

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

MAESTRÍA EN OPTIMIZACIÓN MATEMÁTICA

**APROXIMACIÓN POR ELEMENTOS FINITOS DE UNA CLASE
PROBLEMAS DE CONTROL ÓPTIMO NO CONVEXOS
GOBERNADOS POR ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES
ELÍPTICAS**

**TESIS PREVIA A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE MAGÍSTER EN
OPTIMIZACIÓN MATEMÁTICA**

HERNÁN ALEXANDER NENJER MORILLO

`hernan.nenjer@epn.edu.ec`

Director: PEDRO MARTIN MERINO ROSERO

`pedro.merino@epn.edu.ec`

QUITO, OCTUBRE, 2020

CERTIFICACIÓN

Certifico que el presente trabajo fue desarrollado por HERNÁN ALEXANDER NENJER MORILLO, bajo mi supervisión.



Firmado electrónicamente por:
**PEDRO MARTIN
MERINO ROSERO**

Pedro Martin Merino Rosero
Director del Proyecto

DECLARACIÓN

“Yo, HERNÁN ALEXANDER NENJER MORILLO, declaro bajo juramento que el trabajo aquí descrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y, que hemos consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

Sin perjuicio de los derechos reconocidos en el primer párrafo del artículo 114 del Código Orgánico de la Economía de los Conocimientos, Creatividad e Innovación -COESC-, cedo los derechos patrimoniales de este trabajo, a la Escuela Politécnica Nacional.”

Alexander Nenjer

Hernán Alexander Nenjer Morillo
C.I. 1722296959

AGRADECIMIENTOS

A Pedro Merino quien con su orientación, conocimiento y enseñanza hizo posible el desarrollo de este proyecto de investigación.

A mis profesores por compartir sus conocimientos y experiencias durante todas sus clases.

Al Centro de Modelización Matemática (MODEMAT) por hacer posible este programa de maestría, así como también por todas las facilidades, recursos y asesoramiento brindados en el transcurso de mis estudios.

A la Escuela Politécnica Nacional por ser sede de todo el conocimiento que he adquirido durante todos los años.

A mis compañeros y amigos por toda la ayuda y motivación recibida durante todo este tiempo de la maestría, particularmente a Gaby.

Finalmente agradezco a mis padres y hermanos por todo su apoyo, ánimo y comprensión.

DEDICATORIA

Dedico este trabajo en su integridad a todos mis seres queridos, exclusivamente a mis padres, Germania y Hernán, y a mis hermanos Eddy y Jhuridia.

Índice general

Notaciones	1
Resumen	2
Abstract	3
1. Introducción	4
2. Definiciones y resultados preliminares	6
2.1. Espacios funcionales	6
2.2. Análisis convexo	9
2.3. Método de Newton Semisuave	13
2.4. Problema de control óptimo que involucran las cuasinormas $L^{1/p}$, $p > 1$	14
2.4.1. Regularización de tipo Huber para el problema de control óptimo (P)	15
2.4.2. Existencia de la solución y condiciones de optimalidad para el problema regularizado	17
2.4.3. Existencia de la solución y condiciones de optimalidad para el problema (P)	21
2.4.4. Problema regularizado con restricciones de caja	22
3. Planteamiento del problema y aproximación numérica	26
3.1. Planteamiento del Problema	26
3.2. Aproximación por el métodos de los elementos finitos	27
3.2.1. Discretización de la Ecuación de Estado	27

3.2.2. Discretización de los controles	28
4. Estimación del orden de error	31
5. Implementación Numérica	40
5.1. Método de Newton semisuave para la solución numérica del problema discreto	40
5.2. Implementación Numérica	42
5.3. Ejemplos numéricos	45
6. Conclusiones y comentarios	54
Bibliografía	59

Notaciones

\mathbb{R}^n	Espacio de dimensión n de números reales
I_C	Función indicatriz de un conjunto C .
\bar{C}	Clausura de C .
$\text{int } C$	Interior del conjunto C .
Ω	Un dominio Lipschitz acotado en \mathbb{R}^2 .
Γ	Frontera de Ω .
(\cdot, \cdot)	El producto interno de $L^2(\Omega)$.
X^*	Espacio dual de X .
$B(u, \rho)$	Bola abierta de radio ρ con centro en u .
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{X^*, X}$	Evaluación de un elemento de X^* en un punto de X .
$\ \cdot \ _{X^*}$	Norma del espacio dual de X^* .
$F'_G(x)$	Derivada de Gâteaux de la función F en el punto x .
$Y_p(u)$	Cuasinorma de $L^{\frac{1}{p}}$.
$Y_{p,\gamma}(u)$	Regularización de Huber de la cuasinorma de $L^{\frac{1}{p}}$ con parámetro $\gamma \gg 1$.
\mathcal{P}_C	Función de proyección sobre un conjunto convexo cerrado C .

Resumen

El objetivo del presente trabajo es el de obtener una estimación del error generado al aproximar por el método de elementos finitos, un problema de control óptimo del tipo elíptico, cuyo funcional de costo posee un término no convexo. Dicho término regulariza localmente la cuasinorma L^q (con $q \in (0, 1)$). Nuestro estudio se fundamenta en la obtención del sistema de optimalidad, mediante la formulación del funcional de costo como diferencia de funciones convexas (DC), interviniendo para esta formulación una penalización de la norma L^1 .

Para la aproximación por el método de elementos finitos consideramos el espacio de las funciones continuas lineales a trozos para la discretización de la ecuación de la estado, y el espacio de las funciones constantes a trozos para la aproximación de los controles. Con lo cual, bajo ciertas condiciones establecidas para los parámetros de regularización del problema, obtenemos que la convergencia de nuestra aproximación puede alcanzar un orden lineal dependiente del parámetro de la malla.

Finalmente, se ilustrará los resultados teóricos obtenidos con experimentos numéricos.

Palabras claves: problema de control óptimo elíptico, no convexidad, diferencia de funciones convexas, método de elementos finitos, estimación de errores.

Abstract

The purpose of this study is deriving an estimation of the error generated by the approximation, by the finite element method, an optimal control problem of the elliptical type, whose cost functional has a non-convex term that regularizes locally the quasi-norm L^q (with $q \in (0,1)$). Our study is based on obtaining the optimality system by formulating the cost functional as a difference of convex functions (DC), which involves a L^1 penalty optimal control problem.

We consider the space of piece-wise linear continuous functions for the discretization of the state equation and the space of piece-wise constant functions for the approximation of the controls. Under certain conditions established for the parameters of regularization of the problem we obtain that the convergence of our approximation can reach a linear order of convergence as the size of the mesh decreases. Finally, numerical experiments of the obtained theoretical results will be illustrated.

Keywords: optimal control of elliptical partial differential equations, non-convexity, difference of convex functions, finite element method, error estimates.

Capítulo 1

Introducción

Existen numerosos fenómenos físicos que pueden ser descritos mediante ecuaciones diferenciales parciales, como por ejemplo el sonido, el calor, la electrostática, la electrodinámica, la dinámica de fluidos, la elasticidad o la mecánica cuántica, cf. [14]. Una vez modelados estos fenómenos, es de interés controlarlos de manera óptima. Es aquí que radica la importancia de los problemas de control óptimo para este tipo de estudio.

En la actualidad, los problemas de control óptimo del tipo “sparse” han sido relevantes en diversas aplicaciones, debido a que en la práctica los controles de tipo sparse pueden significar un ahorro importante de recursos. En efecto dichos controles están caracterizados por tener un soporte “pequeño”, lo que en la práctica implica un costo menor en su implementación.

Existen diversos problema de control óptimo que inducen soluciones del tipo sparse, por ejemplo en cf. [28] consideran un problema de control con una penalización en norma L^1 , o en [6] se considera los controles en el espacio de las medidas de Borel regulares.

Otros problemas que inducen soluciones del tipo “sparse” son los problemas que consideran como penalización las cuasinormas L^q con $q \in [0, 1)$ cf. [21], [30]. Este tipo de penalizaciones tienen aplicaciones importantes, por ejemplo en restauración de imágenes cf. [19], detención comprimida cf. [16], problemas inversos cf. [26], entre otros. Por otra parte, el hecho de que las cuasinormas L^q sean funciones no convexas y no diferenciables hace que los estudios teóricos y numéricos de este tipo de problemas sean un verdadero reto, siendo el caso de cf. [23], en el que el sistema de optimalidad del problema de control óptimo con cuasinormas L^q es obtenido a partir del sistema de optimalidad de una versión regularizada de dicho

problema. Cabe mencionar que la mayoría de trabajos dedicados a este tipo de problemas han abordado únicamente el tema de la resolución numérica, más no a la pregunta sobre la estimación de errores de aproximación, por lo que una propuesta de estudio en este tópico podría resultar en un significativo aporte para el desarrollo en este campo.

La novedad de este trabajo consiste en que abordamos el estudio de la estimación del error que se obtiene al aproximar, por el método de elementos finitos, el problema de control óptimo regularizado propuesto en cf. [23]. Ahí, se propone una regularización del tipo Huber para subsanar, en cierta medida la no convexidad y no diferenciabilidad de los términos L^q .

El contenido de este proyecto está distribuido de la siguiente manera: en el Capítulo 2 introducimos algunas definiciones y resultados fundamentales de la teoría de espacios funcionales y del análisis convexo. Luego enunciamos sucintamente los resultados principales del método de Newton Semisuave y finalizamos este capítulo con un resumen extendido de [23] que es el artículo principal sobre el cual se basa este proyecto. El Capítulo 3 está dividido en tres secciones. En la Sección 3.1 formulamos nuestro problema de control óptimo, asumimos las condiciones necesarias para asegurar la existencia de al menos una solución y enunciamos brevemente las condiciones de optimalidad del problema. En la Sección 3.2 presentamos las definiciones y suposiciones principales del método de elementos finitos así como también ciertos resultados que serán de utilidad para la obtención de la estimación del error de nuestro problema, que será estudiado en detalle en la Capítulo 4. En dicho capítulo, se presenta todo lo correspondiente a la estimación del error generada al aproximar numéricamente nuestro problema de control por el método de elementos finitos. Para este estudio nos basamos en el estudio realizado en [31].

En el Capítulo 5 se ilustran experimentos numéricos para verificar los resultados teóricos obtenidos. Para ello consideramos un método de Newton Semismooth, similar al utilizado en [24]. Finalmente, en el Capítulo 6 se exponen algunas conclusiones y comentarios del trabajo realizado.

Capítulo 2

Definiciones y resultados preliminares

2.1. Espacios funcionales

En lo siguiente vamos a considerar Ω un subconjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^m . Las siguientes definiciones y resultados pueden ser consultados en detalle en [4], [14], [17] y [22].

DEFINICIÓN 2.1. Diremos que Ω o su frontera Γ es continua (respectivamente Lipschitz, continuamente diferenciable, de clase $C^{k,1}$, n veces diferenciable) si para cada $x \in \Gamma$ existe una vecindad V de x en \mathbb{R}^m y nuevas coordenadas ortogonales $\{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ tales que

1. V es un hipercubo en las nuevas coordenadas, es decir

$$V = \{(v_1, \dots, v_m) : -a_i < v_i < a_i, \quad i = 1, \dots, m\};$$

2. Existe una función ϕ continua (respectivamente Lipschitz, continuamente diferenciable, de clase $C^{k,1}$, n veces continuamente diferenciable), definida en

$$V' = \{(v_1, \dots, v_{m-1}) : -a_i < v_i < a_i, \quad i = 1, \dots, m-1\}$$

y tal que

$$|\phi(y')| \leq \frac{a_m}{2}, \text{ para cada } y' = (y_1, \dots, y_{m-1}) \in V',$$

$$\Omega \cap V = \{y = (y', y_m) \in V : y_m < \phi(y')\},$$

$$\Gamma \cap V = \{y = (y', y_m) \in V : y_m = \phi(y')\}.$$

Nuestro estudio se basa en un problema de control óptimo que se encuentra definido sobre un dominio Ω en \mathbb{R}^n ($n = 2$ o $n = 3$), el planteamiento de este

problema será abordado en detalle en la sección 2.4 y en el capítulo 3.

A continuación introducimos algunas nociones y resultados principales de espacios funcionales, lo cual nos provee de una herramienta básica para el análisis y estudio de ecuaciones diferenciales parciales elípticas, esto motivado principalmente al hecho de que nuestro problema de control +óptimo tiene una restricción .

DEFINICIÓN 2.2. Definimos el espacio de las funciones continuas en Ω como

$$C(\bar{\Omega}) = \{f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es continua}\},$$

el cual está normado por

$$\|f\|_{C(\bar{\Omega})} = \sup_{x \in \bar{\Omega}} |f(x)|.$$

Así mismo denotamos al espacio de las funciones k veces continuamente diferenciables por $C^k(\bar{\Omega})$, cuya norma está dada por

$$\|f\|_{C^k(\bar{\Omega})} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_{C(\bar{\Omega})},$$

con $D^\alpha f := \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| := \sum_{i=1}^n \alpha_i$.

DEFINICIÓN 2.3. Definimos para $0 < \gamma \leq 1$, el espacio de Hölder, denotado por $C^{k,\gamma}(\bar{\Omega})$, como el conjunto de las funciones $f \in C^k(\bar{\Omega})$ tal que

$$\|f\|_{C^{k,\gamma}(\bar{\Omega})} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_{C^k(\bar{\Omega})} + \sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha f|_{C^{0,\gamma}(\bar{\Omega})}$$

es finita, donde $|\cdot|_{C^{0,\gamma}(\bar{\Omega})}$ denota la semi-norma γ -Hölder definida por

$$|f|_{C^{0,\gamma}(\bar{\Omega})} = \sup_{\substack{x_1, x_2 \in \bar{\Omega} \\ x_1 \neq x_2}} \left\{ \frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{|x_1 - x_2|^\gamma} \right\}.$$

El conjunto $C^{k,\gamma}(\bar{\Omega})$ con la norma $\|\cdot\|_{C^{k,\gamma}(\bar{\Omega})}$ es un espacio de Banach.

DEFINICIÓN 2.4. El conjunto $C_c^k(\Omega)$ es el espacio de funciones continuas k veces diferenciables con soporte compacto en Ω .

DEFINICIÓN 2.5. Definimos para $1 \leq p < \infty$ los espacios de Lebesgue $L^p(\Omega)$, como el conjunto dado por

$$L^p(\Omega) := \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ medible} : \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty \right\},$$

dotamos a este espacio con la siguiente norma

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left[\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right]^{1/p}.$$

El conjunto $L^p(\Omega)$ con la norma $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ es un espacio de Banach. Más aún, $(L^2(\Omega), \|\cdot\|_{L^2(\Omega)})$ es un espacio de Hilbert con producto escalar definido por

$$(f, g) = \int_{\Omega} f(x)g(x) dx$$

para f, g funciones en $L^2(\Omega)$.

DEFINICIÓN 2.6. Definimos el espacio de Lebesgue, cuando $p = \infty$, como el conjunto dado por

$$L^\infty(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ medible} : \exists C \geq 0 \text{ tal que } |f(x)| < C \text{ c.t.p. en } \Omega\},$$

cuya norma se define por

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \text{ess sup}_{x \in \Omega} |f(x)| = \inf\{C \in \mathbb{R}_+ : |f(x)| < C \text{ c.t.p. en } \Omega\}.$$

De igual manera, se tiene que $(L^\infty(\Omega), \|\cdot\|_{L^\infty(\Omega)})$ es un espacio de Banach.

DEFINICIÓN 2.7. Para $1 \leq p \leq \infty$ y $k \in \mathbb{N}$ definimos el espacio de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ como el conjunto dado por

$$W^{k,p}(\Omega) := \{f \in L^p(\Omega) : D^\alpha f \in L^p(\Omega), \forall |\alpha| \leq k\},$$

Este conjunto es un espacio normado con la norma

$$\|f\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |D^\alpha f(x)|^p dx \right)^{1/p}, & \text{si } 1 \leq p < \infty, \\ \sum_{|\alpha| \leq k} \text{ess sup}_{x \in \Omega} |D^\alpha f(x)|, & \text{si } p = +\infty. \end{cases}$$

El espacio normado $(W^{k,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)})$ es un espacio de Banach.

Para $p = 2$ denotamos por $H^k(\Omega)$ al espacio $W^{k,2}(\Omega)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Además, $H^k(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con el producto escalar

$$(f, g)_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} D^\alpha f(x) D^\alpha g(x) dx.$$

DEFINICIÓN 2.8. Definimos para $1 \leq p < +\infty$ el espacio $W_0^{1,p}(\Omega)$ como la clausura de $C_c^1(\Omega)$ en $W^{1,p}(\Omega)$.

Denotamos por $H_0^1(\Omega)$ al espacio $W_0^{1,2}(\Omega)$ el cual es un espacio de Hilbert.

2.2. Análisis convexo

En esta sección enunciaremos algunas definiciones y resultados del análisis convexo, algunos de estos resultados están relacionados al cálculo subdiferencial para funciones convexas no diferenciables. Nos referimos a la literatura [9], [10] y [20] para el análisis y estudio de esta sección.

Para esta sección denotamos por X , W a dos espacios de Banach, y Y denota un subconjunto de X .

DEFINICIÓN 2.9. Diremos que subconjunto U de X es convexo, si para todo $x, y \in U$ y $\alpha \in [0, 1]$ se tiene que

$$\alpha x + (1 - \alpha)y \in U.$$

Una operación de fundamental importancia en el análisis convexo es la proyección sobre conjuntos convexos, dicho resultado sirve como punto de partida para la caracterización de condiciones de optimalidad para problemas de control óptimo. Para poder definirla correctamente enunciamos el siguiente resultado cuya demostración puede ser encontrada en la Proposición 7.3 de [9].

PROPOSICIÓN 2.1. Sea C un subconjunto convexo, cerrado no vacío de un espacio de Hilbert H , y sea $x \in H$. Entonces existe un único $u \in C$ que resuelve el siguiente problema de minimización

$$\inf_{y \in C} \frac{1}{2} \|y - x\|^2. \quad (2.1)$$

La anterior proposición nos permite definir la función proyección sobre un conjunto convexo, enunciamos también algunas propiedades que satisface esta función.

DEFINICIÓN 2.10. Sea H un espacio de Hilbert y C un subconjunto convexo, cerrado no vacío de H , definimos la función $\mathcal{P}_C : H \rightarrow C$ tal que $\mathcal{P}_C(x)$ es el punto que resuelve el problema (2.1), para $x \in H$. Diremos también que $\mathcal{P}_C(x)$ es la proyección de x sobre C .

PROPOSICIÓN 2.2. Si C es un subconjunto convexo, cerrado no vacío de un espacio

de Hilbert H , entonces se obtiene la siguiente equivalencia

$$u = \mathcal{P}_C(x) \iff \langle x - u, y - u \rangle \leq 0, \quad \forall y \in C.$$

PROPOSICIÓN 2.3. *Bajo las misma hipótesis de la proposición anterior, la función \mathcal{P}_C es Lipschitz con factor $L = 1$, es decir*

$$\|\mathcal{P}_C(x) - \mathcal{P}_C(y)\| \leq \|x - y\|, \quad \forall x, y \in C.$$

Introducimos ahora el concepto de función convexa, este tipo de funciones son relevantes ya que sobre ellas podemos definir el concepto de subgradiente y subdiferencial, los cuales son importantes en el análisis de funciones no diferenciables puesto que son generalizaciones de la derivada de Gâteaux y la derivada direccional.

DEFINICIÓN 2.11. *Sea $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida sobre un conjunto convexo U , diremos que f es una función convexa en U , si para todo $x, y \in U$ y $\alpha \in [0, 1]$ se tiene que*

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y).$$

Si la desigualdad es estricta para todo $\alpha \in (0, 1)$, entonces diremos que f es una función estrictamente convexa.

DEFINICIÓN 2.12. *Decimos que $\zeta \in X^*$ es un subgradiente de f en x si cumple la siguiente desigualdad*

$$\langle \zeta, y - x \rangle_{X^*, X} \leq f(y) - f(x), \quad \forall y \in X.$$

Definimos el subdiferencial de f en el punto x como el conjunto de todos los subgradientes de f en x y lo denotamos por $\partial f(x)$.

PROPOSICIÓN 2.4. *Consideremos $f(x) = \|x\|$,*

1. $\partial f(0)$ es la bola cerrada unitaria en X^* .
2. si $\zeta \in \partial f(x)$ con $x \neq 0$, entonces $\langle \zeta, x \rangle = \|x\|$ y $\|\zeta\|_{X^*} = 1$.

Ejemplo: Se tiene que $\zeta \in \partial \|\cdot\|_{L^1(\Omega)}(u)$ si y solo si

$$\begin{aligned} \zeta(x) &= 1, & \text{si } \bar{u}(x) > 0, \\ \zeta(x) &= -1, & \text{si } \bar{u}(x) < 0, \\ |\zeta(x)| &\leq 1, & \text{si } \bar{u}(x) = 0, \end{aligned} \tag{2.2}$$

para casi todo $x \in \Omega$.

DEFINICIÓN 2.13. Sea $f : X \rightarrow W$ una función convexa y $x \in X$, definimos la derivada direccional de f en x , en una dirección $v \in X$, como:

$$f'(x; v) := \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t},$$

cuando este límite existe.

La siguiente proposición muestra la relación que existe entre la derivada direccional y el subdiferencial.

PROPOSICIÓN 2.5. Si f es una función convexa, entonces

$$\partial f(x) = \{ \zeta \in X^* : f'(x; v) \geq \langle \zeta, v \rangle_{X^*, X}, \quad \forall v \in X \}.$$

Para la demostración ver [9], página 61, Proposición 4.3.

DEFINICIÓN 2.14. Decimos que $f : X \rightarrow W$ es una función Gâteaux diferenciable en x , si la función definida por

$$\begin{aligned} D_G f(x) : X &\rightarrow W \\ v &\mapsto D_G f(x)v = f'(x; v) \end{aligned}$$

es lineal y continua.

Decimos que f es Gâteaux diferenciable en X , si f es Gâteaux diferenciable en todo $x \in X$.

PROPOSICIÓN 2.6. Sea $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función convexa y $x \in X$. Si f es Gâteaux diferenciable, entonces

$$\partial f(x) = \{ D_G f(x) \}.$$

La siguiente proposición nos permite calcular el subdiferencial de la función indicatriz de un conjunto convexo.

PROPOSICIÓN 2.7. Sea $C \subset \mathbb{R}^M$ un conjunto convexo, cerrado y no vacío. Sea $x \in C$, entonces

$$\partial I_C(x) = \{ y \in \mathbb{R}^M : \langle y, c - x \rangle_{X^*, X} \leq 0, \quad \forall c \in C \}.$$

La demostración es una implicación directa del Ejercicio 4.5 [página 61] y la Proposición 2.9 [página 30] de [9].

Enunciamos a continuación resultados concernientes al cálculo del subdiferencial de operaciones con funciones convexas.

PROPOSICIÓN 2.8 (Subdiferencial del producto por un escalar). *Sea $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función Lipschitz cerca de $x \in X$ y $s \in \mathbb{R}$, entonces*

$$\partial(sf)(x) = s\partial f(x).$$

Para la demostración ver [10], página 38, Proposición 2.3.1.

PROPOSICIÓN 2.9 (Subdiferencial de la suma). *Sean $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ funciones convexas, las cuales admiten un punto en X en el cual f es continua, entonces*

$$\partial(f + g)(x) = \partial f(x) + \partial g(x), \quad \forall x \in X.$$

Para la demostración ver [9], Página 63, Teorema 4.10.

Los siguiente resultados son de utilidad para la obtención de condiciones de optimalidad en problemas de minimización de funciones convexas. Consideramos el primer problema de minimización

$$\min_{x \in X} f(x), \tag{2.3}$$

donde f es una función convexa de X en \mathbb{R} . La siguiente proposición nos permite obtener la condición que satisface un mínimo de una función de convexa en términos del subgradiente. Para la demostración citaremos [11], Teorema 4.2.

PROPOSICIÓN 2.10. *Si \bar{u} es un mínimo local de (2.3), entonces \bar{u} satisface la siguiente condición de optimalidad*

$$0 \in \partial f(\bar{u}).$$

El estudio de nuestro problema de control óptimo, planteado en el capítulo 3, puede ser reducido al siguiente problema de minimización

$$\min_{x \in X} g(x) - h(x), \tag{2.4}$$

donde g y h son funciones convexas de X en \mathbb{R} . Por lo cual para el estudio y obtención de las condiciones de optimalidad haremos uso del siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 2.11. *Si \bar{u} es un mínimo local de (2.4), entonces \bar{u} satisface la siguiente condición de optimalidad*

$$\partial h(\bar{u}) \subset \partial g(\bar{u}).$$

Citamos el siguiente resultado que nos permitirá obtener la condición (4.15), la cual será impuesta sobre los parámetros de regularización de nuestro problema de optimización para la estimación del orden de error. La demostración de esta proposición puede ser encontrada en el Lema 7.1 de [11]

PROPOSICIÓN 2.12. *Sea $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ Gâteaux diferenciable entonces los siguiente enunciados son equivalentes*

1. Para $L > 0$ se satisface

$$\langle F'_G(x+h) - F'_G(x), h \rangle_X \leq L \|h\|^2, \quad (2.5)$$

2. F la propiedad de suavidad convexa para $L > 0$ si

$$F(x+h) - F(x) \leq \langle F'_G(x), h \rangle_X + \frac{L}{2} \|h\|^2, \quad \forall x, h \in X. \quad (2.6)$$

2.3. Método de Newton Semisuave

Presentamos a continuación un breve resumen de los resultados y definiciones relacionados al método de Newton Semisuave, para más detalles nos referiremos a [18] y [28].

DEFINICIÓN 2.15. *Sea X, Y espacios de Banach, $D \subset X$ un conjunto abierto, y $\mathcal{F} : D \rightarrow Y$ una función no lineal, decimos que \mathcal{F} es semisuave (o Newton diferenciable) en un conjunto abierto $V \subset D$ si existe una función $\mathcal{G} : V \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ tal que*

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{1}{\|h\|} \|\mathcal{F}(x+h) - \mathcal{F}(x) - \mathcal{G}(x)h\| = 0, \quad \forall x \in V.$$

Diremos que \mathcal{G} es la derivada generalizada de \mathcal{F}

El objetivo del método de Newton semisuave es encontrar un raíz de la función \mathcal{F} utilizando la siguiente iteración

$$x_{k+1} = x_k - \mathcal{G}(x_k)^{-1} \mathcal{F}(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.7)$$

El siguiente resultado muestra la convergencia local del método, para su demostración ver el Teorema 4.1 de [28].

PROPOSICIÓN 2.13. *Suponemos que $\bar{x} \in D$ es una raíz de \mathcal{F} y que \mathcal{F} es semisuave en una vecindad V de \bar{x} , con derivada generalizada \mathcal{G} . Si $\mathcal{G}(x)^{-1}$ existe para todo*

$x \in V$ y $\{\|\mathcal{G}(x)^{-1}\| : x \in V\}$ es acotado, entonces la iteración de Newton dada en (2.7), con $x^0 \in V$ punto inicial, está bien definida y si x^0 es suficientemente cercano a \bar{x} el método converge superlinealmente.

2.4. Problema de control óptimo que involucran las cuasinormas $L^{1/p}$, $p > 1$

Los siguiente resultados que serán citados a continuación fueron estudiados en detalle en [23].

Sea Ω un dominio Lipschitz acotado en \mathbb{R}^n ($n = 2$ o $n = 3$) con frontera Γ . Para $p > 1$ definimos la función $Y_p : L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ de la siguiente forma:

$$u \mapsto Y_p(u) := \int_{\Omega} |u|^{\frac{1}{p}}. \quad (2.8)$$

En [23] se considera el siguiente problema de control óptimo con $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ en el funcional de costo y con término de penalización de la forma (2.8), dado por

$$(P) \quad \begin{cases} \min_{(y,u) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)} \frac{1}{2} \|y - y_d\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \beta Y_p(u) \\ \text{sujeto a:} \\ Ay = u + f, \quad \text{en } \Omega, \\ y = 0, \quad \text{sobre } \Gamma, \end{cases}$$

donde y_d es el estado deseado, f una función dada en $L^2(\Omega)$ y A es el operador diferencial de segundo orden uniformemente elíptico de la forma:

$$(Ay)x = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial y(x)}{\partial x_j} \right) + c_0 y(x), \quad (2.9)$$

cuyos coeficientes $a_{ij} \in C^{0,1}(\bar{\Omega})$, y $c_0 \in L^\infty(\Omega)$. Además, la matriz $(a_{ij})_{i,j}$ es simétrica y cumple la condición de elipticidad uniforme, es decir

$$\exists \sigma > 0 : \quad \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \sigma \|\xi\|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \text{ para casi todo } x \in \Omega.$$

Denotaremos A^* al adjunto de A y asociamos el operador elíptico A con la forma bilineal

$$a(y, v) := \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial y(x)}{\partial x_i} \frac{\partial v(x)}{\partial x_j} + c_0 y(x) v(x) dx,$$

con lo cual definimos el problema variacional

$$a(y, v) = (w, v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (2.10)$$

De la teoría de ecuaciones diferenciales elípticas es conocido que (2.10) tiene solución única en el espacio $H_0^1(\Omega)$ ver [14, Theorem 3, Chapter 6]. Sea $S : L^2(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ el operador lineal y continuo que asigna a cada $w \in L^2(\Omega)$ la correspondiente solución $y = y(w) \in H_0^1(\Omega)$ de (2.10). La ecuación de estado $Ay = u$ en Ω , con condiciones de frontera Dirichlet homogénea es comprendida en el sentido débil dado por (2.10). De esta manera, el estado y asociado al control u puede ser representado $y = S(u + f)$, gracias al principio de superposición podemos formular el problema de control óptimo reducido:

$$(P') \quad \min_{u \in L^2(\Omega)} J(u) = \frac{1}{2} \|Su + Sf - y_d\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \beta Y_p(u).$$

Puesto que la función $t \rightarrow |t|^{\frac{1}{p}}$ es no convexa, usando el teorema 5.17 de [15] se tiene que el funcional $Y_p(u)$ no es débilmente semicontinua inferiormente, lo que constituye una dificultad para el análisis de la existencia de soluciones para este problema. En el estudio realizado en [23] se considera una sucesión de problemas regularizados, definidos en la siguiente sección, cuyas soluciones óptimas convergen a una solución del problema (P') , esto lo enunciaremos en el Teorema 2.23.

2.4.1. Regularización de tipo Huber para el problema de control óptimo (P)

Mediante la regularización del tipo Huber para el valor absoluto se formula una familia de problemas regularizados, esta regularización considera las potencias fraccionarias que definen Y_p . La función resultante de este proceso de regularización elevada a la potencia fraccionaria $1/p$ es localmente convexa en $[-1/\gamma, 1/\gamma]$ que regulariza el término no convexo.

Para $\gamma \gg 1$ se define la siguiente regularización del valor absoluto:

$$h_{p,\gamma}(v) = \begin{cases} \frac{\gamma^{p-1}}{p} |v|^p, & \text{si } v \in [-1/\gamma, 1/\gamma], \\ |v| + \frac{1}{\gamma} \frac{1-p}{p}, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

OBSERVACIÓN. La función $h_{p,\gamma}(v)$ es una regularización local del valor absoluto para diferentes valores de $p > 1$. Además, por la construcción de $h_{p,\gamma}$, se tiene la

siguiente relación

$$h_{p,\gamma}(v) \leq |v|, \quad \forall v \in \mathbb{R}. \quad (2.11)$$

Con el objetivo de formular el problema regularizado de **(P)**, se define la siguiente función

$$u \mapsto Y_{p,\gamma}(u) := \int_{\Omega} h_{p,\gamma}(u(x))^{\frac{1}{p}} dx. \quad (2.12)$$

OBSERVACIÓN. $Y_{p,\gamma}$ define una cuasinorma.

El problema regularizado se obtiene al reemplazar Y_p por $Y_{p,\gamma}$, por lo cual el problema está parametrizado por γ , y está dado por:

$$(\mathbf{P}_{\gamma}) \quad \begin{cases} \min_{(y,u)} \frac{1}{2} \|y - y_d\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \beta Y_{p,\gamma}(u) \\ \text{sujeto a:} \\ Ay = u + f, \quad \text{en } \Omega, \\ y = 0, \quad \text{sobre } \Gamma. \end{cases}$$

Utilizando el operador control estado S se obtiene el problema reducido de **(P_γ)**, expresado de la siguiente forma:

$$\min_{u \in L^2(\Omega)} J_{\gamma}(u) = F(u) + \beta Y_{p,\gamma}(u), \quad (2.13)$$

donde F es la parte regular del funcional, es decir,

$$F(u) := \frac{1}{2} \|Su + Sf - y_d\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

LEMA 2.14. Sea (u_n) una sucesión tal que $u_n \rightarrow u$ en $L^1(\Omega)$, entonces

$$Y_{p,\gamma}(u_n) \rightarrow Y_{p,\gamma}(u), \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty,$$

para todo $p > 1$ y todo $\gamma > 0$.

Demostración ver Lema 2 de [23].

LEMA 2.15. $J_{\gamma}(u)$ converge a $J(u)$ uniformemente cuando $\gamma \rightarrow \infty$, para todo $u \in L^2(\Omega)$.

Demostración ver Lema 3 de [23].

2.4.2. Existencia de la solución y condiciones de optimalidad para el problema regularizado

Existencia de la solución

Para asegurar la existencia de la solución del problema regularizado es necesario asumir cierta condición sobre el conjunto de controles admisibles del problema regularizado. Siendo este el caso del siguiente resultado, el cual fue probado en el Teorema 2 de [23].

TEOREMA 2.16. *Sea U_{ad} el conjunto de los controles factibles, y suponemos que $U_{ad} = \{u \in L^2(\Omega) : \Delta u \in H^{-1}(\Omega), \exists v \in \bar{B}(0, M) \subset L^2(\Omega) \text{ tal que } -\Delta u + \frac{1}{\epsilon}u = \frac{1}{\epsilon}v\}$, para $\epsilon > 0$ y $M > 0$ fijos. Existe una solución $\bar{u} \in L^2(\Omega)$ para el problema regularizado (P_γ) .*

Condiciones de optimalidad para el problema regularizado

Para el análisis de las condiciones de optimalidad del problema regularizado, el funcional (2.13) es expresado como una diferencia de funciones convexas, es decir, para G y H funciones convexas adecuadas se obtiene la siguiente expresión:

$$J_\gamma(u) = G(u) - H(u),$$

para ello se introduce la siguiente cantidad:

$$\delta_\gamma := \frac{\gamma^{\frac{p-1}{p}}}{p^{\frac{1}{p}}},$$

obteniendo así, las funciones G y H expresadas de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} G : L^2(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R} \\ u \mapsto G(u) &:= \frac{1}{2} \|Su + Sf - y_d\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \beta \delta_\gamma \|u\|_{L^1(\Omega)}, \\ &= F(u) + \beta \delta_\gamma \|u\|_{L^1(\Omega)} \\ H : L^2(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R} \\ u \mapsto H(u) &:= \beta \left(\delta_\gamma \|u\|_{L^1(\Omega)} - Y_{p,\gamma}(u) \right). \end{aligned} \tag{2.14}$$

La demostración del siguiente resultado se encuentra en el Lema 4 de [23].

LEMA 2.17. La función $j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$j(z) = \begin{cases} \delta_\gamma |z| - \left(|z| + \frac{1-p}{\gamma} \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{si } |z| > \frac{1}{\gamma}, \\ 0, & \text{si } |z| \leq \frac{1}{\gamma}, \end{cases} \quad (2.15)$$

es no negativa, convexa y continuamente diferenciable y su derivada en $z \in \mathbb{R}$ está dada por:

$$j'(z) = \begin{cases} \left[\delta_\gamma - \frac{1}{p} \left(|z| + \frac{1-p}{\gamma} \right)^{\frac{1-p}{p}} \right] \text{sign}(z), & \text{si } |z| > \frac{1}{\gamma}, \\ 0, & \text{si } |z| \leq \frac{1}{\gamma}. \end{cases} \quad (2.16)$$

Para los siguientes capítulos el lema siguiente será de mucha utilidad, la demostración de la misma puede hacerse por casos.

LEMA 2.18. La función real $j'(\cdot)$ es Lipschitz continua con constante $2\gamma\delta_\gamma p$.

Demostración. Sea $t, s \in \mathbb{R}$ vamos a demostrar que $|j'(t) - j'(s)| \leq 2\gamma\delta_\gamma p |t - s|$, para ello consideramos los siguientes casos:

1. Si $t \leq \frac{1}{\gamma}$ y $s \leq \frac{1}{\gamma}$ entonces el resultado es trivial.
2. Para el caso en que $t > \frac{1}{\gamma}$ y $s > \frac{1}{\gamma}$ se tiene que

$$\begin{aligned} |j'(t) - j'(s)| &= \left| \delta_\gamma - \frac{1}{p} \left(t + \frac{1-p}{\gamma} \right)^{\frac{1-p}{p}} - \delta_\gamma + \frac{1}{p} \left(s + \frac{1-p}{\gamma} \right)^{\frac{1-p}{p}} \right| \\ &= \left| \frac{1}{p} \left(s + \frac{1-p}{\gamma} \right)^{\frac{1-p}{p}} - \frac{1}{p} \left(t + \frac{1-p}{\gamma} \right)^{\frac{1-p}{p}} \right| \end{aligned}$$

luego utilizando el teorema del valor medio para la función $x \rightarrow |x|^{\frac{1-p}{p}}$, con $x \in (-\infty, -1/p\gamma) \cup (1/p\gamma, +\infty)$, obtenemos la siguiente acotación

$$\begin{aligned} |j'(t) - j'(s)| &\leq \frac{1}{p} \sup_{|r| > \frac{1}{p\gamma}} \left\{ \frac{p-1}{p} r^{\frac{1-2p}{p}} \right\} |t - s| \\ &= \frac{1}{p} \frac{p-1}{p} \left(\frac{1}{p\gamma} \right)^{\frac{1-2p}{p}} |t - s| \\ &\leq \frac{1}{p} \left(\frac{1}{p\gamma} \right)^{\frac{1-2p}{p}} |t - s| \\ &= \left(\frac{1}{p} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{\gamma} \right)^{\frac{1-p}{p}} p\gamma |t - s| \end{aligned}$$

$$= \gamma \delta_\gamma p |t - s|.$$

3. Si $|t| \leq \frac{1}{\gamma}$ y $s > \frac{1}{\gamma}$ se sigue que

$$\begin{aligned} |j'(t) - j'(s)| &= \left| \delta_\gamma - \frac{1}{p} \left(s + \frac{1}{\gamma} \frac{1-p}{p} \right)^{\frac{1-p}{p}} \right| \\ &= \frac{1}{p} \left| \left(\frac{1}{\gamma p} \right)^{\frac{1-p}{p}} - \left(s + \frac{1}{\gamma} \frac{1-p}{p} \right)^{\frac{1-p}{p}} \right|, \end{aligned}$$

nuevamente utilizando el teorema del valor medio para la función $x \rightarrow |x|^{\frac{1-p}{p}}$, con $x \in (-\infty, -1/p\gamma] \cup [1/p\gamma, +\infty)$, obtenemos la siguiente acotación

$$\begin{aligned} |j'(t) - j'(s)| &\leq \frac{1}{p} \sup_{|r| > \frac{1}{p\gamma}} \left\{ \frac{p-1}{p} r^{\frac{1-2p}{p}} \right\} \left| \frac{1}{\lambda} - s \right| \\ &\leq \gamma \delta_\gamma p \left| s - \frac{1}{\lambda} \right|, \end{aligned}$$

por otra parte, se tiene que $-1/\lambda \leq -t$ lo que implica que $s - 1/\lambda \leq s - t$, por lo tanto se obtiene que

$$|j'(t) - j'(s)| \leq \gamma \delta_\gamma p |s - t|.$$

4. En el caso en que $t < -\frac{1}{\gamma}$ y $s > \frac{1}{\gamma}$ se tiene que

$$\begin{aligned} |j'(t) - j'(s)| &= \left| \delta_\gamma - \frac{1}{p} \left(-t + \frac{1}{\gamma} \frac{1-p}{p} \right)^{\frac{1-p}{p}} + \delta_\gamma - \frac{1}{p} \left(s + \frac{1}{\gamma} \frac{1-p}{p} \right)^{\frac{1-p}{p}} \right| \\ &\leq \left| \delta_\gamma - \frac{1}{p} \left(-t + \frac{1}{\gamma} \frac{1-p}{p} \right)^{\frac{1-p}{p}} \right| + \left| \delta_\gamma - \frac{1}{p} \left(s + \frac{1}{\gamma} \frac{1-p}{p} \right)^{\frac{1-p}{p}} \right| \\ &= \frac{1}{p} \left| \left(\frac{1}{\gamma p} \right)^{\frac{1-p}{p}} - \left(-t + \frac{1}{\gamma} \frac{1-p}{p} \right)^{\frac{1-p}{p}} \right| \\ &\quad + \frac{1}{p} \left| \left(\frac{1}{\gamma p} \right)^{\frac{1-p}{p}} - \left(s + \frac{1}{\gamma} \frac{1-p}{p} \right)^{\frac{1-p}{p}} \right|, \end{aligned}$$

de manera similar a los anteriores casos utilizamos el teorema del valor medio,

obteniendo así la siguiente acotación

$$\begin{aligned} |j'(t) - j'(s)| &\leq \frac{1}{p} \sup_{|r| > \frac{1}{p\gamma}} \left\{ \frac{p-1}{p} r^{\frac{1-2p}{p}} \right\} \left(\left| t + \frac{1}{\lambda} \right| + \left| s - \frac{1}{\lambda} \right| \right) \\ &\leq \gamma \delta_\gamma p \left(\left| t + \frac{1}{\lambda} \right| + \left| s - \frac{1}{\lambda} \right| \right), \end{aligned}$$

por otra lado, puesto que

$$\begin{aligned} -1/\lambda < s &\implies -1/\lambda - t < s - t, \\ t < 1/\lambda &\implies s - 1/\lambda < s - t, \end{aligned}$$

de lo cual se obtiene la siguiente acotación

$$|j'(t) - j'(s)| \leq 2\gamma \delta_\gamma p |s - t|.$$

Para los 3 últimos casos obtenemos idénticamente la misma acotación, siguiendo exactamente el mismo procedimiento de los casos 2, 3, 4. De este modo concluimos que j' es Lipschitz continua con una constante igual a $2\gamma \delta_\gamma p$. \square

De la definición de j se tiene que la función H toma la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} H : L^2(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto H(u) = \beta \int_{\Omega} j(u) dx. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Gracias a la expresión anterior se tiene el siguiente Lema, que fue demostrado en de [23].

LEMA 2.19. *Las funciones G y H definidas en (2.14) son convexas.*

Este resultado permite demostrar el siguiente Lema, para su demostración ver Lema 6 de [23].

LEMA 2.20. *La función H definida en (2.14) es Gâteaux diferenciable y su derivada $H'_G(u; \cdot)$ es representado por $(\beta w, \cdot)$, donde $w \in L^2(\Omega)$ está dada por*

$$w(x) := j'(u(x)) = \begin{cases} \left[\delta_\gamma - \frac{1}{p} \left(|u(x)| + \frac{1}{\gamma} \frac{1-p}{p} \right)^{\frac{1-p}{p}} \right] \text{sign}(u(x)), & \text{si } |u(x)| > \frac{1}{\gamma}, \\ 0, & \text{si } |u(x)| \leq \frac{1}{\gamma}. \end{cases} \quad (2.18)$$

El siguiente resultado muestra las condiciones de optimalidad del problema regularizado, su demostración puede ser consultad en el Teorema 3 de [23].

TEOREMA 2.21. Para \bar{u} solución de (\mathbf{P}_γ) existen $\bar{y} = S\bar{u}$ en $H_0^1(\Omega)$, un estado adjunto $\bar{\phi} \in H_0^1(\Omega)$, un multiplicador $\zeta \in L^\infty(\Omega)$ y \bar{w} dado por (2.18), tales que el siguiente sistema de optimalidad se cumple

$$\begin{aligned} A\bar{y} &= \bar{u} + f, & \text{en } \Omega, \\ \bar{y} &= 0, & \text{sobre } \Gamma, \end{aligned} \quad (2.19a)$$

$$\begin{aligned} A^*\bar{\phi} &= \bar{y} - y_d, & \text{en } \Omega, \\ \bar{\phi} &= 0, & \text{sobre } \Gamma, \end{aligned} \quad (2.19b)$$

$$\bar{\phi} + \alpha\bar{u} + \beta(\delta_\gamma \zeta - \bar{w}) = 0 \quad (2.19c)$$

$$\begin{aligned} \zeta(x) &= 1, & \text{si } \bar{u}(x) > 0, \\ \zeta(x) &= -1, & \text{si } \bar{u}(x) < 0, & \text{ para casi todo } x \in \Omega. \\ |\zeta(x)| &\leq 1, & \text{si } \bar{u}(x) = 0, \end{aligned} \quad (2.19d)$$

2.4.3. Existencia de la solución y condiciones de optimalidad para el problema (P)

Los siguientes resultados corresponde al importante hecho que concierne la convergencia de las soluciones del problema regularizado (\mathbf{P}_γ) cuando $\gamma \rightarrow \infty$.

TEOREMA 2.22. Existe una sucesión $(\bar{u}_\gamma)_{\gamma>0}$ de soluciones del problema (\mathbf{P}_γ) que converge débilmente a u^* en $L^2(\Omega)$. Más aún, existen $\phi^* \in H_0^1(\Omega)$, $y^* \in H_0^1(\Omega)$, $\zeta^* \in L^2(\Omega)$ que satisfacen el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} Ay^* &= u^* + f, & \text{en } \Omega, \\ y^* &= 0, & \text{sobre } \Gamma, \end{aligned} \quad (2.20a)$$

$$\begin{aligned} A^*\phi^* &= y^* - y_d, & \text{en } \Omega, \\ \phi^* &= 0, & \text{sobre } \Gamma, \end{aligned} \quad (2.20b)$$

$$\begin{aligned} \alpha u^*(x) + \phi^*(x) + \zeta^*(x) &= 0, \\ &\text{para casi todo } x \in \Omega. \end{aligned} \quad (2.20c)$$

Además, existe $\rho > 0$ tal que

$$|u^*(x)| \geq \rho + \frac{1}{\gamma}, \quad \text{para casi todo } x \in \Omega \setminus \{x \in \Omega : u^*(x) = 0\}. \quad (2.21)$$

Para la demostración ver Teorema 4 de [23].

TEOREMA 2.23. *Sea $(\bar{u}_\gamma)_{\gamma>0}$ una sucesión de soluciones del problema (\mathbf{P}_γ) . Bajo las suposiciones del Teorema 2.16, y si existen una subsucesión $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $\gamma_n \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$ y una subsucesión $(\bar{u}_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset (\bar{u}_\gamma)_{\gamma>0}$ que converge fuertemente en $L^2(\Omega)$ con $\bar{u}_n = \bar{u}_{\gamma_n}$ y con límite $u^* \in U_{ad}$. Entonces, u^* es una solución del problema (\mathbf{P}) y satisface la siguiente propiedad de convergencia*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_{\gamma_n}(\bar{u}_n) = J(u^*) = \inf(P).$$

Ver Teorema 5 de [23].

OBSERVACIÓN. Una posible extensión de este trabajo es realizar un análisis de Γ -convergencia para la familia de funcionales $(J_\gamma)_{\gamma>0}$, esto con el objetivo de asegurar la existencia de la solución del problema (\mathbf{P}') utilizando una sucesión de soluciones de la familia de problemas regularizados. Para ello, bajo la misma suposición del Teorema 2.16 se tiene que los problemas $(J_\gamma)_{\gamma>0}$ satisfacen la condición de equicoercividad suave, y si se cumple además que $J = \Gamma - \lim_\gamma J_\gamma$ se puede concluir del Teorema 1.22 de [3] que el problema (\mathbf{P}') tiene solución, más aún, para una sucesión $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se tiene que

$$\min J = \lim_n \inf J_{\gamma_n}.$$

Es necesario recalcar que este resultado se cumple si $J = \Gamma - \lim_\gamma J_\gamma$. Para esto, sería suficiente hacer un análisis de Γ -convergencia para la familia $(Y_{p,\gamma})_{\gamma>0}$, puesto que J y J_γ difieren únicamente en los términos no convexos y es conocido también que la Γ -convergencia es estable bajo perturbaciones continuas (ver Remark 1.8 de [3]). Por lo tanto el resultado se obtendría si $Y_p = \Gamma - \lim_\gamma Y_{p,\gamma}$, cuya demostración se fundamenta principalmente en el estudio de las sucesiones que tienen la forma $Y_{p,\gamma_n}(u_n)$, con $u_n \rightarrow u$.

2.4.4. Problema regularizado con restricciones de caja

Puesto que las restricciones de caja son importantes en las aplicaciones, se presenta algunos resultados para el problema de control óptimo (\mathbf{P}) , para esto se considera el conjunto de controles factibles dado por

$$U_{ad} = \{u \in L^2(\Omega) : u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x), \text{ c.t.p. } x \in \Omega\}, \quad (2.22)$$

donde u_a y u_b son funciones dadas en $H^1(\Omega)$ que satisfacen $u_a(x) \leq 0 \leq u_b(x)$ c.t.p. $x \in \Omega$, esta última condición es impuesta en cf. [23] con el objetivo de considerar soluciones que tenga la propiedad de dispersión, es decir regiones del dominio donde la solución es nula. El problema de control óptimo está dado por:

$$(\mathbf{P}_C) \quad \begin{cases} \min_{(y,u)} \frac{1}{2} \|y - y_d\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \beta Y_p(u) \\ \text{sujeto a:} \\ u \in U_{ad} \quad y \quad \begin{cases} Ay = u + f, & \text{en } \Omega, \\ y = 0, & \text{sobre } \Gamma, \end{cases} \end{cases}$$

De manera análoga al problema sin restricciones, se reemplaza Y_p por $Y_{p,\gamma}$ y se obtiene el problema regularizado.

$$(\mathbf{P}_{C\gamma}) \quad \begin{cases} \min_{(y,u)} \frac{1}{2} \|y - y_d\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \beta Y_{p,\gamma}(u) \\ \text{sujeto a:} \\ u \in U_{ad} \quad y \quad \begin{cases} Ay = u + f, & \text{en } \Omega, \\ y = 0, & \text{sobre } \Gamma, \end{cases} \end{cases}$$

Realizando un análisis similar al problema sin restricciones de caja, se obtiene resultados análogos para este caso. Como primer lugar, se obtiene la representación del funcional de costo como diferencia de funciones convexas, mediante las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} G : L^2(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto G(u) := \frac{1}{2} \|Su + Sf - y_d\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \beta \delta_\gamma \|u\|_{L^1(\Omega)} + I_{U_{ad}}, \\ H : L^2(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto H(u) := \beta \left(\delta_\gamma \|u\|_{L^1(\Omega)} - Y_{p,\gamma}(u) \right), \end{aligned} \tag{2.23}$$

donde $I_{U_{ad}}$ es la función indicadora del conjunto de controles admisibles U_{ad} .

Luego, se obtiene las condiciones de optimalidad que se expresan en el siguiente teorema cuya demostración se encuentra en el Teorema 3 de [23].

TEOREMA 2.24. *Sea \bar{u} solución de $(\mathbf{P}_{C\gamma})$, entonces existen $\bar{y} = S\bar{u}$ en $H_0^1(\Omega)$, un estado adjunto $\bar{\phi} \in H_0^1(\Omega)$, un multiplicador $\zeta \in L^\infty(\Omega)$ y \bar{w} dado por (2.18) tal que el siguiente sistema de optimalidad se cumple*

$$\begin{aligned} A\bar{y} &= \bar{u} + f, & \text{en } \Omega, \\ \bar{y} &= 0, & \text{sobre } \Gamma, \end{aligned} \tag{2.24a}$$

$$\begin{aligned} A^* \bar{\phi} &= \bar{y} - y_d, & \text{en } \Omega, \\ \bar{\phi} &= 0, & \text{sobre } \Gamma, \end{aligned} \quad (2.24b)$$

$$(\bar{\phi} + \alpha \bar{u} + \beta(\delta_\gamma \zeta - \bar{w}), u - \bar{u}) \geq 0, \quad \forall u \in U_{ad}, \quad (2.24c)$$

$$\begin{aligned} \zeta(x) &= 1, & \text{si } \bar{u}(x) > 0, \\ \zeta(x) &= -1, & \text{si } \bar{u}(x) < 0, \\ |\zeta(x)| &\leq 1, & \text{si } \bar{u}(x) = 0, \end{aligned} \quad (2.24d)$$

para casi todo $x \in \Omega$.

Más aún, existen λ_a y λ_b multiplicadores no negativos en $L^2(\Omega)$ tales que el sistema anterior puede ser escrito como un sistema de optimalidad KKT, es decir, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} A\bar{y} &= \bar{u} + f, & \text{en } \Omega, \\ \bar{y} &= 0, & \text{sobre } \Gamma, \end{aligned} \quad (2.25a)$$

$$\begin{aligned} A^* \bar{\phi} &= \bar{y} - y_d, & \text{en } \Omega, \\ \bar{\phi} &= 0, & \text{sobre } \Gamma, \end{aligned} \quad (2.25b)$$

$$\bar{\phi} + \alpha \bar{u} + \beta(\delta_\gamma \zeta - \bar{w}) + \lambda_b - \lambda_a = 0, \quad (2.25c)$$

$$\lambda_a(\bar{u} - u_a) = 0, \quad \lambda_b(u_b - \bar{u}) = 0, \quad (2.25d)$$

$$\begin{aligned} \zeta(x) &= 1, & \text{si } \bar{u}(x) > 0, \\ \zeta(x) &= -1, & \text{si } \bar{u}(x) < 0, \\ |\zeta(x)| &\leq 1, & \text{si } \bar{u}(x) = 0, \end{aligned} \quad (2.25e)$$

para casi todo $x \in \Omega$.

Para concluir este capítulo, usando los resultados mencionados en la Sección 2.2 citamos a continuación ciertas expresiones que serán de utilidad en el desarrollo de los siguientes capítulos, para el detalle de su demostración consultar el Corolario 1 y la Sección 3.2 de [23].

$$\zeta = \mathcal{P}_{[-1,1]} \left[-\frac{1}{\beta \delta_\gamma} \bar{\phi} \right], \quad (2.26)$$

$$\bar{u} = \mathcal{P}_{U_{ad}} \left[-\frac{1}{\alpha} (\bar{\phi} + \beta(\delta_\gamma \zeta - \bar{w})) \right]. \quad (2.27)$$

Capítulo 3

Planteamiento del problema y aproximación numérica

3.1. Planteamiento del Problema

El objetivo del presente trabajo se basa en el estudio del problema regularizado con restricciones de caja expuesto en el capítulo anterior, es decir, en nuestro estudio vamos a considerar el problema $(\mathbf{P}_{C\gamma})$.

En lo que sigue, por facilidad, vamos a suponer que Ω es un dominio poligonal Lipschitz acotado en \mathbb{R}^n ($n = 2$ o $n = 3$), también suponemos que u_a y u_b son funciones constantes.

Además, con el objetivo de asegurar la existencia de al menos una solución del problema $(\mathbf{P}_{C\gamma})$, suponemos que la siguiente condición se cumple.

$$U_{ad} \subset \left\{ u \in L^2(\Omega) : \Delta u \in H^{-1}(\Omega), \exists v \in \bar{B}(0, M) \subset L^2(\Omega) \text{ tal que } -\Delta u + \frac{1}{\epsilon}u = \frac{1}{\epsilon}v \right\} \quad (3.1)$$

para $\epsilon > 0$ y $M > 0$ fijos.

OBSERVACIÓN. Bajo la condición anterior, se puede demostrar que el problema tiene al menos una solución, la demostración es exactamente la misma que la del Teorema 2.16 (ver Teorema 2 de [23]).

Adicional a esto vamos a obtener nuestras condiciones de optimalidad las cuales están dadas por (2.24) y (2.25).

3.2. Aproximación por el métodos de los elementos finitos

El objetivo de esta sección es realizar la discretización del problema $(\mathbf{P}_{C\gamma})$ por el método del elementos finitos. Tanto el espacio de los controles como el de los estados serán discretizados.

Consideramos una familia de mallas triangulares de Ω , tal que cada malla \mathcal{T} de esta familia cumple lo siguiente:

- $\bar{\Omega} = \bigcup_{T \in \mathcal{T}} T$,
- para $T_i, T_j \in \mathcal{T}$, con $i \neq j$, la intersección $T_i \cap T_j$ o es un conjunto vacío, o un nodo, o una arista o una cara de las dos celdas.

Para cada triángulo $T \in \mathcal{T}$ asociamos dos parámetros h_T y R_T , donde h_T denotamos el diámetro T y R_T denota el diámetro de la bola más grande contenida en T . Definimos además el tamaño de la malla \mathcal{T} como $h(\mathcal{T}) = \max_{T \in \mathcal{T}} h_T$,

En lo que sigue $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ denota la familia de mallas, donde los índices de la familia determina el tamaño de su correspondiente malla, es decir $h(\mathcal{T}_h) = h$. Suponemos además que existen dos constantes positivas ρ y R tales que

$$\frac{h_T}{R_T} \leq R, \quad \frac{h}{h_T} \leq \rho,$$

se cumple para cada triángulo $T \in \mathcal{T}_h$ y todo $h > 0$.

3.2.1. Discretización de la Ecuación de Estado

Para cada malla \mathcal{T}_h asociamos un subespacio de dimensión finita Y_h

$$Y_h = \{y_h \in C(\bar{\Omega}) : y_h|_T \in P_1(T) \forall T \in \mathcal{T}_h, y_h = 0 \text{ sobre } \Gamma\}, \quad (3.2)$$

donde $P_1(T)$ denota el conjunto de las funciones afines a valores reales definidas sobre T . Con lo cual, para un $w \in L^2(\Omega)$ dado, se puede formular el problema variacional discreto de la siguiente forma:

$$a(y_h, v_h) = (w, v_h), \quad \forall v_h \in Y_h, \quad (3.3)$$

es conocido que este problema tiene solución única, por lo cual es posible definir al operador solución, denotado por $S_h : L^2(\Omega) \rightarrow V_h$, es decir, $y_h(w) = S_h(w)$ es la

solución de (3.3).

El siguiente resultado puede ser consultado en Lema 4.2 de [5].

PROPOSICIÓN 3.1. *Dado $u \in L^2(\Omega)$, sean y y y_h soluciones de (2.10) y (3.3) respectivamente, entonces existe una constante $c_A > 0$ independiente de h y u , tal que*

$$\|y - y_h\|_{L^2} + h\|y - y_h\|_{H^1} \leq c_A h^2 \|u\|_{L^2}.$$

La proposición anterior implica las siguientes acotaciones

$$\begin{aligned} \|S_h - S\|_{L^2 \rightarrow L^2} &\leq c_A h^2, \\ \|S_h - S\|_{L^2 \rightarrow H^1} &\leq c_A h, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \|S_h - S\|_{L^2 \rightarrow L^2} &:= \max_{u \in L^2(\Omega), u \neq 0} \frac{\|S_h u - S u\|_{L^2}}{\|u\|_{L^2}}, \\ \|S_h - S\|_{L^2 \rightarrow H^1} &:= \max_{u \in L^2(\Omega), u \neq 0} \frac{\|S_h u - S u\|_{H^1}}{\|u\|_{L^2}}. \end{aligned}$$

3.2.2. Discretización de los controles

Para la discretización del control utilizaremos funciones constantes a trozos. Es decir, para cada malla \mathcal{T}_h asociamos un espacio de dimensión finita U_h definida de la siguiente forma:

$$U_h := \{u_h \in L^2(\Omega) : u_h|_T \in P_0(T), \forall T \in \mathcal{T}_h\},$$

donde $P_0(T)$ denota el conjunto de funciones constantes en T . Luego, cada elemento de $u \in U_h$ puede ser escrito de la siguiente forma

$$u = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} u_T \chi_T,$$

donde χ_T es la función característica de T y $u_T \in \mathbb{R}$ para todo $T \in \mathcal{T}_h$.

Continuando con nuestra discretización, definimos el siguiente operador.

DEFINICIÓN 3.1. *Se define el operador de cuasi-interpolación $\Pi_h : L^1(\Omega) \rightarrow U_h$, de la siguiente manera:*

$$\Pi_h(u) := \sum_{T \in \mathcal{T}_h} u_T \chi_T, \quad \text{con} \quad u_T = \frac{1}{|T|} \int_T u.$$

De esta definición, tenemos la siguiente relación de ortogonalidad para $u \in L^2(\Omega)$

$$\int_{\Omega} (u - u_T) \chi_T = 0. \quad (3.4)$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (u - u_T) \chi_T &= \int_T u - u_T |T| \\ &= \int_T u - \frac{\int_T u}{|T|} |T| \\ &= 0. \end{aligned}$$

El siguiente resultado es de utilidad para la siguiente sección. Para su demostración ver las referencias del Lema 4.3 de [31].

LEMA 3.2. *Existe una constante $c_I > 0$, independiente de h , tal que*

$$h \|u - \Pi_h(u)\|_{L^2(\Omega)} + \|u - \Pi_h(u)\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq c_I h^2 \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)},$$

se cumple para todo $u \in H^1(\Omega)$.

Ahora vamos a definir el conjunto controles discretos admisibles

$$\mathcal{U}_{ad,h} = \left\{ u_h = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} u_T \chi_T \in \mathcal{U}_h : u_a \leq u_T \leq u_b, \forall T \in \mathcal{T}_h \right\}.$$

OBSERVACIÓN. De la definición anterior no es difícil notar que $\mathcal{U}_{ad,h} \subset \mathcal{U}_{ad}$.

Finalmente, podemos definir el problema de control óptimo discretizado, el cual está dado por:

$$(\mathbf{P}_{h,C\gamma}) \quad \begin{cases} \min_{(y_h, u_h)} \frac{1}{2} \|y_h - y_d\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2} \|u_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \beta Y_{p,\gamma}(u_h) \\ \text{sujeto a:} \\ u_h \in \mathcal{U}_{ad,h}, \\ a(y_h, v_h) = (u_h + f, v_h), \quad \forall v_h \in V_h. \end{cases}$$

Utilizando el operador control estado para la formulación variacional discreta obtenemos el problema reducido expresado del siguiente modo:

$$\min_{u_h \in \mathcal{U}_{ad,h}} \frac{1}{2} \|S_h u_h + S_h f - y_d\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2} \|u_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \beta Y_{p,\gamma}(u_h). \quad (3.5)$$

Tomando en cuenta que este problema puede ser visto como un problema en dimen-

sión finita, se tiene por argumentos conocidos que este problema tiene al menos una solución.

Para obtener condiciones de optimalidad de $(\mathbf{P}_{h,C\gamma})$ procedemos de forma análoga al análisis del problema $(\mathbf{P}_{C\gamma})$, es decir, expresamos el funcional de costo discretizado como diferencias de funciones convexas, con lo cual, para (\bar{y}_h, \bar{u}_h) solución de $(\mathbf{P}_{h,C\gamma})$ el sistema de optimalidad para el problema discretizado $(\mathbf{P}_{h,C\gamma})$, está dado mediante la siguiente desigualdad variacional:

$$(\bar{\phi}_h + \alpha \bar{u}_h + \beta(\delta_\gamma \zeta_h - \bar{w}_h), u_h - \bar{u}_h) \geq 0, \quad \forall u_h \in U_{ad,h}, \quad (3.6)$$

donde $\bar{\phi}_h$ es el estado adjunto asociado, $\zeta_h \in \partial \|\cdot\|_{L^1(\Omega)}(\bar{u}_h)$, y $(\beta \bar{w}_h, \cdot)$ la derivada de Gâteaux de la función H en \bar{u}_h , donde $\bar{w}_h \in L^2(\Omega)$ y está dado por

$$\bar{w}_h(x) := j'(\bar{u}_h(x)) = \begin{cases} \left[\delta_\gamma - \frac{1}{p} \left(|\bar{u}_h(x)| + \frac{1}{\gamma} \frac{1-p}{p} \right)^{\frac{1-p}{p}} \right] \text{sign}(\bar{u}_h(x)), & \text{si } |\bar{u}_h(x)| > \frac{1}{\gamma}, \\ 0, & \text{si } |\bar{u}_h(x)| \leq \frac{1}{\gamma}. \end{cases} \quad (3.7)$$

Capítulo 4

Estimación del orden de error

Consideramos (\bar{u}_h) una sucesión de soluciones del problema discreto $(\mathbf{P}_{h,C\gamma})$ y \bar{u} una solución de $(\mathbf{P}_{C\gamma})$. El objetivo de esta sección es obtener la estimación del error de $\|\bar{u} - \bar{u}_h\|_{L^2(\Omega)}$, para esto procedemos de forma análoga a [31], lo cual lo detallamos en los siguientes resultados.

LEMA 4.1. *La siguiente estimación se cumple*

$$\begin{aligned} \alpha \|\bar{u} - \bar{u}_h\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq (\alpha \bar{u}_h + \bar{\phi}_h, u_h - \bar{u}) + (\alpha \bar{u} + \bar{\phi}, u - \bar{u}_h) - (\bar{\phi} - \bar{\phi}_h, \bar{u} - \bar{u}_h) \\ &\quad + \beta \delta_\gamma [\|u\|_{L^1} - \|\bar{u}\|_{L^1} + \|u_h\|_{L^1} - \|\bar{u}_h\|_{L^1}] \\ &\quad - \beta (\bar{w}, u - \bar{u}) - \beta (\bar{w}_h, u_h - \bar{u}_h), \end{aligned} \quad (4.1)$$

para todo $u \in U_{ad}$ y $u_h \in U_{ad,h}$.

Demostración. Sumando las desigualdades (2.24c) y (3.6), tenemos

$$0 \leq (\bar{\phi} + \alpha \bar{u} + \beta[\delta_\gamma \zeta - \bar{w}], u - \bar{u}) + (\bar{\phi}_h + \alpha \bar{u}_h + \beta[\delta_\gamma \zeta_h - \bar{w}_h], u_h - \bar{u}_h),$$

sumando y restando \bar{u}_h al primer término, y \bar{u} al segundo término obtenemos que

$$\begin{aligned} 0 &\leq (\bar{\phi} + \alpha \bar{u} + \beta[\delta_\gamma \zeta - \bar{w}], u - \bar{u}_h) + (\bar{\phi} + \alpha \bar{u} + \beta[\delta_\gamma \zeta - \bar{w}], \bar{u}_h - \bar{u}) \\ &\quad + (\bar{\phi}_h + \alpha \bar{u}_h + \beta[\delta_\gamma \zeta_h - \bar{w}_h], u_h - \bar{u}) + (\bar{\phi}_h + \alpha \bar{u}_h + \beta[\delta_\gamma \zeta_h - \bar{w}_h], \bar{u} - \bar{u}_h) \end{aligned}$$

separando y reagrupando términos tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &\leq (\alpha \bar{u}_h + \bar{\phi}_h, u_h - \bar{u}) + (\alpha \bar{u} + \bar{\phi}, u - \bar{u}_h) - (\bar{\phi} - \bar{\phi}_h, \bar{u} - \bar{u}_h) \\ &\quad + (\alpha \bar{u} + \beta[\delta_\gamma \zeta - \bar{w}], \bar{u}_h - \bar{u}) + (\alpha \bar{u}_h + \beta[\delta_\gamma \zeta_h - \bar{w}_h], \bar{u} - \bar{u}_h) \\ &\quad + (\beta[\delta_\gamma \zeta - \bar{w}], u - \bar{u}_h) + (\beta[\delta_\gamma \zeta_h - \bar{w}_h], u_h - \bar{u}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\alpha \bar{u}_h + \bar{\phi}_h, u_h - \bar{u}) + (\alpha \bar{u} + \bar{\phi}, u - \bar{u}_h) - (\bar{\phi} - \bar{\phi}_h, \bar{u} - \bar{u}_h) \\
&\quad - \alpha (\bar{u} - \bar{u}_h, \bar{u} - \bar{u}_h) - \beta ([\delta_\gamma \zeta - \bar{w}] - [\delta_\gamma \zeta_h - \bar{w}_h], \bar{u} - \bar{u}_h) \\
&\quad + (\beta [\delta_\gamma \zeta - \bar{w}], u - \bar{u}_h) + (\beta [\delta_\gamma \zeta_h - \bar{w}_h], u_h - \bar{u}),
\end{aligned}$$

de la definición de la norma de L^2 se sigue que

$$\begin{aligned}
0 \leq & (\alpha \bar{u}_h + \bar{\phi}_h, u_h - \bar{u}) + (\alpha \bar{u} + \bar{\phi}, u - \bar{u}_h) - (\bar{\phi} - \bar{\phi}_h, \bar{u} - \bar{u}_h) \\
& - \alpha \|\bar{u} - \bar{u}_h\|_{L^2(\Omega)}^2 - \beta ([\delta_\gamma \zeta - \bar{w}] - [\delta_\gamma \zeta_h - \bar{w}_h], \bar{u} - \bar{u}_h) \\
& + (\beta [\delta_\gamma \zeta - \bar{w}], u - \bar{u}) + (\beta [\delta_\gamma \zeta - \bar{w}], \bar{u} - \bar{u}_h) \\
& + (\beta [\delta_\gamma \zeta_h - \bar{w}_h], u_h - \bar{u}_h) + (\beta [\delta_\gamma \zeta_h - \bar{w}_h], \bar{u}_h - \bar{u}),
\end{aligned}$$

separando y reagrupando términos de nuevo se obtiene que

$$\begin{aligned}
0 \leq & (\alpha \bar{u}_h + \bar{\phi}_h, u_h - \bar{u}) + (\alpha \bar{u} + \bar{\phi}, u - \bar{u}_h) - (\bar{\phi} - \bar{\phi}_h, \bar{u} - \bar{u}_h) \\
& - \alpha \|\bar{u} - \bar{u}_h\|_{L^2(\Omega)}^2 - \beta ([\delta_\gamma \zeta - \bar{w}] - [\delta_\gamma \zeta_h - \bar{w}_h], \bar{u} - \bar{u}_h) \\
& + \beta ([\delta_\gamma \zeta - \bar{w}] - [\delta_\gamma \zeta_h - \bar{w}_h], \bar{u} - \bar{u}_h) \\
& + (\beta [\delta_\gamma \zeta - \bar{w}], u - \bar{u}) + (\beta [\delta_\gamma \zeta_h - \bar{w}_h], u_h - \bar{u}_h) \\
= & (\alpha \bar{u}_h + \bar{\phi}_h, u_h - \bar{u}) + (\alpha \bar{u} + \bar{\phi}, u - \bar{u}_h) - (\bar{\phi} - \bar{\phi}_h, \bar{u} - \bar{u}_h) \\
& - \alpha \|\bar{u} - \bar{u}_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + (\beta [\delta_\gamma \zeta - \bar{w}], u - \bar{u}) + (\beta [\delta_\gamma \zeta_h - \bar{w}_h], u_h - \bar{u}_h),
\end{aligned}$$

esta última desigualdad implica lo siguiente

$$\begin{aligned}
\alpha \|\bar{u} - \bar{u}_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq & (\alpha \bar{u}_h + \bar{\phi}_h, u_h - \bar{u}) + (\alpha \bar{u} + \bar{\phi}, u - \bar{u}_h) - (\bar{\phi} - \bar{\phi}_h, \bar{u} - \bar{u}_h) \\
& + (\beta [\delta_\gamma \zeta - \bar{w}], u - \bar{u}) + (\beta [\delta_\gamma \zeta_h - \bar{w}_h], u_h - \bar{u}_h).
\end{aligned}$$

Analizando ahora los dos últimos términos se tiene que

$$\begin{aligned}
& (\beta [\delta_\gamma \zeta - \bar{w}], u - \bar{u}) + (\beta [\delta_\gamma \zeta_h - \bar{w}_h], u_h - \bar{u}_h) \\
& = \beta \delta_\gamma [(\zeta, u - \bar{u}) + (\zeta_h, u_h - \bar{u}_h)] - \beta (\bar{w}, u - \bar{u}) - \beta (\bar{w}_h, u_h - \bar{u}_h),
\end{aligned}$$

Puesto que $\zeta \in \partial \|\cdot\|_{L^1}(\bar{u})$ y $\zeta_h \in \partial \|\cdot\|_{L^1}(\bar{u}_h)$ se satisface las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned}
(\zeta, u - \bar{u}) &\leq \|u\|_{L^1} - \|\bar{u}\|_{L^1}, \\
(\zeta_h, u_h - \bar{u}_h) &\leq \|u_h\|_{L^1} - \|\bar{u}_h\|_{L^1},
\end{aligned}$$

lo que implica la siguiente acotación

$$\begin{aligned} & (\beta[\delta_\gamma \zeta - \bar{w}], u - \bar{u}) + (\beta[\delta_\gamma \zeta_h - \bar{w}_h], u_h - \bar{u}_h) \\ & \leq \beta\delta_\gamma [\|u\|_{L^1} - \|\bar{u}\|_{L^1} + \|u_h\|_{L^1} - \|\bar{u}_h\|_{L^1}] - \beta(\bar{w}, u - \bar{u}) - \beta(\bar{w}_h, u_h - \bar{u}_h), \end{aligned}$$

con lo cual se tiene (4.1). \square

OBSERVACIÓN. Nótese que los términos $-\beta(\bar{w}, u - \bar{u})$ y $-\beta(\bar{w}_h, u_h - \bar{u}_h)$ satisfacen con signo contrario la desigualdad de los subgradiantes de la función H en los puntos \bar{u} y \bar{u}_h , respectivamente. Por tal motivo, para la acotación de dichos términos procederemos de diferente manera, lo cual será visto en detalle a partir de la estimación (4.11).

LEMA 4.2. *La siguiente estimación se cumple*

$$\begin{aligned} \alpha\|\bar{u} - \bar{u}_h\|_{L^2}^2 + \|\bar{y} - \bar{y}_h\|_{L^2}^2 & \leq (\alpha\bar{u} + \bar{\phi}, u - \bar{u}_h + u_h - \bar{u}) + \alpha(\bar{u}_h - \bar{u}, u_h - \bar{u}) \\ & \quad + (\bar{y}_h - \bar{y}, (S_h - S)u_h + S(u_h - \bar{u})) \\ & \quad + (\bar{y} - y_d, (S_h - S)(u_h - \bar{u}_h)) \tag{4.3} \\ & \quad + \beta\delta_\gamma [\|u\|_{L^1} - \|\bar{u}\|_{L^1} + \|u_h\|_{L^1} - \|\bar{u}_h\|_{L^1}] \\ & \quad - \beta(\bar{w}, u - \bar{u}) - \beta(\bar{w}_h, u_h - \bar{u}_h), \end{aligned}$$

para todo $u \in U_{ad}$ y $u_h \in U_{ad,h}$.

Demostración. Sea $u \in U_{ad}$ y $u_h \in U_{ad,h}$, sumando y restando u_h y \bar{u} en el primer término tenemos la siguiente igualdad

$$\begin{aligned} (\alpha\bar{u} + \bar{\phi}, u - \bar{u}_h) + (\alpha\bar{u}_h + \bar{\phi}_h, u_h - \bar{u}) - (\bar{\phi} - \bar{\phi}_h, \bar{u} - \bar{u}_h) & = (\alpha\bar{u} + \bar{\phi}, u - \bar{u}_h + u_h - \bar{u}) \\ & \quad - (\alpha\bar{u} + \bar{\phi}, u_h - \bar{u}) + (\alpha\bar{u}_h + \bar{\phi}_h, u_h - \bar{u}) - (\bar{\phi} - \bar{\phi}_h, \bar{u} - \bar{u}_h), \end{aligned}$$

luego juntando los términos en común obtenemos

$$\begin{aligned} (\alpha\bar{u} + \bar{\phi}, u - \bar{u}_h) + (\alpha\bar{u}_h + \bar{\phi}_h, u_h - \bar{u}) - (\bar{\phi} - \bar{\phi}_h, \bar{u} - \bar{u}_h) & = (\alpha\bar{u} + \bar{\phi}, u - \bar{u}_h + u_h - \bar{u}) \\ & \quad + \alpha(\bar{u}_h - \bar{u}, u_h - \bar{u}) + (\bar{\phi}_h, u_h - \bar{u}_h) - (\bar{\phi}, u_h - \bar{u}_h), \end{aligned}$$

de la definición del estado adjunto se sigue que

$$\begin{aligned} (\alpha\bar{u} + \bar{\phi}, u - \bar{u}_h) + (\alpha\bar{u}_h + \bar{\phi}_h, u_h - \bar{u}) - (\bar{\phi} - \bar{\phi}_h, \bar{u} - \bar{u}_h) & = (\alpha\bar{u} + \bar{\phi}, u - \bar{u}_h + u_h - \bar{u}) \\ & \quad + \alpha(\bar{u}_h - \bar{u}, u_h - \bar{u}) - (\bar{y} - y_d, S(u_h - \bar{u}_h)) + (\bar{y}_h - y_d, S_h(u_h - \bar{u}_h)), \end{aligned}$$

sumando y restando \bar{y} en el último término se obtiene

$$\begin{aligned} (\alpha\bar{u} + \bar{\phi}, u - \bar{u}_h) + (\alpha\bar{u}_h + \bar{\phi}_h, u_h - \bar{u}) - (\bar{\phi} - \bar{\phi}_h, \bar{u} - \bar{u}_h) &= (\alpha\bar{u} + \bar{\phi}, u - \bar{u}_h + u_h - \bar{u}) \\ &+ \alpha(\bar{u}_h - \bar{u}, u_h - \bar{u}) - (\bar{y} - y_d, S(u_h - \bar{u}_h)) + (\bar{y}_h - \bar{y}, S_h(u_h - \bar{u}_h)) \\ &+ (\bar{y} - y_d, S_h(u_h - \bar{u}_h)), \end{aligned}$$

juntando los términos en común se tiene que

$$\begin{aligned} (\alpha\bar{u} + \bar{\phi}, u - \bar{u}_h) + (\alpha\bar{u}_h + \bar{\phi}_h, u_h - \bar{u}) - (\bar{\phi} - \bar{\phi}_h, \bar{u} - \bar{u}_h) &= (\alpha\bar{u} + \bar{\phi}, u - \bar{u}_h + u_h - \bar{u}) \\ &+ \alpha(\bar{u}_h - \bar{u}, u_h - \bar{u}) + (\bar{y} - y_d, (S_h - S)(u_h - \bar{u}_h)) + (\bar{y}_h - \bar{y}, S_h(u_h) - S_h(\bar{u}_h)), \end{aligned}$$

sumando y restando $\bar{y} = S(\bar{u})$ en el último término, tenemos

$$\begin{aligned} (\alpha\bar{u} + \bar{\phi}, u - \bar{u}_h) + (\alpha\bar{u}_h + \bar{\phi}_h, u_h - \bar{u}) - (\bar{\phi} - \bar{\phi}_h, \bar{u} - \bar{u}_h) &= (\alpha\bar{u} + \bar{\phi}, u - \bar{u}_h + u_h - \bar{u}) \\ &+ \alpha(\bar{u}_h - \bar{u}, u_h - \bar{u}) + (\bar{y} - y_d, (S_h - S)(u_h - \bar{u}_h)) \\ &+ (\bar{y}_h - \bar{y}, S_h(u_h) - S(\bar{u})) + (\bar{y}_h - \bar{y}, \bar{y} - \bar{y}_h), \end{aligned}$$

y al sumar y restar $S(u_h)$ tenemos que

$$\begin{aligned} (\alpha\bar{u} + \bar{\phi}, u - \bar{u}_h) + (\alpha\bar{u}_h + \bar{\phi}_h, u_h - \bar{u}) - (\bar{\phi} - \bar{\phi}_h, \bar{u} - \bar{u}_h) &= (\alpha\bar{u} + \bar{\phi}, u - \bar{u}_h + u_h - \bar{u}) \\ &+ \alpha(\bar{u}_h - \bar{u}, u_h - \bar{u}) + (\bar{y} - y_d, (S_h - S)(u_h - \bar{u}_h)) \\ &+ (\bar{y}_h - \bar{y}, (S_h - S)u_h + S(u_h - \bar{u})) - \|\bar{y} - \bar{y}_h\|_{L^2}^2, \end{aligned}$$

finalmente utilizando el Lema 4.1 obtenemos la nuestra estimación. \square

LEMA 4.3. *La siguiente estimación se cumple*

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{2} \|\bar{u} - \bar{u}_h\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \|\bar{y} - \bar{y}_h\|_{L^2}^2 &\leq \|\alpha\bar{u} + \bar{\phi}\|_{H^1} (\|u - \bar{u}_h\|_{H^{-1}} + \|u_h - \bar{u}\|_{H^{-1}}) \\ &+ \alpha \|u_h - \bar{u}\|_{L^2}^2 + c_A^2 h^4 \|u_h\|_{L^2}^2 + \|S\|_{H^{-1} \rightarrow L^2}^2 \|u_h - \bar{u}\|_{H^{-1}}^2 \\ &+ c_A h^2 \|\bar{y} - y_d\|_{L^2} (\|u_h - \bar{u}\|_{L^2} + \|\bar{u} - \bar{u}_h\|_{L^2}) \\ &+ \beta \delta_\gamma [\|u\|_{L^1} - \|\bar{u}\|_{L^1} + \|u_h\|_{L^1} - \|\bar{u}_h\|_{L^1}] \\ &- \beta (\bar{w}, u - \bar{u}) - \beta (\bar{w}_h, u_h - \bar{u}_h), \end{aligned} \tag{4.4}$$

para todo $u \in U_{ad}$ y $u_h \in U_{ad,h}$.

Demostración. Tenemos la siguiente desigualdad

$$(\alpha\bar{u} + \bar{\phi}, u - \bar{u}_h + u_h - \bar{u}) \leq \|\alpha\bar{u} + \bar{\phi}\|_{H^1} (\|u - \bar{u}_h\|_{H^{-1}} + \|u_h - \bar{u}\|_{H^{-1}}). \tag{4.5}$$

Utilizando la desigualdad Cauchy-Schwarz y luego la desigualdad de Young, obtenemos que

$$\alpha(\bar{u}_h - \bar{u}, u_h - \bar{u}) \leq \frac{\alpha}{2} \|u_h - \bar{u}\|_{L^2}^2 + \frac{\alpha}{2} \|\bar{u}_h - \bar{u}\|_{L^2}^2. \quad (4.6)$$

De igual manera de la desigualdad Cauchy-Schwarz y de la desigualdad de Young, obtenemos la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned} (\bar{y}_h - \bar{y}, (S_h - S)u_h + S(u_h - \bar{u})) &\leq \frac{1}{2} \|\bar{y} - \bar{y}_h\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \|(S_h - S)u_h + S(u_h - \bar{u})\|_{L^2}^2 \\ &= \frac{1}{2} \|\bar{y} - \bar{y}_h\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \|(S_h - S)u_h\|_{L^2}^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \|S(u_h - \bar{u})\|_{L^2}^2 + ((S_h - S)u_h, S(u_h - \bar{u})), \end{aligned}$$

utilizando nuevamente Cauchy-Schwarz y Young en último término obtenemos

$$\begin{aligned} (\bar{y}_h - \bar{y}, (S_h - S)u_h + S(u_h - \bar{u})) &\leq \frac{1}{2} \|\bar{y} - \bar{y}_h\|_{L^2}^2 + \|(S_h - S)u_h\|_{L^2}^2 + \|S(u_h - \bar{u})\|_{L^2}^2 \\ &\leq \frac{1}{2} \|\bar{y} - \bar{y}_h\|_{L^2}^2 + \|S_h - S\|_{L^2 \rightarrow L^2}^2 \|u_h\|_{L^2}^2 \\ &\quad + \|S\|_{H^{-1} \rightarrow L^2}^2 \|u_h - \bar{u}\|_{H^{-1}}^2, \end{aligned}$$

y utilizando la estimación de la Hipótesis 3.1, obtenemos

$$(\bar{y}_h - \bar{y}, (S_h - S)u_h + S(u_h - \bar{u})) \leq \frac{1}{2} \|\bar{y} - \bar{y}_h\|_{L^2}^2 + c_A^2 h^4 \|u_h\|_{L^2}^2 + \|S\|_{H^{-1} \rightarrow L^2}^2 \|u_h - \bar{u}\|_{H^{-1}}^2. \quad (4.7)$$

La siguiente desigualdad se obtiene de la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} (\bar{y} - y_d, (S_h - S)(u_h - \bar{u}_h)) &\leq \|\bar{y} - y_d\|_{L^2} \|(S_h - S)(u_h - \bar{u}_h)\|_{L^2} \\ &\leq \|\bar{y} - y_d\|_{L^2} \|S_h - S\|_{L^2 \rightarrow L^2} \|u_h - \bar{u}_h\|_{L^2}, \end{aligned}$$

ahora de la desigualdad triangular y de la estimación de la Hipótesis 3.1, tenemos

$$(\bar{y} - y_d, (S_h - S)(u_h - \bar{u}_h)) \leq C_A h^2 \|\bar{y} - y_d\|_{L^2} (\|u_h - \bar{u}\|_{L^2} + \|\bar{u} - \bar{u}_h\|_{L^2}). \quad (4.8)$$

Entonces la estimación del Lema 4.2 junto con las desigualdades (4.5), (4.6), (4.7) y (4.8) implica el resultado de este lema. \square

Considerando $u_h = \tilde{u}_h = \Pi_h(\bar{u}) \in U_{ad,h}$, del Lema 3.2 se tiene que:

$$h \|\bar{u} - \tilde{u}_h\|_{L^2} + \|\bar{u} - \tilde{u}_h\|_{H^{-1}} \leq c_I h^2 \|\nabla \bar{u}\|_{L^2} \leq c_I h^2 \|\bar{u}\|_{H^1}.$$

Por otra parte, tenemos que $\|\tilde{u}_h\|_{L^1} \leq \|\bar{u}\|_{L^1}$. En efecto, sea \bar{u}^+ y \bar{u}^- la parte positiva y negativa de \bar{u} respectivamente, entonces se tiene la siguiente desigualdad,

obtenida en [31]:

$$\begin{aligned}
\|\tilde{u}_h\|_{L^1} &= \|\Pi_h \bar{u}\|_{L^1} = \left\| \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \bar{u}_T \chi_T \right\|_{L^1} \\
&\leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{\Omega} |\bar{u}_T| \chi_T \\
&= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \frac{|\int_T \bar{u}|}{|T|} |T| \\
&\leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T |\bar{u}| \\
&= \|\bar{u}\|_{L^1}.
\end{aligned}$$

En particular, tomando $u_h = \tilde{u}_h$ en (4.4), obtenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha}{2} \|\bar{u} - \bar{u}_h\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \|\bar{y} - \bar{y}_h\|_{L^2}^2 &\leq \|\alpha \bar{u} + \bar{\phi}\|_{H^1} (\|u - \bar{u}_h\|_{H^{-1}} + c_I h^2 \|\bar{u}\|_{H^1}) + \alpha c_I^2 h^2 \|\bar{u}\|_{H^1}^2 \\
&\quad + c_A^2 h^4 \|\tilde{u}_h\|_{L^2}^2 + \|S\|_{H^{-1} \rightarrow L^2}^2 c_I^2 h^4 \|\bar{u}\|_{H^1}^2 \\
&\quad + c_A h^2 \|\bar{y} - y_d\|_{L^2} (c_I h \|\bar{u}\|_{H^1} + \|\bar{u} - \bar{u}_h\|_{L^2}) \\
&\quad + \beta \delta_\gamma [\|u\|_{L^1} - \|\bar{u}_h\|_{L^1}] \\
&\quad - \beta (\bar{w}, u - \bar{u}) - \beta (\bar{w}_h, \tilde{u}_h - \bar{u}_h).
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Por otro lado, se tiene la siguiente acotación para el control óptimo.

$$\|\bar{u}\|_{H^1} \leq \frac{1}{\alpha} \|\bar{\phi}\|_{H^1} + \|u_a\|_{H^1} + \|u_b\|_{H^1},$$

y existe una constante $M > 0$ independiente de h tal que

$$\|\bar{\phi}\|_{H^1} + \alpha (\|u_a\|_{H^1} + \|u_b\|_{H^1}) + \|\bar{y} - y_d\|_{L^2} + \sup_{u_h \in U_{ad,h}} \|u_h\|_{L^2} \leq M, \quad \forall h > 0,$$

esto implica que $\|\bar{u}\|_{H^1} \leq M\alpha^{-1}$. Además, se tiene que

$$\|\alpha \bar{u} + \bar{\phi}\|_{H^1} \leq M.$$

Con esto, de la desigualdad (4.9) se sigue que

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha}{2} \|\bar{u} - \bar{u}_h\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \|\bar{y} - \bar{y}_h\|_{L^2}^2 &\leq M(\|u - \bar{u}_h\|_{H^{-1}} + c_I M h^2 \alpha^{-1}) + c_I^2 M^2 h^2 \alpha^{-1} \\
&\quad + c_A^2 h^4 M^2 + \|S\|_{H^{-1} \rightarrow L^2}^2 c_I^2 M^2 h^4 \alpha^{-2} \\
&\quad + c_A h^2 M (c_I M h \alpha^{-1} + \|\bar{u} - \bar{u}_h\|_{L^2}) \\
&\quad + \beta \delta_\gamma [\|u\|_{L^1} - \|\bar{u}_h\|_{L^1}] \\
&\quad - \beta (\bar{w}, u - \bar{u}) - \beta (\bar{w}_h, \bar{u}_h - \bar{u}_h).
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Puesto que tenemos la inclusión $U_{ad,h} \subset U_{ad}$, podemos tomar $u = \bar{u}_h$ obteniendo así la siguiente estimación:

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha}{2} \|\bar{u} - \bar{u}_h\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \|\bar{y} - \bar{y}_h\|_{L^2}^2 &\leq (c_I M^2 \alpha^{-1} + c_I^2 M^2 \alpha^{-1}) h^2 \\
&\quad + (c_A^2 M^2 + \|S\|_{H^{-1} \rightarrow L^2}^2 c_I^2 M^2 \alpha^{-2}) h^4 \\
&\quad + c_A c_I M^2 \alpha^{-1} h^3 + c_A h^2 M \|\bar{u} - \bar{u}_h\|_{L^2} \\
&\quad - \beta (\bar{w}, \bar{u}_h - \bar{u}) - \beta (\bar{w}_h, \bar{u}_h - \bar{u}_h),
\end{aligned}$$

Sabemos que

$$c_A h^2 M \|\bar{u} - \bar{u}_h\|_{L^2} \leq c_A^2 M^2 \alpha^{-1} h^4 + \frac{\alpha}{4} \|\bar{u} - \bar{u}_h\|_{L^2}^2,$$

de lo cual se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha}{2} \|\bar{u} - \bar{u}_h\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \|\bar{y} - \bar{y}_h\|_{L^2}^2 &\leq (c_I M^2 \alpha^{-1} + c_I^2 M^2 \alpha^{-1}) h^2 + c_A c_I M^2 \alpha^{-1} h^3 \\
&\quad + (c_A^2 M^2 + \|S\|_{H^{-1} \rightarrow L^2}^2 c_I^2 M^2 \alpha^{-2}) h^4 \\
&\quad + c_A^2 M^2 \alpha^{-1} h^4 + \frac{\alpha}{4} \|\bar{u} - \bar{u}_h\|_{L^2}^2 \\
&\quad - \beta (\bar{w}, \bar{u}_h - \bar{u}) - \beta (\bar{w}_h, \bar{u}_h - \bar{u}_h),
\end{aligned}$$

lo que implica

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha}{4} \|\bar{u} - \bar{u}_h\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \|\bar{y} - \bar{y}_h\|_{L^2}^2 &\leq (c_I M^2 \alpha^{-1} + c_I^2 M^2 \alpha^{-1}) h^2 + c_A c_I M^2 \alpha^{-1} h^3 \\
&\quad + (c_A^2 M^2 + \|S\|_{H^{-1} \rightarrow L^2}^2 c_I^2 M^2 \alpha^{-2} + c_A^2 M^2 \alpha^{-1}) h^4 \\
&\quad - \beta (\bar{w} - \bar{w}_h, \bar{u}_h - \bar{u}) - \beta (\bar{w}_h, \bar{u}_h - \bar{u}),
\end{aligned} \tag{4.11}$$

utilizando la desigualdad de Schwartz, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{4} \|\bar{u} - \bar{u}_h\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \|\bar{y} - \bar{y}_h\|_{L^2}^2 &\leq (c_I M^2 \alpha^{-1} + c_I^2 M^2 \alpha^{-1}) h^2 + c_A c_I M^2 \alpha^{-1} h^3 \\ &\quad + (c_A^2 M^2 + \|S\|_{H^{-1} \rightarrow L^2}^2 c_I^2 M^2 \alpha^{-2} + c_A^2 M^2 \alpha^{-1}) h^4 \\ &\quad + \beta \|\bar{w} - \bar{w}_h\|_{L^2} \|\bar{u}_h - \bar{u}\|_{L^2} + \beta \|\bar{w}_h\|_{H^1} \|\bar{u}_h - \bar{u}\|_{H^{-1}}, \end{aligned}$$

luego, usando la Lipschitz continuidad de la función j' , definida en (2.16), logramos acotar $\|\bar{w} - \bar{w}_h\|_{L^2}$ y $\|\bar{w}_h\|_{H^1}$, obteniendo así la siguiente estimación:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{4} \|\bar{u} - \bar{u}_h\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \|\bar{y} - \bar{y}_h\|_{L^2}^2 &\leq (c_I M^2 \alpha^{-1} + c_I^2 M^2 \alpha^{-1}) h^2 + c_A c_I M^2 \alpha^{-1} h^3 \\ &\quad + (c_A^2 M^2 + \|S\|_{H^{-1} \rightarrow L^2}^2 c_I^2 M^2 \alpha^{-2} + c_A^2 M^2 \alpha^{-1}) h^4 \\ &\quad + 2\beta\gamma\delta_\gamma p \|\bar{u}_h - \bar{u}\|_{L^2}^2 + c_I M \beta \alpha^{-1} \delta_\gamma h^2, \end{aligned}$$

para obtener una acotación, sería necesario asumir que

$$\frac{8\beta\gamma\delta_\gamma p}{\alpha} < 1, \quad (4.12)$$

con lo cual, para h obtenemos la siguiente estimación:

$$\|\bar{u} - \bar{u}_h\|_{L^2} \leq C (h + \delta_\gamma^{1/2} h), \quad (4.13)$$

con $C > 0$ independiente de h y γ .

Relajación de la condición (4.12)

Con el objetivo de relajar la condición (4.12) se utilizará la Proposición 2.12 y realizará un análisis similar.

Para empezar, nosotros tenemos que la función j' es Lipschitz continua, esto nos permite verificar la siguiente desigualdad

$$(j'(v) - j'(u), v - u) \leq \|j'(v) - j'(u)\|_{L^2} \|v - u\|_{L^2} \leq 2\gamma\delta_\gamma \|v - u\|_{L^2}^2, \quad \forall u, v \in L^2,$$

además sabemos que H es una función Gâteaux diferenciable, por lo cual utilizando la Proposición 2.12 se obtiene las siguientes desigualdades,

$$H(v) - H(\bar{u}) \leq \beta(\bar{w}, v - \bar{u}) + \gamma\delta_\gamma \|\bar{u} - v\|_{L^2}^2, \quad \forall v \in L^2, \quad (4.14a)$$

$$H(v) - H(\bar{u}_h) \leq \beta(\bar{w}, v - \bar{u}_h) + \gamma\delta_\gamma \|u_h - \bar{u}_h\|_{L^2}^2, \quad \forall v \in L^2, \quad (4.14b)$$

con \bar{u} y \bar{u}_h fijos. Luego tomando $v = \bar{u}_h$ y $v = \bar{u}$ en (4.14a) y (4.14b) respectivamente, se obtiene que

$$-\beta (\bar{w} - \bar{w}_h, \bar{u}_h - \bar{u}) \leq 2\gamma\delta_\gamma p \|\bar{u} - \bar{u}_h\|_{L^2}^2,$$

con lo cual para obtener la estimación (4.13) podemos imponer una condición menos restrictiva dada por

$$\frac{8\gamma\delta_\gamma p}{\alpha} < 1, \tag{4.15}$$

nótese además que esta condición es independiente de β .

COROLARIO 4.4. *Si los parámetros de regularización satisfacen la condición (4.12) o (4.15) se tiene que el problema $(\mathbf{P}_{C\gamma})$ tiene solución única, y que cualquier sucesión de soluciones de $(\mathbf{P}_{h,C\gamma})$ convergen a la solución de $(\mathbf{P}_{C\gamma})$.*

La demostración es directa de (4.13) ya que \bar{u} y la sucesión \bar{u}_h son arbitrarios.

Capítulo 5

Implementación Numérica

En esta capítulo presentamos evidencia numérica que confirman los resultados teóricos obtenidos en la capítulo previo. Para ello, consideramos un método de Newton Semisuave, similar al utilizado en [24], para obtener la solución numérica del problema discretizado $(\mathbf{P}_{h,C\gamma})$ para diferentes tamaños de malla h .

5.1. Método de Newton semisuave para la solución numérica del problema discreto

Como mencionamos en la introducción de este capítulo, vamos a utilizar un algoritmo de tipo Newton Semisuave basado en lo descrito en cf. [24] y cf.[28]. Para lo cual agrupamos los multiplicadores ζ, λ_a y λ_b del Teorema 2.24 en un solo multiplicador, dado por

$$\mu := \beta\delta_\gamma\zeta - \lambda_a + \lambda_b. \quad (5.1)$$

la definición de este multiplicador nos permite reescribir el sistema de optimalidad (2.25) en un sistema que contiene únicamente igualdades, a partir de una función $C : L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ definida de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} C(u, \mu) = & u - \text{máx}(0, u + c(\mu - \delta_\gamma\beta)) - \text{mín}(0, u + c(\mu + \delta_\gamma\beta)) \\ & + \text{máx}(0, u - u_b + c(\mu - \delta_\gamma\beta)) + \text{mín}(0, u - u_a + c(\mu + \delta_\gamma\beta)), \end{aligned} \quad (5.2)$$

con una constante $c > 0$.

PROPOSICIÓN 5.1. *El sistema de optimalidad dado en (2.25) es equivalente al si-*

guiente sistema:

$$\bar{y} = S(\bar{u} - f) \quad (5.3a)$$

$$\bar{\phi} = S^*(\bar{y} - y_d) \quad (5.3b)$$

$$\bar{\phi} + \alpha \bar{u} + \mu - \beta \bar{w} = 0, \quad (5.3c)$$

$$C(\bar{u}, \mu) = 0, \quad \text{para casi todo punto } x \in \Omega. \quad (5.3d)$$

Demostración. De la definición del operador de control estado S y de su operador adjunto S^* , es suficiente probar que $C(\bar{u}, \mu) = 0$, para ello vamos a estudiar subconjuntos de Ω donde $\bar{u}(x) = 0$, $\bar{u}(x) > 0$ y $\bar{u}(x) < 0$.

- $u(x) = 0$: De (2.25d) se tiene que $\lambda_b(x) = \lambda_a(x) = 0$ y se tiene también que $|\zeta(x)| \leq 1$ gracias a (2.25e). De aquí que obtenemos los siguiente cálculos

$$\text{máx}(0, \bar{u} + c(\mu - \delta_\gamma \beta)) = \text{máx}(0, c \delta_\gamma \beta (\zeta - 1)) = 0,$$

$$\text{mín}(0, \bar{u} + c(\mu + \delta_\gamma \beta)) = \text{mín}(0, c \delta_\gamma \beta (\zeta + 1)) = 0,$$

$$\text{mín}(0, \bar{u} - u_a + c(\mu + \delta_\gamma \beta)) = \text{mín}(0, -u_a + c \delta_\gamma \beta (\zeta + 1)) = 0,$$

$$\text{máx}(0, \bar{u} - u_b + c(\mu - \delta_\gamma \beta)) = \text{máx}(0, -u_b + c \delta_\gamma \beta (\zeta - 1)) = 0.$$

Luego, sumando todas estas igualdades se obtiene que $C(\bar{u}, \mu) = 0$.

- $u(x) > 0$: De (2.25d) se tiene que $\lambda_a(x) = 0$ y se tiene también que $\zeta(x) = 1$ gracias a (2.25e); de ello obtenemos los siguiente cálculos

$$\text{máx}(0, \bar{u} + c(\mu - \delta_\gamma \beta)) = \text{máx}(0, \bar{u} + c\lambda_b) = \bar{u} + c\lambda_b,$$

$$\text{mín}(0, \bar{u} + c(\mu + \delta_\gamma \beta)) = \text{mín}(0, \bar{u} + c(2\delta_\gamma \beta + \lambda_b)) = 0,$$

$$\text{mín}(0, \bar{u} - u_a + c(\mu + \delta_\gamma \beta)) = \text{mín}(0, \bar{u} - u_a + c(2\delta_\gamma \beta + \lambda_b)) = 0,$$

$$\text{máx}(0, \bar{u} - u_b + c(\mu - \delta_\gamma \beta)) = \text{máx}(0, \bar{u} - u_b + c\lambda_b) = \begin{cases} c\lambda_b, & \text{si } \bar{u}(x) = u_b, \\ 0, & \text{si } \bar{u}(x) < u_b. \end{cases}$$

Esta última igualdad fue obtenida de la condición (2.25d), puesto que si $\bar{u}(x) < u_b$ entonces $\lambda_b = 0$. Finalmente, sumando todas las igualdades anteriores obtenemos que $C(\bar{u}, \mu) = 0$.

- $u(x) < 0$: De (2.25d) se sigue que $\lambda_b(x) = 0$ y de (2.25e) se tiene que $\zeta(x) = -1$;

de lo cual, se siguen los siguiente cálculos

$$\begin{aligned} \max(0, \bar{u} + c(\mu - \delta_\gamma \beta)) &= \max(0, \bar{u} - c(2\delta_\gamma \beta + \lambda_a)) = 0, \\ \min(0, \bar{u} + c(\mu + \delta_\gamma \beta)) &= \min(0, \bar{u} - c\lambda_a) = \bar{u} - c\lambda_a, \\ \max(0, \bar{u} - u_b + c(\mu - \delta_\gamma \beta)) &= \max(0, \bar{u} - u_b - c(2\delta_\gamma \beta + \lambda_a)) = 0 \\ \min(0, \bar{u} - u_a + c(\mu + \delta_\gamma \beta)) &= \min(0, \bar{u} - u_a - c\lambda_a) = \begin{cases} -c\lambda_a, & \text{si } \bar{u}(x) = u_a, \\ 0, & \text{si } \bar{u}(x) > u_a, \end{cases} \end{aligned}$$

de igual manera la última igualdad fue obtenida de la condición (2.25d), es decir, si $\bar{u}(x) > u_a$ entonces $\lambda_a = 0$ y sumando todas las expresiones anteriores se obtiene que $C(\bar{u}, \mu) = 0$. \square

La siguiente proposición, la cual es de relevancia en el esquema de iteración de nuestro algoritmo de tipo Newton Semisuave, para la demostración de este nos referimos directamente al Teorema 2 de [24].

PROPOSICIÓN 5.2. *Sea la función $\mathcal{F} : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \rightarrow (L^2(\Omega))^4$ tal que para toda variable (y, ϕ, μ, u) toma el valor del lado izquierdo de (5.4), es decir*

$$\mathcal{F}(y, \phi, \mu, u) = \begin{pmatrix} y - S(u - f) \\ \phi - S^*(y - y_d) \\ \alpha u + \phi + \mu - \beta j'(u) \\ C(u, \mu) \end{pmatrix},$$

entonces la función \mathcal{F} es una función semisuave.

Para formular el algoritmo de Newton Semisuave, reescribimos el sistema de optimalidad dado en (5.3) mediante la ecuación $\mathcal{F}(z) = 0$, con $z = (y, \phi, \mu, u)$. Para resolver dicha ecuación utilizamos el método de Newton Semisuave basado en los siguientes pasos de iteración:

$$z_{k+1} = z_k + \delta_{z_k}, \quad \text{con} \quad \mathcal{F}'(z_k)\delta_{z_k} = -\mathcal{F}(z_k).$$

5.2. Implementación Numérica

Para el espacio de aproximación de estados discretos Y_h consideramos la base $\{\varphi_h^1, \dots, \varphi_h^N\} \subset Y_h$ tales que

$$\varphi_h^i(P_j) = \delta_{ij},$$

donde los n_j son los nodos de la malla al cual está asociado el espacio Y_h . Asociamos a esta base la matriz de rigidez E , definida por

$$E_{i,j} = (\nabla \varphi_h^i, \nabla \varphi_h^j)_{L^2(\Omega)},$$

la matriz de masa M dada por

$$M_{i,j} = (\varphi_h^i, \varphi_h^j)_{L^2(\Omega)},$$

y para una función $g \in L^2(\Omega)$ definimos el vector b^g de la siguiente manera

$$b_i^g = \int_{\Omega} g \varphi_h^i.$$

Definimos la matriz R asociada al espacio de controles discretos de la siguiente forma

$$R = NG,$$

donde G es la matriz asociada a la transformación que va del espacio $P_1(T)$ a $P_0(T)$, y N es la matriz definida por

$$N_{i,k} = \int_{T_k} \varphi_h^i.$$

De estas definiciones y siguiendo la demostración de la Proposición 5.1 podemos expresar las condiciones de optimalidad del problema discreto de la siguiente manera

$$E\bar{y}_h - R\bar{u}_h - b^f = 0, \quad (5.4a)$$

$$E^* \bar{\phi}_h - M\bar{y}_h + b^{y_d} = 0 \quad (5.4b)$$

$$\bar{\phi}_h + \alpha \bar{u}_h + \mu - \beta j'(\bar{u}_h) = 0, \quad (5.4c)$$

$$C(\bar{u}_h, \mu) = 0. \quad (5.4d)$$

La siguiente proposición es análoga de la proposición 5.3 para el espacios de dimensión finita.

PROPOSICIÓN 5.3. *Sea la función $\mathcal{F} : Y_h \times Y_h \times L^2(\Omega) \times U_h \rightarrow (L^2(\Omega))^4$ tal que*

para toda variable (y, ϕ, μ, u) toma el valor del lado izquierdo de (5.4), es decir

$$\mathcal{F}(y, \phi, \mu, u) = \begin{pmatrix} Ey - Ru - b^f \\ E\phi - My + b^{y_d} \\ \alpha u + \phi + \mu - \beta j'(u) \\ C(u, \mu) \end{pmatrix},$$

entonces la función \mathcal{F} es una función semismooth.

Con todo lo expuesto anteriormente obtenemos la estructura de nuestro algoritmo el cual está descrito de la siguiente manera:

1. Para un punto inicial dado $z_0 = (y_0, \phi_0, \mu_0, u_0)$.
2. Resolver el siguiente sistema para $d_{z_k} = d_k$

$$\begin{pmatrix} E & 0 & 0 & -R \\ -M & E & 0 & 0 \\ 0 & I & I & \alpha I - \beta j''(u_k) \\ 0 & 0 & -c\chi_A & I - \chi_A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_y \\ d_\phi \\ d_\mu \\ d_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ey_k - Ru_k - b^f \\ E\phi_k - My_k + b^{y_d} \\ \alpha u_k + \phi_k + \mu_k - \beta w_k \\ C(u_k, \mu_k) \end{pmatrix},$$

donde E es la matriz de rigidez, M la matriz de masa, R matriz asociada al espacio de controles discretos, $C(\cdot, \cdot)$ la función definida en (5.2), cuya derivada generalizada es la función característica del conjunto A el cual está definido por la unión de los siguientes conjuntos:

$$A_S = \{x : u + c(\mu - \delta_\gamma \beta) \geq 0\} \cup \{x : u + c(\mu + \delta_\gamma \beta) \geq 0\}$$

$$A_C = \{x : u - u_b + c(\mu - \delta_\gamma \beta) \geq 0\} \cup \{x : u - u_a + c(\mu + \delta_\gamma \beta) \geq 0\},$$

con c una constante positiva y j'' es la derivada generalizada de la función j' definida en (2.16), la cual está dada por

$$j'(z) = \begin{cases} \left[\frac{1}{p} \frac{p-1}{p} \left(|z| + \frac{1}{\gamma} \frac{1-p}{p} \right)^{\frac{1}{p}-2} \right] \text{sign}(z), & \text{si } |z| > \frac{1}{\gamma}, \\ 0, & \text{si } |z| \leq \frac{1}{\gamma}. \end{cases}$$

3. Actualizar $z_{k+1} = z_k + d_k$.

h	$\ \bar{u}^h - \bar{u}_{h^*}\ $	EOC'
0.05	0.0589	-
0.025	0.0141	2.0624
0.0125	0.0034	2.0699
0.00625	0.0008	2.1041
0.003125	0.0002	2.3407

Cuadro 5.1: Resultados del error y EOC' obtenidos para distintos valores de tamaño de malla h .

5.3. Ejemplos numéricos

A partir del esquema del algoritmo de Newton Semisuave resolvemos aproximadamente algunos ejemplos considerando diferentes tamaños de malla e ilustramos la estimación numérica del orden de error obtenida. Para ello, definimos el error experimental de convergencia de la siguiente manera:

$$EOC' := \frac{\log(\|\bar{u}^{h_1} - \bar{u}_{h^*}\|) - \log(\|\bar{u}_{h^*} - \bar{u}^{h_2}\|)}{\log(h_1) - \log(h_2)}. \quad (5.5)$$

Ejemplo 1

En este ejemplo la solución teórica es desconocida, por lo cual la solución del problema $(\mathbf{P}_{h,C\gamma})$, con $h^* = 0.0015625$, será considerada como la solución exacta.

Nuestro ejemplo está expresado de la siguiente forma:

$$(\mathbf{P}_1) \left\{ \begin{array}{l} \min_{(y,u) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)} \frac{1}{2} \|y - y_d\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \beta Y_{p,\gamma}(u) \\ \text{sujeto a:} \\ u \in U_{ad}, \\ -\Delta y = u, \quad \text{en } \Omega, \\ y = 0, \quad \text{sobre } \Gamma, \end{array} \right.$$

donde $y_d = 4\pi^2 \cos(2\pi(x + y))$, $\alpha = 1/4$, $\gamma = 4000$, $\beta = \alpha / (9\gamma\delta_\gamma p)$, $p = 2$, y el conjunto de controles admisibles está dado por

$$U_{ad} = \{u \in L^2(\Omega) : -10 \leq u \leq 10\}.$$

Resolviendo este problema para distintos valores del tamaño de la malla obtenemos la estimación numérica para el orden de error que se muestra en la tabla 5.1

En la figura 5.1 se muestra los resultados obtenidos en la tabla 5.1, del EOC po-

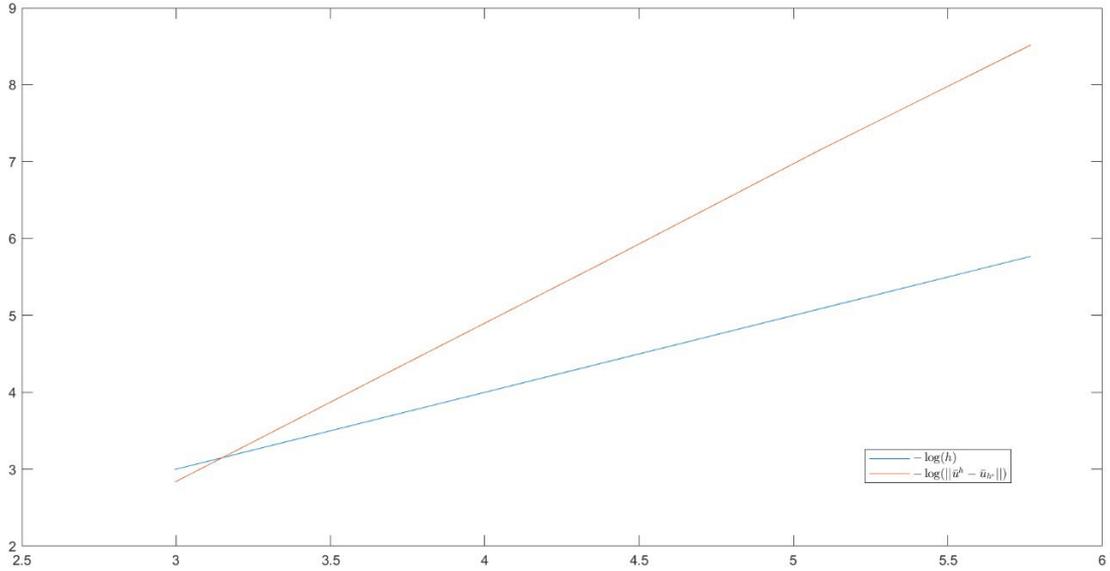


Figura 5.1: $-\log(h)$ versus $-\log(\|\bar{u}^h - \bar{u}_{h^*}\|)$ (línea roja) comparada con $-\log(h)$ (línea azul).

demostramos interpretar que el orden de error tiene una tendencia cuadrática, lo cual no contradice nuestra estimación de orden de error lineal obtenida en (4.13).

En la Figura 5.2 se visualiza el control óptimo \bar{u}^h para $h = 0.0125$.

Ejemplo 2

Nuestro ejemplo está expresado de la siguiente forma:

$$(\text{P}_2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{mín} \\ (y,u) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \quad \frac{1}{2} \|y - y_d\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \beta Y_{p,\gamma}(u) \\ \text{sujeto a:} \\ u \in U_{ad} = \{u \in L^2(\Omega) : -0.035 \leq u \leq 0.035\}, \\ -\Delta y = u, \quad \text{en } \Omega, \\ y = 0, \quad \text{sobre } \Gamma, \end{array} \right.$$

donde $y_d = e^{-\cos(2\pi xy)^2/0.1}$, $\gamma = 4000$, $\alpha = 1/4$, $\beta = \alpha/(9\gamma\delta_\gamma p)$, $p = 2$.

En este ejemplo la solución teórica es desconocida, por lo cual la solución del problema para $h^* = 0.0015625$ será considerada como la solución exacta.

Los resultados obtenidos se exponen en la tabla 5.2.

Los resultados obtenidos en la tabla 5.2 se ilustran en la figura 5.3, podemos notar que el orden de error tiene una tendencia cercana a un orden 1. En la Figura 5.4 se

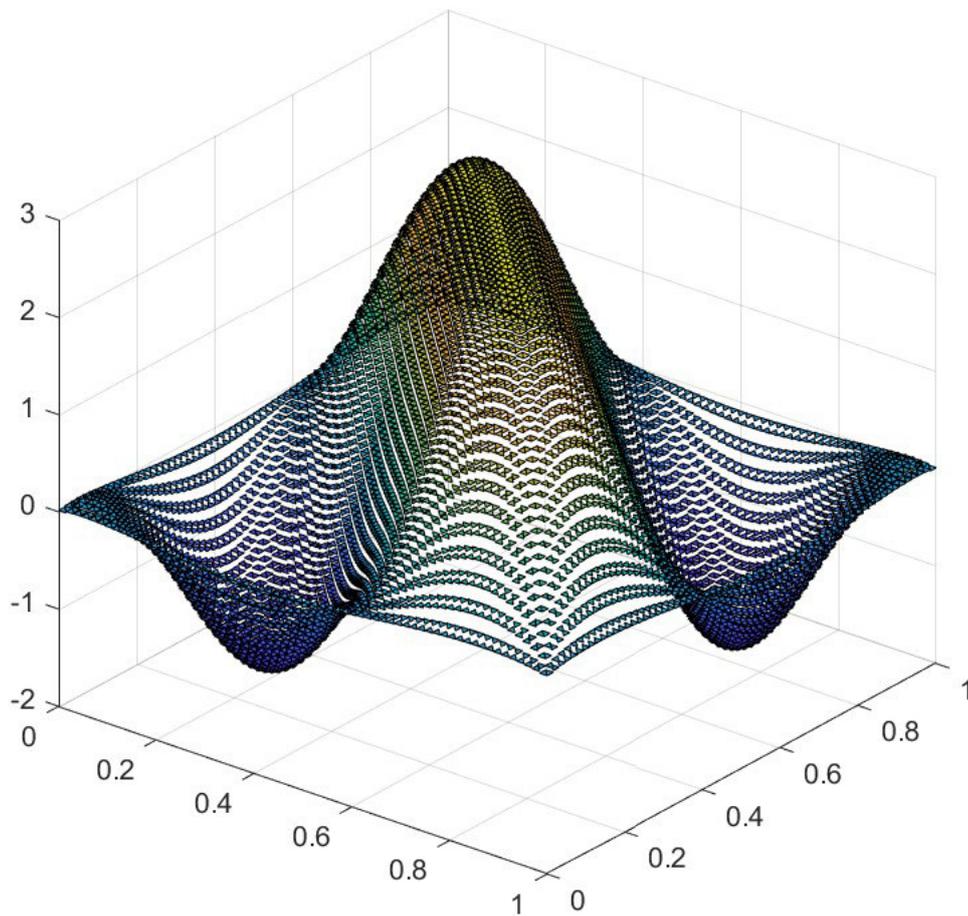


Figura 5.2: \bar{u}^h calculado con $h = 0.0125$.

h	$\ \bar{u}^h - \bar{u}_{h^*}\ $	EOC'
0.05	0.0004684	-
0.025	0.0003350	0.4839
0.0125	0.0001385	1.2740
0.00625	0.0000579	1.2580
0.003125	0.0000221	1.3893

Cuadro 5.2: Resultados del error y EOC' obtenidos para distintos valores de tamaño de malla h .

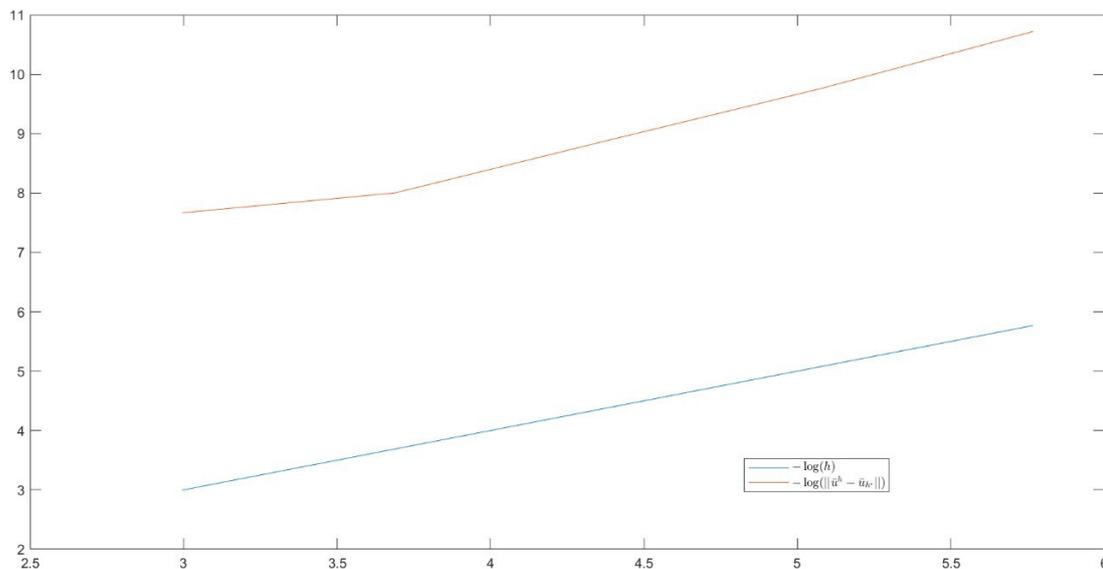


Figura 5.3: $-\log(h)$ versus $-\log(\|\bar{u}^h - \bar{u}_{h^*}\|)$ (línea roja) comparada con $-\log(h)$ (línea azul).

visualiza el control óptimo \bar{u}^h para $h = 0.0125$.

Ejemplo 3

El siguiente ejemplo satisface la condición (4.15), el cual está expresado de la siguiente forma:

$$(\mathbf{P}_3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \min_{(y,u) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)} \frac{1}{2} \|y - y_d\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \beta Y_{p,\gamma}(u) \\ \text{sujeto a:} \\ u \in U_{ad} = \{u \in L^2(\Omega) : -5 \leq u \leq 5\}, \\ -\Delta y = u, \quad \text{en } \Omega, \\ y = 0, \quad \text{sobre } \Gamma, \end{array} \right.$$

donde $y_d = 4\pi^2 \cos(2\pi(x+y))$, $\gamma = 4000$, $\alpha = 9\gamma\delta_\gamma p$, $\beta = 0.0002$, $p = 2$. De igual manera, en este ejemplo la solución teórica es desconocida, por lo cual la solución del problema para $h^* = 0.0015625$ será considerada como la solución exacta.

Los resultados obtenidos en la tabla 5.3 se ilustran en la figura 5.5, y de los valores del EOC podemos notar un orden de error que sigue una tendencia cuadrática. En la Figura 5.6 se visualiza el control óptimo \bar{u}^h para $h = 0.0125$.

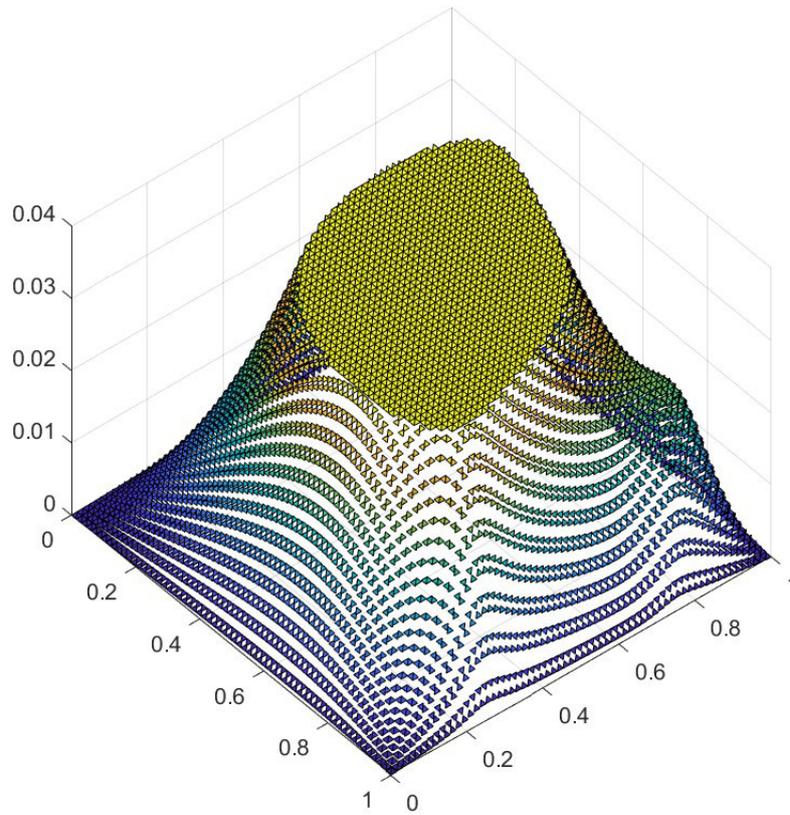


Figura 5.4: \bar{u}^h calculado con $h = 0.0125$.

h	$\ \bar{u}^h - \bar{u}_{h^*}\ $	EOC'
0.05	0.8584e-8	-
0.025	0.2000e-8	2.1016
0.0125	0.0497e-8	2.0097
0.00625	0.0118e-8	2.0676
0.003125	0.0024e-8	2.3212

Cuadro 5.3: Resultados del error y EOC' obtenidos para distintos valores de tamaño de malla h .

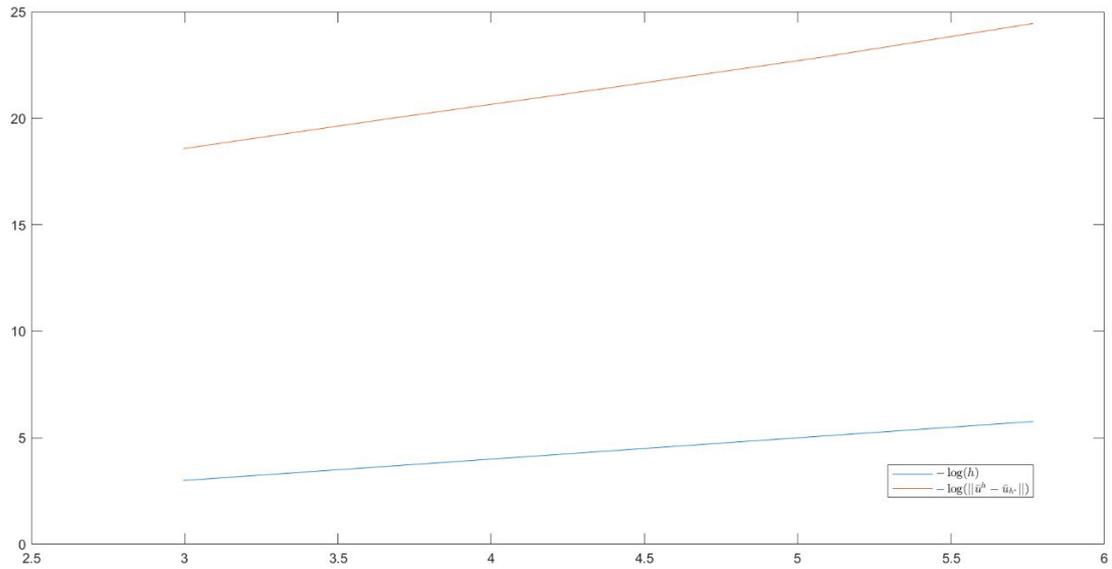


Figura 5.5: $-\log(h)$ versus $-\log(\|u^h - u_{h^*}\|)$ (línea roja) comparada con $-\log(h)$ (línea azul).

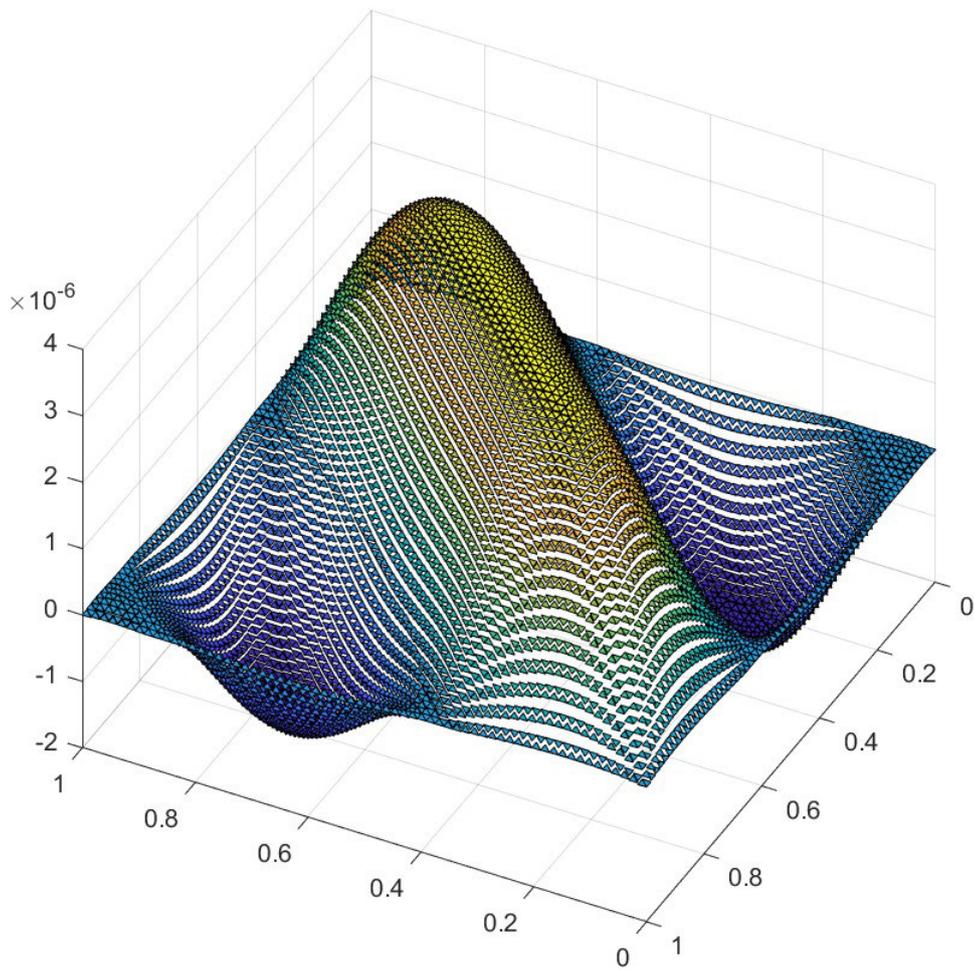


Figura 5.6: u^h calculado con $h = 0.0125$.

h	$\ \bar{u}^h - \bar{u}_{h^*}\ $	EOC'
0.0183	0.0137	-
0.0092	0.0081	0.7546
0.0046	0.0058	0.4955
0.0023	0.0041	0.5012
0.0011	0.0026	0.6494

Cuadro 5.4: Resultados del error y EOC' obtenidos para distintos valores de tamaño de malla h .

Ejemplo 4

En los anteriores ejemplos observamos que bajo la condición (4.12) ó (4.15), impuesta sobre los parámetros de regularización, se obtuvieron soluciones que no cumplen con la característica principal de los soluciones dispersas, esto se debe básicamente a la elección de estos parámetros, los cuales necesariamente deben verificar (4.12) ó (4.15).

Con el objetivo de especificar un problema que genere soluciones dispersas, expresamos a continuación un problema de control óptimo donde los parámetros de regularización generan una solución dispersa, sin embargo la elección de estos parámetros no satisfacen ni la condición (4.12) ni (4.15), por lo cual los resultados obtenidos de este ejemplo no necesariamente deben verificar nuestra estimación obtenida. De los resultados obtenidos podremos analizar una posible cota para la estimación del error para problemas que no cumplan las condiciones (4.12) y (4.15).

El problema está definido a partir de las siguientes funciones y parámetros:

$$p = 2, y_d = 4\pi^2 \cos(2\pi(x + y)), \gamma = 7000, \alpha = 0.2, \beta = 4e - 3,$$

y el conjunto de controles admisibles está dado por

$$U_{ad} = \{u \in L^2(\Omega) : -1 \leq u \leq 10\}.$$

De manera para este problema desconocemos la solución teórica, por lo cual la solución numérica aproximada del problema discretizado para $h^* = 0.0006$ será considerada como la solución exacta de nuestro problema.

Los resultados de este ejemplo son presentados en la tabla 5.4, de los valores obtenidos en el EOC podemos distinguir una tendencia de orden de error cercano a $1/2$. Ilustramos de mejor manera dichos resultados en la figura 5.7.

En la Figura 5.8 se visualiza el control óptimo \bar{u}^h para $h = 0.0023$. En ella pode-

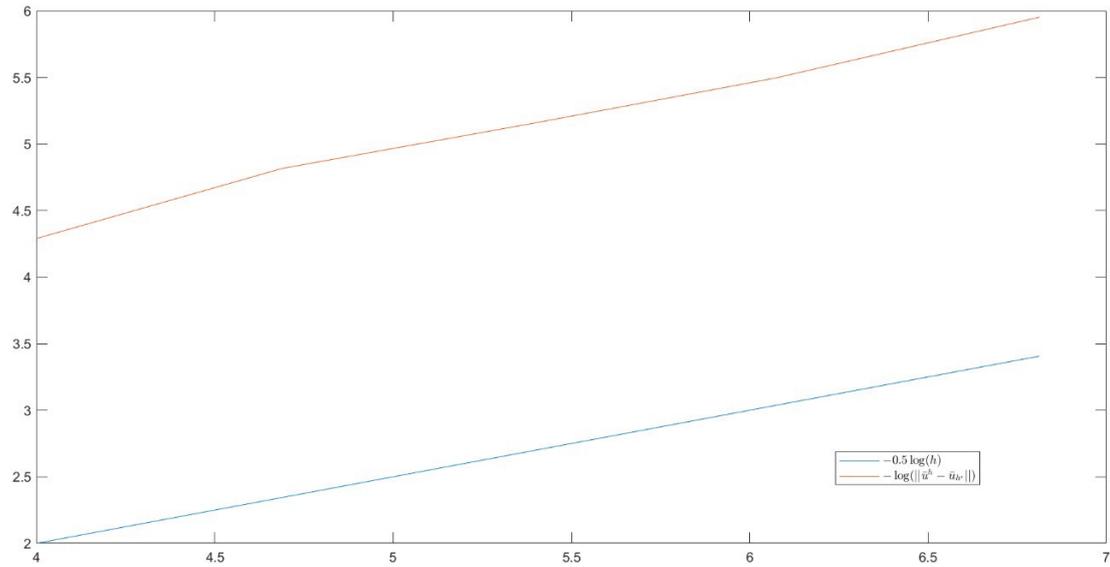


Figura 5.7: $-\log(h)$ versus $-\log(\|u^h - u_{h^*}\|)$ (línea roja) comparada con $-0.5 \log(h)$ (línea azul).

mos observar la presencia de la propiedad de dispersión en el control óptimo, esto debido a la elección de los valores de los parámetros α y β que a diferencia de los anteriores ejemplos estos no satisfacen ni (4.12) ni (4.15).

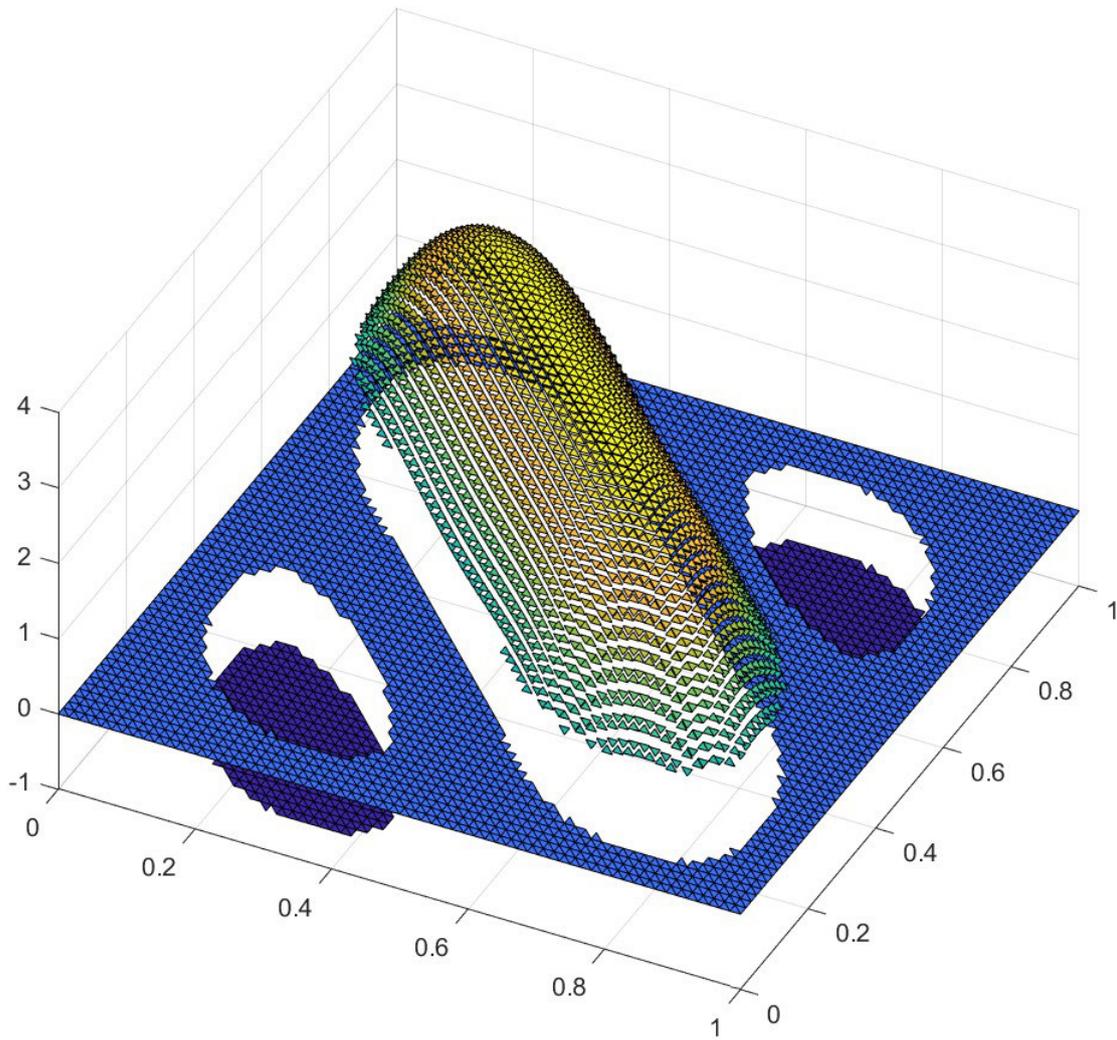


Figura 5.8: \bar{u}^h calculado con $h = 0.0023$.

Capítulo 6

Conclusiones y comentarios

1. Al haber aproximado numéricamente mediante el Método de elementos finitos el problema de control óptimo regularizado por el término de Huber, definido en (2.12), se dedujo que las estimaciones del error para el control óptimo es de orden lineal, específicamente la estimación está dado por

$$\|\bar{u} - \bar{u}_h\|_{L^2} \leq C (h + \delta_\gamma^{1/2} h), \quad (6.1)$$

donde C es una constante positiva independiente de h . Para obtener esta estimación fue necesario asumir que los parámetros de regularización α, β satisfacen la condición (4.12).

2. Del Corolario 4.4 se puede concluir que tanto el problema regularizado discreto como el problema regularizado tienen solución única, si los parámetros de regularización satisfacen la condición (4.12) o la condición (4.15). Más aún, la sucesión de las soluciones del problema discreto convergen hacia la única solución del problema regularizado.
3. De los experimentos numéricos realizados en el Capítulo 5, los tres primeros ejemplos verifican que bajo la condición (4.12) ó (4.15) se cumple que las estimaciones del error están acotadas al menos por un orden lineal, como lo expresado en (6.1), siendo esto el caso de los ejemplo que muestran un orden de error cuadrático que al estar acotado por un orden lineal no contradice nuestra estimación obtenida. Para tal comprobación, utilizamos el error experimental de convergencia EOC' definido en (5.5).
4. Para la resolución numérica de nuestro problema discretizado por el método de elementos finitos utilizamos un algoritmo de tipo Newton Semisuave, pa-

ra la formulación del algoritmo definimos un nuevo multiplicador dado por (5.1) lo cual nos permite escribir el sistema de optimalidad del problema en un sistema de optimalidad que contiene únicamente igualdades.

5. La elección de los parámetros de regularización en los tres primeros ejemplos se fundamentan en el cumplimiento de la condición (4.12) ó (4.15), los valores de estos parámetros hacen que el control óptimo no tenga la propiedad de dispersión. Sin embargo, para problemas de control óptimo cuyos parámetros de regularización no satisfacen dichas condiciones, los controles óptimos de estos problemas son dispersos, siendo este el caso del ejemplo 4, donde el control óptimo obtenido verifica la propiedad de dispersión. Es necesario recalcar que en este ejemplo el orden de error tiene una tendencia cercana al valor $1/2$, motivo por el cual en un futuro trabajo se pretende realizar un estudio de la estimación del error para problemas cuyos parámetros de regularización generen soluciones dispersas, con el objetivo de sustentar teóricamente los resultados del ejemplo 4.
6. Cualquiera de las dos condiciones (4.12) o (4.15) impuestas para los parámetros de regularización resultan ser en cierta medida restrictiva; como una extensión de este trabajo se pretende relajar dichas condiciones, para lo cual se considera un problema auxiliar asociado a $(\mathbf{P}_{C\gamma})$, dado por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{(y,u)} \frac{1}{2} \|y - y_d\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 - \beta \int_{\Omega} g u \, dx + \beta \delta_{\gamma} \|u\|_{L^1(\Omega)} \\ \text{subject to:} \\ u \in U_{ad} \quad \text{and} \quad \begin{array}{ll} Ay = u + f, & \text{in } \Omega, \\ y = 0, & \text{on } \Gamma, \end{array} \end{array} \right.$$

este problema tiene el mismo sistema de optimalidad del problema $(\mathbf{P}_{C\gamma})$, con $g = \bar{w}$ fijo, donde \bar{w} está definido por (2.18). De manera análoga consideramos el problema auxiliar asociado al problema discretizado, el cual está dado por

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{u \in U_h} \frac{1}{2} \|S_h u + y_f - y_d\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 - \beta(\hat{g}, u)_{L^2(\Omega)} + \beta \delta_{\gamma} \|u\|_{L^1(\Omega)} \\ \text{subject to:} \\ u \in U_{ad}^h, \end{array} \right.$$

el cual tiene las mismas condiciones de optimalidad que el problema discreto $(\mathbf{P}_{h,C\gamma})$, con $\hat{g} = \bar{w}_h$ fijo.

Tomando en cuenta que g y \hat{g} son funciones fijas en estos dos problemas auxiliares, podemos estudiar de mejor manera los términos que contienen la diferencia $\bar{w} - \bar{w}_h$, y bajo ciertas hipótesis impuestas sobre algunos conjuntos del dominio, se puede obtener una estimación de orden lineal que no depende de las condiciones (4.12) o (4.15).

7. Como una extensión de este proyecto de investigación se realizará una estimación de errores para un problema más general, el cual está dado de la siguiente forma

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{(y,u)} \frac{1}{2} \|y - y_d\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2} \|Cu\|_{L^2(\Omega)}^2 + \beta Y_{p,\gamma}(u) \\ \text{sujeto a:} \\ u \in U_{ad} \quad y \quad \begin{array}{ll} Ay = u + f, & \text{en } \Omega, \\ y = 0, & \text{sobre } \Gamma, \end{array} \end{array} \right. ,$$

donde C es un operador que va del espacio $H^1(\Omega)$ a $L^2(\Omega)$, un ejemplo de este operador es $C = \nabla$. Nótese además que el estudio realizado en este proyecto es un caso particular de este problema cuando se considera $C = I$.

Bibliografía

- [1] H. W. ALT, *Linear Functional Analysis An Application-Oriented Introduction*, Springer, Alemania, 2012.
- [2] R. BARTLE, *The elements of integration and Lebesgue Measure*, Wiley Classics Library, Estados Unidos, 1995.
- [3] A. BRAIDES, *Gamma-Convergence for Beginners*, Oxford University Press, July 2002.
- [4] H. BREZIS, *Functional analysis, sobolev spaces and partial differential equations*, Springer, Estados Unidos, 2010.
- [5] E. CASAS, R. HERZOG, AND G. WACHSMUTH, *Optimality conditions and error analysis of semilinear elliptic control problems with L^1 cost functional*, SIAM Journal on Optimization, 22 (2012), pp. 795–820.
- [6] E. CASAS AND K. KUNISCH, *Optimal control of semilinear elliptic equations in measure spaces*, SIAM Journal on Control and Optimization, 52 (2014), pp. 339–364.
- [7] E. CASAS AND F. TRÖLTZSCH, *Second-order and stability analysis for state-constrained elliptic optimal control problems with sparse controls*, SIAM J. Control Optim., 52 (2014), p. 1010–1033.
- [8] P. CIARLET, *The finite element method for elliptic problems*, North-Holland, Amsterdam, 1978.
- [9] F. CLARKE, *Functional Analysis, Calculus of Variations and Optimal Control*, Springer, Francia, 2013.
- [10] F. H. CLARKE, *Optimization and Nonsmooth Analysis*, John Wiley & Sons, Estados Unidos, 1983.

- [11] C. CLASON AND T. VALKONEN, *Introduction to nonsmooth analysis and optimization*, 2020.
- [12] J. C. DE LOS REYES, *Numerical PDE-Constrained Optimization*, Springer, Ecuador, 2015.
- [13] J. C. DE LOS REYES, P. MERINO, J. REHBERG, AND F. TRÖLTZSCH, *Optimality conditions for state-constrained PDE control problems with time-dependent controls*, *Control Cybernet*, 37 (2008), p. 5–38.
- [14] L. EVANS, *Partial Differential Equations*, AMS, Estados Unidos, 1998.
- [15] I. FONSECA AND G. LEONI, *Modern Methods in the Calculus of Variations: L_p Spaces*, Springer New York, 2006.
- [16] S. FOUCART AND H. RAUHUT, *A Mathematical Introduction to Compressive Sensing*, Springer New York, 2013.
- [17] P. GRISVARD, *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*, Pitman, Philadelphia, 1985.
- [18] M. HINTERMÜLLER, K. ITO, AND K. KUNISCH, *The primal-dual active set strategy as a semismooth newton method*, *SIAM Journal on Optimization*, 13 (2002), pp. 865–888.
- [19] M. HINTERMÜLLER AND T. WU, *Nonconvex TV^q -models in image restoration: Analysis and a trust-region regularization-based superlinearly convergent solver*, *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 6 (2013), pp. 1385–1415.
- [20] J.-B. HIRIART-URRUTY AND C. LEMARÉCHAL, *Fundamentals of Convex Analysis*, Springer Berlin Heidelberg, 2001.
- [21] K. ITO AND K. KUNISCH, *Optimal control with $L^p(\Omega)$, $p \in [0, 1)$, control cost*, *SIAM Journal on Control and Optimization*, 52 (2014), pp. 1251–1275.
- [22] P. MERINO, *Optimal Control Problems of Semilinear Partial Differential Equations with Finite-Dimensional Control Space*, PhD thesis, Escuela Politécnica Nacional, Ecuador, 2011.
- [23] P. MERINO, *A difference-of-convex functions approach for sparse PDE optimal control problems with nonconvex costs*, *Computational Optimization and Applications*, 74 (2019), pp. 225–258.

- [24] ———, *A semi smooth newton method for regularized L^q -quasinorm sparse optimal control problems*, 2019.
- [25] J. NOCEDAL AND S. J. WRIGHT, *Numerical Optimization*, Springer, New York, 1999.
- [26] R. RAMLAU AND C. ZARZER, *On the minimization of a tikhonov functional with a non-convex sparsity constraint*, ETNA. Electronic Transactions on Numerical Analysis, 39 (2012), pp. 476–507.
- [27] R. RANNACHER AND B. VEXLER, *A priori error estimates for the finite element discretization of elliptic parameter identification problems with pointwise measurements*, SIAM J. Control Optim., 44 (2005), pp. 1844 –1863.
- [28] G. STADLER, *Elliptic optimal control problems with L^1 -control cost and applications for the placement of control devices*, Computational Optimization and Applications, 44 (2007), pp. 159–181.
- [29] F. TRÖLTZSCH, *Optimal Control of Partial Differential Equations Theory, Methods and Applications*, AMS, Estados Unidos, 2010.
- [30] D. WACHSMUTH, *Iterative hard-thresholding applied to optimal control problems with $L^0(\Omega)$ control cost*, SIAM Journal on Control and Optimization, 57 (2019), pp. 854–879.
- [31] G. WACHSMUTH AND D. WACHSMUTH, *Convergence and regularization results for optimal control problems with sparsity functional*, ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations, 17 (2010), pp. 858–886.