ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS

UNA PRIMITIVA ASOCIADA A LA DERIVADA DE CANTOR-BENDIXSON EN ESPACIOS POLACOS

TRABAJO DE TITULACIÓN PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE MATEMÁTICO

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

CRISTHIAN SEBASTIÁN HEREDIA FREIRE
csebastianherediaf@gmail.com

Director: MSC. ANDRÉS ESTEBAN MERINO TOAPANTA
aemerinot@puce.edu.ec

Codirector: DR. MIGUEL ÁNGEL YANGARI SOSA
miguel.yangari@epn.edu.ec

QUITO, MAYO 2021

DECLARACIÓN

Yo CRISTHIAN SEBASTIÁN HEREDIA FREIRE, declaro bajo juramento que el trabajo aquí escrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

A través de la presente declaración cedo mis derechos de propiedad intelectual, correspondientes a este trabajo, a la Escuela Politécnica Nacional, según lo establecido por la Ley de Propiedad Intelectual, por su reglamento y por la normatividad institucional vigente.

Cristhian Sebastián Heredia Freire

CERTIFICACIÓN

Certificamos que el presente trabajo fue desarrollado por CRISTHIAN SEBASTIÁN HEREDIA FREIRE, bajo nuestra supervisión.

MSc. Andrés Esteban Merino Toapanta
Director del Proyecto

Dr. Miguel Ángel Yangari Sosa
Codirector del Proyecto

AGRADECIMIENTOS

A mis padres Pablo y Myriam, pues por ellos he conseguido todo lo que tengo, me han animado a seguir soñando y nunca dejar de hacerlo. A mis hermanos Paulina y Pablo, gracias a ellos mi aprendizaje es constante, son mi pilar para seguir adelante y mi apoyo para ser mejor persona, son los arquitectos de mi vida. A Patricio, que más que mi mejor amigo es mi hermano, sus enseñanzas y consejos han sido claves para mi formación. Mientras cuente con los cinco en mi vida, no necesitaré nada más para ser feliz.

A todos los profesores que he tenido a lo largo de mi vida, en especial a Andrés Merino, que más que tutor ha sido amigo y maestro a tiempo completo. Para alguien apasionado ha sido un gusto contar con su ayuda constante, sus enseñanzas y, en especial, su pasión por las matemáticas. Al Dr. Miguel Yangari, por acompañarme a lo largo de este proceso y contar siempre con su entera disposición tanto como maestro y codirector.

A mis amigos de la Facultad, en especial a Daniel y Leonardo, pues sin sus consejos, sin su ayuda no hubiese llegado lejos. Por enseñarme que el hacer y disfrutar de las matemáticas va más allá de las aulas. Por motivarme a que siempre hay algo por hacer, por mejorar.

Finalmente, quiero agradecer a toda mi familia por siempre estar pendientes de mí y brindarme su apoyo incondicional. Al River de Gallardo por enseñarme a no rendirme, no importa las veces que caiga, lo importante es pelear hasta el final y saber levantarse siempre; la actitud y la pasión no son negociables. A la vida misma, por permitirme conocer gente maravillosa, aprender de ellos y aprender día a día.

DEDICATORIA

Al matemático Carlitos Sánchez,
pues todo caos merece una dulce introducción.

Índice general

Resumen **viii**

Abstract **ix**

1. Introducción **1**

2. Teoría de Conjuntos **3**

2.1. Teoría Axiomática von Neumann-Bernays-Gödel 3

2.2. Funciones y Relaciones 5

2.2.1. Funciones 5

2.2.2. Relaciones 9

2.3. Números Naturales 10

2.4. Números Ordinales 15

2.4.1. Aritmética Ordinal 27

2.5. Cardinalidad 29

3. Topología **35**

3.1. Conceptos Topológicos 35

3.2. Continuidad 43

3.3. Conjuntos Compactos 45

3.4. Topología Producto 48

3.5. Espacios Métricos 51

3.5.1. Sucesiones 53

3.5.2. Espacios Métricos Separables y Espacios Métricos Completos 56

4. Álgebra de Derivados **65**

4.1. Uniones e Intersecciones de Derivados 69

4.2. Producto de Derivados 87

4.3. Derivados de Conjuntos Compactos Numerables 91

5. Espacios Polacos **99**

5.1. Espacios Polacos Perfectos 109

6. Una Primitiva asociada a la Derivada de Cantor-Bendixson en Espacios Polacos **117**

Conclusiones **128**

Bibliografía **129**

Resumen

En el presente trabajo se estudian los Espacios Polacos, sus propiedades más importantes, y la derivada de Cantor-Bendixson asociada a los mismos. Para una adecuada comprensión de la derivada de Cantor-Bendixson, junto con sus propiedades más relevantes, es necesario el estudio de los números ordinales, por esta razón, se presentan varios resultados al respecto. Además, se demuestra que existe una primitiva asociada a la derivada de Cantor-Bendixson en espacios polacos, partiendo, primero, de primitivas para conjuntos unitarios, con esto, hallamos una primitiva para subconjuntos compactos numerables de un espacio polaco y, luego, aprovechando la separabilidad de los espacios polacos, se retira la condición de numerabilidad.

Palabras clave: Teoría Descriptiva de Conjuntos, Espacios Polacos, derivada de Cantor-Bendixson, espacios separables y completos.

Abstract

In this paper we study polish spaces, their most important properties, and the Cantor-Bendixson derivative associated to them. For a proper understanding of the Cantor-Bendixson derivative, together with its most relevant properties, it is necessary to study ordinal numbers, for this reason, several results are presented in this work. In addition, we prove that there is a primitive associated with the Cantor-Bendixson derivative in polish spaces, starting, first, from primitives for singletones, with this, we find a primitive for countable compact subsets of a polish space and, then, taking advantage of the separability of polish spaces, the condition of countability is removed.

Keywords: Descriptive Set Theory, polish spaces, Cantor-Bendixson derivative, separable and complete spaces.

Capítulo 1

Introducción

En [1], se demuestra la existencia de una primitiva asociada a la derivada de Cantor-Bendixson en la recta de los reales. Con esto, nos referimos a que, tomando $\mathcal{K}_{\mathbb{R}} = \{K \subseteq \mathbb{R} : K \text{ es compacto y numerable}\}$, se tiene que, para todo $F \in \mathcal{K}_{\mathbb{R}}$ y todo ordinal numerable α, existe $\mathcal{F} \in \mathcal{K}_{\mathbb{R}}$ tal que $\mathcal{F}^{(\alpha)} = F$. Una pregunta natural que surge es si podemos generalizar este resultado. Para ello, al abordar un tema que entra en la Teoría Descriptiva de Conjuntos, donde se relacionan temas de Topología, Teoría de Conjuntos y Teoría de la Medida, vamos a precisar de un capítulo relacionado a la Teoría de Conjuntos donde se expondrá la Teoría Axiomática von Neumann-Bernays-Gödel junto al Axioma de Elección, con esto, aceptamos las equivalencias del Axioma de Elección tales como el Lema de Zorn y Teorema del Buen Orden. Al utilizar números ordinales, se establece una sección donde se define formalmente los números ordinales, partiendo de los números naturales, junto con sus propiedades más importantes. Siguiendo con esta línea dada por la Teoría de Conjuntos se presenta una breve revisión de números cardinales. Por otro lado, en el presente trabajo no se acepta ni se rechaza la Hipótesis del Continuo.

En el Capítulo 3, se aborda una revisión acerca de Topología, haciendo énfasis en espacios métricos, sus principales propiedades tales como la completitud y separabilidad de los mismos. En un capítulo posterior, se presenta la definición de la Derivada de Cantor-Bendixson, su comportamiento respecto a las operaciones básicas de conjuntos y, en especial, el comportamiento de la Derivada de Cantor-Bendixson con respecto a subconjuntos compactos numerables de espacios métricos y topológicos. En la Proposición 4.25, se demuestra que, bajo hipótesis adecuadas, el derivado de una unión de compactos numerables es la unión de derivados de los mismos; esta proposición será de gran ayuda para la existencia de la primitiva buscada.

Siguiendo la línea de la Teoría Descriptiva de Conjuntos dada por [11], una generalización de espacios métricos, que cumplan propiedades "similares" a las que cumple la recta real, son los espacios polacos que son espacios topológicos completamente metrizables y separables. Por esta razón, utilizando las ideas presentadas en [1, 2, 3], en el Lema 6.1 se construye una sucesión de bolas disjuntas dos a dos para todo conjunto discreto, con esto, en la Proposición 6.2, bajo hipótesis adecuadas, se demuestra la existencia de una primitiva asociada a la derivada de Cantor-Bendixson para todo subconjunto unitario de un espacio polaco. Partiendo de esto, bajo ciertas hipótesis, en el Teorema 6.3, se demuestra la existencia de una primitiva asociada a la derivada de Cantor-Bendixson para todo subconjunto compacto numerable de un espacio polaco. Esto lo conseguiremos usando la primitivas para conjuntos unitarios y hallando una primitiva para cada punto aislado, para después, unir dichas primitivas y conseguir la primitiva del subconjunto compacto numerable deseado. Por último, en el Teorema 6.5, se retira la hipótesis de numerabilidad en el subconjunto compacto del espacio polaco y se demuestra la existencia de una primitiva para dicho conjunto, para esto último, aprovecharemos las propiedades esenciales, tales como separabilidad y completitud, de los espacios polacos.

Capítulo 2

Teoría de Conjuntos

En este capítulo, vamos a realizar un breve repaso sobre la teoría axiomática von Neumann-Bernays-Gödel (NBG), incluyendo el Axioma de Elección, que es la teoría que usaremos a lo largo del trabajo. Asumiremos sentadas las bases de la teoría de conjuntos, con esto, hacemos referencia a la noción de términos no definidos, clases, contenencia de clases, álgebra de clases, es decir, se asume conocido el concepto de unión, intersección y producto de clases. Entendemos por conjunto a una clase que es elemento de otra clase. Se enfatizará en la definición y propiedades importantes de los números naturales puesto que, a partir de ello, vamos a definir y profundizar el concepto de números ordinales.

2.1. Teoría Axiomática von Neumann-Bernays-Gödel

En la teoría NBG tenemos los siguientes axiomas:

AXIOMA 1. *(Axioma de Extensión). Sean A y B dos clases, se tiene que $A = B$ si y solo si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.*

AXIOMA 2. *(Axioma del conjunto vacío). Existe un conjunto A tal que para todo x, el valor de verdad de la proposición $x \in A$ es falso.*

Este conjunto es único y lo denotaremos por $\varnothing$.

AXIOMA 3. *(Axioma de construcción de clases). Sea $\phi(x)$ una proposición de x. Existe una clase A que contiene a todos los conjuntos x que cumplen $\phi(x)$. Se la representa como*

$$\{x : \phi(x)\}.$$

Gracias a este axioma, dada una clase A, existe la clase

$$A^c = \{x : x \notin A\},$$

llamada *complemento* de A.

AXIOMA 4. *(Axioma de Pares). Si a y b son conjuntos, existe un conjunto, notado por $\{a, b\}$, y llamado* par desordenado *de a y b, donde sus únicos elementos son a y b.*

AXIOMA 5. *(Axioma de Unión). Sea $\mathcal{A}$ un conjunto. La clase*

$$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \{x : \textit{existe } A \in \mathcal{A} \textit{ tal que } x \in A\},$$

es un conjunto, llamado la unión generalizada *de $\mathcal{A}$.*

Notemos que la anterior definición se puede generalizar a clases. Por otro lado, si $\mathcal{A}$ es una clase, también se define

$$\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = \{x : x \in A, \text{para todo } A \in \mathcal{A}\},$$

y es llamada *intersección generalizada* de $\mathcal{A}$. Además, sean A y B dos clases, se define la diferencia de A y B por

$$A \setminus B = A \cap B^c.$$

AXIOMA 6. *(Axioma del Conjunto de Partes). Sea A un conjunto. Cualquier subclase de A es un conjunto. Además, la clase*

$$\mathcal{P}(A) = \{B : B \subseteq A\},$$

es un conjunto, al cual llamamos el conjunto de partes *de A.*

AXIOMA 7. *(Axioma de Regularidad). Toda clase no vacía tiene al menos un elemento con el cual no tiene elementos en común, es decir, dado A una clase no vacía, existe $b \in A$ tal que $b \cap A = \varnothing$.*

Este axioma implica que un conjunto no puede contenerse a sí mismo, en efecto, tenemos la siguiente proposición:

PROPOSICIÓN 2.1. *Ninguna clase es elemento de sí misma.*

Demostración. Vamos a dividir la demostración en dos casos, para cuando tratemos clases propias y conjuntos. Sea A una clase propia, supongamos, por absurdo, que $A \in A$, por lo tanto, A es un conjunto, lo cual es imposible.

Por otro lado, sea A un conjunto, del Axioma 4, tenemos que $\{A\}$ es un conjunto. Ahora, como $\{A\}$ es un conjunto no vacío, del Axioma 7, tenemos que existe un elemento de $\{A\}$ cuya intersección con $\{A\}$ es vacía, pero como A es el único elemento de $\{A\}$, se sigue que $A \cap \{A\} = \varnothing$, por ende, concluimos que $A \notin A$. □

El Axioma de Infinitud, el Axioma de Reemplazo y el Axioma de Elección serán revisados más adelante, pues para comprender su enunciado, necesitamos el concepto de función y conjunto sucesor.

2.2. Funciones y Relaciones

2.2.1. Funciones

DEFINICIÓN 2.1. *(Función). Sean A, B dos clases y $f \subseteq A \times B$. Se dice que f es una función de A en B si cumple las siguientes propiedades:*

(i) para todo $x \in A$, existe $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$;

(ii) si $(x, y_1) \in f$ y $(x, y_2) \in f$, entonces $y_1 = y_2$.

Si f es una función de A en B, la notaremos por $f\colon A \to B$. Igualmente, si f es una función de A en B y $(x, y) \in f$ usaremos la notación $f(x) = y$; a $f(x)$ la denominaremos *ley de asignación*. Por otro lado, decimos que dos funciones f y g de A en B son iguales si para todo $x \in A$, se tiene que sus leyes de asignación son iguales, es decir, $f(x) = g(x)$.

DEFINICIÓN 2.2. *Una función $f\colon A \to B$ se dice* inyectiva *si para todo $x, y \in A$, $f(x) = f(y)$ implica $x = y$.*

DEFINICIÓN 2.3. *Una función $f\colon A \to B$ se dice* sobreyectiva *si para todo $y \in B$, existe $x \in A$ tal que $y = f(x)$.*

Si una función es inyectiva y sobreyectiva a la vez, se dice que la función es *biyectiva*.

DEFINICIÓN 2.4. *Sean $f\colon A \to B$ una función y $C \subseteq A$. Definimos la* restricción de

f sobre C, *notada por* $f|_C$, *como la función*

$$f|_C \colon C \longrightarrow B$$
$$x \longmapsto f(x).$$

Con todo lo expresado antes, es suficiente para introducir un nuevo axioma.

AXIOMA 8. *(Axioma de Reemplazo). Sean* A *un conjunto y* $f \colon A \to B$ *una función sobreyectiva, entonces* B *es un conjunto.*

Nuevamente, damos por conocido las operaciones con funciones tales como composición. Vamos a definir función inversa, imagen directa e inversa de una función y enunciar algunos resultados relacionados a ellos, las demostraciones de las mismas se pueden encontrar en [15, Cap. 2].

DEFINICIÓN 2.5. *(Función Invertible). Una función* $f \colon A \to B$ *se dice* invertible *si existe* $f^{-1} \colon B \to A$ *tal que* $y = f(x)$ *si y solo si* $x = f^{-1}(y)$*, para todo* $x \in A$ *y todo* $y \in B$*. A* f^{-1} *se le conoce como la función inversa de* f*.*

La siguiente proposición brinda una condición necesaria y suficiente para que una función sea invertible.

PROPOSICIÓN 2.2. *Una función* $f \colon A \to B$ *es invertible si y solo si es biyectiva.*

Ahora, introduciremos dos conceptos que usaremos con frecuencia en el siguiente capítulo, imagen directa e imagen inversa de una función.

DEFINICIÓN 2.6. *Sean* $f \colon A \to B$ *una función,* $D \subseteq B$*, se define la clase*

$$f^{-1}(D) = \{x \in A : f(x) \in D\}$$

la cual es llamada imagen inversa *de* D *bajo* f*.*

DEFINICIÓN 2.7. *Sean* $f \colon A \to B$ *una función,* $C \subseteq A$*, se define la clase*

$$f(C) = \{y \in B : \text{existe } x \in C \text{ tal que } y = f(x)\}.$$

Esta clase es llamada imagen directa *de* C *bajo* f*.*

De estas definiciones, tenemos el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 2.3. *Sean* $f \colon A \to B$ *una función,* $\{C_i\}_{i \in I}$ *y* $\{D_i\}_{i \in I}$ *familias de subclases de* A *y* B*, respectivamente. Entonces* *(i)* $f(\bigcup_{i\in I} C_i) = \bigcup_{i\in I} f(C_i)$;

(ii) $f(\bigcap_{i\in I} C_i) \subseteq \bigcap_{i\in I} f(C_i)$;

(iii) $f^{-1}(\bigcup_{i\in I} D_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(D_i)$;

(iv) $f^{-1}(\bigcap_{i\in I} D_i) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(D_i)$.

Ahora, se va a dar un breve repaso del producto generalizado de conjuntos, para con ello enunciar y hacer énfasis en el Axioma de Elección, que será de vital importancia para los capítulos posteriores.

Sea I una clase (conjunto), cuyos elementos sirven como índices para designar los elementos de una clase (conjunto) $\{A_i : i \in I\}$. La clase $\{A_i : i \in I\}$ es denominada familia de clases (conjuntos). Una notación usual de $\{A_i : i \in I\}$ es $\{A_i\}_{i\in I}$; con esto, $\{A_i\}_{i\in I}$ es la familia de todas las clases (conjuntos) A_i, donde $i \in I$.

DEFINICIÓN 2.8. *Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos, donde I es un conjunto, la clase*

$$\prod_{i\in I} A_i = \left\{ f\colon I \to \bigcup_{i\in I} A_i : f \text{ es función y } f(i) \in A_i \text{ para todo } i \in I \right\},$$

es llamada producto generalizado *de* $\{A_i\}_{i\in I}$.

OBSERVACIÓN. Notemos que en la última definición, $\prod_{i\in I} A_i$ es un conjunto, pues dado que I es un conjunto tenemos que la función:

$$\begin{aligned} \varphi\colon I &\longrightarrow \{A_i : i \in I\} \\ i &\longmapsto \varphi(i) = A_i, \end{aligned}$$

es una función sobreyectiva y por el Axioma 8, tenemos que $\{A_i : i \in I\} = \{A_i\}_{i\in I}$ es un conjunto.

Ahora, del Axioma 5, tenemos que $A = \bigcup_{i\in I} A_i$ también es un conjunto. Por otro lado, si $f\colon I \to A$ es una función, tenemos que $f \subseteq I \times A$ y, como $I \times A$ es un conjunto, del Axioma 6, f es un conjunto y, por ende, nuevamente del Axioma 5, $\prod_{i\in I} A_i$ es un conjunto.

DEFINICIÓN 2.9. *Sean A y B dos conjuntos, notamos por B^A a la clase de todas las* *funciones de A en B, es decir,*

$$B^A = \{f\colon A \to B : f \text{ es función}\}.$$

AXIOMA 9. *(Axioma de Elección) Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos. Si I es no vacío y para cada $i \in I$, A_i es no vacío, entonces $\prod_{i\in I} A_i$ es no vacío.*

Equivalentemente, tenemos que, para $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos como en el Axioma 9, existe una función $f\colon I \to \bigcup_{i\in I} A_i$ tal que $f(i) \in A_i$ para todo $i \in I$.

OBSERVACIÓN. A la función antes definida la llamaremos función de elección, es decir, tenemos que el Axioma de Elección es equivalente a que *toda familia de conjuntos no vacíos tiene una función de elección.*

Por último, vamos a demostrar un par de resultados acerca de uniones e intersecciones de familias de conjuntos que serán de ayuda en capítulos posteriores.

PROPOSICIÓN 2.4. *Sean I, J dos conjuntos de índices, $\{A_i^j\}_{(i,j)\in I\times J}$ una familia de conjuntos y $\mathcal{A}$, B dos conjuntos. Se tiene que*

(i) $B \cap \left(\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A\right) = \bigcup_{A\in\mathcal{A}} (B\cap A)$;

(ii) $\bigcup_{i\in I}\left(\bigcap_{j\in J} A_i^j\right) \subseteq \bigcap_{j\in J}\left(\bigcup_{i\in I} A_i^j\right)$;

(iii) $\bigcap_{i\in I}\left(\bigcap_{j\in J} A_i^j\right) = \bigcap_{j\in J}\left(\bigcap_{i\in I} A_i^j\right)$.

Demostración.

(i) Notemos que

$$\begin{aligned} x \in B \cap \left(\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A\right) &\Leftrightarrow (x\in B) \wedge (\exists A \in \mathcal{A})(x\in A) \\ &\Leftrightarrow (\exists A\in\mathcal{A})(x\in B)(x\in A) \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcup_{A\in\mathcal{A}} (B\cap A). \end{aligned}$$

(ii) Sea $x \in \bigcup_{i\in I}\left(\bigcap_{j\in J} A_i^j\right)$; con esto, existe $M \in I$ tal que $x \in A_M^j$, para todo $j \in J$.

Vamos a demostrar que para todo $j \in J$, existe $k \in I$ tal que $x \in A_k^j$. Sea $j \in J$, tomando $k = M$, tenemos que $x \in A_k^j$, por ende, $x \in \bigcap_{j \in J} \left(\bigcup_{i \in I} A_i^j \right)$.

(iii) Notemos que

$$\begin{aligned} x \in \bigcap_{i \in I} \left(\bigcap_{j \in J} A_i^j \right) &\Leftrightarrow (\forall i \in I)(\forall j \in J)(x \in A_i^j) \\ &\Leftrightarrow (\forall j \in J)(\forall i \in I)(x \in A_i^j) \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcap_{j \in J} \left(\bigcap_{i \in I} A_i^j \right), \end{aligned}$$

por lo tanto, $\bigcap_{i \in I} \left(\bigcap_{j \in J} A_i^j \right) = \bigcap_{j \in J} \left(\bigcap_{i \in I} A_i^j \right)$. □

OBSERVACIÓN. Notemos que, en la segunda condición no, necesariamente, se alcanza la igualdad. En efecto, tomemos la familia $\{A_i^j\}_{(i,j) \in 2 \times 3}$ dada por:

$$\begin{array}{rcr} A_0^0 = \{0\}, & & A_1^0 = \{3\}, \\ A_0^1 = \{1, 2\}, & & A_1^1 = \{0, 3\}, \\ A_0^2 = \{3\} & \text{y} & A_1^2 = \{1, 2\}. \end{array}$$

Con esto, tenemos:

$$\begin{aligned} \bigcup_{i \in 2} \left(\bigcap_{j \in 3} A_i^j \right) &= (A_0^0 \cap A_0^1 \cap A_0^2) \cup (A_1^0 \cap A_1^1 \cap A_1^2) \\ &= \varnothing \cup \varnothing = \varnothing. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \bigcap_{j \in 3} \left(\bigcup_{i \in 2} A_i^j \right) &= (A_0^0 \cup A_1^0) \cap (A_0^1 \cup A_1^1) \cap (A_0^2 \cup A_1^2) \\ &= \{0, 3\} \cap \{0, 1, 2, 3\} \cap \{1, 2, 3\} = \{3\}. \end{aligned}$$

Demostrando que, no necesariamente, se cumple la igualdad.

2.2.2. Relaciones

DEFINICIÓN 2.10. *Sea A una clase, decimos que R es una* relación *en A si $R \subseteq A \times A$.*

A partir de esta definición, dada una clase A, tenemos que si R es una relación en A y no existe confusión alguna, escribiremos xRy en lugar de $(x, y) \in R$ y diremos que x se relaciona con y módulo R. A partir de esto, tenemos la siguientes definiciones.

DEFINICIÓN 2.11. *Sea R una relación en A, entonces*

(i) *R es* reflexiva *si para todo $x \in A$, xRx;*

(ii) *R es* simétrica *si xRy, implica que yRx;*

(iii) *R es* anti-simétrica *si xRy y yRx, implica que $x = y$;*

(iv) *R es* transitiva *si xRy y yRz, implica que xRz.*

Con estas definiciones, decimos que una relación R es una *relación de equivalencia* si R es simétrica, reflexiva y transitiva. Decimos que R es una *relación de orden* si R es anti-simétrica, transitiva y reflexiva.

Ahora, si R es una relación de orden, en lugar de xRy escribiremos $x \leq y$. Además, diremos que $\leq$ es un orden y escribiremos que $x < y$ cuando $x \leq y$ y $x \neq y$.

A partir de aquí, vamos a centrarnos en las relaciones de orden, pues estas son las que nos ayudarán a definir el concepto de números ordinales.

DEFINICIÓN 2.12. *(Elemento mínimo). Sean A una clase, $B \subseteq A$ y $\leq$ un orden sobre A. Decimos que $b \in B$ es el* elemento mínimo *de B si $b \leq a$ para todo $a \in B$. Lo notaremos por $b = \min(B)$.*

DEFINICIÓN 2.13. *(Supremo). Sean A una clase, $B \subseteq A$ y $\leq$ un orden sobre A. Decimos que $a \in A$ es una* cota superior *de B si $x \leq a$ para todo $x \in B$. a es el* supremo *de B, si a es la menor de las cotas superiores de B. Lo notaremos por $a = \sup(B)$.*

DEFINICIÓN 2.14. *(Conjunto Bien Ordenado). Sea A un conjunto y $\leq$ un orden sobre A. Decimos que A es* bien ordenado *bajo el orden $\leq$ si todo subconjunto no vacío de A tiene elemento mínimo.*

2.3. Números Naturales

En esta sección, no se enfatizará en las propiedades de los números naturales, si no, presentaremos su definición formal, además, enunciaremos y demostraremos el Teorema de Inducción Finita y Recursión Finita. Por otro lado, como es habitual en la Teoría de Conjuntos, al conjunto de los números naturales lo notaremos por ω, igualmente, todo número natural n será entendido como $\{0, 1, \ldots, n-1\}$.

Ahora, si A es un conjunto, al sucesor del conjunto A, lo denotaremos por A^+, donde $A^+ = A \cup \{A\}$.

DEFINICIÓN 2.15. *(Conjunto Sucesor). Sea B un conjunto, decimos que B es un* conjunto sucesor *si*

(i) $\varnothing \in B$;

(ii) si $x \in B$, entonces $x^+ \in B$.

AXIOMA 10. *(Axioma de Infinitud). Existe un conjunto sucesor.*

DEFINICIÓN 2.16. *(Número Naturales). El conjunto de* números naturales *es la intersección de todos los conjuntos sucesores, es decir,*

$$\omega = \bigcap_{S \in \mathcal{S}} S.$$

A cada elemento de ω se lo llama número natural.

Con esto en mente, sea $n \in \omega$, n^+, el sucesor de n, será notado por $n+1$; con esto, tenemos lo siguiente

$$n^+ = n + 1 = n \cup \{n\}.$$

Así, estamos listos para demostrar el Teorema de Inducción Matemática.

TEOREMA 2.5. *(Inducción Finita). Sea X un subconjunto de ω. Supongamos que X tiene las siguientes propiedades:*

(i) $0 \in X$;

(ii) si $n \in X$, entonces $n^+ \in X$.

Entonces, $X = \omega$.

Demostración. Supongamos que X cumple las condiciones mencionadas; con esto, X es un conjunto sucesor. De la definición de ω, tenemos que $\omega \subseteq X$ pero también, tenemos que $X \subseteq \omega$, por lo tanto, concluimos que $X = \omega$. $\square$

Con este teorema, se pueden derivar los postulados de **Peano** y, por ende, se pueden demostrar varias propiedades acerca de los números naturales y sus sucesores; se puede ver dichas proposiciones en [15, Cap. 6].

DEFINICIÓN 2.17. *Una clase (conjunto) A se dice* transitiva (transitivo) *si para cada $x \in A$, se tiene que $x \subseteq A$.*

OBSERVACIÓN. Notemos que en la definición anterior A toma el nombre de transitivo pues hace que la relación $\in$ sea transitiva, en efecto, sean A una clase transitiva, supongamos que $x \in A$, $y \in x$, vamos a demostrar que $y \in A$. Como $x \in A$ y A es transitivo, tenemos que $x \subseteq A$, por ende, $y \in A$.

PROPOSICIÓN 2.6. *Todo número natural es transitivo.*

Demostración. Procederemos por Inducción Finita.

- Se tiene que 0 es transitivo, pues de no serlo, existiría $y \in 0$ tal que y no sea un subconjunto de 0, lo cual es una contradicción pues $0 = \varnothing$.
- Ahora, supongamos que n es transitivo, vamos a demostrar que $n^+ = n + 1$ también lo es. Sea $x \in n + 1$, por lo tanto, $x \in n$ o $x = n$. Si $x \in n$, dado que n es transitivo, tenemos que $x \subseteq n$ pero como $n \subseteq n + 1$, tenemos que $x \subseteq n + 1$. Por otro lado, si $x = n$, nuevamente $x \subseteq n + 1$ pues $n \subseteq n + 1$, por lo tanto, concluimos que todo número natural es transitivo. □

PROPOSICIÓN 2.7. *ω es transitivo.*

Demostración. Definamos

$$L = \{n \in \omega : n \subseteq \omega\}.$$

Procediendo por Inducción Finita, demostremos que $n \in L$, para todo $n \in \omega$.

- Notemos que $0 \in L$ pues $0 = \varnothing \subseteq \omega$.
- Ahora, supongamos que $n \in L$; con esto, tenemos que $n \in \omega$ y $n \subseteq \omega$. Como $n + 1 = n^+ = n \cup \{n\}$, de la hipótesis de inducción, tenemos que $n + 1 \subseteq \omega$.

Con esto, acabamos de demostrar que ω es transitivo como deseábamos. □

Finalmente, vamos a enunciar otro teorema importante de los números naturales, el Teorema de Recursión Finita, gracias al cual se definen las operaciones de los números naturales y, junto con el Teorema de Inducción Finita, se obtienen sus respectivas propiedades. Estas se pueden encontrar en [15, Cap. 6].

TEOREMA 2.8. *(Recursión Finita). Sean A un conjunto, c un elemento fijo del conjunto A y $f\colon A \to A$ una función. Entonces, existe una única función $\gamma\colon \omega \to A$ tal que* *(i)* $\gamma(0) = c$ *y*

(ii) $\gamma(n^+) = f(\gamma(n))$ *para todo* $n \in \omega$.

Demostración. En primer lugar, estableceremos la existencia de la función γ. Notemos que si existiera $G \subseteq \omega \times A$ tal que cumple las siguientes propiedades:

a) para todo $n \in \omega$, existe $x \in A$ tal que $(n, x) \in G$;

b) si $(n, x_1) \in G$ y $(n, x_2) \in G$, entonces $x_1 = x_2$;

c) $(0, c) \in G$;

d) si $(n, x) \in G$, entonces $(n^+, f(x)) \in G$;

se tendría que G es la función buscada, pues, las dos primeras propiedades nos aseguran que G es una función, mientras que las otras dos restantes nos aseguran las condiciones deseadas para G. Así, para obtener γ, definamos:

$$\mathcal{A} = \{G \subseteq \omega \times A : G \text{ satisface las condiciones } c), d)\}.$$

Notemos que $\mathcal{A}$ es no vacío puesto que $\omega \times A \in \mathcal{A}$. Tomemos

$$\gamma = \bigcap_{G \in \mathcal{A}} G$$

y notemos que γ es la función buscada. Por como tomamos γ, cumple las condiciones *c)* y *d)*; con esto, basta demostrar que se cumple *a)* y *b)*.

1. Usando Inducción Finita, vamos a demostrar que $\mathrm{dom}(\gamma) = \omega$, donde $\mathrm{dom}(\gamma) = \{z \in \omega : \text{ existe } y \in A \text{ tal que } (z, y) \in \gamma\}$, lo cual implica *a)*.

   - De *c)*, tenemos que $(0, c) \in \gamma$ y, por ende, $0 \in \mathrm{dom}(\gamma)$.
   - Ahora, supongamos que $n \in \mathrm{dom}(\gamma)$ y vamos a demostrar que $n^+ \in \mathrm{dom}(\gamma)$. Como $n \in \mathrm{dom}(\gamma)$, existe $x \in A$ tal que $(n, x) \in \gamma$ y, por *d)*, se sigue que $(n^+, f(x)) \in \gamma$, por lo tanto, $n^+ \in \mathrm{dom}(\gamma)$.

   Con esto, concluimos que $\mathrm{dom}(\gamma) = \omega$.

2. Definamos
   $$N = \{n \in \omega : (n, x) \in \gamma, \text{ para un único } x \in A\}.$$

   Usando Inducción Finita, vamos a demostrar que $N = \omega$.

- Por reducción al absurdo, supongamos que $0 \in N$, es decir, supongamos que existe $d \in A$, donde $c \neq d$ tal que $(0, c) \in \gamma$ y $(0, d) \in \gamma$. Definamos $\Gamma = \gamma \setminus \{(0, d)\}$, no es difícil ver que Γ satisface *c)* y demostremos que Γ satisface *d)*, para ello supongamos que $(n, x) \in \Gamma$, por lo tanto, $(n, x) \in \gamma$, así, $(n^+, f(x)) \in \gamma$, pero como $n^+ \neq 0$, se sigue que $(n^+, f(x)) \neq (0, d)$ y, por ende, $(n^+, f(x)) \in \Gamma$. Con esto, tenemos que Γ satisface *d)*, por consiguiente $\Gamma \in \mathcal{A}$ y, como, γ es la intersección de todos los elementos de $\mathcal{A}$, tenemos que $\gamma \subseteq \Gamma$, lo cual es imposible y, por lo tanto, $0 \in N$.
- Ahora, supongamos que $n \in N$, vamos a demostrar que $n^+ \in N$. Nuevamente, por reducción al absurdo, supongamos que $n^+ \notin N$, por lo tanto, tenemos que $(n, x) \in \gamma$, $(n^+, f(x)) \in \gamma$ y $(n^+, u) \in \gamma$ donde $u \neq f(x)$. Definamos $\Gamma = \gamma \setminus \{(n^+, u)\}$, Γ satisface *c)* puesto que $(n^+, u) \neq (0, c)$. Para demostrar que Γ satisface *d)*, supongamos que $(m, v) \in \Gamma$, por lo tanto, $(m, v) \in \gamma$ y, con ello, $(m^+, f(v)) \in \gamma$. Con esto, consideremos dos casos
  (a) Si $m^+ \neq n^+$, entonces $(m^+, f(v)) \neq (n^+, u)$, por lo tanto, $(m^+, f(v)) \in \Gamma$.
  (b) Si $m^+ = n^+$, entonces $m = n$ y, con ello, $(m, v) \neq (n, v)$ pero $n \in N$, esto quiere decir que $(n, x) \in \gamma$; además, x es único, es decir, $x = v$ y, por ende, $(m^+, f(v)) = (n^+, f(x)) \in \Gamma$.

  De esto, sea el caso (a) o el caso (b), $(m^+, f(v)) \in \Gamma$, así, Γ satisface *d)*, por lo tanto, $\Gamma \in \mathcal{A}$. Nuevamente, análogo a la base de inducción, tenemos que $\gamma \subseteq \Gamma$, lo cual no es posible y, por ende, $n^+ \in N$.

Con esto, hemos demostrado que $N = \omega$.

Finalmente, demostraremos que γ es único. Sean γ y Γ, dos funciones de ω en A que satisfacen las condiciones deseadas, definamos

$$M = \{n \in \omega : \gamma(n) = \Gamma(n)\}$$

y usando Inducción Finita, demostremos que $M = \omega$, y, por ende, $\gamma = \Gamma$. Notemos que

- $0 \in M$, pues $\gamma(0) = c = \Gamma(0)$.
- Ahora, supongamos que $n \in M$, entonces

  $$\gamma(n^+) = f(\gamma(n)) = f(\Gamma(n)) = \Gamma(n^+),$$

  por ende, $n^+ \in M$.

Con esto, tenemos que γ es la única función que cumple las condiciones deseadas. $\square$

2.4. Números Ordinales

Entre 1870 y 1872, G. Cantor estudiaba la unicidad de las series de Fourier cuando se planteó un proceso, comenzando dicho proceso por el 0, siguiendo por su sucesor, siendo éste, desde luego, el 1, luego seguimos con su sucesor, el 2, el 3 y así sucesivamente. Al notar que existían casos en el que este proceso no acababa después de la sucesión generada por los naturales $0, 1, 2, \ldots$, es decir, el proceso no acaba en un número finito de veces, sino más bien infinito, Cantor decidió notar al número de veces en las que realizó dicho proceso por ∞, ¿pero, si el proceso no acababa con ∞ pasos? Cantor encontró casos en donde el proceso acababa en el paso $\infty + 1, \infty + 2$, o inclusive en el paso $\infty + \infty$. En 1882, finalmente, se dio cuenta que estos símbolos $\infty, \infty + 1, \ldots, \infty + \infty, \infty + \infty + 1, \ldots$ representaban a números infinitos, números que permiten contar más allá de los naturales. Les asignó un nombre, llamándolos números *ordinales* y cambió el símbolo ∞ por la letra griega ω.

En la presente sección, formalizaremos el concepto de los números ordinales como una generalización de los números naturales vistos en la sección anterior. Análogamente, los teoremas importantes de los números naturales serán generalizados para los números ordinales, generando los Teoremas de Inducción y Recursión Transfinita.

Partiremos de propiedades específicas (más que todo muy particulares) de los números naturales como el principio de buen orden, lo que nos permitirá comprender la razón por la que los números ordinales son en verdad una generalización de los números naturales.

DEFINICIÓN 2.18. *Sobre ω, definimos la relación $\leq$ dada por*

$$\{(n, m) \in \omega \times \omega : n \in m \text{ o } n = m\}.$$

PROPOSICIÓN 2.9. *Sean $m, n \in \omega$, tenemos que $n \leq m$ si y solo si $n \subseteq m$.*

Demostración. Supongamos que $n \leq m$. Si $n \in m$, como $m \in \omega$, de la Proposición 2.6, m es transitivo, por lo tanto, $n \subseteq m$. Ahora, si $n = m$, se tiene que $n \subseteq m$.

Por otro lado, supongamos que $n \subseteq m$. Por reducción al absurdo supongamos que $n > m$, es decir, $m \in n$ y $n \neq m$. Por lo hecho para la primera implicación, tenemos que $m \subseteq n$ y de la hipótesis, se sigue que $n = m$, lo cual es imposible, por ende, concluimos que $n \leq m$. $\square$

PROPOSICIÓN 2.10. *$\leq$ es una relación de orden. Además, tenemos que:*

(i) para $n \in \omega$, $n \leq n+1$;

(ii) para todo $m \in \omega, 0 \leq m$;

(iii) para $n, m \in \omega$, $n < m$ implica $n+1 \leq m$.

Demostración. De la Proposición 2.6 para todo $n, m \in \omega$ tales que $n \leq m$, al ser transitivos, tenemos que $n \subseteq m$, como $\subseteq$ es una relación de orden, de la proposición anterior, se tiene que la relación $\leq$ es anti-simétrica, reflexiva y transitiva. Ahora, para las otras condiciones tenemos:

(i) Sea $n \in \omega$, tenemos que $n \in n \cup \{n\} = n^+ = n+1$, por lo tanto, $n \leq n+1$,

(ii) Procederemos por Inducción Finita.

- Tenemos que $0 \leq 0$, pues $\leq$ es una relación de orden.
- Ahora, sea $n \in \omega$, supongamos que $0 \leq n$, vamos a demostrar que $0 \leq n+1$. Del literal anterior, tenemos que $n \leq n+1$ y nuevamente como $\leq$ es una relación de orden, tenemos que $0 \leq n+1$.

(iii) Sea $n \in \omega$, definamos

$$L_n = \{m \in \omega : n < m \text{ implica } n+1 \leq m\}$$

y demostremos que $L_n = \omega$. Procederemos por Inducción Finita.

- Tenemos que $0 \in L_n$, pues de no ser así, se tendría que $n < 0$ y, por lo tanto, $n \in 0 = \varnothing$, lo cual no es posible.
- Ahora, supongamos que $m \in L_n$. Supongamos que $n < m+1$, vamos a demostrar que $n+1 \leq m+1$. Como $n < m+1$, tenemos que

$$n \in m+1 = m \cup \{m\};$$

con esto, $n \in m$ o $n = m$. Si $n \in m$, tenemos que $n < m$ y de la hipótesis de inducción, se sigue que $n+1 \leq m$; además, $m < m+1$, por ende, $n+1 \leq m+1$. Por otro lado, si $n = m$, entonces $n^+ = m^+$, es decir, $n < m+1$ implica que $n+1 < m+1$, como deseábamos.

Con esto, concluimos que $L_n = \omega$, con lo cual se tiene que para $n, m \in \omega$, $n < m$ implica $n + 1 \leq m$. $\square$

TEOREMA 2.11. *(Principio del Buen Orden). El conjunto ω está bien ordenado bajo el orden $\leq$.*

Demostración. Por reducción al absurdo, supongamos que existe $A \subseteq \omega$ no vacío que no posee elemento mínimo. Sea

$$L = \{n \in \omega : n \leq m \text{ para todo } m \in A\}.$$

Vamos a demostrar que $n \in L$ para todo $n \in \omega$. Procediendo por Inducción Finita, tenemos:

- $0 \in L$, pues de la Proposición 2.10, tenemos que $0 \leq m$ para todo $m \in \omega$.
- Ahora, supongamos que $n \in L$, si $n \in A$, tendríamos que n es elemento mínimo lo cual, contradice la hipótesis, por lo tanto, $n \notin A$ y $n < m$ para todo $m \in A$. Nuevamente, por la proposición anterior, $n + 1 \leq m$ para todo $m \in A$, con esto $n + 1 \in L$.

De esta forma, tenemos que $n \in L$ para todo $n \in \omega$ y, así, concluimos que $A = \varnothing$, lo cual es una contradicción. Por tanto, ω está bien ordenado bajo el orden $\leq$. $\square$

OBSERVACIÓN. Notemos que para todo $n \in \omega$, n está bien ordenado bajo el orden $\leq_n$, dado por la restricción del orden $\leq$ sobre n.

Ahora, vamos a definir formalmente a los números ordinales y entender la razón de tomarlos como una generalización de los números naturales.

DEFINICIÓN 2.19. *Un conjunto α es un* número ordinal *si*

- *α es transitivo;*
- *α está bien ordenado por la relación $\{(\beta, \gamma) \in \alpha \times \alpha : \beta \in \gamma\}$, la cual es denotada por $<_\alpha$.*

Usaremos el término *ordinal* para referirnos a un número ordinal; más aún, a la clase de todos los ordinales los notaremos por **OR**; más adelante demostraremos que, **OR** no es un conjunto. Dicho esto, todo número natural es un ordinal y, por lo hecho antes, ω también es un ordinal. Es por esta razón que los números ordinales son una generalización de los números naturales.

DEFINICIÓN 2.20. *Sobre **OR**, definimos la relación $<$ dada por*

$$\{(\alpha, \beta) \in \boldsymbol{OR} \times \boldsymbol{OR} : \alpha \in \beta\}.$$

OBSERVACIÓN. Notemos que para todo $\alpha \in$ **OR**, la relación $<_\alpha$ es la restricción de la relación $<$ al conjunto α. Es por ello que, de ahora en adelante, a cualquiera de las dos relaciones mencionadas la representaremos por $<$.

Antes de demostrar que **OR** es una clase propia, vamos a presentar varias proposiciones acerca de los números ordinales.

PROPOSICIÓN 2.12. *Todo elemento de un número ordinal es un número ordinal.*

Demostración. Sean α un ordinal y $\rho \in \alpha$, de esto último, notemos que ρ es un conjunto. En primer lugar, demostremos que ρ es transitivo. Sea $\beta \in \rho$, vamos a demostrar que $\beta \subseteq \rho$. Sea $\gamma \in \beta$, demostremos que $\gamma \in \rho$. Como α es transitivo, tenemos que $\rho \subseteq \alpha$ y, con esto, $\beta \in \alpha$, más aún, $\beta \subseteq \alpha$ y, por ende, $\gamma \in \alpha$. Así, se tiene que $\gamma < \beta$ y $\beta < \rho$, por lo tanto, $\gamma < \rho$, es decir $\gamma \in \rho$ como deseábamos y, por ende, $\beta \in \rho$ implica $\beta \subseteq \rho$.

Por otro lado, como $\rho \subseteq \alpha$ y α está bien ordenado pues α es un ordinal, se tiene que ρ está bien ordenado. Por lo tanto, concluimos que ρ es un ordinal. □

De la definición de los números naturales tenemos que el sucesor de un número natural es, también, un número natural. Análogamente, tenemos que el sucesor de un número ordinal es también un ordinal, los números ordinales con la relación $<$ cumplen la transitividad, estas y una propiedad adicional se muestran en la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 2.13. *Sean α, β, γ números ordinales se tiene:*

(i) $\alpha^+ = \alpha + 1$ *es un número ordinal;*

(ii) *si* $\alpha < \beta$ *y* $\beta < \gamma$*, entonces* $\alpha < \gamma$*;*

(iii) $\alpha = \{\rho \in \boldsymbol{OR} : \rho < \alpha\}$.

Demostración. El resultado se obtiene directo de la definición y la proposición anterior. □

PROPOSICIÓN 2.14. ***OR*** *está bien ordenado bajo* $\leq$.

Demostración. Vamos a demostrar que todo conjunto no vacío de números ordinales tiene elemento mínimo. Sea $A \subseteq \mathbf{OR}$ no vacío. Tomemos $\alpha \in A$, tenemos los siguientes casos:

1. Si $\alpha \cap A = \varnothing$, se tiene que α es elemento mínimo de A, pues de no ser así, existiría $\beta \in A$ tal que $\beta < \alpha$, por lo tanto, $\beta \in \alpha$ y, por ende, $\alpha \cap A \neq \varnothing$, lo cual es contradictorio.

2. Si $\alpha \cap A \neq \varnothing$, como α está bien ordenado y $\alpha \cap A \subseteq \alpha$, tenemos que existe β elemento mínimo de $\alpha \cap A$; con esto, β es elemento mínimo de A, pues de no ser así, existiría $\gamma \in A$ tal que $\gamma < \beta$ y, como $\beta \in \alpha$, se tendría que $\beta \in \alpha \cap A$, lo cual contradice el hecho que β sea elemento mínimo de $\alpha \cap A$.

En ambos casos, tenemos que A tiene elemento mínimo. Por lo tanto, **OR** está bien ordenado bajo $\leq$. □

OBSERVACIÓN. De la demostración de la proposición anterior, tenemos que si α es elemento mínimo de A, entonces $\alpha \cap A = \varnothing$.

PROPOSICIÓN 2.15. ***OR*** *es una clase transitiva.*

Demostración. Sea $\alpha \in \mathbf{OR}$, vamos a demostrar que $\alpha \subseteq \mathbf{OR}$. Sea $\beta \in \alpha$, como α es un ordinal, de la Proposición 2.12, se sigue que $\beta \in \mathbf{OR}$. □

Con esta última proposición y teniendo en cuenta el Axioma de Regularidad tenemos que **OR** no es un conjunto.

PROPOSICIÓN 2.16. ***OR*** *es una clase propia.*

Demostración. Por reducción al absurdo supongamos que **OR** es un conjunto. De la Proposición 2.14 y de la Proposición 2.15, tenemos que **OR** es transitivo y está bien ordenado, por lo tanto, **OR** es un número ordinal, es decir, $\mathbf{OR} \in \mathbf{OR}$, lo que contradice la Proposición 2.1. □

Cuando hablamos de naturales, al unir números naturales, se puede demostrar que dicha unión sigue siendo un número natural, a partir de esto, surge una pregunta natural: ¿La unión de ordinales es un número ordinal? La respuesta es sí, siempre y cuando la unión de ordinales se realice sobre un conjunto de índices, como mostramos a continuación.

PROPOSICIÓN 2.17. *Sean I un conjunto y $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ una familia de ordinales. Se tiene que $\bigcup_{i\in I} \alpha_i$ es un número ordinal.*

Demostración. Notemos que, como I es un conjunto, por el Axioma de Unión, $\bigcup_{i\in I} \alpha_i$ es un conjunto; además, por la Proposición 2.12, $\bigcup_{i\in I} \alpha_i$ es un conjunto formado por ordinales y, por la Proposición 2.14, está bien ordenado. Basta demostrar que $\bigcup_{i\in I} \alpha_i$ es transitivo. Sea $\beta \in \bigcup_{i\in I} \alpha_i$, existe $i \in I$ tal que $\beta \in \alpha_i$ y, como α_i es ordinal, se sigue que $\beta \subseteq \alpha_i \subseteq \bigcup_{i\in I} \alpha_i$. Con todo esto, concluimos que $\bigcup_{i\in I} \alpha_i$ es un número ordinal. $\square$

Cuando se habla de ordinales, G. Cantor los categorizó en varios tipos, una de esas categorizaciones fue dada por los *ordinales sucesores* y *ordinales límite*. Los ordinales sucesores son aquellos ordinales que pueden ser "alcanzados" en una cierta cantidad de pasos, mientras que los ordinales límites no. A continuación, definiremos formalmente dichos ordinales.

DEFINICIÓN 2.21. *(Ordinal Sucesor y Ordinal Límite). Sea $\alpha \in \mathbf{OR}$. Si existe $\beta \in \mathbf{OR}$ tal que $\alpha = \beta + 1$, decimos que α es un* ordinal sucesor. *Caso contrario, diremos que α es un* ordinal límite.

Veamos algunos ejemplos de ordinales sucesores y ordinales límites.

- 0 es un ordinal límite, pues no existe $\beta \in \mathbf{OR}$ tal que $\beta + 1 = 0$.
- Sea $n \in \omega \setminus \{0\}$, n es un ordinal sucesor. Esto se puede demostrar fácilmente usando Inducción Finita.
- ω es un ordinal límite. En efecto, por reducción al absurdo, supongamos que ω es un ordinal sucesor, por lo tanto, existe $\beta \in \mathbf{OR}$ tal que $\omega = \beta + 1$; con esto, $\beta \in \omega$, por lo tanto $\beta + 1 \in \omega$, es decir, $\beta + 1 < \omega$, lo cual es contradictorio.
- $\omega + 1, \omega + 2$, en general, $\omega + n$ donde $n \in \omega$, son ordinales sucesores.

Por otro lado, también se categorizó a los ordinales como *ordinales finitos* y *ordinales transfinitos*. Cuando hablamos de ordinales finitos nos referimos a los ordinales dados por los números naturales, mientras que al referirnos a los ordinales transfinitos, hacemos referencia a los ordinales que no son finitos; el primer ordinal transfinito es ω, pues en efecto, si suponemos que existe β, otro ordinal transfinito tal que $\beta < \omega$, tendríamos que $\beta \in \omega$, lo cual es imposible, pues sería finito.

Análogamente a lo realizado con los números naturales, tenemos los Teoremas de *Inducción Transfinita* y *Recursión Transfinita*, los cuales son una extensión de los Teoremas de Inducción Finita y Recursión Finita, respectivamente. La idea es, en esencia, la misma; al igual que lo hacemos en el caso de los números naturales, tenemos la base de la inducción o recursión, y el paso inductivo o recursivo según corresponda, esto debido a que tenemos ordinales finitos. Ahora, en ambos casos se añade un paso transfinito, es decir, se añade un paso extra donde se prueba la proposición o se define la condición para los ordinales límite, tanto en la Inducción Finita como en la Recursión Finita, respectivamente. Para demostrar estos resultados consideremos el siguiente lema.

LEMA 2.18. *Sea $A \subseteq \boldsymbol{OR}$. Si para todo $x \in \boldsymbol{OR}$ tal que $x \subseteq A$ implica $x \in A$, entonces $A = \boldsymbol{OR}$.*

Demostración. Supongamos que para todo $x \in \mathbf{OR}$, $x \subseteq A$ implica $x \in A$. Por reducción al absurdo supongamos que $\mathbf{OR}$ no está contenido en A, por lo tanto, $\mathbf{OR} \setminus A$ es no vacío; además, $\mathbf{OR} \setminus A \subseteq \mathbf{OR}$ y, de la Proposición 2.14, tenemos que $\mathbf{OR} \setminus A$ posee elemento mínimo, llamémoslo α. Por otro lado, de la Proposición 2.15, tenemos que $\alpha \subseteq \mathbf{OR}$. Ahora, como α es un elemento mínimo de $\mathbf{OR} \setminus A$, tenemos que

$$(\mathbf{OR} \setminus A) \cap \alpha = \varnothing,$$

pues de no ser así, existiría $\beta \in (\mathbf{OR} \setminus A) \cap \alpha$, pero con esto, tendíamos que $\beta < \alpha$ siendo mínimo de $\mathbf{OR} \setminus A$, lo cual es imposible; de esta forma, tenemos que

$$(\mathbf{OR} \cap \alpha) \setminus A = \alpha \setminus A = \varnothing,$$

por lo tanto, $\alpha \subseteq A$. De la hipótesis, tenemos que $\alpha \in A$, lo cual contradice el hecho que $\alpha \in \mathbf{OR} \setminus A$. Con esto, demostramos lo deseado. □

Ahora, estamos listos para completar uno de nuestros objetivos principales de este capítulo, vamos a enunciar y demostrar el Teorema de Inducción Transfinita, puesto que en este teorema se basan la mayoría de demostraciones tanto de este capítulo como los posteriores.

TEOREMA 2.19. *(Inducción Transfinita). Sea $A \subseteq \boldsymbol{OR}$. Si A cumple las siguientes propiedades:*

(i) $0 \in A$;

(ii) $\alpha \in A$ *implica* $\alpha + 1 \in A$;

(iii) para $\lambda \neq 0$ un ordinal límite, $\beta \in A$, para todo $\beta < \lambda$, implica $\lambda \in A$,

entonces $A = \boldsymbol{OR}$.

Demostración. Utilizaremos el lema anterior. Sea $\alpha \in \mathbf{OR}$ tal que $\alpha \subseteq A$, tenemos tres posibilidades:

1. si $\alpha = 0$, de la primera condición, tenemos que $\alpha \in A$;

2. si α es un ordinal sucesor, existe $\beta \in \mathbf{OR}$ tal que $\alpha = \beta + 1$, como $\beta < \alpha$, se sigue que $\beta \in \alpha$; además, como $\alpha \subseteq A$, tenemos que $\beta \in A$ y de la segunda condición, concluimos que $\alpha = \beta + 1 \in A$;

3. si α es un ordinal límite distinto de cero, sea $\gamma < \alpha$, tenemos que $\gamma \in \alpha$ y nuevamente, como $\alpha \subseteq A$, tenemos que $\gamma \in A$; con esto, al ser γ arbitrario, de la tercera condición, concluimos que $\alpha \in A$.

Con esto, hemos demostrado que para todo ordinal α tal que $\alpha \subseteq A$ implica que $\alpha \in A$, de donde, tenemos que $\mathbf{OR} \subseteq A$, como deseábamos. $\square$

OBSERVACIÓN. En el Teorema de Inducción Transfinita, al primer paso se le llamará base de inducción, el segundo paso inductivo y el tercero, paso transfinito.

Al igual que el Teorema de Inducción Transfinita, el objetivo del capítulo es demostrar el Teorema de Recursión Transfinita, pues con éste se va a definir la derivada de Cantor-Bendixson que es la base del presente trabajo.

TEOREMA 2.20. *(Recursión Transfinita). Sean A una clase, $\mathcal{F} = \bigcup_{\alpha \in \boldsymbol{OR}} A^\alpha$ la clase de todas las funciones que van de un número ordinal en A y $F \colon \mathcal{F} \to A$ otra función. Se tiene que existe una única función $G \colon \boldsymbol{OR} \to A$ tal que, para todo $\alpha \in \boldsymbol{OR}$, se cumple que*

$$G(\alpha) = F(G|_\alpha).$$

Demostración. Definamos

$$\mathcal{G} = \{H \colon \beta \to A : \beta \in \mathbf{OR} \text{ y, para todo } \alpha < \beta, \text{ se cumpla } H(\alpha) = F(H|_\alpha)\}.$$

En primer lugar, demostremos que la restricción de cualquier elemento de $\mathcal{G}$ a un ordinal es también un elemento de $\mathcal{G}$. Sean $H \colon \gamma \to A$ un elemento de $\mathcal{G}$ y $\delta < \gamma$, se tiene que $\delta \subseteq \gamma$ y, para todo $\alpha < \delta$, se cumple $\alpha \subseteq \delta$, de donde

$$(H|_\delta)|_\alpha = H|_\alpha,$$

así, tenemos que

$$H|_\delta(\alpha) = H(\alpha) = F(H|_\alpha) = F((H|_\delta)|_\alpha)$$

y, como α fue arbitrario, se tiene que $H|_\delta \in \mathcal{G}$. Por otro lado, demostremos que si $H_1, H_2 \in \mathcal{G}$ son tales que $\operatorname{dom}(H_1) = \operatorname{dom}(H_2)$, entonces $H_1 = H_2$. En efecto, tomemos $\beta = \operatorname{dom}(H_1)$, por reducción al absurdo, supongamos que existe $\alpha \in \beta$ tal que $H_1(\alpha) \neq H_2(\alpha)$, es más, podemos tomar α como el mínimo elemento de β tal que cumpla dicha condición. Por esta razón, se tiene que $H_1(\gamma) = H_2(\gamma)$ para todo $\gamma < \alpha$, es decir, $H_1|_\alpha = H_2|_\alpha$, por lo tanto,

$$H_1(\alpha) = F(H_1|_\alpha) = F(H_2|_\alpha) = H_2(\alpha),$$

lo cual es contradictorio.

Notemos que $\mathcal{G}$ es no vacío pues $\varnothing\colon 0 \to A$ es un elemento de $\mathcal{G}$; con esto, tomemos

$$G = \bigcup_{H \in \mathcal{G}} H.$$

Veamos que G es una función de $\operatorname{dom}(G)$ en A, notemos que, para todo $H \in \mathcal{G}$,

$$H \subseteq \beta \times A \subseteq \mathbf{OR} \times A,$$

por lo tanto

$$G = \bigcup_{H \in \mathcal{G}} H \subseteq \mathbf{OR} \times A.$$

Con esto, $G \subseteq \operatorname{dom}(G) \times A$; además, sean $(\alpha, x) \in G$ y $(\alpha, y) \in G$, vamos a demostrar que $x = y$. Como $(\alpha, x) \in G$ y $(\alpha, y) \in G$, existen $H_1 \in \mathcal{G}$ y $H_2 \in \mathcal{G}$ tales que $(\alpha, x) \in H_1$ y $(\alpha, y) \in H_2$; con esto, existen $\beta_1, \beta_2 \in \mathbf{OR}$ tales que $\beta_1 = \operatorname{dom}(H_1)$ y $\beta_2 = \operatorname{dom}(H_2)$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\beta_1 \leq \beta_2$, por lo tanto, $\beta_1 \subseteq \beta_2$, así, tenemos que $H_2|_{\beta_1} \in \mathcal{G}$, además, $\operatorname{dom}(H_2|_{\beta_1}) = \beta_1$ y, por lo tanto, ya que sus dominios son iguales y al ser elementos de $\mathcal{G}$, tenemos que $H_2|_{\beta_1} = H_1$, por ende, $(\alpha, x) \in H_2$ pero como H_2 es función, tenemos que $x = y$, de esta forma

$$G\colon \operatorname{dom}(G) \to A$$

es una función.

Ahora, vamos a demostrar que, para todo $\alpha \in \operatorname{dom}(G)$, $G(\alpha) = F(G|_\alpha)$. Sea $\alpha \in \operatorname{dom}(G)$, tenemos que existe $H \in \mathcal{G}$ tal que $\alpha \in \operatorname{dom}(H)$. Además, dado que $H \subseteq G$, tenemos que $H|_\alpha \subseteq G|_\alpha$ y $H|_{\alpha+1} \subseteq G|_{\alpha+1}$. Demostremos que $G|_\alpha \subseteq H|_\alpha$ y $G|_{\alpha+1} \subseteq H|_{\alpha+1}$. Sea $(\beta, x) \in G|_\alpha$, tenemos que $\beta < \alpha$; con esto, $\beta \in \operatorname{dom}(H|_\alpha)$, por lo tanto, existe $z \in A$ tal que $(\beta, z) \in H|_{\alpha}$. Además, dado que $H|_{\alpha} \subseteq G|_{\alpha}$, tenemos que $(\beta, z) \in G|_{\alpha}$ y, como $G|_{\alpha}$ es función, $z = x$ y, por ende, $G|_{\alpha} \subseteq H|_{\alpha}$. Análogamente, tenemos que $G|_{\alpha+1} \subseteq H|_{\alpha+1}$. Así, se tiene que $H|_{\alpha} = G|_{\alpha}$ y $H|_{\alpha+1} = G|_{\alpha+1}$; con esto y, como $\alpha < \alpha + 1$, se obtiene

$$H(\alpha) = H|_{\alpha+1}(\alpha) = G|_{\alpha+1}(\alpha) = G(\alpha).$$

Además, como $H \in \mathcal{G}$, se tiene

$$G(\alpha) = H(\alpha) = F(H|_{\alpha}) = F(G|_{\alpha}).$$

Por otro lado, demostremos que $\operatorname{dom}(G) = \mathbf{OR}$. Por absurdo, supongamos que $\mathbf{OR}$ no es subconjunto de $\operatorname{dom}(G)$, por lo tanto, $\mathbf{OR} \setminus \operatorname{dom}(G)$ es no vacío; además, $\mathbf{OR} \setminus \operatorname{dom}(G) \subseteq \mathbf{OR}$. De la Proposición 2.14, tenemos que $\mathbf{OR} \setminus \operatorname{dom}(G)$ posee elemento mínimo β. Notemos que, para todo $\alpha < \beta$, $\alpha \in \operatorname{dom}(G)$, pues de no ser así, existiría un ordinal $\alpha < \beta$ tal que $\alpha \notin \operatorname{dom}(G)$, lo cual es contradictorio, pues β es elemento mínimo de $\mathbf{OR} \setminus \operatorname{dom}(G)$. Además, demostremos que para todo ordinal $\gamma > \beta$ se tiene que $\gamma \notin \operatorname{dom}(G)$. En efecto, por absurdo, supongamos que existe $\gamma > \beta$ tal que

$$\gamma \in \operatorname{dom}(G) = \bigcup_{H \in \mathcal{G}} \operatorname{dom}(H),$$

de donde, existiría $H \in \mathcal{G}$ tal que $\gamma \in \operatorname{dom}(H)$ y, por lo tanto, $\beta \in \operatorname{dom}(H) \subseteq \operatorname{dom}(G)$, lo cual es imposible y, por ende, $\operatorname{dom}(G) = \beta$. Con lo cual, $G\colon \beta \to A$ es un elemento de $\mathcal{F}$. Ahora, definamos

$$\widetilde{G} = G \cup \{(\beta, F(G))\}.$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \operatorname{dom}(\widetilde{G}) &= \operatorname{dom}(G) \cup \{\beta\} \\ &= \beta \cup \{\beta\} \\ &= \beta^{+}, \end{aligned}$$

además, dado que $\beta \notin \operatorname{dom}(G)$, $F(G) \in A$ y G es una función de $\alpha \in A$, entonces $\widetilde{G}\colon \beta^{+} \to A$ es una función. Por otro lado, sea $\alpha < \beta^{+}$, se tienen dos casos:

a) Si $\alpha < \beta$, como $G|_{\alpha} = \widetilde{G}|_{\alpha}$, tenemos que

$$\widetilde{G}(\alpha) = G(\alpha) = F(G|_{\alpha}) = F(\widetilde{G}|_{\alpha});$$

b) Si $\alpha = \beta$, notemos que, $G = \widetilde{G}|_{\beta}$; con esto

$$\widetilde{G}(\alpha) = F(G) = F(\widetilde{G}|_{\beta}) = F(\widetilde{G}|_{\alpha}).$$

De aquí, $\widetilde{G} \in \mathcal{G}$, así $\widetilde{G} \subseteq G$, lo cual es contradictorio. Así, se concluye que $\mathbf{OR} \subseteq \operatorname{dom}(G)$.

Finalmente, vamos a demostrar que G es única, para ello supongamos que existe $\widetilde{G}\colon \mathbf{OR} \to A$ tal que $\widetilde{G}(\alpha) = F(\widetilde{G}|_{\alpha})$ para todo $\alpha \in \mathbf{OR}$. Tomemos

$$B = \{\beta \in \mathbf{OR} : G(\beta) = \widetilde{G}(\beta)\},$$

si $B \neq \mathbf{OR}$, análogamente a lo hecho para demostrar que $\mathbf{OR} = \operatorname{dom}(G)$, tenemos que existe α elemento mínimo de $\mathbf{OR} \setminus B$, por ende, se tiene que para todo $\beta < \alpha$, $\beta \in B$, así $G(\beta) = \widetilde{G}(\beta)$, para todo $\beta \in \alpha$. Por lo tanto, $G|_{\alpha} = \widetilde{G}|\alpha$, de donde, $F(G|_{\alpha}) = F(\widetilde{G}|_{\alpha})$ y, con ello, se tendría que $G(\alpha) = \widetilde{G}(\alpha)$, teniendo que, $\alpha \in B$, lo cual es contradictorio, es decir, $G(\beta) = \widetilde{G}(\beta)$ para todo $\beta \in \mathbf{OR}$, por ende, la función G es única. □

Usando el teorema anterior, vamos a enunciar otra versión del Teorema de Recursión Transfinita. Esta versión se asemeja más al Teorema de Recursión Finita enunciado en la sección anterior; además, será la versión con la que trabajaremos en el presente trabajo y nos referiremos al mismo como Teorema de Recursión Transfinita, sin pérdida de generalidad.

TEOREMA 2.21. *(Recursión Transfinita, Segunda Versión). Sean A una clase, $c \in E$ fijo, $F_1\colon A \to A$ una función, $\mathcal{F} = \bigcup_{\alpha \in \boldsymbol{OR}} A^{\alpha}$ la clase de todas las funciones que van de un número ordinal a A y $F_2\colon \mathcal{F} \to A$ otra función. Entonces existe una única función $G\colon \boldsymbol{OR} \to A$ tal que:*

(i) $G(0) = c$.

(ii) $G(\alpha + 1) = F_1(G(\alpha))$.

(iii) $G(\lambda) = F_2(G|_{\lambda})$, *para todo ordinal límite* $\lambda \neq 0$.

Demostración. Definamos

$$
\begin{aligned}
F\colon \mathcal{F} &\longrightarrow A \\
g &\longmapsto F(g) = \begin{cases} c & \text{si } \operatorname{dom}(g) = 0, \\ F_1(g(\alpha)) & \text{si } \operatorname{dom}(g) \text{ es un sucesor y } \operatorname{dom}(g) = \alpha^+, \\ F_2(g) & \text{si } \operatorname{dom}(g) \text{ es un ordinal límite distinto de cero.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Por el teorema anterior, existe $G\colon \mathbf{OR} \to A$ tal que para todo $\alpha \in \mathbf{OR}$, $G(\alpha) = F(G|_\alpha)$. Así, se tiene que:

(i) $G(0) = F(G|_0) = c$.

(ii) Para $\alpha \in \mathbf{OR}$,

$$
\begin{aligned}
G(\alpha+1) &= F(G|_{\alpha^+}) = F_1(G|_{\alpha+1}) \\
&= F_1(G(\alpha)).
\end{aligned}
$$

(iii) Para $\lambda \neq 0$ ordinal límite

$$G(\lambda) = F(G|_\lambda) = F_2(G|_\lambda).$$

Y con esto tendríamos que, en efecto, la función G cumple lo requerido.

Ahora, demostremos que la función antes definida es única, para ello, supongamos que existe $\widetilde{G}\colon \mathbf{OR} \to A$ que cumple las propiedades anteriores. Definamos

$$\mathcal{G} = \{\alpha \in \mathbf{OR} : G(\alpha) = \widetilde{G}(\alpha)\}$$

y, usando Inducción Transfinita, demostremos que $\alpha \in \mathcal{G}$ para todo $\alpha \in \mathbf{OR}$.

- Notemos que $0 \in \mathcal{G}$ pues, por la condición (i), tenemos que

$$G(0) = c = \widetilde{G}(0).$$

- Ahora, supongamos que $\alpha \in \mathcal{G}$, es decir, $G(\alpha) = \widetilde{G}(\alpha)$, vamos a demostrar que $\alpha + 1 \in \mathcal{G}$. De la segunda condición, tenemos que

$$G(\alpha+1) = F_1(G(\alpha)) = F_1(\widetilde{G}(\alpha)) = \widetilde{G}(\alpha+1)$$

  y, por ende, $\alpha + 1 \in \mathcal{G}$.

- Ahora, sea $\lambda \neq 0$ un ordinal límite, supongamos que $\beta \in \mathcal{G}$ para todo $\beta < \lambda$, vamos a demostrar que $\lambda \in \mathcal{G}$. De la segunda y tercera condición, tenemos

que

$$G(\lambda) = F_2(G|_\lambda) = F_2(\widetilde{G}|_\lambda) = \widetilde{G}(\lambda).$$

Con esto, hemos demostrado lo deseado. $\square$

2.4.1. Aritmética Ordinal

Usando el Teorema de Recursión Transfinita, definiremos las operaciones de adición, multiplicación y exponenciación de números ordinales. Estas definiciones no son más que generalizaciones a las correspondientes definiciones para números naturales. Antes de introducir dichas definiciones, vamos a demostrar que toda familia de números ordinales tiene supremo.

PROPOSICIÓN 2.22. *Sea $\mathcal{A}$ un conjunto de números ordinales, entonces*

$$\sup(\mathcal{A}) = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} \alpha.$$

Demostración. Sea $\beta \in \mathcal{A}$, como $\beta \subseteq \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} \alpha$ y, por la Proposición 2.17, $\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} \alpha$ es un ordinal, entonces $\beta < \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} \alpha$, con ello, basta demostrar que $\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} \alpha$ es la menor cota. Sea $\gamma \in \mathbf{OR}$ tal que $\alpha < \gamma$ para todo $\alpha \in \mathcal{A}$, vamos a demostrar que $\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} \alpha < \gamma$. Consideremos $\lambda \in \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} \alpha$, así existe $\beta \in \mathcal{A}$ tal que $\lambda \in \beta$ y, como $\beta < \gamma$, tenemos que $\lambda \in \gamma$. Con esto, hemos demostrado que $\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} \alpha \subseteq \gamma$, es decir, $\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} \alpha < \gamma$ y, por ende, $\sup(\mathcal{A}) = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} \alpha$. $\square$

OBSERVACIÓN. Análogamente a lo hecho antes para el supremo, se puede demostrar que $\text{ínf}(\mathcal{A}) = \bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}} \alpha$.

Ahora, definamos las operaciones antes mencionadas para números ordinales.

DEFINICIÓN 2.22. *(Adición de Números Ordinales). Para todo ordinal β, definimos*

(i) $\beta + 0 = \beta$;

(ii) $\beta + (\alpha + 1) = (\beta + \alpha) + 1$, *para todo ordinal* α;

(iii) $\beta + \alpha = \sup\{\beta + \gamma : \gamma < \alpha\} = \bigcup_{\gamma<\alpha} (\beta + \gamma)$ *para todo ordinal límite* $\alpha \neq 0$.

DEFINICIÓN 2.23. *(Multiplicación de Números Ordinales). Para todo ordinal β, definimos:*

(i) $\beta \cdot 0 = 0$;

(ii) $\beta \cdot (\alpha + 1) = \beta \cdot \alpha + \beta$, *para todo ordinal* α;

(iii) $\beta \cdot \alpha = \sup\{\beta \cdot \gamma : \gamma < \alpha\} = \bigcup_{\gamma<\alpha} (\beta \cdot \gamma)$ *para todo ordinal límite* $\alpha \neq 0$.

DEFINICIÓN 2.24. *(Exponenciación de Números Ordinales). Para todo ordinal β, definimos*

(i) $\beta^0 = 1$;

(ii) $\beta^{\alpha+1} = \beta^\alpha \cdot \beta$, *para todo ordinal* α;

(iii) $\beta^\alpha = \sup\{\beta^\gamma : \gamma < \alpha\} = \bigcup_{\gamma<\alpha} \beta^\gamma$ *para todo* $\alpha \neq 0$ *ordinal límite.*

Con estas definiciones, se tiene que las operaciones cumplen propiedades semejantes a las de los números naturales las cuales pueden encontrarse, al igual que sus demostraciones, en [10, Cap. 6].

OBSERVACIÓN. Sin embargo a lo sucedido con los números naturales, la suma y multiplicación de números ordinales son operaciones no conmutativas, para ello presentamos los siguientes contraejemplos.

- Notemos que $1 + \omega \neq \omega + 1$, pues

$$\begin{aligned} 1 + \omega &= \sup\{1 + \alpha : \alpha < \omega\} \\ &= \sup\{1 + n : n \in \omega\} \\ &= \omega. \end{aligned}$$

  Por otro lado, $\omega + 1 = \omega \cup \{\omega\}$ y, por ende, la suma es no conmutativa.

- Ahora, veamos que $2 \cdot \omega \neq \omega \cdot 2$. En efecto,

$$\begin{aligned} 2 \cdot \omega &= \sup\{2 \cdot \alpha : \alpha < \omega\} \\ &= \sup\{2 \cdot n : n \in \omega\} \\ &= \omega, \end{aligned}$$

  mientras que $\omega \cdot 2 = \omega + \omega$, teniendo lo deseado.

2.5. Cardinalidad

Desde el punto de vista de la Teoría de Conjuntos, la pregunta más básica acerca de conjuntos está relacionada con el número de elementos de los mismos. En esta sección, analizaremos esta interrogante de una manera no tan detallada.

DEFINICIÓN 2.25. *Sean A y B dos conjuntos, decimos que:*

- *A y B tienen* igual cardinalidad *si existe una función biyectiva de A sobre B, cual denotamos por $|A| = |B|$.*
- *La* cardinalidad de A es menor o igual que la cardinalidad de B *si existe una función inyectiva de A en B y lo denotamos por $|A| \leq |B|$.*

OBSERVACIÓN. Análogamente, tenemos que $|A| \leq |B|$ si existe una función sobreyectiva de B en A.

Con estos conceptos, tenemos la siguiente definición acerca de la finitud de conjuntos.

DEFINICIÓN 2.26. *Un conjunto A, se dice:*

- finito *si existe $n \in \omega$ tal que $|A| = |n|$ y decimos que A tiene n elementos, notándolo $|A| = n$;*
- infinito *si no es finito;*
- numerable *si $|A| = |\omega|$.*

Dados dos conjuntos A y B se puede definir la relación dada por $|A| \leq |B|$. Teniendo en cuenta las definiciones anteriores, vamos a demostrar que dicha relación es reflexiva, antisimétrica y transitiva, es decir, es una relación de orden.

PROPOSICIÓN 2.23. *Sean A, B, C conjuntos se tiene:*

(i) $|A| = |A|$;

(ii) $|A| = |B|$, *implica que* $|B| = |A|$;

(iii) $|A| = |B|$ y $|B| = |C|$, *implican* $|A| = |C|$;

(iv) $A \subseteq B$, *implica* $|A| \leq |B|$;

(v) $|A| \leq |B|$ y $|B| \leq |C|$, *entonces* $|A| \leq |C|$.

Demostración.

(i) Tenemos que

$$\begin{aligned} Id\colon A &\longrightarrow A \\ x &\longmapsto Id(x) = x, \end{aligned}$$

la función identidad es una función biyectiva, por lo tanto, $|A| = |A|$.

(ii) Supongamos que $|A| = |B|$, por lo tanto, existe $f\colon A \to B$ biyectiva, así, existe $f^{-1}\colon B \to A$ también inyectiva y, por lo tanto, concluimos que $|B| = |A|$.

(iii) Supongamos que $|A| = |B|$ y $|B| = |C|$, así, existen $f\colon A \to B$ y $g\colon B \to C$ funciones biyectivas. Tomando $g \circ f\colon A \to C$, al ser composición de funciones biyectivas, tenemos que $g \circ f$ también lo es y, por ende, $|A| = |C|$.

(iv) Supongamos que $A \subseteq B$, vamos a demostrar que existe $f\colon A \to B$ una función inyectiva. Tomando f tal que $f(x) = x$ para todo $x \in A$, se tiene lo deseado, por lo tanto, $|A| \leq |B|$.

(v) Supongamos que $|A| \leq |B|$ y $|B| \leq |C|$; con esto, existen $f\colon A \to B$ y $g\colon B \to C$ dos funciones inyectivas. Tomando $g \circ f\colon A \to C$, al ser composición de dos funciones inyectivas, tenemos que $g \circ f$ también es inyectiva y, por lo tanto, $|A| \leq |C|$. □

OBSERVACIÓN. Notemos que, acabamos de demostrar que la relación dada en la proposición anterior es una relación de orden.

Vamos a demostrar el Teorema de Cantor-Bernstein, un teorema vital para la cardinalidad de conjuntos, para ello primero demostraremos el siguiente lema:

LEMA 2.24. *Sean A, B, C conjuntos. Si $A \subseteq B \subseteq C$ y $|A| = |C|$, entonces $|B| = |C|$.*

Demostración. Supongamos que $A \subseteq B \subseteq C$ y $|A| = |C|$; con esto, existe $f\colon C \to A$ una biyección. Usando el Teorema de Recursión Finita, vamos a definir dos sucesiones de conjuntos:

$$C_0 = C, \quad B_0 = B,$$

y, para $n \in \omega \setminus \{0\}$, tomemos

$$C_{n+1} = f(C_n), \quad B_{n+1} = f(B_n).$$

Con esto, de la forma que fueron definidas las sucesiones tenemos que $A \subseteq B_0 \subseteq C_0$. Usando Inducción Finita, demostremos que $C_{n+1} \subseteq C_n$ para todo $n \in \omega$.

- Notemos que $C_1 \subseteq C_0$, pues

$$C_1 = f(C_0) = f(C) \subseteq C = C_0.$$

- Ahora, supongamos que $C_{n+1} \subseteq C_n$, vamos a demostrar que $C_{n+2} \subseteq C_{n+1}$. De la hipótesis, tenemos que $f(C_{n+1}) \subseteq f(C_n)$, por lo tanto, $C_{n+2} \subseteq C_{n+1}$ como deseábamos.

Ahora, por lo hecho antes, para todo $n \in \omega$ tomemos

$$D_n = C_n \setminus B_n,$$

y

$$D = \bigcup_{n\in\omega} D_n, \quad E = C \setminus D.$$

Como $C_{n+1} \subseteq C_n$ para todo $n \in \omega$, tenemos que $f(D_n) = D_{n+1}$ para todo $n \in \omega$; tenemos que

$$f(D) = \bigcup_{n\in\omega} D_n.$$

Con esto, estamos listos para definir $g\colon C \to B$ una biyección, para ello tomemos a su ley de asignación como

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in D, \\ x & \text{si } x \in E. \end{cases}$$

Se tiene que g es una función inyectiva pues $g|_D$ y $g|_E$ lo son y sus imágenes son disjuntas. Con esto, tenemos que g es una función biyectiva de C en $f(D) \cup E = B$, teniendo así $|B| = |C|$. □

Teorema 2.25. *(Cantor-Bernstein). Sean A y B dos conjuntos. Si $|A| \leq |B|$ y $|B| \leq |A|$, entonces $|A| = |B|$.*

Demostración. Supongamos que $|A| \leq |B|$ y $|B| \leq |A|$, por lo tanto, existen $f\colon A \to B$ y $g\colon B \to A$ dos funciones inyectivas. Vamos a demostrar que existe una función biyectiva de A sobre B. En primer lugar, tomemos $g \circ f\colon A \to A$, una función inyectiva pues es composición de funciones inyectivas. Por otro lado, tenemos que $g(f(A)) \subseteq g(B) \subseteq A$; más aún, como f y g son inyectivas, tenemos que $|g(f(A))| = |A|$ y $|g(B)| = |B|$; con esto y en virtud del Lema 2.24, tenemos que $|A| = |B|$. □

A partir del Teorema de Cantor-Bernstein, se derivan otras proposiciones que usaremos en los capítulos posteriores.

PROPOSICIÓN 2.26. $|\omega \times \omega| = |\omega|$.

Demostración. Para demostrar lo deseado, se debe demostrar que existe una función biyectiva de $\omega \times \omega$ en ω. Para esto, se considera la siguiente función:

$$\begin{aligned} f\colon \omega \times \omega &\longrightarrow \omega \\ (m,n) &\longmapsto f((m,n)) = \frac{(m+n)^2 + 3m + n}{2}. \end{aligned}$$

Los detalles de que f es biyectiva pueden ser encontrados en [9]. □

OBSERVACIÓN. La función considerada en la demostración anterior, es denominada Zig-zag de Cantor, la razón de este nombre se entenderá en el siguiente esquema. Algunos valores de la función están dados por:

$$\begin{array}{llll} f(0,0) = 0, & f(0,1) = 1, & f(0,2) = 3, & f(0,3) = 6 \\ f(1,0) = 2, & f(1,1) = 4, & f(1,2) = 7, & \quad\dots \\ f(2,0) = 5, & f(2,1) = 8, & \quad\dots & \\ f(3,0) = 9, & \quad\dots & & \end{array}$$

Con esto, podemos ver que la función va "enumerando" los pares de $\omega \times \omega$ con ω.

$$\begin{tikzcd}
(0,0) \arrow[r] & (0,1) \arrow[dl] & (0,2) \arrow[dl] & (0,3) \arrow[dl] \\
(1,0) \arrow[urr] & (1,1) \arrow[dl] & (1,2) \arrow[dl] & \cdots \\
(2,0) \arrow[uurrr] & (2,1) \arrow[dl] & (2,2) & \cdots \\
(3,0) & \cdots & \cdots & \cdots
\end{tikzcd}$$

PROPOSICIÓN 2.27. *Sea $\{A_n\}_{n\in\omega}$ una familia numerable de conjuntos numerables. Entonces,*

$$A = \bigcup_{n\in\omega} A_n$$

es numerable.

Demostración. Para todo $n \in \omega$, definamos

$$\mathcal{A}_n = \{f : \omega \to A_n : f \text{ es biyectiva}\}.$$

Como A_n es numerable, $\mathcal{A}_n \neq \varnothing$ para todo $n \in \omega$; con esto, en virtud del Axioma de Elección, existe una sucesión $(f_n)_{n\in\omega}$ de funciones tales que $f_n \in \mathcal{A}_n$ para todo $n \in \omega$. Tomemos

$$\begin{aligned} \varphi : \omega \times \omega &\longrightarrow A \\ (k, m) &\longmapsto \varphi(k, m) = f_k(m). \end{aligned}$$

Por como se definió φ, es una función biyectiva; con esto, $|A| \leq |\omega \times \omega|$ pero de la proposición anterior, tenemos que $|A| \leq |\omega|$. Finalmente, como $A_n \subseteq A$ para todo $n \in \omega$, tenemos que $|\omega| = |A_n| \leq |A|$ y junto con el Teorema de Cantor-Bernstein, concluimos que $|A| = |\omega|$, como deseábamos. $\square$

PROPOSICIÓN 2.28. *Sean A un conjunto numerable, B, C dos conjuntos y $f : C \to B$ una función. Si $A \subseteq C$, entonces $|f(A)| \leq |\omega|$.*

Demostración. Definamos

$$\begin{aligned} \varphi : A &\longrightarrow f(A) \\ x &\longmapsto \varphi(x) = f(x), \end{aligned}$$

por como está definida φ, la función es sobreyectiva, por lo tanto, $|f(A)| \leq |A|$; además, como A es numerable, se sigue que $|f(A)| \leq |\omega|$. $\square$

Usando cardinalidad de conjuntos tenemos más resultados importantes acerca de los números ordinales como se muestran a continuación.

TEOREMA 2.29. *Sea $\alpha \neq 0$ un ordinal límite numerable, entonces existe una sucesión $(\alpha_n)_{n\in\omega}$ tal que $\alpha_n < \alpha_{n+1}$ para todo $n \in \omega$ y $\alpha = \sup\{\alpha_n : n \in \omega\}$.*

Demostración. Como $\alpha \neq 0$, tenemos que $\alpha = \{\beta \in \mathbf{OR} : \beta < \alpha\}$ y, por hipótesis, es numerable, por tanto, tomamos $\alpha = \{\beta_n : n \in \omega\}$. Mediante Recursión Finita definamos la sucesión $(\alpha_n)_{n\in\omega}$, tomando α_0 tal que $\beta_0 < \alpha_0 < \alpha$. Este ordinal α_0 existe pues α es un ordinal límite. Ahora, supongamos que $\alpha_n < \alpha$ ya está definido, tomamos α_{n+1} tal que $\alpha_n < \alpha_{n+1} < \alpha$ y $\beta_{n+1} < \alpha_{n+1} < \alpha$. Con esto, tenemos que

$$\alpha = \sup\{\beta_n : n \in \omega\} \leq \sup\{\alpha_n : n \in \omega\} \leq \alpha.$$

Por lo tanto concluimos, $\sup\{\alpha_n : n \in \omega\}$. $\square$

Análogamente, así como categorizamos a los ordinales en finitos, transfinitos, sucesores y límites, al estudiar cardinalidad surge una idea esencial, el categorizar a los ordinales de acuerdo a su cardinalidad, con esto en mente, a todos los ordinales numerables los vamos a denotar por ω_1, es decir,

$$\omega_1 = \{\alpha \in \mathbf{OR} : \alpha \text{ es numerable}\}.$$

TEOREMA 2.30. ω_1 *es un conjunto no numerable.*

Demostración. Por reducción al absurdo, supongamos que ω_1 es numerable, con esto podemos tomar $\omega_1 = \{\alpha_n : n \in \omega\}$, por lo tanto, tomando

$$\alpha = \left(\bigcup_{n\in\omega} \alpha_n\right) + 1 = \bigcup_{n\in\omega} (\alpha_n + 1) = \sup\{\alpha_n + 1 : \alpha_n \in \omega_1\},$$

tenemos que α es un ordinal numerable tal que $\alpha_n < \alpha$ para todo $\alpha_n \in \omega_1$, lo cual no es posible, por lo tanto ω_1 es no numerable. □

OBSERVACIÓN. Se puede demostrar que ω es el conjunto infinito "más pequeño". Por esta razón, lo notaremos $|\omega| = \aleph_0$. El teorema anterior, nos dice que ω_1 es no numerable, por lo tanto, al ser infinito se tiene que $\aleph_0 < |\omega_1|$. Es más, se puede demostrar que ω_1 es el conjunto infinito "inmediato más grande" a ω, esto lo notamos por $|\omega_1| = \aleph_1$. Por otro lado, ampliaremos la definición de conjunto numerable y diremos que un conjunto A es *numerable* si $|A| \leq \aleph_0$.

Capítulo 3

Topología

En el presente capítulo se abordarán algunos conceptos y propiedades básicas de espacios topológicos, resultados fundamentales sobre compacidad, una breve revisión sobre los aspectos básicos de la topología producto, pues, más adelante, se darán varios ejemplos y proposiciones importantes usando la topología producto. Finalmente, se hará una revisión breve, pero detallada de espacios métricos. Las referencias principales para este capítulo son [14, 17, 13].

3.1. Conceptos Topológicos

DEFINICIÓN 3.1. *(Topología). Una* topología *sobre un conjunto E es una colección τ de subconjuntos de E que satisface:*

(i) $\varnothing$ *y* E *pertenecen a* τ*;*

(ii) la unión arbitraria de elementos de τ *pertenece a* τ*;*

(iii) la intersección finita de elementos de τ *pertenece a* τ*.*

DEFINICIÓN 3.2. *Sean E un conjunto y τ una topología sobre E.*

- *A los elementos de una topología se les conoce como abiertos de E, es decir, si $A \in \tau$, A es un* abierto *de E.*
- *Un conjunto G se dice* cerrado *si su complemento en E es abierto, es decir, si $E \setminus G$ es abierto.*
- *A la pareja (E, τ) se le denomina* espacio topológico*; abreviaremos E para un espacio topológico si no hay confusión acerca de la topología τ.*

- *Sean τ_1 y τ_2 dos topologías sobre E, diremos que τ_1 es* menos fina *que τ_2 si y solo si $\tau_1 \subseteq \tau_2$*

- *Sea $F \subseteq E$ no vacío. Decimos que $(F, \tau|_F)$ es un* subespacio topológico *de E, donde*
$$\tau|_F = \{A \cap F : A \in \tau\}.$$
Si no existe confusión sobre la topología τ, diremos únicamente que F es un subespacio topológico de E. Análogamente, decimos que G es un cerrado de F si existe H cerrado de E, tal que $G = H \cap F$.

Ahora, sea A un subconjunto de un espacio topológico (E, τ). Una pregunta natural es: si A no es cerrado, ¿qué le hace falta a A para que lo sea?, ¿podemos cerrarlo de alguna manera? La respuesta es sí, sí podemos cerrarlo ya que a A le hace falta algunos puntos de E para que sea cerrado. Con esto en mente, tenemos la siguiente definición.

DEFINICIÓN 3.3. *Sean (E, τ) un espacio topológico y $A \subseteq E$. La* clausura *de A en E, notada $\overline{A}$, es el cerrado más pequeño que contiene a A.*

Con esto, se tiene que un subconjunto A de un espacio topológico E es cerrado si y solo si $\overline{A} = A$.

Por el contrario, si queremos que un conjunto A sea abierto, tenemos que quitar ciertos puntos del mismo. A partir de ello, tenemos la siguiente definición:

DEFINICIÓN 3.4. *Sean (E, τ) un espacio topológico y $A \subseteq E$. El* interior *de A en E, denotado* $\operatorname{int}(A)$*, es el abierto más grande contenido en A.*

Análogamente, tenemos que un subconjunto A de un espacio topológico es abierto si y solo si $A = \operatorname{int}(A)$.

Por otro lado, dada una topología, para facilitar su uso, se busca ciertos abiertos que puedan describir a todos los elementos de la misma, al conjunto de dichos abiertos se le conoce como base de la topología.

DEFINICIÓN 3.5. *Sean (E, τ) un espacio topológico y $x \in E$. Decimos que $\mathcal{B}$ es una* base para la topología *de τ si todo abierto se puede expresar como una unión de elementos de $\mathcal{B}$. A los elementos de $\mathcal{B}$, les denominamos* abiertos básicos.

Vamos a presentar varios resultados sobre las definiciones antes presentadas, las demostraciones de estas se obtienen directamente de la definición y se pueden hallar en [14, 19].

PROPOSICIÓN 3.1. *Sean (E, τ) un espacio topológico, A y B dos subconjuntos de E. Entonces:*

(i) $\operatorname{int}(A) \subseteq A$*;*

(ii) $A \subseteq \overline{A}$*;*

(iii) si $A \subseteq B$*, entonces* $\overline{A} \subseteq \overline{B}$*;*

(iv) si $A \subseteq B$*, entonces* $\operatorname{int}(A) \subseteq \operatorname{int}(B)$*;*

(v) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$*;*

(vi) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$*.*

Demostración. Ver [14, 19, Cap. 2]. □

De manera intuitiva, los conjuntos abiertos en una topología intentan generar la idea de proximidad entre puntos, por esta razón se llamará vecindad.

DEFINICIÓN 3.6. *Sean (E, τ) un espacio topológico y $x \in E$. Una* vecindad abierta *de x es un conjunto U el cual contiene un abierto V tal que $x \in V$.*

OBSERVACIÓN. Sin pérdida de generalidad, podemos decir que una vecindad abierta de x es un conjunto $U \in \tau$ tal que $x \in U$. Por esta razón, de aquí en adelante, cuando nos refiramos a vecindad de un punto, nos referiremos a un abierto que contiene el punto.

Muchas de las proposiciones posteriores se las puede "simplificar" usando abiertos básicos en lugar de abiertos de una manera general. Con esto en mente, introduciremos varios conceptos que, para su definición, se puede usar el concepto de vecindades y abiertos básicos.

DEFINICIÓN 3.7. *(Espacio segundo contable). Un espacio topológico (E, τ) es* segundo contable *si posee una base de topología numerable.*

Algunos ejemplos de espacios segundos contables son:

- $\mathbb{R}$ con su topología usual es un espacio topológico segundo contable. Más aún, todo espacio métrico separable es un espacio topológico segundo contable (esto lo demostraremos más adelante).

- Dado E un conjunto numerable, E dotado de la topología discreta es un espacio segundo contable.

- $\mathbb{R}$ con la topología

$$\tau = \{A \subseteq \mathbb{R} : A^c \text{ es finito }\} \cup \{\varnothing\},$$

  denominada topología cofinita, no es un espacio segundo contable.

A continuación se presenta una definición que será fundamental a lo largo del trabajo.

DEFINICIÓN 3.8. *Sean (E, τ) un espacio topológico y $A \subseteq E$. Un* punto límite *de A es un punto $x \in E$ tal que para cada vecindad V de x, se tiene que*

$$(V \setminus \{x\}) \cap A \neq \varnothing.$$

DEFINICIÓN 3.9. *Sean (E, τ) un espacio topológico y $A \subseteq E$. A un punto $x \in A$ se le denomina* punto interior *de A si existe un abierto U tal que*

$$x \in U \subseteq A.$$

DEFINICIÓN 3.10. *Sean (E, τ) un espacio topológico y $A \subseteq E$. A un punto $x \in A$ se le denomina* punto aislado *de A si existe una vecindad U tal que*

$$U \cap A = \{x\}.$$

OBSERVACIÓN. De manera directa se tiene que la definición de punto aislado es la negación de la definición de punto límite, es decir, en un espacio topológico todo punto de un conjunto A o es un punto límite de A o es un punto aislado de A.

DEFINICIÓN 3.11. *Sean (E, τ) un espacio topológico y $A \subseteq E$. Se dice que A es un* conjunto discreto *si todo punto de A es un punto aislado de A; es decir, para todo $x \in A$, existe una vecindad U tal que*

$$U \cap A = \{x\}.$$

PROPOSICIÓN 3.2. *Sean (E, τ) un espacio topológico y $A \subseteq E$. Se tiene que:*

(i) *$x \in \overline{A}$ si y solo si para toda vecindad V de x, se tiene que $V \cap A \neq \varnothing$;*

(ii) *$x \in \operatorname{int}(A)$ si y solo si existe una vecindad de x tal que $V \subseteq A$;*

(iii) *A es abierto si y solo si todo punto de A es un punto interior de A.*

Demostración.

(i) Para la primera implicación usaremos el contrarrecíproco, es decir, supongamos que existe una vecindad V de x tal que $V \cap A = \varnothing$; con esto, $A \subseteq V^c$. Por otro lado, como V es abierto, tenemos que V^c es cerrado y, por lo tanto, como $\overline{A}$ es el cerrado más pequeño que contiene a A se tiene que $\overline{A} \subseteq V^c$. Como $x \notin V^c$, concluimos que $x \notin \overline{A}$.

Para la otra implicación, nuevamente por el contrarrecíproco, supongamos que $x \notin \overline{A}$, es decir, $x \in \overline{A}^c$. De esta forma, tenemos que $\overline{A}^c$ es una vecindad abierta de x tal que

$$\overline{A}^c \cap A \subseteq A^c \cap A = \varnothing,$$

por lo tanto, tenemos que $\overline{A}^c \cap A = \varnothing$.

(ii) Notemos que la primera implicación es inmediata. En efecto, supongamos que $x \in \operatorname{int}(A)$, como $\operatorname{int}(A)$ es abierto, es una vecindad de x y, por la Proposición 3.1, se tiene que $\operatorname{int}(A) \subseteq A$.

Por otro lado, supongamos que existe una vecindad V de x tal que $V \subseteq A$. Como V es abierto y el $\operatorname{int}(A)$ es el abierto más grande contenido en A, concluimos que $V \subseteq \operatorname{int}(A)$ y, por lo tanto, $x \in \operatorname{int}(A)$.

(iii) Supongamos que A es abierto y $x \in A$; con esto, tenemos que $\operatorname{int}(A) = A$. Del literal (ii), tenemos que x es un punto interior de A.

Por otro lado, supongamos que todo punto de A es un punto interior. Como $\operatorname{int}(A) \subseteq A$, demostremos que $A \subseteq \operatorname{int}(A)$. En efecto, sea $x \in A$, por la hipótesis, tenemos que x es un punto interior de A, es decir, existe una vecindad V de x tal que $V \subseteq A$ y, por el literal anterior, concluimos que $x \in \operatorname{int}(A)$. $\square$

Georg Cantor, en sus primeros trabajos, introdujo el término de derivado de un conjunto, el cual es el conjunto de todos los puntos límite del conjunto:

DEFINICIÓN 3.12. *(Derivado de un conjunto). Sean (E, τ) un espacio topológico y $A \subseteq E$. Al conjunto de todos los puntos límite de A, denotado por A', se lo llama el* derivado *de A. Se tiene que $A' \subseteq \overline{A}$, más aún*

$$\overline{A} = A \cup A'.$$

Partiendo de la definición del derivado de un conjunto tenemos la siguiente caracterización para conjuntos cerrados.

PROPOSICIÓN 3.3. *Sean (E,τ) un espacio topológico, $A \subseteq E$. A es cerrado si y solo si $A' \subseteq A$.*

Demostración. Supongamos que A es un conjunto cerrado; con esto, tenemos que $\overline{A} = A$. De esta forma, tenemos que $A = \overline{A} = A \cup A'$ y, por lo tanto, tenemos que $A' \subseteq A$.

Por otro lado, supongamos que $A' \subseteq A$. Notemos que $A \subseteq \overline{A}$ y, además, tenemos que

$$\overline{A} = A' \cup A \subseteq A \cup A = A.$$

De esta forma, concluimos que $\overline{A} = A$ y, por ende, A es cerrado. □

Tal y como dijimos antes, una vecindad representa la idea de proximidad de puntos; ahora, vamos a describir a un espacio topológico de mejor manera dependiendo de si podemos definir vecindades, con ciertas condiciones, que contengan a cada par de puntos o subconjuntos del espacio, dando así una idea de "separación" de dichos puntos o subconjuntos. Teniendo esta idea en mente, vamos a definir espacios topológicos que reúnen ciertas características que dependen de si sus subconjuntos o puntos están "más separados" o "menos separados".

DEFINICIÓN 3.13. *Un espacio topológico (E,τ) se dice que es un* espacio de Hausdorff *si para todo par de puntos distintos $x, y \in E$, existen vecindades V_x, V_y de x y y, respectivamente, tales que $V_x \cap V_y = \varnothing$. A los espacios de Hausdorff también se les conoce como espacios T_2.*

De la definición anterior, podemos establecer los siguientes ejemplos de espacios de Hausdorff.

- $\mathbb{R}$ con la topología usual es un espacio de Hausdorff. De igual manera, $\mathbb{R}^\omega$ es un espacio de Hausdorff. Y de forma más general, todo espacio métrico es un espacio de Hausdorff.
- Todo conjunto no vacío E con la topología discreta es un espacio de Hausdorff.

DEFINICIÓN 3.14. *Sea (E,τ) un espacio topológico. Se dice que (E,τ) es* regular *si para todo F subconjunto cerrado de E y todo $x \in E$ tal que $x \notin F$, existen vecindades V y U tales que $x \in V$, $F \subseteq U$ y $U \cap V = \varnothing$.*

Algunos ejemplos de espacios regulares son los siguientes:

- $\mathbb{R}$ con la topología usual.

- Dado E un conjunto. E dotado de la topología indiscreta, $\tau = \{E, \varnothing\}$, es un espacio regular. A este espacio se lo conoce como espacio topológico trivial.

- $\mathbb{R}$, con la topología dada por:

$$\tau = \{\varnothing, \mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$$

  es un espacio regular.

OBSERVACIÓN. Un espacio regular no necesariamente es un espacio de Hausdorff, pues tomando en cuenta el espacio topológico trivial, éste es un espacio regular pero no es un espacio de Hausdorff.

Teniendo en cuenta la observación anterior, surge una pregunta natural: ¿qué se necesita para que un espacio regular sea de Hausdorff?, ¿es posible esto? La respuesta es sí, sí es posible. Para ello, definamos los espacios de Fréchet.

DEFINICIÓN 3.15. *Un espacio topológico (E, τ) se dice que es un* espacio de Fréchet *si para todo par de puntos distintos $x, y \in E$, existen vecindades V_x, V_y de x y y, respectivamente, tales que ninguna de ellas está contenida en la otra. A los espacios de Fréchet también se les llama espacios T_1.*

Para conseguir nuestro objetivo, que un espacio regular sea de Hausdorff, vamos a demostrar primero que todo conjunto unitario en un espacio de Fréchet es un conjunto cerrado.

PROPOSICIÓN 3.4. *Sean (E, τ) un espacio de Fréchet y $x \in E$. Se tiene que $\{x\}$ es un conjunto cerrado.*

Demostración. Para demostrar que $\{x\}$ es cerrado, vamos a demostrar que $\{x\}^c$ es abierto. Para todo $y \in \{x\}^c$, como E es un espacio T_1 y $x \neq y$, existe V_y una vecindad de y tal que $x \notin U_y$. Tomando $U = \bigcup_{y \in \{x\}^c} U_y$, tenemos que U es abierto y $U = \{x\}^c$, por ende, $\{x\}$ es cerrado. □

Además, de la proposición anterior, tenemos la siguiente relación entre espacios T_2 y T_1.

PROPOSICIÓN 3.5. *Todo espacio topológico de Hausdorff (T_2) es también un espacio topológico de Fréchet (T_1).*

Demostración. Ver [18, Cap. 4]. □

Ahora, teniendo en cuenta la definición de espacio de Fréchet, vamos a realizar una modificación a los espacios regulares, para con ello, lograr que los espacios regulares sean espacios de Hausdorff.

DEFINICIÓN 3.16. *Un espacio topológico* (E, τ) *se dice* espacio T_3 *si* (E, τ) *es un espacio de Fréchet y es regular.*

Algunos ejemplos de espacios T_3 son los espacios métricos, en particular, $\mathbb{R}$ con su topología usual. Partiendo de la definición, vamos a demostrar que, en efecto, hemos conseguido que los espacios T_3 sean espacios de Hausdorff.

PROPOSICIÓN 3.6. *Todo espacio* T_3 *es un espacio de Hausdorff* (T_2).

Demostración. Sean (E, τ) un espacio T_3 y $x, y \in E$ dos puntos distintos, demostremos que existen vecindades V_x, V_y de x y y, respectivamente, tales que $V_x \cap V_y = \varnothing$. Como x y y son distintos, $y \notin \{x\}$ y, como E es un espacio de Fréchet, tenemos que $\{x\}$ es un conjunto cerrado. Ahora, como E también es regular, existen vecindades U, V tales que $\{x\} \subseteq U$ y V es una vecindad de y; con esto, tomando $V_x = U$ y $V_y = V$, se tiene lo deseado. □

OBSERVACIÓN. En mucha de la literatura a los espacios T_3 se los conoce como espacios regulares. Al igual que dicha literatura, nosotros vamos a referirnos a los espacios T_3 como espacios regulares.

PROPOSICIÓN 3.7. *Sean* (E, τ) *un espacio de Hausdorff,* $A \subseteq E$ *y* $x \in A'$. *Para toda vecindad* V *de* x*, se tiene que* $V \cap A$ *es un conjunto infinito.*

Demostración. Por reducción al absurdo, supongamos que existe V vecindad de x tal que $V \cap A$ es un conjunto finito. Notemos que, para todo $y \in V \cap A$, existe una vecindad V_y de x tal que $y \notin V_y$, pues, E es un espacio de Hausdorff. Con esto, tomemos

$$W = \left(\bigcap_{y \in V \cap A} V_y \right) \cap V$$

y notemos que W es una vecindad de x, pues, es la intersección finita de vecindades de x. Por otro lado, se tiene que

$$(W \setminus \{x\}) \cap A \subseteq W \cap A = \varnothing,$$

lo que contradice que x es punto límite de A. □

PROPOSICIÓN 3.8. *Sea (E, τ) un espacio de Hausdorff. Si $A \subseteq E$, se tiene que A' es un conjunto cerrado.*

Demostración. Sean $x \in \overline{A'}$ y V una vecindad de x, demostremos que

$$V \cap A \setminus \{x\} \neq \varnothing.$$

Por hipótesis, tenemos que $V \cap A' \neq \varnothing$; con esto, sea $z \in V \cap A'$, tenemos que V es una vecindad de z y, además, z es un punto límite de A y, por la proposición anterior, $V \cap A$ es infinito, por lo tanto, podemos tomar $y \in V \cap A$ tal que $y \neq x$. De esta forma, $y \in V \cap A \setminus \{x\}$, así, $\overline{A'} = A'$ y, por ende, A' es cerrado. □

3.2. Continuidad

Uno de los principales objetivos de la topología es el estudio de las funciones continuas. Dados dos espacios topológicos, vamos a definir cuando una función es continua y las consecuencias más importantes de la continuidad de funciones.

DEFINICIÓN 3.17. *(Función Continua). Sean E, F dos espacios topológicos. Una función $f \colon E \to F$ se dice que es* continua *si para todo abierto V de F, el conjunto $f^{-1}(V)$ es un conjunto abierto de E.*

PROPOSICIÓN 3.9. *Sean E, F dos espacios topológicos y $f \colon E \to F$ una función. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *f es continua;*

(ii) *para todo $A \subseteq E$, $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$;*

(iii) *para todo $B \subseteq F$ cerrado, $f^{-1}(B)$ es un conjunto cerrado de E;*

(iv) *para todo $x \in E$ y toda vecindad V de $f(x)$, existe una vecindad U de x tal que $f(U) \subseteq V$.*

Demostración.

- *(i) ⇒ (ii).* Supongamos que f es continua. Sea $A \subseteq E$, vamos a demostrar que $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$. Sea $y \in f(\overline{A})$, tenemos que existe $x \in \overline{A}$ tal que $y = f(x)$, demostremos que $y \in \overline{f(A)}$. En efecto, sea U una vecindad de y, como $x \in \overline{A}$, tenemos que, para toda vecindad V de x, $V \cap A \neq \varnothing$. Por otro lado, como f es continua, tenemos que $f^{-1}(U)$ es un abierto de E y, por ende, es una vecindad de x; con esto, tenemos que existe $z \in f^{-1}(U) \cap A$, por lo tanto, $f(z) \in U \cap A$, es decir, $U \cap f(A) \neq \varnothing$ y, se tiene lo deseado.

- *(ii) $\Rightarrow$ (iii)*. Sea B un subconjunto cerrado de F, por lo tanto, $\overline{B} = B$, vamos a demostrar que $f^{-1}(B)$ es cerrado en E. Tenemos que $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$, de este modo, si $x \in \overline{f^{-1}(B)}$, se tiene que

$$f(x) \in f(\overline{f^{-1}(B)}) \subseteq \overline{f(f^{-1}(B))} \subseteq \overline{B} = B,$$

por lo tanto, $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(B)$, es decir, $f^{-1}(B) = \overline{f^{-1}(B)}$ y, por ende, $f^{-1}(B)$ es un conjunto cerrado de E.

- *(iii) $\Rightarrow$ (i)*. Sean $x \in E$ y V una vecindad de $f(x)$, vamos a demostrar que existe una vecindad U de x tal que $f(U) \subseteq V$. Como V es una vecindad de $f(x)$, V es un abierto de F tal que $f(x) \in V$; con esto, tenemos que V^c es un conjunto cerrado de F. De la hipótesis, tenemos que $f^{-1}(V^c)$ es cerrado en E, por ende, $f^{-1}(V)$ es abierto en E, por lo tanto, $U = f^{-1}(V)$ es una vecindad de x y $f(U) \subseteq V$, como deseábamos.

- *(i) $\Rightarrow$ (iv)*. Supongamos que f es continua. Sean $x \in E$ y V una vecindad de $f(x)$, vamos a demostrar que existe U vecindad de x tal que $f(U) \subseteq V$. Tomando $U = f^{-1}(V)$, de la continuidad de f, se tiene que U es una vecindad de x y $f(U) \subseteq V$.

- *(iv) $\Rightarrow$ (i)*. Sean V un abierto de F y $x \in f^{-1}(V)$, vamos a demostrar que x es un punto interior de $f^{-1}(V)$. Puesto que $f(x) \in V$, de la hipótesis, tenemos que existe una vecindad U de x tal que $f(U) \subseteq V$, por ende, $U \subseteq f^{-1}(V)$ y con esto, x es un punto interior. Como x es arbitrario, tenemos que todo punto de $f^{-1}(V)$ es punto interior y por la Proposición 3.2, se concluye que $f^{-1}(V)$ es un conjunto abierto de E, por lo tanto, f es continua. $\square$

Cuando se estudia álgebra, es de importancia los isomorfismos (funciones lineales con inversa lineal), análogamente, cuando estudiamos topología nos interesan funciones continuas que sean invertibles y que preserven la continuidad. Dichas funciones son conocidas como homeomorfismos.

DEFINICIÓN 3.18. *Sean E, F dos espacios topológicos y $f\colon E \to F$ una función biyectiva y continua. Si $f^{-1}\colon F \to E$ es continua, se dice que f es un* homeomorfismo *de E en F. Más aún, si existe un homeomorfismo de E en F, se dice que E es* homeomorfo *a F.*

PROPOSICIÓN 3.10. *Sean E, F, G espacios topológicos y $f\colon E \to F$, $g\colon F \to G$ funciones continuas, se tiene que $g \circ f\colon E \to G$ es continua.*

Demostración. Sea A un abierto de G, vamos a demostrar que $(g \circ f)^{-1}(A)$ es abierto de E. Como g es continua, $g^{-1}(A)$ es un abierto de F; además, como f es continua, tenemos que $f^{-1}(g^{-1}(A))$ es un abierto; con esto, como $f^{-1}(g^{-1}(A)) = (g \circ f)^{-1}(A)$, tenemos lo deseado. □

3.3. Conjuntos Compactos

En esta sección revisaremos uno de los conceptos bases usados para establecer el objetivo del presente trabajo, así como sus propiedades y algunos resultados más relevantes.

DEFINICIÓN 3.19. *Sea (E, τ) un espacio topológico. Una familia de abiertos $\{A_i\}_{i\in I}$ se dice* recubrimiento abierto *de $A \subseteq E$, si $A \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$. Un* sub-recubrimiento finito *de un recubrimiento abierto es una familia $\{A_j\}_{j\in J}$ tal que $A \subseteq \bigcup_{j\in J} A_j$, donde $J \subseteq I$ es finito.*

DEFINICIÓN 3.20. *(Conjunto Compacto). Sean (E, τ) un espacio topológico y $K \subseteq E$. Se dice que K es* conjunto compacto *si todo recubrimiento abierto de K posee un sub-recubrimiento finito.*

PROPOSICIÓN 3.11. *Sean (E, τ) un espacio topológico. Todo subconjunto cerrado de un conjunto compacto es compacto.*

Demostración. Sean E un espacio topológico, $K \subseteq E$ un conjunto compacto, F un subconjunto cerrado de E tal que $F \subseteq K$ y $\{A_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento abierto de F, vamos a demostrar que F posee un sub-recubrimiento finito de $\{A_i\}_{i\in I}$. Notemos que $\{A_i\}_{i\in I} \cup \{F^c\}$ es un recubrimiento abierto de K y, como K es compacto, existe un sub-recubrimiento finito $\{A_j\}_{j\in J} \cup \{F^c\}$ de K, por lo tanto, para F tenemos que $\{A_j\}_{j\in J}$ es un sub-recubrimiento de F y, por ende, F es compacto.

Ahora, tomemos F un subconjunto cerrado de K; con esto, existe $\tilde{F}$, subconjunto cerrado, de E tal que $F = \tilde{F} \cap K$. Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento abierto de F formado por abiertos de E, nuevamente, tenemos que $\{A_i\}_{i\in I} \cup \{\tilde{F}^c\}$ es un recubrimiento abierto de K formado por abiertos de E. Como K es un conjunto compacto, existe un sub-recubrimiento finito $\{A_j\}_{j\in J} \cup \{\tilde{F}^c\}$ de K; con esto, $\{A_j\}_{j\in J}$ es un sub-recubrimiento finito de F y, por ende, F es un conjunto compacto. $\square$

PROPOSICIÓN 3.12. *Todo subconjunto compacto de un espacio topológico de Hausdorff es un conjunto cerrado.*

Demostración. Sean (E, τ) un espacio topológico de Hausdorff y $K \subseteq E$ un conjunto compacto, vamos a demostrar que K^c es un abierto de E; con esto concluiríamos que K es un cerrado de E. Sea $x \in K^c$, vamos a demostrar que x es un punto interior, es decir, vamos a hallar una vecindad U de x tal que $U \subseteq K^c$, lo que es equivalente a demostrar que existe una vecindad U de x tal que $U \cap K = \varnothing$. Como E es un espacio de Hausdorff, para cada $y \in K$ existen vecindades U_y y V_y de x y y respectivamente tales que su intersección es vacía. Por otro lado, la familia $\{V_y\}_{y\in K}$ es un recubrimiento abierto de K, como K es compacto, existen $V_{y_1}, V_{y_2}, \ldots, V_{y_n}$ que recubren a K. Así, tomando el conjunto abierto

$$V = \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i},$$

tenemos que $K \subseteq V$ y $V \cap U = \varnothing$, donde

$$U = \bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i}.$$

Al ser U la intersección finita de vecindades de x, U es una vecindad de x. Además, $U \cap K = \varnothing$, pues si no lo fuera, existieran $y \in V_{y_j}$ y $y \in U_{y_j}$ para algún $1 \leq j \leq n$, lo cual es contradictorio, pues $V_{y_j} \cap U_{y_j} = \varnothing$. Por lo tanto, concluimos que U es una vecindad disjunta de K y, por ende, K es un cerrado de E. $\square$

PROPOSICIÓN 3.13. *Sea (E, τ) un espacio topológico. Si M es un subconjunto infinito de un conjunto compacto K, entonces M tiene un punto límite en K.*

Demostración. Por reducción al absurdo, supongamos que M no posee puntos límite de K, es decir, todo $x \in M$ es un punto aislado de K. Con esto, para todo $x \in M$ existe una vecindad V_x tal que $V_x \cap M = \{x\}$. Notemos que $\{V_x\}_{x\in K}$ es un recubrimiento abierto de K, pero para este recubrimiento no existe un sub-recubrimiento finito, pues, de existir dicho sub-recubrimiento para K, como $M \subseteq K$ y $V_x \cap M = \{x\}$, M no podría ser un conjunto infinito, por lo tanto, contradecimos el hecho de que K es compacto. Con esto, concluimos que M tiene un punto límite en K. $\square$

Vamos a relacionar los conceptos de continuidad y compacidad sobre espacios topológicos. Una característica importante de éstos, es que la condición de compacidad como muchas otras se preservan bajo funciones continuas, esto nos indica que la compacidad es una propiedad topológica, como se enuncia a continuación.

PROPOSICIÓN 3.14. *Sean E, F dos espacios topológicos y $f\colon E \to F$ una función continua. Si K es un subconjunto compacto de E, entonces $f(K)$ es compacto.*

Demostración. Supongamos que K es un subconjunto compacto de E, sea $\{A_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento abierto de $f(K)$ formado por abiertos de F. Como f es continua, tenemos que $\{f^{-1}(A_i)\}_{i\in I}$ es un recubrimiento abierto de K. Por otro lado, de la compacidad de K, existe $J \subseteq I$ finito tal que $\{f^{-1}(A_j)\}_{j\in J}$ es un sub-recubrimiento finito de K, por lo tanto, $\{A_j\}_{j\in J}$ es un sub-recubrimiento finito de $f(K)$ y, con esto, concluimos que $f(K)$ también es compacto. □

PROPOSICIÓN 3.15. *Sean E, F dos espacios topológicos y $f\colon E \to F$ una función biyectiva y continua. Si E es compacto y F es un espacio de Hausdorff, entonces f es un homeomorfismo.*

Demostración. Para que f sea un homeomorfismo, como f es biyectiva y continua, basta demostrar que f^{-1} es continua. Por la Proposición 3.9, vamos a demostrar que si $G \subseteq E$ es cerrado de E, entonces $(f^{-1})^{-1}(G)$ es un conjunto cerrado de F. Sea $G \subseteq E$ cerrado, como E es compacto, por la Proposición 3.11, G también lo es. Ahora, dado que f es continua y G compacto, en virtud de la proposición anterior, tenemos que $f(G)$ también es compacto. Finalmente, como F es un espacio de Hausdorff, de la Proposición 3.12, $f(G)$ es cerrado en F y, por lo tanto, $(f^{-1})^{-1}(G)$ es cerrado, teniendo que f es un homeomorfismo. □

Ahora, una pregunta natural es si la compacidad es estable bajo operaciones de conjuntos tales como la unión, intersección y producto. Para la unión e intersección la compacidad se preserva bajo hipótesis adecuadas, como veremos a continuación. Para el producto, el Teorema de Tychonoff asegura que se preserva la compacidad, esta interrogante no va a ser abordada en el presente trabajo pero puede ser hallada en cualquiera de las referencias principales del capítulo.

PROPOSICIÓN 3.16. *En un espacio topológico, la unión finita de conjuntos compactos también es un conjunto compacto.*

Demostración. Sean (E, τ) un espacio topológico y $\{K_i\}_{i=1}^n$ una familia finita de subconjuntos compactos de E, vamos a demostrar que $\bigcup_{i=1}^{n} K_i$ es un conjunto compacto. Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ un recubrimiento abierto de $\bigcup_{i=1}^{n} K_i$, como $K_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} K_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, se tiene que existe $J_i \subseteq I$ finito tal que $\{A_j\}_{j \in J_i}$ es un sub-recubrimiento de K_i, es decir,

$$K_i \subseteq \bigcup_{j \in J_i} A_j.$$

Tomando $J = \bigcup_{i=1}^{n} J_i$, es un conjunto finito, pues es la unión finita de conjuntos finitos, tenemos que $\{A_j\}_{j \in J}$ es un sub-recubrimiento finito de $\bigcup_{i=1}^{n} K_i$. En efecto, tenemos que

$$\bigcup_{i=1}^{n} K_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \left(\bigcup_{j \in J_i} A_j \right) = \bigcup_{i \in J} A_i.$$

Por lo tanto, concluimos que la unión finita de compactos es un conjunto compacto. $\square$

PROPOSICIÓN 3.17. *Sea E un espacio topológico. Si E es de Hausdorff, entonces la intersección arbitraria de conjuntos compactos es un conjunto compacto.*

Demostración. Sean E un espacio topológico de Hausdorff y $\{K_i\}_{i \in I}$ una familia arbitraria de subconjuntos compactos de E. Como E es un espacio de Hausdorff, por la Proposición 3.12, tenemos que $\{K_i\}_{i \in I}$ es una familia arbitraria de subconjuntos cerrados de E, por lo tanto, $\bigcap_{i \in I} K_i$ es un conjunto cerrado. Por otro lado, tenemos que $\bigcap_{i \in I} K_i \subseteq K_j$, por lo tanto, $\bigcap_{i \in I} K_i$ es un conjunto cerrado contenido en un conjunto compacto y en virtud de la Proposición 3.11, tenemos que $\bigcap_{i \in I} K_i$ es un conjunto compacto. $\square$

3.4. Topología Producto

Antes de revisar las propiedades de espacios métricos, vamos a revisar una topología de interés, cuya comprensión nos servirá de ayuda para los capítulos posteriores.

DEFINICIÓN 3.21. *Sean E un conjunto no vacío e I un conjunto de índices. Una función $x\colon I \to E$ es llamada I-*tupla. *Por facilidad, a la imagen de i respecto de x se le denota por x_i para todo $i \in I$, es decir, para todo $i \in I$, se toma $x(i) = x_i$; mientras que a la función x se la nota por $x = (x_i)_{i\in I}$. Además, al conjunto de I-tuplas de elementos de E lo notaremos E^I.*

Sea $\{(E_i, \tau_i)\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos, por lo dicho en el capítulo anterior, tenemos que

$$\begin{aligned}\prod_{i\in I} E_i &= \left\{x\colon I \to \bigcup_{i\in I} E_i : x \text{ es función }, x(i) \in E_i, \text{ para todo } i \in I\right\}\\ &= \{(x_i)_{i\in I} : x_i \in E_i, \text{ para todo } i \in I\}.\end{aligned}$$

Con esto en mente, para todo $j \in I$, definamos la *proyección j-ésima* de $\prod\limits_{i\in I} E_i$, notada por π_j como:

$$\begin{aligned}\pi_j\colon \prod_{i\in I} E_i &\longrightarrow E_i\\ (x_i)_{i\in I} &\longmapsto \pi_j((x_i)_{i\in I}) = x_j.\end{aligned}$$

Además, notemos que, si $E_i = E$ para todo $i \in I$, se tiene que

$$\prod_{i\in I} E = \{f\colon I \to E : f \text{ es función}\} = E^I.$$

DEFINICIÓN 3.22. *(Topología Producto). Sea $\{(E_i, \tau_i)\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos. La topología menos fina sobre $\prod\limits_{i\in I} E_i$, que hace continua a π_i para todo $i \in I$, es llamada* topología producto *y la notaremos por τ si no existe confusión alguna.*

OBSERVACIÓN. π_j es continua para τ en $\prod_{i\in I} E_i$ si y solo si $\pi_j^{-1}(U_j) \in \tau$, para todo $U_j \subseteq E_j$ abierto.

De esta forma, tenemos que la base para la topología producto está dada por

$$\mathcal{B} = \left\{\bigcap_{j\in J} \pi_j^{-1}(U_j) : U_j \in \tau_j, \text{ para todo } j \in J, \text{ con } J \subseteq I \text{ finito}\right\}.$$

Podemos notar que, para $J \subseteq I$ finito,

$$\bigcap_{j\in J} \pi_j^{-1}(U_j) = \prod_{i\in I} V_i, \text{ donde } V_i = \begin{cases} U_i & \text{si } i \in J\\ E_i & \text{si } i \notin J.\end{cases}$$

PROPOSICIÓN 3.18. *Sean* $\{(E_i, \tau_i)\}_{i\in I}$ *una familia de espacios topológicos y* $A_i \subseteq E_i$ *para todo* $i \in I$. *Entonces*

$$\prod_{i\in I} \overline{A_i} = \overline{\prod_{i\in I} A_i}.$$

Demostración. Sea $x = (x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \overline{A_i}$, vamos a demostrar que $x \in \overline{\prod_{i\in I} A_i}$. Tomemos U un abierto básico de la topología producto, por ende, existe $J \subseteq I$ finito tal que

$$U = \prod_{i\in I} U_i, \text{ donde } U_i = \begin{cases} V_i & \text{si } i \in J \\ E_i & \text{si } i \notin J, \end{cases}$$

con V_i un abierto de E_i, además $x_i \in U_i$ para todo $i \in I$. Dado que $x_i \in \overline{A_i}$, existe $y_i \in U_i \cap A_i$ para todo $i \in I$; con esto, $y = (y_i)_{i\in I} \in U \cap \prod_{i\in I} A_i$ y, como U es arbitrario, concluimos que $x \in \overline{\prod_{i\in I} A_i}$.

Por otro lado, sea $x = (x_i)_{i\in I} \in \overline{\prod_{i\in I} A_i}$, vamos a demostrar que para todo $i \in I$, $x_i \in \overline{A_i}$. Sean $j \in I$ y V_j una vecindad de x_j, tomando

$$U = \prod_{i\in I} U_i, \text{ donde } U_i = \begin{cases} V_i & \text{si } i = j \\ E_i & \text{si } i \neq j, \end{cases}$$

tenemos que U es una vecindad de x, así, existe $y = (y_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} A_i \cap U$, de esta forma, $y_j \in A_j \cap V_j$ y, por lo tanto, $x_j \in \overline{A_j}$, como deseábamos. □

Vamos a introducir la definición de *sucesión* y *convergencia* de una sucesión en espacios topológicos; con esto, vamos a caracterizar la convergencia en la topología producto que, a lo largo del trabajo, nos será útil.

DEFINICIÓN 3.23. *(Sucesión). Sea* E *un conjunto no vacío. Una función* $x \in E^\omega$ *es llamada* sucesión.

OBSERVACIÓN. Notemos que la definición de sucesión es una particularización de la definición de I-tupla cuando $I = \omega$.

Ahora, vamos a definir el límite de una sucesión en un espacio topológico. Más adelante lo haremos para espacios métricos.

DEFINICIÓN 3.24. *(Límite de una sucesión). Sean* (E, τ) *un espacio topológico,* $(x_n)_{n\in\omega}$

$\in E^{\omega}$ *y* $x \in E$. *Decimos que* $(x_n)_{n\in\omega}$ *converge a* x *si*

$$(\forall U \text{ vecindad de } x)(\exists N \in \omega)(n > N \Rightarrow x_n \in U),$$

x *es llamado límite de* $(x_n)_{n\in\omega}$.

PROPOSICIÓN 3.19. *Sean* $\{(E_i, \tau_i)\}_{i\in I}$ *una familia de espacios topológicos,* $E = \prod_{i\in I} E_i$ *y* $(x_n)_{n\in\omega} \in E^{\omega}$. *Se tiene que* $(x_n)_{n\in\omega}$ *converge a* x *si y solo si* $(\pi_i(x_n))_{n\in\omega}$ *converge a* $\pi_i(x)$ *para todo* $i \in I$.

Demostración. Supongamos que $(x_n)_{n\in\omega}$ converge a x. Sea $j \in I$, vamos a demostrar que $\left(\pi_j(x_n)\right)_{n\in\omega}$ converge a $\pi_j(x)$. Sea $U \subseteq E_j$ una vecindad de $\pi_j(x)$, tomando

$$V = \prod_{i\in I} U_i, \text{ donde } U_i = \begin{cases} U & \text{si } i = j \\ E_i & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

es una vecindad abierta de x. Por lo tanto, existe $N_1 \in \omega$ tal que $n > N_1$, implica que $x_n \in V$; de aquí, tomando $N = N_1$ y suponiendo que $n > N$, tenemos que $\pi_j(x_n) \in U$, por lo tanto, concluimos que $\left(\pi_j(x_n)\right)_{n\in\omega}$ converge a $\pi_j(x)$.

Por otro lado, supongamos que $(\pi_i(x_n))_{n\in\omega}$ converge a $\pi_i(x)$ para todo $i \in I$. Sea U una vecindad de x, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que U es un elemento básico, por ende, existe $J \subseteq I$ finito tal que

$$U = \prod_{i\in I} U_i, \text{ donde } U_i = \begin{cases} V_i & \text{si } i \in J \\ E_i & \text{si } i \notin J, \end{cases}$$

con $V_i \in \tau_i$ para todo $i \in J$. Notemos que, de la hipótesis, se tiene que, para cada $i \in I$, existe $N_i \in \omega$ tal que $\pi_i(x_n) \in U_i$ para todo $n > N_i$. Como $U_i = E_i$ para todo $i \notin J$, tenemos que para todo $i \in J^c$, $\pi_i(x_n) \in U_i$ para todo $n \in N$; con esto, tomando $N = \text{máx}\{N_i : i \in J\}$ y suponiendo que $n > N$, tenemos que $\pi_i(x_n) \in U_i$ y, por lo tanto, $x_n \in U$, lo que prueba que $(x_n)_{n\in\omega}$ converge a x. □

3.5. Espacios Métricos

En esta sección estudiaremos algunas propiedades de los espacios métricos que nos servirán a futuro cuando se aborde las nociones de espacios polacos.

DEFINICIÓN 3.25. *Sean* E *un conjunto no vacío y una función* $d\colon E \times E \to \mathbb{R}$. *Deci-*

mos que d es una métrica *sobre E si para todo $x, y, z \in E$ se cumple:*

- *no negatividad:* $d(x, y) \geq 0$*;*
- *unicidad:* $d(x, y) = 0$ *si y solo si* $x = y$*;*
- *simetría:* $d(x, y) = d(y, x)$*;*
- *desigualdad triangular:* $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

A la pareja (E, d), donde E es un conjunto no vacío y d es una métrica sobre E, se le denomina *espacio métrico*.

DEFINICIÓN 3.26. *Sean (E, d) un espacio métrico y $F \subseteq E$ no vacío. Decimos que $(F, d|_F)$ es un* subespacio métrico *de E, donde $d|_F$ es la restricción de la métrica d sobre $F \times F$. Si no existe confusión sobre la métrica d, diremos únicamente que F es un subespacio métrico de E.*

OBSERVACIÓN. Notemos que, para cualquier conjunto no vacío E, siempre es posible definir una métrica, denominada *métrica discreta*, dada por:

$$\begin{aligned} \delta_E \colon E \times E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \delta(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y, \\ 1 & \text{si } x \neq y. \end{cases} \end{aligned}$$

Cuando estudiamos compacidad vimos la idea de preservar la compacidad por medio de una función continua, teniendo esto en mente, nos planteamos la idea de conservar la distancia de dos puntos a través de una función, esta idea la plasmamos en la siguiente definición.

DEFINICIÓN 3.27. *Sean (E, d_1), (F, d_2) dos espacios métricos y $\varphi \colon E \to F$ una función. Decimos que φ es una* isometría *si para todo $x, y \in E$*

$$d_1(x, y) = d_2(\varphi(x), \varphi(y)).$$

En este caso, si existe una isometría biyectiva de E en F, se dice que E y F son isométricos.

Partiendo de la definición de isometría, tenemos el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 3.20. *Sean (E, d_1), (F, d_2) dos espacios métricos y $\varphi \colon E \to F$ una isometría. Se tiene que:*

(i) φ es inyectiva;

(ii) $\varphi^{-1} \colon \varphi(E) \to E$ es también una isometría.

Demostración.

(i) Sean $x, y \in E$ tales que $\varphi(x) = \varphi(y)$, como φ es una isometría, tenemos que $d_1(x, y) = d_2(\varphi(x), \varphi(y))$. Por esta razón, $d_1(x, y) = 0$; con esto, tenemos que $x = y$ y, por lo tanto, φ es inyectiva.

(ii) Sean $y, z \in \varphi(E)$, vamos a demostrar que $d_2(y, z) = d_1(\varphi^{-1}(y), \varphi^{-1}(z))$. Como $y, z \in \varphi(E)$, existen $x_1, x_2 \in E$ tales que $y = \varphi(x_1)$ y $z = \varphi(x_2)$; con esto, tenemos que $x_1 = \varphi^{-1}(y)$ y $x_2 = \varphi^{-1}(z)$. Además, como φ es una isometría, tenemos que

$$d_1(\varphi^{-1}(y), \varphi^{-1}(z)) = d_1(x_1, x_2) = d_2(\varphi(x_1), \varphi(x_2)) = d_2(y, z),$$

por ende, φ^{-1} es también una isometría. □

Vamos a relacionar los conceptos topológicos previamente definidos con conceptos en espacios métricos. Para ello, vamos a definir una topología inducida por una métrica.

DEFINICIÓN 3.28. *Sean (E, d) un espacio métrico, $x \in E$ y $r > 0$, definimos los conjuntos:*

- Bola abierta *de centro x y radio r como $B(x, r) = \{y \in E : d(x, y) < r\}$;*
- Bola cerrada *de centro x y radio r como $B[x, r] = \{y \in E : d(x, y) \leq r\}$.*

Sea (E, d) un espacio métrico. Se define la *topología inducida* por d al conjunto

$$\tau_d = \{A \subseteq E : (\forall x \in A)(\exists r > 0)(B(x, r) \subseteq A)\}.$$

Así, se tiene que el conjunto de todas las bolas abiertas de un espacio métrico es una base para la topología inducida por la métrica. Con esto en mente, no es difícil demostrar que todo espacio métrico es un espacio topológico de Hausdorff.

3.5.1. Sucesiones

Basándonos en la definición de sucesión dada en la sección anterior, vamos a definir el concepto de subsucesiones.

DEFINICIÓN 3.29. *(Subsucesiones). Sean E un conjunto no vacío, $(x_n)_{n\in\omega} \in E^\omega$ y $\phi\colon \omega \to \omega$ una función estrictamente creciente. A la composición de $(x_n)_{n\in\omega}$ con ϕ, notada por $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\omega}$, se le denomina* subsucesión *de $(x_n)_{n\in\omega}$.*

OBSERVACIÓN. Dados E un conjunto no vacío, $(x_n)_{n\in\omega} \in E^\omega$ y

$$\begin{aligned} n\colon \omega &\longrightarrow \omega \\ k &\longmapsto n(k) = n_k \end{aligned}$$

una sucesión estrictamente creciente, a la composición de la función $x = (x_n)_{n\in\omega}$ con n, notada por $(x_{n_k})_{k\in\omega}$, le decimos subsucesión de $(x_n)_{n\in\omega}$. Esta definición es usada en la literatura y es totalmente equivalente a la definición antes dada. Usaremos cualquiera de las dos definiciones de acuerdo a lo que amerite la situación.

Ahora, relacionaremos el concepto de espacios métricos con sucesiones por medio del concepto de límite de una sucesión.

DEFINICIÓN 3.30. *(Límite de una sucesión). Sean (E,d) un espacio métrico, $(x_n)_{n\in\omega} \in E^\omega$ y $x \in E$. Decimos que $(x_n)_{n\in\omega}$ converge a x si*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \omega)(n > N \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon).$$

A x se lo llama límite de $(x_n)_{n\in\omega}$. Además, si $(x_n)_{n\in\omega}$ converge a x, diremos que $(x_n)_{n\in\omega}$ es convergente.

OBSERVACIÓN. Notemos que, en la definición anterior, el decir que $(x_n)_{n\in\omega}$ converge a x es totalmente equivalente a:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \omega)(n > N \Rightarrow x_n \in B(x, \epsilon)).$$

Veremos algunas propiedades importantes de la convergencia de sucesiones. Además, ayudándonos de la convergencia de sucesiones, vamos a caracterizar ciertos puntos y subconjuntos de los espacios métricos.

PROPOSICIÓN 3.21. *Sean (E,d) un espacio métrico y $(x_n)_{n\in\omega} \in E^\omega$ convergente. Entonces $(x_n)_{n\in\omega}$ converge exactamente a un punto en E.*

Demostración. La demostración se puede hallar en [16, Cap. 6]. $\square$

PROPOSICIÓN 3.22. *Sean (E,d) un espacio métrico, $A \subseteq E$ y $x \in E$. Se tiene que x es un punto límite de A si y solo si existe $(x_n)_{n\in\omega} \in (A \setminus \{x\})^\omega$ tal que $(x_n)_{n\in\omega}$ converge a x.*

Demostración. Ver [17, Cap. 2]. $\square$

Cuando hablamos de convergencia en espacios métricos podemos asociarla con convergencia en el conjunto de los números reales, con esto nos referimos a que la sucesión de métricas sea una sucesión convergente. Con esto en mente, la proposición anterior puede ser descrita como se muestra a continuación.

COROLARIO 3.23. *Sean (E, d) un espacio métrico, $A \subseteq E$ y $x \in E$. Se tiene que x es un punto límite de A si y solo si existe $(x_n)_{n\in\omega} \in (A \setminus \{x\})^\omega$ tal que la sucesión $(d(x_n, x))_{n\in\omega}$ es estrictamente decreciente y converge a 0.*

Demostración. Supongamos que existe $(x_n)_{n\in\omega} \in (A \setminus \{x\})^\omega$ tal que $(d(x_n, x))_{n\in\omega}$ es estrictamente decreciente y converge a 0. Como $(d(x_n, x))_{n\in\omega}$ converge a 0, se tiene que $(x_n)_{n\in\omega}$ converge a x y, por la proposición anterior, se tiene que x es un punto límite de A.

Por otro lado, si $x \in A'$, nuevamente por la proposición anterior, existe una sucesión $(y_n)_{n\in\omega} \in (A \setminus \{x\})^\omega$ convergente a x. Tomemos $n_0 = 0$ y para $k \in \omega$,

$$n_{k+1} = \text{mín}\left\{m \in \omega : d(y_m, x) < \text{mín}\left\{d(y_k, x), \frac{1}{k+1}\right\}\right\},$$

este está bien definido, pues dado que la sucesión $(y_n)_{n\in\omega}$ converge a x, se tiene que el conjunto del cual se está tomando el mínimo es no vacío. Con esto, se define $(x_k)_{k\in\omega} = (y_{n_k})_{k\in\omega}$. Así, se tiene que $(x_k)_{k\in\omega} \in (A \setminus \{x\})^\omega$ es tal que la sucesión $(d(x_n, x))_{n\in\omega}$ es estrictamente decreciente y convergente a 0. $\square$

Una proposición referente a la continuidad en espacios métricos se da usando convergencia de sucesiones como veremos a continuación.

PROPOSICIÓN 3.24. *Sean (E, d_1), (F, d_2) dos espacios métricos y $A \subseteq E$. Una función $f\colon A \to Y$ es continua en $a \in A$ si y solo si toda sucesión $(x_n)_{n\in\omega} \in A^\omega$ que converge a a, implica que $(f(x_n))_{n\in\omega}$ converge a $f(a)$.*

Demostración. Ver [16, Cap. 3]. $\square$

Análogamente, se puede caracterizar la clausura de un conjunto; con esto, también se puede caracterizar los conjuntos cerrados y de una manera similar los conjuntos compactos en un espacio métrico.

PROPOSICIÓN 3.25. *Sean (E,d) un espacio métrico, $M \subseteq E$ un conjunto no vacío y $x \in E$. Se tiene que $x \in \overline{M}$ si y solo si existe $(x_n)_{n\in\omega} \in M^\omega$ tal que $(x_n)_{n\in\omega}$ converge a x.*

Demostración. Ver [16, Cap. 6]. □

COROLARIO 3.26. *Sean (E,d) un espacio métrico y $M \subseteq E$ un conjunto no vacío. M es cerrado si y solo si para toda $(x_n)_{n\in\omega} \in M^\omega$ tal que $(x_n)_{n\in\omega}$ converge a x entonces $x \in M$.*

Demostración. La demostración puede ser encontrada en [16, Cap. 6]. □

3.5.2. Espacios Métricos Separables y Espacios Métricos Completos

Antes de estudiar espacios polacos es importante el tener ideas y nociones básicas relacionadas con espacios métricos completos y espacios métricos separables, pues, la definición de espacios polacos dependen estrechamente de estos conceptos. En esta sección repasaremos varias proposiciones que serán de importancia para llegar al resultado principal.

DEFINICIÓN 3.31. *Sea (E,τ) un espacio topológico. Un subconjunto A de E es* denso *en E si $\overline{A} = E$.*

DEFINICIÓN 3.32. *(Espacio Topológico Separable). Un espacio topológico (E,τ) se dice que es* separable *si existe A subconjunto de E denso y numerable.*

Dado que un espacio métrico es un espacio topológico con la topología inducida por la métrica, se tiene que la definición de espacio topológico separable se ajusta sin ningún problema a espacios métricos separables.

PROPOSICIÓN 3.27. *Si (E,d) es un espacio métrico separable y $M \subseteq E$, entonces M también es un subespacio separable.*

Demostración. Supongamos que (E,d) es un espacio métrico separable y $M \subseteq E$, por lo tanto, existe $S = (x_n)_{n\in\omega} \in E^\omega$ tal que $\overline{S} = E$. Vamos a construir un subconjunto numerable de M cuyos puntos estén suficientemente cerca de S. Para $(n,m) \in \omega \times (\omega \setminus \{0\})$, definamos $B_{n,m} = B(x_n, \frac{1}{m})$. Además, notemos que por la densidad de S, si $y \in M$, para todo $m \in \omega \setminus \{0\}$, se tiene que existe $n \in \omega$ tal que $x_n \in B(y, \frac{1}{m})$, es decir, $B_{n,m} \cap M \neq \varnothing$. Con esto, tomemos

$$J = \{(n,m) \in \omega \times (\omega \setminus \{0\}) : B_{n,m} \cap M \neq \varnothing\}.$$

Ahora, usando el Axioma de elección en la familia $\{B_{n,m} \cap M\}_{(n,m)\in J}$ podemos tomar $y_{n,m} \in B_{n,m} \cap M$ para cada $(n,m) \in J$ y así definir

$$B = \{y_{n,m} \in B_{n,m} \cap M : (n,m) \in J\}.$$

B es numerable, pues J lo es, vamos a demostrar que B es denso en M. Para ello, sean $y \in M$ y $\varepsilon > 0$, tomemos $m \in \omega \setminus \{0\}$ tal que $\frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2}$; además, como S es denso en E, para $y \in M \subseteq E$, tenemos que $B(y, \frac{1}{m}) \cap S \neq \varnothing$. Con esto, existe $x_n \in B(y, \frac{1}{m})$, es decir, $y \in B_{n,m} \cap M$; además, como $y_{n,m} \in B_{n,m} = B(x_n, \frac{1}{m})$, tenemos que

$$d(y, y_{n,m}) \leq d(y, x_n) + d(x_n, y_{n,m}) < \frac{1}{m} + \frac{1}{m} < \varepsilon.$$

De esta forma, $y_{n,m} \in B(y, \varepsilon) \cap B$, como $y \in M$ y ε son arbitrarios, tenemos lo deseado, por ende, M es separable. □

PROPOSICIÓN 3.28. *Sea (E,d) un espacio métrico. Se tiene que E es separable si y solo si es segundo contable.*

Demostración. Supongamos que E es separable, por lo tanto, existe $S = \{x_n \in E : n \in \omega\}$ tal que $\overline{S} = E$. Definamos

$$\mathcal{B} = \left\{ B\left(x, \frac{1}{n}\right) : x \in S, n \in \omega \setminus \{0\} \right\},$$

el cual es numerable, pues, $S \times (\omega \setminus \{0\})$ es numerable y al ser la imagen de un conjunto numerable es numerable.

Sea τ_d la topología inducida por la métrica d, basta demostrar que $\mathcal{B}$ es una base para τ_d, es decir, vamos a demostrar que para todo $U \in \tau_d$ y todo $x \in U$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq U$. Como toda bola abierta es un conjunto abierto, tenemos que $\mathcal{B} \subseteq \tau$. Por otro lado, sean $U \in \tau_d$ y $y \in U$, así, y es un punto interior, por lo tanto, existe $R > 0$ tal que $B(y, R) \subseteq U$. Además, existe $n \in \omega$ tal que $\frac{2}{R} < n$, es decir, $\frac{2}{n} < R$ y, por lo tanto, $B(y, \frac{2}{n}) \subseteq B(y, R)$, de ahí que $B(y, \frac{2}{n}) \subseteq U$. Además, de la densidad de S, tenemos que existe $x \in S \cap B(y, \frac{1}{n})$, por lo tanto, $y \in B(x, \frac{1}{n})$. Por otro lado, para todo $z \in B(x, \frac{1}{n})$ tenemos:

$$d(z, y) \leq d(z, x) + d(x, y) < \frac{2}{n},$$

es decir $B(x, \frac{1}{n}) \subseteq B(y, \frac{2}{n})$, por ende, $B(x, \frac{1}{n}) \subseteq U$. Así, tomando $B = B(x, \frac{1}{n})$ hemos hallado $B \in \mathcal{B}$ tal que $y \in B \subseteq U$ y, con esto, $\mathcal{B}$ es una base numerable de la topología inducida por la métrica d, por lo tanto, concluimos que E es segundo contable.

Ahora, supongamos que (E, d) es segundo contable, es decir, supongamos que existe una base numerable $\mathcal{B}$ para la topología generada por la métrica d. Con esto, en virtud del Axioma de Elección, para $\mathcal{B} \setminus \{\varnothing\}$ existe una función de elección ϕ. Definamos

$$H = \{\phi(B) : B \in \mathcal{B} \setminus \{\varnothing\}\},$$

nuevamente, al ser H la imagen de un conjunto numerable, es numerable. Finalmente, basta demostrar que H es denso en E. Sean $x \in E$ y $r > 0$; con esto $x \in B(x, r)$ y tenemos que existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$ y $B \subseteq B(x, r)$. Ahora, como ϕ es una función de elección para $\mathcal{B} \setminus \{\varnothing\}$, tenemos que $\phi(B) \in B \subseteq B(x, r)$ y, con esto, $H \cap B(x, r)$ es no vacío. Así, concluimos que $x \in \overline{H}$ y, por ende, $E = \overline{H}$. □

Por último, vamos a demostrar una proposición acerca de la numerabilidad del conjunto de índices de una familia de abiertos disjuntos dos a dos de un espacio métrico separable. Esta proposición será usada más adelante para completar el objetivo del presente trabajo.

PROPOSICIÓN 3.29. *Sea (E, d) un espacio métrico separable. Si $\{U_i\}_{i \in I}$ es una familia de abiertos no vacíos y disjuntos dos a dos, entonces I es numerable.*

Demostración. Como E es separable, de la Proposición 3.28, tenemos que existe una base $\mathcal{B} = \{V_j\}_{j \in \omega}$. Notemos que, como los abiertos en $\{U_i\}_{i \in I}$ son no vacíos y disjuntos dos a dos, en virtud del Axioma de Elección, para todo $i \in I$ podemos tomar $x_i \in U_i$; además, $x_i \neq x_j$ para todo $i, j \in \omega$ distintos.

Por otro lado, como $\mathcal{B}$ es una base, para cada $i \in I$ existe $j_i \in \omega$ tal que

$$x_i \in V_{j_i} \subseteq U_i.$$

Notemos que $i \neq k$ implica que $j_i \neq j_k$, pues de no ser así, existiría un par de abiertos de $\{U_i\}_{i \in I}$ cuya intersección sería no vacía. Con esto, la función

$$\begin{aligned} f\colon I &\longrightarrow J \\ i &\longmapsto f(i) = j_i \end{aligned}$$

es una función inyectiva, por ende, $|I| \leq |J|$ y, como J es numerable, tenemos que I también lo es. □

Ahora, vamos a introducir la noción de espacios métricos completos y relacionaremos el mismo con las ideas previas de compacidad y convergencia; además, se enunciará un resultado acerca del completado de un espacio métrico.

DEFINICIÓN 3.33. *(Sucesión de Cauchy). Una sucesión $(x_n)_{n\in\omega}$ en un espacio métrico (E,d) se dice que es de* Cauchy *si:*

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists N \in \omega)(m,n > N \Rightarrow d(x_n,x_m) < \varepsilon).$$

DEFINICIÓN 3.34. *(Espacio métrico completo). Un espacio métrico (E,d) es* completo *si toda sucesión de Cauchy en E es una sucesión convergente.*

Cuando trabajamos en espacios métricos completos, toda sucesión de Cauchy es una sucesión convergente. El recíproco siempre se tiene, es decir, toda sucesión convergente es de Cauchy como recordamos a continuación.

PROPOSICIÓN 3.30. *Toda sucesión convergente en un espacio métrico es una sucesión de Cauchy.*

Demostración. La demostración puede ser encontrada en [17, Cap. 1]. □

PROPOSICIÓN 3.31. *Sea E un espacio métrico. Si una sucesión de puntos de E es de Cauchy y tiene una subsucesión convergente, entonces es convergente.*

Demostración. Ver [17, Cap. 1]. □

PROPOSICIÓN 3.32. *Sean (E,d) un espacio métrico y $M \subseteq E$ completo. Entonces, M es cerrado.*

Demostración. La demostración puede ser encontrada en [17, Cap. 2]. □

PROPOSICIÓN 3.33. *Sean (E,d) un espacio métrico completo y $M \subseteq E$ cerrado. Entonces M es completo.*

Demostración. La demostración puede ser encontrada en [17, Cap. 2]. □

En espacios métricos el concepto de completitud suele ser de mucha ayuda para caracterizar las propiedades topológicas del mismo. Vamos a relacionar la completitud de un espacio métrico con la definición de compacidad y la convergencia de sucesiones, para ello, definiremos lo que son los conjuntos totalmente acotados en espacios métricos.

DEFINICIÓN 3.35. *(Conjunto Totalmente Acotado). Sean (E, d) un espacio métrico y $M \subseteq E$. Se tiene que M es* totalmente acotado *si para todo $\varepsilon > 0$, existen finitos puntos $x_1, \ldots, x_n$ en M tales que*

$$M \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon).$$

PROPOSICIÓN 3.34. *Sean (E, d) un espacio métrico completo totalmente acotado y $\{A_i\}_{i \in I}$ un recubrimiento abierto de E. Si E no posee un sub-recubrimiento finito de $\{A_i\}_{i \in I}$, entonces, para todo $\varepsilon > 0$, existe una bola cerrada $B[x, \varepsilon]$ que no es recubierta por ningún sub-recubrimiento finito de $\{A_i\}_{i \in I}$.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$, como E es totalmente acotado, existen puntos $x_1, \ldots, x_n \in E$ tales que $E = \bigcup_{i=1}^{n} B[x_i, \varepsilon]$. Si todas estas bolas cerradas fueran recubiertas por un sub-recubrimiento finito de $\{A_i\}_{i \in I}$, entonces E tendría un sub-recubrimiento finito de $\{A_i\}_{i \in I}$, lo cual es imposible, por lo tanto, existe una bola cerrada $B[x, \varepsilon]$ que no es recubierta por ningún sub-recubrimiento finito de $\{A_i\}_{i \in I}$. $\square$

PROPOSICIÓN 3.35. *Para todo espacio métrico E, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) E es compacto;

(ii) $A' \neq \varnothing$ para todo subconjunto infinito A de E;

(iii) toda sucesión $(x_n)_{n \in \omega} \in E^{\omega}$ posee una subsucesión convergente;

(iv) E es totalmente acotado y completo.

Demostración.

- *(i) $\Rightarrow$ (ii).* El resultado es inmediato de la Proposición 3.13.

- *(ii) $\Rightarrow$ (iii).* Sea $(x_n)_{n \in \omega} \in E^{\omega}$, si $\{x_n : n \in \omega\}$ es un conjunto finito, se tiene de inmediato que $(x_n)_{n \in \omega}$ tiene una subsucesión constante y, por ende, convergente. Ahora, si $\{x_n : n \in \omega\}$ es un conjunto infinito, entonces, por hipótesis, posee un punto límite x. Por la Proposición 3.22, existe $(y_n)_{n \in \omega} \in \{x_n : n \in \omega\}^{\omega}$ tal que $(y_n)_{n \in \omega}$ converge a x; con esto, nos es posible construir una subsucesión convergente.

- *(iii) $\Rightarrow$ (iv)*. Por la Proposición 3.31 y de la hipótesis, sabemos que E es completo, veamos que E es totalmente acotado. Por reducción al absurdo, supongamos que existen $\varepsilon > 0$ y para todo $S \subseteq E$ finito, se tiene que

$$E \neq \bigcup_{s\in S} B(s,\varepsilon).$$

Con esto en mente, tomando $x_0 \in E$, para $\{x_0\}$ existe $x_1 \in E \setminus B(x_0,\varepsilon)$. Recursivamente, tomamos

$$x_{n+1} \in E \setminus \left(\bigcup_{i=0}^{n} B(x_i,\varepsilon) \right).$$

Así, existe $(x_n)_{n\in\omega} \in E^\omega$ tal que $d(x_n,x_m) \geq \varepsilon$ si $m \neq n$. Con esto, $(x_n)_{n\in\omega} \in E^\omega$ no es de Cauchy y, por lo tanto, no es convergente. Más aún, $(x_n)_{n\in\omega} \in E^\omega$, no posee una subsucesión convergente, lo cual contradice nuestra hipótesis, por lo tanto, concluimos que E es totalmente acotado.

- *(iv) $\Rightarrow$ (i)*. Por reducción al absurdo supongamos que E no es un conjunto compacto, así, existe $\{A_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento abierto de E tal que no posee sub-recubrimiento finito. Dado que E es totalmente acotado, para $1 > 0$ existen $x_1^1,\ldots,x_{n_1}^1$ elementos de E tales que

$$E = \bigcup_{i=1}^{n_1} B(x_i^1,1).$$

Con esto en mente, tenemos que

$$\bigcup_{i=1}^{n_1} B(x_i^1,1) = \bigcup_{i\in I} A_i$$

y como $\{A_i\}_{i\in I}$ no posee sub-recubrimiento finito, existe $x_1 \in \{x_1^1,\ldots,x_{n_1}^1\}$ tal que $B(x_1,1)$ no puede ser recubierta por finitos elementos de $\{A_i\}_{i\in I}$.

Ahora, nuevamente dado que E es totalmente acotado y, como $B(x_1,1) \subseteq E$, tenemos que para $\frac{1}{2} > 0$ existen $x_1^2,\ldots,x_{n_2}^2$ tales que

$$B(x_1,1) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n_2} B\left(x_i^2,\frac{1}{2}\right).$$

De esta forma, tenemos que existe $x_2 \in \{x_1^2,\ldots,x_{n_2}^2\}$ tal que $x_1 \in B\left(x_2,\frac{1}{2}\right)$, por lo tanto, $x_2 \in B(x_1,1)$. Así, $B\left(x_2,\frac{1}{2}\right) \subseteq B(x_1,1)$, en efecto, sea $y \in B\left(x_2,\frac{1}{2}\right)$, como $x_1 \in B\left(x_2, \frac{1}{2}\right)$, tenemos

$$d(x_1, y) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, y) < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Por esta razón, como $B(x_1, 1)$ no puede ser recubierta por finitos elementos de $\{A_i\}_{i\in I}$, tenemos que $B(x_2, \frac{1}{2})$ tampoco puede ser recubierta por finitos elementos de $\{A_i\}_{i\in I}$.

Recursivamente, para $n > 0$ podemos hallar $x_n \in B(x_{n-1}, \frac{1}{2^{n-2}})$ y $B(x_n, \frac{1}{2^{n-1}})$ un conjunto que no puede ser recubierto por finitos elementos $\{A_i\}_{i\in I}$. Además, notemos que para todo $m > 0$ tal que $x_{m+1} \in B(x_m, \frac{1}{2^{m-1}})$, implica que

$$d(x_{m+1}, x_m) < \frac{1}{2^{m-1}} \leq \frac{1}{2^{m-2}}$$

y para todo $n > m$, tenemos que

$$d(x_n, x_m) \leq \sum_{i=m}^{n-1} d(x_{i+1}, x_i) \leq \sum_{i=m}^{n-1} \frac{1}{2^{i-2}} \leq \sum_{i=m}^{\infty} \frac{1}{2^{i-2}} = \frac{1}{2^{m-3}}.$$

Con esto, tenemos que $(x_n)_{n\in\omega} \in E^\omega$ es de Cauchy, por lo tanto, existe $x \in E$ tal que $(x_n)_{n\in\omega}$ converge a x. En particular, existe $i \in I$ tal que $x \in A_i$; además, para n suficientemente grande, tenemos que $x \in B(x_n, \frac{1}{2^{n-1}}) \subseteq A_i$, pero esto contradice el hecho que las bolas no pueden ser recubiertas por una cantidad finita de elementos de $\{A_i\}_{i\in I}$. Por lo tanto, concluimos que E es compacto. $\square$

DEFINICIÓN 3.36. *(Espacios métricos isomorfos). Sean (E, d_1), (F, d_2) dos espacios métricos y $\varphi\colon E \to F$ una isometría. Si φ es una función biyectiva, decimos que φ es un* isomorfismo*; además, decimos que (E, d_1) y (F, d_2) son* espacios métricos isomorfos.

Recordemos que si en un espacio métrico (E, d), un conjunto M no es cerrado, lo podemos cerrar tomando $\overline{M}$. Para cerrar M, añadimos puntos que no estén en M pero que estén en $\overline{M}$, es decir, le añadimos el conjunto $M' \setminus M$ (estos puntos se toman de E, el universo donde estamos trabajando).

Análogamente, si un espacio (E, d) es incompleto, quiere decir que existen sucesiones de Cauchy que no son convergentes. Si deseamos completarlo, deberíamos añadirle los elementos que serían los límites de las sucesiones de Cauchy que no convergen, pero si el espacio E es el universo no se podrían tomar de ahí dichos límites. Para conseguir nuestro objetivo, vamos a construir un "espacio paralelo" $(\widetilde{E}, \widetilde{d})$ (al que llamaremos completado de E) y que contenga un subespacio $(W, \widetilde{d})$

denso e isomorfo a (E, d). Con esto en mente, tenemos el siguiente teorema de completación.

TEOREMA 3.36. *(Completación). Para un espacio métrico (E, d) existe un espacio métrico completo $(\widetilde{E}, \tilde{d})$, el cual posee un subespacio W isométrico a E y denso en $\widetilde{E}$. Este espacio métrico $\widetilde{E}$ es único salvo isometrías.*

Demostración. La demostración puede ser encontrada en [12, Cap. 1] □

Usando el hecho que ω está bien ordenado, vamos a demostrar uno de los teoremas importantes tanto para la topología como para el análisis funcional. El Teorema de Categorías de Baire a groso modo establece que en ciertos espacios la intersección de cualquier colección numerable de conjuntos "grandes" sigue siendo "grande".

TEOREMA 3.37. *(Teorema de Categorías de Baire). Sea (E, d) un espacio métrico, completo, separable y no vacío. Entonces, para toda familia $\{M_n\}_{n\in\omega}$ de conjuntos abiertos y densos en E, se tiene que $\bigcap_{n\in\omega} M_n$ es denso en E.*

Demostración. Sea $\{M_n\}_{n\in\omega}$ una familia de conjuntos densos en E. Sea U un abierto no vacío de E. Dado que E es separable, existe $M = \{z_n : n \in \omega\}$ un conjunto numerable y denso en E. Con esto, definamos

$$
\begin{aligned}
n_0 &= \min\{m \in \omega : z_m \in U \cap M_0\}, \\
x_0 &= z_{n_0}, \\
N_0 &= \min\left\{m \in \omega \setminus \{0\} : B\left[x_0, \frac{1}{m}\right] \subseteq U \cap M_0\right\}, \\
r_0 &= \frac{1}{N_0}.
\end{aligned}
$$

Notemos que, dado que $U \cap M_0$ es un abierto y M es denso en E, tenemos que

$$\{m \in \omega : z_m \in U \cap M_0\},$$

es no vacío y, como ω está bien ordenado, tiene elemento mínimo, por lo tanto, n_0 está bien definido. Además, dado que $x_0 = z_{n_0} \in U \cap M_0$, se tiene que

$$\left\{m \in \omega : B\left[x_0, \frac{1}{m}\right] \subseteq U \cap M_0\right\}$$

es no vacío y por la misma razón anterior, se tiene que N_0 también está bien definido.

Ahora, para $k \in \omega$, definamos

$$
\begin{aligned}
n_{k+1} &= \text{mín}\{m \in \omega : z_m \in B(x_k, r_k) \cap M_{k+1}\}, \\
x_{k+1} &= z_{n_{k+1}}, \\
N_{k+1} &= \text{mín}\left\{m \in \omega \setminus \{0\} : B\left[x_{k+1}, \frac{1}{m}\right] \subseteq B(x_k, r_k) \cap M_{k+1}\right\}, \\
r_{k+1} &= \text{mín}\left\{\frac{1}{k+1}, \frac{1}{N_{k+1}}\right\}.
\end{aligned}
$$

Notemos que, para $k \in \omega$, dado que $B(x_k, r_k) \cap M_{k+1}$ es un abierto y M es denso en E, se tiene que

$$\{m \in \omega : z_m \in B(x_k, r_k) \cap M_{k+1}\},$$

es no vacío y, como ω está bien ordenado, tiene elemento mínimo, por lo tanto, n_{k+1} está bien definido. Además, dado que $x_{k+1} = z_{n_{k+1}} \in B(x_k, r_k) \cap M_{k+1}$, se tiene que

$$\left\{m \in \omega \setminus \{0\} : B\left[x_{k+1}, \frac{1}{m}\right] \subseteq B(x_k, r_k) \cap M_{k+1}\right\}$$

es no vacío y por la misma razón anterior, se tiene que N_{k+1} también está bien definido.

De esta forma, se tiene que $r_k \leq \frac{1}{k+1}$, para todo $k \in \omega$, por lo que $(r_k)_{k\in\omega}$ es una sucesión convergente a 0. Además, dado que $B[x_{k+1}, r_{k+1}] \subseteq B(x_k, r_k)$ para todo $k \in \omega$, se tiene que si $\widetilde{k} > k$,

$$B[x_{\widetilde{k}}, r_{\widetilde{k}}] \subseteq B(x_k, r_k)$$

de donde

$$d(x_{\widetilde{k}}, x_k) \leq r_k,$$

así, se obtiene que $(x_k)_{k\in\omega}$ es una sucesión de Cauchy y, como E es completo, existe $x \in E$ tal que $(x_k)_{k\in\omega}$ converge a x.

Ahora, sea $k \in \omega$. Notemos que, $(x_{k+s})_{s\in\omega}$ es una sucesión de $B[x_k, r_k]$, el cual es un cerrado y, dado que $(x_{k+s})_{s\in\omega}$ converge a x, se tiene que $x \in B[x_k, r_k]$; además,

$$B[x_k, r_k] \subseteq U \cap M_n.$$

Por lo tanto,

$$x \in \bigcap_{k\in\omega} B[x_k, r_k] \subseteq U \cap \bigcap_{k\in\omega} M_k.$$

Así, $\bigcap_{k\in\omega} M_k$ es denso en E. □

Capítulo 4

Álgebra de Derivados

En el presente capítulo vamos a retomar el concepto de derivado de un conjunto en un espacio topológico. Se definirá la derivada de Cantor-Bendixson y propiedades asociadas a la misma, junto con esto, se presentará varias proposiciones acerca de derivados relacionadas a la unión, intersección y producto que serán de utilidad en los capítulos posteriores. La referencias principales para este capítulo son [13, 14].

En 1870, cuando Georg Cantor estudiaba la descomposición única de funciones en series de Fourier, un problema formulado por Heine, planteó el concepto de derivado de un conjunto. La idea era ayudarse de este concepto para encontrar cierta condición en los puntos de discontinuidad de las funciones y así resolver dicho problema (ver [4, 5, 6, 7, 8]). Posteriormente, junto con el concepto de números ordinales, se formalizó esta idea de conjuntos derivados dando lugar a la derivada de Cantor-Bendixson; esta derivada juega un papel importante en varias áreas de la Matemática, por ejemplo, es la base para la demostración del Teorema de Cantor-Bendixson (ver [11, cap. 3]). A continuación, usando Recursión-Transfinita, tal y como lo formuló G. Cantor en [6], presentamos esta definición.

DEFINICIÓN 4.1. *(Derivada de Cantor-Bendixson). Sea A un subconjunto de un espacio topológico. Para un ordinal α, definimos el α-ésimo derivado de A, notado por $A^{(\alpha)}$, como:*

- $A^{(0)} = A$;
- $A^{(\alpha+1)} = (A^{(\alpha)})'$, *para todo ordinal* α;
- $A^{(\alpha)} = \bigcap_{\gamma<\alpha} A^{(\gamma)}$, *para todo ordinal límite* $\alpha \neq 0$.

Comenzaremos con una proposición acerca de los derivados de conjuntos y su estabilidad respecto a la contenencia de conjuntos.

PROPOSICIÓN 4.1. *Sean (E, τ) un espacio topológico, A y B subconjuntos de E tales que $A \subseteq B$. Se tiene que $A' \subseteq B'$.*

Demostración. Sea $x \in A'$, vamos a demostrar que, para toda vecindad V de x, se tiene que

$$(V \setminus \{x\}) \cap B \neq \varnothing.$$

Sea V una vecindad de x, como $x \in A'$, tenemos que

$$(V \setminus \{x\}) \cap A \neq \varnothing,$$

además, como $A \subseteq B$, se tiene que

$$\varnothing \neq (V \setminus \{x\}) \cap A \subseteq (V \setminus \{x\}) \cap B,$$

de esta forma, concluimos que $(V \setminus \{x\}) \cap B \neq \varnothing$. □

Ahora, vamos a generalizar el resultado anterior para ordinales, teniendo la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 4.2. *Sean (E, τ) un espacio topológico, A y B subconjuntos de E tales que $A \subseteq B$. Se tiene que $A^{(\alpha)} \subseteq B^{(\alpha)}$, para todo ordinal α.*

Demostración. Procederemos por Inducción Transfinita.

- Se tiene que $A^{(0)} = A \subseteq B = B^{(0)}$, por la hipótesis.
- Ahora, supongamos que para un ordinal α, se tiene que $A^{(\alpha)} \subseteq B^{(\alpha)}$, por la Proposición 4.1, tenemos que $A^{(\alpha+1)} = (A^{(\alpha)})' \subseteq (B^{(\alpha)})' = B^{(\alpha+1)}$.
- Finalmente, sea $\lambda \neq 0$, un ordinal límite y supongamos que $A^{(\beta)} \subseteq B^{(\beta)}$ para todo $\beta < \lambda$. Con esto, se sigue que

$$A^{(\lambda)} = \bigcap_{\beta<\lambda} A^{(\beta)} \subseteq \bigcap_{\beta<\lambda} B^{(\beta)} = B^{(\lambda)}.$$

Por lo tanto, tenemos que $A^{(\alpha)} \subseteq B^{(\alpha)}$, para todo ordinal α. □

Vamos a demostrar que el derivado de un conjunto cerrado es un subconjunto del mismo, esto será de ayuda para demostrar proposiciones posteriores.

PROPOSICIÓN 4.3. *Sean (E, τ) un espacio topológico, A un subconjunto cerrado de E. Para todo $\alpha \in$ **OR**, se tiene que $A^{(\alpha)} \subseteq A$.*

Demostración. Procederemos por Inducción Transfinita.

- Por la definición de la derivada de Cantor-Bendixson, tenemos que $A^{(0)} = A$ y se cumple lo deseado.

- Ahora, supongamos que para un ordinal α, $A^{(\alpha)} \subseteq A$. Por la Proposición 4.1 tenemos que $A^{(\alpha+1)} = (A^{(\alpha)})' \subseteq A'$ pero, como A es cerrado, de la Proposición 3.3, tenemos que $A' \subseteq A$ y, por lo tanto, $A^{(\alpha+1)} \subseteq A$.

- Finalmente, sea $\lambda \neq 0$ un ordinal límite, supongamos que $A^{(\beta)} \subseteq A$ para todo $\beta < \lambda$. De aquí, se tiene que

$$A^{(\lambda)} = \bigcap_{\beta<\lambda} A^{(\beta)} \subseteq A.$$

Con esto, para todo $\alpha \in$ **OR** se tiene que $A^{(\alpha)} \subseteq A$. □

En la Proposición 3.8, demostramos que en un espacio topológico de Hausdorff el derivado de un conjunto arbitrario es un conjunto cerrado. Teniendo en cuenta dicha proposición, tenemos el siguiente corolario.

COROLARIO 4.4. *Sea (E, τ) un espacio de Hausdorff. Si $A \subseteq E$, se tiene que $A^{(n)}$ es un conjunto cerrado para todo $n \in \omega \setminus \{0\}$.*

Demostración. Análogamente a lo antes hecho, usando Inducción Finita, se tiene el resultado. □

Ahora, si partimos de un conjunto cerrado, no es necesario que el espacio tenga una condición extra de separación como demostramos a continuación.

PROPOSICIÓN 4.5. *Sea (E, τ) un espacio topológico. Si $A \subseteq E$ es cerrado, se tiene que A' es un conjunto cerrado.*

Demostración. Vamos a demostrar que $(A')^c$ es un conjunto abierto. Sea $x \in (A')^c$, con esto, x no es punto interior, por ende, existe V vecindad de x tal que

$$(V \setminus \{x\}) \cap A = \varnothing.$$

Por otro lado, como A es cerrado, de la Proposición 3.3, tenemos que $A' \subseteq A$ y, como $x \notin A'$, se sigue que

$$V \cap A' = (V \setminus \{x\}) \cap A' \subseteq (V \setminus \{x\}) \cap A = \varnothing$$

y, por ende, $V \cap A' = \varnothing$. Con esto concluimos que $V \subseteq (A')^c$, teniendo que $(A')^c$ es abierto y, por tanto, A' es cerrado. $\square$

Usando la proposición anterior, vamos a generalizar el resultado para la derivada de Cantor-Bendixson.

PROPOSICIÓN 4.6. *Sea E un espacio topológico. Si $A \subseteq E$ es cerrado, se tiene que $A^{(\alpha)}$ es un conjunto cerrado, para todo ordinal α.*

Demostración. Nuevamente, procederemos por Inducción Transfinita.

- Tenemos que $A^{(0)} = A$ y por hipótesis, se cumple lo deseado.
- Ahora, para un ordinal α, supongamos que $A^{(\alpha)}$ es cerrado, de la Proposición 4.5, se tiene que $A^{(\alpha+1)} = (A^{(\alpha)})'$ es cerrado.
- Finalmente, sea $\lambda \neq 0$ un ordinal límite, supongamos que $A^{(\beta)}$ es un conjunto cerrado para todo $\beta < \lambda$. Como $A^{(\lambda)} = \bigcap\limits_{\beta<\lambda} A^{(\beta)}$, al ser la intersección de conjuntos cerrados, tenemos que $A^{(\lambda)}$ es cerrado.

Con esto, tenemos que $A^{(\alpha)}$ es un conjunto cerrado, para todo ordinal α. $\square$

Ahora, vamos a demostrar que, la familia de derivados de un conjunto cerrado es una familia decreciente, según el orden dado por la contenencia de conjuntos.

PROPOSICIÓN 4.7. *Sean (E, τ) un espacio topológico y $A \subseteq E$ cerrado. Se tiene que $(A^{(\alpha)})_{\alpha \in \mathbf{OR}}$ es una familia decreciente de subconjuntos cerrados de E, es decir, $A^{(\alpha)} \subseteq A^{(\beta)}$ para todo α y β ordinales tales que $\alpha \geq \beta$.*

Demostración. De la Proposición 4.6, tenemos que $(A^{(\alpha)})_{\alpha \in \mathbf{OR}}$ es una familia de subconjuntos cerrados de E.

Por otro lado, sea un ordinal β, procediendo por Inducción Transfinita, demostraremos que $A^{(\alpha)} \subseteq A^{(\beta)}$ para todo $\alpha \geq \beta$.

- Tenemos que $A^{(\beta)} \subseteq A^{(\beta)}$.

- Ahora, supongamos que $A^{(\alpha)} \subseteq A^{(\beta)}$, con $\alpha \geq \beta$, por la Proposición 4.1, tenemos que $(A^{(\alpha)})' \subseteq (A^{(\beta)})'$. Además, como $A^{(\beta)}$ es un conjunto cerrado, tenemos que, $(A^{(\beta)})' \subseteq A^{(\beta)}$, de donde, $A^{(\alpha+1)} = A^{(\alpha)} \subseteq (A^{(\beta)})' \subseteq A^{(\beta)}$.

- Finalmente, sea $\lambda \neq 0$ un ordinal límite tal que $\lambda > \beta$ y supongamos que $A^{(\delta)} \subseteq A^{(\beta)}$ para todo $\delta < \lambda$, por lo tanto,

$$A^{(\lambda)} = \bigcap_{\delta<\lambda} A^{(\delta)} \subseteq A^{(\beta)}.$$

De aquí, $A^{(\alpha)} \subseteq A^{(\beta)}$ para todo α y β ordinales tales que $\alpha \geq \beta$. □

OBSERVACIÓN. Veamos que las hipótesis de las proposiciones precedentes son necesarias. Notemos que, en la Proposición 4.5, es necesario que A sea cerrado, pues tomando $E = \{a, b\}$ con $\tau = \{E, \varnothing\}$, su topología indiscreta y si $A = \{a\}$, se tiene que $A' = \{b\}$ y, por ende, A' no es un conjunto cerrado. En el mismo contexto, también tenemos que $A' \nsubseteq A$, por ende, la hipótesis de que A sea cerrado, es una hipótesis necesaria para la Proposición 4.7.

Finalmente, tomando $\mathbb{R}$ con la topología usual y $A =]0, 1[$, tenemos que

$$A' = [0, 1] \nsubseteq A,$$

a pesar de que $\mathbb{R}$ es un espacio de Hausdorff con la topología usual. Teniendo así que, aunque se añadan hipótesis de separabilidad, la condición que A sea un conjunto cerrado es necesaria para la Proposición 4.7.

4.1. Uniones e Intersecciones de Derivados

Usando la definición de la derivada de Cantor-Bendixson vamos a demostrar proposiciones relacionadas a la unión e intersección de conjuntos. Empezando por el derivado de la unión e intersección de dos conjuntos, generalizando a familias numerables, hasta llegar a la unión e intersección de familias arbitrarias.

PROPOSICIÓN 4.8. *Sean (E, τ) un espacio topológico, A y B subconjuntos de E. Se tiene que:*

(i) $(A \cup B)' = A' \cup B'$;

(ii) $(A \cap B)' \subseteq A' \cap B'$.

Demostración.

(i) Sean $x \in (A \cup B)'$ y V una vecindad de x, se tiene que

$$(V \setminus \{x\}) \cap (A \cup B) \neq \varnothing.$$

Por lo tanto, se tiene que

$$(V \setminus \{x\}) \cap A \neq \varnothing \qquad \text{o} \qquad (V \setminus \{x\}) \cap B \neq \varnothing,$$

es decir, $x \in A'$ o $x \in B'$, que equivalen a tener que $x \in A' \cup B'$. De donde, $(A \cup B)' = A' \cup B'$.

Por otro lado, como $A \subseteq A \cup B$ y $B \subseteq A \cup B$, utilizando la Proposición 4.1, se tiene que $A' \subseteq (A \cup B)'$ y $B' \subseteq (A \cup B)'$, por lo tanto, tenemos que $A' \cup B' \subseteq (A \cup B)'$.

(ii) Notemos que $A \cap B \subseteq A$ y $A \cap B \subseteq B$, nuevamente, de la Proposición 4.1, se tiene que $(A \cap B)' \subseteq A'$ y $(A \cap B)' \subseteq B'$, por lo tanto, concluimos que $(A \cap B)' \subseteq A' \cap B'$. □

OBSERVACIÓN. Notemos que en lo que respecta a la intersección, no se alcanza la igualdad de forma general. En efecto, tomando el espacio topológico $\mathbb{R}$ con su topología usual, tenemos que si $A =]0,1[$ y $B =]1,2[$, entonces $A' = [0,1]$ y $B' = [1,2]$, por ende, $(A \cap B)' = \varnothing$ y $A' \cap B' = \{1\}$, concluyendo, así, que no se cumple la otra inclusión.

Usando Inducción Finita, tenemos el siguiente corolario que extiende el resultado anterior a uniones e intersecciones finitas.

COROLARIO 4.9. *Sean (E, τ) un espacio topológico y $\{A_k\}_{k=0}^{n}$ una familia finita de subconjuntos de E. Para todo $n \in \omega$, se tiene que:*

(i) $\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)' = \bigcup_{k=0}^{n} A_k'$;

(ii) $\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right)' \subseteq \bigcap_{k=0}^{n} A_k'$.

Demostración.

(i) Usaremos Inducción Finita.

- Si $n = 0$, el resultado se tiene de inmediato.
- Ahora, supongamos que se cumple para $n \in \omega$, vamos a demostrar que

$$\left(\bigcup_{k=0}^{n+1} A_k\right)' = \bigcup_{k=0}^{n+1} A'_k.$$

De la hipótesis de inducción y usando la proposición anterior, tenemos que

$$\begin{aligned}\left(\bigcup_{k=0}^{n+1} A_k\right)' &= \left(\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \cup A_{n+1}\right)' \\ &= \left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)' \cup A'_{n+1} \\ &= \left(\bigcup_{k=0}^{n} A'_k\right) \cup A'_{n+1} = \bigcup_{k=0}^{n+1} A'_k.\end{aligned}$$

Por lo tanto, concluimos que

$$\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)' = \bigcup_{k=0}^{n} A'_k.$$

(ii) Nuevamente, usaremos Inducción Finita.

- Para $n = 0$, nuevamente, el resultado se tiene de inmediato.
- Ahora, supongamos que se cumple para $n \in \omega$, vamos a demostrar que

$$\left(\bigcap_{k=0}^{n+1} A_k\right)' \subseteq \bigcap_{k=0}^{n+1} A'_k.$$

De la hipótesis de inducción y usando la proposición anterior, tenemos que

$$\begin{aligned}\left(\bigcap_{k=0}^{n+1} A_k\right)' &= \left(\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right) \cap A_{n+1}\right)' \\ &\subseteq \left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right)' \cap A'_{n+1} \\ &\subseteq \left(\bigcap_{k=0}^{n} A'_k\right) \cap A'_{n+1} = \bigcap_{k=0}^{n+1} A'_k.\end{aligned}$$

Por lo tanto, concluimos que

$$\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right)' \subseteq \bigcap_{k=0}^{n} A_k'. \qquad \square$$

Usando las proposiciones anteriores, vamos a generalizar el Corolario 4.9 para todo derivado finito.

PROPOSICIÓN 4.10. *Sean (E, τ) un espacio topológico, A y B subconjuntos de E. Para todo $m \in \omega$, se tiene que:*

(i) $(A \cup B)^{(m)} = A^{(m)} \cup B^{(m)}$;

(ii) $(A \cap B)^{(m)} \subseteq A^{(m)} \cap B^{(m)}$.

Demostración.

(i) Procederemos por Inducción Finita.

- Para $m = 0$, el resultado es inmediato, puesto que

$$(A \cup B)^{(0)} = A \cup B = A^{(0)} \cup B^{(0)}.$$

- Ahora, supongamos que se cumple para $m \in \omega$, demostremos que

$$(A \cup B)^{(m+1)} = A^{(m+1)} \cup B^{(m+1)}.$$

Usando la hipótesis de inducción y la Proposición 4.8, tenemos que

$$\begin{aligned}(A \cup B)^{(m+1)} &= ((A \cup B)^{(m)})' \\ &= (A^{(m)} \cup B^{(m)})' = (A^{(m)})' \cup (B^{(m)})' \\ &= A^{(m+1)} \cup B^{(m+1)}.\end{aligned}$$

Con esto, demostramos que $(A \cup B)^{(m)} = A^{(m)} \cup B^{(m)}$, para todo $m \in \omega$.

(ii)
- Para $m = 0$, el resultado es inmediato, puesto que

$$(A \cap B)^{(0)} = A \cap B = A^{(0)} \cap B^{(0)}.$$

- Ahora, supongamos que se cumple para $m \in \omega$, demostremos que

$$(A \cap B)^{(m+1)} \subseteq A^{(m+1)} \cap B^{(m+1)}.$$

Usando la hipótesis de inducción, la Proposición 4.1 y la Proposición 4.8, tenemos que

$$\begin{aligned}(A\cap B)^{(m+1)} &= ((A\cap B)^{(m)})' \\ &\subseteq (A^{(m)}\cap B^{(m)})' \subseteq (A^{(m)})'\cap (B^{(m)})' \\ &= A^{(m+1)}\cap B^{(m+1)}.\end{aligned}$$

Con esto, demostramos que $(A\cap B)^{(m)} \subseteq A^{(m)}\cap B^{(m)}$, para todo $m\in\omega$. □

Nuevamente, usando Inducción Finita, vamos a generalizar el resultado anterior para familias finitas.

COROLARIO 4.11. *Sean (E,τ) un espacio topológico y $\{A_k\}_{k=0}^{n}$ una familia finita de subconjuntos de E. Para todo $n\in\omega$ y todo $m\in\omega$, se tiene que:*

(i) $\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)^{(m)} = \bigcup_{k=0}^{n} A_k^{(m)}$;

(ii) $\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right)^{(m)} \subseteq \bigcap_{k=0}^{n} A_k^{(m)}$.

Demostración.

(i) Sea $n\in\omega$, usaremos Inducción Finita sobre m.

- Si $m=0$, se tiene lo deseado, puesto que

$$\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)^{(0)} = \bigcup_{k=0}^{n} A_k = \bigcup_{k=0}^{n} A_k^{(0)}.$$

- Ahora, supongamos que se cumple para $m\in\omega$, vamos a demostrar que

$$\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)^{(m+1)} = \bigcup_{k=0}^{n} A_k^{(m+1)}.$$

De la hipótesis de inducción y usando el Corolario 4.9, tenemos que

$$\begin{aligned}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)^{(m+1)} &= \left(\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)^{(m)}\right)' \\ &= \left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k^{(m)}\right)'\end{aligned}$$

$$= \bigcup_{k=0}^{n} \left(A_k^{(m)}\right)' = \bigcup_{k=0}^{n} A_k^{(m+1)}.$$

Por lo tanto, concluimos que, para todo $m \in \omega$,

$$\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)^{(m)} = \bigcup_{k=0}^{n} A_k^{(m)}.$$

(ii) Sea $n \in \omega$, usaremos Inducción Finita sobre m.

- Si $m = 0$, el resultado se tiene de inmediato, puesto que

$$\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right)^{(0)} = \bigcap_{k=0}^{n} A_k = \bigcap_{k=0}^{n} A_k^{(0)}.$$

- Ahora, supongamos que se cumple para $m \in \omega$, vamos a demostrar que

$$\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right)^{(m+1)} \subseteq \bigcap_{k=0}^{n} A_k^{(m+1)}.$$

De la hipótesis de inducción y usando el Corolario 4.9, tenemos que

$$\begin{aligned}\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right)^{(m+1)} &= \left(\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right)^{(m)}\right)' \\ &\subseteq \left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k^{(m)}\right)' \\ &\subseteq \bigcap_{k=0}^{n} \left(A_k^{(m)}\right)' = \bigcap_{k=0}^{n} A_k^{(m+1)}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, concluimos que, para todo $m \in \omega$

$$\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right)^{(m)} \subseteq \bigcap_{k=0}^{n} A_k^{(m)}.$$ □

A continuación, analizaremos los resultados anteriores en el caso de un número ordinal arbitrario.

PROPOSICIÓN 4.12. *Sean (E, τ) un espacio topológico, A y B subconjuntos de E. Para todo $\alpha \in$ **OR**, se tiene que:*

(i) $A^{(\alpha)} \cup B^{(\alpha)} \subseteq (A \cup B)^{(\alpha)}$;

(ii) $(A \cap B)^{(\alpha)} \subseteq A^{(\alpha)} \cap B^{(\alpha)}$.

Demostración.

(i) Procederemos por Inducción Transfinita.

- Procediendo de manera análoga a la base de inducción y al paso inductivo de la demostración del literal (i) de la Proposición 4.10, se tiene que

$$A^{(0)} \cup B^{(0)} \subseteq (A \cup B)^{(0)}$$

y que para todo $\alpha \in \mathbf{OR}$

$$A^{(\alpha)} \cup B^{(\alpha)} \subseteq (A \cup B)^{(\alpha)}$$

implica

$$A^{(\alpha+1)} \cup B^{(\alpha+1)} \subseteq (A \cup B)^{(\alpha+1)}.$$

- Por último, sea $\lambda \neq 0$ un ordinal límite, supongamos que

$$A^{(\gamma)} \cup B^{(\gamma)} \subseteq (A \cup B)^{(\gamma)}$$

para todo $\gamma < \lambda$, vamos a demostrar que

$$A^{(\lambda)} \cup B^{(\lambda)} \subseteq (A \cup B)^{(\lambda)}.$$

De la hipótesis y la Proposición 2.4, tenemos que

$$\begin{aligned} A^{(\lambda)} \cup B^{(\lambda)} &= \left(\bigcap_{\gamma<\lambda} A^{(\gamma)} \right) \cup \left(\bigcap_{\gamma<\lambda} B^{(\gamma)} \right) \\ &\subseteq \bigcap_{\gamma<\lambda} \left(A^{(\gamma)} \cup B^{(\gamma)} \right) \\ &\subseteq \bigcap_{\gamma<\lambda} (A \cup B)^{(\gamma)} = (A \cup B)^{(\lambda)}. \end{aligned}$$

Con esto, demostramos que $A^{(\alpha)} \cup B^{(\alpha)} \subseteq (A \cup B)^{(\alpha)}$, para todo ordinal α.

(ii)

- Procediendo de manera análoga a la base de inducción y al paso inductivo de la demostración del literal (ii) de la Proposición 4.10, se tiene que

$$(A \cap B)^{(0)} \subseteq A^{(0)} \cap B^{(0)}$$

y que para todo $\alpha \in \mathbf{OR}$

$$(A \cap B)^{(\alpha)} \subseteq A^{(\alpha)} \cap B^{(\alpha)}$$

implica

$$(A \cap B)^{(\alpha+1)} \subseteq A^{(\alpha+1)} \cap B^{(\alpha+1)}.$$

- Por último, sea $\lambda \neq 0$ un ordinal límite, supongamos que

$$(A \cap B)^{(\gamma)} \subseteq A^{(\gamma)} \cap B^{(\gamma)}$$

para todo $\gamma < \lambda$, vamos a demostrar que

$$(A \cap B)^{(\lambda)} \subseteq A^{(\lambda)} \cap B^{(\lambda)}.$$

De la hipótesis, tenemos que

$$\begin{aligned}(A \cap B)^{(\lambda)} &= \bigcap_{\gamma<\lambda} (A \cap B)^{(\gamma)} \\ &\subseteq \bigcap_{\gamma<\lambda} \left(A^{(\gamma)} \cap B^{(\gamma)}\right) \\ &= \left(\bigcap_{\gamma<\lambda} A^{(\gamma)}\right) \cap \left(\bigcap_{\gamma<\lambda} B^{(\gamma)}\right) \\ &= A^{(\lambda)} \cap B^{(\lambda)}.\end{aligned}$$

Con esto, demostramos que $(A \cap B)^{(\alpha)} \subseteq A^{(\alpha)} \cap B^{(\alpha)}$, para todo ordinal α. □

Para construir un contraejemplo en el cual no se alcance la igualdad para el caso de unión de derivados en la proposición anterior, usaremos el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 4.13. *Para todo $\alpha \in \omega_1$ y para todo $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$, existe $K \subseteq \mathbb{R}$ compacto y numerable tal que $K \subseteq]a, b]$ y $K^{(\alpha)} = \{b\}$.*

Demostración. La demostración puede ser encontrada en [1]. □

OBSERVACIÓN. Notemos que, en el caso de la unión en la proposición anterior la igualdad no necesariamente se cumple. En efecto, de la Proposición 4.13, existe $K \subseteq]-1, 0]$ compacto y numerable tal que $K^{(\omega)} = \{0\}$. Así, tomando $A = K \setminus \{0\}$ y $B = \{0\}$; tenemos que $B^{(\omega)} = \varnothing$. Por otro lado

$$A^{(\omega)} = (K \setminus \{0\})^{(\omega)} \subseteq K^{(\omega)} = \{0\},$$

pero $0 \notin A$, por ende, $A^{(\omega)} = \varnothing$. De esta forma, $A^{(\omega)} \cup B^{(\omega)} = \varnothing$ y $(A \cup B)^{(\omega)} = K^{(\omega)}$, mostrando que no se da la igualdad.

En la proposición anterior, para que se cumpla la igualdad en el caso de la unión se necesitan condiciones adicionales sobre los conjuntos A y B, como mostramos a continuación.

PROPOSICIÓN 4.14. *Sean (E, τ) un espacio topológico, A y B subconjuntos cerrados de E. Para todo $\alpha \in$ **OR**, se tiene que*

$$A^{(\alpha)} \cup B^{(\alpha)} = (A \cup B)^{(\alpha)}.$$

Demostración. De la Proposición 4.12, se sigue que, para todo $\alpha \in$ **OR**,

$$A^{(\alpha)} \cup B^{(\alpha)} \subseteq (A \cup B)^{(\alpha)}.$$

Ahora, para la otra contenencia, procediendo de manera análoga a la base de inducción y al paso inductivo de la demostración del literal (i) de la Proposición 4.10, se tiene que

$$(A \cup B)^{(0)} \subseteq A^{(0)} \cup B^{(0)}$$

y que, para todo $\alpha \in$ **OR**,

$$(A \cup B)^{(\alpha)} \subseteq A^{(\alpha)} \cup B^{(\alpha)}$$

implica

$$(A \cup B)^{(\alpha+1)} \subseteq A^{(\alpha+1)} \cup B^{(\alpha+1)}.$$

Finalmente, sea $\lambda \neq 0$ un ordinal límite, supongamos que

$$(A \cup B)^{(\gamma)} \subseteq A^{(\gamma)} \cup B^{(\gamma)}$$

para todo $\gamma < \lambda$, vamos a demostrar que

$$(A \cup B)^{(\lambda)} \subseteq A^{(\lambda)} \cup B^{(\lambda)}.$$

Sea $z \in (A \cup B)^{(\lambda)}$, por reducción al absurdo, supongamos que $z \notin A^{(\lambda)}$ y $z \notin B^{(\lambda)}$, por ende, existen $\gamma_1, \gamma_2 \in$ **OR** tales que $\gamma_1 < \lambda$, $\gamma_2 < \lambda$, $z \notin A^{(\gamma_1)}$ y $z \notin B^{(\gamma_2)}$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\gamma_2 < \gamma_1$, por lo tanto, de la Proposición 4.7, $B^{(\gamma_1)} \subseteq B^{(\gamma_2)}$; con esto, $z \notin A^{(\gamma_1)} \cap B^{(\gamma_1)}$, lo que contradice el hecho de que $z \in (A \cup B)^{(\lambda)}$. Con esto, hemos demostrado que, para todo $\alpha \in$ **OR**, se tiene

que
$$A^{(\alpha)} \cup B^{(\alpha)} = (A \cup B)^{(\alpha)}. \qquad \square$$

Ahora, teniendo en mente lo hecho en la Proposición 4.12, vamos a analizar el caso cuando tenemos una familia finita de subconjuntos de un espacio topológico.

COROLARIO 4.15. *Sean (E, τ) un espacio topológico y $\{A_k\}_{k=0}^{n}$ una familia finita de subconjuntos de E. Para todo $n \in \omega$ y todo $\alpha \in$ **OR**, se tiene que:*

(i) $\displaystyle\bigcup_{k=0}^{n} A_k^{(\alpha)} \subseteq \left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)^{(\alpha)}$;

(ii) $\displaystyle\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right)^{(\alpha)} \subseteq \bigcap_{k=0}^{n} A_k^{(\alpha)}$.

Demostración.

(i) Sea $n \in \omega$, usaremos Inducción Transfinita.

- Procediendo de manera análoga a la base de inducción y al paso inductivo de la demostración del literal (i) del Corolario 4.11, se tiene que
$$\bigcup_{k=0}^{n} A_k^{(0)} \subseteq \left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)^{(0)}$$
y que para todo $\alpha \in \mathbf{OR}$
$$\bigcup_{k=0}^{n} A_k^{(\alpha)} \subseteq \left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)^{(\alpha)}$$
implica
$$\bigcup_{k=0}^{n} A_k^{(\alpha+1)} \subseteq \left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)^{(\alpha+1)}.$$
- Por último, sea $\lambda \neq 0$ un ordinal límite, supongamos que
$$\bigcup_{k=0}^{n} A_k^{(\gamma)} \subseteq \left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)^{(\gamma)}$$
para todo $\gamma < \lambda$, vamos a demostrar que
$$\bigcup_{k=0}^{n} A_k^{(\lambda)} \subseteq \left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)^{(\lambda)}.$$

De la hipótesis y la Proposición 2.4, tenemos que

$$
\begin{aligned}
\bigcup_{k=0}^{n} A_k^{(\gamma)} &= \bigcup_{k=0}^{n} \left(\bigcap_{\gamma<\lambda} A_k^{(\gamma)} \right) \\
&\subseteq \bigcap_{\gamma<\lambda} \left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k^{(\gamma)} \right) \\
&\subseteq \bigcap_{\gamma<\lambda} \left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k \right)^{(\gamma)} = \left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k \right)^{(\lambda)}.
\end{aligned}
$$

Con esto, demostramos que $\bigcup_{k=0}^{n} A_k^{(\alpha)} \subseteq \left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k \right)^{(\alpha)}$, para todo ordinal α.

(ii) Sea $n \in \omega$, usaremos Inducción Transfinita.

- Procediendo de manera análoga a la base de inducción y al paso inductivo del literal (ii) del Corolario 4.11, se tiene que

$$\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k \right)^{(0)} \subseteq \bigcap_{k=0}^{n} A_k^{(0)}$$

y que para todo $\alpha \in \mathbf{OR}$

$$\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k \right)^{(\alpha)} \subseteq \bigcap_{k=0}^{n} A_k^{(\alpha)}$$

implica

$$\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k \right)^{(\alpha+1)} \subseteq \bigcap_{k=0}^{n} A_k^{(\alpha+1)}.$$

- Por último, sea $\lambda \neq 0$ un ordinal límite, supongamos que

$$\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k \right)^{(\gamma)} \subseteq \bigcap_{k=0}^{n} A_k^{(\gamma)}$$

para todo $\gamma < \lambda$, vamos a demostrar que

$$\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k \right)^{(\lambda)} \subseteq \bigcap_{k=0}^{n} A_k^{(\lambda)}.$$

De la hipótesis y la Proposición 2.4, tenemos que

$$\begin{aligned}\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right)^{(\lambda)} &= \bigcap_{\gamma<\lambda}\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right)^{(\gamma)} \\ &\subseteq \bigcap_{\gamma<\lambda}\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k^{(\gamma)}\right) \\ &= \bigcap_{k=0}^{n}\left(\bigcap_{\gamma<\lambda} A_k^{(\gamma)}\right) \\ &= \bigcap_{k=0}^{n} A_k^{(\gamma)}.\end{aligned}$$

Con esto, demostramos que $\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right)^{(\alpha)} \subseteq \bigcap_{k=0}^{n} A_k^{(\alpha)}$, para todo ordinal α. □

Ahora, bajo hipótesis análogas a las establecidas en la Proposición 4.14, vamos a demostrar que el resultado anterior alcanza la igualdad, en el caso de la unión, para una familia finita de conjuntos cerrados. Este corolario será importante para demostrar el resultado principal del presente trabajo.

COROLARIO 4.16. *Sean (E, τ) un espacio topológico y $\{A_k\}_{k=0}^{n}$ una familia finita de subconjuntos cerrados de E. Para todo $n \in \omega$ y $\alpha \in$ **OR**, se tiene que*

$$\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)^{(\alpha)} = \bigcup_{k=0}^{n} A_k^{(\alpha)}.$$

Demostración. Sea $n \in \omega$, procederemos por Inducción Transfinita.

- Procediendo de manera análoga a la base de inducción y al paso inductivo de la demostración del literal (i) del Corolario 4.11, se tiene que

$$\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)^{(0)} = \bigcup_{k=0}^{n} A_k^{(0)}$$

  y que, para todo $\alpha \in$ **OR**,

$$\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)^{(\alpha)} = \bigcup_{k=0}^{n} A_k^{(\alpha)}$$

implica

$$\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)^{(\alpha+1)} = \bigcup_{k=0}^{n} A_k^{(\alpha+1)}.$$

- Por último, sea $\lambda \neq 0$ un ordinal límite, del corolario anterior, tenemos que

$$\bigcup_{k=0}^{n} A_k^{(\lambda)} \subseteq \left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)^{(\lambda)}.$$

Con esto, basta demostrar la otra contenencia, para ello, supongamos que

$$\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)^{(\gamma)} \subseteq \bigcup_{k=0}^{n} A_k^{(\gamma)}$$

para todo $\gamma < \lambda$, vamos a demostrar que

$$\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)^{(\lambda)} \subseteq \bigcup_{k=0}^{n} A_k^{(\lambda)}.$$

Sea $z \in \left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)^{(\lambda)}$, por reducción al absurdo, supongamos que para todo $k \in \omega$ tal que $0 \leq k \leq n$, $z \notin A_k^{(\lambda)}$, por ende, para todo $k \in \omega$ tal que $0 \leq k \leq n$, existen $\gamma_k \in \mathbf{OR}$ tal que $\gamma_k < \lambda$ y $z \notin A_k^{\gamma_k}$. Ahora, tomemos $\gamma = \max_{0 \leq k \leq n} \gamma_k$, como $\gamma \geq \gamma_k$, para todo $k \in \omega$ tal que $0 \leq k \leq n$, de la Proposición 4.7, $A_k^{(\gamma)} \subseteq A_k^{(\gamma_k)}$, por tanto, $z \notin A_k^{(\gamma)}$, es decir, $z \notin \bigcap_{k=0}^{n} A_k^{(\gamma)}$, lo que contradice el hecho que $z \in \left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)^{(\lambda)}$.

Con esto, demostramos que $\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)^{(\alpha)} = \bigcup_{k=0}^{n} A_k^{(\alpha)}$, para todo ordinal α. □

Ahora, siguiendo la línea descrita al inicio de esta sección, vamos a demostrar algunas proposiciones relacionadas al comportamiento del derivado de un conjunto usando uniones e intersecciones arbitrarias.

PROPOSICIÓN 4.17. *Sean (E, τ) un espacio topológico y $\mathcal{A}$ una familia arbitraria de subconjuntos de E. Se tiene que:*

(i) $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A' \subseteq \left(\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A\right)'$;

(ii) $\left(\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A\right)' \subseteq \bigcap_{A\in\mathcal{A}} A'$.

Demostración.

(i) Sea $x \in \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A'$; con esto, existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $x \in A'$, demostremos que para toda V vecindad de x, se tiene que

$$(V \setminus \{x\}) \cap \left(\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A\right) \neq \varnothing.$$

Sea V una vecindad de x, como $x \in A'$, tenemos que

$$(V \setminus \{x\}) \cap A \neq \varnothing,$$

de ahí que

$$\varnothing \neq (V \setminus \{x\}) \cap A \subseteq (V \setminus \{x\}) \cap \left(\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A\right).$$

Dado que V fue arbitrario, tenemos que $x \in \left(\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A\right)'$ y, por ende,

$$\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A' \subseteq \left(\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A\right)'.$$

(ii) Sea $x \in \left(\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A\right)'$, vamos a demostrar que, para todo $A \in \mathcal{A}$ y toda V vecindad de x, se tiene que

$$(V \setminus \{x\}) \cap A \neq \varnothing.$$

Sean $A \in \mathcal{A}$ y V una vecindad de x, de la hipótesis, se sigue que

$$\varnothing \neq (V \setminus \{x\}) \cap \left(\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A\right) \subseteq (V \setminus \{x\}) \cap A.$$

Dado que $A \in \mathcal{A}$ y V fueron arbitrarios, se concluye que $x \in \bigcap_{A\in\mathcal{A}} A'$ y, por ende,

$$\left(\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A\right)' \subseteq \bigcap_{A\in\mathcal{A}} A'.$$

□

OBSERVACIÓN. Notemos que para la unión, la otra contenencia no necesariamente se cumple, pues, si tomamos

$$\mathcal{A} = \{\{x\} : x \in \mathbb{R}\},$$

se tiene que

$$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A' = \bigcup_{x \in \mathbb{R}} \{x\}' = \varnothing.$$

Por otro lado,

$$\left(\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A\right)' = \left(\bigcup_{x \in \mathbb{R}} \{x\}\right)' = \mathbb{R}' = \mathbb{R}.$$

De igual forma, en general, en el caso numerable tampoco se da la otra inclusión. En efecto, tomando $A_n = \left\{\dfrac{1}{n+1}\right\}$ para todo $n \in \omega$, tenemos que

$$\bigcup_{n \in \omega} A_n' = \bigcup_{n \in \omega} \left\{\frac{1}{n+1}\right\}' = \varnothing.$$

Por otro lado,

$$\left(\bigcup_{n \in \omega} A_n\right)' = \left\{\frac{1}{n+1} : n \in \omega\right\}' = \{0\},$$

teniendo que no se da la igualdad.

Vamos a extender el resultado anterior para todo derivado finito, es decir, vamos a demostrar que para todo $m \in \omega$ se tiene el siguiente resultado.

COROLARIO 4.18. *Sean (E, τ) un espacio topológico y $\mathcal{A}$ una familia arbitraria de subconjuntos de E. Para todo $m \in \omega$, se tiene que:*

(i) $\displaystyle\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A^{(m)} \subseteq \left(\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A\right)^{(m)}$;

(ii) $\displaystyle\left(\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A\right)^{(m)} \subseteq \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A^{(m)}$.

Demostración.

(i) Usaremos Inducción Finita.

- Si $m = 0$, se tiene lo deseado, puesto que

$$\left(\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A\right)^{(0)} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A^{(0)}.$$

- Ahora, supongamos que se cumple para $m \in \omega$, vamos a demostrar que

$$\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A^{(m+1)} \subseteq \left(\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A\right)^{(m+1)}.$$

De la hipótesis de inducción, junto con la Proposición 4.17, tenemos que

$$\begin{aligned}\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A^{(m+1)} &= \bigcup_{A\in\mathcal{A}} (A^{(m)})' \\ &\subseteq \left(\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A^{(m)}\right)' \\ &\subseteq \left(\left(\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A\right)^{(m)}\right)' = \left(\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A\right)^{(m+1)}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, concluimos que, para todo $m \in \omega$

$$\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A^{(m)} \subseteq \left(\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A\right)^{(m)}.$$

(ii) Nuevamente, usaremos Inducción Finita.

- Para $m = 0$, el resultado es inmediato pues

$$\left(\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A\right)^{(0)} = \bigcap_{A\in\mathcal{A}} A = \bigcap_{A\in\mathcal{A}} A^{(0)}.$$

- Ahora, supongamos que se cumple para $m \in \omega$, vamos a demostrar que

$$\left(\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A\right)^{(m+1)} \subseteq \bigcap_{A\in\mathcal{A}} A^{(m+1)}.$$

De la hipótesis de inducción, junto con la Proposición 4.17, tenemos que

$$\begin{aligned}\left(\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A\right)^{(m+1)} &= \left(\left(\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A\right)^{(m)}\right)' \\ &\subseteq \left(\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A^{(m)}\right)' \\ &\subseteq \bigcap_{A\in\mathcal{A}} (A^{(m)})' = \bigcap_{A\in\mathcal{A}} A^{(m+1)}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, concluimos que, para todo $m \in \omega$

$$\left(\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A \right)^{(m)} \subseteq \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A^{(m)}. \qquad \square$$

Con todo lo antes hecho, surge una pregunta natural: ¿Podemos generalizar los resultados anteriores para la derivada de Cantor-Bendixson? La respuesta es sí, vamos a extender los resultados a la derivada de Cantor-Bendixson, para ello, usaremos Inducción Transfinita.

PROPOSICIÓN 4.19. *Sean (E, τ) un espacio topológico y $\mathcal{A}$ una familia arbitraria de subconjuntos de E. Para todo $\alpha \in \mathbf{OR}$, se tiene que:*

(i) $\displaystyle \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A^{(\alpha)} \subseteq \left(\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \right)^{(\alpha)}$;

(ii) $\displaystyle \left(\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A \right)^{(\alpha)} \subseteq \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A^{(\alpha)}$.

Demostración.

(i) Usaremos Inducción Transfinita.

- Procediendo de manera análoga a la base de inducción y al paso inductivo de la demostración del literal (i) del Corolario 4.18, se tiene que

$$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A^{(0)} \subseteq \left(\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \right)^{(0)}$$

y que para todo $\alpha \in \mathbf{OR}$

$$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A^{(\alpha)} \subseteq \left(\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \right)^{(\alpha)}$$

implica

$$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A^{(\alpha+1)} \subseteq \left(\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \right)^{(\alpha+1)}.$$

- Por último, sea $\lambda \neq 0$ un ordinal límite, supongamos que

$$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A^{(\gamma)} \subseteq \left(\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \right)^{(\gamma)},$$

para todo $\gamma < \lambda$, demostremos que

$$\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A^{(\lambda)} \subseteq \left(\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A\right)^{(\lambda)}.$$

De la hipótesis de inducción y la Proposición 2.4, tenemos que

$$\begin{aligned}
\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A^{(\lambda)} &= \bigcup_{A\in\mathcal{A}} \left(\bigcap_{\gamma<\lambda} A^{(\gamma)}\right) \\
&\subseteq \bigcap_{\gamma<\lambda} \left(\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A^{(\gamma)}\right) \\
&\subseteq \bigcap_{\gamma<\lambda} \left(\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A\right)^{(\gamma)} = \left(\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A\right)^{(\lambda)}.
\end{aligned}$$

(ii) Nuevamente, usaremos Inducción Transfinita.

- Procediendo de manera análoga a la base de inducción y al paso inductivo del literal (ii) del Corolario 4.18, se tiene que

  $$\left(\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A\right)^{(0)} \subseteq \bigcap_{A\in\mathcal{A}} A^{(0)}$$

  y que para todo $\alpha \in \mathbf{OR}$

  $$\left(\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A\right)^{(\alpha)} \subseteq \bigcap_{A\in\mathcal{A}} A^{(\alpha)}$$

  implica

  $$\left(\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A\right)^{(\alpha+1)} \subseteq \bigcap_{A\in\mathcal{A}} A^{(\alpha+1)}.$$

- Finalmente, sea $\lambda \neq 0$ un ordinal límite, supongamos que

  $$\left(\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A\right)^{(\gamma)} \subseteq \bigcap_{A\in\mathcal{A}} A^{(\gamma)}$$

  para todo $\gamma < \lambda$, vamos a demostrar que

  $$\left(\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A\right)^{(\lambda)} \subseteq \bigcap_{A\in\mathcal{A}} A^{(\lambda)}.$$

De la hipótesis de inducción y la Proposición 2.4, tenemos que

$$\begin{aligned}\left(\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A\right)^{(\lambda)} &= \bigcap_{\gamma<\lambda}\left(\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A\right)^{(\gamma)} \\ &\subseteq \bigcap_{\gamma<\lambda}\left(\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A^{(\gamma)}\right) \\ &= \bigcap_{A\in\mathcal{A}}\left(\bigcap_{\gamma<\lambda} A^{(\gamma)}\right) = \bigcap_{A\in\mathcal{A}} A^{(\lambda)}\end{aligned}$$

Por lo tanto, concluimos que, para todo $\alpha \in \mathbf{OR}$,

$$\left(\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A\right)^{(\alpha)} \subseteq \bigcap_{A\in\mathcal{A}} A^{(\alpha)}.$$

□

4.2. Producto de Derivados

Análogamente a lo hecho para uniones e intersecciones, vamos a demostrar algunas propiedades para derivados usando el producto de conjuntos y la topología producto revisada en el capítulo anterior.

PROPOSICIÓN 4.20. *Sean (E,τ_1) y (F,τ_2) dos espacio topológicos, A y B subconjuntos de E y F respectivamente. Se tiene que:*

$$(A\times B)' = (A'\times \overline{B}) \cup (\overline{A}\times B').$$

Demostración. Sea $(x,y)\in (A\times B)'$. Gracias a la relación entre derivado y clausura de un conjunto y la Proposición 3.18, tenemos que

$$(A\times B)' \subseteq \overline{A\times B} = \overline{A}\times\overline{B},$$

por lo tanto, $(x,y)\in \overline{A}\times\overline{B}$. Con esto, tenemos los siguientes casos:

- Si $x\in A'$, se tiene de inmediato que $(x,y)\in (A'\times\overline{B})\cup(\overline{A}\times B')$;
- Si $x\notin A'$, existe una vecindad U de x tal que $U\cap A = \{x\}$. Sea V una vecindad de y, tenemos que $U\times V$ es vecindad de (x,y), así, existe

  $$(x_1,y_1)\in ((U\times V)\smallsetminus \{(x,y)\})\cap (A\times B),$$

  por lo tanto, $(x_1,y_1)\neq (x,y)$, pero $x_1 = x$ pues $x_1\in U\cap A$, por ende, $y\neq y_1$;

con esto, concluimos que $y_1 \in (V \setminus \{y\}) \cap B$, es decir, $y \in B'$ y, por ende, $(x, y) \in (A' \times \overline{B}) \cup (\overline{A} \times B')$.

Recíprocamente, sean $(x, y) \in (A' \times \overline{B}) \cup (\overline{A} \times B')$ y $V = U \times W$ una vecindad de (x, y); con esto, U y W son vecindades de x y y, respectivamente.

- Si $(x, y) \in A' \times \overline{B}$, existen x_1, y_1 tales que

  $$x_1 \in (U \setminus \{x\}) \cap A \quad \text{ y } \quad y_1 \in W \cap B;$$

  con esto, $(x_1, y_1) \neq (x, y)$ y, además:

  $$(x_1, y_1) \in (V \setminus \{(x, y)\}) \cap (A \times B),$$

  es decir, $(x, y) \in (A \times B)'$.

- Si $(x, y) \in \overline{A} \times B'$, análogamente al caso anterior, tenemos que $(x, y) \in (A \times B)'$.

Con esto, concluimos que $(A \times B)' = (A' \times \overline{B}) \cup (\overline{A} \times B')$. □

Para generalizar este resultado, establecemos la siguiente notación. Sean K un conjunto de índices y $\{A_k\}_{k \in K}$ una familia de conjuntos. Para $I, J \subseteq K$ tales que $I \cap J = \varnothing$ y $I \cup J \neq \varnothing$, definimos

$$\prod_{i \in I} A_i \times \prod_{j \in J} A_j = \begin{cases} \prod\limits_{i \in I} A_i & \text{si } J = \varnothing, \\ \prod\limits_{i \in J} A_i & \text{si } I = \varnothing, \\ \prod\limits_{i \in I \cup J} A_i & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Con esto, y recordando que $\prod\limits_{i=k}^{k} A_i = A_k$, tenemos que,

$$\prod_{i=0}^{n+1} A_i = \prod_{i=0}^{n} A_i \times A_{n+1},$$

para cada $n \in \omega$.

Tomando en cuenta familias finitas de subconjuntos de espacios topológicos, se tiene el siguiente corolario.

COROLARIO 4.21. *Sean* $\{(E_k, \tau_k)\}_{k=0}^n$ *una familia de espacios topológicos y* $A_k \subseteq E_k$ *para todo* $k \leq n$*. Para todo* $n \in \omega$*, se tiene que*

$$\left(\prod_{k=0}^{n} A_k\right)' = \bigcup_{m=0}^{n} \left(\prod_{k<m} \overline{A_k} \times A'_m \times \prod_{k>m} \overline{A_k}\right).$$

Demostración. Usaremos Inducción Finita.

- Si $n = 0$,
$$\left(\prod_{k=0}^{0} A_k\right)' = (A_0)' = A'_0 = \prod_{k=0}^{0} A'_k,$$
teniendo lo deseado.

- Ahora, supongamos que se cumple para $n \in \omega$, vamos a demostrar que
$$\left(\prod_{k=0}^{n+1} A_k\right)' = \bigcup_{m=0}^{n+1} \left(\prod_{k=0}^{m-1} \overline{A_k} \times A'_m \times \prod_{k=m+1}^{n+1} \overline{A_k}\right).$$
De la hipótesis de inducción, de la proposición anterior y la Proposición 3.18, tenemos que
$$\begin{aligned}
\left(\prod_{k=0}^{n+1} A_k\right)' &= \left(\prod_{k=0}^{n} A_k \times A_{n+1}\right)' \\
&= \left[\left(\prod_{k=0}^{n} A_k\right)' \times \overline{A_{n+1}}\right] \cup \left[\overline{\prod_{k=0}^{n} A_k} \times A'_{n+1}\right] \\
&= \left[\bigcup_{m=0}^{n} \left(\prod_{k=0}^{m-1} \overline{A_k} \times A'_m \times \prod_{k=m+1}^{n} \overline{A_k}\right) \times \overline{A_{n+1}}\right] \cup \left[\prod_{k=0}^{n} \overline{A_k} \times A'_{n+1}\right] \\
&= \bigcup_{m=0}^{n} \left(\prod_{k=0}^{m-1} \overline{A_k} \times A'_m \times \prod_{k=m+1}^{n+1} \overline{A_k}\right) \cup \left[\prod_{k=0}^{n} \overline{A_k} \times A'_{n+1}\right] \\
&= \bigcup_{m=0}^{n+1} \left(\prod_{k=0}^{m-1} \overline{A_k} \times A'_m \times \prod_{k=m+1}^{n+1} \overline{A_k}\right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, concluimos que, para todo $n \in \omega$

$$\left(\prod_{k=0}^{n} A_k\right)' = \bigcup_{m=0}^{n} \left(\prod_{k<m} \overline{A_k} \times A'_m \times \prod_{k>m} \overline{A_k}\right). \qquad \square$$

OBSERVACIÓN. Por la Proposición 4.20, sabemos que $(A \times B)' = (A' \times \overline{B}) \cup (\overline{A} \times B')$, usando nuevamente la Proposición 4.20 para $(A \times B)'$, tenemos que

$$(A \times B)^{(2)} = (A' \times \overline{B})' \cup (\overline{A} \times B')'$$

$$= (A^{(2)} \times \overline{B}) \cup (\overline{A'} \times (\overline{B})') \cup (\overline{A})' \times \overline{B'}) \cup (\overline{A} \times B^{(2)}).$$

Con la misma idea, para $(A \times B)^{(2)}$, tenemos que

$$\begin{aligned}(A \times B)^{(3)} &= (A^{(2)} \times \overline{B})' \cup (\overline{A'} \times (\overline{B})')' \cup ((\overline{A})' \times \overline{B'})' \cup (\overline{A} \times B^{(2)})' \\ &= (A^{(3)} \times \overline{B}) \cup (A^{(2)} \times (\overline{B})') \cup ((\overline{A'})' \times (\overline{B})') \cup (\overline{A'} \times (\overline{B})^{(2)}) \\ &\cup ((\overline{A})^{(2)} \times \overline{B'}) \cup ((\overline{A})' \times (\overline{B'})') \cup ((\overline{A})' \times B^{(2)}) \cup (\overline{A} \times B^{(3)}).\end{aligned}$$

Teniendo esto en mente, el tener una expresión para $(A \cup B)^{(\alpha)}$, donde α sea un ordinal arbitrario, sin ninguna hipótesis adicional, no es sencillo, pues siempre van a existir conjuntos con derivados y clausuras iteradas.

A diferencia de lo hecho con familias finitas, para familias numerables, de la observación anterior, es posible notar que solo se tiene una contenencia. La siguiente proposición será de ayudar para demostrar que algunos conjuntos de interés son conjuntos perfectos.

PROPOSICIÓN 4.22. *Sean $((E_n, \tau_n))_{n\in\omega}$ una familia de espacios topológicos y $(A_n)_{n\in\omega}$ una familia de conjuntos tales que $A_n \subseteq E_n$ para todo $n \in \omega$. Se tiene que*

$$\bigcup_{n\in\omega} \left(\prod_{k<n} \overline{A_k} \times A_n' \times \prod_{k>n} \overline{A_k} \right) \subseteq \left(\prod_{n\in\omega} A_n \right)'.$$

Demostración. Sea $x \in \bigcup_{n\in\omega} \left(\prod_{k<n} \overline{A_k} \times A_n' \times \prod_{k>n} \overline{A_k} \right)$, por ende, existe $M \in \omega$ tal que $x \in \prod_{k<M} \overline{A_k} \times A_M' \times \prod_{k>M} \overline{A_k}$. Sea V un abierto básico de x, por ende, existe $J \subseteq \omega$ tal que

$$V = \prod_{i\in I} U_i, \text{ donde } U_i = \begin{cases} V_i & \text{si } i \in J \\ E_i & \text{si } i \notin J, \end{cases}$$

con V_i un abierto de E_i, vamos a demostrar que

$$(V \setminus \{x\}) \cap \prod_{n\in\omega} A_n \neq \varnothing.$$

Como $x \in \prod_{k<M} \overline{A_k} \times A_M' \times \prod_{k>M} \overline{A_k}$, $x_M \in A_M'$ y para U_M, existe $y_M \in (V_M \setminus \{x_M\}) \cap A_M$; además, dado que $x_n \in \overline{A_n}$, para todo $n \neq M$, tenemos que $U_n \cap A_n \neq \varnothing$, por esta razón, en virtud del Axioma de Elección, podemos tomar $z_n \in U_n \cap A_n$ para todo $n \in J \setminus \{M\}$. Ahora, tomando

$$y_n = \begin{cases} z_n & \text{si } n \in J \setminus \{M\} \\ y_M & \text{si } n = M \\ x_n & \text{si } n \notin J \cup \{M\}; \end{cases}$$

con esto, como $x_M \neq y_M$ y tomando $y = (y_n)_{n\in\omega}$, tenemos que $x \neq y$. Además, $y \in V$, pues, $z_n \in V_n$ para todo $n \in J \setminus \{M\}$, $x_m \in U_M$ y $x_n \in V_n$ para todo $n \in (J \cup \{M\})^c$. Con esto, tenemos que

$$y \in (V \setminus \{x\}) \cap \prod_{n\in\omega} A_n,$$

como deseábamos. □

OBSERVACIÓN. Notemos que, si tomamos $A_n = 2 = \{0,1\}$ para todo $n \in \omega$, $(2^\omega)' = 2^\omega$ (esto lo demostraremos más adelante en la siguiente sección); con esto, tenemos que

$$\left(\prod_{n\in\omega} A_n\right)' = (\{0,1\}^\omega)' = (2^\omega)' = 2^\omega.$$

Por otro lado, dado que $2' = \varnothing$, tenemos que

$$\bigcup_{n\in\omega} \left(\prod_{k<n} \overline{A_k} \times A_n' \times \prod_{k>n} \overline{A_k}\right) = \varnothing.$$

Por lo tanto, no se tiene la igualdad para familias numerables.

4.3. Derivados de Conjuntos Compactos Numerables

Sea (E, τ) un espacio topológico, definamos el conjunto

$$\mathcal{K}_E = \{K \subseteq E : K \text{ es compacto y numerable}\}.$$

OBSERVACIÓN. Notemos que, para todo espacio topológico (E, τ), $\mathcal{K}_E \neq \varnothing$, pues siempre tenemos que $\varnothing \in \mathcal{K}_E$.

Vamos a demostrar que, bajo ciertas hipótesis de separación en el espacio topológico, el derivado de todo conjunto compacto numerable es también un conjunto compacto numerable.

PROPOSICIÓN 4.23. *Sea (E, τ) un espacio topológico de Hausdorff. Si $K \in \mathcal{K}_E$, en-*

tonces $K' \in \mathcal{K}_E$.

Demostración. Sea $K \in \mathcal{K}_E$. Como E es de Hausdorff, por la Proposición 3.8, K' es cerrado. Además, dado que K es cerrado, tenemos que $K' \subseteq K$. Como K es compacto y K' es un subconjunto cerrado de K, por la Proposición 3.11, K' es un conjunto compacto.

Finalmente, tenemos que $|K'| \leq |K|$, por lo tanto, K' es numerable y, por ende, $K' \in \mathcal{K}_E$. $\square$

En la Proposición 4.7, se demostró que, en un espacio topológico de Hausdorff, la familia de derivados de un conjunto cerrado es una familia decreciente de subconjuntos cerrados. Con esto en mente, tenemos que, nuevamente, en un espacio topológico de Hausdorff, la familia de derivados de un conjunto compacto numerable es una familia decreciente de subconjuntos compactos numerables.

Observación. Sean (E, τ) un espacio topológico de Hausdorff y $K \in \mathcal{K}_E$, se tiene que $(K^{(\alpha)})_{\alpha \in \mathbf{OR}}$ es una familia decreciente de elementos de $\mathcal{K}_E$. En efecto, dado que K es compacto, tenemos que K es cerrado y de la Proposición 4.7, obtenemos que $(K^{(\alpha)})_{\alpha \in \mathbf{OR}}$ es una familia decreciente de subconjuntos cerrados de E, es decir, $K^{(\alpha)} \subseteq K^{(\beta)}$ para todo α y β ordinales tales que $\alpha \geq \beta$. Con esto, basta demostrar que, para todo $\alpha \in \mathbf{OR}$, se tiene que $K^{(\alpha)} \in \mathcal{K}_E$. Sea $\alpha \in \mathbf{OR}$, como $\alpha \geq 0$, tenemos que $K^{(\alpha)} \subseteq K^{(0)} = K$; con esto, como $K^{(\alpha)}$ es un subconjunto cerrado de un conjunto compacto, por la Proposición 3.11, tenemos que $K^{(\alpha)}$ es compacto. Además, como $K^{(\alpha)} \subseteq K$ y K es numerable, se sigue que $|K^{(\alpha)}| \leq |K|$ y, por ende, $K^{(\alpha)} \in \mathcal{K}_E$, para todo $\alpha \in \mathbf{OR}$.

Ahora, el objetivo, de aquí en adelante, es calcular el derivado de un tipo especial de conjuntos generados como una unión numerable. Para ello, restringiéndonos a espacios métricos, vamos a demostrar que, partiendo de una sucesión convergente, una familia de subconjuntos compactos numerables, que cumplan ciertas condiciones extras, para todo ordinal numerable, el derivado de la unión de los subconjuntos de la familia junto con el límite de la sucesión es igual a la unión de los derivados de los subconjuntos compactos numerables de la familia unido al límite de la sucesión. Este resultado será generalizado posteriormente, puesto que dicha generalización ayudará a cumplir el objetivo del presente trabajo.

La siguiente proposición es una generalización de lo realizado en la demostración de una de las proposiciones planteadas por los autores en [1].

PROPOSICIÓN 4.24. *Sean (E,d) un espacio métrico, $\alpha \in \omega_1$ y $(x_n)_{n\in\omega} \in E^\omega$ tales que:*

(i) $(x_n)_{n\in\omega}$ *converge a x;*

(ii) *existe una familia de conjuntos $(K_n)_{n\in\omega}$ de $\mathcal{K}_E$ tales que $K_n^{(\alpha)} = \{x_n\}$ y $K_n \subseteq B(x_n, r_n)$ para todo $n \in \omega$, donde $(B(x_n, r_n))_{n\in\omega}$ es una familia de bolas abiertas disjuntas dos a dos.*

Si $K = \bigcup_{n\in\omega} K_n \cup \{x\}$, entonces, para todo $\beta \in \omega_1$ tal que $\beta \leq \alpha$, se tiene que

$$K^{(\beta)} = \left(\bigcup_{n\in\omega} K_n \cup \{x\}\right)^{(\beta)} = \bigcup_{n\in\omega} K_n^{(\beta)} \cup \{x\}.$$

Demostración. Sea $\beta \in \omega_1$, tal que $\beta \leq \alpha$, de la Proposición 4.17, se sigue que

$$\bigcup_{n\in\omega} K_n^{(\beta)} \subseteq \left(\bigcup_{n\in\omega} K_n\right)^{(\beta)} = K^{(\beta)}.$$

Ahora, por las Proposiciones 4.7 y 4.2, tenemos que

$$\{x_n\}_{n\in\omega} = \bigcup_{n\in\omega} K_n^{(\alpha)} \subseteq \bigcup_{n\in\omega} K_n^{(\beta)} \subseteq K^{(\beta)},$$

por tanto, $x \in K^{(\beta+1)} \subseteq K^{(\beta)}$. Con esto, hemos demostrado que, para todo $\beta \leq \alpha$

$$\bigcup_{n\in\omega} K_n^{(\beta)} \cup \{x\} \subseteq K^{(\beta)}.$$

De lo hecho anteriormente, basta demostrar la otra contenencia, para ello, procediendo por Inducción Transfinita tenemos:

- Para $\beta = 0$, el resultado es inmediato, pues

$$K^{(0)} = \bigcup_{n\in\omega} K_n \cup \{x\} = \bigcup_{n\in\omega} K_n^{(0)} \cup \{x\}.$$

- Ahora, supongamos que $\beta < \alpha$ y se cumple

$$K^{(\beta)} \subseteq \bigcup_{n\in\omega} K_n^{(\beta)} \cup \{x\}. \tag{4.1}$$

  Sea $z \in K^{(\beta+1)}$, como la familia de derivados de conjuntos compactos numerable es decreciente, tenemos que $K^{(\beta+1)} \subseteq K^{(\beta)}$. Utilizando la hipótesis de inducción, se tiene que

$$K^{(\beta+1)} \subseteq K^{(\beta)} \subseteq \bigcup_{n\in\omega} K_n^{(\beta)} \cup \{x\}.$$

Por lo tanto, se tiene que $z = x$ o $z \in K_M^{(\beta)} \subseteq B(x_M, r_M)$ para algún $M \in \omega$. Si $z = x$, tendríamos lo deseado. Ahora, supongamos que $z \neq x$, por lo tanto existe $M \in \omega$ tal que

$$z \in K_M^{(\beta)} \subseteq B(x_M, r_M).$$

Se tiene que $z \in K_M^{(\beta+1)}$, pues de no ser así, z sería un punto aislado de $K_M^{(\beta)}$, con esto, existiría $\varepsilon_1 > 0$ tal que

$$B(z, \varepsilon_1) \cap K_M^{(\beta)} = \{z\}. \tag{4.2}$$

Tomando $\varepsilon = \text{mín}\{\varepsilon_1, r_M - d(z, x_M), d(x, z)\}$, se tendría que $B(z, \varepsilon) \subseteq B(x_M, r_M)$ y, por ende, dado que las bolas son disjuntas y $K_m \subseteq B(x_m, r_m)$ para todo $m \in \omega$

$$B(z, \varepsilon) \cap \left(\bigcup_{m\neq M} K_m^{(\beta)} \right) = \varnothing. \tag{4.3}$$

Ahora, de (4.2) y (4.3), se tendría que

$$\begin{aligned} \{z\} &= B(z, \varepsilon) \cap \left(K_M^{(\beta)} \cup \bigcup_{n\neq M} K_n^{(\beta)} \cup \{x\} \right) \\ &= B(z, \varepsilon) \cap \left(\bigcup_{n\in\omega} K_n^{(\beta)} \cup \{x\} \right) \\ &= B(z, \varepsilon) \cap K^{(\beta)} \end{aligned}$$

lo cual es imposible, pues $z \in K^{(\beta+1)}$. Por lo tanto, $z \in K_M^{(\beta+1)}$. Con esto se concluye que

$$K^{(\beta+1)} \subseteq \bigcup_{n\in\omega} K_n^{(\beta+1)} \cup \{x\}.$$

- Finalmente, sea $\gamma \neq 0$ un ordinal límite tal que $\gamma \leq \alpha$ y supongamos que

$$K^{(\delta)} \subseteq \bigcup_{n\in\omega} K_n^{(\delta)} \cup \{x\}$$

para todo $\delta < \gamma$. Sea $z \in K^{(\gamma)}$, utilizando la hipótesis de inducción, se tiene

que

$$K^{(\gamma)} = \bigcap_{\delta<\gamma} K^{(\delta)} \subseteq \bigcap_{\delta<\gamma} \left(\bigcup_{n\in\omega} K_n^{(\delta)} \cup \{x\} \right).$$

Por lo tanto, $z = x$ o para todo ordinal $\delta < \gamma$, existe $m \in \omega$ tal que $z \in K_m^{(\delta)}$. De aquí, si $z = x$, nuevamente, se tiene lo deseado. Ahora, si $z \neq x$, notemos que para 0, se tiene que existe $M \in \omega$ tal que $z \in K_M^{(0)} = K_M \subseteq B(x_M, r_M)$. Demostremos que, para todo $\delta < \gamma$, $z \in K_M^{(\delta)}$. Por reducción al absurdo, supongamos que existe un número ordinal δ_0, con $\delta_0 < \gamma$, tal que $z \notin K_M^{(\delta_0)}$. Así, como $z \in \bigcap_{\delta<\gamma} \left(\bigcup_{n\in\omega} K_n^{(\delta)} \cup \{x\} \right)$, $z \neq x$ y $z \notin K_M^{(\delta_0)}$, para δ_0, existe $m_0 \in \omega$ con $m_0 \neq M$ tal que $z \in K_{m_0}^{(\delta_0)} \subseteq K_{m_0} \subseteq B(x_{m_0}, r_{m_0})$ y, con esto, $B(x_{m_0}, r_{m_0}) \cap B(x_M, r_M) \neq \varnothing$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto,

$$z \in \bigcap_{\delta<\gamma} K_M^{(\delta)} = K_M^{(\gamma)}.$$

De aquí se concluye que

$$K^{(\gamma)} \subseteq \bigcup_{n\in\omega} K_n^{(\gamma)} \cup \{x\}$$

y, se tiene que (4.1) se cumple para todo ordinal $\beta \leq \alpha$, teniendo así la igualdad deseada. □

Una pregunta natural que surge a partir de la proposición anterior es: si se cambia el conjunto unitario, formado por el límite de la sucesión, por un conjunto compacto numerable arbitrario y se retira la existencia de la sucesión convergente, ¿el resultado se mantiene? Para mantener el resultado de la Proposición 4.24 es necesario añadir hipótesis adicionales como se muestra a continuación. Esta proposición será clave más adelante, puesto se usará para hallar la primitiva deseada.

PROPOSICIÓN 4.25. *Sean (E, d) un espacio métrico, $\alpha \in \omega_1$ y $K \in \mathcal{K}_E$ tales que:*

(i) $K \setminus K' = \{x_n : n \in \omega\}$ *es infinito y* $x_n \neq x_m$ *para todo* $n, m \in \omega$ *tales que* $n \neq m$*;*

(ii) existe $(K_n)_{n\in\omega}$ *una familia de conjuntos de* $\mathcal{K}_E$ *tales que* $K_n^{(\alpha)} = \{x_n\}$ *y* $K_n \subseteq B(x_n, r_n)$ *para todo* $n \in \omega$*, donde* $(B(x_n, r_n))_{n\in\omega}$ *es una familia de bolas abiertas disjuntas dos a dos.*

Si $\widehat{K} = \bigcup_{n\in\omega} K_n \cup K$*, entonces para todo* $\beta \in \omega_1$ *tal que* $\beta \leq \alpha$*, se tiene que*

$$\widehat{K}^{(\beta)} = \left(\bigcup_{n\in\omega} K_n \cup K\right)^{(\beta)} = \bigcup_{n\in\omega} K_n^{(\beta)} \cup K.$$

Demostración. Para alcanzar la igualdad deseada, vamos a demostrar las dos contenencias. Para la primera contenencia, vamos a demostrar primero que $K \subseteq \widehat{K}^{(\beta)}$, para todo $\beta \in \omega_1$ tal que $\beta \leq \alpha$, para ello, usaremos Inducción Transfinita.

- Si $\beta = 0$, tenemos que
$$K \subseteq \widehat{K}^{(0)} = \widehat{K}.$$

- Ahora, supongamos que
$$K \subseteq \widehat{K}^{(\beta)}$$
para $\beta \in \omega_1$ con $\beta < \alpha$. Por la hipótesis de inducción, $K \subseteq \widehat{K}^{(\beta)}$; con esto, por la Proposición 4.1, se sigue que $K' \subseteq \widehat{K}^{(\beta+1)}$. Más aún,
$$K \setminus K' = \bigcup_{n\in\omega} \{x_n\} = \bigcup_{n\in\omega} K_n^{(\alpha)} \subseteq \bigcup_{n\in\omega} K_n^{(\beta+1)} \subseteq \widehat{K}^{(\beta+1)}.$$
Así,
$$K = K' \cup (K \setminus K') \subseteq \widehat{K}^{(\beta+1)}.$$

- Finalmente, sea $\gamma \neq 0$ un ordinal límite tal que $\gamma \leq \alpha$ y
$$K \subseteq \widehat{K}^{(\delta)}$$
para todo $\delta < \gamma$. Usando la hipótesis de inducción, tenemos
$$K \subseteq \bigcap_{\delta<\gamma} \widehat{K}^{(\delta)} = \widehat{K}^{(\gamma)}.$$

Con esto, demostramos que $K \subseteq \widehat{K}^{(\beta)}$ para todo $\beta \in \omega_1$ tal que $\beta \leq \alpha$. Por otro lado, para todo $\beta \in \omega_1$, tal que $\beta \leq \alpha$, de la Proposición 4.17, se sigue que

$$\bigcup_{n\in\omega} K_n^{(\beta)} \subseteq \left(\bigcup_{n\in\omega} K_n\right)^{(\beta)} \subseteq \left(\bigcup_{n\in\omega} K_n \cup K\right)^{(\beta)} = \widehat{K}^{(\beta)}.$$

Con esto, y de lo hecho antes, hemos demostrado que, para todo $\beta \leq \alpha$,

$$\bigcup_{n\in\omega} K_n^{(\beta)} \cup K \subseteq \widehat{K}^{(\beta)}.$$

Así, basta demostrar la otra contenencia, para ello, procediendo por Inducción Transfinita tenemos:

- Si $\beta = 0$, como
$$\widehat{K}^{(0)} = \bigcup_{n\in\omega} K_n \cup K = \bigcup_{n\in\omega} K_n^{(0)} \cup K,$$
el resultado se sigue de inmediato.

- Ahora, supongamos que
$$\widehat{K}^{(\beta)} \subseteq \bigcup_{n\in\omega} K_n^{(\beta)} \cup K \tag{4.4}$$
para $\beta \in \omega_1$ con $\beta < \alpha$. Sea $x \in \widehat{K}^{\beta+1}$. Usando la hipótesis de inducción, notemos que
$$x \in \widehat{K}^{(\beta+1)} \subseteq \widehat{K}^{(\beta)} \subseteq \bigcup_{n\in\omega} K_n^{(\beta)} \cup K.$$
Si $x \in K$, el resultado se tiene de inmediato. Ahora, si $x \notin K$, se tiene que $x \in K_M^{(\beta)} \subseteq B(x_M, r_M)$ para algún $M \in \omega$. De aquí, $x \in K_M^{(\beta+1)}$, pues, de no ser así, x sería un punto aislado de $K_M^{(\beta)}$, con esto, existiría $\varepsilon_1 > 0$ tal que
$$B(x, \varepsilon_1) \cap K_M^{(\beta)} = \{x\}. \tag{4.5}$$
Además, como K es compacto y $x \notin K$, se sigue que
$$d(x, K) := \inf_{z\in K} d(x, z) > 0.$$
De esto, tomando $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, r_M - d(x, x_M), d(x, K)\}$, se tendría que $B(x, \varepsilon) \subseteq B(x_M, r_M)$ y, por ende,
$$B(x, \varepsilon) \cap \left(\bigcup_{m\neq M} K_m^{(\beta)} \right) = \varnothing. \tag{4.6}$$
Ahora, de (4.5) y (4.6), se tendría que
$$\begin{aligned}
\{x\} &= B(x, \varepsilon) \cap \left(K_M^{(\beta)} \cup \bigcup_{n\neq M} K_n^{(\beta)} \cup K \right) \\
&= B(x, \varepsilon) \cap \left(\bigcup_{n\in\omega} K_n^{(\beta)} \cup K \right) \\
&= B(x, \varepsilon) \cap K^{(\beta)}
\end{aligned}$$
lo cual es imposible, pues $x \in K^{(\beta+1)}$. Por lo tanto, $x \in K_M^{(\beta+1)}$. Con esto se

concluye que

$$K^{(\beta+1)} \subseteq \bigcup_{n\in\omega} K_n^{(\beta+1)} \cup K.$$

- Finalmente, sea $\gamma \neq 0$ un ordinal límite tal que $\gamma \leq \alpha$, supongamos que

$$\widehat{K}^{(\delta)} \subseteq \bigcup_{n\in\omega} K_n^{(\delta)} \cup K \tag{4.7}$$

para todo $\delta < \gamma$. Vamos a demostrar que

$$\widehat{K}^{(\gamma)} \subseteq \bigcup_{n\in\omega} K_n^{(\gamma)} \cup K.$$

Sea $z \in \widehat{K}^{(\gamma)}$, utilizando la hipótesis de inducción, se tiene que

$$\widehat{K}^{(\gamma)} = \bigcap_{\delta<\gamma} \widehat{K}^{(\delta)} = \bigcap_{\delta<\gamma} \left(\bigcup_{n\in\omega} K_n^{(\delta)} \cup K \right).$$

Por lo tanto, $z \in K$ o para todo ordinal $\delta < \gamma$, existe $m \in \omega$ tal que $z \in K_m^{(\delta)}$. De aquí, si $z \in K$, nuevamente, se tiene lo deseado. Ahora, si $z \notin K$, notemos que, para 0, se tiene que existe $M \in \omega$ tal que $z \in K_M^{(0)} = K_M \subseteq B(x_M, r_M)$. Demostremos que, para todo $\delta < \gamma$, $z \in K_M^{(\delta)}$. Por reducción al absurdo, supongamos que existe un número ordinal δ_0, con $\delta_0 < \gamma$, tal que $z \notin K_M^{(\delta_0)}$. Así, como $z \in \bigcap_{\delta<\gamma} \left(\bigcup_{n\in\omega} K_n^{(\delta)} \cup K \right)$, $z \notin K$ y $z \notin K_M^{(\delta_0)}$, para δ_0, existe $m_0 \in \omega$ con $m_0 \neq M$ tal que $z \in K_{m_0}^{(\delta_0)} \subseteq K_{m_0} \subseteq B(x_{m_0}, r_{m_0})$ y, con esto, $B(x_{m_0}, r_{m_0}) \cap B(x_M, r_M) \neq \varnothing$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto,

$$z \in \bigcap_{\delta<\gamma} K_M^{(\delta)} = K_M^{(\gamma)}.$$

De aquí, se concluye que

$$\widehat{K}^{(\gamma)} \subseteq \bigcup_{n\in\omega} K_n^{(\gamma)} \cup K.$$

Así, concluimos que (4.4) se cumple para todo $\beta \in \omega_1$ tal que $\beta \leq \alpha$ y, por lo hecho antes, tenemos la igualdad deseada. □

Capítulo 5

Espacios Polacos

En el presente capítulo se revisan algunos conceptos y propiedades básicas acerca de los espacios polacos y su topología asociada. Estos resultados serán necesarios para llegar al resultado principal. Para iniciar, se revisarán algunas definiciones y resultados previos antes de introducir el concepto de espacios polacos. Las referencias principales de este capítulo son [11, 13].

DEFINICIÓN 5.1. *(Espacio Metrizable). Un espacio topológico* (E, τ) *es* metrizable *si existe una métrica* d *sobre* E *tal que la topología inducida por la métrica* d *coincide con* τ.

A la métrica d de la definición anterior, se le denomina *métrica compatible*. Además, notemos que (E, τ) es metrizable si y solo si existe $(\widetilde{E}, \widetilde{d})$ espacio métrico tal que E es homeomorfo a $\widetilde{E}$. En efecto, si tomamos $\varphi\colon E \to \widetilde{E}$ su homeomorfismo y definimos la métrica

$$\begin{aligned} d_E\colon E \times E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto d(x, y) = \widetilde{d}(\varphi(x), \varphi(y)), \end{aligned}$$

tenemos lo deseado.

OBSERVACIÓN. Sea (E, d) un espacio metrizable con d, su métrica compatible. Tenemos que

$$d' = \frac{d}{1 + d}$$

también es una métrica compatible. Con esto, dado E un espacio metrizable, siempre podemos considerar que $d \leq 1$, es decir, que para todo $(x, y) \in E \times E$, $d(x, y) \leq 1$, donde d es su métrica compatible.

Por otro lado, al tomar $\widetilde{d}$ otra métrica compatible del espacio E nos aseguramos que las propiedades topológicas no cambian, pero las propiedades tanto como espacios métricos se pueden alterar, es decir, las propiedades métricas de los espacios (E, d) y $(E, \widetilde{d})$ pueden variar.

El siguiente teorema nos permitirá relacionar espacios métricos con espacios compactos, completos y espacios segundo contables.

TEOREMA 5.1. *(Teorema de metrización de Urysohn). Sea E un espacio topológico segundo contable. Se tiene que E es metrizable si y solo si E es regular.*

Demostración. La demostración se la puede encontrar en [14, Cap. 4]. □

Mucho de los ejemplos y propiedades de interés en espacios polacos se da usando la topología producto, por esta razón se va a demostrar que el producto numerable de espacios metrizables es, también, metrizable.

PROPOSICIÓN 5.2. *Sea $((E_n, d_n))_{n\in\omega}$ una sucesión de espacios métricos. El espacio $E = \prod_{n\in\omega} E_n$ con la topología producto es metrizable.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad, vamos a asumir que $d_n \leq 1$ para todo $n \in \omega$ y tomemos

$$\begin{aligned} d\colon E \times E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto d(x, y) = \sum_{n\in\omega} \frac{d_n(x_n, y_n)}{2^n}, \end{aligned}$$

donde $x = (x_n)_{n\in\omega}, y = (y_n)_{n\in\omega} \in E$. En primer lugar demostremos que d está bien definida. En efecto, tenemos que

$$\sum_{n\in\omega} \frac{d_n(x_n, y_n)}{2^n} \leq \sum_{n\in\omega} \frac{1}{2^n}$$

y, por ende, la serie es finita, concluyendo que la función d está bien definida. Ahora demostremos que d es una métrica. Sean $x, y, z \in E$, tenemos que

- Como $d_n(x, y) \geq 0$ para todo $n \in \omega$, tenemos que $\sum_{n\in\omega} \frac{d_n(x_n, y_n)}{2^n} \geq 0$ y, por lo tanto, $d(x, y) \geq 0$.
- Supongamos que $d(x, y) = 0$, tenemos que $\sum_{n\in\omega} \frac{d_n(x_n, y_n)}{2^n} = 0$. Vamos a demostrar que $x = y$. Notemos que, como $d_n(x, y) \geq 0$ para todo $n \in \omega$ y de la

hipótesis, tenemos que $d(x_n, y_n) = 0$ para todo $n \in \omega$, por lo tanto, para todo $n \in \omega$, se sigue que $x_n = y_n$ y, por ende, $x = y$.

Ahora, supongamos que $x = y$, por lo tanto, $x_n = y_n$ para todo $n \in \omega$; además, dado que d_n es una métrica para todo $n \in \omega$, se tiene que $d_n(x_n, y_n) = 0$ para todo $n \in \omega$ y, por ende, $d(x, y) = 0$.

- Como $d_n(x_n, y_n) = d_n(y_n, x_n)$ para todo $n \in \omega$, tenemos que $d(x, y) = d(y, x)$.
- Notemos que, para todo $n \in \omega$, tenemos que $d_n(x_n, z_n) \leq d(x_n, y_n) + d(y_n, x_n)$ y, por lo tanto,

$$\begin{aligned} d(x,z) = \sum_{n\in\omega} \frac{d_n(x_n, z_n)}{2^n} &\leq \sum_{n\in\omega} \frac{d_n(x_n, y_n) + d_n(y_n, z_n)}{2^n} \\ &= \sum_{n\in\omega} \frac{d_n(x_n, y_n)}{2^n} + \sum_{n\in\omega} \frac{d_n(y_n, z_n)}{2^n} \\ &= d(x, y) + d(y, z). \end{aligned}$$

Así, d es una métrica sobre E.

Ahora, vamos a demostrar que d es compatible con la topología producto sobre E. Sea O un abierto básico de la topología producto, por lo tanto, existe $J \subseteq \omega$ finito tal que

$$O = \prod_{n\in\omega} O_n, \qquad \text{donde } O_n = \begin{cases} V_n & \text{si } n \in J, \\ E_n & \text{si } n \notin J, \end{cases}$$

con V_n un abierto de E_n para todo $n \in J$. Vamos a demostrar que O es abierto en τ_d, para ello, sea $x \in O$, buscaremos $r > 0$ tal que $B(x, r) \subseteq O$. Esto mostrará que todos los abiertos básicos en la topología producto son abiertos en la topología inducida por la métrica compatible.

Ahora, para todo $n \in J$, tenemos que $x_n \in V_n$, el cual es un abierto de E_n, entonces x_n es un punto interior de V_n, es decir, existe $r_n > 0$ tal que $B(x_n, r_n) \subseteq V_n$. Por otro lado, dado que J es finito, podemos tomar $r > 0$ tal que $r \leq \frac{r_n}{2^n}$ para todo $n \in J$. Ahora, demostremos que $B(x, r) \subseteq O$, en efecto, sea $y \in B(x, r)$, por lo tanto, $d(x, y) < r$. Para $n \in J$, conocemos que

$$\frac{d_n(x_n, y_n)}{2^n} \leq d(x, y) < r \leq \frac{r_n}{2^n},$$

lo cual implica que $d_n(x_n, y_n) < r_n$ y, por lo tanto, $y_n \in B(x_n, r_n) \subseteq V_n$. Entonces, para todo $n \in J$, $y_n \in V_n$ y para $n \notin J$, dado que $O_n = E_n$, se tiene que $y_n \in E_n$, es decir, tenemos que $y \in O$.

Por otro lado, sean $x \in E$ y $r > 0$, vamos a hallar un abierto básico O tal que $x \in O \subseteq B(x,r)$, esto demuestra que toda bola abierta, que es un abierto básico de τ_d, es un abierto en la topología producto, teniendo así, la igualdad de topologías. Para ello, tomemos $N \in \omega$ tal que $\frac{1}{2^N} < \frac{r}{2}$ y

$$O = \prod_{n\in\omega} O_n, \text{ donde } O_n = \begin{cases} B\left(x_n, \frac{r}{2(N+1)}\right) & \text{si } 1 \leq n \leq N, \\ E_n & \text{si } n > N. \end{cases}$$

Vamos a demostrar que $O \subseteq B(x,r)$. En efecto, sea $y \in O$, para todo $n \leq N$, tenemos que $d(x_n, y_n) < \frac{r}{2(N+1)}$, así

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{d_n(x_n,y_n)}{2^n} \leq \sum_{n=0}^{N} d_n(x_n,y_n) < (N+1)\cdot\frac{r}{2(N+1)} = \frac{r}{2}.$$

Por otro lado,

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{d_n(x_n,y_n)}{2^n} \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^N} < \frac{r}{2}.$$

Juntando lo antes hecho, tenemos que $d(x,y) < r$ y, por ende, E es metrizable. □

Nuevamente, pensando en espacios polacos y usando la topología producto, vamos a demostrar que el producto numerable de espacios completos es también un espacio completo.

Proposición 5.3. *Sea $((E_n, d_n))_{n\in\omega}$ una sucesión de espacios métricos. Si E_n es completo para todo $n \in \omega$, entonces el espacio $E = \prod_{n\in\omega} E_n$, con la topología inducida por la métrica compatible para la topología producto, es completo.*

Demostración. Supongamos que E_n es completo para todo $n \in \omega$, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $d_n \leq 1$ para todo $n \in \omega$. Sea $(y_n)_{n\in\omega} \in E^\omega$ una sucesión de Cauchy; con esto, tenemos que $(y_n)_{n\in\omega} = \left((x_k^n)_{k\in\omega}\right)_{n\in\omega}$ y

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \omega)(m,n > N \Rightarrow d(y_m,y_n) < \varepsilon).$$

Sean $\varepsilon > 0$ y $k > 0$, para $\frac{\varepsilon}{2^k}$, tenemos que

$$\frac{d_k(x_k^n, x_k^m)}{2^k} \leq \sum_{i\in\omega} \frac{d_i(x_i^n, x_i^m)}{2^i} < \frac{\varepsilon}{2^k},$$

lo que implica que $d_k(x_k^n, x_j^m) < \varepsilon$, por lo tanto, $\left(x_k^n\right)_{n\in\omega}$ es de Cauchy en E_k y, como E_k es completo, existe $x_k \in E_k$ tal que $\left(x_k^n\right)_{n\in\omega}$ converge a x_k. Además, como k fue arbitrario, para todo $k \in \omega$ existe x_k, límite de $\left(x_k^n\right)_{n\in\omega}$. Por lo tanto, tomando $y =$

$(x_k)_{k\in\omega}$, vamos a demostrar que $(y_n)_{n\in\omega}$ converge a y. En efecto, sea $\varepsilon > 0$, existe $m \in \omega$ tal que $\sum_{n\geq m} \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Para todo $k < m$, existe $N_k \in \omega$ tal que $d(x_k^n, x_k) < \frac{\varepsilon}{2m}$ si $n > N_k$. Tomando $N = \max_{k<m} N_k$, tenemos

$$
\begin{aligned}
d(y_n, y) &= \sum_{k\in\omega} \frac{d_k(x_k^n, x_k)}{2^k} \\
&= \sum_{k<m} \frac{d_k(x_k^n, x_k)}{2^k} + \sum_{k\geq m} \frac{d_k(x_k^n, x_k)}{2^k} \\
&< m \cdot \frac{\varepsilon}{2m} + \sum_{k\geq m} \frac{1}{2^k} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}
$$

de donde, $(y_n)_{n\in\omega}$ converge a y, por ende, concluimos que E es completo. □

Con esto, y de la definición de espacios métricos completos, podemos definir lo que es un espacio polaco y demostrar varias proposiciones acerca de los mismos. Los espacios polacos son definidos con características estrictamente topológicas y en la actualidad son espacios de interés en la Teoría Descriptiva de conjuntos, junto con Teoría de la Medida. Los primeros estudios acerca de los espacios polacos fueron realizados por Sierpiński, Kuratowski, Tarski, entre otros topólogos y lógicos polacos, es por esta la razón de su nombre.

DEFINICIÓN 5.2. *(Espacio polaco). Un espacio topológico E es completamente metrizable si admite una métrica compatible d tal que (E, d) es completo. Un espacio topológico separable y completamente metrizable se denomina* polaco.

Usando la definición de espacios polacos y las proposiciones anteriores del presente capítulo, tenemos el resultado siguiente.

PROPOSICIÓN 5.4.

(i) El completado de un espacio métrico separable es un espacio polaco.

(ii) Un subespacio cerrado de un espacio polaco es un espacio polaco.

(iii) El producto de una sucesión de espacios polacos es un espacio polaco.

Demostración.

(i) Sea (E, d) un espacio métrico separable y $(\tilde{E}, \tilde{d})$ su completado. Con esto, existe $\varphi\colon E \to \widetilde{E}$ una isometría tal que $\overline{\varphi(E)} = \widetilde{E}$. Notemos que, como E es separable, existe $M \subseteq E$ numerable tal que $\overline{M} = E$; tomando $\varphi(M) \subseteq \widetilde{E}$, tenemos que es numerable ya que φ es una isometría biyectiva sobre su imagen. Además, $\overline{\varphi(M)} = \widetilde{E}$. En efecto, como $\overline{\varphi(M)} \subseteq \widetilde{E}$, basta demostrar que $\widetilde{E} \subseteq \overline{\varphi(M)}$, para ello, vamos a demostrar que $\varphi(E) \subseteq \overline{\varphi(M)}$. Sea $y \in \varphi(E)$, de la Proposición 3.25, vamos a demostrar que existe $(y_n)_{n\in\omega} \in (\varphi(M))^{\omega}$ tal que $(y_n)_{n\in\omega}$ converja a y. Por otro lado, existe $x \in E$ tal que $y = \varphi(x)$, como $x \in E = \overline{M}$, nuevamente, de la Proposición 3.25, existe $(x_n)_{n\in\omega} \in M^{\omega}$ tal que $(x_n)_{n\in\omega}$ converge a x. Tomando $y_n = \varphi(x_n)$ para todo $n \in \omega$, se tiene que para todo $\varepsilon > 0$ y existe $N \in \omega$, dado por la convergencia de $(x_n)_{n\in\omega}$, tal que $n > N$ implica

$$\widetilde{d}(y_n, y) = \widetilde{d}(\varphi(x_n), \varphi(x)) = d(x_n, x) < \varepsilon,$$

así, $(y_n)_{n\in\omega}$ converge a y. Dado que y fue arbitrario, $\varphi(E) \subseteq \overline{(\varphi(M))}$, por lo tanto

$$\widetilde{E} = \overline{\varphi(E)} \subseteq \overline{\varphi(M)} \subseteq \widetilde{E},$$

y, concluimos que $\widetilde{E}$ es un polaco.

(ii) Sean (E, d) un polaco y A un subconjunto cerrado de E. De la Proposición 3.33, tenemos que A con la métrica inducida es un espacio métrico completo. Por otro lado, como E es separable, de la Proposición 3.27, A también es separable y, por ende, A es un polaco.

(iii) Sean $(E_n, d_n)_{n\in\omega}$ una sucesión de espacios polacos, definamos $E = \prod\limits_{n\in\omega} E_n$, veamos que E es polaco. De la Proposición 5.2, tenemos que E es metrizable; además, de la Proposición 5.3, concluimos que el espacio (E, d) es completo. Con esto, bastaría ver que E es separable. Como E_n es separable para todo $n \in \omega$, existe $A_n \subseteq E_n$ tal que $\overline{A_n} = E_n$. Además, tomemos un elemento $z_n \in A_n$ para cada $n \in \omega$. Con esto, para $m \in \omega$, definimos:

$$D_m = \prod_{0\leq n<m} A_n \times \prod_{n\geq m} \{z_n\}$$

y tomemos $A = \bigcup\limits_{n\in\omega} D_n$. Notemos que, para todo $m \in \omega$, D_m es numerable, pues $\prod\limits_{n\geq m} \{z_n\}$ es numerable y $\prod\limits_{0\leq n<m} A_n$, al ser producto finito de conjuntos numerables, también es numerable, por ende, A es numerable. Demostremos que A es denso en E, sean $x = (x_n)_{n\in\omega} \in E$ y O una vecindad básica de x en

la topología producto, por lo tanto, existe $J \subseteq \omega$ finito tal que

$$O = \prod_{n\in\omega} O_n, \qquad \text{donde } O_n = \begin{cases} V_n & \text{si } n \in J, \\ E_n & \text{si } n \notin J, \end{cases}$$

con V_n un abierto de E_n para todo $n \in J$. Como $x_n \in E_n = \overline{A_n}$ para todo $n \in \omega$, tenemos que, para todo $n \in J$,

$$V_n \cap A_n \neq \varnothing,$$

por ende, para todo $n \in J$, existe $y_n \in V_n \cap A_n$. Así, tomando

$$w_n = \begin{cases} y_n & \text{si } n \in J, \\ z_n & \text{si } n \notin J, \end{cases}$$

tenemos que $D_{M+1} \cap O \neq \varnothing$, donde $M = \text{máx}\, J$. En efecto, tenemos que $w = (w_n)_{n\in\omega} \in D_{M+1} \cap O$, pues si $n \geq M+1$, $w_n = z_n \in E_n \cap \{z_n\}$ y si $n \leq M$, tenemos dos casos:

- Si $n \notin J$, $w_n = z_n \in E_n \cap \{z_n\}$,
- Si $n \in J$, $w_n = y_n \in V_n \cap A_n$,

teniendo lo deseado. Así, obtenemos que

$$\varnothing \neq D_{M+1} \cap O \subseteq A \cap O,$$

es decir, $E = \overline{A}$ y, por ende, E es un polaco. $\square$

Con esto último podemos dar algunos ejemplos de espacios polacos.

- $\mathbb{R}$, equipado con la topología usual, es un polaco, pues, $\mathbb{R}$ es completo con la métrica usual y $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$.
- $\mathbb{R}^\omega$ es un polaco, pues es el producto de una sucesión de espacios polacos.
- $]0,1[$ es un polaco, con la métrica asociada al homeomorfismo entre $]0,1[$ y $\mathbb{R}$. En efecto, tomemos

$$\begin{aligned} \phi\colon]0,1[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \phi(x) = \tan\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Ahora, definamos

$$\begin{aligned} d\colon]0,1[\times]0,1[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto d(x,y) = |\phi(x) - \phi(y)|, \end{aligned}$$

con esto, tenemos que $]0,1[$ es metrizable.

Veamos que $(]0,1[\,,d)$ es completo. Sea $(x_n)_{n\in\omega} \in (]0,1[)^\omega$ de Cauchy, tenemos que para todo ε existe $N \in \omega$ tal que $m,n > N$ implica

$$d(x_m, x_n) = |\phi(x_m) - \phi(x_n)| < \varepsilon.$$

Notemos que, $(\phi(x_n))_{n\in\omega}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$, por ende, existe $y \in \mathbb{R}$ tal que $\phi(x_n)$ converge a y. Dado que ϕ^{-1} es continua, tenemos que x_n converge a $\phi^{-1}(y)$, por ende, $]0,1[$ es completo con la métrica d.

Finalmente, como $\mathbb{R}$ es separable, por la Proposición 3.27, tenemos que $]0,1[$ también es separable.

- Todo conjunto A, con la topología discreta, es completamente metrizable; además si A es numerable, éste es un polaco. De esta forma, tenemos que ω equipado con la topología discreta es un polaco.

- Del ejemplo anterior y la proposición anterior, tenemos que el espacio ω^ω, donde ω^ω es la exponenciación conjuntista, denominado espacio de Baire, es un polaco.

- Tomemos $\mathcal{I} = [0,1]$, con la topología de subespacio heredada de $\mathbb{R}$ es un polaco, pues es un subconjunto cerrado de un polaco. Usando la proposición anterior, tenemos que el espacio $\mathcal{I}^\omega$, denominado cubo de Hilbert, es un polaco.

OBSERVACIÓN. Notemos que, $]0,1[$ es metrizable con la métrica usual, pero no es completo con dicha métrica. Sin embargo, como se vio en la Proposición 5.4, sí existe una métrica, compatible con la topología, que lo vuelva un espacio métrico completo y, por ende, es completamente metrizable. Con esto, podemos notar que, para un mismo espacio topológico pueden existir varias métricas tales que inducen la misma topología, pero no necesariamente todas ellas hacen que el espacio sea completo.

Teniendo en cuenta el último ejemplo, vamos a relacionar a todo espacio metrizable y separable con el cubo de Hilbert por medio de un homeomorfismo.

PROPOSICIÓN 5.5. *Todo espacio separable y metrizable es homeomorfo a un subespacio del cubo de Hilbert.*

Demostración. Sea (E, d) un espacio métrico separable, sin pérdida de generalidad podemos asumir que $d(x, y) \leq 1$ para todo $x, y \in E$ y tomemos $\{x_n : n \in \omega\}$, denso en E. Definamos:

$$\begin{aligned} f\colon E &\longrightarrow [0,1]^{\omega} \\ x &\longmapsto (d(x_n, x))_{n\in\omega}. \end{aligned}$$

Notemos que f es inyectiva y continua. En efecto, sean $x, y \in E$ tales que $f(x) = f(y)$, de esto, tenemos que $d(x_n, x) = d(x_n, y)$ para todo $n \in \omega$. Por reducción al absurdo, supongamos que $x \neq y$, así $d(x, y) > 0$ y, como E es separable, para $\frac{1}{2}d(x, y)$, existe $M \in \omega$ tal que $d(x, x_M) < \frac{1}{2}d(x, y)$; con esto

$$d(x, y) \leq d(x, x_M) + d(x_M, y) = 2d(x, x_M) < d(x, y),$$

lo cual es imposible, por ende, $x = y$. Por otro lado, sea $(z_n)_{n\in\omega}$ una sucesión en E tal que $z_n \to z$, vamos a demostrar que $f(z_n) \to f(z)$. De la Proposición 5.2, $[0, 1]^{\omega}$ es metrizable. Además, de la demostración de la Proposición 5.2, conocemos su métrica compatible $\widetilde{d}$, por tanto

$$\widetilde{d}(f(z_m), f(z)) = \sum_{n\in\omega} \frac{|f(z_m) - f(z)|}{2^n} = \sum_{n\in\omega} \frac{|d(x_n, z_m) - d(x_n, z)|}{2^n} \leq \sum_{n\in\omega} \frac{d(z_m, z)}{2^n},$$

con esto, si $m \to +\infty$, se tiene que $f(z_m) \to f(z)$ y, por ende, f es continua.

Ahora, demostremos que $f^{-1}\colon f(E) \to E$ es continua. Para ello, usaremos la Proposición 3.24. En efecto, sean $z \in E$ y $(f(z_n))_{n\in\omega}$ una sucesión en $f(E)$ tal que $f(z_n) \to f(z)$, es decir, $d(x_m, z_n) \to d(x_m, z)$ para todo $m \in \omega$. Como $\{x_n : n \in \omega\}$ es denso en E, para $\varepsilon > 0$, tenemos que

$$B(z, \varepsilon) \cap \{x_n : n \in \omega\} \neq \varnothing,$$

por ende, existe $M \in \omega$ tal que $d(z, x_M) < \varepsilon$. Por otro lado, dado que $d(x_m, z_n) \to d(x_m, z)$ para todo $m \in \omega$, para $M \in \omega$, existe $N \in \omega$ tal que $n \geq N$ implica $|d(x_M, z_n) - d(x_M, z)| < \varepsilon$. Si $n \geq N$, tenemos que

$$d(z_n, z) \leq d(z_n, x_M) + d(x_M, z) < \varepsilon + d(z, x_M) + d(x_M, z) < 3\varepsilon.$$

Así, $z_n \to z$ y, por lo tanto, f^{-1} es continua. Con esto, tenemos lo deseado. $\square$

Ahora, usando la proposición anterior, se va a caracterizar a ciertos espacios polacos.

PROPOSICIÓN 5.6. *Sea E un espacio topológico compacto y de Hausdorff. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *E es un polaco;*

(ii) *E es homeomorfo a un subespacio del cubo de Hilbert;*

(iii) *E es metrizable;*

(iv) *E es segundo contable.*

Demostración.

- $(i) \Rightarrow (ii)$. Supongamos que E es un polaco, por lo tanto, E es metrizable y separable; de donde, por la Proposición 5.5, tenemos lo deseado.

- $(ii) \Rightarrow (iii)$. Supongamos que E es homeomorfo a un subespacio del cubo de Hilbert. Por la proposición 5.2, tenemos que $[0,1]^\omega$ es metrizable y dado que E es homeomorfo a un subespacio de un espacio metrizable, E también es metrizable.

- $(iii) \Rightarrow (iv)$. Supongamos que E metrizable. Sea d la métrica compatible y para $n \in \omega$, tomemos
$$\mathcal{A}^n = \{B(x, \frac{1}{n+1})\}_{x \in E},$$
el cual es un recubrimiento de E. Como E es compacto, existe $\mathcal{A}_n$ un subrecubrimiento finito de $\mathcal{A}^n$.

  Ahora, tomando $\mathcal{B} = \bigcup\limits_{n \in \omega} \mathcal{A}_n$, el cual es numerable, pues, es la unión numerable de conjuntos finitos, demostraremos que $\mathcal{B}$ es una base de la topología. Sea U un abierto de E y $x \in U$, vamos a demostrar que existe $B \in \mathcal{B}$, tal que $x \in B \subseteq U$. Como x es un punto interior, existe $r > 0$ tal que $B(x,r) \subseteq U$. Por otro lado, existe $N \in \omega$ tal que $\frac{2}{r} < N+1$, como $\mathcal{A}_N$ recubre E, existe $y \in E$ tal que $x \in B(y, \frac{1}{N+1})$. Sea $z \in B(y, \frac{1}{N+1})$, tenemos que
$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \leq \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+1} = \frac{2}{N+1} < r,$$
es decir, $z \in B(x,r)$, por lo tanto, $x \in B = B(y, \frac{1}{N+1}) \subseteq B(x,r) \subseteq U$ y, por ende, $\mathcal{B}$ es una base. Así, E es segundo contable.

- $(iv) \Rightarrow (i)$. Supongamos que E es segundo contable, análogamente a lo hecho en el literal anterior, E es metrizable y separable. Por esta razón, para que E sea polaco, basta ver que E es completo con la métrica compatible d dada por la metrizabilidad. Como (E, d) es un espacio métrico compacto, por la Proposición 3.35, E es un espacio completo y, por ende, un polaco. $\square$

5.1. Espacios Polacos Perfectos

En esta sección vamos a dar algunas características importantes sobre los espacios polacos perfectos; además, se va a presentar la demostración del Teorema de Cantor-Bendixson que es uno de los teoremas principales de la Teoría Descriptiva de Conjuntos.

DEFINICIÓN 5.3. *Dados (E, τ) un espacio topológico y $A \subseteq E$. Se dice que A es* perfecto *si todo punto de A es un punto límite de A, es decir, A es perfecto si $A = A'$.*

Podemos dar algunos ejemplos de espacios polacos perfectos.

- $\mathbb{R}^\omega$, con $\mathbb{R}$ equipado con la topología usual, es un polaco perfecto, pues, $\mathbb{R}$ es perfecto.
- $\mathcal{I}^\omega$ es un espacio polaco perfecto. En efecto, por la Proposición 4.22, tenemos que

$$\bigcup_{n\in\omega}\left(\prod_{k<n}\overline{\mathcal{I}} \times \mathcal{I}' \times \prod_{k>n}\overline{\mathcal{I}}\right) \subseteq \left(\prod_{n\in\omega}\mathcal{I}\right)',$$

pero

$$\bigcup_{n\in\omega}\left(\prod_{k<n}\overline{\mathcal{I}} \times \mathcal{I}' \times \prod_{k>n}\overline{\mathcal{I}}\right) = \bigcup_{n\in\omega}\left(\prod_{k<n}\mathcal{I} \times \mathcal{I}' \times \prod_{k>n}\mathcal{I}\right) = \prod_{n\in\omega}\mathcal{I} = \mathcal{I}^\omega$$

y

$$\left(\prod_{n\in\omega}\mathcal{I}\right)' = (\mathcal{I}^\omega)',$$

por ende, $\mathcal{I}^\omega \subseteq (\mathcal{I}^\omega)'$.

Por otro lado, de la Proposición 3.18, se sigue que

$$(\mathcal{I}^\omega)' \subseteq \overline{\mathcal{I}^\omega} = \overline{\prod_{n\in\omega}\mathcal{I}} = \prod_{n\in\omega}\overline{\mathcal{I}} = \prod_{n\in\omega}\mathcal{I} = \mathcal{I}^\omega.$$

Por lo tanto, concluimos que $\mathcal{I}^\omega$ es perfecto.

- ω^ω y 2^ω son espacios polacos perfectos[1] En efecto, para ω^ω, de la Proposición 3.18, tenemos que

$$(\omega^\omega)' \subseteq \overline{\omega^\omega} = \overline{\prod_{n\in\omega} \omega} = \prod_{n\in\omega} \overline{\omega} = \prod_{n\in\omega} \omega = \omega^\omega.$$

De esta forma, basta demostrar que $\omega^\omega \subseteq (\omega^\omega)'$. Sean $x = (x_n)_{n\in\omega} \in \omega^\omega$ y V una vecindad básica de x, por ende, existe $J \subseteq \omega$ finito tal que

$$V = \prod_{n\in\omega} V_n, \qquad \text{donde } V_n = \begin{cases} U_n & \text{si } n \in J, \\ \omega & \text{si } n \notin J, \end{cases}$$

con U_n un abierto de ω para todo $n \in J$. Vamos a demostrar que

$$(V \setminus \{x\}) \cap \omega^\omega \neq \varnothing.$$

Tomemos $y = (y_n)_{n\in\omega} \in \omega^\omega$, donde

$$y_n = \begin{cases} x_n & \text{si } n \in J, \\ x_n + 1 & \text{si } n \notin J; \end{cases}$$

con esto, tenemos que $y = (y_n)_{n\in\omega} \in (V \setminus \{x\}) \cap \omega^\omega$, pues por como lo definimos, $y \neq x$, $y_n \in U_n$ para todo $n \in J$ y $y_n = x_n + 1 \in \omega$ para todo $n \in \omega \setminus J$. Dado que V fue un abierto arbitrario de x, tenemos que $x \in (\omega^\omega)'$ y, por ende, ω^ω es perfecto.

Finalmente, para ver que 2^ω es perfecto, se procede de manera análoga.

A partir de la definición, tenemos la siguiente proposición de conjuntos perfectos para espacios polacos.

PROPOSICIÓN 5.7. *Sean (E, d) un espacio polaco y $A \subseteq E$. Si A es perfecto, entonces para todo $x \in A$, existe $(x_n)_{n\in\omega} \in (A \setminus \{x\})^\omega$ tal que $(x_n)_{n\in\omega}$ converge a x.*

Demostración. Supongamos que A es perfecto, es decir, $A = A'$. Sea $x \in A$; con esto, x es un punto límite y, por la Proposición 3.22, tenemos que existe $(x_n)_{n\in\omega} \in (A \setminus \{x\})^\omega$ tal que x_n converge a x. □

PROPOSICIÓN 5.8. *Sean (E, d) un espacio polaco, A un subconjunto perfecto de E y $\alpha \in \omega_1$. Se tiene que $A^{(\alpha)} = A$.*

[1] Aquí consideramos la exponenciación viendo a 2 y a ω como conjuntos, tal como se presenta en la Definición 2.9, y no como ordinales.

Demostración. Procederemos por Inducción Transfinita.

- Para $\alpha = 0$, el resultado es inmediato.
- Supongamos que para α un ordinal numerable, se tiene que $A^{(\alpha)} = A$. De la hipótesis y dado que A es perfecto, se sigue que

$$A^{(\alpha+1)} = (A^{(\alpha)})' = A' = A.$$

- Finalmente, dado $\lambda \neq 0$ un ordinal límite, supongamos que para todo $\delta < \lambda$ se cumple que $A^{(\delta)} = A$. Con esto, tenemos que

$$A^{(\lambda)} = \bigcap_{\delta<\lambda} A^{(\delta)} = \bigcap_{\delta<\lambda} A = A.$$

Con esto, concluimos que $A^{(\alpha)} = A$ para todo $\alpha \in \omega_1$. □

Usando la proposición anterior, tenemos el siguiente resultado para espacios polacos perfectos.

COROLARIO 5.9. *Sean (E, d) un espacio polaco perfecto y $\alpha \in \omega_1$. Se tiene que $E^{(\alpha)} = E$.*

Un resultado interesante acerca de los espacios polacos perfectos está dado con relación a su cardinalidad.

PROPOSICIÓN 5.10. *Sea (E, d) un espacio polaco perfecto. Entonces (E, d) es no numerable.*

Demostración. Por reducción al absurdo, supongamos que E es numerable; así, tomemos $E = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$. Ahora, dado que E es un espacio métrico, E es un espacio de Hausdorff y, con esto, de la Proposición 3.5, E es un espacio T_1, por lo tanto, de la Proposición 3.4, todo conjunto unitario es un conjunto cerrado y, por ende, se sigue que $E_n = E \setminus \{x_n\}$ es abierto para todo $n \in \omega$. Más aún, cada E_n es denso en E, pues, cada punto es un punto límite. Por el Teorema de Categorías de Baire (Teorema 3.37), $\bigcap_{n\in\omega} E_n$ es denso en E, pero $\bigcap_{n\in\omega} E_n$ es vacío, lo cual es una contradicción. □

OBSERVACIÓN. Una consecuencia directa de la proposición anterior, se da usando el contrarrecíproco, es decir, si un espacio polaco es numerable, entonces el espacio no es perfecto.

PROPOSICIÓN 5.11. *Sean (E,d) un espacio polaco y $K \in \mathcal{K}_E$. Se tiene que K no es perfecto.*

Demostración. Por reducción al absurdo, supongamos que K es perfecto. Como K es compacto, de la Proposición 3.12, K es cerrado. Con esto, de la Proposición 5.4, K es un polaco, por ende, de la proposición anterior, K es no numerable lo que es una contradicción. $\square$

Usando la Proposición 5.10, vamos a demostrar que existen infinitos puntos aislados de un subconjunto compacto numerable en un espacio polaco. Esto nos será de ayuda para demostrar el objetivo principal del presente trabajo.

PROPOSICIÓN 5.12. *Sean (E,d) un espacio polaco y $K \in \mathcal{K}_E$ infinito. Se tiene que K tiene infinitos puntos aislados.*

Demostración. Notemos que, por la Proposición 4.5, K' es cerrado. Supongamos por reducción al absurdo que $K \setminus K'$ es finito, por tanto, K' sería perfecto, en efecto, dado que es cerrado, tenemos que $K'' \subseteq K'$. Por otro lado, sean $x \in K'$ y V una vecindad de x, tenemos que $V \cap K$ es infinito, como $K \setminus K'$ es finito, entonces $(V \cap K) \setminus (K \setminus K')$ es infinito, pero

$$(V \cap K) \setminus (K \setminus K') = (V \cap K) \cap (K^c \cup K') = V \cap K',$$

de donde, $V \cap K'$ es infinito, por tanto $x \in K''$. Ahora, como K' es perfecto y cerrado, es un polaco perfecto y, de la Proposición 5.10, K' es no numerable. Al tener que $K' \subseteq K$ se seguiría que K es no numerable, lo que es imposible, por lo tanto, K tiene infinitos puntos aislados. $\square$

Antes de demostrar el Teorema de Cantor-Bendixson, vamos a introducir la siguiente definición de punto de condensación.

DEFINICIÓN 5.4. *Sea (E,τ) un espacio topológico y $A \subseteq E$. Un punto $x \in E$ se dice* punto de condensación *de A si para toda vecindad V de x, se tiene que $V \cap A$ es un conjunto no numerable. Al conjunto de todos los puntos de condensación de A, lo notaremos por A^*, es decir,*

$$A^* = \{x \in E : x \text{ es un punto de condensación de } A\}.$$

OBSERVACIÓN. Con esta definición, se tiene que dado un espacio métrico (E,d), x es un punto de condensación de $A \subseteq E$ si y solo si para todo $r > 0$, se tiene que

$B(x,r) \cap A$ es no numerable. Además, se tiene de manera directa que, en un espacio topológico, todo punto de condensación es también un punto límite.

Partiendo de la definición de punto de condensación, vamos a demostrar que el conjunto de puntos de condensación de un subconjunto es un conjunto perfecto. Más aún, también demostraremos que si todo punto de un subconjunto es un punto de condensación, el subconjunto es un subconjunto perfecto.

PROPOSICIÓN 5.13. *Sea (E,τ) un espacio topológico y $A \subseteq E$. Se tiene que:*

(i) A^* es cerrado;

(ii) si $A = A^*$, se tiene que A es perfecto;

(iii) si E es segundo contable, $A \setminus A^*$ es numerable y $A^* = (A^*)^*$;

(iv) si E es segundo contable, A^* es perfecto.

Demostración.

(i) Vamos a demostrar que $(A^*)^c$ es abierto. Sea $x \in (A^*)^c$, hallemos V una vecindad de x tal que $V \subseteq (A^*)^c$. Como $x \in (A^*)^c$, existe V una vecindad de x tal que $V \cap A$ es numerable. Tenemos que $V \subseteq (A^*)^c$, en efecto, sea $y \in V$, tenemos que V es una vecindad de y; además, $V \cap A$ es numerable, por ende, $y \in (A^*)^c$ y, con esto, $V \subseteq (A^*)^c$. Así, se tiene que, A^* es cerrado.

(ii) Supongamos que $A = A^*$, del literal anterior, tenemos que A es cerrado y junto con la Proposición 3.3, $A' \subseteq A$. Por otro lado, de la observación anterior, tenemos que todo punto de condensación es un punto límite y, por ende, $A = A^* \subseteq A'$, teniendo así que, A es perfecto.

(iii) Supongamos que E es segundo contable, es decir, existe $\mathcal{B}$ una base de la topología de E numerable. Definamos:

$$\mathcal{C} = \{V \in \mathcal{B} : V \cap A \text{ es numerable}\} \quad \text{y} \quad W = \bigcup_{V \in \mathcal{C}} V.$$

Tenemos que, para todo $V \in \mathcal{C}$, $V \cap A^* = \varnothing$, por lo tanto, $W \cap A^* = \varnothing$, de ahí que $A^* \subseteq W^c$. Por otro lado, sea $x \in (A^*)^c$, se sigue que existe una vecindad V_x de x tal que $V_x \cap A$ es numerable. Como $\mathcal{B}$ es una base de vecindades, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq V_x$, así $B \in \mathcal{C}$ y por lo tanto $B \subseteq W$, es decir, $x \in W$, así tenemos que $(A^*)^c \subseteq W$ y, por ende, $W^c \subseteq A^*$. Con esto, concluimos que $W^c = A^*$, así, usando la Proposición 2.4,

$$A \setminus A^* = A \cap W = A \cap \left(\bigcup_{V \in \mathcal{C}} V \right) = \bigcup_{V \in \mathcal{C}} (V \cap A).$$

De donde, concluimos que $A \setminus A^*$ es numerable, pues es la unión numerable de conjuntos numerables.

Por último, del literal (i), tenemos que A^* es cerrado, con esto y de la observación anterior, tenemos que

$$(A^*)^* \subseteq (A^*)' \subseteq A^*.$$

Ahora, basta demostrar que $A^* \subseteq (A^*)^*$. Primero, notemos que,

$$A = (A \cap A^*) \cup (A \setminus A^*),$$

donde $(A \setminus A^*)$ es numerable; con esto, para todo $x \in E$ y toda vecindad V de x, tenemos que

$$V \cap A = [V \cap (A \cap A^*)] \cup [V \cap (A \setminus A^*)]$$

y, dado que $(A \setminus A^*)$ es numerable, $[V \cap (A \setminus A^*)]$ también es numerable, por ende, $V \cap A$ es no numerable si y solo si $V \cap (A \cap A^*)$ es no numerable.

Ahora, sean $z \in A^*$, y V una vecindad de z; se tiene que $V \cap A$ es no numerable, por ende, $V \cap (A \cap A^*)$ es no numerable. Como $V \cap (A \cap A^*) \subseteq V \cap A^*$ y $V \cap (A \cap A^*)$ es no numerable, se obtiene, $V \cap A^*$ es no numerable por tanto $z \in (A^*)^*$. Con esto, concluimos que $A^* \subseteq (A^*)^*$ y, concluimos, $A^* = (A^*)^*$.

(iv) Supongamos que E es segundo contable, del literal (iii) y como todo punto de condensación es un punto límite, tenemos que

$$A^* = (A^*)^* \subseteq (A^*)'.$$

Por otro lado, como A^* es cerrado, se tiene que $(A^*)' \subseteq A^*$ y, por ende, A^* es perfecto. $\square$

OBSERVACIÓN. En el literal (ii), el recíproco es falso en general, pues tomando $E = \{a, b\}$ con $\tau = \{E, \varnothing, \{a\}\}$, la topología de Sierpinski, y si $A = \{b\}$, se tiene que $A' = \{b\}$, por tanto, A es perfecto, pero $A^* = \varnothing$ y, por ende, $A \neq A^*$.

Antes de demostrar el Teorema de Cantor-Bendixson, usando la proposición anterior, vamos a establecer una relación importante entre los espacios polacos y el conjunto de sus puntos de condensación.

PROPOSICIÓN 5.14. *Si (E,d) un espacio polaco perfecto, entonces $E = E^*$.*

Demostración. Como $E^* \subseteq E$, basta demostrar que $E \subseteq E^*$. Sean $y \in E$ y $r > 0$, demostraremos que $B[y,r] \cap E$ es no numerable. Notemos que

$$B[y,r] \cap E = B[y,r] \neq \varnothing.$$

Por otro lado, $B[y,r] \cap E$ es un conjunto cerrado y subconjunto de un espacio polaco y, por esta razón, es un polaco. Ahora, supongamos que $B[y,r] \cap E$ fuera numerable, usando en contrarrecíproco de la Proposición 5.10, $B[y,r] \cap E$ no sería un polaco perfecto, por lo tanto, existiera $z \in B[y,r] \cap E$ un punto aislado; además, se concluiría que z es un punto aislado de E, lo cual es imposible pues E es perfecto, por lo tanto, dado que r fue arbitrario, se concluye que $y \in E^*$ y, por ende, $E = E^*$. □

TEOREMA 5.15. *(Cantor-Bendixson). Sea (E,d) un espacio polaco. Entonces E puede ser escrito de manera única como $E = P \cup C$, P subconjunto perfecto de E y C un conjunto numerable tales que $P \cap C = \varnothing$.*

Demostración. Tomemos $P = E^*$ y $C = P^c$. Tenemos que P es perfecto, en efecto, como E es segundo contable, de la Proposición 5.13, tenemos que $E^* = P$ es perfecto.

Ahora, vamos a demostrar que C es numerable y que su descomposición, en efecto, es única. De la Proposición 3.28, E es segundo contable, es decir, existe $\mathcal{B} = \{B_n : n \in \omega\}$ base numerable de E y tomemos $I = \{n \in \omega : B_n \text{ es numerable}\}$. Si $I = \varnothing$, tenemos que B_n es no numerable para todo $n \in \omega$, es decir, todo punto de E es un punto de condensación de E. Teniendo así que, $E = P \cup C$, donde $C = P^c = \varnothing$. Por otro lado, si $I \neq \varnothing$ para demostrar que C es numerable, demostremos que $C = \bigcup_{n \in I} B_n$. Sea $y \in C$, es decir, y no es un punto de condensación, por lo tanto, existe V vecindad de y tal que V es numerable, por lo tanto, $y \in \bigcup_{n \in I} B_n$. Recíprocamente, sea $y \in \bigcup_{n \in I} B_n$, por lo tanto, existe $N \in I$ tal que $y \in B_N$. Como B_N es una vecindad numerable de y, se tiene que $y \notin E^* = P$ y, por ende, $y \in C$, teniendo la igualdad deseada.

Finalmente, para la unicidad, supongamos que $E = P_1 \cup C_1$, con P_1 y C_1 otra descomposición. Tenemos que P_1 es un polaco perfecto, pues es un subconjunto cerrado de un polaco y, de la proposición anterior, $P_1 = P_1^*$. Con esto, como $P_1 \subseteq$

E, tenemos que todo punto de condensación de P_1 es un punto de condensación de E, es decir, $P_1 \subseteq E^* = P$. Por otro lado, sea $x \in P$, por reducción al absurdo, supongamos que $x \notin P_1$. Como $E = P_1 \cup C_1$ y $P_1 \cap C_1 = \varnothing$, tenemos que $x \in C_1$ y como C_1 es abierto numerable, tenemos que C_1 una vecindad numerable de x, contradiciendo que $x \in E^* = P$, por ende, $P_1 = P$. Como $P_1 \cap C_1 = \varnothing$ y $P_1 \cup C_1 = E$, entonces $C_1 = P_1^c = P^c = C$. $\square$

Capítulo 6

Una Primitiva asociada a la Derivada de Cantor-Bendixson en Espacios Polacos

En este capítulo se presentará el resultado principal del presente trabajo. Análogamente a lo realizado en [1], vamos a hallar una primitiva asociada a la derivada de Cantor-Bendixson, pero en espacios polacos. Con esto nos referimos a que, dado K un subconjunto de un espacio polaco y $\alpha \in \omega_1$, bajo hipótesis adecuadas, vamos a hallar un subconjunto $\widehat{K}$ tal que $\widehat{K}^{(\alpha)} = K$. Para llegar al resultado deseado, primero demostraremos la existencia de una primitiva para todo conjunto unitario. Partiendo de esto, para cada punto aislado del conjunto K hallaremos una primitiva, que esté contenida en una bola disjunta a los otros puntos aislados, para después unir las primitivas de los puntos aislados y formar la primitiva deseada. Para este proceso partiremos de un lema que nos permitirá construir bolas disjuntas dos a dos.

LEMA 6.1. *Sean (E, d) un espacio polaco y $A \subseteq E$ un conjunto discreto, numerable e infinito. Si $A = \{x_n : n \in \omega\}$, con $x_n \neq x_m$ para todo $n, m \in \omega$ tales que $n \neq m$, existe una sucesión $(r_n)_{n\in\omega}$ de radios tal que $r_n \leq \dfrac{1}{n+1}$ para todo $n \in \omega$ y $\{B(x_n, r_n)\}_{n\in\omega}$ es una familia de bolas abiertas disjuntas dos a dos.*

Demostración. Notemos que, para todo $n \in \omega$, existe $R_n > 0$ tal que

$$B(x_n, R_n) \cap A = \{x_n\},$$

ya que A es discreto.

Ahora, si $n = 0$, tomemos $D_0 > 0$ tal que

$$D_0 < \text{mín}\left\{\frac{R_0}{2}, \frac{1}{3}d(x_0, x_1), \frac{1}{2}\right\}$$

y definamos $r_0 := 2D_0$. Para $n \in \omega \setminus \{0\}$, definamos

$$D_n = \min_{0 \leq k < n}\left\{d(x_n, x_k) - \frac{D_k}{2}, \frac{R_n}{2}\right\}.$$

Notemos que $D_n > 0$ para todo $n \in \omega \setminus \{0\}$. En efecto, procediendo por Inducción Finita tenemos:

- $D_1 > 0$, pues, $d(x_1, x_0) - r_0 > 0$.
- Ahora, supongamos que $D_n > 0$, vamos a demostrar que $D_{n+1} > 0$. Si $D_{n+1} = \frac{R_{n+1}}{2}$, el resultado es inmediato. Demostremos que $d(x_{n+1}, x_k) - \frac{D_k}{2} > 0$ para todo $k < n+1$. En efecto, sea $k < n+1$, por lo tanto $k \leq n$; por reducción al absurdo, supongamos que $d(x_{n+1}, x_k) - \frac{D_k}{2} \leq 0$, de esta forma, tendríamos que
$$d(x_{n+1}, x_k) \leq \frac{D_k}{2} < D_k \leq \frac{R_k}{2} < R_k,$$
es decir, $x_{n+1} \in B(x_k, R_k) \cap A$ y, por ende, se tendría que $x_{n+1} = x_k$, lo cual contradice que $x_{n+1} \neq x_k$. Con esto, tenemos que $D_{n+1} > 0$.

Ahora, tomemos

$$r_n := \text{mín}\left\{\frac{1}{3}d(x_n, x_{n+1}), \frac{D_n}{2}, \frac{1}{n+1}\right\},$$

para todo $n > 0$. Notemos que, para $n > 0$, al tomar la cantidad $\frac{1}{3}d(x_n, x_{n+1})$ nos aseguramos que el radio va a ser menor que la distancia del punto x_n con el siguiente punto; mientras que, $\frac{D_n}{2}$ permite que el radio sea suficientemente pequeño para que la intersección de la bola generada por el radio r_n con las bolas generadas por radios anteriores sea vacía y, por último, cumplimos que $r_n \leq \frac{1}{n+1}$.

Así, tenemos que $\{B(x_n, r_n)\}_{n\in\omega}$ es una familia de bolas abiertas disjuntas dos a dos. En efecto, sean $m, n \in \omega$, sin pérdida de generalidad podemos asumir que $m > n$, vamos a demostrar que

$$B(x_m, r_m) \cap B(x_n, r_n) = \varnothing.$$

Por reducción al absurdo, supongamos que existe $y \in B(x_m, r_m) \cap B(x_n, r_n)$; con esto y, como $n \leq m-1$, tenemos que

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, y) + d(y, x_n) < r_m + r_n \\ &< D_m + r_n \\ &\leq d(x_m, x_n) - r_n + r_n = d(x_m, x_n), \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción y, por lo tanto, concluimos que $\{B(x_n, r_n)\}_{n\in\omega}$ es una familia de bolas abiertas disjuntas dos a dos tales que $r_n \leq \dfrac{1}{n+1}$ para todo $n \in \omega$. □

OBSERVACIÓN. Notemos que, si $x \in E'$ y $(x_n)_{n\in\omega} \in (E \setminus \{x\})^\omega$ tal que $x_n \to x$ y la sucesión $(d(x_n, x))_{n\in\omega}$ es estrictamente decreciente, entonces existe $(r_n)_{n\in\omega}$ tal que $r_n \leq \dfrac{1}{n+1}$ y $\{B(x_n, r_n)\}_{n\in\omega}$ es una familia de bolas abiertas disjuntas dos a dos. En efecto, para todo $m \in \omega$, se tiene que x_m es un punto aislado de $\{x_n : n \in \omega\}$, pues, si no lo fuera existirían $m \in \omega$ y una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\omega}$ de $(x_n)_{n\in\omega}$ tales que $x_{n_k} \to x_m$ cuando $k \to +\infty$, pero, como $(x_n)_{n\in\omega}$ converge a x por unicidad del límite tenemos que $x_m = x$, lo cual es una contradicción. Además, $x_n \neq x_m$ para todo $n, m \in \omega$ tal que $n \neq m$, pues si no fuera así, existirían $n, m \in \omega$ tales que $n \neq m$ y $x_n = x_m$, lo que contradice que $(d(x_n, x))_{n\in\omega}$ es estrictamente decreciente. Así, $A = \{x_n : n \in \omega\}$ es un conjunto discreto que cumple las hipótesis del lema.

Ahora, partiendo del lema anterior, vamos a demostrar que para todo conjunto unitario y todo radio, bajo hipótesis adecuadas, existe una primitiva contenida en la bola centrada en el punto y con radio dado. Esto nos permitirá obtener una primitiva para cada punto aislado como veremos más adelante.

PROPOSICIÓN 6.2. *Sean (E, d) un espacio polaco, $\alpha \in \omega_1$, $x \in E^{(\alpha)}$ y $r > 0$. Se tiene que existe $K \in \mathcal{K}_E$ tal que $K \subseteq B(x, r)$ y $K^{(\alpha)} = \{x\}$.*

Demostración. Procederemos por Inducción Transfinita.

- Para $\alpha = 0$, se toma el conjunto $K = \{x\}$, obteniendo $K^{(0)} = K = \{x\}$ y se cumplen las propiedades deseadas.

- Ahora, supongamos que, para $\alpha \in \omega_1$, se cumple que: para todo $\widetilde{x} \in E^{(\alpha)}$ y para todo $\widetilde{r} > 0$, existe $\widetilde{K} \in \mathcal{K}_E$ tal que $\widetilde{K} \subseteq B(\widetilde{x}, \widetilde{r})$ y $\widetilde{K}^{(\alpha)} = \{\widetilde{x}\}$. Vamos a demostrar que para todo $x \in E^{(\alpha+1)}$ y para todo $r > 0$, existe $K \in \mathcal{K}_E$ tal que $K \subseteq B(x, r)$ y $K^{(\alpha+1)} = \{x\}$. Sean $x \in E^{(\alpha+1)}$ y $r > 0$, como $x \in E^{(\alpha+1)}$, del Corolario 3.23, existe una sucesión $(x_n)_{n\in\omega} \in (E^{(\alpha)} \setminus \{x\})^\omega$ que converge a

x y la sucesión $(d(x_n, x))_{n\in\omega}$ es estrictamente decreciente. De la observación anterior, $\{x_n : n \in \omega\}$ es un conjunto discreto, más aún, existe una sucesión de radios $(r_n)_{n\in\omega}$ tal que $\{B(x_n, r_n)\}_{n\in\omega}$ es una familia de bolas abiertas disjuntas dos a dos tal que $r_n \leq \frac{1}{n+1}$ para todo $n \in \omega$. Además, existe $N \in \omega$ tal que $n > N$ implica $B(x_n, r_n) \subseteq B(x, r)$. En efecto, como $(x_n)_{n\in\omega}$ converge a x, para $\frac{r}{2}$, existe $N \in \omega$ tales que $n > N$ implica que $d(x_n, x) < \frac{r}{2}$ y $\frac{1}{n+1} < \frac{r}{2}$. Supongamos que $n > N$ y $z \in B(x_n, r_n)$, vamos a demostrar que $z \in B(x, r)$. Como $z \in B(x_n, r_n)$, se tiene $d(z, x_n) < r_n$ y, con esto

$$\begin{aligned} d(z, x) &\leq d(z, x_n) + d(x_n, x) < r_n + \frac{r}{2} \\ &\leq \frac{1}{n+1} + \frac{r}{2} \\ &< \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r. \end{aligned}$$

Así, hemos demostrado que existe $N \in \omega$ tal que $n > N$ implica $B(x_n, r_n) \subseteq B(x, r)$

Ahora, para todo $m \in \omega$, aplicando la hipótesis de inducción, para $x_m \in E^{(\alpha)}$ y $r_m > 0$, tenemos que existe K_m en $\mathcal{K}_E$ tal que $K_m \subseteq B(x_m, r_m)$ y $K_m^{(\alpha)} = \{x_m\}$. De aquí, tomemos

$$K = \bigcup_{m>N+1} K_m \cup \{x\}.$$

Notemos que K satisface las siguientes propiedades:

- $K \subseteq B(x, r)$. En efecto, para todo $m > N + 1$, tenemos que

  $$K_m \subseteq B(x_m, r_m) \subseteq B(x, r).$$

  Además, $\{x\} \subseteq B(x, r)$, por ende, $K \subseteq B(x, r)$.
- K es numerable, pues es la unión numerable de conjuntos numerables.
- K es compacto. En efecto, sea $\{A_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento abierto de K, es decir,

  $$K \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i.$$

  Como $x \in K$, existe $l \in I$ tal que $x \in A_l$, así x es un punto interior de A_l, por lo tanto, existe $R > 0$ tal que $B(x, R) \subseteq A_l$. Para $\frac{R}{2} > 0$, existe $N_1 \in \omega$ tal que si $n > N_1$ implica que

  $$x_n \in B\left(x, \frac{R}{2}\right) \quad \text{y} \quad \frac{1}{n+1} < \frac{R}{2}.$$

De esta forma, para todo $n > N_1$, se tiene que $K_n \subseteq A_l$. En efecto, sean $m > N_1$ y $y \in K_m$, por lo tanto, $x_m \in B(x, \frac{R}{2})$ y como $K_m \subseteq B(x_m, r_m)$, tenemos que

$$d(y, x_m) < r_m \leq \frac{1}{m+1} < \frac{R}{2}.$$

Con esto, se sigue que

$$\begin{aligned} d(y,x) &\leq d(y,x_m) + d(x_m,x) \\ &< \frac{R}{2} + \frac{R}{2} = R. \end{aligned}$$

Así, se tiene que $K_n \subseteq A_l$, para todo $n > N_1$ y, por lo tanto,

$$\bigcup_{n>N_1} K_n \cup \{x\} \subseteq A_l.$$

Con esto, tenemos dos casos:

1. Si $N + 1 \geq N_1$,

   $$K = \bigcup_{n>N+1} K_n \cup \{x\} \subseteq \bigcup_{n>N_1} K_n \cup \{x\} \subseteq A_l.$$

   Por tanto, un sub-recubrimiento para K es $\{A_l\}$, así, K es compacto.

2. Si $N_1 > N + 1$, $\displaystyle\bigcup_{n=N+2}^{N_1} K_n$ es la unión finita de conjuntos compactos, por lo tanto es un compacto. Con esto, existe $J \subseteq I$ finito tal que $\displaystyle\bigcup_{n=N+2}^{N_1} K_n \subseteq \bigcup_{j\in J} A_j$, de esta forma, tenemos que

   $$K = \bigcup_{m>N+1} K_m \cup \{x\} = \bigcup_{m=N+2}^{N_1} K_m \cup \bigcup_{m>N_1} K_m \cup \{x\} \subseteq \bigcup_{j\in J} A_j \cup A_l$$

   y, por ende, $\{A_j\}_{j\in J} \cup \{A_l\}$ es un sub-recubrimiento finito y, así, K es compacto.

De estos dos casos se concluye que K es un conjunto compacto.

– $K^{(\alpha+1)} = \{x\}$. En efecto, gracias a la Proposición 4.24 y dado que $K_m^{(\alpha)} = \{x_m\}$ para todo $m \in \omega$, se tiene que

$$\begin{aligned} K^{(\alpha)} &= \left(\bigcup_{n>N+1} K_n \cup \{x\} \right)^{(\alpha)} = \bigcup_{n>N+1} K_n^{(\alpha)} \cup \{x\} \\ &= \bigcup_{n>N+1} \{x_n\} \cup \{x\} = \{x_n : n > N+1\} \cup \{x\}. \end{aligned}$$

De aquí, y dado que $x_n \to x$,

$$K^{(\alpha+1)} = (K^{(\alpha)})' = (\{x_n : n > N+1\} \cup \{x\})' = \{x\}.$$

- Finalmente, sea $\lambda \neq 0$ un ordinal límite, supongamos que para todo $\rho < \lambda$ y para cualesquiera $\widetilde{x} \in E^{(\rho)}$ y $\widetilde{r} > 0$, existe $\widetilde{K} \in \mathcal{K}_E$ tal que $\widetilde{K} \subseteq B(\widetilde{x}, \widetilde{r})$ y $\widetilde{K}^{(\rho)} = \{\widetilde{x}\}$. Vamos a demostrar que existe $K \in \mathcal{K}_E$ tal que $K \subseteq B(x,r)$ y $K^{(\lambda)} = \{x\}$.

  Del Teorema 2.29, tenemos que existe una sucesión de ordinales estrictamente creciente $(\rho_n)_{n\in\omega}$ tal que $\sup\{\rho_n : n \in \omega\} = \lambda$. Además, se tiene que $\rho_n < \lambda$ para todo $n \in \omega$.

  Ahora, como $x \in E^{(\lambda)}$, para cada $m \in \omega$, existe $(x_n^m)_{n\in\omega} \in (E^{(\rho_m)} \setminus \{x\})$ convergente a x. Análogamente a lo antes hecho, existe una familia disjunta dos a dos de bolas abiertas $\{B(x_n^m, r_n)\}_{n\in\omega}$ y existe $N \in \omega$ tal que $B(x_n^m, r_n) \subseteq B(x,r)$. Sea $m \in \omega$, apliquemos lo supuesto a $x_m^m \in E^{(\rho_m)}$ y $r_m > 0$, así, existe una familia $\{K_m\}_{m\in\omega}$ tal que $K_m \in \mathcal{K}_E$, $K_m \subseteq B(x_m^m, r_m)$ y $K_m^{(\rho_m)} = \{x_m^m\}$, para todo $m \in \omega$. Se tiene que el conjunto

$$K = \bigcup_{m>N+1} K_m \cup \{x\}$$

  cumple las propiedades establecidas. En efecto, la demostración sigue igual al caso anterior. Y se tiene que

  - $K \subseteq B(x,r)$.
  - $K \in \mathcal{K}_E$.
  - $K^{(\alpha+1)} = \{x\}$. En efecto, como para cada $m \in \omega$, se tiene que $K_m^{(\rho_m)} = \{x_m^m\}$ y, dado que $\rho_m + 1 < \lambda$, se tiene que

$$K_m^{(\lambda)} \subseteq K_m^{(\rho_m+1)} = \varnothing.$$

  Por lo tanto, de la Proposición 4.24, se tiene que

$$K^{(\lambda)} = \left(\bigcup_{m>N+1} K_m \cup \{x\} \right)^{(\lambda)} = \bigcup_{m>N+1} K_m^{(\lambda)} \cup \{x\} = \{x\}.$$

Así, se tiene el resultado para todo ordinal numerable. □

Con esta proposición, estamos listos para enunciar y demostrar uno de los resultados principales del presente trabajo.

TEOREMA 6.3. *Sean (E,d) un espacio polaco perfecto, $K \in \mathcal{K}_E$ y $\alpha \in \omega_1$. Se tiene que existe $\widehat{K} \in \mathcal{K}_E$ tal que*
$$\widehat{K}^{(\alpha)} = K.$$

Demostración. Si $\alpha = 0$, tomemos $\widehat{K} = K$, y se tiene lo deseado. Ahora, de la Proposición 5.11, tenemos que K no es perfecto, es decir, $K' \neq K$. Partamos de dos casos:

1. Si K es infinito, por la Proposición 5.12, $K \setminus K'$ es infinito; con esto, tomemos $K \setminus K' = \{x_n : n \in \omega\}$, con $x_n \neq x_m$ para todo $n, m \in \omega$ tal que $n \neq m$. Por otro lado, sea $x \in K \setminus K'$, existe V una vecindad de x tal que $V \cap K = \{x\}$, por lo tanto
$$\{x\} \subseteq V \cap K \setminus K' \subseteq V \cap K = \{x\}.$$
Con esto, x es un punto aislado de $K \setminus K'$ y dado que x fue arbitrario, $K \setminus K'$ es un conjunto discreto. Ahora, del Lema 6.1, existe $(B(x_n, r_n))_{n\in\omega}$ una familia de bolas abiertas disjuntas dos a dos tal que $r_n \leq \dfrac{1}{n+1}$ para todo $n \in \omega$.

   Como E es perfecto, del Corolario 5.9, tenemos que $x_n \in E^{(\alpha)}$ para todo $n \in \omega$. Además, para todo $n \in \omega$, como $r_n > 0$, de la proposición anterior, existe K_n en $\mathcal{K}_E$ tal que $K_n \subseteq B(x_n, r_n)$ y $K_n^{(\alpha)} = \{x_n\}$. Así, como $\{B(x_n, r_n)\}_{n\in\omega}$ es una familia de conjuntos disjuntos dos a dos, tenemos que $\{K_n\}_{n\in\omega}$ también lo es. Con esto, definamos $\widehat{K} \subseteq E$ dado por
$$\widehat{K} = \bigcup_{n\in\omega} K_n \cup K.$$
   Notemos que $\widehat{K}$ es numerable al ser la unión numerable de conjuntos numerables. Ahora, veamos que $\widehat{K}$ es compacto, en efecto, usando la Proposición 3.35, tomemos $(z_k)_{k\in\omega} \in \widehat{K}^{\omega}$ y hallemos una subsucesión convergente. Tomemos $S = \{z_n : n \in \omega\}$, tenemos tres casos:

   a) Si $S \cap K$ es infinito, existe una subsucesión $(z_{\varphi(k)})_{k\in\omega}$ en K, como K es compacto existe una subsucesión convergente en K y, por ende, en $\widehat{K}$.

   b) Si existe $m \in \omega$ tal que $S \cap K_m$ es infinito, análogamente al caso anterior, obtenemos una subsucesión convergente en K_m y, por ende, en $\widehat{K}$.

   c) Si para todo $n \in \omega$, $S \cap K_n$ es un conjunto finito y $S \cap K$ también lo es, entonces, se tiene que
$$I = \{k \in \omega : S \cap K_k \neq \varnothing\}$$

es infinito. De aquí, si definimos, para $N, M \in \omega$,

$$S_M = \{z_n : n > M\} \quad \text{y} \quad I(N, M) = \{k \in \omega : S_M \cap K_k \neq \varnothing \text{ y } k > N\},$$

tenemos que $I(N, M)$ es infinito para todo $N, M \in \omega$. En efecto, por reducción al absurdo, supongamos que existen $N, M \in \omega$ tal que $I(N, M)$ es finito. Así, $J = \{k \in \omega : S_M^c \cap K_k \neq \varnothing\}$ es un conjunto finito, pues S_M^c es finito y la familia $\{K_n\}_{n\in\omega}$ es disjunta dos a dos, por ende, $I = J \cup I(N, M)$, contradiciendo que I es infinito. Con esto en mente, definamos de manera recursiva las funciones

$$\sigma\colon \omega \to \omega \quad \text{y} \quad \psi\colon \omega \to \omega$$

de la siguiente manera:

$$\sigma(0) = \text{mín}\, I \quad \text{y} \qquad \psi(0) = \text{mín}\{k \in \omega : z_k \in K_{\sigma(0)}\}$$

y, para $m \in \omega$, tomemos

$$\sigma(m+1) = \text{mín}\, I(\sigma(m), \psi(m)).$$

Con esto, dado que $\sigma(m+1) \in I(\sigma(m), \psi(m))$, se tiene que

$$S_{\psi(m)} \cap K_{\sigma(m+1)} \neq \varnothing \quad \text{y} \quad \sigma(m) < \sigma(m+1).$$

Como $S_{\psi(m)} \cap K_{\sigma(m+1)} \neq \varnothing$, se tiene que

$$\{k \in \omega : k > \psi(m) \text{ y } z_k \in K_{\sigma(m+1)}\} \neq \varnothing$$

así, tomemos

$$\psi(m+1) = \text{mín}\{k \in \omega : k > \psi(m) \text{ y } z_k \in K_{\sigma(m+1)}\}.$$

Con esto, $\psi(m+1) > \psi(m)$ y $z_{\psi(m+1)} \in K_{\sigma(m+1)}$ para todo $m \in \omega$. De esta forma, existe una subsucesión $(z_{\psi(k)})_{k\in\omega}$ tal que, para todo $k \in \omega$,

$$z_{\psi(k)} \in K_{\sigma(k)} \subseteq B(x_{\sigma(k)}, r_{\sigma(k)}).$$

Por lo tanto, tenemos que

$$d(z_{\psi(k)}, x_{\sigma(k)}) < r_{\sigma(k)} \leq \frac{1}{\sigma(k)+1}. \tag{6.1}$$

Por otro lado, dado que $(x_{\sigma(k)})_{k\in\omega} \in K^\omega$ y K es compacto, tenemos que existe $(x_{\varphi(\sigma(k))})_{k\in\omega}$ una subsucesión de $(x_{\sigma(k)})_{k\in\omega}$ convergente en K. Con esto y de (6.1), tenemos que $(z_{\varphi(\psi(k))})_{k\in\omega}$ es convergente en K, así, hemos hallado una subsucesión de $(z_k)_{k\in\omega}$ convergente en K y, por ende, en $\widehat{K}$.

Por lo tanto, $\widehat{K}$ es un conjunto compacto y, por consiguiente, $\widehat{K} \in \mathcal{K}_E$.

Finalmente, demostremos que $\widehat{K}^{(\alpha)} = K$, para ello, de la Proposición 4.25 y dado que $K_n^{(\alpha)} = \{x_n\}$ para todo $n \in \omega$, tenemos

$$\widehat{K}^{(\alpha)} = \left(\bigcup_{n\in\omega} K_n \cup K\right)^{(\alpha)} = \bigcup_{n\in\omega} K_n^{(\alpha)} \cup K = \bigcup_{n\in\omega} \{x_n\} \cup K = K.$$

2. Si K es finito, $K \setminus K' = \{x_n : n \in \omega\}$ es finito y podemos escribir $K \setminus K' = \{x_n : n \in M\}$, para algún $M \in \omega$. Como E es perfecto, del Corolario 5.9, tenemos que $x_n \in E^{(\alpha)}$ para todo $n \in M$. Para $r > 0$, de la Proposición 6.2, para todo $n \in M$, existe K_n en $\mathcal{K}_E$ tal que $K_n \subseteq B(x_n, r)$ y $K_n^{(\alpha)} = \{x_n\}$. Con esto, definamos $\widehat{K} \subseteq E$ dado por

$$\widehat{K} = \bigcup_{n\in M} K_n \cup K.$$

   Notemos que, $\widehat{K}$ es compacto, pues es la unión finita de conjuntos compactos. Finalmente, demostremos que $\widehat{K}^{(\alpha)} = K$, para ello, vamos a demostrar que $K \subseteq \widehat{K}^{(\beta)}$, para todo $\beta \in \omega_1$ tal que $\beta \leq \alpha$, usaremos Inducción Transfinita.

   - Si $\beta = 0$, tenemos que
$$K \subseteq \widehat{K}^{(0)} = \widehat{K}.$$
   - Ahora, supongamos que
$$K \subseteq \widehat{K}^{(\beta)}$$
     para $\beta \in \omega_1$ con $\beta < \alpha$. Por la hipótesis de inducción, $K \subseteq \widehat{K}^{(\beta)}$; con esto, por la Proposición 4.1, se sigue que $K' \subseteq \widehat{K}^{(\beta+1)}$. Más aún,
$$K \setminus K' = \bigcup_{n\in M} \{x_n\} = \bigcup_{n\in M} K_n^{(\alpha)} \subseteq \bigcup_{n\in M} K_n^{(\beta+1)} \subseteq \widehat{K}^{(\beta+1)}.$$
     Así,
$$K \subseteq \widehat{K}^{(\beta+1)}.$$
   - Finalmente, sea $\gamma \neq 0$ un ordinal límite tal que $\gamma \leq \alpha$ y
$$K \subseteq \widehat{K}^{(\delta)}$$

para todo $\delta < \gamma$. Usando la hipótesis de inducción, tenemos

$$K \subseteq \bigcap_{\delta<\gamma} \widehat{K}^{(\delta)} = \widehat{K}^{(\gamma)}.$$

Con esto, demostramos que $K \subseteq \widehat{K}^{(\beta)}$, para todo $\beta \in \omega_1$ tal que $\beta \leq \alpha$, en particular, $K \subseteq \widehat{K}^{(\alpha)}$.

Por otro lado, del Corolario 4.16, tenemos que $\displaystyle\bigcup_{n\in M} K_n^{(\alpha)} = \left(\bigcup_{n\in M} K_n\right)^{(\alpha)}$, por lo tanto,

$$\widehat{K}^{(\alpha)} = \left(\bigcup_{n\in M} K_n \cup K\right)^{(\alpha)} = \bigcup_{n\in M} K_n^{(\alpha)} \cup K^{(\alpha)} \subseteq \bigcup_{n\in M} \{x_n\} \cup K = K.$$

Con esto, y lo hecho antes, tenemos que $\widehat{K}^{(\alpha)} = K$.

De estos dos casos, concluimos que existe $\widehat{K} \in \mathcal{K}_E$ tal que

$$\widehat{K}^{(\alpha)} = K. \qquad \square$$

Ahora, vamos a presentar una modificación en el resultado anterior. Usando un lema adicional y valiéndonos de la separabilidad de los espacios polacos, vamos a desprendernos de la condición de numerabilidad sobre K. Para ello, partiremos de un lema que muestra la relación entre un conjunto en el cual todos sus puntos son aislados y su cardinalidad.

LEMA 6.4. *Sea (E, d) un espacio polaco. Si A es un subconjunto de E tal que todos sus puntos son puntos aislados, entonces A es numerable.*

Demostración. Sea A un subconjunto de E tal que todos sus puntos son puntos aislados. Por la Proposición 3.27, tenemos que A también es separable. Como todos los puntos de A son puntos aislados, para cada $x \in A$ existe $r_x > 0$ tal que

$$B(x, r_x) \cap A = \{x\}.$$

Con esto, $\{B(x, r_x) \cap A\}_{x\in A}$ es una familia de abiertos no vacíos y disjuntos dos a dos. Así, como A es separable, de la Proposición 3.29, se concluye que A es numerable. $\square$

TEOREMA 6.5. *Sean (E, d) un espacio polaco perfecto, K un subconjunto compacto* *de E y $\alpha \in \omega_1$. Se tiene que existe $\widehat{K}$ un subconjunto compacto de E tal que*

$$\widehat{K}^{(\alpha)} = K.$$

Demostración. Si K es perfecto, por la Proposición 5.8, $K^{(\alpha)} = K$, entonces, tomando $\widehat{K} = K$, se tiene el resultado. Ahora, si K no es perfecto, para $\alpha = 0$, tomemos $\widehat{K} = K$, y se tiene lo deseado. Por el Lema 6.4, tenemos que $K \setminus K'$ es numerable. A partir de aquí, tenemos dos casos:

1. Si $K \setminus K' = \{x_n : n \in \omega\}$ es infinito, podemos tomar $x_n \neq x_m$ para todo $n, m \in \omega$ tal que $n \neq m$ y análogamente a lo hecho en el caso 1 del Teorema 6.3, existe $\{B(x_n, r_n)\}_{n\in\omega}$ una familia de bolas abiertas disjuntas dos a dos tal que $r_n \leq \dfrac{1}{n+1}$ para todo $n \in \omega$.

   Como E es perfecto, del Corolario 5.9 tenemos que $x_n \in E^{(\alpha)}$ para todo $n \in \omega$ y para $r_n > 0$, de la Proposición 6.2, existe $\{K_n\}_{n\in\omega}$ en $\mathcal{K}_E$ tal que $K_n \subseteq B(x_n, r_n)$ y $K_n^{(\alpha)} = \{x_n\}$ para todo $n \in \omega$. Como $\{B(x_n, r_n)\}_{n\in\omega}$ es disjunta dos a dos, tenemos que $\{K_n\}_{n\in\omega}$ también lo es. Con esto, definamos $\widehat{K} \subseteq E$ dado por

   $$\widehat{K} = \bigcup_{n\in\omega} K_n \cup K.$$

   Ahora, análogamente a lo hecho en la demostración del caso 1 del teorema anterior, $\widehat{K}$ es un conjunto compacto. Nuevamente, procediendo de manera análoga a lo hecho en el caso 1 del Teorema 6.3, $\widehat{K}^{(\alpha)} = K$.

2. Si $K \setminus K' = \{x_n : n \in \omega\}$ es finito, podemos escribir $K \setminus K' = \{x_n : n \in M\}$, para algún $M \in \omega$. Como E es perfecto, del Corolario 5.9, tenemos que $x_n \in E^{(\alpha)}$ para todo $n \in M$. Para $r > 0$, de la Proposición 6.2, para todo $n \in M$, existe K_n en $\mathcal{K}_E$ tal que $K_n \subseteq B(x_n, r)$ y $K_n^{(\alpha)} = \{x_n\}$. Nuevamente, definamos $\widehat{K} \subseteq E$ dado por

   $$\widehat{K} = \bigcup_{n\in M} K_n \cup K.$$

   Notemos que, $\widehat{K}$ es compacto, pues es la unión finita de conjuntos compactos. Finalmente, procediendo de manera análoga a lo hecho en el caso 2 del Teorema 6.3, se consigue que $\widehat{K}^{(\alpha)} = K$.

Con esto, tenemos que existe $\widehat{K}$ un subconjunto compacto de E tal que

$$\widehat{K}^{(\alpha)} = K. \qquad \square$$

Conclusiones

Finalmente, estableceremos algunas conclusiones obtenidas a lo largo del presente trabajo. De igual forma, se plantearan algunas preguntas naturales que surgen tras demostrar y cumplir con el objetivo principal.

1. En la Proposición 4.14, damos condiciones suficientes para que el derivado de la unión de conjuntos sea la unión de derivados. Mientras que, en el Corolario 4.16, bajo las mismas hipótesis, generalizamos el resultado para una familia finita de conjuntos.

2. En la Proposición 6.2, hallamos una primitiva para cada conjunto unitario. Esto es indispensable para las demostraciones de los teoremas posteriores, pues nos permite concentrarnos en los puntos aislados del conjunto K.

3. El Lema 6.1 es clave para la demostraciones de los teoremas 6.3 y 6.5, pues al hallar una sucesión de bolas disjuntas dos a dos podemos asegurarnos que el α-ésimo derivado de cierto conjunto es el conjunto deseado.

4. La condición de separabilidad de los espacios polacos juega un rol importante para retirar la condición de numerabilidad del Teorema 6.3.

Ahora, ciertas preguntas naturales que surgen del presente trabajo son:

- El presente trabajo es una generalización de lo realizado por los autores en [1]. Con esto, una pregunta válida es: ¿Será posible generalizar la primitiva de espacios polacos para ciertos espacios más generales? Siguiendo la línea de la Teoría Descriptiva de Conjuntos dada por [11], se podría preguntar si es posible plantear una primitiva asociada a la derivada de Cantor-Bendixson en espacios fuertemente Choquet.

- De manera análoga a lo hecho en el Teorema 6.5, ¿será posible desprendernos de ciertas hipótesis planteadas tales como la compacidad de K y el hecho de que E sea un polaco perfecto?

Bibliografía

[1] Álvarez-Samaniego, B y Merino, A. A primitive associated to the Cantor-Bendixson derivative on the real line. *Journal of Mathematical Sciences: Advances and Applications*, 41:1–33, 2016.

[2] Álvarez-Samaniego, B y Merino, A. Countable ordinal spaces and compact countable subsets of a metric space. *The Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 16:1–11, 2019.

[3] Álvarez-Samaniego, B y Merino, A. Some properties related to the Cantor-Bendixson derivative on a Polish space. *arXiv preprint arXiv:2003.01512*, 2020.

[4] Cantor, G. Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen. *Mathematische Annalen*, 5:123–132, 1872.

[5] Cantor, G. Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten I. *Mathematische Annalen*, 15:1–7, 1879.

[6] Cantor, G. Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten II. *Mathematische Annalen*, 17:355–358, 1880.

[7] Cantor, G. Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten III. *Mathematische Annalen*, 20:113–121, 1882.

[8] Cantor, G. Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten IV. *Mathematische Annalen*, 21:51–58, 1883.

[9] Cantor, G. Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre. *Mathematische Annalen*, 46:481–512, 1895.

[10] Hrbacek, K. y Jech, T. *Introduction to Set Theory*. Marcel Dekker, Inc., Estados Unidos, tercera edición, 1999.

[11] Kechris, A. *Classical Descriptive Set Theory*. Springer-Verlag, Estados Unidos, 1995.

[12] Kreyszig, E. *Introductory Functional Analysis With Applications*. John Wiley & Sons, Estados Unidos, 1978.

[13] Merino, A. Clasificación de subconjuntos compactos numerables en algunos espacios polacos. Master's thesis, Universidad Central del Ecuador, Quito, Ecuador, 3 2017.

[14] Munkres, J. *Topology*. Prentice Hall, Incorporated, Estados Unidos, segunda edición, 2000.

[15] Pinter, C. *Set Theory*. Addison-Wesley, Estados Unidos, 1971.

[16] Searcóid, M. *Metric Spaces*. Springer, Estados Unidos, 2006.

[17] Shirali, S. y Vasudeva, H. *Metric Spaces*. Springer Science & Business Media, Estados Unidos, 2006.

[18] Sieradski, A. J. *An Introduction to Topology and Homotopy*. PWS-KENT Publishing Company, Estados Unidos, 1991.

[19] Willard, S. *General Topology*. Courier Corporation, Estados Unidos, 2004.