mu\nu}$ y sus derivadas son las únicas cantidades espacio-temporales que pueden aparecer en las ecuaciones físicas. De este modo las ecuaciones son independientes del sistemas de coordenadas.
2. El requerimiento que las ecuaciones deben reducirse a las ecuaciones de la relatividad especial en el caso en que $g_{\mu\nu}$ se reduce a la métrica de Minkowski.

¹Un tensor es un objeto matemático que define transformaciones multilineales. En geometría diferencial, las propiedades geométricas intrínsecas de una variedad pueden ser descritas por campos tensoriales. Como la geometría de una variedad no depende de una elección particular de coordenadas, los tensores son independientes de un sistema de coordenadas[13].

1.1.2. Tensor Métrico

Matemáticamente, el espacio-tiempo está representado por una variedad diferenciable \mathcal{M} y su tensor métrico es un tensor 2-covariante simétrico en \mathcal{M} , que se denota por g . Además, se requiere que la métrica sea no degenerada con signatura² $(-, +, +, +)$. Una variedad \mathcal{M} dotada de tal métrica es una variedad Lorentziana. Explícitamente, el tensor métrico es una forma bilineal simétrica en el espacio tangente³ de \mathcal{M} en un punto p que varía de forma suave de punto a punto. Dados dos vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} en un punto $p \in \mathcal{M}$

$$g_p(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = g_p(\mathbf{v}, \mathbf{u}) \in \mathbb{R}.$$

A diferencia del espacio euclídeo, donde el producto interno es definido positivo⁴, la métrica de una variedad Lorentziana no lo es y le provee a cada espacio tangente de una estructura de espacio de Minkowski⁵. En coordenadas locales x^μ (donde $\mu=0,1,2,3$) la métrica puede escribirse como

$$g = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu,$$

donde $\{dx^\mu\}$ es la base del espacio cotangente⁶. Los coeficientes $g_{\mu\nu}$ son un conjunto de 16 funciones. Generalmente las cantidades dx^μ se interpretan como componentes de un vector de desplazamiento infinitesimal y determinan un elemento de línea infinitesimal, conocido como intervalo, denotado por

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu.$$

El intervalo ds^2 contiene información acerca de la estructura causal del espacio-tiempo. Cuando $ds^2 < 0$, el intervalo es de tipo temporal y la raíz cuadrada del valor absoluto de ds^2 es un tiempo propio incremental. Estos intervalos pueden ser atravesados

²La signatura (v, p, r) de un tensor métrico g es el número de valores propios positivos, negativos y nulos de la matriz simétrica real asociada $g_{\mu\nu}$. Cuando la métrica no tiene valores propios nulos, se la suele escribir como un vector fila que contiene los signos de los respectivos valores propios.

³El espacio tangente en p denotado por $\mathbf{T}_p\mathcal{M}$ es el espacio vectorial de todos los vectores tangentes en p . En términos de una carta particular en p con coordenadas locales x_1, \dots, x_n , son los vectores cuya base es $(\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n)|_{x(p)}$.

⁴Se dice que un producto interno es definido positivo si para todo $\mathbf{v} \in \mathcal{M}$, $g_p(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq 0$

⁵El espacio de Minkowski es la variedad con métrica $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$

⁶El espacio cotangente $\mathbf{T}_p^*\mathcal{M}$ en un punto p se define como el espacio dual al espacio tangente $\mathbf{T}_p\mathcal{M}$. Es decir, los elementos del espacio cotangente son funcionales lineales sobre $\mathbf{T}_p\mathcal{M}$

solo por objetos masivos. Cuando $ds^2 = 0$, el intervalo es de tipo luz, y puede ser atravesado solo por fotones. Cuando $ds^2 > 0$, el intervalo es de tipo espacial y la raíz cuadrada de ds^2 se interpreta como una longitud propia incremental. Los intervalos de tipo espacial no pueden ser atravesados por partículas porque los conos de luz de dos puntos distintos en el intervalo no están conectados.

1.1.3. Ecuaciones de Campo

De la manera más simple posible, se debería hallar una ecuación que generalice la ecuación de Poisson para un potencial gravitacional Newtoniano

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi\rho, \quad (1.2)$$

donde $\nabla^2 = \delta^{ij}\partial_i\partial_j$ es el operador laplaciano y ρ es la densidad de masa. En el lado izquierdo de la ecuación 1.2, debido a la presencia de un operador diferencial de segundo orden actuando sobre un potencial gravitacional, este término contiene información sobre la geometría del espacio; y en el lado derecho tenemos una medida de la distribución de masa, la fuente del campo gravitacional. Entonces el Laplaciano del potencial gravitacional debe ser reemplazado [15] por una expresión que contenga al tensor métrico, ya que este define toda la geometría del espacio. Por otra parte, una distribución continua de energía que se sabe posee densidad de energía, densidad de momentum y tensiones internas está descrita por un tensor simétrico $T_{\mu\nu}$ conocido como tensor de energía-impulso. Por lo tanto, en esta nueva ecuación, $T_{\mu\nu}$ debe aparecer como proporcional a algún otro tensor que debe contener derivadas de segundo orden de la métrica

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}.$$

De la geometría diferencial, sabemos que existe una cantidad que está construida a partir de las segundas derivadas de la métrica: el tensor de Riemann⁷ $R^\mu{}_{\nu\rho\sigma}$. Su forma contraída, el tensor de Ricci⁸ $R_{\mu\nu}$, tiene el mismo rango que el tensor de energía-impulso, haciéndolo un candidato razonable para $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}$. Sin embargo, esto nos lleva a que

⁷El tensor de Riemann describe la curvatura de una superficie. En términos de la conexión de Levi-Civita ∇ , está expresado como $R(u, v)w = \nabla_u \nabla_v w - \nabla_v \nabla_u w - \nabla_{[u, v]} w$, donde $[u, v]$ es el corchete de Lie.

⁸Es una medida del grado en el que la geometría de un tensor métrico difiere localmente de un espacio pseudo-Euclídeo.

$\nabla_\mu T = 0$, es decir⁹, T es constante en todo el espacio-tiempo (lo cual es incorrecto porque $T = 0$ se cumple solo en el vacío mientras que $T > 0$ en un espacio con materia). Otra alternativa es construir un tensor, a partir del tensor de Ricci, que nos conduzca a las ecuaciones de conservación de la forma deseada: el tensor de Einstein

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}, \quad (1.3)$$

donde $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ es la curvatura escalar. El tensor $G_{\mu\nu}$ cumple $\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$ y supera la dificultad encontrada anteriormente. Entonces

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (1.4)$$

es la ecuación de campo deseada.

El conjunto de ecuaciones 1.4 se conoce como las ecuaciones de campo de Einstein (ECE), un sistema de 10 ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden acopladas y no lineales. El lado derecho es una expresión covariante de la densidad de energía y momentum en la forma de un tensor simétrico 2-covariante, mientras el lado izquierdo es un tensor simétrico 2-covariante construido a partir de la métrica y sus primeras y segundas derivadas. La constante de proporcionalidad κ se escoge de tal manera, que en límite de gravedad débil¹⁰ se reproduzca la gravedad Newtoniana [16]. Puede demostrarse que esta constante es $\kappa = 8\pi$.

Como ecuaciones diferenciales, las ecuaciones de campo de Einstein son muy complicadas: la curvatura escalar y el tensor de Ricci son contracciones del tensor de Riemann, que involucra derivadas y productos de los símbolos de Christoffel, que a su vez contiene componentes de la métrica y sus derivadas. Además el tensor de energía-impulso $T_{\mu\nu}$ generalmente también involucra a la métrica. Al ser ecuaciones no lineales, sus soluciones no pueden ser superpuestas para hallar otra solución. Por ello, no es posible encontrar la solución general a las ecuaciones de campo de Einstein, por lo que debemos conformarnos con soluciones particulares, las cuales se encuentran haciendo suposiciones que simplifiquen la forma de las ECE.

⁹La cantidad T se define como la traza del tensor energía momento $T = g_{\mu\nu}T^{\mu\nu}$.

¹⁰El límite de gravedad débil o gravedad linealizada es la aplicación de la teoría de perturbaciones al tensor métrico $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, donde $\eta_{\mu\nu}$ es la métrica de Minkowski y $h_{\mu\nu}$ es la perturbación.

1.1.4. Formalismo Lagrangiano

Las ecuaciones de campo de Einstein pueden obtenerse de un principio de mínima acción¹¹. La acción es una integral sobre el espacio-tiempo de una densidad Lagrangiana:

$$S = \int d^n x \mathcal{L}.$$

La densidad Lagrangiana es un escalar. El único escalar independiente que se puede construir [17] a partir de la métrica y que contiene sus segundas derivadas es la curvatura escalar R . Hilbert mostró que la forma más simple posible de escoger el Lagrangiano es

$$\mathcal{L}_H = \sqrt{-g}R. \quad (1.5)$$

Las ecuaciones de movimiento provienen de variar la acción con respecto a la métrica.

Usando $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ tenemos

$$\begin{aligned} \delta S_H &= \int d^n x [\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} + \sqrt{-g}R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + R\delta\sqrt{-g}] \\ &= (\delta S)_1 + (\delta S)_2 + (\delta S)_3. \end{aligned} \quad (1.6)$$

El segundo término $(\delta S)_2$ ya está en la forma de una expresión multiplicada por $\delta g^{\mu\nu}$.

Para el primer término, se puede demostrar que

$$\delta R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} = \nabla_\rho(\delta\Gamma^\mu{}_{\sigma\nu}) - \nabla_\sigma(\delta\Gamma^\mu{}_{\rho\nu}),$$

donde $\Gamma^i{}_{kl}$ son los símbolos de Christoffel definidos por

$$\Gamma^i{}_{kl} = \frac{1}{2}g^{im} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right).$$

Por lo tanto, la contribución del primer término es

$$\begin{aligned} (\delta S)_1 &= \int d^n x \sqrt{-g}g^{\mu\nu} [\nabla_\rho(\delta\Gamma^\rho{}_{\nu\mu}) - \nabla_\nu(\delta\Gamma^\rho{}_{\rho\mu})] \\ &= \int d^n x \sqrt{-g}\nabla_\sigma [g^{\mu\sigma}(\delta\Gamma^\rho{}_{\rho\mu}) - g^{\mu\nu}(\delta\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu})]. \end{aligned}$$

¹¹El principio de mínima acción es un principio variacional en el que se busca la trayectoria que minimice una cantidad conocida como acción. El resultado de tal procedimiento son las ecuaciones de movimiento.

El integrando es una derivada total y entonces, por el teorema de Stokes¹², solamente contribuye con un término de frontera. Cuando la variación de la métrica $\delta g^{\mu\nu}$ se anula en una vecindad de la frontera o cuando no hay frontera, este término no contribuye a la variación de la acción. Por tanto $(\delta S)_1 = 0$.

Para el tercer término $(\delta S)_3$ usamos el siguiente resultado [18] válido para cualquier matriz M

$$\text{Tr}(\ln M) = \ln(\det M).$$

La variación de esta identidad implica

$$\text{Tr}(M^{-1}\delta M) = \frac{1}{\det M}\delta(\det M),$$

entonces tenemos

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}.$$

Reemplazando esto en la ecuación 1.6 y recordando que el primer término tiene una contribución nula

$$\delta S_H = \int d^n x \sqrt{-g} \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} \right] \delta g^{\mu\nu}.$$

Esta integral debe anularse para variaciones arbitrarias, por lo tanto obtenemos las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 0.$$

Para obtener las ecuaciones de campo de Einstein completas, hay que considerar una acción de la forma

$$S = \frac{1}{16\pi}S_H + S_M, \tag{1.7}$$

donde S_M es la acción para la materia. De forma análoga al proceso anterior encontramos

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{1}{16\pi} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} \right) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} = 0,$$

¹²El teorema de Stokes en variedades dice que la integral de una forma diferencial ω sobre la frontera de una variedad orientable Ω es igual a la integral de su derivada exterior $d\omega$ sobre Ω , i.e., $\int_{\partial\Omega} \omega = \int_{\Omega} d\omega$

de donde recuperamos las ECE 1.4 si

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (1.8)$$

1.2. Algunas soluciones de las ecuaciones de campo

Como se mencionó anteriormente, para resolver las ecuaciones de campo es necesario introducir un *ansatz*, una suposición plausible de la geometría del espacio-tiempo. El potencial Newtoniano alrededor de un objeto puntual es esféricamente simétrico, lo mismo es cierto para objetos como estrellas y planetas. Motivados por esta observación, podemos esperar que la métrica que describe el espacio vacío alrededor de estos objetos debe poseer la misma forma. Entonces, es razonable asumir [19] que el elemento de línea puede escribirse como

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + g(r)dr^2 + h(r)r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (1.9)$$

Donde f y g son funciones solamente de la coordenada radial, convirtiendo a la métrica dada en la ecuación 1.9 en una métrica esféricamente simétrica. Una vez que se ha simplificado la métrica y se ha introducido un tensor de energía-impulso apropiado, hay que resolver el sistema de ecuaciones diferenciales. A continuación se presenta algunas de las soluciones más conocidas.

1.2.1. Solución de Schwarzschild

La métrica de Schwarzschild es la única solución externa para un cuerpo estático esféricamente simétrico rodeado por un espacio vacío [20]. La métrica toma la forma

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (1.10)$$

donde M se puede interpretar como la masa del cuerpo central. Esta métrica sugiere que la Relatividad General comparte con la gravedad newtoniana la propiedad de que el campo externo de cualquier cuerpo esférico depende solo de su masa total y no de la distribución radial de materia. Sin embargo, esta solución no es equivalente a una masa

puntual en el centro del sistema de coordenadas, porque la expresión 1.10 es válida solo para $r > 2M$.

A primera vista, la métrica diverge en los puntos $r = 0$ y $r = 2M$ (radio de Schwarzschild). Los coeficientes de la métrica son cantidades dependientes de coordenadas, por lo que es posible escoger diferentes coordenadas [21] en las cuales los coeficientes tengan un comportamiento distinto. En general, se busca estudiar el comportamiento de las singularidades a través de cantidades independientes de las coordenadas construídas a partir del tensor de Ricci o de la curvatura escalar. Si una de estas cantidades también tiende al infinito al acercarse a los puntos de interés, entonces este punto es una singularidad de la curvatura (también se busca que el punto no se encuentre “infinitamente lejos”, es decir, que pueda alcanzarse al viajar una distancia finita a lo largo de una curva). En el caso de la métrica de Schwarzschild, una de tales cantidades [11] es

$$R^{\mu\nu\rho\sigma}R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{12M^2}{r^6}, \quad (1.11)$$

mostrando que solo el punto $r = 0$ representa una verdadera singularidad. En el otro punto, $r = 2M$, ningún invariante de curvatura diverge. Entonces esta no es una singularidad real y se debe solamente a una mala elección de coordenadas. De hecho, en las coordenadas de Kruskal, la singularidad desaparece. Sin embargo, este punto, conocido como horizonte de eventos, es de interés porque en su interior todas las curvas temporales (y por lo tanto todas las curvas de los conos de luz futuros de las partículas en el interior del horizonte), caen hacia adentro del agujero. En otras palabras, dentro del horizonte, la velocidad de escape del agujero negro es mayor que la velocidad de la luz.

1.2.2. Solución de Reissner-Nordström (RN)

Si el cuerpo de masa M posee una carga eléctrica Q , la solución de Reissner-Nordström [19] se escribe como

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (1.12)$$

donde r, θ, ϕ son las coordenadas esféricas estándar y la longitud de escala característica es

$$r_Q^2 = Q^2.$$

Los agujeros negros de RN tienen dos horizontes: el horizonte de eventos y el horizonte interno [22]. Los horizontes se localizan en los puntos donde $g_{rr} = 0$, es decir

$$r_{\pm} = \frac{1}{2} \left(r_s \pm \sqrt{r_s^2 - 4r_Q^2} \right). \quad (1.13)$$

El caso en el que $2r_Q = r_s$ corresponde a un agujero negro extremal. Agujeros negros con $2r_Q > r_s$ no pueden existir en la naturaleza porque si la carga es mayor que la masa, no existiría un horizonte de eventos físico y se tendría una singularidad desnuda. Teorías de supersimetría [23] garantizan la no existencia de esta clase de agujeros negros.

1.2.3. Solución de Kerr

Por otra parte, la solución de Schwarzschild es un caso especial de la solución de Kerr, que representa el campo externo de un agujero negro en rotación. La métrica que describe la geometría del espacio-tiempo en la vecindad de una masa M que rota con momento angular \mathbf{J} , está descrita en las coordenadas de Boyer-Lindquist [19] como

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r_s r}{\Sigma} \right) dt^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{r_s r a^2}{\Sigma} \sin^2 \theta \right) \sin^2 \theta d\phi^2 - \frac{2r_s r a \sin^2 \theta}{\Sigma} dt d\phi \quad (1.14)$$

donde las coordenadas r, θ, ϕ son las coordenadas esféricas estándar, r_s es el radio de Schwarzschild y

$$\begin{aligned} a &= J/M, \\ \Sigma &= r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \\ \Delta &= r^2 - r_s r + a^2. \end{aligned}$$

Una característica clave de esta métrica es la existencia del término mixto $dt d\phi$. Esto quiere decir que hay un acople entre el tiempo y el movimiento en el plano de rotación, que desaparece cuando el momento angular del agujero negro se aproxima a cero. La ecuación 1.14 se comporta apropiadamente excepto cuando $\Sigma = 0$ o $\Delta = 0$. Cuando $\Delta = 0$ aparece un horizonte, mientras que la ecuación

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta = 0 \quad (1.15)$$

bajo un cambio de coordenadas conveniente¹³, describe una *singularidad de anillo*.

1.2.4. Soluciones Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker (FLRW)

Estas son las soluciones del modelo estándar de la cosmología moderna. Permite que el radio de curvatura del universo sea una función del tiempo [24–26]. La métrica tiene la forma

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 ds_3^2, \quad (1.16)$$

donde $a(t)$ se conoce como factor de escala y ds_3^2 es la métrica tridimensional de a) un espacio plano, b) una esfera de curvatura constante positiva o c) un espacio hiperbólico con curvatura negativa constante. El espacio-tiempo descrito por la ecuación 1.16 describe un universo isotrópico en una superficie de t constante pero no es estático. Esta métrica reduce [27] las ecuaciones de campo de Einstein a

$$\frac{\dot{a}^2 + kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G\rho + \Lambda c^2}{3} \quad (1.17)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right) + \frac{\Lambda c^2}{3} \quad (1.18)$$

donde k es un parámetro de curvatura, G es la constante de gravitación universal, c es la velocidad de la luz, Λ es la constante cosmológica, ρ y p son la densidad de masa y la presión. En estas ecuaciones a , ρ y p son funciones del tiempo. Para un tiempo t constante [19]:

- Si $k = -1$ la geometría del espacio es curvada negativamente y el volumen es infinito.
- Si $k = 0$, la geometría del espacio es Euclídea, es decir, plana y de volumen infinito.
- Si $k = +1$, la geometría espacial es la de una 3-esfera. El volumen total del universo es finito y crece en proporción a $a^3(t)$.

Las soluciones aquí descritas son solo algunas de las más conocidas y estudiadas por su valor teórico y posible aplicación. Por ejemplo, la solución FLRW modela un universo isotrópico y homogéneo en expansión; las métricas de Schwarzschild, Reissner-Nordström

¹³Si $M = 0$ y hacemos el cambio de coordenadas $z = r \cos \theta$ y $R = \sin \theta \sqrt{r^2 + a^2}$, recuperamos el espacio de Minkowski en coordenadas cilíndricas. Entonces para $M = 0$, la singularidad $r = 0$, $\theta = \pi/2$ no es una singularidad física, sino una singularidad de coordenadas que representa un anillo.

y Kerr son la base del estudio de objetos astrofísicos compactos. Asimismo, existe una solución particular de las ecuaciones de campo de Einstein, importante por su hipotético uso para viajes superluminales: una métrica esféricamente simétrica y estática conocida como la métrica de Morris-Thorne. Esta métrica describe un agujero de gusano: una geometría con un radio mínimo que conecta dos regiones del espacio asintóticamente planas. En el siguiente capítulo analizaremos las propiedades más importantes de esta solución.

Capítulo 2

Agujeros de Gusano

I became interested in this question of whether you can build wormholes for interstellar travel. I realized that if you had a wormhole, the theory of general relativity by itself would permit you to go backward in time

Kip Thorne.

Las soluciones de agujero de gusano de las ECE han sido estudiadas desde los inicios de la Relatividad General. El primer análisis del tema fue hecho por Flamm en 1916, quien demostró que las secciones espaciales de la solución interior de la métrica de Schwarzschild poseen la geometría de una superficie de revolución, y que esta superficie es isométrica a una sección planar de la solución exterior, concluyendo que la superficie de revolución conecta asintóticamente dos hojas planas. Luego en 1935, Einstein y Rosen en un intento de desarrollar una teoría unificada de electromagnetismo y gravedad [28], fueron los primeros en interpretar tales soluciones como dos regiones asintóticamente planas conectadas por un puente. Sin embargo esta solución estaba incompleta debido a la presencia de singularidades. Fue Ellis quien completó esta solución al describir una variedad estática, esféricamente simétrica sin horizontes, referida en la literatura como puentes de Einstein-Rosen. Años después, Wheeler realizó varias contribuciones al tema y acuñó el término agujero de gusano para describir esta clase de soluciones de agujeros de gusano no atravesables. Debido a la existencia de singularidades en el modelo, el estudio de agujeros de gusano permaneció en el olvido y sin mayor atracción por parte de los físicos. No fue sino hasta 1987, que Morris y Thorne describieron la primera métrica de agujero de gusano atravesable (la atravesabilidad está ligada a la existencia

de materia exótica), recobrando interés por estas soluciones, siendo hasta la actualidad sujeto de una vasta cantidad de investigación.

En la literatura es común encontrar que los agujeros de gusano son pasajes a través del espacio-tiempo que conectan puntos distantes de nuestro universo (agujeros intra-universo) o posiblemente conectan nuestro universo con otro (agujeros inter-universo). Asimismo al ser el espacio y el tiempo tratados por igual como coordenadas, los agujeros de gusano pueden ser también máquinas del tiempo, aunque tal posibilidad es mucho más controversial y depende de un exhaustivo análisis sobre causalidad. Formalmente un agujero de gusano es toda variedad que posee un radio mínimo o garganta que conecta dos “universos” o el “mismo universo”, ya sean abiertos o cerrados[29]. Dada esta amplia definición, es natural esperar que exista una cierta cantidad de variedades que califican como agujeros de gusano. La distinción más simple de esta clasificación se da entre agujeros de gusano Lorentzianos y agujeros de gusano Riemannianos, lo cual simplemente refleja la naturaleza de la geometría de la variedad. Este trabajo se enfocará en el tipo Lorentziano atravesable descrito por la métrica de Morris-Thorne.

2.1. Propiedades de un Agujero de Gusano

El estudio de los agujeros de gusano inicia por considerar las propiedades deseadas para tal espacio-tiempo. En general se consideran [30] cuatro condiciones: (1) de preferencia y basados en el argumento del Subcapítulo 1.2, la métrica debe ser esféricamente simétrica y estática (este requerimiento se impone para simplificar los cálculos) y adicionalmente, (2) la solución debe cumplir las ECE en todo punto. (3) Para ser un agujero de gusano, la solución debe tener una garganta que conecte dos regiones asintóticamente planas y (4) no debe existir un horizonte, debido a que si está presente, prevendría el viaje a través del agujero de gusano.

Por otra parte, si existiera una civilización avanzada que busque emprender viajes interestelares entre puntos distantes del universo, se esperaría que existan algunas restricciones adicionales [30]. En este contexto, las “condiciones de uso” deseables son: (i) que las fuerzas gravitacionales tidales experimentadas por un viajero deben ser pequeñas; (ii) un viajero debe ser capaz de atravesar el agujero de gusano en un tiempo propio finito y razonablemente pequeño, medido por el viajero y por observadores fuera

del agujero. Adicionalmente se desea que (iii) la solución debe ser perturbativamente estable (como en el caso de un viajero pasando a través del agujero) y que (iv) la materia y campos que genera el espacio-tiempo del agujero de gusano debe tener un tensor de energía-impulso físicamente razonable, que describa formas de materia permitidas por las leyes de la física.

2.2. Métrica de Morris-Thorne

Por conveniencia se requiere que la métrica sea estática, esféricamente simétrica y asintóticamente plana. Morris y Thorne (MT) propusieron la métrica

$$ds^2 = -e^{2\Phi(r)} dt^2 + \frac{dr^2}{1 - b(r)/r} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.1)$$

Aquí, $\Phi(r)$ y $b(r)$ son dos funciones arbitrarias que dependen únicamente de la coordenada radial. La función $b(r)$ determina la forma espacial del agujero de gusano y se conoce como *función de forma* y $\Phi(r)$ determina el redshift gravitacional, por lo que se conoce como *función de redshift*.

2.2.1. Embebimiento

Para visualizar y entender las propiedades de hipersuperficies en espacios con curvatura se suele usar *diagramas de embebimiento*, que son superficies en un espacio plano que tienen la misma curvatura intrínseca [31] que la hipersuperficie estudiada, en el sentido de que tienen la misma métrica inducida. En nuestro análisis, nos interesa la geometría del espacio tridimensional en algún momento t fijo. Debido a que la geometría es esféricamente simétrica, sin pérdida de generalidad [32], podemos centrar nuestra atención en la sección ecuatorial $\theta = \pi/2$. El elemento de línea de la ecuación 2.1 se reduce a:

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - b(r)/r} + r^2 d\phi^2. \quad (2.2)$$

Nuestro objetivo es construir, en un espacio Euclídeo tridimensional, una superficie bidimensional con la misma geometría que la sección ecuatorial. Es decir, queremos visualizar esta sección removida del espacio tiempo y embebida en un espacio Euclídeo.

Introduciendo coordenadas cilíndricas (r, ϕ, z) , la métrica embebida tiene la forma

$$ds^2 = dz^2 + dr^2 + r^2 d\phi^2. \quad (2.3)$$

Esta superficie embebida es axialmente simétrica y por tanto, puede ser descrita por una función $z = z(r)$ tal que el elemento de línea sea

$$ds^2 = \left[1 + \left(\frac{dz}{dr} \right)^2 \right] dr^2 + r^2 d\phi^2. \quad (2.4)$$

Si identificamos las coordenadas (r, ϕ) del espacio embebido con las coordenadas (r, ϕ) del espacio-tiempo, y requiriendo que la función $z = z(r)$, que describe la superficie embebida, satisfaga

$$\frac{dz}{dr} = \pm \left(\frac{r}{b(r)} - 1 \right)^{-1/2}, \quad (2.5)$$

entonces la superficie $z = z(r)$ está representada por la superficie de la Figura 2.1, y la ecuación 2.5 muestra cómo la función $b = b(r)$ le da forma a la geometría espacial del agujero de gusano.

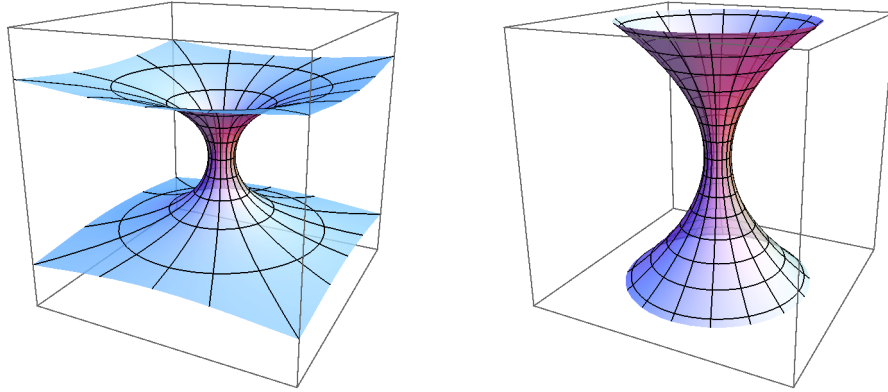


FIGURA 2.1: Diagrama de embebimiento de una sección bidimensional a lo largo del plano ecuatorial $t = \text{const}$, $\theta = \pi/2$ de un agujero de gusano con función de forma (de izquierda a derecha): $b(r) = b_0/r^2$ y $b(r) = b_0$

La geometría tiene un radio mínimo $r_{\min} = b_0$, que se conoce como *garganta*, en el cual la superficie embebida es vertical. Lejos de la garganta, el espacio debe ser asintóticamente plano, i.e. $dz/dr \rightarrow 0$ conforme $r \rightarrow \infty$. Además es necesario imponer la

condición de ensanchamiento, que restringe la forma de la función $r(z)$:

$$\frac{d^2 r}{dz^2} > 0 \quad (2.6)$$

en o cerca de la garganta r_0 . Se puede demostrar [33] que esta condición implica

$$\frac{d^2 r}{dz^2} = \frac{b - rb'}{2b^2} > 0. \quad (2.7)$$

2.2.2. Los Tensores de Riemann, Ricci y Einstein

Para evaluar las fuerzas tidales que experimenta un viajero al cruzar el agujero de gusano, necesitamos calcular los tensores de Riemann y de Einstein. Una forma de simplificar los cálculos es usar el conjunto de vectores que forman una base ortonormal, es decir, el sistema de referencia propio de un conjunto de observadores que permanecen en reposo en el sistema (t, r, θ, ϕ) :

$$\mathbf{e}_{\hat{t}} = e^{-\Phi} \mathbf{e}_t \quad (2.8)$$

$$\mathbf{e}_{\hat{r}} = (1 - b/r)^{1/2} \mathbf{e}_r \quad (2.9)$$

$$\mathbf{e}_{\hat{\theta}} = r^{-1} \mathbf{e}_\theta \quad (2.10)$$

$$\mathbf{e}_{\hat{\phi}} = (r \sin \theta)^{-1} \mathbf{e}_\phi \quad (2.11)$$

En esta base los coeficientes de la métrica toman la forma de la métrica de Minkowski

$$g_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \mathbf{e}_{\hat{\mu}} \cdot \mathbf{e}_{\hat{\nu}} = \eta_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$$

y los componentes no triviales [32] del tensor de Riemann son:

$$R^{\hat{t}}_{\hat{r}\hat{t}\hat{r}} = -R^{\hat{t}}_{\hat{r}\hat{r}\hat{t}} = R^{\hat{r}}_{\hat{t}\hat{t}\hat{r}} = -R^{\hat{r}}_{\hat{t}\hat{r}\hat{t}} = \left(1 - \frac{b}{r}\right) \left[-\Phi'' - (\Phi')^2 + \frac{b'r - b}{2r(r-b)}\right] \quad (2.12)$$

$$R^{\hat{t}}_{\hat{\theta}\hat{t}\hat{\theta}} = -R^{\hat{t}}_{\hat{\theta}\hat{\theta}\hat{t}} = R^{\hat{\theta}}_{\hat{t}\hat{t}\hat{\theta}} = -R^{\hat{\theta}}_{\hat{t}\hat{\theta}\hat{t}} = -\left(1 - \frac{b}{r}\right) \frac{\Phi'}{r} \quad (2.13)$$

$$R^{\hat{t}}_{\hat{\phi}\hat{t}\hat{\phi}} = -R^{\hat{t}}_{\hat{\phi}\hat{\phi}\hat{t}} = R^{\hat{\phi}}_{\hat{t}\hat{t}\hat{\phi}} = -R^{\hat{\phi}}_{\hat{t}\hat{\phi}\hat{t}} = -\left(1 - \frac{b}{r}\right) \frac{\Phi'}{r} \quad (2.14)$$

$$R^{\hat{r}}_{\hat{\theta}\hat{r}\hat{\theta}} = -R^{\hat{r}}_{\hat{\theta}\hat{\theta}\hat{r}} = R^{\hat{\theta}}_{\hat{r}\hat{r}\hat{\theta}} = -R^{\hat{\theta}}_{\hat{r}\hat{\theta}\hat{r}} = \frac{b'r - b}{2r^3} \quad (2.15)$$

$$R^{\hat{r}}_{\hat{\phi}\hat{r}\hat{\phi}} = -R^{\hat{r}}_{\hat{\phi}\hat{\phi}\hat{r}} = R^{\hat{\phi}}_{\hat{r}\hat{r}\hat{\phi}} = -R^{\hat{\phi}}_{\hat{r}\hat{\phi}\hat{r}} = \frac{b'r - b}{2r^3} \quad (2.16)$$

$$R^{\hat{\theta}}_{\hat{\phi}\hat{\theta}\hat{\phi}} = -R^{\hat{\theta}}_{\hat{\phi}\hat{\phi}\hat{\theta}} = R^{\hat{\phi}}_{\hat{\theta}\hat{\theta}\hat{\phi}} = -R^{\hat{\phi}}_{\hat{\theta}\hat{\phi}\hat{\theta}} = \frac{b}{r^3} \quad (2.17)$$

Podemos contraer el tensor de Riemann para calcular el tensor de Ricci $R_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ y la curvatura escalar R . Así, podemos construir el tensor de Einstein, el cual viene dado por:

$$G_{\hat{t}\hat{t}} = \frac{b'}{r^2} \quad (2.18)$$

$$G_{\hat{r}\hat{r}} = -\frac{b}{r^3} + 2\left(1 - \frac{b}{r}\right) \frac{\Phi'}{r} \quad (2.19)$$

$$G_{\hat{\theta}\hat{\theta}} = \left(1 - \frac{b}{r}\right) \left[\Phi'' + (\Phi')^2 - \frac{b'r - b}{2r(r-b)} - \frac{b'r - b}{2r^2(r-b)} + \frac{\Phi'}{r}\right] \quad (2.20)$$

$$G_{\hat{\phi}\hat{\phi}} = G_{\hat{\theta}\hat{\theta}} \quad (2.21)$$

2.2.3. El Tensor Energía-Impulso

Debido a que las ecuaciones de Einstein requieren que el tensor energía-impulso sea proporcional al tensor de Einstein, en nuestra base ortonormal, $T_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ debe tener la misma estructura algebraica que $G_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$. Las únicas componentes no triviales deben ser $T_{\hat{t}\hat{t}}$, $T_{\hat{r}\hat{r}}$, $T_{\hat{\theta}\hat{\theta}}$ y $T_{\hat{\phi}\hat{\phi}}$. Ya que la base se escogió de tal manera que sus componentes tengan una interpretación física¹ en términos de las medidas de observadores estáticos [30],

¹La base ortonormal representa el sistema de referencia propio de un observador que se encuentra en reposo respecto al agujero de gusano.

definimos²

$$T_{\hat{t}\hat{t}} = \rho(r) \quad (2.22)$$

$$T_{\hat{r}\hat{r}} = -\tau(r) \quad (2.23)$$

$$T_{\hat{\theta}\hat{\theta}} = T_{\hat{\phi}\hat{\phi}} = p(r) \quad (2.24)$$

donde $\rho(r)$ es la densidad total de masa-energía, $\tau(r)$ es la tensión por unidad de área en la dirección radial y $p(r)$ es la presión en las direcciones tangenciales (ortogonal a radial). Entonces, el tensor energía-impulso está dado por:

$$\rho(r) = \frac{1}{8\pi} \frac{b'}{r^2} \quad (2.25)$$

$$\tau(r) = \frac{1}{8\pi} \left[\frac{b}{r^3} - 2 \left(1 - \frac{b}{r} \right) \frac{\Phi'}{r} \right] \quad (2.26)$$

$$p(r) = \frac{1}{8\pi} \left(1 - \frac{b}{r} \right) \left[\Phi'' + (\Phi')^2 - \frac{b'r - b}{2r(r-b)} - \frac{b'r - b}{2r^2(r-b)} + \frac{\Phi'}{r} \right] \quad (2.27)$$

2.2.4. La Función de Exoticidad

Para analizar la materia que sostiene el agujero de gusano, se define la función ζ dada por

$$\zeta = \frac{\tau - \rho}{|\rho|} = \frac{b/r - b' - 2(r-b)\Phi'}{|b'|}. \quad (2.28)$$

Combinando la ecuación 2.28 con la ecuación 2.7 podemos re-escribir la función de exoticidad como

$$\zeta = \frac{2b^2}{r|b'|} \left(\frac{d^2r}{dz^2} \right) - \frac{2(r-b)}{|b'|} \Phi'.$$

Si tomamos en cuenta que en la garganta ρ y b' son finitas y $(r-b)\Phi' \rightarrow 0$, tenemos

$$\zeta(r_0) = \frac{\tau(b_0) - \rho(b_0)}{|\rho(b_0)|} > 0. \quad (2.29)$$

La restricción $\tau(b_0) > \rho(b_0)$ nos dice que la tensión radial en la garganta debe ser mayor que la densidad de energía. A la materia que posee estas propiedades se le conoce en la literatura [34] como *materia exótica*. Esta restricción es especialmente problemática

²Cuando el tensor energía impulso es de forma diagonal, entonces es posible demostrar [20] que en el sistema en reposo elegido, el valor propio ligado a la parte temporal representa la densidad de energía y los valores propios de la parte espacial son las presiones principales. A esto se le conoce como un tensor energía-impulso de Hawking-Ellis tipo I.

para medidas hechas por un observador que se mueve a través de la garganta con una velocidad radial cercana a la velocidad de la luz. Sea la transformación de Lorentz $x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\nu} x^{\nu}$ con

$$(\Lambda^{\mu}_{\nu}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

La densidad de energía medida por estos observadores es

$$T_{0'0'} = \Lambda^{\mu}_{0'} \Lambda^{\nu}_{0'} T_{\mu\nu} = \gamma^2 [\rho(b_0) - v^2 \tau(b_0)],$$

con $\gamma = (1 - v^2)^{-1/2}$. Para velocidades suficientemente grandes ($v \rightarrow 1$), el observador medirá una densidad de energía negativa, $T_{0'0'} < 0$.

2.2.5. Condiciones de Energía

La función de exotividad de la ecuación 2.28 está estrechamente relacionada con la Condición Nula de Energía (CNE) que enuncia [29] que para todo vector nulo k^{μ} , tenemos $T^{\mu\nu} k^{\mu} k^{\nu} \geq 0$. Para un tensor energía-impulso diagonal, esto implica $\rho - \tau \geq 0$ y $\rho + p \geq 0$. De hecho estas condiciones son la realización de varios teoremas importantes, como el ‘‘Teorema de Positividad de la Masa’’ [35], que establece que objetos hechos de materia que satisfacen la condición dominante de energía (CDE) no pueden ‘‘anti-gravitar’’ (repeler otros cuerpos gravitacionalmente). Anteriormente verificamos que $\rho(b_0) - \tau(b_0) < 0$, lo cual viola la CNE y todas las condiciones de energía [29] punto a punto (ver Apéndice A). Aunque se sabe que formas clásicas de materia obedecen las condiciones de energía, es un hecho bien conocido que estas son violadas por ciertos campos cuánticos [6, 36],

2.3. Agujeros de Gusano Cargados

Uno de los temas de mayor interés en la física de agujeros de gusano, es la búsqueda de algún mecanismo que altere la teoría de los agujeros de MT y permita su existencia sin la necesidad de tener materia exótica que sostenga la garganta del agujero. Hay

dos formas de modificar la teoría de agujero de gusano: la primera es la generalización a través de una teoría de gravedad modificada, como la teoría de Brans-Dicke [37]; la segunda, y la que trataremos aquí, es añadir materia adicional al tensor energía-impulso.

Las ecuaciones de campo del espacio tiempo del agujero de gusano usual son

$$G_{\mu\nu}^{(0)} = 8\pi T_{\mu\nu}^{(0)},$$

el lado izquierdo $G_{\mu\nu}^{(0)}$ es la geometría del agujero de gusano y el lado derecho $T_{\mu\nu}^{(0)}$ es la materia exótica que viola las condiciones de energía. Si se añade un término adicional $T_{\mu\nu}^{(1)}$ al lado derecho de la ecuación y su correspondiente parte geométrica $G_{\mu\nu}^{(1)}$ al lado izquierdo, tenemos

$$G_{\mu\nu}^{(0)} + G_{\mu\nu}^{(1)} = 8\pi [T_{\mu\nu}^{(0)} + T_{\mu\nu}^{(1)}]. \quad (2.31)$$

que son las ECE que incluyen términos asociados a materia adicional. Para nuestro estudio, $T_{\mu\nu}^{(1)}$ contiene los términos de energía-impulso de alguna forma de carga eléctrica³.

2.3.1. Agujero con campo escalar

Consideremos el caso de un agujero de gusano con un campo escalar sin masa mínimamente acoplado. Los cálculos mostrados aquí son debidos a Kim y Lee [38]. El término adicional del Lagrangiano debido al campo escalar es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\nabla_{\mu}\varphi\nabla_{\nu}\varphi, \quad (2.32)$$

con ecuación de movimiento para φ dada por

$$\square\varphi = 0. \quad (2.33)$$

El tensor energía-impulso se obtiene al variar la acción de la ecuación 2.32, lo cual resulta en

$$T_{\mu\nu}^{(1)} = \nabla_{\mu}\varphi\nabla_{\nu}\varphi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\rho\sigma}\nabla_{\rho}\varphi\nabla_{\sigma}\varphi. \quad (2.34)$$

³Como se verá más adelante, se puede considerar un campo mínimamente acoplado con una carga escalar asociada o una generalización del tipo Reissner-Nordström.

Entonces las componentes del tensor energía-impulso $T_{\mu\nu}^{(1)}$ son

$$T_{tt}^{(1)} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{b}{r}\right) \varphi'^2, \quad (2.35)$$

$$T_{rr}^{(1)} = \frac{1}{2} \varphi'^2, \quad (2.36)$$

$$T_{\theta\theta}^{(1)} = -\frac{1}{2} r^2 \left(1 - \frac{b}{r}\right) \varphi'^2, \quad (2.37)$$

$$T_{\phi\phi}^{(1)} = -\frac{1}{2} r^2 \left(1 - \frac{b}{r}\right) \varphi'^2 \sin^2 \theta. \quad (2.38)$$

En esta geometría, la ecuación de movimiento de φ se reduce a

$$\frac{\varphi''}{\varphi'} + \frac{1}{2} \frac{(1 - b/r)'}{(1 - b/r)} + \frac{2}{r} = 0 \quad \Longrightarrow \quad r^4 \varphi'^2 \left(1 - \frac{b}{r}\right) = \text{const.} \quad (2.39)$$

Se representa la constante de integración con $\alpha/4\pi$. Si añadimos $G_{\mu\nu}^{(1)}$ como una geometría adicional a $G_{\mu\nu}^{(0)}$, la ecuación 2.31 se convierte en

$$\frac{b'}{8\pi r^2} + \frac{1}{8\pi} \frac{\alpha}{r^4} = \rho^{(0)} + \frac{1}{2} \varphi'^2 \left(1 - \frac{b}{r}\right), \quad (2.40)$$

$$\frac{b'}{8\pi r^3} - \frac{1}{8\pi} \frac{\alpha}{r^4} = \tau^{(0)} - \frac{1}{2} \varphi'^2 \left(1 - \frac{b}{r}\right), \quad (2.41)$$

$$\frac{b - rb'}{16\pi r^3} - \frac{1}{8\pi} \frac{\alpha}{r^4} = p^{(0)} - \frac{1}{2} \varphi'^2 \left(1 - \frac{b}{r}\right). \quad (2.42)$$

Esto muestra que al introducir $b_{\text{eff}} = b - \alpha/r$ en lugar de b y $T_{\mu\nu}^{\text{eff}} = T_{\mu\nu}^{(0)} + T_{\mu\nu}^{(1)}$ en lugar de $T_{\mu\nu}^{(0)}$ en las ecuaciones (2.26-2.27), entonces las ecuaciones efectivas van a ser consistentes y van a tener la forma de las ecuaciones (2.40-2.42) con $\Phi = 0$. Por lo tanto, el efecto de un campo escalar en el agujero de gusano está representado por el cambio en la función de forma

$$b \longrightarrow b_{\text{eff}} = b - \alpha/r. \quad (2.43)$$

Ya que α desempeña el rol de una carga escalar, la métrica de un agujero de gusano con carga escalar debe ser

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{dr^2}{1 - b_{\text{eff}}/r} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.44)$$

2.3.2. Agujero con carga eléctrica

En analogía a las soluciones de agujero negro de Schwarzschild y RN, asumimos la forma de la métrica⁴ del agujero de gusano con carga eléctrica como

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{b(r)}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.45)$$

Cuando $Q = 0$, se recupera la métrica de MT. Comparando las métricas de las ecuaciones 2.1 y 2.45, dado que $e^{2\Phi(r)} = 1 + Q^2/r^2$, tenemos

$$\Phi(r) = \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{Q^2}{r^2}\right), \quad (2.46)$$

y debido a que $g_{rr} = 1 - b(r)/r$ en la métrica de la ecuación 2.1, nuevamente podemos definir una *función de forma efectiva* como

$$b_{\text{eff}}(r) = b(r) - \frac{Q^2}{r}, \quad (2.47)$$

de manera que g_{rr} de la métrica 2.45 pueda verse como

$$\left(1 - \frac{b(r)}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} = \left(1 - \frac{b_{\text{eff}}(r)}{r}\right)^{-1}.$$

Así, análogamente al embebimiento realizado en la Sección 2.2.1, podemos escribir:

$$\frac{d^2 r}{dz^2} = \frac{b_{\text{eff}} - r b'_{\text{eff}}}{2b_{\text{eff}}^2} = \frac{r(r(b - rb') - 2Q^2)}{2(rb - Q^2)^2} > 0, \quad (2.48)$$

como la condición de ensanchamiento de un agujero de gusano cargado. Además se asume que $b_{\text{eff}}(r) > 0$ en la vecindad de la garganta. Por otra parte, las ecuaciones de Einstein en la base (2.8)-(2.11) toma la forma

$$8\pi \left(\rho^{(0)} + \rho^{(1)}\right) = \frac{b'}{r^2} + \frac{Q^2}{r^4} \quad (2.49)$$

$$8\pi \left(\tau^{(0)} + \tau^{(1)}\right) = \frac{b}{r^3} - \frac{Q^2}{r^4} + \frac{2Q^2}{r^2(r^2 + Q^2)} \left(1 - \frac{b}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) \quad (2.50)$$

$$\begin{aligned} 8\pi \left(p^{(0)} + p^{(1)}\right) &= \frac{-Q^2}{2r^2(r^2 + Q^2)} \left[2 \left(1 - \frac{b}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) - \left(b' - \frac{b}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)\right] \\ &+ \left(1 - \frac{b}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) \frac{Q^2(2Q^2 + 3r^2)}{r^2(r^2 + Q^2)^2} - \frac{1}{2r^2} \left(b' - \frac{b}{r} + \frac{2Q^2}{r^2}\right) \end{aligned} \quad (2.51)$$

⁴Se propone un ansatz porque en comparación al campo escalar, no es posible resolver las ecuaciones con toda clase de generalidad al añadir carga eléctrica.

De donde vemos que los términos de materia son

$$\rho^{(1)} = \tau^{(1)} = p^{(1)} = \frac{Q^2}{8\pi r^4} \quad (2.52)$$

Sin embargo, aun añadiendo carga eléctrica al agujero de gusano, se sigue requiriendo materia exótica para sostenerlo. Esto es evidente al calcular la función de exotividad:

$$\zeta = \frac{\tau - \rho}{|\rho|} = \frac{2(rb - Q^2)^2}{r|r^2b' + Q^2|} \left(\frac{d^2r}{dz^2} \right) - \frac{2r(r^2 - rb + Q^2)}{|r^2b' + Q^2|} \Phi'. \quad (2.53)$$

En la vecindad de la garganta $(r^2 - rb + Q^2)\Phi' \rightarrow 0$ y usando la condición de ensanchamiento volvemos a deducir la expresión 2.29.

Hasta ahora hemos visto que la Relatividad General, en teoría, permite la existencia de agujeros de gusano de la forma 2.1, 2.44 y 2.45 siempre y cuando exista materia exótica. En particular, vimos en la Sección 2.2.4, que se requiere de materia cuya densidad de energía sea menor a la tensión en la dirección radial⁵. Sin embargo, se conoce varias situaciones en las que la aplicación de la mecánica cuántica hace posible esta clase de fenómenos [33], como la radiación de Hawking y el efecto Cassimir. Recientemente se ha mostrado que ciertas restricciones sobre el valor esperado del tensor energía-impulso, hacen posible sostener un agujero de gusano [39].

2.4. Agujeros de Gusano Cargados Modificados

Se puede restringir la violación de la condición débil de energía por medio de ciertas desigualdades cuánticas que limitan la magnitud y la duración de la densidad de energía negativa. Una de estas desigualdades es válida para un espacio-tiempo de Minkowski inercial sin bordes. Si u^ν es la 4-velocidad de un observador, entonces $\langle T_{\mu\nu}u^\mu u^\nu \rangle$ es el valor esperado de la densidad local de energía en el sistema de referencia del observador. Se requiere que se satisfaga [39] la desigualdad

$$\frac{\tau_0}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\langle T_{\mu\nu}u^\mu u^\nu \rangle d\tau}{\tau^2 - \tau_0^2} \geq -\frac{3}{32\pi^2\tau_0^4}. \quad (2.54)$$

⁵En la literatura, es común encontrar que la existencia de agujeros de gusano depende de la existencia de “energía negativa”. En realidad, este término se refiere a que la densidad de energía respecto a la tensión radial es menor.

De manera que el signo negativo del valor esperado de la densidad de energía se restrinja a un tiempo pequeño [40]. Aquí τ es el tiempo propio del observador y τ_0 es la duración del tiempo de muestreo. Aplicando esta condición a un agujero de gusano atravesable MT [39], se mostró que sin importar la función de forma escogida, no se puede satisfacer la desigualdad 2.54. Como resultado, el tamaño de la garganta sería solo un poco más grande que la longitud de Planck. A pesar de ello, se propuso [40] una generalización particularmente interesante de la métrica 2.45:

$$ds^2 = \left(1 - R(r) + \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{b(r)}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (2.55)$$

donde se ha introducido una función continua y positiva⁶ $R(r)$ que se escoge de tal forma, que se satisfaga la desigualdad 2.54. Se demuestra que si $R(r)$ es

$$R(r) = -1 - \frac{Q^2}{r^2} + e^{2\Phi(r)} e^{-2\Phi(b_0)} \left(1 + \frac{Q^2}{b_0^2}\right), \quad (2.56)$$

donde Φ es la función de redshift de la métrica 2.55, el agujero de gusano resultante será compatible con la teoría cuántica de campos⁷. Así, para una función de forma $b(r) = Ar^B$, $B < 1$ y $Q > 0$, la distancia propia recorrida por un viajero desde la garganta hasta un punto lejano

$$\ell(r) = \int_{r_0}^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - b'_{\text{eff}}(r')/r'}}, \quad (2.57)$$

es finita. Por ejemplo si $b_0 = 5$ [m] y $Q^2 = 0,1$ entonces $\ell(6) = 140$ [m]. Pero si $Q \rightarrow 0$, entonces $\ell(r) \rightarrow \infty$ haciendo al agujero no atravesable.

⁶Se define positiva para evitar la formación de un horizonte de eventos, i.e. $g_{tt} = 0$ para algún $r \geq 0$

⁷Compatible en el sentido de que se satisface la relación 2.54.

Capítulo 3

El formalismo de la métrica de Jacobi y la curvatura Gaussiana

...In almost all textbooks, even the best, this principle (the Jacobi-Maupertuis principle) is presented so that it is impossible to understand. I do not choose to break with tradition....

V. Arnold, *Mathematical Methods for Classical Mechanics*.

La mecánica clásica permite formulaciones diferentes, pero equivalentes, para analizar un sistema mecánico. Las posiciones de un sistema conservativo de n grados de libertad son puntos del *espacio de configuraciones*, una variedad n -dimensional suave. El movimiento del sistema, en la mecánica Lagrangiana, está determinado por un Lagrangiano \mathcal{L} definido en el fibrado tangente $\mathbf{T}\mathcal{M}$ de una variedad \mathcal{M} . Esta variedad 2-dimensional es conocida como el *espacio de fases* del sistema. En la mecánica Hamiltoniana, el movimiento del sistema está determinado por un Hamiltoniano H definido en el fibrado cotangente $\mathbf{T}^*\mathcal{M}$ de \mathcal{M} . En todas estas formulaciones, la idea central para estudiar la dinámica de un sistema es hallar la trayectoria de mínima acción.

La métrica $g_{\mu\nu}$ de una variedad determina el producto interno en el espacio tangente y por lo tanto nos ayuda a definir un elemento de longitud infinitesimal en este espacio tangente, que puede ser integrado para encontrar la longitud de camino entre dos puntos de una variedad. El camino más corto entre tales puntos se define como una *geodésica*, que de acuerdo al principio de Maupertuis [41], es la trayectoria de mínima acción. En

este contexto, podemos hacer énfasis en la elección más apropiada de la métrica en una variedad. La formulación de la métrica de Jacobi-Maupertuis es un proceso para producir geodésicas a partir de un Hamiltoniano. Las geodésicas correspondientes a la métrica de Jacobi, son las mismas bajo reparametrización, que las soluciones del Hamiltoniano $H \in \mathbf{T}^*\mathcal{M}$ original del sistema. Este hecho se conoce como el principio de Euler-Maupertuis-Jacobi. Reduce el problema de encontrar soluciones para el Hamiltoniano a un problema geométrico y obtiene una geodésica $(n - 1)$ -dimensional a partir de una variedad n -dimensional.

Otro aspecto de interés sobre la métrica de Jacobi, es que se puede usar la curvatura Gaussiana asociada para determinar ciertas características sobre la dinámica del sistema. Se demostró que al aplicar la formulación de la métrica de Jacobi al problema de Kepler, el signo de la curvatura Gaussiana es suficiente para clasificar las órbitas en elípticas, parabólicas e hiperbólicas [42].

3.1. Hamiltoniano Natural

La dinámica en una variedad \mathcal{M} puede ser estudiada usando la métrica de Jacobi. Para ver esto, se inicia analizando una métrica estática ($g_{0i} = 0$) en un espacio-tiempo n -dimensional:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = g_{00}dt^2 + g_{ij}dx^i dx^j. \quad (3.1)$$

La dinámica del sistema en esta variedad está definida, bajo reparametrización afín $\tau = x^0 = t$, por la acción

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \mathcal{L}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}), \quad (3.2)$$

donde el Lagrangiano es

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2}mg_{\mu\nu}(\mathbf{x})\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = \frac{1}{2}mg_{ij}\dot{x}^i \dot{x}^j - U(\mathbf{x}) = T - U(\mathbf{x}) \quad (3.3)$$

Si el Lagrangiano tiene la forma “natural” dada en la ecuación 3.3, entonces el Hamiltoniano también tendrá la forma “natural” cuando los momentos generalizados se expresen como funciones de las velocidades. El Hamiltoniano natural para un sistema

dinámico independiente del tiempo, está dado por la transformación de Legendre

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{x}^i - \mathcal{L}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \quad \text{y} \quad p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i} = g_{ij}(\mathbf{x}) \dot{x}^j, \quad (3.4)$$

de modo que el Hamiltoniano es

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = T(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) + U(\mathbf{x}) = \frac{1}{2m} g^{ij}(\mathbf{x}) p_i p_j + U(\mathbf{x}) = E, \quad (3.5)$$

y sus correspondientes ecuaciones de movimiento son

$$\dot{x}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{g^{ij}}{m} p_j, \quad (3.6)$$

$$\dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial x^i} = \frac{1}{2m} \frac{\partial g^{ij}(\mathbf{x})}{\partial x^i} p_i p_j + \frac{\partial U}{\partial x^i}. \quad (3.7)$$

Esto implica que el Lagrangiano 3.3 puede escribirse como

$$\mathcal{L} = 2T - E, \quad (3.8)$$

y por tanto, la variación de la acción 3.2 puede expresarse como

$$\delta S = \delta \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \mathcal{L} \right) = \delta \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau [2T - E] \right) = 2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \delta T. \quad (3.9)$$

Entonces podemos definir una acción efectiva

$$S_{\text{eff}} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau 2T \quad (3.10)$$

Siendo el generador de traslaciones temporales [43], la derivada temporal está dada por el corchete de Poisson $\dot{f} = \{f, H\}$. Naturalmente, cualquier cantidad conservada, estará en involución [44] con este Hamiltoniano, por sí mismo siendo una cantidad conservada:

$$\dot{Q} = \{Q, H\} = 0 \quad (3.11)$$

Este Hamiltoniano está conformado por dos partes: cuadrática y potencial. Ahora veremos como reducirlo a un Hamiltoniano homogéneamente cuadrático.

3.2. La métrica de Jacobi no relativista

En la ecuación 3.10 podemos ver que para cantidades conservadas, existe una fórmula alternativa para la acción. Esta acción es suficiente para describir las geodésicas con cantidades conservadas. El Lagrangiano efectivo asociado a esta acción puede ser manipulado para expresarse como una integral sobre el elemento de línea:

$$\begin{aligned}
 S_{\text{eff}} &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \, 2T = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \sqrt{2T} \sqrt{2T} \\
 &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \sqrt{2(E - U)} \sqrt{m g_{ij}(\mathbf{x}) \dot{x}^i \dot{x}^j} \\
 &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \sqrt{2m(E - U) g_{ij}(\mathbf{x}) \dot{x}^i \dot{x}^j} \\
 &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \sqrt{\left(\frac{ds_{\text{eff}}}{d\tau}\right)^2}
 \end{aligned}$$

Así, la métrica efectiva o métrica de Jacobi está dada por

$$ds_{\text{eff}}^2 = 2m(E - U) g_{ij}(\mathbf{x}) dx^i dx^j \quad (3.12)$$

Esto quiere decir que podemos ver las curvas solución del Hamiltoniano natural como las geodésicas de una métrica especial. Este proceso reduce el problema n -dimensional, a hallar una geodésica espacial $(n - 1)$ dimensional con un Hamiltoniano conservado re-escalado

$$g^{ij}(\mathbf{x}) p_i p_j = 2m[E - U(\mathbf{x})] \implies \tilde{H} = \frac{g^{ij}(\mathbf{x})}{2m[E - U(\mathbf{x})]} p_i p_j = 1. \quad (3.13)$$

Básicamente se ha tomado la parte de la energía cinética de la energía total del sistema, y se la ha rescalado [45] con un factor conforme, en un sistema equivalente a una esfera de momentum unitaria. Entonces la métrica y su transformada inversa están dadas por.

$$\tilde{g}^{ij}(\mathbf{x}) p_i p_j = 1, \quad (3.14)$$

$$\tilde{g}^{ij}(\mathbf{x}) = \frac{g^{ij}(\mathbf{x})}{2m[E - U(\mathbf{x})]} \implies \tilde{g}^{ij}(\mathbf{x}) = 2m[E - U(\mathbf{x})] g_{ij}(\mathbf{x}). \quad (3.15)$$

donde la energía cinética del sistema actúa como factor conforme.

3.3. Cantidades Conservadas y la constante de Clairaut

Los cálculos de este subcapítulo se deben a Chanda et al. [46]. A partir del Hamiltoniano 3.13, podemos escribir las ecuaciones de la dinámica del sistema con respecto a un nuevo parámetro s :

$$\frac{dx^i}{ds} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial p_i} = \frac{g^{ij}(\mathbf{x})}{2m[E - U(\mathbf{x})]} p_j \quad (3.16)$$

$$\frac{dp_i}{ds} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial x^i} = -\frac{1}{2m[E - U(x)]} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial g^{ij}(\mathbf{x})}{\partial x^i} p_i p_j + \frac{\partial U}{\partial x^i} \right] \quad (3.17)$$

Al comparar las ecuaciones 3.6 y 3.7, vemos que las ecuaciones dinámicas quedan inalteradas, excepto por una reparametrización dada por:

$$\frac{ds}{dt} = 2m[E - U(x)]. \quad (3.18)$$

Consecuentemente, para cualquier cantidad conservada $K = K^{(2)ij} p_i p_j + K^{(0)}$ tenemos

$$\frac{dK}{ds} = \{K, \tilde{H}\} = \frac{dt}{ds} \frac{dK}{dt} = \frac{1}{2m[E - U(\mathbf{x})]} \{K, H\}. \quad (3.19)$$

$$\{K, \tilde{H}\} = 0 \implies \{K, H\} = 0. \quad (3.20)$$

Por otro lado, podemos describir $\tilde{K} = K^{(2)ij} p_i p_j + K^{(0)} \tilde{H}$, donde de acuerdo con la ecuación 3.13, vemos que

$$\tilde{K} = K^{(2)ij} p_i p_j + K^{(0)} \tilde{H} = K^{(2)ij} p_i p_j + K^{(0)} = K \implies \tilde{H} = 1 \quad (3.21)$$

Por lo tanto, las cantidades conservadas son las mismas para la métrica de Jacobi. Por ejemplo, si la métrica espacial exhibe simetría esférica

$$g_{ij}(\mathbf{x}) dx^i dx^j = W^2(\mathbf{x}) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (3.22)$$

existe una conservación de momentum angular. Entonces usando la ecuación 3.18, tendremos el momentum angular conservado para $\theta = \pi/2$ en la forma conocida como constante de Clairaut

$$R = 2mr^2 (E - U(\mathbf{x})) \frac{d\varphi}{ds} = mr^2 \frac{d\varphi}{d\tau} = \text{const}, \quad (3.23)$$

mostrando que el momento angular R en la ecuación 3.23, como primera integral de movimiento es invariante bajo la formulación mostrada en la ecuación 3.21.

3.4. La métrica de Jacobi relativista

Los resultados mostrados en el Subcapítulo 3.2 se pueden extender a una geometría Lorentziana. Chanda et al. mostraron que al considerar la métrica

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -V^2(\mathbf{x}) dt^2 + g_{ij}(\mathbf{x}) dx^i dx^j, \quad (3.24)$$

y su correspondiente Lagrangiano dado por

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = m \sqrt{V^2(\mathbf{x}) \dot{t}^2 - g_{ij}(\mathbf{x}) \dot{x}^i \dot{x}^j}, \quad (3.25)$$

donde $\dot{x}^i = dx^i/dt$. Las coordenadas conjugadas de momentum están dadas por

$$H = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} = \frac{m V^2(\mathbf{x}) \dot{t}}{\sqrt{V^2(\mathbf{x}) \dot{t}^2 - g_{ij}(\mathbf{x}) \dot{x}^i \dot{x}^j}} = \mathcal{E}, \quad (3.26)$$

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i} = - \frac{m g_{ij}(\mathbf{x}) \dot{x}^j}{\sqrt{V^2(\mathbf{x}) \dot{t}^2 - g_{ij}(\mathbf{x}) \dot{x}^i \dot{x}^j}}. \quad (3.27)$$

Entonces tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^2 - m^2 V^2(\mathbf{x}) &= m^2 V^2(\mathbf{x}) \left(\frac{V^2(\mathbf{x}) \dot{t}^2}{V^2(\mathbf{x}) \dot{t}^2 - g_{ij}(\mathbf{x}) \dot{x}^i \dot{x}^j} - 1 \right) \\ &= \frac{m^2 V^2(\mathbf{x}) g_{ij}(\mathbf{x}) \dot{x}^i \dot{x}^j}{V^2(\mathbf{x}) \dot{t}^2 - g_{ij}(\mathbf{x}) \dot{x}^i \dot{x}^j}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

De la ecuación 3.27 podemos ver que

$$\mathcal{E}^2 - m^2 V^2(\mathbf{x}) = V^2(\mathbf{x}) g^{ij}(\mathbf{x}) p_i p_j \implies \frac{V^2(\mathbf{x}) g^{ij}(\mathbf{x})}{\mathcal{E}^2 - m^2 V^2(\mathbf{x})} p_i p_j = 1. \quad (3.29)$$

Entonces de la métrica inversa, vemos que la métrica de Jacobi está dada por

$$J^{ij}(\mathbf{x}) = \frac{V^2(\mathbf{x})}{\mathcal{E}^2 - m^2 V^2(\mathbf{x})} g^{ij}(\mathbf{x}) \implies J_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{\mathcal{E}^2 - m^2 V^2(\mathbf{x})}{V^2(\mathbf{x})} g_{ij}(\mathbf{x}). \quad (3.30)$$

En consecuencia, para una energía relativista fija \mathcal{E} , todas las geodésicas tipo temporal son geodésicas de la métrica de Jacobi.

Para analizar la evolución de esta métrica bajo la aproximación no relativista, supongamos que escribimos la componente temporal de la métrica como

$$V^2(\mathbf{x}) = 1 + \frac{2U(\mathbf{x})}{m} \quad (3.31)$$

bajas las condiciones

$$2U(\mathbf{x}) \ll m \quad g^{ij}(\mathbf{x})p_i p_j \ll m^2 \quad (3.32)$$

De la ecuación 3.30, podemos ver que usando las ecuaciones 3.31 y 3.32 obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \sqrt{V^2(m^2 + g^{ij}(\mathbf{x})p_i p_j)} \\ &= m \sqrt{\left(1 + \frac{2U(\mathbf{x})}{m}\right)} \sqrt{\left(1 + \frac{g^{ij}(\mathbf{x})p_i p_j}{m^2}\right)} \\ &\approx \left(1 + \frac{U(\mathbf{x})}{m} + \dots\right) \left(m + \frac{1}{2} \frac{g^{ij}(\mathbf{x})p_i p_j}{m} + \dots\right) \\ &= m + \frac{1}{2} \frac{g^{ij}(\mathbf{x})p_i p_j}{m} + U(\mathbf{x}) + \dots \\ &= m + T + U(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Ahora re-escribamos la energía como

$$\mathcal{E} \approx m + E \quad E = T + U(\mathbf{x}) \ll m,$$

$$\left(\frac{\mathcal{E}}{m}\right)^2 = \left(1 + \frac{E}{m}\right)^2 \approx 1 + \frac{2E}{m}. \quad (3.33)$$

Aplicando las aproximaciones 3.33 y 3.32, la métrica de Jacobi 3.30 se convierte en

$$\begin{aligned} J_{ij}(\mathbf{x}) &= \frac{\mathcal{E}^2 - m^2 V^2(\mathbf{x})}{V^2(\mathbf{x})} g_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{\left(\frac{\mathcal{E}}{m}\right)^2 - V^2(\mathbf{x})}{\left(\frac{V(\mathbf{x})}{m}\right)^2} g_{ij}(\mathbf{x}), \\ &\approx \frac{\left(1 + \frac{2E}{m}\right) - \left(1 + \frac{2U(\mathbf{x})}{m}\right)}{\frac{1}{m} \left(1 + \frac{2U(\mathbf{x})}{m}\right)} g_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{2m(E - U(\mathbf{x}))}{\left(1 + \frac{2U(\mathbf{x})}{m}\right)} g_{ij}(\mathbf{x}) \\ &\approx 2m(E - U(\mathbf{x})) \left(1 - \frac{2U(\mathbf{x})}{m}\right) g_{ij}(\mathbf{x}) \\ &\approx 2m(E - U(\mathbf{x})) g_{ij}(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

Entonces la aproximación no relativista está de acuerdo con el resultado de la ecuación 3.12.

3.5. Curvatura Gaussiana

La curvatura Gaussiana es una medida intrínseca de curvatura, que depende solamente de distancias y ángulos medidos sobre una variedad, no en la forma en la que está isométricamente embebida en una variedad de dimensión superior [47]. Este es un resultado muy importante de la geometría diferencial conocido como *Theorema Egregium*¹. El signo de la curvatura Gaussiana puede ser usado para caracterizar una trayectoria [48]. Para un punto $p \in \mathcal{M}$ decimos que

- Si $K_G|_p > 0$, se dice que p es un punto elíptico.
- Si $K_G|_p < 0$, se dice que p es un punto hiperbólico o punto de ensilladura.
- Si $K_G|_p = 0$, se dice que p es un punto parabólico.

Para un curva paramétrica $\gamma(t)$ y $a, b \in \mathbb{R}$, decimos que γ es

- una curva elíptica en $[a, b]$ si para todo $t \in [a, b]$, $\gamma(t)$ es un punto elíptico.
- una curva hiperbólica en $[a, b]$ si para todo $t \in [a, b]$, $\gamma(t)$ es un punto hiperbólico.
- una curva parabólica en $[a, b]$ si para todo $t \in [a, b]$, $\gamma(t)$ es un punto parabólico.

El formalismo de la métrica de Jacobi permite clasificar las trayectorias de energía constante en una variedad de dimensión inferior. En general, la curvatura Gaussiana de un espacio conformalmente plano² puede ser calculada directamente [50]. Así, con la finalidad de aplicarlo a las geodésicas que sigue una partícula consideraremos el movimiento solamente en dos dimensiones (debido a la conservación del momentum angular en un potencial radial). En general, para una métrica bidimensional

$$ds^2 = f^2(r) \left(\frac{dr^2}{g^2(r)} + r^2 d\phi^2 \right), \quad (3.34)$$

¹En breves rasgos, el *Theorema Egregium* establece que una isometría local preserva la curvatura Gaussiana. En otras palabras, la curvatura Gaussiana de una superficie depende solamente de cantidades intrínsecas de la superficie, no de cantidades dependientes del espacio ambiente.

²Sea (\mathcal{M}, g) una variedad pseudo-Riemanniana, entonces (\mathcal{M}, g) es conformalmente plana si para todo $x \in \mathcal{M}$, existe una vecindad U de x y una función suave f definida en U tal que $(U, e^{2f}g)$ se anula en U . En particular, toda variedad pseudo-Riemanniana bidimensional es conformalmente plana. Ver [49]

el procedimiento para calcular la curvatura Gaussiana consiste en tomar los vectores base no-coordenados

$$\hat{\theta}^1 = \frac{f}{g} dr, \quad \hat{\theta}^2 = rf d\phi, \quad (3.35)$$

y usando las ecuaciones de estructura de Cartan [51] (ver Apéndice B) se calcula:

$$\omega^2_1 = (rf)' \frac{g}{f} d\phi \implies d\omega^2_1 = \left\{ (rf)'' \frac{g}{f} + (rf)' \left(\frac{g}{f} \right)' \right\} \frac{g}{rf^2} \hat{\theta}^1 \wedge \hat{\theta}^2. \quad (3.36)$$

Finalmente, la curvatura Gaussiana es:

$$K_g = - \left\{ (rf)'' \frac{g}{f} + (rf)' \left(\frac{g}{f} \right)' \right\} \frac{g}{rf^2}. \quad (3.37)$$

3.6. Problema de Kepler

El movimiento de dos cuerpos bajo la acción de una fuerza de atracción mutua puede ser reducido al movimiento de un solo cuerpo que se mueve en un plano bajo la influencia de una fuerza central.

Tomemos el espacio de configuraciones como el espacio Euclídeo \mathcal{E}^2 en coordenadas polares (r, ϕ) y el origen como el centro de la fuerza central. La función potencial $U(r)$ que describe la fuerza central es independiente de ϕ . Entonces, la métrica de Jacobi de este sistema mecánico simple relativo a la energía E está descrito por la ecuación 3.12:

$$ds^2 = 2m(E - U(r))g_{ij}dx^i dx^j = 2m(E - U(r))(dr^2 + r^2 d\phi^2). \quad (3.38)$$

Haciendo $f^2(r) = 2m(E - U(r))$ y $g^2(r) = 1$, encontramos que la curvatura Gaussiana es

$$K_g = \frac{(E - U)(rU')' + r(U')^2}{4mr(E - U)^3}. \quad (3.39)$$

Para el movimiento en un potencial gravitacional Newtoniano, la función de energía potencial del problema de fuerza central es $U(r) = -k/r$. Usando la ecuación anterior, la curvatura Gaussiana es

$$K_g = - \frac{kE}{4m(rE + k)^3}, \quad (3.40)$$

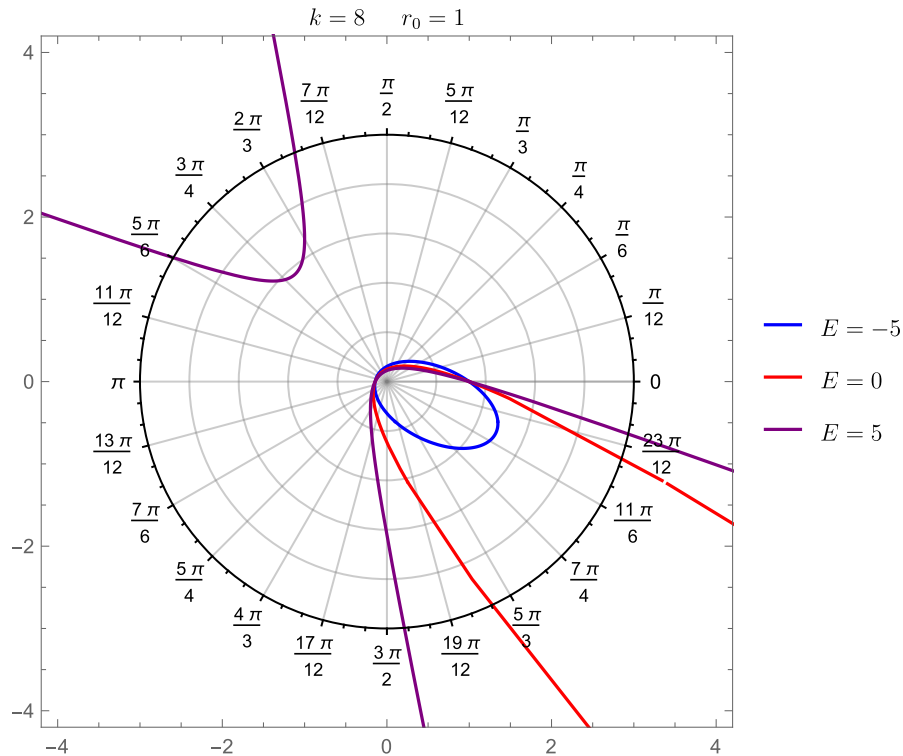


FIGURA 3.1 Ejemplo de las trayectorias del problema clásico de Kepler. Cuando $E > 0$, $E = 0$ y $E < 0$ tenemos órbitas hiperbólica (púrpura), parabólicas (rojo) y elípticas (azul) respectivamente.

con ecuación de trayectoria [52] descrita por

$$r = \frac{2}{k + \sqrt{4E + k^2} \cos\left(\phi - \phi_0 - \arccos\left(\frac{2/r_0 - k}{\sqrt{4E + k^2}}\right)\right)}, \tag{3.41}$$

donde r_0 y ϕ_0 son las condiciones iniciales de movimiento. Entonces, bajo la clasificación clásica de órbitas [52] tenemos

$$\begin{cases} E > 0 & \implies K_G < 0 & \text{órbita hiperbólica} \\ E = 0 & \implies K_G = 0 & \text{órbita parabólica} \\ E < 0 & \implies K_G > 0 & \text{órbita elíptica} \end{cases}$$

En el problema clásico de Kepler son posibles órbitas con forma de hipérbola, parábola y elipse (ver Figura 3.1). Para $E < 0$, todas las geodésicas excepto aquellas dirigidas hacia la singularidad en el origen son órbitas cerradas. El resto de geodésicas con $E = 0$ y $E > 0$ son todas órbitas abiertas. Se puede demostrar [42] que en la aproximación clásica, es suficiente conocer el signo de la curvatura Gaussiana de la métrica de Jacobi para clasificar el tipo de geodésicas resultante.

Así como en el último ejemplo, el uso de la métrica de Jacobi trae muchas ventajas en relación al cálculo clásico de las geodésicas o de ciertas cantidades características del sistema, como el momento angular, la energía o la temperatura. Además, existen otras aplicaciones en las que la métrica de Jacobi simplifica enormemente los cálculos. Por ejemplo, es posible calcular la temperatura de un agujero negro que se desintegra de una manera simple y poco extensa [53]. (Ver Apéndice C).

Capítulo 4

Dinámica de agujeros de gusano y la métrica de Jacobi

Un aspecto importante en el estudio de la transversabilidad de los agujeros de gusano es el movimiento a lo largo de geodésicas. Clásicamente, esto se hace estudiando las geodésicas nulas y tipo temporal [54] resolviendo la ecuación de las geodésicas

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\nu\sigma} \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\sigma}{ds} = 0, \quad (4.1)$$

donde x^μ son las coordenadas de una curva $\gamma(s) \in \mathcal{M}$ y $\Gamma^\mu_{\nu\sigma}$ son los símbolos de Christoffel, que escritos en términos de la métrica se expresan como:

$$\Gamma^\mu_{\nu\sigma} = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} (\partial_\nu g_{\sigma\rho} + \partial_\sigma g_{\nu\rho} - \partial_\rho g_{\nu\sigma}). \quad (4.2)$$

Sin embargo, una forma alternativa de abordar este problema es aplicando el formalismo de la métrica de Jacobi, formulado el capítulo anterior. En este capítulo presentamos dicha aplicación sobre la métrica de un agujero de gusano con función de redshift $\Phi = 0$, que incluye la métrica de Morris-Thorne [55] y la versión escalar de la métrica de agujero de gusano cargado

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{dr^2}{1 - b(r)/r + Q^2/r^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (4.3)$$

Luego se discute la aplicación sobre la métrica de agujero de gusano con carga con función de redshift $\Phi = \frac{1}{2} \ln(1 + Q^2/r^2)$.

4.1. La métrica de Jacobi para agujeros de gusano estáticos

En general, sabemos que la solución de las ecuaciones de Einstein que describe la geometría del espacio-tiempo de un agujero de gusano es

$$ds^2 = -e^{2\Phi(r)} dt^2 + e^{2\alpha(r)} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (4.4)$$

donde $\Phi(r)$ es la función de redshift y $\alpha(r)$ es una función arbitraria suave de r . La coordenada radial r tiene un valor mínimo r_0 . Para asegurar la transversabilidad¹ del agujero, se requiere que $g_{tt} \neq 0$, lo que implica que $\Phi(r)$ es finito. Usando la ecuación 3.30 encontramos la métrica de Jacobi correspondiente a el elemento de línea 4.4:

$$J_{ij} dx^i dx^j = \frac{E^2 - m^2 e^{2\Phi(r)}}{e^{2\Phi(r)}} \left(e^{2\alpha(r)} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right). \quad (4.5)$$

Sin pérdida de generalidad (debido a la simetría esférica) podemos considerar la sección ecuatorial $\theta = \pi/2$, entonces tenemos

$$ds^2 = \frac{E^2 - m^2 e^{2\Phi(r)}}{e^{2\Phi(r)}} \left(e^{2\alpha(r)} dr^2 + r^2 d\phi^2 \right), \quad (4.6)$$

por lo tanto podemos escribir

$$\frac{E^2 - m^2 e^{2\Phi(r)}}{e^{2\Phi(r)}} \left\{ e^{2\alpha(r)} \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\phi}{ds} \right)^2 \right\} = 1. \quad (4.7)$$

Por otra parte, la constante de Clairaut corresponde físicamente al momento angular:

$$l = \frac{E^2 - m^2 e^{2\Phi(r)}}{e^{2\Phi(r)}} r^2 \frac{d\phi}{ds}. \quad (4.8)$$

Reemplazando este resultado en 4.7, encontramos

$$\frac{(E^2 - m^2 e^{2\Phi(r)})^2}{e^{4\Phi(r)}} \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 = \left(\frac{E^2}{e^{2\Phi(r)}} - m^2 - \frac{l^2}{r^2} \right) e^{-2\alpha(r)}. \quad (4.9)$$

¹ Aceptando la existencia de materia exótica.

De la ecuación 4.8, tenemos que

$$ds = \frac{E^2 - m^2 e^{2\Phi(r)} r^2}{e^{2\Phi(r)}} \frac{r^2}{l} d\phi. \quad (4.10)$$

Reemplazando el resultado anterior en la ecuación 4.9, encontramos:

$$\left(\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\phi} \right)^2 = \frac{m^2}{l^2} \left(\frac{E^2}{m^2 e^{2\Phi(r)}} - 1 - \frac{l^2}{m^2 r^2} \right) e^{-2\alpha(r)}. \quad (4.11)$$

Para simplificar la forma de esta ecuación hacemos el cambio de variable $u = 1/r$, con lo cual obtenemos

$$\left(\frac{du}{d\phi} \right)^2 = \frac{1}{h^2} \left(\frac{\tilde{E}^2}{e^{2\Phi(1/u)}} - 1 - h^2 u^2 \right) e^{-2\alpha(1/u)}, \quad (4.12)$$

donde $\tilde{E} = E/m$ y $h = l/m$. Para continuar es necesario darle una forma definida a las funciones Φ y α . Haremos esto en dos partes, primero usaremos la métrica de agujero de gusano cargado², para después repetir el procedimiento con la métrica de agujero cargado modificado.

4.2. Métrica con función de redshift $\Phi = 0$

Para recuperar la métrica usual de agujero de gusano con la función de redshift más simple, establecemos

$$e^{2\Phi(r)} = 1, \quad e^{2\alpha(r)} = \frac{1}{1 - b(r)/r + q/r^2}. \quad (4.13)$$

En particular, restringimos nuestra atención a la función de forma $b(r) = b_0^2 r^{-1}$. Teniendo en cuenta el cambio de variable realizado sobre la coordenada radial:

$$e^{2\Phi(1/u)} = 1, \quad e^{2\alpha(1/u)} = \frac{1}{1 - u^2(b_0^2 - q)}, \quad (4.14)$$

la primera integral de movimiento 4.15 nos queda

$$\left(\frac{du}{d\phi} \right)^2 = (C^2 - u^2) (1 - u^2[b_0^2 - q]), \quad (4.15)$$

²Consideraremos también dentro de este caso a la métrica de Morris-Thorne. Como se vió en la Sección 2.3, al establecer $b_{\text{eff}} = b - Q^2/r$, generalizamos directamente todos los cálculos para el agujero de gusano cargado.

donde $C^2 = (\tilde{E}^2 - 1)/h^2$. Dadas las condiciones iniciales $u(\phi_0) = 1/l_0$, la solución de la ecuación diferencial es

$$r = \frac{1}{C \operatorname{sn} \left(\phi - \phi_0 + F \left[\arcsin \left(\frac{1}{l_0 C} \right), (b_0^2 - q)C^2 \right], (b_0^2 - q)C^2 \right)}. \quad (4.16)$$

La función $\operatorname{sn}(\cdot, \cdot)$ es el seno elíptico y $F[\cdot, \cdot]$ es la integral elíptica de primer tipo (ver Apéndice D).

4.2.1. Órbitas circulares

Si definimos $f(u) = (C^2 - u^2)(1 - u^2[b_0^2 - q])$, es posible estudiar la existencia de órbitas circulares requiriendo que $f(u)$ y $f'(u)$ sean cero en algún punto $u = u_c$. Por tanto tenemos

$$f(u) = (C^2 - u^2)(1 - u^2[b_0^2 - q]) = 0, \quad (4.17)$$

$$f'(u) = -2u \{1 - (b_0^2 - q)(2u^2 - C^2)\} = 0. \quad (4.18)$$

Al resolver el sistema anterior, encontramos que para una órbita circular, se debe satisfacer

$$u_c^2 = C^2 = \frac{1}{b_0^2 - q}, \quad (4.19)$$

lo cual implica que el radio de esta órbita es $r_c = \sqrt{b_0^2 - q}$. En general, se alcanza una órbita estable cuando

$$f''(u) = -2 \{1 - (b_0^2 - q)(6u^2 + C^2)\} > 0. \quad (4.20)$$

En nuestro caso $f''(u_c) = 12 > 0$, entonces la única órbita circular estable se localiza en la garganta y la solución de la ecuación de movimiento 4.16 se reduce a

$$r = \frac{1}{C} \left[1 + \frac{2}{\frac{l_0 C + 1}{l_0 C - 1} e^{2(\phi - \phi_0)} - 1} \right]. \quad (4.21)$$

En las figuras 4.1 y 4.2 se muestra que conforme $\phi \rightarrow \infty$, la órbita circular se ubica en $r = \sqrt{b_0^2 - q}$. Las trayectorias no estables alcanzan sus máximos puntos de acercamiento en la garganta, como en las figuras 4.3 y 4.4.

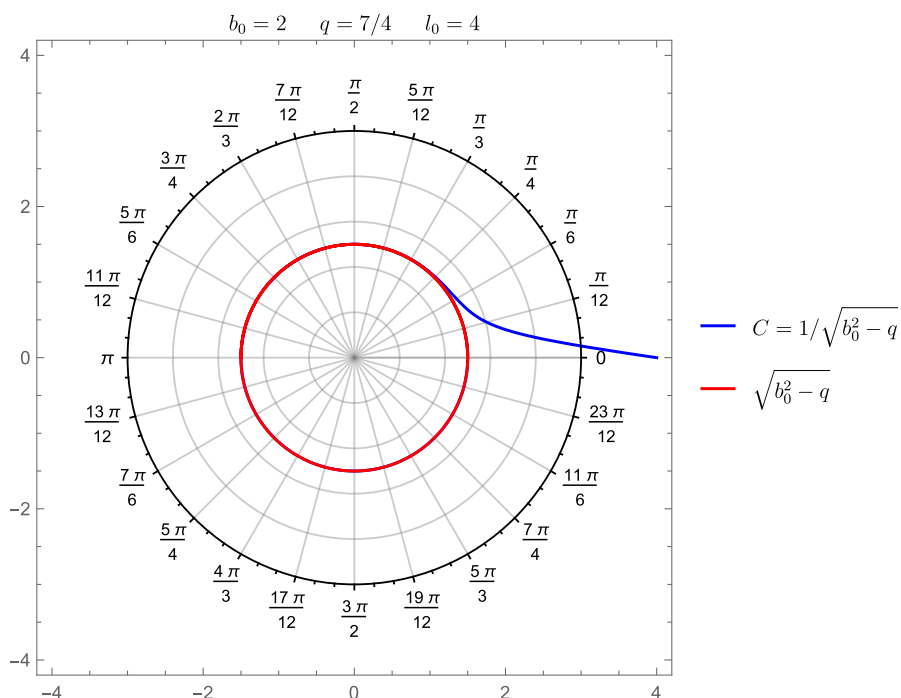


FIGURA 4.1 Gráfico polar de la trayectoria de una partícula con distancia radial inicial $l_0 = 4$ en un agujero de gusano cargado con tamaño de garganta $\sqrt{b_0^2 - q} = 1,5$. La única órbita estable es aquella para la cual $C = 1/\sqrt{b_0^2 - q}$.

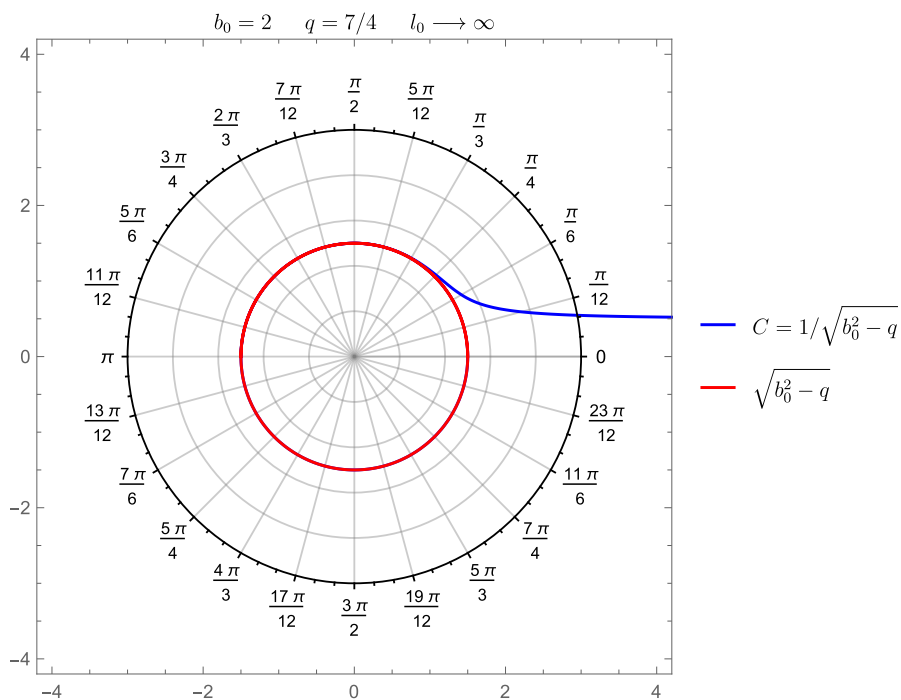


FIGURA 4.2 Gráfico polar de la trayectoria estable de una partícula proveniente de una distancia radial $l_0 \rightarrow \infty$ en un agujero de gusano cargado con tamaño de garganta $\sqrt{b_0^2 - q} = 2$.

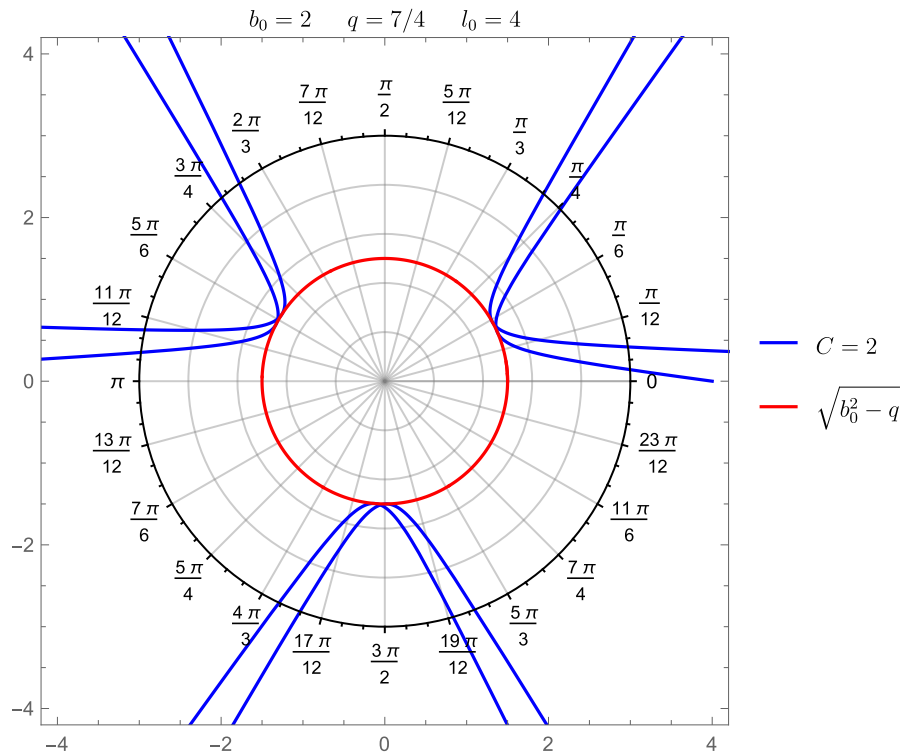


FIGURA 4.3 Gráfico polar de una trayectoria abierta con distancia radial inicial $l_0 = 4$ en un agujero de gusano cargado con tamaño de garganta $\sqrt{b_0^2 - q} = 1,5$.

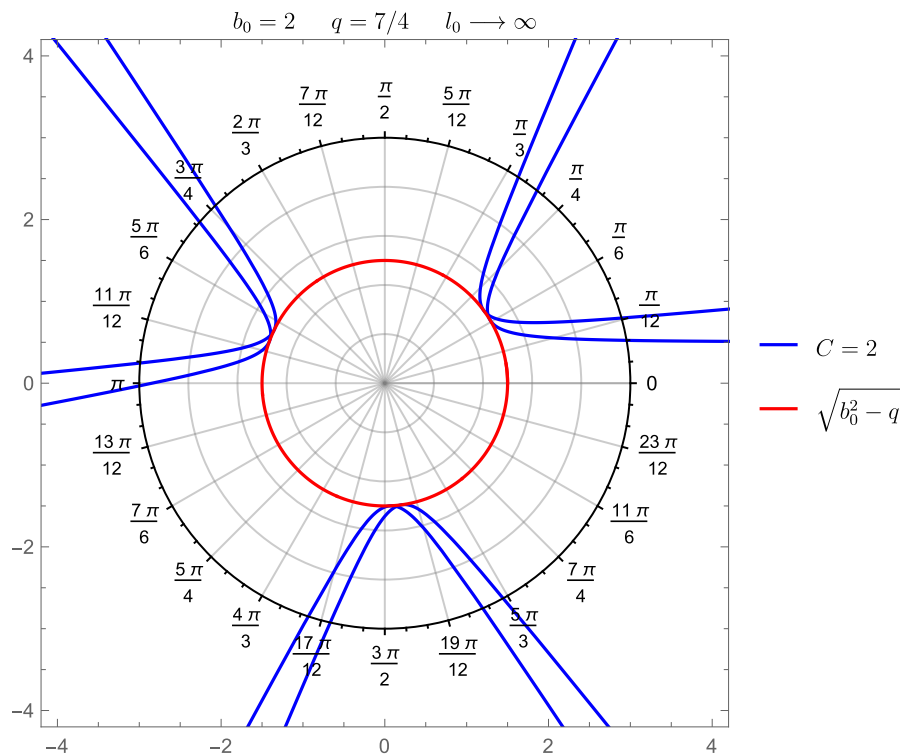


FIGURA 4.4 Gráfico polar de una trayectoria abierta de una partícula proveniente de una distancia radial $l_0 \rightarrow \infty$ en un agujero de gusano cargado con tamaño de garganta $\sqrt{b_0^2 - q} = 1,5$.

4.2.2. Curvatura Gaussiana

Usando la ecuación 3.37 con la métrica 4.6 y las definiciones 4.13, obtenemos

$$K_g = \frac{r(rb' - b) + 2q}{2r^4(E^2 - m^2)}. \quad (4.22)$$

El factor $r(rb' - b) + 2q$ determina el signo de la curvatura Gaussiana. De la Sección 2.2.1, sabemos que dicho factor corresponde a la condición de ensanchamiento $rb'_{\text{eff}} - b_{\text{eff}} = [r(rb' - b) + 2q]/r < 0$, entonces K_g es negativa para $E^2 > m^2$. La curvatura Gaussiana también se puede re-escribir usando las ecuaciones 2.49 y 2.50 para reemplazar los valores de b y b' en la curvatura Gaussiana, con lo cual obtenemos

$$K_g = \frac{4\pi(\rho - \tau)}{E^2 - m^2}. \quad (4.23)$$

Si restringimos nuestro análisis a la vecindad de la garganta, vemos que

$$K_g|_{r=b_0} = \frac{4\pi(\rho(b_0) - \tau(b_0))}{E^2 - m^2} < 0, \quad (4.24)$$

es decir, la negatividad de la curvatura Gaussiana es equivalente a la existencia de la condición de ensanchamiento y de materia exótica.

4.2.3. Clasificación de órbitas del problema de Kepler

Consideremos ahora el movimiento de una partícula bajo la acción de una fuerza en un espacio-tiempo dado por la métrica de agujero de gusano cargado [55]. En el límite en el que el potencial central $U \ll m$, usando la ecuación 3.37 con la métrica 2.44, la curvatura Gaussiana es

$$K_g = \frac{2\chi r [(E - U)(U' + rU'') + r(U')^2] + \zeta(2(E - U)^2 - rU'(E - U))}{r^4(2(E - U))^3}, \quad (4.25)$$

donde $\chi = r^2 - rb + q$ y $\zeta = r(rb' - b) + 2q$. Para un potencial Newtoniano $U(r) = -\alpha/r$, la curvatura Gaussiana se reduce a

$$K_g = \frac{\{E^2 r^2 + (Er + \alpha)^2\} (q - b_0^2) - \alpha E r^3}{8r^3 (Er + \alpha)^3}. \quad (4.26)$$

El signo de la expresión anterior contiene información valiosa sobre el tipo de órbita. Si definimos

$$\beta_{\pm} = -\frac{\alpha}{2r} \left(1 + \frac{r^2}{2(b_0^2 - q)} \pm \sqrt{\left(1 + \frac{r^2}{2(b_0^2 - q)} \right)^2 - 2} \right), \quad (4.27)$$

obtenemos la siguiente clasificación

CUADRO 4.1: Clasificación de trayectorias para $0 < r^2/2(b_0^2 - q) \leq \sqrt{2} - 1$.

$0 < \frac{r^2}{2(b_0^2 - q)} \leq \sqrt{2} - 1$	$K_g < 0$ si $-\frac{\alpha}{r} < E$	órbita hiperbólica
--	--------------------------------------	--------------------

CUADRO 4.2: Clasificación de trayectorias para $\sqrt{2} - 1 < r^2/2(b_0^2 - q) < 1/2$.

$\sqrt{2} - 1 < \frac{r^2}{2(b_0^2 - q)} < \frac{1}{2}$	$K_g < 0$ si $-\frac{\alpha}{r} < E < \beta_-$	órbita hiperbólica
	$K_g > 0$ si $\beta_- < E < \beta_+$	órbita elíptica
	$K_g < 0$ si $E > \beta_+$	órbita hiperbólica
	$K_g = 0$ si $E = \beta_{\pm}$	órbita parabólica

CUADRO 4.3: Clasificación de trayectorias para $r^2/2(b_0^2 - q) \geq 1/2$.

$\frac{r^2}{2(b_0^2 - q)} \geq \frac{1}{2}$	$K_g > 0$ si $-\frac{\alpha}{r} < E < \beta_+$	órbita elíptica
	$K_g < 0$ si $E > \beta_+$	órbita hiperbólica
	$K_g = 0$ si $E = \beta_+$	órbita parabólica

Dadas las condiciones de las tablas 4.1, 4.2 y 4.3, en general solo podemos hablar del signo de la curvatura Gaussiana para cada punto, a lo sumo por intervalos. Para ver más claramente esto, a través de la métrica de Jacobi, resolvemos la ecuación de movimiento del sistema:

$$\left(\frac{du}{d\phi} \right)^2 = k^2(u^2 - 1/k^2)(u^2 - \alpha u - E), \quad (4.28)$$

cuya solución es

$$r = \frac{\gamma \mathcal{P}(k\phi + \mathcal{C}, \{g_2, g_3\}) + \delta}{\alpha \mathcal{P}(k\phi + \mathcal{C}, \{g_2, g_3\}) + \beta}, \quad (4.29)$$

donde \mathcal{P} es la función P de Weierstrass y $g_2, g_3, \alpha, \beta, \delta, \gamma$ son las constantes definidas en el apéndice D.1. La constante \mathcal{C} es una constante de integración dada por

$$\mathcal{C} = \int_{-\beta/\alpha}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2s - g_3}}. \quad (4.30)$$

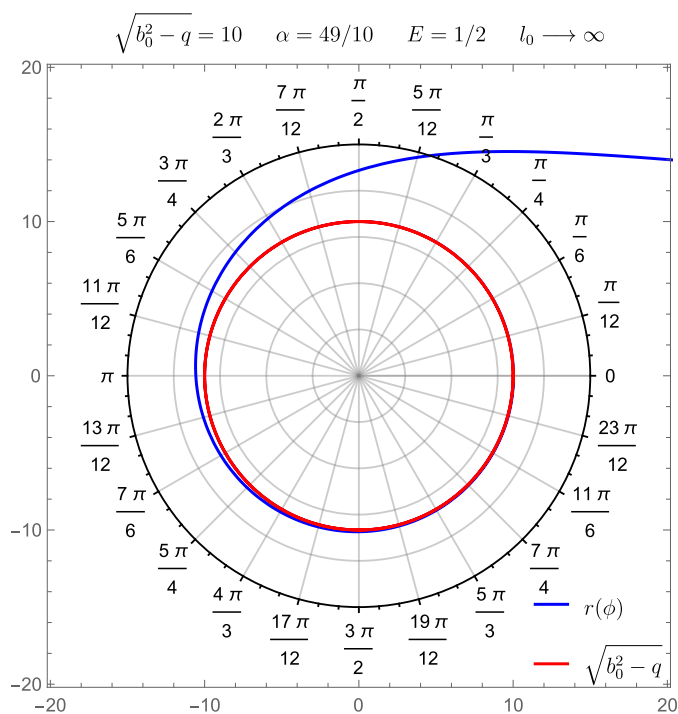


FIGURA 4.5 Gráfico polar de una trayectoria estable del problema de Kepler en un agujero de gusano cargado con tamaño de garganta $\sqrt{b_0^2 - q} = 10$.

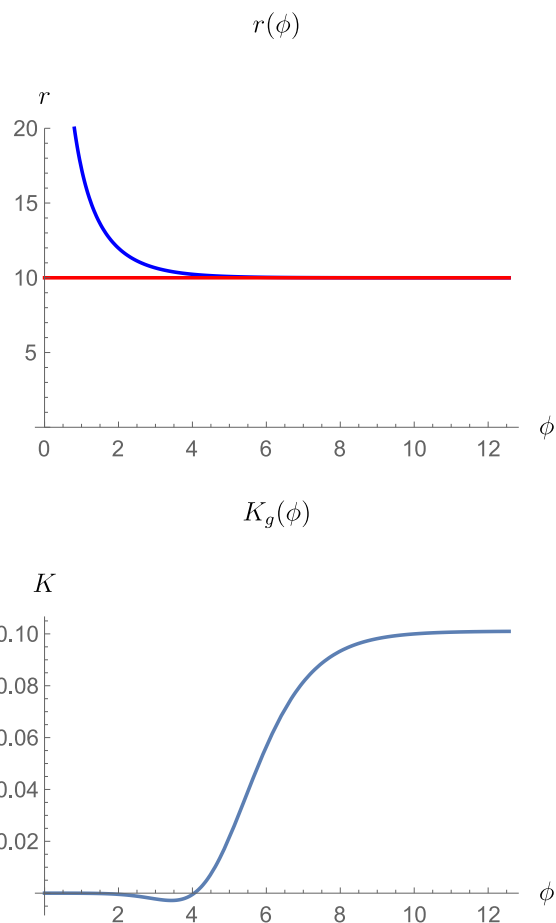


FIGURA 4.6 Arriba: Trayectoria cerrada de la partícula (azul) y garganta del agujero de gusano (rojo) como funciones de ϕ . Abajo: La curvatura Gaussiana es negativa cuando r es grande (puntos hiperbólicos) y es igual a cero en un solo punto (punto parabólico). Conforme ϕ se incrementa, la curvatura alcanza un valor positivo constante (trayectoria elíptica) correspondiente a la curvatura de la garganta del agujero de gusano.

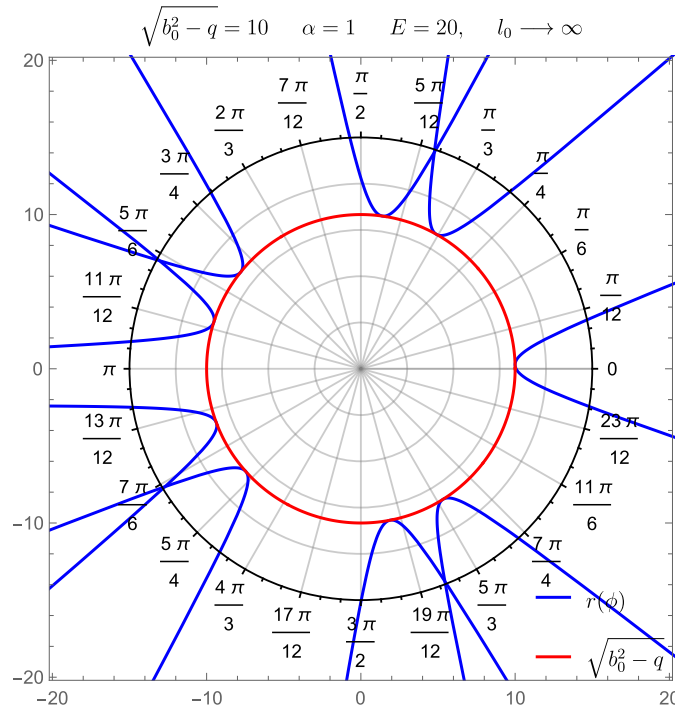


FIGURA 4.7 Gráfico polar de una trayectoria abierta del problema de Kepler en un agujero de gusano cargado con tamaño de garganta $\sqrt{b_0^2 - q} = 10$.

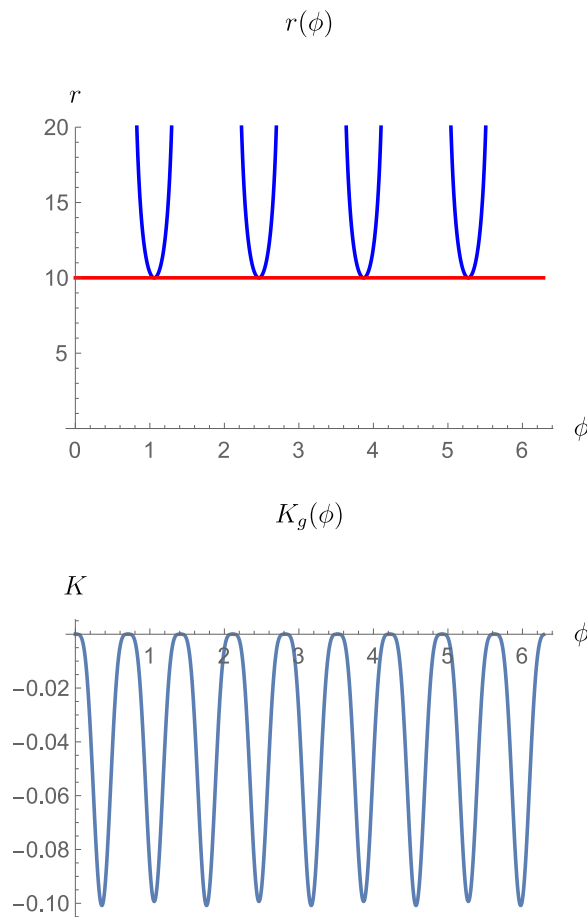


FIGURA 4.8 Arriba: Trayectoria abierta de la partícula (azul) y garganta del agujero de gusano (rojo) como funciones de ϕ . Abajo: La curvatura Gaussiana como una función de ϕ es cíclica y negativa (puntos hiperbólicos) para todos los valores de ϕ excepto para un conjunto contable de puntos para los cuales $K_g = 0$ (puntos parabólicos).

La solución 4.29 existe siempre y cuando la integral de la ecuación 4.30 converja. Contrario al problema clásico de Kepler en donde la curvatura Gaussiana tiene un solo signo a lo largo de toda la trayectoria, la figura 4.6 (ver también la figura 4.5) muestra que para un agujero de gusano cargado escalar, la curvatura Gaussiana puede ser negativa, cero y positiva para distintos intervalos de una misma trayectoria. Asimismo como en la figura 4.8 (ver también la figura 4.7), es posible que la curvatura Gaussiana muestre un comportamiento cíclico, pudiendo ser la curvatura Gaussiana negativa y nula. No se pudo encontrar soluciones cuya curvatura Gaussiana sea positiva y cíclica.

4.3. Métrica de agujero de gusano cargado con $\Phi \neq 0$

Para obtener la ecuación de movimiento en un espacio-tiempo con métrica de agujero cargado, en la ecuación 4.12 reemplazamos

$$e^{2\Phi} = 1 + \frac{Q^2}{r^2} = 1 + u^2 r^2, \quad e^{2\alpha} = \frac{1}{1 - b(r)/r + Q^2/r^2} = \frac{1}{1 - (b_0^2 - Q^2)u^2}. \quad (4.31)$$

Entonces la ecuación de movimiento para esta geometría es

$$\begin{aligned} \left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 &= \frac{1}{h^2} \left(\frac{E^2}{1 + u^2 Q^2} - 1 - h^2 u^2 \right) (1 - [r_0^2 - Q^2]u^2), \\ &= -\frac{(u^4 Q^2 + u^2 [Q^2/h^2 + 1] - C^2)(1 - [b_0^2 - Q^2]u^2)}{1 + u^2 Q^2}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

No se conoce una solución general exacta para esta ecuación. A diferencia de la integral de movimiento de la sección anterior, donde la ecuación diferencial depende de un polinomio de cuarto orden y puede resolverse dentro de la teoría general de las integrales elípticas; la ecuación anterior depende de una función racional con polinomios de sexto y segundo orden de la que no se conoce un tratamiento general. Todos nuestros intentos de resolución numérica muestran que para valores arbitrarios de E , h , α , Q y b_0 , la solución no converge.

En cuanto a la curvatura Gaussiana, en comparación a la ecuación 4.26, la curvatura en un espacio-tiempo de agujero de gusano cargado se complica considerablemente. La

curvatura Gaussiana es:

$$K_G = \frac{2\chi E^2 r^2 Q^2 [r^2 \xi + m^2 Q^2 (r^2 + 2Q^2) + r^4 (E^2 - m^2)] + \zeta \xi (r^2 + Q^2) [(r^2 + Q^2) \xi + E^2 r^2 Q^2]}{2r^4 (r^2 + Q^2) \xi^3}, \quad (4.33)$$

donde

$$\xi = E^2 r^2 - m^2 (r^2 + Q^2), \quad (4.34)$$

$$\chi = r^2 - rb + Q^2, \quad (4.35)$$

$$\zeta = r(rb' - b) + 2Q^2. \quad (4.36)$$

La curvatura Gaussiana dada en la ecuación 4.33 no tiene un signo definido, su signo dependerá de las combinaciones de valores de la carga y la masa, así como el valor de b_o . El problema de Kepler en un agujero de gusano cargado todavía no se ha resuelto, y esperamos que este formalismo ayude a clarificar algunos aspectos del movimiento. Hemos transformado un problema que involucra ecuaciones diferenciales no-lineales a un problema de determinar el signo de una función polinomial de cierto grado. Aunque ciertamente es un avance, todavía se requiere resolver algunos problemas antes de proceder a la generalización.

Capítulo 5

Conclusiones

En este estudio se ha analizado la dinámica de los agujeros de gusano en la formulación de Jacobi-Maupertuis. En el caso relativista, la métrica de Jacobi nos permite deducir las ecuaciones de movimiento y una condición que muestra que la curvatura Gaussiana asociada depende de dos de los componentes del tensor energía impulso: la tensión radial y la densidad de energía. Particularmente en las cercanías de la garganta, esta condición implica la necesidad de la existencia de materia exótica para mantener el agujero. En el caso no relativista, la curvatura Gaussiana nos permitió encontrar una clasificación natural para el tipo de órbitas del problema de Kepler de un espacio de agujero de gusano con carga escalar, que aunque estrictamente solo pueda aplicarse punto a punto, nos da una idea de las características de la trayectoria. Se encontró varias condiciones para las cuales las órbitas son hiperbólicas, parabólicas o elípticas. Como una nota adicional, hemos visto que los cálculos de las ecuaciones de movimiento a través de la métrica de Jacobi son considerablemente más simples que el cálculo clásico de la ecuación de las geodésicas.

Por lo tanto concluimos que:

(i) La simplificación de los cálculos ocurre en la forma funcional de la acción. No es necesario considerar la forma completa de la ecuación de Hamilton-Jacobi porque se introdujo a la energía de la partícula para hacer posible la separación de variables de la acción en una parte espacial y otra temporal. Una característica importante del formalismo de la métrica de Jacobi es que la energía de la partícula aparece de forma explícita

en la métrica de Jacobi y por lo tanto, la ecuación de Hamilton-Jacobi en este espacio $(n - 1)$ dimensional aparece como una función de derivadas espaciales solamente, haciendo que la teoría se manifieste en un espacio no covariante. Desde un punto de vista geométrico, podríamos decir que el método de la métrica de Jacobi proyecta las geodésicas a una hipersuperficie de energía constante.

(ii) La expresión de la curvatura Gaussiana para la métrica de Jacobi relativista del agujero de gusano con carga escalar contiene términos del tensor energía-impulso directamente relacionados con la existencia de materia exótica en la garganta del agujero de gusano. Esto parece indicar que en la garganta de todo agujero de gusano, la curvatura Gaussiana es inminentemente negativa y de hecho, puede ser una forma alternativa de caracterizar una métrica genérica como la métrica de un agujero de gusano, lo cual no es un problema trivial. Para determinar correctamente esta relación, deben llevarse a cabo futuros estudios en una formulación totalmente covariante de la curvatura Gaussiana.

iii) La formulación no relativista de la métrica de Jacobi nos permitió clasificar las geodésicas a través del signo de la curvatura Gaussiana. De acuerdo a esta clasificación, hay intervalos en los que la trayectoria puede verse como abierta (órbita parabólica o hiperbólica) o cerrada. En los casos en que la curvatura es positiva para algún intervalo, la curvatura tiende a alcanzar un máximo correspondiente a la curvatura de la garganta del agujero de gusano. Cuando la curvatura Gaussiana es negativa, esta tiende a oscilar entre un valor mínimo y cero. Estos resultados se obtuvieron para el agujero de gusano MT con un campo escalar mínimamente acoplado. En el caso del agujero de gusano tipo RN, fue imposible determinar alguna relación para los signos de la curvatura y tampoco una solución numérica de la integral de movimiento.

iv) Una generalización del problema contenido en este trabajo es la consideración a sistemas no estacionarios. Si la métrica es dependiente del tiempo, el Hamiltoniano no va a ser una cantidad conservada y el método de la métrica de Jacobi no sería aplicable. Para abordar este problema, en primera instancia se debería encontrar una forma de la métrica de Jacobi que dependa explícitamente del tiempo. Para ello, se realiza un *levantamiento de Einsenhart-Duval*, un proceso que introduce una dimensión adicional y por tanto, una cantidad conservada adicional. Esto permite encontrar una ecuación de

momentum de la que es posible definir una métrica de Jacobi dependiente del tiempo [56].

El estudio de la métrica de Jacobi podría ser útil para abordar problemas que involucren la dinámica de partículas en cualquier espacio-tiempo estático. A futuro podrían plantearse trabajos acerca del efecto de lentes gravitacionales causado por agujeros de gusano. De hecho, ya podemos encontrar en la literatura estudios que muestran que es posible calcular la deflexión gravitacional de partículas debido a un agujero de gusano en el límite de campo débil, y se ha encontrado [57] que a partir de la curvatura Gaussiana es posible encontrar el ángulo de deflexión, mostrando que este puede ser visto como un efecto puramente topológico. Un acercamiento similar se puede aplicar para el estudio de lentes gravitacionales de un agujero negro [58].

Apéndice A

Condiciones de Energía

Las condiciones de energía en la Relatividad General permiten deducir teoremas generales sobre el comportamiento de campos gravitacionales fuertes y geometrías cosmológicas. Las condiciones de energía no son restricciones físicas, sino consecuencias matemáticas de la teoría.

A.1. Cantidades Observables

Para tener un entendimiento básico de las condiciones de energía, primero hay que comprender algunas cantidades escalares y vectoriales construidas a partir de vectores tipo temporal, vectores nulos y el tensor energía-momento.

Recordemos que si (\mathcal{M}, g) es una variedad Lorentziana, entonces los vectores tangentes en cada punto pueden ser clasificados en tres tipos diferentes. Un vector tangente \mathbf{X} es

- Tipo temporal si $g(\mathbf{X}, \mathbf{X}) < 0$.
- Nulo o tipo luz si $g(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = 0$.
- Tipo espacial si $g(\mathbf{X}, \mathbf{X}) > 0$.

En primer lugar, un campo vectorial unitario tipo temporal \mathbf{X} puede ser interpretado como un campo que define las líneas de mundo de una familia de observadores. Entonces el campo escalar

$$\rho = T_{\mu\nu} X^\mu X^\nu \tag{A.1}$$

puede ser interpretado como la densidad total de masa-energía (materia más campo de energía de cualquier campo no gravitacional) medido por los observadores. Similarmente, el campo vectorial con componentes $-T^\mu{}_\nu X^b$ representa el momentum medido por los observadores.

Segundo, dado un campo vectorial nulo arbitrario \mathbf{k} , el campo escalar

$$\nu = T_{\mu\nu} k^\mu k^\nu \quad (\text{A.2})$$

puede considerarse un limitador de la densidad de masa-energía.

Tercero, en el caso de la Relatividad General, dado un campo vectorial tipo temporal arbitrario \mathbf{X} , que describe el movimiento de una familia de observadores, el campo escalar de Raychaudhuri [59] es el campo escalar obtenido al tomar la traza del tensor tidal correspondiente a estos observadores en cada punto:

$$E[\mathbf{X}]^m{}_m = R_{\mu\nu} X^\mu X^\nu \quad (\text{A.3})$$

Esta cantidad juega un papel central en la ecuación de Raychaudhuri. Entonces, de las ecuaciones de campo de Einstein se obtiene

$$\frac{1}{8\pi} E[\mathbf{X}]^m{}_m = \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right) \quad (\text{A.4})$$

donde $T = T^m{}_m$ es la traza del tensor energía-momentum.

A.2. Formulación Matemática

Existen al menos siete tipos de condiciones de energía en la Relatividad General clásica: la nula, la débil, la fuerte, la dominante y sus versiones promediadas. En adelante asumiremos que el tensor energía-momentum es del tipo Hawking-Ellis. En un sistema ortonormal conveniente, las componentes del tensor energía-momentum están dadas por

$$T^{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_3 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.5})$$

Estas componentes son la densidad de energía y las tres presiones principales.

A.2.1. Condición Nula de Energía (CNE)

Para todo vector nulo k ,

$$\text{CNE} \Leftrightarrow T_{\mu\nu} k^\mu k^\nu \geq 0. \quad (\text{A.6})$$

En términos de las presiones principales

$$\text{CNE} \Leftrightarrow \forall j, \quad \rho + p_j \geq 0. \quad (\text{A.7})$$

A.2.2. Condición Débil de Energía (CdE)

Para todo campo vectorial tipo temporal \mathbf{X} , la densidad de materia observada por los correspondientes observadores es siempre no negativa:

$$\text{CdE} \Leftrightarrow T_{\mu\nu} X^\mu X^\nu \geq 0. \quad (\text{A.8})$$

Además se puede notar que por continuidad, esta condición implica la condición débil de energía. El significado físico de esta condición es que la densidad local de energía medida por un observador tipo temporal es positiva. En términos de las presiones principales

$$\text{CdE} \Leftrightarrow \rho \geq 0, \quad \text{y} \quad \forall j, \quad \rho + p_j \geq 0 \quad (\text{A.9})$$

A.2.3. Condición Fuerte de Energía (CFE)

Para todo vector tipo temporal

$$\text{CFE} \Leftrightarrow \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right) X^\mu X^\nu \geq 0. \quad (\text{A.10})$$

Aquí, T es la traza del tensor energía-momentum, $T = T_{\mu\nu} g^{\mu\nu}$. Por continuidad, la condición fuerte de energía implica la condición nula de energía. En términos de las presiones principales

$$T = -\rho + \sum_j p_j \quad (\text{A.11})$$

y

$$\text{CFE} \Leftrightarrow \forall j, \quad \rho + p_j \geq 0, \quad \text{y} \quad \rho + \sum_j p_j \geq 0. \quad (\text{A.12})$$

A.2.4. Condición Dominante de Energía (CDE)

Para todo vector tipo temporal

$$\text{CDE} \Leftrightarrow T_{\mu\nu} X^\mu X^\nu \geq 0, \quad \text{y} \quad T_{\mu\nu} X^\nu \quad \text{no es tipo temporal.} \quad (\text{A.13})$$

En otras palabras, la densidad de energía medida localmente es siempre positiva y el flujo de energía es siempre de tipo temporal o nulo. La condición dominante de energía implica la condición débil de energía y, por lo tanto, también la condición nula de energía, pero no necesariamente la condición fuerte de energía. En términos de las presiones principales

$$\text{CDE} \Leftrightarrow \rho \geq 0, \quad \text{y} \quad \forall j, \quad p_j \in [-\rho, +\rho] \quad (\text{A.14})$$

A.2.5. Condición Nula de Energía Promediada (CNEP)

Se dice que la condición Nula de Energía Promediada se cumple en una curva Γ si

$$\text{CNEP}[\Gamma] \Leftrightarrow \int_{\Gamma} T_{\mu\nu} k^\mu k^\nu \, d\lambda \geq 0. \quad (\text{A.15})$$

Aquí λ es una parametrización afín generalizada de la curva nula. Denotamos el correspondiente vector tangente por k^μ . Notemos que permitir una parametrización arbitraria no sería útil, ya que la ANEC sería equivalente a la NEC. Debido a la arbitrariedad multiplicativa del parámetro afín generalizado, la ANEC está bien definida solo si la constante multiplicativa es positiva.

Para analizar la ANEC en términos de las presiones principales, podemos definir una función de normalización ξ , y cosenos directores $\cos \psi_i$ por

$$k^{\hat{\mu}} \equiv \xi(1; \cos \psi_i). \quad (\text{A.16})$$

Entonces

$$\text{CNEP}[\Gamma] \Leftrightarrow \int_{\Gamma} \left(\rho + \sum_j p_j \cos^2 \psi_j \right) \xi^2 \, d\lambda \geq 0. \quad (\text{A.17})$$

A.2.6. Condición Débil de Energía Promediada (CdEP)

Se dice que la condición débil de energía promediada se cumple en una curva tipo temporal Γ si

$$\text{CdEP}[\Gamma] \Leftrightarrow \int_{\Gamma} T_{\mu\nu} X^{\mu} X^{\nu} ds \geq 0. \quad (\text{A.18})$$

Aquí s denota la parametrización propia de la curva tipo temporal Γ , cuyo vector tangente correspondiente se denota por X^{μ} . Con la elección de s como tiempo propio, se tiene

$$X^{\hat{\mu}} \equiv \gamma(1; \beta \cos \psi_i). \quad (\text{A.19})$$

Entonces

$$\text{CdEP}[\Gamma] \Leftrightarrow \int_{\Gamma} \gamma^2 \left(\rho + \beta^2 \sum_j p_j \cos^2 \psi_j \right) ds \geq 0. \quad (\text{A.20})$$

A.2.7. Condición Fuerte de Energía Promediada (CFEP)

Se dice la condición fuerte de energía promediada se cumple en una curva tipo temporal Γ si

$$\text{CFEP}[\Gamma] \Leftrightarrow \int_{\gamma} \left(T_{\mu\nu} X^{\mu} X^{\nu} + \frac{1}{2} T \right) ds \geq 0. \quad (\text{A.21})$$

En términos de las presiones principales

$$\text{CFEP}[\Gamma] \Leftrightarrow \int_{\Gamma} \left\{ \gamma^2 \left(\rho + \beta^2 \sum_j p_j \cos^2 \psi_j \right) - \frac{1}{2} \rho + \frac{1}{2} \sum_j p_j \right\} ds \geq 0. \quad (\text{A.22})$$

Si $\beta \rightarrow 1$, entonces $\gamma \rightarrow \infty$, mientras que $\gamma ds \rightarrow d\lambda$ y $ds \rightarrow 0$. En este límite, la CFEP se reduce a la CNEP.

A.3. Algunas Violaciones conocidas

Se conoce muchos sistemas físicos teóricos y experimentales que violan una o más condiciones de energía. A continuación enunciamos las más conocidas.

A.3.1. Campos Escalares Clásicos

La violación más trivial de las condiciones de energía aparece al considerar el campo clásico masivo mínimamente acoplado descrito por la densidad Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2. \quad (\text{A.23})$$

El tensor energía-momentum es

$$T^{\mu\nu} = \nabla^\mu\phi\nabla^\nu\phi - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}([\nabla\phi]^2 + m^2\phi^2). \quad (\text{A.24})$$

Así que para cualquier vector unitario tipo temporal

$$\left(T^{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu}\right)X^\mu X^\nu = [V \cdot \nabla\phi]^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2. \quad (\text{A.25})$$

Entonces se viola la CFE si tomamos ϕ como independiente del tiempo en un sistema donde $X^\mu = (1, 0, 0, 0)$. Un ejemplos físico de un sistema descrito por un Lagrangiano escalar es el campo de Higgs, que ha sido confirmado experimentalmente [60].

A.3.2. Efecto Casimir

El efecto Casimir es inducido por la presencia de dos conductores eléctricos que distorsionan el estado base de energía del vacío electrodinámico cuántico. Los cálculos originales de Casimir consideraban dos planos conductores paralelos separados por una distancia pequeña a . El hecho de que las placas sean conductoras implica que se imponen condiciones de frontera en el campo electromagnético, en especial con los modos transversales posibles contenidos entre las placas. Dicho cálculo nos conduce a una densidad de energía entre las placas

$$\rho = -\frac{\pi^2\hbar}{720a^4}. \quad (\text{A.26})$$

Como la densidad de energía es negativa, automáticamente se viola todas las condiciones no promediadas de energía. El hecho de que el efecto Casimir sea real, es evidencia experimental de que en ocasiones, las condiciones de energía son violadas por efectos cuánticos.

A.3.3. Evaporación de Hawking

La existencia de la radiación de Hawking proveniente de la evaporación de un agujero negro aún no ha sido confirmada experimentalmente. Sin embargo, este proceso es relativamente bien aceptado. Esquemas de cálculo distintos convergen en el mismo resultado, lo cual nos da considerable confianza para aceptarlo.

El simple hecho de que la evaporación de Hawking ocurra viola el teorema de incremento de área para agujeros negros clásicos. Esto implica que los procesos cuánticos detrás de la evaporación de Hawking deben también inducir la violación de una o más suposiciones usadas para deducir el teorema clásico de incremento de área. La única suposición que parece vulnerable a los efectos cuánticos es la suposición de la CNE.

Apéndice B

Conexión de Spin

Es una conexión en el fibrado de spinores inducida, canónicamente, desde la conexión afín. También puede ser vista como un campo gauge generado por transformaciones de Lorentz.

B.1. Definición

Sea e_μ^a la tétrada o vierbein, que es un conjunto de campos vectoriales de espacio-tiempo ortogonales que diagonaliza el tensor métrico

$$g_{\mu\nu} = e_\mu^a e_\nu^b \eta_{ab} \tag{B.1}$$

donde $g_{\mu\nu}$ es la métrica espacio-temporal y η_{ab} es la métrica de Minkowski. Aquí, los índices latinos denotan los índices del sistema de referencia de Lorentz local; y los índices griegos denotan los índices de las coordenadas generales. La ecuación B.1 expresa $g_{\mu\nu}$ en términos de la base e_μ^a , haciéndola localmente plana. Los índices griegos pueden ser bajados y subidos usando la métrica $g_{\mu\nu}$ mientras los índices latinos “Lorentzianos” son bajados y subidos usando η_{ab} . Por ejemplo $e^{\mu a} = g^{\mu\nu} e_\nu^a$ y $e_{\nu a} = \eta_{ab} e_\nu^b$.

B.2. El Formalismo de Cartan

En Relatividad General es posible establecer un sistema de coordenadas localmente inercial, válido en una región suficientemente pequeña del espacio-tiempo. Estrictamente hablando, esta debe ser una región infinitesimal rodeada en un punto $p \in \mathcal{M}$ de coordenadas x^μ . Podemos denotar estas coordenadas locales por y^a la matriz de transformación que relaciona los dos sistemas de coordenadas, base coordenada y coordenadas localmente inerciales, por

$$e_a{}^\mu(p) = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^a} \quad e^a{}_\mu = \frac{\partial y^a}{\partial x^\mu} \quad (\text{B.2})$$

En las bases coordenadas, \mathbf{T}_p es generado por $\{\mathbf{E}_\mu\} = \{\partial/\partial x^\mu\}$ y \mathbf{T}_p^* por $\{dx^\mu\}$. Ahora, podemos expresar una nueva base de vectores en un sistema de coordenadas inercialmente locales (espacio-tiempo localmente Minkowski) por la combinación lineal

$$\mathbf{e}_a = e_a{}^\mu \mathbf{E}_\mu \quad (\text{B.3})$$

para una nueva base de \mathbf{T}_p y una nueva base dual de \mathbf{T}_p^* :

$$\theta^b = e^b{}_\nu dx^\nu \quad (\text{B.4})$$

De B.3, podemos ver que la nueva base $\{\mathbf{e}_a\}$ es el sistema de referencia de vectores de la base que se obtiene al rotar la base $\{\mathbf{E}_\mu\}$ preservando la orientación. La nueva base $\{\mathbf{e}_a\}$ se conoce como base no-coordenada del espacio tangente \mathbf{T}_p .

El tensor métrico se puede definir en términos de bases no coordenadas como

$$\begin{aligned} g &= g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu = \eta_{ab} (e^a{}_\mu dx^\mu) \otimes (e^b{}_\nu dx^\nu) \\ g &= \eta_{ab} \theta^a \otimes \theta^b \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Por otra parte, recordemos que el tensor de torsión se define como

$$\mathbf{T}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y} - \nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{X} - [\mathbf{X}, \mathbf{Y}] \quad (\text{B.6})$$

donde $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbf{T}_p$. Usando este formalismo de bases no coordenadas, podemos definir la 2-forma de torsión a partir de la ec. B.6 como

$$T^a = d\theta^a + \omega^a_b \wedge \theta^b, \quad (\text{B.7})$$

que se conoce como la primera ecuación de estructura de Cartan. ω^a_b es el coeficiente de conexión. Si la variedad es libre de torsión entonces tenemos

$$d\theta^a = -\omega^a_b \wedge \theta^b. \quad (\text{B.8})$$

Ahora, de la definición de curvatura

$$\mathbf{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{Z} = \nabla_{\mathbf{X}}\nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{Z} - \nabla_{\mathbf{Y}}\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Z} - \nabla_{[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]}\mathbf{Z}. \quad (\text{B.9})$$

donde $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \in \mathbf{T}_p$, podemos definir la 2-forma de curvatura como

$$\Theta^a_b = d\omega^a_b + \omega^a_\gamma \wedge \omega^\gamma_b, \quad (\text{B.10})$$

que se conoce como la segunda ecuación de estructura de Cartan.

B.3. Ejemplo de aplicación: Curvatura Gaussiana

Consideremos una métrica de la forma

$$ds^2 = f^2(r) \left(\frac{dr^2}{g^2(r)} + r^2 d\phi^2 \right), \quad (\text{B.11})$$

que puede ser re-escrita como la suma de productos tensoriales de los elementos de una base ortogonal:

$$g = \left(\frac{f}{g} \right)^2 dr \otimes dr + (rf)d\phi \otimes d\phi = \theta^1 \otimes \theta^1 + \theta^2 \otimes \theta^2. \quad (\text{B.12})$$

De este resultado, deducimos que

$$\theta^1 = \frac{f}{g} dr, \quad \theta^2 = (rf)d\phi. \quad (\text{B.13})$$

Debido a que trabajamos en una variedad sin torsión, usando la ecuación B.8, tenemos que

$$d\theta^2 = -\omega^2_1 \wedge \theta^1 - \omega^2_2 \wedge \theta^2. \quad (\text{B.14})$$

Por otra parte, haciendo la derivada exterior de θ^2 , nos queda

$$d\theta^2 = (rf)' dr \wedge d\phi, \quad (\text{B.15})$$

por lo tanto

$$(rf)' dr \wedge d\phi = -\omega^2_1 \wedge \theta^1 - \omega^2_2 \wedge \theta^2. \quad (\text{B.16})$$

Comparando los dos lados de la ecuación, podemos ver que

$$\omega^2_1 = (rf)' \frac{g}{f} d\phi. \quad (\text{B.17})$$

Si calculamos la derivada exterior de esta expresión:

$$d\omega^2_1 = \left\{ (rf)'' \frac{g}{f} + (rf)' \left(\frac{g}{f} \right)' \right\} dr \wedge d\phi, \quad (\text{B.18})$$

y usando el resultado B.13 y reemplazándolo en la ecuación anterior, tenemos

$$d\omega^2_1 = \left\{ (rf)'' \frac{g}{f} + (rf)' \left(\frac{g}{f} \right)' \right\} \frac{g}{rf^2} \theta^1 \wedge \theta^2 \quad (\text{B.19})$$

Ahora, de un resultado general [47] de la geometría diferencial se sabe que la curvatura Gaussiana K_G está dada por

$$d\omega^2_1 = -K_G \theta^1 \wedge \theta^2. \quad (\text{B.20})$$

Entonces concluimos que la curvatura Gaussiana es

$$K_G = - \left\{ (rf)'' \frac{g}{f} + (rf)' \left(\frac{g}{f} \right)' \right\} \frac{g}{rf^2} \quad (\text{B.21})$$

Apéndice C

Temperatura de Hawking

Un ejemplo de aplicación notable de la métrica de Jacobi en RG, es el de la determinación de la temperatura de Hawking de un agujero negro, de una forma más rápida y sencilla que el acercamiento tradicional.

El esquema computacional clásico de Hamilton-Jacobi para encontrar la temperatura de un agujero negro, se basa [53] en una técnica semiclásica en la que la función de onda para una partícula se toma como $\psi \approx e^{(i/\hbar)S}$, donde S es la acción clásica de Hamilton-Jacobi. En esta representación, la acción se calcula usando la ecuación de movimiento cuántica considerando solamente movimiento radial. Para encontrar la forma explícita de la acción se escoge $S(r, t) = S(r) - Et$. Esta elección está dictada por la naturaleza estática del espacio-tiempo. Después de encontrar S para el espacio-tiempo en cuestión, se obtiene las corrientes de probabilidad entrantes y salientes, la proporción de estas nos conduce al coeficiente de tunelamiento. Resulta que este coeficiente es puramente térmico en naturaleza y al compararlo con el factor de Boltzmann, se puede identificar la temperatura de Hawking. Lo interesante es que en lugar de usar la métrica completa del espacio-tiempo, veremos como la métrica de Jacobi (en su forma no covariante) es suficiente para extraer la temperatura de Hawking correcta [61].

C.1. Temperatura de un agujero negro

Como vimos anteriormente, la métrica de agujero negro estática esféricamente simétrica es

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f^{-1}(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2).$$

La ubicación del horizonte está determinada por $f(r_H) = 0$. Usando la ecuación 3.30, vemos que la métrica de Jacobi correspondiente es

$$ds^2 = J_{ij}dx^i dx^j = (E^2 - m^2 f(r)) \left(\frac{dr^2}{f^2(r)} + \frac{r^2}{f(r)}(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right). \quad (\text{C.1})$$

Como la radiación de Hawking es un fenómeno cerca del horizonte y el tunelamiento ocurre a lo largo de la dirección radial, mantenemos las coordenadas angulares fijas. La acción resulta en

$$S = - \int \sqrt{J_{ij} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds}} ds = \pm \int (E^2 - m^2 f(r))^{1/2} f^{-1}(r) \left(\frac{dr}{ds} \right) ds. \quad (\text{C.2})$$

Los signos positivos y negativos representan los caminos de salida y entrada, respectivamente. En la aproximación semiclásica, la función de onda de la partícula está dada por $\psi = e^{(i/\hbar)S}$. Por tanto, el momentum radial es $p_r = \partial_r S$. Denotamos la partícula saliente con el signo positivo y la partícula entrante con el signo negativo. Derivando obtenemos

$$p_r = \partial_r S = \mp f^{-1}(r) \sqrt{E^2 - m^2 f(r)}. \quad (\text{C.3})$$

Como en el tunelamiento la partícula está justo adentro del horizonte, debemos tener $f(r) < 0$. Entonces el signo negativo relacionado a $p_r > 0$ corresponde a la partícula saliente. Con el mismo razonamiento vemos que el otro signo corresponde a la partícula entrante.

Se sabe que cerca del horizonte la métrica se reduce a (1 + 1)-dimensiones, con el movimiento radial siendo el único significativo. Entonces consideramos una expansión en series de Taylor de $f(r)$ alrededor del horizonte $r = r_H$:

$$f(r) = f(r_H) + f'(r_H)(r - r_H) + \mathcal{O}(r - r_H)^2 = 2\kappa(r - r_H) + \mathcal{O}(r - r_H)^2, \quad (\text{C.4})$$

donde $\kappa = f'(r_H)/2$ es la gravedad superficial del agujero negro. Ahora sustituyendo este resultado en la acción nos queda

$$S = - \int \sqrt{J_{ij} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds}} \quad (\text{C.5})$$

$$S = \pm \int \frac{E}{2\kappa(r - r_H)} \left(\frac{dr}{ds} \right) ds \mp \int \frac{m^2}{2E} \left(\frac{dr}{ds} \right) ds \pm \int \mathcal{O}(r - r_H) \left(\frac{dr}{ds} \right) ds \quad (\text{C.6})$$

$$S = \pm \frac{E}{2\kappa} \int \frac{dr}{(r - r_H)} \pm \frac{m^2}{2E} \int dr \mp \int \mathcal{O}(r - r_H) dr. \quad (\text{C.7})$$

Para una partícula que experimenta tunelamiento cerca y a través del horizonte, los límites de integración se toman como desde $r_H - \epsilon$ hasta $r_H + \epsilon$, con $\epsilon > 0$ muy pequeño:

$$S = \mp \frac{E}{2\kappa} \int_{r_H - \epsilon}^{r_H + \epsilon} \frac{dr}{(r - r_H)} \pm \frac{m^2}{2E} \int_{r_H - \epsilon}^{r_H + \epsilon} dr \mp \int_{r_H - \epsilon}^{r_H + \epsilon} \mathcal{O}(r - r_H) dr. \quad (\text{C.8})$$

En la primera integral, usando el cambio de variable $r - r_H = \epsilon e^{i\theta}$, nos lleva a

$$\int_{r_H - \epsilon}^{r_H + \epsilon} \frac{dr}{(r - r_H)} = -i\pi. \quad (\text{C.9})$$

La segunda integral es proporcional a $\epsilon \cong 0$ y la última integral nos da como resultado un número real. Sabemos de antemano que la parte real no es importante para nuestros propósitos. Entonces la forma de la acción es

$$S = \pm \frac{i\pi E}{2\kappa} + \text{parte real}. \quad (\text{C.10})$$

Ahora, distinguiendo entre las acciones de la partícula entrante S_{in} y la partícula saliente S_{out} ,

$$S_{\text{in}} = -\frac{i\pi E}{2\kappa} + \text{parte real}, \quad S_{\text{out}} = \frac{i\pi E}{2\kappa} + \text{parte real}. \quad (\text{C.11})$$

De forma semi-clásica, la función de onda WKB de la partícula está dada por $\psi = Ae^{(i/\hbar)S}$ donde A es una constante de normalización. Así, las funciones de onda correspondientes a la partícula entrante y saliente son

$$\psi_{\text{in}} = Ae^{(i/\hbar)S_{\text{in}}}, \quad \psi_{\text{out}} = Ae^{(i/\hbar)S_{\text{out}}}. \quad (\text{C.12})$$

Por lo tanto, la probabilidad de que la partícula salga del horizonte es

$$P_{\text{out}} = |\psi_{\text{out}}|^2 = |A|^2 e^{-\frac{\pi E}{\hbar\kappa}}. \quad (\text{C.13})$$

Por otra parte, la probabilidad de que la partícula pase adentro del horizonte es

$$P_{\text{in}} = |\psi_{\text{in}}|^2 = |A|^2 e^{\frac{\pi E}{\kappa}}. \quad (\text{C.14})$$

Entonces la expresión de la tasa de tunelamiento es

$$\Gamma = \frac{P_{\text{out}}}{P_{\text{in}}} = e^{-\frac{E}{T_H}}, \quad (\text{C.15})$$

que es idéntica al factor de Boltzmann. La temperatura de Hawking se identifica como

$$T_H = \frac{\hbar \kappa}{2\pi}. \quad (\text{C.16})$$

Esto muestra como en un cálculo no covariante, la métrica de Jacobi contiene suficiente información acerca del agujero negro como para reproducir correctamente la temperatura de Hawking.

Apéndice D

Algunas funciones especiales

Existen algunas funciones definidas en términos del valor de ciertas integrales. En general, esta clase de integrales no pueden ser expresadas en términos de funciones elementales.

D.1. Integrales elípticas

Una integral de la forma

$$\int R(z, w) dz, \quad (\text{D.1})$$

donde $R(z, w)$ es una función racional de sus argumentos y

$$w^2 = b_0 z^4 + 4b_1 z^3 + 6b_2 z^2 + 4b_3 z + b_4 \quad (\text{D.2})$$

es un polinomio de tercer o cuarto orden en z sin raíces múltiples, se conoce como integral elíptica. Por otra parte se sabe que la función $x = \mathcal{P}(u, \{g_2, g_3\})$, conocida como función P de Weierstrass satisface la ecuación diferencial

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3 = 4(x - p_1)(x - p_2)(x - p_3). \quad (\text{D.3})$$

Con la ayuda de una transformación lineal fraccional conveniente es posible reducir el radical de la integral [D.1](#) a la forma $\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}$. La transformación tiene la forma

$$z = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}, \quad (\alpha\delta - \beta\gamma) = 1. \quad (\text{D.4})$$

Supongamos que el polinomio de cuarto orden se puede factorizar y expresar como

$$\left(\frac{dz}{du}\right)^2 = (z - a_0)(z - a_1)(z - a_2)(z - a_3), \quad (\text{D.5})$$

entonces las constantes de la transformación son

$$\delta = \frac{\sqrt{(a_1 - a_0)(a_2 - a_0)(a_3 - a_0)}}{2(a_0 - \Psi)}, \quad (\text{D.6})$$

$$\gamma = \frac{1}{\delta(a_0 - \Psi)}, \quad (\text{D.7})$$

$$\alpha = \frac{a_0}{\delta(a_0 - \Psi)}, \quad (\text{D.8})$$

$$\beta = \Psi\delta, \quad (\text{D.9})$$

$$\Psi = \frac{a_1(a_2 - a_0)(a_3 - a_0) + a_2(a_1 - a_0)(a_3 - a_0) + a_3(a_1 - a_0)(a_2 - a_0)}{(a_2 - a_0)(a_3 - a_0) + (a_1 - a_0)(a_3 - a_0) + (a_1 - a_0)(a_2 - a_0)}. \quad (\text{D.10})$$

La transformación resulta en

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = 4(x - p_1)(x - p_2)(x - p_3) = 4x^3 - g_2x - g_3, \quad (\text{D.11})$$

donde

$$p_1 = \frac{\delta^2(a_0 - \Psi)(a_1 - \Psi)}{a_0 - a_1}, \quad p_2 = \frac{\delta^2(a_0 - \Psi)(a_2 - \Psi)}{a_0 - a_2}, \quad p_3 = \frac{\delta^2(a_0 - \Psi)(a_3 - \Psi)}{a_0 - a_3}. \quad (\text{D.12})$$

$$g_2 = -4(p_1p_2 + p_1p_3 + p_2p_3), \quad g_3 = 4p_1p_2p_3 \quad (\text{D.13})$$

Existen casos especiales que resultan de ciertas simplificaciones y modificaciones del polinomio de cuarto orden, a continuación se presenta las más conocidas.

D.2. Integral Elíptica de primer tipo

La integral elíptica de primer tipo F se define como

$$F[\phi, k] = \int_0^\phi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}. \quad (\text{D.14})$$

Esta se conoce como forma trigonométrica de la integral. Bajo la sustitución $t = \sin \theta$ y $x = \sin \phi$, obtenemos la forma normal de Legendre:

$$F[x; k] = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}. \quad (\text{D.15})$$

D.3. Integral Elíptica de segundo tipo

La integral elíptica de segundo tipo E en forma trigonométrica es

$$E[\phi, k] = \int_0^\phi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta. \quad (\text{D.16})$$

Haciendo la misma sustitución que en la sección anterior, obtenemos la forma normal de Legendre

$$E[x; k] = \int_0^x \frac{\sqrt{1 - k^2 t^2}}{\sqrt{1 - t^2}} dt \quad (\text{D.17})$$

D.4. Funciones elípticas de Jacobi

Son las funciones inversas de las integrales elípticas. Sea

$$u = F[\phi, k], \quad (\text{D.18})$$

entonces el seno elíptico $\text{sn}(u)$ está dado por

$$\text{sn}(u, k) = \sin(\phi), \quad (\text{D.19})$$

el coseno elíptico $\text{cn}(u)$ está dado por

$$\text{cn}(u, k) = \cos(\phi), \quad (\text{D.20})$$

y la amplitud delta $\text{dn}(u)$ es

$$\text{dn}(u, k) = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi} \quad (\text{D.21})$$

Bibliografía

- [1] A. Einstein. Die feldgleichungen der gravitation. *Preussische Akademie der Wissenschaften, Sitzungsberichte*, 2:844–847, 1915. URL <https://einsteinpapers.press.princeton.edu/vol6-doc/273>.
- [2] U. Le Verrier. *Théorie du mouvement de Mercure*. Ann. Obs. Paris, 1859.
- [3] I. Robinson, A. Schild, and E.L. Schucking. *Quasi-Stellar Sources and Gravitational Collapse*. University of Chicago Press, 1965.
- [4] B. DeWitt. Quantum theory of gravity. i. the canonical theory. *Physical Review*, 160:1113, 1967. URL <https://journals.aps.org/pr/abstract/10.1103/PhysRev.160.1113>.
- [5] C. Rovelli. Quantum gravity. *Scholarpedia*, 3:(5):7117, 2008. URL http://www.scholarpedia.org/article/Quantum_gravity.
- [6] S.W. Hawking. Particle creation by black holes. *Commun.Math.Phys.*, 43:199, 1975. URL <https://link.springer.com/article/10.1007/BF02345020>.
- [7] C.M. Will. The confrontation between general relativity and experiment. *Living Rev. Relativ.*, 17:1, 2014. URL <https://arxiv.org/abs/1403.7377>.
- [8] B.P. Abbott et al. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Physical Review Letters*, 116:061102, 2016. URL <https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.116.061102>.
- [9] The Event Horizon Telescope Collaboration. First m87 event horizon telescope results. i. the shadow of the supermassive black hole. *The Astrophysical Journal Letters*, 875:L1, 2019. URL <https://iopscience.iop.org/article/10.3847/2041-8213/ab0ec7>.

-
- [10] C.W. Misner and J.A. Wheeler. Classical physics as geometry. *Annals Phys.*, 2: 525, 1957. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/0003491657900490>.
- [11] O. Gron and A. Naess. *Einstein's theory: A Rigorous Introduction for the Mathematically Untrained*. Springer, 2011.
- [12] N. Straumann. *General Relativity*. Springer, 2013.
- [13] J. Nadir. *An Introduction to Tensors and Group Theory for Physicists*. Birkhäuser, 2011.
- [14] R. Wald. *General Relativity*. The University of Chicago Press, 2013.
- [15] S.M. Carroll. *Lecture Notes on General Relativity*. University of California, 2011.
- [16] G. Auger and E. Plagnol. *An Overview of Gravitational waves: Theory, Sources and detection*. World Scientific Publishing Co., 2017.
- [17] T. Padmanabhan. *Gravitation. Foundation and Frontiers*. Cambridge University Press, 2010.
- [18] G. t Hooft. *Introduction to General Relativity*. Institute for Theoretical Physics Utrecht University, 2012.
- [19] J.B. Griffiths and J. Podolsky. *Exact space-times in Einstein's general relativity*. Cambridge University Press, 2009.
- [20] S.W. Hawking and C.F.R. Ellis. *The Large Scale Structure of Space Time*. Cambridge University Press, 1973.
- [21] P. Renteln. *Manifolds, Tensors and Forms: An Introduction for Mathematicians and Physicists*. Cambridge University Press, 2014.
- [22] E.M. Prodanov, R.I. Ivanov, and V.G. Gueorguiev. Reissner-nordstrom expansion. *Elsevier. Astroparticle Physics*, 27:150, 2007. URL <https://it.arxiv.org/abs/hep-th/0703005>.
- [23] T. Harada, H. Iguchi, K. Nakao, T.P. Singh, T. Tanaka, and C. Vaz. Naked singularities and quantum gravity. *J. Cosmology* (unpublished).

- [24] G. Lemaitre. Evolution of the expanding universe. *Proc. Natl. Acad. Sci.*, 20:12, 1934. URL <https://www.pnas.org/content/20/1/12>.
- [25] H.P. Robertson. On the foundations of relativistic cosmology. *Proc. Natl. Acad. Sci.*, 15:822, 1929. URL <https://www.pnas.org/content/15/11/822>.
- [26] A. Friedmann. Über die möglichkeit einer welt mit konstanter negativer krümmung des raumes. *Zeith. Phys.*, 21:326, 1924.
- [27] J. Bernstein and G. Feinberg. *Cosmological Constant. Papers in Modern Cosmology*. Columbia University Press, 1986.
- [28] A. Einstein and N. Rosen. The particle problem in the general theory of relativity. *Phys Rev.*, 48:73, 1935. URL <https://journals.aps.org/pr/abstract/10.1103/PhysRev.48.73>.
- [29] M. Visser and C. Barceló. Scalar fields, energy conditions, and traversable wormholes. *Cosmo-99*, 1:98, 2000. URL <https://arxiv.org/abs/gr-qc/0003025>.
- [30] M.S Morris and K.S. Thorne. Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity. *Am J Phys.*, 56:395, 1988. URL <http://www.cmp.caltech.edu/refael/league/thorne-morris.pdf>.
- [31] C. Misner, K. Thorne, and J.A. Wheeler. *Gravitation*. W.H. Freeman and Company, 1973.
- [32] Lobo et al. *Wormholes, Warp Drives and Energy Conditions*. Springer, 2016.
- [33] M. Visser. *Lorentzian Wormholes: From Einstein to Hawking*. AIP Series in Computational and Applied Mathematical Physics, 1995.
- [34] M. Visser, S. Kar, and N. Dadhich. Traversable wormholes with arbitrarily small energy condition violations. *Phys. Rev. Lett.*, 90:201102, 2003. URL <https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.90.201102>.
- [35] E. Witten. A new proof of the positive energy theorem. *Commun. Math. Phys.*, 80:381, 1981. URL <https://link.springer.com/article/10.1007/BF01208277>.
- [36] Ya. B. Zeldovich and L.P. Pitaevski. On the possibility of the creation of particles by classical gravitational field. *Commun. Math. Phys.*, 23:185, 1971.

- [37] A. Agnese and M. La. Camera. Wormholes in the brans-dicke theory of gravitation. *Phys. Rev. D*, 51:2011, 1995. URL <https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.51.2011>.
- [38] S.W. Kim and H. Lee. Exact solutions of a charged wormhole. *Physical review D.*, 63:064014, 2001. URL <https://arxiv.org/abs/gr-qc/0102077>.
- [39] L.H. Ford and T.A. Roman. Quantum field theory constrains traversable wormhole geometries. *Physical review D.*, 53:5496, 1996. URL <https://arxiv.org/abs/gr-qc/9510071>.
- [40] P.K.F. Kuhfittig. On the feasibility of charged wormholes. *Centr.eur.j.phys.*, 9: 1144–1150, 2011. URL <https://arxiv.org/abs/1104.4662>.
- [41] H. Goldstein, C. Poole, and J. Safko. *Classical Mechanics*. Addison Wesley, 2000.
- [42] Ong Chong Pin. Curvature and mechanics. *Advances in Mathematics*, 15: 269–311, 1975. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0001870875901395>.
- [43] J. Taylor. *Classical Mechanics*. University Science Books, 2005.
- [44] G.W. Gibbons. The jacobi metric for timelike geodesics in static spacetimes. *Classical and Quantum Gravity.*, 33:2, 2015. URL <https://arxiv.org/pdf/1508.06755.pdf>.
- [45] M. Szydowski, M. Heller, and W. Sasin. Geometry of spaces with the jacobi metric. *Journal of Mathematical Physics*, 37:346, 1994. URL <https://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.531394>.
- [46] S. Chanda, G.W. Gibbons, and P. Guha. Jacobi-maupertuis-eisenhart metric and geodesic flows. *Journal of Mathematical Physics*, 58:032503, 2017. URL <https://arxiv.org/abs/1612.00375>.
- [47] B. O Neill. *Elementary Differential Geometry*. Elsevier, 2006.
- [48] B. O Neill. *Semi-Riemannian Geometry with applications to Relativity*. Academic Press, 1983.
- [49] N.H. Kuiper. On conformally-flat spaces in the large. *Annals of Mathematics.*, 50(4):916–924, 1949. URL <https://www.jstor.org/stable/1969587?seq=1>.

- [50] Ivo Terek Cuoto. Cartan formalism and some computations, February 2019. URL https://www.asc.ohio-state.edu/terekcouth.1/texts/cartan_formalism.pdf.
- [51] T.A. Ivey and J.M. Landsberg. *Cartan for Beginners: Differential geometry via Moving Frames and Exterior Differential Systems*. American Mathematical Society, 2003.
- [52] L.D. Landau and E.M. Lifshitz. *Mechanics*. Pergamon Press, 1969.
- [53] K. Srinivasan and T. Padmanabhan. Particle production and complex path analysis. *Phys. Rev. D*, 60:024007, 1999. URL <https://arxiv.org/abs/gr-qc/9812028>.
- [54] T. Muller. Exact geometric optics in a morris-thorne wormhole spacetime. *Phys. Rev. D*, 77:044043, 2008. URL <https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.77.044043>.
- [55] M. Argañaraz and O. Lasso. Dynamics in wormhole spacetimes: a jacobi metric approach. 2019. URL <https://arxiv.org/abs/1906.11779>.
- [56] M. Cariglia, C. Duval, G.W. Gibbons, and P.A. Horváthy. Eisenhart lifts and symmetries of time-dependent systems. *Annals of Physics*, 373:1631–1654, 2016. URL <https://arxiv.org/pdf/1605.01932.pdf>.
- [57] Z. Li, G. He, and T. Zhou. Gravitational deflection of relativistic massive particles by wormholes. *Phys. Rev. D*, 101:044001, 2020. URL <https://arxiv.org/abs/1908.01647>.
- [58] Z. Li, G. Zhang, and A. Ovg un. Circular orbit of a particle and weak gravitational lensing. *Phys. Rev. D*, 101:124058, 2020. URL <https://arxiv.org/abs/2006.13047>.
- [59] A.K. Raychaudhuri. Relativistic cosmology. *Relativistic Cosmology I. Phys. Rev.*, 98:1123–1126, 1955. URL <https://journals.aps.org/pr/abstract/10.1103/PhysRev.98.1123>.
- [60] ATLAS collaboration. Observation of a new particle in the search for the standard model higgs boson with the atlas detector at the lhc. *Physics Letters B*, 716-1:1–29, 2012. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037026931200857X>.

- [61] A. Bera, S. Gosh, and B. Ranjan Majhi. Hawking radiation in a non-covariant frame: the jacobi metric approach. september 2019. URL <https://arxiv.org/abs/1909.12607>.