ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS

MÉTODOS DE FINANCIAMIENTO PARA EL SISTEMA DE PENSIONES DE LA SEGURIDAD SOCIAL ECUATORIANA

PROYECTO PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

MARCO VINICIO ÁLVAREZ SUCUZHAÑAY

paula.avila@epn.edu.ec

PAULA FERNANDA ÁVILA ESTÉVEZ

marco.alvarez@epn.edu.ec

Director: M.SC. DIEGO PAÚL HUARACA SHAGÑAY

diego.huaracas@epn.edu.ec

Codirector: M.SC. MENTHOR OWALDO URVINA MAYORGA

menthor.urvina@epn.edu.ec

QUITO, ABRIL 2021

DECLARACIÓN

Nosotros, MARCO VINICIO ÁLVAREZ SUCUZHAÑAY y PAULA FERNANDA ÁVILA ESTÉVEZ, declaramos bajo juramento que el trabajo aquí escrito es de nuestra autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y que hemos consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

A través de la presente declaración cedemos nuestros derechos de propiedad intelectual, correspondientes a este trabajo, a la Escuela Politécnica Nacional, según lo establecido por la Ley de Propiedad Intelectual, por su reglamento y por la normatividad institucional vigente.

Marco Vinicio Álvarez Sucuzhañay

Paula Fernanda Ávila Estévez

CERTIFICACIÓN

Certificamos que el presente trabajo fue desarrollado por MARCO VINICIO ÁLVAREZ SUCUZHAÑAY y PAULA FERNANDA ÁVILA ESTÉVEZ, bajo nuestra supervisión.

M.Sc. Diego Paúl Huaraca Shagñay
Director del Proyecto

M.Sc. Menthor Owaldo Urvina Mayorga
Codirector del Proyecto

AGRADECIMIENTOS

A mis padres, Marco y Piedad, por su amor infinito, apoyo absoluto y por haber forjado en mi los valores de los cuales hoy me siento orgulloso.

A mis hermanos, Jhon y Jazmín, quienes son el motivo de tantas sonrisas en mi vida.

A nuestro director de tesis M.Sc. Diego Huaraca, por habernos instruido durante todo este camino y por la confianza que ha depositado en nosotros, tanto como tutor y amigo. A nuestro codirector M.Sc. Menthor Owaldo Urvina Mayorga, por su apoyo brindado durante el proceso de este proyecto.

A mis compañeros de la carrera, en especial a mi compañera de tesis Paula, quien me ha acompañado a lo largo de toda esta aventura, haciendo de esta una de las etapas más felices de mi vida.

Marco

AGRADECIMIENTOS

A mis padres, Oswaldo y Margarita, quienes son mi inspiración para crecer cada día más, son mi pilar y quienes siempre me apoyan en cada momento de mi vida, gracias por tanto.

A mis hermanas, María José y Estefy, que son motivo de mi alegría en casa y un apoyo fundamental en mi vida, gracias por ser mis amigas y compañeras.

A nuestro director de tesis, M.Sc. Diego Huaraca, por su guía, apoyo y enseñanza, por confiar en nosotros para realizar este proyecto de titulación y ser motivo de inspiración profesional y humana. También agradezco a Menthor Urvina por aceptar ser parte de este proceso y brindarnos su apoyo.

A mis buenos amigos de la carrera de Matemática e Ingeniería Matemática que lograron hacer de mi vida universitaria una experiencia inolvidable. En especial agradezco a Belén Simbaña por ser mi persona, por su lealtad y confianza. Agradezco a mi compañero de tesis y gran amigo, Marco Álvarez, por ser incondicional, por todo su amor, cariño y compañía.

Finalmente, agradezco a todos los profesores que estuvieron presentes a lo largo de mi carrera universitaria, por brindarme su tiempo, conocimiento y experiencia.

Paula

DEDICATORIA

A mis padres que son mi fuerza interior y quienes me enseñaron a caminar por la vida.

Marco

DEDICATORIA

Dedico esta tesis a mis padres, quienes hasta el día de hoy me han dejado dos legados increíbles: raíces y alas.

Paula

Índice general

Resumen

Entre los siglos XIX y XX en casi todos los países se comienzan a realizar reformas para que los trabajadores y sus familias puedan tener calidad de vida durante toda su etapa laboral y después de ella. De esta forma, la jubilación se ha convertido en una de las coberturas más importantes de la seguridad social a nivel mundial y el Ecuador no es la excepción, actualmente el equilibrio del sistema de pensiones ecuatoriano viene de la relación directa entre los cotizantes y aquellos que ya han cumplido su vida laboral. Pero, que sucede cuando este equilibrio se empieza a quebrantar debido a distintos cambios como el aumento en la esperanza de vida de la población, la disminución de cotizantes y las características mismas de la población. En el presente trabajo se comparan tres sistemas de financiamiento de pensiones para la seguridad social ecuatoriana: *reparto atenuado*, *capitalización individual* y *mixto por etapas*; mediante el desarrollo de un aplicativo, con el software estadístico R, donde cualquier persona que cumpla con los requisitos de jubilación dictados en la ley de seguridad social, podrá tener una idea de la pensión que recibirá en el momento de su jubilación. Todo esto bajo un estudio exhaustivo con datos de cotizantes y pensionistas facilitados por el Instituto Ecuatoriano de Seguridad Social desde el 2015 al 2019. Finalmente, en los resultados se pueden identificar las diferencias del funcionamiento y de los cálculos actuariales entre los tres sistemas de financiación propuestos, verificando en cada uno de ellos el "principio de equivalencia financiero-actuarial".

Palabras clave: seguridad social, sistema de pensiones, sistema de reparto, sistema de capitalización, sistema mixto, principio de equivalencia financiero-actuarial.

Abstract

Between the nineteenth and twentieth centuries in almost all countries reforms began to be carried out so that workers and their families can have a quality of life throughout their work and after it. In this way, retirement has become one of the most important social security coverage worldwide and Ecuador is no exception, currently the balance of the Ecuadorian pension system comes from the direct relationship between contributors and those who have already served their working life. But, what happens when this balance begins to break due to different changes such as the increase in the life expectancy of the population, the decrease of contributors and the characteristics of the population itself. The following work compares three pension financing systems for Ecuadorian Social Security: *attenuated distribution*, *individual capitalization* and *two-steps mixed*; through the development of an application, with the Statistical Software R, where anyone who meets the retirement requirements dictated by the Social Security Law, will be able to have an idea of the pension that will receive at the time of his retirement. All this under an exhaustive study with data of contributors and pensioners provided by the Ecuadorian Institute of Social Security from 2015 to 2019. Finally, the results can identify the differences in the functioning and actuarial calculations between the three proposed financing systems, verifying in each of them the "principle of financial-actuarial equivalence".

Keywords: social security, pension system, distribution system, capitalization system, mixed system, principle of financial-actuarial equivalence.

Capítulo 1

Introducción

1.1. Antecedentes

Se establece una necesaria aclaración conceptual entre seguro social y seguridad social; la seguridad social es el derecho, mientras que el seguro social son los medios para llevarlo a cabo. La seguridad social engloba conceptos como aportaciones, prestaciones, sistemas de pensiones, entre otros y tiene como objetivo proteger a los trabajadores frente a los riesgos de la vejez y afines, a quienes no lo pueden hacer de forma individual.

La seguridad social puede contribuir en gran parte al desarrollo y crecimiento social de un país mediante la mejora de las condiciones de vida, el Estado y las empresas direccionadas a la cobertura de la seguridad social son los entes encargados de que trabajadores y sus familias tengan un acceso seguro a la salud y cuenten con una protección en sus ingresos en caso de vejez y diferentes contingencias. En la actualidad, la jubilación es la cobertura más relevante de la Seguridad Social en todo el mundo, con el fin de garantizar el financiamiento de la pensión de vejez, a lo largo del tiempo han surgido varios modelos financieros-actuariales, los llamados *"Sistemas de Financiamiento de la Seguridad Social"* que son de naturaleza estocástica y permiten establecer la equivalencia financiero-actuarial entre primas (aportaciones, cotizaciones, contribuciones) y prestaciones (indemnizaciones, pensiones) de un colectivo en un horizonte temporal determinado [49].

Entre los sistemas utilizados alrededor del mundo destacan los *sistemas de reparto*, que están basados en el principio de "solidaridad intergeneracional", donde las cotizaciones de los trabajadores en activo están destinadas a financiar las pensiones existentes en ese momento, por otro lado, en los *sistemas de capitalización* los individuos poseen cuentas individuales y las prestaciones guardan una relación directa con las aportaciones que se han ido realizando, es decir, cada individuo o contribuyente cotiza para sí mismo.

La Constitución Política de la República del Ecuador ampara y protege al sistema de pensiones, cuyo organismo encargado es el Instituto Ecuatoriano de Seguridad Social (IESS). Actualmente, en el Ecuador está vigente el sistema de reparto puro, de solidaridad intergeneracional, donde las personas que trabajan bajo relación de dependencia realizan mensualmente el aporte personal y patronal obligatorio de su remuneración.

En los últimos años la cobertura del seguro social ha aumentado considerablemente, sin embargo, se ha producido un déficit en el fondo de pensiones y en el fondo de salud. En este contexto, considerando datos de la Superintendencia de Bancos y Seguros, el fondo de salud registraría a diciembre de 2014 un déficit acumulado de 1 547 millones de dólares; para tratar de cubrir el déficit la Empresa Volrisk en 2015 propuso cambiar los aportes correspondientes a pensiones y salud, de 9.74 % del salario a 5.76 %; y de 5.71 % a 9.94 %, respectivamente. Por otro lado, el fondo de pensiones también presenta problemas, tanto los estudios actuariales de la OIT como los del propio IESS han dado la alerta sobre la necesidad de considerar el importante déficit actuarial que presenta el fondo, el que se ha vuelto mucho más grave luego del cambio del porcentaje de tasas de aportación para cada fondo [38].

El Ecuador también tiene grandes problemas respecto a la viabilidad financiera de su sistema de pensiones público, el informe general actuarial presentado por el IESS en el 2013, subestimaría el déficit actuarial al año 2053 en al menos 124 147 millones USD; además, en dicho informe también se evidenció que el déficit aparecerá en el año 2034 por 2 777 millones USD [5]. Gran parte de este déficit tiene que ver con la forma en la que se calculan las pensiones; pues, el cálculo se basa en tomar 5 años donde los promedios de los salarios hayan sido los más altos, se multiplican todas las remuneraciones mensuales de estos años y se calcula la raíz sesentava para obtener la base de cálculo, posteriormente se multiplica un porcentaje de la base de cálculo por el coeficiente anual de cotización que depende de los años de imposición del cotizante [32]; la forma de calcular las pensiones no tiene bases actuariales, por lo que el sistema no es actuarialmente justo. Todo esto, sumado al poco interés de los gobiernos y la mala toma de decisiones en cada administración, ha provocado que se genere gran incertidumbre respecto a los pagos de las pensiones. La situación empeora mientras pasan los años y probablemente, personas que han cotizado durante toda su vida corren el riesgo de no poder cobrar la pensión durante su jubilación.

En la actualidad, la incorporación de los diferentes sistemas de financiación de pensiones alrededor del mundo aseguran en muchos casos estabilidad financiero actuarial. Pero, ahora nos preguntamos ¿Cuál es el mejor sistema financiero-actuarial a incorporar en un país? ¿Cómo entregar jubilaciones justas a los adultos mayores? ¿Qué hace que un sistema sea viable a largo plazo? ¿Qué factores influyen en la estabilidad de los sistemas financieros de seguridad social?, estas interrogantes motivan al estudio teórico y técnico del Sistema de Seguridad Social en el caso ecuatoriano.

En el presente trabajo se plantea comparar tres Sistemas de Financiación para los seguros de Vejez, Invalidez y Muerte; si se aplicaran en el Ecuador y determinar cuál de ellos sería la mejor opción a largo plazo, también se ha propuesto crear un simulador para evidenciar los cambios, ventajas o afectaciones de los sistemas propuestos, esto con ayuda del Software RStudio. Cabe recalcar que en este trabajo se está obviando cualquier modificación o alteración futura en la normativa de la Ley de Seguridad Social, es decir, que se supone que no se producen cambios normativos.

1.2. Justificación

Tras cada pensión hay una persona, y en alguna manera, el futuro de las pensiones es el futuro de las personas. La relevancia social que tienen los sistemas de pensiones tiene que ver especialmente con su efecto estabilizador de las necesidades sociales, la pobreza en la vejez es un factor importante, que generalmente ocurre cuando una persona ya no es capaz de producir sus propios ingresos, debido a su edad.

En todo el mundo los sistemas de pensiones y sus reformas están en un estado de evolución continua motivado por cambios en la atención, por necesidades de reforma cambiantes y por modificaciones del entorno [27]. Es así como se da lugar al estudio y la incorporación de modelos financieros-actuariales, para poder aliviar los problemas existentes en la actualidad.

Hasta el día de hoy se han desarrollado varios modelos financiero-actuariales, debido a la inestabilidad de los sistemas de pensiones. El Ecuador en su sistema de seguridad social no cuenta con un fondo de ahorro sino con un fondo de financiamiento, que día a día se ve afectado por los cambios demográficos, el incremento de personas sin trabajo y la existencia de trabajadores sin seguridad social. En 2001 se intentó reformar dicho sistema y la Ley planteó como principal reforma un sistema mixto de pensiones con viabilidad financiera en el largo plazo, reforma que se diluyó a los seis meses tras declararse la inconstitucionalidad de ciertos artículos y disposiciones [2].

Desafortunadamente, como lo demuestran los datos y cifras del propio IESS y de diversas instituciones que han estudiado el caso, la institución principal proveedora de las prestaciones de seguridad social, está atravesando una difícil situación tanto financiera como administrativa que pone en altísimo riesgo las prestaciones para las siguientes cohortes de jubilados en cuanto a pensiones [38].

Sin embargo, no hay un estudio comparativo, donde se discuta la funcionalidad de un sistema de reparto atenuado, capitalización individual o mixto (reparto y capitalización) en un mismo lugar, mucho menos la implantación de dichos sistemas adaptados a la realidad del Ecuador, sus cambios económicos y financieros. Se propone usar estos tres sistemas para el estudio puesto que, varios países alrededor del mundo han demostrado tener éxito, para el sistema de capitalización un claro ejemplo es el de Chile (país pionero del modelo), donde el sistema a ayudado en la "crisis de envejecimiento" obteniendo resultados parcialmente favorecedores, pues el modelo después de todo se ha ido reformando continuamente por problemas estructurales y políticos. Aún así, se sumaron al sistema países como México, Bolivia, El Salvador, entre otros; donde se elogia que las reformas han motivado un incremento de la transparencia y una mayor inmunización frente a las manipulaciones del sistema [18]. Por otro lado, varios países cuentan con un sistema de reparto público, entre ellos: Argentina, Brasil, Cuba, Haití y la República Bolivariana de Venezuela. Algunos de estos países han optado por integrar ambos regímenes (capitalización y reparto) con el fin de mejorar sus sistemas de pensiones.

1.3. Objetivos

El objetivo general del presente trabajo es comparar tres Sistemas de Financiación para la Seguridad Social (Sistema de Reparto Atenuado, Sistema de Capitalización Individual y Sistema Hídrido) bajo las normativas ecuatorianas vigentes, mediante el desarrollo de un aplicativo con el software estadístico R.

Objetivos Específicos

- Presentar las nociones básicas de la matemática financiera y los conceptos teóricos de los cálculos actuariales, asociados a los tres sistemas de pensiones y su reserva matemática de manera detallada.
- Identificar las diferencias del funcionamiento y de los cálculos actuariales entre los tres sistemas de financiación para la seguridad social.
- Desarrollar un simulador que permita obtener una proyección aproximada de la renta o pensión mensual que podría recibir una persona al momento de su jubilación, para cada modelo.
- Otorgar un análisis actuarial cuantitativo que establezca referencias para la seguridad social ecuatoriana, bajo los parámetros de justicia y equivalencia actuarial.

1.4. Software R

R es un sistema para análisis estadísticos y gráficos creado por Ross Ihaka y Robert Gentleman, inició como un proyecto experimental para utilizar métodos de Lips[1] en la construcción de un pequeño banco de pruebas que sirva para evaluar posibles construcciones de entornos estadísticos. Desde el inicio del proyecto se decidió usar la sintaxis del lenguaje S[2]. Como consecuencia, la sintaxis del lenguaje R es similar al lenguaje S, pero la semántica que aparentemente vemos es parecida a la de S, en realidad es sensiblemente diferente, sobre todo en los detalles un poco más profundos de la programación. [28]

Este software corre en distintas plataformas Linux, Windows, MacOS, e incluso en PlayStation 3. R almacena y actualiza su código y documentación por medio de CRAN[3], la cual es una red de servidores web y FTP[4] en todo el mundo. El término ambiente pretende caracterizarlo como un sistema totalmente planificado y coherente, en lugar de una acumulación gradual de herramientas muy específicas y poco flexibles, como suele ser con otro software de análisis de datos [46]. Este software se descarga a través del sitio web de CRAN: https://cran.r-project.org/.

A diferencia de muchos softwares estadísticos comerciales que están enfocados en un análisis específico, R se utiliza en diversas industrias y áreas científicas. Hasta el 2018, R tenía 12 000 paquetes disponibles con diversas técnicas de análisis, manipulación y visualización de datos, aportados por miles de usuarios miembros de la comunidad, los cuales van aumentando conforme pasa el tiempo.

1.4.1. RStudio

Para contar con más herramientas de apoyo en el uso de R se emplea el software RStudio. En [10], este software es una interfaz, que permite contar con una interacción más fluida con el programa R. En otras palabras, RStudio se trata de un software que tiene como principales ventajas: el orden y la visualización de los procesos que son llevados a cabo con R, pues lo realiza de manera simultánea, haciendo más fácil y comprensible la interacción con el usuario.

[1] Lenguaje de programación multiparadigma creado en 1958 por el MIT.
[2] Lenguaje de programación estadístico comercial desarrollado en Bell Laboratories.
[3] CRAN: Comprehensive R Archive Network
[4] FTP: File Transfer Protocol

RStudio integra las herramientas que usa R en un solo entorno, permitiendo una navegación rápida a archivos y funciones. Otorga la posibilidad de crear proyectos y trabajar en varios de ellos al mismo tiempo, admite la creación de HTML, PDF, documentos de Word y presentaciones de diapositivas a través del paquete “knitr” junto con el lenguaje R Markdown . Además, junto con el servidor Shiny proporciona una herramienta para construir aplicaciones interactivas web usando únicamente el lenguaje de programación R, el cual será utilizado para realizar los cálculos y el aplicativo del proyecto de investigación.

Capítulo 2

La Seguridad Social y sus Sistemas de Pensiones

Según la Organización Internacional del Trabajo (OIT), la seguridad social es la protección que una sociedad proporciona a los individuos y los hogares para asegurar el acceso a la asistencia médica y garantizar un ingreso económico, en particular en caso de vejez, desempleo, enfermedad, invalidez, accidentes del trabajo, maternidad o pérdida del sostén de familia.

2.1. Orígenes de la Seguridad Social y de los Sistemas de Pensiones

2.1.1. Orígenes de la Seguridad Social

La regulación del trabajo y de la seguridad social aparece con el desarrollo del trabajo en las fábricas, el trabajo y la seguridad social han interactuado desde la revolución industrial pues la introducción del maquinismo modificó drásticamente las relaciones de trabajo. En un principio se negó la relación entre los riesgos de trabajo y la seguridad social, pero para la segunda parte del siglo XIX se reconocerían los derechos de los trabajadores derivados de una relación de trabajo, y hace menos de 100 años a principios del siglo XX, se reconocerían en algunos países europeos los derechos de los trabajadores relativos a la seguridad social. Destacan particularmente el modelo desarrollado en Alemania por Bismarck y el implementado en Reino Unido a partir de las ideas de Beveridge [1].

2.1.2. Orígenes de los Sistemas de Pensiones

En Prusia (ahora Alemania) del siglo XIX, se sitúa el origen moderno del Sistema de Pensiones. En el marco del proceso de la unificación alemana, bajo la hegemonía de la monarquía absolutista prusiana, se crean los primeros seguros para la vejez, impulsados por el canciller, Otto Von Bismarck, líder político del nuevo Estado. Debido a la terrible situación económica y social de la segunda mitad del siglo XIX (miseria y escasez de viviendas en las grandes ciudades, huelgas, e intento revolucionario del proletariado) y con el pujante movimiento obrero socialista, se ponen en marcha los seguros sociales en Alemania. Entre otras reformas sociales que luego se convirtieron en leyes, en 1889 se crea la Ley de los Seguros de Invalidez y Vejez [50]. Algunos años después se introdujo este tipo de sistema en América Latina (Argentina, Brasil, Chile y Uruguay). Los modelos de seguro existentes fueron ampliándose, incluyendo nuevos riesgos y abarcando más grupos de personas beneficiarias

Por otro lado, el Reino Unido se caracterizó por una tradición liberal y democrática. No hubo movimientos políticos colectivistas, ni una noción de la supremacía de la responsabilidad del Estado, y se desarrollaron los sistemas de seguro privado y voluntario. Sin embargo, William Henry Beveridge, economista británico en el año 1942 elaboró el llamado "Informe Beveridge" que definió lo que sería el Estado del Bienestar Británico después de la Segunda Guerra Mundial. Este informe introdujo en Gran Bretaña un modelo alternativo de Seguridad Social de reparto que garantizara una pensión mínima e igual para todos los trabajadores. El plan Beveridge tenía un propósito claro: reducir la pobreza y elevar los ingresos de los más pobres para garantizar un nivel de subsistencia, lo definió como un "arma contra la pobreza de las masas". Al mismo tiempo que definió dicha pensión mínima, el informe también destacó la parte individualista de su plan: la acción del Estado debe limitarse a redistribuir en favor de los pobres, mientras que los individuos deben poder satisfacer de forma privada sus propias necesidades adicionales [13].

2.2. Elementos de la Seguridad Social

Para entrar en materia de la seguridad social, es necesario aclarar conceptos que componen a la seguridad social, entre esos conceptos se tienen [33]:

- **Cotización:** Contribución en dinero que aporta el trabajador, el patrono y el

Estado en el porcentaje legalmente establecido y sobre la base del salario del trabajador, para el financiamiento del Seguro Social.

- **Pensión:** Es la prestación en dinero, en forma de renta temporal o vitalicia que el Seguro Social paga mensualmente a sus asegurados o a los beneficiarios de éstos, previo cumplimiento de los requisitos legales correspondientes.

- **Asegurado:** Persona potencialmente beneficiaria de las prestaciones que otorga el régimen del Seguro Social (cotizantes o dependientes de éste), que adquiere derecho a recibir estas prestaciones en la medida que llena los requisitos correspondientes.

- **Asegurado Cotizante:** Es la persona que, mediante el pago de las contribuciones establecidas por la ley, efectuado directamente o por intermedio de terceros, genera para sí mismo o sus dependientes el derecho a ciertos beneficios y, por lo tanto, es protegida por la seguridad social.

- **Cotizante Activo:** Todo trabajador al servicio del estado y de personas naturales o jurídicas que operen en el territorio nacional, así como el independiente y el ocasional al afiliarse voluntariamente, en un período determinado.

- **Prestación:** Es cualquier tipo de beneficio que, de acuerdo a su ley y reglamento, otorga el Seguro Social a los asegurados cotizantes o a los beneficiarios.

2.3. Ramas de la Seguridad Social

En la seguridad social se consideran los sistemas de salud, la previsión social y la asistencia social. Los sistemas de salud comprenden la asistencia médica, las prestaciones monetarias en caso de enfermedad y las prestaciones de maternidad. La previsión social integra los seguros sociales que proporcionan cobertura frente a pérdidas de ingreso en el mercado laboral, el sistema de accidentes del trabajo y enfermedades profesionales (accidentes y enfermedades laborales), el sistema de seguro de cesantía, seguro de desempleo, los sistemas de pensiones contributivos (vejez, discapacidad y sobrevivencia) y no contributivos (vejez y discapacidad) [7].

Por otro lado, la OIT ampara a todas las ramas de la seguridad social, para cada una de estas se toma en cuenta la contingencia protegida, es decir el riesgo al que se enfrenta la persona protegida; el campo de aplicación personal, es decir las personas que deben beneficiarse de las prestaciones garantizadas por los instrumentos; la amplitud de las prestaciones garantizadas, así como las condiciones para su atribución.

- **Asistencia Médica:** La contingencia cubierta comprende el padecimiento de algún tipo de enfermedad que sufre una persona, sin importar la causa. Además cubre la asistencia médica necesaria durante el embarazo, el parto y sus consecuencias.

- **Prestaciones monetarias de enfermedad:** La contingencia comprende la incapacidad para trabajar, resultante de un estado mórbido, que entrañe la suspensión de ganancias y de enfermedades profesionales.

- **Prestaciones de maternidad:** La contingencia cubierta deberá comprender, por una parte el embarazo, el parto y sus consecuencias, y por otra, la suspensión de ganancias que ocasionen.

- **Prestaciones de paternidad:** La interacción del padre con el recién nacido es importante para el desarrollo infantil y por ello se han instaurado medidas que cubran contingencias que comprenden, la suspensión de ganancias por las horas que se ocupen para acompañar a la mujer a las consultas médicas prenatales y las consecuencias posteriores al parto con prestaciones sujetas a los ingresos.

- **Prestaciones en caso de accidentes del trabajo:** La contingencia cubierta comprende: el estado mórbido, la incapacidad para trabajar, la invalidez o la disminución de las facultades físicas producidas por un accidente del trabajo o por una enfermedad profesional prescrita.

- **Prestaciones de desempleo:** La contingencia comprende la suspensión de ganancias ocasionada por la imposibilidad de obtener un empleo conveniente, en el caso de una persona protegida que sea apta para trabajar y esté disponible para el trabajo.

- **Prestaciones de vejez:** La contingencia cubierta es la supervivencia más allá de una edad prescrita, la edad prescrita normalmente no deberá superar los 65 años.

- **Prestaciones de invalidez:** La contingencia cubierta consiste en la incapacidad para ejercer una actividad profesional cuando sea probable que esta incapacidad sea permanente o cuando la misma subsista después de cesar las prestaciones monetarias de enfermedad.

- **Prestaciones de sobrevivientes:** La contingencia cubierta deberá comprender la pérdida de medios de existencia sufrida por la persona viuda o por los/as hijos/as como consecuencia de la muerte del sostén de la familia.
- **Prestaciones familiares:** La contingencia cubierta es la de tener hijos/as a cargo en las condiciones que se prescriban, en este caso se considera "hijo/a " en la edad de asistencia obligatoria a la escuela o si tiene menos de 15 años.

2.4. Principios y Desafíos de los Sistemas de Pensiones

2.4.1. La Situación de la Seguridad Social y sus Desafíos

A lo largo del tiempo han surgido varias tendencias que han presentado un desafío para la estructura de la seguridad social. Los entornos demográfico, económico y social, en los cuales funcionan los sistemas de seguridad social, cambian rápidamente y estos cambios plantean claramente retos para las sociedades y para sus sistemas de transferencias sociales.

- **Transición demográfica:** Las tasas de dependencia constituyen un indicador clave de la presión demográfica en los sistemas nacionales de transferencias sociales, influyen directamente en la relación entre el número de beneficiarios del sistema y el número de personas que financian estas transferencias. El envejecimiento es el factor que ejerce una mayor influencia en las transferencias sociales a la población de más edad (tanto formal como informal), las que, a su vez, constituyen las partidas de gastos más grandes en los sistemas de protección social de los países desarrollados [16]. Así, el sistema de pensiones es una de las partes más afectadas de la seguridad social por el problema de envejecimiento.
- **Desafío de la cobertura** La incidencia del trabajo formal produjo un estancamiento y reducción de las tasas de cobertura de la seguridad social presentando una contracción de las mismas. Varios países de medianos y bajos ingresos aún no desarrollan estructuras de seguridad social, como los regímenes no contributivos, que por lo menos garantizan un nivel básico de cobertura de

la seguridad social para quienes no están en las posibilidades de un trabajo formal.

- **Cuestiones de salud pública:** Las nuevas amenazas a la salud pública constituyen otro factor que puede ocasionar cambios rápidos en el entorno demográfico en el que funcionan los sistemas de protección social, sobre todo en los países en desarrollo.
- **Empleo y globalización:** En casi todos los países, es cada vez más intensa la competencia mundial en los mercados nacionales y en las exportaciones, esto debido a que las tecnologías, los lugares de trabajo y las capacidades, se vuelven obsoletas a un ritmo cada vez más veloz, lo que es preocupante pues pone en riesgo la viabilidad de los sistemas de seguridad social [16].
- **Migraciones:** La inclusión de los migrantes en los sistemas nacionales de seguridad social es una vía para ayudarles a integrarse en sus nuevos países o en las ciudades en las que eligen vivir. Además, las remesas de los trabajadores en numerosos países se han convertido en la principal fuente de ingresos de muchas familias.
- **Informalización de los mercados laborales y de las economías:** La industria manufacturera ha dejado de constituir el sector principal de crecimiento del empleo en muchas regiones y los movimientos de los trabajadores de las zonas rurales a las urbanas han sido absorbidos, en gran parte, por el comercio, especialmente por el pequeño comercio informal.
- **Desafío de la financiación:** Es importante saber el nivel de recursos que se va a asignar a la seguridad social. El ”costo de la seguridad social”, ha empezado a centrarse más en una perspectiva de futuro en la que se considera ese costo como inversión en el crecimiento económico y la cohesión social de un país, el objetivo a largo plazo es poder crear y estimar varios modelos de financiación de los sistemas de seguridad social.

2.4.2. Sistemas de Pensiones de la Seguridad Social

Los sistemas públicos de pensiones son parte de la seguridad social de un país, diseñados para asegurar logros sociales que implican crear las condiciones para recibir una pensión en los casos de: i) discapacidad del trabajador; ii) sobrevivencia como dependiente de un trabajador que fallece y era el proveedor del hogar; iii) trabajadores que alcanzan la edad que la sociedad ha definido como elegible para optar por vivir de rentas sin tener que trabajar y iv) personas que estando en situación de vejez e invalidez, carecen de ingreso para su sustento (alivio de la pobreza).

Como parte de la seguridad social, los sistemas públicos de pensiones se sustentan en cimientos que sostienen y conforman una organización, una institución, un ideal de seis principios sin los cuales perdería identidad y razón de ser, estos principios son: universalidad, igualdad, solidaridad, integridad, unidad y sostenibilidad financiera.

2.4.3. Desafíos de los Sistemas de Pensiones

El mundo presenta un cambio constante y hay algunos factores que afectan a los sistemas de pensiones en este ambiente de evolución, uno de estos factores es la globalización, también pueden ser factores de tipo demográfico, socio-económico y financiero.

- **Factores demográficos**

  El fenómeno del envejecimiento de la población es un factor que ha llamado mucho la atención alrededor del mundo, este fenómeno tiene dos parámetros importantes; el primero es la disminución de las tasas de natalidad y el segundo una disminución de las tasas de mortalidad. Esto quiere decir, que mientras hay un incremento de la esperanza de vida en la población, la tasa de fecundidad se reduce con el tiempo y esto lleva a una estructura desequilibrada a nivel poblacional.

  El desafío al que se enfrentan los sistemas de pensiones, con el cambio demográfico, es que al disminuir la población activa no va se va a poder cubrir el coste de pensiones de la población pasiva; así, este tema ha modificado significativamente las condiciones en las que se instauraron en un inicio los sistemas públicos de pensiones.

- **Factores socio-económicos y financieros**

  - *Jubilación anticipada:* La prejubilación, identificada más que nada como una forma de populismo político, ha afectado negativamente al sistema de pensiones público puesto que produce un desbalance financiero al momento de entregar los beneficios a los pensionistas.

- *Tasa de Sustitución:* siendo el porcentaje del salario pensionable, es un elemento importante de los sistemas de pensiones, los cuales se han visto afectados a través del tiempo por el grado de generosidad de esta tasa.
- *Desempleo:* Las altas tasas de desempleo a nivel mundial también han sido factores clave para el desequilibrio financiero de los sistemas de pensiones ya que hay un incremento de la economía informal.
- *Cambios socio-culturales:* Los cambios socio-culturales de las últimas décadas han generado una alternancia de las actividades, por ejemplo el hecho de que personas quieran jubilarse antes o que las personas consigan un trabajo estable a edades cada vez más altas.
- *Porcentaje de gasto del PIB en pensiones:* El desafío se encuentra en que el aumento del gasto en pensiones provoca un aumento de gasto del estado y puede disminuir fondos direccionados a la salud y educación.
- *Fiscalidad:* No se puede abusar de los recursos fiscales, esto produce inestabilidad y fraude fiscal.
- *Ahorro de las familias:* Mientras mayor es el gasto público menos es la preocupación de establecer un patrimonio privado y no es sólo el hecho de producir un patrimonio privado si no un patrimonio productivo donde este generará valor y riqueza.

- **Factores de Globalización**

  El proceso de globalización afecta indudablemente al sistema de pensiones pues el incremento o disminución de las tasas de cotización y el modelo del sistema público de pensiones implantado influyen en las competencias de los países al buscar inversores. Por otra parte el crecimiento de la propiedad privada y la liberación del mercado también provocan más competencia en los sistemas de pensiones privados.

2.5. Pilares de los Sistemas de Pensiones

El cambio de las tasas demográficas y el aumento en la esperanza de vida ha hecho que los sistemas de pensiones propuestos en el mundo cambien radicalmente, es así como los principales organismos internacionales y nacionales empezaron a proponer cambios en sus modelos debido al temor de que no se pueda garantizar el sostenimiento de los sistemas públicos de pensiones.

En concordancia con esta preocupación y con el objetivo de reducir la vulnerabilidad de los sistemas de pensiones, a partir de los años sesenta se fue desarrollando la teoría de los tres pilares en los que debe descansar un sistema nacional de pensiones. Es así como el modelo de pensiones propuesto por la OIT, propone un sistema de cuatro pilares con las siguientes características:

- **Primer Pilar:** Financiado con los ingresos generales del Estado. Se correspondería con las pensiones no contributivas o asistenciales. Este pilar por algunos se ha llamado pilar cero o pilar básico. El objetivo de este pilar es promover la distribución de los ingresos y riqueza y garantizar un nivel de vida mínimo.
- **Segundo Pilar:** De prestaciones definidas, contributivo, obligatorio y gestionado por el Estado, con tasas de sustitución entre 40-50 por ciento del salario medio de toda la vida laboral e indexado totalmente.
- **Tercer Pilar:** Pilar contributivo del sistema de pensiones, de carácter voluntario, con incentivos fiscales para estimular el ahorro complementario para pensiones (adicional al ahorro obligatorio en el Segundo Pilar). Este Pilar, dependiendo del país, se encuentra administrado por entidades privadas, bancos, y otras instituciones.
- **Cuarto Pilar:** Este pilar también es complementario, compuesto por un conjunto de planes privados de pensiones y voluntarios, dirigido a quienes poseen la capacidad económica para realizar ahorros personales adicionales, formando un fondo para atender el incremento de gastos cuando lleguen a una edad más avanzada.

Sin embargo, existen distintos modelos, dependiendo del organismo internacional que analicemos. Las diferencias entre ellos radican en: el número de pilares a tener en cuenta, la delimitación de cada uno de ellos, el nivel de obligatoriedad, el nivel de capitalización y el grado de cobertura de cada uno de ellos [44].

2.6. Componentes de los Sistemas de Pensiones

Los componentes de los sistemas de pensiones están relacionados con los modelos con los que cada país ha tratado de dar solución a la cobertura, suficiencia de prestaciones y sostenibilidad financiera [43]. Generalmente una pensión pública se asocia directamente con un sistema de pensiones público y una pensión privada con un sistema de pensiones privado o de capitalización. Sin embargo, a través del tiempo en varios países se han ido fusionando estos dos sistemas y a pesar de tener un sistema público a veces se complementan con un sistema privado y viceversa, entonces los sistemas de pensiones se pueden diseñar tomando en cuenta algunos aspectos como los que se presentan a continuación.

1. **Participación en el Financiamiento:** Se refiere a si el individuo, para poder recibir los derechos como afiliado, va a aportar o no al sistema.
   - **No contributivo:** En determinadas circunstancias, el estado provee beneficios a personas que no han aportado previamente al sostenimiento del sistema. Existen dos tipos de pensiones no contributivas:
     - *Pensiones Universales:* El acceso a los beneficios se financia mediante el pago de impuestos.
     - *Pensiones Asistenciales:* Estas pensiones subsidian a personas que no tienen alguna otra fuente de ingreso y cumplen con algunos requisitos.
   - **Contributivo:** Se basa en la solidaridad intergeneracional y exige una cotización a los trabajadores y trabajadoras durante el tiempo que estén trabajando.
2. **Gestión Financiera:** Los recursos con los cuales se financian los sistemas de pensiones, para poder entregar las prestaciones, pueden ser los siguientes:
   - *Reparto:* Es un sistema en el que los trabajadores en activo realizan aportaciones con las que se genera un fondo económico conjunto que sirve para atender las prestaciones de los trabajadores retirados o jubilados.
   - *Ahorro y capitalización:* Aquel que se basa en el ahorro individual. Consiste en la acumulación de las cantidades en forma de aportaciones y de sus rendimientos. Los fondos constituidos se destinan a la cobertura de las prestaciones.

3. **Relación de Dependencia:**

   - *Obligatorio:* En este sistema todos los trabajadores están obligados a hacer sus cotizaciones a una administradora de fondos de pensiones, con el objetivo de financiar su pensión futura.
   - *Voluntario:* Es importante mencionar que en este sistema el trabajador no se encuentra en ninguna relación de dependencia, tampoco tiene la obligación de aportar pero puede hacerlo y será acreedor a beneficios de ahorro dependiendo de la cuantía que haya aportado.

4. **Beneficios:** Se establecen dos alternativas para este componente del sistema de pensiones:

   - *Prestaciones o beneficios definidos:* Se establece la aportación (ya sea en valor absoluto o como referencia de algún parámetro), que debe realizar el cotizante. La cuantificación de la prestación se produce en el momento del cobro de la misma.
   - *Contribuciones definidas:* La contribución está definida, pero el monto del beneficio se desconoce hasta que se calcula al momento de la jubilación. Un acuerdo típico de contribución definida es aquel en el cual las contribuciones (realizadas por el empleado, el empleador o ambos) se hacen a una cuenta que crece mediante su inversión en instrumentos financieros autorizados.

5. **Administración**
   El estado es el ente encargado de administrar el sistema de pensiones, el tipo de administración que lleva puede ser de dos tipos:

   - *Público:* El mismo estado o alguna entidad gestionada por el estado es quién administra el sistema.
   - *Privado:* Alguna empresa privada es la encargada de gestionar y administrar el sistema pero siempre en constante supervisión del estado.

2.7. Modelos de Sistemas de Pensiones

Hasta ahora se han creado múltiples modelos de sistemas de pensiones en el mundo, los que son reflejo de las historias y fortalezas institucionales de cada país.

2.7.1. Sistema de Reparto

El sistema de reparto se basa en la solidaridad intergeneracional, donde las pensiones de la población pasiva cubren las cotizaciones de la población activa en el mismo horizonte de tiempo, de manera formal el sistema debe cumplir el llamado principio de equivalencia, es decir que los ingresos y los egresos estén balanceados a través del tiempo. Con los años se han realizado modificaciones en el sistema de reparto, en varios países, algunas de esas variaciones son las siguientes:

- *El Sistema de Reparto Simple Anual:*

  El sistema de reparto simple puro o anual consiste en distribuir en cada periodo las prestaciones de un colectivo entre los ingresos por cotizaciones que dicho colectivo ha realizado durante ese periodo [26].

- *El Sistema de Reparto Atenuado o de Cuota Media Escalonada:*

  Plantea períodos de equilibrio de 10-15 años y con base en ellos se modifica la prima. Es un régimen de reparto donde se contemplan cambios en la prima conforme a evaluaciones actuariales que demanden ajustes a mayores gastos por concepto de nuevos casos, aumentos de años cobertura, mayores esperanzas de vida, y/o reajustes no programados [48].

- *El Sistema de Reparto de Capitales de Cobertura Anual*

  En este sistema, el equilibrio se establece entre las cotizaciones satisfechas por el colectivo en ese periodo y el valor actual-actuarial de las prestaciones futuras, generadas en el mismo período de tiempo [49].

- *El Sistema de Reparto de Capitales de Cobertura Atenuado*

  De igual manera en este sistema se establece el equilibrio entre las cotizaciones hechas por el colectivo y el valor actual-actuarial de las prestaciones futuras, con la diferencia de que el período donde se establece el equilibrio debe ser superior a un año [49].

2.7.2. Sistema de Capitalización

En su definición más general un sistema de pensiones capitalizado es aquel en el que las pensiones se pagan con el capital acumulado y los intereses que ha generado este capital. Al final los acreedores a estas pensiones son los jubilados que hayan cotizado de manera individual o colectiva, entonces así se tiene las siguientes variantes del sistema de capitalización:

- *El Sistema de Capitalización Actuarial Individual:*

  El método de capitalización individual se basa en que cada afiliado posee una cuenta individual donde se depositan sus cotizaciones, este tipo de aportaciones se basan en contribuciones definidas, es decir, la pensión depende estrictamente de cuanto se haya aportado durante la vida y de la rentabilidad del Fondo acumulado. Estas aportaciones se capitalizan y al pasar del tiempo adquieren rentabilidad debido a que que son invertidas en diversos instrumentos financieros de mercado por una administración privada regulada y supervisada por el Estado.

- *El Sistema de Capitalización Actuarial Colectiva*

  Un sistema que se denomina de capitalización colectiva, es el que se basa en la acumulación de capital entre varias personas, a través de lo cual se cumple el principio de la solidaridad, lo que les permite, por una parte, distribuir los costos, y por la otra, mejorar los beneficios que obtienen, debido a que no dependen exclusivamente de su solo esfuerzo individual, sino que va a contar con el apoyo de los demás miembros del grupo [25].

2.7.3. Modelo Mixto

El modelo o sistema mixto es una combinación del modelo o sistema público y el modelo o sistema privado, es decir una parte de las prestaciones recibidas por los afiliados proviene del régimen de reparto y otra parte del régimen de capitalización, este modelo busca superar los problemas de cobertura, de ineficiencia y de solvencia mediante combinaciones de los diferentes sistemas previsionales. De esta forma, hay sistemas que articulan lo contributivo y no contributivo, combinan reparto y capitalización individual, entregan pensiones basadas tanto en beneficios como en contribuciones definidas, es importante resaltar que el componente de capitalización nunca sustituirá la pensión pública, sino que complementará la misma.

- *Sistema Mixto por Etapas:* El sistema mixto de pensiones por etapas en [20], considera un período de vida activa, desde el inicio de la vida laboral hasta el momento de jubilación ; y un período de jubilación que se divide en dos etapas: una desde la edad de jubilación hasta la denominada “gran edad” y otra desde esa misma "gran edad" hasta el fallecimiento del individuo. Durante la vida activa se realizarán cotizaciones a los dos tipos de esquemas. Así, la cotización anual que realice el individuo se divide en dos partes:

- Una parte de la cotización genera una renta financiera actuarial temporal que percibirá el individuo desde el momento que se jubile hasta la denominada gran edad.
- La otra parte financia las pensiones causadas generadas por el sistema de reparto de la Seguridad Social que consiste en una renta vitalicia desde la mencionada gran edad hasta el momento de fallecimiento del individuo.

Por lo tanto, cuando el individuo se jubile percibirá una renta temporal desde la edad de jubilación que haya elegido dentro de una mayor flexibilidad hasta la gran edad, basada en reglas de capitalización, edad tras la cual percibirá una pensión que es financiada vía reparto hasta el momento del fallecimiento.

2.8. Pensiones de Jubilación

El miedo que se genera ante la situación de que el trabajador ya no puede seguir trabajando derivado de su vejez y, por consiguiente, no tiene fuentes de ingresos, motiva pensar en la necesidad de usar los sistemas de financiación de las pensiones para el caso de la jubilación.

La realidad es que, la pensión de jubilación es una de las partes más importantes de los sistemas de pensiones. Dicha pensión se genera cuando el afiliado llega a cumplir los requisitos exigidos por el sistema al cual está afiliado; el individuo, si desea, deja de trabajar y se hace acreedor a los beneficios de la pensión.

Dentro de las Normas Internacionales de trabajo, en cuanto a la seguridad social y específicamente a pensiones de jubilación, la OIT se ha encargado de crear convenios o normas internacionales que regulan esta pensión. Sin embargo la eficacia de las normas están condicionadas a la administración que tenga el Estado, según el documento [37] de la OIT entre los convenios tomados en cuenta para la pensión de vejez están:

1. El Convenio 102, establece que los pagos periódicos deben, por lo menos, alcanzar el 40 % del salario de referencia y existe la obligación de revisar estos montos en caso de variaciones sensibles del nivel general de ingresos y/o del costo de vida. En cuanto al período para calificar a las prestaciones, el convenio establece que deben garantizarse prestaciones reducidas después del cumplimiento de 15 años de cotización o empleo.
2. El Convenio 168, eleva la tasa de reemplazo a 45 % del salario de referencia y establece otros aspectos relevantes como la posibilidad de fijar una edad superior de retiro que puede exceder los 65 años, teniendo en cuenta los criterios demográficos, económicos y sociales. Así mismo, en relación a la edad de jubilación, si ésta es 65 años, la misma debe descenderse para las personas que se han ocupado de trabajos penibles o insalubres.

Capítulo 3

Seguridad Social y Sistemas de Pensiones en el Ecuador

3.1. Reseña Histórica de la Seguridad Social en el Ecuador

Ecuador desde el siglo XX adopta el modelo de seguros sociales, primero a través de la creación de Caja de Pensiones en 1928. La Caja se denominó de Jubilaciones y Montepío Civil, Retiro y Montepío Militares, Ahorro y Cooperativa, y entregaba pensiones de jubilación, montepío y fondo mortuorio y cubrió a trabajadores públicos, civiles y militares. La Constitución de 1929, integraba varias de las prestaciones del seguro social, propiamente dichas como garantías fundamentales; se exigía a las empresas industriales condiciones de salud y seguridad, indemnización de los accidentes de trabajo y la protección de la maternidad. En 1935 se dicta la Ley del Seguro Social Obligatorio que crea el Instituto Nacional de Previsión, órgano superior del Seguro Social, cuya finalidad fue establecer el Seguro General Obligatorio, el Seguro Voluntario y ejercer el "Patronato del Indio y del Montubio" [38].

En 1937 se reforma la Ley del Seguro Social Obligatorio que incorpora el seguro de enfermedad; y se aprueban los Estatutos de la Caja del Seguro Social de empleados privados y obreros. Posteriormente, en 1942 se expidió la Ley del Seguro Social Obligatorio y en 1944 se aprueban los Estatutos de la Caja del Seguro. La Constitución de 1945 establece las bases de un sistema de seguridad social, a través del seguro social. Se consagran las prestaciones de enfermedad, invalidez, vejez, viudedad, orfandad, desocupación y otras con el financiamiento de trabajadores, empleadores y Estado. El seguro social se consagra como derecho irrenunciable de los trabajadores.

A partir de 1963 empieza la fusión de las cajas, primero la Caja de Pensiones con la Caja de Seguro para formar la Caja Nacional del Seguro Social que queda bajo la supervisión del antiguo Instituto Nacional de Previsión. En 1964 se establece el seguro de riesgos del trabajo, el seguro artesanal y de profesionales y en 1966 el Seguro del Clero Secular. La Constitución de 1967 también dedica varios artículos a la Seguridad Social; en primer lugar, señala que es obligación del Estado proteger a los habitantes del Ecuador frente a los riesgos de la desocupación, invalidez, enfermedad, vejez, maternidad y muerte. En segundo lugar, indica que las instituciones encargadas de la Seguridad Social serán autónomas y sus directorios tripartitos con participación del Estado, empleadores y trabajadores. En tercer lugar, se establece la diferenciación entre los fondos de la Seguridad Social y los del fisco.

En 1968 se aprobó el Código de Seguridad Social que tuvo corta duración; en él se pretendió replantear los principios rectores del sistema: solidaridad, universalidad y obligatoriedad. En ese mismo año se crea el Seguro Social Campesino. En 1970, la Caja Nacional del Seguro Social se convirtió en el Instituto Ecuatoriano de Seguridad Social (IESS). En 1998 la Constitución dedica una larga sección a la Seguridad Social. Se establece el Sistema Nacional de Seguridad Social y la obligación de extenderlo progresivamente a toda la población urbana y rural con independencia de su condición laboral, se indica que se cubrirán los riesgos de enfermedad, maternidad, cesantía, vejez, invalidez, discapacidad y muerte, se otorga al Instituto Ecuatoriano de Seguridad Social la responsabilidad de las prestaciones del Seguro General Obligatorio como entidad autónoma, con representación tripartita, se ordena que los aportes y contribuciones del Estado consten anualmente en el Presupuesto General y que los fondos se diferencien de los del Estado; por último, se establece el Seguro Social Campesino a nivel constitucional como régimen especial del seguro general. Esta Constitución permite que instituciones privadas participen en la prestación de la Seguridad Social. Posteriormente se expidió la Ley de la Seguridad Social, vigente hasta la actualidad y, la Constitución de 2008 que incluye algunas novedades en cuanto a la Seguridad Social.

3.2. La Seguridad Social Vigente en el Ecuador

La institución encargada en el Ecuador de la Seguridad Social es el Insitituto Ecuatoriano de Seguridad Social (IESS), que protege directa o indirectamente a más del veinte y cinco por ciento de su población, incluyéndose en esta protección a las personas económicamente activas y a sus cónyuges, cesantes, viudas, huérfanos, niños, campesinos y pescadores artesanales y a sus familias; bajo las coberturas de maternidad, enfermedad, riesgos del trabajo, invalidez, vejez, muerte y cesantía; y, además administra los fondos de reserva de los trabajadores y entrega préstamos quirografarios y prendarios, enfocado el desempeño de su gestión con perspectiva filosófica dirigida y orientada hacia el hombre que es el elemento central y fundamental de su atención y de sus objetivos [22].

En la actualidad, la Ley de Seguridad Social que fue publicada en el Registro Oficial No. 465 de 30 de noviembre de 2001 consagra el régimen de seguros sociales a través de la creación del Seguro General Obligatorio (artículo 1) y, dentro de él cómo regímenes especiales, el Seguro Voluntario (artículo 152) y el Seguro Social Campesino (artículo 128). Los dos primeros son de carácter contributivo, es decir, son sistemas cuyo financiamiento depende de los aportes que entreguen trabajadores, empleadores y ciertas contribuciones del Estado. El primero está sobre todo encaminado a la cobertura de quienes desarrollan alguna actividad económica ya sea como trabajadores dependientes o autónomos; y el segundo, en cambio, estuvo diseñado para todos aquellos que no se incluyan en el primero. En cuanto al seguro social campesino es un régimen semicontributivo que se sustenta con una pequeña contribución del jefe o jefa de familia y se complementa con el aporte de los trabajadores afiliados y otros ingresos [38].

3.3. Régimen Actual del Sistema de Pensiones

El sistema de pensiones ecuatoriano consta de un régimen general, el Seguro Social Obligatorio, y de regímenes específicos o especiales, el Seguro Social Campesino y los Seguros Sociales correspondientes a las fuerzas de seguridad.

Actualmente en el Instituto Ecuatoriano de Seguridad Social, el seguro de invalidez, vejez y muerte o el Fondo de pensiones funcionan como un sistema de reparto puro, modalidad que mantiene desde sus inicios en 1928, bajo este método de aportaciones las contribuciones de los trabajadores presentes sirven para pagar a los jubilados actuales, el sistema funciona mientras más trabajadores ingresen al sistema y puedan mantener a una población relativamente estable de jubilados.

Parte de los recursos del seguro general obligatorio es la reserva técnica del régimen de jubilación por solidaridad intergeneracional y los rendimientos financieros de la misma por concepto de las inversiones privativas [3] permitidas por ley (Art. 62 [3]). Este sistema de reparto según las disposiciones vigentes de la Ley de Seguridad Social de 2001, está enmarcado como el Régimen de Transición (Art. 225 [3]). En teoría el Régimen de Transición es el sistema antiguo, que debía desaparecer de a poco, a medida que entraba en vigencia el Sistema mixto de pensiones. Como esto no sucedió, es el Régimen de Transición, el que está vigente.

Las prestaciones que ofrece el Fondo de pensiones, a través de este Régimen son: pensión por vejez e invalidez, subsidio transitorio por incapacidad parcial, pensiones de montepío por viudez y orfandad, subsidio para auxilio de funerales, pensión asistencial por vejez o invalidez financiada por el Estado [12].

3.4. Jubilación Ordinaria por Vejez

Es una prestación del Seguro de Pensiones, mediante la cual se otorga una pensión mensual vitalicia a los afiliados al IESS que dejan de laborar y cumplen con los requisitos establecidos por la ley, estas prestaciones se concederán desde el mes siguiente al que el afiliado con relación de dependencia cesa en el(los) empleo(s), o bien concluye la prestación de servicios del afiliado sin relación de dependencia [14].

3.4.1. Condiciones Mínimas de la Jubilación por Vejez

Los afiliados que tienen derecho a recibir la pensión por vejez son aquellos que cumplan con los requisitos del Cuadro 3.1.

Edad	Imposiciones	Años de Aportación
Sin Límite de Edad	480 o más	40 o más
60 años o más	360 o más	30 o más
65 años o más	180 o más	15 o más
70 años o más	120 o más	10 o más

Cuadro 3.1: Condiciones para la Jubilación. **Fuente:** IESS [29]. **Elaboración:** Autores

3.4.2. Datos de Cobertura

Estadísticas realizadas por el IESS hasta el 2017 muestran que; de la población de 16.8 millones, únicamente 4.3 millones cuentan con aseguramiento, lo que significa que tan sólo el 25.9 % está asegurado. De la Población Económicamente Activa (PEA), el 53.8 % están afiliados al IESS [4], lo que quiere decir que hasta esa fecha 12 millones y medio de ecuatorianos no contaban con un seguro social. Cabe señalar que los aumentos de pensiones se han producido sin basarse en estudios actuariales, sino más bien por decisiones políticas, esto influye directamente a aumentar el déficit actuarial del fondo de pensiones y denota un manejo antitécnico del mismo.

3.4.3. Cálculo para la Pensión de Jubilación

La pensión mensual de jubilación por vejez será igual al promedio de los cinco años de mejores sueldos o salarios sobre los cuales se aportó. Se procederá a obtener el promedio de cada año de aportaciones, para lo cual se sumará doce meses de imposiciones consecutivas y ese resultado se dividirá para doce. Obtenidos los promedios, se seleccionarán los cinco años de mejores sueldos o salarios sobre los cuales aportó. Para el cómputo de la base de cálculo de la pensión se obtendrá la raíz sesentava del producto de las sesenta aportaciones de los cinco años de mejores sueldos o salarios previamente identificados [31].

El resultado del procedimiento anterior, se multiplica por el coeficiente anual de años aportados o cotizados que se muestra en el Cuadro 3.2.

Años de Imposiciones	Coeficiente	Años de Imposiciones	Coeficiente
5	0.43	23	0.66
6	0.45	24	0.67
7	0.46	25	0.68
8	0.47	26	0.70
9	0.48	27	0.71
10	0.50	28	0.72
11	0.51	29	0.73
12	0.52	30	0.75
13	0.53	31	0.76
14	0.55	32	0.77
15	0.56	33	0.78
16	0.57	34	0.80
17	0.58	35	0.81
18	0.60	36	0.83
19	0.61	37	0.86
20	0.62	38	0.89
21	0.63	39	0.94
22	0.65	40	1.00

Cuadro 3.2: Coeficiente anual de años aportados a la jubilación. **Fuente:** IESS [29]. **Elaboración:** Autores

Capítulo 4

Bases Técnicas

4.1. Fundamentos de Matemática Financiera

La matemática financiera estudia el valor del dinero a través del tiempo. En la presente sección se describen las diferentes herramientas financieras claves para ayudar al desarrollo del presente trabajo.

4.1.1. Tipos de Interés

Se define el interés como el precio o recompensa a pagar por la disposición de capitales ajenos durante un determinado período de tiempo. Dicho precio va a depender de la cuantía del capital dispuesto y de la amplitud del intervalo de tiempo durante el cual se va a disponer de este capital [36], el interés tiene como símbolo I.

Si consideramos una cierta cantidad de dinero C_0 en una fecha dada cuyo valor aumenta a C_n en una fecha posterior, donde n representa el periodo de tiempo.

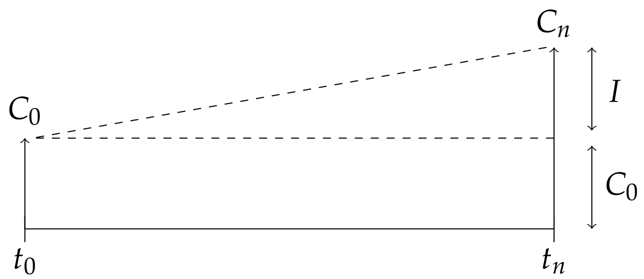


Figura 4.1: Esquema de capital e interés.

Entonces, el interés se calcula como:

$$I = C_n - C_0 \tag{4.1}$$

Tipo de Interés: El tipo de interés es el precio o recompensa que se va a pagar por unidad de capital y por unidad de tiempo. Es un porcentaje y matemáticamente se puede expresar como:

$$i = \frac{C_1 - C_0}{C_0} \tag{4.2}$$

4.1.1.1. Régimen de Capitalización Simple

Bajo este régimen, el interés I a pagar por la disposición de un capital de cuantía C_0 se determina de forma proporcional al capital dispuesto y al periodo de disposición [36]. Así, el interés a pagar por el capital C_0 luego de n años al tipo i está dado por la expresión:

$$I = C_0 \cdot i \cdot n \tag{4.3}$$

siendo,

- C_0 : La cuantía del capital dispuesto inicialmente expresado en unidades monetarias (u.m).
- i : el *tipo de interés* pactado, es decir, el precio a pagar al final de la operación por unidad de capital prestado y por unidad de tiempo.

A partir de (4.1) y (4.3) el valor final acumulado está dado por:

$$C_n = C_0 + I = C_0(1 + i \cdot n) \tag{4.4}$$

Interés simple exacto y ordinario: El interés simple exacto se calcula sobre la base del año de 365 días (366 en años bisiestos). El interés simple ordinario se calcula con base en un año de 360 días. El uso del año de 360 días implica algunos cálculos, sin embargo, aumenta el interés cobrado por el acreedor [9].

Cálculo exacto y aproximado del tiempo: Conociendo las fechas, el número de días que ha de calcularse el interés puede determinarse de dos maneras: una forma es el número exacto de días tal y como se encuentra en calendario y la otra es suponiendo que cada mes tiene 30 días [9].

Valor presente de una deuda: Según [9], el valor de una deuda anterior a la fecha de vencimiento, se conoce como *valor presente* de la deuda en dicha fecha. A partir de (4.4) se tiene,

$$C_0 = \frac{C_n}{1 + i \cdot n} \tag{4.5}$$

donde C_0 es el valor presente a la tasa de interés anual i, del valor final C_n con vencimiento en n años.

4.1.1.2. Régimen de Capitalización Compuesta

El régimen de capitalización compuesta, se define como el capital que cambia al final de cada periodo, debido a que los intereses se adicionan al capital inicial para formar un nuevo capital denominado monto, y sobre este monto volver a calcular intereses, es decir, hay capitalización de los intereses [36].

Como el capital cambia en cada periodo, hay que sumar al capital anterior el interés producido en ese periodo. Así se define con C_0 al capital inicial. El segundo capital C_1 se obtiene sumando los intereses al capital inicial: $C_1 = C_0 + I_1$. Para el tercer periodo el capital es $C_2 = C_1 + I_2$. Y así sucesivamente.

Por tanto, se designa con C_n al capital en el periodo n y se tiene $C_n = C_{n-1} + I_n$, pero $I_n = C_{n-1} \cdot i$, entonces $C_n = C_{n-1}(1 + i)$.

Si la inversión dura n periodos, los sucesivos capitales se obtienen multiplicando siempre por el mismo número $(1 + i)$ y forman una progresión geométrica cuyo primer término es el capital inicial C_0, utilizando la fórmula para calcular los términos de una progresión geométrica se tiene:

$$C_n = C_0(1 + i)^n \tag{4.6}$$

Por tanto el interés se calcula como,

$$I = C_0[(1 + i)^n - 1] \tag{4.7}$$

4.1.1.3. Tipo de Interés Nominal y Fuerza de Interés

Se utilizarán las siguientes notaciones [45], provenientes de las matemáticas financieras.

$1 + i$: factor de acumulación.

$v = \frac{1}{1+i}$: factor de descuento.

Según [41], la *tasa de interés nominal* no mide el valor real del dinero si no que denota un crecimiento en el monto del dinero, a la tasa de interés nominal capitalizable en m fracciones del año se la representa con $j^{(m)}$ y se tienen las siguientes propiedades:

$$i^m = \frac{j^{(m)}}{m} \tag{4.8}$$

además, la tasa de interés nominal cumple que:

$$\left(1 + \frac{j^{(m)}}{m}\right)^m = (1 + i) \tag{4.9}$$

$$\lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{j^{(m)}}{m}\right)^m = e^{j^{(m)}} \tag{4.10}$$

la ecuación (4.10) representa el interés continuo o instantáneo. Por otro lado, se denota a la fuerza de interés como:

$$\lim_{m \to \infty} j^{(m)} = \delta \tag{4.11}$$

Entonces, a partir de (4.9) y (4.10) se obtiene la siguiente expresión,

$$\delta = ln(1 + i) \tag{4.12}$$

4.1.2. Rentas Financieras

En [6], una renta es un conjunto de capitales que vencen en períodos sucesivos. Es decir, el capital C_1 vence en el momento t_1, el capital C_2 vence en el momento t_2, ... y así sucesivamente. También constituyen una renta los pagos realizados para de-volver un préstamo junto con sus intereses o los realizados a un plan de pensiones.

Los capitales C_n se denominan términos de la renta. El intervalo constante de tiempo que transcurre entre el vencimiento de dos términos sucesivos se denomina período, y la vida se relaciona con los n períodos que transcurren desde el inicio de la renta hasta su finalización.

Las rentas se clasifican de diferentes maneras y en algunos casos depende del criterio

1. **En función de su periodo:** Pueden ser *anuales* si la rentas tienen un periodo de un año o *fraccionadas* si tienen un periodo menor. En la práctica, las operaciones más comunes son las fraccionadas (mensuales, trimestrales, etc.).
2. **En función del número de términos:** Pueden ser *temporales*, las que tienen un número finito de pagos con comienzo y final definidos y *perpetuas* si su número de pagos es infinito con comienzo definido pero final incierto.
3. **En función la fecha de inicio de los pagos:** Pueden ser *inmediatas*, en este tipo de rentas, la primera cuantía se hace efectiva o se ejecuta en el primer período de la serie de la operación contratada y *diferidas*, donde la primera cuantía se hace efectiva o se ejecuta, cuando menos, a partir del segundo período de la serie de la operación contratada.
4. **En función de la fecha de hacerlas efectivas:** Estas pueden ser *vencidas u ordinarias*, cuando las rentas se ejecutan al final de cada periodo del plazo y *anticipadas o adelantadas* cuando las rentas se ejecutan al inicio de cada periodo o plazo.
5. **En función de la cuantía de las rentas:** Pueden ser *uniformes* si todos los términos de la renta tienen el mismo valor y *variables* en este caso el valor de las rentas cambia con respecto a la inmediata anterior siguiendo una progresión aritmética o geométrica.

Para una mayor compresión de la clasificación de las rentas, se presenta el siguiente cuadro:

Elementos:

- Renta R: Es el importe de cada pago; se le llama también término o cuota.

Rentas Financieras	
Criterio	Tipos de Rentas
Periodo	Anuales Fraccionadas
Cuantía	Uniformes Variables
Inicio	Inmediatas Diferidas
Vida	Temporales Perpetuas
Vencimiento	Vencidas Anticipadas

Cuadro 4.1: Clasificación de Rentas Financieras. **Elaboración:** Autores

- Periodo: Es el tiempo transcurrido entre dos pagos consecutivos.
- Plazo n: Es el intervalo de tiempo entre el comienzo del primer período y el final del último. El plazo expresa el número total de periodos o el número total de pagos.
- Valor Final S: Representa el importe total de todos los pagos más sus intereses, equivalente a la suma de los montos de los pagos valorados al final del plazo.
- Valor actual A: Suma de los pagos valorados en la fecha de inicio del plazo.

4.1.2.1. Rentas Vencidas u Ordinarias

Según [41], son aquellas donde los pagos se realizan al final de cada periodo. Además, se conocen desde la firma del convenio las fechas de inicio y fin del plazo de la renta, sin pérdida de generalidad, se asumirán rentas con pagos anuales e iguales.

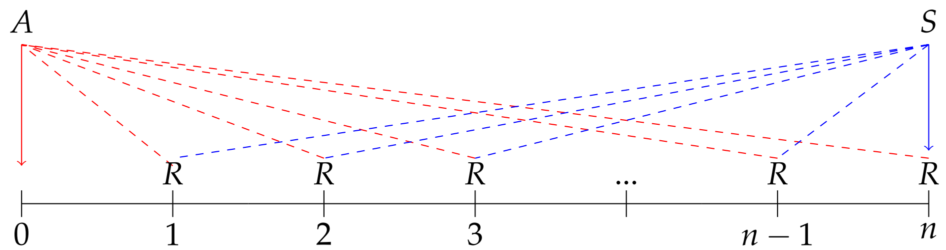


Figura 4.2: Renta Vencida

Cálculo del Valor Final

A partir de la Figura 4.2 se deduce,

$$S = R(1+i)^{n-1} + R(1+i)^{n-2} + R(1+i)^{n-3} + ... + R(1+i) + R \tag{4.13}$$

Si se multiplica a la ecuación 4.13 por la razón matemática

$$r = (1+i) \tag{4.14}$$

Entonces,

$$r \cdot S = R(1+i)^{n} + R(1+i)^{n-1} + R(1+i)^{n-2} + ... + R(1+i)^2 + R(1+i) \tag{4.15}$$

$$S(r-1) = R[(1+i)^n - 1] \tag{4.16}$$

Y por tanto el valor final de la renta es:

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{i} \tag{4.17}$$

Cálculo del Valor Actual

Para el valor actual, a partir de la figura 4.2, se deduce:

$$A = R(1+i)^{-1} + R(1+i)^{-2} + R(1+i)^{-3} + ... + R(1+i)^{-(n-1)} + R(1+i)^{-n} \tag{4.18}$$

Si se multiplica a la ecuación (4.18) por (4.14) y se obtiene

$$A \cdot r = R + R(1+i)^{-1} + R(1+i)^{-2} + ... + R(1+i)^{-(n-2)} + R(1+i)^{-(n-1)} \tag{4.19}$$

Restando la ecuación (4.19) menos (4.18) finalmente se tiene

$$r \cdot A - A = R - R(1+i)^{-n} \tag{4.20}$$

Entonces,

$$A = R\frac{[1-(1+i)^{-n}]}{i} \tag{4.21}$$

4.1.2.2. Rentas Anticipadas

Según [9], una renta anticipada es aquella cuyo pago periódico vence al principio del intervalo.

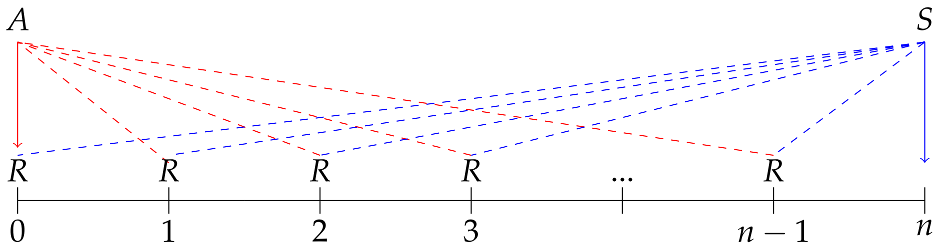


Figura 4.3: Renta Anticipada

Cálculo del Valor Final

A partir de la figura 4.3 se deduce

$$S = R(1+i)^n + R(1+i)^{n-1} + R(1+i)^{n-2} + R(1+i)^{n-3} + ... + R(1+i) \tag{4.22}$$

Si se multiplica a la ecuación (4.22) por la razón r, descrita en (4.14) se tiene:

$$r \cdot S = R(1+i)^{n+1} + R(1+i)^n + R(1+i)^{n-1} + R(1+i)^{n-2} + ... + R(1+i)^2 \tag{4.23}$$

Luego, restando (4.23) y (4.22) se obtiene

$$r \cdot S - S = R(1+i)^{n+1} - R(1+i) \tag{4.24}$$

Entonces el valor final es:

$$S = R(1+i)\frac{[(1+i)^n - 1]}{i} \tag{4.25}$$

Cálculo del valor actual

A partir de la Figura 4.3 se deduce,

$$A = R + R(1+i)^{-1} + R(1+i)^{-2} + R(1+i)^{-3} + ... + R(1+i)^{-(n-2)} + R(1+i)^{-(n-1)} \tag{4.26}$$

Luego,

$$A \cdot r = R + R(1+i)^{-1} + R(1+i)^{-2} + ... + R(1+i)^{-(n-2)} + R(1+i)^{-(n-1)} \tag{4.27}$$

Si se multiplica a la ecuación (4.27) por la razón r, descrita en (4.14) se tiene:

$$r \cdot A - A = R(1+i) - R(1+i)^{-(n-1)} \tag{4.28}$$

Entonces,

$$A = R(1+i)\frac{[1-(1+i)^{-n}]}{i} \tag{4.29}$$

4.1.2.3. Rentas Perpetuas Vencidas

Según [9], las rentas perpetuas o indefinidas, son una variante de las rentas ciertas. Las rentas de este tipo están constituidas por una serie de términos periódicos cuyo número de pagos es infinito, la fuente que les da sustento no sufre agotamiento, los flujos de caja de las rentas indefinidas comienzan en un periodo específico o determinado y la duración es por tiempo ilimitado.

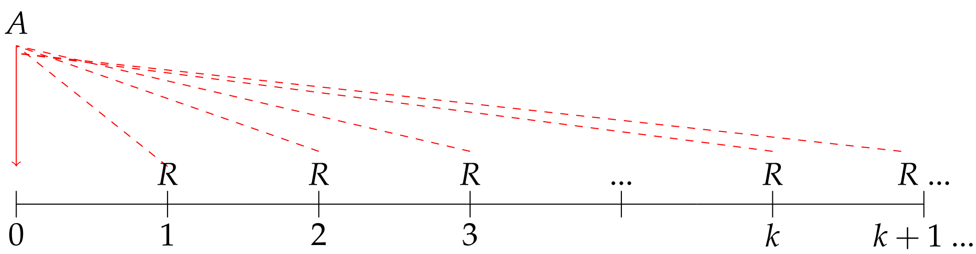


Figura 4.4: Renta Perpetua Vencida

Garantizar la perpetuidad significa que su valor actual A sea inagotable, y para que esto ocurra, será necesario que el valor máximo de las rentas R sea igual al interés que puede producir A en cada período.

Cálculo del Valor Actual

A partir de la figura 4.4 se deduce,

$$A = R(1+i)^{-1} + R(1+i)^{-2} + R(1+i)^{-3} + ... + R(1+i)^{-k} + R(1+i)^{-(k+1)} + ... \tag{4.30}$$

Si se multiplica a la ecuación (4.30) por (4.14), se obtiene:

$$r \cdot A = R + R(1+i)^{-1} + R(1+i)^{-2} + ... + R(1+i)^{-(k+1)} + R(1+i)^{-k} ... \tag{4.31}$$

$$r \cdot A - A = R \tag{4.32}$$

$$A(r-1) = R \tag{4.33}$$

Entonces, el valor actual de la renta perpetua es,

$$A = \frac{R}{i} \tag{4.34}$$

4.1.2.4. Rentas Perpetuas Adelantadas

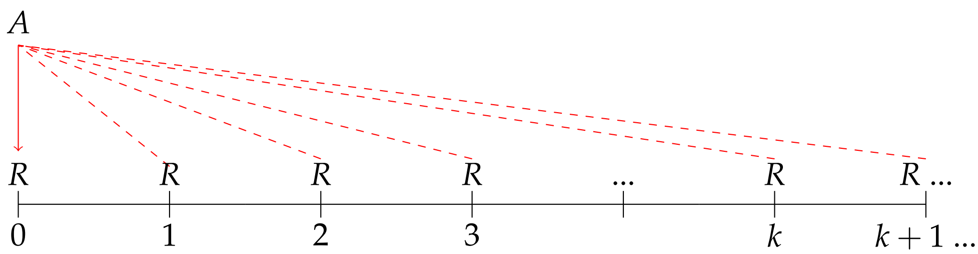


Figura 4.5: Renta Perpetua Adelantada

A partir de la figura 4.5, se deduce:

$$A = R + R(1+i)^{-1} + R(1+i)^{-2} + R(1+i)^{-3} + ... + R(1+i)^{-k} + R(1+i)^{-(k+1)} + ... \tag{4.35}$$

Si se multiplica a la ecuación (4.35) por la razón r, descrita en (4.14) se obtiene,

$$r \cdot A = R(1+i) + R + R(1+i)^{-1} + R(1+i)^{-2} + ... + R(1+i)^{-(k+1)} + R(1+i)^{-k} ... \tag{4.36}$$

$$r \cdot A - A = R(1+i) \tag{4.37}$$

$$A = \frac{R(1+i)}{i} \tag{4.38}$$

4.1.2.5. Rentas Vencidas en Progresión Aritmética

En una renta en progresión aritmética según [11], ”cada término” es igual al inmediato anterior más o menos una cantidad constante denominada diferencia a la que se denotará por G.

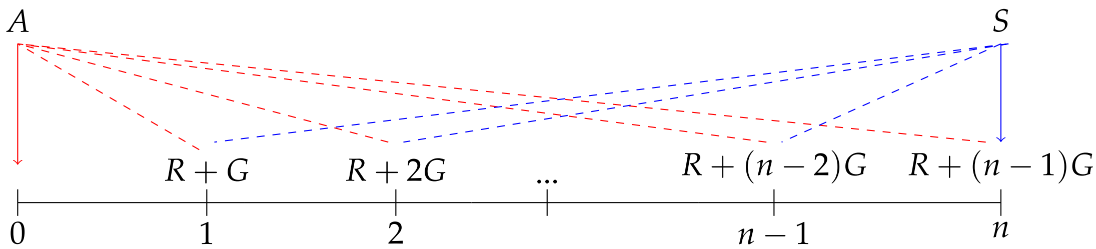


Figura 4.6: Renta Vencida en Progresión Aritmética

Cálculo del Valor Actual

A partir de la Figura (4.6) se nota que se trata de una renta vencida, pues la cuantía vence al final de cada periodo y está limitada a n periodos. Además, se trata de una renta variable en progresión aritmética pues cada una de sus cuantías varía siguiendo este tipo de progresión con una diferencia G.

Así, para el cálculo del valor actual,

$$A = R \cdot \frac{(1-(1+i)^{-n}}{i} + G \cdot \frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i}(1+i)^{-1} + ... + G \cdot \frac{1-(1+i)^{i-1}}{i}(1+i)^{-(n-1)} \tag{4.39}$$

Empleando la identidad $v = (1+i)^{-1}$ en la ecuación (4.39) el resultado es:

$$\begin{aligned} A &= R\frac{(1-(1+i)^{-n})}{i} + \frac{G}{i}[(v+v^2+...+v^{n-2}+v^{n-1}+v^n) - n \cdot v^n] \\ &= R\frac{(1-(1+i)^{-n})}{i} + \frac{G}{i}\left[\frac{(1-(1+i)^{-n})}{i} - n(1+i)^{-n}\right] \end{aligned} \tag{4.40}$$

Cálculo del Valor Final

Por otro lado, para el cálculo del valor final por definición se tiene:

$$S = A(1+i)^n \tag{4.41}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} S &= A(1+i)^n \\ &= R\frac{((1+i)^n - 1)}{i} + \frac{G}{i}\left[\frac{((1+i)^n-1)}{i} - n\right] \end{aligned} \tag{4.42}$$

4.1.2.6. Rentas Vencidas en Progresión Geométrica

El gráfico de tiempo tiene la siguiente estructura:

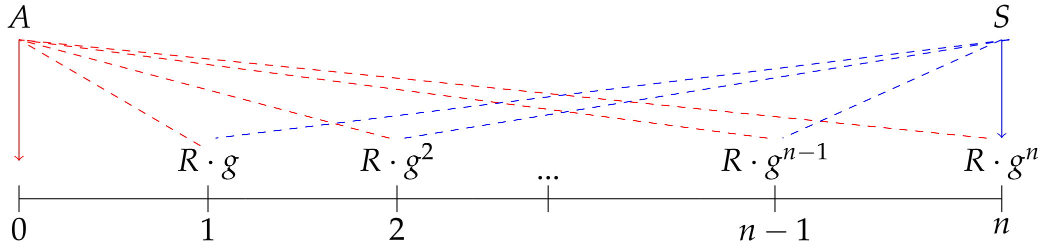


Figura 4.7: Renta Vencida en Progresión Geométrica

Tomando de referencia la Figura 4.7 se nota que se trata de una renta temporal y vencida, pues la cuantía vence al final de cada periodo y está limitada a n periodos. Además, se trata de una renta variable en progresión geométrica pues cada una de sus cuantías varía siguiendo este tipo de progresión con una razón g.

Cálculo del Valor Actual

A partir de la figura 4.7 se tiene,

$$\begin{aligned} A &= \frac{R}{(1+i)} + \frac{R \cdot g}{(1+i)^2} + ... + \frac{R \cdot g^{n-2}}{(1+i)^{n-1}} + \frac{R \cdot g^{n-1}}{(1+i)^n} \\ &= \frac{R}{(1+i)^n}[(1+i)^{n-1} + g(1+i)^{n-2} + ... + g^{n-2}(1+i) + g^{n-1}] \end{aligned} \tag{4.43}$$

La expresión corresponde a una progresión geométrica, si se multiplica por g^{-1} y por $r = 1 + i$, se obtiene:

$$g^{-1} \cdot r \cdot A = \frac{R}{(1+i)^n}[g^{-1}(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + ... + g^{n-3}(1+i) + g^{n-2}] \tag{4.44}$$

$$\begin{aligned} A - g^{-1} \cdot r \cdot A &= \frac{R}{(1+i)^n}[g^{n-1} - g^{-1}(1+i)^n] \\ &= \frac{R}{(1+i)^n}\left[\frac{g^n - (1+i)^n}{g}\right] \end{aligned} \tag{4.45}$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{R}{(1+i)^n}\left[\frac{g^n - (1+i)^n}{g - (1+i)}\right] \\ &= \frac{R}{(1+i)^n}\left[\frac{(1+E)^n - (1+i)^n}{(1+E) - (1+i)}\right] \qquad \text{, si } g = 1 + E \end{aligned} \tag{4.46}$$

Así,

$$A = \frac{R}{(1+i)^n}\left[\frac{(1+E)^n - (1+i)^n}{E - i}\right] \tag{4.47}$$

En el caso de que $g = 1 + i$, el resultado es:

$$A = \frac{R \cdot n}{g} \tag{4.48}$$

Cálculo del Valor Final

Por definición,

$$\begin{aligned} S &= A(1+i)^n \\ &= R_1\left[\frac{g^n-(1+i)^n}{g-(1+i)}\right] \end{aligned} \tag{4.49}$$

Así, para $g = 1 + E$,

$$S = R_1\left[\frac{(1+E)^n-(1+i)^n}{E-i}\right] \tag{4.50}$$

Y si $g = 1 + i$, entonces

$$S = \frac{R_1 n(1+i)^n}{g} \tag{4.51}$$

4.2. Fundamentos de Matemática Actuarial

4.2.1. Modelo Biométrico

La biometría es el conjunto de métodos de la Estadística Actuarial que se ocupa, fundamentalmente, del estudio de la supervivencia de los elementos de cualquier población sujeta a un proceso de envejecimiento. Esta supervivencia generalmente es caracterizada por un conjunto de características agrupadas en las denominadas tablas de mortalidad, la modelización de estas características se dice que representan el modelo biométrico, cuya variable independiente principal es el denominado tiempo biométrico de los individuos, que no es más que la edad de los mismos [45]. El modelo biométrico se construye en torno a una variable aleatoria X que representa la edad de fallecimiento.

4.2.1.1. Función de Fallecimiento y Supervivencia

La función de distribución de la variable aleatoria edad de fallecimiento se la denota por $F(x)$, y se define de la siguiente forma

$$F(x) = P[X < x] \quad \text{, para } x \geq 0 \tag{4.52}$$

Dicha función representa la probabilidad de fallecer antes de la edad x y se la denomina *función de fallecimiento*.

Por otro lado, se define la función de supervivencia:

$$S(x) = 1 - F(x) \tag{4.53}$$

es decir $S(x) = P(X > x)$, es la probabilidad de que el individuo llegue con vida a la edad x. Además (4.53) cumple las siguientes propiedades:

- La distribución de X queda completamente determinada por $F(x)$ o $S(x)$.
- $S(x)$ es una función monótona decreciente.
- $S(0) = 1$
- $\lim\limits_{x\to\infty} S(x) = 0$
- La probabilidad de que un recién nacido fallezca entre las edades x e y, dado que ya cumplió la edad x es:

$$P(x < X \leq y | X > x) = \frac{S(x) - S(y)}{S(x)} \tag{4.54}$$

4.2.1.2. Tiempo de Vida Futura y Probabilidades de Fallecimiento y Supervivencia

Según [45] se representa con (x) al individuo de edad x y por $T(x)$ al tiempo futuro de supervivencia de (x), i.e. $T(x) = X - x$. Se definen:

- La probabilidad de que (x) fallezca dentro de t años:

$$_tq_x = P(T(x) \leq t) \tag{4.55}$$

- La probabilidad que (x) sobreviva por lo menos t años más:

$$_tp_x = P(T(x) > t) \tag{4.56}$$

De manera particular las probabilidades de fallecimiento y supervivencia a un año se representan con q_x y p_x en lugar de $_1q_x$ y $_1p_x$, respectivamente. Es decir:

- $_1q_x = P(T(x) \leq 1)$: Probabilidad que fallezca dentro de un año.
- $_1p_x = P(T(x) > 1)$: Probabilidad que sobreviva al año siguiente.

La probabilidad que (x) sobreviva t años más y fallezca en los n años siguientes se representa con ${}_{t|n}q_x$. Las probabilidades de fallecimiento diferidas presentan las siguientes propiedades:

- ${}_{t|n}q_x = 1 - {}_{t|n}\, p_x$
- ${}_{t|n}q_x = {}_t p_x \; {}_n q_{x+t}$
- ${}_t p_x = \frac{S(x+t)}{S(x)}$

4.2.2. Fuerza de Mortalidad

De acuerdo a [45], q_x es la probabilidad de fallecimiento, y es evidente que este valor varía para cada edad x, es interesante disponer de una forma de medir su variación instantánea. Para ello se considera la probabilidad que una persona fallezca entre las edades x y $x + \Delta x$, dado que sobrevive a la edad x:

$$P(x < X \leq x + \Delta x | X > x) = \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{1 - F(x)} \tag{4.57}$$

$$\approx \frac{F'(x)\Delta x}{1 - F(x)} \tag{4.58}$$

$$= \frac{f(x)\Delta x}{1 - F(x)} \tag{4.59}$$

La ecuación (4.59) sucede si Δx es suficientemente pequeño, es decir, la probabilidad de que un individuo de edad x fallezca en el instante Δx posterior es proporcional a la duración de ese instante con el coeficiente de proporcionalidad siguiente:

$$\frac{f(x)}{1 - F(x)} \tag{4.60}$$

A la ecuación (4.60) se la denomina fuerza de mortalidad y se la representa con μ_x y es en definitiva una medida de la intensidad de la mortalidad a la edad x, para los individuos que han alcanzado esa edad.

4.2.3. Tablas de Mortalidad

Según [45], las tablas de mortalidad generalmente contienen valores tabulados de l_x, d_x, q_x, y otros valores que corresponden a estimaciones de parámetros de supervivencia y mortalidad de una población obtenidas a partir de datos demográficos de nacimientos y defunciones en la misma.

Se denota con l_0 al número de recién nacidos. Cada recién nacido tiene asociada una distribución $S(x)$. Si $\lambda(x)$ es el número de sobrevivientes a la edad x, se define $l_x = E(\lambda(x))$; es decir, l_x es el número esperado de sobrevivientes a la edad x.

De esta manera se tiene que $\lambda(x)$ es una variable aleatoria con distribución binomial cuyos parámetros son l_0 (número de intentos) y $S(x)$ probabilidad de éxito.

$$\lambda \rightarrow B(l_0, S(x)) \tag{4.61}$$

Por tanto el número esperado de sobrevivientes a la edad x es,

$$l_x = l_0 S(x) \tag{4.62}$$

De manera análoga, si ${}_n\delta_x$ es el número de fallecimientos entre las edades x y $x+n$ de entre los l_0 iniciales y ${}_nd_x = E({}_n\delta_x)$; es decir, el número esperado de fallecimientos entre estas edades, así se deduce que:

$$\begin{aligned} {}_nd_x &= l_0(S(x) - S(x+n)) \\ &= l_x - l_{x+n} \end{aligned} \tag{4.63}$$

4.2.3.1. Tablas de Mortalidad Estáticas

Las tablas de mortalidad estáticas, según [39], están basadas en una cohorte imaginaria que se obtiene a partir de la estructura de edades de la población en un momento dado, en base a una estimación muestral o censal. Para [17] los siguientes postulados constituyen la base fundamental de las deducciones que han de conducir a la construcción de una tabla estática:

- *Principio de Homogeneidad:* Todos los individuos de un grupo son equivalentes en lo que se refiere a la mortalidad, en el sentido de que tienen la misma función de distribución de probabilidad asociada a la variable edad de muerte. El grupo es homogéneo.

- *Principio de Independencia:* Los individuos que integran un determinado grupo se definen con variables estocásticamente independientes. Esto equivale a decir que el suceso de que un cierto individuo sobreviva o no a una determinada edad, tiene una probabilidad que no depende de la supervivencia de cualquier otro individuo del grupo.

- *Principio de Estacionariedad:* Todas las consideraciones y formulaciones que se hagan vendrán referidas a la edad o tiempo biométrico. Es decir, sin hacer referencia al tiempo cronológico.

Una tabla de vida se compone de un conjunto de funciones biométricas definidas sobre una cohorte ficticia de individuos. Resulta indispensable tener una clara comprensión de cada una de ellas, de modo que sean correctamente interpretadas, antes de detallar como se lleva a cabo la aproximación estadística a las mismas a partir de las defunciones observadas sobre la población en estudio en el periodo de referencia. A continuación, se definen y denotan tales funciones:

- x : Edad

- l_x : representa el número de individuos de la cohorte ficticia inicial que llegan con vida a la edad x.

- d_{x+1} : Número de individuos que mueren entre las edades x y $x+1$

- q_x : Probabilidad de fallecer entre las edades x y $x+1$ y se calcula de la siguiente forma:
$$\frac{d_x}{l_x} \tag{4.64}$$

- L_x : Corresponde al tiempo total vivido (medido en años) por los individuos de la generación ficticia con edad cumplida x. Se estima tradicionalmente por la expresión:
$$L_x = \frac{l_x + l_{x+1}}{2} \tag{4.65}$$

- T_x : Se estima con la siguiente expresión, donde ω representa la máxima edad alcanzada,
$$T_x = \sum_{x}^{\omega} L_x \tag{4.66}$$

- e_x : Esperanza de vida para un individuo de edad x, se calcula con la expresión:
$$e_x = \frac{T_x}{l_x} \tag{4.67}$$

4.2.3.2. Tablas de Mortalidad Dinámicas

Las tablas de mortalidad dinámicas, según [23], tienen una presencia creciente en el ámbito actuarial. Este tipo de tabla de mortalidad permite obtener probabilidades de fallecimiento que varían no sólo con la edad o el sexo, sino también con el paso del tiempo cronológico o de calendario. Las tablas de mortalidad dinámicas ofrecen una alternativa más sencilla al uso de modelos paramétricos más complejos, ya sea predictivos o descriptivos.

En una tabla de mortalidad dinámica, la tasa de mortalidad ${}_tq_x$ depende de la edad x y el año de calendario t.

4.2.4. El Valor Actuarial

Según [6], para el valor actuarial se considera un elemento de un colectivo de personas de edad x que contrata un seguro con determinado asegurador, el cual se compromete a indemnizar con 1 u.m. cuando fallece la persona. El valor financiero actual de dicha indemnización es entonces: v^X donde X es la variable aleatoria asociada a la edad de fallecimiento.

Y el valor actuarial se define como la esperanza del valor financiero actual: $E(v^X)$. Si se conoce la distribución de X:

$$E(v^X) = \int_0^\infty v^X f(X) dX \tag{4.68}$$

4.2.5. Rentas Actuariales

Las rentas actuariales también denominadas rentas de supervivencia, son una serie de pagos realizados de manera regular durante un determinado tiempo mientras permanezca vivo el asegurado. En esta sección se abordará como tarificar cada una de las rentas considerando el caso discreto [8].

4.2.5.1. Rentas Vitalicias de Cuantía Constante

Se considera una renta actuarial anual, constante e inmediata formada por cuantías constantes C, en donde el vencimiento de las cuantías correrá a partir del primer periodo y cada periodo de pago será de un año hasta la muerte del asegurado. Se pueden subclasificar a estas rentas en temporales y vitalicias, que a su vez pueden ser vencidas o anticipadas.

Rentas Actuariales Vencidas, Temporales y Vitalicias

Una ***renta actuarial vencida vitalicia*** consiste en el pago de una cuantía al final de cada uno de los siguientes años al asegurado hasta su fallecimiento. Para tarificar este tipo de renta se considera el pago de una cuantía de una unidad monetaria; así, la prima pura de esta operación, la cual representa el valor presente actuarial de los beneficios, se denota por a_x y se expresa de la siguiente manera [8],

$$\begin{aligned} a_x &= \sum_{k=0}^{w-(x+1)} v^{k+1} \cdot {}_{k+1}p_x \\ &= \sum_{k=1}^{w-x} v^k \cdot {}_k p_x \end{aligned} \tag{4.69}$$

Otra forma de obtener la prima pura de la operación es hallar el valor actuarial de la variable aleatoria Y, donde

$$Y = a_{\overline{K_x+1}|i} = \frac{1 - v^{K_x+1}}{i} \tag{4.70}$$

donde K_x es la variable aleatoria vida residual entera. Así,

$$\begin{aligned} a_x &= E[Y] \\ &= \frac{1 - E[v^{K_x+1}]}{i} \end{aligned} \tag{4.71}$$

Por su parte, una ***renta actuarial vencida temporal*** consiste en el pago de una cuantía de una unidad monetaria al final de cada uno de los siguientes n años, mientras sobreviva el asegurado. La prima pura de esta operación se denota por $a_{x:\overline{n}|}$ y se puede expresar de la siguiente forma [8],

$$a_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \cdot {}_{k+1}p_x = \sum_{k=1}^{n} v^k \cdot {}_k p_x \tag{4.72}$$

Otra forma de obtener la prima pura de la operación es hallar el valor actuarial de la variable aleatoria Y, la cual se define de la siguiente manera,

$$Y = \begin{cases} a_{\overline{K_x+1}|i} = \frac{1-v^{K_x+1}}{i} & \text{, si } K_x \in 0,1,..,n-1 \\ a_{\overline{n}|}i = \frac{1-v^n}{i} & \text{caso contrario} \end{cases} \tag{4.73}$$

La ecuación (4.73) puede escribirse de la siguiente forma

$$Y = \frac{1-Z}{i} \tag{4.74}$$

donde,

$$Y = \begin{cases} v^{K_x+1} & \text{, si } K_x \in 0,1,..,n-1 \\ v^n & \text{caso contrario} \end{cases} \tag{4.75}$$

Así, la prima pura de la operación estará dada por

$$\begin{aligned} a_{x:\overline{n}|} &= E[Y] \\ &= \frac{1-E[Z]}{i} \end{aligned} \tag{4.76}$$

Rentas Actuariales Anticipadas, Temporales y Vitalicias

En [45], una ***renta actuarial anticipada vitalicia*** consiste en el pago de una cuantía constante al inicio de cada año, comenzando a partir del inicio del contrato hasta el inicio del año de fallecimiento del asegurado. Para tarificar este tipo de seguro consideramos el pago de una cuantía de una unidad monetaria, así, la prima pura de esta operación se denota por $\ddot{a}_x$ y se la expresa de la siguiente forma:

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{w-(x+1)} v^k \, {}_kp_x \tag{4.77}$$

Otra forma de obtener la prima pura de la operación es hallar el valor actuarial de la variable aleatoria Y , la cual está definida de la siguiente forma:

$$Y = \ddot{a}_{\overline{K_x+1}|i} = \frac{1-v^{K_x+1}}{d} \tag{4.78}$$

donde $d = \frac{1+i}{i}$, entonces la prima pura de la operación está dada por:

$$
\begin{aligned}
\ddot{a}_x &= E[Y] \\
&= \frac{1 - E[v^{K_x+1}]}{d}
\end{aligned} \tag{4.79}
$$

Por otra parte en [8], una ***renta actuarial anticipada temporal*** consiste en el pago de una cuantía de una unidad monetaria al inicio de cada uno de los siguientes n años, mientras sobreviva el asegurado. La prima pura de esta operación se denota por $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ y se expresa de la siguiente forma:

$$
\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k \cdot {}_k p_x \tag{4.80}
$$

Otra forma de obtener la prima pura de la operación es hallar el valor actuarial de la variable aleatoria Y , la cual se define de la siguiente manera

$$
Y = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{K_x+1}|i} = \frac{1-v^{K_x+1}}{d_n} & \text{, si } K_x \in 0,1,..,n-1 \\ \ddot{a}_{\overline{n}|}i = \frac{1-v^n}{d} & \text{caso contrario} \end{cases} \tag{4.81}
$$

Se puede ver que (4.81), se expresa de la siguiente forma:

$$
Y = \frac{1 - Z}{d} \tag{4.82}
$$

donde:

$$
Z = \begin{cases} v^{K_x+1} & \text{, si } K_x \in 0,1,..,n-1 \\ v^n & \text{caso contrario} \end{cases} \tag{4.83}
$$

Así, la prima pura de la operación está dada por:

$$
\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = E[Y] = \frac{1 - E[Z]}{d} \tag{4.84}
$$

4.2.5.2. Rentas Vitalicias con Cuantía Variable

Coberturas con variación aritmética creciente

Las coberturas con variación aritmética creciente, según [8], son rentas actuariales donde su cuantía crece en función del momento en que se produzca el fallecimiento del asegurado, se paga una unidad monetaria adicional por cada periodo transcurrido. Sin pérdida de generalidad, se considera el caso de una renta actuarial temporal vencida, la prima pura de esta operación la denotamos por $(Ia)_{x:n}$ y se expresa de la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
(Ia)_{x:n} &= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)v^{k+1} \cdot_{k+1} p_x \\
&= \sum_{k=1}^{n} k \cdot v^k \cdot_k p_x
\end{aligned}
\tag{4.85}
$$

Por otro lado, considerando una renta actuarial anticipada, la prima pura de esta operación la denotamos por $(I\ddot{a})_{x:n}$ y se expresa de la siguiente forma:

$$
(I\ddot{a})_{x:n} = \sum_{k=1}^{n} (k+1)v^k \cdot_k p_x \tag{4.86}
$$

Coberturas con variación aritmética decreciente

Según [8], en este tipo de rentas actuariales la cuantía decrece en función del momento en que se produzca el fallecimiento del asegurado, se paga una unidad monetaria menos por cada periodo transcurrido. Sin pérdida de generalidad se considera el caso de una renta actuarial temporal que inicia pagando una cuantía n. La prima pura de esta operación la denotamos por $(Da)_{x:n}$ y se expresa de la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
(Da)_{x:n} &= \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)v^{k+1} \cdot_{k+1} p_x \\
&= \sum_{k=0}^{n} (n+1-k)v^k \cdot_k p_x
\end{aligned}
\tag{4.87}
$$

Por otro lado, considerando una renta actuarial anticipada, la prima pura de esta operación la denotamos por $(D\ddot{a})_{x:n}$ y se expresa de la siguiente forma:

$$
(D\ddot{a})_{x:n} = \sum_{k=0}^{n} (n-k)\, v^k \cdot_k p_x \tag{4.88}
$$

Coberturas con variación geométrica

En este tipo de rentas la cuantía definida en la póliza varía de acuerdo a una progresión geométrica con una tasa de crecimiento α. Sin pérdida de generalidad, se considera el caso de una renta actuarial temporal vencida, la prima pura de esta operación se denota por ${}^{\alpha}(Va)_{\overline{x:n}|}$ y se expresa de la siguiente forma:

$$ {}^{\alpha}(Va)_{\overline{x:n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} (1+\alpha)^k \, v^{k+1} \cdot_{k+1} p_x = \sum_{k=1}^{n} (1+\alpha)^{k-1} \cdot v^k \cdot_k p_x \tag{4.89} $$

Por otro lado, considerando una renta actuarial anticipada, la prima pura de esta operación se denota por ${}^{\alpha}(V\ddot{a})_{\overline{x:n}|}$ y se expresa de la siguiente forma:

$$ {}^{\alpha}(V\ddot{a})_{\overline{x:n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} (1+\alpha)^k \cdot v^k \cdot_k p_x \tag{4.90} $$

4.2.5.3. Rentas Actuariales Anuales, Constantes y Diferidas

En [8], una renta actuarial diferida m periodos contratada por una persona de edad x, es aquella que realiza el primer pago en la edad $x+m$. Sin pérdida de generalidad, se considera que se difiere m periodos una renta actuarial vitalicia vencida con pago de una unidad monetaria. La prima pura de esta operación se la denota por ${}_{m|}a_x$ y y se la expresa de la siguiente forma:

$$ {}_{m|}a_x =_m E_x \cdot a_{x+m} \tag{4.91} $$

donde ${}_mE_x$ es el factor de descuento actuarial de m periodos.

Por otro lado, si se difiere m periodos una renta actuarial vitalicia anticipada que realiza el pago de una unidad monetaria. La prima pura de esta operación se la denota por ${}_{m|}\ddot{a}_x$ y se expresa de la siguiente forma:

$$ {}_{m|}\ddot{a}_x =_m E_x \cdot \ddot{a}_{x+m} \tag{4.92} $$

4.2.5.4. Rentas Fraccionadas

En la práctica, una renta puede consistir en pagos mensuales, trimestrales, semestrales u otros. Una renta actuarial es fraccionada cuando la periodicidad de los pagos es inferior al año, es decir, cuando se dividen los periodos anuales en subperiodos de amplitud 1/m.

Sin pérdida de generalidad, se considera el caso de una renta actuarial vitalicia anticipada, que paga una cuantía de 1/m u.m., la prima pura de esta operación la denotamos por ${}_n\ddot{a}_x^{(m)}$ y se expresa de la siguiente forma:

$$ {}_n\ddot{a}_x^{(m)} = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{m-1} \frac{1}{m} v^{k+\frac{1}{s}} \cdot_{k+\frac{s}{m}} p_x \tag{4.93} $$

Para poder usar la expresión (4.93) se requiere el valor de las probabilidades en momentos intermedios del año, si se hace uso de tablas de mortalidad anuales se debe introducir alguna hipótesis para obtener dichas probabilidades

4.2.6. Principio de Equivalencia Actuarial

En [45] para establecer el pago que tiene que hacer el asegurado con el fin de tener acceso a los beneficios que estipula el contrato de un seguro, se debe usar el *principio de equilibrio financiero-actuarial,* que establece que el valor esperado de la pérdida del asegurador es cero:

$$ E(\gamma) = 0 \tag{4.94} $$

donde γ es la pérdida del asegurador.

Si para tener acceso a esta cobertura, el asegurado realiza un solo pago, representado con π se tendría: $\pi = E(X)$ donde X es el valor actual (financiero) de las prestaciones estipuladas en el contrato de seguro. Y se dice que π es la prima única, que es en definitiva el pago que debe efectuar el asegurado para tener acceso a las prestaciones del seguro.

Si además la frecuencia de los pagos es menor a un año (semestral, trimestral, mensual, etc.) se las llama primas niveladas fraccionadas y se las denota por $P^{(m)}$, dadas por la siguiente expresión:

$$ P^{(m)} = \frac{\pi}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)}} \tag{4.95} $$

4.2.7. Reservas Matemáticas

La reserva matemática es el valor actuarial presente del pasivo de un asegurador por los futuros pagos de beneficios, incluyendo beneficios ya declarados, después de deducir el valor actuarial presente de aquellos componentes de futuras primas que puedan ser asignados al cumplimiento de los pasivos correspondientes a vida individual, rentas vitalicias y planes de pensiones.

4.2.7.1. Valor Actuarial de las Reservas Matemáticas

Se define la variable aleatoria ${}_t\pi$ como la diferencia en el momento t entre el valor actual de las prestaciones futuras del asegurador y el valor actual de los pagos de las primas futuras por parte del asegurado.

Suponiendo que ${}_t\pi$ toma el valor de 0 al inicio del contrato y luego toma valores estrictamente positivos, se define el valor actuarial de las reservas matemáticas en el momento t como la esperanza matemática de ${}_t\pi$ dado que $T > t$, y el cual se representa con ${}_tV$ tal que,

$$ {}_tV = E[{}_t\pi] \tag{4.96} $$

Generalmente en las operaciones de seguros de vida se supone que las reservas matemáticas a primas netas son no negativas por lo que al asegurado le interesará mantener la operación. Esto implica que el valor esperado de las prestaciones futuras será siempre mayor que el valor esperado de las primas futuras y, por tanto, el asegurador siempre deberá disponer en su pasivo de los fondos necesarios, o lo que es lo mismo, de las reservas matemáticas ${}_tV$ para cubrir tal diferencia. El cálculo de las reservas se lo puede hacer con diferentes métodos como los que se verán a continuación.

4.2.7.2. Método Prospectivo

Para el método prospectivo lo único que se hará es aplicar la definición de la fórmula (4.96) de tal manera que se obtenga la igualdad:

$$ E[{}_t\pi] = E[\text{VA de prestaciones}_t - \text{VA primas}_t] \tag{4.97} $$

$$ {}_tV(t) = E[\text{VA de prestaciones}_t] - E[\text{VA primas}_t] \tag{4.98} $$

4.2.7.3. Reservas Matemáticas Según la Normativa Ecuatoriana

Según la Ley de seguridad social del Ecuador [3] Art. 49, los fondos y reservas de los seguros de invalidez, vejez y muerte, riesgos del trabajo y cesantía, así como los del Seguro Social Campesino, se administrarán y mantendrán separadamente del patrimonio del Instituto Ecuatoriano de Seguridad Social, y no podrán ser dispuestos ni inmovilizados para otros fines que no sean los expresamente determinados en esta Ley.

Específicamente hablando del régimen de pensiones, la Ley especifica que el IESS continuará entregando las prestaciones de invalidez, vejez y muerte y que las reservas técnicas garantizarán el equilibrio actuarial, de las pensiones, con las aportaciones obligatorias de los afiliados y empleadores y la contribución obligatoria del Estado. En el Art. 182 se tiene que, para el régimen de jubilación por solidaridad intergeneracional el rendimiento financiero proveniente de las inversiones de las reservas técnicas de este régimen, está bajo la responsabilidad del Banco del Instituto Ecuatoriano de Seguridad Social.

En el Anexo III de una Resolución de la Junta Bancaria del Ecuador [15] se presentan metodologías para el cálculo de las reservas matemáticas de los seguros de vida y afines, en el documento se considera como seguros afines a los seguros de vida, a aquellos seguros que cubren riesgos diferentes a la supervivencia o fallecimiento de los asegurados, pero cuyo financiamiento requiere de la conformación de una reserva matemática. Por ejemplo: los seguros de salud, vejez, invalidez y accidentes, a plazos mayores a un año.

- Pólizas de mediano y largo plazo: Para los seguros de mediano y largo plazo, esto es, aquellos que ofrecen una cobertura durante un período mayor a un (1) año, el monto de la reserva matemática se calculará como la diferencia del valor actuarial presente de los pagos futuros que debe realizar el asegurador o reasegurador menos el valor actuarial presente de las primas futuras que debe pagar el asegurado. Según el diseño actuarial del producto del seguro, en los casos que ameriten, en el cálculo del valor actuarial presente de las obligaciones del asegurador o reasegurador, se deberá contemplar los gastos administrativos diferidos
- Pólizas de corto plazo: En el caso de seguros de vida, en caso de fallecimiento

y seguros afines, con vigencia igual o menor a un (1) año, para el cálculo de la reserva matemática se aplicará la metodología prevista para la determinación de la reserva de riesgos en curso-prima no devengada. En cambio, para los seguros de vida en caso de supervivencia, con vigencia igual o menor a un (1) año, la reserva matemática se constituirá por el total de la prima pura de riesgo, más los intereses devengados en el período correspondiente, a la tasa de interés técnica utilizada en la determinación de la prima.

4.3. Prueba de Bondad de Ajuste de Kolmogorov-Smirnov (KS)

La prueba de Kolmogorov-Smirnov es una prueba no paramétrica que determina la bondad de ajuste de dos distribuciones de probabilidad entre sí. La gracia de la característica "no paramétrica" del test es que se adapta a los datos y, en consecuencia, a las distribuciones que puedan seguir la frecuencia de los datos. Además, esta característica ahorra el hecho de tener que suponer a priori qué distribución sigue la muestra de datos con la que se está trabajando.

La prueba dentro del presente trabajo es útil, pues no necesariamente se deben conocer las distribuciones de los datos que se van a analizar. En este caso estas observaciones corresponden a los afiliados desde el año 2015 hasta el 2019, y el objetivo es comparar las distribuciones con el fin de verificar si existe algún cambio significativo en la distribución de los afiliados a través del tiempo.

Hipótesis a Contrastar:

$$H_0: \text{ Los datos analizados siguen una distribución M.}$$
$$H_1: \text{ Los datos analizados no siguen una distribución M.}$$

Estadístico de Contraste:

$$D = \sup_{i \leq 1 \leq n} |\hat{F}_n(x_i) - F_0(x_i)|$$

donde:

- x_i : es el i-ésimo valor observado en la muestra (cuyos valores se han ordenado previamente de menor a mayor).

- $\hat{F}_n(x_i)$: es un estimador de la probabilidad de observar valores menores o iguales que x_i.

- $F_0(x_i)$: es la probabilidad de observar valores menores o iguales que x_i cuando H_0 es cierta.

Así pues, D es la mayor diferencia absoluta observada entre la frecuencia acumulada observada $\hat{F}_n(x_i)$ y la frecuencia acumulada teórica $F_0(x_i)$, obtenida a partir de la distribución de probabilidad que se especifica como hipótesis nula. Si los valores observados $\hat{F}_n(x_i)$ son similares a los esperados $F_0(x_i)$, el valor de D será pequeño. Cuanto mayor sea la discrepancia entre la distribución empírica $\hat{F}_n(x_i)$ y la distribución teórica, mayor será el valor de D. Por tanto, el criterio para la toma de la decisión entre las dos hipótesis será de la forma:

$$\text{Si } D \leq D_\alpha \text{ , entonces se acepta } H_0.$$

$$\text{Si } D > D_\alpha \text{ , entonces se rechaza } H_0.$$

donde el valor D_α se elige de tal manera que:

$$P(\text{ Rechazar } H_0 | H_0 \text{ es cierta }) = P(D > D_\alpha | \text{ Los datos siguen una distribución M }) = \alpha$$

siendo α el nivel de significación del contraste. En el Anexo A se encuentra la tabla con los valores del Test de Kolmogorov-Smirnov sobre bondad de ajuste.

4.3.1. La Función ks.test() en el Software R

Para utilizar la función *ks.test()* que ya se encuentra implementada en el Software R, en primer lugar se debe instalar el paquete *stats*. A continuación se detalla la función y los argumentos que esta puede tener en el cuadro 4.2.

Función en el Software R

```
ks.test(x, y, ...,alternative = c("two.sided", "less", "greater"),
    exact = NULL)
```

Argumentos	Descripción
x	Vector numérico.
y	Un vector numérico o una cadena de caracteres que nombra una función de distribución acumulativa.
alternative	Indica la hipótesis alternativa y pueden ser: ”two.side”, ”less”, ”greater”.
exact	NULL o un valor lógico que debe indicar si se calcula un p-valor exacto.
tol	Utilizado como límite superior para posibles errores de redondeo.
simulate.p.value	TRUE o FALSE, que indica si se debe calcular el p-valor a través de simulación por Monte Carlo
B	Un entero que especifica el número de replicas utilizadas en la prueba Monte Carlo

Cuadro 4.2: Argumentos de la función ks.test(). **Fuente:** RDocumentation. Paquete stats. **Elaboración:** Autores

Capítulo 5

Bases Teóricas de los Sistemas de Financiamiento

5.1. El Sistema de Reparto Atenuado

El *sistema de reparto atenuado* se caracteriza porque se forman periodos de equilibrio de varios años, siendo la prima constante durante esos periodos, bien en valor absoluto, bien como una tasa constante de salario. Bajo la suposición de que las prestaciones son crecientes (como es lo usual), como las primas son constantes, se producirá durante los primeros años un excedente, lo cual da lugar a la constitución de reservas [49].

Llegará un momento en que las aportaciones y las prestaciones se igualarán y posteriormente las prestaciones superarán a las aportaciones, consumiendo las reservas constituidas previamente. Al final del horizonte temporal las reservas deben ser nulas, para que se cumpla el "principio de equivalencia financiero-actuarial".

5.1.1. Hipótesis del Sistema de Reparto Atenuado

Hipótesis 1: Estructura demográfica estable en el tiempo

Se considera que una población evoluciona de manera estable cuando sus tasas de fecundidad y mortalidad no sufren cambios a lo largo del tiempo y no aparecen intercambios migratorios [49]. Entonces una población estable implica que el tamaño relativo de los distintos grupos de un colectivo no cambia a lo largo del tiempo.

Se supone que se ingresa al sistema a la edad x, además se va a tomar en cuenta que la edad que da derecho a la pensión de jubilación es "$x + r$" y que la estructura demográfico-financiera, en un año "t", es la siguiente:

Edad	Número de Personas	Salario Medio
x	l_x^t	W_x^t
$x+1$	l_{x+1}^t	W_{x+1}^t
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$x+r-1$	l_{x+r-1}^t	W_{x+r-1}^t

Cuadro 5.1: Estructura Demográfico-Financiera. **Fuente:** Vidal, C. y Devesa, E. (2005) [49]. **Elaboración:** Autores

Hipótesis 2. Pensión y salarios constantes en el tiempo

Pensión anual de jubilación constante, θW_F , que se calcula como un porcentaje, θ, donde W_F (base reguladora) es la media de los salarios durante los últimos años. Igual que antes, la pérdida de generalidad no es elevada, al considerar bases reguladoras reales.

5.1.2. Modelo del Sistema de Reparto Atenuado

Primer Horizonte de Planificación

Se considera un horizonte económico de "s" años y que el sistema nace en este momento, como sólo habrá una ecuación de equivalencia financiero-actuarial, habrá que calcular el valor actual actuarial de las prestaciones (K_t), $t = 1, 2, ..., s$. Para lo que se va a suponer que están valoradas a mitad de año, así el esquema de planificación es el siguiente:

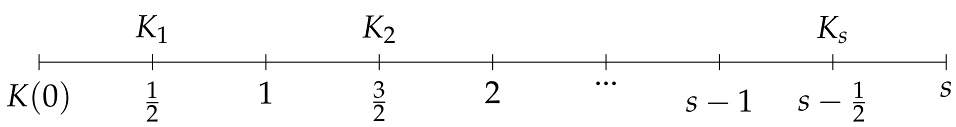


Figura 5.1: Primer Horizonte de Planificación de Prestaciones

Por la figura 5.1, se tiene:

$$
\begin{aligned}
K(0) &= K_1 v^{1/2} + K_2 v^{3/2} + K_3 v^{5/2} + ... + K_s v^{s-(1/2)} \\
&= \sum_{h=1}^{1} \theta^h \, W_F^h \, l_{x+r}^h \; {}_{1-h}p_{x+r} \; v^{1/2} + \sum_{h=1}^{2} \theta^h \, W_F^h \, l_{x+r}^h \; {}_{2-h}p_{x+r} \; v^{3/2} + ... \\
&+ \sum_{h=1}^{s} \theta^h \, W_F^h \, l_{x+r}^h \; {}_{s-h}p_{x+r} \; v^{s-(1/2)} \\
&= \sum_{j=1}^{s} \sum_{h=1}^{j} \theta^h \, W_F^h \, l_{x+r}^h \; {}_{j-h}p_{x+r} \; v^{j-(1/2)} \qquad (5.1)
\end{aligned}
$$

donde,

- θ : porcentaje (tasa de sustitución) a aplicar sobre la base reguladora para calcular la pensión de los que se jubilan durante el s-ésimo año.
- h : número de generaciones jubiladas desde el inicio del sistema.
- s : número de años para los que se plantea la equivalencia plurianual.
- $v = (1+i)^{-t}$. Donde i es la tasa efectiva anual.
- $K(0)$: valor actual actuarial de las prestaciones previstas en los próximos "s" años.

Por otro lado según [49], en todas las ecuaciones de las aportaciones anuales tendrá que aparecer un único porcentaje de prima constante, c_c^1, además, como sólo habrá una ecuación de equivalencia actuarial, habrá que calcular el valor actual-actuarial de dichas aportaciones, para lo que se va a suponer que están valoradas a mitad de año, así se tiene:

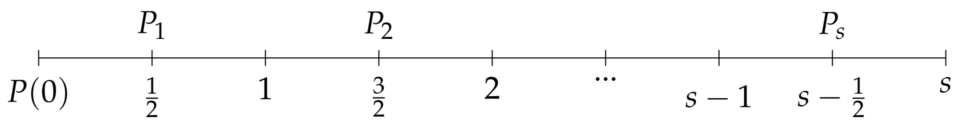


Figura 5.2: Primer Horizonte de Planificación de Aportaciones

$$
P(0) = P_1 v^{1/2} + P_2 v^{3/2} + P_3 v^{5/2} + ... + P_s v^{s-(1/2)}
$$

$$
\begin{aligned}
&= c_c^1 \sum_{k=0}^{r-1} W_{x+k}^1 \, l_{x+k}^1 \, v^{1/2} + c_c^1 \sum_{k=0}^{r-1} W_{x+k}^2 \, l_{x+k}^2 \, v^{3/2} + ... \\
&+ c_c^1 \sum_{k=0}^{r-1} W_{x+k}^s \, l_{x+k}^s \, v^{s-(1/2)} \\
&= c_c^1 \sum_{j=1}^{s} \sum_{k=0}^{r-1} W_{x+k}^j \, l_{x+k}^j \, v^{j-(1/2)} \qquad (5.2)
\end{aligned}
$$

donde,

- h : número de generaciones jubiladas desde el inicio del sistema.
- s : número de años para los que se plantea la equivalencia plurianual.
- $v = (1+i)^{-t}$
- $K(0)$: valor actual actuarial de las prestaciones previstas en los próximos "s" años.

Segundo Horizonte de Planificación

El planteamiento para el siguiente período de planificación, suponiendo que es de la misma amplitud que el anterior y que además $2s < w - (x+r)$:

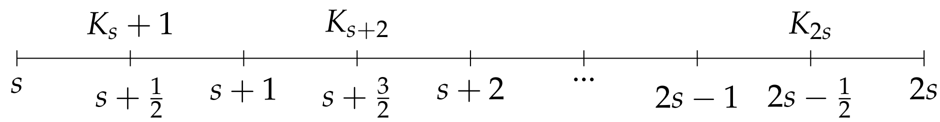


Figura 5.3: Segundo Horizonte de Planificación de Prestaciones

$$
\begin{aligned}
K(s) &= K_{s+1} v^{1/2} + K_{s+2} v^{3/2} + K_{s+3} v^{5/2} + ... + K_{2s} v^{s-(1/2)} \\
&= \sum_{h=1}^{s+1} \theta^h \, W_F^h \, l_{x+r \ s+1-h}^h p_{x+r} \, v^{1/2} + \sum_{h=1}^{s+2} \theta^h \, W_F^h \, l_{x+r \ s+2-h}^h p_{x+r} \, v^{3/2} + ... \\
&+ \sum_{h=1}^{2s} \theta^h \, W_F^h \, l_{x+r \ 2s-h}^h p_{x+r} \, v^{s-(1/2)} \\
&= \sum_{j=1}^{2s} \sum_{h=1}^{j} \theta^h \, W_F^h \, l_{x+r \ j-h}^h p_{x+r} \, v^{j-s-(1/2)} \qquad (5.3)
\end{aligned}
$$

Las aportaciones en este caso serían:

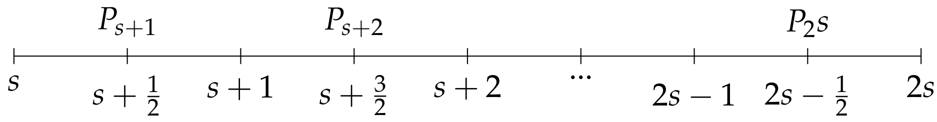


Figura 5.4: Segundo Horizonte de Planificación de Aportaciones

$$\begin{aligned}
P(s) &= P_{s+1}v^{1/2} + P_{s+2}v^{3/2} + P_{s+3}v^{5/2} + ... + P_{2s}v^{s-(1/2)} \\
&= c_c^2 \sum_{k=0}^{r-1} W_{x+k}^{s+1}\, l_{x+k}^{s+1}\, v^{1/2} + c_c^2 \sum_{k=0}^{r-1} W_{x+k}^{s+2}\, l_{x+k}^{s+2}\, v^{3/2} + ... \\
&+ c_c^2 \sum_{k=0}^{r-1} W_{x+k}^{2s}\, l_{x+k}^{2s}\, v^{s-(1/2)} \\
&= \sum_{j=s+1}^{2s} \sum_{k=0}^{r-1} W_{x+k}^{j}\, l_{x+k}^{j}\, v^{j-s-(1/2)}
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Por lo tanto,

$$c_c^2 = \frac{\displaystyle\sum_{j=s+1}^{2s} \sum_{h=1}^{j} \theta^h\, W_F^h\, l_{x+r\ j-h}^{h} p_{x+r}\, v^{j-s-(1/2)}}{\displaystyle\sum_{j=s+1}^{2s} \sum_{k=0}^{r-1} W_{x+k}^{j}\, l_{x+k}^{j}\, v^{j-s-(1/2)}} \tag{5.5}$$

N-ésimo Horizonte de Planificación

Finalmente, en el último año del n-ésimo periodo de planificación se alcanzaría el número máximo de generaciones jubiladas que sería:

$$ns = w - (x + r)$$

En este caso, se podría decir que el sistema estaría en plena madurez, y la fórmula para el cálculo de la tasa de cotización para dicho período sería:

$$c_c^n = \frac{\displaystyle\sum_{j=(n-1)s+1}^{ns} \sum_{h=1}^{j} \theta^h \, W_F^h \, l_{x+r}^h \; {}_{j-h}p_{x+r} \, v^{j-s-(1/2)}}{\displaystyle\sum_{j=(n-1)s+1}^{ns} \sum_{k=0}^{r-1} W_{x+k}^j \, l_{x+k}^j \, v^{j-(n-1)s-(1/2)}} \tag{5.6}$$

A partir de "$w - x - r$" se puede considerar constante el número de generaciones jubiladas.

5.1.3. Reservas Matemáticas del Sistema de Reparto Atenuado

En este sistema según [49], sí que se generan reservas, al utilizarse un esquema de "prima nivelada". Su valor se obtiene como diferencia entre lo que se recauda y lo que se paga cada año, más las reservas constituidas hasta ese año. La evolución del valor de estas reservas será el siguiente:

Primer Horizonte de Planificación

$$\begin{aligned}
V_1 &= c_c^1 \sum_{k=0}^{r-1} W_{x+k}^1 \, l_{x+k}^1 \; - \theta^1 \, W_F^1 \, l_{x+r}^1 \\
V_2 &= V_1(1+i) + c_c^1 \sum_{k=0}^{r-1} W_{x+k}^2 \, l_{x+k}^2 \; - \sum_{h=1}^{2} \theta^h \, W_F^h \, l_{x+r}^h \; {}_{2-h}p_{x+r} \\
V_3 &= V_2(1+i) + c_c^1 \sum_{k=0}^{r-1} W_{x+k}^3 \, l_{x+k}^3 \; - \sum_{h=1}^{3} \theta^h \, W_F^h \, l_{x+r}^h \; {}_{3-h}p_{x+r} \\
&\vdots \\
V_s &= V_{s-1}(1+i) + c_c^1 \sum_{k=0}^{r-1} W_{x+k}^s \, l_{x+k}^s \; - \sum_{h=1}^{s} \theta^h \, W_F^h \, l_{x+r}^h \; {}_{s-h}p_{x+r} = 0
\end{aligned} \tag{5.7}$$

El valor de V_s tiene que ser igual a cero para que se cumpla el principio de equivalencia financiero-actuarial.

Segundo Horizonte de Planificación

$$
\begin{aligned}
V_{s+1} &= c_c^2 \sum_{k=0}^{r-1} W_{x+k}^{s+1}\, l_{x+k}^{s+1} \; - \sum_{h=1}^{s+1} \theta^h \, W_F^h \, l_{x+r \;\, s+1-h}^h p_{x+r} \\
V_{s+2} &= V_{s+1}(1+i) + c_c^2 \sum_{k=0}^{r-1} W_{x+k}^{s+2}\, l_{x+k}^{s+1} \; - \sum_{h=1}^{s+2} \theta^h \, W_F^h \, l_{x+r \;\, s+2-h}^h p_{x+r} \\
V_{s+3} &= V_{s+2}(1+i) + c_c^2 \sum_{k=0}^{r-1} W_{x+k}^{s+3}\, l_{x+k}^{s+3} \; - \sum_{h=1}^{s+3} \theta^h \, W_F^h \, l_{x+r \;\, s+3-h}^h p_{x+r} \\
&\vdots \\
V_{2s} &= V_{2s-1}(1+i) + c_c^2 \sum_{k=0}^{r-1} W_{x+k}^{2s}\, l_{x+k}^{2s} \; - \sum_{h=1}^{2s} \theta^h \, W_F^h \, l_{x+r \;\, 2s-h}^h p_{x+r} = 0 \qquad (5.8)
\end{aligned}
$$

N-ésimo horizonte de planificación

Finalmente, en el último año del n-ésimo periodo de planificación se alcanzaría el número máximo de generaciones jubiladas que sería:

$$ns = w - (x+r)$$

y la reserva para el n-ésimo horizonte de planificación es:

$$V_{ns} = V_{ns-1}(1+i) + C_c^n \sum_{k=0}^{r-1} W_{x+k}^{ns}\, l_{x+k}^{ns} - \sum_{h=1}^{ns} \beta^h W_F^h \, l_{x+r \quad ns-h}^h P_{x+r} \qquad (5.9)$$

Gráficamente se puede representar la evolución de la reserva, donde se aprecia la formación de reservas al principio de cada horizonte económico y su posterior compensación:

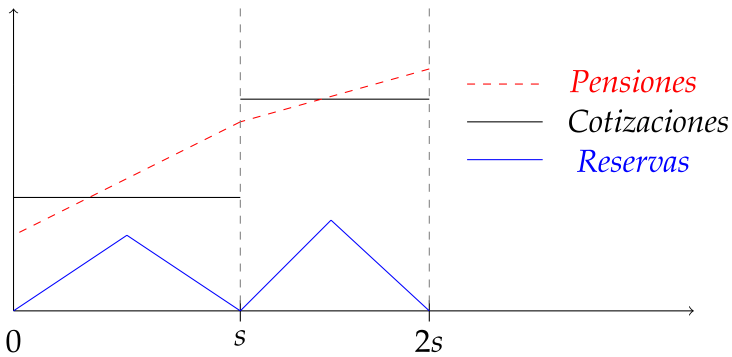


Figura 5.5: Evolución de las Reservas, Pensiones y Cotizaciones.

5.2. El Sistema de Capitalización Individual

En el *sistema de capitalización individual*, la ecuación de equivalencia financiero-actuarial entre primas y prestaciones se establece persona a persona.

5.2.1. Modelo del Sistema de Capitalización Individual

Dado un colectivo cuyos integrantes en activo tienen las edades, $x_1, x_2, ..., x_h$; siendo las rentas de jubilación constantes, respectivamente, $R_1, R_2, ..., R_h$; y las primas constantes, respectivamente, $P_1, P_2, ..., P_h$; el esquema temporal de las primas y de las prestaciones, suponiendo que la edad de jubilación es x_r, será:

Primas

	P_1	P_1	P_1	P_1	P_1	
t	0	1	2	...	$x_t - x_1 - 1$	$x_t - x_1$
edad	x_1	$x_1 + 1$	$x_1 + 2$	...	$x_r - 1$	x_r

	P_2	P_2	P_2	P_2	P_2	
t	0	1	2	...	$x_t - x_2 - 1$	$x_t - x_2$
edad	x_2	$x_2 + 1$	$x_2 + 2$	...	$x_r - 1$	x_r

	P_h	P_h	P_h	P_h	P_h	
t	0	1	2	$\cdots$	$x_t - x_h - 1$	$x_t - x_h$
edad	x_h	$x_h + 1$	$x_h + 2$	$\cdots$	$x_h - 1$	x_h

Figura 5.6: Esquema Temporal de las Primas

Prestaciones

					R_1	R_1 ...
t	0	1	2	$\cdots$	$x_t - x_1$	$x_t - x_1 + 1$ ...
edad	x_1	$x_1 + 1$	$x_1 + 2$	$\cdots$	x_r	$x_r + 1$ ...

					R_2	R_2 ...
t	0	1	2	$\cdots$	$x_t - x_2$	$x_t - x_2 + 1$ ...
edad	x_2	$x_2 + 1$	$x_2 + 2$	$\cdots$	x_r	$x_r + 1$ ...

					R_h	R_h ...
t	0	1	2	$\cdots$	$x_t - x_h$	$x_t - x_h + 1$ ...
edad	x_h	$x_h + 1$	$x_h + 2$	$\cdots$	x_h	$x_h + 1$ ...

Figura 5.7: Esquema Temporal de las Prestaciones

Los esquemas temporales de las primas tienen distinta duración para cada uno de los individuos: la diferencia entre la edad de jubilación x_r y la edad que en estos momentos tiene el individuo i-ésimo del colectivo, x_i. Además, en los esquemas de las prestaciones se aprecia el distinto diferimiento que tienen las rentas vitalicias: la diferencia entre la edad de jubilación x_r y la edad que en estos momentos tiene el individuo i-ésimo del colectivo, x_i.

Las ecuaciones de equivalencia individuales son:

$$
\begin{aligned}
P_1 \ddot{a}_{x_1:x_r-x_1} &= R_1 \; {}_{x_r-x_1|}\ddot{a}_{x_1} = R_1 \; {}_{x_r-x_1}E_{x_1} \; \ddot{a}_{x_r} \\
P_2 \ddot{a}_{x_2:x_r-x_2} &= R_2 \; {}_{x_r-x_2|}\ddot{a}_{x_2} = R_2 \; {}_{x_r-x_2}E_{x_2} \; \ddot{a}_{x_r} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

$$P_h \ddot{a}_{x_h:x_r-x_h} = R_h\ {}_{x_r-x_h|}\ddot{a}_{x_h} = R_h\ {}_{x_r-x_h}E_{x_h}\ \ddot{a}_{x_r} \tag{5.10}$$

donde:

- R_i: Cuantía anual de jubilación que percibirá una persona que hoy tiene la edad x_i.
- x_r: Edad de jubilación.
- P_i: Prima o cuota anual constante para una persona que hoy tiene la edad x_i.
- $\ddot{a}_{x_r}$: valor actual actuarial de una renta constante, unitaria, anticipada, vitalicia, para un individuo de edad x_r.
- $\ddot{a}_{x_h:x_r-x_h}$: valor actual actuarial de una renta constante, unitaria, anticipada, temporal de "$x_r - x_h$" periodos, para un individuo de edad x_h.
- ${}_{x_r-x_h|}\ddot{a}_{x_h}$: valor actual actuarial de una renta constante, unitaria, anticipada, vitalicia, diferida "$x_r - x_h$" periodos, contratada por un individuo de edad x_h.
- ${}_{x_r-x_h}E_{x_h}$: factor de actualización actuarial para un individuo de edad x_h y para un plazo de "$x_r - x_h$" periodos.

5.2.2. Reservas Matemáticas del Sistema de Capitalización Individual

Las fórmulas para calcular las reservas matemáticas, t años después de haber empezado a pagar la prima, son, para las edades $x_1, x_2, ..., x_h$, las siguientes:

$$\begin{aligned}
{}_tV_{x_1} &= {}_{x_r-x_1-t|}\ddot{a}_{x_1+t}\ R_1 - P_1\ \ddot{a}_{x_1+t:x_r-x_1-t} \\
&= \ddot{a}_{x_r}\ {}_{x_r-x_1-t}E_{x_1+t} - P_1\ \ddot{a}_{x_1+t:x_r-x_1-t} \\
&= \frac{P_1\ \ddot{a}_{x_1:t}}{{}_tE_{x_1}}
\end{aligned}$$

$${}_tV_{x_2} = {}_{x_r-x_2-t|}\ddot{a}_{x_2+t}\ R_2 - P_2\ \ddot{a}_{x_2+t:x_r-x_2-t}$$

$$= \ddot{a}_{x_r\ \ x_r-x_2-t}E_{x_2+t} - P_2\ \ddot{a}_{x_2+t:x_r-x_2-t}$$
$$= \frac{P_2\ \ddot{a}_{x_2:t}}{{}_tE_{x_2}}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned} {}_tV_{x_h} &= {}_{x_r-x_h-t|}\ddot{a}_{x_h+t}\ R_h - P_h\ \ddot{a}_{x_h+t:x_r-x_h-t} \\ &= \ddot{a}_{x_r\ \ x_r-x_h-t}E_{x_h+t} - P_h\ \ddot{a}_{x_h+t:x_r-x_h-t} \\ &= \frac{P_h\ \ddot{a}_{x_h:t}}{{}_tE_{x_h}} \end{aligned} \tag{5.11}$$

donde,

${}_{x_r-x_h-t|}\ddot{a}_{x_h+t}$: valor actual actuarial de una renta constante, unitaria, anticipada, vitalicia, diferida "$x_r - x_h - t$" periodos, contratada por un individuo de edad "$x_h + t$".

5.3. El Sistema Mixto por Etapas

El *modelo mixto por etapas* [35] considera un período de vida activa, desde el inicio de la vida laboral hasta el momento de jubilación (elegido con suficiente flexibilidad); y un período de jubilación que se divide en dos etapas: una desde la edad de jubilación hasta la denominada *"gran edad"* y otra desde esa misma *"gran edad"* hasta el fallecimiento del individuo. Durante la vida activa se realizarán cotizaciones a los dos tipos de esquemas. Así, la cotización anual que realice el individuo se divide en dos partes:

1. Una parte de la cotización genera una renta financiera actuarial temporal que percibirá el individuo desde el momento que se jubile hasta la denominada gran edad.

2. La otra parte financia las pensiones causadas generadas por el sistema de reparto de la Seguridad Social que consiste en una renta vitalicia desde la mencionada gran edad hasta el momento de fallecimiento del individuo.

Por lo tanto, cuando el individuo se jubile percibirá una renta temporal desde la edad de jubilación que haya elegido dentro de una mayor flexibilidad hasta la gran edad, basada en reglas de capitalización, edad tras la cual percibirá una pensión que es financiada vía reparto hasta el momento del fallecimiento.

5.3.1. Modelo del Sistema Mixto por Etapas

Cotizaciones

$$
\begin{array}{cccccc}
C'_x \cdot W_x & C'_{x+1} \cdot W_{x+1} & C'_{x+2} \cdot W_{x+2} & \dots & C'_{x_r-1} \cdot W_{x_r-1} & \\
= & = & = & & = & \\
C^c_x \cdot W_x & C^c_{x+1} \cdot W_{x+1} & C^c_{x+2} \cdot W_{x+2} & \dots & C^c_{x_r-1} \cdot W_{x_r-1} & \\
+ & + & + & & + & \\
C^r_x \cdot W_x & C^r_{x+1} \cdot W_{x+1} & C^r_{x+2} \cdot W_{x+2} & \dots & C^r_{x_r-1} \cdot W_{x_r-1} & \\
x & x+1 & x+2 & \dots & x_r-1 & x_r
\end{array}
$$

Figura 5.8: Esquema del sistema mixto por etapas para las Cotizaciones

donde:

- x : Edad del individuo al incorporarse al mercado laboral.
- x_r : Edad del individuo al alcanzar la jubilación ordinaria.
- C_x : Porcentaje de cotización a la edad x años en el sistema actual.
- C'_x : Porcentaje de cotización a la edad x años en el sistema mixto. Comprende tanto la aportación al sistema de reparto c^r_x como a la renta temporal c^c_x.
- W_x : Salario a la edad x, que se supone coincidente, por simplicidad, con la base de cotización.

El valor actual actuarial de las cotizaciones en la primera etapa se calcula de la siguiente forma:

$$V_{COT} = \sum_{t=0}^{x_r-1-x} {}_tP_x \, c_{x+t} \, W_x \prod_{k=t}^{x_r-1-x} (1+\alpha_k)(1+\gamma_k)(1+i)^t \tag{5.12}$$

donde:

- i es la tasa interna de rendimiento real,
- x es la edad del individuo al incorporarse al mercado laboral,
- x_r es la edad del individuo al alcanzar la jubilación,

- ${}_tP_x$ es la probabilidad de que una persona de edad x años alcance la edad de $x + t$ años,
- c_{x+t} es el porcentaje de cotización a la edad $x + t$ años. Comprende tanto la aportación patronal como la del trabajador,
- W_x es el salario a la edad x, que se supone coincidente con la base de cotización,
- α_i es el tanto anual de crecimiento nominal de los salarios en el año en el que el individuo tiene la edad i, que se supone constante,
- $W_{x+t} = W_x(1 + \alpha^*)^t$ es el salario a la edad $x + t$,
- γ_i es el tanto anual de crecimiento de la inflación, en el año en el que el individuo tiene la edad i.

Para la segunda etapa, desde la "gran edad" hasta el momento de la muerte del jubilado, se incorpora el sistema de reparto planteado en una sección anterior.

Prestaciones

$$
\begin{array}{ccccccccc}
R_{x_r} & R_{x_r+1} & \dots & R_{x_g-1} & R_{x_g} & R_{x_g+1} & \dots & R_{w-1} & \\
= & = & & = & = & = & & = & \\
R^c_{x_r} & R^c_{x_r+1} & \dots & R^c_{x_g-1} & R^c_{x_g} & R^c_{x_g+1} & \dots & R^c_{w-1} & \\
+ & + & & + & + & + & & + & \\
R^r_{x_r} & R^r_{x_r+1} & \dots & R^r_{x_g-1} & R^r_{x_g} & R^r_{x_g+1} & \dots & R^r_{w-1} & \\
\hline
x_r & x_r+1 & \dots & x_g-1 & x_g & x_g+1 & \dots & w-1 & w
\end{array}
$$

Figura 5.9: Esquema del sistema mixto por etapas para las Prestaciones

donde, $R^c_s = 0$ Si $s \geq x_g$; $R^r_s = 0$ Si $x \leq s < x_g$

- x_g : Edad del individuo al alcanzar la denominada "gran edad".
- R_{x_r} : Pensión que percibe el individuo a la edad x_r.
- R^c_s : Pensión que percibe el individuo a la edad s generada por las aportaciones al sistema de capitalización; esta pensión es 0 a partir de la "gran edad" al tratarse de una renta temporal asegurada.

- R_s^r : Pensión que percibe el individuo a la edad s generada por el sistema de reparto; esta pensión es 0 entre la jubilación ordinaria x_r hasta la gran edad x_g.

El valor actual actuarial de las prestaciones en la primera etapa se calcula de la siguiente manera:

$$V_{Rx} = \sum_{t=x_r-x}^{w-1-x} R_{x_r\,t}p_x(1+\lambda^*)^{t-(x_r-x)}(1+\gamma)^{-t}(1+i)^{-t} \tag{5.13}$$

donde:

- λ^* es la tasa anual acumulativa de crecimiento nominal de las pensiones,
- w es la edad límite de la tabla de mortalidad utilizada,
- R_{x_r} es la pensión de jubilación inicial.

Finalmente la fórmula de equivalencia actuarial de las rentas y cotizaciones vendrá dada por,

$$V_{Rx} = V_{COT}$$

5.3.2. Reservas Matemáticas para el Sistema Mixto por Etapas

Una vez calculados los flujos de ingresos del sistema mixto por etapas, tomando en cuenta el porcentaje de aportación del sistema de capitalización y del sistema de reparto, se descuentan los egresos provenientes de las pensiones temporales por $x_g - x_r$ años hasta llegar a la gran edad x_g. Finalmente se descuentan, del fondo restante, las pensiones vitalicias por los próximos $\omega - x_g$ años provenientes del sistema de reparto atenuado.

Luego, de esta forma se obtiene la ecuación del método prospectivo:

$${}_tV(t) = E[\text{VA de prestaciones}_{(x_g-x_r)}] + E[\text{VA de prestaciones}_{(\omega-x_g)}] - E[\text{VA primas}_{(x_r-x)}] \tag{5.14}$$

Capítulo 6

Implementación de los Sistemas de Financiamiento a la realidad Ecuatoriana

6.1. Funciones y Cálculos Actuariales en el Software RStudio

En este capítulo se estructurarán los modelos de los sistemas de financiamiento de pensiones, de los cuales se habló en el capítulo anterior y también se presentarán algunas funciones del paquete *lifecontingencies* con funcionalidades de cálculo actuarial para facilitar el proceso de implementación de los sistemas de financiamiento por medio del software RStudio. Además, se describe el proceso de lectura y limpieza de las bases de datos usadas en el trabajo.

6.1.1. Lectura y Depuración de las Bases de Datos

Se cuenta con una base de datos que contiene información correspondiente a los afiliados a la Seguridad Social en el periodo 2015 a 2019, que contiene las siguientes variables:

- **ANIO:** Periodo cronológico al cual corresponde la información.
- **SECTOR:** Tipo de seguro al que están afiliados, este puede ser: Privado, Público, Voluntario, Privado-Voluntario, Público-Privado, Público-Voluntario, Seguro Social Campesino, Trabajadoras no remuneradas del hogar, etc.

- **SEXO:** Sexo de los afiliados.
- **EDAD:** Edad de las personas afiliadas.
- **NUMERO:** Cantidad de afiliados que comparten características iguales (ANIO, EDAD, SEXO, SECTOR).
- **SALARIO_PROMEDIO:** Salario promedio en dólares de los afiliados.

Para el trabajo se excluyeron los afiliados del Seguro Social Campesino (SSC) y Trabajadoras no remuneradas del hogar (TNRH) dado que su financiamiento es totalmente distinto al Seguro General Obligatorio, también se tomaron en cuenta únicamente los afiliados de 18 a 64 años de edad, puesto que a los 18 años el individuo puede recibir legalmente un salario (parámetro necesario para el cálculo de la pensión). Por otro lado, bajo las normativas de la Ley de Seguridad Social, un individuo puede jubilarse a los 65 años de edad.

Finalmente, agrupando los afiliados por sexo y edad, se calculó el promedio ponderado de la variable SALARIO_PROMEDIO y se obtuvo una base de datos con 235 observaciones y 4 variables como muestra el Cuadro 6.1. Hay que recalcar que la lectura de la base de datos mencionada y la manipulación de los datos para obtener el Cuadro 6.1 se realizó en el Software R.

ANIO	EDAD	SALARIO_PROM	COTIZANTES
2015	18	353.03	38 252
2015	19	373.20	63 432
2015	20	389.05	79 992
2015	21	404.60	92 628
2015	22	427.34	104 353
—	—	—	—
2019	60	798.36	40 817
2019	61	750.11	33.767
2019	62	725.85	30 738
2019	63	695.18	28 094
2019	64	671.99	26 573

Cuadro 6.1: Información Afiliados 2015-2019. **Fuente:** IESS. **Elaboración:** Autores

A continuación, se presenta el Cuadro 6.2 donde se observa el número de cotizantes por año.

ANIO	COTIZANTES
2015	3'658 591
2016	3'514 299
2017	3'501 116
2018	3'569 270
2019	3'600 112

Cuadro 6.2: Información Número de Afiliados 2015-2019. **Fuente:** IESS. **Elaboración:** Autores

Además, se usó una tabla de mortalidad con información de los afiliados a la seguridad social ecuatoriana, que contiene dos columnas que corresponden a la edad x y su respectiva probabilidad de fallecimiento q_x como se muestra en el Cuadro 6.3, la edad mínima en esta tabla x_0 es 15 y la edad máxima w es 110.

x	qx
15	0.0005964
16	0.00066305
17	0.00072927
18	0.00079263
19	0.00085122
—	—
—	—
106	0.7378741
107	0.79429134
108	0.84688995
109	0.90625
110	1

Cuadro 6.3: Probabilidades de Fallecimiento - Afiliados 2019. **Fuente:** IESS (2019) [34]. **Elaboración:** Autores

6.1.2. Cálculos Actuariales en R

En esta sección se presentan las funciones que se usaron en el entorno del Software R para facilitar los diferentes cálculos actuariales, estas funciones son parte del paquete *lifecontingencies* [42].

Función *Exn*

En R la función *Exn* evalúa el factor de actualización actuarial.

```
Exn(actuarialtable,x,n,i)
```

actuarialtable	Una tabla de mortalidad o tabla actuarial
x	Edad del Asegurado
n	Duración del factor de actualización actuarial
i	Tasa de interés para el caso de una tabla de mortalidad o sin interés si es una tabla actuarial

Cuadro 6.4: Argumentos de la función *Exn*. **Fuente:** Rivera C. (2018) [42]. **Elaboración:** Autores

Ejemplo:

Si una persona de 35 años desea recibir $100 000 al cumplir 50 años de edad. ¿Cuánto debe pagar por prima si la aseguradora le ofrece un tipo de interés anual del 10 % ?

Solución en R: Para calcular en R el factor de actualización actuarial para un asegurado se utiliza el comando *Exn*, en este caso a una edad de 35 años, se asigna 35 al atributo o variable x, suponiendo que viva 15 años después el cual se asigna a la variable n, ocupando la tabla de mortalidad descrita en el Cuadro 6.3 a la variable i se le debe asignar la tasa de interés que en este caso es del 10 %.

```
Exn(TH, x=35, n=15, i=0.1)
[1] 0.2328416
```

Por lo tanto para recibir $100 000 una persona de 35 años tendrá que pagar la cantidad de:

$$100\,000 * (0.2328416) = 23\,284.16$$

Función *axn*

En R la función *axn* calcula el valor actuarial de las rentas, dada una tabla de mortalidad o tabla actuarial. El cálculo de las rentas pueden ser vitalicias, anticipadas, temporales, vencidas, fraccionarias, etc.

```
axn(actuarialtable,x,n,i,m,k)
```

actuarialtable	Una tabla de mortalidad o tabla actuarial
x	Edad del Asegurado
n	Número de años de la temporalidad de la renta, si la renta está destinada a ser pagada hasta la muerte, n se omite.
m	Periodo de Diferimiento.
k	Número de pagos fraccionarios por período.
i	Tasa de interés para el caso de una tabla de mortalidad o sin interés si es una tabla actuarial

Cuadro 6.5: Argumentos de la función *axn*. **Fuente:** Rivera C. (2018) [42]. **Elaboración:** Autores

Ejemplos:

1. *Renta Vitalicia Anticipada:* Una persona de 30 años de edad está obligada a pagar $1 000 al comienzo de cada año durante toda su vida. ¿ Cuál es la cuantía total que pagaría la persona, tomando en cuenta un tipo de interés anual del 4 % que corresponde a la tasa de descuento usada por defecto en el campo actuarial?

```
1000*axn(TH,x=30,i=0.04)
[1] 22248.9
```

2. *Rentas vitalicias anticipadas diferidas m años:* Determinar el valor actual actuarial de un seguro que garantiza a un asegurado de 35 años el cobro de una renta vitalicia de $50 000 al principio de cada año que sobreviva. Después de que haya logrado sobrevivir a la edad de jubilación de 65 años. Se tomará en cuenta un tipo de interés anual del 4 % correspondiente a la tasa de descuento usada por defecto en el campo actuarial.

```
50000*axn(TH, x=35,m=30,i=0.04)
[1] 203189.6
```

3. *Rentas temporales anticipadas:* Una persona de 65 años de edad va a recibir 25 pagos anuales de $120 000, con pagos al principio de cada año, por concepto

de una pensión, ¿cuál es el valor actual actuarial de la pensión, tomando en cuenta un tipo de interés anual del 4 % que corresponde a la tasa de descuento usada por defecto en el campo actuarial?.

```
120000*axn(TH,x=65,n=25,i=0.04)
[1] 1646533
```

4. *Rentas temporales anticipadas diferidas m años:* Una persona de 24 años de edad compra una renta anticipada, diferida 18 años, temporal 12 años, en $90 000. Encontrar la cuantía anual que recibirá si sobrevive al vencimiento de los pagos, tomando en cuenta un tipo de interés anual del 4 % que corresponde a la tasa de descuento usada por defecto en el campo actuarial.

```
90000/axn(TH,x=24,n=12,m=18,i=0.04)
[1] 19424.14
```

6.2. Aplicativo para Simular el Cálculo de Pensiones Individuales

Con el uso de las funciones descritas anteriormente y las bases de datos mencionadas en la sección (6.1) , se diseñó un aplicativo para calcular la pensión individual de un cotizante mediante los métodos de financiamiento para los sistemas de pensiones vistos en el Capítulo 5. El aplicativo fue implementado en el entorno RStudio usando el paquete "Shiny" que sirve para la creación de aplicaciones web interactivas.

Este aplicativo presenta un dashboard interactivo con un menú de cuatro opciones. En la primera, se muestran las condiciones mínimas de jubilación según la Ley Ecuatoriana de Seguridad Social, esto para que el usuario tenga en cuenta la información que debe ingresar para los cálculos. La segunda opción corresponde al método de *reparto atenuado*, aquí se encuentra una subopción de información general del método y otra subopción para ejecutar los cálculos, en la cual hay dos columnas, en la columna de la izquiera se debe introducir la información del cotizante: fecha de nacimiento, edad de inicio de las cotizaciones, salario mensual al iniciar las cotizaciones, edad a la que desea jubilarse; en la columna de la derecha se encuentran los siguientes parámetros dinámicos fijados inicialmente en un valor, sin embargo, el usuario puede modificarlos sin problema: taza de cotización, años tomados en cuenta para el cálculo de la base reguladora, tasa de interés y tasa de sustitución. La tercera opción contiene el método de *capitalización individual* y finalmente la cuarta opción pertenece al modelo *mixto por etapas*, tanto la tercera como cuarta opción tienen una estructura similar a la descrita en le método de reparto atenuado.

Figura 6.1: Aplicativo para el cálculo de pensiones. **Elaboración:** Autores

6.3. El Sistema de Reparto Atenuado Aplicado al Caso Ecuatoriano

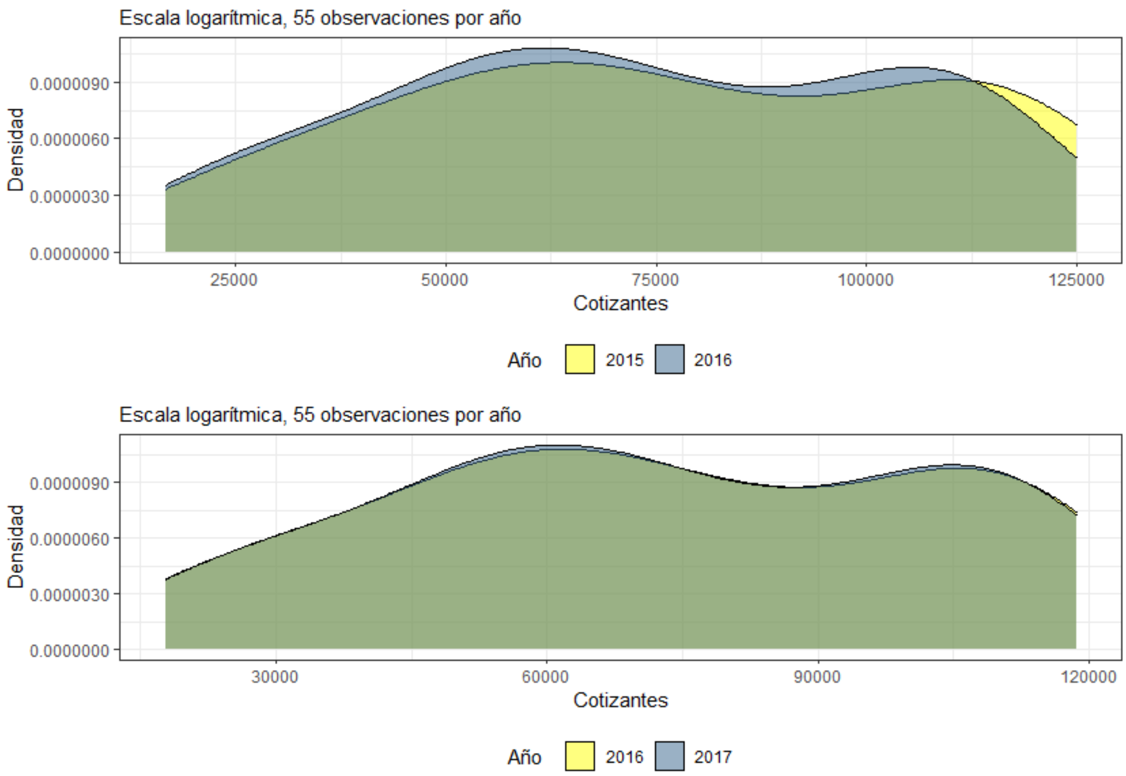
Sin pérdida de generalidad, para realizar los diversos cálculos, de los tres métodos de financiación, se tomarán en cuenta a los afiliados presentes a Junio 2019.

Pero antes de seguir adelante con el Modelo de Sistema de Reparto Atenuado, mediante el test de Kolmogorov–Smirnov, al 95 % de confianza ($\alpha = 0.05$), se verificó la *Hipótesis 1 (H1)*, que supone una población de cotizantes que evoluciona de manera constante en el tiempo. El cálculo del estadístico de contraste se lo realizó en el Software R con ayuda de la función *ks.test()* y fue comparado con el valor D_α de la tabla del Anexo A.

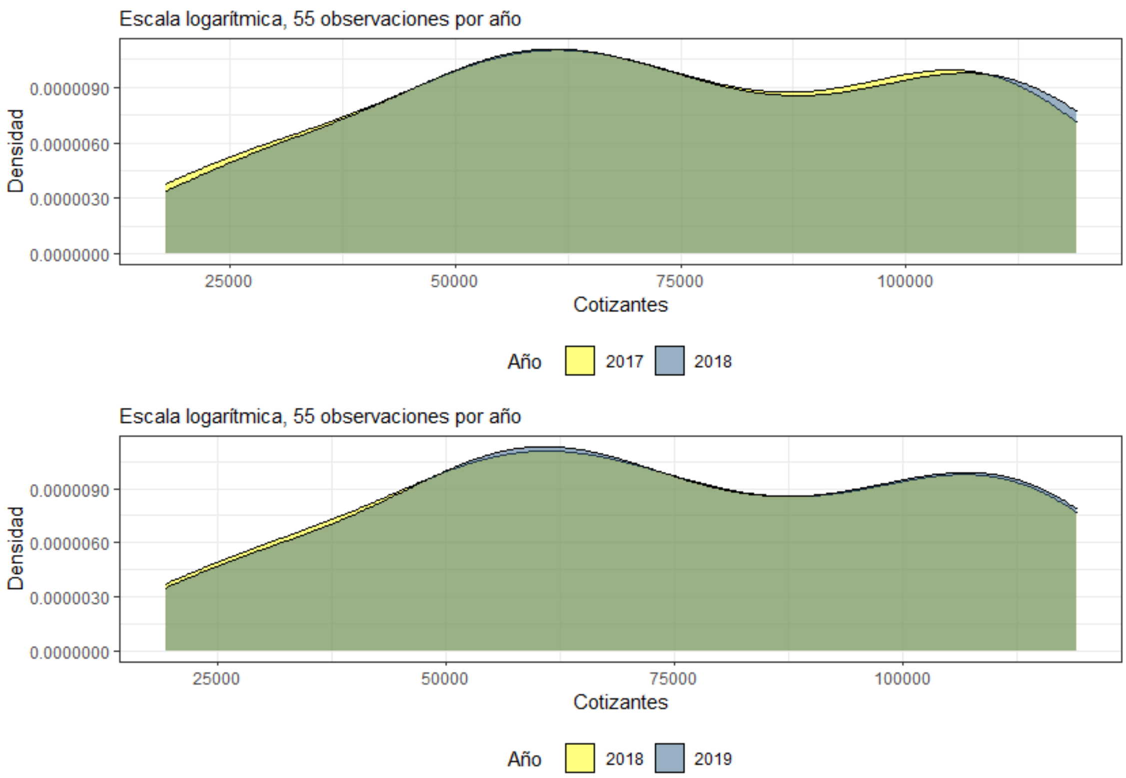
Años	**D**	D_α
2015-2016	0.1276596	0.1942
2016-2017	0.04255319	0.1942
2017-2018	0.08510638	0.1942
2018-2019	0.06382979	0.1942

Cuadro 6.6: Resultados del Test de Kolmogorov-Smirnof. **Elaboración:** Autores

Por los valores que se observan en el Cuadro 6.6, ya que para todos los años comparados se observa que $D \leq D_\alpha$, entonces se acepta H_0 y se puede concluir que la distribución de la población de cotizantes es la misma a lo largo del tiempo, por lo que se cumple la *Hipótesis 1*. Gráficamente también es visible este resultado en la Figura 6.2.



(a) Comparación de densidad de los años 2015-2016 y 2016-2017



(b) Comparación de densidad de los años 2017-2018 y 2018-2019

Figura 6.2: Densidad del número de Cotizantes por año. **Elaboración:** Autores

En esta parte se implementó una función denominada *REPARTO_ATENUADO()* la cual ayudó con los cálculos, para una mejor visualización de esta función ver el Anexo B. Luego, se definieron algunas variables y parámetros como se ve en el cuadro 6.7.

Variable/Parámetro	**Descripción**	Notación en R
Tasa de Sustitución	Tasa de sustitución definida como 0.85.	theta
Salario Básico	Salario básico actual, fijado por el Consejo Nacional de Trabajo y Salarios.	salarioBasico
Proporción del Salario	Proporción de los salarios promedios de los cotizantes en función del salario básico.	ProporcionSalario
Total de Salarios	Total de la proporción de salarios promedios para cada edad de los afiliados.	Tsalarios
Base Reguladora	Masa salarial sobre el total de cotizantes.	WF
Número de Cotizantes	Número de Cotizantes a la edad de 64 años.	l
Tasa de interés	Tasa de Interés definida como el 4 % .	interes

Cuadro 6.7: Variables y Parámetros del Modelo de Reparto Atenuado. **Elaboración:** Autores

Dentro de la función *REPARTO_ATENUADO()* se calculó una matriz m para visualizar la evolución de la población de pensionistas, donde se concluyó que a partir del año 40 se estabiliza el ratio cotizantes-pensionistas desde la puesta en marcha del sistema. En los siguientes cuadros se observan en periodos de cada diez años, los valores actuales actuariales de las cotizaciones y prestaciones en función del salario básico y también se presentan los valores de las tasas de cotización.

De acuerdo con el Cuadro 6.8 se concluye que para financiar el gasto público de pensiones en el décimo año se requieren 275 672 salarios básicos, los cuales se financiarán con una tasa de cotización del 3.2 % aplicado al salario de los afiliados. Mientras que para financiar el gasto público en el vigésimo año son necesarios 364 345 salarios básicos y una tasa de cotización de 9.23 %, como se sigue en el Cuadro 6.9.

h	Valor Actual Prestaciones	Valor Actual Cotizaciones	Tasa de Cotización %
1	39 694.62	6′375 349	3.2
2	76 254.68	6′130 143	3.2
3	109 860.70	5′894 368	3.2
4	140 683.70	5′667 662	3.2
5	168 885.72	5′449 675	3.2
6	194 620.17	5′240 072	3.2
7	218 032.28	5′038 531	3.2
8	239 259.45	4′844 741	3.2
9	258 431.61	4′658 405	3.2
10	275 671.61	4′479 236	3.2

Cuadro 6.8: Resultados del Primer Período. **Elaboración:** Autores

h	Valor Actual Prestaciones	Valor Actual Cotizaciones	Tasa de Cotización %
11	291 095.5	4′306 957	9.23
12	304 812.8	4′141 305	9.23
13	316 926.8	3′982 024	9.23
14	327 535.1	3′828 869	9.23
15	336 729.4	3′681 605	9.23
16	344 596.2	3′540 005	9.23
17	351 216.9	3′403 851	9.23
18	356 668.0	3′272 934	9.23
19	361 021.5	3′147 951	9.23
20	364 345.0	3′026 011	9.23

Cuadro 6.9: Resultados del Segundo Período. **Elaboración:** Autores

h	Valor Actual Prestaciones	Valor Actual Cotizaciones	Tasa de Cotización %
21	366 701.8	2’909 626	14.83
22	368 151.7	2’797 717	14.83
23	368 750.6	2’690 113	14.83
24	368 551.0	2’586 647	14.83
25	367 602.1	2’487 160	14.83
26	363 639.7	2’391 500	14.83
27	365 950.5	2’299 520	14.83
28	360 710.8	2’211 077	14.38
29	357 202.7	2’126 035	14.83
30	353 151.8	2’044 265	14.83

Cuadro 6.10: Resultados del Tercer Período. **Elaboración:** Autores

h	Valor Actual Prestaciones	Valor Actual Cotizaciones	Tasa de Cotización %
31	348 592.4	1’965 639	19.37
32	343 557.2	1’890 038	19.37
33	338 077.1	1’817 344	19.37
34	332 181.5	1’747 446	19.37
35	325 898.9	1’680 237	19.37
36	319 256.8	1’615 612	19.37
37	312 282.7	1’553 473	19.37
38	305 003.9	1’493 724	19.37
39	297 448.6	1’436 273	19.37
40	289 646.3	1’381 032	19.37

Cuadro 6.11: Resultados del Cuarto Período. **Elaboración:** Autores

Para los horizontes de años 30 y 40 se requieren 353 152 y 289 646 salarios básicos para financiar el gasto público de pensiones con una tasa de cotización del 14.83 % y 19.37 % respectivamente, como se muestra en el Cuadro 6.10 y en el Cuadro 6.11. Por consiguiente, la evolución de la tasa de cotización necesaria para financiar las pensiones de los siguientes 40 años es creciente en el tiempo y su incremento se puede apreciar gráficamente en la Figura 6.3.

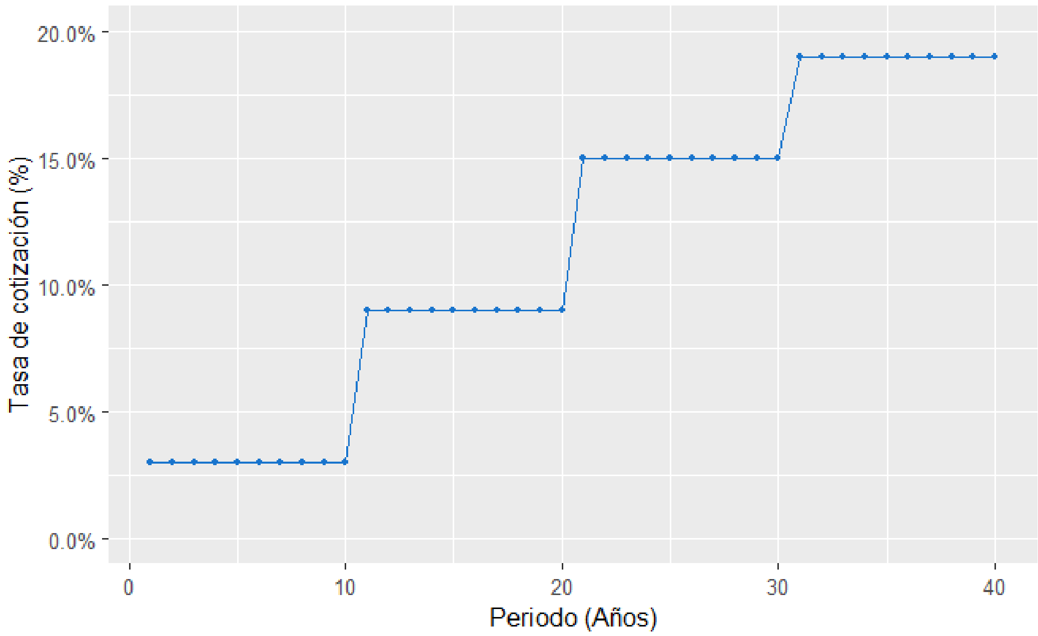


Figura 6.3: Evolución de la tasa de Cotización. **Elaboración:** Autores

Cálculo de la pensión individual

Por los resultados obtenidos anteriormente, se definió una tasa de cotización del 19.37 % para los siguientes cálculos del trabajo. También se mantuvieron fijas las siguientes hipótesis:

- Tasa de sustitución igual al 85 %.
- Tasa de interés igual al 4 %.
- Tasa de crecimiento salarial igual al 2 %.
- Tasa de crecimiento de pensiones igual al 1.5 %.

Para los cálculos se hará uso del aplicativo mencionado en la sección 5.2. La función que ayudó a los cálculos de este modelo está en el Anexo C y se llama *PENSION_RA()*.

Ejemplo 1.

Una persona empieza a aportar a la seguridad social a la edad de 25 años, en ese momento su salario mensual es de $900, si la persona decide jubilarse a los 65 años. Calcular la primera pensión mensual que recibirá el individuo a partir del mes siguiente a su jubilación. Los resultados se muestran en el Cuadro 6.12.

Reparto atenuado		
Hipótesis del análisis	**Valores**	
Edad de inicio de las aportaciones (cotizaciones continuas durante toda la vida activa)	25	
Edad de jubilación	65	
Salario mensual a la edad del inicio de las aportaciones	$900	
Tipo de interés	4.00 %	
Incremento anual de los salarios	2.00 %	
Incremento anual de las pensiones	1.50 %	
Resultados	**Anual**	**Mensual**
Pensión resultante	$8 627	$636
Fondo acumulado de cotizaciones	$309 100	
Duración del fondo acumulado	28 años	

Cuadro 6.12: Resultados del ejemplo 1. **Elaboración:** Autores

Ejemplo 2.

Una persona empieza a aportar a la seguridad social a la edad de 30 años, en ese momento su salario mensual es de $1 200, si la persona decide jubilarse a los 60 años. Calcular la primera pensión mensual que recibirá el individuo a partir del mes siguiente a su jubilación. Los resultados se muestran en el Cuadro 6.13.

Reparto atenuado		
Hipótesis del análisis	**Valores**	
Edad de inicio de las aportaciones (cotizaciones continuas durante toda la vida activa)	30	
Edad de jubilación	60	
Salario mensual a la edad del inicio de las aportaciones	$1 200	
Tipo de interés	4.00 %	
Incremento anual de los salarios	2.00 %	
Incremento anual de las pensiones	1.50 %	
Resultados	**Anual**	**Mensual**
Pensión resultante	$9 008	$664
Fondo acumulado de cotizaciones	$264 231	
Duración del fondo acumulado	24 años	

Cuadro 6.13: Resultados del ejemplo 2. **Elaboración:** Autores

Ejemplo 3.

Una persona empieza a aportar a la seguridad social a la edad de 50 años, en ese momento su salario mensual es de \$1 500, si la persona decide jubilarse a los 65 años. Calcular la primera pensión mensual que recibirá el individuo a partir del mes siguiente a su jubilación. Los resultados se muestran en el Cuadro 6.14.

Reparto atenuado		
Hipótesis del análisis	**Valores**	
Edad de inicio de las aportaciones (cotizaciones continuas durante toda la vida activa)	50	
Edad de jubilación	65	
Salario mensual a la edad del inicio de las aportaciones	\$1 500	
Tipo de interés	4.00 %	
Incremento anual de los salarios	2.00 %	
Incremento anual de las pensiones	1.50 %	
Resultados	**Anual**	**Mensual**
Pensión resultante	\$8 127	\$597
Fondo acumulado de cotizaciones	\$136 776	
Duración del fondo acumulado	20 años	

Cuadro 6.14: Resultados del ejemplo 3. **Elaboración:** Autores

Ejemplo 4.

Una persona empieza a aportar a la seguridad social a la edad de 60 años, en ese momento su salario mensual es de \$1 700, si la persona decide jubilarse a los 70 años. Calcular la primera pensión mensual que recibirá el individuo a partir del mes siguiente a su jubilación. Los resultados se muestran en el Cuadro 6.15.

Reparto atenuado		
Hipótesis del análisis	**Valores**	
Edad de inicio de las aportaciones (cotizaciones continuas durante toda la vida activa)	60	
Edad de jubilación	70	
Salario mensual a la edad del inicio de las aportaciones	$1 700	
Tipo de interés	4.00 %	
Incremento anual de los salarios	2.00 %	
Incremento anual de las pensiones	1.50 %	
Resultados	**Anual**	**Mensual**
Pensión resultante	$8 227	$606
Fondo acumulado de cotizaciones	$96 793	
Duración del fondo acumulado	10 años	

Cuadro 6.15: Resultados del ejemplo 4. **Elaboración:** Autores

6.4. El Sistema de Capitalización Individual Aplicado al Caso Ecuatoriano

Para poder realizar los cálculos se utilizó la función del Anexo C llamada *PENSION_CI()*, usando como argumentos las variables y parámetros del Cuadro 6.16.

Variable/Parámetro	Descripción	Notación en R
Edad	Edad de inicio de las aportaciones de afiliado.	edad
Salario	Salario mensual del afiliado al iniciar las cotizaciones.	salario
Tasa de Cotización	Porcentaje de aportación del afiliado sobre el salario anual.	tasaC
Tasa de crecimiento salarial	Tasa de crecimiento salarial anual.	alfa
Tasa de crecimiento de las pensiones	Tasa de crecimiento anual de las pensiones.	beta
Tasa de Interés	Tasa de interés real anual.	interés
Edad de Jubilación	Edad a la que se jubila el afiliado.	edadJub

Cuadro 6.16: Variables y Parámetros del Sistema de Capitalización Individual. **Elaboración:** Autores

Cálculo de la pensión individual

Se mantuvieron fijas las siguientes hipótesis:

- Tasa de cotización igual al 19.37 %.
- Tasa de interés igual al 4 %.
- Tasa de crecimiento salarial igual al 2 %.
- Tasa de crecimiento de pensiones igual al 1.5 %.

Ejemplo 1.

Una persona empieza a aportar a la seguridad social a la edad de 25 años, en ese momento su salario mensual es de $900, si la persona decide jubilarse a los 65 años. Calcular la primera pensión mensual que recibirá el individuo a partir del mes siguiente a su jubilación. Se observan los resultados en el Cuadro 6.17

Capitalización individual		
Hipótesis del análisis	**Valores**	
Edad de inicio de las aportaciones (cotizaciones continuas durante toda la vida activa)	25	
Edad de jubilación	65	
Salario mensual a la edad del inicio de las aportaciones	\$900	
Tipo de interés	4.00 %	
Incremento anual de los salarios	2.00 %	
Incremento anual de las pensiones	1.50 %	
Resultados	**Anual**	**Mensual**
Pensión resultante	\$10 895	\$811
Fondo acumulado de cotizaciones	\$238 935	
Duración del fondo acumulado	19 años	

Cuadro 6.17: Resultados del ejemplo 1. **Elaboración:** Autores

Ejemplo 2.

Una persona empieza a aportar a la seguridad social a la edad de 30 años, en ese momento su salario mensual es de \$1 200, si la persona decide jubilarse a los 60 años. Calcular la primera pensión mensual que recibirá el individuo a partir del mes siguiente a su jubilación. Se observan los resultados en el Cuadro 6.18

Capitalización individual		
Hipótesis del análisis	**Valores**	
Edad de inicio de las aportaciones (cotizaciones continuas durante toda la vida activa)	30	
Edad de jubilación	60	
Salario mensual a la edad del inicio de las aportaciones	\$1 200	
Tipo de interés	4.00 %	
Incremento anual de los salarios	2.00 %	
Incremento anual de las pensiones	1.50 %	
Resultados	**Anual**	**Mensual**
Pensión resultante	\$8 338	\$613
Fondo acumulado de cotizaciones	\$217 586	
Duración del fondo acumulado	22 años	

Cuadro 6.18: Resultados del ejemplo 2. **Elaboración:** Autores

Ejemplo 3.

Una persona empieza a aportar a la seguridad social a la edad de 50 años, en ese momento su salario mensual es de \$1 500, si la persona decide jubilarse a los 65 años. Calcular la primera pensión mensual que recibirá el individuo a partir del mes siguiente a su jubilación. Se observan los resultados en el Cuadro 6.19

<table>
<tr><th colspan="3">Capitalización individual</th></tr>
<tr><th>Hipótesis del análisis</th><th colspan="2">Valores</th></tr>
<tr><td>Edad de inicio de las aportaciones
(cotizaciones continuas durante toda la vida activa)</td><td colspan="2">50</td></tr>
<tr><td>Edad de jubilación</td><td colspan="2">65</td></tr>
<tr><td>Salario mensual a la edad del inicio
de las aportaciones</td><td colspan="2">$1 500</td></tr>
<tr><td>Tipo de interés</td><td colspan="2">4.00 %</td></tr>
<tr><td>Incremento anual de los salarios</td><td colspan="2">2.00 %</td></tr>
<tr><td>Incremento anual de las pensiones</td><td colspan="2">1.50 %</td></tr>
<tr><th>Resultados</th><th>Anual</th><th>Mensual</th></tr>
<tr><td>Pensión resultante</td><td>$5 794</td><td>$417</td></tr>
<tr><td>Fondo acumulado de cotizaciones</td><td colspan="2">$127 070</td></tr>
<tr><td>Duración del fondo acumulado</td><td colspan="2">19 años</td></tr>
</table>

Cuadro 6.19: Resultados del ejemplo 3. **Elaboración:** Autores

Ejemplo 4.

Una persona empieza a aportar a la seguridad social a la edad de 60 años, en ese momento su salario mensual es de \$1 700, si la persona decide jubilarse a los 70 años. Calcular la primera pensión mensual que recibirá el individuo a partir del mes siguiente a su jubilación. Se observan los resultados en el Cuadro 6.20

Capitalización individual		
Hipótesis del análisis	**Valores**	
Edad de inicio de las aportaciones (cotizaciones continuas durante toda la vida activa)	60	
Edad de jubilación	70	
Salario mensual a la edad del inicio de las aportaciones	$1 700	
Tipo de interés	4.00 %	
Incremento anual de los salarios	2.00 %	
Incremento anual de las pensiones	1.50 %	
Resultados	**Anual**	**Mensual**
Pensión resultante	$5 251	$375
Fondo acumulado de cotizaciones	$94 113	
Duración del fondo acumulado	15 años	

Cuadro 6.20: Resultados del ejemplo 4. **Elaboración:** Autores

6.5. El Sistema Mixto por Etapas Aplicado al Caso Ecuatoriano

Finalmente en el modelo mixto por etapas se usaron las funciones del Anexo C llamadas, *PENSION_MIXTOCI()* y *PENSION_MIXTORA()* para calcular las pensiones de la etapa temporal (desde la jubilación ordinaria hasta la gran edad) y la etapa vitalicia (desde la gran edad hasta el momento del fallecimiento) respectivamente, se tomaron en cuenta como argumentos de las funciones, las variables y parámetros que se observan en el Cuadro 6.21.

Variable/Parámetro	**Descripción**	**Notación en R**
Edad	Edad de inicio de las aportaciones	Edad0
Salario	Salario mensual del afiliado al inicio de las aportaciones.	Salario
Tasa de sustitución	Tasa de sustirución anual, en porcentaje.	TasaSust
Tasa de cotización	Porcentaje de aportación del afiliado sobre el salario promedio	tasaC
Tasa de crecimiento salarial	Tasa de crecimiento salarial anual.	alfa
Tasa de crecimiento de las pensiones	Tasa de crecimiento anual de las pensiones.	beta
Tasa de interés	Tasa de interés real anual.	interés
Edad de jubilación	Edad a la que se jubila el afiliado	EdadJ
Gran edad	Edad en la que termina la primera etapa de pensión temporal del afiliado	GranEdad

Cuadro 6.21: Variables y Parámetros del Sistema Mixto por Etapas. **Elaboración:** Autores

Cálculo de la pensión individual

Se mantuvieron fijas las siguientes hipótesis:

- Gran edad igual a 76 años de edad.
- Tasa de cotización total igual a 19.37 % (tasa de cotización para el sistema de capitalización igual a 13.93 % y tasa de cotización del sistema de reparto igual a 5.44 %).

- Tasa de interés igual al 4 %.
- Tasa de crecimiento salarial igual al 2 %.
- Tasa de crecimiento de pensiones igual al 1.5 %.

Ejemplo 1.

Una persona empieza a aportar a la seguridad social a la edad de 25 años, en ese momento su salario mensual es de $900, si la persona decide jubilarse a los 65 años. Calcular la primera pensión mensual que recibirá el individuo a partir del mes siguiente a su jubilación. Se muestran los resultados en el Cuadro 6.22

Mixto		
Hipótesis del análisis	**Valores**	
Edad de inicio de las aportaciones (cotizaciones continuas durante toda la vida activa)	25	
Edad de jubilación	65	
Salario mensual a la edad del inicio de las aportaciones	$900	
Tipo de interés	4.00 %	
Incremento anual de los salarios	2.00 %	
Incremento anual de las pensiones	1.50 %	
Resultados	**Anual**	**Mensual**
Pensión temporal	$6 486	$470
Pensión vitalicia	$6 203	$448
Fondo acumulado de cotizaciones	$309 100	
Duración del fondo acumulado	40 años	

Cuadro 6.22: Resultados del ejemplo 1. **Elaboración:** Autores

Ejemplo 2.

Una persona empieza a aportar a la seguridad social a la edad de 30 años, en ese momento su salario mensual es de $1 200, si la persona decide jubilarse a los 60 años. Calcular la primera pensión mensual que recibirá el individuo a partir del mes siguiente a su jubilación. Se muestran los resultados en el Cuadro 6.23

Mixto		
Hipótesis del A análisis	**Valores**	
Edad de inicio de las aportaciones (cotizaciones continuas durante toda la vida activa)	30	
Edad de jubilación	60	
Salario mensual a la edad del inicio de las aportaciones	\$1 200	
Tipo de interés	4.00 %	
Incremento anual de los salarios	2.00 %	
Incremento anual de las pensiones	1.50 %	
Resultados	**Anual**	**Mensual**
Pensión temporal	\$4 099	\$286
Pensión vitalicia	\$6 477	\$469
Fondo acumulado de cotizaciones	\$264 231	
Duración del fondo acumulado	40 años	

Cuadro 6.23: Resultados del ejemplo 2. **Elaboración:** Autores

Ejemplo 3.

Una persona empieza a aportar a la seguridad social a la edad de 50 años, en ese momento su salario mensual es de \$1 500, si la persona decide jubilarse a los 65 años. Calcular la primera pensión mensual que recibirá el individuo a partir del mes siguiente a su jubilación. Se muestran los resultados en el Cuadro 6.24

Mixto		
Hipótesis del A análisis	**Valores**	
Edad de inicio de las aportaciones (cotizaciones continuas durante toda la vida activa)	50	
Edad de jubilación	65	
Salario mensual a la edad del inicio de las aportaciones	\$1 500	
Tipo de interés	4.00 %	
Incremento anual de los salarios	2.00 %	
Incremento anual de las pensiones	1.50 %	
Resultados	**Anual**	**Mensual**
Pensión temporal	\$3 450	\$236
Pensión vitalicia	\$5 844	\$421
Fondo acumulado de cotizaciones	\$136 776	
Duración del fondo acumulado	25 años	

Cuadro 6.24: Resultados del ejemplo 3. **Elaboración:** Autores

Ejemplo 4.

Una persona empieza a aportar a la seguridad social a la edad de 60 años, en ese momento su salario mensual es de $1 700, si la persona decide jubilarse a los 70 años. Calcular la primera pensión mensual que recibirá el individuo a partir del mes siguiente a su jubilación. Se muestran los resultados en el Cuadro 6.25

Mixto		
Hipótesis del A análisis	**Valores**	
Edad de inicio de las aportaciones (cotizaciones continuas durante toda la vida activa)	60	
Edad de jubilación	70	
Salario mensual a la edad del inicio de las aportaciones	$1 700	
Tipo de interés	4.00 %	
Incremento anual de los salarios	2.00 %	
Incremento anual de las pensiones	1.50 %	
Resultados	**Anual**	**Mensual**
Pensión temporal	$4 603	$325
Pensión vitalicia	$5 916	$427
Fondo acumulado de cotizaciones	$96 793	
Duración del fondo acumulado	16 años	

Cuadro 6.25: Resultados del ejemplo 4. **Elaboración:** Autores

6.6. Comparación de Resultados de los Sistemas de Pensiones

Con el fin de realizar las comparaciones para esta sección, anteriormente se presentaron algunos ejemplos interesantes de cada uno de los sistemas de pensiones, se fijaron características específicas en cuanto a su edad de inicio de cotizaciones, salario y edad de jubilación para el cálculo de las pensiones y así, se obtuvieron los siguientes resultados:

- ***Comparación del Ejemplo 1:*** Para el caso en el que la edad de inicio de cotizaciones del individuo es 25 años, la edad de jubilación 65 y un salario de $900 al iniciar las cotizaciones, se presentan en las siguientes tablas las diferencias monetarias de las pensiones de jubilación entre los diferentes sistemas de financiamiento.

Resultados	Reparto atenuado	Capitalización individual	Diferencia	Porcentaje
Pensión Anual	\$8 627	\$10 895	\$2 268	20.82 %
Fondo Acumulado	\$309 100	\$238 935	\$70 165	22.70 %

Cuadro 6.26: Comparación entre el sistema de reparto atenuado y el sistema de capitalización individual. **Elaboración:** Autores

En el Cuadro 6.26 se puede observar que, para el sistema de capitalización individual el individuo recibirá en su pensión un 20.82 % más que en el sistema de reparto atenuado; sin embargo, el fondo acumulado durante el periodo de cotización en el sistema de reparto atenuado supera al fondo acumulado del sistema de capitalización individual en un 22.70 %. Esto quiere decir que ha pesar de que, en este caso, el sistema de capitalización individual garantiza una mayor pensión al inicio de la jubilación, su fondo de reserva durará menos tiempo (ver Cuadros 6.12 y 6.17) y, si el individuo llega a vivir más años de lo esperado finalmente se retribuirá al mismo más dinero del que aportó y esto no es beneficiario para el sistema.

Resultados	Mixto	Capitalización individual	Diferencia	Porcentaje
Pensión anual	\$6 486	\$10 895	\$4 409	40.47 %
Fondo Acumulado	\$309 100	\$238 935	\$70 165	22.70 %

Cuadro 6.27: Comparación entre el sistema mixto por etapas y el sistema de capitalización individual. **Elaboración:** Autores

Por otro lado, en el Cuadro 6.27 se aprecia que la pensión del sistema de capitalización es considerablemente más alta que el sistema mixto por etapas, específicamente 40.47 % más, pero el fondo de pensiones del sistema mixto supera en un 22.70 % al fondo obtenido en el sistema de capitalización. Por lo tanto, si se observan los Cuadros 6.17 y 6.22 se puede decir también que las pensiones serán cubiertas durante mucho más tiempo en el sistema mixto por etapas a pesar de tener una menor pensión inicial.

Finalmente, es interesante notar en el Cuadro 6.28 que, a pesar de que el sistema de reparto atenuado y el sistema mixto por partes poseen el mismo fondo

Resultados	Reparto atenuado	Mixto	Diferencia	Porcentaje
Pensión anual	$8 627	$6 486	$2 141	24.82 %
Fondo Acumulado	$309 100	$309 100	$0	0.00 %

Cuadro 6.28: Comparación entre el sistema de reparto atenuado y el sistema mixto por etapas. **Elaboración:** Autores

acumulado de pensiones, la pensión que recibe el individuo en el primer año de jubilación es mayor para el sistema de reparto atenuado en un 24.82 %. No obstante, se destaca también el hecho de que en el sistema mixto por etapas el fondo durará más años debido a que la pensión es menor. Así, en este ejemplo el sistema mixto por etapas muestra una mayor duración de los fondos acumulados, a comparación de los otros dos sistemas, aunque posea una menor pensión inicial.

- ***Comparación del Ejemplo 2:*** Se revisa el caso en el que la edad de inicio de cotizaciones del individuo es 30 años, la edad de jubilación 60 y un salario de $1 200 al iniciar las cotizaciones, en los siguientes cuadros se presentan las diferencias monetarias de las pensiones de jubilación entre los diferentes sistemas de financiamiento.

Resultados	Reparto atenuado	Capitalización individual	Diferencia	Porcentaje
Pensión Anual	$9 008	$8 338	$670	7.44 %
Fondo Acumulado	$264 231	$217 586	$46 645	17.65 %

Cuadro 6.29: Comparación entre el sistema de reparto atenuado y el sistema de capitalización individual. **Elaboración:** Autores

Se puede observar en el Cuadro 6.29 que para el primer año de jubilación el individuo recibirá, en el sistema de reparto, un 7.44 % más de pensión que en el sistema de capitalización individual; también se observa que, el fondo acumulado durante el periodo de cotización en el sistema de reparto atenuado supera al fondo acumulado del sistema de capitalización individual en un 17.75 %. En este caso, el sistema de reparto atenuado garantiza una mayor pensión, mayor acumulación de fondos y, si se examinan los Cuadros 6.13 y6.18 también se puede decir que el fondo del sistema de reparto atenuado también durará mas tiempo.

Resultados	Mixto	Capitalización individual	Diferencia	Porcentaje
Pensión anual	\$4 099	\$8 338	\$4 239	50.84 %
Fondo Acumulado	\$264 231	\$217 586	\$70 165	17.65 %

Cuadro 6.30: Comparación entre el sistema mixto por etapas y el sistema de capitalización individual. **Elaboración:** Autores

Ahora, en el Cuadro 6.30 se aprecia que la pensión del sistema de capitalización es considerablemente más alta que el sistema mixto por etapas, específicamente 50.84 % más; sin embargo, el fondo de pensiones del sistema mixto supera en un 17.65 % al fondo obtenido en el sistema de capitalización. Por lo tanto, las pensiones serán cubiertas durante más tiempo en el sistema mixto por etapas (ver Cuadros 6.18 y 6.23).

Resultados	Reparto atenuado	Mixto	Diferencia	Porcentaje
Pensión anual	\$9 008	\$4 099	\$49 09	54.50 %
f**Fondo Acumulado**	\$264 231	\$264 231	\$0	0.00 %

Cuadro 6.31: Comparación entre el sistema de reparto atenuado y el sistema mixto por etapas. **Elaboración:** Autores

Por último, en el Cuadro 6.31 se visualiza que al igual que el ejemplo anterior, el sistema de reparto atenuado y el sistema mixto por etapas poseen el mismo fondo acumulado de pensiones. Luego, la pensión que recibe el individuo en el primer año de jubilación es mayor en el sistema de reparto atenuado en un 54.50 % pero se destaca también el hecho de que en el sistema mixto por etapas el fondo durará más años debido a que la pensión es menor. Por lo tanto, el sistema mixto por etapas muestra una mayor duración de los fondos acumulados, a comparación de los otros dos sistemas, esto a costa de una menor pensión inicial.

- ***Comparación del Ejemplo 3:*** Se presenta ahora el caso en el que la edad de inicio de cotizaciones del individuo es 50 años, la edad de jubilación 65 y al iniciar las cotizaciones tiene un salario de \$1 500, se presentan en las siguientes tablas las diferencias monetarias de las pensiones de jubilación entre los diferentes sistemas de financiamiento.

Resultados	Reparto atenuado	Capitalización individual	Diferencia	Porcentaje
Pensión Anual	\$8 127	\$5 794	\$2 333	28.71 %
Fondo Acumulado	\$136 776	\$127 070	\$70 165	7.10 %

Cuadro 6.32: Comparación entre el sistema de reparto atenuado y el sistema de capitalización individual. **Elaboración:** Autores

Haciendo referencia al Cuadro 6.32 se observa que en este caso para el sistema de reparto atenuado, el individuo recibirá en su pensión un 28.71 % más que en el sistema de capitalización individual; en cuanto al fondo acumulado durante el periodo de cotización, el sistema de reparto atenuado también supera al fondo acumulado del sistema de capitalización individual en un 7.10 %. Luego, si se presta atención a los Cuadros 6.14 y 6.19 se nota que la diferencia de la duración del fondo acumulado entre los dos sistemas no es significativa pero en este caso, el sistema de reparto atenuado será el sistema con mayor pensión, mayor cantidad de fondos y mayor duración de los mismos.

Resultados	Mixto	Capitalización individual	Diferencia	Porcentaje
Pensión anual	\$3 449	\$5 794	\$2 344	40.46 %
Fondo Acumulado	\$136 776	\$127 070	\$70 165	7.10 %

Cuadro 6.33: Comparación entre el sistema mixto por etapas y el sistema de capitalización individual. **Elaboración:** Autores

Ahora, en el Cuadro 6.33 se aprecia que la pensión del sistema de capitalización es más alta que el sistema mixto por etapas en un 40.46 %. Por otro lado el fondo de pensiones del sistema mixto supera en un 7.10 % al fondo obtenido en el sistema de capitalización; más aún, si se observan los Cuadros 6.19 y6.24, la duración del fondo del sistema mixto por etapas supera con 5 años a la duración del fondo del sistema de capitalización.

Por último, los valores del Cuadro 6.34 muestran que el sistema mixto por partes posee el mismo fondo acumulado de pensiones que el sistema de reparto, la pensión que recibe el individuo en el primer año de jubilación del sistema de reparto atenuado es mayor en un 57.55 % al sistema mixto por etapas. Se

Resultados	Reparto atenuado	Mixto	Diferencia	Porcentaje
Pensión anual	\$8 127	\$3 449	\$4 678	57.56 %
Fondo Acumulado	\$136 776	\$136 776	\$0	0.00 %

Cuadro 6.34: Comparación entre el sistema de reparto atenuado y el sistema mixto por etapas. **Elaboración:** Autores

destaca también el hecho de que en el sistema mixto por etapas el fondo durará más años debido a que la pensión es menor. Por tanto, para este ejemplo el sistema mixto por etapas también presenta una mayor duración de los fondos acumulados, a comparación de los otros dos sistemas y en todos los casos el sistema presenta una menor pensión inicial.

- *Comparación del Ejemplo 4:* Finalmente se tiene el caso en el que la edad de inicio de cotizaciones del individuo es 60 años, la edad de jubilación 70 y al iniciar las cotizaciones tiene un salario de \$1 700, se presentan en las siguientes tablas las diferencias monetarias de las pensiones de jubilación entre los diferentes sistemas de financiamiento.

Resultados	Reparto atenuado	Capitalización individual	Diferencia	Porcentaje
Pensión Anual	\$8 227	\$5 251	\$2 956	35.93 %
Fondo Acumulado	\$96 793	\$94 113	\$2 680	2.77 %

Cuadro 6.35: Comparación entre el sistema de reparto atenuado y el sistema de capitalización individual. **Elaboración:** Autores

De acuerdo al Cuadro 6.35 el individuo recibirá en su pensión un 35.93 % más en el sistema de reparto atenuado que en el sistema de capitalización individual. En cuanto al fondo acumulado durante el periodo de cotización, el sistema de reparto atenuado supera al fondo acumulado del sistema de capitalización individual en un 7.10 %; sin embargo, en los Cuadros 6.15 y 6.20 se puede observar que el fondo acumulado del sistema de capitalización individual dura 5 años más que del sistema de reparto atenuado.

Por otro lado, se aprecia en el Cuadro 6.36 que la pensión del sistema de capitalización es más alta que el sistema mixto por etapas en un 12.34 % mientras que el fondo de pensiones del sistema mixto supera en un 2.77 % al fondo obtenido

Resultados	Mixto	Capitalización individual	Diferencia	Porcentaje
Pensión anual	$4 603	$5 251	$648	12.34 %
Fondo Acumulado	$96 793	$94 113	$2 680	2.77 %

Cuadro 6.36: Comparación entre el sistema mixto por etapas y el sistema de capitalización individual. **Elaboración:** Autores

en el sistema de capitalización. También se tiene que no hay gran diferencia en cuanto al tiempo de duración del fondo acumulado, pues en los Cuadros6.20 y 6.25 se visualiza que el sistema mixto por etapas tiene un año más de duración de sus fondos.

Resultados	Reparto atenuado	Mixto	Diferencia	Porcentaje
Pensión anual	$8 227	$4 603	$4 678	44.05 %
Fondo Acumulado	$96 793	$96 793	$0	0.00 %

Cuadro 6.37: Comparación entre el sistema de reparto atenuado y el sistema mixto por etapas. **Elaboración:** Autores

Para terminar, se observa el Cuadro 6.37 donde el sistema mixto por partes posee el mismo fondo acumulado de pensiones que el sistema de reparto pero la pensión que recibe el individuo en el primer año de jubilación del sistema de reparto atenuado es mayor en un 44.05 % al sistema mixto por etapas. A pesar de ello, dentro de los resultados de los Cuadros 6.15 y 6.25 destaca también el hecho de que en el sistema mixto por etapas el fondo durará 6 años más, esto debido a que la pensión es menor. Por lo tanto, para este ejemplo el sistema mixto por etapas presenta mayor duración de los fondos acumulados a comparación de los otros dos sistemas, en ambos casos a costa de una menor pensión inicial.

6.7. Comparación del Fondo de Reservas

Se supone el caso de un afiliado que desea aportar a la seguridad social en base a qué tanto durarán sus reservas con una pensión fija. Para poder comparar esta situación, deberá calcularse el fondo acumulado de aportaciones que llegará a tener el individuo en cada sistema y luego ir descontando la pensión fijada inicialmente. Así en el Cuadro 6.38 se presentan los resultados:

Reparto atenuado		
Hipótesis del A análisis	**Valores**	
Edad de inicio de las aportaciones (cotizaciones continuas durante toda la vida activa)	25	
Edad de jubilación	65	
Salario mensual a la edad del inicio de las aportaciones	$900	
Tipo de interés	4.00 %	
Incremento anual de los salarios	2.00 %	
Incremento anual de las pensiones	1.50 %	
Primera pensión anual	$8 228	
Resultados	**Fondo**	**Duración**
Reparto atenuado	$309 124	30 años
Capitalización individual	$238 953	24 años
Mixto por etapas	$323 177	34 años

Cuadro 6.38: Comparación de reservas **Elaboración:** Autores

Gráficamente se puede observar este resultado para el caso del sistema mixto por etapas en la Imagen D.2, para los demás sistemas ver el Anexo D. Entonces, se concluye que en este caso el afiliado tendrá una mayor duración de sus fondos en el sistema mixto por etapas, fijando una pensión inicial anual de $8 228 y sus fondos, en este caso, durarán menos en el sistema de capitalización individual.

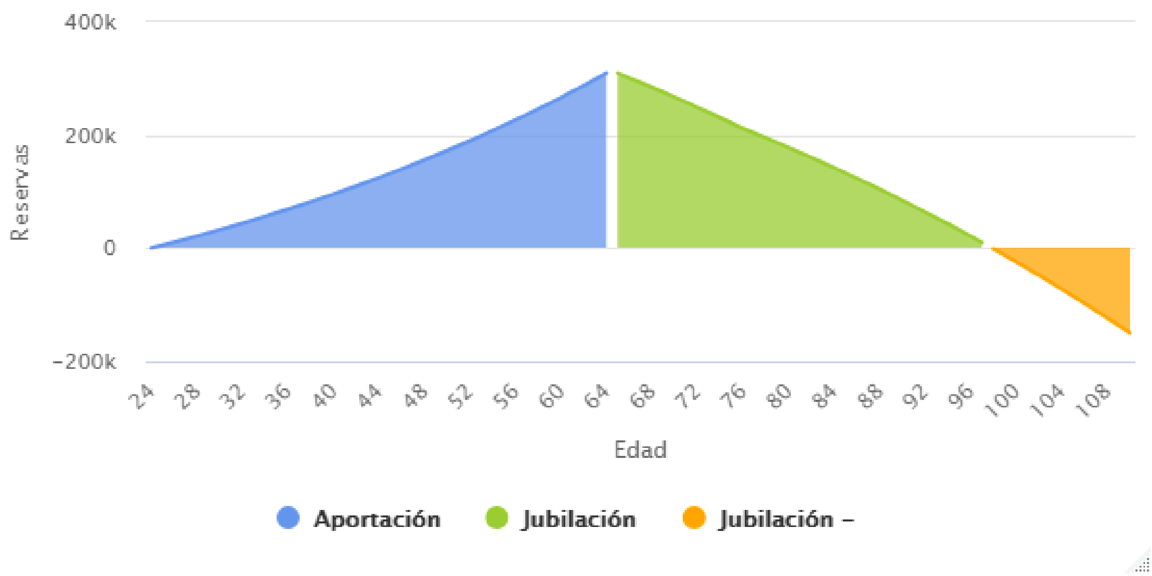


Figura 6.4: Evolución de las reservas del sistema mixto por etapas. **Elaboración:** Autores

Capítulo 7

Conclusiones y Recomendaciones

A lo largo del trabajo se ha demostrado la importancia del conocimiento actuarial en el cálculo de las pensiones de jubilación para el sistema de seguridad social ecuatoriano, pues evidentemente permite establecer los valores adecuados de las cotizaciones y pensiones, asegurando la solvencia y viabilidad del sistema de seguridad social y la pensión de cada uno de los cotizantes.

7.1. Conclusiones

1. A través del aplicativo creado fue posible comparar los tres sistemas de financiación para la seguridad social, brindando un trabajo de referencia con las bases actuariales y financieras necesarias y bajo los parámetros vigentes de la ley de seguridad social. Obteniendo así resultados cuantitativos confiables e importantes para el sistema de pensiones ecuatoriano.

2. Se pueden observar varios casos además de los presentados en los ejemplos del trabajo, si tomamos como referencia el caso en el que la persona inicia sus cotizaciones a los 25 años, con un salario mensual de $900 y desea adquirir su jubilación a los 65 años se pueden identificar algunas diferencias en las pensiones y sus fondos de reserva, dependiendo del sistema tomado como referencia. En cuanto al sistema de reparto atenuado, la duración del fondo de reserva es bastante aceptable (28 años) y la pensión mensual es de $636 en cambio en el sistema de capitalización se obtiene un mayor fondo de reserva pero la pensión inicial es de $811 por lo que el fondo se agota de manera más rápida (19 años); sin embargo, la edad en la que se acaba el fondo supera la esperanza de vida de una persona ecuatoriana (76 años). Para el caso del sistema mixto por

etapas, a pesar de que la duración del fondo de reservas es de 40 años, la pensión mensual del individuo es mucho más baja que en los otros dos sistemas ($470). Este es sólo uno de los casos que se podría presentar en los cotizantes, pues al cambiar los parámetros de los modelos, los pensiones calculadas no tienen un patrón de comportamiento.

3. Se evidencia a lo largo del desarrollo de este proyecto que las bases técnicas financieras y actuariales son necesarias para el cálculo de las pensiones de la seguridad social. Este conocimiento financiero-actuarial fue el que permitió el desarrollo de un aplicativo en el software estadístico RStudio, en el cual, se pueden calcular las pensiones, evolución de las pensiones, fondo de reserva acumulado y evolución del mismo fondo, de manera individual y bajo las normativas ecuatorianas vigentes.

7.2. Recomendaciones

1. Como se observó en el trabajo, las bases de datos utilizadas son fundamentales. Por tanto, es recomendable que el IESS proporcione información anonimizada de la población afiliada y cotizante con cierta periodicidad, todo esto para facilitar el estudio de futuros sistemas de financiamiento adicionales.

2. Es importante tener la información actualizada para que los resultados sean óptimos, por ello se recomienda que se revisen las tasas de cotización actuales de la seguridad social ya que las mismas llevan décadas sin presentar modificación alguna.

3. Es fundamental fortalecer la seguridad social, para esto, se recomienda que la institución financiera que está a cargo establezca áreas especializadas en cálculo actuarial, regulando y actualizando el sistema de pensión que esté en vigencia y permita de esta forma su correcto funcionamiento. Además, es importante crear reformas en materia de seguridad social, con el fin de garantizar el control óptimo y análisis de las deficiencias del sistema de pensiones ecuatoriano.

4. Shiny es una herramienta desarrollada por RStudio, para crear fácilmente aplicaciones web interactivas. Al ser R un software libre, se recomienda totalmente su uso y práctica para elaborar aplicativos web y varios códigos, creando así

paquetes con funciones que permitan evolucionar la programación en materia de matemática financiera y actuarial.

5. Es interesante observar los cambios que se pueden ocasionar en los sistemas de pensiones, debido a las transformaciones demográficas que tiene una población. Por ello, para quienes están interesados en futuros trabajos relacionados con este proyecto, se recomienda que para posibles cálculos se haga uso de las tablas de mortalidad y datos actualizados de los cotizantes de manera que los resultados puedan ajustarse a la realidad ecuatoriana, en especial sería muy sugestivo realizar un análisis exhaustivo donde pueda evidenciarse cómo afectó la pandemia a la población de cotizantes, pensionistas y por tanto al sistema de pensiones ecuatoriano.

6. Para el uso del aplicativo se recomienda ingresar la misma información en todos los sistemas, con el fin de que se pueda comparar y evidenciar los cambios monetarios que se presenten dependiendo del sistema que se escoja, de igual manera interactuar con los parámetros (tasa de cotización, tasa de interés, tasa de crecimiento salarial, tasa de crecimiento de pensiones) y observar como cambia la pensión si se cambian dichos parámetros.

Bibliografía

[1] Principales modelos de protección social y seguridad social. Master's thesis, Biblioteca Jurídica Virtual del Instituto de Investigaciones Jurídicas de la UNAM. Recuperado desde: www.juridicas.unam.mx.

[2] *Registro Oficial No. 525* . Dirección Nacional de Auditoría de Salud y Seguridad Social, 2 2005. Recuperado de Registro Oficial: Órgano de la República del Ecuador, desde: https://www.registroficial.gob.ec/index. php/publicaciones/monthlyarchive/02/2005/limit,15.html.

[3] LEY DE SEGURIDAD SOCIAL ECUADOR. *Registro Oficial Suplemento 465 de 30-nov-2001, Ley 55*, 11 2009. Recuperado desde: https://n9.cl/09bpg.

[4] *Dirección Actuarial, de Investigación y Estadística.* . Boletín Estadístico N. 23, 5 2017. Recuperado desde IESS: https://www.iess.gob.ec/documents/10162/842-1754/BOLETIN+ESTADISTICO+23+2017.pdf?version=1.0.

[5] *Instituto Ecuatoriano de Seguridad Social* . Dirección Nacional de Auditoría de Salud y Seguridad Social, 3 2018. N. DNA7-0036-2018. Contraloría General del Estado.

[6] Apraiz, A. *Fundamentos de Matemáticas Financieras*. Universidad Comercial de Deusto, segunda edición edición, 2003.

[7] Arenas., A. *Los sistemas de pensiones en la encrucijada. Desafíos para la sostenibilidad en América Latina*. Comisión Económica para América Latina y el Caribe (CEPAL), 2019.

[8] Arias, R. Tarificación de seguros de vida y cálculo de reservas matemáticas bajo la normativa ecuatoriana. Master's thesis, Escuela Politécnica Nacional, Ecuador, Quito, 2020.

[9] Ayres, F. *Matemáticas Financieras* . Schaum, 1997.

[10] Boccardo, G. y Ruiz, F. Rstudio para estadística descriptiva en ciencias sociales. manual de apoyo docente para la asignatura estadística descriptiva. Master's thesis, Universidad de Chile, Chile, 2019.

[11] Bresani, C., Burns, A., Escalante, P., y Medros, G. *Matemática Financiera: Teoría y Ejercicios*. UNIVERSIDAD DE LIMA, 2018.

[12] Celis, K. El envejecimiento y el sistema general de pensiones del ecuador. Master's thesis, Universidad de Chile, Chile, Santiago de Chile, 2015.

[13] Conde, I. y Gonzales, C. Modelo de pensiones europeo: ¿bismarck o beveridge? Master's thesis, Fedea y Universidad Complutense de Madrid, 2018.

[14] Contreras, M., A. Análisis de la sostenibilidad del sistema de pensiones ecuatoriano, periodo 2013-2025. *Papeles de población, ISSN 2448-7147*, 24:29–62, 2018. Recuperado desde:.

[15] de Bancos, S. *Resolución de la Junta Bancaria del Ecuador*. Resolución JB-2010-1802, 2015. Recuperado desde: https://n9.cl/s619.

[16] de Seguridad Social Organización Internacional del Trabajo, D. *Seguridad social para todos. Una inversión en la justicia social y en el desarrollo económico* . Campaña Mundial sobre Seguridad Social y Cobertura para Todos), 2009.

[17] Debón, A. y Sala, R. TABLAS DINÁMICAS DE MORTALIDAD Y SUPERVIVENCIA. *Revista Electrónica de Comunicaciones y Trabajos de ASEPUMA*, 1 2001. Recuperado desde: https://n9.cl/4dhkn.

[18] Devesa, J., Martínez, M., Vidal, y C. Análisis y valoración de los sistemas de pensiones reformador en latinoamérica. Master's thesis, Universidad de Valencia, España, Valencia, 2000.

[19] Dominguez, F., Del Olmo, F., y Herce, J. Reinventando la seguridad social. hacia un sistema mixto de pensiones "por etapas". Master's thesis, Universidad de Alcalá, España, Madrid, 2017.

[20] Dominguez, F., García, F., O., y Herce, J. Reinventando la Seguridad Social hacia un sistema mixto de pensiones "por etapas". *Documentos de Trabajo (IAES, Instituto Universitario de Análisis Económico y Social), ISSN-e 2172-7856*, 6, 2017.

[21] Ensignia, J. Desarrollo y Crisis del Sudeste Asiático, El debate sobre la seguridad social en América Latina y la posición del sindicalismo. *Revista Desarrollo y Sociedad, 41*, 2:54–64, 1998.

[22] Escorza, E. La actual ley de seguridad social y el derecho constitucional a la seguridad social. Master's thesis, Universidad Andina "Simón Bolivar", Ecuador, Quito, 2006.

[23] Fernandez, A. *Tablas de mortalidad dinámicas con hoja de cálculo en la práctica actuarial*. Universidad de Málaga, 2016.

[24] Gil, J., A., Heras, A., y Vilar-Zanón, J., L. *Matemática de los seguros de vida*. 1998.

[25] Henriquez, R. EL SISTEMA DE CAPITALIZACIÓN COLECTIVA COMO UNA ALTERNATIVA VIABLE PARA LOS CAMBIOS QUE REQUIERE EL SISTEMA PREVISIONAL CHILENO. *TS Cuadernos de Trabajo Social, 14*, 2014.

[26] Hernandez, D. LOS SISTEMAS DE REPARTO PURO Y DE CAPITALIZACIÓN INDIVIDUAL COMO BASE DE LA PRESTACIÓN DE JUBILACIÓN CONTRIBUTIVA . *Economía Española y Protección Social, I*, 2009.

[27] Holzmann, R. Sistemas de pensiones en el mundo y sus reformas: factores, tendencias y desafíos mundiales. *Revista Internacional de Seguridad Social, 66*, 2, 2013. Recuperado desde: https://afly.co/lqn3.

[28] Huaraca, D. Análisis y Tratamiento de datos con R, con ejemplos e ilustraciones. *MS-PLUS, Primera Edición*, pág. 7–11.

[29] IESS. Recuperado desde: https://www.iess.gob.ec/es/web/guest/jubilacion-ordinaria-vejez.

[30] IESS. Recuperado desde: https://www.iess.gob.ec/documents/10162/b091bc01-07c8-4b18-a827-333e60074424.

[31] IESS. *INSTITUTO ECUATORIANO DE SEGURIDAD SOCIAL CONSEJO DIRECTIVO-IESS, RESOLUCIÓN No. C.D. 554*, 2017. Recuperado desde: https://n9.cl/aj4cy.

[32] IESS. *Instituto Ecuatoriano de Seguridad Social* . Jubilación ordinaria vejez, 2020. Recuperado el 28 de Julio de 2020 de https://www.iess.gob.ec/es/web/guest/jubi-lacion-ordinaria-vejez.

[33] INEC. *Conceptos y Definiciones*. Contraloría General del Estado, 2020. Recuperado desde: https://www.inec.gob.pa/archivos/P5881Conceptos %20y %20Definiciones.pdf.

[34] Instituto Ecuatoriano de Seguridad Social, I. Valuación Actuarial del Seguro de Invalidez, Vejez y Muerte del Seguro General Obligatorio. *Dirección Actuarial, de Investigación y Estadística*, 6 2019. Recuperado desde: https://n9.cl/4dhkn.

[35] Morales, M., A. Los procesos de reformas y modificaciones a los sistemas de capitalización individual en América Latina. *Revista latinoamericana de derecho social*, 2015. Recuperado desde: https://afly.co/lqv3.

[36] Navarro, E. y Nave, J., M. *Fundamentos de Matemáticas Financieras* . Antonio Bosch, España, Barcelona, 2001.

[37] OIT. Normas internacionales del trabajo, seguridad social y pensiones. *OIT Notas. Seguridad Social y Reforma del Sistema de Pensiones en Chile, 2*, 2006.

[38] Porras, A. La seguridad social en Ecuador: un necesario cambio de paradigmas. *Revista de Derecho, II Semestre*, 24, 2015. Recuperado desde: https://afly.co/lmy3.

[39] Rabinovich, J. *Introducción a la Ecología de Poblaciones Animales*. UNIVERSIDAD DE LIMA, 1980.

[40] Ramos, A. Viabilidad Financiera y Reformas de los Sistemas de Pensiones en la Unión Europea. *Revista de Estudios Empresariales, Segunda época*, 2:29–56, 2011. Recuperado desde: https://afly.co/lms3.

[41] Ramírez, C., García, M., Pantoja, C., y Zambrano, A. *Fundamentos de Matemáticas Financieras*. UNIVERSIDAD LIBRE SEDE CARTAGENA - CENTRO DE INVESTIGACIONES, 2009.

[42] Rivera, C. Elementos de cálculo actuarial con r. Master's thesis, Universidad Autónoma del Estado de México, México, Estado de México, 2018.

[43] Rivera, F. Modelos de sistemas de pensiones en el mundo. *Serie Minutas, Nº 18-20*, 2020.

[44] Ruiz, M., E. Análisis del sistema español de pensiones. evolución hacia un modelo europeo de pensiones único y viabilidad del mismo. Master's thesis, Universidad de Barcelona, España, Barcelona, 2006.

[45] Sandoya, M. *Matemáticas Actuariales y Operaciones de Seguros*. ESPOL, segunda edición edición, 2007.

[46] Santana, J. y Farfán, E. *El arte de programar en R: un lenguaje para la estadística* . Primera edición edición, 11 2014.

[47] Turner, A. La Demografía Desde el Ángulo Económico, Los retos de las pensiones de la tercera edad. *Finanzas y Desarrollo, 43*, 3:36–39, 2006. Recuperado desde: https://afly.co/lms3.

[48] Uthoff, A. Aspectos institucionales de los sistemas de pensiones en América Latina. *Serie Políticas Sociales, ISSN 1564-4162*, 221, 2016.

[49] Vidal, C. y Devesa, E. Técnicas de la seguridad social. Master's thesis, Universidad de Valencia, España, Valencia, 2005.

[50] Ycaza, P. Sostenibilidad del sistema de pensiones de jubilación del instituto ecuatoriano de seguridad social (iess) y las alternativas exitosas aplicadas en amÉrica latina. Master's thesis, Universidad de Especialidades Espíritu Santo, Ecuador, Sanborondón, 2013.

ANEXOS

Anexo A

Tabla de Kolmogorov-Smirnov sobre Bondad de Ajuste

Nivel de Significancia α

n	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01	0.005	0.002	0.001
1	0.90000	0.95000	0.97500	0.99000	0.99500	0.99750	0.99900	0.99950
2	0.68337	0.77639	0.84189	0.90000	0.92929	0.95000	0.96838	0.97764
3	0.56481	0.63604	0.70760	0.70000	8456	0.82900	0.86428	0.90000
4	0.49265	0.56522	0.62394	0.68887	0.73424	0.77639	0.82217	0.85047
5	0.44698	0.50945	0.56328	0.62718	0.66853	0.70543	0.75000	0.78137
6	0.41037	0.46799	0.51926	0.5774	0.61661	0.65287	0.69571	0.72479
7	0.38148	0.43607	0.48342	0.53844	0.57581	0.60975	0.65071	0.67930
8	0.35831	0.40962	0.45427	0.50654	0.54179	0.57429	0.61368	0.64098
9	0.33910	0.38746	0.43001	0.47960	0.51332	0.54443	0.58210	0.60846
10	0.32260	0.36866	0.40925	0.45562	0.48893	0.51872	0.55500	0.58042
11	0.30829	0.35242	0.39122	0.43670	0.46770	0.49539	0.53135	0-55588
12	0.29577	0.33815	0.37543	0.41918	0.44905	0.47672	0.51047	0.53422
13	0.28470	0.32549	0.36143	0.40362	0.43247	0.45921	0.49189	0.51490
14	0.27481	0.31417	0.34890	0.38970	0.41762	0.44352	0.47520	0.49753
15	0.26589	0.30397	0.33750	0.37713	0.40420	0.42934	0.45611	0.48182
16	0.25778	0.29472	0.32733	0.36571	0.39201	0.41644	0.44637	0.46750
17	0.25039	0.28627	0.31796	0.35528	0.38086	0.40464	0.43380	0.45540
18	0.24360	0.27851	0.30936	0.34569	0.37062	0.39380	0.42224	0.44234
19	0.23735	0.27136	0..30143	0.33685	0.36117	0.38379	0.41156	0.43119

20	0.23156	0.26473	0.29408	0.32866	0.35241	0.37451	0.40165	0.42085
21	0.22517	0.25858	0.28724	0.32104	0.34426	0.36588	0.39243	0.41122
22	0.221I5	0.25283	0.28087	0.31394	0.33666	0.35782	0.38382	0.40223
23	0.21646	0.24746	0.2749tl	0.30728	0.32954	0.35027	0.37575	0.39380
24	0.21205	0.24242	0.26931	0.30104	0.32286	0.34318	0.36787	0.38588
25	0.20790	0.23768	0.26404	0.29518	0.31657	0.33651	0.36104	0.37743
26	0.20399	0.23320	0.25908	0.28962	0.30963	0.33022	0.35431	0.37139
27	0.20030	0.22898	0.25438	0.28438	0.30502	0.32425	0.34794	0.36473
28	0.19680	0.22497	0.24993	0.27942	0.29971	0.31862	0.34190	0.35842
29	0.19348	0.22117	0.24571	0.27471	0.29466	0.31327	0.33617	0.35242
30	0.19032	0.21756	0.24170	0.27023	0.28986	0.30818	0.33072	0.34672
31	0.18732	0.21412	0.23788	0.26596	0.28529	0.30333	0.32553	0.34129
32	0.18445	0.21085	0.23424	0.26189	0.28094	0.29870	0.32058	0.33611
33	0.18171	0.20771	0.23076	0.25801	0.27577	0.29428	0.31584	0.33115
34	0.17909	0.21472	0.22743	0.25429	0.27271	0.29005	0.31131	0.32641
35	0.17659	0.20185	0.22425	0.25073	0.26897	0.28600	0.30597	0.32187
36	0.17418	0.19910	0.22119	0.24732	0.26532	0.28211	0.30281	0.31751
37	0.17188	0.19646	0.21826	0.24404	0.26180	0.27838	0.29882	0.31333
38	0.16966	0.19392	0.21544	0.24089	0.25843	0.27483	0.29498	0.30931
39	0.16753	0.19148	0.21273	0.23785	0.25518	0.27135	0.29125	0.30544
40	0.16547	0.18913	0.21012	0.23494	0.25205	0.26803	0.28772	0.30171
41	0.16349	0.18687	0.20760	0.23213	0.24904	0.26482	0.28429	0.29811
42	0.16158	0.18468	0.20517	0.22941	0.24613	0.26173	0.28097	0.29465
43	0.15974	0.18257	0.20283	0.22679	0.24332	0.25875	0.27778	0.29130
44	0.15795	0.18051	0.20056	0.22426	0.24060	0.25587	0.27468	0.28806
45	0.15623	0.17856	0.19837	0.22181	0.23798	0.25308	0.27169	0.28493
46	0.15457	0.17665	0.19625	0.21944	0.23544	0.25038	0.26880	0.28190
47	0.15295	0.17481	0.19420	0.21715	0.23298	0.24776	0.26600	0.27896
48	0.15139	0.17301	0.19221	0.21493	0.23059	0.24523	0.26328	0.27611
49	0.14987	0.17128	0.19028	0.21281	0.22832	0.24281	0.26069	0.27339
50	0.14840	0.16959	0.18841	0.21068	0.22604	0.24039	0.25809	0.27067
n>50	$\frac{1.07}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.22}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.36}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.52}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.63}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.73}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.85}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.95}{\sqrt{n}}$

Anexo B

Código de implementación para el cálculo de tasas de cotización y valores actuales del sistema de reparto atenuado

```
##### VARIABLES Y PARAMETROS
Cotizantes<-Base_Cotizantes %>% filter(ANIO==2019) %>% as.data.
   frame()
px<-TM %>% filter(x>=50) %>% select(px)
beta<-0.85
SalarioBasico<-400
ProporcionSalario<-(Cotizantes$SALARIO_PROM
/SalarioBasico)
Tsalarios<-ProporcionSalario*Cotizantes$COTIZANTES
WF<-sum(Tsalarios)/sum(Cotizantes$COTIZANTES)
lx<-Cotizantes  %>% filter(EDAD==64) %>% select(COTIZANTES)


##### FUNCION
REPARTO_ATENUADO<-function(WF,Tsal,l_x,p_x,beta,interes,h,s1,s2){

    m<-matrix(0,nrow = h,ncol = h)
    for (i in 2:h) {
        for (j in 2:h) {
            if(i<=j){
                m[1,1]=l_x$COTIZANTES*p_x$px[1]
                m[i-1,j]=m[i-1,j-1]
                m[i,j]=m[i-1,j]*p_x$px[i]
```

```
            }
            else{
                m[i,j-1]=0
            }
        }
    }
    m<-data.frame(m)
    pensiones<-beta*WF*colSums(m)

    v=1/(1+interes)
    prestaciones=0
    for(k in s1:s2){
        prestaciones[k]<-pensiones[k]*v^(k-1/2)
    }
    prestacionesVA<-prestaciones[s1:s2]
    vaprestaciones<-sum(prestacionesVA)

    Wxklxk<-sum(Tsal)
    cotizaciones=0
    for(k in s1:s2){
        cotizaciones[k]<-Wxklxk*v^(k-1/2)
    }
    cotizacionesVA<-cotizaciones[s1:s2]
    vacotizaciones<-sum(cotizacionesVA)
    tasaCotizacion<-vaprestaciones/vacotizaciones

    return(list(vaprestaciones,vacotizaciones,tasaCotizacion,
       pensiones,prestacionesVA,cotizacionesVA))
}


T1<-REPARTO_ATENUADO(WF,Tsalarios,lx,px,beta,0.04,40,1,10)
T2<-REPARTO_ATENUADO(WF,Tsalarios,lx,px,beta,0.04,40,11,20)
T3<-REPARTO_ATENUADO(WF,Tsalarios,lx,px,beta,0.04,40,21,30)
T4<-REPARTO_ATENUADO(WF,Tsalarios,lx,px,beta,0.04,40,31,40)
```

Anexo C

Código de implementación para el cálculo de pensiones de los sistemas de financiamiento

global.R

```
########################### CARGAR LIBRERIAS

library(shiny)
library(shinythemes)
library(shinydashboard)
library(readxl)
library(tidyverse)
library(magrittr)
library(ggpubr)
library(ggplot2)
library(stats)
library(foreign)
library(RCurl)
library(lifecontingencies)
library(data.table)
library(highcharter)
library(FinancialMath)

########################### LECTURA DE BASES DE DATOS

### DATOS COTIZANTES
```

```
vars <- c("ANIO", "SECTOR", "SEXO", "EDAD", "NUMERO", "SALARIO_
    PROMEDIO")

info <- rbindlist(list(
  setDT(read_xlsx("Base/Base_Cotizantes.xlsx", sheet = "2015"))[,
      vars, with=FALSE],
  setDT(read_xlsx("Base/Base_Cotizantes.xlsx", sheet = "2016"))[,
      vars, with=FALSE],
  setDT(read_xlsx("Base/Base_Cotizantes.xlsx", sheet = "2017"))[,
      vars, with=FALSE],
  setDT(read_xlsx("Base/Base_Cotizantes.xlsx", sheet = "2018"))[,
      vars, with=FALSE],
  setDT(read_xlsx("Base/Base_Cotizantes.xlsx", sheet = "2019"))[,
      vars, with=FALSE]
))

info <- info[SECTOR %in% c("PRI", "PUB", "VOL", "PRI-VOL", "PUB-PRI
    ", "PUB-VOL", "PUB-PRI-VOL")]
info <- info[SALARIO_PROMEDIO > 0 & EDAD >= 18 & EDAD <=65]
## DATOS PONDERADOS GENERAL
Base_Cotizantes <- info %>% group_by(ANIO, EDAD) %>%
  summarise_at(vars(SALARIO_PROMEDIO),
               funs(SALARIO_PROM = weighted.mean(SALARIO_PROMEDIO,
                   NUMERO),
                    COTIZANTES = sum(NUMERO))) %>% setDT(.)

### TABLAS DE MORTALIDAD HOMBRES Y MUJERES

probs <- unname(unlist(read_excel("Base/Tablas_Mortalidad.xlsx",
    sheet = "MORT")[,c(2)]))
TM0 <- probs2lifetable(probs, radix =100000, type= "qx", name="
    Mortalidad")
TM <- as(TM0,"data.frame")


################################## FUNCIONES

############################## REPARTO ATENUADO

PENSION_RA<-function(TCot,Edad0, EdadJ, Num_Apor,Salario, interes,
    alfa, TasaSust, Anios_BR){
```

```r
  interes1<-(1+interes)^(1/12)-1
  v<-(1+interes1)
  WF<-(Salario)

  WF_A<-0
  B_Reg<-0
  for (i in 1:12) {
    WF_A<-WF_A+WF*v^(i/12)+(400+WF)*axn(TMO, x=EdadJ, n=1, i=
        interes, payment = "due")
  }

  ve<-c(0:(EdadJ-Edad0-1))
  for (i in 1:(EdadJ-Edad0)) {
    B_Reg[i]<-WF_A*TCot*(1+alfa)^(ve[i])
  }

  Base_10<-mean(B_Reg[(EdadJ-Edad0-Anios_BR+1):(EdadJ-Edad0)])
  Pen<-TasaSust*Base_10

  den<-12*axn(TMO, x=EdadJ, n=1, i= interes1, k=12, payment = "due"
     )+axn(TMO, x=EdadJ, n=1, i= interes, payment = "due")
  num<-Pen-400*axn(TMO, x=EdadJ, n=1, i= interes, payment = "due")
  Pen_men<-num/den
  flujo<-cumsum(B_Reg)
  return(list(round(Base_10,2),round(Pen,2),round(flujo[length(
     flujo)],2),round(Pen_men,2),round(B_Reg,2)))
}


############ RESERVAS

RESERVAS_RAI<-function(flujo_A,pension,EdadJ,beta){
  flujo<-cumsum(flujo_A)
  flujo_P<-0
  for (i in 1:(110-EdadJ)) {
    flujo_P[i]<-pension*(1+beta)^(i-1)
  }
  flujo_P1<-cumsum(flujo_P)
  reserva_F<-0
  for (i in 1:(110-EdadJ)) {
    reserva_F[i]<-flujo[length(flujo)]-flujo_P1[i]
  }

  return(list(flujo[length(flujo)],round(flujo,2),round(reserva_F
```

```
    ,2),round(flujo_P,2)))
}


######## GRAFICOS DE RESERVAS

RESERVA_GRAF_AP<-function(xdata,ydata){

  base<-data.frame(cbind(xdata,ydata))
  names(base)[1]<-"X"
  names(base)[2]<-"Y"

  graf.linea<-ggplot(base, aes(x=X, y=Y,group=1))+geom_line()
  graf.linea1<-graf.linea + geom_line(colour="red") +
    labs(x="Periodo de Aportacion (anos)", y="Reserva")+
    geom_point(colour="darkorange2",size=3)+
    scale_y_continuous(labels=scales::number)
  return(graf.linea1)
}

RESERVA_GRAF_JUB<-function(xdata,ydata){

  base<-data.frame(cbind(xdata,ydata))
  names(base)[1]<-"X"
  names(base)[2]<-"Y"

  graf.linea<-ggplot(base, aes(x=X, y=Y,group=1))+geom_line()
  graf.linea1<-graf.linea + geom_line(colour="red") +
    labs(x="Periodo de Jubilacion (anos)", y="Reserva")+
    geom_point(colour="darkorange2",size=3)+
    scale_y_continuous(labels=scales::number)
  return(graf.linea1)
}


############################## SISTEMA CAPITALIZACION

PENSION_CI<-function(salario,edad,edadJub,NumCot,tasaC,interes,alfa
   ,beta){
  interes1<-(1+interes)^(1/12)-1
  v<-(1+interes1)
  sal<-0
  for (i in 1:12) {
    sal<-sal+salario*v^(i/12)+(400+salario)*axn(TM0, x=edadJub, n
```

```
      =1, i= interes, payment = "due")
  }
  ap<-tasaC*sal
  aporte<-salario*tasaC
  tipo1<-((1+interes)/(1+alfa))-1
  tipo11<-(1+tipo1)^(1/12)-1
  tipo2<- ((1+interes)/(1+beta))-1
  tipo21<-(1+tipo2)^(1/12)-1
  interes1<-(1+interes)^(1/12)-1

  AP<-0
  ve<-c(0:(edadJub-edad-1))
  for (i in 1:(edadJub-edad)) {
    AP[i]<-ap*(1+alfa)^(ve[i])
  }

  primas<-ap*12*axn(TM0, x=edad, n=edadJub-edad, i= tipo11,k=12,
     payment = "due")
  rentas<-12*axn(TM0, x=edadJub,n=110-edadJub, i=tipo21,k=12,
     payment = "due")*Exn(TM0,x=edad,n=edadJub-edad,i =interes1)
  pension<-primas/rentas

  den<-12*axn(TM0, x=edadJub, n=1, i= interes1, k=12, payment = "
     due")+axn(TM0, x=edadJub, n=1, i= interes, payment = "due")
  num<-pension-400*axn(TM0, x=edadJub, n=1, i= interes, payment = "
     due")
  Pen_men<-num/den

  return(list(round(aporte,2),round(pension,2),round(Pen_men,2),ap,
     round(AP,2)))
}


############ RESERVAS

RESERVAS_CI<-function(ap,pension,edad,edadJub,interes,alfa,beta,A_
   limite){

  tipo1<-((1+interes)/(1+alfa))-1
  tipo11<-(1+tipo1)^(1/12)-1
  tipo2<- ((1+interes)/(1+beta))-1
  tipo21<-(1+tipo2)^(1/12)-1
  interes1<-(1+interes)^(1/12)-1
```

```
  t=1
  vr_p<-0
  vr_r<-0
  edad<-c(edad:(edadJub-1))
  for (j in 1:(edadJub-edad)) {
    vr_p[j]<-12*axn(TM0, x=edad[j]+t, n=edadJub-edad[j]-t, i=
       tipo11, k=12, payment = "due")
    vr_r[j]<-axn(TM0, x=edadJub,n=110-edadJub,k=12, i=tipo21,
       payment = "due")*Exn(TM0,x=edad[j]+t,n=edadJub-edad[j]-t,i =
       interes1)
  }
  flujo_ap<-pension*vr_r-ap*vr_p
  val_ap<-ap*vr_p

  flujo_P<-0
  for (i in 1:(A_limite-edadJub)) {
    flujo_P[i]<-pension*(1+beta)^(i-1)
  }
  flujo_P1<-cumsum(flujo_P)

  reserva_F<-0
  for (i in 1:(A_limite-edadJub)) {
    reserva_F[i]<-flujo_ap[length(flujo_ap)]-flujo_P1[i]
  }

  return(list(round(flujo_ap[length(flujo_ap)],2),round(flujo_ap,2)
     , round(c(flujo_ap[length(flujo_ap)],reserva_F),2),round(flujo
     _P,2),round(val_ap,2)))
}


############################## SISTEMA MIXTO

PENSION_MIXTOCI<-function(salario,edad,GranEdad,edadJub,NumCot,
    tasaC1,tasaC2,interes,alfa,beta){
  interes1<-(1+interes)^(1/12)-1
  v<-(1+interes1)
  sal<-0
  for (i in 1:12) {
    sal<-sal+salario*v^(i/12)+(400+salario)*axn(TM0, x=edadJub, n
       =1, i= interes, payment = "due")
  }
```

```
  tasaC<-tasaC1-tasaC2
  aporte<-tasaC*sal
  ap<-tasaC*salario
  tipo1<-((1+interes)/(1+alfa))-1
  tipo11<-(1+tipo1)^(1/12)-1
  tipo2<- ((1+interes)/(1+beta))-1
  tipo21<-(1+tipo2)^(1/12)-1

  ve<-c(0:(edadJub-edad-1))
  flujo_Ap<-0
  for (i in 1:(edadJub-edad)) {
    flujo_Ap[i]<-sal*tasaC*(1+alfa)^(ve[i])
  }

  primas<-aporte*12*axn(TM0, x=edad, n=edadJub-edad, i= tipo11, k
     =12, payment = "due")
  rentas<-12*axn(TM0, x=edadJub,n=GranEdad-edadJub, i=tipo21, k=12,
     payment = "due")*Exn(TM0,x=edad,n=edadJub-edad,i =interes1)
  pen<-primas/rentas
  pen_cap<-round(pen,2)
  ap_cap<-round(aporte,2)

  den<-12*axn(TM0, x=edadJub, n=1, i= interes1, k=12, payment = "
     due")+axn(TM0, x=edadJub, n=1, i= interes, payment = "due")
  num<-pen_cap-400*axn(TM0, x=edadJub, n=1, i= interes, payment = "
     due")
  Pen_men<-num/den

  return(list(round(flujo_Ap,2),round(pen_cap,2),round(Pen_men,2),
     round(ap_cap,2)))
}


PENSION_MIXTORA<-function(TCot,Edad0, EdadJ, Num_Apor,Salario,
   interes, alfa, TasaSust){

  interes1<-(1+interes)^(1/12)-1
  v<-(1+interes1)
  WF<-(Salario)

  WF_A<-0
  B_Reg<-0
  for (i in 1:12) {
    WF_A<-WF_A+WF*v^(i/12)+(400+WF)*axn(TM0, x=EdadJ, n=1, i=
```

```
        interes, payment = "due")
  }
  ve<-c(0:(EdadJ-Edad0-1))
  for (i in 1:(EdadJ-Edad0)) {
    B_Reg[i]<-WF_A*TCot*(1+alfa)^(ve[i])
  }
  Base_10<-mean(B_Reg[(EdadJ-Edad0-10+1):(EdadJ-Edad0)])
  Pen<-TasaSust*Base_10

  den<-12*axn(TM0, x=EdadJ, n=1, i= interes1, k=12, payment = "due"
     )+axn(TM0, x=EdadJ, n=1, i= interes, payment = "due")
  num<-Pen-400*axn(TM0, x=EdadJ, n=1, i= interes, payment = "due")
  Pen_men<-num/den

  return(list(round(Base_10,2),round(Pen,2),B_Reg,round(Pen_men,2))
     )
}

############ RESERVAS

RESERVA_MIXTO<-function(ap_ci,ap_rep,pen_ci,pen_ra,GranEdad,edadJub
   ,beta){
  flujo_APM<-ap_ci+ap_rep
  fondoM<-cumsum(flujo_APM)

  flujo_PCI<-0
  for (i in 1:(GranEdad-edadJub)) {
    flujo_PCI[i]<-pen_ci*(1+beta)^(i-1)
  }
  flujo_PRA<-0
  for (i in 1:(110-GranEdad)) {
    flujo_PRA[i]<-pen_ra*(1+beta)^(i-1)
  }

  flujo_P<-c(flujo_PCI,flujo_PRA)
  flujo_P1<-cumsum(flujo_P)
  reserva_F<-0
  for (i in 1:(110-edadJub)) {
    reserva_F[i]<-fondoM[length(fondoM)]-flujo_P1[i]
  }

  return(list(round(fondoM[length(fondoM)],2),round(fondoM,2),round
     (flujo_P1,2),round(c(fondoM[length(fondoM)],reserva_F),2),
     round(flujo_P,2),round(flujo_APM,2)))
```

```
}


###################### TASA DE RENDIMIENTO

FUN_TIR<-function(T_mort,Edad0,EdadJ,Tipo_cot,cotizaciones,
    pensiones){
  px_tir<-T_mort[(Edad0+1):EdadJ]
  TIR1<-cotizaciones*px_tir*Tipo_cot
  TIR2<- -T_mort[(EdadJ+1):length(T_mort)]*pensiones
  V_TIR<-c(TIR1,TIR2)
  TIR<-IRR(0,V_TIR,c(1:length(V_TIR)))*100

  return(round(TIR[[1]],2))
}
```

Anexo D

Gráficos de la evolución de las reservas

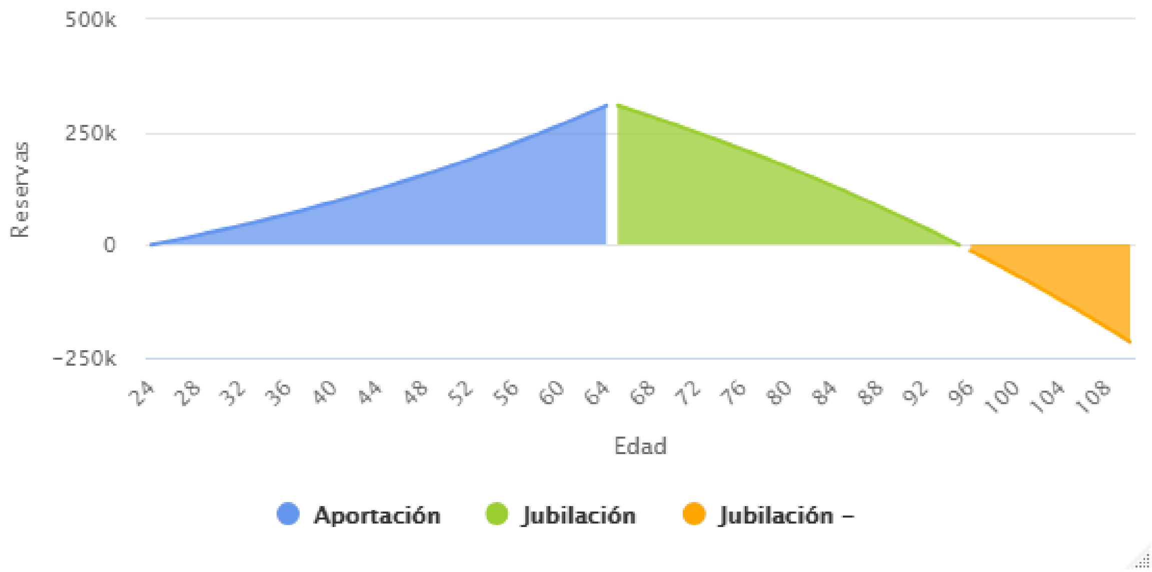


Figura D.1: Evolución de las reservas del sistema de reparto atenuado. **Elaboración:** Autores

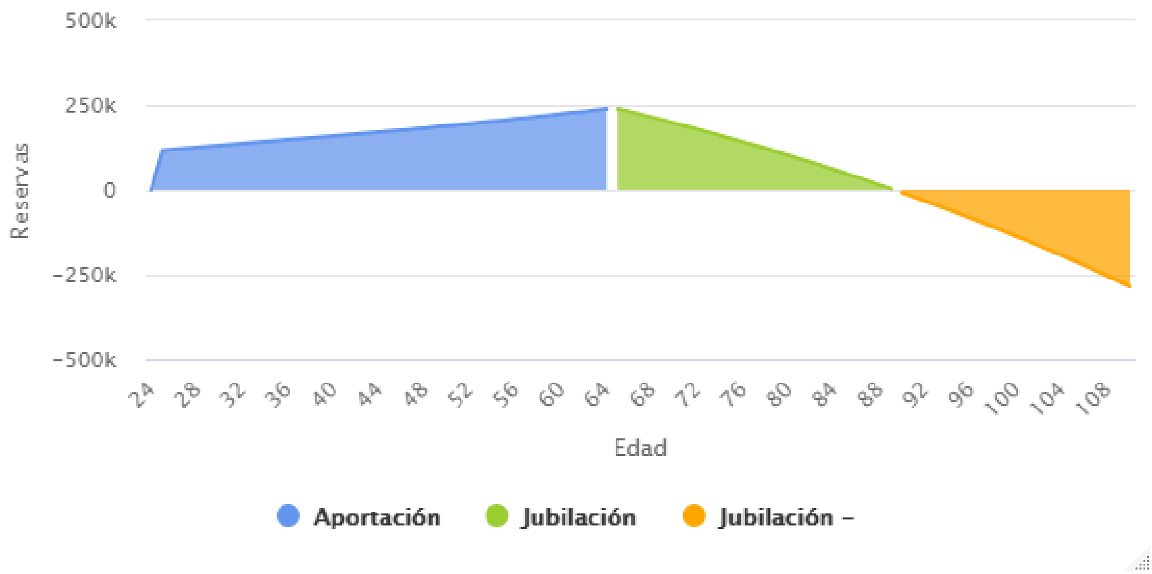


Figura D.2: Evolución de las reservas del sistema de capitalización individual. **Elaboración:** Autores