

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS

MÉTODOS DE PROYECCIÓN TIPO PROMEDIO DE CUERDAS EN ESPACIOS DE HADAMARD

**TRABAJO DE TITULACIÓN PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE
INGENIERO MATEMÁTICO**

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

NÉSTOR FERNANDO ACEVEDO REINOSO

nestor.acevedo@epn.edu.ec

DIRECTOR: M.SC. ZULY LEONELA SALINAS PILLAJO

zuly.salinas@epn.edu.ec

CODIRECTOR: DR. MARCO VINICIO CALAHORRANO RECALDE

marco.calahorrano@epn.edu.ec

QUITO, FEBRERO 2021

DECLARACIÓN

Yo NÉSTOR FERNANDO ACEVEDO REINOSO, declaro bajo juramento que el trabajo aquí escrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

A través de la presente declaración cedo mis derechos de propiedad intelectual, correspondientes a este trabajo, a la Escuela Politécnica Nacional, según lo establecido por la Ley de Propiedad Intelectual, por su reglamento y por la normatividad institucional vigente.

Néstor Fernando Acevedo Reinoso

CERTIFICACIÓN

Certificamos que el presente trabajo fue desarrollado por NÉSTOR FERNANDO ACEVEDO REINOSO, bajo nuestra supervisión.

M.Sc. Zuly Leonela Salinas Pillajo
Director del Proyecto

Dr. Marco Vinicio Calahorrano Recalde
Codirector del Proyecto

AGRADECIMIENTOS

A mis padres Luis y Martha y a mi hermana Daniela, por apoyarme y motivarme en mis deseos de estudiar y ser una guía en todos los retos que se han presentado a lo largo de mi vida.

A mis tíos y tías, quienes siempre se han preocupado por mí.

A mi directora de proyecto de titulación, M.Sc. Zuly Salinas, quien ha sido una guía excepcional, por todo su tiempo y dedicación para la realización de este trabajo de titulación.

Al Doctor Marco Calahorrano, por su apoyo en la realización de este proyecto.

DEDICATORIA

*A mis sobrinas Abigail, Isabela y Emma.
Que este trabajo les motive a conseguir sus objetivos en la vida. Les quiero mucho.
Y a mi hermana Patty.*

Índice general

Resumen	VII
Introducción	VIII
1. Preliminares	1
1.1. Resultados previos	1
1.2. Espacios Geodésicos	8
1.3. Espacios de Hadamard	17
1.4. Caracterización de los espacios $CAT(0)$ y los espacios de Hadamard	21
1.5. Proyección de punto más cercano	34
1.6. Espacios de Hadamard Homogéneos	39
2. Método de Proyección Tipo Promedio de Cuerdas	44
2.1. Combinaciones Convexas	44
2.2. Convergencia del Método de Proyección Tipo Promedio de Cuerdas	54
2.3. Método de Proyección tipo Promedio de Cuerdas con Operadores de Aproximación	65
3. Conclusiones / Recomendaciones	85
3.1. Conclusiones	85
3.2. Recomendaciones	86
Bibliografía	88

Resumen

Decimos que un espacio métrico completo (H, d) es un espacio de Hadamard cuando para cada $x, y \in H$ existe $m \in H$ tal que

$$d(z, m)^2 \leq \frac{1}{2}d(m, x)^2 + \frac{1}{2}d(m, y)^2 - \frac{1}{4}d(x, y)^2, \quad \forall z \in H.$$

Los espacios de Hadamard son, en particular, espacios métricos geodésicos. Usamos esta propiedad para estudiar conceptos como el de convexidad y combinaciones convexas, así como la existencia del operador de proyección de punto más cercano sobre un conjunto no vacío, convexo y cerrado.

Dados un espacio de Hadamard (H, d) y $C_1, \dots, C_m \subset H$ subconjuntos no vacíos, cerrados y convexos tales que $C := \bigcap_{i=1}^m C_i \neq \emptyset$, el Problema de Factibilidad Convexa consiste en hallar un punto $x_* \in C$ (ver [Censor y Zaslavski, 2013], [Von Neumann, 1949], y [Reich y Salinas, 2017]).

En [Censor y Zaslavski, 2013] se demuestra que, bajo ciertas hipótesis, una sucesión generada por un método de proyección de cuerdas dinámico converge a un punto en C para el caso en el que H es un espacio de Hilbert. Decimos que es un método de proyección pues hace uso de los operadores de proyección sobre cada C_i , con $i = 1, \dots, m$.

El objetivo de nuestro trabajo es la extensión del resultado de Censor y Zaslavski en el contexto de los espacios de Hadamard. Además, demostramos que este resultado sigue siendo cierto cuando, en lugar de los operadores de proyección, utilizamos operadores, no necesariamente continuos, que aproximan a los operadores de proyección. Advertimos al lector que en este trabajo no abordamos el problema desde el punto de vista del Análisis Numérico, por lo cual no se estudian ni el orden de convergencia, ni se ofrecen ejemplos numéricos.

Introducción

El problema de encontrar un punto en la intersección no vacía de conjuntos convexos y cerrados se conoce como el problema de factibilidad convexa (PFC), planteado por John von Neumann en [Von Neumann, 1949]. Su importancia radica, más allá del interés matemático, en el campo de la recuperación de imágenes (ver [Bacak, 2018]).

En [Censor y Zaslavski, 2013], Censor y Zaslavski desarrollan un método de proyección tipo promedio de cuerdas, para resolver el problema de factibilidad convexa en el contexto de los espacios de Hilbert.

En este trabajo de titulación, estudiamos y extendemos el método de proyección desarrollado por Censor y Zaslavski para resolver el problema de factibilidad convexa en el contexto de los espacios de Hadamard. Los espacios de Hadamard son espacios métricos geodésicos completos sobre los cuales se satisface la CN–desigualdad (Curvatura Negativa) de Bruhat–Tits, generalizan la Geometría Hiperbólica de Bolyai–Lobachevsky para espacios de cualquier dimensión, incluso infinita (ver [Bacak, 2014] y [Bridson y Haefliger, 1999]), y en ellos se garantiza la existencia de un operador de proyección.

Descripción del Capítulo 1

En este capítulo estudiamos a los espacios de Hadamard.

En la Sección 1.2 introducimos a los espacios geodésicos, y en la sección 1.3 estudiamos su relación con los espacios $CAT(0)$, a partir de lo cual definimos los espacios de Hadamard como espacios $CAT(0)$ completos.

En la Sección 1.4 presentamos dos caracterizaciones importantes. El Teorema 1.14 describe un espacio $CAT(0)$ si sabemos de antemano que este es un espacio geodésico. El Teorema 1.15 caracteriza un espacio de Hadamard si sabemos de antemano que este es un espacio métrico completo.

En la Sección 1.5 definimos la convexidad de subconjuntos en espacios de Ha-

damard y extendemos la noción de proyección sobre un conjunto no vacío, cerrado y convexo en espacios de Hilbert a espacios de Hadamard, así como sus principales propiedades.

Finalmente, en la Sección 1.6, estudiamos los espacios de Hadamard homogéneos.

Descripción del Capítulo 2

Este capítulo está dedicado al estudio del método de proyección tipo promedio de cuerdas. Es en este capítulo en el que presentamos nuestros resultados originales.

En la Sección 2.1 presentamos la noción de combinaciones convexas en espacios de Hadamard y estudiamos sus principales características. Estos resultados son generalizaciones de sus respectivas contrapartes del Capítulo 1.

En la Sección 2.2, definimos los vectores de cuerda y las cuerdas. Dados (H, d) un espacio de Hadamard, $C_1, \dots, C_m \subset H$ subconjuntos no vacíos, cerrados, convexos con operadores de proyección P_1, \dots, P_m , respectivamente, y un vector de índices $t = (t_1, \dots, t_p)$ donde $t_i \in \{1, \dots, m\}$ para cada $i = 1, \dots, p$, el operador

$$\begin{aligned} P[t] : H &\rightarrow H \\ x &\mapsto P[t](x) = P_{t_p} \dots P_{t_1}(x), \end{aligned}$$

se conoce como operador de cuerda. Un par (Ω, ω) , donde Ω es un conjunto de vectores de índices y

$$\omega : H \rightarrow (0, 1),$$

es tal que $\sum_{t \in \Omega} \omega(t) = 1$, se conoce como un amalgamador. Dado un amalgamador (Ω, ω) , al operador

$$\begin{aligned} P_{\Omega, \omega} : H &\rightarrow H \\ x &\mapsto P_{\Omega, \omega}(x) = \sum_{t \in \Omega} \omega(t) P[t](x), \end{aligned}$$

le llamamos una cuerda. El término

$$\sum_{t \in \Omega} \omega(t) P[t](x),$$

denota la suma convexa definida en la sección 2.1. Demostramos que los vectores

de cuerda y las cuerdas comparten propiedades similares a las de los operadores de proyección. A partir de la definición de cuerda, presentamos las sucesiones de proyección tipo promedio de cuerdas y en el Teorema 2.10 mostramos que, bajo ciertas condiciones, estas sucesiones convergen a un punto en la intersección de los conjuntos C_1, \dots, C_m .

En la Sección 2.3 extendemos la noción de vector de cuerda y cuerda a cualquier grupo de operadores, y no solamente a operadores de proyección. A partir de esto, definimos las sucesiones de aproximación tipo promedio de cuerdas. Inspirados en la relación entre las convergencias de órbitas exactas e inexactas (ver [Pustylnik *et al.*, 2009]), presentamos el Lema 2.11, el cual establece la relación entre la convergencia de las sucesiones tipo promedio de cuerdas, estudiadas en el Teorema 2.10, con la convergencia de ciertas sucesiones en las cuales no intervienen los operadores de proyección. Gracias al Lema 2.11, finalizamos este capítulo demostrando el Teorema 2.12, el cual nos indica que, bajo ciertas condiciones, las sucesiones de aproximación tipo promedio de cuerdas convergen a un punto en la intersección de los conjuntos C_1, \dots, C_m .

Descripción del Capítulo 3

Aquí se presentan las conclusiones y recomendaciones de este trabajo de titulación.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo, estudiamos a los espacios métricos completos geodésicos de curvatura negativa, también conocidos como espacios de Hadamard. [Bacak, 2014] y [Bridson y Haefliger, 1999] son nuestras referencias principales para este capítulo

1.1. Resultados previos

En esta sección revisamos resultados que utilizamos para el resto del proyecto.

A lo largo de este trabajo de titulación, consideramos

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\},$$

y

$$\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}.$$

PROPOSICIÓN 1.1 (Desigualdad de Cauchy con ε). Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$, arbitrarios. Se tiene que

$$2ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{\varepsilon},$$

y

$$(a + b)^2 \leq (1 + \varepsilon)a^2 + \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right)b^2.$$

Demostración. Sabemos que

$$\left(\sqrt{\varepsilon}a + \frac{b}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^2 \geq 0,$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} 0 &\leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{\varepsilon} - 2ab \\ \Rightarrow 2ab &\leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{\varepsilon} \end{aligned}$$

que es la primera desigualdad buscada. Sumando $a^2 + b^2$ a ambos lados de esta desigualdad obtenemos

$$(a + b)^2 \leq (1 + \varepsilon)a^2 + \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right)b^2.$$

□

Antes de pasar a la demostración del siguiente resultado, notemos que para cada $\alpha \in (0, 1)$ el conjunto $\{n \in \mathbb{N}_0 : \alpha < 1/2^n\}$ es no vacío, pues $\alpha < 1 = \frac{1}{2^0}$. Además, este conjunto es acotado pues, por la Propiedad Arquimediana, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{\alpha} \leq m,$$

de donde

$$\frac{1}{2^m} \leq \frac{1}{m} \leq \alpha.$$

Es más, para cada $n \geq m$ tenemos que

$$\frac{1}{2^m} \leq \frac{1}{2^n} \leq \alpha,$$

por lo cual, para cada $p \in \{n \in \mathbb{N} : \alpha < 1/2^n\}$ tenemos que

$$p \leq m.$$

De esta forma, la cantidad

$$n_\alpha := \text{máx}\{n \in \mathbb{N} : \alpha < 1/2^n\}$$

está bien definida. Además, por definición,

$$\frac{1}{2^{n_\alpha+1}} \leq \alpha < \frac{1}{2^{n_\alpha}} \quad \forall \alpha \in (0,1). \quad (1.1)$$

PROPOSICIÓN 1.2. *El conjunto*

$$Z = \{k/2^m : k = 0, 1, \dots, 2^m, m \in \mathbb{N}\}$$

es denso en $[0, 1]$ con la métrica usual.

Demostración. Debemos probar que para cada $x, y \in [0, 1]$ tales que $x < y$ existe $z \in Z$ tal que

$$x \leq z \leq y.$$

Sean $x, y \in Z$ tales que $x < y$, y sea $\varepsilon = y - x$, de manera que $y = x + \varepsilon$. Debemos probar que existe $z \in Z$ tal que

$$x \leq z \leq x + \varepsilon.$$

Esta propiedad ya se cumple cuando $x = 0$, tomando $z = 0$ o cuando $y = 1$, tomando $z = 1$. Cuando $x, y \in (0, 1)$, de (1.1) tenemos que

$$\frac{1}{2^{n_x+1}} \leq x < \frac{1}{2^{n_x}}.$$

Ahora, si

$$\frac{1}{2^{n_x}} \leq x + \varepsilon$$

obtenemos lo requerido, pero también es posible que

$$\frac{1}{2^{n_x}} > x + \varepsilon,$$

en cuyo caso consideramos el conjunto

$$A = \left\{ p \in \mathbb{N} : \frac{1}{2^{n_x+1}} + \frac{p}{2^{n_\varepsilon+1}} \leq x + \varepsilon \right\}.$$

Por definición de n_x y n_ε tenemos que $1 \in A$, y además A está acotado por

$$2^{n_\varepsilon+1} \left(x + \varepsilon - \frac{1}{2^{n_x+1}} \right),$$

de manera que podemos definir

$$k = \max \left\{ p \in \mathbb{N} : \frac{1}{2^{n_x+1}} + \frac{p}{2^{n_\varepsilon+1}} \leq x + \varepsilon \right\}.$$

Probemos que

$$x \leq \frac{1}{2^{n_x+1}} + \frac{k}{2^{n_\varepsilon+1}}.$$

Por el contrario, supongamos que

$$x > \frac{1}{2^{n_x+1}} + \frac{k}{2^{n_\varepsilon+1}}.$$

Por definición de n_ε tenemos que

$$\begin{aligned} x + \varepsilon &> \frac{1}{2^{n_x+1}} + \frac{k}{2^{n_\varepsilon+1}} + \varepsilon \\ &> \frac{1}{2^{n_x+1}} + \frac{k}{2^{n_\varepsilon+1}} + \frac{1}{2^{n_\varepsilon+1}} \\ &= \frac{1}{2^{n_x+1}} + \frac{k+1}{2^{n_\varepsilon+1}}, \end{aligned}$$

lo cual contradice el hecho de que

$$k = \max \left\{ p \in \mathbb{N} : \frac{1}{2^{n_x+1}} + \frac{p}{2^{n_\varepsilon+1}} \leq x + \varepsilon \right\}.$$

Por lo tanto

$$x \leq \frac{1}{2^{n_x+1}} + \frac{k}{2^{n_\varepsilon+1}}. \quad (1.2)$$

Por la definición de k , tenemos que

$$\frac{1}{2^{n_x+1}} + \frac{k}{2^{n_\varepsilon+1}} \leq x + \varepsilon. \quad (1.3)$$

Al combinar (1.2) y (1.3) se sigue que

$$x \leq \frac{2^{n_\varepsilon+1} + k2^{n_x+1}}{2^{n_x+n_\varepsilon+2}} \leq x + \varepsilon.$$

Finalmente, como $x + \varepsilon = y < 1$ obtenemos

$$\frac{2^{n_\varepsilon+1} + k2^{n_x+1}}{2^{n_x+n_\varepsilon+2}} < 1,$$

y, por tanto

$$\frac{2^{n_\varepsilon+1} + k2^{n_x+1}}{2^{n_x+n_\varepsilon+2}} \in \mathbb{Z},$$

que es lo que queríamos demostrar. \square

LEMA 1.3 (Alexandrov). *Consideremos los puntos $a, b, b', c \in \mathbb{R}^2$. Supongamos que b, b' están en lados opuestos de la recta que contiene al segmento que une a los puntos a y c . Consideremos los triángulos $\triangle(a, b, c)$ y $\triangle(a, b', c)$ y supongamos que la suma de los ángulos respectivos en el vértice c es mayor o igual a π . Se tiene que*

$$\|b - c\| + \|c - b'\| \leq \|b - a\| + \|a - b'\|.$$

Por tanto, existe otro triángulo $\triangle(\bar{a}, \bar{b}, \bar{b}')$ tal que $\|\bar{a} - \bar{b}\| = \|a - b\|$, y $\|\bar{a} - \bar{b}'\| = \|a - b'\|$, y $\|\bar{b} - \bar{b}'\| = \|b - c\| + \|c - b'\|$.

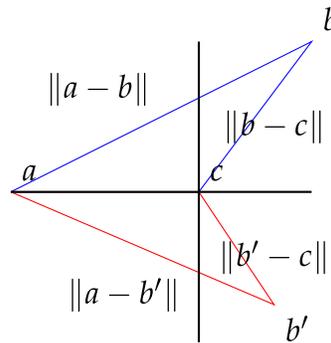


Gráfico 1. Los puntos a, b, b' y c según las hipótesis del Lema de Alexandrov.

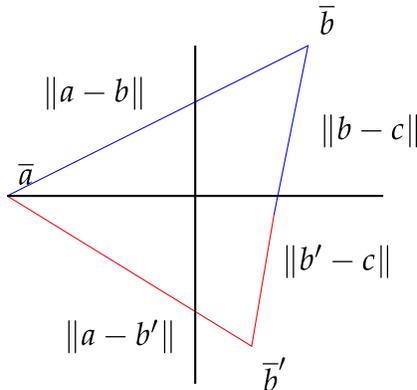


Gráfico 2. Los puntos \bar{a}, \bar{b} y \bar{b}' del resultado del Lema de Alexandrov.

Demostración. Empezaremos demostrando que

$$\|b - c\| + \|c - b'\| \leq \|b - a\| + \|a - b'\|.$$

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que b, b' se encuentran en el eje horizontal del plano cartesiano y que a se encuentra sobre este eje. Luego, c también

debe hallarse encima de este eje y por debajo de a , caso contrario la suma de los ángulos respectivos en el vértice sería menor que π , como se ilustra en el Gráfico 3.

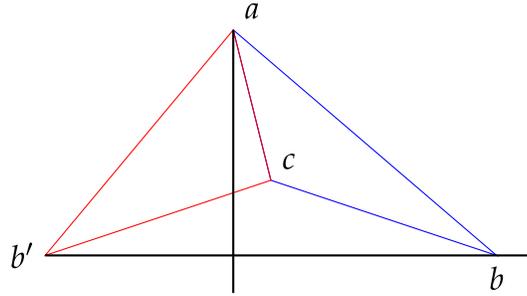


Gráfico 3.

De esta forma, el triángulo $\triangle(b, c, b')$ está contenido en el triángulo $\triangle(b, a, b')$ y por lo tanto su perímetro es menor, es decir:

$$\|b - c\| + \|c - b'\| + \|b - b'\| \leq \|b - a\| + \|a - b'\| + \|b - b'\|,$$

lo que implica que

$$\|b - c\| + \|c - b'\| \leq \|b - a\| + \|a - b'\|.$$

Ahora, queremos mostrar que existe otro triángulo cuyos lados midan $\|a - b\|$, $\|a - b'\|$ y $\|b - c\| + \|c - b'\|$ respectivamente. Para que esto sea posible es necesario que estas tres cantidades verifiquen la desigualdad triangular. Ya demostramos que

$$\|b - c\| + \|c - b'\| \leq \|b - a\| + \|a - b'\|.$$

Ahora, por la desigualdad triangular tenemos que

$$\|a - b\| \leq \|a - b'\| + \|b' - c\| + \|c - b\|,$$

y

$$\|a - b'\| \leq \|a - b\| + \|b - c\| + \|c - b'\|,$$

que son las otras dos desigualdades necesarias. Por tanto, existen $\bar{a}, \bar{b}, \bar{b}'$ tales que $\|\bar{a} - \bar{b}\| = \|a - b\|$, y $\|\bar{a} - \bar{b}'\| = \|a - b'\|$, y $\|\bar{b} - \bar{b}'\| = \|b - c\| + \|c - b'\|$, formando el triángulo $\triangle(\bar{a}, \bar{b}, \bar{b}')$.

□

PROPOSICIÓN 1.4. Sea $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ una sucesión de números reales positivos tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < +\infty.$$

Se tiene que

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + \gamma_n) < +\infty.$$

Demostración. Sea

$$\begin{aligned} f : (-1, +\infty) &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \ln(1+x) - x. \end{aligned}$$

Notemos que esta función es diferenciable, con

$$\begin{aligned} f' : (-1, +\infty) &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1. \end{aligned}$$

Para cualquier $x \geq 0$, tenemos que $f'(x) \leq 0$, gracias a lo cual concluimos que la función es decreciente en el intervalo $[0, +\infty)$, y como

$$f(0) = 0,$$

entonces tenemos que

$$\ln(1+x) \leq x \quad \forall x \geq 0.$$

En particular, para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $\gamma_n > 0$, de donde

$$0 \leq \ln(1 + \gamma_n) \leq \gamma_n,$$

y por lo tanto

$$\ln \left(\prod_{i=1}^m (1 + \gamma_i) \right) = \sum_{n=1}^m \ln(1 + \gamma_n) < \sum_{n=1}^m \gamma_n \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Por la continuidad de la función logaritmo natural, tenemos que

$$\ln \left(\prod_{i=1}^{\infty} (1 + \gamma_i) \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < \infty.$$

Gracias a que la función exponencial es creciente, concluimos que

$$\prod_{i=1}^{\infty} (1 + \gamma_i) \leq \exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \right) < \infty.$$

□

PROPOSICIÓN 1.5 (Identidad del Paralelogramo). *Sea H un espacio de Hilbert de norma $\|\cdot\|$ y producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Para cada $x, y \in H$ se verifica la identidad*

$$2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = \|x - y\|^2 + \|x + y\|^2.$$

Demostración. Sean $x, y \in H$, arbitrarios. Tenemos que

$$\begin{aligned} \|x - y\|^2 + \|x + y\|^2 &= \|x\|^2 - \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle + \|y\|^2 \\ &\quad + \|x\|^2 + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \|y\|^2 \\ &= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2. \end{aligned}$$

□

1.2. Espacios Geodésicos

En esta sección estudiamos los espacios métricos geodésicos y sus propiedades. Definimos también los triángulos geodésicos y los espacios métricos geodésicos de Busemann.

DEFINICIÓN 1.1 (Espacio métrico geodésico). *Decimos que un espacio métrico (X, d) es geodésico cuando para cada par de puntos $x, y \in X$ existe una función $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ tal que*

$$\gamma(0) = x, \quad \gamma(1) = y$$

y, además

$$d(\gamma(r), \gamma(s)) = |r - s|d(x, y) \quad \forall r, s \in [0, 1].$$

Toda función que verifique estas condiciones se conoce como una geodésica que une x con y .

Notemos que, por definición, toda geodésica es Lipschitz continua.

DEFINICIÓN 1.2 (Espacio métrico únicamente geodésico). *Un espacio métrico geo-*

espacio métrico (X, d) se dice **únicamente geodésico** si para cada par de puntos $x, y \in X$ existe una **única** geodésica que los une.

En un espacio métrico únicamente geodésico (X, d) , utilizamos la notación $\gamma =: [x, y]$ cuando γ es la geodésica que une a x e y . Además, entendemos a $[x, y]$ como el rango de γ , de forma que si $z \in [x, y]$, entonces existe $t \in [0, 1]$ tal que $z = \gamma(t)$. También escribimos $\gamma_t := \gamma(t)$.

El concepto de geodésica se asemeja al de una curva que une dos puntos en un espacio métrico, por tanto, también usamos la siguiente notación: para cada geodésica $\gamma = [x, y]$ y cada $t \in [0, 1]$:

$$(1 - t)x + ty := \gamma(t),$$

gracias a la cual podemos entender a $\gamma(t)$ como la combinación convexa de x e y .

DEFINICIÓN 1.3 (Punto medio). *Dados un espacio métrico (X, d) y $x, y \in X$ dos puntos distintos, decimos que $m \in X$ es un punto medio de x e y cuando*

$$d(x, y) = 2d(x, m) = 2d(m, y).$$

La siguiente proposición es una caracterización de un espacio métrico geodésico si sabemos de antemano que este es un espacio completo.

PROPOSICIÓN 1.6. *Sea (X, d) un espacio métrico completo. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

- i) (X, d) es geodésico;
- ii) Para todo $x, y \in X$ existe $m \in X$ tal que

$$d(x, m)^2 + d(y, m)^2 = \frac{1}{2}d(x, y)^2;$$

- iii) Cada par de puntos de X admite un punto medio.

Demostración. Probemos que $i) \Rightarrow ii)$. Sean $x, y \in X$ arbitrarios, γ una geodésica que une estos puntos y $m = \gamma\left(\frac{1}{2}\right)$. Por definición tenemos que

$$d(x, m) = \frac{1}{2}d(x, y), \quad d(y, m) = \frac{1}{2}d(x, y),$$

por tanto

$$d(x, m)^2 + d(y, m)^2 = \frac{1}{2}d(x, y)^2,$$

que es lo que queríamos demostrar.

Para demostrar $ii) \Rightarrow iii)$, consideremos x, y un par de puntos en X arbitrarios y $m \in X$ tales que

$$d(x, m)^2 + d(y, m)^2 = \frac{1}{2}d(x, y)^2.$$

Mostremos que m es un punto medio de x e y . Para esto, probemos que

$$d(x, m) = d(y, m).$$

Por $ii)$ y la desigualdad triangular, se sigue que

$$\begin{aligned} 0 &= 2d(x, m)^2 + 2d(y, m)^2 - d(x, y)^2 \\ &\geq 2d(x, m)^2 + 2d(y, m)^2 - d(x, m)^2 - d(y, m)^2 - 2d(x, m)d(y, m) \\ &= d(x, m)^2 - 2d(x, m)d(y, m) + d(y, m)^2 \\ &= (d(x, m) - d(y, m))^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$d(x, m) = d(y, m).$$

Además, utilizando $ii)$ nuevamente, tenemos que

$$d(x, y)^2 = 4d(x, m)^2 = 4d(y, m)^2,$$

por lo cual

$$d(x, y) = 2d(x, m) = 2d(y, m),$$

de donde m es un punto medio de x e y .

Para mostrar $iii) \Rightarrow i)$, consideremos el conjunto

$$Z = \{k/2^m : k = 0, 1, \dots, 2^m, m \in \mathbb{N}\}$$

el cual es denso en $[0, 1]$ (ver Proposición 1.2). Ahora, sean $x, y \in X$ dos puntos distintos. Consideremos $z_0 = x, z_1 = y$ y $z_{1/2}$ el punto medio entre z_0 y z_1 . Inductivamente, definimos para cada natural $k < 2^m$ impar y $m \in \mathbb{N}$, a $z_{k/2^m}$ como el punto medio entre $z_{(k-1)/2^m}$ y $z_{(k+1)/2^m}$. Todos estos puntos (indexados por el conjunto Z), son nuestros candidatos a pertenecer a la geodésica. Vamos a

verificar por inducción que para cada $m \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$d(z_{j/2^m}, z_{k/2^m}) = \frac{|k-j|}{2^m} d(x, y), \quad (1.4)$$

donde $j, k = 0, \dots, 2^m$ y $k > j$.

Para $m = 1$ tenemos, por definición de punto medio, que

$$d(z_{k/2^1}, z_{j/2^1}) = d(x, y) \frac{|k-j|}{2^1} \quad \forall k, j = 0, 1, 2,$$

lo cual muestra la base de la inducción.

Ahora, sea $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, arbitrario. Supongamos que para $m-1$ se cumple que

$$d(z_{j/2^{m-1}}, z_{k/2^{m-1}}) = \frac{k-j}{2^{m-1}} d(x, y), \quad j, k = 0, 1, \dots, 2^{m-1}, k > j. \quad (1.5)$$

Bajo esta hipótesis probemos que (1.4) es cierto para m .

Sean $k, j \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 2^m\}$ tales que $k > j$, cualesquiera. Consideremos los siguientes casos:

Caso k, j pares: En este escenario, existen $p_k, p_j \in \mathbb{N}$ tales que $k = 2p_k, j = 2p_j$, y así

$$\frac{k}{2^m} = \frac{p_k}{2^{m-1}}, \quad \frac{j}{2^m} = \frac{p_j}{2^{m-1}},$$

lo cual, junto con (1.5) nos indica que

$$\begin{aligned} d(z_{j/2^m}, z_{k/2^m}) &= d(z_{p_j/2^{m-1}}, z_{p_k/2^{m-1}}) \\ &= \frac{p_k - p_j}{2^{m-1}} d(x, y) \\ &= \frac{k-j}{2^m} d(x, y), \end{aligned}$$

como queríamos probar.

Caso k par, j impar: Sean $p_k, p_{j-}, p_{j+} \in \mathbb{N}$ tales que $k = 2p_k, j-1 = 2p_{j-}$ y $j+1 = 2p_{j+}$. Por la desigualdad triangular, (1.5) aplicado a las parejas

$$\frac{k}{2^m} = \frac{p_k}{2^{m-1}}, \quad \frac{j-1}{2^m} = \frac{p_{j-}}{2^{m-1}},$$

y

$$\frac{j-1}{2^m} = \frac{p_{j-}}{2^{m-1}}, \quad \frac{j+1}{2^m} = \frac{p_{j+}}{2^{m-1}},$$

y por definición de punto medio obtenemos

$$\begin{aligned}
d(z_{k/2^m}, z_{j/2^m}) &\leq d(z_{k/2^m}, z_{j+1/2^m}) + d(z_{j+1/2^m}, z_{j/2^m}) \\
&= d(z_{p_k/2^{m-1}}, z_{p_{j+}/2^{m-1}}) + \frac{1}{2}d(z_{j-1/2^m}, z_{j+1/2^m}) \\
&= d(z_{p_k/2^{m-1}}, z_{p_{j+}/2^{m-1}}) + \frac{1}{2}d(z_{p_{j-}/2^m}, z_{p_{j+}/2^m}) \\
&= \frac{k-j-1}{2^m}d(x, y) + \frac{1}{2^m}d(x, y) \\
&= \frac{k-j}{2^m}d(x, y).
\end{aligned}$$

Por otra parte, por la desigualdad triangular inversa, (1.5) aplicada a

$$\frac{k}{2^m} = \frac{p_k}{2^{m-1}}, \quad \frac{j+1}{2^m} = \frac{p_{j+}}{2^{m-1}},$$

y definición de punto medio tenemos que

$$\begin{aligned}
d(z_{k/2^m}, z_{j/2^m}) &\geq |d(z_{k/2^m}, z_{j+1/2^m}) - d(z_{j+1/2^m}, z_{j/2^m})| \\
&= \frac{k-j-1+1}{2^m}d(x, y) \\
&= \frac{k-j}{2^m}d(x, y),
\end{aligned}$$

de donde

$$d(z_{k/2^m}, z_{j/2^m}) = \frac{k-j}{2^m}d(x, y).$$

El caso k impar, j par es análogo al caso anterior.

Caso j, k impares: de forma similar a los argumentos anteriores, por la desigualdad triangular tenemos que

$$d(z_{k/2^m}, z_{j/2^m}) \leq \frac{j-k}{2^m}d(x, y). \quad (1.6)$$

Por lo demostrado en el caso j par, k impar vemos que

$$d(z_{k/2^m}, z_{j+1/2^m}) = \frac{j+1-k}{2^m}d(x, y). \quad (1.7)$$

Ahora, por la desigualdad triangular inversa y (1.7) se sigue que

$$\begin{aligned}
d(z_{k/2^m}, z_{j/2^m}) &\geq |d(z_{k/2^m}, z_{j+1/2^m}) - d(z_{j/2^m}, z_{j+1/2^m})| \\
&= \frac{j-k}{2^m}d(x, y).
\end{aligned}$$

De (1.6) y la última desigualdad obtenemos

$$d(z_{k/2^m}, z_{j/2^m}) = \frac{j-k}{2^m} d(x, y),$$

lo cual concluye la inducción.

Para concluir esta demostración definimos $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ de la siguiente forma:

1. Cuando $t \in Z$, entonces $\gamma(t) = z_t$.
2. Cuando $t \notin Z$, consideramos una sucesión $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset Z$ convergente a t . Para $n, m \in \mathbb{N}$ arbitrarios tenemos que

$$d(z_{t_n}, z_{t_m}) = |t_n - t_m| d(x, y),$$

y por tanto, la sucesión $(z_{t_n})_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy, pues $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy. Como X es completo por hipótesis, sabemos que existe el límite de $(z_{t_n})_{n \in \mathbb{N}}$ y definimos

$$\gamma(t) := \lim_{n \rightarrow \infty} z_{t_n}.$$

Notemos que para $t \notin Z$, $\gamma(t)$ no depende de la sucesión $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ escogida, lo cual nos indica que γ está bien definida. En efecto, sean $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}, (s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucesiones convergentes a t . Por la bicontinuidad de la función

$$d(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+,$$

tenemos que

$$\begin{aligned} d\left(\lim_{n \rightarrow \infty} z_{t_n}, \lim_{n \rightarrow \infty} z_{s_n}\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} d(z_{t_n}, z_{s_n}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} |t_n - s_n| d(x, y) \\ &= |t - t| d(x, y) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Nos resta mostrar que γ es una geodésica, para lo cual consideramos $t, s \in [0, 1]$, $(t_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset Z$ una sucesión que converge a t y $(s_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset Z$ una sucesión que converge a s . Tenemos que

$$d(\gamma(t), \gamma(s)) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(z_{s_n}, z_{t_n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} |t_n - s_n| d(x, y) = |t - s| d(x, y),$$

de donde γ es, en efecto, una geodésica que une a x e y . □

DEFINICIÓN 1.4 (Triángulos Geodésicos). Sea (X, d) un espacio métrico geodésico. Un triángulo geodésico con vértices $p, q, r \in X$ consiste en los puntos correspondientes a las tres geodésicas $[p, q], [q, r], [r, p]$. Denotamos a este conjunto como $\Delta(p, q, r)$ (que puede no ser único en espacios no únicamente geodésicos). A cada triángulo geodésico le asignamos un triángulo en \mathbb{R}^2 de vértices $\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}$, al cual denotamos por $\Delta(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r})$, de tal forma que $d(p, q) = \|\bar{p} - \bar{q}\|$, $d(p, r) = \|\bar{p} - \bar{r}\|$, $d(r, q) = \|\bar{r} - \bar{q}\|$, y lo llamamos triángulo de comparación. Llamamos a $\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}$ los puntos de comparación correspondientes a p, q, r respectivamente.

Si $x = (1 - t)p + tq$ para algún $t \in [0, 1]$, denotamos \bar{x} su punto de comparación, definido por $\bar{x} := (1 - t)\bar{p} + t\bar{q}$. Lo mismo para puntos pertenecientes a las otras dos geodésicas del triángulo.

DEFINICIÓN 1.5 (Curvatura negativa de Busemann). Sea (X, d) un espacio geodésico. Decimos que X tiene **curvatura negativa en el sentido de Busemann**, o simplemente, que es un espacio de Busemann, cuando para cada $x, y, z \in X$ tales que m_1 es punto medio de x, z y m_2 es punto medio de y, z se cumple que

$$2d(m_1, m_2) \leq d(x, y).$$

PROPOSICIÓN 1.7. Un espacio geodésico (X, d) es un espacio de Busemann si y solo si para cada par de geodésicas γ y β , el mapa

$$\begin{aligned} T : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto T(t) = d(\gamma(t), \beta(t)) \end{aligned}$$

es convexo sobre $[0, 1]$, es decir

$$d(\gamma(t), \beta(t)) \leq (1 - t)d(\gamma(0), \beta(0)) + td(\gamma(1), \beta(1)) \quad \forall t \in [0, 1].$$

Demostración. \Rightarrow Supongamos que (X, d) es un espacio de Busemann. Sean γ, β dos geodésicas cualesquiera. Denotemos por κ al punto medio entre γ_1 y β_0 . Por la desigualdad triangular tenemos que

$$d(\gamma_{1/2}, \beta_{1/2}) \leq d(\gamma_{1/2}, \kappa) + d(\kappa, \beta_{1/2}),$$

y por la propiedad de Busemann tenemos que

$$d(\gamma_{1/2}, \kappa) \leq \frac{1}{2}d(\gamma_0, \beta_0)$$

y

$$d(\kappa, \beta_{1/2}) \leq \frac{1}{2}d(\gamma_1, \beta_1).$$

De esta forma,

$$d(\gamma_{1/2}, \beta_{1/2}) \leq \frac{1}{2}d(\gamma_0, \beta_0) + \frac{1}{2}d(\gamma_1, \beta_1). \quad (1.8)$$

Demostremos, por inducción sobre $m \in \mathbb{N}$, que

$$d(\gamma_t, \beta_t) \leq (1-t)d(\gamma_0, \beta_0) + td(\gamma_1, \beta_1), \quad (1.9)$$

$$\forall t \in Z = \left\{ \frac{k}{2^m} : m \in \mathbb{N}, k = 0, 1, \dots, 2^m \right\}$$

En caso de que $m = 1$, (1.9) se verifica por (1.8). Sea $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, arbitrario. Supongamos que para cada $k = 0, 1, \dots, 2^{m-1}$ se verifica

$$d(\gamma_{k/2^m}, \beta_{k/2^m}) \leq \left(1 - \frac{k}{2^m}\right) d(\gamma_0, \beta_0) + \frac{k}{2^m} d(\gamma_1, \beta_1). \quad (1.10)$$

Probemos que (1.9) se cumple para m . Sea $k \in \{0, 1, \dots, 2^m\}$, arbitrario. Si k es par, el resultado se tiene gracias a (1.10). En el caso de que k sea impar, consideremos $\kappa_{k,m}$ el punto medio entre $\gamma_{k+1/2^m}$ y $\beta_{k-1/2^m}$. Por la desigualdad triangular tenemos que

$$d(\gamma_{k/2^m}, \beta_{k/2^m}) \leq d(\gamma_{k/2^m}, \kappa_{k,m}) + d(\kappa_{k,m}, \beta_{k/2^m}).$$

Puesto que X es espacio de Busemann sabemos que

$$d(\gamma_{k/2^m}, \kappa_{k,m}) \leq \frac{1}{2}d(\gamma_{k-1/2^m}, \beta_{k-1/2^m})$$

y

$$d(\beta_{k/2^m}, \kappa_{k,m}) \leq \frac{1}{2}d(\gamma_{k+1/2^m}, \beta_{k+1/2^m}).$$

Como $k+1, k-1$ son pares, gracias a (1.10) y por las dos desigualdades anteriores, se sigue que

$$\begin{aligned} d(\gamma_{k/2^m}, \beta_{k/2^m}) &\leq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{k-1}{2^m}\right) d(\gamma_0, \beta_0) + \frac{1}{2} \frac{k-1}{2^m} d(\gamma_1, \beta_1) \\ &+ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{k+1}{2^m}\right) d(\gamma_0, \beta_0) + \frac{1}{2} \frac{k+1}{2^m} d(\gamma_1, \beta_1) \\ &= \left(1 - \frac{k}{2^m}\right) d(\gamma_0, \beta_0) + \frac{k}{2^m} d(\gamma_1, \beta_1), \end{aligned}$$

lo cual concluye la inducción.

Con esto, mostramos que

$$d(\gamma(t), \beta(t)) \leq (1-t)d(\gamma(0), \beta(0)) + td(\gamma(1), \beta(1)) \quad \forall t \in Z.$$

Puesto que Z es denso en $[0, 1]$ (ver Proposición 1.2), la función

$$d(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow X,$$

es bicontinua y las geodésicas γ y β son continuas, obtenemos que

$$d(\gamma(t), \beta(t)) \leq (1-t)d(\gamma(0), \beta(0)) + td(\gamma(1), \beta(1)) \quad \forall t \in [0, 1].$$

\Leftarrow) Sean $x, y, z \in X$ cualesquiera. Consideremos m_1 punto medio de $[x, z]$, y m_2 , punto medio de $[y, z]$. Por convexidad de T tenemos que

$$d(m_1, m_2) \leq \frac{1}{2}d(x, y) + \frac{1}{2}d(z, z),$$

de donde obtenemos

$$2d(m_1, m_2) \leq d(x, y).$$

□

COROLARIO 1.8. *Todo espacio de Busemann es únicamente geodésico.*

Demostración. Sean (X, d) un espacio de Busemann y $x, y \in X$ arbitrarios. Sean γ y β dos geodésicas que unen a x e y . Por la Proposición 1.7 tenemos que para cada $t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} d(\gamma(t), \beta(t)) &\leq (1-t)d(\gamma_0, \beta_0) + td(\gamma_1, \beta_1) \\ &= (1-t)d(x, x) + td(y, y) \\ &= 0. \end{aligned}$$

En conclusión $\gamma = \beta$.

□

1.3. Espacios de Hadamard

DEFINICIÓN 1.6 (Espacios CAT(0)). Sea (X, d) un espacio geodésico, decimos que este es un espacio CAT(0) cuando para cada triángulo geodésico $\Delta(p, q, r)$, y $x \in [p, r]$, $y \in [p, q]$ se tiene que

$$d(x, y) \leq \|\bar{x} - \bar{y}\|,$$

en donde \bar{x}, \bar{y} son los puntos de comparación respecto a x e y (ver Definición 1.4). Cuando un espacio CAT(0) es completo, decimos que es un espacio de Hadamard.

PROPOSICIÓN 1.9. Todo espacio CAT(0) es de Busemann.

Demostración. Sean X un espacio CAT(0), $p, q, r \in X$ arbitrarios y $t = 1/2$. Consideremos el triángulo geodésico $\Delta(p, q, r)$. Escribimos $\gamma = [p, r]$ y $\beta = [p, q]$. Por definición de espacio CAT(0) obtenemos

$$\begin{aligned} d(\gamma_t, \beta_t) &\leq \|\bar{\gamma}_t - \bar{\beta}_t\| \\ &= \|(1-t)\bar{p} + t\bar{r} - (1-t)\bar{p} - t\bar{q}\| \\ &= \frac{1}{2}\|\bar{q} - \bar{r}\| \\ &= \frac{1}{2}d(q, r), \end{aligned}$$

en otras palabras

$$2d(\gamma_{1/2}, \beta_{1/2}) \leq d(q, r),$$

lo cual muestra que el espacio es de Busemann, gracias a que $\gamma_{1/2}$ es el punto medio entre p y r , y $\beta_{1/2}$ el punto medio entre p y q . \square

El siguiente resultado es una propiedad muy importante de los espacios CAT(0). Más adelante, demostramos que un espacio geodésico es CAT(0) sí y solo sí verifica esta desigualdad.

LEMA 1.10. Sean (X, d) un espacio CAT(0), $p \in X$ y $x : [0, 1] \rightarrow X$ una geodésica. Se tiene que:

$$d(p, x_t)^2 \leq (1-t)d(p, x_0)^2 + td(p, x_1)^2 - t(1-t)d(x_0, x_1)^2 \quad \forall t \in [0, 1].$$

Demostración. Entendemos $\bar{p}, \bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_t \in \mathbb{R}^2$, con $t \in [0, 1]$, los respectivos puntos de comparación de p, x_0, x_1, x_t respecto al triángulo geodésico $\Delta(p, x_0, x_1)$, de

forma que

$$d(p, x_0) = \|\bar{p} - \bar{x}_0\|, \quad d(x_0, x_1) = \|\bar{x}_0 - \bar{x}_1\|, \quad d(x_1, p) = \|\bar{x}_1 - \bar{p}\|.$$

Entendemos $\langle \cdot, \cdot \rangle$ como el producto interno de \mathbb{R}^2 . Como $p \in [x_0, p]$, por definición de espacio CAT(0) tenemos que

$$\begin{aligned} & d(p, x_t)^2 \\ \leq & \|\bar{p} - \bar{x}_t\|^2 \\ = & \|\bar{p} - (1-t)\bar{x}_0 - t\bar{x}_1\|^2 \\ = & \langle \bar{p} - t\bar{x}_1 - (1-t)\bar{x}_0, \bar{p} - t\bar{x}_1 - (1-t)\bar{x}_0 \rangle \\ = & \langle \bar{p} - t\bar{x}_1 - (1-t)\bar{x}_0, t\bar{p} + (1-t)\bar{p} - t\bar{x}_1 - (1-t)\bar{x}_0 \rangle \\ = & t\langle \bar{p} - t\bar{x}_1 - (1-t)\bar{x}_0, \bar{p} - \bar{x}_1 \rangle + (1-t)\langle \bar{p} - t\bar{x}_1 - (1-t)\bar{x}_0, \bar{p} - \bar{x}_0 \rangle \\ = & t\langle \bar{p} - \bar{x}_1 + (1-t)\bar{x}_1 - (1-t)\bar{x}_0, \bar{p} - \bar{x}_1 \rangle \\ & + (1-t)\langle \bar{p} - \bar{x}_0 - t\bar{x}_1 + t\bar{x}_0, \bar{p} - \bar{x}_0 \rangle \\ = & t\langle \bar{p} - \bar{x}_1, \bar{p} - \bar{x}_1 \rangle + t(1-t)\langle \bar{x}_1 - \bar{x}_0, \bar{p} - \bar{x}_1 \rangle + (1-t)\langle \bar{p} - \bar{x}_0, \bar{p} - \bar{x}_0 \rangle \\ & + t(1-t)\langle -\bar{x}_1 + \bar{x}_0, \bar{p} - \bar{x}_0 \rangle \\ = & t\|\bar{p} - \bar{x}_1\|^2 + (1-t)\|\bar{p} - \bar{x}_0\|^2 - t(1-t)\langle \bar{x}_1 - \bar{x}_0, \bar{x}_1 - \bar{x}_0 \rangle \\ = & t\|\bar{p} - \bar{x}_1\|^2 + (1-t)\|\bar{p} - \bar{x}_0\|^2 - t(1-t)\|\bar{x}_0 - \bar{x}_1\|^2 \\ = & td(p, x_1)^2 + (1-t)d(p, x_0)^2 - t(1-t)d(x_0, x_1)^2, \end{aligned}$$

para cada $t \in [0, 1]$. □

LEMA 1.11. Sean (X, d) un espacio CAT(0) y $x : [0, 1] \rightarrow X$ una geodésica. La función

$$\begin{aligned} f_t : X \times X & \rightarrow X \\ (x_0, x_1) & \rightarrow f_t(x_0, x_1) = (1-t)x_0 + tx_1 = x_t \end{aligned}$$

es continua, para cada $t \in [0, 1]$.

Demostración. Sea $y : [0, 1] \rightarrow X$ otra geodésica. Por el Lema 1.10 aplicado dos veces, para cada $t \in [0, 1]$ obtenemos

$$\begin{aligned} d(x_t, y_t)^2 & \leq (1-t)d(y_t, x_0)^2 + td(y_t, x_1)^2 - t(1-t)d(x_0, x_1)^2 \\ & \leq (1-t)^2d(x_0, y_0)^2 + t^2d(x_1, y_1)^2 + t(1-t)[d(x_0, y_1)^2 \\ & \quad + d(x_1, y_0)^2 - d(x_0, x_1)^2 - d(y_0, y_1)^2]. \end{aligned}$$

Como la función

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$$

es bicontinua, tenemos que

$$\begin{aligned} & \lim_{(y_0, y_1) \rightarrow (x_0, x_1)} d(x_t, y_t)^2 \\ & \leq \lim_{(y_0, y_1) \rightarrow (x_0, x_1)} \left[(1-t)^2 d(x_0, y_0)^2 + t^2 d(x_1, y_1)^2 + t(1-t)[d(x_0, y_1)^2 \right. \\ & \quad \left. + d(x_1, y_0)^2 - d(x_0, x_1)^2 - d(y_0, y_1)^2 \right] \\ & = 0, \end{aligned}$$

independientemente de t , es decir

$$\lim_{(y_0, y_1) \rightarrow (x_0, x_1)} f_t(y_0, y_1) = f_t(x_0, x_1) \quad \forall t \in [0, 1].$$

□

PROPOSICIÓN 1.12. Sea (X, d) un espacio $CAT(0)$ y $x_0, x_1, y_0, y_1 \in X$. Para cada $t \in [0, 1]$, y cada $\beta \in [0, 1]$ se tiene que:

$$\begin{aligned} & d(x_0, y_t)^2 + d(x_1, y_{1-t})^2 \\ & \leq d(x_0, y_0)^2 + d(x_1, y_1)^2 + (2t^2 - t)d(y_0, y_1)^2 + td(x_0, x_1)^2 \\ & \quad - t\beta[d(x_0, x_1) - d(y_0, y_1)]^2 - t(1-\beta)[d(x_0, y_0) - d(x_1, y_1)]^2. \end{aligned}$$

Demostración. Sean $t, \beta \in [0, 1]$, arbitrarios.

Caso 1: Supongamos que $t = 1$ y $\beta = 0$. Sea γ la geodésica que conecta x_0, y_1 y $s \in [0, 1]$ por elegir. Por el Lema 1.10 tenemos que:

$$d(y_0, \gamma_s)^2 \leq (1-s)d(y_0, x_0)^2 + sd(y_0, y_1)^2 - s(1-s)d(x_0, y_1)^2$$

y

$$d(x_1, \gamma_s)^2 \leq (1-s)d(x_1, x_0)^2 + sd(x_1, y_1)^2 - s(1-s)d(x_0, y_1)^2.$$

Luego, por la desigualdad de Cauchy con ε (Proposición 1.1) y las dos desigualdades anteriores, para cada $\varepsilon > 0$ se tiene que

$$\begin{aligned} & d(x_1, y_0)^2 \\ & \leq [d(x_1, \gamma_s) + d(\gamma_s, y_0)]^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq (1 + \varepsilon)d(x_1, \gamma_s)^2 + \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) d(\gamma_s, y_0)^2 \\
&\leq (1 + \varepsilon)(1 - s)d(x_1, x_0)^2 + (1 + \varepsilon)s d(x_1, y_1)^2 + \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) (1 - s)d(y_0, x_0)^2 \\
&\quad + \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) s d(y_0, y_1)^2 - \left(2 + \varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\right) s(1 - s)d(x_0, y_1)^2.
\end{aligned}$$

En particular, para $\varepsilon = s/1-s$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
d(x_0, y_1)^2 + d(x_1, y_0)^2 &\leq d(x_0, x_1)^2 + d(y_0, y_1)^2 \\
&\quad + \frac{1-s}{s}d(x_0, y_0)^2 + \frac{s}{1-s}d(x_1, y_1)^2.
\end{aligned}$$

Así, para

$$s = \frac{d(x_0, y_0)}{d(x_0, y_0) + d(x_1, y_1)}$$

obtenemos

$$\begin{aligned}
d(x_0, y_1)^2 + d(x_1, y_0)^2 &\leq d(x_0, x_1)^2 + d(y_0, y_1)^2 + d(x_0, y_0)^2 + d(x_1, y_1)^2 \\
&\quad - [d(x_0, y_0) - d(x_1, y_1)]^2, \tag{1.11}
\end{aligned}$$

que es la desigualdad buscada para este caso.

Caso 2: Supongamos que $t = 1$ y $\beta = 1$. De manera análoga al Caso 1, tomando γ como la geodésica que conecta y_1, x_0 (en este caso, y_1 es el punto inicial de la geodésica y x_0 el punto final), y tomando

$$s = \frac{d(x_0, x_1)}{d(x_0, x_1) + d(y_0, y_1)},$$

se sigue que

$$\begin{aligned}
d(x_0, y_1)^2 + d(x_1, y_0)^2 &\leq d(x_0, x_1)^2 + d(y_0, y_1)^2 + d(x_0, y_0)^2 + d(x_1, y_1)^2 \\
&\quad - [d(x_0, x_1) - d(y_0, y_1)]^2, \tag{1.12}
\end{aligned}$$

que es la desigualdad buscada para este Caso.

Caso 3: Supongamos que $t = 1$ y $\beta \in [0, 1]$. Si multiplicamos (1.11) por $(1 - \beta)$ y (1.12) por β y sumamos los resultados obtenemos

$$\begin{aligned}
d(x_0, y_1)^2 + d(x_1, y_0)^2 &\leq d(x_0, x_1)^2 + d(y_0, y_1)^2 + d(x_0, y_0)^2 + d(x_1, y_1)^2 \\
&\quad - \beta[d(x_0, x_1) - d(y_0, y_1)]^2 \\
&\quad - (1 - \beta)[d(x_0, y_0) - d(x_1, y_1)]^2,
\end{aligned}$$

que es la desigualdad deseada.

Caso 4: Para el caso general, gracias al Lema 1.10 y el Caso 3, se sigue que

$$\begin{aligned}
& d(x_0, y_t)^2 + d(x_1, y_{1-t})^2 \\
\leq & (1-t)d(x_0, y_0)^2 + td(x_0, y_1)^2 + (1-t)d(x_1, y_1)^2 + td(x_1, y_0)^2 \\
& - 2t(1-t)d(y_0, y_1)^2 \\
\leq & d(x_0, y_0)^2 + d(x_1, y_1)^2 + (2t^2 - t)d(y_0, y_1)^2 + td(x_0, x_1)^2 \\
& - t\beta[d(x_0, x_1) - d(y_0, y_1)]^2 - t(1-\beta)[d(x_0, y_0) - d(x_1, y_1)]^2,
\end{aligned}$$

que es lo que queríamos demostrar. □

COROLARIO 1.13. *En un espacio CAT(0) (X, d) , para cada $x_0, x_1, y_0, y_1 \in X$ se tiene que*

$$d(x_0, y_1)^2 + d(x_1, y_0)^2 \leq d(x_0, y_0)^2 + d(x_1, y_1)^2 + d(x_0, x_1)^2 + d(y_0, y_1)^2.$$

Demostración. Tomando $t = 1$ en la Proposición 1.12 se sigue que

$$\begin{aligned}
d(x_0, y_1)^2 + d(x_1, y_0)^2 & \leq d(x_0, x_1)^2 + d(y_0, y_1)^2 + d(x_0, y_0)^2 + d(x_1, y_1)^2 \\
& \quad - \beta[d(x_0, x_1) - d(y_0, y_1)]^2 \\
& \quad - (1-\beta)[d(x_0, y_0) - d(x_1, y_1)]^2 \\
& \leq d(x_0, y_0)^2 + d(x_1, y_1)^2 + d(x_0, x_1)^2 + d(y_0, y_1)^2,
\end{aligned}$$

lo cual concluye la demostración. □

1.4. Caracterización de los espacios CAT(0) y los espacios de Hadamard

DEFINICIÓN 1.7 (Propiedad de los 4 puntos). *Se dice que un espacio métrico (X, d) tiene la propiedad de los cuatro puntos si para cada $x_1, x_2, y_1, y_2 \in X$ existen $x'_1, x'_2, y'_1, y'_2 \in \mathbb{R}^2$ tales que*

$$d(x_i, y_j) = \|x'_i - y'_j\| \text{ para } i, j = 1, 2,$$

y además

$$d(x_1, x_2) \leq \|x'_1 - x'_2\|, d(y_1, y_2) \leq \|y'_1 - y'_2\|.$$

DEFINICIÓN 1.8 (Puntos medios aproximados). *En un espacio métrico (X, d) decimos que $x, y \in X$ tienen puntos medios aproximados cuando para cada $\varepsilon > 0$ existe $a \in X$ tal que*

$$\max\{d(x, a), d(y, a)\} \leq \frac{1}{2}d(x, y) + \varepsilon.$$

El siguiente teorema es una caracterización de un espacio CAT(0) cuando sabemos de antemano que este es un espacio métrico geodésico.

TEOREMA 1.14. *Sea (X, d) un espacio métrico geodésico. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

i) (X, d) es CAT(0);

ii) Para cada $x, y, z \in X$ se cumple la desigualdad

$$d(x, m)^2 \leq \frac{1}{2}d(x, y)^2 + \frac{1}{2}d(x, z)^2 - \frac{1}{4}d(y, z)^2,$$

donde m es punto medio de $[y, z]$;

iii) Para cada geodésica $x : [0, 1] \rightarrow X$ y $p \in X$ se tiene que

$$d(p, x_t)^2 \leq (1-t)d(p, x_0)^2 + td(p, x_1)^2 - t(1-t)d(x_0, x_1)^2. \quad (1.13)$$

Demostración. La implicación $i) \Rightarrow ii)$ se sigue gracias al Lema 1.10.

Ahora, probemos que $ii) \Rightarrow iii)$. Sean $x : [0, 1] \rightarrow X$ una geodésica y $p \in X$, arbitrarios. Consideremos el conjunto

$$Z = \{k/2^m : m \in \mathbb{N}, k = 1, 2, \dots, 2^m\}.$$

Vamos a probar por inducción sobre $m \in \mathbb{N}$ que (1.13) se cumple para todo elemento de Z . En el caso en que $m = 1$, (1.13) se cumple para $t = 0/2^1, t = 2/2^1$ y por $ii)$ también se cumple para $t = \frac{1}{2^1}$, puesto que $x_{\frac{1}{2}}$ es el punto medio entre x_0 y x_1 . Con esto cubrimos nuestra base de la inducción. Ahora, sea $n \in \mathbb{N}$ arbitrario y supongamos que para cada $k \in \{0, 1, \dots, 2^n\}$, si $t = k/2^n$, entonces

$$d(p, x_t)^2 \leq (1-t)d(p, x_0)^2 + td(p, x_1)^2 - t(1-t)d(x_0, x_1)^2. \quad (1.14)$$

Debemos probar que para cada $k \in \{0, 1, \dots, 2^{n+1}\}$, (1.13) se satisface para $t = k/2^{n+1}$. Sea $k \in \{0, 1, \dots, 2^{n+1}\}$ arbitrario. Si k es par, entonces existe $d_k \in \mathbb{N}$ tal que $k = 2d_k$, luego

$$t = \frac{k}{2^{n+1}} = \frac{d_k}{2^n},$$

y por (1.14) tenemos lo requerido. Ahora supongamos que k es impar. Tomemos $s = 1/2^{n+1}$. Por *ii*) tenemos que

$$d(p, x_t)^2 \leq \frac{1}{2}d(p, x_{t-s})^2 + \frac{1}{2}d(p, x_{t+s})^2 - \frac{1}{4}d(x_{t-s}, x_{t+s})^2.$$

Como $k+1$ y $k-1$ son pares, podemos aplicar (1.14) a $t+s$ y $t-s$ y obtener

$$d(p, x_{t+s})^2 \leq (1-t-s)d(p, x_0)^2 + (t+s)d(p, x_1)^2 - (1-t-s)(t+s)d(x_0, x_1)^2,$$

$$d(p, x_{t-s})^2 \leq (1-t+s)d(p, x_0)^2 + (t-s)d(p, x_1)^2 - (1-t+s)(t-s)d(x_0, x_1)^2.$$

Combinando estas tres últimas desigualdades, y por definición de geodésica se sigue que

$$\begin{aligned} d(p, x_t)^2 &\leq (1-t)d(p, x_0)^2 + td(p, x_1)^2 \\ &\quad - \left[s^2 + \frac{1}{2}(1-t-s)(t+s) + \frac{1}{2}(1-t+s)(t-s) \right] d(x_0, x_1)^2 \\ &= (1-t)d(p, x_0)^2 + td(p, x_1)^2 - t(1-t)d(x_0, x_1)^2. \end{aligned}$$

De esta forma, obtenemos que

$$d(p, x_t)^2 \leq (1-t)d(p, x_0)^2 + td(p, x_1)^2 - t(1-t)d(x_0, x_1)^2 \quad \forall t \in \mathbb{Z}.$$

Puesto que \mathbb{Z} es denso en el conjunto $[0, 1]$ (ver Proposición 1.2), y gracias a la bicontinuidad de la función

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+,$$

y la continuidad de la geodésica x , concluimos que

$$d(p, x_t)^2 \leq (1-t)d(p, x_0)^2 + td(p, x_1)^2 - t(1-t)d(x_0, x_1)^2 \quad \forall t \in [0, 1].$$

Probamos que *iii*) \Rightarrow *i*) a través de la definición de espacio CAT(0). Sean $p, q, r \in X$ cualesquiera. Consideremos el triángulo geodésico $\Delta(p, q, r)$ y $x \in [p, q]$, $y \in [p, r]$. Escribimos $\beta = [p, q]$, $\gamma = [p, r]$. Sean $s, t \in [0, 1]$ tales que $x = \beta_s$

e $y = \gamma_t$. Consideremos los siguientes triángulos de comparación: $\Delta(\bar{p}, \bar{x}, \bar{r})$, $\Delta(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r})$ y $\Delta(p', x', y')$. Podemos considerar que $p' = \bar{p} = \bar{\bar{p}}$, $\bar{r} = \bar{\bar{r}}$ y que $y' = \bar{y} = \bar{\bar{y}}$ (ver Gráfico 4).

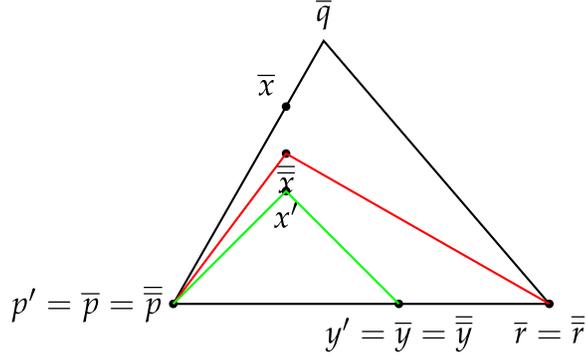


Gráfico 4. Los triángulos $\Delta(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r})$, $\Delta(\bar{p}, \bar{r}, \bar{x})$ y $\Delta(p', y', x')$.

Esto se da gracias a que $\bar{y} = (1-t)\bar{p} + t\bar{r}$, $\bar{\bar{y}} = (1-t)\bar{\bar{p}} + t\bar{\bar{r}}$ y

$$d(p, y) = td(p, r), \quad d(r, y) = (1-t)d(p, r)$$

$$\|\bar{p} - \bar{y}\| = \|t\bar{p} - t\bar{r}\| = t\|\bar{p} - \bar{r}\| = td(p, r),$$

$$\|\bar{\bar{p}} - \bar{\bar{y}}\| = \|t\bar{\bar{p}} - t\bar{\bar{r}}\| = t\|\bar{\bar{p}} - \bar{\bar{r}}\| = td(p, r),$$

$$\|\bar{r} - \bar{y}\| = \|(1-t)\bar{r} - (1-t)\bar{p}\| = (1-t)\|\bar{p} - \bar{r}\| = (1-t)d(p, r)$$

y

$$\|\bar{\bar{p}} - \bar{\bar{y}}\| = \|(1-t)\bar{\bar{r}} - (1-t)\bar{\bar{p}}\| = (1-t)\|\bar{\bar{p}} - \bar{\bar{r}}\| = (1-t)d(p, r).$$

Queremos demostrar que

$$d(x, y) \leq \|\bar{x} - \bar{y}\|.$$

Por (1.13) se tiene que

$$\begin{aligned} & d(x, y)^2 \\ &= d(x, (1-t)p + tr)^2 \\ &\leq (1-t)d(x, p)^2 + td(x, r)^2 - t(1-t)d(p, r)^2 \\ &= (1-t)\|\bar{x} - \bar{p}\|^2 + t\|\bar{x} - \bar{r}\|^2 - t(1-t)\|\bar{\bar{p}} - \bar{\bar{r}}\|^2 \\ &= (1-t)\|\bar{x}\|^2 - 2(1-t)\langle \bar{x}, \bar{p} \rangle + (1-t)\|\bar{\bar{p}}\|^2 \\ &\quad + t\|\bar{x}\|^2 - 2t\langle \bar{x}, \bar{r} \rangle + t\|\bar{\bar{r}}\|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -t(1-t)\|\bar{p}\|^2 + 2t(1-t)\langle\bar{p},\bar{r}\rangle - t(1-t)\|\bar{r}\|^2 \\
= & [t+(1-t)]\|\bar{x}\|^2 - 2(1-t)\langle\bar{x},\bar{p}\rangle - 2t\langle\bar{x},\bar{r}\rangle + [1-t-t(1-t)]\|\bar{p}\|^2 \\
& + 2(1-t)t\langle\bar{p},\bar{r}\rangle + [t-t(1-t)]\|\bar{r}\|^2 \\
= & \|\bar{x}\|^2 - 2(1-t)\langle\bar{x},\bar{p}\rangle - 2t\langle\bar{x},\bar{r}\rangle + (1-t)\|\bar{p}\|^2 + 2(1-t)t\langle\bar{p},\bar{r}\rangle + t\|\bar{r}\|^2 \\
= & \|\bar{x}\|^2 - 2\langle\bar{x},(1-t)\bar{p}+t\bar{r}\rangle + \|(1-t)\bar{p}-(1-t)\bar{r}\|^2 \\
= & \|\bar{x}-(1-t)\bar{p}-t\bar{r}\|^2 \\
= & \|\bar{x}-\bar{y}\|^2,
\end{aligned}$$

es decir

$$d(x,y) \leq \|\bar{x}-\bar{y}\|. \quad (1.15)$$

Por (1.13) tenemos también la desigualdad

$$d(r,x)^2 \leq (1-s)d(p,r)^2 + sd(q,r)^2 - t(1-t)d(p,q)^2,$$

pues $x = (1-s)p + sq$. De una forma análoga a cómo conseguimos (1.15) (reemplazando x por r , y por x , q por r respectivamente) obtenemos

$$d(r,x) \leq \|\bar{r}-\bar{x}\|. \quad (1.16)$$

Sean $\alpha(p'), \alpha(\bar{p}), \alpha(\bar{p})$ los ángulos en el vértice $p' = \bar{p} = \bar{p}$ de los triángulos $\triangle(x', p', y')$, $\triangle(\bar{x}, \bar{p}, \bar{y})$ y $\triangle(\bar{p}, \bar{x}, \bar{r})$, respectivamente (ver Gráfico 5).

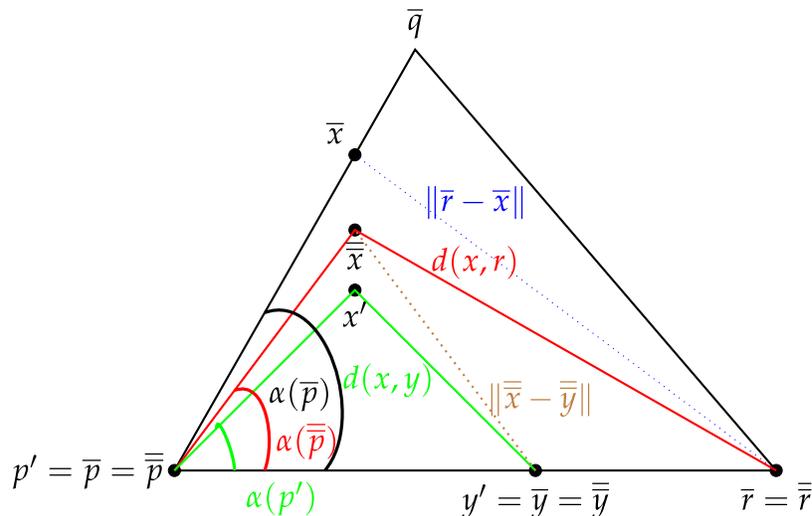


Gráfico 5. Los triángulos $\triangle(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r})$, $\triangle(\bar{p}, \bar{r}, \bar{x})$, $\triangle(p', y', x')$, $\triangle(\bar{p}, \bar{y}, \bar{x})$ y $\triangle(\bar{p}, \bar{x}, \bar{r})$.

Los triángulos $\triangle(p', y', x')$ y $\triangle(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p})$ tienen un lado en común, puesto que $p' = \bar{p}$ e $y' = \bar{y}$; de (1.15) tenemos que

$$\|x' - y'\| = d(x, y) \leq \|\bar{x} - \bar{y}\|,$$

y gracias a que

$$\|x' - p'\| = d(x, p) = \|\bar{x} - \bar{p}\|,$$

concluimos que

$$\alpha(p') \leq \alpha(\bar{p}). \quad (1.17)$$

De la misma forma, los triángulos $\triangle(\bar{p}, \bar{x}, \bar{r})$ y $\triangle(\bar{p}, \bar{x}, \bar{r})$ comparten un lado en común, puesto que $\bar{p} = \bar{p}$, $\bar{r} = \bar{r}$; por (1.16) se sigue que

$$\|\bar{r} - \bar{x}\| = d(r, x) \leq \|\bar{r} - \bar{x}\|,$$

y como

$$\|\bar{x} - \bar{p}\| = s\|\bar{p} - \bar{q}\| = sd(p, q) = d(p, x) = \|\bar{x} - \bar{p}\|,$$

obtenemos

$$\alpha(\bar{p}) \leq \alpha(\bar{p}).$$

Por la ecuación anterior y (1.17) tenemos que

$$\alpha(p') \leq \alpha(\bar{p}).$$

Puesto que los triángulos $\triangle(p', x', y')$ y $\triangle(\bar{p}, \bar{x}, \bar{y})$ comparten un lado en común, dado que $p' = \bar{p}$ y $y' = \bar{y}$ y que

$$\|x' - p'\| = d(x, p) = sd(p, q) = \|\bar{x} - \bar{p}\|,$$

concluimos que

$$\|x' - y'\| \leq \|\bar{x} - \bar{y}\|.$$

que es lo mismo que

$$d(x, y) \leq \|\bar{x} - \bar{y}\|,$$

como queríamos demostrar. □

DEFINICIÓN 1.9. Sea (H, d) un espacio de Hadamard. Si para cada geodésica $x : [0, 1] \rightarrow H$ y cada punto $p \in H$ se verifica que

$$d(p, x_t)^2 = (1 - t)d(p, x_0)^2 + td(p, x_1)^2 - t(1 - t)d(x_0, x_1)^2,$$

entonces decimos que H es un espacio de Hadamard plano.

El siguiente teorema es una caracterización para los espacios de Hadamard si sabemos de antemano que el espacio métrico es completo.

TEOREMA 1.15. *Sea (X, d) un espacio métrico completo. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

- i) (X, d) es $CAT(0)$;
- ii) Cada par de puntos en X tienen puntos medios aproximados y X posee la propiedad de los 4 puntos;
- iii) Para cada par de puntos $x, y \in X$ existe $m \in X$ tal que

$$d(m, z)^2 \leq \frac{1}{2}d(x, z)^2 + \frac{1}{2}d(y, z)^2 - \frac{1}{4}d(x, y)^2 \quad \forall z \in X;$$

- iv) Para cada par de puntos $x, y \in X$ y $\varepsilon > 0$ existe $m \in X$ tal que

$$d(m, z)^2 \leq \frac{1}{2}d(x, z)^2 + \frac{1}{2}d(y, z)^2 - \frac{1}{4}d(x, y)^2 + \varepsilon \quad \forall z \in X.$$

Demostración. Verifiquemos $i) \Rightarrow ii)$. Todo espacio métrico con puntos medios posee puntos medios aproximados, pues para cada par de puntos $x, y \in X$, con punto medio m , y cada $\varepsilon > 0$ tenemos que

$$\max \{d(x, m), d(y, m)\} = d(x, m) = \frac{1}{2}d(x, y) \leq \frac{1}{2}d(x, y) + \varepsilon.$$

De esta forma, solo falta mostrar que X verifica la propiedad de los 4 puntos. Sean $x_1, y_1, x_2, y_2 \in X$, arbitrarios. Consideremos el cuadrilátero $Q \subset \mathbb{R}^2$ formado por los triángulos de comparación $\triangle(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_1)$ y $\triangle(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_2)$ teniendo como lado en común el segmento $[\bar{x}_1, \bar{x}_2]$. Supongamos también que \bar{y}_1, \bar{y}_2 están en lados opuestos de la línea que contiene a $[\bar{x}_1, \bar{x}_2]$. Tenemos dos casos, cuando Q es convexo (como en el Gráfico 5) y el segundo que no lo sea (como en el Gráfico 6).

Para el primer caso, sea \bar{z} el punto en el que se intersecan las diagonales $[\bar{x}_1, \bar{x}_2]$ y $[\bar{y}_1, \bar{y}_2]$. Sea $z \in [x_1, x_2]$ tal que $d(x_1, z) = \|\bar{x}_1 - \bar{z}\|$. Por definición de espacio $CAT(0)$ sabemos que:

$$d(y_1, y_2) \leq d(y_1, z) + d(z, y_2) \leq \|\bar{y}_1 - \bar{z}\| + \|\bar{z} - \bar{y}_2\| = \|\bar{y}_1 - \bar{y}_2\|,$$

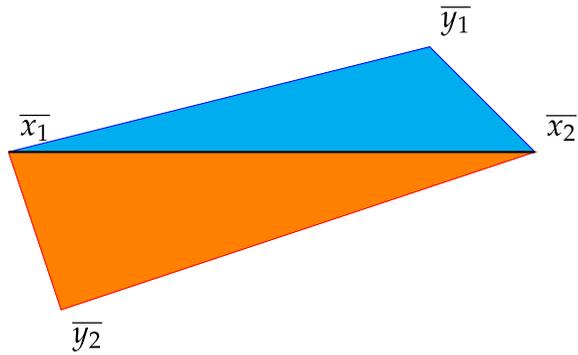


Gráfico 5. Cuando Q es convexo.

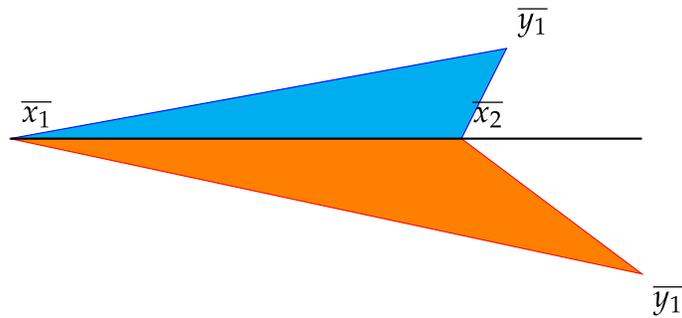


Gráfico 6. Cuando Q no es convexo.

la cual es la única desigualdad que falta para que se cumpla la propiedad de los 4 puntos.

En el caso en el que Q no sea convexo, gracias al Lema de Alexandrov, sabemos que existen x'_1, y'_1, y'_2 tales que

$$\|x'_1 - y'_1\| = \|\bar{x}_1 - \bar{y}_1\|,$$

$$\|x'_1 - y'_2\| = \|\bar{x}_1 - \bar{y}_2\|,$$

y

$$\|y'_1 - y'_2\| = \|\bar{y}_1 - \bar{x}_2\| + \|\bar{x}_2 - \bar{y}_2\|.$$

Notemos que, a través de rotaciones y traslaciones, podemos mover el triángulo generado por x'_1, y'_1, y'_2 de tal forma que $x'_1 = \bar{x}_1$ y $y'_1 = \bar{y}_1$, gracias a que $\|x'_1 - y'_1\| = \|\bar{x}_1 - \bar{y}_1\|$. De esta manera, los cuatro puntos buscados son $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_1, y'_2$, puesto que

$$d(x_1, y_2) = \|\bar{x}_1 - \bar{y}_2\| = \|\bar{x}_1 - y'_2\|.$$

Por cómo se construyó el triángulo, también tenemos que

$$d(x_2, y_2) = \|\bar{x}_2 - y'_2\|$$

y

$$d(y_1, y_2) = \|\bar{y}_1 - \bar{y}_2\| \leq \|\bar{y}_1 - \bar{x}_2\| + \|\bar{x}_2 - \bar{y}_2\| = \|\bar{y}_1 - y'_2\|.$$

De esta forma tenemos las dos relaciones de igualdad y la desigualdad que restaban para que se cumpla la propiedad de los cuatro puntos.

Mostremos la implicación $ii) \Rightarrow iii)$. Supongamos que X tiene puntos medios aproximados y la propiedad de 4 puntos. Primero mostremos la existencia de puntos medios. Sean $x, y \in X$ y $(m_i)_{i \in \mathbb{N}}$ puntos medios aproximados tales que

$$\max\{d(x, m_i), d(y, m_i)\} \leq \frac{1}{2}d(x, y) + \frac{1}{i} \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Sean $x', m'_i, y', m'_j \in \mathbb{R}^2$ que verifiquen la propiedad de los 4 puntos para x, m_i, y, m_j , respectivamente. Vamos a probar que $(m'_i)_{i \in \mathbb{N}}$ converge a m' , punto medio entre x', y' . De la desigualdad triangular tenemos que:

$$\begin{aligned} \|x' - y'\| &\leq \|x' - m'_i\| + \|m'_i - y'\| \\ \Rightarrow -\|x' - m'_i\| - \|m'_i - y'\| &\leq -\|x' - y'\|. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Gracias a la propiedad de los cuatro puntos, y a que $(m_i)_{i \in \mathbb{N}}$ son puntos medios aproximados de x e y , se tiene para cada $i \in \mathbb{N}$ que

$$d(x, m_i) = \|x' - m'_i\| \leq \frac{1}{2}d(x, y) + \frac{1}{i} \leq \frac{1}{2}\|x' - y'\| + \frac{1}{i}$$

y

$$d(y, m_i) = \|y' - m'_i\| \leq \frac{1}{2}d(x, y) + \frac{1}{i} \leq \frac{1}{2}\|x' - y'\| + \frac{1}{i}.$$

Utilizando (1.18) y las dos últimas desigualdades obtenemos que

$$\frac{1}{2}\|x' - y'\| - \frac{1}{i} \leq \|x' - m'_i\| \leq \frac{1}{2}\|x' - y'\| + \frac{1}{i} \quad (1.19)$$

y

$$\frac{1}{2}\|x' - y'\| - \frac{1}{i} \leq \|y' - m'_i\| \leq \frac{1}{2}\|x' - y'\| + \frac{1}{i}, \quad (1.20)$$

para cada $i \in \mathbb{N}$. Por lo tanto,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|y' - m'_i\| = \frac{1}{2} \|x' - y'\|,$$

y

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|x' - m'_i\| = \frac{1}{2} \|x' - y'\|.$$

Si consideramos el triángulo con lados de longitud $\|x' - y'\|$, $\|m'_i - x'\|$, $\|y' - m'_i\|$, entonces la distancia $\|m' - m'_i\|$ viene a representar la mediana trazada desde el vértice que correspondería al punto equivalente a m'_i hasta el punto medio del lado de longitud $\|x' - y'\|$, como vemos representado en el Gráfico 7.

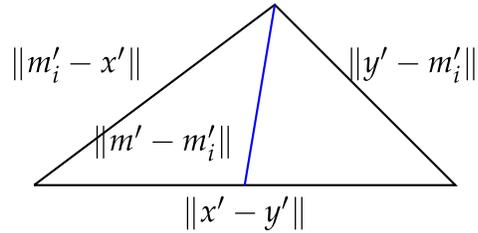


Gráfico 7.

Por la Identidad del Paralelogramo tenemos que

$$\|m' - m'_i\| = \frac{1}{2} \sqrt{2\|y' - m'_i\|^2 + 2\|x' - m'_i\|^2 - \|x' - y'\|^2} \quad \forall i \in \mathbb{N},$$

de donde

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|m' - m'_i\| = \frac{1}{2} \sqrt{2\|y' - m'\|^2 + 2\|x' - m'\|^2 - \|x' - y'\|^2} = 0.$$

Por lo tanto, $(m'_i)_{i \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy, y como

$$d(m_i, m_j) \leq \|m'_i - m'_j\| \quad \forall i, j \in \mathbb{N},$$

entonces $(m_i)_{i \in \mathbb{N}}$ también lo es. Como X es un espacio métrico completo, existe $m \in X$ tal que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} m_i = m.$$

Finalmente, por definición de puntos medios aproximados y la desigualdad triangular, tenemos que

$$-d(x, m_i) - d(m_i, y) \leq -d(x, y) \quad \forall i \in \mathbb{N},$$

$$d(x, m_i) \leq \frac{1}{2}d(x, y) + \frac{1}{i} \quad \forall i \in \mathbb{N},$$

y

$$d(y, m_i) \leq \frac{1}{2}d(x, y) + \frac{1}{i} \quad \forall i \in \mathbb{N},$$

de donde

$$\frac{1}{2}d(x, y) - \frac{1}{i} \leq d(x, m_i) \leq \frac{1}{2}d(x, y) + \frac{1}{i} \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

y

$$\frac{1}{2}d(x, y) - \frac{1}{i} \leq d(y, m_i) \leq \frac{1}{2}d(x, y) + \frac{1}{i} \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Tomando el límite cuando i tiende a ∞ en las desigualdades anteriores, y puesto que para cada $u \in X$, la función

$$\begin{aligned} d(u, \cdot) : X &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ v &\mapsto d(u, v), \end{aligned}$$

es continua, obtenemos

$$\frac{1}{2}d(x, y) = d(x, m) = d(y, m),$$

con lo cual concluimos que m es punto medio de x e y .

Ahora que sabemos de la existencia de puntos medios, sean $x, y \in X$ arbitrarios, m su punto medio, y $z \in X$. Queremos probar que

$$d(m, z)^2 \leq \frac{1}{2}d(x, z)^2 + \frac{1}{2}d(y, z)^2 - \frac{1}{4}d(x, y)^2. \quad (1.21)$$

Sean z', x', m', y' los puntos según la propiedad de cuatro puntos para z, x, m, y . Se sigue que

$$\begin{aligned} d(z, m)^2 &\leq \|z' - m'\|^2 \\ &= \frac{1}{4}\|2z' - x' - y'\|^2 \\ &= \frac{1}{4}(\|z' - x'\|^2 + \|z' - y'\|^2 + 2\langle z' - x', z' - y' \rangle) \\ &= \frac{1}{4}(4\|z'\|^2 - 4\langle z', x' \rangle - 4\langle z', y' \rangle + \|x'\|^2 + \|y'\|^2 + 2\langle x', y' \rangle) \\ &= \frac{1}{4}(2\|z'\|^2 - 4\langle z', x' \rangle + 2\|x'\|^2 \\ &\quad - \|x'\|^2 + 2\langle x', y' \rangle - \|y'\|^2 \\ &\quad + 2\|z'\|^2 - 4\langle z', y' \rangle + 2\|y'\|^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\|z' - x'\|^2 + \frac{1}{2}\|z' - y'\|^2 - \frac{1}{4}\|x' - y'\|^2 \\
&\leq \frac{1}{2}d(x, z)^2 + \frac{1}{2}d(z, y)^2 - \frac{1}{4}d(x, y)^2,
\end{aligned}$$

lo que muestra (1.21).

Demostremos que $iii) \Rightarrow i)$. Por hipótesis, para cada $x, y \in X$ existe m tal que

$$d(m, x)^2 \leq \frac{1}{2}d(x, x)^2 + \frac{1}{2}d(y, x)^2 - \frac{1}{4}d(x, y)^2,$$

$$d(m, y)^2 \leq \frac{1}{2}d(x, y)^2 + \frac{1}{2}d(y, y)^2 - \frac{1}{4}d(x, y)^2,$$

y

$$d(m, m)^2 \leq \frac{1}{2}d(m, x)^2 + \frac{1}{2}d(m, y)^2 - \frac{1}{4}d(x, y)^2,$$

de donde

$$d(m, x)^2 + d(m, y)^2 \leq \frac{1}{2}d(x, y)^2,$$

y

$$\frac{1}{2}d(x, y)^2 \leq d(m, x)^2 + d(m, y)^2.$$

Por lo tanto

$$d(m, x)^2 + d(m, y)^2 = \frac{1}{2}d(x, y)^2.$$

Por la Proposición 1.6, X es un espacio métrico geodésico. Por hipótesis y el Teorema 1.14, X es un espacio CAT(0).

Mostremos $iii) \Rightarrow iv)$. Por hipótesis, para cada par de puntos $x, y \in X$ existe $m \in X$ tal que

$$d(m, z)^2 \leq \frac{1}{2}d(x, z)^2 + \frac{1}{2}d(y, z)^2 - \frac{1}{4}d(x, y)^2 \quad \forall z \in X.$$

Por lo tanto, para cada par de puntos $x, y \in X$ y $\varepsilon > 0$ existe $m_\varepsilon \in X$ tal que para cada $z \in X$

$$\begin{aligned}
d(m_\varepsilon, z)^2 &\leq \frac{1}{2}d(x, z)^2 + \frac{1}{2}d(y, z)^2 - \frac{1}{4}d(x, y)^2 \\
&\leq \frac{1}{2}d(x, z)^2 + \frac{1}{2}d(y, z)^2 - \frac{1}{4}d(x, y)^2 + \varepsilon,
\end{aligned}$$

tomando $m_\varepsilon = m$, que es lo que queríamos demostrar.

Finalmente, mostremos que $iv) \Rightarrow iii)$. Sean $x, y \in X$, $\varepsilon > 0$ y $m_\varepsilon \in X$ tales

que:

$$d(m_\varepsilon, z)^2 \leq \frac{1}{2}d(x, z)^2 + \frac{1}{2}d(y, z)^2 - \frac{1}{4}d(x, y)^2 + \varepsilon$$

para cualquier $z \in X$. En particular, cuando $z = x$, y $z = y$ obtenemos que

$$d(m_\varepsilon, x)^2 \leq \frac{1}{2}d(y, x)^2 - \frac{1}{4}d(x, y)^2 + \varepsilon,$$

y

$$d(m_\varepsilon, y)^2 \leq \frac{1}{2}d(x, y)^2 - \frac{1}{4}d(x, y)^2 + \varepsilon.$$

Sumando estas desigualdades tenemos que

$$\frac{1}{2}d(m_\varepsilon, x)^2 + \frac{1}{2}d(m_\varepsilon, y)^2 \leq \frac{1}{4}d(x, y)^2 + \varepsilon. \quad (1.22)$$

Sea $\delta > 0$, arbitrario. Por hipótesis sabemos que existe m_δ tal que para todo $z \in X$

$$d(m_\delta, z)^2 \leq \frac{1}{2}d(x, z)^2 + \frac{1}{2}d(y, z)^2 - \frac{1}{4}d(x, y)^2 + \delta.$$

En particular, para $z = m_\varepsilon$ y por (1.22) tenemos que

$$d(m_\varepsilon, m_\delta)^2 \leq \frac{1}{2}d(x, m_\varepsilon)^2 + \frac{1}{2}d(y, m_\varepsilon)^2 - \frac{1}{4}d(x, y)^2 + \delta \leq \varepsilon + \delta. \quad (1.23)$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$. Puesto que ε y δ son arbitrarios, en particular, de (1.23) se sigue que

$$d(m_{\varepsilon_k}, m_{\varepsilon_j}) \leq \frac{1}{k} + \frac{1}{j} \quad \forall i, j \in \mathbb{N},$$

(considerando $\varepsilon = \varepsilon_k$, y $\delta = \varepsilon_j$). De esta última desigualdad, se sigue que $(m_{\varepsilon_n})_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy, y como X es completo, existe $m \in X$, límite de esta sucesión. Por definición de m_{ε_n} , tenemos que para cada $n \in \mathbb{N}$

$$d(m_{\varepsilon_n}, z)^2 \leq \frac{1}{2}d(x, z)^2 + \frac{1}{2}d(y, z)^2 - \frac{1}{4}d(x, y)^2 + \varepsilon_n \quad \forall z \in X.$$

Tomando el límite cuando $n \rightarrow \infty$ obtenemos la desigualdad

$$d(m, z)^2 \leq \frac{1}{2}d(x, z)^2 + \frac{1}{2}d(y, z)^2 - \frac{1}{4}d(x, y)^2 \quad \forall z \in X,$$

como queríamos demostrar. □

1.5. Proyección de punto más cercano

DEFINICIÓN 1.10. Sea (H, d) un espacio de Hadamard. Decimos que $C \subset H$ es convexo cuando para todo $x, y \in C$, $[x, y] \subset C$.

Una función $f : H \rightarrow (-\infty, +\infty]$ es convexa (estrictamente convexa) cuando para cada geodésica $\gamma : [0, 1] \rightarrow H$, $f \circ \gamma$ es convexa (estrictamente convexa), es decir

$$f(\gamma_t) \leq (1-t)f(\gamma_0) + tf(\gamma_1) \quad \forall t \in [0, 1],$$

o

$$f(\gamma_t) < (1-t)f(\gamma_0) + tf(\gamma_1) \quad \forall t \in (0, 1),$$

respectivamente.

PROPOSICIÓN 1.16. Un subconjunto convexo y cerrado de un espacio de Hadamard es también un espacio de Hadamard.

Demostración. Sea (H, d) un espacio de Hadamard y $C \subset H$ un conjunto cerrado y convexo. Sabemos que C es completo puesto que H es completo y C es cerrado. Sabemos que C es un espacio métrico geodésico con la métrica heredada de H , puesto que para cada x, y existe una geodésica $\gamma : [0, 1] \rightarrow H$ tal que $\gamma(0) = x$ y $\gamma(1) = y$, y como C es convexo, entonces $[x, y] \subset C$. Finalmente, para una geodésica arbitraria $\beta : [0, 1] \rightarrow C$, $t \in (0, 1)$ y un punto $p \in C$, tenemos que

$$d(p, \beta_t) \leq td(p, \beta_0)^2 + (1-t)d(p, \beta_1)^2 - t(1-t)d(\beta_0, \beta_1)^2,$$

pues esta propiedad la hereda de H . Por el Teorema 1.15 concluimos que (C, d) es un espacio de Hadamard. \square

DEFINICIÓN 1.11 (Proyecciones). Sean (X, d) un espacio métrico, $S \subset X$ no vacío y $x \in X$. Definimos la distancia de x a un conjunto S por

$$d_S(x) := d(x, S) = \inf_{z \in S} d(x, z),$$

y la proyección de punto más cercano a S por:

$$P_S(x) = \{s \in S : d(x, S) = d(x, s)\}.$$

Notar que a diferencia del caso de los espacios de Hilbert y subconjuntos convexos y cerrados, el operador de proyección tiene como rango el conjunto potencia

de S , $\mathcal{P}(S)$, pues varios elementos (o ninguno) pueden verificar la condición de proyección. En particular, cuando $P_S(x)$ es unitario para cada $x \in X$, decimos que S es un conjunto de Chebyshev. En el caso de los conjuntos de Chebyshev, el operador proyección de X en S puede ser considerado como una función de X en S .

El siguiente resultado es una extensión a los espacios de Hadamard de una propiedad conocida en los espacios de Hilbert.

TEOREMA 1.17. Sean (H, d) un espacio de Hadamard y $C \subset H$ **no vacío, cerrado y convexo**. Se tiene que

i) C es de Chebyshev, y por tanto podemos definir el operador proyección sobre C como

$$\begin{aligned} P_C : H &\rightarrow C \\ x &\mapsto P_C(x); \end{aligned}$$

ii) Si $x \in H \setminus C$ y $z \in C \setminus \{P_C(x)\}$, entonces

$$d(x, P_C(x))^2 + d(P_C(x), z)^2 \leq d(x, z)^2;$$

iii) $P_C : H \rightarrow C$ es no expansivo, es decir, para cada $x, y \in H$

$$d(P_C(x), P_C(y)) \leq d(x, y).$$

Demostración. i) Sea $x \in H$ un elemento arbitrario. Queremos mostrar que la función

$$\begin{aligned} d(x, \cdot) : C &\rightarrow \mathbb{R} \\ c &\mapsto d(x, c) \end{aligned}$$

tiene un mínimo único, para ello trabajemos con la función

$$\begin{aligned} d(x, \cdot)^2 : C &\rightarrow \mathbb{R} \\ c &\mapsto d(x, c)^2. \end{aligned}$$

Por el Lema 1.10, para cada geodésica γ tenemos que

$$d(x, \gamma_t)^2 \leq (1-t)d(x, \gamma_0)^2 + td(x, \gamma_1)^2 - t(1-t)d(\gamma_0, \gamma_1)^2$$

$$< (1-t)d(x, \gamma_0)^2 + td(x, \gamma_1)^2,$$

de donde $d(x, \cdot)^2$ es estrictamente convexa. Como $d(x, \cdot)^2$ es una función no negativa, alcanza un ínfimo. Sea $(c_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C$ sucesión minimizante de $d(x, \cdot)^2$, es decir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x, c_n)^2 = \inf_{c \in C} d(x, c)^2 = d(x, C)^2. \quad (1.24)$$

Como C es convexo, $c_{mn} := \frac{1}{2}c_n + \frac{1}{2}c_m \in C$ para cada $m, n \in \mathbb{N}$. Del Lema 1.10 tenemos que

$$d(x, c_{mn})^2 \leq \frac{1}{2}d(x, c_m)^2 + \frac{1}{2}d(x, c_n)^2 - \frac{1}{4}d(c_m, c_n)^2,$$

y como

$$d(x, C) \leq d(x, c_{mn}),$$

se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}d(c_m, c_n)^2 &\leq \frac{1}{2}d(x, c_m)^2 + \frac{1}{2}d(x, c_n)^2 - d(x, c_{mn})^2 \\ &\leq \frac{1}{2}d(x, c_m)^2 + \frac{1}{2}d(x, c_n)^2 - d(x, C)^2. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Por (1.24), para cada $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n \geq N$, entonces

$$\frac{1}{2}d(x, c_m)^2 + \frac{1}{2}d(x, c_n)^2 - d(x, C)^2 < \varepsilon.$$

En consecuencia, por (1.25) tenemos que la sucesión $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy. Como H es completo y C es cerrado tenemos que existe $u \in C$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = u.$$

Por la continuidad de la función $d(x, \cdot)^2$, obtenemos que

$$\inf_{c \in C} d(x, c)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x, c_n)^2 = d(x, u)^2,$$

de donde u es un mínimo de $d(x, \cdot)^2$. Probemos ahora que u es único. Supongamos que existe otro mínimo $v \in C$, con $v \neq u$ y consideremos $\gamma = [u, v]$. Como la función $d(x, \cdot)^2$ es estrictamente convexa, obtenemos

$$d(x, \gamma_{\frac{1}{2}})^2 < \frac{1}{2}d(x, u)^2 + \frac{1}{2}d(x, v)^2 = \inf_{c \in C} d(x, c)^2,$$

pero como C es convexo, entonces $\gamma_{\frac{1}{2}} \in C$, de manera que

$$d(x, \gamma_{\frac{1}{2}})^2 \geq \inf_{c \in C} d(x, c)^2,$$

lo cual es contradictorio. Por lo tanto u es mínimo único de $d(x, \cdot)^2$ y a su vez es mínimo único de $d(x, \cdot)$ como queríamos mostrar.

ii) Sean $x \in H \setminus C$, $z \in C \setminus \{P_C(x)\}$, γ la geodésica que une $P_C(x)$ con z y $t \in [0, 1]$. Por el Lema 1.10 tenemos que

$$d(x, \gamma_t)^2 \leq (1-t)d(x, P_C(x))^2 + td(x, z)^2 - t(1-t)d(P_C(x), z)^2. \quad (1.26)$$

Gracias a que C es convexo y que $z, P_C(x) \in C$ tenemos que $\gamma = [z, P_C(x)] \subset C$ y por tanto

$$d(x, P_C(x))^2 \leq d(x, \gamma_t)^2;$$

reemplazando esto en (1.26) y simplificando t tenemos que

$$d(x, P_C(x))^2 + (1-t)d(P_C(x), z)^2 \leq d(x, z)^2.$$

De esta forma, si $t \rightarrow 0$ tenemos que

$$d(x, P_C(x))^2 + d(P_C(x), z)^2 \leq d(x, z)^2.$$

iii) Sean $x, y \in H$, arbitrarios. Por el Corolario 1.13 sabemos que

$$\begin{aligned} d(x, P_C(y))^2 + d(y, P_C(x))^2 &\leq d(x, y)^2 + d(P_C(x), P_C(y))^2 + d(x, P_C(x))^2 \\ &\quad + d(y, P_C(y))^2. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Ahora, la expresión de la derecha puede ser acotada gracias a ii) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} &d(x, y)^2 + d(P_C(x), P_C(y))^2 + d(x, P_C(x))^2 + d(y, P_C(y))^2 \\ &= d(x, y)^2 + 2d(P_C(x), P_C(y))^2 + d(x, P_C(x))^2 + d(y, P_C(y))^2 \\ &\quad - d(P_C(x), P_C(y))^2 \\ &\leq d(x, y)^2 + d(x, P_C(y))^2 + d(y, P_C(x))^2 - d(P_C(x), P_C(y))^2. \end{aligned}$$

Esto, junto con (1.27), desemboca en

$$d(P_C(x), P_C(y)) \leq d(x, y) \quad \forall x, y \in H.$$

□

DEFINICIÓN 1.12. Sea (H, d) un espacio de Hadamard. Un mapa $F : H \rightarrow H$ se dice firmemente no expansivo cuando para cada $x, y \in H$, la función

$$\begin{aligned} \Phi_{xy} : [0, 1] &\rightarrow [0, +\infty] \\ \lambda &\mapsto \Phi_{xy}(\lambda) := d((1 - \lambda)x + \lambda F(x), (1 - \lambda)y + \lambda F(y)) \end{aligned}$$

es decreciente.

Ejemplo. Por la Proposición 1.7 y el Teorema 1.17, iii), se tiene que las proyecciones métricas son firmemente no expansivas.

LEMA 1.18. Sea (H, d) un espacio de Hadamard. Si $w, x, y \in H$ son tres puntos distintos tales que $d(x, y) = d(x, w) + d(w, y)$, entonces $w \in [x, y]$. Además, $w = (1 - t)x + ty$, donde

$$t = \frac{d(x, w)}{d(x, y)} = 1 - \frac{d(w, y)}{d(x, y)}.$$

Demostración. Por el Lema 1.10, si

$$t = \frac{d(x, w)}{d(x, y)} = 1 - \frac{d(w, y)}{d(x, y)},$$

entonces

$$\begin{aligned} d((1 - t)x + ty, w)^2 &\leq (1 - t)d(x, w)^2 + td(y, w)^2 - t(1 - t)d(x, y)^2 \\ &= \frac{d(w, y)}{d(x, y)}d(x, w)^2 + \frac{d(x, w)}{d(x, y)}d(y, w)^2 - d(x, w)d(w, y) \\ &= d(x, w)d(w, y) \left(\frac{d(x, w) + d(y, w)}{d(x, y)} - 1 \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $w = (1 - t)x + ty$, que es lo que queríamos demostrar. □

PROPOSICIÓN 1.19. Sean (H, d) un espacio de Hadamard y $C \subset H$ un conjunto de Chebyshev. Si P_C es no expansivo, C es convexo.

Demostración. Sean $x, y \in C$, $z \in [x, y]$. Como P_C es no expansivo y $x = P_C(x)$, $y = P_C(y)$, notemos que

$$d(x, z) + d(z, y) = d(x, y) \leq d(x, P_C(z)) + d(P_C(z), y) \leq d(x, z) + d(z, y),$$

y por el Lema 1.18, esto implica que $P_C(z) \in [x, y]$. Luego

$$\begin{aligned}
 d(x, P_C(z)) &= d(P_C(x), P_C(z)) \\
 &\leq d(x, z) \\
 &= d(x, y) - d(z, y) \\
 &\leq d(x, y) - d(y, P_C(z)) \\
 &= d(x, P_C(z)).
 \end{aligned}$$

De esta forma $d(x, z) = d(x, P_C(z))$. De manera análoga, también se obtiene que

$$d(z, y) = d(y, P_C(z)).$$

Por el Lema 1.18 tenemos que

$$\begin{aligned}
 z &= \left(1 - \frac{d(x, z)}{d(x, y)}\right)x + \frac{d(z, y)}{d(x, y)}y \\
 &= \left(1 - \frac{d(x, P_C(z))}{d(x, y)}\right)x + \frac{d(P_C(z), y)}{d(x, y)}y \\
 &= P_C(z),
 \end{aligned}$$

y por lo tanto $z \in C$. □

1.6. Espacios de Hadamard Homogéneos

DEFINICIÓN 1.13 (Espacio métrico Homogéneo). *Sea (X, d) un espacio métrico. Decimos que X es homogéneo cuando para cada $x, y \in X$, existe una isometría biyectiva $M : X \rightarrow X$ tal que $M(x) = y$.*

PROPOSICIÓN 1.20. *Sea (H, d) un espacio de Hadamard. Sean $x, y \in H$, $\gamma = [x, y]$ y supongamos que existe una isometría $M : X \rightarrow X$. Se tiene que*

$$M \circ \gamma = [M(x), M(y)].$$

Demostración. Sea $t \in (0, 1)$ arbitrario. Por el Lema 1.10 tenemos que

$$\begin{aligned}
 &d((1-t)M(x) + tM(y), M((1-t)x + ty))^2 \\
 &\leq (1-t)d(M(x), M((1-t)x + ty))^2 + td(M(y), M((1-t)x + ty))^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - t(1-t)d(M(x), M(y))^2 \\
& = (1-t)d(x, (1-t)x + ty)^2 + td(y, (1-t)x + ty)^2 - t(1-t)d(x, y)^2 \\
& = (1-t)t^2d(x, y)^2 + t(1-t)^2d(x, y)^2 - t(1-t)d(x, y)^2 \\
& = (1-t)td(x, y)^2 - t(1-t)d(x, y)^2 \\
& = 0,
\end{aligned}$$

lo que muestra que

$$(1-t)M(x) + tM(y) = M((1-t)x + ty) \quad \forall t \in [0, 1],$$

es decir, $M \circ \gamma = [M(x), M(y)]$. □

COROLARIO 1.21. Sean (H, d) un espacio de Hadamard, $C \subset H$ un subconjunto cerrado, convexo y no vacío y $M : X \rightarrow X$ una isometría biyectiva, entonces $M(C)$ es cerrado, convexo y no vacío.

Demostración. Como M es una isometría biyectiva, entonces M^{-1} también es una isometría biyectiva. En particular, M^{-1} es continua y como C es cerrado, entonces $M(C)$ también es cerrado. Para mostrar que $M(C)$ es convexo, consideremos $u, v \in M(C)$. Sabemos que existen $x, y \in C$ tales que

$$M(x) = u, \quad M(y) = v,$$

y como C es convexo, tenemos que $[x, y] \subset C$. Por la Proposición 1.20 tenemos que $M[x, y] = [M(x), M(y)]$, y por tanto

$$[M(x), M(y)] \subset M(C),$$

de donde $M(C)$ es convexo. □

DEFINICIÓN 1.14. Sea (H, d) un espacio de Hadamard. Decimos que (H, d) es un espacio de Hadamard homogéneo si es un espacio métricamente homogéneo.

PROPOSICIÓN 1.22. Sea H un espacio de Hilbert con norma $\|\cdot\|$ y métrica inducida d . Se tiene que (H, d) es un espacio de Hadamard homogéneo.

Demostración. Primero mostramos que (H, d) es un espacio métrico geodésico. Sean $x, y \in H$ tomados arbitrariamente. Definimos

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow H$$

$$t \rightarrow \gamma_t := (1-t)x + ty,$$

donde $+$ es la operación suma sobre H . Notemos que

$$\gamma_0 = x, \quad \gamma_1 = y,$$

y para $t, s \in (0, 1)$ tenemos que

$$\begin{aligned} d(\gamma_t, \gamma_s) &= \|(1-t)x + ty - (1-s)x - sy\| \\ &= \|(t-s)y - (t-s)x\| \\ &= |t-s| \|x-y\| \\ &= |t-s| d(x, y). \end{aligned}$$

De esta forma, γ es una geodésica que une a x e y . Como $x, y \in H$ fueron tomados arbitrariamente, concluimos que (H, d) es un espacio métrico geodésico.

Ahora sean $x, y \in H$ tomados arbitrariamente. Escribimos

$$m = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y.$$

Sea $z \in H$, arbitrario. Gracias a la Identidad del Paralelogramo tenemos que

$$\begin{aligned} d(m, z)^2 &= \left\| \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - z \right\|^2 \\ &= \frac{1}{4} \|x + y - 2z\|^2 \\ &= \frac{1}{4} (\|x - z + y - z\|^2 + \|x - y\|^2 - \|x - y\|^2) \\ &= \frac{1}{4} (2\|x - z\|^2 + 2\|y - z\|^2 - \|x - y\|^2) \\ &= \frac{1}{2} \|x - z\|^2 + \frac{1}{2} \|y - z\|^2 - \frac{1}{4} \|x - y\|^2. \end{aligned}$$

Por el Teorema 1.15 concluimos que (H, d) es un espacio de Hadamard.

Finalmente, para $x, y \in H$ arbitrarios definimos

$$\begin{aligned} M: H &\rightarrow H \\ z &\rightarrow M(z) = z - x + y. \end{aligned}$$

M es una isometría puesto que para $u, v \in H$ tenemos que

$$d(M(u), M(v)) = \|u - x + y - v + x - y\| = \|u - v\| = d(u, v).$$

Además

$$M(x) = x - x + y = y.$$

M es invertible con

$$\begin{aligned} M^{-1} : H &\rightarrow H \\ z &\rightarrow M^{-1}(z) = z - y + x. \end{aligned}$$

Por lo tanto, M es una isometría biyectiva tal que $M(x) = y$. Como $x, y \in H$ son arbitrarios, podemos concluir que (H, d) es métricamente homogéneo. \square

Notemos que no todo espacio de Hadamard es **métricamente** homogéneo. \mathbb{R}^2 dotado de la métrica inducida por el producto euclidiano usual es un espacio de Hadamard (en efecto, mostramos que todo espacio de Hilbert es un espacio de Hadamard). Consideremos $B = \overline{B}((0,0),3)$ la bola cerrada de centro $(0,0)$ y radio 3, es decir de diámetro 6. Al ser un conjunto cerrado y convexo de \mathbb{R}^2 es también un espacio de Hadamard. Sea $x = (0,2)$, $y = (0,-3)$ y $z = (0,3)$. Mostramos que no puede existir $M : B \rightarrow B$ isometría tal que $M(x) = y$, puesto que esta isometría debe verificar lo siguiente:

$$d(M(x), M(y)) = d(x, y) = 5$$

$$d(M(x), M(z)) = d(x, z) = 1$$

$$d(M(y), M(z)) = d(y, z) = 6.$$

En el Gráfico 7. podemos apreciar de negro la frontera de B , el círculo rojo son todos los puntos que se encuentran a una distancia de 5 unidades de $y = M(x)$, que son los posibles puntos que puede tomar $M(y)$ y de verde están todos los puntos que están a una distancia 1 de $y = M(x)$, que son los posibles puntos que puede tomar $M(z)$. Como $d(M(y), M(z)) = 6$ es el valor del diámetro del círculo, que por definición es la longitud de la línea recta más larga que puede estar contenida en B , necesariamente $M(y), M(z)$ deberían estar localizados en la intersección del círculo rojo con el círculo negro y el círculo verde y el negro, respectivamente. Además, la recta que une a $M(y), M(z)$ debe ser un diámetro. La primera condición nos deja solo con dos opciones para escoger entre $M(y)$ y $M(z)$ pero ninguna verifica la segunda condición.

Analíticamente (hallando los puntos de intersección de los círculos respectivos

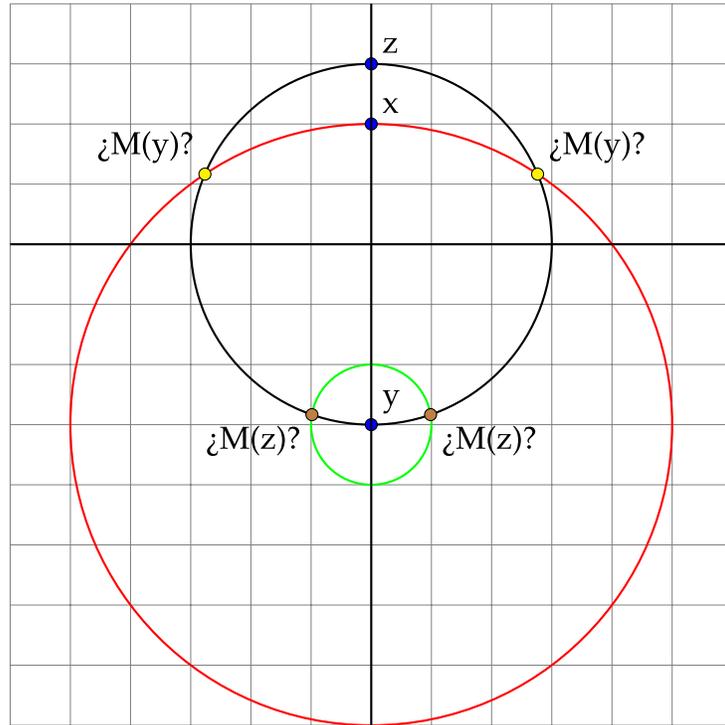


Gráfico 7. Los puntos x, y, z y los posibles valores de $M(y)$ y $M(z)$.

a través de sus ecuaciones) tenemos que

$$M(y) = \left(\pm \frac{5\sqrt{11}}{6}, \frac{7}{6} \right)$$

y

$$M(z) = \left(\pm \frac{\sqrt{35}}{6}, -\frac{17}{6} \right)$$

y las dos posibles distancias serían:

$$d(M(z), M(y)) \approx 5,48$$

o

$$d(M(z), M(y)) \approx 4,38$$

Ambos valores muy por debajo de 6.

Capítulo 2

Método de Proyección Tipo Promedio de Cuerdas

El objetivo de este capítulo es estudiar la convergencia de las sucesiones generadas por el método de proyección tipo promedio de cuerdas en espacios de Hadamard. Este método ha sido estudiado en un inicio por Yair Censor y Alexander Zaslavski en el contexto de espacios de Hilbert (ver [Censor y Zaslavski, 2013]). Además, analizamos la modificación del método que reemplaza los operadores de proyección por aproximaciones de los mismos, siguiendo las ideas de [Reich y Salinas, 2017] y [Reich y Salinas, 2016].

2.1. Combinaciones Convexas

Empezamos por definir la noción de combinación convexa entre más de dos elementos en un espacio de Hadamard. Además, en esta sección extendemos ciertas propiedades de las geodésicas, que fueron estudiadas en el Capítulo 1, a las combinaciones convexas.

DEFINICIÓN 2.1 (Combinación convexa). *Sea (H, d) un espacio de Hadamard. Dados dos puntos $x, y \in H$, γ la geodésica que los une y $t \in [0, 1]$, decimos que el punto*

$$\gamma(t) = (1 - t)x + ty,$$

es la combinación convexa entre x e y . Ahora, sean $x_1, \dots, x_n \in H$, donde $n \geq 3$ es

un natural, y $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in (0, 1)$ tales que

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1,$$

entonces definimos la combinación convexa entre x_1, \dots, x_n como el punto

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i := \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$$

tal que

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = (1 - \alpha_n) \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i x_i + \alpha_n x_n,$$

donde

$$\beta_i = \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_n}$$

para cada $i = 1, \dots, n - 1$.

En lo que sigue, presentamos algunas propiedades referentes a las combinaciones convexas.

Notemos que, en general, la combinación convexa depende del orden en que se tomen los respectivos elementos. En los siguientes dos resultados, mostramos que este no es el caso para espacios de Hadamard planos (ver Definición 1.9).

LEMA 2.1. Sean (H, d) un espacio de Hadamard, $x_1, x_2, x_3 \in H$ y $r, s, t \in (0, 1)$ tales que $r + s + t = 1$. Se verifica que

$$i) \quad tx_1 + (1 - t)x_2 = (1 - t)x_2 + tx_1.$$

Si además H es un espacio de Hadamard plano, tenemos también que

$$ii) \quad rx_1 + sx_2 + tx_3 = sx_2 + tx_3 + rx_1.$$

Demostración. i). Por el Lema 1.10 tenemos que

$$\begin{aligned} & d(tx_1 + (1 - t)x_2, (1 - t)x_2 + tx_1)^2 \\ & \leq td(x_1, (1 - t)x_2 + tx_1)^2 + (1 - t)d(x_2, (1 - t)x_2 + tx_1)^2 - t(1 - t)d(x_1, x_2)^2 \\ & = t(1 - t)^2 d(x_1, x_2)^2 + (1 - t)t^2 d(x_1, x_2)^2 - t(1 - t)d(x_1, x_2)^2 \\ & = t(1 - t)d(x_1, x_2)^2 - t(1 - t)d(x_1, x_2)^2 \\ & = 0, \end{aligned}$$

por lo tanto, $tx_1 + (1 - t)x_2 = (1 - t)x_2 + tx_1$.

ii). Como H es un espacio de Hadamard plano sabemos que para cada geodésica γ y cada $p \in H$ tenemos que

$$d(p, \gamma_t) = (1 - t)d(p, \gamma_0)^2 + td(p, \gamma_1)^2 - t(1 - t)d(\gamma_0, \gamma_1)^2, \quad \forall t \in (0, 1). \quad (2.1)$$

Consideremos

$$a := rx_1 + sx_2 + tx_3,$$

$$b := sx_2 + tx_3 + rx_1.$$

Por definición de combinación convexa tenemos que

$$a = (1 - t) \left(\frac{r}{1 - t}x_1 + \frac{s}{1 - t}x_2 \right) + tx_3,$$

$$b = (1 - r) \left(\frac{s}{1 - r}x_2 + \frac{t}{1 - r}x_3 \right) + rx_1.$$

Queremos demostrar que $a = b$, que es lo mismo que demostrar que $d(a, b)^2 = 0$. Aplicando (2.1) consecutivamente, y gracias a que para cada geodésica γ

$$d(\gamma_0, (1 - t)\gamma_0 + t\gamma_1) = td(\gamma_0, \gamma_1), \quad \forall t \in [0, 1],$$

$$d(\gamma_1, (1 - t)\gamma_0 + t\gamma_1) = (1 - t)d(\gamma_0, \gamma_1), \quad \forall t \in [0, 1],$$

tenemos que

$$\begin{aligned} & d(a, b)^2 \\ &= d \left((1 - t) \left(\frac{r}{1 - t}x_1 + \frac{s}{1 - t}x_2 \right) + tx_3, b \right)^2 \\ &= (1 - t)d \left(\frac{r}{1 - t}x_1 + \frac{s}{1 - t}x_2, b \right)^2 + td(x_3, b)^2 \\ &\quad - (1 - t)td \left(x_3, \frac{r}{1 - t}x_1 + \frac{s}{1 - t}x_2 \right)^2 \\ &= rd(x_1, b)^2 + sd(x_2, b)^2 + td(x_3, b)^2 - \frac{rs}{1 - t}d(x_1, x_2)^2 \\ &\quad - (1 - t)td \left(x_3, \frac{r}{1 - t}x_1 + \frac{s}{1 - t}x_2 \right)^2 \\ &= rd \left(x_1, (1 - r) \left(\frac{s}{1 - r}x_2 + \frac{t}{1 - r}x_3 \right) + rx_1 \right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +sd \left(x_2, (1-r) \left(\frac{s}{1-r}x_2 + \frac{t}{1-r}x_3 \right) + rx_1 \right)^2 \\
& +td \left(x_3, (1-r) \left(\frac{s}{1-r}x_2 + \frac{t}{1-r}x_3 \right) + rx_1 \right)^2 \\
& -\frac{rs}{1-t}d(x_1, x_2)^2 - (1-t)td \left(x_3, \frac{r}{1-t}x_1 + \frac{s}{1-t}x_2 \right)^2 \\
= & r(1-r)^2d \left(x_1, \frac{s}{1-r}x_2 + \frac{t}{1-r}x_3 \right)^2 + s(1-r)d \left(x_2, \frac{s}{1-r}x_2 + \frac{t}{1-r}x_3 \right)^2 \\
& +srd(x_1, x_2)^2 - r(1-r)sd \left(x_1, \frac{s}{1-r}x_2 + \frac{t}{1-r}x_3 \right)^2 \\
& +t(1-r)d \left(x_3, \frac{s}{1-r}x_2 + \frac{t}{1-r}x_3 \right)^2 + trd(x_1, x_3)^2 \\
& -r(1-r)td \left(x_1, \frac{s}{1-r}x_2 + \frac{t}{1-r}x_3 \right)^2 - \frac{rs}{1-t}d(x_1, x_2)^2 \\
& -(1-t)td \left(x_3, \frac{r}{1-t}x_1 + \frac{s}{1-t}x_2 \right)^2 \\
= & r(1-r)^2d \left(x_1, \frac{s}{1-r}x_2 + \frac{t}{1-r}x_3 \right)^2 + \frac{st^2}{1-r}d(x_2, x_3)^2 + srd(x_1, x_2)^2 \\
& -r(1-r)sd \left(x_1, \frac{s}{1-r}x_2 + \frac{t}{1-r}x_3 \right)^2 + \frac{ts^2}{1-r}d(x_2, x_3)^2 + trd(x_1, x_3)^2 \\
& -r(1-r)td \left(x_1, \frac{s}{1-r}x_2 + \frac{t}{1-r}x_3 \right)^2 - (1-t)td \left(x_3, \frac{r}{1-t}x_1 + \frac{s}{1-t}x_2 \right)^2 \\
& -\frac{rs}{1-t}d(x_1, x_2)^2 \\
= & r(1-r)(1-r-s-t)d \left(x_1, \frac{s}{1-r}x_2 + \frac{t}{1-r}x_3 \right)^2 \\
& +\frac{st(t+s)}{1-r}d(x_2, x_3)^2 + trd(x_1, x_3)^2 + sr \left(1 - \frac{1}{1-t} \right) d(x_1, x_2)^2 \\
& -(1-t)td \left(x_3, \frac{r}{1-t}x_1 + \frac{s}{1-t}x_2 \right)^2 \\
= & trd(x_1, x_3)^2 + ts\frac{1-r}{1-r}d(x_2, x_3)^2 - rs\frac{t}{1-t}d(x_1, x_2)^2 \\
& -(1-t)td \left(x_3, \frac{r}{1-t}x_1 + \frac{s}{1-t}x_2 \right)^2 \\
= & t \left(rd(x_1, x_3)^2 + sd(x_2, x_3)^2 - (1-t)d \left(x_3, \frac{r}{1-t}x_1 + \frac{s}{1-t}x_2 \right)^2 \right. \\
& \left. -\frac{rs}{1-t}d(x_1, x_2)^2 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= t \left(rd(x_1, x_3)^2 + sd(x_2, x_3)^2 - rd(x_3, x_1)^2 - sd(x_3, x_2)^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{rs}{1-t} d(x_1, x_2)^2 - \frac{rs}{1-t} d(x_1, x_2)^2 \right) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

es decir, $a = b$ como queríamos demostrar. \square

PROPOSICIÓN 2.2. Sean (H, d) un espacio de Hadamard plano y $x_1, \dots, x_n \in H$, donde $n \geq 2$ es un natural. Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in (0, 1)$ tales que

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1,$$

y $j : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$, una permutación. Se tiene que

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^n \alpha_{j(i)} x_{j(i)}.$$

Demostración. Usamos el principio de inducción fuerte sobre n . La base de la inducción viene dada por el Lema 2.1, literal i).

Para el paso inductivo, consideramos $k \geq 3$ un natural cualquiera. Suponemos que para cada $n \leq k-1$ se verifica que para cualquier n -upla de escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in (0, 1)$ tales que $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$, cada n -upla de elementos $x_1, \dots, x_n \in H$ y cada permutación $j : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ se tiene que

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^n \alpha_{j(i)} x_{j(i)}.$$

Nuestro objetivo es mostrar que para cada k -upla de elementos $x_1, \dots, x_k \in H$, para cada k -upla de escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in (0, 1)$ tales que $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$ y cada permutación $J : \{1, 2, \dots, k\} \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ se cumple que

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^k \alpha_{J(i)} x_{J(i)}.$$

Entonces sean $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in (0, 1)$ tales que $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$, $x_1, \dots, x_k \in H$ arbitrarios y $J : \{1, 2, \dots, k\} \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ una permutación cualquiera. Por la definición de combinación convexa, tenemos que

$$\sum_{i=1}^k \alpha_{J(i)} x_{J(i)} = (1 - \alpha_{J(k)}) \left(\sum_{i=1}^{k-1} \frac{\alpha_{J(i)}}{1 - \alpha_{J(k)}} x_{J(i)} \right) + \alpha_{J(k)} x_{J(k)}. \quad (2.2)$$

Si $J(k) = k$, tenemos que

$$\begin{aligned} \hat{J} : \{1, 2, \dots, k-1\} &\rightarrow \{1, 2, \dots, k-1\} \\ i &\mapsto \hat{J}(i) = J(i) \end{aligned}$$

es una permutación, de donde podemos utilizar la hipótesis de inducción sobre

$$\sum_{i=1}^{k-1} \frac{\alpha_{J(i)}}{1 - \alpha_{J(k)}} x_{J(i)} = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\alpha_{\hat{J}(i)}}{1 - \alpha_{J(k)}} x_{\hat{J}(i)}$$

y concluir que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \alpha_{J(i)} x_{J(i)} &= (1 - \alpha_{J(k)}) \left(\sum_{i=1}^{k-1} \frac{\alpha_{\hat{J}(i)}}{1 - \alpha_{J(k)}} x_{\hat{J}(i)} \right) + \alpha_{J(k)} x_{J(k)} \\ &= (1 - \alpha_k) \left(\sum_{i=1}^{k-1} \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_k} x_i \right) + \alpha_k x_k \\ &= \sum_{i=1}^k \alpha_k x_k. \end{aligned}$$

En caso de que $J(k) \neq k$, existe $m < k$ tal que $J(m) = k$, consideremos la permutación

$$\begin{aligned} L : \{1, 2, \dots, k-1\} &\rightarrow \{1, 2, \dots, k-1\} \\ i &\mapsto L(i) = \begin{cases} i, & \text{si } i \neq m, k-1, \\ m & \text{si } i = k-1, \\ k-1 & \text{si } i = m. \end{cases} \end{aligned}$$

Aplicando la hipótesis de inducción tenemos que

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{k-1} \frac{\alpha_{J(i)}}{1 - \alpha_{J(k)}} x_{J(i)} \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\alpha_{L(J(i))}}{1 - \alpha_{J(k)}} x_{L(J(i))} \\ &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^{k-1} \frac{\alpha_{J(i)}}{1 - \alpha_{J(k)}} x_{J(i)} + \frac{\alpha_{J(m)}}{1 - \alpha_{J(k)}} x_{J(m)} \\ &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^{k-1} \frac{\alpha_{J(i)}}{1 - \alpha_{J(k)}} x_{J(i)} + \frac{\alpha_k}{1 - \alpha_{J(k)}} x_k \end{aligned}$$

$$= \frac{1 - \alpha_{J(k)} - \alpha_k}{1 - \alpha_{J(k)}} \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^{k-1} \frac{\alpha_{J(i)}}{1 - \alpha_{J(k)} - \alpha_k} x_{J(i)} \right) + \frac{\alpha_k}{1 - \alpha_{J(k)}} x_k.$$

Reemplazando en (2.2) y aplicando el Lema 2.1, literal *ii*), tenemos que

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^k \alpha_{J(i)} x_{J(i)} \\ &= (1 - \alpha_{J(k)}) \left(\sum_{i=1}^{k-1} \frac{\alpha_{J(i)}}{1 - \alpha_{J(k)}} x_{J(i)} \right) + \alpha_{J(k)} x_{J(k)} \\ &= (1 - \alpha_{J(k)}) \left(\frac{1 - \alpha_{J(k)} - \alpha_k}{1 - \alpha_{J(k)}} \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^{k-1} \frac{\alpha_{J(i)}}{1 - \alpha_{J(k)} - \alpha_k} x_{J(i)} \right) + \frac{\alpha_k}{1 - \alpha_{J(k)}} x_k \right) \\ & \quad + \alpha_{J(k)} x_{J(k)} \\ &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^{k-1} \alpha_{J(i)} x_{J(i)} + \alpha_k x_k + \alpha_{J(k)} x_{J(k)} \\ &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^{k-1} \alpha_{J(i)} x_{J(i)} + \alpha_{J(k)} x_{J(k)} + \alpha_k x_k \\ &= (1 - \alpha_k) \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^{k-1} \frac{\alpha_{J(i)} x_{J(i)}}{1 - \alpha_k} + \frac{\alpha_{J(k)} x_{J(k)}}{1 - \alpha_k} \right) + \alpha_k x_k \\ &= (1 - \alpha_k) \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^k \frac{\alpha_{J(i)} x_{J(i)}}{1 - \alpha_k} \right) + \alpha_k x_k. \end{aligned}$$

Aplicando la hipótesis de inducción sobre

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^k \frac{\alpha_{J(i)} x_{J(i)}}{1 - \alpha_k}$$

tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \alpha_{J(i)} x_{J(i)} &= (1 - \alpha_k) \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^k \frac{\alpha_{J(i)} x_{J(i)}}{1 - \alpha_k} \right) + \alpha_k x_k \\ &= (1 - \alpha_k) \left(\sum_{i=1}^{k-1} \frac{\alpha_i x_i}{1 - \alpha_k} \right) + \alpha_k x_k \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i,$$

que es lo que queríamos mostrar. \square

La siguiente es una generalización de la Proposición 1.7.

PROPOSICIÓN 2.3. Sean (H, d) un espacio de Hadamard, $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in H$ elementos arbitrarios, donde $n \in \mathbb{N}$ y $n \geq 2$, y sean $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in (0, 1)$ tales que

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1.$$

Tenemos que

$$d \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i, \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i \right) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i d(x_i, y_i).$$

Demostración. Probamos este resultado mediante inducción sobre n . Cuando $n = 2$, la Proposición 1.7 constituye la base de la inducción. Sea $k \in \mathbb{N}, k \geq 3$, cualquiera. Supongamos que para $u_1, \dots, u_{k-1}, v_1, \dots, v_{k-1} \in H$ y $\beta_1, \dots, \beta_{k-1} \in (0, 1)$ tales que

$$\sum_{i=1}^{k-1} \beta_i = 1,$$

cualesquiera, se tiene que

$$d \left(\sum_{i=1}^{k-1} \beta_i u_i, \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i v_i \right) \leq \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i d(u_i, v_i). \quad (2.3)$$

Debemos demostrar que para cualesquiera $x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_k \in H$ y $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in (0, 1)$ tales que

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$$

se tiene que

$$d \left(\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i, \sum_{i=1}^k \alpha_i y_i \right) \leq \sum_{i=1}^k \alpha_i d(x_i, y_i).$$

En efecto, por la Proposición 1.7 y por (2.3) tenemos que

$$d \left(\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i, \sum_{i=1}^k \alpha_i y_i \right)$$

$$\begin{aligned}
&= d \left((1 - \alpha_k) \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_k} x_i + \alpha_k x_k, (1 - \alpha_k) \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_k} y_i + \alpha_k y_k \right) \\
&\leq (1 - \alpha_k) d \left(\sum_{i=1}^{k-1} \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_k} x_i, \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_k} y_i \right) + \alpha_k d(x_k, y_k) \\
&\leq (1 - \alpha_k) \sum_{i=1}^k \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_k} d(x_i, y_i) + \alpha_k d(x_k, y_k) \\
&= \sum_{i=1}^k \alpha_i d(x_i, y_i),
\end{aligned}$$

que es lo que queríamos demostrar. \square

PROPOSICIÓN 2.4. Sean (H, d) un espacio de Hadamard, $x_1, \dots, x_n, x \in H$ elementos arbitrarios, donde $n \in \mathbb{N}$ y $n \geq 2$, y sean $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in (0, 1)$ tales que

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1.$$

Tenemos que

$$d \left(x, \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i d(x, x_i)^2.$$

Demostración. Probamos este resultado mediante inducción sobre n . La base de la inducción, cuando $n = 2$, se da por el Lema 1.10 pues

$$\begin{aligned}
d(x, \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)^2 &\leq \alpha_1 d(x, x_1)^2 + \alpha_2 d(x, x_2)^2 - \alpha_1 \alpha_2 d(x_1, x_2)^2 \\
&\leq \alpha_1 d(x, x_1)^2 + \alpha_2 d(x, x_2)^2.
\end{aligned}$$

Nuestra hipótesis de inducción es que para $k \geq 3$ y cualesquiera $\beta_1, \dots, \beta_{k-1} \in (0, 1)$ tales que

$$\sum_{i=1}^{k-1} \beta_i = 1,$$

y cualesquiera $u_1, \dots, u_{k-1} \in H$ se tiene que

$$d \left(x, \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i u_i \right)^2 \leq \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i d(x, u_i)^2.$$

Sean $x_1, \dots, x_k \in H$ y $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ arbitrarios, debemos probar que

$$d\left(x, \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^k \alpha_i d(x, x_i)^2.$$

En efecto, por nuestra hipótesis de inducción y el Lema 1.10 tenemos que

$$\begin{aligned} d\left(x, \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i\right)^2 &= d\left(x, (1 - \alpha_k) \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_k} x_i + \alpha_k x_k\right)^2 \\ &\leq (1 - \alpha_k) d\left(x, \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_k} x_i\right)^2 + \alpha_k d(x, x_k)^2 \\ &\leq (1 - \alpha_k) \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_k} d(x, x_i)^2 + \alpha_k d(x, x_k)^2 \\ &= \sum_{i=1}^k \alpha_i d(x, x_i)^2, \end{aligned}$$

como queríamos probar. □

PROPOSICIÓN 2.5. Sean (H, d) un espacio de Hadamard, $x_1, \dots, x_n \in H$ elementos arbitrarios, donde $n \in \mathbb{N}$ y $n \geq 2$, y sean $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in (0, 1)$ tales que

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1.$$

Sea $G : H \rightarrow H$ un isomorfismo isométrico. Tenemos que

$$G\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i G(x_i).$$

Demostración. Usamos inducción sobre n . La base de la inducción, cuando $n = 2$, corresponde a la Proposición 1.20.

Supongamos que para $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$ y cualesquiera $u_1, \dots, u_{k-1} \in H$ y $\beta_1, \dots, \beta_{k-1} \in (0, 1)$ tales que

$$\sum_{i=1}^n \beta_i = 1$$

se tiene que

$$G\left(\sum_{i=1}^{k-1} \beta_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i G(u_i).$$

Sean $x_1, \dots, x_k \in H$ y $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in (0, 1)$ arbitrarios. Demostremos que

$$G\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^k \alpha_i G(x_i).$$

En efecto, aplicando la base y la hipótesis de inducción, y la definición de combinación convexa, tenemos que

$$\begin{aligned} G\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i\right) &= G\left((1 - \alpha_k) \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_k} x_i + \alpha_k x_k\right) \\ &= (1 - \alpha_k) G\left(\sum_{i=1}^{k-1} \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_k} x_i\right) + \alpha_k G(x_k) \\ &= (1 - \alpha_k) \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_k} G(x_i) + \alpha_k G(x_k) \\ &= \sum_{i=1}^k \alpha_i G(x_i), \end{aligned}$$

que es lo que queríamos demostrar. \square

2.2. Convergencia del Método de Proyección Tipo Pro-medio de Cuerdas

Dados un espacio de Hadamard (H, d) , $x_0 \in H$, $m \in \mathbb{N}$ y $C_1, \dots, C_m \subset H$ subconjuntos cerrados, convexos y no vacíos de H tales que

$$C := \bigcap_{i=1}^m C_i \neq \emptyset,$$

consideremos la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, donde

$$x_{n+1} = P_{C_m} \dots P_{C_1}(x_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

En [Reich y Salinas, 2017], se demuestra que existe $x_* \in C$ tal que

$$x_* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

En este contexto, notemos que los operadores $P_{C_i} : H \rightarrow C_i$, $i = 1, \dots, m$ son los operadores de proyección sobre los conjuntos C_i , $i = 1, \dots, m$, respectivamente,

los cuales están bien definidos gracias al Teorema 1.17.

Inicialmente, este resultado fue estudiado y demostrado por von Neumann ([Von Neumann, 1949]) cuando H es un espacio de Hilbert y $m = 2$, y actualmente recibe el nombre de Problema de Factibilidad Convexa.

Notemos que cada término x_n depende del producto en composición de los operadores de proyección. En esta sección nos ayudamos de un producto en promedio de cuerdas como se plantea en [Censor y Zaslavski, 2013].

DEFINICIÓN 2.2. *Dados $p, m \in \mathbb{N}$, decimos que un vector $t = (t_1, \dots, t_p)$ tal que $t_i \in \{1, 2, \dots, m\}$, para cada $i = 1, \dots, p$, es un m -vector de índices y llamamos a $p(t) := p$ su longitud.*

DEFINICIÓN 2.3. *Sean (H, d) un espacio de Hadamard, $m \in \mathbb{N}$, $C_1, \dots, C_m \subset H$ subconjuntos cerrados, convexos y no vacíos con operadores de proyección*

$$P_i : H \rightarrow C_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

respectivamente, y t un m -vector de índices de longitud $p(t)$. Al operador

$$P[t] := P_{t_{p(t)}} P_{t_{p(t)-1}} \dots P_{t_1} : H \rightarrow H$$

le llamamos vector de cuerda.

DEFINICIÓN 2.4. *Dado $m \in \mathbb{N}$, consideramos un conjunto finito de m -vectores de índices al cual denotamos por Ω . Decimos que Ω es adecuado cuando para cada $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ existen $t \in \Omega$ y $j \in \{1, \dots, p(t)\}$ tales que $i = t_j$.*

DEFINICIÓN 2.5. *Dados $m \in \mathbb{N}$, Ω un conjunto de m -vectores de índices adecuado y $\omega : \Omega \rightarrow (0, 1)$ tal que*

$$\sum_{t \in \Omega} \omega(t) = 1.$$

Decimos que ω es una función de peso adecuada y que el par (Ω, ω) es un m -amalgamador. Denotamos por $\mathcal{M}(m)$ el conjunto de todos los m -amalgamadores.

DEFINICIÓN 2.6. *Dados (H, d) un espacio de Hadamard, $m \in \mathbb{N}$, $C_1, \dots, C_m \subset H$ subconjuntos cerrados, convexos y no vacíos con operadores de proyección*

$$P_i : H \rightarrow C_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

respectivamente, y $(\Omega, \omega) \in \mathcal{M}(m)$, a la combinación convexa

$$P_{\Omega, \omega}(x) := \sum_{t \in \Omega} \omega(t) P[t](x), \quad x \in H,$$

le llamamos una cuerda.

Notemos que si (H, d) no es un espacio de Hadamard plano, el valor de $P_{\Omega, \omega}(x)$ depende del orden de Ω al momento de realizar la combinación convexa. En adelante, asumimos que para cada $(\Omega, \omega) \in \mathcal{M}(m)$, el orden en el que se hace la combinación convexa

$$P_{\Omega, \omega}(x) := \sum_{t \in \Omega} \omega(t) P[t](x)$$

es el mismo para todo $x \in H$. Los resultados de este capítulo son independientes del orden en el que estén los amalgamadores.

DEFINICIÓN 2.7. Dados $m, \bar{q} \in \mathbb{N}$ y $\Delta \in (0, 1)$, escribimos

$$\mathcal{M}_*(m, \bar{q}, \Delta) := \{(\Omega, \omega) \in \mathcal{M}(m) : p(t) \leq \bar{q}, \omega(t) \geq \Delta \text{ para cada } t \in \Omega\}.$$

DEFINICIÓN 2.8. Sean (H, d) un espacio de Hadamard, $x^0 \in H$, $m, \bar{q} \in \mathbb{N}$, $\Delta \in (0, 1)$, $C_1, \dots, C_m \subset H$ subconjuntos cerrados, convexos y no vacíos con operadores de proyección

$$P_i : H \rightarrow C_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

respectivamente, tales que

$$C = \bigcap_{i=1}^m C_i \neq \emptyset.$$

Decimos que una sucesión $(x^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, donde para todo $n \in \mathbb{N}_0$ existe $(\Omega_n, \omega_n) \in \mathcal{M}_*(m, \bar{q}, \Delta)$ tal que

$$x^{n+1} = P_{\Omega_n, \omega_n}(x^n),$$

es una sucesión de proyección tipo promedio de cuerdas generada por $\mathcal{M}_*(m, \bar{q}, \Delta)$ con punto inicial x^0 .

Nuestro objetivo es demostrar que las sucesiones de proyección tipo promedio de cuerdas convergen a la intersección de los conjuntos C_1, \dots, C_m .

Cuando (H, d) es un espacio de Hadamard, $C \subset H$ no vacío, convexo y cerra-

do, recordemos que, por el Teorema 1.17, si $x \in H \setminus C, z \in C \setminus \{P_C(x)\}$, entonces

$$d(x, P_C(x))^2 + d(P_C(x), z)^2 \leq d(x, z)^2. \quad (2.4)$$

Además, P_C es no expansivo, es decir, para cada $x, y \in H$ tenemos

$$d(P_C(x), P_C(y)) \leq d(x, y). \quad (2.5)$$

LEMA 2.6. Sean (H, d) un espacio de Hadamard, $m \in \mathbb{N}, C_1, \dots, C_m \subset H$ subconjuntos cerrados, convexos y no vacíos con operadores de proyección

$$P_i : H \rightarrow C_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

respectivamente, y t un m -vector de índices de longitud $p(t) \geq 1$. El vector de cuerda $P[t]$ es no expansivo.

Demostración. Sean $x, y \in H$ elementos arbitrarios. Aplicando sucesivamente (2.5) sobre los operadores $P_{t_i}, i = 1, \dots, p(t)$ tenemos que

$$\begin{aligned} d(P[t](x), P[t](y)) &= d(P_{t_{p(t)}}(P_{t_{p(t)-1}} \dots P_{t_1}(x)), P_{t_{p(t)}}(P_{t_{p(t)-1}} \dots P_{t_1}(y))) \\ &\leq d(P_{t_{p(t)-1}}(P_{t_{p(t)-2}} \dots P_{t_1}(x)), P_{t_{p(t)-1}}(P_{t_{p(t)-2}} \dots P_{t_1}(y))) \\ &\quad \vdots \\ &\leq d(x, y), \end{aligned}$$

lo cual concluye la demostración. \square

LEMA 2.7. Sean (H, d) un espacio de Hadamard, $m \in \mathbb{N}, (\Omega, \omega) \in \mathcal{M}(m)$ y $C_1, \dots, C_m \subset H$ subconjuntos cerrados, convexos y no vacíos con operadores de proyección

$$P_i : H \rightarrow C_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

respectivamente, tales que

$$C = \bigcap_{i=1}^m C_i \neq \emptyset.$$

El operador $P_{\Omega, \omega}$ es no expansivo y además

$$P_{\Omega, \omega}(x) = x, \quad \forall x \in C.$$

Demostración. Sean $x, y \in H$ arbitrarios. Puesto que

$$\sum_{t \in \Omega} \omega(t) = 1,$$

por la Proposición 2.3 y el Lema 2.6 tenemos que

$$\begin{aligned} d(P_{\Omega, \omega}(x), P_{\Omega, \omega}(y)) &= d\left(\sum_{t \in \Omega} \omega(t)P[t](x), \sum_{t \in \Omega} \omega(t)P[t](y)\right) \\ &\leq \sum_{t \in \Omega} \omega(t)d(P[t](x), P[t](y)) \\ &\leq \sum_{t \in \Omega} \omega(t)d(x, y) \\ &= d(x, y) \sum_{t \in \Omega} \omega(t) \\ &= d(x, y). \end{aligned}$$

Ahora sea $x \in C$ arbitrario. Por definición de C tenemos que $x \in C_i$ para cada $i = 1, \dots, m$. Por lo tanto

$$P_i(x) = x, \quad \forall i = 1, \dots, m.$$

De esta forma, para cada m -vector de índices t tenemos que

$$P[t](x) = x,$$

y por lo tanto

$$P_{\Omega, \omega}(x) = x \quad \forall x \in C.$$

□

LEMA 2.8. Sean (H, d) un espacio de Hadamard, $m \in \mathbb{N}$, $C_1, \dots, C_m \subset H$ subconjuntos cerrados, convexos y no vacíos con operadores de proyección

$$P_i : H \rightarrow C_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

respectivamente, tales que

$$C = \bigcap_{i=1}^m C_i \neq \emptyset.$$

Sean $t = (t_1, t_2, \dots, t_p)$ un m -vector de índices, $x \in H$ y $z \in C$, arbitrarios. Se tiene que

$$d(z, x)^2 \geq d(z, P[t](x))^2 + d(x, P_{t_1}(x))^2$$

$$+ \sum_{i=1}^{p-1} d(P_{t_{i+1}}P_{t_i} \dots P_{t_1}(x), P_{t_i} \dots P_{t_1}(x))^2. \quad (2.6)$$

Demostración. Por la desigualdad (2.4), aplicada sucesivamente, tenemos que

$$\begin{aligned} d(z, x)^2 &\geq d(z, P_{t_1}(x))^2 + d(x, P_{t_1}(x))^2 \\ &\geq d(z, P_{t_2}P_{t_1}(x))^2 + d(P_{t_1}(x), P_{t_2}P_{t_1}(x))^2 + d(x, P_{t_1}(x))^2 \\ &\geq d(z, P_{t_3}P_{t_2}P_{t_1}(x))^2 + d(P_{t_2}P_{t_1}(x), P_{t_3}P_{t_2}P_{t_1}(x))^2 \\ &\quad + d(P_{t_1}(x), P_{t_2}P_{t_1}(x))^2 + d(x, P_{t_1}(x))^2 \\ &\quad \vdots \\ &\geq d(z, P[t](x))^2 + \sum_{i=1}^{p-1} d(P_{t_{i+1}}P_{t_i} \dots P_{t_1}(x), P_{t_i} \dots P_{t_1}(x))^2 \\ &\quad + d(x, P_{t_1}(x))^2. \end{aligned}$$

□

DEFINICIÓN 2.9. Sean (H, d) un espacio de Hadamard, $m \in \mathbb{N}$, $C_1, \dots, C_m \subset H$ subconjuntos cerrados, convexos y no vacíos con operadores de proyección

$$P_i : H \rightarrow C_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

respectivamente, tales que

$$C = \bigcap_{i=1}^m C_i \neq \emptyset.$$

Para cada m -vector de índices $t = (t_1, \dots, t_{p(t)})$, definimos el mapa

$$\phi[t] : H \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que

$$\phi[t](x) := d(x, P_{t_1}(x))^2 + \sum_{i=1}^{p-1} d(P_{t_{i+1}}P_{t_i} \dots P_{t_1}(x), P_{t_i} \dots P_{t_1}(x))^2 \quad \forall x \in H. \quad (2.7)$$

De esta forma, según el Lema 2.8, se sigue que

$$d(z, x)^2 \geq d(z, P[t](x))^2 + \phi[t](x) \quad \forall x \in H, \forall z \in C.$$

LEMA 2.9. Sean (H, d) un espacio de Hadamard, $m \in \mathbb{N}$, $C_1, \dots, C_m \subset H$ subcon-

juntos cerrados, convexos y no vacíos con operadores de proyección

$$P_i : H \rightarrow C_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

respectivamente, tales que

$$C = \bigcap_{i=1}^m C_i \neq \emptyset.$$

Sean $x \in H$, $z \in C$, $\bar{q} \in \mathbb{N}$, $\Delta \in (0, 1)$ y $(\Omega, \omega) \in \mathcal{M}_*(m, \bar{q}, \Delta)$, arbitrarios. Tenemos que

$$d(x, z)^2 \geq d(z, P_{(\Omega, \omega)}(x))^2 + \Delta \sum_{t \in \Omega} \phi[t](x).$$

Demostración. Por la definición de $P_{(\Omega, \omega)}(x)$, la Proposición 2.4, el Lema 2.8 y la definición de $\mathcal{M}_*(m, \bar{q}, \Delta)$, tenemos que

$$\begin{aligned} d(z, P_{(\Omega, \omega)}(x))^2 &= d\left(z, \sum_{t \in \Omega} w(t)P[t](x)\right)^2 \\ &\leq \sum_{t \in \Omega} \omega(t)d(z, P[t](x))^2 \\ &= \sum_{t \in \Omega} \omega(t) \left(d(z, P[t](x))^2 + \phi[t](x) - \phi[t](x)\right) \\ &\leq \sum_{t \in \Omega} \omega(t) \left(d(z, x)^2 - \phi[t](x)\right) \\ &= d(z, x)^2 - \sum_{t \in \Omega} \omega(t)\phi[t](x) \\ &\leq d(z, x)^2 - \Delta \sum_{t \in \Omega} \phi[t](x). \end{aligned}$$

Reordenando los términos, concluimos que

$$d(x, z)^2 \geq d(z, P_{(\Omega, \omega)}(x))^2 + \Delta \sum_{t \in \Omega} \phi[t](x).$$

□

A continuación presentamos el primer resultado principal de este trabajo de titulación. Este teorema está inspirado en uno de los resultados de Censor y Zaslavski en [Censor y Zaslavski, 2013], el cual se desarrolla bajo hipótesis similares, pero en el contexto de los espacios de Hilbert. Aquí adaptamos dicho resultado a los espacios de Hadamard.

TEOREMA 2.10. Sean (H, d) un espacio de Hadamard, $x^0 \in H$, $m, \bar{q} \in \mathbb{N}$, $\Delta \in (0, 1/m)$, $C_1, \dots, C_m \subset H$ subconjuntos cerrados, convexos y no vacíos con operadores de proyección

$$P_i : H \rightarrow C_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

respectivamente, tales que

$$C = \bigcap_{i=1}^m C_i \neq \emptyset.$$

Supongamos que existe $x^* \in H$ que verifica que para cada $\varepsilon > 0$ y cada $M > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon, M) > 0$ tal que para cada $x \in B(x^*, M)$ que satisface $d(x, C_i) \leq \delta$, para cada $i = 1, 2, \dots, m$, se tiene que

$$d(x, C) \leq \varepsilon. \quad (2.8)$$

Se tiene que la sucesión $(x^k)_{k \in \mathbb{N}_0} \subset H$ de proyección tipo promedio de cuerdas generada por $\mathcal{M}_*(m, \bar{q}, \Delta)$ y de punto inicial x^0 converge y

$$x_* := \lim_{k \rightarrow \infty} x^k \in C.$$

Demostración. Por definición de sucesión de proyección tipo promedio de cuerdas, para cada $k \in \mathbb{N}_0$ existe $(\Omega_k, \omega_k) \in \mathcal{M}_*(m, \bar{q}, \Delta)$ tal que

$$x^{k+1} = P_{\Omega_k, \omega_k}(x^k).$$

Sea $M > 0$ tal que $d(x^0, x^*) \leq M$. Sea $\varepsilon > 0$ tomado arbitrariamente. Notemos que

(i) Existe $M_0 > 0$ tal que

$$B(x^*, M_0) \cap C \neq \emptyset.$$

Basta tomar un elemento $c \in C$ y $M_0 = d(x^*, c) + 1$.

(ii) Existe $\delta > 0$ tal que si $x \in B(x^*, 2M_0 + M)$ y $d(x, C_i) \leq \delta$, para cada $i = 1, 2, \dots, m$, entonces

$$d(x, C) \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

Esto se tiene por (2.8).

(iii) Para $\gamma \in (0, \delta^2/\bar{q}^2)$, fijo, se tiene que

$$\bar{q}\gamma^{1/2} \leq \delta.$$

(iv) Por la Propiedad Arquimediana, existe un natural k_0 que satisface

$$k_0 > (\gamma\Delta)^{-1}(M + M_0)^2.$$

Dividimos la demostración en 4 partes.

Parte 1. Demostrar que existe un natural $l \leq k_0$ tal que

$$\sum_{t \in \Omega_l} \phi[t](x^{l-1}) \leq \gamma. \quad (2.9)$$

Supongamos por contradicción que (2.9) no es cierto, así para cada $k = 1, 2, \dots, k_0$ se verifica que

$$\sum_{t \in \Omega_k} \phi[t](x^{k-1}) > \gamma. \quad (2.10)$$

Sea $\theta \in B(x^*, M_0) \cap C$, arbitrario pero fijo. Sabemos que para cada $k = 1, 2, \dots, k_0$ se tiene que $(\Omega_k, \omega_k) \in \mathcal{M}_*(m, \bar{q}, \Delta)$, y $x^k = P_{(\Omega_k, \omega_k)}(x^{k-1})$; por el Lema 2.9 y por (2.10) tenemos que

$$\begin{aligned} d(\theta, x^{k-1})^2 &\geq d(\theta, x^k)^2 + \Delta \sum_{t \in \Omega_k} \phi[t](x^{k-1}) \\ &> d(\theta, x^k)^2 + \Delta\gamma. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Como $x^0 \in B(x^*, M)$, por la desigualdad triangular tenemos que

$$d(x^0, \theta)^2 \leq (d(\theta, x^*) + d(x^*, x^0))^2 \leq (M + M_0)^2 \leq (M + M_0)^2 + d(\theta, x^{k_0})^2.$$

Esto, junto con (2.11) implica que

$$\begin{aligned} (M + M_0)^2 &\geq d(\theta, x^0)^2 - d(\theta, x^{k_0})^2 \\ &= \sum_{k=1}^{k_0} (d(\theta, x^{k-1})^2 - d(\theta, x^k)^2) \\ &> k_0 \Delta\gamma, \end{aligned}$$

es decir $k_0 \leq (\Delta\gamma)^{-1}(M + M_0)^2$, lo cual contradice (iv), de donde se sigue la validez de (2.9).

Parte 2. Demostrar que $x^{l-1} \in B(x^*, 2M_0 + M)$, con l como en la Parte 1.

Sea $\theta \in B(x^*, M_0) \cap C$, arbitrario pero fijo. Por la Proposición 2.7 tenemos que

$$\begin{aligned}
d(\theta, x^{l-1}) &= d(P_{(\Omega_{l-1}, \omega_{l-1})}(\theta), P_{(\Omega_{l-1}, \omega_{l-1})}(x^{l-2})) \\
&\leq d(\theta, x^{l-2}) \\
&\vdots \\
&\leq d(\theta, x^0) \\
&\leq d(\theta, x^*) + d(x^*, x^0) \\
&\leq M + M_0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, por la desigualdad triangular tenemos que

$$d(x^*, x^{l-1}) \leq d(x^*, \theta) + d(\theta, x^{l-1}) \leq 2M_0 + M. \quad (2.12)$$

Parte 3. Demostrar que $d(x^{l-1}, C_i) \leq \delta$ para cada $i = 1, \dots, m$, con l como en la Parte 1.

Sea $s \in \{1, 2, \dots, m\}$ arbitrario. Como Ω_l es adecuado, entonces existe $t = (t_1, \dots, t_{p(t)}) \in \Omega_l$ tal que $s = t_q$ para algún $q \in \{1, 2, \dots, p(t)\}$. Por (2.9) sabemos que

$$\phi[t](x^{l-1}) \leq \gamma,$$

que junto a la definición de $\phi[t]$ (ver (2.7)), nos permite obtener

$$d(x^{l-1}, P_{t_1}(x^{l-1})) \leq \phi[t](x^{l-1})^{1/2} \leq \gamma^{1/2}. \quad (2.13)$$

De la misma manera, por la definición de $\phi[t]$ también tenemos que para cada $i \in \{1, \dots, p(t) - 1\}$ se verifica

$$d(P_{t_{i+1}} P_{t_i} \dots P_{t_1}(x^{l-1}), P_{t_i} \dots P_{t_1}(x^{l-1})) \leq \phi[t](x^{l-1})^{1/2} \leq \gamma^{1/2}. \quad (2.14)$$

Como $(\Omega_l, \omega_l) \in \mathcal{M}_*$, sabemos que $p(t) \leq \bar{q}$. Además, por (2.13) y (2.14) y por la desigualdad triangular tenemos que para cada $i = 2, \dots, p(t)$

$$\begin{aligned}
d(P_{t_i} \dots P_{t_1}(x^{l-1}), x^{l-1}) &\leq \sum_{j=0}^{i-2} d(P_{t_{i-j}} \dots P_{t_1}(x^{l-1}), P_{t_{i-j-1}} \dots P_{t_1}(x^{l-1})) \\
&\quad + d(P_{t_1}(x^{l-1}), x^{l-1}) \\
&\leq i\gamma^{1/2} \\
&\leq p(t)\gamma^{1/2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \bar{q}\gamma^{1/2} \\ &\leq \delta, \end{aligned}$$

y por (2.13) tenemos que

$$d(P_{t_1}(x^{l-1}), x^{l-1}) \leq \gamma^{1/2} \leq \bar{q}\gamma^{1/2} \leq \delta.$$

Luego, para cada $i = 1, \dots, p(t)$ tenemos que $P_{t_i} \dots P_{t_1}(x^{l-1}) \in C_i$ y por lo tanto

$$d(x^{l-1}, C_i) \leq \delta,$$

en particular para $i = t_q = s$ tenemos que

$$d(x^{l-1}, C_s) \leq \delta.$$

Como s fue tomado arbitrariamente en $\{1, \dots, m\}$ concluimos que

$$d(x^{l-1}, C_i) \leq \delta \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}.$$

Parte 4. Concluir que la sucesión $(x^k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ es de Cauchy, en consecuencia convergente, y su límite pertenece a C .

Para l como en la Parte 1, demostramos en la Parte 2 y en la parte 3 que $x^{l-1} \in B(x^*, 2M_0 + M)$ y que $d(x^{l-1}, C_i) \leq \delta$ para cada $i = 1, \dots, m$. De acuerdo con ii), esto implica que

$$d(x^{l-1}, C) \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

En otras palabras,

$$\inf_{v \in C} d(x^{l-1}, v) \leq \frac{\varepsilon}{4} < \frac{\varepsilon}{3},$$

por lo tanto, existe $z \in C$ tal que

$$d(x^{l-1}, z) \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Por el Lema 2.7 tenemos que para cada $k \geq l - 1$

$$\begin{aligned} d(x^k, z) &= d(P_{(\Omega_k, \omega_k)}(x^{k-1}), P_{(\Omega_k, \omega_k)}(z)) \\ &\leq d(x^{k-1}, z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \vdots \\
& \leq d(x^{l-1}, z) \\
& \leq \frac{\varepsilon}{3}
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Por (2.15), para cada $k_1, k_2 \geq l - 1$ tenemos que

$$d(x^{k_1}, x^{k_2}) \leq d(x^{k_1}, z) + d(z, x^{k_2}) \leq \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

De esta manera, como ε es arbitrario, la sucesión es de Cauchy y al ser H completo, es convergente. Es más, por la continuidad de la función

$$\begin{aligned}
d(z, \cdot) : H &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\
x &\mapsto d(z, x),
\end{aligned}$$

y por (2.15), se verifica que

$$d(z, \lim_{s \rightarrow \infty} x^s) \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Como C es cerrado y ε fue tomado arbitrariamente, tenemos que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} x^s \in C,$$

lo cual concluye la demostración de este teorema. □

2.3. Método de Proyección tipo Promedio de Cuerdas con Operadores de Aproximación

En esta sección estudiamos la convergencia de las sucesiones de proyección tipo promedio de cuerdas reemplazando los operadores de proyección por otros operadores, posiblemente discontinuos.

DEFINICIÓN 2.10. Sean (H, d) un espacio de Hadamard, $m \in \mathbb{N}$, $C_1, \dots, C_m \subset H$ subconjuntos cerrados, convexos y no vacíos y $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i=1}^m$ una familia de operadores tales que

$$A_i : H \rightarrow C_i$$

para cada $i = 1, \dots, m$. Dado un m -vector de índices t de longitud $p(t) = p$, definimos

$$\mathcal{A}[t] := A_{t_p} A_{t_{p-1}} \dots A_{t_1}.$$

DEFINICIÓN 2.11. Sean (H, d) un espacio de Hadamard, $m \in \mathbb{N}$, $C_1, \dots, C_m \subset H$ subconjuntos cerrados, convexos y no vacíos y $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i=1}^m$ una familia de operadores tales que

$$A_i : H \rightarrow C_i$$

para cada $i = 1, \dots, m$. Dado $(\Omega, \omega) \in \mathcal{M}(m)$, definimos la combinación convexa

$$\mathcal{A}_{\Omega, \omega}(x) := \sum_{t \in \Omega} \omega(t) \mathcal{A}[t](x), \quad x \in H.$$

DEFINICIÓN 2.12. Sean (H, d) un espacio de Hadamard, $x^0 \in H$, $m, \bar{q} \in \mathbb{N}$, $\Delta \in (0, 1)$, $C_1, \dots, C_m \subset H$ subconjuntos cerrados, convexos y no vacíos tales que

$$C = \bigcap_{i=1}^m C_i \neq \emptyset.$$

Decimos que una sucesión $(x^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, donde para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $(\Omega_n, \omega_n) \in \mathcal{M}_*(m, \bar{q}, \Delta)$ y una familia de operadores $\mathcal{A}^{(n)} = \{A_i^n\}_{i=1}^m$ con

$$A_i^n : H \rightarrow C_i, i = 1, \dots, m,$$

tales que

$$x^{n+1} = \mathcal{A}_{\Omega_n, \omega_n}^{(n)}(x^n),$$

es una sucesión de aproximación tipo promedio de cuerdas generada por la familia $(\mathcal{A}^{(n)})_{n \in \mathbb{N}_0}$ y $\mathcal{M}_*(m, \bar{q}, \Delta)$, y con punto inicial x^0 .

Nuestro objetivo en esta sección es estudiar las condiciones bajo las cuales las sucesiones de aproximación tipo promedio de cuerdas convergen. Estas condiciones son principalmente impuestas sobre los operadores A_i^n , con $i = 1, \dots, m$, $n \in \mathbb{N}_0$.

En [Reich y Salinas, 2017] y en [Reich y Salinas, 2016] se logra un objetivo similar en sus respectivos contextos. En estos artículos, dado un espacio de Hadamard H , se define a las órbitas inexactas de un operador $T : H \rightarrow H$ como sucesiones de la forma $(T^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$, donde $x \in H$. También definen a las órbitas inexactas de T como aquellas sucesiones $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ para las cuales existe una

sucesión de números reales positivos $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \gamma_n < \infty,$$

y además

$$d(y_{n+1}, T(y_n)) < \gamma_n \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

y se demuestra que, bajo ciertas condiciones, la convergencia de las órbitas exactas implica la convergencia de las órbitas inexactas del operador T .

El siguiente resultado, que está inspirado en el estudio de la relación entre las órbitas inexactas y las órbitas exactas de operadores en espacios métricos (ver [Pustylnik *et al.*, 2009]), se adapta mejor a las intenciones de nuestro trabajo.

LEMA 2.11. Sean (H, d) un espacio de Hadamard, $m, \bar{q} \in \mathbb{N}$, $\Delta \in (0, 1/m)$ y $C_1, \dots, C_m \subset H$ subconjuntos cerrados, convexos y no vacíos con operadores de proyección

$$P_i : H \rightarrow C_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

respectivamente, tales que

$$C = \bigcap_{i=1}^m C_i \neq \emptyset.$$

Supongamos que existe $x^* \in H$ que verifica que para cada $\varepsilon > 0$ y cada $M > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon, M) > 0$ tal que para cada $x \in B(x^*, M)$ que satisface $d(x, C_i) \leq \delta$, para cada $i = 1, 2, \dots, m$, se tiene que

$$d(x, C) \leq \varepsilon.$$

Sean $(y^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ una sucesión en H y $(r_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ una sucesión de números reales positivos tales que para cada $n \in \mathbb{N}_0$ existe $(\Omega_n, \omega_n) \in \mathcal{M}_*(m, \bar{q}, \Delta)$ que verifica

$$d(y^{n+1}, P_{\Omega_n, \omega_n}(y^n)) \leq r_n, \tag{2.16}$$

y $\sum_{n=0}^{\infty} r_n < +\infty$. La sucesión $(y^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ converge y además

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y^n \in C.$$

Demostración. Por el Teorema 2.10 sabemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, las sucesiones de proyección tipo promedio de cuerdas generadas por $\mathcal{M}_*(m, \bar{q}, \Delta)$, y con punto inicial $y_0^n := y^n$, convergen a un punto en C . De esta forma, las sucesiones cuyos

términos verifican

$$y_{k+1}^n := P_{\Omega_{n+k}, \omega_{n+k}}(y_k^n) \quad n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}_0, \quad (2.17)$$

convergen y

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_k^n =: z_n \in \mathbb{C} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Consideremos $n \in \mathbb{N}$ arbitrario. Vamos a demostrar por inducción que para cada $k \in \mathbb{N}$ se verifica que

$$d(y_k^n, y^{n+k}) \leq \sum_{j=n-1}^{n+k-1} r_j - r_{n-1}. \quad (2.18)$$

La base de la inducción, cuando $k = 1$ viene dada por (2.16) y (2.17), puesto que

$$d(y_1^n, y^{n+1}) = d(P_{\Omega_n, \omega_n}(y^n), y^{n+1}) \leq r_n = \sum_{j=n-1}^{n+1-1} r_j - r_{n-1}.$$

Sea $k \in \mathbb{N}$, arbitrario pero fijo. Nuestra hipótesis de inducción consiste en suponer que

$$d(y_k^n, y^{n+k}) \leq \sum_{j=n-1}^{n+k-1} r_j - r_{n-1}. \quad (2.19)$$

Con esto, debemos probar que este enunciado también es cierto para $k + 1$. Por la desigualdad triangular, el Lema 2.7, la hipótesis de inducción (2.19), y la hipótesis (2.16) obtenemos

$$\begin{aligned} & d(y_{k+1}^n, y^{n+k+1}) \\ &= d(P_{\Omega_{n+k}, \omega_{n+k}} y_k^n, y^{n+k+1}) \\ &\leq d(P_{\Omega_{n+k}, \omega_{n+k}}(y_k^n), P_{\Omega_{n+k}, \omega_{n+k}}(y^{n+k})) + d(P_{\Omega_{n+k}, \omega_{n+k}}(y^{n+k}), y^{n+k+1}) \\ &\leq d(y_k^n, y^{n+k}) + d(P_{\Omega_{n+k}, \omega_{n+k}}(y^{n+k}), y^{n+k+1}) \\ &\leq \sum_{j=n-1}^{n+k-1} r_j - r_{n-1} + r_{n+k} \\ &= \sum_{j=n-1}^{n+k+1-1} r_j - r_{n-1}. \end{aligned}$$

Puesto que k es arbitrario, concluimos la inducción, lo cual demuestra la validez

de (2.18), de donde podemos concluir que

$$d(y_k^n, y^{n+k}) \leq \sum_{j=n}^{+\infty} r_j. \quad (2.20)$$

Ahora, para $k_0, i \in \mathbb{N}$ arbitrarios, tenemos por (2.17), la aplicación sucesiva del Lema 2.7 y por (2.20) que

$$\begin{aligned} d(y_{k_0+i}^n, y_i^{n+k_0}) &= d(P_{\Omega_{n+k_0+i-1}, \omega_{n+k_0+i-1}}(y_{k_0+i-1}^n), P_{\Omega_{n+k_0+i-1}, \omega_{n+k_0+i-1}}(y_{i-1}^{n+k_0})) \\ &\leq d(y_{k_0+i-1}^n, y_{i-1}^{n+k_0}) \\ &\quad \vdots \\ &\leq d(y_{k_0}^n, y_0^{n+k_0}) \\ &= d(y_{k_0}^n, y^{n+k_0}) \\ &\leq \sum_{j=n}^{+\infty} r_j. \end{aligned}$$

Como i fue tomado arbitrariamente, por la continuidad de la función

$$d : H \times H \rightarrow \mathbb{R}^+,$$

y gracias a que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} y_{k_0+i}^n = z_n,$$

y

$$\lim_{i \rightarrow \infty} y_i^{n+k_0} = z_{n+k_0},$$

la última desigualdad implica que

$$d(z_n, z_{n+k_0}) \leq \sum_{j=n}^{+\infty} r_j. \quad (2.21)$$

Como la serie $\sum_{i=0}^{\infty} r_j$ es convergente, para un $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n' \geq N$ tenemos

$$\sum_{j=n'}^{\infty} r_j < \varepsilon. \quad (2.22)$$

Puesto que n y k_0 son arbitrarios, (2.21) y (2.22) implican que la sucesión $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$

es de Cauchy. Al ser H un espacio completo, existe $y \in H$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = y.$$

Es más, como C es cerrado y como $z_k \in C$ para cada $k \in \mathbb{N}$, concluimos que $y \in C$.

Para finalizar, probemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y^n = y.$$

Sea $\varepsilon > 0$, arbitrario. Sean $n, k \in \mathbb{N}$, cualesquiera. Tenemos, por la desigualdad triangular, que

$$\begin{aligned} d(y, y^{n+k}) &\leq d(y, z_n) + d(z_n, y^{n+k}) \\ &\leq d(y, z_n) + d(z_n, y_k^n) + d(y_k^n, y^{n+k}). \end{aligned} \quad (2.23)$$

De (2.20) recordemos que

$$d(y_k^n, y^{n+k}) \leq \sum_{j=n}^{+\infty} r_j,$$

lo cual, junto con el hecho de que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} z_i = y,$$

nos indica que existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(y, z_{n_0}) + d(y_{n_0}^{n_0}, y^{n_0+k}) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (2.24)$$

independientemente de k . Por otro lado, como

$$\lim_{j \rightarrow \infty} y_j^n = z_n,$$

existe un $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $k \geq k_0$ tenemos

$$d(z_{n_0}, y_k^{n_0}) < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.25)$$

De esta forma, por (2.23), (2.24) y (2.25) tenemos que para todo $i \geq n_0 + k_0$, es decir $i = n_0 + k_0 + j$ para algún $j \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$d(y, y^i) = d(y, y^{n_0+(k_0+j)}) < \varepsilon.$$

Como ε es arbitrario, concluimos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y^i = y \in C.$$

□

Sean H un espacio de Hilbert con norma $\|\cdot\|$, S_1, S_2, \dots, S_m m subespacios lineales y cerrados de H , $A_n^k : H \rightarrow H$, con $k = 1, 2, \dots, m$ y $n \in \mathbb{N}$ operadores posiblemente discontinuos y P_1, \dots, P_m las proyecciones ortogonales de H sobre S_1, \dots, S_m respectivamente. En [Reich y Pustylnik, 2015] se demuestra que si existe una sucesión $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \gamma_n < \infty,$$

y que si para cada $k = 1, 2, \dots, m$, y cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\|A_n^k(x) - P_k(x)\| \leq \gamma_n \|x\| \quad \forall x \in H,$$

entonces la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida por

$$\begin{aligned} x_0 &\in H, \\ x_n &= A_n^m A_n^{m-1} \dots A_n^1(x_{n-1}), \quad \forall n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

converge a un punto $\bar{x} \in S_1 \cap \dots \cap S_m$.

Reich y Salinas demuestran un resultado similar en [Reich y Salinas, 2017], donde reemplazan el espacio de Hilbert por un espacio de Hadamard y los espacios lineales S_1, \dots, S_m por conjuntos cerrados y convexos C_1, \dots, C_m tales que $C_1 \cap \dots \cap C_m \neq \emptyset$ y utilizan hipótesis similares a las del teorema de Reich y Pustylnik. Es más, bajo hipótesis adicionales sobre los conjuntos C_1, \dots, C_m , demuestran que también la sucesión $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida por

$$\begin{aligned} y_0 &\in H, \\ y_n &= \alpha_1 A_n^1(y_{n-1}) + \dots + \alpha_m A_n^m(y_{n-1}), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

converge a un punto $\bar{y} \in S_1 \cap \dots \cap S_m$. En este caso, $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ son números reales positivos tales que $\alpha_1 + \dots + \alpha_m = 1$.

Concluimos este capítulo extendiendo el resultado del Teorema 2.10 de manera análoga al trabajo hecho por Reich y Pustylnik en espacios de Hilbert y al trabajo hecho por Reich y Salinas en espacios de Hadamard. En nuestro caso, el

reto es adaptar el Método de Proyección tipo Promedio de Cuerdas cuando en vez de usar los operadores de proyección, usamos operadores aproximados que son posiblemente discontinuos.

TEOREMA 2.12. Sean (H, d) un espacio de Hadamard métricamente homogéneo, $x^0 \in H$, $m, \bar{q} \in \mathbb{N}$, $\Delta \in (0, 1/m)$, $C_1, \dots, C_m \subset H$ subconjuntos cerrados, convexos y no vacíos con operadores de proyección

$$P_i : H \rightarrow C_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

respectivamente, tales que

$$C = \bigcap_{i=1}^m C_i \neq \emptyset.$$

Supongamos que existe $\hat{x} \in H$ de modo que para cada $\varepsilon > 0$ y cada $M > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon, M) > 0$ tal que para cada $x \in B(\hat{x}, M)$ que satisface $d(x, C_i) \leq \delta$, para cada $i = 1, 2, \dots, m$, se tiene que

$$d(x, C) \leq \varepsilon.$$

Sea $(\mathcal{A}^{(n)})_{n \in \mathbb{N}_0}$ una sucesión de familias de operadores de la forma

$$\mathcal{A}^{(n)} = \{A_1^n, \dots, A_m^n\} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0,$$

tales que

$$A_i^n : H \rightarrow C_i \quad \forall n \in \mathbb{N}_0, \forall i = 1, \dots, m.$$

Supongamos que existe una sucesión de números positivos $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ tal que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n < +\infty,$$

y $x^* \in H$ tales que para cada $x \in H$ y cada $n \in \mathbb{N}_0$ se verifica que

$$d(A_i^n(x), P_i(x)) \leq \gamma_n d(x^*, x), \quad \forall i = 1, \dots, m. \quad (2.26)$$

La sucesión de aproximación tipo promedio de cuerdas $(x^k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ generada por $\mathcal{M}_*(m, \bar{q}, \Delta)$ y $(\mathcal{A}^{(k)})_{k \in \mathbb{N}_0}$, y con punto inicial x^0 converge y además

$$x_* := \lim_{k \rightarrow \infty} x^k \in C.$$

Demostración. El objetivo es probar que la sucesión $(x^k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ satisface las condi-

ciones del Lema 2.11. Para cada $n \in \mathbb{N}_0$, denotamos por $(\Omega_n, \omega_n) \in \mathcal{M}_*(m, \bar{q}, \Delta)$ el amalgamador tal que

$$x^{n+1} = \mathcal{A}_{\Omega_n, \omega_n}^{(n)}(x^k).$$

Sea $z \in C$, arbitrario pero fijo. Sea $G : H \rightarrow H$ una isometría biyectiva tal que

$$G(z) = x^*.$$

Para $i = 1, \dots, m$ definimos los conjuntos

$$\begin{aligned} \tilde{C}_i &:= G(C_i), \\ \tilde{C} &= \bigcap_{i=1}^m \tilde{C}_i, \end{aligned}$$

y los operadores

$$\begin{aligned} \tilde{P}_i &: H \rightarrow H \\ u &\rightarrow \tilde{P}_i(u) = GP_iG^{-1}(u). \end{aligned}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}_0$ y cada $i = 1, \dots, m$ definimos también los operadores

$$\begin{aligned} \tilde{A}_i^n &: H \rightarrow H \\ u &\rightarrow \tilde{A}_i^n(u) = GA_i^nG^{-1}(u). \end{aligned}$$

Escribimos

$$\tilde{\mathcal{A}}^{(n)} := \{\tilde{A}_1^n, \dots, \tilde{A}_m^n\} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como G es una isometría, por el Corolario 1.21, los conjuntos \tilde{C}_i son cerrados y convexos, y por lo tanto son conjuntos de Chebyshev. Tenemos también que $x^* \in \tilde{C}$. Además, para cada $u \in H$ y $x \in H$ tales que $x = G^{-1}(u)$, se tiene que

$$d(u, \tilde{P}_i(u)) = d(G^{-1}(u), P_iG^{-1}(u)) = d(x, P_i(x)) = \inf_{v \in \tilde{C}_i} d(x, v) = \inf_{v \in \tilde{C}_i} d(u, v),$$

de donde $\tilde{P}_i = P_{\tilde{C}_i}$, para cada $i = 1, \dots, m$.

Dado cualquier m -vector de índices arbitrario t , definimos el operador

$$\begin{aligned} \tilde{P}[t] &: H \rightarrow H \\ u &\rightarrow \tilde{P}[t](u) = \tilde{P}_{t_{p(t)}} \dots \tilde{P}_{t_1}(u). \end{aligned}$$

Para cada amalgamador $(\Omega, \omega) \in \mathcal{M}(m)$, también definimos el operador

$$\begin{aligned}\tilde{P}_{\Omega, \omega} : H &\rightarrow H \\ u &\rightarrow P_{\Omega, \omega}(u) = \sum_{t \in \Omega} \omega[t] \tilde{P}[t](u).\end{aligned}$$

Recordemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, cada m -vector de índices t y cualquier amalgamador $(\Omega, \omega) \in \mathcal{M}(m)$, los operadores $\tilde{\mathcal{A}}^{(n)}[t], \tilde{\mathcal{A}}_{\Omega, \omega}^{(n)}$ vienen definidos por

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{A}}^{(n)}[t] : H &\rightarrow H \\ u &\rightarrow \tilde{\mathcal{A}}^{(n)}[t] = \tilde{A}_{t_{p(t)}} \dots \tilde{A}_{t_1}(u),\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{A}}_{\Omega, \omega}^{(n)} : H &\rightarrow H \\ u &\rightarrow \tilde{\mathcal{A}}_{\Omega, \omega}^{(n)}(u) = \sum_{t \in \Omega} \omega[t] \tilde{\mathcal{A}}^{(n)}[t](u),\end{aligned}$$

respectivamente.

Definimos la sucesión $(u^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mediante

$$u^{n+1} = \tilde{\mathcal{A}}_{\Omega_n, \omega_n}^n(u^n), \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

en donde $u^0 := G(x^0)$.

Parte 1. Mostramos que para cada $n \in \mathbb{N}_0$ tenemos que

$$u^n = G(x^n). \tag{2.27}$$

Para ello, empezamos mostrando que para cada $u \in H$ y cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\tilde{\mathcal{A}}_{\Omega_n, \omega_n}^{(n)}(u) = G \mathcal{A}_{\Omega_n, \omega_n}^{(n)} G^{-1}(u), \tag{2.28}$$

y

$$\tilde{P}_{\Omega_n, \omega_n}(u) = G P_{\Omega_n, \omega_n} G^{-1}(u). \tag{2.29}$$

En efecto, sean $u \in H, n \in \mathbb{N}_0$ arbitrarios. Tenemos que

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{A}}^{(n)}[t](u) &= \tilde{A}_{t_{p(t)}}^n \dots \tilde{A}_{t_1}^n(u) \\ &= G A_{t_{p(t)}}^n G^{-1} G A_{t_{p(t)-1}}^n G^{-1} \dots G A_{t_1}^n G^{-1}(u) \\ &= G \left(A_{t_{p(t)}}^n A_{t_{p(t)-1}}^n \dots A_{t_1}^n \right) G^{-1}(u)\end{aligned}$$

$$= G\mathcal{A}^{(n)}[t]G^{-1}(u) \quad \forall t \in \Omega_n. \quad (2.30)$$

Por (2.30) y la Proposición 2.5 obtenemos

$$\begin{aligned} G\mathcal{A}_{\Omega_n, \omega_n}^{(n)} G^{-1}(u) &= G \left(\sum_{t \in \Omega_n} \omega_n(t) \mathcal{A}^{(n)}[t] G^{-1}(u) \right) \\ &= \sum_{t \in \Omega_n} \omega_n(t) G\mathcal{A}^{(n)}[t] G^{-1}(u) \\ &= \sum_{t \in \Omega_n} \omega_n(t) \tilde{\mathcal{A}}^{(n)}[t](u) \\ &= \tilde{\mathcal{A}}_{\Omega_n, \omega_n}^{(n)}(u). \end{aligned}$$

De manera análoga, reemplazando \tilde{A}_i^n por P_i para cada $i = 1, \dots, m$, podemos demostrar que

$$\tilde{P}[t](u) = GP[t]G^{-1}(u) \quad \forall t \in \Omega_n,$$

y por la Proposición 2.5 obtenemos

$$GP_{\Omega_n, \omega_n} G^{-1}(u) = \tilde{P}_{\Omega_n, \omega_n}(u).$$

Esto confirma la validez de (2.28) y (2.29).

Ahora, mostramos (2.27) por inducción sobre n . La base de la inducción, cuando $n = 0$, se verifica por la definición de la sucesión $(u^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$.

Sea $k \in \mathbb{N}$, arbitrario pero fijo. Nuestra hipótesis de inducción es suponer que

$$u^{k-1} = G(x^{k-1}).$$

Probemos que

$$u^k = G(x^k).$$

Tenemos, por (2.28) y la hipótesis de inducción, que

$$\begin{aligned} u^k &= \tilde{\mathcal{A}}_{\Omega_n, \omega_n}^n(u^{k-1}) \\ &= G\mathcal{A}_{\Omega_n, \omega_n}^{(n)} G^{-1}G(x^{k-1}) \\ &= G\mathcal{A}_{\Omega_n, \omega_n}^{(n)}(x^{k-1}) \\ &= G(x^k), \end{aligned}$$

con lo cual concluimos la inducción y comprobamos la validez de (2.27).

Parte 2. Vamos a mostrar que

$$d(x^*, \tilde{\mathcal{A}}_{\Omega_n, \omega_n}^{(n)} u) \leq (1 + \gamma_n)^{\bar{q}} d(x^*, u) + \gamma_n \sum_{k=0}^{\bar{q}-1} (1 + \gamma_n)^k d(x^*, z), \quad (2.31)$$

para cada $u \in H$ y cada $n \in \mathbb{N}_0$.

Sea $u \in H$ arbitrario. Notemos que por (2.26) y la desigualdad triangular tenemos que

$$\begin{aligned} d(\tilde{A}_i^n(u), \tilde{P}_i(u)) &= d(A_i^n G^{-1}(u), P_i G^{-1}(u)) \\ &\leq \gamma_n d(x^*, G^{-1}(u)) \\ &\leq \gamma_n d(x^*, z) + \gamma_n d(z, G^{-1}(u)) \\ &\leq \gamma_n d(x^*, z) + \gamma_n d(x^*, u), \end{aligned}$$

para cada $i = 1, \dots, m$ y cada $n \in \mathbb{N}_0$. Esta desigualdad, junto con la desigualdad triangular y el Teorema 1.17 implican que

$$\begin{aligned} d(x^*, \tilde{A}_i^n(u)) &\leq d(x^*, \tilde{P}_i(u)) + d(\tilde{P}_i(u), \tilde{A}_i^n(u)) \\ &= d(\tilde{P}_i(x^*), \tilde{P}_i(u)) + d(\tilde{P}_i(u), \tilde{A}_i^n(u)) \\ &\leq (1 + \gamma_n) d(x^*, u) + \gamma_n d(x^*, z) \quad \forall i = 1, \dots, m, \forall n \in \mathbb{N}_0, \end{aligned} \quad (2.32)$$

para cada $u \in H$. Sea t un m -vector de índices tal que $p(t) \leq \bar{q}$. Por (2.32) aplicada sucesivamente tenemos que para cada $u \in H$,

$$\begin{aligned} &d(x^*, \tilde{\mathcal{A}}^{(n)}[t](u)) \\ &= d(x^*, \tilde{A}_{t_{p(t)}} \dots \tilde{A}_{t_1}(u)) \\ &\leq (1 + \gamma_n) d(x^*, \tilde{A}_{t_{p(t)-1}} \dots \tilde{A}_{t_1}(u)) + \gamma_n d(x^*, z) \\ &\leq (1 + \gamma_n)^2 d(x^*, \tilde{A}_{t_{p(t)-2}} \dots \tilde{A}_{t_1}(u)) + \gamma_n (d(x^*, z) + d(x^*, z)(1 + \gamma_n)) \\ &\vdots \\ &\leq (1 + \gamma_n)^{p(t)} d(x^*, u) + \gamma_n \sum_{k=0}^{p(t)-1} (1 + \gamma_n)^k d(x^*, z) \\ &\leq (1 + \gamma_n)^{\bar{q}} d(x^*, u) + \gamma_n \sum_{k=0}^{\bar{q}-1} (1 + \gamma_n)^k d(x^*, z) \quad \forall n \in \mathbb{N}_0. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Como t fue tomado arbitrariamente, por (2.33) y la Proposición 2.3 se sigue que

$$\begin{aligned}
d(x^*, \tilde{\mathcal{A}}_{\Omega_n, \omega_n}^{(n)} u) &= d\left(x^*, \sum_{t \in \Omega} \omega(t) \tilde{\mathcal{A}}_n[t](u)\right) \\
&\leq \sum_{t \in \Omega} \omega(t) d(x^*, \tilde{\mathcal{A}}_n[t](u)) \\
&\leq \sum_{t \in \Omega} \omega(t) \left((1 + \gamma_n)^{\bar{q}} d(x^*, u) + \gamma_n \sum_{k=0}^{\bar{q}-1} (1 + \gamma_n)^k d(x^*, z) \right) \\
&= (1 + \gamma_n)^{\bar{q}} d(x^*, u) + \gamma_n \sum_{k=0}^{\bar{q}-1} (1 + \gamma_n)^k d(x^*, z) \quad \forall n \in \mathbb{N}_0,
\end{aligned}$$

demostrando así la validez de (2.31).

Parte 3. Vamos a mostrar que existe $M_1 > 0$ tal que

$$d(x^*, u^n) \leq M_1 [d(x^*, u^0) + d(x^*, z)], \quad \forall n \in \mathbb{N}_0. \quad (2.34)$$

Empezamos mostrando que para cada $n \in \mathbb{N}$, se verifica

$$\begin{aligned}
d(x^*, u^{n+1}) &\leq \prod_{j=0}^n (1 + \gamma_j)^{\bar{q}} d(x^*, w^0) + d(x^*, z) \left[\gamma_n \sum_{k=0}^{\bar{q}-1} (1 + \gamma_n)^k \right. \\
&\quad \left. + \sum_{l=0}^{n-1} \gamma_l \prod_{j=l+1}^n (1 + \gamma_j)^{\bar{q}} \sum_{k=0}^{\bar{q}-1} (1 + \gamma_l)^k \right], \quad (2.35)
\end{aligned}$$

mediante inducción. En caso de que $n = 1$, aplicando (2.31) tenemos que

$$\begin{aligned}
d(x^*, u^{1+1}) &= d(x^*, \tilde{\mathcal{A}}_{\Omega_1, \omega_1}^{(1)}(u^1)) \\
&\leq (1 + \gamma_1)^{\bar{q}} d(x^*, u^1) + \gamma_1 \sum_{k=0}^{\bar{q}-1} (1 + \gamma_1)^k d(x^*, z) \\
&= (1 + \gamma_1)^{\bar{q}} d(x^*, \tilde{\mathcal{A}}_{\Omega_0, \omega_0}^{(0)}(u^0)) + \gamma_1 \sum_{k=0}^{\bar{q}-1} (1 + \gamma_1)^k d(x^*, z) \\
&\leq (1 + \gamma_1)^{\bar{q}} \left[(1 + \gamma_0)^{\bar{q}} d(x^*, u^0) + \gamma_0 \sum_{k=0}^{\bar{q}-1} (1 + \gamma_0)^k d(x^*, z) \right] \\
&\quad + \gamma_1 \sum_{k=0}^{\bar{q}-1} (1 + \gamma_1)^k d(x^*, z) \\
&\leq \prod_{j=0}^1 (1 + \gamma_j)^{\bar{q}} d(x^*, u^0) + d(x^*, z) \left[\gamma_1 \sum_{k=0}^{\bar{q}-1} (1 + \gamma_1)^k \right.
\end{aligned}$$

$$+ \sum_{l=0}^{i-1} \gamma_l \prod_{j=l+1}^{i-1} (1 + \gamma_j)^{\bar{q}} \sum_{k=0}^{\bar{q}-1} (1 + \gamma_l)^k \Big],$$

lo cual verifica la base de la inducción.

Sea $i \in \mathbb{N}$, $i \geq 3$ arbitrario, pero fijo. Supongamos que

$$\begin{aligned} d(x^*, u^i) &\leq \prod_{j=0}^{i-1} (1 + \gamma_j)^{\bar{q}} d(x^*, u^0) + d(x^*, z) \left[\gamma_{i-1} \sum_{k=0}^{\bar{q}-1} (1 + \gamma_{i-1})^k \right. \\ &\quad \left. + \sum_{l=0}^{i-2} \gamma_l \prod_{j=l+1}^{i-1} (1 + \gamma_j)^{\bar{q}} \sum_{k=0}^{\bar{q}-1} (1 + \gamma_l)^k \right]. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Probemos que (2.35) se verifica para i . Tenemos, por (2.31) y (2.36), que

$$\begin{aligned} &d(x^*, u^{i+1}) \\ &= d(x^*, \tilde{\mathcal{A}}_{\Omega_i, \omega_i}^{(i)}(u^i)) \\ &\leq (1 + \gamma_i)^{\bar{q}} d(x^*, u^i) + \gamma_i \sum_{k=0}^{\bar{q}-1} (1 + \gamma_i)^k d(x^*, z) \\ &\leq (1 + \gamma_i)^{\bar{q}} \left(\prod_{j=0}^{i-1} (1 + \gamma_j)^{\bar{q}} d(x^*, u^0) + d(x^*, z) \left[\gamma_{i-1} \sum_{k=0}^{\bar{q}-1} (1 + \gamma_{i-1})^k \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{l=0}^{i-2} \gamma_l \prod_{j=l+1}^{i-1} (1 + \gamma_j)^{\bar{q}} \sum_{k=0}^{\bar{q}-1} (1 + \gamma_l)^k \right] \right) + \gamma_i \sum_{k=0}^{\bar{q}-1} (1 + \gamma_i)^k d(x^*, z) \\ &= \prod_{j=0}^i (1 + \gamma_j)^{\bar{q}} d(x^*, u^0) + d(x^*, z) \left[\gamma_i \sum_{k=0}^{\bar{q}-1} (1 + \gamma_i)^k \right. \\ &\quad \left. + \gamma_{i-1} (1 + \gamma_i)^{\bar{q}} \sum_{k=0}^{\bar{q}-1} (1 + \gamma_{i-1})^k + (1 + \gamma_i)^{\bar{q}} \sum_{l=0}^{i-2} \gamma_l \prod_{j=l+1}^{i-1} (1 + \gamma_j)^{\bar{q}} \sum_{k=0}^{\bar{q}-1} (1 + \gamma_l)^k \right] \\ &= \prod_{j=0}^i (1 + \gamma_j)^{\bar{q}} d(x^*, u^0) + d(x^*, z) \left[\gamma_i \sum_{k=0}^{\bar{q}-1} (1 + \gamma_i)^k \right. \\ &\quad \left. + \gamma_{i-1} (1 + \gamma_i)^{\bar{q}} \sum_{k=0}^{\bar{q}-1} (1 + \gamma_{i-1})^k + \sum_{l=0}^{i-2} \gamma_l \prod_{j=l+1}^i (1 + \gamma_j)^{\bar{q}} \sum_{k=0}^{\bar{q}-1} (1 + \gamma_l)^k \right] \\ &= \prod_{j=0}^i (1 + \gamma_j)^{\bar{q}} d(x^*, u^0) + d(x^*, z) \left[\gamma_i \sum_{k=0}^{\bar{q}-1} (1 + \gamma_i)^k \right. \\ &\quad \left. + \sum_{l=0}^{i-1} \gamma_l \prod_{j=l+1}^i (1 + \gamma_j)^{\bar{q}} \sum_{k=0}^{\bar{q}-1} (1 + \gamma_l)^k \right], \end{aligned}$$

que es lo que queríamos probar. Así concluimos que (2.35) es cierta.

Como la serie generada por $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ es convergente, existen $\eta, \beta > 0$ tales que

$$\sum_{i=0}^n \gamma_i < \eta, \quad (2.37)$$

y

$$\gamma_n < \beta, \quad (2.38)$$

para cada $n \in \mathbb{N}_0$.

Por la Proposición 1.4, existe una constante $\alpha > 0$ tal que

$$\prod_{i=0}^n (1 + \gamma_i) < \alpha, \quad (2.39)$$

para cada $n \in \mathbb{N}_0$. Por (2.35), (2.37), (2.38), (2.39), tenemos que

$$\begin{aligned} & d(x^*, u^n) \\ & \leq \alpha^{\bar{q}} d(x^*, w^0) + d(x^*, z) \left[\beta^{\bar{q}} (1 + \beta)^{\bar{q}} + \sum_{l=0}^{n-1} \gamma_l \alpha^{\bar{q}} \bar{q} (1 + \beta^{\bar{q}}) \right] \\ & \leq \alpha^{\bar{q}} d(x^*, w^0) + d(x^*, z) [\beta^{\bar{q}} (1 + \beta)^{\bar{q}} + \eta \alpha^{\bar{q}} \bar{q} (1 + \beta^{\bar{q}})] \end{aligned} \quad (2.40)$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Por (2.40), tomando

$$M_1 := \max \left\{ 1, \frac{d(x^*, u^1)}{d(x^*, u^0) + d(x^*, z)}, \alpha^{\bar{q}}, \beta^{\bar{q}} (1 + \beta)^{\bar{q}} + \eta \alpha^{\bar{q}} \bar{q} (1 + \beta^{\bar{q}}) \right\},$$

tenemos que

$$d(x^*, u^n) \leq M_1 [d(x^*, u^0) + d(x^*, z)] \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Parte 4. Vamos a demostrar que

$$\begin{aligned} & d(u^{n+1}, \tilde{P}_{\Omega_n, \omega_n} u^n) \\ & \leq \bar{q} \gamma_n d(x^*, z) + \gamma_n \bar{q} \left((1 + \gamma_n)^{\bar{q}} d(x^*, u^n) + \gamma_n \sum_{k=0}^{\bar{q}-1} (1 + \gamma_n)^k d(x^*, z) \right), \end{aligned} \quad (2.41)$$

para cada $n \in \mathbb{N}_0$.

Sea $n \in \mathbb{N}_0$, arbitrario. Por (2.26) tenemos que

$$\begin{aligned} d(\tilde{A}_i^{(n)}(u), \tilde{P}_i(u)) &= d(GA_i^{(n)} G^{-1}(u), GP_i G^{-1}(u)) \\ &= d(A_i^{(n)} G^{-1}(u), P_i G^{-1}(u)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \gamma_n d(x^*, G^{-1}(u)) \\
&\leq \gamma_n d(x^*, z) + \gamma_n d(z, G^{-1}(u)) \\
&= \gamma_n d(x^*, z) + \gamma_n d(G^{-1}(x^*), G^{-1}(u)) \\
&= \gamma_n d(x^*, z) + \gamma_n d(x^*, u).
\end{aligned} \tag{2.42}$$

para cada $i = 1, \dots, m$ y cada $u \in H$.

Sea $t \in \Omega_n$, arbitrario. Aplicando la desigualdad triangular, (2.42) y el Teorema 1.17 sucesivamente vemos que

$$\begin{aligned}
d(\tilde{\mathcal{A}}^{(n)}[t](u^n), \tilde{P}[t](u^n)) &= d(\tilde{A}_{t_{p(t)}}^{(n)} \dots \tilde{A}_{t_1}^{(n)}(u^n), \tilde{P}_{t_{p(t)}} \dots P_{t_1}(u^n)) \\
&\leq d(\tilde{A}_{t_{p(t)}}^{(n)} \dots \tilde{A}_{t_1}^{(n)}(u^n), \tilde{P}_{t_{p(t)}} \tilde{A}_{t_{p(t)-1}}^{(n)} \dots \tilde{A}_{t_1}^{(n)}(u^n)) \\
&\quad + d(\tilde{P}_{t_{p(t)}} \tilde{A}_{t_{p(t)-1}}^{(n)} \dots \tilde{A}_{t_1}^{(n)}(u^n), \tilde{P}_{t_{p(t)}} \dots P_{t_1}(u^n)) \\
&\leq \gamma_n d(x^*, z) + \gamma_n d(x^*, \tilde{A}_{t_{p(t)-1}}^{(n)} \dots \tilde{A}_{t_1}^{(n)}(u^n)) \\
&\quad + d(\tilde{A}_{t_{p(t)-1}}^{(n)} \dots \tilde{A}_{t_1}^{(n)}(u^n), \tilde{P}_{t_{p(t)-1}} \dots P_{t_1}(u^n)) \\
&\leq \gamma_n d(x^*, z) + \gamma_n d(x^*, \tilde{A}_{t_{p(t)-1}}^{(n)} \dots \tilde{A}_{t_1}^{(n)}(u^n)) \\
&\quad + \gamma_n d(x^*, z) + \gamma_n d(x^*, \tilde{A}_{t_{p(t)-2}}^{(n)} \dots \tilde{A}_{t_1}^{(n)}(u^n)) \\
&\quad + d(\tilde{A}_{t_{p(t)-2}}^{(n)} \dots \tilde{A}_{t_1}^{(n)}(u^n), \tilde{P}_{t_{p(t)-2}} \dots P_{t_1}(u^n)) \\
&\leq \\
&\quad \vdots \\
&\leq p(t) \gamma_n d(x^*, z) \\
&\quad + \gamma_n \left(\sum_{j=1}^{p(t)-1} d(x^*, \tilde{A}_{t_j}^{(n)} \dots \tilde{A}_{t_1}^{(n)}(u^n)) + d(x^*, u^n) \right).
\end{aligned} \tag{2.43}$$

Por la Proposición 2.3, (2.43) y (2.33), tenemos que

$$\begin{aligned}
&d(u^{n+1}, \tilde{P}_{\Omega_n, \omega_n} u^n) \\
&= d(\tilde{\mathcal{A}}_{\Omega_n, \omega_n}^{(n)}(u^n), \tilde{P}_{\Omega_n, \omega_n}(u^n)) \\
&\leq \sum_{t \in \Omega_n} \omega_n(t) d(\tilde{\mathcal{A}}^{(n)}[t](u^n), \tilde{P}[t](u^n))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{t \in \Omega_n} \omega_n(t) \left[p(t) \gamma_n d(x^*, z) + \gamma_n \left(\sum_{j=1}^{p(t)-1} d(x^*, \tilde{A}_{t_j}^{(n)} \dots \tilde{A}_{t_1}^{(n)}(u^n)) + d(x^*, u^n) \right) \right] \\
&\leq \sum_{t \in \Omega_n} \omega_n(t) \left[\bar{q} \gamma_n d(x^*, z) + \gamma_n \left(\sum_{j=1}^{p(t)-1} d(x^*, \tilde{A}_{t_j}^{(n)} \dots \tilde{A}_{t_1}^{(n)}(u^n)) + d(x^*, u^n) \right) \right] \\
&\leq \bar{q} \gamma_n d(x^*, z) + \sum_{t \in \Omega_n} \omega_n(t) \left[\gamma_n \left(\sum_{j=1}^{p(t)-1} \left((1 + \gamma_n)^{\bar{q}} d(x^*, u^n) \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \gamma_n \sum_{k=0}^{\bar{q}-1} (1 + \gamma_n)^k d(x^*, z) \right) + d(x^*, u^n) \right) \right] \\
&\leq \bar{q} \gamma_n d(x^*, z) + \gamma_n \left(\sum_{j=1}^{\bar{q}} \left((1 + \gamma_n)^{\bar{q}} d(x^*, u^n) + \gamma_n \sum_{k=0}^{\bar{q}-1} (1 + \gamma_n)^k d(x^*, z) \right) \right) \\
&\leq \bar{q} \gamma_n d(x^*, z) + \gamma_n \bar{q} \left((1 + \gamma_n)^{\bar{q}} d(x^*, u^n) + \gamma_n \sum_{k=0}^{\bar{q}-1} (1 + \gamma_n)^k d(x^*, z) \right),
\end{aligned}$$

para cada $n \in \mathbb{N}_0$.

Parte 5. Demostramos que la sucesión $(x^k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ verifica las condiciones del Lema 2.11.

Al combinar (2.41), (2.38) y (2.35), obtenemos

$$\begin{aligned}
&d(u^{n+1}, \tilde{P}_{\Omega_n, \omega_n} u^n) \\
&\leq \bar{q} \gamma_n d(x^*, z) + \gamma_n \bar{q} \left((1 + \beta)^{\bar{q}} d(x^*, u^n) + \beta \sum_{k=0}^{\bar{q}-1} (1 + \beta)^k d(x^*, z) \right) \\
&= \gamma_n \left(\bar{q} d(x^*, z) + \bar{q} (1 + \beta)^{\bar{q}} M_1 [d(x^*, u^0) + d(x^*, z)] + \bar{q} \beta (1 + \beta)^{\bar{q}} d(x^*, z) \right),
\end{aligned} \tag{2.44}$$

para cada $n \in \mathbb{N}_0$.

Definimos

$$M_2 := \left(\bar{q} d(x^*, z) + \bar{q} (1 + \beta)^{\bar{q}} M_1 [d(x^*, u^0) + d(x^*, z)] + \bar{q} \beta (1 + \beta)^{\bar{q}} d(x^*, z) \right),$$

y para cada $n \in \mathbb{N}_0$

$$r_n := M_2 \gamma_n.$$

Notemos que

$$\sum_{i=0}^{\infty} r_i = M_2 \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i < \infty.$$

Por otro lado, gracias a (2.44), (2.27) y (2.29) se sigue que

$$\begin{aligned} d(x^{n+1}, P_{\Omega_n, \omega_n} x^n) &= d(G(x^{n+1}), GP_{\Omega_n, \omega_n} G^{-1}(u^n)) \\ &= d(u^{n+1}, \tilde{P}_{\Omega_n, \omega_n}(u^n)) \\ &\leq r_n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Puesto que todas las hipótesis del Lema 2.11 se cumplen, concluimos que la sucesión $(x^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ converge y también

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n \in C,$$

lo cual concluye la demostración. \square

DEFINICIÓN 2.13. Sean H un espacio de Hilbert, $m \in \mathbb{N}$ y $C_1, \dots, C_m \subset H$ subconjuntos cerrados y convexos tales que

$$C := \bigcap_{i=1}^m C_i \neq \emptyset.$$

Decimos que la m -upla de conjuntos (C_1, \dots, C_m) es regular si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si

$$d(x, C_i) \leq \delta, \quad \forall i = 1, \dots, m,$$

entonces

$$d(x, C) \leq \varepsilon.$$

A continuación presentamos un ejemplo del uso del Teorema 2.12 en espacios de Hilbert. Las hipótesis de este resultado son similares a las que toman Censor y Zaslavski en [Censor y Zaslavski, 2013]. La diferencia es que en el siguiente corolario utilizamos operadores de aproximación en vez de los operadores de proyección.

COROLARIO 2.13. Sea H un espacio de Hilbert con norma $\|\cdot\|$. Sean $x_0 \in H$, $m, \bar{q} \in \mathbb{N}$, $\Delta \in (0, 1/m)$ y C_1, \dots, C_m subconjuntos cerrados y convexos de H tales que

$$C := \bigcap_{i=1}^m C_i \neq \emptyset.$$

Denotamos por $P_i : H \rightarrow C_i$ a sus respectivas proyecciones ortogonales, con $i = 1, \dots, m$. Supongamos que (C_1, \dots, C_m) es una m -upla regular y que para

cada $n \in \mathbb{N}_0$ y cada $i = 1, \dots, m$ existe un operador $A_i^n : H \rightarrow H$ tal que

$$\|A_i^n(x) - P_i(x)\| \leq \gamma_n \|x\| \quad \forall x \in H,$$

donde $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ es una sucesión de números reales positivos tales que

$$\sum_{k \in \mathbb{N}_0} \gamma_k < +\infty.$$

Denotamos

$$\mathcal{A}^n = \{A_1^n, \dots, A_m^n\}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

La sucesión de aproximación tipo promedio de cuerdas, $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$, generada por $\mathcal{M}_*(m, \bar{q}, \Delta)$, $(\mathcal{A}^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$, y con punto inicial x_0 , converge y

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k \in C.$$

Demostración. Demostremos que se verifican las condiciones del Teorema 2.12. Por la Proposición 1.22, (H, d) es un espacio de Hadamard homogéneo, donde d es la métrica inducida por $\|\cdot\|$.

Primero debemos mostrar que existe $\hat{x} \in H$ de modo que para cada $\varepsilon > 0$ y cada $M > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon, M) > 0$ tal que para cada $x \in B(\hat{x}, M)$ que satisface $d(x, C_i) \leq \delta$, para cada $i = 1, 2, \dots, m$, se tiene que

$$d(x, C) \leq \varepsilon.$$

Consideremos $\hat{x} = 0$. Como (C_1, \dots, C_m) es una m -upla regular, tenemos que para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si

$$d(x, C_i) \leq \delta, \quad \forall i = 1, \dots, m,$$

entonces

$$d(x, C) \leq \varepsilon.$$

En particular, para cada $\varepsilon > 0$ y cada $M > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cada $x \in B(0, M)$ que satisface $d(x, C_i) \leq \delta$, para cada $i = 1, 2, \dots, m$, se tiene que

$$d(x, C) \leq \varepsilon,$$

como queríamos demostrar.

Ahora, notemos que por hipótesis,

$$\|A_i^n(x) - P_i(x)\| \leq \gamma_n \|x\| \quad \forall x \in H,$$

para cada $i = 1, \dots, m$ y $n \in \mathbb{N}$. Esto es lo mismo que

$$d(A_i^n(x), P_i(x)) \leq \gamma_n d(0, x) \quad \forall x \in H,$$

para cada $i = 1, \dots, m$ y $n \in \mathbb{N}$, de donde la sucesión de familias de operadores $(\mathcal{A}^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ verifica la segunda condición del Teorema 2.12, y por lo tanto la sucesión $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge y

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k \in C.$$

□

Capítulo 3

Conclusiones / Recomendaciones

3.1. Conclusiones

- a) Se extendió el resultado obtenido en [Censor y Zaslavski, 2013], en el contexto de los espacios de Hadamard.
- b) El resultado principal de este trabajo, el Teorema 2.10, enunció lo siguiente: Dados (H, d) un espacio de Hadamard, $x^0 \in H$, $m, \bar{q} \in \mathbb{N}$, $\Delta \in (0, 1/m)$, $C_1, \dots, C_m \subset H$ subconjuntos cerrados, convexos y no vacíos con operadores de proyección P_1, \dots, P_m respectivamente y tales que

$$C = \bigcap_{i=1}^m C_i \neq \emptyset;$$

si suponemos que existe $x^* \in H$ que verifica que para cada $\varepsilon > 0$ y cada $M > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon, M) > 0$ tal que para cada $x \in B(x^*, M)$ que satisface $d(x, C_i) \leq \delta$, para cada $i = 1, 2, \dots, m$, se tiene que

$$d(x, C) \leq \varepsilon,$$

entonces la sucesión $(x^k)_{k \in \mathbb{N}_0} \subset H$ de proyección tipo promedio de cuerdas generada por $\mathcal{M}_*(m, \bar{q}, \Delta)$, y de punto inicial x^0 , converge y además

$$x_* := \lim_{k \rightarrow \infty} x^k \in C.$$

- c) Se demostró en el Lema 2.11, bajo las condiciones del Teorema 2.10, que si H es un espacio de Hadamard homogéneo, $(y^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ es una sucesión en H

y $(r_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ una sucesión de números reales positivos tales que para cada $n \in \mathbb{N}_0$ existe $(\Omega_n, \omega_n) \in \mathcal{M}_*(m, \bar{q}, \Delta)$ que verifica

$$d(y^{n+1}, P_{\Omega_n, \omega_n}(y^n)) \leq r_n,$$

y $\sum_{n=0}^{\infty} r_n < +\infty$, entonces la sucesión $(y^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ converge y además

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y^n \in C.$$

d) Se demostró en el Teorema 2.12, bajo las condiciones del Teorema 2.10, que si H es un espacio de Hadamard homogéneo, $(\mathcal{A}^{(n)})_{n \in \mathbb{N}_0}$ es una sucesión de familias de operadores de la forma $\mathcal{A}^{(n)} = \{A_1^n, \dots, A_m^n\}$ y existe una sucesión de números positivos $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ tal que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n < +\infty,$$

y $x^* \in H$ tales que para cada $x \in H$ y cada $n \in \mathbb{N}_0$ se verifica que

$$d(A_i^n(x), P_i(x)) \leq \gamma_n d(x^*, x), \quad \forall i = 1, \dots, m,$$

entonces sucesión de aproximación tipo promedio de cuerdas $(x^k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ generada por $\mathcal{M}_*(m, \bar{q}, \Delta)$ y $(\mathcal{A}^{(k)})_{k \in \mathbb{N}_0}$, y con punto inicial $x^0 \in H$ converge y además

$$x_* := \lim_{k \rightarrow \infty} x^k \in C.$$

3.2. Recomendaciones

- Se debería fortalecer las carreras de Matemática y Matemática Aplicada con profesionales que aumenten el interés de los estudiantes a diferentes ramas de estudio tales como Análisis Matemático, Topología, Álgebra, Geometría, entre otras, que estuvieron incorporadas en la carrera de Ingeniería Matemática, mención Modelización y Cálculo Científico como materias obligatorias u optativas, pero que aún no poseen profesores con grado de Doctor.
- Se debería resaltar la importancia de los distintos ámbitos de estudio de las matemáticas a los estudiantes de las carreras de Matemática y Matemática Aplicada. Grupos de materias como Topología, Investigación Operativa y Estructura de Datos y Algoritmos, Álgebra, Análisis Matemático, Ecuacio-

nes Diferenciales Parciales y Procesos Estocásticos, Simulación y Análisis Numérico, entre otros, están profundamente relacionados y dan la oportunidad de realizar estudios interesantes entre ellos.

Bibliografía

- [Bacak, 2014] Bacak, M. (2014). *Convex Analysis and Optimization in Hadamard Spaces*. De Gruyter.
- [Bacak, 2018] Bacak, M. (2018). Old and new challenges in hadamard spaces. arXiv:1807.01355.
- [Bacak *et al.*, 2012] Bacak, M., Sims, B., y Searston, I. (2012). Alternating projections in CAT(0) spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 385:599–607.
- [Bauschke y Borwein, 1996] Bauschke, H. y Borwein, J. (1996). On projection algorithms for solving convex feasibility problems. *SIAM Review*, 38:367–426.
- [Bridson y Haefliger, 1999] Bridson, M. y Haefliger, A. (1999). *Metric Spaces of Non-Positive Curvature*. Springer.
- [Censor y Zaslavski, 2013] Censor, Y. y Zaslavski, A. (2013). Convergence and Perturbation Resilience of Dynamic String-Averaging Projection Methods. *Computational Optimization and Applications*, 54:65–76.
- [Pustyl'nik *et al.*, 2009] Pustyl'nik, E., Reich, S., y Zaslavski, A. (2009). Weak and strong convergence theorems for inexact orbits of uniformly Lipschitzian mappings. *Nonlinear and Convex Analysis*, 10(3):359–367.
- [Reich y Pustyl'nik, 2015] Reich, S. y Pustyl'nik, E. (2015). Infinite Products of Discontinuous Operators. *Contemporary Mathematics*, 636:199–202.
- [Reich y Salinas, 2016] Reich, S. y Salinas, Z. (2016). Weak convergence of infinite products of operators in Hadamard spaces. *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 65:55–71.

[Reich y Salinas, 2017] Reich, S. y Salinas, Z. (2017). Metric convergence of infinite products of operators in Hadamard spaces. *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, 18(2):331–345.

[Von Neumann, 1949] Von Neumann, J. (1949). On Rings of Operators. Reduction Theory. *Annals of Mathematics*, 50(2):401–485.