

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS

EL FLUJO RG-2, COTAS PARA LOS ESCALARES DE CURVATURA

TRABAJO DE TITULACIÓN PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE
INGENIERO MATEMÁTICO

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

BORIS XAVIER BERMÚDEZ CÁRDENAS
b-x-91@hotmail.com

Director: OSCAR LASSO, PH.D.
oscar.lasso@udla.edu.ec

Codirector: MIGUEL YANGARI, PH.D.
miguel.yangari@epn.edu.ec

QUITO, JUNIO DE 2021

DECLARACIÓN

Yo BORIS XAVIER BERMÚDEZ CÁRDENAS, declaro bajo juramento que el trabajo aquí escrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

A través de la presente declaración cedo mis derechos de propiedad intelectual, correspondientes a este trabajo, a la Escuela Politécnica Nacional, según lo establecido por la Ley de Propiedad Intelectual, por su reglamento y por la normatividad institucional vigente.

Boris Xavier Bermúdez Cárdenas

CERTIFICACIÓN

Certificamos que el presente trabajo fue desarrollado por BORIS XAVIER BERMÚDEZ CÁRDENAS, bajo nuestra supervisión.

Oscar Lasso, Ph.D.
Director del Proyecto

Miguel Yangari, Ph.D.
Codirector del Proyecto

AGRADECIMIENTOS

A Dios, por que él es quien hace todo posible.

A Oscar Lasso, por guiar cada etapa de este proyecto, y sobre todo, por brindarme su amistad y la oportunidad de investigar el increíble mundo de la física-matemática.

A Miguel García, por guiar adecuadamente mi aprendizaje de geometría diferencial y teoría de Yang-Mills, sin su valiosa colaboración no hubiese podido culminar este proyecto.

A mi madre, Ximena, por su constante ejemplo, apoyo y amor, por permitirme iniciar una carrera científica y sostenerme a lo largo de esta.

A mi amada novia, Ingrid, por llenar mis días con su amor y sacar lo mejor de mí en cada instante.

A mis tíos, Gandy y Tere, por ser un respaldo infalible, especialmente en las dificultades.

A mi hermano y mi padre, por su amor y constante compañía.

A mis amigos de la EPN, especialmente Paúl, Sebastián y Will, por compartir conmigo las alegrías y angustias de estudiar matemática.

A mis profesores, quienes me brindaron la mejor formación posible. Especialmente a Fernando Cortez por sus grandes consejos y enseñanzas fuera de clases, a Miguel Yangari por su disposición para ayudarme siempre en cualquiera de mis dudas a lo largo de la carrera, a Marco Calahorrano por esas lecciones impartidas a través de sus anécdotas, a David Pazmiño por alentar a sus alumnos a adentrarse en ramas de la matemática poco conocidas en nuestra facultad, y a Nicolás Vásquez por permitirme explorar libremente los detalles matemáticos de la física de frontera en su curso de métodos matemáticos para la física.

Finalmente, y no menos importante, a los grandes matemáticos y físicos que me inspiran: Michael Atiyah, Simon Donaldson, Richard Hamilton, Karen Uhlenbeck, Richard Feynman, David Gross y Frank Wilczek.

DEDICATORIA

A la memoria de Jaime Cárdenas y Olguita Yandún, amados padres y abuelitos.

Índice general

1. Introducción	3
2. Geometría Riemanniana	7
2.1. Variedades diferenciables y campos de tensores	7
2.1.1. Espacio tangente	9
2.1.2. Campos vectoriales	13
2.1.3. 1-formas diferenciables	15
2.1.4. Tensores y p-formas	18
2.1.5. Campos de tensores y formas diferenciables	21
2.2. Fibrados vectoriales	25
2.2.1. Conceptos básicos	25
2.2.2. Bases locales	27
2.2.3. Formas diferenciables en espacios y fibrados vectoriales	28
2.3. Conexiones y derivación covariante	31
2.4. Variedades Riemannianas	35
2.4.1. Tensor métrico	36
2.4.2. Conexión de Levi-Civita	39
2.4.3. Tensores y escalares de curvatura	43
3. Flujos geométricos: el flujo de Ricci	47
3.1. Ecuaciones diferenciales en fibrados vectoriales	48
3.2. Flujo de Ricci	50
3.2.1. Existencia de soluciones a corto plazo	51

3.2.2.	Evolución de la curvatura	53
3.2.3.	Principio del máximo y singularidades	58
4.	Flujo del grupo de renormalización de segundo orden (RG-2)	62
4.1.	Modelo Sigma no lineal de la Teoría de Cuerdas	63
4.2.	Existencia de soluciones	65
4.2.1.	Variedades Riemannianas cerradas de dimensión $n = 2$	65
4.2.2.	Variedades Riemannianas cerradas de dimensión $n \geq 2$	67
4.2.3.	Variedades Riemannianas de curvatura seccional constante	67
4.3.	Evolución de la curvatura	70
4.4.	Principio del máximo y control de la curvatura	75
4.4.1.	Problema de valor inicial asociado al control de la curvatura	81
4.4.2.	Evolución en geometrías de curvatura seccional constante	84
4.4.3.	Geometrías con curvatura seccional constante $K > 0$	86
4.4.4.	Geometrías con curvatura seccional constante $K < 0$	93
4.5.	Evolución de la curvatura escalar y la entropía de Hamilton	97
4.5.1.	Entropía de Hamilton	97
5.	Conclusiones	102

Índice de figuras

4.1. Solución del problema de valor inicial	83
4.2. Experimento 1	87
4.3. Variaciones en c_1	88
4.4. Tiempos t_{max} y T como funciones de la curvatura K	89
4.5. Variaciones en la curvatura seccional $K > 0$	90
4.6. Tiempos t_{max} y T como funciones de $n = dim(M)$	90
4.7. Variaciones en $dim(M)$	91
4.8. Control de la curvatura en la 3-esfera	92
4.9. Tiempo en función de la curvatura en $K \in (-\infty, -\frac{2}{\alpha})$	94
4.10. Variaciones de la curvatura seccional $K \in (-\infty, -\frac{2}{\alpha})$	94
4.11. Control de la curvatura con $K = -1$, $c_1 = 1$ y $n = 5$	95
4.12. Control de la curvatura en el modelo de bola de Poincaré	96
4.13. Signo de $\frac{d}{dt}N_B$ para $n = 20$ y $\alpha = \frac{1}{2}$	101

Índice de cuadros

4.1. Cambios en el tiempo de control de curvatura por variaciones de c_1 . . .	88
4.2. Cambios en el tiempo de control de la curvatura por variaciones en la curvatura inicial K	89
4.3. Cambios en el tiempo de control de la curvatura por variaciones en $\dim(M) = n$	91
4.4. Cambios en el tiempo de control de control de curvatura por variaciones de $-K$	94

Resumen

En este trabajo presentamos algunos resultados que conciernen al flujo del grupo de renormalización de segundo orden del Modelo Sigma no-lineal de la Teoría de Cuerdas, el flujo RG-2. Calculamos la evolución, bajo el flujo RG-2, del tensor de curvatura de Riemann y el escalar de Kretschmann para una variedad Riemanniana en cualquier dimensión. Las soluciones del flujo RG-2 están gobernadas por ecuaciones de tipo reacción-difusión, por lo tanto introducimos un teorema de principio del máximo y lo usamos para probar que, bajo determinadas condiciones, es posible acotar la curvatura de las soluciones del flujo al menos durante un periodo de tiempo pequeño. Nuestros resultados teóricos reproducen, en geometrías de curvatura seccional constante, los resultados esperados. Finalmente presentamos un breve análisis del comportamiento de la curvatura escalar y la entropía de Hamilton bajo el flujo RG-2.

Abstract

On this work we present some results about the second order renormalization group flow of the non-linear Sigma Model of String Theory, the RG-2 flow. We calculate the evolution, under the RG-2 flow, of the the Riemann curvature tensor and the Kretschmann scalar. The solutions are governed by reaction-diffusion type equations, then we introduce a maximum principle theorem and use it to prove that, under certain conditions, it is possible to constrain the curvature of the flow solutions, at least for a short period of time. Our theoretical results, when applied to constant sectional curvature geometries, reproduce the expected results . Finally we present a brief analysis of the behavior of scalar curvature and Hamilton entropy under RG-2 flow.

Capítulo 1

Introducción

El análisis geométrico es la rama de las matemáticas que involucra a las ecuaciones diferenciales parciales y la geometría diferencial. Aunque es una rama más o menos reciente ha permitido demostrar algunos resultados muy importantes. Entre ellos, el más famoso de todos es la demostración del teorema de Poincaré [25, 25, 27]. En tal demostración, Perelman usó el flujo de Ricci y su formulación de gradiente para demostrar un resultado aún más potente: el teorema de geometrización de Thurston en tres dimensiones. Desde entonces ha habido un florecimiento de este campo y se ha extendido, incluso dentro de otras ciencias, como la Física de altas energías[1, 19, 2] o la Relatividad General [15, 12, 3].

Un flujo geométrico es una Ecuación Diferencial Parcial (EDP) que hace evolucionar las componentes de una métrica, generalmente Riemanniana, mediante la evolución de un parámetro afín. Generalmente, la curvatura de la variedad cambia con la evolución. El flujo de Ricci es una ecuación parabólica¹ por lo que se comporta como una ecuación difusiva de la curvatura. Con la evolución, las zonas con curvaturas pronunciadas van dando lugar a zonas con curvaturas menores, así continúa el proceso de "suavización" de la curvatura. Dependiendo de la dimensión, el flujo tenderá a una superficie de curvatura constante [6, 24, 18] o desarrollará singularidades [6, 13]. Una manera de saber si los flujos desarrollarán singularidades es a través del estudio de los escalares de curvatura. Así, una singularidad es un punto de la métrica donde la curvatura tiende al infinito. Esto implica la necesidad de buscar cotas para la curvatura, de este modo se puede determinar la existencia de soluciones, al menos en un tiempo finito. Esta no es una tarea sencilla, y existe mucha literatura al respecto [6].

El flujo de Ricci es una EDP que evoluciona la métrica y por lo tanto todas las

¹En sentido estricto, el flujo de Ricci es débilmente parabólico, lo que significa que el flujo de Ricci incluido el término de DeTurck es parabólico.

cantidades construidas a partir de esta métrica. En particular, el escalar de curvatura R y el escalar de Kretschmann también evolucionan. Es por esto que podemos usar esos escalares para determinar la existencia de singularidades. Al ser invariantes bajo cambios de coordenadas, estos escalares nos permiten determinar si existe una verdadera singularidad.²

El flujo de Ricci también aparece como la aproximación a 1-loop de las ecuaciones del grupo de renormalización del modelo sigma no-lineal [9]. Estas ecuaciones aparecen cuando se cuantiza una teoría clásica³. En este proceso de cuantización aparecen cantidades infinitas, la técnica que permite controlar estas cantidades infinitas se denomina renormalización. Para aplicar esta técnica se desarrolla perturbativamente las cantidades cuantizadas y se procede a renormalizar (sustituir las cantidades infinitas por finitas.). Así, cada potencia del parámetro de la perturbación se denominará loop⁴. En teoría de cuerdas, el modelo sigma no-lineal es el modelo más simple que describe la dinámica de una cuerda bosónica⁵. Cuando se intenta cuantizar este modelo se introduce un parámetro afín λ dependiente de la energía. Las ecuaciones del grupo de renormalización del modelo sigma no-lineal, a 1-loop (primer orden), corresponden al flujo de Ricci. Así, es natural pensar acerca de la existencia de flujos de renormalización a órdenes superiores. Por ejemplo, si consideramos el segundo término en el desarrollo perturbativo, las ecuaciones del grupo de renormalización vienen dadas, después de un cambio de escala, por:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial \lambda} = -2R_{ij} - \frac{\alpha}{2} R_{i\alpha\beta\gamma} R_j^{\alpha\beta\gamma}. \quad (1.1)$$

Donde g_{ij} es una métrica Riemanniana que se denomina la variedad "target", R_{ij} es el tensor de Ricci y $R_{i\alpha\beta\gamma}$ es el escalar de curvatura asociados. Cuando $\alpha = 0$, la ecuación anterior se reduce al flujo de Ricci. Al flujo definido en (1.1) se lo denomina **flujo RG-2**. El flujo de Ricci es la aproximación para curvaturas pequeñas de las ecuaciones del grupo de renormalización del modelo sigma no-lineal. Si queremos trabajar con curvaturas grandes debemos considerar un flujo que involucre el tensor de Riemann. Es por eso que en esta tesis nos enfocaremos en encontrar cotas para la curvatura bajo el flujo RG-2. Este flujo es débilmente parabólico [18] y se ha estudiado en diferentes

²Llamaremos verdadera singularidad al punto donde la curvatura se hace infinita independiente del sistema de coordenadas.

³El proceso de cuantización de una teoría es un técnica que permite encontrar la versión cuántica/discreta de una teoría clásica/ continua. En general, lo que suele hacer es promover los campos clásicos a campos cuánticos y se establece relaciones de conmutación. Todavía no existe una formalización matemática rigurosa del proceso de cuantización.

⁴El nombre *loop* viene de los diagramas de Feynman, donde las interacciones entre partículas o consigo mismas se describen mediante diagramas. Desde el punto de vista matemático, el número de loops nos dan la potencia del desarrollo perturbativo.

⁵Ver capítulo 4 para la definición matemática del modelo sigma no-lineal.

dimensiones[24]. Nosotros nos enfocaremos en 2 y 3 dimensiones para luego intentar una generalización a n -dimensiones.

El flujo RG-2 es menos conocido que el flujo de Ricci y por lo tanto ha sido menos estudiado. El término $R_{i\alpha\beta\gamma}R_j^{\alpha\beta\gamma}$ hace que el nuevo flujo sea muy difícil de controlar. Hasta ahora, salvo para el caso 2 dimensional, no se ha podido encontrar cotas para la curvatura⁶. El presente trabajo de tesis pretende aportar en esa dirección. Lo que se busca es encontrar una ecuación para la evolución del escalar de Kretschmann para cualquier dimensión. Luego, trataremos de extender los resultados que ya se conocen para el flujo de Ricci al flujo RG-2. En este proceso, siempre que se pueda, compararemos los resultados obtenidos para el flujo de Ricci y el flujo RG-2 en 2 y 3 dimensiones.

En primer lugar calcularemos la evolución, bajo el flujo RG-2, del tensor de Riemann en cualquier dimensión. Con esto calcularemos la evolución del escalar de Kretschmann $R_{ijkl}R^{ijkl}$. Este escalar se suele usar para determinar la existencia de una verdadera singularidad. Esto implica que si la ecuación que permite calcular el flujo de tal escalar desarrolla una singularidad entonces la variedad desarrollará una singularidad. Es por esto que es importante encontrar maneras de controlar dicha evolución. Una vez que tenemos una ecuación para la evolución, bajo el flujo RG-2, del escalar de Kretschmann podemos pasar al estudio de las cotas para la curvatura. Es ahí donde la teoría de EDP's en espacios con curvatura nos será muy útil.

El principio del máximo nos permite estudiar algunas propiedades de las soluciones sin la necesidad de conocerlas explícitamente. Usaremos este principio, con alguna modificación, para encontrar cotas sobre el escalar de Kretschmann. Para esto necesitamos hacer algunas suposiciones sobre las funciones que aparecen en la curvatura inicial. Considerando que este es un trabajo inicial, y debido a la complejidad del problema, usaremos algunas hipótesis que en futuros trabajos pueden restringirse aún más. Es claro que en un tiempo infinito el flujo RG-2, al igual que el flujo de Ricci, desarrollará singularidades y la única manera de continuar el proceso es mediante el procedimiento conocido como "cirugía". Este procedimiento fue usado por Perelman para llegar a demostrar el teorema de geometrización de Thurston. Si quisiéramos hacer algo similar necesitaríamos conocer la formulación de gradiente del flujo RG-2, formulación que hasta ahora no se conoce, aunque hay algún resultado en esa dirección[5]. Finalmente, y con el objetivo de verificar nuestros resultados, analizaremos numéricamente lo que sucede con las superficies de curvatura seccional constante. Estas superficies son relativamente fáciles de analizar y nos proveen una situación en la que nuestros resultados pueden ser escrutados directamente. Este trabajo es el principio de un proyecto de

⁶En dos dimensiones el escalar de Kretschmann se reduce a R^2 .

investigación más grande, y que tiene algunas ramificaciones que van desde el análisis geométrico hasta la teoría de cuerdas en física de altas energías. En el capítulo 2 haremos una revisión de los resultados de la geometría Riemanniana que hemos usado en nuestro estudio. En el capítulo 3 nos enfocaremos en los flujos geométricos. Haremos especial énfasis en los flujos intrínsecos, en particular enunciaremos los resultados conocidos para el flujo de Ricci. En el capítulo 4 presentaremos los resultados que se conocen para el flujo RG-2. Además, presentaremos los resultados a los que hemos llegado durante la elaboración de este trabajo de titulación. En el capítulo 5 haremos una discusión acerca de los resultados y posibles aplicaciones.

Capítulo 2

Geometría Riemanniana

Un flujo geométrico es una ecuación diferencial que hace evolucionar la métrica de una variedad Riemanniana. Así, todas las cantidades construidas a partir de la métrica también evolucionan con el flujo. En este contexto, para introducir y analizar el flujo RG-2 con rigurosidad, debemos abordar aquellos tópicos de la Geometría Riemanniana que lo harán posible. Este capítulo se organiza de la siguiente manera:

- En la sección 2.1 introducimos las variedades diferenciables, que son el objeto básico del estudio de la geometría diferencial. Hecho eso, definiremos y mostraremos el manejo operacional de los campos de tensores, que son las herramientas fundamentales con las que se estudia la geometría de una variedad diferenciable.
- Entre las secciones 2.2 y 2.3 introduciremos la teoría de los fibrados vectoriales con conexiones lineales, dando especial énfasis al cálculo de derivadas covariantes.
- En el marco de la teoría de los fibrados vectoriales con conexión lineal, en la sección 2.4 nos adentramos en el estudio de la Geometría Riemanniana, fundamentalmente en aquellos tópicos que usaremos a lo largo de nuestro trabajo.

De este modo contaremos con todos los elementos de la Geometría Riemanniana que usaremos en el análisis del flujo RG-2.

2.1. Variedades diferenciables y campos de tensores

Una variedad diferenciable, dicho de manera intuitiva, es un espacio topológico dotado de propiedades similares a las que posee una superficie suave en el espacio Euclídeo \mathbb{R}^3 . En ese sentido, la Geometría diferencial, cuyo principal objeto de estudio

son las variedades diferenciables, es una generalización de la geometría de curvas y superficies en \mathbb{R}^3 . Teniendo esto presente, en esta sección introduciremos los principales conceptos y herramientas del estudio de las variedades diferenciables.

DEFINICIÓN 2.1 *Una variedad topológica de dimensión $n \in \mathbb{N}$ es un espacio topológico M que verifica las siguientes condiciones:*

1. *M es localmente euclídeo, es decir, alrededor de cada punto $p \in M$ existe una vecindad $U \subset M$ que es homeomorfa a algún abierto $O \subset \mathbb{R}^n$.*
2. *M es un espacio de Hausdorff.*
3. *M posee una base numerable para su topología.*

De acuerdo con esta definición, una variedad topológica localmente luce como \mathbb{R}^n aunque eventualmente su aspecto global podría ser muy diferente. En este contexto lo que se pretende es realizar operaciones y cálculos en M , similares a los que podemos hacer en \mathbb{R}^n , aprovechando cada una de estas propiedades. Sin embargo, para lograrlo es necesario proveerle a M una estructura adicional:

DEFINICIÓN 2.2 *Sea M una variedad topológica de dimensión $n \in \mathbb{N}$. Una carta local o sistema de coordenadas locales en M es una dupla (U, ϕ) , donde U es un abierto de M y ϕ es un homeomorfismo de U en algún abierto $O \subset \mathbb{R}^n$.*

DEFINICIÓN 2.3 *Sea M una variedad topológica de dimensión $n \in \mathbb{N}$. Dos sistemas de coordenadas locales (U, ϕ) y (V, φ) se dicen compatibles si una de las siguientes condiciones se verifica:*

1. $U \cap V = \emptyset$
2. *El mapa de cambio de coordenadas $\varphi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \varphi(U \cap V) \subset \mathbb{R}^n$ es un difeomorfismo, es decir, tanto $\varphi \circ \phi^{-1}$ como su inversa son de clase C^∞ .*

DEFINICIÓN 2.4 *Sea M una variedad topológica de dimensión $n \in \mathbb{N}$ y sea \mathcal{A} una familia de cartas locales que recubre a M .*

1. *Diremos que \mathcal{A} es un Atlas para M si cualquier par de cartas locales de \mathcal{A} son compatibles.*
2. *Un atlas \mathcal{A} es una estructura diferenciable en M si se verifica la siguiente condición: cualquier carta local que sea compatible con las cartas locales que constituyen \mathcal{A} , pertenece a \mathcal{A} .*

DEFINICIÓN 2.5 Una variedad diferenciable de dimensión $n \in \mathbb{N}$ es una variedad topológica de dimensión $n \in \mathbb{N}$ provista de una estructura diferenciable.

La estructura diferenciable nos permite trabajar sobre una variedad como si estuviéramos trabajando en \mathbb{R}^n . Así, podemos hacer cálculos en una variedad con curvatura, que es uno de los principales objetivos cuando se introduce la estructura diferenciable sobre una variedad.

EJEMPLO 2.6

1. Si M es una variedad diferenciable de dimensión n , entonces todo abierto $U \subset M$ es también una variedad diferenciable de dimensión n con el atlas $\mathcal{A}_U = \{(V, \phi) \in \mathcal{A} : V \subset U\}$.
2. \mathbb{R}^n con su topología usual y el mapa identidad $id : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una variedad diferenciable.
3. Todo espacio vectorial real E de dimensión finita es una variedad diferenciable. En efecto, si $\{e_i\}_{i=1}^n$ es una base de E , entonces $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow E, x \mapsto x^i e_i$ es un isomorfismo de espacios vectoriales, luego, con el Atlas formado solamente por la carta (E, ϕ^{-1}) , E es una variedad diferenciable.
4. El grupo de las transformaciones lineales invertibles, $GL(n, \mathbb{R})$, es una variedad diferenciable por ser un subconjunto abierto del espacio vectorial de las matrices reales de dimensión $n \times n$, $Mat(n, \mathbb{R})$. En efecto, la función $f : Mat(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, A \mapsto f(A) := \det(A)$ es continua y $GL(n, \mathbb{R}) = f^{-1}(\mathbb{R} - \{0\})$.

En adelante, a menos que se haga alguna suposición adicional, asumiremos que M es una variedad diferenciable de dimensión n .

2.1.1. Espacio tangente

Si S es una superficie en \mathbb{R}^3 , para obtener un vector tangente \vec{v} a S sobre un punto $x \in S$, podemos tomar una curva suave $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$, cuya imagen este contenida en S y satisfaga $\gamma(0) = x$, para con ella definir \vec{v} como $\vec{v} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \gamma$. Por otra parte, si $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable, la derivada direccional de f en el punto x y en la dirección \vec{v} es $D_{\vec{v}}f|_x = v \cdot \nabla f|_x$. Desde ese punto de vista, el vector tangente \vec{v} puede ser visto como un operador lineal $v : C^\infty(S) \rightarrow \mathbb{R}$ que actúa como $v(f) = v \cdot \nabla f|_x$ y satisface la regla de Leibniz. Puesto que la geometría diferencial es una generalización de la geometría de curvas y superficies, estas nociones

se extienden para variedades diferenciables. Para ver esto, necesitamos introducir la noción de diferenciabilidad para mapas definidos entre variedades diferenciables.

DEFINICIÓN 2.7 Sean M y N variedades diferenciables de dimensiones m y n respectivamente.

1. Un mapa $F : M \rightarrow N$ se dice diferenciable si para todo punto $p \in M$ existe un par de cartas locales, (U, ϕ) alrededor de p y (V, φ) al rededor de $F(p)$, tales que $F(U) \subset V$ y la función $\varphi \circ F \circ \phi^{-1} : \phi(U) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \varphi(V) \subset \mathbb{R}^n$ es de clase C^∞ . A la composición $\varphi \circ F \circ \phi^{-1}$ le llamamos *representación en coordenadas locales de F* y le denotaremos \widehat{F} .
2. Un mapa diferenciable $F : M \rightarrow N$ es un difeomorfismo si es una biyección y su inversa $F^{-1} : N \rightarrow M$ es diferenciable.

OBSERVACIÓN 2.8 Gracias a la compatibilidad de las cartas locales, la diferenciabilidad de un mapa F no depende de las cartas locales elegidas.

Puesto que \mathbb{R} es una variedad diferenciable, en adelante denotaremos $C^\infty(M)$ al espacio vectorial real formado por todas las funciones diferenciables definidas sobre una variedad diferenciable M que toman valores en \mathbb{R} .

DEFINICIÓN 2.9 Una aplicación lineal $v : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ es una derivación en el punto $p \in M$ si verifica la regla de Leibniz:

$$v \cdot (fg) = f(p)v \cdot g + g(p)v \cdot f \quad \forall f, g \in C^\infty(M)$$

El conjunto de todas las derivaciones en el punto $p \in M$, junto con las operaciones suma y producto por escalar dadas por:

$$\begin{aligned} (v_1 + v_2) \cdot f &= v_1 \cdot f + v_2 \cdot f, \quad \forall f \in C^\infty \\ (\alpha v) \cdot f &= \alpha(v \cdot f), \quad \forall f \in C^\infty, \forall \alpha \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

es un espacio vectorial real el cual es llamado *Espacio Tangente al punto p en M* y se denota T_pM . Llamaremos *Vectores Tangentes* a los elementos de T_pM .

En primera instancia trabajar con vectores tangentes parece ser una labor abstracta, sin embargo haciendo uso de las propiedades de M podemos trabajar con ellos en términos de coordenadas locales. Para ver eso, introducimos el concepto de diferencial para un mapa diferenciable:

DEFINICIÓN 2.10 Sean M y N dos variedades diferenciables, y sea $F : M \longrightarrow N$ un mapa diferenciable. El diferencial de F en el punto $p \in M$ es el mapa $D_p F : T_p M \longrightarrow T_{F(p)} N$ dado por

$$D_p F(v) \cdot g := v \cdot (g \circ F), \quad \forall g \in C^\infty(N)$$

OBSERVACIÓN 2.11 $D_p F$ es una aplicación lineal.

También haremos uso de los siguientes resultados:

PROPOSICIÓN 2.12 [21, p. 66] Sean M y N dos variedades diferenciables. Si el mapa $F : M \longrightarrow N$ es un difeomorfismo, entonces $D_p F : T_p M \longrightarrow T_{F(p)} N$ es un isomorfismo de espacios vectoriales.

PROPOSICIÓN 2.13 [21, p. 67] Si U es un abierto de M y $i : U \longrightarrow M$, $p \mapsto p$ es el mapa inclusión, entonces para todo punto $p \in U$ el mapa $D_p i : T_p U \longrightarrow T_p M$ es un isomorfismo de espacios vectoriales.

PROPOSICIÓN 2.14 [21, p. 64] Para todo punto $a \in \mathbb{R}^n$, el mapa $D : \mathbb{R}^n \longrightarrow T_a \mathbb{R}^n$ definido como

$$D(v) = v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{x=a}$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Con esto, si (U, ϕ) es una carta local alrededor de un punto $p \in M$, entonces ϕ es un difeomorfismo de $U \subset M$ en un abierto $O \subset \mathbb{R}^n$. Por lo tanto las proposiciones 2.12 y 2.13 aseguran que $D_p \phi : T_p M \longrightarrow T_{\phi(p)} \mathbb{R}^n$ es un isomorfismo de espacios vectoriales, mientras que la proposición 2.14 garantiza que $\dim(T_p M) = n$. Entonces, si $\{e_i\}_{i=1}^n$ es la base canónica de \mathbb{R}^n , los conjuntos $\{\frac{\partial}{\partial x^i} |_{\phi(p)}\}_{i=1}^n$ y $\{D_{\phi(p)} \phi^{-1}(\frac{\partial}{\partial x^i} |_{\phi(p)})\}_{i=1}^n$ son bases para $T_{\phi(p)} \mathbb{R}^n$ y $T_p M$ respectivamente. En consecuencia, utilizando la notación

$$\partial_i |_p := D_{\phi(p)} \phi^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\phi(p)} \right)$$

podemos expresar cada vector tangente $v \in T_p M$ en términos del sistema de coordenadas locales (U, ϕ) como una combinación lineal

$$v = v^i \partial_i |_p$$

y con ello

$$v \cdot f = v^i \partial_i |_p \cdot f = v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\phi(p)} \hat{f}, \quad \forall f \in C^\infty(M)$$

A los escalares $v^i \in \mathbb{R}$ les llamamos *componentes del vector tangente* $v \in T_p M$ en las coordenadas (U, ϕ) .

OBSERVACIÓN 2.15 Puesto que cada espacio tangente es un espacio vectorial de dimensión finita, a cada uno de ellos le podemos dotar de un producto escalar. Esta es la piedra angular de la Geometría Riemanniana que abordaremos en la sección 2.4.

OBSERVACIÓN 2.16 Para todo vector $v \in T_p M$ y $f \in C^\infty(M)$, el valor de $v \cdot f$ depende del sistema de coordenadas elegido, pues los componentes de v en distintas cartas locales no necesariamente coinciden. Debido a esto debe existir una transformación lineal que nos permita relacionar las bases de $T_p M$ en aquellos sistemas de coordenadas cuya intersección es no vacía. En efecto, si (U, ϕ) y (V, φ) son dos cartas locales alrededor de un punto $p \in M$, al denotar \hat{f} y \tilde{f} a las representaciones de una función $f \in C^\infty(M)$ en cada una de estas cartas, vemos que

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\phi(p)} \hat{f} = \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\phi(p)} \tilde{f} \circ (\varphi \circ \phi^{-1}) = \frac{\partial(\varphi \circ \phi^{-1})^j}{\partial x^i}(\phi(p)) \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_{\varphi(p)} \tilde{f}$$

gracias a que f es una función arbitraria, esto indica que las bases de vectores tangentes, respecto a cada una de estas cartas locales, se relacionan de acuerdo con la siguiente ley de transformación:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\phi(p)} = \frac{\partial(\varphi \circ \phi^{-1})^j}{\partial x^i}(\phi(p)) \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_{\varphi(p)}$$

Por lo tanto la transformación lineal que nos permite pasar de una base a otra es justamente la matriz Jacobiana de la función $\varphi \circ \phi^{-1}$ evaluada en el punto $\phi(p) \in \mathbb{R}^n$.

Al igual que en el caso de las superficies en \mathbb{R}^3 , podemos obtener vectores tangentes a través de la derivada de curvas suaves en M . Para ver esto tomamos un punto $p \in M$ cualquiera, una carta local (U, ϕ) alrededor de p , y una curva diferenciable $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ tal que $\gamma(0) = p \in M$. Entonces, si f es un elemento de $C^\infty(M)$, la composición $f \circ \gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ es un mapa diferenciable y se tiene

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f \circ \gamma = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \hat{\gamma}^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\phi(p)} \hat{f} \quad (2.1)$$

esta identidad nos sugiere que $\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \hat{\gamma}^i \partial_i \Big|_p$ es un vector tangente, pues f es arbitrario. De esta manera obtenemos un vector tangente al punto $p \in M$ a partir de la curva γ . Por otra parte, dado $v \in T_p M$, podemos elegir más de una curva diferenciable γ que satisfaga $v^i = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \hat{\gamma}^i$ en (U, ϕ) , de modo que no podemos asociar una única curva a

un vector tangente. Para evitar tal problema introducimos la siguiente definición:

DEFINICIÓN 2.17 Si $\gamma_1, : (-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ y $\gamma_2, : (-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ son curvas diferenciables en M que pasan a través del punto $p \in M$ con $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$, entonces diremos que γ_1 y γ_2 son equivalentes ($\gamma_1 \sim \gamma_2$) si

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \gamma_1 \circ f = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \gamma_2 \circ f, \quad \forall f \in C^\infty(M)$$

La definición 2.17 constituye una relación de equivalencia sobre el conjunto de las curvas diferenciables que pasan a través del punto $p \in M$, y con ella podemos asociar a cada vector tangente una única clase de equivalencia $[\gamma]$ de curvas que satisfacen (2.1). En virtud de estos razonamientos, podemos definir $T_p M$ como

$$T_p M = \{ \gamma, : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M : \gamma(0) = p, \gamma \text{ es diferenciable} \} / \sim$$

Definir los vectores tangentes como clases de equivalencia de curvas diferenciables o como derivaciones es equivalente. Ver [31, p. 91].

2.1.2. Campos vectoriales

Para estudiar la geometría de una variedad diferenciable M , o las propiedades de algún mapa diferenciable definido sobre ella, más allá de manipular vectores tangentes de manera individual, necesitamos trabajar simultáneamente con varios vectores pertenecientes a distintos espacios tangentes. En adición, la relación entre cada uno de dichos vectores debe ser, en algún sentido, diferenciable. Para lograr esto introducimos el *Fibrado Tangente*, que se define como la unión disjunta

$$TM := \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_p M$$

TM posee una topología y una estructura diferenciable que le convierten en una $2n$ -variedad diferenciable y hacen que la proyección $\pi : TM \rightarrow M, (p, v_p) \mapsto p$ sea diferenciable (ver [21, p. 81]). Gracias a estas propiedades, en el fibrado tangente podemos manipular conjuntos de vectores tangentes de manera diferenciable. En concreto tenemos la siguiente definición:

DEFINICIÓN 2.18 Un mapa diferenciable $X : M \rightarrow TM$ que satisface $\pi \circ X = Id_M$ es llamado *Campo Vectorial Diferenciable*. Denotaremos $\mathfrak{X}(M)$ al conjunto de todos los campos vectoriales diferenciables.

OBSERVACIÓN 2.19

1. Si $U \subset M$ es un conjunto abierto, este hereda la estructura de variedad diferenciable, de modo que un campo vectorial sobre este abierto es un mapa diferenciable $X : U \rightarrow TU$ tal que $\pi|_U \circ X = Id|_U$. Denotaremos $\mathfrak{X}(U)$ al conjunto de todos los campos vectoriales diferenciables sobre U .
2. Si $X \in \mathfrak{X}(M)$, entonces $X \in \mathfrak{X}(U)$.

La estructura de espacio vectorial que posee cada espacio tangente nos permite proveer dicha estructura al conjunto $\mathfrak{X}(M)$. En efecto, si para cada punto $p \in M$ escribimos $X_p := X(p)$, entonces las operaciones suma y producto por escalar definidas como

$$\begin{aligned}(X + Y)_p &= X_p + Y_p, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M) \\ (\alpha X)_p &= \alpha X_p, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M), \forall \alpha \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

hacen de $\mathfrak{X}(M)$ un espacio vectorial. Adicionalmente, gracias a que cada espacio tangente tiene dimensión finita, en cada punto p de una carta local (U, ϕ) , todo campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ puede expresarse como una combinación lineal de la forma

$$X_p = X^i(p)\partial_i|_p \tag{2.2}$$

esto muestra que, sobre (U, ϕ) , un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ está completamente determinado por n funciones $X^i : U \rightarrow \mathbb{R}$, las cuales están definidas por la ecuación (2.2) y son conocidas como los *componentes de X en el sistema de coordenadas locales (U, ϕ)* . De hecho, tenemos la siguiente caracterización:

PROPOSICIÓN 2.20 [21, p. 83] *Un mapa diferenciable $X : M \rightarrow TM$ es un campo vectorial diferenciable si, y solo si, satisface $\pi \circ X = Id_M$ y sus componentes en coordenadas locales son funciones diferenciables para toda carta local de M .*

La importancia de este resultado es que nos permite determinar una especie de base para campos vectoriales diferenciables y ver a $\mathfrak{X}(M)$ como un subespacio vectorial de los endomorfismos de $C^\infty(M)$. En efecto, si tomamos una carta local (U, ϕ) , entonces la proposición 2.20 y la observación 2.19 aseguran que los mapas

$$\begin{aligned}\partial_i : U &\rightarrow TU \\ p &\mapsto \partial_i|_p : \end{aligned}$$

son campos vectoriales diferenciables en U . En ese sentido la ecuación (2.2) nos indica que, sobre dicha carta local, todo campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ puede ser escrito como

$$X = X^i \partial_i \tag{2.3}$$

debido a esto diremos que el conjunto $\{\partial_i\}_{i=1}^n$ forma una *base local de campos vectoriales diferenciables* sobre el sistema de coordenadas locales (U, ϕ) . Así mismo, en virtud de la proposición 2.20, para todo $f \in C^\infty(M)$ y $X \in \mathfrak{X}(M)$, la función $X \cdot f : M \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$X \cdot f(p) := X_p \cdot f = X^i(p) \partial_i|_p f, \quad \forall p \in M$$

es diferenciable. De este modo todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ puede ser visto como el mapa lineal

$$\begin{aligned} X : C^\infty(M) &\longrightarrow C^\infty(M) \\ f &\longrightarrow X \cdot f \end{aligned}$$

que, gracias a las propiedades de las derivaciones, satisface la siguiente regla de Leibniz:

$$X(fg) = g(X \cdot f) + f(X \cdot g)$$

para todo $f, g \in C^\infty(M)$.

OBSERVACIÓN 2.21 *Los componentes X^i de un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ dependen del sistema de coordenadas locales sobre el que se definen, de modo que si (V, φ) y (U, ϕ) son dos cartas locales con intersección no vacía, debe existir una ley de transformación que permita relacionar sus bases locales de campos vectoriales en $V \cap U$. Ahora, dicha ley de transformación punto a punto tiene que coincidir con la forma en como se transforman las bases de vectores tangentes, por lo tanto las bases de locales de campos vectoriales debe transformarse de acuerdo con*

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial(\varphi \circ \phi^{-1})^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^j}$$

2.1.3. 1-formas diferenciables

Todo espacio vectorial lleva consigo un espacio vectorial dual formado por todos sus funcionales lineales. En principio eso se cumple para $\mathfrak{X}(M)$, sin embargo a la hora de analizar una variedad diferenciable necesitamos funcionales lineales que tengan propiedades similares a las que poseen los elementos de $\mathfrak{X}(M)$, es decir, que sean diferenciables en algún sentido y que se puedan expresar en términos de un sistema de

coordenadas locales. Para lograr esto, trabajaremos ahora con los espacios duales de los espacios tangentes de M .

Para todo punto $p \in M$, el espacio dual de $T_p M$ es llamado *Espacio Cotangente* en el punto p y se denota $T_p^* M$. Con esto, a la unión disjunta

$$T^* M := \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_p^* M$$

le llamaremos *Fibrado Cotangente*. Al igual que en el caso del fibrado tangente, $T^* M$ posee una topología y estructura diferenciable que le convierten en una $2n$ -variedad diferenciable y hacen que la proyección $\pi : T^* M \rightarrow M$, $(p, \theta_p) \mapsto p$ sea un mapa diferenciable (ver [31, p. 143]). Por lo tanto podemos construir campos de vectores duales:

DEFINICIÓN 2.22 *Un mapa diferenciable $\theta : M \rightarrow T^* M$ que satisface $\pi \circ \theta = Id_M$ es llamado 1-forma diferenciable. Al conjunto de todas las 1-formas diferenciables en M le denotaremos $\Omega^1(M)$.*

OBSERVACIÓN 2.23 *Una 1-forma diferenciable en un abierto $U \subset M$ es un mapa diferenciable $\theta : U \rightarrow T^* U$ que satisface $\pi|_U \circ \theta = Id|_U$. Denotaremos $\Omega^1(U)$ al conjunto de todas las 1-formas diferenciables sobre U .*

Si (U, ϕ) es una carta local en M , en cada punto $p \in U$ denotaremos $\{dx^i|_p\}_{i=1}^n$ a la base dual de $\{\partial_i|_p\}_{i=1}^n$. Con ello, Si θ es una 1-forma diferenciable, $\theta_p := \theta(p)$ puede escribirse como una combinación lineal de dicha base

$$\theta_p = \theta_i(p) dx^i|_p \tag{2.4}$$

de ese modo obtenemos n funciones $\theta_i : U \rightarrow \mathbb{R}$, que son llamadas los *componentes de θ en las coordenadas (U, ϕ)* y cumplen el rol de caracterizar a $\theta \in \Omega^1(M)$ en (U, ϕ) . En efecto, de manera análoga al caso de los campos vectoriales diferenciables, tenemos la siguiente resultado:

PROPOSICIÓN 2.24 [21, p. 130] *Un mapa $\theta : M \rightarrow T^* M$ es un elemento de $\Omega^1(M)$ si y solo si $\pi \circ \theta = Id_M$ y en cada carta local sus componentes en coordenadas locales son diferenciables.*

Como consecuencia directa de la ecuación (2.4) y de esta proposición, para toda

carta local (U, ϕ) los mapas

$$\begin{aligned} dx^i : U &\longrightarrow T^*M \\ p &\longmapsto dx^i|_p \end{aligned}$$

son elementos de $\Omega^1(U)$ y forman una *base local de 1-formas diferenciables* en (U, ϕ) . Por lo tanto, sobre cualquier carta local, una 1-forma diferenciable puede expresarse como

$$\theta = \theta_i dx^i \quad (2.5)$$

Desde este punto de vista, para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $\theta \in \Omega^1(M)$, el producto en dualidad $\langle \theta, X \rangle : M \longrightarrow \mathbb{R}$, $p \mapsto \langle \theta_p, X_p \rangle$ es una función diferenciable

$$\begin{aligned} \langle \theta, X \rangle &= \theta_i X^j \langle dx^i, \partial_j \rangle \\ &= \theta_i X^i \end{aligned}$$

pues los componentes en coordenadas locales de X y θ son diferenciables. Esto nos permite interpretar a los elementos de $\Omega^1(M)$ como mapas lineales

$$\begin{aligned} \theta : \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow C^\infty(M) \\ X &\longmapsto \theta(X) = \langle \theta, X \rangle \end{aligned}$$

OBSERVACIÓN 2.25 Supongamos que (U, ϕ) y (V, φ) son dos cartas locales alrededor de un punto $p \in M$. Denotemos $\{dx^i|_p\}_{i=1}^n$ y $\{dy^j|_p\}_{j=1}^n$ a las bases de T_p^*M respecto a cada una de estas cartas locales. Ahora, gracias a que todo vector tangente $v \in T_pM$ puede ser representado por una curva suave $\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$, podemos calcular los componentes de un vector, en las bases determinadas por las cartas locales (U, ϕ) y (V, φ) , mediante el producto en dualidad y la primera derivada de la representación en coordenadas de dicha curva.

$$\begin{aligned} v^i &= \langle dx^i|_p, v \rangle = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \tilde{\gamma}^i = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \phi \circ \gamma \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\phi \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi \circ \gamma = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\phi \circ \varphi^{-1}) \circ \tilde{\gamma} \\ &= \frac{\partial(\phi \circ \varphi^{-1})^i}{\partial y^j}(\varphi(p)) \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \tilde{\gamma}^j = \frac{\partial(\phi \circ \varphi^{-1})^i}{\partial y^j}(\varphi(p)) \langle dy^j|_p, v \rangle \end{aligned}$$

puesto que v es arbitrario, esta identidad muestra que las bases $\{dx^i|_p\}_{i=1}^n$ y $\{dy^j|_p\}_{j=1}^n$

satisfacen la siguiente ley de transformación:

$$dx^i|_p = \frac{\partial(\phi \circ \varphi^{-1})^i}{\partial y^j}(\varphi(p)) dy^j|_p$$

luego, como las bases locales de 1-formas diferenciables deben transformarse respetando lo que sucede punto a punto con las bases de los espacios cotangentes, estas deben transformarse de acuerdo con

$$dx^i = \frac{\partial(\phi \circ \varphi^{-1})^i}{\partial y^j} dy^j$$

2.1.4. Tensores y p-formas

La importancia de los campos vectoriales y las 1-formas diferenciables es que nos permiten construir campos de tensores, que son los mapas con los que efectivamente analizaremos la geometría de una variedad diferenciable. Sin embargo, para adentrarnos en tal construcción, necesitamos presentar algunos conceptos y resultados de álgebra lineal. Durante esta sección asumiremos que V es un espacio vectorial real de dimensión $m < \infty$, y nos basaremos en [31].

DEFINICIÓN 2.26 Un (k, l) - tensor es un mapa multilineal

$$F : \underbrace{V^* \times V^* \times \cdots \times V^*}_k \times \underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_l \longrightarrow \mathbb{R}$$

El conjunto de todos los (k, l) - tensores en V , denotado $\mathcal{T}_l^k(V)$, es un espacio vectorial real con las operaciones suma y producto por escalar usuales de las aplicaciones multilineales. Además existe una operación producto entre tensores de distinto tipo:

DEFINICIÓN 2.27 Para cualesquier $k, l, r, s \in \mathbb{N}$, llamaremos producto tensorial a la aplicación bilineal

$$\otimes : \mathcal{T}_l^k(V) \times \mathcal{T}_s^r(V) \longrightarrow \mathcal{T}_{l+s}^{k+r}(V)$$

definida como

$$\begin{aligned} T \otimes F(f_1, \dots, f_k, f_{k+1}, \dots, f_{k+r}, v_1, \dots, v_l, v_{l+1}, \dots, v_{l+s}) = \\ T(f_1, \dots, f_k, v_1, \dots, v_l) F(f_{k+1}, \dots, f_{k+r}, v_{l+1}, \dots, v_{l+s}) \end{aligned}$$

para todo par de tensores $T \in \mathcal{T}_l^k(V)$, $F \in \mathcal{T}_s^r(V)$, vectores duales $f_1, \dots, f_{k+l} \in V^*$ y vectores $v_1, \dots, v_{l+s} \in V$.

A través del producto tensorial, podemos construir bases para $\mathcal{T}_l^k(V)$ a partir de una base de V . En efecto, si $\{e_i\}_{i=1}^m$ es una base para V y $\{\mathcal{E}^i\}_{i=1}^m$ es su base dual asociada, es fácil ver que los tensores de la forma

$$e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \cdots \otimes e_{i_k} \otimes \mathcal{E}^{j_1} \otimes \mathcal{E}^{j_2} \otimes \cdots \otimes \mathcal{E}^{j_l}$$

con $1 \leq i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l \leq m$, son linealmente independientes y generan $\mathcal{T}_l^k(V)$. De ese modo, en función de dicha base podemos expresar $T \in \mathcal{T}_l^k(V)$ como

$$T = T_{j_1, \dots, j_l}^{i_1, \dots, i_k} e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \cdots \otimes e_{i_k} \otimes \mathcal{E}^{j_1} \otimes \mathcal{E}^{j_2} \otimes \cdots \otimes \mathcal{E}^{j_l}$$

Adicionalmente, si denotamos S_m al grupo de permutaciones de m elementos, la noción de simetría y antisimetría de las formas bilineales se extiende para $(0, p)$ -tensores y $(q, 0)$ -tensores:

DEFINICIÓN 2.28 Un $(0, k)$ -tensor $F : \underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_p \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice *simétrico* si

$$F(v_1, \dots, v_p) = F(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)}), \quad \forall \sigma \in S_m, \forall v_1, \dots, v_p \in V \quad (2.6)$$

de manera similar, diremos que un $(q, 0)$ -tensor $G : \underbrace{V^* \times V^* \times \cdots \times V^*}_q \longrightarrow \mathbb{R}$ es *simétrico* si

$$G(f_1, \dots, f_q) = G(f_{\sigma(1)}, \dots, f_{\sigma(q)}), \quad \forall \sigma \in S_m, \forall f_1, \dots, f_q \in V^* \quad (2.7)$$

El conjunto de todos los $(0, p)$ -tensores simétricos constituye un subespacio vectorial de $\mathcal{T}_p^0(V)$, mientras que los $(q, 0)$ -tensores simétricos forman un subespacio vectorial de $\mathcal{T}_0^q(V^*)$. A cada uno de estos subespacios le denotaremos $Sym^p(V^*)$ y $Sym^q(V)$ respectivamente.

DEFINICIÓN 2.29 Una p -forma es un $(0, p)$ -tensor $\lambda : \underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_p \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisface

$$\lambda(v_1, \dots, v_p) = \mathbf{sgn}(\sigma) \lambda(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)})$$

para todo $\sigma \in S_m$ y $v_1, \dots, v_p \in V$.

El conjunto de todas las p -formas es un subespacio vectorial de $\mathcal{T}_p^0(V)$ que denotaremos $\bigwedge^p(V^*)$.

OBSERVACIÓN 2.30

1. Si T es un $(0, k)$ -tensores simétrico, entonces respecto a cualquier base de V sus componentes verifican

$$T_{j_1, j_2, \dots, j_k} = T_{\sigma(j_1), \sigma(j_2), \dots, \sigma(j_k)}, \quad \forall \sigma \in S_k$$

lo mismo sucederá con los componentes de cualquier $(q, 0)$ -tensor simétrico.

2. Si θ es una p -forma, entonces respecto a cualquier base de V sus componentes verifican

$$\theta_{j_1, j_2, \dots, j_p} = \mathbf{sgn}(\sigma) \theta_{\sigma(j_1), \sigma(j_2), \dots, \sigma(j_p)}, \quad \forall \sigma \in S_p$$

En general, el producto tensorial entre una p -forma y una q -forma no produce una $(p + q)$ -forma, sin embargo existe una aplicación bilineal que permite multiplicar este tipo de tensores de la manera deseada:

DEFINICIÓN 2.31 Para todo $p, q \in \mathbb{N}$, el *Producto Exterior* es la aplicación bilineal $\wedge : \wedge^p(V^*) \times \wedge^q(V^*) \rightarrow \wedge^{p+q}(V^*)$ dada por

$$(\lambda \wedge \theta)(v_1, \dots, v_p, v_{p+1}, \dots, v_{p+q}) = \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in S_{p+q}} \mathbf{sgn}(\sigma) \lambda(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)}) \theta(v_{\sigma(p+1)}, \dots, v_{\sigma(p+q)})$$

para todo $v_1, \dots, v_{p+q} \in V$ y $(\lambda, \theta) \in \wedge^p(V^*) \times \wedge^q(V^*)$

El producto \wedge nos permite obtener una base $\wedge^p(V^*)$ a partir de una base de V . En concreto si $\{\mathcal{E}^i\}_{i=1}^m$ es la base dual de alguna base para V , entonces los tensores

$$\mathcal{E}^{i_1} \wedge \mathcal{E}^{i_2} \wedge \dots \wedge \mathcal{E}^{i_p} \quad \text{con } 1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_p \leq m$$

forman una base para $\wedge^p(V^*)$, y por ende toda p -forma $\lambda \in \wedge^p(V^*)$ puede ser escrita como una combinación lineal

$$\lambda = \lambda_{i_1, \dots, i_p} \mathcal{E}^{i_1} \wedge \mathcal{E}^{i_2} \wedge \dots \wedge \mathcal{E}^{i_p}$$

Ahora introduciremos estos conceptos del álgebra lineal al estudio de las variedades diferenciables.

2.1.5. Campos de tensores y formas diferenciables

Puesto que para todo punto $p \in M$, el espacio tangente T_pM y su espacio dual T_p^*M son espacios vectoriales reales de dimensión finita, tenemos a nuestra disposición los espacios de tensores $\mathcal{T}_l^k(T_pM)$, $Sym^k(T_p^*M)$ y $\bigwedge^k(T_p^*M)$ para cualesquier $l, k \in \mathbb{N}$. Bajo este contexto, cada una de las siguientes uniones disjuntas

$$\mathcal{T}_l^k(M) = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times \mathcal{T}_l^k(T_pM)$$

$$Sym^k(M) = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times Sym^k(T_p^*M)$$

$$\Omega^k(M) = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times \bigwedge^k(T_p^*M)$$

poseen una topología y estructura diferenciable que les convierte en variedades diferenciables y hacen que las proyecciones

$$\pi_{\mathcal{T}} : \mathcal{T}_l^k(M) \longrightarrow M$$

$$(p, T) \mapsto p$$

$$\pi_{\mathcal{S}} : Sym^k(M) \longrightarrow M$$

$$(p, S) \mapsto p$$

$$\pi_{\bigwedge} : \Omega^k(M) \longrightarrow M$$

$$(p, \lambda) \mapsto p$$

sean mapas diferenciables (ver [31, p. 147]). Por lo tanto, de la misma manera en como definimos campos vectoriales y 1-formas diferenciables, podemos definir ahora campos de tensores y campos de p -formas. De manera más precisa tenemos la siguiente definición:

DEFINICIÓN 2.32

1. Un campo de (k, l) -tensores diferenciable es un mapa $T : M \longrightarrow \mathcal{T}_l^k(M)$ que es diferenciable y satisface $\pi_{\mathcal{T}} \circ T = Id_M$. Denotaremos $\Gamma(\mathcal{T}_l^k(M))$ al conjunto de todos los campos de (k, l) -tensores diferenciables.
2. Un campo de $(0, k)$ -tensores simétricos diferenciable es mapa $S : M \longrightarrow Sym^k(M)$ que es diferenciable y cumple $\pi_{\mathcal{S}} \circ S = Id_M$. Denotaremos $\Gamma(Sym^k(M))$ al conjunto de todos los campos de $(0, k)$ -tensores simétricos

3. Una p -forma diferenciable es un mapa diferenciable $\lambda : M \longrightarrow \bigwedge^k(M)$ que verifica $\pi_\wedge \circ \lambda = Id_M$. Denotaremos $\Omega^p(M)$ al conjunto de todas las p -formas diferenciables.

Campos de tensores

Al igual que en el caso de los campos vectoriales, para realizar operaciones con campos de tensores debemos hacer uso de las cartas locales de M . Para ver esto tomemos una carta local (U, ϕ) en M . En cada punto $p \in U$, los conjuntos $\{\partial_i|_p\}_{i=1}^n$ y $\{dx^i|_p\}_{i=1}^n$ son bases para T_pM y T_p^*M respectivamente, de modo que

$$\{\partial_{i_1}|_p \otimes \partial_{i_2}|_p \otimes \cdots \otimes \partial_{i_k}|_p \otimes dx^{j_1}|_p \otimes dx^{j_2}|_p \otimes \cdots \otimes dx^{j_l}|_p : 1 \leq i_1, i_2, \dots, i_k, j_1, j_2, \dots, j_l \leq n\}$$

constituye una base para $\mathcal{T}_l^k(T_pM)$. En consecuencia, sobre cada $p \in U$, un campo de tensores $T \in \Gamma(\mathcal{T}_l^k(M))$ puede expresarse como una combinación lineal

$$T_p = T_{j_1, j_2, \dots, j_l}^{i_1, i_2, \dots, i_k}(p) \partial_{i_1}|_p \otimes \partial_{i_2}|_p \otimes \cdots \otimes \partial_{i_k}|_p \otimes dx^{j_1}|_p \otimes dx^{j_2}|_p \otimes \cdots \otimes dx^{j_l}|_p \quad (2.8)$$

de este modo vemos que $T \in \Gamma(\mathcal{T}_l^k(M))$ está completamente determinado en (U, ϕ) por n^{k+l} funciones $T_{j_1, j_2, \dots, j_l}^{i_1, i_2, \dots, i_k} : U \longrightarrow \mathbb{R}$, que son llamadas *componentes del campo de tensores T en las coordenadas (U, ϕ)* . Más aún tenemos la siguiente caracterización:

PROPOSICIÓN 2.33 [21, p. 269] $T \in \Gamma(\mathcal{T}_l^k(M))$ si, y solo si, $\pi_{\mathcal{T}} \circ T = Id_M$ y sobre toda carta local sus componentes en coordenadas locales son funciones diferenciables.

De forma análoga al caso de campos vectoriales y 1-formas diferenciables, la potencia de este resultado radica en que nos permite obtener una base local de campos de tensores y, a su vez, interpretar a cada $T \in \Gamma(\mathcal{T}_l^k(M))$, como un mapa multilinear $T : \Omega^1(M)^k \times \mathfrak{X}(M)^l \longrightarrow C^\infty(M)$. En efecto, la proposición 2.33 asegura que para cualesquier conjunto de índices

$$1 \leq i_1, i_2, \dots, i_k, j_1, j_2, \dots, j_l \leq n$$

los mapas

$$\begin{aligned} \partial_{i_1} \otimes \partial_{i_2} \otimes \cdots \otimes \partial_{i_k} \otimes dx^{j_1} \otimes dx^{j_2} \otimes \cdots \otimes dx^{j_l} : U &\longrightarrow \mathcal{T}_l^k(U) \\ p &\mapsto \partial_{i_1}|_p \otimes \partial_{i_2}|_p \otimes \cdots \otimes \partial_{i_k}|_p \otimes dx^{j_1}|_p \otimes dx^{j_2}|_p \otimes \cdots \otimes dx^{j_l}|_p \end{aligned}$$

son campos de (k, l) -tensores diferenciables en (U, ϕ) y forman una *base local de campos*

de tensores, pues de acuerdo con la ecuación (2.8) todo $T \in \Gamma(\mathcal{T}_l^k(M))$ puede expresarse en (U, ϕ) como

$$T = T_{j_1, j_2, \dots, j_l}^{i_1, i_2, \dots, i_k} \partial_{i_1} \otimes \partial_{i_2} \otimes \dots \otimes \partial_{i_k} \otimes dx^{j_1} \otimes dx^{j_2} \otimes \dots \otimes dx^{j_l} \quad (2.9)$$

debido a esto, cada $T \in \Gamma(\mathcal{T}_l^k(M))$ puede ser visto como el mapa multilinear

$$T : \Omega^1(M)^k \times \mathfrak{X}(M)^l \longrightarrow C^\infty(M)$$

pues para todo $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(l)} \in \mathfrak{X}(M)$ y $\theta^{(1)}, \theta^{(2)}, \dots, \theta^{(k)} \in \Omega^1(M)$, la función

$$T(\theta^{(1)}, \dots, \theta^{(k)}, X_{(1)}, \dots, X_{(l)}) : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

dada por

$$T(\theta^{(1)}, \dots, \theta^{(k)}, X_{(1)}, \dots, X_{(l)}) = T_{j_1, j_2, \dots, j_l}^{i_1, i_1, \dots, i_k} \theta_{i_1}^{(1)} \theta_{i_2}^{(2)} \dots \theta_{i_k}^{(k)} X_{(1)}^{j_1} X_{(2)}^{j_2} \dots X_{(l)}^{j_l}$$

es diferenciable.

OBSERVACIÓN 2.34 Los componentes de un campo de tensores $T \in \Gamma(\mathcal{T}_l^k(M))$, respecto a distintas cartas locales con intersección no vacía, se transforman de acuerdo con

$$T_{j_1, j_2, \dots, j_l}^{i_1, i_2, \dots, i_k} = T_{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_l}^{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k} \frac{\partial(\varphi \circ \phi^{-1})^{\mu_1}}{\partial y^{\nu_1}} \dots \frac{\partial(\phi \circ \varphi^{-1})^{\mu_l}}{\partial y^{\nu_k}}$$

(ver [31, p. 124]).

OBSERVACIÓN 2.35 El producto tensorial en los espacios $\mathcal{T}_l^k(T_p M)$ induce un producto tensorial para campos de tensores. En concreto, para todo par de campos de tensores $T \in \Gamma(\mathcal{T}_l^k(M))$ y $G \in \Gamma(\mathcal{T}_p^q(M))$, los componentes en coordenadas locales de $T \otimes G \in \Gamma(\mathcal{T}_{l+p}^{k+q}(M))$ son

$$(T \otimes G)_{j_1, j_2, \dots, j_l, j_{l+1}, j_{l+2}, \dots, j_{l+p}}^{i_1, i_2, \dots, i_k, i_{k+1}, i_{k+2}, \dots, i_{k+q}} = T_{j_1, j_2, \dots, j_l}^{i_1, i_2, \dots, i_k} G_{j_{l+1}, j_{l+2}, \dots, j_{l+p}}^{i_{k+1}, i_{k+2}, \dots, i_{k+q}}$$

Formas diferenciables

Puesto que una k -forma diferenciable es esencialmente un tensor y, además, el producto exterior se calcula en base al producto tensorial, sobre una carta local (U, ϕ) , el conjunto

$$\{dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \dots \wedge dx^{i_k} : 1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq n\}$$

es una base local de k -formas diferenciables. Por lo tanto, si λ es una k -forma diferenciable, sobre (U, ϕ) existen $\binom{n}{k}$ funciones diferenciables $\lambda_{i_1, \dots, i_k} : U \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfacen

$$\lambda = \lambda_{i_1, \dots, i_k} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \cdots \wedge dx^{i_k}$$

Expresar una forma diferenciable en función de una base local, además de facilitarnos su manejo operacional, nos permite introducir una noción de derivada para $\Omega^k(M)$ sin implementar estructuras adicionales en M :

TEOREMA 2.36 *Sea M una variedad diferenciable. Para todo $k \in \mathbb{N}$ existe un único mapa*

$$d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$$

que es llamado derivada exterior y satisface las siguientes propiedades:

1. d es \mathbb{R} -lineal.
2. para toda función $f \in C^\infty(M)$ y campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$, df se define como $df(X) = X \cdot f$
3. $d^2 = d \circ d = 0$
4. si θ es una k -forma diferenciable y λ es una l -forma diferenciable, entonces

$$d(\theta \wedge \lambda) = (d\theta) \wedge \lambda + (-1)^k \theta \wedge d\lambda$$

La demostración de este teorema consiste en definir $d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$ en términos de coordenadas locales como

$$d\omega = d\omega_{i_1, \dots, i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \quad \text{con } 1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_k \leq n$$

donde

$$d\omega_{i_1, \dots, i_k} = \partial_j \omega_{i_1, \dots, i_k} dx^j$$

y con esto demostrar cada una de las propiedades expuestas en el teorema. Los detalles pueden ser revisados en [21, p. 305].

Hasta el momento hemos visto como manipular formas diferenciables y campos vectoriales a través de la estructura diferenciable de M , sin embargo eso no es suficiente para hacer geometría pues, al igual que en el estudio de las curvas y superficies en \mathbb{R}^3 , necesitamos implementar un mecanismo que nos permita introducir la noción de derivación direccional y el concepto de curvatura. Para lograr esto debemos analizar

a las variedades diferenciables TM , T^*M , $\mathcal{T}_l^k(M)$ y $\Omega^p(M)$ como fibrados vectoriales sobre M , pues de este modo podremos proveerles una conexión lineal que generalizará el concepto de derivación direccional.

2.2. Fibrados vectoriales

De manera intuitiva podemos decir que un fibrado vectorial es una familia de espacios vectoriales, que llamaremos *Fibras*, indexados por los elementos de M . La utilidad de los fibrados vectoriales reside en que sus fibras forman una variedad diferenciable, lo que hace posible construir espacios vectoriales de mapas diferenciables que tomen valores en las fibras. La idea fundamental de todo esto es que las fibras son espacios vectoriales que albergan algún tipo de objeto matemático con un significado geométrico concreto para M , de tal modo que los mapas diferenciables entre M y el fibrado vectorial permitan definir y estudiar rigurosamente la geometría de M .

2.2.1. Conceptos básicos

DEFINICIÓN 2.37 Sean E, F, M variedades diferenciables y $\pi : E \rightarrow M$ un mapa diferenciable y sobreyectivo. Diremos que (E, π, M, F) es un Haz de Fibras si verifica lo siguiente: para todo punto $p \in M$ existe una vecindad $U \subset M$, alrededor de p , y un difeomorfismo $\phi_U : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times F$ tal que

$$pr_1 \circ \phi_U = \pi|_{\pi^{-1}(U)}$$

donde pr_1 es la proyección en el primer componente, es decir $pr_1 : U \times F \rightarrow U$, $(u, f) \mapsto u$. Además:

1. E es llamado Espacio Total
2. M es llamado Variedad Base
3. F es llamado Fibra General
4. π es llamada proyección
5. (U, ϕ_U) es llamado Trivialización Local

De ahora en adelante usaremos la notación $F \rightarrow E \xrightarrow{\pi} M$ para indicar que (E, π, M, F) es un haz de fibras.

DEFINICIÓN 2.38 Sea $F \longrightarrow E \xrightarrow{\pi} M$ un haz de fibras.

1. Para todo $p \in M$, llamaremos fibra de π sobre p al conjunto $E_p = \pi^{-1}(p)$
2. Una sección global de π es un mapa diferenciable $s : M \longrightarrow E$ tal que $\pi \circ s = Id_M$
3. Una sección local de π es un mapa diferenciable $s : U \longrightarrow E$ que satisface $\pi \circ s = Id_U$, donde U es un abierto de M .

OBSERVACIÓN 2.39 Toda sección global es una sección local.

DEFINICIÓN 2.40 Un atlas para el haz de fibras $F \longrightarrow E \xrightarrow{\pi} M$ es una familia de trivializaciones locales $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$, tal que $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ es un recubrimiento abierto de la variedad M .

DEFINICIÓN 2.41 Un haz de fibras $V \longrightarrow E \xrightarrow{\pi} M$ es llamado \mathbb{K} -fibrado vectorial de rango m si se verifican las siguientes condiciones:

1. La fibra general V y cada fibra E_x son espacios vectoriales de dimensión m sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C}$.
2. Existe un atlas $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ tal que para todo $\alpha \in \Lambda$ y $x \in U_\alpha$

$$\phi_{\alpha x} := \phi_\alpha|_{E_x} : E_x \longrightarrow \{x\} \times V \cong V$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales.

EJEMPLO 2.42

1. El fibrado tangente $\mathbb{R}^n \longrightarrow TM \xrightarrow{\pi} M$ es un fibrado vectorial cuyas fibras son los espacios T_pM y el conjunto de sus secciones globales es $\mathfrak{X}(M)$.
2. El fibrado cotangente $\mathbb{R}^n \longrightarrow T^*M \xrightarrow{\pi} M$ es un fibrado vectorial cuyas fibras son los espacios T_p^*M y el conjunto de sus secciones globales es $\Omega^1(M)$.
3. Para todo $k, l \in \mathbb{N}$, el fibrado tensorial

$$\mathbb{R}^{n^{k+l}} \longrightarrow \mathcal{T}_l^k(M) \xrightarrow{\pi} M$$

es un fibrado vectorial cuyas fibras son $\mathcal{T}_l^k(T_pM)$ y el conjunto de sus secciones globales es $\Gamma(\mathcal{T}_l^k(T_pM))$.

DEFINICIÓN 2.43 Sea $V \longrightarrow E \xrightarrow{\pi} M$ un fibrado vectorial con atlas $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$. Si (U_α, ϕ_α) y (U_β, ϕ_β) son dos trivializaciones locales con intersección no vacía, el mapa de transición

$$\phi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow GL(m, \mathbb{K})$$

es la aplicación definida por

$$\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}(x, v) = (x, \phi_{\alpha\beta}(x)v)$$

Los mapas de transición nos permiten ver como los vectores en la fibra general se transforman con los cambios de trivialización local.

EJEMPLO 2.44 En los fibrados tangente y cotangente, los mapas de transición esta determinados por la matriz jacobiana de los mapas de cambio de coordenadas.

DEFINICIÓN 2.45 Sean $V \longrightarrow E \xrightarrow{\pi_E} M$ y $W \longrightarrow F \xrightarrow{\pi_F} M$ dos fibrados vectoriales sobre M , tales que V y W son espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o \mathbb{C} .

1. Un aplicación $H : E \longrightarrow F$ se dice Mapa de fibras si $\pi_F \circ H = \pi_E$.
2. Un mapa de fibras $H : E \longrightarrow F$ es un homomorfismo de fibrados vectoriales si para toda fibra E_x el mapa $H|_{E_x} : E_x \longrightarrow F_x$ es una aplicación lineal.

2.2.2. Bases locales

Al momento de trabajar en un fibrado vectorial, sus secciones globales y locales son los mapas diferenciables que usaremos para hacer geometría, ya sea en la variedad base o en el fibrado vectorial como tal. Por ello ahora mostraremos como manipular secciones locales o globales empleando las trivializaciones locales.

Si $V \longrightarrow E \xrightarrow{\pi} M$ es un fibrado vectorial de rango m , denotaremos $\Gamma(E)$ al conjunto de todas las secciones globales de E sobre M , y denotaremos $\Gamma(U, E)$ al conjunto de todas las secciones locales de E sobre un abierto $U \subset M$. Ahora, puesto que cada fibra E_x posee estructura de espacio vectorial, $\Gamma(E)$ y $\Gamma(U, E)$ adquieren tal estructura a través de las operaciones suma y productora por escalar de cada una de las fibras. En efecto, para todo par de secciones r y s , ya sean locales o globales, y todo escalar $\lambda \in \mathbb{K}$, la suma y producto por escalar se define por

$$(s + r)(x) := s(x) + r(x)$$

$$(\lambda s)(x) := \lambda s(x)$$

Gracias a este hecho podemos proveer una noción de independencia lineal a $\Gamma(U, E)$:

DEFINICIÓN 2.46 *Sobre un abierto $U \subset M$, un conjunto de secciones locales $\{e_\mu\}_{\mu=1}^k$ se dice linealmente independiente si para todo $x \in U$, los vectores $\{e_\mu(x)\}_{\mu=1}^k$ son linealmente independientes en la fibra E_x . Si $k = m$ diremos que $\{e_\mu\}_{\mu=1}^k$ es una base de secciones locales sobre $U \subset M$.*

Con esto, si (U, ϕ) es una trivialización local de $V \longrightarrow E \xrightarrow{\pi} M$, podemos construir una base de secciones locales sobre U a partir de una base $\{v_\mu\}_{\mu=1}^m$ de la fibra general V . Para ello basta tomar $\{e_\mu\}_{\mu=1}^k$ como

$$e_\mu(x) = \phi^{-1}(x, v_\mu)$$

En efecto, puesto que para todo $x \in U$ el mapa ϕ_x es un isomorfismo entre E_x y V , $\{e_\mu(x)\}_{\mu=1}^k$ es una base de E_x ya que $\phi(e_\mu(x)) = (x, v_\mu)$ para todo $\mu = 1, \dots, m$. De este modo podemos asociar a cada trivialización local una base de secciones locales. Por lo tanto, en cada punto $x \in U$, todo elemento de $\Gamma(E)$ o de $\Gamma(U, E)$ puede expresarse como una combinación lineal

$$s(x) = s^\mu(x)e_\mu(x) \tag{2.10}$$

así obtenemos m funciones diferenciables $s^\mu : U \longrightarrow \mathbb{K}$ que llamaremos *componentes de la sección s sobre la trivialización local (U, ϕ)* . Las operaciones que se realizan sobre secciones locales o globales se efectúan justamente a través estas funciones.

EJEMPLO 2.47 *En el fibrado vectorial $\mathbb{R}^n \longrightarrow TM \xrightarrow{\pi} M$, se tiene que $\Gamma(TM) = \mathfrak{X}(M)$ y, sobre una carta local (U, ϕ) de M , el conjunto $\{\partial_i\}_{i=1}^n$ es una base local de secciones.*

2.2.3. Formas diferenciables en espacios y fibrados vectoriales

Como veremos más adelante, para introducir la noción de derivada direccional para las secciones de un fibrado vectorial, se requiere implementar una estructura adicional llamada *Conexión Lineal*. Persiguiendo dicho objetivo, necesitaremos trabajar con formas diferenciables que tomen valores en espacios vectoriales de dimensión finita. Adicionalmente, para introducir la curvatura asociada a una conexión lineal será necesario trabajar con formas diferenciables que tomen valores en un fibrado vectorial.

Formas diferenciables a valores vectoriales

Sea W un \mathbb{K} -espacio vectorial de dimensión $r < \infty$. Dicho en forma rigurosa, una k -forma diferenciable a valores en W es una sección del fibrado vectorial

$$\Omega^k(M) \otimes W \longrightarrow M$$

sin embargo para no adentrarnos en los detalles de la construcción del producto tensorial de espacios vectoriales, sobre una carta local (U, ϕ) de M una forma diferenciable a valores en W , digamos θ , puede verse como una combinación lineal

$$\theta = \sum_{j=1}^r \theta_j w_j$$

donde $\{w_j\}_{j=1}^r$ es una base de W y $\theta_j \in \Omega^k(M)$. Desde este punto de vista, θ puede interpretarse como la aplicación lineal $\theta : \mathfrak{X}(M)^k \longrightarrow W$ dada por

$$\theta(Y_1, Y_2, \dots, Y_k) = \sum_{j=1}^r \theta_j(Y_1, Y_2, \dots, Y_k) w_j, \quad \forall (Y_1, \dots, Y_k) \in \mathfrak{X}(M)^k$$

Aprovechando la estructura de espacio vectorial que posee W , el conjunto de todas las k -formas diferenciables a valores en W , denotado $\Omega^k(M, W)$, es un espacio vectorial con las operaciones suma y producto por escalar definidas como

$$\begin{aligned} \theta + \omega &= \sum_{j=1}^r (\theta_j + \omega_j) w_j \\ \alpha \theta &= \alpha \sum_{j=1}^r \theta_j w_j \end{aligned}$$

para todo $\theta, \omega \in \Omega^k(M, W)$ y $\alpha \in \mathbb{K}$. Adicionalmente, la derivada exterior usual se extiende de manera natural para formas diferenciables a valores en W mediante

$$d\theta = \sum_{j=1}^r d\theta_j w_j$$

En el caso particular en el que W sea una álgebra de Lie, es decir que posea una aplicación bilineal $[\cdot, \cdot] : W \times W \longrightarrow W$, llamada *Corchetes de Lie*, que satisface:

1. $[v, w] = -[w, v]$ para todo $v, w \in W$
2. $[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0$ para todo $u, v, w \in W$

entonces sus corchetes de Lie se extienden para formas diferenciables a valores en W como el mapa

$$[\cdot, \cdot] : \Omega^k(M, W) \times \Omega^p(M, W) \longrightarrow \Omega^{p+k}(M, W)$$

dado por

$$[\theta, \omega](X_1, \dots, X_{p+k}) = \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_{k+p}} \text{sgn}(\sigma) [\theta(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k)}), \omega(X_{\sigma(k+1)}, \dots, X_{\sigma(l+k)})]$$

Formas diferenciables a valores en $\Gamma(E)$

De manera análoga, si $\{e_\mu\}_{\mu=1}^m$ es una base local de secciones sobre una trivialización local (U, ϕ) , una k -forma diferenciable a valores $\Gamma(E)$, digamos ω , puede verse localmente como una combinación lineal

$$\omega = \sum_{\mu=1}^m \omega_\mu e_\mu$$

donde $\omega_\mu \in \Omega^k(M)$. Como es de esperarse, bajo este punto de vista ω actúa sobre $\mathfrak{X}(M)^k$ como la aplicación lineal $\omega : \mathfrak{X}(M)^k \longrightarrow \Gamma(E)$ definida por

$$\omega(X_1, \dots, X_k) = \sum_{\mu=1}^m \omega_\mu(X_1, \dots, X_k) e_\mu, \quad \forall (X_1, \dots, X_k) \in \mathfrak{X}(M)^k$$

Así mismo, gracias a que $\Gamma(E)$ es un espacio vectorial, si denotamos $\Omega^k(E)$ al conjunto de todas las k -formas diferenciables a valores en $\Gamma(E)$, este adquiere dicha estructura con las operaciones

$$\begin{aligned} \varphi + \psi &= \sum_{\mu=1}^m (\varphi_\mu + \psi_\mu) e_\mu \\ \alpha\varphi &= \alpha \sum_{\mu=1}^m \varphi_\mu e_\mu \end{aligned}$$

para todo $\varphi, \psi \in \Omega^k(E)$ y $\alpha \in \mathbb{K}$

Adicionalmente, el producto exterior se extiende fácilmente hacia un producto exterior entre formas diferenciables ordinarias con formas diferenciables a valores en $\Gamma(E)$ como el mapa $\wedge : \Omega^p(M) \times \Omega^l(E) \longrightarrow \Omega^{p+l}(E)$ definido por

$$\theta \wedge \omega = \sum_{\mu=1}^m (\theta \wedge \omega_\mu) e_\mu, \quad \forall \theta \in \Omega^p(M), \omega \in \Omega^l(E)$$

2.3. Conexiones y derivación covariante

Supongamos que $V \rightarrow E \xrightarrow{\pi} M$ es un fibrado vectorial y tomemos una sección $s \in \Gamma(E)$. Si deseamos analizar como varía la sección s en la dirección de un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$, en primera instancia sobre cada punto $p \in M$ intentaríamos calcular un límite de la forma

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{s(p + tX) - s(p)}{t}$$

sin embargo el numerador de la anterior expresión carece de sentido ya que el valor de la sección s en distintos puntos pertenece a distintas fibras y M no necesariamente posee estructura de espacio vectorial. Debido a esto hay que introducir la noción de derivación direccional de una manera más general.

DEFINICIÓN 2.48 Una Derivada Covariante o Conexión Lineal sobre $V \rightarrow E \xrightarrow{\pi} M$ es un mapa

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$$

que satisface las siguientes condiciones:

1. $\nabla_{X+Y}s = \nabla_X s + \nabla_Y s$
2. $\nabla_{fX}s = f\nabla_X s$
3. $\nabla_X(s + r) = \nabla_X s + \nabla_X r$
4. $\nabla_X(fs) = (X \cdot f)s + f\nabla_X s$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $s, r \in \Gamma(E)$ y $f \in C^\infty(M)$. Aquí hemos usado la notación $\nabla_X s := \nabla(X, s)$.

Una vez introducido el concepto de derivación covariante, la cuestión que nos concierne ahora es saber si todo fibrado vectorial admite al menos una conexión lineal. Para abordar tal problema inicialmente debemos identificar como luce una conexión lineal sobre una trivialización local, y a través de ello analizar cómo se constituye una conexión lineal sobre todo el fibrado vectorial.

En efecto, si $U \subset M$ es un abierto sobre el cual se define una trivialización local de $V \rightarrow E \xrightarrow{\pi} M$, entonces $V \rightarrow \pi^{-1}(U) \xrightarrow{\pi|_U} U$ es un fibrado vectorial y tenemos a nuestra disposición una base local de campos vectoriales $\{\partial_i\}_{i=1}^n$ y una base local de secciones $\{e_\mu\}_{\mu=1}^m$. Con esto, si ∇ es una conexión lineal sobre $V \rightarrow \pi^{-1}(U) \xrightarrow{\pi|_U} U$,

por definición $\nabla_{\partial_i} e_\mu$ es una sección local para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ y $\mu \in \{1, \dots, m\}$, de manera que en cada punto $x \in U$ esta sección puede ser expresada como una combinación lineal de la forma

$$\nabla_{\partial_i} e_\mu(x) = \Gamma_{i\mu}^\nu(x) e_\nu(x)$$

de este modo obtenemos nm^2 funciones $\Gamma_{i\mu}^\nu : U \rightarrow \mathbb{K}$ las cuales son llamadas *Símbolos de Christoffel* de la conexión ∇ . El rol fundamental que desempeñan estas funciones es caracterizar la derivada covariante, pues si tomamos un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ y una sección $s \in \Gamma(E)$ cualesquiera, sobre U podemos expresarles como

$$\begin{aligned} s &= s^\mu e_\mu \\ X &= X^i \partial_i \end{aligned}$$

y luego calcular $\nabla_X s$ usando las propiedades de ∇

$$\begin{aligned} \nabla_X s &= \nabla_{X^i \partial_i} (s^\mu e_\mu) = X^i \nabla_{\partial_i} (s^\mu e_\mu) \\ &= X^i [(\partial_i s^\mu) e_\mu + s^\mu \nabla_{\partial_i} e_\mu] = X^i [(\partial_i s^\mu) e_\mu + s^\mu \Gamma_{i\mu}^\nu e_\nu] \\ &= [\langle ds^\nu, X \rangle + X^i s^\mu \Gamma_{i\mu}^\nu] e_\nu \end{aligned}$$

Esta ecuación demuestra que para calcular $\nabla_X s$ sobre U únicamente requerimos conocer las funciones $\Gamma_{i\mu}^\nu$, y entonces, gracias a que $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $s \in \Gamma(E)$ son arbitrarios, se verifica que una conexión lineal en $V \rightarrow \pi^{-1}(U) \xrightarrow{\pi|_U} U$ esta completamente determinada por sus símbolos de Christoffel. Por otro lado, puesto que los índices μ, ν toman valores en $\{1, \dots, m\}$, los símbolos de Christoffel $\Gamma_{i\mu}^\nu$ pueden ser interpretados como la aplicación de una 1-forma diferenciable, que toma valores en el álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(m, \mathbb{K}) = \text{Mat}(m, \mathbb{K})$, a los campos vectoriales ∂_i , es decir

$$\begin{aligned} A &= \Gamma_{i\mu}^\nu dx^i \in \Omega^1(U, \mathfrak{gl}(m, \mathbb{K})) \\ \Gamma_{i\mu}^\nu(x) &\in \mathfrak{gl}(m, \mathbb{K}), \quad \forall x \in U, i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

con esto, dado que para todo $x \in U$ tenemos la identificación $E_x \cong V \cong \mathbb{K}^m$, eligiendo la representación $\rho : \mathfrak{gl}(m, \mathbb{K}) \rightarrow \text{End}(V)$ como la multiplicación usual de una matriz por un vector, para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $s \in \Gamma(E)$ podemos expresar $\nabla_X s$ como

$$\nabla_X s = \langle ds, X \rangle + \rho(A(X))s \tag{2.11}$$

De este modo, la ecuación (2.11) indica que si ∇ es una conexión lineal en el fibrado $V \longrightarrow \pi^{-1}(U) \xrightarrow{\pi|_U} U$, entonces está completamente determinada por una 1-forma diferenciable $A \in \Omega^1(U, \mathfrak{gl}(m, \mathbb{K}))$. Esto muestra que la existencia de una conexión lineal sobre una trivialización local radica únicamente en la elección de dicha forma diferenciable. Bajo este contexto, si $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ es un atlas para $V \longrightarrow E \xrightarrow{\pi} M$, a cada trivialización local (U_α, ϕ_α) le podemos proveer una conexión lineal ∇^α , con lo cual, tomando una partición de la unidad $\{f_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ subordinada a $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$, podemos definir una conexión lineal en $V \longrightarrow E \xrightarrow{\pi} M$ como

$$\nabla_X s = f_\alpha \nabla_X^\alpha s, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M), \forall s \in \Gamma(E)$$

así llegamos al siguiente resultado:

TEOREMA 2.49 *Todo fibrado vectorial admite una conexión lineal.*

OBSERVACIÓN 2.50

1. *Una conexión lineal ∇ en $V \longrightarrow E \xrightarrow{\pi} M$ está completamente determinada por una forma diferenciable $A \in \Omega^1(M, \mathfrak{gl}(m, \mathbb{K}))$. La forma diferenciable A es llamada *Conexión 1-forma*.*
2. *La conexión lineal de un fibrado vectorial no es única.*

Adicionalmente, si ∇ es una conexión lineal en $V \longrightarrow E \xrightarrow{\pi} M$, esta puede ser vista como el mapa

$$\begin{aligned} \nabla : \Gamma(E) &\longrightarrow \Omega^1(E) \\ s &\mapsto \nabla s \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \nabla s : \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \Gamma(E) \\ X &\mapsto \nabla_X s \end{aligned}$$

esta interpretación nos permite extender ∇ a un operador diferencial sobre $\Omega^p(E)$ para cualquier entero positivo $p \in \mathbb{Z}$:

DEFINICIÓN 2.51 Sea $V \longrightarrow E \xrightarrow{\pi} M$ un fibrado vectorial provisto de una conexión lineal ∇ . La derivada covariante exterior asociada a ∇ es el mapa

$$d_{\nabla} : \Omega^p(E) \longrightarrow \Omega^{p+1}(E)$$

dado por

$$d_{\nabla}\omega = \sum_{\mu=1}^m (d\omega_{\mu}e_{\mu} + (-1)^p\omega_{\mu} \wedge \nabla e_{\mu}), \quad \forall \omega \in \Omega^p(E)$$

donde $\{e_{\mu}\}_{\mu=1}^m$ es una base local de secciones en una trivialización local.

A su vez, con la derivada covariante exterior se introduce la *Curvatura* asociada a la conexión ∇ :

DEFINICIÓN 2.52 Sea $V \longrightarrow E \xrightarrow{\pi} M$ es un fibrado vectorial provisto de una conexión lineal ∇ . La curvatura asociada a la conexión ∇ es el mapa $F : \Gamma(E) \longrightarrow \Omega^2(E)$ dado por

$$F = d_{\nabla} \circ d_{\nabla}$$

Aunque la curvatura de una conexión lineal parece ser un mapa abstracto, es simplemente una 2-forma diferenciable a valores en $\mathfrak{gl}(m, \mathbb{K})$. En efecto, si $\{e_{\mu}\}_{\mu=1}^m$ es una base local de secciones sobre una trivialización local (U, ϕ) , entonces sobre ella se verifica

$$\nabla s = d_{\nabla}s = (ds^{\nu} + s^{\mu}\Gamma_{i\mu}^{\nu}dx^i)e_{\nu}, \quad \forall s \in \Gamma(E)$$

de modo que aplicando d_{∇} a esta expresión, obtenemos

$$\begin{aligned} F s(\partial_r, \partial_l) &= (\Gamma_{l\mu}^{\nu}\partial_r s^{\mu} - \Gamma_{r\mu}^{\nu}\partial_l s^{\mu})e_{\nu} + s^{\mu}(\partial_r\Gamma_{l\mu}^{\nu} - \partial_l\Gamma_{r\mu}^{\nu})e_{\nu} \\ &\quad - (\Gamma_{l\mu}^{\nu}\partial_r s^{\mu} - \Gamma_{r\mu}^{\nu}\partial_l s^{\mu})e_{\nu} + s^{\mu}(\Gamma_{r\mu}^{\nu}\Gamma_{l\nu}^{\sigma} - \Gamma_{l\mu}^{\nu}\Gamma_{r\nu}^{\sigma})e_{\sigma} \\ &= \rho(\partial_r A_l - \partial_l A_r + [A_r, A_l])s, \quad \forall s \in \Gamma(E) \end{aligned}$$

donde $[\cdot, \cdot]$ es el conmutador usual de matrices. De aquí se deduce que, sobre U , la curvatura F es simplemente

$$F = F_{rl}dx^r \wedge dx^l$$

donde

$$F_{rl} = \partial_r A_l - \partial_l A_r + [A_r, A_l] \in \mathfrak{gl}(m, \mathbb{K})$$

lo que a su vez muestra que sobre M la curvatura puede ser expresada como

$$F = dA + \frac{1}{2}[A, A]$$

por lo tanto, la curvatura F es un elemento de $\Omega^2(M, \mathfrak{gl}(m, \mathbb{K}))$, el cual actúa sobre $\Gamma(E)$ a través de la representación ρ . Adicionalmente, y de manera más específica, tenemos el siguiente resultado:

PROPOSICIÓN 2.53 *Sea $V \rightarrow E \xrightarrow{\pi} M$ es un fibrado vectorial provisto de una conexión lineal ∇ . Entonces*

$$F(X, Y)s = \nabla_X \nabla_Y s - \nabla_Y \nabla_X s - \nabla_{[X, Y]}s \quad (2.12)$$

para todo $s \in \Gamma(E)$ y $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$

La demostración de la proposición 2.53 es simple pero extensa. Únicamente se debe elegir un punto $p \in M$ cualquiera y una trivialización local alrededor de dicho punto para luego calcular ambos lados de la identidad (2.12) usando, respectivamente, la definición de derivada covariante exterior y derivada covariante usual, y así ver que coinciden.

2.4. Variedades Riemannianas

Ahora que ya hemos expuesto algunos de los aspectos más relevantes de la teoría de los fibrados vectoriales con conexiones lineales, ya contamos con todos los elementos necesarios para adentrarnos en los detalles de la Geometría Riemanniana que utilizaremos en nuestro trabajo. La idea central de la Geometría Riemanniana es tomar una sección del fibrado vectorial

$$\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}} \longrightarrow \text{Sym}^2(M) \longrightarrow M$$

la cual induzca un producto escalar definido positivo en cada espacio tangente de M . Esta sección es llamada *Tensor métrico* o simplemente *Métrica*. Naturalmente cada producto escalar le dota a su respectivo espacio tangente de una geometría. A partir de ello, la métrica permite definir una función de distancia sobre M , y adicionalmente construir una conexión lineal que da lugar a varios campos de tensores y funciones escalares que determinan la geometría de M .

La Geometría Riemanniana en si misma es una disciplina muy grande dentro de la matemática moderna, sin embargo, dado que nuestro objetivo es analizar aquellos campos de tensores y funciones escalares que describen la curvatura de M , únicamente exploraremos los conceptos y resultados relacionados a dichas cantidades geométricas.

2.4.1. Tensor métrico

Definiremos ahora el tensor métrico de una variedad diferenciable M de manera rigurosa y expondremos algunas de sus propiedades más útiles.

DEFINICIÓN 2.54 *Sea W un espacio vectorial real. Un producto escalar en W es un $(0, 2)$ -tensor g en W tal que*

1. $g(v, w) = g(w, v)$ para todo $v, w \in V$.
2. $g(v, \cdot) \neq 0$ para todo $v \in W - \{0\}$

diremos que g es definido positivo si

$$\begin{aligned} g(v, v) &\geq 0, \quad \forall v \in W \\ g(v, v) &> 0, \quad \forall v \in W - \{0\} \end{aligned}$$

DEFINICIÓN 2.55 *Una métrica, o tensor métrico, en una variedad diferenciable M es un campo de $(0, 2)$ -tensores simétricos $g \in \Gamma(\text{Sym}^2(M))$ tal que, para todo $x \in M$, $g(x)$ es un producto escalar en $T_x M$. Si para todo punto $x \in M$ el producto escalar $g(x)$ es definido positivo, entonces diremos que (M, g) es una variedad Riemanniana y que g es una métrica Riemanniana.*

Una de las propiedades más fascinantes de las variedades diferenciables es que todas pueden ser dotadas de una métrica Riemanniana [31], por ello en adelante asumiremos que (M, g) es una variedad Riemanniana y será el contexto en el que trabajaremos.

Subir-bajar índices

En coordenadas locales la métrica g puede expresarse como

$$g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$$

Gracias a que g induce un producto escalar en cada espacio tangente, para todo punto de $x \in M$, $(g_{ij}(x))_{i,j=1}^n$ es una matriz invertible cuya inversa denotaremos $(g^{ij}(x))_{i,j=1}^n$. Con esto definimos la métrica inversa de g como el campo de $(2,0)$ -tensores simétrico g^{-1} dado por

$$g^{-1} = g^{ij} \partial_i \otimes \partial_j$$

De la misma manera en que un producto escalar en un espacio vectorial real de dimensión finita permite transformar vectores en funcionales lineales y viceversa, podemos usar la métrica g para transformar campos vectoriales en 1-formas diferenciables y viceversa. En efecto, todo campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ puede ser transformado en una 1-forma diferenciable $X^\flat \in \Omega^1(M)$ mediante

$$X^\flat(Y) = g(X, Y), \quad \forall Y \in \mathfrak{X}(M) \quad (2.13)$$

mientras que toda 1-forma diferenciable $\omega \in \Omega^1(M)$ puede ser transformada en un campo vectorial $\omega^\sharp \in \mathfrak{X}(M)$ mediante

$$\langle \theta, \omega^\sharp \rangle = g^{-1}(\omega, \theta), \quad \forall \theta \in \Omega^1(M) \quad (2.14)$$

las ecuaciones (2.13) y (2.14) aseguran que en coordenadas locales X^\flat y ω^\sharp pueden expresarse respectivamente como

$$X^\flat = g_{ij} X^i dx^j$$

$$\omega^\sharp = g^{ij} \omega_i \partial_j$$

entonces, definiendo $X_j := g_{ij} X^i$ y $\omega^j = g^{ij} \omega_i$ para todo $j = 1, \dots, n$, tenemos

$$X^\flat = X_j dx^j$$

$$\omega^\sharp = \omega^j \partial_j$$

es por esto que, de manera intuitiva, para transformar un campo vectorial en una 1-forma diferenciable lo que hacemos es "*bajar*" sus índices con la ayuda del tensor métrico, mientras que para transformar una 1-forma diferenciable en un campo vectorial lo que hacemos es "*subir*" sus índices.

Ahora, puesto que todo campo de tensores localmente se puede expresar como una combinación lineal de productos tensoriales de campos vectoriales y 1-formas diferenciables, este procedimiento se extiende a cualquier tipo de campo de tensores. Por

ejemplo, $B \in \Gamma(\mathcal{T}_3^1(M))$ se transforma en un campo de $(4, 0)$ -tensores mediante

$$B_{ijkl} = g_{lp} B_{ijk}^p$$

Así mismo podemos reducir el orden de un campo de tensores "*contrayendo*" índices, por ejemplo, un campo de $(4, 0)$ -tensores H se transforma en campo de $(0, 2)$ -tensores mediante

$$H_{ij} = g_{rp} g_{il} g_{js} H^{lrps}$$

Producto escalar de tensores

En general usando el tensor métrico podemos manipular los índices de un campo de tensores para transformarlo de cualquier manera que necesitemos, incluso es posible definir un producto escalar para tensores. En efecto, dado un punto $p \in M$, los componentes del producto tensorial de un par de tensores $B, H \in \mathcal{T}_k^l(T_p M)$ son

$$(B \otimes H)_{i_1, \dots, i_k, r_1, \dots, r_k}^{j_1, \dots, j_l, s_1, \dots, s_l} = B_{i_1, \dots, i_k}^{j_1, \dots, j_l} H_{r_1, \dots, r_k}^{s_1, \dots, s_l}$$

entonces, si usamos $g(p)$ para contraer todos los índices de este producto tensorial, obtenemos un escalar

$$\langle B, H \rangle := g^{i_1 r_1} \dots g^{i_k r_k} g_{j_1 s_1} \dots g_{j_l s_l} B_{i_1, \dots, i_k}^{j_1, \dots, j_l} H_{r_1, \dots, r_k}^{s_1, \dots, s_l}$$

Este procedimiento define un producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{T}_k^l(T_p M) \times \mathcal{T}_k^l(T_p M) \longrightarrow \mathbb{R}$, cuya norma asociada $|\cdot| : \mathcal{T}_k^l(T_p M) \longrightarrow \mathbb{R}$ está dada por

$$|B|^2 = \langle B, B \rangle = g^{i_1 r_1} \dots g^{i_k r_k} g_{j_1 s_1} \dots g_{j_l s_l} B_{i_1, \dots, i_k}^{j_1, \dots, j_l} B_{r_1, \dots, r_k}^{s_1, \dots, s_l}, \quad \forall B \in \mathcal{T}_k^l(T_p M)$$

Esta idea se extiende también para campos de tensores. En efecto, si tomamos un par $(T, K) \in \Gamma(\mathcal{T}_k^l(M))^2$, en cada punto $x \in M$ podemos calcular $\langle T(x), K(x) \rangle \in \mathbb{R}$. Esto da origen a la función escalar

$$\langle T, K \rangle : M \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \langle T(x), K(x) \rangle$$

ahora, como los componentes en coordenadas locales de un campo de tensores son funciones diferenciables, para todo $T, K \in \Gamma(\mathcal{T}_k^l(M))$ la función $\langle T, K \rangle$ es diferenciable. De este modo obtenemos el mapa

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \Gamma(\mathcal{T}_k^l(M)) \times \Gamma(\mathcal{T}_k^l(M)) \longrightarrow C^\infty(M), \quad (T, K) \mapsto \langle T, K \rangle$$

que en adelante llamaremos *Producto Escalar de Campos de Tensores*.

OBSERVACIÓN 2.56 *El producto escalar de campos de tensores no es un producto escalar en el sentido usual, pues toma valores en $C^\infty(M)$ y no en un cuerpo \mathbb{K} , por lo tanto no podemos afirmar que $\Gamma(\mathcal{T}_k^l(M))$ es un espacio Euclídeo. Sin embargo este mapa recibe ese nombre ya que, punto a punto, efectivamente está ligado al producto escalar de un espacio vectorial de tensores.*

Procediendo de manera similar, el *Cuadrado de la Norma* de un campo de tensores se define como el mapa

$$\begin{aligned} |\cdot|^2 : \Gamma(\mathcal{T}_k^l(M)) &\longrightarrow C^\infty(M) \\ T &\mapsto |T|^2 = \langle T, T \rangle \end{aligned}$$

Longitud y distancia

Si $\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$ es una curva suave sobre entre dos puntos $\gamma(t_1)$ y $\gamma(t_2)$, entonces la longitud de la curva γ entre dichos puntos se define como

$$L(\gamma) := \int_{t_1}^{t_2} |\gamma'| dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(g_{ij}(\gamma(t)) \frac{d\gamma^i}{dt} \frac{d\gamma^j}{dt} \right)^{1/2} dt$$

esta forma de calcular la longitud es independiente de la parametrización elegida para γ y nos permite introducir la noción de distancia:

DEFINICIÓN 2.57 *Si (M, g) es una variedad Riemanniana, la distancia entre dos puntos $p, q \in M$ se denota $d_g(p, q)$ y se define como el ínfimo de las longitudes de todas las curvas que unen a los puntos p y q*

$$d_g(p, q) := \inf_{\gamma} L(\gamma)$$

El mapa $d_g : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ descrito en la definición 2.57 es una función de distancia, y aun más, la topología que esta induce en M coincide con su topología original (ver [17]). Por lo tanto toda variedad Riemanniana (M, g) es un espacio métrico.

2.4.2. Conexión de Levi-Civita

La conexión de Levi-Civita es una conexión lineal en el fibrado tangente que se distingue por estar completamente determinada por la métrica g . La importancia de

esta conexión reside en que su curvatura asociada caracteriza la naturaleza geométrica de (M, g) , y es por ello que constituye uno de los elementos de clave la Geometría Riemanniana. En esta sección presentaremos algunos de los aspectos más relevantes de esta conexión.

DEFINICIÓN 2.58

1. En el fibrado tangente, una conexión lineal $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ se dice compatible con la métrica g si satisface

$$d\langle Y, Z \rangle(X) = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$$

2. Una conexión lineal $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ se dice libre de torsión si

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$

El teorema fundamental de la geometría Riemanniana (ver [22]) garantiza la existencia de una única conexión lineal libre de torsión que es compatible con la métrica g . Tal conexión es la famosa *Conexión de Levi-Civita* y, en coordenadas locales, sus símbolos de Christoffel se definen como

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}g^{kl}(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij})$$

Por lo tanto, sobre una carta local, la derivada covariante de un campo vectorial diferenciable $Y \in \mathfrak{X}(M)$ en la dirección $X \in \mathfrak{X}(M)$ es

$$\nabla_X Y = (X^i \partial_i Y^k + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k) \partial_k \tag{2.15}$$

La conexión de Levi-Civita fundamentalmente esta definida en el fibrado tangente, sin embargo esta puede extenderse a una conexión en cualquier fibrado tensorial. De hecho, esto es una consecuencia del siguiente resultado:

PROPOSICIÓN 2.59 [22, p. 53] Si ∇ una conexión lineal en $\mathbb{R}^n \rightarrow TM \xrightarrow{\pi} (M, g)$, entonces para cada fibrado tensorial $\mathcal{T}_l^k(M)$ existe una única conexión lineal, que también es denotada ∇ , que verifica las siguientes condiciones:

1. Sobre $\mathcal{T}^0(M) = C^\infty(M)$ la conexión ∇ satisface

$$\nabla_X f = X \cdot f, \quad \forall f \in C^\infty(M), \forall X \in \mathfrak{X}(M)$$

2. Para todo par de campos de tensores F, G y todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ se cumple que

$$\nabla_X(F \otimes G) = (\nabla_X F) \otimes G + F \otimes (\nabla_X G)$$

3. Para todo $\omega \in \Omega^1(M)$ y todo $Y, X \in \mathfrak{X}(M)$ se tiene

$$\nabla_X \langle \omega, Y \rangle = \langle \nabla_X \omega, Y \rangle + \langle \omega, \nabla_X Y \rangle$$

4. Para todo $F \in \mathcal{T}_l^k(M)$, campos vectoriales $Y_j \in \mathfrak{X}(M)$ y 1-formas $\omega^r \in \Omega^1(M)$ se verifica

$$\begin{aligned} \nabla_X F(\omega^1, \dots, \omega^k, Y_1, \dots, Y_l) &= X \cdot F(\omega^1, \dots, \omega^k, Y_1, \dots, Y_l) \\ &\quad - \sum_{j=1}^k F(\omega^1, \dots, \nabla_X \omega^j, \dots, \omega^k, Y_1, \dots, Y_l) - \sum_{i=1}^l F(\omega^1, \dots, \omega^k, Y_1, \dots, \nabla_X Y_i, \dots, Y_l) \quad (*) \end{aligned}$$

A través del numeral (3) de la proposición 2.59, con la conexión de Levi-Civita, es fácil ver que la derivada covariante de una 1-forma $\omega \in \Omega^1(M)$ en la dirección $X \in \mathfrak{X}(M)$ en coordenadas locales es

$$\nabla_X \omega = (X^i \partial_i \omega_k - X^i \omega_j \Gamma_{ik}^j) dx^k \quad (2.16)$$

por tanto, para calcular en coordenadas locales la derivada covariante de un campo de tensores basta con usar las identidades (2.15) y (2.16) en la formula (*). Otro hecho fácil de deducir a partir de la proposición 2.59 es que la compatibilidad con de la conexión con la métrica g es equivalente a exigir que $\nabla g = 0$.

Notación

En las siguientes secciones y capítulos necesitamos realizar varias operaciones que involucran campos de tensores y sus derivadas covariantes. La manera usual de ejecu-

tar tales operaciones es a través de sus componentes en coordenadas locales, y por ello introduciremos una notación que nos permitirá identificar los componentes en coordenadas locales de las derivadas covariantes de un campo de tensores.

Si B es un campo de (k, l) -tensores, entonces su derivada covariante puede ser vista como un campo de $(k, l + 1)$ -tensores mediante

$$\nabla B(\omega^1, \dots, \omega^k, Y_1, \dots, Y_l, X) = \nabla_X B(\omega^1, \dots, \omega^k, Y_1, \dots, Y_l)$$

para identificar los componentes en coordenadas locales de ∇B usaremos la siguiente notación:

$$\nabla_{j_{l+1}} B_{j_1, \dots, j_l}^{i_1, \dots, i_k} := \nabla_{\partial_{j_{l+1}}} B(dx^{i_1}, \dots, dx^{i_k}, \partial_{j_1}, \dots, \partial_{j_l})$$

mientras que para subir el j_{l+1} -ésimo índice (asociado a la derivada covariante) de los componentes en coordenadas locales de ∇B usaremos

$$\nabla^i := g^{ij} \nabla_j$$

OBSERVACIÓN 2.60 *Si consideramos el producto tensorial de dos campos de tensores $A \otimes B$, de acuerdo con la proposición 2.59, tenemos*

$$\nabla(A \otimes B) = B \otimes \nabla A + A \otimes \nabla B \quad (2.17)$$

entonces los componentes en coordenadas locales de $\nabla(A \otimes B)$ son

$$\nabla(A \otimes B)_{j_1, \dots, j_l, j_{l+1}, \dots, j_{l+p}, j_{k+q+1}}^{i_1, \dots, i_k, i_{k+1}, \dots, i_{k+q}} = B_{j_1, \dots, j_l}^{i_1, \dots, i_k} \nabla_{j_{k+q+1}} A_{j_{l+1}, \dots, j_{l+p}}^{i_{k+1}, \dots, i_{k+q}} + A_{j_{l+1}, \dots, j_{l+p}}^{i_{k+1}, \dots, i_{k+q}} \nabla_{j_{k+q+1}} B_{j_1, \dots, j_l}^{i_1, \dots, i_k}$$

Operador Laplaciano

Como veremos en el tercer y cuarto capítulo, los flujos geométricos que analizaremos en este trabajo dan origen a ciertas ecuaciones de tipo reacción-difusión. Es por esto que necesitamos definir con precisión lo que es el operador Laplaciano sobre una variedad Riemanniana.

Si tomamos dos veces la derivada covariante de un campo de tensores $B \in \Gamma(\mathcal{T}_k^l(M))$, obtendremos un campo de $(k, l + 2)$ -tensores a través de

$$\nabla \nabla B(\omega^1, \dots, \omega^k, Y_1, \dots, Y_l, X, Z) = \nabla_X \nabla_Z B(\omega^1, \dots, \omega^k, Y_1, \dots, Y_l)$$

y sus componentes en coordenadas locales serán denotados

$$\nabla_{j_{l+1}} \nabla_{j_{l+2}} B_{j_1, \dots, j_l}^{i_1, \dots, i_k}$$

Bajo este contexto introducimos el operador Laplaciano de la siguiente manera:

DEFINICIÓN 2.61 Para cualquier par de enteros $k, l \in \mathbb{N}$ el operador Laplaciano es el mapa

$$\begin{aligned} \Delta : \Gamma(\mathcal{T}_k^l(M)) &\longrightarrow \Gamma(\mathcal{T}_k^l(M)) \\ B &\mapsto \Delta B \end{aligned}$$

definido para todo $B \in \Gamma(\mathcal{T}_k^l(M))$ como

$$\Delta B = (\Delta B)_{j_1, \dots, j_l}^{i_1, \dots, i_k} \partial_{i_1} \otimes \partial_{i_2} \otimes \dots \otimes \partial_{i_k} \otimes dx^{j_1} \otimes dx^{j_2} \otimes \dots \otimes dx^{j_l}$$

donde

$$(\Delta B)_{j_1, \dots, j_l}^{i_1, \dots, i_k} = g^{j_{l+1} j_{l+2}} \nabla_{j_{l+1}} \nabla_{j_{l+2}} B_{j_1, \dots, j_l}^{i_1, \dots, i_k}$$

Es decir, el Laplaciano de un campo de tensores $B \in \Gamma(\mathcal{T}_k^l(M))$ es la contracción de los últimos dos índices covariantes de los componentes en coordenadas locales de $\nabla \nabla B$. En términos más simples

$$\Delta = g^{ij} \nabla_i \nabla_j$$

2.4.3. Tensores y escalares de curvatura

La forma de curvatura de la conexión de Levi-Civita define un campo de $(3, 1)$ -tensores en M . Este campo de tensores es denotado \widehat{Rm} y, en concordancia con la proposición 2.53, está dado por

$$\widehat{Rm}(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z, \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$$

mientras que sus componentes en coordenadas locales se expresan como

$$R_{ijk}^l := \langle dx^l, \widehat{Rm}(\partial_i, \partial_j) \partial_k \rangle$$

El motivo por el cual \widehat{Rm} es llamado *tensor de curvatura* es porque este determina si la variedad Riemanniana (M, g) es, o no, localmente isométrica al espacio (\mathbb{R}^n, η) , donde

η es la métrica euclídea usual definida por $\eta_{ij} = \delta_{ij}$. En efecto, puesto que el tensor de curvatura es invariante bajo isometrías locales (ver [22]), en caso de que (M, g) sea localmente isométrico a (\mathbb{R}^n, η) , su tensor de curvatura necesariamente será nulo, pues

$$\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z = \nabla_{[X, Y]} Z, \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$$

Es por esto que toda variedad Riemanniana cuyo tensor de curvatura sea no nulo, no puede ser localmente asimétrica a \mathbb{R}^n , o dicho en términos más simples, no puede ser *plana*. De este modo la geometría de M queda determinada por el campo de tensores \widehat{Rm} .

Si bien \widehat{Rm} determina la geometría de (M, g) , bajo ciertas circunstancias es más sencillo y práctico trabajar con funciones escalares y campos de tensores que posean algún tipo de simetría y resuman, de alguna manera, la información de la curvatura. Esto motiva la construcción de *tensores y escalares de curvatura*.

Como primer paso, introducimos el tensor de curvatura de Riemann, Rm , que se define como

$$Rm(X, Y, Z, W) = \langle \widehat{Rm}(X, Y)Z, W \rangle$$

si denotamos R_{ijkl} a los componentes en coordenadas locales del tensor de Riemann, entonces vemos que

$$Rm = R_{ijkl} dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes dx^l$$

donde

$$R_{ijkl} = g_{lp} R_{ijk}^p$$

La importancia del tensor de curvatura de Riemann radica en que satisface las siguientes propiedades:

PROPOSICIÓN 2.62 [22, p. 123]

1. *Simetrías del tensor de Riemann*

$$R_{ijkl} = R_{klij} = -R_{jikl} = -R_{ijlk}$$

2. *Primera identidad de Bianchi*

$$R_{ijkl} + R_{jkil} + R_{kijl} = 0$$

3. Segunda identidad de Bianchi

$$\nabla_p R_{ijkl} + \nabla_i R_{jpkl} + \nabla_j R_{pikl} = 0$$

Una forma de resumir la información del tensor de Riemann es contraer dos de sus índices para obtener un campo de $(0, 2)$ -tensores simétrico. Dicho campo de tensores es llamado *Curvatura de Ricci* y se denota Ric . De manera más concreta, Ric es el campo de tensores simétrico que sobre una carta local se expresa como

$$Ric = R_{ij} dx^i \otimes dx^j$$

donde

$$R_{ij} = g^{km} R_{kijm}$$

Así mismo, si contraemos los índices de la curvatura de Ricci obtenemos una función escalar $R : M \rightarrow \mathbb{R}$ llamada *Escalar de Curvatura de Ricci*

$$R := g^{ij} R_{ij}$$

La curvatura de Ricci y el escalar de curvatura satisfacen la siguiente identidad:

PROPOSICIÓN 2.63 [22, p. 125] (*Identidad contraída de Bianchi*)

$$\nabla^j R_{ij} = \frac{1}{2} \nabla_i R$$

En general, manipulando el tensor de Riemann con la métrica, podemos construir un gran número de funciones escalares que representen a la curvatura de (M, g) . La importancia de estas funciones radica en que, a diferencia de un campo de tensores, su valor no depende del sistema de coordenadas elegido, de modo que la información que estas proporcionan es válida sobre toda la variedad M . Bajo ese contexto, uno de los escalares de curvatura más relevante es el *Escalar de Kretschmann*, el cual se define como

$$|Rm|^2 = R_{ijkl} R^{ijkl}$$

El escalar de Kretschmann nos permite determinar si en (M, g) existen singularidades en la curvatura, es decir, regiones donde la norma de la curvatura tiende al infinito. Por ejemplo, dado $m > 0$, para $M = \mathbb{R} \times (2m, \infty) \times S^2$ con la métrica de Schwarzschild

$$g = - \left(1 - \frac{2m}{r} \right) dt \otimes dt + \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{-1} dr \otimes dr + r^2 (d\theta \otimes d\theta + \sin^2 \theta d\varphi)$$

el escalar de Kretschmann satisface

$$\lim_{r \rightarrow 0} |Rm|^2 = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{48m^2}{r^6} = +\infty$$

lo que muestra que M tiene curvatura infinita sobre aquellos puntos donde $r = 0$.

Es por esto que, en el escenario de los flujos geométricos que estudiaremos en este trabajo, analizar la evolución del escalar de Kretschmann nos permite saber si, a lo largo del flujo, la métrica resultante desarrolla singularidades de curvatura.

Capítulo 3

Flujos geométricos: el flujo de Ricci

Un flujo geométrico es esencialmente una ecuación diferencial evolutiva definida sobre un fibrado vectorial. Dicho eso, cuestiones naturales de la teoría de las Ecuaciones Diferenciales Parciales, como la existencia y unicidad de soluciones a corto plazo o el comportamiento asintótico de las soluciones, deben ser abordadas en el contexto de la Geometría Diferencial.

Los flujos geométricos pueden ser de distinta naturaleza, sin embargo un gran número de ellos pueden ser clasificados en dos grandes grupos:

1. flujos intrínsecos: aquellos que hacen evolucionar la métrica de una variedad Riemanniana.
2. flujos extrínsecos: aquellos definidos sobre una sub-variedad (incrustada o inmersa) que hacen evolucionar su métrica y la inmersión o incrustación.

Dentro los flujos extrínsecos, podemos citar, por ejemplo, al *Flujo de Curvatura Media Inverso*, el cual se usó en la demostración de la desigualdad Riemanniana de Penrose [16]; mientras que del lado de los flujos intrínsecos podemos citar al *Flujo de Calabi*, que es usado en el estudio de las variedades de Kähler y la Teoría de Cuerdas [32]. Otros flujos geométricos que no pueden incluirse dentro de estos dos grupos, pero que tienen una gran relevancia tanto en matemática como en física teórica, son el *Flujo de Yang-Mills*, el cual hace evolucionar la conexión lineal de un fibrado vectorial, o el *Flujo de Ricci-Yang-Mills*, que hace evolucionar simultáneamente la métrica de la variedad base de un fibrado vectorial y su conexión lineal.

Por su importancia en la demostración de la famosa *Conjetura de Geometrización de Thurston*, uno de los flujos geométricos intrínsecos que ha sido estudiado de forma exhaustiva, es el flujo de Ricci. Como veremos en el siguiente capítulo, este flujo geo-

métrico, más allá de ser un objeto puramente matemático, posee un significado físico dentro de la Teoría de Cuerdas y, en ese escenario, su extensión natural es *Flujo del Grupo de Renormalización de Segundo Orden* (RG-2). Dada esta relación entre el flujo de Ricci y el flujo RG-2, en este capítulo exploraremos algunas de las técnicas usadas en el estudio del flujo de Ricci, para luego de extenderlas al estudio del flujo RG-2 en el cuarto capítulo. Hemos organizado este capítulo de la siguiente manera:

- En la sección 3.1 introduciremos los conceptos básicos de la teoría de las ecuaciones diferenciables en fibrados vectoriales. Esto nos permitirá definir con rigurosidad los flujos de Ricci y RG-2.
- La sección 3.2 está destinada al estudio del flujo de Ricci: presentaremos los principales resultados sobre la existencia y unicidad de soluciones, la evolución de la curvatura bajo este flujo y su control mediante el principio del máximo. Extenderemos estas técnicas para el estudio del flujo RG-2.

3.1. Ecuaciones diferenciales en fibrados vectoriales

Ahora, basados en [30], introduciremos algunos conceptos básicos de la teoría de las Ecuaciones Diferenciales que nos permitirán analizar los flujos geométricos que se han propuesto en este trabajo. A menos que se indique algo diferente, en adelante asumiremos que M es una variedad diferenciable cerrada (compacta y sin borde) de dimensión $n \in \mathbb{N}$ y que $\mathbb{R}^m \cong V \longrightarrow E \xrightarrow{\pi} M$ es un fibrado vectorial real provisto de una métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en cada fibra y una conexión lineal ∇ .

En el fibrado vectorial $V \longrightarrow E \xrightarrow{\pi} M$, un operador diferencial lineal de segundo orden es un mapa lineal $L : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E)$ el cual, sobre una trivialización local (U, ϕ) y una base de secciones locales $\{e_\alpha\}_{\alpha=1}^m$, puede expresarse como

$$L(s) = (a_{\alpha\beta}^{ij} \nabla_i \nabla_j s^\beta + b_{\alpha\beta}^i \nabla_i s^\beta + c_{\alpha\beta} s^\beta) e_\alpha, \quad \forall s \in \Gamma(E)$$

donde $a_{\alpha\beta}^{ij}$, $b_{\alpha\beta}^i$ y $c_{\alpha\beta}$ son funciones que van de $U \subset M$ en \mathbb{R} . Al igual que en el caso de operadores diferenciales en \mathbb{R}^k , los coeficientes $a_{\alpha\beta}^{ij}$ nos permiten dar una noción de elipticidad para el operador L . En efecto, si ξ es una 1-forma diferenciable en M , llamaremos *Símbolo del operador diferencial L en la dirección ξ* al homomorfismo de fibrados vectoriales

$$\sigma_\xi(L) : E \longrightarrow E$$

dado por

$$\sigma_\xi(L)[s] = (a_{\alpha\beta}^{ij}\xi_i\xi_j s^\beta + b_{\alpha\beta}^i\xi_i s^\beta + c_{\alpha\beta}s^\beta) e_\alpha, \quad \forall s \in \Gamma(E)$$

y llamaremos *Símbolo principal de L en la dirección ξ* al homomorfismo de fibrados vectoriales $\widehat{\sigma}_\xi(L) : E \rightarrow E$ dado por

$$\widehat{\sigma}_\xi(L)[s] = (a_{\alpha\beta}^{ij}\xi_i\xi_j s^\beta) e_\alpha, \quad \forall s \in \Gamma(E)$$

con esto, diremos que el operador diferencial L es elíptico si existe $\lambda > 0$ tal que

$$\langle \widehat{\sigma}_\xi(L)[s], s \rangle > \lambda |\xi|^2 |s|^2, \quad \forall s \in \Gamma(E), \quad \forall \xi \in \Omega^1(M) - \{0\}$$

Esta noción de elipticidad nos permite introducir la siguiente distinción:

DEFINICIÓN 3.1 *Sea $L : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ un operador diferencial lineal de segundo orden. Una ecuación diferencial evolutiva*

$$\begin{aligned} \partial_t s &= L(s) \\ s(\cdot, 0) &= s_0 \in \Gamma(E) \end{aligned}$$

se dice Parabólica si L es un operador elíptico.

Los flujos geométricos con los que trabajaremos nos llevan a enfrentar ecuaciones diferenciales de la forma

$$\partial_t s = P(s)$$

en las que el operador diferencial de segundo orden $P : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ es quasilineal o totalmente no lineal. En caso de que el operador sea quasilineal, sobre una trivialización local y una base local de secciones, este puede expresarse como

$$P(s, \nabla s) = [a_{\alpha\beta}^{ij}(x, s, \nabla s) \nabla_i \nabla_j s^\beta + b_{\alpha\beta}^i(x, s, \nabla s) \nabla_i s^\beta + c_{\alpha\beta}(x, s, \nabla s) s^\beta] e_\alpha, \quad \forall s \in \Gamma(E)$$

y si es totalmente no lineal

$$\begin{aligned} P(s, \nabla s, \nabla \nabla s) &= [a_{\alpha\beta}^{ij}(x, s, \nabla s, \nabla \nabla s) \nabla_i \nabla_j s^\beta \\ &\quad + b_{\alpha\beta}^i(x, s, \nabla s, \nabla \nabla s) \nabla_i s^\beta + c_{\alpha\beta}(x, s, \nabla s, \nabla \nabla s) s^\beta] e_\alpha, \quad \forall s \in \Gamma(E) \end{aligned}$$

En estos casos la noción de parabolicidad se extiende de la siguiente manera:

DEFINICIÓN 3.2 Sea $P : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E)$ un operador diferencial de segundo orden no lineal. Una ecuación diferencial evolutiva

$$\partial_t s = P(s) \quad (3.1)$$

$$s(x, 0) = s_0(x) \quad (3.2)$$

se dice *Débilmente Parabólica* en $w \in \Gamma(E)$, si la ecuación diferencial lineal

$$\partial_t v = DP(w)[v]$$

es parabólica, donde

$$DP(w)[v] = \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} P(w + \epsilon v)$$

En la teoría de las ecuaciones diferenciales parabólicas (no lineales), la existencia y regularidad de soluciones a corto plazo ha sido ampliamente estudiada, y se sabe que si el problema de valor inicial (3.1)-(3.2) es débilmente parabólico en s_0 y las funciones $a_{\alpha\beta}^{ij}$, $b_{\alpha\beta}^i$, $c_{\alpha\beta}$ son suficientemente regulares, entonces existe $T > 0$ y una única familia de secciones $s(t) : t \in [0, T)$ que resuelve dicho problema (ver [23], [20]).

Los conceptos de la teoría de las EDP's en fibrados vectoriales que hemos introducido constituyen el escenario en el que estudiaremos los flujos de Ricci y RG-2.

3.2. Flujo de Ricci

En el fibrado vectorial $\mathbb{R}^{n(n+1)/2} \longrightarrow Sym^2(M) \xrightarrow{\pi} M$, el flujo de Ricci deforma la métrica de una variedad Riemanniana cerrada (M, \tilde{g}) mediante el siguiente problema de valor inicial:

$$\partial_t g = -2Ric$$

$$g(x, 0) = \tilde{g}(x)$$

el cual puede expresarse en coordenadas locales como

$$\partial_t g_{ij} = -2R_{ij}$$

$$g_{ij}(x, 0) = \tilde{g}_{ij}(x)$$

En 1981 Richard Hamilton introdujo el flujo de Ricci como un mecanismo que permite evolucionar la métrica \tilde{g} hacia una métrica g con mejores propiedades, por ejemplo una

en la que la curvatura seccional sea constante (ver [13]). Mas allá de eso, el logro de Hamilton y sus coetáneos fue relacionar el comportamiento de las soluciones del flujo con la topología de M , lo cual después de más dos décadas de investigación, culminó en la demostración de la Conjetura de Geometrización de Thurston y la Conjetura de Poincaré en los artículos de Grigori Perelman [27],[25] y [26].

3.2.1. Existencia de soluciones a corto plazo

Si denotamos $\tilde{\nabla}$ a la conexión de Levi-Civita asociada a la métrica \tilde{g} , entonces en coordenadas locales el flujo de Ricci puede expresarse como

$$\begin{aligned}\partial_t g_{ij} &= -2R_{ij} \\ &= g^{kl}(\tilde{\nabla}_k \tilde{\nabla}_l g_{ij} + \tilde{\nabla}_i \tilde{\nabla}_j g_{kl} - \tilde{\nabla}_i \tilde{\nabla}_l g_{jk} - \tilde{\nabla}_k \tilde{\nabla}_j g_{il}) + F(\tilde{\nabla}g, g)\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}F(\tilde{\nabla}g, g) &= -g^{kl}g_{jp}\tilde{g}^{pq}\tilde{R}_{ikql} - \tilde{R}_{ij} \\ &\quad + \frac{1}{2}g^{kl}g^{pq}(\tilde{\nabla}_k g_{jp}\tilde{\nabla}_q g_{il} - \tilde{\nabla}_k g_{jp}\tilde{\nabla}_l g_{qi} - \tilde{\nabla}_k g_{jp}\tilde{\nabla}_i g_{ql} + \dots - \tilde{\nabla}_j g_{pk}\tilde{\nabla}_i g_{ql})\end{aligned}$$

Esto indica que el flujo de Ricci es básicamente una ecuación diferencial de segundo orden quasilineal. Ahora, para analizar la existencia de soluciones, naturalmente el primer paso sería calcular el símbolo principal del flujo de Ricci linealizado

$$\partial_t h = DRic(g)[h]$$

Como únicamente nos interesan los términos del operador $DRic(g)$ asociados a las segundas derivadas covariantes la métrica h , podemos prescindir de aquellos términos que solamente involucren a h y sus primeras derivadas covariantes usando las siglas *T.O.I* para abreviar la frase “*términos de orden inferior*” y referirnos a ellos. Dicho eso, tenemos el siguiente resultado:

PROPOSICIÓN 3.3 [28] *Si $g, h \in \Gamma(Sym^2(M))$ son dos métricas Riemannianas en M , y ∇ es la conexión de Levi-Civita asociada a la métrica g , entonces*

$$DRic(g)[h]_{ij} = \frac{1}{2}g^{pq}(\nabla_q \nabla_i h_{jp} + \nabla_q \nabla_j h_{ip} - \nabla_q \nabla_p h_{ij} - \nabla_i \nabla_j h_{pq}) + T.O.I.$$

La proposición 3.3 nos permite calcular el símbolo principal del flujo de Ricci lineal-

lizado. En efecto, para todo $\xi \in \Omega^1(M)$ no nulo tenemos

$$\langle \widehat{\sigma}_\xi(-2DRicc(g))[h], h \rangle = g^{pq}(\xi_q \xi_p h_{ij} + \xi_i \xi_j h_{pq} - \xi_q \xi_i h_{jp} - \xi_q \xi_j h_{ip}) h^{ij}$$

pero en particular si tomamos $h_{ij} = \xi_i \xi_j$ se verifica que

$$\langle \widehat{\sigma}_\xi(-2DRicc(g))[h], h \rangle = 0$$

esto muestra que el flujo no Ricci no es débilmente parabólico y por lo tanto, en principio, no es posible utilizar la teoría de las ecuaciones diferenciales parabólicas para demostrar la existencia y unicidad de soluciones para el flujo de Ricci. A pesar de este inconveniente, Hamilton demostró la existencia y unicidad de soluciones para flujo de Ricci usando el teorema de Nash-Moser, y posteriormente Dennis DeTurck llegó al mismo resultado ideando un ingenioso método que permite utilizar la teoría de las ecuaciones diferenciales parabólicas en este tipo de problemas (ver[8]). Dicho de manera intuitiva, el método de DeTurck (comúnmente llamado el "*truco de DeTurck*"), consiste de los siguientes pasos:

1. Incorporar nuevos términos (*términos de Deturck*) en el operador diferencial en cuestión, de tal modo que obtengamos un nuevo operador diferencial débilmente parabólico.
2. Usar la teoría de las ecuaciones diferenciales parabólicas para mostrar la existencia de soluciones a corto plazo para el problema de valor inicial con términos de Deturck.
3. Modificar la solución del problema con términos de Deturck para obtener la solución del problema original.

El flujo de Ricci con términos de Deturck es llamado *Flujo de Ricci-Deturck* y se expresa como

$$\begin{aligned} \partial_t g_{ij} &= -2R_{ij} + \nabla_i V_j + \nabla_j V_i \\ g_{ij}(\cdot, 0) &= \tilde{g}_{ij}(\cdot) \end{aligned}$$

donde $V_i = g_{ik} g^{\beta\alpha} (\Gamma_{\beta\alpha}^k - \tilde{\Gamma}_{\beta\alpha}^k)$. Los términos de Deturck eliminan aquellos términos del operador diferencial que le impiden ser débilmente parabólico. En efecto, siguiendo los cálculos de [29], en coordenadas locales el flujo de Ricci-Deturck es

$$\begin{aligned}
\partial_t g_{ij} = & g^{\alpha\beta} \tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\nabla}_\beta g_{ij} - g^{\alpha\beta} g_{ip} \tilde{g}^{pq} \tilde{R}_{jq\alpha\beta} - g^{\alpha\beta} g_{jp} \tilde{g}^{pq} \tilde{R}_{i\alpha q\beta} \\
& + g^{\alpha\beta} g^{pq} (\tilde{\nabla}_i g_{p\alpha} \tilde{\nabla}_j g_{q\beta} + 2\tilde{\nabla}_\alpha g_{jp} \tilde{\nabla}_q g_{i\beta} - 2\tilde{\nabla}_\alpha g_{jp} \tilde{\nabla}_\beta g_{iq}) \\
& - g^{\alpha\beta} g^{pq} (2\tilde{\nabla}_j g_{p\alpha} \tilde{\nabla}_\beta g_{iq} + 2\tilde{\nabla}_i g_{p\alpha} \tilde{\nabla}_\beta g_{jq})
\end{aligned}$$

de modo que el símbolo principal del problema linealizado asociado al flujo de Ricci-DeTurck, que denotaremos P , satisface

$$\langle \widehat{\sigma}_\xi(P(g))[h], h \rangle = |\xi|^2 |h|^2$$

para cualquier métrica Riemanniana $h \in \Gamma(\text{Sym}^2(M))$ y toda forma diferenciable no nula $\xi \in \Omega^1(M)$. Con esto, aplicando el truco de DeTurck se tiene el siguiente resultado:

PROPOSICIÓN 3.4 (*Existencia y unicidad de soluciones a corto plazo*) ([8], [6]) *Dada una métrica Riemanniana \tilde{g} sobre M , existe $T > 0$ y una única familia de métricas Riemannianas $g(t) : t \in [0, T)$ tales que*

$$\begin{aligned}
\partial_t g &= -2\text{Ric}, \quad t \in [0, T) \\
g(0) &= \tilde{g}
\end{aligned}$$

3.2.2. Evolución de la curvatura

Una vez que contamos con la existencia y unicidad de soluciones a corto plazo para el flujo de Ricci, el siguiente paso es investigar su comportamiento asintótico. En ese sentido nos interesa conocer que sucede con la geometría de M en aquellos tiempos $t > 0$ en los que el flujo de Ricci se vuelve singular (la métrica resultante $g(t)$ no está definida). En primera instancia podría pensarse que lo que se debe hacer es analizar el comportamiento del tensor de curvatura bajo el flujo, sin embargo esa no es una buena estrategia ya que los valores que toma un campo de tensores depende del sistema de coordenadas locales elegido, y eso hace posible hallar sistemas en las que dichas singularidades desaparecen (singularidades aparentes). Por lo tanto, lo que se debe hacer es analizar el comportamiento del flujo a través de *Escalares de Curvatura* ya que el valor que estas funciones toman es independiente del sistema de coordenadas elegido, y en ese contexto, para determinar la existencia de singularidades de curvatura bajo el flujo de Ricci la elección natural es analizar el escalar de Kretschmann:

$$|Rm|^2 = R_{ijkl} R^{ijkl}$$

En esta sección nuestro objetivo es calcular la evolución del escalar de Kretschmann bajo el flujo de Ricci. Para lograrlo, necesitamos inicialmente calcular la evolución de los tensores de curvatura, lo cual haremos usando el siguiente lema:

LEMA 3.5 [6, p. 53] *Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo. Si $\{g(t)\}_{t \in I}$ es una familia de métricas Riemannianas en M que depende diferenciablemente del parámetro $t \in I$, entonces*

1. $\partial_t \Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} (\nabla_i h_{jl} + \nabla_j h_{il} - \nabla_l h_{ij})$
2. $\partial_t R_{ijk}^l = \frac{1}{2} g^{lp} (\nabla_i \nabla_k h_{jp} - \nabla_i \nabla_p h_{jk} - \nabla_j \nabla_k h_{ip} + \nabla_j \nabla_p h_{ik} - R_{ijk}^q h_{qp} - R_{ijp}^q h_{kq})$
3. $\partial_t g^{ij} = -h^{ij} := -g^{ik} g^{jl} h_{kl}$
4. $\partial_t R_{ij} = \frac{1}{2} g^{pq} (\nabla_q \nabla_i h_{jp} + \nabla_q \nabla_j h_{ip} - \nabla_q \nabla_p h_{ij} - \nabla_i \nabla_j h_{pq})$
5. $\partial_t R = -\langle h, Ric \rangle - \Delta(\mathbf{tr}h) + \nabla^i \nabla^j h_{ij}$
6. $\partial_t d\mu = \frac{1}{2} g^{ij} h_{ij} d\mu$

donde $h_{ij} = \partial_t g_{ij}$, $d\mu$ es la forma de volumen dada por $d\mu = \sqrt{\det(g_{ij})} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ y ∇ es la conexión de Levi-Civita de $g(t)$.

Reemplazando $h_{ij} = -2R_{ij}$ en el lema 3.5, con la identidad (2) podemos calcular la evolución del tensor de curvatura bajo el flujo de Ricci

$$\partial_t R_{ijk}^l = \nabla_i \nabla^l R_{jk} + \nabla_j \nabla_k R_i^l - \nabla_j \nabla^l R_{ik} - \nabla_i \nabla_k R_j^l + g^{lp} (R_{ijk}^q R_{qp} + R_{ijp}^q R_{kq})$$

sin embargo, usando las identidades de Bianchi, el Laplaciano del tensor de curvatura puede expresarse como

$$\begin{aligned} \Delta R_{ijk}^l = & \nabla_i \nabla^l R_{jk} + \nabla_j \nabla_k R_i^l - \nabla_j \nabla^l R_{ik} - \nabla_i \nabla_k R_j^l - R_i^r R_{jrk}^l + R_j^r R_{iqk}^r \\ & + g^{pq} (R_{pik}^r R_{jqr}^l + R_{pjr}^l R_{iqk}^r - R_{ijp}^r R_{rpk}^l - R_{pir}^l R_{jqk}^r - R_{pjkr}^r R_{iq}^l) \end{aligned}$$

(ver [6, p. 178]). Juntando estas dos identidades se puede expresar la evolución del tensor de curvatura, bajo el flujo de Ricci, como una ecuación de tipo Reacción-Difusión.

PROPOSICIÓN 3.6 [6] *Si $g(t)$ es una solución del flujo de Ricci, entonces*

$$\begin{aligned} \partial_t R_{ijk}^l = & \Delta R_{ijk}^l + g^{pq} (R_{ijp}^r R_{rpk}^l - 2R_{pik}^r R_{jqr}^l + 2R_{pir}^l R_{jqk}^r) \\ & - R_i^p R_{pjkr}^l - R_j^p R_{ipkr}^l - R_k^p R_{ijpr}^l + R_p^l R_{ijk}^p \end{aligned}$$

donde Δ es el operador Laplaciano de $g(t)$

A su vez, contrayendo índices, este resultado nos permite calcular la evolución del tensor de curvatura de Riemann bajo el flujo de Ricci

COROLARIO 3.7 [6] Si $g(t)$ es una solución del flujo de Ricci, entonces

$$\begin{aligned} \partial_t R_{ijkl} = & \Delta R_{ijkl} + g^{pq} (R_{ijp}^r R_{rqkl} - 2R_{pik}^r R_{jqrl} + 2R_{pirl} R_{jqk}^r) \\ & - R_i^p R_{pjkl} - R_j^p R_{ipkl} - R_k^p R_{ijpl} - R_l^p R_{ijkp} \end{aligned}$$

donde Δ es el operador Laplaciano de $g(t)$

Finalmente con estos resultados podemos calcular la evolución del escalar de Kretschmann bajo el flujo de Ricci:

PROPOSICIÓN 3.8 [30] Si $g(t)$ es una solución del flujo de Ricci, entonces

$$\begin{aligned} \partial_t |Rm|^2 = & \Delta |Rm|^2 - 2|\nabla Rm|^2 + 2g^{pq} R^{ijkl} (R_{ijp}^r R_{rqkl} - 2R_{pik}^r R_{jqrl} + 2R_{pirl} R_{jqk}^r) \\ & - 2R^{ijkl} (R_i^p R_{pjkl} + R_j^p R_{ipkl} + R_k^p R_{ijpl} + R_l^p R_{ijkp}) \\ & + 2R_{ijkl} \left(R_a^{jkl} R^{ai} + R_b^{i\ kl} R^{bj} + R_c^{ij\ l} R^{ck} + R^{ijk\ d} R^{dl} \right) \end{aligned}$$

donde ∇ es la conexión de Levi-Civita y Δ es el operador Laplaciano de $g(t)$

Demostración. Usando el tercer numeral del lema 3.5 obtenemos

$$\begin{aligned} \partial_t |Rm|^2 &= \partial_t (R_{ijkl} R^{ijkl}) = R^{ijkl} (\partial_t R_{ijkl}) + R_{ijkl} (\partial_t R^{ijkl}) \\ &= R^{ijkl} (\partial_t R_{ijkl}) + R_{ijkl} \partial_t (g^{ai} g^{bj} g^{kc} g^{ld} R_{abcd}) \\ &= 2R^{ijkl} (\partial_t R_{ijkl}) + 2R_{ijkl} \left(R_a^{jkl} R^{ai} + R_b^{i\ kl} R^{bj} + R_c^{ij\ l} R^{ck} + R^{ijk\ d} R^{dl} \right) \end{aligned}$$

gracias al corolario 3.7 tenemos que

$$\begin{aligned} R^{ijkl} (\partial_t R_{ijkl}) &= R^{ijkl} \Delta R_{ijkl} + g^{pq} R^{ijkl} (R_{ijp}^r R_{rqkl} - 2R_{pik}^r R_{jqrl} + 2R_{pirl} R_{jqk}^r) \\ &\quad - R^{ijkl} (R_i^p R_{pjkl} + R_j^p R_{ipkl} + R_k^p R_{ijpl} + R_l^p R_{ijkp}) \end{aligned}$$

y en consecuencia

$$\begin{aligned} \partial_t |Rm|^2 &= 2R^{ijkl} \Delta R_{ijkl} + 2g^{pq} R^{ijkl} (R_{ijp}^r R_{rqkl} - 2R_{pik}^r R_{jqrl} + 2R_{pirl} R_{jqk}^r) \\ &\quad - 2R^{ijkl} (R_i^p R_{pjkl} + R_j^p R_{ipkl} + R_k^p R_{ijpl} + R_l^p R_{ijkp}) \\ &\quad + 2R_{ijkl} \left(R_a^{jkl} R^{ai} + R_b^{i\ kl} R^{bj} + R_c^{ij\ l} R^{ck} + R^{ijk\ d} R^{dl} \right) \end{aligned}$$

por otra parte

$$\Delta|Rm|^2 = g^{pq}\nabla_p\nabla_q(R_{ijkl}R^{ijkl}) = 2\nabla_p R_{ijkl}\nabla^p R^{ijkl} + 2R^{ijkl}\Delta R_{ijkl}$$

lo cual indica que

$$2R^{ijkl}\Delta R_{ijkl} = \langle Rm, \Delta Rm \rangle = \Delta|Rm|^2 - 2|\nabla Rm|^2$$

así finalmente obtenemos

$$\begin{aligned} \partial_t|Rm|^2 &= \Delta|Rm|^2 - 2|\nabla Rm|^2 + 2g^{pq}R^{ijkl}(R_{ijp}^r R_{rql} - 2R_{pik}^r R_{jql} + 2R_{pir}^l R_{jqk}) \\ &\quad - 2R^{ijkl}(R_i^p R_{pjkl} + R_j^p R_{ipkl} + R_k^p R_{ijpl} + R_l^p R_{ijkp}) \\ &\quad + 2R_{ijkl}\left(R_a^{jkl}R^{ai} + R_b^{i\ kl}R^{bj} + R_c^{ij\ l}R^{ck} + R^{ijk\ d}R^{dl}\right) \end{aligned}$$

□

Las ecuaciones de la evolución del tensor de curvatura de Riemann y el escalar de Kretschmann pueden escribirse de una manera más compacta introduciendo un tipo especial de notación.

Notación (*)

Para cualquier $A \in \Gamma(\mathcal{T}_k^l(M))$ y $B \in \Gamma(\mathcal{T}_s^r(M))$, denotaremos $A * B$ a cualquier campo tensores cuyos componentes en coordenadas locales son una combinación lineal de los componentes de $A \otimes B$ modificados por la métrica, es decir, donde sus índices han sido elevados, bajados o contraídos. Por ejemplo, si en coordenadas locales A y B están dados por

$$\begin{aligned} A &= A_i^j dx^i \otimes \partial_j \\ B &= B_{ijkl} dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes dx^l \end{aligned}$$

entonces el campo de tensores H definido como

$$\begin{aligned} H &= H_{ij} dx^i \otimes dx^j \\ H_{ij} &= A_{ab} B_{ij}^{ab} + g^{pq} A_i^l B_{jlpq} + B_i^{abc} B_{jabc} \end{aligned}$$

puede expresarse como

$$H = A * B + B * B$$

La notación $(*)$ es introducida por dos razones fundamentales:

1. Puesto que los componentes en coordenadas locales de $A * B$ son combinaciones lineales formadas a partir de los componentes de $A \otimes B$, siempre es posible hallar una constante $C \geq 0$ que depende únicamente de la dimensión de variedad M y satisface

$$|A * B| \leq C|A||B|$$

Para ver esto de mejor manera, como ejemplo consideremos los siguientes campos de tensores:

$$\begin{aligned} A &= A_{ij} dx^i \otimes dx^j \\ B &= B_k dx^k \\ H &= H_i dx^i = A_{ij} B^j dx^i \end{aligned}$$

con la notación $(*)$, vemos que $H = A * B$. Ahora si suponemos que $\dim(M) = 2$, la norma al cuadrado de H estará compuesta por una suma de ocho términos, con lo cual

$$|H|^2 = H_i H^i = A_{ij} B^j A^i_k B^k = A_{ij} A^{il} B_l B^j \leq 8|A|^2|B|^2$$

tomando la raíz cuadrada en ambos lados de esta desigualdad, obtenemos

$$|H| \leq \sqrt{8}|A||B|$$

en este caso podemos tomar $C = \sqrt{8}$. Por su puesto, si la dimensión de M fuese mayor, la suma $A_{ij} A^{il} B_l B^j$ tendría más términos y la constante C tomaría un mayor valor.

2. Gracias a la proposición 2.59 y la compatibilidad de métrica con la conexión de Levi-Civita, verifica que

$$\nabla(A * B) = (\nabla A) * B + A * (\nabla B)$$

pues los componentes en coordenadas locales de $\nabla(A * B)$ se obtienen a partir de los componentes de $\nabla(A \otimes B) = \nabla A \otimes B + A \otimes \nabla B$ modificados por la métrica. Para ver esto de manera mas clara, nuevamente recurrimos al ejemplo del numeral

anterior:

$$\nabla_k H_i = \nabla_k(A_{ij}B^j) = B^j \nabla_k A_{ij} + A_{ij} \nabla_k B^j = B * \nabla A + A * \nabla B$$

Por lo tanto, usando la notación (*), la evolución del tensor de curvatura de Riemann bajo el flujo de Ricci puede expresarse como

$$\partial_t Rm = \Delta Rm + Rm * Rm$$

mientras que la evolución del escalar de Kretschmann bajo el flujo de Ricci puede expresarse como

$$\partial_t |Rm|^2 = \Delta |Rm|^2 - 2|\nabla Rm|^2 + Rm * Rm * Rm \quad (3.3)$$

3.2.3. Principio del máximo y singularidades

De acuerdo con la proposición 3.8, bajo el flujo de Ricci la evolución del escalar de Kretschmann está gobernada por una ecuación de tipo reacción-difusión, de modo que podemos usar el principio del máximo para controlar la curvatura a lo largo del flujo. Para ver esto, inicialmente introducimos el concepto de sub y súper solución y el teorema del principio del máximo.

DEFINICIÓN 3.9 *Supongamos que $g(t) : t \in [0, T)$ es una familia de métricas Riemannianas en M y que Δ es el operador Laplaciano de $g(t)$. Consideremos la siguiente ecuación diferencial:*

$$\partial_t v = \Delta v + \langle X, \nabla v \rangle + F(v) \quad (3.4)$$

donde $X(t) : t \in [0, T)$ es una familia de campos vectoriales y $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función localmente Lipschitz.

Una función diferenciable $u : M \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ se dice súper-solución de (3.4) si verifica

$$\partial_t u \geq \Delta u + \langle X, \nabla u \rangle + F(u)$$

y se dice sub-solución si

$$\partial_t u \leq \Delta u + \langle X, \nabla u \rangle + F(u)$$

TEOREMA 3.10 (*Principio del Máximo*) ([30],[6]) Sea $u : M \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ una súper-solución de (3.4). Si existe una constante $C \in \mathbb{R}$ tal que $u(x, 0) \geq C, \forall x \in M$, y ϕ es la solución del problema de valor inicial

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\phi &= F(\phi) \\ \phi(0) &= C\end{aligned}$$

entonces $u(x, t) \geq \phi(t)$ para todo $x \in M$ y todo t donde ϕ se existe.

De manera análoga, cuando $u : M \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ es una sub-solución de (3.4), si existe una constante $\widehat{C} \in \mathbb{R}$ tal que $u(x, 0) \leq \widehat{C}, \forall x \in M$, y φ es la solución del problema de valor inicial

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\varphi &= F(\varphi) \\ \varphi(0) &= \widehat{C}\end{aligned}$$

entonces $u(x, t) \leq \varphi(t)$ para todo $x \in M$ y todo t donde ϕ se existe.

Ahora, en virtud del teorema 3.10, si $g(t) : t \in [0, T)$ es una solución del flujo de Ricci, dado que el valor de $|\nabla Rm|^2$ es no negativo para todo $t \in [0, T)$, de la ecuación (3.3) se deduce que

$$\partial_t |Rm|^2 \leq \Delta |Rm|^2 + C |Rm|^3$$

para alguna constante positiva C . Esto indica que el escalar de Kretschmann $|Rm|^2$ es una sub-solución de la ecuación diferencial

$$\partial_t u = \Delta u + Cu^{3/2}$$

por lo tanto, aplicando el teorema 3.10, obtenemos el siguiente resultado:

TEOREMA 3.11 Si $g(t) : t \in [0, T)$ es una una solución del flujo de Ricci y existe $L \in \mathbb{R}$ tal que $|Rm(x, 0)| \leq L$ para todo $x \in M$, entonces

$$|Rm| \leq \frac{L}{1 - \frac{1}{2}CLt}$$

Demostración. Puesto que la función

$$\phi(t) = \frac{L^2}{(1 - \frac{1}{2}CLt)^2}$$

es solución del problema de valor inicial

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\phi(t) &= C\phi(t)^{3/2} \\ \phi(0) &= L^2\end{aligned}$$

aplicando el principio del máximo con $X(t) = 0$, $F(r) = Cr^{3/2}$ y $u = |Rm|^2$, obtenemos

$$|Rm|^2 \leq \frac{L^2}{(1 - \frac{1}{2}CLt)^2}$$

□

La utilidad del teorema 3.11 radica en que permite demostrar que si el flujo de Ricci se vuelve singular en tiempo finito, entonces necesariamente la curvatura explota, es decir, desarrolla una singularidad.

TEOREMA 3.12 *Para toda métrica Riemanniana g_0 en M , el flujo de Ricci posee una única solución $g(t)$ en un intervalo maximal $[0, T)$ con $T \leq \infty$ y $g(0) = g_0$. Si $T < \infty$, entonces*

$$\lim_{t \rightarrow T} \left(\sup_{x \in M} |Rm(x, t)| \right) = +\infty$$

La demostración del teorema 3.12 sigue un razonamiento por contraposición: suponiendo que $\sup_{x \in M} |Rm(x, t)|$ no tiende al infinito cuando $t \rightarrow T$, se muestra que el flujo de Ricci puede extenderse hacia un intervalo de tiempo mas grande $[0, T + \epsilon)$, lo cual es una contradicción puesto que $[0, T)$ es un intervalo maximal. Básicamente la demostración contiene los siguientes pasos:

1. Si $\lim_{t \rightarrow T} (\sup_{x \in M} |Rm(x, t)|) \neq +\infty$, podemos tomar un número $\epsilon > 0$ para el cual $|Rm(\cdot, T - \epsilon)|$ esta acotado. Luego, tomando como tiempo inicial $T - \epsilon$, por el teorema 3.11 se se verifica que $|Rm|$ está acotado en $M \times [T - \epsilon, T)$.
2. Gracias a que $|Rm|$ está acotado, es posible mostrar que $g(t)$ converge a una métrica Riemanniana $g(T)$ cuando $t \rightarrow T$ con $t \in [T - \epsilon, T)$
3. Seleccionado como dato inicial a la métrica $g(T)$, se extiende el flujo de Ricci hacia un intervalo de tiempo mayor usando la proposición 3.4.

Los detalles pueden ser vistos en [30] o [6].

El desarrollo de singularidades de curvatura en tiempo finito bajo el Flujo de Ricci fue uno de los principales obstáculos que se tuvieron que superar para demostrar la

Conjetura de Geometrización de Thurston. La solución de Perelman [27] a este problema, dicho de manera intuitiva, fue detener el flujo antes de llegar al tiempo de singularidad y cortar la zona de singularidad para luego colocar “parches” en M . Así, eliminadas aquellas regiones donde la curvatura se volvía infinita, poder continuar con la evolución de la métrica. El estudio de las singularidades del flujo de Ricci motivó el desarrollo de nuevas técnicas, tanto de topología como de análisis, y es el principal aporte de Perelman al análisis geométrico.

Capítulo 4

Flujo del grupo de renormalización de segundo orden (RG-2)

En este capítulo estudiaremos el flujo del grupo de renormalización de segundo orden (RG-2), tanto desde el punto de vista del análisis geométrico como de la física teórica. En este capítulo es donde presentamos los resultados de este trabajo. En virtud de ello, hemos organizado este capítulo de la siguiente manera:

- En la sección 4.1 revisaremos brevemente el Modelo Sigma no lineal de la Teoría de Cuerdas para introducir el flujo RG-2 como una extensión del flujo de Ricci que tiene su origen en la física de altas energías.
- En la sección 4.2 presentamos los teoremas de existencia de soluciones para el flujo RG-2.
- Siguiendo las ideas expuestas en el estudio del flujo de Ricci, en la sección 4.3 calcularemos la evolución de los tensores y escalares de curvatura bajo el flujo RG-2, mientras que en la sección 4.4 usaremos el Principio del Máximo para tratar de controlar la evolución de la curvatura bajo este flujo.
- En la sección 4.5 calcularemos la evolución del escalar de curvatura bajo el flujo RG-2 y discutiremos brevemente el comportamiento de la entropía de Hamilton.

A lo largo de este capítulo, a menos que se indique algo distinto, asumiremos que M es una variedad diferenciable cerrada.

4.1. Modelo Sigma no lineal de la Teoría de Cuerdas

En teorías puramente geométricas, como la teoría de cuerdas, es natural esperar que las herramientas y resultados que se obtienen se puedan interpretar en el marco de la geometría diferencial. La geometría Lorentziana ha mostrado su utilidad cuando se estudian teorías de espaciotiempo, además, la geometría Riemanniana juega un papel muy importante cuando trabajamos en teoría de cuerdas. Así, para describir una cuerda bosónica que se propaga en el espaciotiempo, el modelo más simple es el modelo sigma no-lineal. Este modelo viene descrito por el funcional (acción clásica):

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha} \int_{\Sigma} g_{ij}(x) \partial_{\alpha} x^i \partial_{\beta} x^j \gamma^{\alpha\beta} dV(\gamma), \quad (4.1)$$

donde α es la constante de acople de la cuerda (longitud de la cuerda), (Σ, γ) es una métrica Riemanniana 2-dimensional que se denomina la *world-sheet* y es la variedad que describe la cuerda cuando se propaga, (M, g) es una variedad Riemanniana que se denomina el espacio "target", y $x : \Sigma \rightarrow M$ es la aplicación que dota de coordenadas a los puntos de la *world-sheet* en la variedad M . Para cuantizar la acción (4.1) se introduce un *cut-off*¹ Λ . Este cut-off, que tiene unidades de mometum, parametrizará las teorías que aparecen de la versión cuántica de (4.1). Así, mediante el proceso de cuantización obtenemos una familia de teorías cuánticas de campo indexadas por Λ . Si además requerimos que la familia de teorías obtenidas sean equivalentes a escalas donde Λ es muy grande² entonces se obtiene que las ecuaciones para el grupo de renormalización (RG) de la teoría vienen dadas, después de un re-escalamiento, por

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial \lambda} = \beta_{ij}, \quad (4.2)$$

donde las funciones β_{ij} se puede escribir perturbativamente en α como

$$\beta_{ij} = -2R_{ij} - \frac{\alpha}{2} R_{iklm} R_j^{klm} + \alpha^2 \dots \quad (4.3)$$

La cantidad de términos en α viene dada por el número de loops considerados. Así, el flujo de Ricci es el flujo de renormalización a 1-loop. El flujo RG-2 que es el flujo de

¹En el proceso de cuantización de la teoría es necesario introducir una cota para evitar que las cantidades estudiadas se vuelvan infinitas. Así, esta cota nos permite parametrizar la teoría. A dicha cota, en la literatura de física de altas energías se la denomina cut-off. En este caso, la cota es en la energía y por lo tanto, dependiendo del valor de la cota, estaremos trabajando en energías altas (límite ultravioleta) o energías bajas (límite infrarrojo).

²A escalas atómicas, en el límite ultravioleta.

renormalización a 2-loops, viene dado por

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial \lambda} = -2R_{ij} - \frac{\alpha}{2} R_{iklm} R_j^{klm}. \quad (4.4)$$

El flujo RG-2 dado en la ecuación anterior evoluciona la métrica de la variedad Riemanniana *target* M . Solo existe una restricción para el tipo de variedad "target", esta variedad tiene que ser Riemanniana. La variedad target es la que va a evolucionar con el flujo y de alguna manera nos permite conocer el tipo de teorías admisibles. Esto es, las teorías que no desarrollan singularidades pueden ser usadas como variedad target. Es por esto que es de vital importancia estudiar la evolución de la curvatura de tal variedad. En 2 dimensiones, el flujo de Ricci converge a superficies de curvatura constante. En 3 dimensiones, el flujo de Ricci siempre desarrolla singularidades. Esta es uno de las razones que hicieron complicada la demostración de la conjetura de Poincaré. La única manera que se encontró para lidiar con estas singularidades es la técnica denominada *surgery*. Esta técnica permite cortar a la variedad, removiendo las singularidades y permitiendo que el flujo continúe con la evolución.

En esta tesis nos enfocaremos en estudiar la evolución del escalar de Kretschman bajo el flujo de renormalización a 2-loops, denominado RG-2 flow. Este flujo es más complicado que el flujo de Ricci y por tanto no se ha estudiado en profundidad. Así, el cálculo de la evolución de este escalar no se ha hecho en toda generalidad. En el presente trabajo se calcula la evolución del escalar de Kretschman de la forma más general, es decir, sin hacer ninguna suposición sobre la dimensión de la variedad target y por tanto de la métrica que evoluciona bajo el flujo. Además, se intenta buscar cotas para tal evolución. Para esto es necesario adaptar el principio del máximo usado en el caso del flujo de Ricci, mas aún, necesitamos hacer suposiciones sobre los términos de orden superior en curvatura. Para asegurarnos de que estamos en el camino correcto siempre reduciremos los resultados a variedades conocidas, como por ejemplo: variedades de curvatura constante. En este capítulo se presentan los principales resultados de este trabajo de titulación. Es importante notar que estos resultados buscan resolver un problema abierto del análisis geométrico, a saber el control de la curvatura a tiempo finito. Este trabajo representa el primer paso en esa dirección. Además, esperamos que algunos de los resultados encontrados puedan ser publicados en revistas especializadas.

Para facilitar la notación de nuestros cálculos, llamaremos Ren al campo de $(0, 2)$ -tensores definido en coordenadas locales por:

$$Ren_{ij} = R_{iklm} R_j^{klm}$$

4.2. Existencia de soluciones

A diferencia de lo que sucede con el Flujo de Ricci, el flujo RG-2 en general no es débilmente parabólico, incluso aunque se le incorporen los términos de DeTurk (ver [7]). Si bien esto impide usar el truco de DeTurk para demostrar la existencia de soluciones a corto plazo, en los últimos años se han descubierto casos particulares y condiciones especiales bajo las cuales el flujo RG-2 es débilmente parabólico y se tiene la existencia de soluciones (ver [10],[11],[24]).

4.2.1. Variedades Riemannianas cerradas de dimensión $n = 2$

Si (M, g) es una variedad Riemanniana cerrada de dimensión $n = 2$, entonces el tensor de curvatura de Riemann puede expresarse en coordenadas locales como

$$R_{ijkl} = \frac{1}{2}R(g_{il}g_{jk} - g_{ik}g_{jl})$$

esto implica que

$$Ren_{ij} = \frac{1}{2}R^2g_{ij}$$

y por lo tanto el flujo RG-2 puede ser rescrito como

$$\begin{aligned}\partial_t g_{ij} &= -\left(R + \frac{\alpha}{4}R^2\right)g_{ij} \\ g_{ij}(0) &= \tilde{g}_{ij}\end{aligned}$$

Oliynyk [24] mostró que para resolver este problema de valor inicial hay que hallar una función $u : [0, T) \times M \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaga

$$\partial_t u = -\mathcal{R}(u) \tag{4.5}$$

$$u(0) = 0 \tag{4.6}$$

donde

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(u) &= R + \frac{\alpha}{4}R^2 \\ R &= e^{-u}(-\tilde{\Delta}u + \tilde{R})\end{aligned}$$

siendo $\tilde{\Delta}$ y \tilde{R} , respectivamente, el operador Laplaciano y la curvatura escalar de la métrica inicial \tilde{g} . Con esto, la solución del flujo RG-2 vendrá dada por

$$g_{ij}(t) = e^{u(t)} \tilde{g}_{ij}$$

Ahora, dado que el operador linealizado asociado al problema de valor inicial (4.5)-(4.6) es

$$D\mathcal{R}(u)v = \left(1 + \frac{\alpha}{2}R\right) (-e^{-u}\tilde{\Delta}v - Rv)$$

este problema será débilmente parabólico siempre que

$$1 + \frac{\alpha}{2}R > 0 \tag{4.7}$$

entonces, si denotamos \mathcal{M} al conjunto de todas las métricas Riemannianas de M , la desigualdad (4.7) sugiere buscar soluciones al flujo RG-2 en el subconjunto

$$\mathcal{M}_+ := \{g \in \mathcal{M} \mid -\alpha/2 < R < 0\}$$

Una condición que permite asegurar que el conjunto \mathcal{M}_+ sea no vacío, es imponer que la característica de Euler de M sea negativa. Con ello se llega al siguiente resultado:

TEOREMA 4.1 [24] *Sea (M, \tilde{g}) una variedad Riemanniana cerrada con característica de Euler negativa. Existe una familia de métricas Riemannianas $g(t) : t \in [0, \infty)$ que satisface las siguientes propiedades:*

1. $g(t) : t \in [0, \infty)$ resuelve el flujo RG-2.
2. $g(t) \in \mathcal{M}_+$ para todo $t \in [0, \infty)$.
3. Existe una constante $C_{\tilde{R}}$, que depende únicamente de $C_{\tilde{R}}^+ = \max_{x \in M} \tilde{R}(x)$ y $C_{\tilde{R}}^- = \min_{x \in M} \tilde{R}(x)$, que satisface

$$|R(x, t)| \leq \frac{C_{\tilde{R}}}{1+t}$$

para todo $(x, t) \in M \times [0, \infty)$

Dado que en las variedades Riemannianas de dimensión $n = 2$ el tensor de curvatura de Riemann esta completamente determinado por el escalar de curvatura R , el teorema 4.1, además de darnos la existencia de soluciones en $M \times [0, \infty)$, nos garantiza que el flujo RG-2 no desarrolla singularidades de curvatura cuando la característica de Euler es negativa.

4.2.2. Variedades Riemannianas cerradas de dimensión $n \geq 2$

Para el caso en que la dimensión de M sea $n \geq 2$ se desconoce si existen o no condiciones que aseguren la existencia de soluciones definidas en $M \times [0, \infty)$, sin embargo se han hallado condiciones sobre la curvatura seccional de la métrica inicial que garantizan la existencia de soluciones a corto plazo:

DEFINICIÓN 4.2 *Sea (M, g) una variedad Riemanniana. Dado un punto $p \in M$, la curvatura seccional del plano P generado por dos vectores tangentes linealmente independientes $X_p, Y_p \in T_p M$ es denotada $K(X_p, Y_p)$ y está dada por*

$$K_g(X_p, Y_p) = \frac{Rm(X_p, Y_p, X_p, Y_p)}{g(X_p, X_p)g(Y_p, Y_p) - g(X_p, Y_p)^2}$$

PROPOSICIÓN 4.3 [11] *Sea (M, \tilde{g}) una variedad Riemanniana cerrada. Si para todo punto $p \in M$ y todo plano $P \subset T_p M$ la curvatura seccional de la métrica \tilde{g} verifica*

$$1 + \alpha K_{\tilde{g}} > 0 \tag{4.8}$$

entonces existe una única familia de métricas Riemannianas $g(t) : t \in [0, T)$ en M tal que

$$\begin{aligned} \partial_t g &= -2R_{ij} + \frac{\alpha}{2} R e n_{ij} \\ g(0) &= \tilde{g} \end{aligned}$$

La condición (4.8) permite que el flujo RG-2 con términos de DeTurk sea débilmente parabólico, con lo cual la existencia de soluciones a corto plazo se obtiene aplicando el truco de DeTurk.

4.2.3. Variedades Riemannianas de curvatura seccional constante

Sobre variedades Riemannianas cerradas cuya curvatura seccional es constante, el flujo RG-2 se reduce a una ecuación diferencial ordinaria, lo que nos proporciona una visión más clara de lo que sucede con sus soluciones y sus singularidades. En efecto, si (M, \tilde{g}) es variedad Riemanniana con curvatura seccional constante, entonces el tensor

de curvatura de Riemann de la métrica \tilde{g} se expresa en coordenadas locales como

$$\tilde{R}_{ijkl} = K(\tilde{g}_{il}\tilde{g}_{jk} - \tilde{g}_{ik}\tilde{g}_{jl})$$

para alguna constante $K \in \mathbb{R}$. En consecuencia

$$\begin{aligned}\tilde{R}_{ij} &= K(n-1)\tilde{g}_{ij} \\ \tilde{R}en_{ij} &= 2K^2(n-1)\tilde{g}_{ij}\end{aligned}$$

Ahora, de acuerdo con [10], si $g(t)$ es una solución del flujo RG-2 con $g(0) = \tilde{g}$, entonces dicha solución necesariamente debe ser la forma

$$g(t) = f(t)\tilde{g}$$

para alguna función positiva $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Debido a esto, el tensor de Ricci y el tensor Ren de la métrica $g(t)$ pueden expresarse como

$$\begin{aligned}R_{ij} &= \tilde{R}_{ij} = K(n-1)\tilde{g}_{ij} \\ Ren_{ij} &= \frac{1}{f(t)}\tilde{R}en_{ij} = \frac{2K^2(n-1)}{f(t)}\tilde{g}_{ij}\end{aligned}$$

lo cual permite escribir el flujo RG-2 de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\partial_t g_{ij} &= \tilde{g}_{ij} \frac{df}{dt} = -2R_{ij} - \frac{\alpha}{2} Ren_{ij} = \left(-2K(n-1) - \frac{\alpha}{f(t)} K^2(n-1) \right) \tilde{g}_{ij} \\ g_{ij}(0) &= f(0)\tilde{g}_{ij} = \tilde{g}_{ij}\end{aligned}$$

pero esto es posible siempre que f resuelva el siguiente problema de valor inicial:

$$\frac{df}{dt} = -2K(n-1) - \frac{\alpha}{f(t)} K^2(n-1) \quad (4.9)$$

$$f(0) = 1 \quad (4.10)$$

De este modo buscar soluciones para el flujo RG-2 en variedades Riemannianas con curvatura seccional constante se reduce a resolver el problema (4.9)-(4.10). Usando el método de separación de variables, la solución de dicho problema se puede expresar de manera implícita como

$$f(t) = -2K(n-1)t + 1 + \frac{\alpha K}{2} \ln \left| \frac{2f(t) + \alpha K}{2 + \alpha K} \right| \quad (4.11)$$

Esta solución nos provee valiosa información respecto al comportamiento de la geometría de M bajo el flujo:

1. Si $K > 0$, para cualquier valor de $\alpha > 0$, la función f es decreciente y satisface $f(T) = 0$ con

$$T = \frac{1}{2K(n-1)} + \frac{\alpha}{4(n-1)} \ln \left| \frac{\alpha K}{2 + \alpha K} \right|$$

luego, como el tensor de curvatura de Riemann de la métrica $g(t) = f(t)\tilde{g}$ es

$$R_{ijkl}(t) = f(t)\tilde{R}_{ijkl}$$

el escalar de Kretschmann verifica

$$\lim_{t \rightarrow T} |Rm|^2 = |\tilde{Rm}|^2 \lim_{t \rightarrow T} \frac{1}{f(t)^2} = 2K^2 n(n-1) \lim_{t \rightarrow T} \frac{1}{f(t)^2} = \infty$$

lo que muestra que el flujo desarrolla singularidades de curvatura en tiempo finito.

2. Si $K < 0$ y $|K| > \frac{2}{\alpha}$, la función $f(t)$ es estrictamente decreciente, pues si razonamos por contradicción y suponemos que $f'(t) \geq 0$, entonces

$$-K(n-1) \left[2 + \frac{\alpha K}{f(t)} \right] \geq 0, \quad \forall t \in Dom(f)$$

luego, como $-K$ es un número positivo, vemos que esta desigualdad es válida siempre que

$$2 + \frac{\alpha K}{f(t)} \geq 0, \quad \forall t \in Dom(f)$$

lo que a su vez es posible si y solo si

$$f(t) \geq -\frac{\alpha K}{2}, \quad \forall t \in Dom(f)$$

pero, en particular, para $t = 0$ tenemos

$$\frac{-\alpha K}{2} \leq 1$$

lo cual es absurdo, pues implica $|K| \leq \frac{2}{\alpha}$. Adicionalmente, para cualquier $K < 0$ que cumpla $|K| > \frac{2}{\alpha}$, el tiempo T es estrictamente positivo y $f(T) = 0$. En consecuencia, al igual en el numeral anterior, se tendrá que $\lim_{t \rightarrow T} |Rm|^2 = \infty$.

3. Si $K < 0$ y $|K| < \frac{2}{\alpha}$, procediendo como en el numeral anterior, se puede ver que la función $f(t)$ es estrictamente creciente. Más aun, $f(t)$ está definida para todo

$t \geq 0$ y crece indefinidamente, de modo que el flujo no desarrolla singularidades de curvatura (ver[10]).

Si bien en la sección anterior vimos casos particulares en los que, además de contar con la existencia de soluciones para el flujo RG-2, conocemos el comportamiento de la curvatura bajo este flujo, es muy poco el conocimiento del que se dispone sobre el comportamiento general de la curvatura bajo este flujo. No se conocen, en general, las ecuaciones de evolución de los distintos tensores y escalares de curvatura de una solución del flujo RG-2, ni tampoco la existencia de condiciones bajo las cuales la curvatura de una solución este dominada por alguna función conocida. El aporte de nuestro trabajo es precisamente abordar estos problemas en las siguientes secciones.

4.3. Evolución de la curvatura

El primer paso que necesitamos dar en el estudio de la curvatura de una solución $g(t) : t \in [0, T)$ del flujo RG-2, es calcular la evolución de los tensores y escalares de curvatura, principalmente la evolución del tensor de Riemann y el escalar de Kretschmann. Para variedades Riemannianas de dimensión $n \geq 2$ no se conoce como evolucionan estas cantidades geométricas, por ello en esta sección calcularemos sus ecuaciones de evolución para variedades Riemannianas, no necesariamente cerradas, de cualquier dimensión.

Nuestro primer resultado demuestra que el tensor de Riemann de una solución del flujo RG-2 satisface una ecuación de tipo reacción-difusión:

PROPOSICIÓN 4.4 *Si $g(t) : t \in [0, T)$ es una solución del Flujo RG-2, entonces*

$$\begin{aligned} \partial_t R_{ijkl} = & \Delta R_{ijkl} + g^{pq} (R_{ijp}^r R_{rqkl} - 2R_{pik}^r R_{jqrl} + 2R_{jqk}^r R_{pirl}) \\ & - (R_i^p R_{pjkl} + R_j^p R_{ipkl} + R_k^p R_{ijpl} + R_l^p R_{ijkp}) \\ & + \frac{\alpha}{4} (\nabla_i \nabla_l R_{enjk} + \nabla_j \nabla_k R_{enil} - \nabla_j \nabla_l R_{enik} - \nabla_i \nabla_k R_{enjl}) \\ & + \frac{\alpha}{4} (R_{ijl}^q R_{enkq} + R_{ijk}^q R_{enql} - 2R_{ijk}^p R_{enpl}) \end{aligned}$$

Demostración. Los cálculos en [6, p. 178] muestran que

$$\begin{aligned} \Delta R_{ijk}^l = & -\nabla_i \nabla_k R_j^l + \nabla_i \nabla^l R_{jk} + \nabla_j \nabla_k R_i^l - \nabla_j \nabla^l R_{ik} - R_i^r R_{jrk}^l + R_j^r R_{irk}^l \\ & + g^{pq} (-R_{ijp}^r R_{rqk}^l + R_{pik}^r R_{jqr}^l + R_{pjr}^l R_{iqk}^r - R_{pir}^l R_{jqk}^r - R_{pj k}^r R_{iqr}^l) \end{aligned}$$

mientras que el numeral (2) del lema 3.5 afirma que

$$\begin{aligned}
\partial_t R_{ijk}^l &= -\nabla_i \nabla_k R_j^l + \nabla_i \nabla^l R_{jk} + \nabla_j \nabla_k R_i^l - \nabla_j \nabla^l R_{ik} + g^{lp} (R_{ijk}^q R_{qp} + R_{ijp}^q R_{kq}) \\
&+ \frac{\alpha}{4} (-\nabla_i \nabla_k Ren_j^l + \nabla_i \nabla^l Ren_{jk} + \nabla_j \nabla_k Ren_i^l - \nabla_j \nabla^l Ren_{ik}) \\
&+ \frac{\alpha}{4} g^{lp} (R_{ijk}^q Ren_{qp} + R_{ijp}^q Ren_{kq})
\end{aligned}$$

esta última expresión coincide con lo obtenido para el flujo de Ricci, excepto por los términos precedidos por $\frac{\alpha}{4}$. En consecuencia, comparando estas dos ecuaciones obtenemos

$$\begin{aligned}
\partial_t R_{ijk}^l &= \Delta R_{ijk}^l + g^{pq} (R_{ijp}^r R_{rqk}^l - 2R_{pik}^r R_{jqr}^l + 2R_{pir}^l R_{jqk}^r) - R_i^p R_{ijk}^l - R_j^p R_{ipk}^l - R_k^p R_{ijp}^l + R_p^l R_{ijk}^p \\
&+ \frac{\alpha}{4} (-\nabla_i \nabla_k Ren_j^l + \nabla_i \nabla^l Ren_{jk} + \nabla_j \nabla_k Ren_i^l - \nabla_j \nabla^l Ren_{ik}) \\
&+ \frac{\alpha}{4} g^{lp} (R_{ijk}^q Ren_{qp} + R_{ijp}^q Ren_{kq})
\end{aligned}$$

ahora bajamos los índices l usando la tercera identidad del lema 3.5 para finalmente obtener

$$\begin{aligned}
\partial_t R_{ijkl} &= \Delta R_{ijkl} + g^{pq} (R_{ijp}^r R_{rqkl} - 2R_{pik}^r R_{jqrl} + 2R_{jqk}^r R_{pirl}) \\
&- (R_i^p R_{pjkl} + R_j^p R_{ipkl} + R_k^p R_{ijpl} + R_l^p R_{ijkp}) \\
&+ \frac{\alpha}{4} (\nabla_i \nabla_l Ren_{jk} + \nabla_j \nabla_k Ren_{il} - \nabla_j \nabla_l Ren_{ik} - \nabla_i \nabla_k Ren_{jl}) \\
&+ \frac{\alpha}{4} (R_{ijl}^q Ren_{kq} + R_{ijk}^q Ren_{ql} - 2R_{ijk}^p Ren_{pl})
\end{aligned}$$

□

La importancia de la ecuación de evolución del tensor de Riemann radica en que ella nos permite calcular la evolución del escalar de Kretschmann, que es la función que determina la existencia de singularidades de curvatura. En efecto, hemos obtenido el siguiente resultado:

PROPOSICIÓN 4.5 *Si $g(t) : t \in [0, T)$ es una solución del Flujo RG-2, entonces*

$$\begin{aligned}
\partial_t |Rm|^2 &= \Delta |Rm|^2 - 2|\nabla Rm|^2 + \alpha |Ren|^2 \\
&+ 2R^{ijkl} g^{pq} (R_{ijp}^r R_{rqkl} - 2R_{pik}^r R_{jqrl} + 2R_{jqk}^r R_{pirl}) \\
&+ \frac{\alpha}{2} R^{ijkl} (\nabla_i \nabla_l Ren_{jk} + \nabla_j \nabla_k Ren_{il} - \nabla_j \nabla_l Ren_{ik} - \nabla_i \nabla_k Ren_{jl})
\end{aligned}$$

Demostración. Usando la regla del producto y el lema 3.5, vemos que

$$\begin{aligned}
\partial_t(R_{ijkl}R^{ijkl}) &= 2R^{ijkl}(\partial_t R_{ijkl}) + R_{ijkl} \left(R_a^{jkl} \partial_t g^{ai} + R_b^{ikl} \partial_t g^{bj} + R_c^{ijl} \partial_t g^{ck} + R_d^{ijk} \partial_t g^{dl} \right) \\
&= 2R^{ijkl}(\partial_t R_{ijkl}) + 2R_{ijkl} R_a^{jkl} R^{ia} + \frac{\alpha}{2} R_{ijkl} R_a^{jkl} Ren^{ia} \\
&\quad + 2R_{ijkl} R_b^{ikl} R^{jb} + \frac{\alpha}{2} R_{ijkl} R_c^{ijl} Ren^{bj} \\
&\quad + 2R_{ijkl} R_c^{ijl} R^{ck} + \frac{\alpha}{2} R_{ijkl} R_c^{ijl} Ren^{ck} \\
&\quad + 2R_{ijkl} R_d^{ijk} R^{dl} + \frac{\alpha}{2} R_{ijkl} R_d^{ijk} Ren^{dl}
\end{aligned}$$

gracias a las simetrías del tensor Riemann esta expresión puede ser escrita como

$$\begin{aligned}
\partial_t R_{ijkl} R^{ijkl} &= 2R^{ijkl}(\partial_t R_{ijkl}) + 2R_{ijkl} R_a^{jkl} R^{ia} + \frac{\alpha}{2} R_{ijkl} R_a^{jkl} Ren^{ia} \\
&\quad + 2R_{jikl} R_b^{ikl} R^{jb} + \frac{\alpha}{2} R_{jikl} R_b^{ikl} Ren^{bj} \\
&\quad + 2R_{klij} R_c^{lij} R^{ck} + \frac{\alpha}{2} R_{klij} R_c^{lij} Ren^{ck} \\
&\quad + 2R_{lkij} R_d^{kij} R^{dl} + \frac{\alpha}{2} R_{lkij} R_d^{kij} Ren^{dl} \\
&= 2R^{ijkl}(\partial_t R_{ijkl}) + 2Ren_{ia} R^{ia} + \frac{\alpha}{2} Ren_{ia} Ren^{ia} \\
&\quad + 2Ren_{jb} R^{jb} + \frac{\alpha}{2} Ren_{jb} Ren^{jb} \\
&\quad + 2Ren_{kc} R^{kc} + \frac{\alpha}{2} Ren_{kc} Ren^{kc} \\
&\quad + 2Ren_{ld} R^{ld} + \frac{\alpha}{2} Ren_{ld} Ren^{ld} \\
&= 2\langle Rm, \partial_t Rm \rangle + 8\langle Ren, Ric \rangle + 2\alpha |Ren|^2
\end{aligned}$$

para calcular $\langle Rm, \partial_t Rm \rangle$ usamos la proposición 4.4

$$\begin{aligned}
\langle Rm, \partial_t Rm \rangle &= \langle Rm, \Delta Rm \rangle + R^{ijkl} g^{pq} \left(R_{ijp}^r R_{rql} - 2R_{pik}^r R_{jqr} + 2R_{jqk}^r R_{pir} \right) \\
&\quad + \frac{\alpha}{4} R^{ijkl} \left(\nabla_i \nabla_l Ren_{jk} + \nabla_j \nabla_k Ren_{il} - \nabla_j \nabla_l Ren_{ik} - \nabla_i \nabla_k Ren_{jl} \right) \\
&\quad + \frac{\alpha}{4} R^{ijkl} \left(R_{ijl}^q Ren_{kq} + R_{ijk}^q Ren_{ql} \right) - \frac{\alpha}{2} R^{ijkl} R_{ijk}^p Ren_{lp} \\
&\quad - R^{ijkl} \left(R_i^p R_{pjkl} + R_j^p R_{ipkl} + R_k^p R_{ijpl} + R_l^p R_{ijkp} \right)
\end{aligned}$$

pero nuevamente gracias las simetrías del tensor de Riemann podemos ver que

1.

$$\begin{aligned}
R^{ijkl} (R_i^p R_{pjkl} + R_j^p R_{ipkl} + R_k^p R_{ijpl} + R_l^p R_{ijkp}) \\
= R_i^p Ren_p^i + R_j^p Ren_p^j + R_k^p Ren_p^k + R_l^p Ren_p^l = 4\langle Ren, Ric \rangle
\end{aligned}$$

2. $R^{ijkl}R_{ijk}^p Ren_{lp} = |Ren|^2$
3. $R^{ijkl} (R_{ijl}^q Ren_{kq} + R_{ijk}^q Ren_{ql}) = |Ren|^2 - |Ren|^2 = 0$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \langle Rm, \partial_t Rm \rangle &= \langle Rm, \Delta Rm \rangle + R^{ijkl} g^{pq} (R_{ijp}^r R_{rqkl} - 2R_{pik}^r R_{jqrl} + 2R_{jqk}^r R_{pirl}) \\ &\quad + \frac{\alpha}{4} R^{ijkl} (\nabla_i \nabla_l Ren_{jk} + \nabla_j \nabla_k Ren_{il} - \nabla_j \nabla_l Ren_{ik} - \nabla_i \nabla_k Ren_{jl}) \\ &\quad - \frac{\alpha}{2} |Ren|^2 - 4\langle Ren, Ric \rangle \end{aligned}$$

juntando estos resultados obtenemos

$$\begin{aligned} \partial_t |Rm|^2 &= 2\langle Rm, \Delta Rm \rangle + \alpha |Ren|^2 \\ &\quad + 2R^{ijkl} g^{pq} (R_{ijp}^r R_{rqkl} - 2R_{pik}^r R_{jqrl} + 2R_{jqk}^r R_{pirl}) \\ &\quad + \frac{\alpha}{2} R^{ijkl} (\nabla_i \nabla_l Ren_{jk} + \nabla_j \nabla_k Ren_{il} - \nabla_j \nabla_l Ren_{ik} - \nabla_i \nabla_k Ren_{jl}) \end{aligned}$$

finalmente, reemplazando en esta ecuación $\Delta |Rm|^2 - 2|\nabla Rm|^2 = 2\langle Rm, \Delta Rm \rangle$ se llega a la identidad deseada. \square

De acuerdo con la proposición 4.5, al igual que en el caso del flujo de Ricci, la evolución del escalar de Kretschmann bajo el flujo RG-2 también satisface una ecuación de tipo reacción-difusión. Esto hace posible que al hallar cotas para $\partial_t |Rm|^2$ obtengamos información sobre el comportamiento de $|Rm|^2$ a lo largo del flujo. En ese sentido, cuanto mayor sea la información disponible sobre la solución del flujo RG-2, será más fácil hallar tales cotas. En general no siempre es posible contar con una cantidad considerable de información, por ello debemos valernos de otros medios, como la notación (*), para realizar estimaciones que nos permitan acotar $\partial_t |Rm|^2$.

PROPOSICIÓN 4.6 *Si $g(t) : t \in [0, T)$ es una solución del flujo RG-2, entonces se verifica la siguiente desigualdad:*

$$\begin{aligned} \partial_t |Rm|^2 &\leq \Delta |Rm|^2 + C_0 |Rm|^3 \\ &\quad + \alpha C (|Rm|^4 + |Rm|^2 + |\nabla Rm|^4 + |\nabla \nabla Rm|^2) \end{aligned}$$

para algún par de constantes positivas $C_0, C \in \mathbb{R}$ que dependen únicamente de $\dim(M)$.

Demostración. Usando la notación (*) podemos expresar ecuación de evolución del

escalar de Kretschmann como

$$\partial_t |Rm|^2 = \Delta |Rm|^2 - 2|\nabla Rm|^2 + \alpha |Ren|^2 + Rm * Rm * Rm + \frac{\alpha}{2} Rm * \nabla \nabla Ren$$

puesto que $|\nabla Rm|^2$ es no negativo para todo $t \in [0, T)$, tenemos

$$\partial_t |Rm|^2 \leq \Delta |Rm|^2 + \alpha |Ren|^2 + Rm * Rm * Rm + \frac{\alpha}{2} Rm * \nabla \nabla Ren \quad (4.12)$$

Ahora, como $Ren_{ij} = R_{iklm} R_j^{klm}$, este campo de tensores puede expresarse como

$$Ren = Rm * Rm$$

y con esto sus segundas derivadas covariantes satisfacen

$$\nabla \nabla Ren = \nabla Rm * \nabla Rm + Rm * \nabla \nabla Rm$$

en consecuencia podemos reescribir la desigualdad (4.12) de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \partial_t |Rm|^2 &\leq \Delta |Rm|^2 + \alpha |Ren|^2 + Rm * Rm * Rm \\ &\quad + \frac{\alpha}{2} (Rm * \nabla Rm * \nabla Rm + Rm * Rm * \nabla \nabla Rm) \end{aligned}$$

Por lo tanto, al aplicar la desigualdad triangular a esta expresión, vemos que existen constantes positivas $C_0, C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$, que dependen únicamente de la dimensión de M y satisfacen

$$\partial_t |Rm|^2 \leq \Delta |Rm|^2 + C_0 |Rm|^3 + \alpha C_1 |Rm|^4 + \frac{\alpha}{2} C_2 |Rm| |\nabla Rm|^2 + \frac{\alpha}{2} C_3 |Rm|^2 |\nabla \nabla Rm|$$

Por otra parte, usando la desigualdad de Cauchy con $\epsilon > 0$, obtenemos

$$|Rm| |\nabla Rm|^2 \leq \epsilon |Rm|^2 + \frac{1}{4\epsilon} |\nabla Rm|^4$$

y similarmente

$$|Rm|^2 |\nabla \nabla Rm| \leq \epsilon |Rm|^4 + \frac{1}{4\epsilon} |\nabla \nabla Rm|^2$$

en particular, tomando $\epsilon = \frac{1}{4}$, se tiene

$$\begin{aligned} \partial_t |Rm|^2 &\leq \Delta |Rm|^2 + C_0 |Rm|^3 \\ &\quad + \alpha C_1 |Rm|^4 + \frac{\alpha}{8} C_2 |Rm|^2 + \frac{\alpha}{2} C_2 |\nabla Rm|^4 \\ &\quad + \frac{\alpha}{8} C_3 |Rm|^4 + \frac{\alpha}{2} C_3 |\nabla \nabla Rm|^2 \end{aligned}$$

de modo que tomando $C \geq 2 \max(C_1, C_2, C_3)$, obtenemos

$$\begin{aligned} \partial_t |Rm|^2 \leq & \Delta |Rm|^2 + C_0 |Rm|^3 \\ & + \alpha C (|Rm|^4 + |\nabla Rm|^4 + |\nabla \nabla Rm|^2) \end{aligned}$$

□

La proposición 4.6 es uno de los resultados más importantes de nuestra investigación, pues dicha desigualdad es la base en la búsqueda de cotas que controlen el comportamiento de la curvatura de las soluciones del flujo RG-2.

4.4. Principio del máximo y control de la curvatura

Si tomamos $c_1 = \max(\alpha C, C_0)$ en la proposición 4.6, entonces

$$\partial_t |Rm|^2 \leq \Delta |Rm|^2 + c_1 (|Rm|^2 + |Rm|^3 + |Rm|^4 + |\nabla Rm|^4 + |\nabla \nabla Rm|^2) \quad (4.13)$$

esta desigualdad sugiere que podemos controlar el comportamiento de la curvatura, al menos durante un periodo de tiempo finito, usando el principio del máximo. Sin embargo, puesto que los términos $|\nabla Rm|^4$, $|\nabla \nabla Rm|^2$ y $|Rm|^2$ dependen del tensor de curvatura de Riemann, existe una interdependencia mutua entre ellos, de modo que no podemos aplicar directamente el teorema 3.10 en la desigualdad (4.13). Por ello lo que haremos es modificar la proposición (4.2) de [6] y el teorema (3.2) de [28] para obtener un principio del máximo aplicable a nuestra desigualdad.

En una variedad diferenciable cerrada M , supongamos que $g(t) : t \in [0, T)$ es una familia de métricas Riemannianas y asumamos que:

1. Δ es el operador Laplaciano de la métrica $g(t)$
2. $X(t) : t \in [0, T)$ es una familia de campos vectoriales diferenciables
3. $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función localmente Lipschitz
4. ψ es una función de $M \times [0, T)$ a valores en \mathbb{R}

Nuestra versión del principio del máximo se fundamenta en el siguiente lema:

LEMA 4.7 Sea $u : M \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable que satisface las siguientes condiciones:

1. Existe una constante $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $u(x, 0) \leq \alpha$ para todo $x \in M$
2. En cualquier punto $(x, t) \in M \times [0, T)$ donde $u(x, t) > \alpha$ se verifica

$$\partial_t u(x, t) \leq \Delta u(x, t) + \langle X, \nabla u \rangle(x, t) + \psi(x, t)$$

Si para todo $\tau \in [0, T)$ existe una constante $C_\tau < \infty$ tal que

$$\psi(x, t) \leq C_\tau, \quad \forall (x, t) \in M \times [0, \tau]$$

entonces $u(x, t) \leq \alpha$ para todo $(x, t) \in M \times [0, T)$

Demostración. Dados $\tau \in (0, T)$ y $\epsilon > 0$, consideremos la función $\varphi : M \times [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(x, t) := u(x, t) - \alpha - tC_\tau - t\epsilon - \epsilon$$

esta función satisface las siguientes propiedades:

1. $\varphi(x, 0) = u(x, 0) - \alpha - \epsilon \leq -\epsilon < 0$
2. Para cualquier punto $(x, t) \in M \times [0, \tau]$ donde $u > \alpha$, se cumple que

$$\begin{aligned} \partial_t \varphi &= \partial_t u - C_\tau - \epsilon \\ &\leq \Delta u + \langle X, \nabla u \rangle + \psi - C_\tau - \epsilon \\ &\leq \Delta u + \langle X, \nabla u \rangle - \epsilon \\ &= \Delta \varphi + \langle X, \nabla \varphi \rangle - \epsilon \end{aligned}$$

Gracias a que los números ϵ y τ son arbitrarios, para demostrar que $u(x, t) \leq \alpha$ en $M \times [0, T)$, basta probar que la función $H(x, t) := \varphi + tC_\tau$ satisface $H(x, t) < 0$ para todo $(x, t) \in M \times [0, \tau]$. Haremos esto razonando por contradicción. En efecto, supongamos que existe un punto $(x_1, t_1) \in M \times [0, \tau]$ tal que $H(x_1, t_1) \geq 0$. Puesto que $M \times [0, \tau]$ es compacto y $H(x, 0) = \varphi(x, 0) < 0$, existe un primer instante $t_0 \in (0, t_1]$ y un punto $x_0 \in M$ donde $H(x_0, t_0) = 0$, es decir

$$\varphi(x_0, t_0) + t_0 C_\tau = 0$$

pero esto significa que

$$u(x_0, t_0) - \alpha - t_0 C_\tau - t_0 \epsilon - \epsilon + t_0 C_\tau = 0$$

con lo cual

$$u(x_0, t_0) = \alpha + t_0 \epsilon + \epsilon > \alpha$$

por lo tanto en (x_0, t_0) la función φ verifica

$$\partial_t \varphi \leq \Delta \varphi + \langle X, \nabla \varphi \rangle - \epsilon \tag{4.14}$$

ahora, como x_0 es un máximo local de $\varphi(\cdot, t_0)$ en M y $\varphi(x, 0) < 0$, tenemos que

$$\begin{aligned} \partial_t \varphi(x_0, t_0) &\geq 0 \\ \nabla \varphi(x_0, t_0) &= 0 \\ \Delta \varphi(x_0, t_0) &\leq 0 \end{aligned}$$

y en consecuencia sobre dicho punto se verifica

$$0 \leq \partial_t \varphi \leq \Delta \varphi + \langle X, \nabla \varphi \rangle - \epsilon \leq -\epsilon$$

lo cual es una contradicción, pues $\epsilon > 0$. Concluimos entonces que $H(x, t) < 0$ sobre $M \times [0, \tau]$, lo cual nos da

$$\varphi(x, t) + t C_\tau < 0, \quad \forall (x, t) \in M \times [0, \tau]$$

lo que a su vez implica

$$u(x, t) < \alpha + t \epsilon + \epsilon, \quad \forall (x, t) \in M \times [0, \tau]$$

de modo que haciendo $\epsilon \rightarrow 0$, obtenemos

$$u(x, t) \leq \alpha, \quad \forall (x, t) \in M \times [0, \tau]$$

Esto prueba el lema gracias a que τ es arbitrario y puede tomar cualquier valor en $(0, T)$. □

Nuestro objetivo es obtener un principio del máximo para la siguiente EDP:

$$\partial_t v = \Delta v + \langle X, \nabla v \rangle + F(v) + \psi \tag{4.15}$$

para ello debemos introducir la noción de sub-solución:

DEFINICIÓN 4.8 Decimos que una función diferenciable $u : M \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ es una sub-solución de la ecuación (4.15) en $(x, t) \in M \times [0, T)$ si

$$\partial_t u(x, t) \leq \Delta u(x, t) + \langle X, \nabla u \rangle(x, t) + F(u(x, t)) + \psi(x, t)$$

Cuando u es una sub-solución de (4.15) en todo punto de $M \times [0, T)$, simplemente será llamada sub-solución.

Ahora ya contamos con todos los ingredientes necesarios para construir nuestra versión del principio del máximo.

PROPOSICIÓN 4.9 (*Principio del Máximo-segunda versión*) Sea $u : M \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ una sub-solución de (4.15). Supongamos que:

1. Existe una constante $C < \infty$ tal que $u(x, 0) \leq C$, para todo $x \in M$
2. Para todo $\tau \in [0, T)$ existe una constante $C_\tau < \infty$ tal que $\psi(x, t) \leq C_\tau$ para todo $(x, t) \in M \times [0, \tau]$
3. $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es la solución del siguiente problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \phi' &= F(\phi) \\ \phi(0) &= C \end{aligned}$$

entonces $u(x, t) \leq \phi(t)$ para todo $x \in M$ y todo $t \in [0, T)$ donde $\phi(t)$ existe.

Demostración. De acuerdo con nuestras hipótesis, tenemos que

$$\begin{aligned} \partial_t(u - \phi) &\leq \Delta(u - \phi) + \langle X, \nabla(u - \phi) \rangle + \psi + F(u) - F(\phi) \\ (u - \phi)(x, 0) &\leq 0, \quad \forall x \in M \end{aligned}$$

Para todo $\tau \in [0, T)$ se verifica que $M \times [0, \tau]$ es compacto, por lo tanto, si $\phi(t)$ está bien definida en el intervalo $[0, \tau]$, existe una constante $C_\tau < \infty$ que cumple

$$\begin{aligned} |u(x, t)| &\leq C_\tau, \quad \forall (x, t) \in M \times [0, \tau] \\ |\phi(t)| &\leq C_\tau, \quad \forall t \in [0, \tau] \end{aligned}$$

adicionalmente, gracias a que F es una función localmente Lipschitz, existe una constante $L_\tau < \infty$ que satisface

$$|F(a) - F(b)| \leq L_\tau |a - b|, \quad \forall a, b \in [-C_\tau, C_\tau]$$

entonces en $M \times [0, \tau]$ tenemos

$$\partial_t(u - \phi) \leq \Delta(u - \phi) + \langle X, \nabla(u - \phi) \rangle + \psi + L_\tau |u - \phi|$$

Consideremos ahora la función $J : M \times [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$J(x, t) = e^{-L_\tau t}(u - \phi)(x, t)$$

esta nueva función satisface lo siguiente:

1. $J(x, 0) = (u - \phi)(x, 0) \leq 0$
2. En $M \times [0, \tau]$ se verifica

$$\begin{aligned} \partial_t J &= e^{-L_\tau t} \partial_t(u - \phi) - L_\tau e^{-L_\tau t}(u - \phi) \\ &\leq e^{-L_\tau t} [\Delta(u - \phi) + \langle X, \nabla(u - \phi) \rangle + \psi + L_\tau (|u - \phi| - (u - \phi))] \\ &= \Delta J + \langle X, \nabla J \rangle + \psi + L_\tau (|J| - J) \end{aligned}$$

y en particular, en aquellos puntos $(x, t) \in M \times [0, \tau]$ donde $J > 0$ se tiene

$$\partial_t J \leq \Delta J + \langle X, \nabla J \rangle + \psi$$

Por lo tanto el Lema 4.7 nos garantiza que $J(x, t) \leq 0$ en $M \times [0, \tau]$, lo cual implica

$$u(x, t) \leq \phi(t), \quad \forall (x, t) \in M \times [0, \tau]$$

así, gracias a que τ es arbitrario, se verifica el resultado deseado. □

Con este resultado en mano, ya es posible buscar condiciones que nos permitan controlar la curvatura de las soluciones del flujo RG-2. En efecto, si en particular $g(t) : t \in [0, T)$ es una solución del flujo RG-2, entonces la proposición 4.9 nos permite llegar al principal resultado de nuestro trabajo:

TEOREMA 4.10 Sea $g(t) : t \in [0, T)$ una solución del flujo RG-2 con $T < \infty$ en una variedad diferenciable cerrada M con $g(0) = g_0$. Supongamos que existe una función $\varphi : M \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface las siguientes propiedades:

1. Para todo $\tau \in (0, T)$ existe una constante positiva C_τ tal que $\varphi(x, t) \leq C_\tau$ para todo $(x, t) \in M \times [0, \tau]$.
2. $c_1(|\nabla Rm|^4 + |\nabla \nabla Rm|^2) \leq \varphi$ en $M \times [0, T)$

Si para una constante positiva $L \in \mathbb{R}$, se verifica que

$$|Rm|(x, 0) \leq L, \quad \forall x \in M$$

entonces

$$|Rm|(x, t) \leq \sqrt{\phi(t)}$$

para todo $x \in M$ y todo $t \in [0, T)$ donde la solución $\phi(t)$ del problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \phi' &= c_1(\phi + \phi^{3/2} + \phi^2) \\ \phi(0) &= L^2 \end{aligned}$$

esté definida.

Demostración. Puesto que φ verifica $c_1(|\nabla Rm|^4 + |\nabla \nabla Rm|^2) \leq \varphi$ en $M \times [0, T)$, tenemos

$$\begin{aligned} \partial_t |Rm|^2 &\leq \Delta |Rm|^2 + c_1(|Rm|^2 + |Rm|^3 + |Rm|^4 + |\nabla Rm|^4 + |\nabla \nabla Rm|^2) \\ &\leq \Delta |Rm|^2 + c_1(|Rm|^2 + |Rm|^3 + |Rm|^4) + c_1\varphi \end{aligned}$$

esto indica que $|Rm|^2$ es una sub-solución de la ecuación

$$\partial_t v = \Delta v + c_1(v + v^{3/2} + v^2) + c_1\varphi$$

Por lo tanto, eligiendo

$$\begin{aligned} u &= |Rm|^2 \\ F(r) &= c_1(r + r^{3/2} + r^2) \\ X(t) &= 0 \\ \psi &= c_1\varphi \end{aligned}$$

el principio del máximo (Proposición 4.9) nos garantiza que

$$|Rm|^2(x, t) \leq \phi(t)$$

para todo $x \in M$ y todo $t \in [0, T)$ donde $\phi(t)$ existe. \square

OBSERVACIÓN 4.11 *La función φ , del teorema 4.10, no necesariamente está acotada en $M \times [0, T)$.*

4.4.1. Problema de valor inicial asociado al control de la curvatura

Si $g(t) : t \in [0, T)$ es una solución del flujo RG-2 que satisface las condiciones del teorema 4.10, entonces su curvatura estará dominada por la solución del problema de valor inicial

$$\begin{aligned}\phi' &= c_1(\phi + \phi^{3/2} + \phi^2) \\ \phi(0) &= L^2\end{aligned}$$

En esta sección analizaremos las soluciones de este problema con el fin de identificar sus propiedades básicas, y a través de ellas explorar el comportamiento de la curvatura bajo el flujo RG-2.

La existencia y unicidad de soluciones de esta ecuación diferencial ordinaria se obtiene a través del teorema de Picard-Lindelof, sin embargo usando el método de separación de variables vemos que su solución se expresa de manera implícita como

$$\ln(\phi) - \ln(4\phi + 4\sqrt{\phi} + 4) - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(2\sqrt{\phi} + 1)\right) = c_1 t + c_2 \quad (4.16)$$

donde

$$c_2 = \ln(L^2) - \ln(4L^2 + 4L + 4) - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(2L + 1)\right)$$

A través de la ecuación (4.16) podemos obtener importante información sobre la solución $\phi(t)$. En efecto, para que dicha expresión tenga sentido, $\phi(t)$ debe ser una función positiva, y como esta función resuelve el problema de valor inicial, su derivada también debe ser positiva. Esto indica que $\phi(t)$ necesariamente es una función positiva y creciente. Ahora, si consideramos al lado derecho de la ecuación (4.16) como una

función

$$h(\phi) := \ln(\phi) - \ln(4\phi + 4\sqrt{\phi} + 4) - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(2\sqrt{\phi} + 1)\right)$$

entonces, debido a la monotonía de \ln y \arctan , se cumple que:

1. $h(\phi)$ está definida en el intervalo $(0, +\infty)$, es continua, negativa y estrictamente creciente.
2. $\lim_{\phi \rightarrow \infty} h(\phi) = \ln\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{\pi}{\sqrt{3}}$
3. $\lim_{\phi \rightarrow 0} h(\phi) = -\infty$

por tanto, en virtud de la identidad $h(\phi) = c_1 t + c_2$, se deduce que el dominio de la función $\phi(t)$ es $(-\infty, t_{max})$, siendo

$$t_{max} := \frac{1}{c_1} \left(\ln\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{\pi}{\sqrt{3}} - c_2 \right)$$

y adicionalmente

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_{max}} \phi(t) &= \infty \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi(t) &= 0 \end{aligned}$$

Estos hallazgos, obtenidos únicamente a partir de la ecuación (4.16), se resumen en el siguiente resultado:

PROPOSICIÓN 4.12 *Sea $L \in \mathbb{R}$ es una constante positiva. El problema de valor inicial*

$$\begin{aligned} \phi' &= c_1(\phi + \phi^{3/2} + \phi^2) \\ \phi(0) &= L^2 \end{aligned}$$

tiene una única solución $\phi(t)$ que satisface las siguientes propiedades:

1. $\phi(t)$ es una función creciente y positiva en $(-\infty, t_{max})$, donde

$$t_{max} = \frac{1}{c_1} \left(\ln\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{\pi}{\sqrt{3}} - c_2 \right)$$

$$c_2 = \ln(L^2) - \ln(4L^2 + 4L + 4) - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(2L + 1)\right)$$

2. $\lim_{t \rightarrow t_{max}} \phi(t) = \infty$ y $\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi(t) = 0$

De acuerdo con la proposición 4.12, el dominio de la función $\phi(t)$ está determinada por el valor del dato inicial, pues t_{max} depende de la constante c_2 , la que a su vez depende del valor L . Por lo tanto podemos analizar al tiempo t_{max} como una función de L con el fin de conocer la influencia del dato inicial en el comportamiento de $\phi(t)$. En efecto, si escribimos

$$t_{max}(L) = \frac{1}{c_1} \left[\ln \left(\frac{1}{4} \right) - \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \ln(L^2) + \ln(4L^2 + 4L + 4) + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{3}}(2L + 1) \right) \right]$$

entonces desde este punto de vista es fácil verificar que, para cualquier $c_1 > 0$, el tiempo $t_{max}(L)$ es una función positiva y decreciente, la cual satisface $\lim_{L \rightarrow 0} t_{max}(L) = \infty$ y $\lim_{L \rightarrow \infty} t_{max}(L) = 0$. Esto implica que mientras más pequeño sea el dato inicial L , mayor será el tiempo durante el cual la función $\phi(t)$ este definida, y recíprocamente, mientras mayor sea el valor de L , menor será el tiempo durante el cual $\phi(t)$ exista. Usando la ecuación (4.16) podemos calcular numéricamente la función $\phi(t)$ y el tiempo $t_{max}(L)$ para corroborar lo que hemos descubierto:

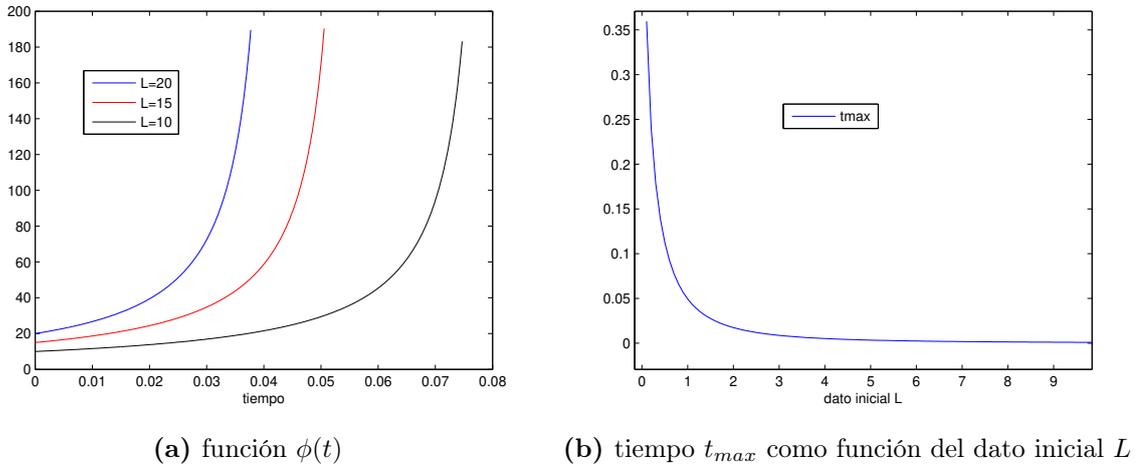


Figura 4.1: Solución del problema de valor inicial

Estas propiedades tienen importantes repercusiones en el análisis de aquellas soluciones del flujo RG-2 que verifican las hipótesis del teorema 4.10:

1. Cuanto más pequeña sea la curvatura de la métrica inicial, mayor será el tiempo durante el cual $\phi(t)$ domine a la curvatura de la solución del flujo; y recíprocamente, cuanto más grande sea la curvatura de la métrica inicial, menor será el tiempo que $\phi(t)$ acote a la curvatura de dicha solución.

2. Si la solución del flujo es $g(t) : t \in [0, T)$, y $t_{max} \leq T$, entonces

$$\lim_{t \rightarrow t_{max}} |Rm|^2 \leq \lim_{t \rightarrow t_{max}} \phi(t) = \infty$$

esto muestra que la curvatura de la métrica $g(t)$ eventualmente podría desarrollar singularidades de curvatura en tiempo finito, aún cuando la curvatura de la métrica inicial este acotada.

Este tipo de comportamiento motiva las siguientes preguntas:

- ¿Existen variedades Riemannianas donde se cumplan las hipótesis del teorema 4.10?
- ¿Tales variedades efectivamente desarrollan singularidades de curvatura bajo el flujo RG-2?
- ¿Cuan grande podría ser la diferencia entre el tiempo en el que la curvatura es controlada y el tiempo en que la solución existe?

Daremos respuesta a estas preguntas en las siguientes secciones.

4.4.2. Evolución en geometrías de curvatura seccional constante

Aunque las condiciones del teorema 4.10 parezcan ser restrictivas, en esta sección mostraremos que ellas son fácilmente satisfechas en variedades Riemannianas con curvatura seccional constante, las cuales, como vimos en la sección 4.2.3, desarrollan singularidades de curvatura bajo el flujo RG-2 dependiendo del valor de su curvatura seccional K .

En efecto, si (M, \tilde{g}) es una variedad Riemanniana con curvatura seccional $K \in \mathbb{R}$, entonces la solución $g(t) : t \in [0, T)$ del flujo RG-2 con $g(0) = \tilde{g}$ es

$$g_{ij}(t) = f(t)\tilde{g}_{ij}$$

donde $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es la función definida de forma implícita por la ecuación (4.11). Ahora, como los componentes en coordenadas locales de métrica inversa $g^{-1}(t)$ deben verificar la identidad $g_{ik}(t)g^{kj}(t) = \delta_i^j$, necesariamente

$$g^{ij}(t) = \frac{1}{f(t)}\tilde{g}^{ij}$$

esto hace que los símbolos de Christoffel de las métricas $g(t)$ y \tilde{g} coincidan

$$\begin{aligned}\Gamma_{ij}^k(t) &= \frac{g^{kl}(t)}{2}(\partial_i g_{jl}(t) + \partial_j g_{il}(t) - \partial_l g_{ij}(t)) \\ &= \frac{1}{2f(t)}\tilde{g}^{kl}(f(t)\partial_i \tilde{g}_{jl} + f(t)\partial_j \tilde{g}_{il} - f(t)\partial_l \tilde{g}_{ij}) = \tilde{\Gamma}_{ij}^k\end{aligned}$$

y en consecuencia, tanto la conexión de Levi-Civita como los tensores de curvatura de las métricas $g(t)$ y \tilde{g} son iguales

$$\begin{aligned}\nabla &= \tilde{\nabla} \\ R_{ijk}^l &= \tilde{R}_{ijk}^l\end{aligned}$$

a su vez, esto implica que el tensor de curvatura de Riemann de la métrica $g(t)$ se defina por

$$R_{ijkl}(t) = g_{ml}(t)R_{ijk}^m(t) = f(t)\tilde{g}_{mt}\tilde{R}_{ijk}^m = f(t)\tilde{R}_{ijkl}$$

y que sus primeras derivadas covariantes sean nulas gracias a la compatibilidad de la métrica

$$\nabla_m R_{ijkl} = f(t)\tilde{\nabla}_m \tilde{R}_{ijkl} = f(t)K\tilde{\nabla}_m(\tilde{g}_{il}\tilde{g}_{jk} - \tilde{g}_{ik}\tilde{g}_{jl}) = 0$$

por lo tanto, el tensor $Rm(t)$ de la solución $g(t)$ verifica

$$c_1(|\nabla Rm|^4 + |\nabla\nabla Rm|^2) = 0$$

Así, puesto que el escalar de Kretschmann de la métrica inicial \tilde{g} es constante, eligiendo

$$\begin{aligned}\varphi &= 0 \\ L^2 &= |\tilde{Rm}|^2 = 2K^2n(n-1)\end{aligned}$$

vemos que la métrica $g(t)$ satisface todas las condiciones del teorema 4.10, y con ello

$$|Rm|^2(x, t) \leq \phi(t) \tag{4.17}$$

para todo $x \in M$ y todo $t \in [0, T)$ donde ϕ existe.

Calculando el escalar de Kretschmann de la métrica $g(t)$

$$|Rm|^2 = R_{ijkl}R^{ijkl} = f(t)\tilde{R}_{ijkl}\frac{\tilde{R}^{ijkl}}{f(t)^3} = \frac{1}{f(t)^2}|\tilde{Rm}|^2 = \frac{2K^2n(n-1)}{f(t)^2}$$

podemos expresar (4.17) de la siguiente manera:

$$|Rm|^2(x, t) = \frac{2K^2n(n-1)}{f(t)^2} \leq \phi(t) \quad (4.18)$$

Gracias a que esta desigualdad depende únicamente de las funciones $f(t)$ y $\phi(t)$, las cuales conocemos de forma implícita, podemos calcular numéricamente estas funciones para realizar varios experimentos que nos permitirán confirmar la validez de la desigualdad (4.18) en distintos escenarios, así como también investigar la diferencia entre los periodos de tiempo durante los cuales la solución $g(t)$ existe y su curvatura es dominada por $\phi(t)$.

4.4.3. Geometrías con curvatura seccional constante $K > 0$

Si bien los valores que toman las funciones $f(t)$ y $\phi(t)$ están influenciados por las constantes K , α , c_1 y $n = \dim(M)$, la forma de las curvas que estas funciones determinan en el plano cartesiano es la misma sin importar los valores positivos que tomen dichas constantes. Bajo este contexto, haciendo distintas elecciones de valores para K , c_1 , α y $n = \dim(M)$, podremos constatar numéricamente la validez del teorema 4.10 en diversas situaciones. Ahora, dado que el valor de la constante α no depende de las propiedades de M , sino de la renormalización del Modelo Sigma no lineal, por simplicidad asumiremos que $\alpha = 1$, para de ese modo trabajar con constantes que dependen únicamente de la geometría de M .

Análisis 1

Para este experimento supondremos inicialmente que la dimensión de M es $n = 5$, que $K = 2$ y $c_1 = 1$. Con esto calcularemos los tiempos t_{max} y T durante los cuales existen, respectivamente, la función de control $\phi(t)$ y la solución $g(t)$. Hecho eso, mostraremos en el plano cartesiano las curvas que determinan el escalar de Kretschmann $|Rm|^2 = \frac{2K^2n(n-1)}{f(t)^2}$ y la función de control $\phi(t)$ con el fin de verificar que se cumple la desigualdad (4.18). Los datos que hemos elegido no tienen nada en especial, simplemente nos van a proveer un ejemplo con el cual podamos observar el cumplimiento del teorema 4.10. Para este caso tenemos

$$t_{max} \approx 0,0059 < 0,0192 \approx T$$

como $\lim_{t \rightarrow t_{max}} \phi(t) = \infty$ y $\lim_{t \rightarrow T} |Rm|^2 = \infty$, esto indica que la función de control $\phi(t)$ tiende al infinito más rápido que el escalar de Kretschmann, de modo que la curvatura no podría ser controlada a lo largo de todo flujo, sino únicamente durante un corto periodo de tiempo. La gráfica de las curvas que $\phi(t)$ y $|Rm|^2$ determinan en el plano cartesiano, confirman este hallazgo:

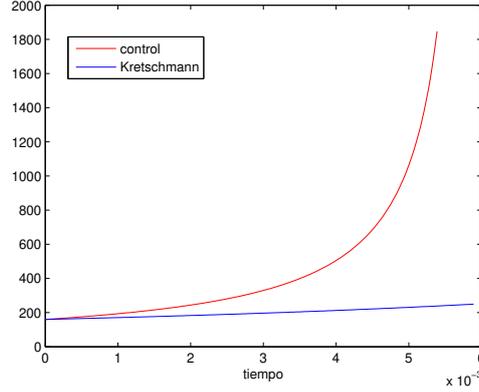


Figura 4.2: Experimento 1

Ahora tomaremos este resultado como punto de referencia para identificar los cambios en el control de la curvatura, originados por variaciones en los valores de las constantes K , c_1 , y n .

Análisis 2

A medida que la dimensión de M aumenta, los componentes en coordenadas locales de cualquier campo de tensores debe aumentar, de modo que se esperaría que el valor de la constante c_1 sea mayor en dimensiones grandes. Puesto que

$$t_{max} = \frac{1}{c_1} \left(\ln \left(\frac{1}{4} \right) - \frac{\pi}{\sqrt{3}} - c_2 \right)$$

esto implicaría que la curvatura esté controlada por un periodo de tiempo aún más corto. Por ejemplo si tomamos $n = 5$, $K = 2$ y $c_1 = 7$, entonces

$$t_{max} \approx 8,4596 \times 10^{-4} < 0,0192 \approx T$$

Respecto al análisis 1, en la siguiente tabla podemos observar como el tiempo de control de la curvatura se reduce cuando la constante c_1 aumenta:

	c_1	t_{max}	T
análisis 1	1	0,0059	0,0192
análisis 2	7	0,00084596	0,0192

Cuadro 4.1: Cambios en el tiempo de control de curvatura por variaciones de c_1

El siguiente gráfico muestra como cambia $\phi(t)$ por el incremento de la constante c_1 , y que la desigualdad (4.18) se satisface:

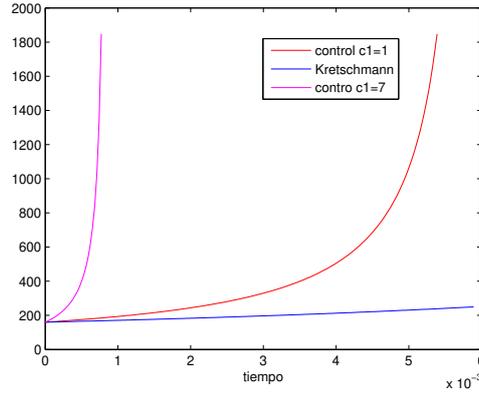


Figura 4.3: Variaciones en c_1

Esto muestra que entre mejor acotemos la ecuación de evolución del escalar de Kretschmann (proposición 4.5), tendremos un mayor control de la curvatura de la solución $g(t)$.

Análisis 3

Si observamos a los tiempos t_{max} y T como funciones de la curvatura seccional K

$$T(K) = \frac{1}{2K(n-1)} + \frac{\alpha}{4(n-1)} \ln \left| \frac{\alpha K}{2 + \alpha K} \right|$$

$$t_{max}(K) = \frac{1}{c_1} \left(\ln \left(\frac{1}{4} \right) - \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \ln(2K^2n(n-1)) + \ln \left(8K^2n(n-1) + 4\sqrt{2K^2n(n-1) + 4} \right) \right) + \frac{1}{c_1} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{3}}(2\sqrt{2K^2n(n-1) + 4} + 1) \right) \right)$$

entonces, para todo $n \geq 2$, $\alpha > 0$ y $c_1 > 0$ se cumple que:

- $T(K)$ y $t_{max}(K)$ son funciones decrecientes.
- $\lim_{K \rightarrow 0} T(K) = \infty$ y $\lim_{K \rightarrow \infty} T(K) = 0$

- $\lim_{K \rightarrow 0} t_{max}(K) = \infty$ y $\lim_{K \rightarrow \infty} t_{max}(K) = 0$

Por ejemplo, para $n = 5$ y $c_1 = \alpha = 1$, las funciones $t_{max}(K)$ y $T(K)$ determinan las siguientes curvas en el plano cartesiano:

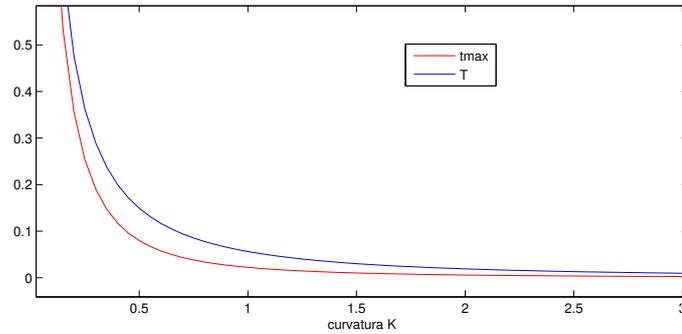


Figura 4.4: Tiempos t_{max} y T como funciones de la curvatura K

Esto indica que mientras más pequeña sea la curvatura inicial K , mayores serán los periodos de tiempo durante los cuales la solución $g(t)$ está definida y la función $\phi(t)$ domine su curvatura. Así mismo, si la curvatura K es grande, tanto la existencia de la solución como el control de su curvatura deben darse por un lapso de tiempo menor.

En la siguiente tabla podemos observar como varían los tiempos t_{max} y T , respecto al análisis 1, cuando reducimos o aumentamos el valor de la curvatura seccional K :

	K	t_{max}	T
análisis 1	2	0,0059	0,0192
análisis 3	0,2	0,3552	0,4751
	15	0,00011033	0,00051064

Cuadro 4.2: Cambios en el tiempo de control de la curvatura por variaciones en la curvatura inicial K

Las curvas que el escalar de Kretschmann y la función de control $\phi(t)$ determinan en el plano cartesiano verifican la desigualdad (4.18), tanto en el aumento como en la reducción del valor de K :

	n	t_{max}	T
análisis 1	5	0,0059	0,0192
análisis 4	3	0,0189	0,0348
	10	0,0014	0,0085

Cuadro 4.3: Cambios en el tiempo de control de la curvatura por variaciones en $\dim(M) = n$

Respecto a las variaciones en la dimensión de M , el escalar de Kretschmann y la función de control $\phi(t)$ verifican la desigualdad (4.18) satisfactoriamente:

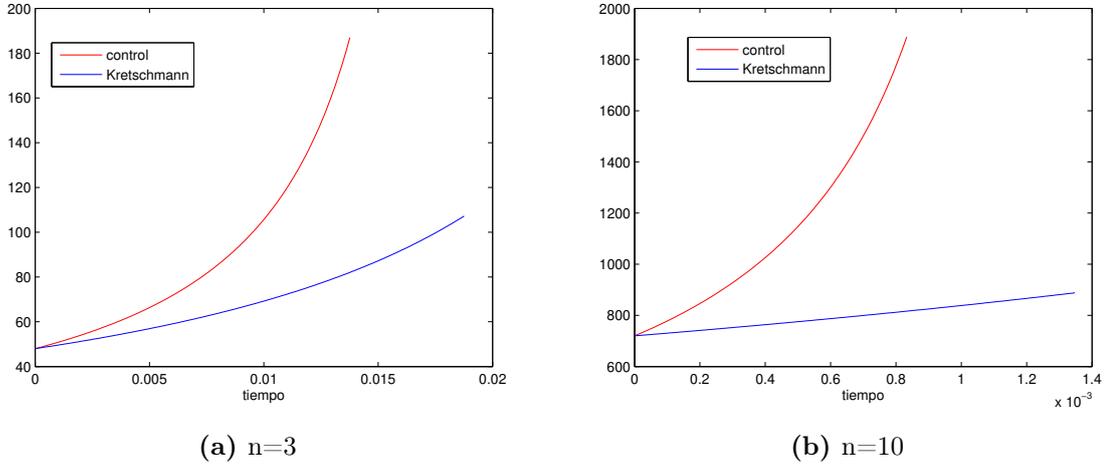


Figura 4.7: Variaciones en $\dim(M)$

Análisis 5: La 3-esfera

Hasta el momento, únicamente hemos realizado experimentos numéricos sin definir de forma explícita a la variedad M , lo cual nos ha llevado a elegir arbitrariamente los valores de las constantes K , c_1 y n . Ahora con el fin de obtener una visión más realista del teorema 4.10 tomaremos M como la 3-esfera de radio $r > 0$

$$M = \{x \in \mathbb{R}^4 : |x| = r\}$$

provista de la métrica

$$\tilde{g} = r^2 [d\omega \otimes d\omega + \sin^2(\omega) (d\theta \otimes d\theta + \sin^2(\theta) d\psi \otimes d\psi)] \quad \text{con } 0 \leq \omega, \theta \leq \pi \text{ y } 0 \leq \psi \leq 2\pi$$

Para esta variedad Riemanniana la curvatura seccional es constante y positiva

$$K = \frac{1}{r^2}$$

mientras que su escalar Kretschmann es

$$|\tilde{Rm}|^2 = \frac{12}{r^4}$$

Con esto, gracias a que $g(t) = f(t)\tilde{g}$ es la solución del flujo RG-2 con $g(0) = \tilde{g}$, la desigualdad (4.13) se reduce a

$$\partial_t |Rm|^2 \leq c_1 (|Rm|^2 + |Rm|^3 + |Rm|^4) \quad (4.19)$$

donde

$$\begin{aligned} |Rm|^2(x, t) + |Rm|^3(x, t) + |Rm|^4(x, t) &= \frac{12}{f(t)^2 r^4} + \frac{12\sqrt{12}}{f(t)^3 r^6} + \frac{144}{f(t)^4 r^8} \\ \partial_t |Rm|^2(x, t) &= \frac{96}{f(t)^3 r^6} + \frac{48}{f(t)^4 r^8} \end{aligned}$$

para alguna constante positiva $c_1 \in \mathbb{R}$. Ahora, debido a que $|Rm|^2 = \frac{12}{f(t)^2 r^4}$ es una función estrictamente positiva, es claro que tomando $c_1 = 3$ la desigualdad (4.19) efectivamente se cumple. Entonces, si elegimos $K = \frac{1}{r^2}$, $c_1 = 3$ y $n = 3$, podemos constatar la validez del teorema 4.10 para distintos valores de r :

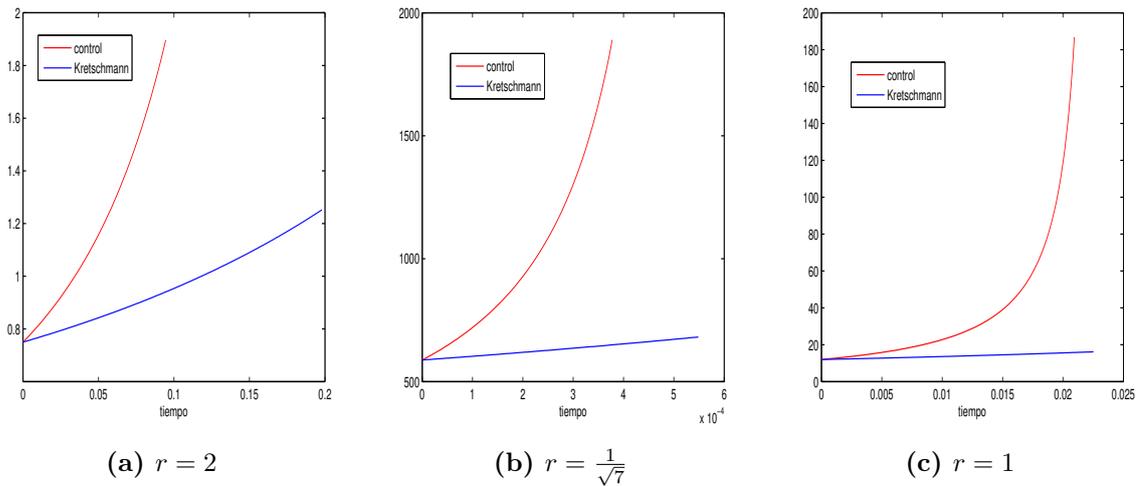


Figura 4.8: Control de la curvatura en la 3-esfera

4.4.4. Geometrías con curvatura seccional constante $K < 0$

Como vimos en la sección 4.2.3, cuando $K < 0$, el flujo RG-2 desarrollará singularidades de curvatura dependiendo de si $|K| > \frac{2}{\alpha}$ o $|K| < \frac{2}{\alpha}$. Por ello realizaremos experimentos numéricos que nos permitan explorar cada una estas situaciones. Nuevamente asumiremos que $\alpha = 1$ es para trabajar con constantes que dependan únicamente de la geometría de la variedad M .

Análisis 6

El comportamiento de las soluciones del flujo RG-2 en variedades de curvatura seccional constante negativa tales que $|K| > \frac{2}{\alpha}$, es análogo al comportamiento de las soluciones en variedades de curvatura seccional constante positiva, y en ambos casos se presentan singularidades de curvatura (ver [10]). Adicionalmente, si observamos las ecuaciones que definen a los tiempos t_{max} y T , es fácil ver que, para este caso, sus propiedades y comportamiento como funciones de $dim(M)$ y c_1 es igual al visto en geometrías con curvatura seccional constante positiva. Debido a esto, siempre que $|K| > \frac{2}{\alpha}$, para cualquier valor de $dim(M) = n$ y c_1 , las funciones $\phi(t)$ y $|Rm|^2$ mostrarán el mismo comportamiento que observamos en los experimentos 2 y 4. Por este motivo, y para evitar redundancias, no presentaremos los resultados numéricos concernientes a los cambios en el control de la curvatura ocasionados por variaciones de dichas constantes.

Ahora, para ver los cambios en el control de la curvatura producida por variaciones en la curvatura seccional, si interpretamos a los tiempos t_{max} y T como funciones de K , entonces:

1. $T(K)$ y $t_{max}(K)$ son funciones crecientes.
2. $\lim_{K \rightarrow -\infty} T(K) = 0$ y $\lim_{K \rightarrow -\infty} t_{max}(K) = 0$
3. $\lim_{K \rightarrow -\frac{2}{\alpha}} T(K) = \infty$

por ejemplo, para $c_1 = \alpha = 1$ y $n = 5$, los tiempos $T(K)$ y $t_{max}(K)$ pueden verse de la siguiente manera:

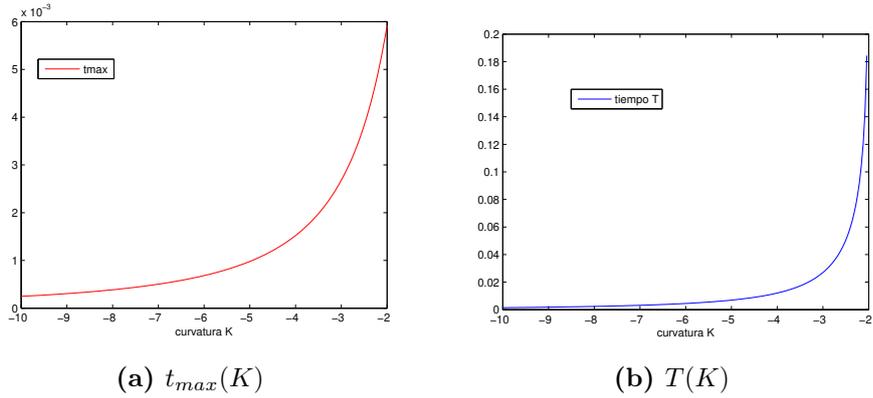


Figura 4.9: Tiempo en función de la curvatura en $K \in (-\infty, -\frac{2}{\alpha})$

Esto indica que cuanto más grande sea el valor de $|K|$, menores serán los periodos de tiempo durante el cual $\phi(t)$ domine al escalar de Kretschmann de una solución del flujo RG-2; y así mismo, mientras más próximo sea el valor de K a $-\frac{2}{\alpha}$, mayor será el tiempo de control de control de la curvatura. En efecto, si suponemos que la dimensión de M es $n = 5$ y $c_1 = 1$, entonces en la siguiente tabla podemos ver como cambian t_{max} y T debido a cambios en la curvatura seccional K :

K	t_{max}	T
-3	0.0027	0.027
-10	$2,4735 \times 10^{-4}$	0.0014

Cuadro 4.4: Cambios en el tiempo de control de control de curvatura por variaciones de $-K$

En el siguiente gráfico podemos observar como la desigualdad (4.18) es satisfecha por $\phi(t)$ y $|Rm|^2$ para los valores de K elegidos:

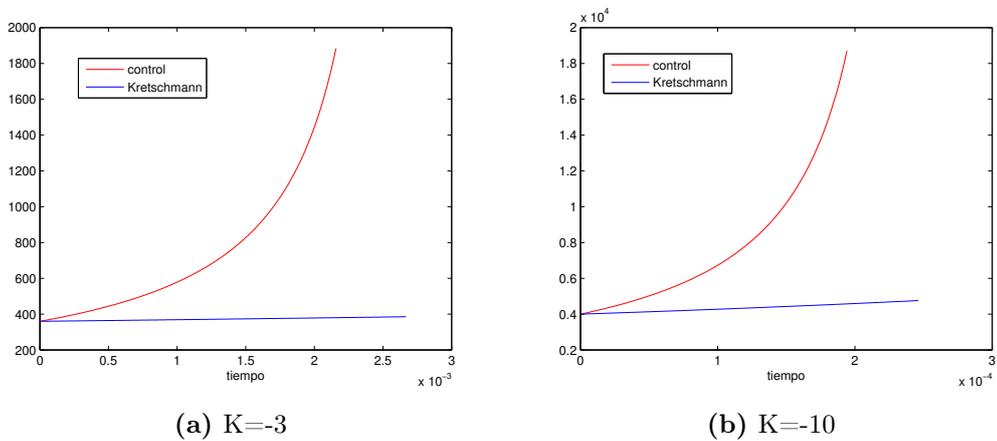


Figura 4.10: Variaciones de la curvatura seccional $K \in (-\infty, -\frac{2}{\alpha})$

Análisis 7

Cuando $|K| < \frac{2}{\alpha}$, como vimos en la sección 4.2.3, el escalar de Kretschmann de la solución del flujo RG-2 es decreciente, está definido en $[0, \infty)$ y satisface $\lim_{t \rightarrow \infty} |Rm(t)|^2 = 0$. Entonces, como la función de control $\phi(t)$ es creciente y verifica $\phi(0) = |Rm(0)|^2$, claramente se cumple la desigualdad

$$|Rm(t)|^2 \leq |Rm(0)|^2 \leq \phi(t)$$

en $[0, t_{max})$. Por ejemplo, si tomamos $K = -1$, $n = 5$ y $c_1 = 1$, las curvas determinadas por las funciones $\phi(t)$ y $|Rm|^2$ son

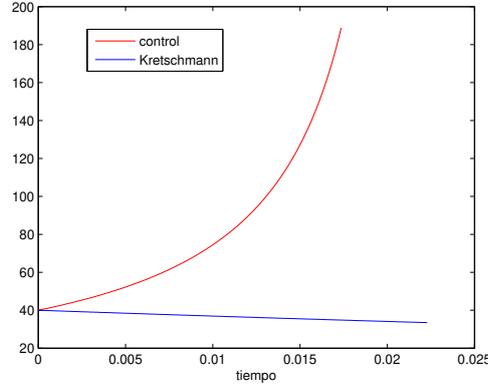


Figura 4.11: Control de la curvatura con $K = -1$, $c_1 = 1$ y $n = 5$

Para este caso, dado que $|Rm(t)|^2$ está acotado por la constante $|Rm(0)|^2 \in \mathbb{R}$, resulta irrelevante identificar aquellas situaciones que hacen que el tiempo t_{max} aumente o disminuya de valor.

Análisis 8: El modelo de bola de Poincaré

Para tener una noción más realista de lo que sucede en geometrías de curvatura seccional negativa, tomemos M como la bola de Poincaré de radio $r >$, la cual se define como

$$M = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < r\}$$

provista de la métrica

$$\tilde{g} = \frac{4r^4}{(r^2 - |x|^2)^2} (dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2 + dx^3 \otimes dx^3)$$

El modelo de Bola de Poincaré es una variedad Riemanniana cuya curvatura seccional es constante y negativa

$$K = -\frac{1}{r^2}$$

y al igual que en el caso de las 3-esfera, el escalar de Kretschmann para esta métrica es

$$|\tilde{Rm}|^2 = \frac{12}{r^4}$$

de modo que la solución $g(t) = f(t)\tilde{g}$ del flujo RG-2 con $g(0) = \tilde{g}$ satisface

$$\partial_t |Rm|^2 \leq c_1 (|Rm|^2 + |Rm|^3 + |Rm|^4) \quad (4.20)$$

donde

$$\begin{aligned} |Rm|^2(x, t) + |Rm|^3(x, t) + |Rm|^4(x, t) &= \frac{12}{f(t)^2 r^4} + \frac{12\sqrt{12}}{f(t)^3 r^6} + \frac{144}{f(t)^4 r^8} \\ \partial_t |Rm|^2(x, t) &= \frac{96}{f(t)^3 r^6} + \frac{48}{f(t)^4 r^8} \\ c_1 &= 3 \end{aligned}$$

Entonces, si elegimos $K = -\frac{1}{r^2}$, $c_1 = 3$ y $n = 3$, podemos constatar la validez del teorema 4.10 para distintos valores de r :

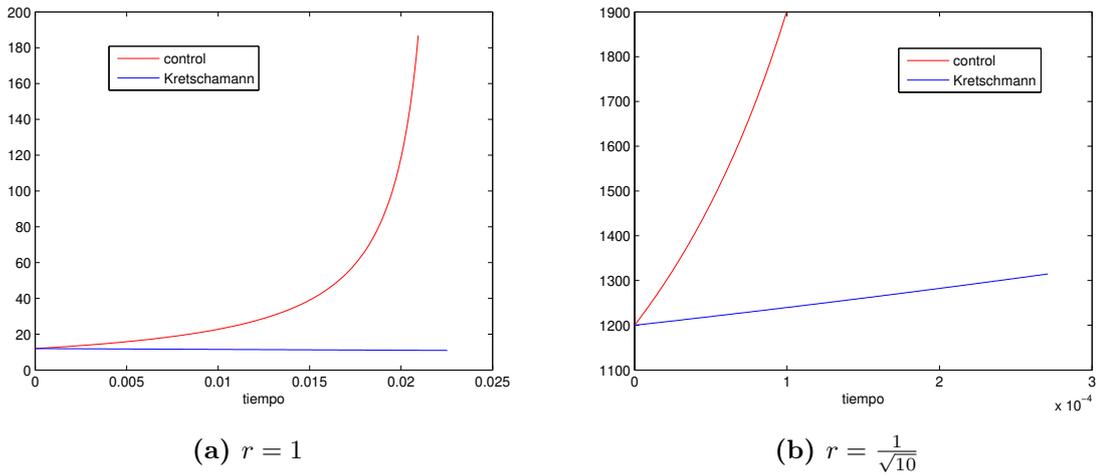


Figura 4.12: Control de la curvatura en el modelo de bola de Poincaré

La importancia del Principio del Máximo radica en que nos ayuda a comprender el comportamiento de la solución de una ecuación diferencial aunque no podamos conocerla de manera analítica. En ese sentido, gracias a que conocemos explícitamente las soluciones del flujo RG-2 en variedades Riemannianas con curvatura seccional cons-

tante, los experimentos numéricos que hemos realizados nos han permitido obtener evidencia de la eficacia del teorema 4.10. Estos resultados, tanto analíticos como numéricos, nos proveen indicios de que en general si es posible acotar la curvatura de cualquier solución del flujo RG-2, lo cual nos motiva a trabajar en futuras investigaciones en posibles generalizaciones del teorema 4.10.

4.5. Evolución de la curvatura escalar y la entropía de Hamilton

Dado que el escalar de curvatura de Ricci es menos complejo que el escalar de Kretschmann, en principio podríamos pensar que analizar su evolución nos permitiría conocer los efectos del flujo RG-2 en la geometría de M de una manera más simple, sin embargo eso no es del todo cierto. Si hacemos la sustitución $h_{ij} = -2R_{ij} - \frac{\alpha}{2}Ren_{ij}$ en el Lema 3.5 vemos que el escalar de curvatura evoluciona de la siguiente manera:

PROPOSICIÓN 4.13 *Si $g(t) : t \in [0, T)$ es una solución del Flujo RG-2, entonces*

$$\partial_t R = \Delta R + 2|Ric|^2 + \frac{\alpha}{2}(\Delta|Rm|^2 + \langle Ren, Ric \rangle - \nabla^i \nabla^j Ren_{ij}) \quad (4.21)$$

En esta ecuación de evolución, la presencia de los términos precedidos por $\frac{\alpha}{2}$ y $|Ric|^2$ dificultan aplicar el principio del máximo sin algún conocimiento previo de tales escalares o sin introducir hipótesis adicionales. Sin embargo, haciendo uso de determinadas funciones, como las entropías de Hamilton y Perelman, es posible extraer información útil del comportamiento de la curvatura escalar bajo el flujo, e incluso abordar aplicaciones en física teórica (ver [3],[2],[25]). En esta sección haremos un breve estudio de la evolución de la entropía de Hamilton bajo el flujo RG-2.

4.5.1. Entropía de Hamilton

En el estudio del flujo de Ricci sobre superficies compactas, Hamilton [14] probó que si la curvatura escalar $R(t)$ de la solución del flujo Ricci es positiva, entonces está acotada superiormente. Para hacer eso, uno de los pasos claves en la demostración de Hamilton fue introducir el siguiente función de entropía:

$$N = \int_M R \log(R) d\mu$$

y demostrar que N es no-creciente bajo el flujo de Ricci, es decir $\frac{dN_B}{dt} \leq 0$. Para el caso del flujo RG-2 normalizado (una modificación del flujo RG-2 original diseñada para el estudio de superficies cerradas) dicho resultado de monotonía fue extendido por Branding [4] introduciendo una modificación a la entropía de Hamilton:

$$N_B = \int_M \left(R \log(R) + \frac{\alpha}{4} R^2 \right) d\mu$$

En dicho trabajo los cálculos realizados para obtener $\frac{dN_B}{dt}$ son bastante simples debido a que cuando $\dim(M) = 2$, la ecuación de evolución del escalar de curvatura bajo el flujo RG-2 se reduce a

$$\partial_t R = (1 + \alpha R) \Delta R + \alpha |\nabla R|^2 + \left(1 + \frac{\alpha}{2} R\right) R^2$$

Ahora, extender tales cálculos para el flujo RG-2, en su forma original y sobre variedades Riemannianas cerradas de dimensión $n > 2$, no es sencillo debido a la gran complejidad que implica hacer cálculos con la ecuación (4.21). Por ejemplo para $\dim(M) = 3$ hemos calculado la siguiente ecuación de evolución:

PROPOSICIÓN 4.14 *Sea (M, \tilde{g}) una variedad Riemanniana de dimensión $n = 3$. Si $g(t) : t \in [0, T)$ es una solución del Flujo RG-2 con $g(0) = \tilde{g}$, entonces*

$$\begin{aligned} \partial_t R = & \Delta R + 2(1 + \alpha R) |\text{Ric}|^2 + \alpha \left(\Delta |\text{Ric}|^2 - R_{ik} R_j^k R^{ij} - \frac{1}{2} R^3 \right) \\ & - \alpha (R_{ij} \nabla^i \nabla^j R + R \nabla^i \nabla^j R_{ij} + 2 \nabla^i R \nabla^j R_{ij}) \\ & - \alpha (R_{ik} \nabla^i \nabla^j R_j^k + R_j^k \nabla^i \nabla^j R_{ik} + \nabla^i R_{ik} \nabla^j R_j^k + \nabla^i R_j^k \nabla^j R_{ik}) \end{aligned}$$

Demostración. Como $\dim(M) = 3$, los componentes en coordenadas locales del tensor de curvatura de Riemann se puede expresar como

$$R_{ijkl} = g_{jl} R_{ik} - g_{jk} R_{il} + g_{ik} R_{kl} - g_{il} R_{jk} - \frac{R}{2} (g_{ik} g_{jl} - g_{il} g_{jk})$$

de este hecho se deducen las siguientes identidades:

$$\begin{aligned} R e n_{ij} &= R_{iklm} R_j^{klm} = 2R R_{ij} - 2R_{ik} R_{jk} + (2|\text{Ric}|^2 - R^2) g_{ij} \\ |Rm|^2 &= 4|\text{Ric}|^2 - R^2 \end{aligned}$$

en consecuencia

$$\Delta |Rm|^2 = 4\Delta |\text{Ric}|^2 - 2R\Delta R - 2|\nabla R|^2$$

$$\langle Ren, Ric \rangle = 4R|Ric|^2 - R^3 - 2R_{ik}R_j^k R^{ij}$$

mientras que

$$\begin{aligned} \nabla^i \nabla^j Ren_{ij} &= 2\Delta|Ric|^2 - 2R\Delta R - 2|\nabla R|^2 \\ &+ 2(R_{ij}\nabla^i \nabla^j R + R\nabla^i \nabla^j R_{ij} + 2\nabla^i R\nabla^j R_{ij}) \\ &+ 2R_{ik}\nabla^i \nabla^j R_j^k + R_j^k \nabla^i \nabla^j R_{ik} + \nabla^i R_{ik}\nabla^j R_j^k + \nabla^i R_j^k \nabla^j R_{ik} \end{aligned}$$

reemplazando estas expresiones en la ecuación (4.21) se verifica la identidad deseada. \square

Introducir el resultado de esta proposición en el cálculo de la derivada de la entropía N_B nos obliga a manipular ecuaciones con un gran número de términos y no siempre es posible determinar su signo.

A pesar de estas dificultades, en geometrías simples, como variedades Riemannianas cerradas con curvatura seccional constante y positiva, sin importar su dimensión, es bastante fácil calcular la evolución de la entropía N_B bajo el flujo RG-2. De hecho hemos obtenido el siguiente resultado:

PROPOSICIÓN 4.15 *Sea (M, \tilde{g}) es una variedad Riemanniana cerrada con curvatura seccional constante $K > 0$ y dimensión $n > 1$. Si $g(t) : t \in [0, T)$ es una solución del flujo RG-2 con $g(0) = \tilde{g}$, entonces*

$$\frac{d}{dt} N_B = \frac{R^2 Vol(M)}{n} \left(1 + \frac{\alpha K}{2\phi(t)} \right) (2 - (n-2) \log(R) - \alpha(n-4)R)$$

donde $Vol(M) = \int_M d\mu$ es el volumen de la variedad M .

Demostración. La curvatura escalar de la solución $g(t) : t \in [0, T)$ esta dada por

$$R(t) = \frac{Kn(n-1)}{\phi(t)} > 0$$

donde $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ esta determinada por la ecuación (4.11). En consecuencia, bajo el flujo RG-2 el escalar de curvatura evoluciona de acuerdo con

$$\partial_t R = \frac{2K^2 n(n-1)^2}{\phi(t)^2} \left(1 + \frac{\alpha K}{2\phi(t)} \right) = \frac{2k(n-1)}{\phi(t)} \left(1 + \frac{\alpha K}{2\phi(t)} \right) R > 0$$

Adicionalmente, haciendo la sustitución $h_{ij} = -2R_{ij} - \frac{\alpha}{2} Ren_{ij}$ en el lema 3.5, vemos

que la forma de volumen $d\mu$ evoluciona bajo el flujo RG-2 de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\partial_t d\mu &= - \left(R + \frac{\alpha}{4} |Rm|^2 \right) d\mu = - \left(R + \frac{\alpha}{2} \frac{K^2 n(n-1)}{\phi(t)^2} \right) d\mu \\ &= - \left(R + \frac{\alpha K}{2\phi(t)} R \right) d\mu = -R \left(1 + \frac{\alpha K}{2\phi(t)} \right) d\mu\end{aligned}$$

Con esto, gracias a que la curvatura escalar no depende de $x \in M$, bajo el flujo RG-2 el funcional de entropía N_B verifica

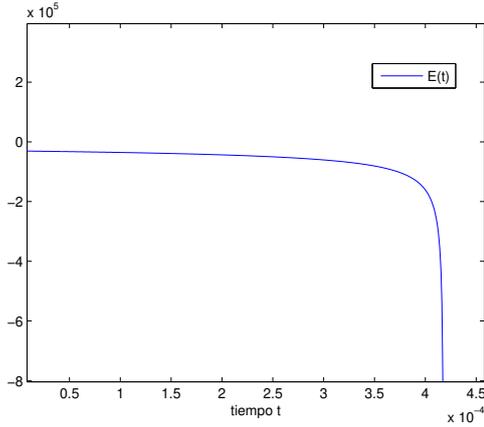
$$\begin{aligned}\frac{dN_B}{dt} &= \int_M \partial_t \left(R + R \log(R) + \frac{\alpha}{4} R^2 \right) d\mu - \int_M \left(R \log(R) + \frac{\alpha}{4} R^2 \right) \left(R + \frac{\alpha}{4} |Rm|^2 \right) d\mu \\ &= \frac{2K(n-1)}{\phi(t)} \text{Vol}(M) \left(1 + \frac{\alpha K}{2\phi(t)} \right) \left(1 + \log(R) + \frac{\alpha}{2} R \right) \\ &\quad - R^2 \text{Vol}(M) \left(1 + \frac{\alpha K}{2\phi(t)} \right) \left(\log(R) + \frac{\alpha}{4} R \right) \\ &= \text{Vol}(M) \left(1 + \frac{\alpha K}{2\phi(t)} \right) \left[\frac{2K(n-1)}{\phi(t)} \left(1 + \log(R) + \frac{\alpha}{2} R \right) - R \left(\log(R) + \frac{\alpha}{4} R \right) \right] \\ &= \text{Vol}(M) \left(1 + \frac{\alpha K}{2\phi(t)} \right) \left[\frac{2R}{n} \left(1 + \log(R) + \frac{\alpha}{2} R \right) - R \left(\log(R) + \frac{\alpha}{4} R \right) \right] \\ &= \frac{R^2 \text{Vol}(M)}{n} \left(1 + \frac{\alpha K}{2\phi(t)} \right) (2 - (n-2) \log(R) - \alpha(n-4)R)\end{aligned}$$

□

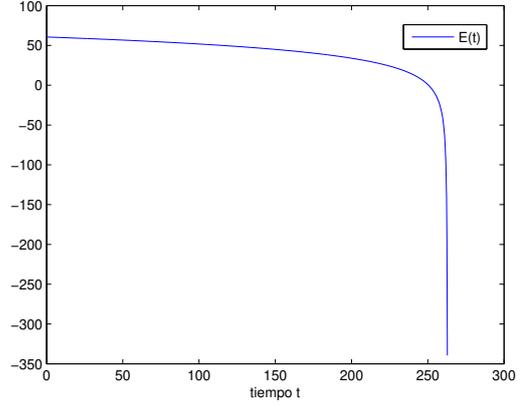
Como la curvatura escalar $R(t)$ y la función $\phi(t)$ son positivas en el intervalo $[0, T)$, con $T = \frac{1}{2K(n-1)} + \frac{\alpha}{4(n-1)} \ln \left| \frac{\alpha K}{2+\alpha K} \right|$, de esta ecuación de evolución es fácil notar que el signo de la derivada $\frac{d}{dt} N_B$ está determinado por el signo del término

$$E(t) := 2 - (n-2) \log(R(t)) - \alpha(n-4)R(t)$$

dicho eso, es claro que la entropía N_B no necesariamente es una función monótona creciente o decreciente en su dominio, pues dependiendo de los valores de la dimensión n , la curvatura K y la constante de acople α , la función $E(t)$ puede tener distintos signos en $[0, T)$. Por ejemplo, para $n = 20$ y $\alpha = \frac{1}{2}$, la función $E(t)$ es estrictamente negativa cuando $K = 10$, mientras que si $K = 10^{-4}$, es positiva en $[0, \tilde{t})$ y negativa en $[\tilde{t}, T)$, para cierto $\tilde{t} \in [0, T)$. Podemos ver esto de mejor manera en las siguientes gráficas:



(a) $K = 10$



(b) $K = 10^{-4}$

Figura 4.13: Signo de $\frac{d}{dt}N_B$ para $n = 20$ y $\alpha = \frac{1}{2}$

Estos hallazgos nos muestran que la evolución de la función de entropía N_B bajo el flujo RG-2 no tiene, en general, un signo determinado. Sin embargo, a pesar de estos hechos, existe un caso particular en el que la entropía es estrictamente monótona creciente sin importar el valor de la curvatura seccional y la constante de acople:

COROLARIO 4.16 *Sea (M, \tilde{g}) es una variedad Riemanniana cerrada con curvatura seccional constante $K > 0$. Supongamos que $g(t) : t \in [0, T)$ es una solución del flujo RG-2 con $g(0) = \tilde{g}$. Si $n = 2$, entonces el funcional de entropía N_B es estrictamente creciente bajo el flujo RG-2.*

Demostración. Tenemos que $E(t) = 2 + 2\alpha R(t) > 0$ en $[0, T)$, lo cual implica

$$\frac{d}{dt}N_B > 0$$

□

Como ya lo mencionamos, en el estudio del flujo de Ricci, analizar el comportamiento de las funciones de entropía es una de las técnicas que permiten obtener cotas para el escalar de curvatura de sus soluciones; sin embargo, para el caso del flujo RG-2, extender esta técnica para variedades Riemannianas más generales resulta complicado, pues la entropía de Hamilton no siempre es monótona bajo este flujo. Es posible que utilizando otras funciones de entropía, o introduciendo nuevas modificaciones a la entropía de Hamilton, se pueda llegar a resultados más satisfactorios en futuras investigaciones.

Capítulo 5

Conclusiones

A lo largo del capítulo 4 hemos estudiado el flujo RG-2 en su generalidad con el objetivo de obtener una visión menos limitada de la naturaleza de este flujo geométrico. De este modo, más allá de los resultados concernientes a la existencia de soluciones para este flujo geométrico, hemos hecho un aporte al entendimiento del comportamiento de la curvatura bajo el flujo RG-2. En concreto, hemos obtenido los siguientes resultados:

1. Mostramos que la evolución del tensor de curvatura de Riemann y el escalar de Kretschmann, bajo el flujo RG-2, está gobernada por ecuaciones de tipo reacción-difusión (Proposiciones 4.4, 4.5 y 4.6). Dichas ecuaciones son válidas para variedades Riemannianas de cualquier dimensión.
2. Gracias a que el valor del escalar de Kretschmann se calcula empleando todos los componentes del tensor de Riemann, y su valor no depende del sistema de coordenadas locales elegido, esta función nos permite analizar el comportamiento de la curvatura sin ninguna ambigüedad. En ese sentido, con el fin de encontrar cotas para la curvatura de las soluciones del flujo RG-2, el hecho de que la evolución del escalar de Kretschmann esté descrita por una ecuación de tipo reacción-difusión nos motivó a introducir una nueva versión del Principio del Máximo (Lema 4.7 y Proposición 4.9).
3. Empleando el Principio del Máximo antes mencionado, encontramos condiciones bajo las cuales es posible acotar el escalar de Kretschmann de una solución del flujo RG-2 (Teorema 4.10).
4. En la sección 4.4.2 mostramos que las hipótesis del teorema 4.10 se cumplen en geometrías de curvatura seccional constante. Adicionalmente, gracias a que

en este tipo de variedades Riemannianas las soluciones del flujo RG-2 se conocen analíticamente, se verificó la validez del teorema 4.10 a través los cálculos numéricos realizados en las secciones 4.4.3. y 4.4.4.

5. Para geometrías con curvatura seccional constante positiva obtuvimos la ecuación de evolución de entropía de Hamilton bajo el flujo RG-2 (Proposición 4.15). Los cálculos numéricos de dicha ecuación de evolución muestran que no tiene un signo definido, y eso nos permite inferir que, en general, para variedades Riemannianas cerradas de cualquier dimensión, la función de entropía de Hamilton no es monótona bajo el flujo RG-2. Este resultado nos sugiere usar otras funciones de entropía, u otros métodos, para buscar cotas para el escalar de curvatura de Ricci.

Si bien el aporte realizado nos ha permitido conocer los efectos del flujo RG-2 sobre la curvatura, el conocimiento generado aún es limitado y se deben hacer avances. En el contexto de la geometría Riemanniana, fundamentalmente se deben relajar las hipótesis del teorema 4.10. como un primer paso hacia la demostración rigurosa de la existencia de las singularidades del flujo RG-2, y una vez hecho eso, extender la técnica de cirugía de Perelman para el tratamiento de dichas singularidades. Adicionalmente, el uso riguroso del Flujo RG-2 en física teórica exige también analizar la existencia de soluciones en variedades Riemannianas no compactas y variedades Lorentzianas, así como también el comportamiento de la curvatura de tales soluciones. Esperamos atacar estos problemas en futuros trabajos.

Por otra parte, debido a que el flujo RG-2 tiene también un significado propio en la Teoría de Cuerdas, ciertos aspectos de esa teoría pueden brindar una noción intuitiva sobre lo que se espera de este flujo geométrico, y con eso guiar su estudio riguroso en la matemática. En ese sentido trabajar en la interpretación física de las funciones de entropía para la curvatura, o relacionar las singularidades del flujo con singularidades de espaciotiempo, pueden convertirse en poderosas herramientas a la hora de atacar los problemas antes mencionados. Esto motiva a investigar el flujo RG-2 en si mismo, no solo desde la matemática, sino también desde la física. Dicho eso, esperamos también colaborar en esta tarea con investigadores del área de física teórica de altas energías.

Bibliografía

- [1] Ofer Aharony, Shlomo S. Razamat, Nathan Seiberg, y Brian Willett. The long flow to freedom. *JHEP*, 02:056, 2017.
- [2] Oscar Lasso Andino. RG-2 flow and black hole entanglement entropy. *arXiv preprint arXiv:1905.00102*, 2019.
- [3] Oscar Lasso Andino. RG-2 flow, mass and entropy. *Classical and Quantum Gravity*, 36(6):065011, 2019.
- [4] Volker Branding. The normalized second order renormalization group flow on closed surfaces. *arXiv preprint arXiv:1503.07462*, 2015.
- [5] Mauro Carfora y Christine Guenther. Scaling and entropy for the RG-2 Flow, 2019.
- [6] Bennett Chow y Dan Knopf. *The Ricci Flow: an introduction*, volume 1. American Mathematical Soc., 2004.
- [7] Laura Cremaschi y Carlo Mantegazza. Short-time existence of the second order renormalization group flow in dimension three. *arXiv preprint arXiv:1306.1721*, 2013.
- [8] Dennis M. DeTurck. Deforming metrics in the direction of their Ricci tensors. *Journal of Differential Geometry*, 18(1):157–162, 1983.
- [9] D. Friedan. Nonlinear Models in $2+\epsilon$ Dimensions. *Phys. Rev. Lett.*, 45:1057–1060, Sep 1980.
- [10] Karsten Gimre, Christine Guenther, y James Isenberg. Second-order renormalization group flow of three-dimensional homogeneous geometries. *arXiv preprint arXiv:1205.6507*, 2012.

- [11] Karsten Gimre, Christine Guenther, y James Isenberg. Short-time existence for the second order renormalization group flow in general dimensions. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 143(10):4397–4401, 2015.
- [12] Michael Gutperle, Matthew Headrick, Shiraz Minwalla, y Volker Schomerus. Space-time energy decreases under world sheet RG flow. *JHEP*, 01:073, 2003.
- [13] Richard Hamilton. Three-manifolds with positive Ricci curvature. *Journal of Differential Geometry*, 17(2):255–306, 1982.
- [14] Richard S. Hamilton. The Ricci flow on surfaces. In *Mathematics and general relativity, Proceedings of the AMS-IMS-SIAM Joint Summer Research Conference in the Mathematical Sciences on Mathematics in General Relativity, Univ. of California, Santa Cruz, California, 1986*, pgs. 237–262. Amer. Math. Soc., 1988.
- [15] Matthew Headrick y Toby Wiseman. Ricci flow and black holes. *Class. Quant. Grav.*, 23:6683–6708, 2006.
- [16] Gerhard Huisken y Tom Ilmanen. The inverse mean curvature flow and the Riemannian Penrose inequality. *Journal of Differential Geometry*, 59(3):353–437, 2001.
- [17] Jürgen Jost. *Riemannian geometry and geometric analysis*, volume 42005. Springer, 2008.
- [18] Gimre k., Guenther C., y Isenberg J. Short-time existence for the second order renormalization group flow in general dimensions. *Proc. Amer. Soc*, 143:4397–4401, 2015.
- [19] Alex Kehagias, Dieter Lüst, y Severin Lüst. Swampland, Gradient Flow and Infinite Distance. *JHEP*, 04:170, 2020.
- [20] Olga Aleksandrovna Ladyzhenskaia, Vsevolod Alekseevich Solonnikov, y Nina N. Ural'tseva. *Linear and quasi-linear equations of parabolic type*, volume 23. American Mathematical Soc., 1968.
- [21] John M. Lee. Introduction to smooth manifolds. *Graduate Texts in Mathematics*, 218, 2003.
- [22] John M. Lee. *Riemannian manifolds: an introduction to curvature*, volume 176. Springer Science & Business Media, 2006.

- [23] E. Taylor Michael. Partial Differential Equations. III. *Applied Mathematical Sciences*, 117, 1999.
- [24] Todd A. Oliynyk. The second-order renormalization group flow for nonlinear sigma models in two dimensions. *Classical and Quantum Gravity*, 26(10):105020, 2009.
- [25] Grisha Perelman. The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications. *arXiv preprint math/0211159*, 2002.
- [26] Grisha Perelman. Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds. *arXiv preprint math/0307245*, 2003.
- [27] Grisha Perelman. Ricci flow with surgery on three-manifolds. *arXiv preprint math/0303109*, 2003.
- [28] Nick Sheridan y Hyam Rubinstein. Hamilton's Ricci flow. *Honour thesis*, 2006.
- [29] Wan-Xiong Shi. Deforming the metric on complete Riemannian manifolds. *Journal of Differential Geometry*, 30(1):223–301, 1989.
- [30] Peter Topping. *Lectures on the Ricci flow*, volume 325. Cambridge University Press, 2006.
- [31] Robert H. Wasserman. *Tensors and manifolds: with applications to physics*. Oxford University Press on Demand, 2004.
- [32] Shing-Tung Yau. On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation, I. *Communications on pure and applied mathematics*, 31(3):339–411, 1978.