ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS

COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO EN VARIABLE ESPACIAL DE LA SOLUCIÓN DE UNA PERTURBACIÓN NO LOCAL DE LA ECUACIÓN DE BENJAMIN-ONO

TRABAJO DE TITULACIÓN PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE INGENIERO MATEMÁTICO

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

DAVID SALOMÓN HEREDIA GUZMÁN

david.heredia@epn.edu.ec

DIRECTOR: MANUEL FERNANDO CORTEZ ESTRELLA

manuel.cortez@epn.edu.ec

CODIRECTOR: MIGUEL ÁNGEL YANGARI SOSA

miguel.yangari@epn.edu.ec

Quito, agosto 2021

DECLARACIÓN

Yo DAVID SALOMÓN HEREDIA GUZMÁN, declaro bajo juramento que el trabajo aquí escrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

A través de la presente declaración cedo mis derechos de propiedad intelectual, correspondientes a este trabajo, a la Escuela Politécnica Nacional, según lo establecido por la Ley de Propiedad Intelectual, por su reglamento y por la normatividad institucional vigente.

David Salomón Heredia Guzmán

CERTIFICACIÓN

Certificamos que el presente trabajo fue desarrollado por DAVID SALOMÓN HEREDIA GUZMÁN, bajo nuestra supervisión.

Dr. Manuel Fernando Cortez Estrella

DIRECTOR

Dr. Miguel Ángel Yangari Sosa

CODIRECTOR

AGRADECIMIENTOS

A mi madre, por su inmenso cariño, apoyo constante y sacrificio. Por ser una persona increible y guiarme. A mis hermanos Pablo, María Belén y Esteban, por estar siempre a mi lado (a veces no literalmente), motivarme y auxiliarme cuando lo necesitaba.

Agradezco profundamente a los profesores que dedicaron gran parte de su tiempo y esfuerzos en el desarrollo de este proyecto: Oscar Jarrín y de manera especial a Fernando Cortez, por haber sido un mentor extraordinario.

A aquellos profesionales inspiradores: los profesores Paúl Acevedo y Miguel Yangari, quien además apoyó la realización de este trabajo.

A esas personas especiales: David, Juan Fernando, Alejandro, Alejandra y mis primas Mayra y Verónica, cuya compañía hizo de esta travesía, una memoria preciada. A Redolento también, aunque no me haya incluido en sus agradecimientos.

DEDICATORIA

A mi madre, quien pedía con insistencia los borradores de este trabajo.

Índice general

Resumen

El trabajo de titulación comprende un estudio sobre el problema de valor inicial de una perturbación no local de la ecuación de Benjamin-Ono, que se expresa bajo la siguiente forma:

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + \mathcal{H}\partial_x^2 u(t,x) + u(t,x)\partial_x u(t,x) + \eta\mathcal{H}(\partial_x u(t,x) + \partial_x^3 u(t,x)) = 0, & (t,x) \in (0,T] \times \mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x), \qquad x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

donde $\eta > 0$, $T > 0$. En lineas generales, se estudia la existencia, unicidad y regularidad de las soluciones *mild* en el encuadre de los espacios de Sobolev no homogéneos de orden no negativo y el aporte más notable de este trabajo radica en el *estudio de persistencia* del decrecimiento puntual en variable espacial de las soluciones *mild*.

La prueba de existencia y unicidad tiene su base en el teorema de punto fijo de Picard y el estudio de regularidad aprovecha la estructura de las soluciones *mild*. Mientras que el análisis de las propiedades de persistencia sigue ideas antes vistas en Cortez y Jarrín (2020).

Notaciones

Notaciones generales

$\mathbb{R}$	Conjunto de los números reales.
$\mathbb{C}$	Conjunto de los números complejos.
$\mathbb{R}^n$	Espacio euclídeo n-dimensional.
$\mathbb{R}^+$	Conjunto de los números reales no negativos.
$\mathbb{N}$	Conjunto de los números naturales.
$\mathbb{N}^n$	Conjunto de multi-índices.
$x \cdot y$	$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, para $x, y \in \mathbb{R}^n$.
$\lvert x \rvert$	$\left(\sum_{i=1}^{n} \lvert x_i \rvert \right)^{\frac{1}{2}}$, para $x \in \mathbb{R}^n$.
$\lvert \alpha \rvert$	$\sum_{i=1}^{n} \lvert \alpha_i \rvert$, para $\alpha \in \mathbb{N}^n$ un multi-índice.
x^α	$\prod_{i=1} x_i^{\alpha_i}$, para $x \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{N}^n$ un multi-índice.
$\partial_j^m f$	m-ésima derivada parcial de $f(x_1, \ldots, x_n)$ con respecto a la variable x_k.
$\partial^\alpha f$	$\partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_n^{\alpha_n} f$, para $\alpha \in \mathbb{N}^n$ un multi-índice.
$\partial_t f$	Derivada parcial con respecto al tiempo t de $f(t, x)$.
$\partial_x f$, $\partial_x^2 f$, $\partial_x^3 f$	Derivadas parciales con respecto a x de $f(t, x)$.
$\frac{d}{dt} f$	Derivada total de $f(t)$.
c.t.p	Casi todo punto.

Espacios Funcionales

Sean E, F dos espacios de Banach y $0 < T \leqslant +\infty$

$\mathscr{C}^k(\mathbb{R}^n)$	Espacio de funciones f con $\partial^\alpha f$ continuo para todo multiíndice $\vert\alpha\vert \leqslant k$.
$\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$	$\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \mathscr{C}^k(\mathbb{R}^n)$.
$\mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$	Espacio de funciones $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ a soporte compacto (funciones test).
$\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$	El dual de $\mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ (espacio de distribuciones).
$L^1_{loc}(U)$	Espacio de funciones $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ localmente integrables.
$B_E(x_0, r)$	Bola de centro $x_0 \in E$ y radio $r > 0$ en E.
E'	Espacio dual topológico de E.
$\mathscr{L}(E)$	Espacio de operadores lineales y continuos de E en si mismo.
$\mathscr{L}(E, F)$	Espacio de operadores lineales y continuos de E en F.
$\mathscr{B}(E \times E, F)$	Espacio de formas bilineales y continuas de $E \times E$ en F.
$\mathscr{C}([0, T]; E)$	Espacio de funciones $u : [0, T] \to E$ continuas.
$\mathscr{C}^1([0, T]; E)$	Espacio de funciones $u : [0, T] \to E$ continuamente diferenciables.
$L^\infty([0, T]; E)$	Espacio de funciones $u : [0, T] \to E$ tales que $\sup_{0\leqslant t\leqslant T} \vert\vert u(t)\vert\vert_E < +\infty$.
$L^2(\mathbb{R}, \vert\cdot\vert^r\, dx)$	Espacio de funciones medibles tales que $\int_{\mathbb{R}} \vert x\vert^r \vert f(x)\vert^2\, dx < +\infty$.

Introducción

El presente trabajo de titulación comprende, en líneas generales, un estudio matemático riguroso sobre el *problema de valor inicial para una perturbación no local de la ecuación de Benjamin-Ono*:

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + \mathcal{H}\partial_x^2 u(t,x) + u(t,x)\partial_x u(t,x) + \eta\mathcal{H}(\partial_x u(t,x) + \partial_x^3 u(t,x)) = 0, & (t,x) \in (0,T] \times \mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x), \qquad x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{npBO}$$

donde η es un parámetro estríctamente positivo, $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ el dato inicial del problema, $u : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ su solución y $\mathcal{H}$ la transformada de Hilbert, definida bajo la forma

$$\mathcal{H}f(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x-y| \geqslant 0} \frac{f(y)}{y-x} dy,$$

para $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, la clase de Schwartz.

En este estudio, abordaremos el buen planteamiento del problema desde la perspectiva de las soluciones *mild* en el marco de los *espacios de Sobolev no homogéneos de orden no negativo* y el decrecimiento puntual, así como el comportamiento asintótico en la variable espacial de las soluciones.

La ecuación (npBO) es una de las tantas variantes de la bien conocida ecuación de Benjamin-Ono, descrita como

$$\partial_t u(t,x) + \mathcal{H}\partial_x^2 u(t,x) + u(t,x)\partial_x u(t,x) = 0, \qquad (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \tag{B-O}$$

y deducida por Thomas Brooke Benjamin y Hiroaki Ono (remítase a Benjamin (1967) y Ono (1975)). Ambas ecuaciones surgen de un interés íntimamente relacionado con la explicación de fenómenos físicos pertenecientes a la mecánica de fluidos. Así pues, la ecuación (npBO), objeto de estudio de este trabajo, acopla relativamente bien la descripción de fenónemos como: ondas largas unidireccionales en un sistema de dos capas de fluidos no viscosos incompresibles (ver Cortez y Jarrín (2020)) y turbulencias de plasma (véase Qian et al. (1989)). Como se puede entrever, el estudio de esta ecuación se convierte en una labor no solo valiosa dentro del campo de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales y el análisis funcional, sino también para finalidades prácticas relacionadas con el comportamiento de los procesos físicos. Nuestro estudio estará direccionado hacia la rama teórica de esta ecuación.

La estructura de este trabajo encierra cuatro capítulos. En el primero, realizamos un compendio de las herramientas teóricas necesarias para abordar el problema (npBO). Como punto de partida, se revisan nociones teóricas relativas a los espacios de Lebesgue. En un segundo momento, se pasá revista por la definición y las propiedades de la transformada de Fourier en la clase de Schwartz y en el espacio de las distribuciones temperadas. Como parte de esta revisión, se repara en los espacios de Sobolev homogéneos y no homogéneos. Por último, se identifican dos herramientas útiles en la solución de problemas que involucren ecuaciones diferenciales en derivadas parciales no lineales: las desigualdades de Sobolev y las Leyes de producto.

En el segundo capitulo partimos con un análisis progresivo de la transformada de Hilbert que sirva de base para justificar su buena definición en la clase de Schwartz. Posteriormente presentamos una definición alternativa de la misma en términos de la distribución temperada *valor principal de Cauchy*, con el fin de conseguir, entre otras cosas, una fórmula que exprese la acción de la transformada de Fourier sobre este operador. Finalmente, en este capítulo mostramos algunas propiedades de la transformada de

Hilbert, incluyendo su extensión continua sobre los espacios de Sobolev no homogéneos y los espacios de Lebesgue.

El capítulo tercero contempla el estudio del buen planteamiento tanto local como global del problema (npBO). En un primer análisis, encontramos la solución de su *problema lineal asociado* en términos de la transformada de Fourier; solución que desempeña un papel importante en la discusión de estos dos últimos capítulos y que está intrínsecamente ligada a la noción de solución *mild* del problema (npBO). En virtud de probar la existencia de este género de soluciones para un tiempo finito en el marco de los espacios de Sobolev no homogéneos de orden no negativo, usamos el teorema de punto fijo de Picard. Al cierre de este capítulo, se encuentra que el tiempo de solución se puede extender indefinidamente.

En el cuarto capítulo se exponen los resultados más significativos del trabajo, resumidos en tres hallazgos. Primero, demostramos la *persistencia* del decaimiento en variable espacial de las soluciones del problema (npBO), esto es, probamos que si el dato inicial u_0 posee un decaimiento de la forma $\dfrac{1}{1+|x|^{\beta}}$, con $1 < \beta \leqslant 2$, la solución preserva este decrecimiento en variable espacial. Segundo, estudiamos el comportamiento asintótico en variable de espacio de las soluciones del problema (npBO), el cual nos provee de información importante sobre cómo se comporta la solución $u(t,x)$ cuando $|x|$ es suficientemente grande. Tercero, dicha información da paso a la formulación de la condición sobre el dato inicial: $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} u_0(x)\,dx \neq 0$, que asegura la optimalidad de decrecimiento en $\beta = 2$.

Al término de esta obra, se presenta un cuadro general sobre las conclusiones, las mejoras en los métodos dedicados al análisis de persistencia y los problemas que se dejan abiertos para nuevas investigaciones.

Capítulo 1

Herramientas de base

Este primer capítulo tiene por objeto hacer una breve revisión de los espacios funcionales y de las herramientas teóricas necesarias que utilizaremos a lo largo del presente trabajo de titulación. Empezaremos por los *espacios de Lebesgue*.

1. Espacios de Lebesgue

Introduciremos a los espacios de Lebesgue, los cuales se caracterizan por medir la integrabilidad de funciones, y repasaremos algunos resultados clásicos que los involucran. El lector interesado puede profundizar sus conocimientos sobre la teoría de estos espacios en la página 89 de Brezis (2011).

Definición 1.1 (Espacio de Lebesgue)**.** *Sea* $1 \leqslant p \leqslant +\infty$*. El espacio de Lebesgue* $L^p(\mathbb{R}^n)$ *se define como*

$$L^p(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \mid f \text{ es medible y } ||f||_{L^p} < +\infty\},$$

donde

$$||f||_{L^p} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, \qquad \text{si } 1 \leqslant p < +\infty,$$

y si $p = +\infty$*:*

$$||f||_{L^\infty} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} ess |f(x)| = \inf\{C \geqslant 0 \mid |f(x)| \leqslant C \text{ c.t.p. } x \in \mathbb{R}^n\}.$$

Teorema 1.1 (Desigualdad de Hölder). *Supongamos que* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *y* $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, $1 \leqslant p, q \leqslant +\infty$. *Entonces* $fg \in L^r(\mathbb{R}^n)$, *con* r *tal que* $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$. *Además*

$$||fg||_{L^r} \leqslant ||f||_{L^p} \, ||g||_{L^q} \, .$$

Corolario 1.1 (Desigualdad de interpolación). *Supongamos que* $f \in L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)$, $1 \leqslant p, q \leqslant +\infty$. *Entonces* $f \in L^r(\mathbb{R}^n)$ *para todo* $p \leqslant r \leqslant q$, *y se cumple la siguiente* desigualdad de interpolación*:*

$$||f||_{L^r} \leqslant ||f||_p^{\theta} \, ||f||_q^{1-\theta} \, ,$$

donde $\theta \in [0,1]$ *es tal que* $\dfrac{1}{r} = \dfrac{\theta}{p} + \dfrac{1-\theta}{q}$.

Existe otra desigualdad de interpolación para los espacios de Lebesgue, en la que intervienen operadores lineales y continuos, conocida como desigualdad de interpolación de Riesz-Thorin. Una versión más general de este resultado para funciones simples se encuentra en el Teorema 1.3.4, página 34, de Grafakos (2008).

Teorema 1.2. *Sean* $1 \leqslant p_0, p_1, q_0, q_1 \leqslant \infty$ *y* $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ *tales que*

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} \quad y \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

Sea además L *una función lineal y continua de* $L^{p_0}(\mathbb{R}^n)$ *en* $L^{q_0}(\mathbb{R}^n)$ *y de* $L^{p_1}(\mathbb{R}^n)$ *en* $L^{q_1}(\mathbb{R}^n)$, *que satisface*

$$||L(f)||_{L^{q_0}} \leqslant M_0 \, ||f||_{L^{p_0}} \, , \qquad \text{para todo } f \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n),$$

$$||L(g)||_{L^{q_1}} \leqslant M_1 \, ||g||_{L^{p_1}} \, , \qquad \text{para todo } g \in L^{p_1}(\mathbb{R}^n),$$

donde $M_0, M_1 \geqslant 0$ *son constantes. Entonces* L *también es una función lineal y continua de* $L^p(\mathbb{R}^n)$ *en* $L^q(\mathbb{R}^n)$, *y se cumple que*

$$||L(h)||_{L^q} \leqslant M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \, ||h||_{L^p} \qquad \text{para todo } h \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

Entre las propiedades de estructura de estos espacios que podemos mencionar, se sabe que el espacio $(L^p(\mathbb{R}^n), ||\cdot||_{L^p})$ es un espacio de Banach para todo $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, y que $L^2(\mathbb{R}^n)$ es un espacio de Hilbert con el producto escalar

$$(f,g)_{L^2} = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}\, dx, \qquad f,g \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Por otro lado, para $1 \leqslant p < +\infty$, se tiene que el espacio dual de $L^p(\mathbb{R}^n)$ es $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$, donde p' es tal que $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$ y que el espacio $\mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Recordemos la definición de la operación *convolución*, que transforma dos funciones en una tercera función y la cual posee una propiedad fundamental en los espacios de Lebesgue.

Definición 1.2. *Dadas dos funciones $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ y $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, definimos la convolución de f y g, denotada por $f * g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, como:*

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\, dy, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Teorema 1.3 (Desigualdad de Young). *Supongamos que $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, con $1 \leqslant p,q \leqslant +\infty$. Entonces $f*g \in L^r(\mathbb{R}^n)$, donde r es tal que $1+\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}$. Además*

$$||f * g||_{L^r} \leqslant ||f||_{L^p}\, ||g||_{L^q}\, .$$

Su demostración se localiza en la página 104 de Brezis (2011).

2. La transformada de Fourier en la clase de Schwartz

La transformada de Fourier es una herramienta potente al momento de tratar problemas que involucren ecuaciones diferenciales definidas sobre todo el espacio $\mathbb{R}^n$. En los espacios de Lebesgue, el espacio natural para utilizar este operador es $L^1(\mathbb{R}^n)$, sin embargo, dado que la transformada de Fourier adquiere propiedades importantes en la *clase de Schwartz*, definirla sobre este espacio funcional resulta ser mucho más útil.

A breves rasgos, una función pertenece a la clase de Schwartz si es una función suave la cual, junto con todas sus derivadas, decrece más rápido que el inverso de cualquier polinomio (véase Grafakos (2008), página 95). Más precisamente, la clase de Schwartz se define a de la siguiente manera:

Definición 1.3 (Clase de Schwartz)**.** *Una función $\varphi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ pertenece a la clase de Schwartz, denotada por $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, si para cualquier par de multi-índces α y β, existe una constante $C_{\alpha,\beta,\varphi} > 0$ tal que*

$$\rho_{\alpha,\beta}(\varphi) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left| x^\alpha \partial^\beta \varphi(x) \right| = C_{\alpha,\beta,\varphi} < +\infty. \tag{1.1}$$

Los operadores $\rho_{\alpha,\beta}$ son seminormas dichas seminormas de Schwartz*.*

El requisito (1.1) caracteriza una de las propiedades fundamentales de la clase de Schwartz, la cual indica que las funciones $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ decrecen más rápido que el inverso de cualquier polinomio.

Ejemplo 1.1.

- *Un ejemplo clásico de una función que pertenece a clase de Schwartz es la gaussiana: $e^{-|x|^2}$. Es conocido que esta función pertenece a $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ y, dado que su decrecimiento es exponencial, decrece más rápido que el inverso de cualquier polinomio. Más específicamente, haciendo uso de la expansión en Series de Taylor en el punto cero se puede probar que*

$$e^{-|x|^2} \leqslant \left(\sum_{k=0}^{m} \frac{|x|^{2k}}{k!} \right)^{-1},$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y para cualquier $m \in \mathbb{N}$.

- *La función* $e^{-|x|}$ *posee un decrecimiento exponencial pero falla en ser diferenciable en el origen, por tanto no pertenece a* $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.
- *La función* $\left(1+|x|^{1000}\right)^{-1}$ *pertenece a* $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ *pero no decrece más rápido que cualquier inverso de polinomio.*
- *Cualquier función en* $\mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ *decrece arbitrariamente ya que se anula fuera de un conjunto compacto. Entonces se tiene la contenencia* $\mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, *la cual es estricta (ver el primer ejemplo).*

La siguiente caracterización es muy útil para determinar si una función pertenece a la clase de Schwartz y evidencia el carácter de decrecimiento de estas funciones.

Proposición 1.1. *Una función* $\varphi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ *pertenece a la clase de Schwartz si y sólo si para cualquier multi-índice* α *y para cualquier* $N \in \mathbb{N}$ *existe una constante* $c_{\alpha,N,\varphi} > 0$ *tal que*

$$|\partial^\alpha \varphi(x)| \leqslant \frac{c_{\alpha,N,\varphi}}{(1+|x|)^N}, \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n.$$

Como consecuencia de esta caracterización se puede probar el siguiente resultado, que explica la relación entre los espacios de Lebesgue y la clase de Schwartz.

Proposición 1.2.

1. $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \subseteq L^p(\mathbb{R}^n)$ *para todo* $1 \leqslant p \leqslant +\infty$.
2. $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ *es denso en* $L^p(\mathbb{R}^n)$ *para todo* $1 \leqslant p < +\infty$, *pero no es denso en* $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Por otro lado, veamos que para dos funciones $\varphi, \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, la convolución $\varphi * \psi$ está bien definida para todo $x \in \mathbb{R}^n$, pues

$$|(\varphi * \psi)(x)| \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x-y)|\,|\psi(y)|\,dy \leqslant ||\varphi||_{L^\infty}\,||\psi||_{L^1} < +\infty.$$

Más aún, $\varphi * \psi$ se mantiene en la clase de Schwartz y posee una propiedad importante con respecto a sus derivadas.

Proposición 1.3. *Sean $\varphi, \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Entonces $\varphi\psi$ y $\varphi * \psi$ pertenecen a $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Además*

$$\partial^\alpha(\varphi * \psi) = \partial^\alpha \varphi * \psi = \varphi * \partial^\alpha \psi$$

para todo multi-índice α.

Una vez introducida la clase de Schwartz, podemos definir la transformada de Fourier en el marco de este espacio funcional y revisar sus propiedades.

Definición 1.4. *Dada una función $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, definimos*

$$\hat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{-ix\cdot\xi}\, dx, \quad \text{para todo } \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{1.2}$$

Llamamos a $\hat{\varphi}$ como la transformada de Fourier de φ

Definimos además la *transformada de Fourier inversa.*

Definición 1.5. *Dada una función $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, definimos*

$$\varphi^\vee(x) = (2\pi)^{-n}\hat{\varphi}(-x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\xi) e^{ix\cdot\xi}\, d\xi, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.3}$$

Llamamos a $\varphi^\vee$ como la transformada de Fourier inversa de φ.

Notación. *Dada una función $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, notaremos a la* reflexión de φ *como $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(-x)$. De esta manera, para la transformada de Fourier inversa de φ en (1.3), tenemos la identidad $\varphi^\vee = (2\pi)^{-n}\tilde{\hat{\varphi}}$.*

Observación 1.1. *Notemos que es suficiente suponer que $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ para que las expresiones (1.2) y (1.3) estén bien definidas pues*

$$|\hat{\varphi}(\xi)| \leqslant ||\varphi||_{L^1}, \qquad |\varphi^\vee(\xi)| \leqslant (2\pi)^{-n}\, ||\varphi||_{L^1}, \qquad \text{para todo } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Presentamos a continuación algunas de las propiedades de la transformada de Fourier, las cuales utilizaremos recurrentemente. Se puede encontrar un estudio más en detalle sobre este operador en la página 158 de Hörmander (1990) y en la página 98 de Grafakos (2008).

Proposición 1.4 (Propiedades)**.** *Dados* $\varphi, \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$*,* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$*,* $\xi \in \mathbb{R}^n$ *y* α *un multi-índice, se tiene:*

1. *La transformada de Fourier y la transformada de Fourier inversa son operadores lineales.*
2. $\hat{\tilde{\varphi}} = \tilde{\hat{\varphi}}$.
3. $\widehat{\overline{\varphi}} = \overline{\widetilde{\widehat{\varphi}}}$.
4. $(\partial^\alpha \varphi)^\wedge(\xi) = (i\xi)^\alpha \hat{\varphi}(\xi)$.
5. $\partial^\alpha \hat{\varphi}(\xi) = ((-ix)^\alpha \varphi)^\wedge(\xi)$.
6. $\widehat{\varphi * \psi} = \hat{\varphi}\,\hat{\psi}$.
7. $\hat{f}, f^\vee \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^n)$.
8. ***(Isomorfismo en la clase de Schwartz)*** $\hat{\varphi}, \varphi^\vee \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.
9. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\hat{\psi}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(x)\psi(x)\,dx$.
10. ***(Inversión de Fourier)*** $(\varphi^\wedge)^\vee = \varphi = (\varphi^\vee)^\wedge$.
11. ***(Relación de Parseval)*** $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\overline{\psi}(x)\,dx = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(\xi)\overline{\hat{\psi}(\xi)}\,d\xi$.
12. ***(Identidad de Plancherel)*** $||\varphi||_{L^2} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}||\hat{\varphi}||_{L^2} = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\,||\varphi^\vee||_{L^2}$.
13. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\psi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(x)\psi^\vee(x)\,dx$.
14. $\widehat{\varphi\,\psi} = (2\pi)^{-n}\widehat{\varphi} * \widehat{\psi}$.

Observación 1.2. *1. Uno de los principales usos de la transformada de Fourier en el estudio de ecuaciones diferenciales, es el de transformar derivadas en polinomios (propiedad 4) y convoluciones en multiplicaciones (propiedad 6), convirtiendo así un problema en ecuaciones diferenciales en un problema de tipo algebráico, que permite un mejor manejo del problema para encontrar su solución.*

2. *La* inversión de Fourier *(propiedad 10) muestra que efectivamente la transformada de Fourier inversa es el operador inverso de la transformada de Fourier. Además, la propiedad 8 establece que la función $\varphi \mapsto \hat{\varphi}$ define un isomorfismo de la clase de Schwartz en si misma.*

3. La transformada de Fourier en el espacio de las distribuciones temperadas

En la página 115 de Narici y Beckenstein (2010) se explica la manera de construir un espacio vectorial topológico localmente convexo metrizable a partir de un espacio vectorial y una familia de seminormas numerable. En particular, si a la clase de Schwartz le dotamos de la topología τ generada por la familia de seminormas $\{\rho_{\alpha,\beta} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n\}$ (definidas en (1.1)), obtendremos un espacio topológico que posee las características mencionadas. Más aún, se puede probar que $(\mathscr{S}(\mathbb{R}^n), \tau)$ es completo, a este tipo de espacios se los conoce como espacios de *Fréchet*.

Definición 1.6. *Definimos al* espacio de las distribuciones temperadas $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ *como el espacio dual topológico de la clase de Schwartz.*

Denotaremos a la acción de una distribución temperada $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ sobre una función $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ por el producto en dualidad $\langle T, \varphi \rangle$.

Observación 1.3. *La contenencia $\mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ implica la contenencia inversa de sus duales $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$.*

Comenzamos esta revisión sobre las distribuciones temperadas presentando una caracterizacíon muy útil para determinar si una aplicación $T\colon \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ pertenece a $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Proposición 1.5. *Una aplicación* $T\colon \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ *pertenece a* $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ *si y sólo si es lineal y si existen* $m, n \in \mathbb{N}$ *tales que*

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leqslant \sum_{\substack{|\alpha| \leqslant m \\ |\beta| \leqslant n}} \rho_{\alpha,\beta}(\varphi), \qquad \textit{para todo } \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n).$$

Ejemplo 1.2.

- *Dado* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, f *se puede ver como una distribución temperada mediante el producto en dualidad* $\langle f, \varphi \rangle = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\,dx$ *para todo* $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.
- *Una función* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ *que satisface* $|f(x)| \leqslant c\,(1 + |x|)^s$ *para todo* $x \in \mathbb{R}^n$, *donde* $c > 0$ *y* $s \in \mathbb{R}$ *son constantes, también define una distribución temperada a partir del producto en dualidad* $\langle f, \varphi \rangle = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\,dx$.
- *Dado* $x_0 \in \mathbb{R}^n$, *definimos la masa de Dirac en* x_0 *por medio de producto en dualidad* $\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \varphi(x_0)$ *para todo* $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, *la cual es una distribución temperada.*

Veamos ahora que es posible definir una noción de diferenciabilidad para cualquier distribución temperada.

Definición 1.7 (Derivación en el sentido de las distribuciones)**.** *Dados* T *una distribución temperada y* α *un multi-índice, llamamos derivada de orden* α *de* T *a la distribución temperada*

$$\begin{aligned} \partial^\alpha T : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) &\to \mathbb{C} \\ \varphi &\mapsto \langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.3. *Dado* α *un multi-índice, la derivada de orden* α *de* δ_0 *está determinada por el producto en dualidad*

$$\langle \partial_\alpha \delta_0, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle \delta_0, \partial^\alpha \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \varphi(0).$$

Por otro lado, podemos definir la multiplicación y la convolución de una distribución temperada con ciertos tipo de funciones.

Definición 1.8 (Producto entre una distribución temperada y una función)**.** *Dados* $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ *y* $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ *que satisface*

$$|f(x)| \leqslant c(1+|x|)^N, \qquad \textit{para todo } x \in \mathbb{R}^n,$$

para algún $N \in \mathbb{N}$ *y algún* $c \geqslant 0$*. La multiplicación entre la distribución temperada* T *y* f *está definido por*

$$\langle Tf, \varphi \rangle = \langle T, f\varphi \rangle, \qquad \textit{para todo } \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n),$$

y es una distribución temperada.

Definición 1.9 (Convolución entre una distribución temperada y una función)**.** *Sean* $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ *y* $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$*. La convolución entre* T *y* f *está definida por*

$$\langle T * \varphi, \psi \rangle = \langle T, \tilde{\varphi} * \psi \rangle, \qquad \textit{para todo } \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n),$$

y es una distribución temperada.

Observación 1.4.

1. *Las condiciones de regularidad y de máximo crecimiento posible impuestas sobre* f *en la Definición 1.8 aseguran que* $f\varphi$ *pertenezca a la clase de Schwartz para todo* $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$*. En particular cualquier función* $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ *cumple con este requisito.*
2. *Para la convolución (Definición 1.9) necesitamos una condición más fuerte impuesta sobre* φ*. En este caso consideramos* $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ *para asegurar que* $\tilde{\varphi} * \psi$ *pertenezca a la clase de Schwartz para todo* $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$*.*

Definimos ahora la transformada de Fourier y su transformada inversa en el marco de las distribuciones temperadas y revisaremos sus propiedades.

Definición 1.10. *Dado $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, la transformada de Fourier y la transformada de Fourier inversa de T, denotadas por $\hat{T}$ y $T^\vee$ respectivamente, se definen por:*

$$\langle \hat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \hat{\varphi} \rangle,$$

$$\langle T^\vee, \varphi \rangle = \langle T, \varphi^\vee \rangle,$$

para todo $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Ejemplo 1.4. *Calculemos la transformada de Fourier de δ_0, la masa de dirac en $0 \in \mathbb{R}^n$, definida en Ejemplo 1.2. Sea $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, se tiene*

$$\langle \hat{\delta}_0, \varphi \rangle = \langle \delta_0, \hat{\varphi} \rangle = \hat{\varphi}(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, dx = \langle 1, \varphi \rangle.$$

Por tanto, se tiene $\hat{\delta}_0 = 1$ en el sentido de las distribuciones temperadas.

Ejemplo 1.5. *Dado un multi-índice α, podemos calcular la transformada de Fourier de la función $x \to x^\alpha$ en el sentido de las distribuciones temperadas. Sea $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, se tiene*

$$\langle (x^\alpha)^\wedge, \varphi \rangle = \langle x^\alpha, \hat{\varphi} \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha \hat{\varphi}(x)\, dx = \frac{1}{i^{|\alpha|}} \int_{\mathbb{R}^n} (\partial^\alpha \varphi)^\wedge(x)\, dx = \frac{(2\pi)^n}{i^{|\alpha|}} \left((\partial^\alpha \varphi)^\wedge \right)^\vee (0) = \frac{(2\pi)^n}{i^{|\alpha|}} \partial^\alpha \varphi(0). \tag{1.4}$$

Luego, del Ejemplo 1.3 se sigue que

$$\langle (x^\alpha)^\wedge, \varphi \rangle = (2\pi)^n \langle i^{|\alpha|} \partial^\alpha \delta_0, \varphi \rangle.$$

Es decir que $(x^\alpha)^\wedge = (2\pi)^n\, i^{|\alpha|} \partial^\alpha \delta_0$ en el sentido de las distribuciones temperadas.

Proposición 1.6 (Propiedades)**.** *Sean $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ y α un multi-índice. Se tiene:*

1. ***(Biyección en el espacio de las distribuciones temperadas)*** $T^\wedge, T^\vee \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

2. ***(Inversión de Fourier)*** $(T^\wedge)^\vee = T = (T^\vee)^\wedge$.

3. $(\partial^\alpha T)^\wedge = (i\xi)^\alpha \hat{T}$.

4. $\partial^\alpha \hat{T} = ((-i\xi)^\alpha T)^\wedge$.

5. $\widehat{T * \varphi} = \hat{T}\hat{\varphi}$.

6. $\widehat{T\varphi} = (2\pi)^{-n}\hat{T} * \hat{\varphi}$.

4. Espacios de Sobolev

Los *espacios de Sobolev* son una herramienta elemental dentro del estudio de las ecuaciones diferenciales parciales. Su importancia radica en la posibilidad de estudiar la *regularidad* de una distribución temperada mediante el decrecimiento de su transformada de Fourier, medido por la norma en los espacios $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < +\infty$. Utilizaremos solamente el espacio $L^2(\mathbb{R}^n)$ por las necesidades de nuestro posterior estudio. Todas las demostraciones omitidas se ubican en la página 25 de Bahouri et al. (2011) y en el Capítulo 3 de Loachamín (2020), mientras que estudios más generales sobre los espacios de Sobolev se pueden encontrar en la página 56 de Haroske (2008) y la página 12 de Grafakos (2009).

4.1. Espacios de Sobolev no homogéneos Empezaremos por definir los espacios de Sobolev *no homogéneos*. Precisaremos a lo que se entiende por homogeneidad cuando definamos los espacios de Sobolev homogéneos en la Sección 4.2.

Definición 1.11. *Sea $s \in \mathbb{R}$, el espacio de Sobolev no homogéneo de orden s, denotado por $H^s(\mathbb{R}^n)$, está definido de la siguiente manera*

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \{u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \mid ||u||_{H^s} < +\infty\},$$

donde $||\cdot||_{H^s}$ *denota la norma de* $H^s(\mathbb{R}^n)$*, dada por:*

$$||u||_{H^s} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s \, |\hat{u}(\xi)|^2 \, d\xi\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad u \in H^s(\mathbb{R}^n).$$

Observación 1.5.

1. *Dado* $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$*, el orden* s *determina el decrecimiento (o crecimiento) de la transformada de Fourier de* u*, que a su vez se relaciona con su regularidad.*
2. *Es importante enfatizar que no existen restriciones sobre* s *en la Definición 1.11, de modo que no es necesario que este sea un número entero, o positivo.*

Mientras más grande sea el valor de s, los elementos $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ poseen una mayor regularidad, en particular, si $s \geqslant 0$, se sabe que dichas distribuciones temperadas son funciones L^2-medibles, hecho que se ve reflejado en el siguiente resultado:

Proposición 1.7. *Sean* $r_2 \leqslant r_1 \leqslant 0 \leqslant s_1 \leqslant s_2$*. Se mantienen las siguientes relaciones de inclusión:*

$$H^{s_2}(\mathbb{R}^n) \subseteq H^{s_1}(\mathbb{R}^n) \subseteq L^2(\mathbb{R}^n) \subseteq H^{r_1}(\mathbb{R}^n) \subseteq H^{r_2}(\mathbb{R}^n),$$

donde todas son inclusiones continuas.

Cabe mencionar que no todos los elementos del espacio $H^s(\mathbb{R}^n)$, con $s < 0$, son funciones. Presentamos un ejemplo clásico que ilustra esta afirmación:

Ejemplo 1.6. *Veamos que* δ_0 *pertenece a* $H^s(\mathbb{R}^n)$ *para todo* $s < -\frac{n}{2}$*.*

En efecto, del Ejemplo 1.4 sabemos que $\hat{\delta_0} = 1$ en el sentido de las distribuciones, así

$$\begin{aligned}
||\delta_0||_{H^s}^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s |\hat{\delta}_0(x)| \, d\xi \\
&= \int_{|\xi|\leqslant 1} (1+|\xi|^2)^s d\xi + \int_{|\xi|>1} (1+|\xi|^2)^s \, d\xi \\
&\leqslant c_{n,s}\left(1 + \int_{\rho>1} r^{2s+n-1} d\xi\right).
\end{aligned}$$

Pero como $2s + n < 0$,

$$\int_{\rho>1} r^{2s+n-1} d\xi = \frac{1}{2s+n} \xi^{2s+n} \Big|_1^{+\infty} = -\frac{1}{2s+n} < +\infty.$$

Es decir que $||\delta_0||_{H^s} < +\infty$ y $\delta_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)$. Con respecto a la estructura de los espacios de Sobolev no homogéneos, para cualquier $s \in \mathbb{R}$ podemos dotar a $H^s(\mathbb{R}^n)$ de un producto escalar, de modo que este sea un espacio de Hilbert.

Proposición 1.8. *Sea $s \in \mathbb{R}$, entonces $H^s(\mathbb{R}^n)$ es un espacio de Hilbert con el producto escalar*

$$(u, v)_{H^s} = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s \hat{u}(\xi) \overline{\hat{v}(\xi)} \, d\xi, \qquad u, v \in H^s(\mathbb{R}^n).$$

Las proposiciones que se presentan a continuación son otros resultados importantes relacionados a los espacios de Sobolev no homogéneos.

Proposición 1.9 (Desigualdad de interpolación)**.** *Sean $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ y $u \in H^{s_1}(\mathbb{R}^n) \cap H^{s_2}(\mathbb{R}^n)$, entonces $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ para todo $s_1 \leqslant s \leqslant s_2$. Además, si $s = \theta s_1 + (1-\theta)s_2$ con $\theta \in [0, 1]$, entonces*

$$||u||_{H^s} \leqslant ||u||_{H^{s_1}}^{\theta} \, ||u||_{H^{s_2}}^{1-\theta}.$$

Proposición 1.10 (Relación con el espacio de las funciones test y la clase de Schwartz)**.** *Dado $s \in \mathbb{R}$, el espacio de las funciones test y la clase de Schwartz están contenidos y son densos en $H^s(\mathbb{R}^n)$.*

Notemos que si $s < 0$, entonces el espacio $H^s(\mathbb{R}^n)$ contiene elementos que no son necesariamente funciones L^2-medibles. Sin embargo, podemos advertir que las distribuciones temperadas que pertenecen a $H^s(\mathbb{R}^n)$ $(s < 0)$ pueden ser aproximadas por funciones suficientemente regulares.

Proposición 1.11 (Espacio dual topológico)**.** *Dado $s \in \mathbb{R}$, $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ es el espacio dual topológico de $H^s(\mathbb{R}^n)$.*

Expliquemos en detalle a qué se refiere esta relación de dualidad. Sin pérdida de generalidad consideremos $s \geqslant 0$. Por una parte, la Proposición 1.7 nos dice que $H^s(\mathbb{R}^n)$ está contenido en $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$. Por tal motivo, sobre $H^s(\mathbb{R}^n)$ podemos definir dos productos internos: el inducido por $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ y su producto interno inherente (a su estructura). Ahora bien, el teorema de representación de Riesz nos dice que $(H^s(\mathbb{R}^n), (\cdot,\cdot)_{H^s})$ es isomorfo a $(H^s(\mathbb{R}^n), (\cdot,\cdot)_{H^s})'$. Entonces si consideramos al espacio $(H^s(\mathbb{R}^n), (\cdot,\cdot)_{H^s})$, se tiene que su dual es el mismo espacio. Pero si nos referimos al espacio $(H^s(\mathbb{R}^n), (\cdot,\cdot)_{H^{-s}})$, entonces se tiene que $(H^s(\mathbb{R}^n), (\cdot,\cdot)_{H^{-s}})' = (H^{-s}(\mathbb{R}^n), (\cdot,\cdot)_{H^{-s}})$ (ver Brezis (2011), Observación 3 del Teorema 5.5, página 136). A esta última igualdad se refiere la Proposición 1.11.

4.2. Espacios de Sobolev homogéneos Daremos sentido a la noción de homogeneidad de un espacio y explicaremos rápidamente por qué los espacios $H^s(\mathbb{R}^n)$ son llamados espacios de Sobolev no homogéneos, pero antes necesitamos una definición adicional.

Definición 1.12 (Dilatación de una función y de una distribución)**.** *Sean $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ una función, $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ y $\lambda > 0$ una constante.*

i. La función dilatación de f, *notada por f_λ, se define por*

$$f_\lambda(x) = f(\lambda x), \qquad \textit{para todo } x \in \mathbb{R}^n.$$

ii. La distribución temperada dilatación de u, *notada por u_λ, se define mediante el producto en dualidad*

$$\langle u_\lambda, \varphi\rangle = \langle u, \lambda^{-n}\varphi_{1/\lambda}\rangle, \qquad \textit{para todo } \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n).$$

Observación 1.6. *i. Si $u = f$ en el sentido de las distribuciones temperadas entonces $u_\lambda = f_\lambda$.*

ii. Por otro lado, la transformada de Fourier de la dilatación de u es $(u_\lambda)^\wedge = \lambda^{-n}(\hat{u})_{1/\lambda}$. Esta igualdad será necesaria al momento de analizar la homogeneidad de los espacios de Sobolev.

Definición 1.13 (Homogeneidad de un espacio)**.** *Sea E un espacio normado dado por*

$$E = \{u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \mid ||u||_E < +\infty\},$$

donde $||\cdot||_E : E \to \mathbb{R}^+$ es la norma de E. Diremos que E es un espacio homogéneo de orden $b \in \mathbb{R}$ si para todo $u \in E$ y todo $\lambda > 0$ se cumple que

$$||u_\lambda||_E = \lambda^b \, ||u||_E \, .$$

Ejemplo 1.7. *Ejemplos interesantes de espacios homogéneos son los espacios $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$.*

Puesto que, para todo $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y todo $\lambda > 0$ se puede probar que:

$$||f_\lambda||_{L^p} = \begin{cases} \lambda^{-\frac{n}{p}} \, ||f||_{L^p} \, , & \text{si } 1 \leqslant p < +\infty, \\ ||f||_{L^p} \, , & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Es decir que los espacios $L^p(\mathbb{R}^n)$ son espacios homogéneos de orden $-\frac{n}{p}$ para todo $1 \leqslant p < +\infty$ y que $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ es un espacio homogéneo de orden 0.

Regresando a los espacios de Sobolev no homogéneos, recordemos que la norma de $H^s(\mathbb{R}^n)$ $(s \in \mathbb{R})$ está dada por:

$$||u||_{H^s} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s \, |\hat{u}(\xi)|^2 \, d\xi \right)^{\frac{1}{2}} = \left|\left|(1 + |\cdot|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{u}\right|\right|_{L^2} , \qquad u \in H^s(\mathbb{R}^n).$$

Tomamos $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ y calculamos la norma de u_λ, con $\lambda > 0$ arbitrario. De la Observación 1.6, se sigue

$$\begin{aligned} ||u_\lambda||_{H^s} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s \left|(u_\lambda)^\wedge(\xi)\right|^2 \, d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \lambda^{-n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s \left|\hat{u}\,(\xi/\lambda)\right|^2 \, d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \lambda^{-\frac{n}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1+\lambda^2 |\xi|^2)^s \left|\hat{u}(\xi)\right|^2 \, d\xi\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Vemos que la constante 1 presente en el término $(1+|\xi|^2)^s$ dentro de la integral no nos permite concluir que $H^s(\mathbb{R}^n)$ sea homogéneo. En otras palabras, $H^s(\mathbb{R}^n)$ no es invariante bajo efecto de ninguna dilatación ($||u_\lambda||_{H^s} = ||u||_{H^s}$), fenómeno que interviene en cuestiones relacionadas a la existencia de soluciones, explosión en tiempo finito de la solución, por citar dos ejemplos. Teniendo en cuenta este inconveniente se plantea una definición más natural de los espacios de Sobolev (llamados homogéneos y notados $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$) que permitan la invarianza para alguna dilatación. Dicha definición es la siguiente:

$$\dot{H}^s(\mathbb{R}^n) = \{u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \mid ||u||_{\dot{H}^s} < +\infty\}$$

donde

$$||u||_{\dot{H}^s} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s} \left|\hat{u}(\xi)\right|^2 \, d\xi\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad u \in \dot{H}^s(\mathbb{R}^n). \tag{1.6}$$

Siguiendo los mismos cálculos realizados en (1.5) se prueba que $||u_\lambda||_{\dot{H}^s} = \lambda^{s-\frac{n}{2}} ||u||_{\dot{H}^s}$ para todo $u \in \dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$. Es decir que si $||\cdot||_{\dot{H}^s}$ fuese una norma para el espacio $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$, entonces este sería un espacio homogéneo de orden $s - \frac{n}{2}$ e invariante por dilatación cuando $s = \frac{n}{2}$. Desafortunadamente, este no es el caso, dado que la función $||\cdot||_{\dot{H}^s}$ resulta ser solamente una semi-norma.

En efecto, considerando $k \in \mathbb{N}$, se puede probar que existen constantes $c_1, c_2 > 0$ tales que

$$c_1 \sum_{1 \leqslant |\alpha| \leqslant k} ||\partial^\alpha u||_{L^2} \leqslant ||u||_{\dot{H}^k} \leqslant c_2 \sum_{1 \leqslant |\alpha| \leqslant k} ||\partial^\alpha u||_{L^2}, \tag{1.7}$$

para todo $u \in \dot{H}^k(\mathbb{R}^n)$, y esto implica que $||u||_{\dot{H}^k} = 0$ para cualquier función constante u.

Tomando en cuenta que la transformada de Fourier de la función constante $u = 1$ es $\hat{u} = (2\pi)^n \delta_0$ (que no es una función), una forma eficiente de excluir a las funciones constantes en la definición de los espacios $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$ es considerar únicamente las distribuciones $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ tales que $\hat{u} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Más aún, del Ejemplo 1.5, se deduce que esta condición excluye a todos los polinomios.

Definición 1.14. *El espacio de Sobolev homogéneo de orden $s \in \mathbb{R}$, denotado por $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$ se define como*

$$\dot{H}^s(\mathbb{R}^n) = \{u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \,|\, \hat{u} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \quad y \quad ||u||_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)} < +\infty\},$$

donde la norma $||\cdot||_{\dot{H}^s}$ está definida en (1.7).

Es importante aclarar que $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$ es un espacio normado, al cual le podemos dotar de un producto escalar de modo que este sea un espacio de Hilbert, si y sólo si $s < \frac{n}{2}$. Esto viene dado por la siguiente proposición.

Proposición 1.12. *$\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$ es un espacio de Hilbert con el producto escalar*

$$(u, v)_{\dot{H}^s} = \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s} \, \hat{u}(\xi)\overline{\hat{v}}(\xi)\, d\xi, \qquad u, v \in \dot{H}^s(\mathbb{R}^n),$$

si y sólo si $s < \frac{n}{2}$.

Ejemplo 1.8. *La masa de dirac en 0 no pertenece a ningún espacio de Sobolev homogéneo $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$.*

En efecto, dado que $\hat{\delta}_0 = 1$ (Ejemplo 1.5), haciendo un cambio de variable a cordenadas polares se sigue que

$$||\delta_0||^2_{\dot{H}^s} = \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s} \left|\hat{\delta}_0(\xi)\right|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s}\, d\xi = c_n \int_0^{+\infty} \rho^{2s+n-1} d\rho.$$

Si $2s+n>0$ entonces la función ρ^{2s+n-1} no es integrable en el infinito, y si $2s+n\leqslant 0$ entonces no es integrable en el origen.

Por otra parte, la Proposición 1.7 nos permitió conocer la relación de inclusión que mantienen los espacios de Sobolev no homogéneos. En contraste, para el caso de los espacios de Sobolev homogéneos, lamentablemente no existe una relación de inclusión que los pueda comparar. Sin embargo, sí se tiene una desigualdad de interpolación, que se describe en la siguiente proposición.

Proposición 1.13 (Desigualdad de interpolación)**.** *Sean* $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ *y* $u \in \dot{H}^{s_1}(\mathbb{R}^n) \cap \dot{H}^{s_2}(\mathbb{R}^n)$*, entonces* $u \in \dot{H}^{s}(\mathbb{R}^n)$ *para todo* $s_1 \leqslant s \leqslant s_2$*. Además, si* $s=\theta s_1+(1-\theta)s_2$ *con* $\theta\in[0,1]$*, entonces*

$$||u||_{\dot{H}^s} \leqslant c\, ||u||_{\dot{H}^{s_1}}^{\theta}\, ||u||_{\dot{H}^{s_2}}^{1-\theta}.$$

A pesar de que no existe un orden de inclusión para el caso de los espacios de Sobolev homogéneos, sí se los puede comparar con los no homogéneos, dependiendo del signo del orden $s\in\mathbb{R}$.

Proposición 1.14. *Sea* $s\in\mathbb{R}$*.*

1. *Si* $s\geqslant 0$*, entonces* $H^s(\mathbb{R}^n)\subseteq \dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$ *y además*

$$||u||_{\dot{H}^s} \leqslant ||u||_{H^s}, \qquad \textit{para todo } u\in H^s(\mathbb{R}^n).$$

2. *Si* $s\leqslant 0$*, entonces* $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)\subseteq H^s(\mathbb{R}^n)$ *y además*

$$||u||_{H^s} \leqslant ||u||_{\dot{H}^s}, \qquad \textit{para todo } u\in H^s(\mathbb{R}^n).$$

Enunciamos otras dos propiedades importantes de los espacios de Sobolev homogéneos para terminar esta sección.

Proposición 1.15 (Relación con el espacio de las funciones test y la clase de Schwartz). *Si* $s \leqslant -\frac{n}{2}$ *entonces el espacio de las funciones test y la clase de Schwartz no están contenidos en* $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$*.*

Proposición 1.16 (Espacio dual topológico). *Dado* $s \in \mathbb{R}$ *tal que* $|s| < \frac{n}{2}$, $\dot{H}^{-s}(\mathbb{R}^n)$ *es el espacio dual topológico de* $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$*.*

4.3. Desigualdades de Sobolev y Leyes de producto Las *Leyes de producto* son una herramienta de gran utilidad al momento de tratar ecuaciones diferenciales no lineales. En particular, nosotros las utilizaremos extensamente en el estudio de una perturbación de la ecuación de Benjamin-Ono en los Capítulos 3 y 4. En el Lema 7.3, página 130, de Lemarié-Rieusset (2016) se utiliza el teorema siguiente para demostrar las Leyes de producto, lo enunciamos conjuntamente pues en si mismo es un resultado valioso.

TEOREMA 1.4 (Desigualdades de Sobolev). *Sea* $0 < s < \frac{n}{2}$ *y* $2 < p < +\infty$ *tal que* $\frac{n}{2} = s + \frac{n}{p}$*. Entonces existe una constante* $c_n > 0$ *que depende de la dimensión tal que*

$$||u||_{L^p} \leqslant c_n \, ||u||_{\dot{H}^s}, \qquad \textit{para todo } u \in \dot{H}^s(\mathbb{R}^n).$$

TEOREMA 1.5 (Leyes de producto 1). *Sea* $s > \frac{n}{2}$*, entonces:*

1. *Para todo* $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ *se tiene que* $u \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ *y*

$$||u||_{L^\infty} \leqslant c_{n,s} \, ||u||_{H^s}.$$

2. *Para todo* $u, v \in H^s(\mathbb{R}^n)$ *se tiene que* $uv \in H^s(\mathbb{R}^n)$ *y*

$$||uv||_{H^s} \leqslant c_{n,s} \, ||u||_{H^s} \, ||v||_{H^s}.$$

Por último presentamos Leyes de producto que involucran espacios de Sobolev homogéneos.

Teorema 1.6 (Leyes de producto 2). *Sean* $u, v \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, $s \geqslant 0$ *y* $0 < \delta < \frac{n}{2}$. *Se tiene:*

1. *Si* $u, v \in H^s(\mathbb{R}^n) \cap \dot{H}^\delta(\mathbb{R}^n)$ *entonces* $uv \in H^{s+\delta-\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n)$ *y*

$$||uv||_{H^{s+\delta-\frac{n}{2}}} \leqslant c\left(||u||_{H^s}\,||v||_{\dot{H}^\delta} + ||v||_{H^s}\,||u||_{\dot{H}^\delta}\right).$$

2. *Si* $u, v \in \dot{H}^s(\mathbb{R}^n) \cap \dot{H}^\delta(\mathbb{R}^n)$ *entonces* $uv \in \dot{H}^{s+\delta-\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n)$ *y*

$$||uv||_{\dot{H}^{s+\delta-\frac{n}{2}}} \leqslant c\left(||u||_{\dot{H}^s}\,||v||_{\dot{H}^\delta} + ||v||_{\dot{H}^s}\,||u||_{\dot{H}^\delta}\right).$$

Capítulo 2

La Transformada de Hilbert

1. Definición de la transformada de Hilbert

Este capítulo lo dedicaremos completamente a la *transformada de Hilbert*, operador que aparece en la perturbación de la ecuación de Benjamin-Ono que estudiaremos en los Capítulos 3 y 4. Haremos un estudio que comprenderá: la definición de la transformada de Hilbert, la acción de la transformada de Fourier sobre este operador y revisaremos algunas de sus propiedades más importantes. El lector que desee profundizar sus conocimientos sobre el tema puede dirigirse a King (2009) o a la Sección 4.1 de Grafakos (2008); sección de la cual fue extraida y desarrollada gran parte del contenido que a continuación presentamos.

La transformada de Hilbert de una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ en un punto $x \in \mathbb{R}$ se escribe como:

$$\mathcal{H}f(x) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\pi} \int_{|y-x|\geqslant\epsilon} \frac{f(y)}{y-x} dy = -\lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\pi} \int_{|y|\geqslant\epsilon} \frac{f(x-y)}{y} dy, \tag{2.1}$$

cuando esta exista. Ante la posibilidad de que la función $y \to \dfrac{f(y)}{y-x}$ no sea integrable cerca de x, se evita este inconveniente definiendo a la integral $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)}{y-x} dy$ como el límite de integrales convergentes que *excluyan* a x:

$$\int_{|y-x|\geqslant\epsilon} \frac{f(y)}{y-x} dy, \qquad \text{cuando } \epsilon \to 0.$$

Estos límites son llamados *integrales de valor principal* y en la literatura se los reconoce por estar precedidos por las siglas p.v.. En particular utilizando esta notación en (2.1) tenemos que la transformada de Hilbert de f en x está dada por

$$\mathcal{H}f(x) = \frac{1}{\pi}\text{p.v.}\int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)}{y-x}dy = -\frac{1}{\pi}\text{p.v.}\int_{\mathbb{R}} \frac{f(x-y)}{y}dy.$$

Para dar una justificación teórica adecuada de la transformada de Hilbert, deseamos conocer los espacios funcionales sobre los cuales está bien definida. Para ello, el primer objetivo es saber para qué tipo de funciones existen las integrales que aproximan a este operador, llamadas *transformadas de Hilbert truncadas*.

La transformada de Hilbert truncada (a la aproximación ϵ) de una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ en $x \in \mathbb{R}$ se escribe como:

$$\mathcal{H}^{(\epsilon)}f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{|y-x|\geqslant\epsilon} \frac{f(y)}{y-x}dy = -\frac{1}{\pi}\int_{|y|\geqslant\epsilon} \frac{f(x-y)}{y}dy,$$

cuando esta exista. Los espacios de Lebesgue (salvo $L^\infty(\mathbb{R})$) son ejemplos de espacios funcionales para los cuales la transformada de Hilbert truncada está bien definida. En la siguiente proposición lo explicaremos más en detalle.

Proposición 2.1. *Sean $\epsilon > 0$ y $1 \leqslant p < +\infty$ y $f \in L^p(\mathbb{R})$, entonces*

$$\left|\mathcal{H}^{(\epsilon)}f(x)\right| < +\infty, \qquad \textit{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Demostración. Notamos por p' al número tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

- Si $1 < p < +\infty$, se tiene que

$$\begin{aligned}\left|\mathcal{H}^{(\epsilon)}f(x)\right| &\leqslant \frac{1}{\pi}\int_{|y|\geqslant\epsilon} \frac{|f(x-y)|}{|y|}dy \\ &\leqslant \left(\int_{|y|\geqslant\epsilon} |f(x-y)|^p\, dy\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{|y|\geqslant\epsilon} \frac{1}{|y|^{p'}}dy\right)^{\frac{1}{p'}} \\ &\leqslant ||f||_{L^p}\left(\frac{2}{p'-1}\epsilon^{1-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} < +\infty.\end{aligned}$$

- Si $p = 1$, entonces

$$\left|\mathcal{H}^{(\epsilon)} f(x)\right| \leqslant \frac{1}{\pi} \int_{|y|\geqslant\epsilon} \frac{|f(x-y)|}{|y|} dy \leqslant \left(\sup_{|y|\geqslant\epsilon} \frac{1}{|y|}\right) ||f||_{L^1} = \frac{1}{\epsilon} ||f||_{L^1} < +\infty.$$

$\square$

Por otro lado, cuando $p = \infty$, la transformada de Hilbert truncada no está definida. En efecto, consideremos la función *signo* dada por:

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ -1 & \text{si } x < 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

Calculamos $\mathcal{H}^{(\epsilon)} \operatorname{sgn}(x)$, dependiendo de la posición de x:

- Si $-\epsilon \leqslant x \leqslant \epsilon$, entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{(\epsilon)} \operatorname{sgn}(x) &= -\frac{1}{\pi} \int_{|y|\geqslant\epsilon} \frac{\operatorname{sgn}(x-y)}{y} dy \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\operatorname{sgn}(x-y)}{y} dy - \frac{1}{\pi} \int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{\operatorname{sgn}(x-y)}{y} dy \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{1}{y} dy + \frac{1}{\pi} \int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{1}{y} dy \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{1}{y} dy \\ &= \frac{2}{\pi} \log(y) \Big|_{\epsilon}^{+\infty} = +\infty. \end{aligned}$$

- Si $x < -\epsilon$, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{(\epsilon)} \operatorname{sgn}(x) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{x} \frac{\operatorname{sgn}(x-y)}{y} dy - \frac{1}{\pi} \int_{x}^{-\epsilon} \frac{\operatorname{sgn}(x-y)}{y} dy - \frac{1}{\pi} \int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{\operatorname{sgn}(x-y)}{y} dy \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{y} dy + \frac{1}{\pi} \int_{x}^{-\epsilon} \frac{1}{y} dy + \frac{1}{\pi} \int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{1}{y} dy \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-x}^{+\infty} \frac{1}{y} dy + \frac{1}{\pi} \int_{x}^{-\epsilon} \frac{1}{y} dy + \frac{1}{\pi} \int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{1}{y} dy = +\infty. \end{aligned}$$

- El caso cuando $x > \epsilon$ se sigue de manera análoga al caso anterior.

Ahora bien, hasta este momento hemos visto algunas funciones f tales que $\mathcal{H}^{(\epsilon)}f(x)$ está bien definido para todo $x \in \mathbb{R}$ y para cualquier aproximación $\epsilon > 0$, pero esto no implica que su transformada de Hilbert esté bien definida. Para ver esto basta considerar el punto $x = 0$ y la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Dado $\epsilon > 0$ se tiene que

$$\mathcal{H}^{(\epsilon)}f(0) = \frac{1}{\pi}\int_{|y|\geqslant\epsilon} \frac{1}{y-0}\frac{1}{y}dy = \frac{1}{\pi}\int_{|y|\geqslant\epsilon}\frac{1}{y^2}dy = \frac{2}{\pi\epsilon},$$

que es finito, pero que tiende a $+\infty$ cuando $\epsilon \to 0$.

Por otro lado, un tipo de funciones para las cuales se garantiza la existencia de la transformada de Hilbert en algún punto $x \in \mathbb{R}$ son aquellas que pertenecen a $L^1(\mathbb{R})$ y que satisfacen la *condición de Hölder cerca de x*.

Definición 2.1 (Condición de Hölder cerca de un punto)**.** *Dado $x \in \mathbb{R}$, decimos que una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ satisface la condición de Hölder cerca de x si existen constantes $c_x, \delta_x, \beta_x > 0$, que pueden depender de x, tales que*

$$|f(x) - f(y)| \leqslant c_x\,|x-y|^{\beta_x},$$

para todo $y \in \mathbb{R}$ tal que $|y-x| < \delta_x$.

Proposición 2.2. *Sean $x \in \mathbb{R}$ y $f \in L^1(\mathbb{R})$ una función que satisface la condición de Hölder cerca de x. Entonces existe $\mathcal{H}f(x) = \lim_{\epsilon\to 0}\mathcal{H}^{(\epsilon)}f(x)$.*

Demostración. Tomando $\epsilon > 0$ más pequeño que δ_x (lo cual no es descabellado pues haremos tender ϵ a 0), tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^{(\epsilon)}f(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{\epsilon\leqslant|x-y|\leqslant\delta_x}\frac{f(y)}{y-x}dy + \frac{1}{\pi}\int_{\delta_x<|x-y|}\frac{f(y)}{y-x}dy\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{\epsilon\leqslant|x-y|\leqslant\delta_x}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}dy + \frac{1}{\pi}\int_{\epsilon\leqslant|x-y|\leqslant\delta_x}\frac{f(x)}{y-x}dy + \frac{1}{\pi}\int_{\delta_x<|x-y|}\frac{f(y)}{y-x}dy\\
&= \frac{1}{\pi}(I_1 + I_2 + I_3).
\end{aligned}$$

Analizamos las tres integrales por separado.

- Para I_1, como f satisface la Definición 2.1, tenemos:

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\epsilon\leqslant|x-y|\leqslant\delta_x}\frac{f(y)-f(x)}{x-y}dy\right| &\leqslant \int_{\epsilon\leqslant|x-y|\leqslant\delta_x}\frac{|f(y)-f(x)|}{|x-y|}dy\\
&\leqslant \int_{\epsilon\leqslant|x-y|\leqslant\delta_x} c_x\frac{|x-y|^{\beta_x}}{|x-y|}dy\\
&= c_x\int_{\epsilon\leqslant|z|\leqslant\delta_x}|z|^{\beta_x-1}\,dz\\
&= 2\frac{c_x}{\beta_x}(\delta_x^{\beta_x}-\epsilon^{\beta_x}).
\end{aligned}$$

  Tomando $\epsilon\to 0$ se tiene

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left|\int_{\epsilon\leqslant|x-y|\leqslant\delta_x}\frac{f(y)-f(x)}{x-y}dy\right|\leqslant 2\frac{c_x}{\beta_x}\delta_x^{\beta_x}<+\infty.$$

- Para I_2:

$$\int_{\epsilon\leqslant|x-y|\leqslant\delta_x}\frac{f(x)}{y-x}dy=f(x)\int_{\epsilon\leqslant|z|\leqslant\delta_x}\frac{1}{z}dz=0.$$

- Finalmente, para I_3:

$$\left|\int_{\delta_x<|x-y|}\frac{f(y)}{y-x}dy\right|\leqslant\int_{\delta_x<|x-y|}\frac{|f(y)|}{|y-x|}dy=\int_{\delta_x<|z|}\frac{|f(z+x)|}{|z|}dz\leqslant\frac{1}{\delta_x}\int_{\delta_x<|z|}|f(x+z)|\,dz$$

  que es finito pues $f\in L^1(\mathbb{R})$.

$\square$

En particular, toda función $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R})$ satisface la condición de Hölder cerca de todo $x\in\mathbb{R}$ (puesto que $|\varphi(x)-\varphi(y)|\leqslant||\varphi'||_{L^\infty}|x-y|$ para todo $y\in\mathbb{R}$) y por tanto podemos definir su transformada de Hilbert. Con lo dicho anteriormente, estamos en la capacidad de definir la transformada de Hilbert en la clase de Schwartz.

Definición 2.2 (Transformada de Hilbert). *Dado $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, definimos a la transformada de Hilbert de φ como*

$$\mathcal{H}\varphi(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \mathcal{H}^{(\epsilon)}\varphi(x) = \frac{1}{\pi}\text{p.v.} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(y)}{y-x} dy = -\frac{1}{\pi}\text{p.v.} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x-y)}{y} dy,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Observación 2.1. *La transformada de Hilbert es un operador* no local.

Es decir que, dados $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ y $x \in \mathbb{R}$, la cantidad $\mathcal{H}\varphi(x)$ no puede ser determinada solamente por los valores que toma φ sobre una vecindad de x. Es necesario conocer toda la imagen de φ para calcular su transformada de Hilbert en x.

Para ilustrar cómo opera la transformada de Hilbert daremos algunos ejemplos.

Ejemplo 2.1. *Consideremos la función característica $\chi_{[a,b]}$ en el intervalo $[a, b]$ definida por*

$$\chi_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1 & \textit{si } x \in [a, b] \\ 0 & \textit{si no.} \end{cases}$$

Mostraremos que

$$\mathcal{H}\left(\chi_{[a,b]}\right)(x) = \frac{1}{\pi} \log \frac{|x-b|}{|x-a|}, \qquad \textit{para todo } x \in \mathbb{R}\backslash(\{a\} \cup \{b\}),$$

para lo cual, primero probaremos que la transformada de Hilbert truncada de $\chi_{[a,b]}$ es

$$\mathcal{H}^{(\epsilon)}\left(\chi_{[a,b]}\right)(x) = \begin{cases} -\frac{1}{\pi}\log^{+} \frac{|x-a|}{\text{máx}(\epsilon, |x-b|)} & \textit{cuando } x > b, \\ \frac{1}{\pi}\log^{+} \frac{|x-b|}{\text{máx}(\epsilon, |x-a|)} & \textit{cuando } x < a, \\ -\frac{1}{\pi}\log^{+} \frac{|x-a|}{\epsilon} + \frac{1}{\pi}\log^{+} \frac{|x-b|}{\epsilon} & \textit{cuando } a < x < b, \end{cases} \tag{2.3}$$

donde $\log^{+} x = \log x$ cuando $x \geqslant 1$ y cero caso contrario.

Antes que nada notemos que la indicatriz $\chi_{[a,b]}$ pertenece a $L^1(\mathbb{R})$ y satisface la condición de Hölder solamente para los $x \in \mathbb{R}$ distintos de a y de b. En efecto, si x pertenece al intervalo abierto (a, b), entonces existe $\delta_x > 0$ tal que $B(x, \delta_x) \subseteq (a, b)$. Se sigue que $\chi_{[a,b]}(B(x, \delta_x)) \subseteq \chi_{[a,b]}((a, b)) = \{1\}$ y en particular $\left|\chi_{[a,b]}(x) - \chi_{[a,b]}(y)\right| = |1 - 1| = 0$ para todo $y \in \mathbb{R}$ tal que $|x - y| \leqslant \frac{\delta_x}{2}$. Si $x \neq [a, b]$ se tiene lo mismo de manera análoga pues el conjunto $[a, b]^c$ es abierto y la indicatriz $\chi_{[a,b]}$ se anula fuera del intervalo $[a, b]$. Por otro lado, si $x = a$ o $x = b$, no podemos hallar una vecindad de x en donde se cumpla la condición de Hölder pues $\left|\chi_{[a,b]}(a) - \chi_{[a,b]}(y)\right| = 1$ para todo $y < a$ y $\left|\chi_{[a,b]}(b) - \chi_{[a,b]}(y)\right| = 1$ para todo $y > b$. Así, se puede definir la transformada de Hilbert para $x \neq a$ y $x \neq b$.

Sea $x \in \mathbb{R}$ distinto de a y de b, por definición de la transformada de Hilbert de $\chi_{[a,b]}$ se tiene que

$$\mathcal{H}^{(\epsilon)}\left(\chi_{[a,b]}\right)(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{|y|\geqslant\epsilon} \frac{\chi_{[a,b]}(x-y)}{y}dy, \tag{2.4}$$

pero como

$$\chi_{[a,b]}(x-y) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \leqslant x - y \leqslant b \\ 0 & \text{caso contrario,} \end{cases}$$

entonces el conjunto $A := \{y \in \mathbb{R} \,|\, x - b \leqslant y \leqslant x - a, \quad |y| \geqslant \epsilon\}$ es la región en la cual la integral (2,4) no se anula. Como un paso previo para obtener (2.3) debemos integrar sobre la región A, dependiendo de las posiciones de $x - b$ y $x - a$.

i. Si $x - b \leqslant x - a \leqslant -\epsilon$ o $\epsilon \leqslant x - b \leqslant x - a$:

$$\mathcal{H}^{(\epsilon)}\left(\chi_{[a,b]}\right)(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{x-b}^{x-a} \frac{1}{y}dy = -\frac{1}{\pi}\log\frac{|x-a|}{|x-b|}.$$

ii. Si $x - b \leqslant -\epsilon < \epsilon \leqslant x - a$:

$$\mathcal{H}^{(\epsilon)}\left(\chi_{[a,b]}\right)(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{\epsilon}^{x-a} \frac{1}{y}dy - \frac{1}{\pi}\int_{x-b}^{-\epsilon} \frac{1}{y}dy = -\frac{1}{\pi}\log\frac{|x-a|}{\epsilon} + \frac{1}{\pi}\log\frac{|x-b|}{\epsilon}.$$

iii. Si $x - b \leqslant -\epsilon \leqslant x - a \leqslant \epsilon$:

$$\mathcal{H}^{(\epsilon)}\left(\chi_{[a,b]}\right)(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{x-b}^{-\epsilon} \frac{1}{y}dy = \frac{1}{\pi}\log\frac{|x-b|}{\epsilon}.$$

iv. Si $-\epsilon \leqslant x-b \leqslant \epsilon \leqslant x-a$:

$$\mathcal{H}^{(\epsilon)}\left(\chi_{[a,b]}\right)(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{\epsilon}^{x-a}\frac{1}{y}dy = -\frac{1}{\pi}\log\frac{|x-a|}{\epsilon}.$$

v. Por último, si $-\epsilon \leqslant x-b \leqslant x-a \leqslant \epsilon$:

$$\mathcal{H}^{(\epsilon)}\left(\chi_{[a,b]}\right)(x) = 0.$$

Utilizaremos esta información para obtener la igualdad (2.3). Analizaremos solamente el caso cuando $x > b > a$, el resto de casos se siguen de manera análoga. Existen tres opciones:

- Si $\epsilon \leqslant x-b \leqslant x-a$, entonces $\dfrac{|x-a|}{\max(\epsilon,|x-b|)} = \dfrac{|x-a|}{|x-b|} \geqslant 1$. Luego, por (i):

$$\mathcal{H}^{(\epsilon)}\left(\chi_{[a,b]}\right)(x) = -\frac{1}{\pi}\log\frac{|x-a|}{|x-b|} = -\frac{1}{\pi}\log^{+}\frac{|x-a|}{\text{máx}(\epsilon,|x-b|)}.$$

- Si $0 < x-b \leqslant \epsilon \leqslant x-a$, entonces $\dfrac{|x-a|}{\text{máx}(\epsilon,|x-b|)} = \dfrac{|x-a|}{\epsilon} \geqslant 1$. Luego, por (iv):

$$\mathcal{H}^{(\epsilon)}\left(\chi_{[a,b]}\right)(x) = -\frac{1}{\pi}\log\frac{|x-a|}{\epsilon} = -\frac{1}{\pi}\log^{+}\frac{|x-a|}{\text{máx}(\epsilon,|x-b|)}.$$

- Si $0 < x-b \leqslant x-a \leqslant \epsilon$, entonces $\dfrac{|x-a|}{\text{máx}(\epsilon,|x-b|)} = \dfrac{|x-a|}{\epsilon} \leqslant 1$. Luego, por (v):

$$\mathcal{H}^{(\epsilon)}\left(\chi_{[a,b]}\right)(x) = 0 = -\frac{1}{\pi}\log^{+}\frac{|x-a|}{\text{máx}(\epsilon,|x-b|)}.$$

Finalmente, como tomaremos el límite cuando $\epsilon \to 0$ de $\mathcal{H}^{(\epsilon)}(\chi_{[a,b]})(x)$, podemos tomar ϵ suficientemente pequeño, de manera siempre se tenga (ii), así

$$\mathcal{H}\left(\chi_{[a,b]}\right)(x) = \frac{1}{\pi}\lim_{\epsilon\to 0}\left(\log\frac{\epsilon}{|x-a|} + \log\frac{|x-b|}{\epsilon}\right) = \frac{1}{\pi}\lim_{\epsilon\to 0}\log\frac{|x-b|}{|x-a|} = \frac{1}{\pi}\log\frac{|x-b|}{|x-a|}.$$

Ejemplo 2.2. *Dado $a > 0$, la transformada de Hilbert de la función $f(x) = \dfrac{a}{x^2+a^2}$ es $\mathcal{H}f(x) = -\dfrac{x}{x^2+a^2}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Se puede comprobar sin dificultad que f es integrable y satisface la condición de Hölder cerca de todo punto $x \in \mathbb{R}$, entonces sabemos que existe la transformada de Hilbert de f. Sea $x \in \mathbb{R}$, por definición de $\mathcal{H}f(x)$ se tiene que

$$\mathcal{H}f(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|y-x| \geqslant \epsilon} \frac{1}{y-x} \frac{a}{y^2 + a^2} dy.$$

Expresamos al término dentro de la integral como la suma

$$\frac{1}{y-x} \frac{a}{y^2+a^2} = \frac{A_x}{y-x} + \frac{B_x y + C_x}{y^2+a^2},$$

de donde se puede obtener con facilidad que $A_x = \frac{a}{a^2+x^2}$, $B_x = -\frac{a}{a^2+x^2}$, $C_x = \frac{-ax}{a^2+x^2}$. Entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{H}f(x) &= \frac{1}{\pi} \frac{a}{a^2+x^2} \lim_{\epsilon \to 0} \left(\int_{|y-x| \geqslant \epsilon} \frac{1}{y-x} dy - \int_{|y-x| \geqslant \epsilon} \frac{y}{y^2+a^2} dy - x \int_{|y-x| \geqslant \epsilon} \frac{1}{y^2+a^2} dy \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{a}{a^2+x^2} \lim_{\epsilon \to 0} (I_1(\epsilon) - I_2(\epsilon) - x I_3(\epsilon)). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Estimamos el valor de cada integral por separado y tomamos el límite cuando $\epsilon \to 0$. La integral $I_1(\epsilon)$ se calcula

$$I_1(\epsilon) = \int_{|y-x| \geqslant \epsilon} \frac{1}{y-x} dy = \int_{|z| \geqslant \epsilon} \frac{1}{z} dz = 0.$$

Para $I_2(\epsilon)$, por facilidad consideraremos tres casos dependiendo del valor x.

- Si $x = 0$, se tiene que

$$I_2(\epsilon) = \int_{|y| \geqslant \epsilon} \frac{y}{y^2+a^2} dy = 0.$$

- Si $x > 0$ tomamos ϵ tal que $0 < x - \epsilon$. Luego, la región de integración es el conjunto

$$(-\infty, x-\epsilon] \cup [x+\epsilon, \infty) = (-\infty, -x-\epsilon] \cup [-x-\epsilon, x-\epsilon] \cup [x+\epsilon, +\infty)$$

y se tiene que

$$I_2(\epsilon) = \int_{|y-x| \geqslant \epsilon} \frac{y}{y^2+a^2} dy$$

$$= \int_{|y|\geqslant|x+\epsilon|} \frac{y}{y^2+a^2}dy + \int_{-x-\epsilon}^{x-\epsilon} \frac{y}{y^2+a^2}dy$$
$$= \frac{1}{2}\ln((x-\epsilon)^2+a^2) - \frac{1}{2}\ln((x+\epsilon)^2+a^2),$$

que tiende a 0 cuando $\epsilon \to 0$.

- El caso cuando $x < 0$ se sigue de manera análoga al caso anterior.

Finalmente, para $I_3(\epsilon)$ se tiene que

$$\begin{aligned} I_3(\epsilon) &= \int_{|y-x|\geqslant\epsilon} \frac{1}{y^2+a^2}dy \\ &= \frac{1}{a^2}\int_{|y-x|\geqslant\epsilon} \frac{1}{(y/a)^2+1}dy \\ &= \frac{1}{a}\left(\arctan\left(\frac{y}{a}\right)\Big|_{-\infty}^{x-\epsilon} + \arctan\left(\frac{y}{a}\right)\Big|_{x+\epsilon}^{+\infty}\right) \\ &= \frac{1}{a}\left(\arctan\left(\frac{x-\epsilon}{a}\right) + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{x+\epsilon}{a}\right)\right) \\ &= \frac{1}{a}\left(\pi + \arctan\left(\frac{x-\epsilon}{a}\right) - \arctan\left(\frac{x+\epsilon}{a}\right)\right), \end{aligned}$$

que tiende a $\frac{\pi}{a}$ cuando $\epsilon \to 0$. Entonces (2.5) es igual a

$$\mathcal{H}f(x) = -\frac{x}{a^2+x^2}.$$

Antes de dedicarnos al estudio de las propiedades de la transformada de Hilbert, introducimos la distribución temperada *valor principal de Cauchy*, en la cual nos basaremos para proveer una definición equivalente de este operador.

Definición 2.3. *La distribución temperada valor principal de Cauchy, denotada por* $\text{v.p.}\frac{1}{x}$*, se define como*

$$\left\langle \text{v.p.}\frac{1}{x}, \varphi \right\rangle = \frac{1}{\pi}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{|x|\geqslant\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x}dx, \qquad \textit{para todo } \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}).$$

Probemos que $\text{v.p.}\frac{1}{x}$ es en efecto una distribución temperada. Por un lado, como para todo $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ la función $\frac{\varphi(0)}{x}$ es impar y gracias al teorema del valor medio, se sigue que

$$\left|\int_{\epsilon\leqslant|x|\leqslant 1}\frac{\varphi(x)}{x}dx\right| = \left|\int_{\epsilon\leqslant|x|\leqslant 1}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}dx\right|$$

$$\leqslant \int_{\epsilon\leqslant|x|\leqslant 1}\sup_{x\in\mathbb{R}}|\varphi'(x)|\,dx \tag{2.6}$$

$$= 2(1-\epsilon)\sup_{x\in\mathbb{R}}|\varphi'(x)|\,.$$

Entonces

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left|\int_{\epsilon\leqslant|x|\leqslant 1}\frac{\varphi(x)}{x}dx\right| \leqslant 2\sup_{x\in\mathbb{R}}|\varphi'(x)|\,.$$

Por otro lado

$$\left|\int_{|x|\geqslant 1}\frac{\varphi(x)}{x}dx\right| \leqslant \int_{|x|\geqslant 1}|x|\,|\varphi(x)|\,\frac{1}{|x|^2}dx$$

$$\leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}}|x\varphi(x)|\int_{|x|\geqslant 1}\frac{1}{|x|^2}dx \tag{2.7}$$

$$= 2\sup_{x\in\mathbb{R}}|x\varphi(x)|\,.$$

Por lo cual, de (2.6) y (2.7) se colige que

$$\left|\left\langle \text{v.p.}\frac{1}{x},\varphi\right\rangle\right| \leqslant \frac{2}{\pi}\sup_{x\in\mathbb{R}}|\varphi'(x)| + \frac{2}{\pi}\sup_{x\in\mathbb{R}}|x\varphi(x)| = \frac{2}{\pi}\left(\rho_{0,1}(\varphi)+\rho_{1,0}(\varphi)\right).$$

La siguiente igualdad relaciona al valor principal de Cauchy con la transformada de Hilbert, en el sentido de las distribuciones temperadas.

Proposición 2.3. *Para todo $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ se tiene que*

$$-\mathcal{H}\varphi = \left(v.p.\frac{1}{x}\right) * \varphi.$$

Demostración. Sea $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, gracias al teorema de Fubini se sigue que

$$\left\langle \left(\text{v.p.}\frac{1}{x}\right) * \varphi, \phi\right\rangle = \left\langle \text{v.p.}\frac{1}{x}, \tilde{\varphi} * \phi\right\rangle$$

$$= \frac{1}{\pi}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{|x|\geqslant\epsilon}\int_{\mathbb{R}}\phi(y)\varphi(y-x)\,dy\frac{1}{x}dx$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}}\phi(y)\frac{1}{\pi}\int_{|x|\geqslant\epsilon}\varphi(y-x)\frac{1}{x}dx\,dy$$

$$= -\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}} \phi(y)\mathcal{H}^{(\epsilon)}\varphi(y)\,dy. \tag{2.8}$$

Por otro lado, como $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, siguiendo los mismos cálculos realizados en demostración de la Proposición 2.2 (página 31, con $\beta_x = \delta_x = 1$ y $c_x = ||\varphi'||_{L^\infty}$) podemos deducir que

$$\left|\mathcal{H}^{(\epsilon)}\varphi(x)\right| \leqslant \frac{2}{\pi}\,||\varphi'||_{L^\infty} + \frac{1}{\pi}\,||\varphi||_{L^1}\,, \tag{2.9}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ (y con $\epsilon < 1$). Entonces podemos utilizar el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue para introducir el límite en (2.8) y concluir

$$\begin{aligned}\left\langle \left(\text{v.p.}\frac{1}{x}\right) * \varphi, \phi \right\rangle &= -\int_{\mathbb{R}} \phi(y) \lim_{\epsilon\to 0}\mathcal{H}^{(\epsilon)}\varphi(y)dy \\ &= \left\langle -\mathcal{H}\varphi, \phi \right\rangle.\end{aligned}$$

$\square$

2. La acción de la transformada de Fourier para la transformada de Hilbert en el espacio de las distribuciones temperadas

Por la Proposición 2.3 (página 38) se sigue que para calcular $(\mathcal{H}\varphi)^\wedge$ $(\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}))$, basta con estimar la transformada de Fourier del valor principal de Cauchy y luego utilizar la propiedad de la transformada de Fourier relativa a la convolución. En la siguiente proposición empezaremos por la transformada de Fourier de p.v.$\frac{1}{x}$.

Proposición 2.4. *La transformada de Fourier (en el sentido de las distribuciones temperadas) del valor principal de Cauchy es la función*

$$\left(\text{v.p.}\frac{1}{x}\right)^\wedge = -i\,\operatorname{sgn}(\cdot).$$

Demostración. Sea $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, utilizando el teorema de Fubini y dado que la función $x \to \dfrac{\cos(\xi x)}{x}$ es impar, se sigue que

$$
\begin{aligned}
\left\langle \left(\text{v.p.}\frac{1}{x}\right)^{\wedge}, \varphi \right\rangle &= \left\langle \text{v.p.}\frac{1}{x}, \hat{\varphi} \right\rangle \\
&= \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x| \geqslant \epsilon} \frac{\hat{\varphi}(x)}{x} dx \\
&= \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\frac{1}{\epsilon} \geqslant |x| \geqslant \epsilon} \frac{1}{x} \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi(\xi) e^{-ix\xi} d\xi \right) dx \\
&= \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}} \varphi(\xi) \left(\int_{\frac{1}{\epsilon} \geqslant |x| \geqslant \epsilon} (\cos(\xi x) - i \sin(\xi x)) \frac{1}{x} dx \right) d\xi \\
&= \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}} (-i) \varphi(\xi) \int_{\frac{1}{\epsilon} \geqslant |x| \geqslant \epsilon} \sin(x\xi) \frac{1}{x} dx \, d\xi.
\end{aligned}
$$

Teniendo la identidad

$$
\lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x| \geqslant \epsilon} \sin(x\xi) \frac{1}{x} dx = \pi \operatorname{sgn}(\xi), \qquad \text{para todo } \xi \in \mathbb{R}, \tag{2.10}
$$

y la cota uniforme

$$
\left| \int_{\frac{1}{\epsilon} \geqslant |x| \geqslant \epsilon} \sin(x\xi) \frac{1}{x} dx \right| = 2 \left| \int_{\epsilon\xi}^{\frac{1}{\epsilon}\xi} \frac{\sin(y)}{y} dy \right| \leqslant 4 \qquad \text{para todo } \xi \in \mathbb{R},
$$

(ver la página 263 de Grafakos (2008) o la página 193 del Apéndice de Loachamín (2020)), podemos utilizar el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue, para obtener

$$
\begin{aligned}
\left\langle \left(\text{v.p.}\frac{1}{x}\right)^{\wedge}, \varphi \right\rangle &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} (-i) \varphi(\xi) \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x| \geqslant \epsilon} \sin(x\xi) \frac{1}{x} dx \, d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}} \varphi(\xi) (-i \operatorname{sgn}(\xi)) d\xi.
\end{aligned}
$$

$\square$

La proposición anterior nos permite deducir facilmente que la transformada de Fourier de $\mathcal{H}\varphi$ ($\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$) es la función

$$
\widehat{\mathcal{H}\varphi} = -\left[\left(\text{v.p.}\frac{1}{x} \right) * \varphi \right]^{\wedge} = (i \operatorname{sgn}) \hat{\varphi}, \tag{2.11}
$$

en el sentido de las distribuciones. Observemos que en términos de la transformada de Fourier inversa, la transformada de Hilbert se puede ver como

$$\mathcal{H}\varphi(x) = ((i\ \text{sgn})\hat{\varphi})^{\vee}(x), \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R}. \tag{2.12}$$

Esta última expresión nos es útil para deducir ciertas propiedades, como veremos en lo posterior.

Observación 2.2. *Como primera consecuencia de esta nueva caracterización, podemos observar que la transformada de Hilbert de una función en la clase de Schwartz no necesariamente se mantiene en la clase de Schwartz.*

En efecto, consideremos una función $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ tal que $\varphi(x) = 1$, para todo $|x| \leqslant 1$. Luego, definamos $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ como: $\phi = \varphi^{\vee}$. De este modo, se tiene que

$$\widehat{\mathcal{H}\phi}(\xi) = i\ \text{sgn}(\xi)\varphi(\xi) = \begin{cases} i & \text{si} \quad \xi \in (0,1], \\ -i & \text{si} \quad \xi \in [-1,0). \end{cases}$$

Pero entonces $\widehat{\mathcal{H}\phi}$ no es una función continua en el 0 y por tanto no está en la clase de Schwartz.

Por otro lado, la transformada de Hilbert es un operador lineal inyectivo pues, si tomamos $\varphi, \phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ tales que $\mathcal{H}\varphi = \mathcal{H}\phi$, entonces $\widehat{\mathcal{H}\varphi} = (i\ \text{sgn})\hat{\varphi} = (i\ \text{sgn})\hat{\phi} = \widehat{\mathcal{H}\phi}$ en el sentido de las distribuciones temperadas. Por tanto

$$\int_{\mathbb{R}} i\ \text{sgn}(\xi)(\hat{\varphi}(\xi) - \hat{\phi}(\xi))\overline{\psi}(\xi)d\xi = ((i\ \text{sgn})(\hat{\varphi} - \hat{\phi}), \psi)_{L^2} = 0, \qquad \text{para todo } \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}).$$

Pero como $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ es denso en $L^2(\mathbb{R})$, se sigue que $i\ \text{sgn}(\xi)\hat{\varphi}(\xi) = i\ \text{sgn}(\xi)\hat{\phi}(\xi)$ c.t.p. $\xi \in \mathbb{R}$. Luego, de la continuidad de $\hat{\varphi}$ y $\hat{\phi}$ se concluye que $\hat{\varphi} = \hat{\phi}$ y en consecuencia $\varphi = \phi$.

De este modo se garantiza la existencia del operador inverso de $\mathcal{H}\colon \mathscr{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{H}(\mathscr{S}(\mathbb{R}))$, el cual no es otro que $-\mathcal{H}\colon \mathcal{H}(\mathscr{S}(\mathbb{R})) \to \mathscr{S}(\mathbb{R})$ pues

$$-\mathcal{H}(\mathcal{H}\varphi) = -\left[(i\ \mathrm{sgn})\left(((i\ \mathrm{sgn})\hat{\varphi})^{\vee}\right)^{\wedge}\right]^{\vee} = -\left[(i\ \mathrm{sgn})(i\ \mathrm{sgn})\hat{\varphi}\right]^{\vee} = \varphi, \tag{2.13}$$

para todo $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$.

3. Algunas propiedades de la transformada de Hilbert en los espacios de Lebesgue y Sobolev no homogéneos

En la Sección 1 de este capítulo definimos a la transformada de Hilbert en la clase de Schwartz, la cual está contenida en los espacios de Sobolev no homogéneos. Con respecto a este enfoque, dados $s \in \mathbb{R}$ y $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ se tiene que

$$||\mathcal{H}\varphi||_{H^s}^2 = \int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|^2)^s |\widehat{\mathcal{H}\varphi}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|^2)^s \left|i\ \mathrm{sgn}(\xi)\hat{\varphi}(\xi)\right|^2 d\xi = ||\varphi||_{H^s}^2 . \tag{2.14}$$

Entonces, utilizando la densidad $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ en $H^s(\mathbb{R})$ y (2.14), podemos definir la transformada de Hilbert de $H^s(\mathbb{R})$ en $H^s(\mathbb{R})$, la cual es una isometría (ver el Apéndice B). Otra característica relevante es la relación que existe entre la transformada de Hilbert y su operador adjunto, que viene dada por la siguiente igualdad: $\mathcal{H}^* = \mathcal{H}^{-1} = -\mathcal{H}$. En efecto, dados $u, v \in H^s(\mathbb{R})$, se tiene que

$$\begin{aligned}
(\mathcal{H}u, v)_{H^s} &= \int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|^2)^s \widehat{\mathcal{H}u}(\xi)\overline{\hat{v}}(\xi)\, d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|^2)^s i\ \mathrm{sgn}(\xi)\hat{u}(\xi)\overline{\hat{v}}(\xi)\, d\xi \\
&= -\int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|^2)^s \hat{u}(\xi)\overline{i\ \mathrm{sgn}(\xi)\hat{v}(\xi)}\, d\xi \\
&= -\int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|^2)^s \hat{u}(\xi)\overline{\widehat{\mathcal{H}v}}(\xi) d\xi \\
&= (u, -\mathcal{H}v)_{H^s}.
\end{aligned}$$

En particular para $s = 0$ y por la relación de Parseval (propiedad 11 de la Proposición 1.4, página 13) tenemos lo mismo para $L^2(\mathbb{R})$:

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{H}f, g)_{L^2} &= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{H}f(x)\overline{g(x)}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{\mathcal{H}f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}\, d\xi \\
&= -\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\overline{\widehat{\mathcal{H}g}(\xi)}\, d\xi \\
&= -\int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{\mathcal{H}g(x)}\, dx \\
&= (f, -\mathcal{H}g)_{L^2}. \qquad (2.15)
\end{aligned}
$$

La aparición de la transformada de Hilbert en algunas ecuaciones diferenciales y de manera particular en la ecuación que estudiaremos en este trabajo de titulación, enfatiza la importancia de la siguiente propiedad, que nos asegura que podemos *introducir* la derivada dentro de este operador.

Proposición 2.5. *Sean $s \in \mathbb{R}$, $u \in H^s(\mathbb{R})$ y $k \in \mathbb{N}$, entonces $\partial^k\mathcal{H}u = \mathcal{H}\partial^k u$.*

Demostración. Utilizamos las propiedades de la transformada de Fourier alusivas a la diferenciabilidad. Para c.t.p $\xi \in \mathbb{R}$ tenemos que

$$(\partial^k(\mathcal{H}u))^\wedge(\xi) = (i\xi)^k(\mathcal{H}u)^\wedge(\xi) = (i\xi)^k(i\ \mathrm{sgn}(\xi))\hat{u}(\xi) = (i\ \mathrm{sgn}(\xi))(\partial^k u)^\wedge(\xi) = (\mathcal{H}(\partial^k u))^\wedge(\xi).$$

□

Para terminar este compendio de la transformada de Hilbert nos enfocaremos en el marco de los espacios de Lebesgue. El primer acercamiento lo tuvimos en la Proposición 2.1, página 29, donde se probó que la transformada de Hilbert truncada $\mathcal{H}^{(\epsilon)}f(x)$ está puntualmente bien definida para todo $x \in \mathbb{R}$ y para todo $f \in L^p(\mathbb{R})$, con $1 \leqslant p < +\infty$, lo que sugiere la posibilidad de estudiar $\mathcal{H}$ sobre estos espacios. Por otro lado, dado que $\mathcal{H}$ es una isometría en todos los espacios de Sobolev no homogéneos (Proposición B.1, página

141), en particular se sigue que $\mathcal{H}$ es un operador lineal y continuo en $H^0(\mathbb{R}) = L^2(\mathbb{R})$. Utilizaremos este hecho como base para demostrar la continuidad de la transformada de Hilbert en $L^p(\mathbb{R})$, para todo $1 < p < +\infty$.

Teorema 2.1. *Para $1 < p < \infty$, existe una constante positiva C_p tal que*

$$||\mathcal{H}\varphi||_{L^p} \leqslant C_p \, ||\varphi||_{L^p} \, , \tag{2.16}$$

para cada $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$.

Demostración. Sea $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. Para iniciar la demostración probaremos la siguiente igualdad

$$(\mathcal{H}\varphi)^2 = \varphi^2 + 2\mathcal{H}\left(\varphi\mathcal{H}\varphi\right), \tag{2.17}$$

que nos ayudará más adelante. Si notamos la función $m(\xi) = i\ \mathrm{sgn}(\xi)$, para $\xi \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\begin{aligned}
\widehat{\varphi^2}(\xi) + 2\left[\mathcal{H}(\varphi\mathcal{H}\varphi)\right]^{\wedge}(\xi) &= \frac{1}{2\pi}\hat{\varphi} * \hat{\varphi}(\xi) + \frac{1}{\pi}m(\xi)\hat{\varphi} * \widehat{\mathcal{H}\varphi}(\xi) \\
&= \frac{1}{2\pi}\hat{\varphi} * \hat{\varphi}(\xi) + \frac{1}{\pi}m(\xi)\hat{\varphi} * (m\hat{\varphi})(\xi) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(\eta)\hat{\varphi}(\xi-\eta)d\eta + \frac{1}{\pi}m(\xi)\int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(\eta)m(\eta)\hat{\varphi}(\xi-\eta)\, d\eta.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Gracias a que la convolución es conmutativa se sigue que

$$\widehat{\varphi^2}(\xi) + 2\left[\mathcal{H}(\varphi\mathcal{H}(\varphi))\right]^{\wedge}(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(\eta)\hat{\varphi}(\xi-\eta)\, d\eta + \frac{1}{\pi}m(\xi)\int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(\eta)m(\xi-\eta)\hat{\varphi}(\xi-\eta)\, d\eta. \tag{2.19}$$

Sumamos (2.18) y (2.19) y dividimos para dos:

$$\widehat{\varphi^2}(\xi) + 2\left[\mathcal{H}(\varphi\mathcal{H}\varphi)\right]^{\wedge}(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(\eta)\hat{\varphi}(\xi-\eta)\left[1 + m(\xi)\left(m(\eta) + m(\xi-\eta)\right)\right] d\eta. \tag{2.20}$$

Además, de la identidad

$$1 + m(\xi)m(\eta) + m(\xi)m(\xi-\eta) = m(\eta)m(\xi-\eta), \qquad \text{para todo } \eta \neq 0, \tag{2.21}$$

(ver (A.1), página 134 del Apéndice A) obtenemos

$$\begin{aligned}
\widehat{\varphi^2}(\xi) + 2\left[\mathcal{H}(\varphi\mathcal{H}\varphi)\right]^\wedge(\xi) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(\eta)\hat{\varphi}(\xi-\eta)m(\eta)m(\xi-\eta)\,d\eta \\
&= \frac{1}{2\pi} m\hat{\varphi} * m\hat{\varphi}(\xi) \\
&= \frac{1}{2\pi}\widehat{\mathcal{H}\varphi} * \widehat{\mathcal{H}\varphi}(\xi) \\
&= \widehat{(\mathcal{H}\varphi)^2}(\xi).
\end{aligned}$$

Tomando la transformada de Fourier inversa obtenemos la igualdad (2.17).

Ahora nos disponemos a comprobar que se cumple (2.16) para todo $1 < p < +\infty$. Por un lado, como la transformada de Hilbert es una isometría en $H^0(\mathbb{R})$, también lo es en $L^2(\mathbb{R})$ pues, de la Identidad de Plancherel (propiedad 12 de la Proposición 1.4, página 13) tenemos

$$||\mathcal{H}\varphi||_{L^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}||\widehat{\mathcal{H}\varphi}||_{L^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,||\mathcal{H}\varphi||_{H^0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,||\varphi||_{H^0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}||\hat{\varphi}||_{L^2} = ||\varphi||_{L^2}\,. \tag{2.22}$$

A partir de este hecho y de la identidad (2.17) probaremos utilizando inducción que (2.16) es cierto para los p de la forma $p = 2^k$, con $k \in \mathbb{N}$. En efecto, el caso cuando $k = 0$ se tiene de (2.22). Luego, suponemos que se tiene el resultado para algún $p = 2^k$ $(k \in \mathbb{N})$ y mostraremos que se cumple lo mismo para $2p = 2^{k+1}$. Se tiene que

$$\begin{aligned}
||\mathcal{H}\varphi||_{L^{2p}}^2 &= \left|\left|(\mathcal{H}\varphi)^2\right|\right|_{L^p} \\
&\leqslant \left|\left|\varphi^2\right|\right|_{L^p} + ||2\mathcal{H}(\varphi\mathcal{H}\varphi)||_{L^p} \\
&\leqslant ||\varphi||_{L^{2p}}^2 + 2C_p\,||\varphi\mathcal{H}\varphi||_{L^p} \\
&= ||\varphi||_{L^{2p}}^2 + 2C_p\,||\varphi^p(\mathcal{H}\varphi)^p||_{L^1}^{1/p} \\
&\leqslant ||\varphi||_{L^{2p}}^2 + 2C_p\,||\varphi^p||_{L^2}^{1/p}\,||(\mathcal{H}\varphi)^p||_{L^2}^{1/p}
\end{aligned}$$

$$\leqslant ||\varphi||_{L^{2p}}^2 + 2C_p ||\varphi||_{L^{2p}} ||\mathcal{H}\varphi||_{L^{2p}} .$$

De esta manera

$$\left(\frac{||\mathcal{H}\varphi||_{L^{2p}}}{||\varphi||_{L^{2p}}} \right)^2 - 2C_p \frac{||\mathcal{H}\varphi||_{L^{2p}}}{||\varphi||_{L^{2p}}} - 1 \leqslant 0,$$

y si notamos $\alpha = \dfrac{||\mathcal{H}\varphi||_{L^{2p}}}{||\varphi||_{L^{2p}}}$, entonces

$$\alpha^2 - 2C_p\alpha - 1 = \left(\alpha - C_p + \sqrt{C_p^2 + 1}\right) \left(\alpha - C_p - \sqrt{C_p^2 + 1}\right) \leqslant 0.$$

Pero como el término $\alpha - C_p + \sqrt{C_p^2 + 1}$ es positivo (pues $\sqrt{C_p^2 + 1} \geqslant C_p$), deducimos que

$$\alpha \leqslant C_p + \sqrt{C_p^2 + 1}.$$

Es decir que

$$||\mathcal{H}\varphi||_{L^{2p}} \leqslant \left(C_p + \sqrt{C_p^2 + 1}\right) ||\varphi||_{L^{2p}} = C_{2p} ||\varphi||_{L^{2p}} , \tag{2.23}$$

donde $C_{2p} = \left(C_p + \sqrt{C_p^2 + 1}\right)$.

A partir de la continuidad de $\mathcal{H}$ en $L^p(\mathbb{R})$ para estos p específcos podemos probar que (2.16) también se satisface para todo $2 \leqslant r < +\infty$, utilizando interpolación. Dado $2 \leqslant r < +\infty$ arbitrario, se puede encontrar un $k \in \mathbb{N}$ tal que r se encuentre entre 2^k y 2^{k+1}, en otras palabras, existe $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ tal que $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1-\theta}{2^k} + \dfrac{\theta}{2^{k+1}}$. Luego, utilizando el teorema de Riesz-Thorin (Teorema 1.2 de la página 8) con $p_0 = q_0 = 2^k$, $p_1 = q_1 = 2^{k+1}$, $M_0 = C_{2^k}$, $M_1 = C_{2^{k+1}}$ y $p = q = r$, se tiene que

$$||\varphi||_{L^r} \leqslant C_{2^k}^{1-\theta} C_{2^{k+1}}^{\theta} ||\varphi||_{L^r} = C_r ||\varphi||_{L^r} ,$$

donde $C_r = C_{2^k}^{1-\theta} C_{2^{k+1}}^{\theta}$.

Finalmente, para comprobar que se cumple (2.16) para los p restantes ($1 < p < 2$), utilizamos la igualdad (2.15) (página 43). Por un lado, si $1 < p < 2$, entonces su conjugado

p' $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1\right)$ es mayor que 2 y podemos utilizar (2.16) con p'. Luego, dado que el espacio dual de $L^p(\mathbb{R})$ es $L^{p'}(\mathbb{R})$, se sigue que

$$\begin{aligned}
||\mathcal{H}\varphi||_{L^p} &= \sup_{||g||_{L^{p'}}\leqslant 1} \left| \int_{\mathbb{R}} \mathcal{H}\varphi(x) g(x)\, dx \right| \\
&= \sup_{||g||_{L^{p'}}\leqslant 1} \left| \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \overline{\mathcal{H}\overline{g}(x)}\, dx \right| \\
&\leqslant \sup_{||g||_{L^{p'}}\leqslant 1} \left(||\varphi||_{L^p} \, ||\mathcal{H}\overline{g}||_{L^{p'}} \right) \\
&\leqslant C_{p'} \, ||\varphi||_{L^p} \left(\sup_{||g||_{L^{p'}}\leqslant 1} ||g||_{L^{p'}} \right) \\
&= C_{p'} \, ||\varphi||_{L^p} \, .
\end{aligned}$$

□

Observación 2.3. *La transformada de Hilbert no es continua en $L^p(\mathbb{R})$ con $p = 1$ y $p = +\infty$.*

En efecto, para $p = \infty$, en la página 30 vimos que la transformada de Hilbert truncada ni siquiera está definida para todo $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ y para el caso $p = 1$ podemos retomar el Ejemplo 2.1 de la página 33, donde probamos que la transformada de Hilbert de la indicatriz $\chi_{[a,b]}$ en $x \in \mathbb{R}\backslash(\{a\} \cup \{b\})$ es

$$\mathcal{H}\left(\chi_{[a,b]}\right)(x) = \frac{1}{\pi} \log \frac{|x-b|}{|x-a|},$$

que no es acotada, ni integrable pues se comporta como la función $1/|x|$ cuando $x \to +\infty$. Este comportamiento en el infinito sugiere que la transformada de Hilbert mapea de $L^1(\mathbb{R})$ en el *espacio de Lorentz* $L^{1,\infty}(\mathbb{R})$, lo cual es cierto pero omitiremos la teoría de la transformada de Hilbert sobre estos espacios. Al lector interesado le recomendamos revisar la referencia Chamorro (2020) o las Secciones 1.4 y 4.3 de Grafakos (2008).

Capítulo 3

Una perturbación no local de la ecuación de Benjamin-Ono

Las ecuaciones dispersivas no lineales son una parte importante dentro de la inmensidad del campo de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Una razón relevante para comprender el porqué de su estudio es que muchas de estas ecuaciones pueden ser tomadas como buenos modelos para describir numerosos fenómenos físicos, en especial para aquellos en donde intervienen propagaciones de ondas. En un contexto físico, las ondas se dicen dispersivas si, como indica la descripción, se *dispersan* en el medio conforme evoluciona el tiempo (Linares y Ponce (2015)). A aquel lector que le invada la curiosidad sobre el trasfondo matemático que compone a este tipo de ecuaciones le recomendamos leer Linares y Ponce (2015).

Un ejemplo de ecuación no lineal dispersiva es la célebre ecuación de Benjamin-Ono

$$\partial_t u(t,x) + \mathcal{H}\partial_x^2 u(t,x) + u(t,x)\partial_x u(t,x) = 0, \qquad (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \tag{B-O}$$

donde $u\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función en cierto espacio de Banach. La ecuación expuesta en la anterior expresión fue introducida por Thomas Brooke Benjamin y Hiroaki Ono (véase Benjamin (1967) y Ono (1975)) para describir la propagación de ondas internas en fluidos estratificados (flujos compuestos por diversas capas de fluidos, que se encuentran separadas por sus distintas densidades) a gran profundidad.

Existen algunas variantes de la ecuación (B-O) que modelizan otros procesos físicos. El estudio de una de ellas es el objetivo de este proyecto de titulación, que tendrá un punto de vista meramente matemático. Concretamente, nos enfocaremos en una perturbación no local de la ecuación (B-O), descrita como

$$\partial_t u(t,x)+\mathcal{H}\partial_x^2 u(t,x)+u(t,x)\partial_x u(t,x)+\eta\,\mathcal{H}(\partial_x u(t,x)+\partial_x^3 u(t,x))=0, \qquad (t,x)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R},$$

donde η es un parámetro estríctamente positivo. Es así que en este capítulo abordaremos el problema del buen planteamiento tanto local como global en tiempo.

1. Una perturbación no local de la ecuación de Benjamin-Ono

El problema de valor inicial de la perturbación no local de la ecuación de Benjamin-Ono propuesta en este proyecto de titulación para un parámetro $\eta > 0$, viene descrito por

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x)+\mathcal{H}\partial_x^2 u(t,x)+u(t,x)\partial_x u(t,x)+\eta\mathcal{H}(\partial_x u(t,x)+\partial_x^3 u(t,x))=0, \qquad (t,x)\in(0,T]\times\mathbb{R} \\ u(0,x)=u_0(x), \qquad x\in\mathbb{R}, \end{cases} \tag{3.1}$$

donde $u_0\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es un dato inicial para el tiempo $t=0$ y $u\colon[0,T]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es la solución de (3.1), con un tiempo de existencia $0<T\leqslant+\infty$. La perturbación no local está dada por el término $\eta\,\mathcal{H}(\partial_x u(t,x)+\partial_x^3 u(t,x))$. La no localidad refiere a que la transformada de Hilbert, que aparece en la perturbación, es un operador no local (ver la Observación 2.1, página 33).

Esta ecuación es un buen modelo aproximado para ondas largas unidireccionales en un sistema de dos capas de fluidos no viscosos incompresibles (ver Cortez y Jarrín (2020)). Por otro lado, la misma ecuación ha sido utilizada para modelar turbulencias de plasma (véase Qian et al. (1989)).

Observación 3.1. *Si $\eta=0$, entonces (3.1) es el problema de Cauchy de la ecuación de Benjamin-Ono (B-O).*

Debido a que nuestras técnicas en el abordaje de este problema están intrínsecamente ligadas al término no local $\eta\mathcal{H}(\partial_x u(t,x) + \partial_x^3 u(t,x))$, no nos permiten dar resultados para la ecuación de Benjamin-Ono (B-O).

2. Problema lineal asociado

Para empezar el estudio de nuestro problema de la ecuación (3.1) partiremos de su problema de valor inicial lineal asociado

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + \mathcal{H}\partial_x^2 u(t,x) + \eta\mathcal{H}(\partial_x u(t,x) + \partial_x^3 u(t,x)) = 0, \qquad (t,x) \in (0,T] \times \mathbb{R} \\ u(0,x) = u_0(x), \qquad x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{3.2}$$

donde u_0 es un dato inicial suficientemente regular y $u : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la solución de (3.2) con un tiempo de existencia $0 < T \leqslant +\infty$. Procederemos a encontrar la solución de este problema en términos de la transformada de Fourier. Se sigue de la siguiente manera: fijando $t > 0$ tomamos la transformada de Fourier, en el sentido de las distribuciones temperadas y en la variable de espacio en (3.2). Obtenemos las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} (\partial_t u(t,\cdot) + &\mathcal{H}\partial_x^2 u(t,\cdot) + \eta\mathcal{H}(\partial_x u(t,\cdot) + \partial_x^3 u(t,\cdot)))^\wedge(\xi) \\ &= \partial_t \hat{u}(t,\xi) + i\,\mathrm{sgn}(\xi)(i\xi)^2\,\hat{u}(t,\xi) + \eta(i\,\mathrm{sgn}(\xi))((i\xi)\,\hat{u}(t,\xi) + (i\xi)^3\hat{u}(t,\xi)) \\ &= \partial_t \hat{u}(t,\xi) - i\xi\,|\xi|\,\hat{u}(t,\xi) - \eta(|\xi| - |\xi|^3)\,\hat{u}(t,\xi) = 0, \\ \hat{u}(0,\xi) &= \hat{u}_0(\xi). \end{aligned}$$

Es así que abarcar el problema lineal (3.2) equivale a solventar el problema en ecuaciones diferenciales ordinarias en variable de tiempo t

$$\begin{cases} \partial_t \hat{u}(t,\xi) - (i\xi\,|\xi| + \eta(|\xi| - |\xi|^3))\,\hat{u}(t,\xi) = 0, \qquad 0 < t \leqslant T \\ \hat{u}(0,\xi) = \hat{u}_0(\xi). \end{cases} \tag{3.3}$$

Es claro que esta EDO de primer orden (fijando ξ) tiene por solución

$$\hat{u}(t,\xi) = e^{t\,(i\xi|\xi|+\eta\,(|\xi|-|\xi|^3))}\,\hat{u}_0(\xi), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{3.4}$$

Luego, pasando la transformada de Fourier inversa, la solución de (3.2) es

$$u(t,x) = K_\eta(t,\cdot) * u_0(x),$$

donde

$$K_\eta(t,x) = \left(e^{t\,(i\xi|\xi|+\eta(|\xi|-|\xi|^3))}\right)^\vee = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} e^{t\,(i\xi|\xi|+\eta\,(|\xi|-|\xi|^3))}\,d\xi. \tag{3.5}$$

Como hemos dicho en el Capítulo 1, para que esta expresión tenga sentido y $K_\eta(t,x)$ exista sin ningún problema, es suficiente con demostrar que $e^{t\,(i\xi|\xi|+\eta(|\xi|-|\xi|^3))} \in L^1_\xi(\mathbb{R})$. Esto lo comprobamos a continuación:

$$\begin{aligned}
\left\|e^{t\,(i\xi|\xi|+\eta\,(|\xi|-|\xi|^3))}\right\|_{L^1_\xi} &= \int_{\mathbb{R}} \left|e^{t\,(i\xi|\xi|+\eta\,(|\xi|-|\xi|^3))}\right| d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{t\eta\,(|\xi|-|\xi|^3)} d\xi \\
&= 2\int_0^{+\infty} e^{t\eta\,(\xi-\xi^3)} d\xi \\
&= 2\left(\int_0^2 e^{t\eta\,(\xi-\xi^3)} d\xi + \int_2^{+\infty} e^{t\eta\,(\xi-\xi^3)} d\xi\right) \\
&= 2(I_1 + I_2).
\end{aligned}$$

El término I_1 es finito ya que es la integral de una función continua sobre un conjunto compacto. Para probar que la integral I_2 es finita constataremos que

$$e^{t\eta\,(\xi-\xi^3)} \leqslant e^{-t\eta\left(\frac{13}{4}\left(\xi-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{1}{3}\right)}, \qquad \text{para todo}\,\xi \geqslant 2.$$

En efecto, por un lado es fácil de verificar la igualdad

$$\xi^3 - \xi = (\xi-1)^3 + 3\left(\xi - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{1}{3}, \qquad \text{para todo } \xi \in \mathbb{R}. \tag{3.6}$$

Por otro lado, notemos que para todo $\xi \geqslant 2$ se tiene que

$$(\xi - 1)^3 \geqslant (\xi - 1)^2 \geqslant \frac{1}{4}\left(\xi - \frac{2}{3}\right)^2. \tag{3.7}$$

Efectivamente, dado $\xi \geqslant 2$, la primera desigualdad se tiene trivialmente y la segunda se sigue del hecho que

$$4(\xi - 1)^2 - \left(\xi - \frac{2}{3}\right)^2 = 3\xi^2 - \frac{20}{3}\xi + \frac{32}{9} = 3\left(\xi - \frac{4}{3}\right)\left(\xi - \frac{8}{9}\right) \geqslant 0.$$

Luego, de (3.6) y (3.7) obtenemos que $\xi^3 - \xi \geqslant \frac{13}{4}\left(\xi - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{1}{3}$ y por tanto

$$e^{t\eta\,(\xi - \xi^3)} \leqslant e^{-t\eta\left(\frac{13}{4}\left(\xi - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{1}{3}\right)}, \qquad \text{para todo } \xi \geqslant 2.$$

Con esta última desigualdad podemos observar que la función de la derecha pertenece a la clase de Schwartz y esto asegura la integrabilidad de la función de la izquierda.

Observación 3.2. *Es viable tomar la transformada de Fourier en (3.2) pues este es un problema definido en todo el espacio* $\mathbb{R}$ *y la transformada de Hilbert es un operador no local. Un problema sobre un dominio acotado no podría ser resuelto utilizando la transformada de Fourier.*

A la función K_η definida en (3.4) se le conoce como el núcleo asociado al problema lineal (3.2). A partir de estimaciones sobre K_η se puede llegar a criterios sobre la existencia de soluciones del problema (3.1) en los espacios $H^s(\mathbb{R})$, con $s \geqslant 0$.

Por otro lado, en el marco de la teoría de *semigrupos en espacios de Banach*, K_η genera el semigrupo asociado al problema no lineal (3.1). Desde este punto de vista es necesario precisar la definición de semigrupo continuo en espacios de Banach.

Definición 3.1 (Semigrupos continuos en espacios de Banach)**.** *Sea E un espacio de Banach. Una familia de operadores lineales y continuos de E en si mismo $(S(t))_{t\geqslant 0}$, se dice semigrupo continuo en E si satisface lo siguiente*

1. $S(0) = I$.

2. $S(t)S(\tau) = S(t+\tau)$ *para todo* $t, \tau \geqslant 0$.

3. $\lim_{t \to t_0} S(t)u = S(t_0)u$ *para todo* $u \in E$ *y todo* $t_0 > 0$.

4. $\lim_{t \to 0^+} S(t)u = u$ *para todo* $u \in E$.

La siguiente proposición nos permite tener más claro a lo que nos referimos cuando decimos que K_η genera un semigrupo continuo.

Proposición 3.1. *Sean* $\eta > 0$ *y* $s \in \mathbb{R}$. *Definimos la familia de operadores* $(S_\eta(t))_{t \geqslant 0}$ *en* $H^s(\mathbb{R})$ *como*

$$S_\eta(t)u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} e^{t\,(i\xi|\xi| + \eta\,(|\xi| - |\xi|^3))} \hat{u}(\xi)\, d\xi = (\hat{K}_\eta(t,\cdot)\hat{u})^\vee(x) = K_\eta(t,\cdot) * u(x), \tag{3.8}$$

para todo $u \in H^s(\mathbb{R})$ *y todo* $x \in \mathbb{R}$. *Entonces se tiene que* $(S_\eta(t))_{t \geqslant 0}$ *es un semigrupo continuo en* $H^s(\mathbb{R})$.

Demostración. Lo primero que debemos hacer para que la aserción enmarcada en esta proposición tenga sentido es probar que para todo $t \geqslant 0$, $S_\eta(t)$ es efectivamente un operador lineal y continuo de $H^s(\mathbb{R})$ en si mismo. Por un lado, es evidente que $S_\eta(t)$ es lineal para todo $t \geqslant 0$ pues es la convolución de dos funciones. Ahora probemos que $S_\eta(t) \in \mathscr{L}(H^s(\mathbb{R}))$. Sea $u \in H^s(\mathbb{R})$, se tiene que

$$\begin{aligned} ||S_\eta(t)u||_{H^s}^2 &= ||K_\eta(t,\cdot) * u||_{H^s}^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|^2)^s |\hat{K}_\eta(t,\xi)\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|^2)^s |e^{t\,(i\xi|\xi| + \eta\,(|\xi| - |\xi|^3))}|^2\, |\hat{u}(\xi)|^2\, d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|^2)^s e^{2t\eta\,(|\xi| - |\xi|^3)}\, |\hat{u}(\xi)|^2\, d\xi. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Analizamos el término $e^{2t\eta\,(|\xi|-|\xi|^3)}$ dentro de la última integral dependiendo de tamaño de $|\xi|$. Para todo $|\xi| < 1$ tenemos que

$$e^{2t\eta\,(|\xi|-|\xi|^3)} \leqslant e^{2\eta t\,|\xi|} \leqslant e^{2t\eta},$$

y para todo $|\xi| > 1$:

$$e^{2t\eta\,(|\xi|-|\xi|^3)} \leqslant 1 \leqslant e^{2t\eta}.$$

Es decir que $e^{2t\eta\,(|\xi|-|\xi|^3)} \leqslant e^{2t\eta}$ para cualquier $\xi \in \mathbb{R}$. Juntamos esta información con (3.9) para obtener

$$\begin{aligned} ||S_\eta(t)u||^2_{H^s} &= \int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|^2)^s e^{2t\eta\,(|\xi|-|\xi|^3)}\,|\hat{u}(\xi)|^2\,d\xi \\ &\leqslant e^{2\eta t} \int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|^2)^s\,|\hat{u}(\xi)|^2\,d\xi \\ &= e^{2\eta t}\,||u||^2_{H^s}\,. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Una vez probado que $S_\eta(t) \in \mathscr{L}(H^s(\mathbb{R}))$ para todo $t \geqslant 0$, ahora nos enfocaremos en demostrar que $(S_\eta(t))_{t\geqslant 0}$ es un semigrupo continuo en $H^s(\mathbb{R})$, para ello debemos verificar que satisface las cuatro condiciones de la Definición 3.1.

1. Para probar el primer literal ocuparemos la transformada de Fourier de $K_\eta(t,\cdot)$, la cual es

   $$\hat{K}_\eta(t,\xi) = e^{t\,(i\xi|\xi|+\eta\,(|\xi|-|\xi|^3))}.$$

   En particular para $t = 0$ tenemos $\hat{K}_\eta(0,\xi) = 1$, por lo tanto

   $$S_\eta(0)u = (\hat{K}_\eta(0,\cdot)\hat{u})^\vee = (\hat{u})^\vee = u.$$

2. Para este punto volvemos a hacer uso de la transformada de Fourier del núcleo K_η, para escribir:

   $$\hat{K}_\eta(t+\tau,\xi) = e^{(t+\tau)(i\xi|\xi|+\eta\,(|\xi|-|\xi|^3))}$$

$$= e^{t\,(i\xi|\xi|+\eta\,(|\xi|-|\xi|^3))}e^{\tau\,(i\xi|\xi|+\eta\,(|\xi|-|\xi|^3))}$$

$$= \hat{K}_\eta(t,\xi)\hat{K}_\eta(\tau,\xi).$$

Por ende, tomando la transformada de Fourier inversa en la anterior igualdad, obtenemos

$$\begin{aligned} S_\eta(t+\tau)u &= (\hat{K}_\eta\,(t+\tau,\cdot)\hat{u})^\vee \\ &= (\hat{K}_\eta(t,\cdot)\hat{K}_\eta(\tau,\cdot)\hat{u})^\vee \\ &= S_\eta(t)((\hat{K}_\eta(\tau,\cdot)\hat{u})^\vee) \\ &= S_\eta(t)(S_\tau(\tau)u) \\ &= S_\eta(t)S_\eta(\tau)u. \end{aligned}$$

3. La continuidad de $S_\eta(t)$ para todo $t > 0$ se verá más adelante en el Lema 3.3 (página 68).
4. La continuidad de $S_\eta(t)$ en el tiempo $t = 0$ la demostraremos por medio de sucesiones. Sea $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números no negativos tales que $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = 0$, se tiene que

$$\lim_{t_n\to+\infty} ||S_\eta(t_n)u-u||^2_{H^s} = \lim_{t_n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}}(1+|\xi|^2)^s|e^{t_n(i\xi|\xi|+\eta\,(|\xi|-|\xi|^3))}-1|^2\,|\hat{u}(\xi)|^2\,d\xi. \quad (3.11)$$

Como la sucesión $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada (pues es convergente), si notamos $M = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} t_n$, para todo $\xi\in\mathbb{R}$ podemos acotar

$$|e^{t_n(i\xi|\xi|+\eta\,(|\xi|-|\xi|^3))}-1|^2 \leqslant (e^{\eta t_n(|\xi|-|\xi|^3)}+1)^2 \leqslant (e^{\eta t_n}+1)^2 \leqslant (e^{\eta M}+1)^2 < +\infty,$$

lo cual justifica la introducción del límite en la integral (3.11) por el teorema de convergencia dominada de Lebesgue y nos permite llegar a lo deseado.

□

Observación 3.3. *La desigualdad (3.10) indica además que* $||S_\eta(t)||_{\mathscr{L}(H^s(\mathbb{R}))} \leqslant e^{\eta t}$.

3. Estructura de las soluciones mild

En los cursos elementales de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales se introducen dos tipos de soluciones: las fuertes o clásicas y las soluciones débiles. Las soluciones clásicas son todas las funciones suficientemente regulares (refiriéndonos a la regularidad clásica medida por los espacios $\mathscr{C}^k(\mathbb{R})$) que resuelven sus respectivas ecuaciones diferenciales puntualmente, mientras que las soluciones débiles son distribuciones temperadas que satisfacen su correspondiente ecuación diferencial en el sentido de las distribuciones temperadas. En el contexto del problema (3.1) esto quiere decir que

$$\begin{cases} \langle \partial_t u + \mathcal{H}\partial_x^2 u + u\partial_x u + \eta\,\mathcal{H}(\partial_x u + \partial_x^3 u), \varphi \rangle = 0, \qquad \text{para todo } \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}), \\ \langle u(0), \psi \rangle = \langle u_0, \psi \rangle, \qquad \text{para todo } \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}). \end{cases}$$

Si miramos de una manera aguda la naturaleza de estás dos clases de soluciones, se puede deducir que existen diferencias sustanciales entre ambas, ya que una distribución es un concepto mucho más general que una función (incluso para funciones no tan regulares como pueden ser funciones *Lebesgue* integrables). Es por ello que muchos de los resultados sobre soluciones de ecuaciones en derivadas parciales varian entre estas dos clases de soluciones. Bajo este punto de vista, un problema interesante en años anteriores fue encontrar cierto tipo de soluciones que se encuentren en medio de estos dos conceptos. Un caso particular de esta interrogante, fue encontrar soluciones no regulares que resuelvan el problema en sentido de distribuciones y que además pertenezcan a ciertos espacios de Lebesgue. Un ejemplo de dichas soluciones para ciertas ecuaciones en derivadas parciales, son las llamas *soluciones mild*, que en una perpectiva general son funciónes que verifican una ecuación integral de la forma

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-\tau)\ f(u(\tau))d\tau,$$

donde $S(t)$ es el semigrupo asociado a la ecuación diferencial, $f : [0, +\infty[\to E$ (E es un apropiado espacio de Banach) una función continuamente diferenciable, que viene dado por la ecuación diferencial y u_0, dato inicial del problema de Cauchy a tratar.

Se puede demostrar que una solución clásica verifica la ecuación integral y que una solución *mild* verifica la ecuación en derivadas parciales en sentido de las distribuciones. Para profundizar en el tema sobre las soluciones *mild* desde una óptica totalmente abstracta invitamos al lector ver Kunisch y Schappacher (1980) y Hille y Phillips (1957).

Ahora bien, en el caso que nos concierne una solución *mild* será una función que verifique una ecuación integral asociada al problema (3.1) y que además sea obtenida por un argumento de punto fijo de Banach. La siguiente definición habla del tema.

Definición 3.2 (Solución mild)**.** *Llamaremos solución* mild *del problema (3.1) (asociada al dato inicial u_0) a toda función u que verifica las siguientes dos condiciones:*

- *u pueda expresarse como:*

$$u(t,x) = K_\eta(t,\cdot)*u_0(x) - \int_0^t K_\eta(t-\tau,\cdot)*(u(\tau,\cdot)\partial_x u(\tau,\cdot))\,(x)\,d\tau, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T,\ x \in \mathbb{R}, \tag{3.12}$$

  donde el núcleo K_η está definido en (3.5).

- *u sea obtenida por un argumento de punto fijo de Banach.*

A la expresión (3.12) se la conoce como fórmula de Duhamel.

Observación 3.4. *1. Pueden existir funciones que verifiquen la ecuación integral pero que no sean obtenidas por un argumento de punto fijo de Banach (por ejemplo criterios de compacidad).*

2. La expresión (3.12) podría existir incluso en el caso de que u no sea diferenciable y por ende no ser una solución clásica del problema, sin embargo como veremos se puede mostrar que una solución mild es una solución en sentido de distribuciones temperadas.

Nuestro principal propósito es probar la existencia, unicidad, propiedades de decrecimiento y regularidad de las soluciones *mild* de (3.1). Para ello, seguimos algunas ideas introducidas por Kato en Kato y Tanabe (1962), apropiadamente adaptadas a nuestro problema. Esto se debe principalmente al hecho de que la parte lineal del problema en cuestión genera una familia de operadores que definen un semigrupo. De esta forma, al realizar un análisis cuidadoso, mostramos que esta familia de operadores satisface algunas propiedades "*buenas*" que nos permiten realizar el estudio propuesto.

Regresando a la formulación integral (3.12), creemos que es necesario explicar el proceso completo de su deducción. En la sección anterior nos inspiramos en la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias para encontrar la solución del problema lineal asociado a (3.1), donde la transformada de Fourier desempeñó un papel fundamental. En un espíritu similar buscaremos la forma que tiene la solución del problema no lineal, teniendo presente que los cálculos que expondremos a continuación son estimaciones *a priori* que nos dan una buena información de la estructura de las soluciones que estamos buscando. El estudio pertinente y riguroso de existencia de solución de este problema lo realizaremos en la Sección 4.

Aplicando la transformada de Fourier con respecto a la variable espacial en (3.1) obtenemos la ecuación diferencial ordinaria en variable de tiempo t

$$\begin{cases} \partial_t \hat{u}(t,\xi) - i\,|\xi|\,\xi\hat{u}(t,\xi) - \eta\left(|\xi| - |\xi|^3\right)\hat{u}(t,\xi) = -\left(u(t,\cdot)\partial_x u(t,\cdot)\right)^{\wedge}(\xi), \\ \hat{u}(0,\xi) = \hat{u}_0(\xi), \end{cases} \tag{3.13}$$

que puede ser resuelta con el método de variación de parámetros. La solución a este problema (fijando $\xi \in \mathbb{R}$) viene dada por

$$\hat{u}(t,\xi) = \hat{K}_\eta(t,\xi)\hat{u}_0(\xi) - \int_0^t \hat{K}_\eta(t-\tau,\xi)\left(u(\tau,\cdot)\partial_x u(\tau,\cdot)\right)^\wedge(\xi)d\tau, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Luego, tomando la transformada de Fourier inversa, la solución $u(t,x)$ se tendría que escribir de la forma

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \left(\hat{K}_\eta(t,\cdot)\hat{u}_0\right)^\vee(x) - \int_0^t \left(\hat{K}_\eta(t-\tau,\cdot)\left(u(\tau,\cdot)\partial_x u(\tau,\cdot)\right)^\wedge\right)^\vee(x)d\tau \\ &= K_\eta(t,\cdot) * u_0(x) - \int_0^t K_\eta(t-\tau,\cdot) * \left(u(\tau,\cdot)\partial_x u(\tau,\cdot)\right)(x)d\tau. \end{aligned}$$

Observación 3.5. *Es claro que cuando $t = 0$, la solución* mild *es u_0.*

Ciertamente, como $(S_\eta(t))_{t\geqslant 0}$ es un semigrupo continuo, para $x \in \mathbb{R}$ se tiene

$$u(0,x) = K_\eta(0,\cdot) * u_0(x) = S_\eta(0)u_0(x) = u_0(x).$$

Como hemos dicho antes, este nuevo tipo de solución está entre las soluciones clásicas y las débiles. Es fácil ver que si u es una solución clásica del problema (3.1), entonces verifica la formulación integral (3.12). Mientras que para demostrar que una solución *mild* verifica la ecuación (3.1) en el sentido de las distribuciones temperadas tenemos la siguiente proposición.

Proposición 3.2. *Toda solución* mild *del problema (3.1) es una solución en el sentido de las distribuciones temperadas.*

Demostración. Sea u una solución *mild* del problema (3.1), dada en la Definición 3.2. Queremos probar que

$$\langle \partial_t u + \mathcal{H}\partial_x^2 u + u\partial_x u + \eta\mathcal{H}\partial_x u + \partial_x^3 u, \varphi\rangle = 0, \qquad \text{para todo } \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}).$$

Utilizaremos la transformada de Fourier con respecto a la variable de espacio, en el sentido de las distribuciones temperadas. Por un lado se tiene que

$$\begin{aligned}
\langle \partial_t u, \varphi\rangle &= \langle ((\partial_t u)^\wedge)^\vee, \varphi\rangle \\
&= \left\langle \left(\partial_t \left(K_\eta(t,\cdot) * u_0 - \int_0^t K_\eta(t-\tau,\cdot) * (u\partial_x u(\tau,\cdot))\, d\tau\right)\right)^\wedge, \varphi^\vee \right\rangle \\
&= \left\langle \partial_t \left(\hat{K}_\eta(t,\cdot)\hat{u}_0 - \int_0^t \hat{K}_\eta(t-\tau,\cdot)\, (u\partial_x u(\tau,\cdot))^\wedge\, d\tau\right), \varphi^\vee \right\rangle \\
&= \left\langle \partial_t \hat{K}_\eta(t,\cdot)\hat{u}_0 - \partial_t \left(\hat{K}_\eta(t,\cdot) \int_0^t \hat{K}_\eta(-\tau,\cdot)\, (u\partial_x u(\tau,\cdot))^\wedge\, d\tau\right), \varphi^\vee \right\rangle. \qquad (3.14)
\end{aligned}$$

Calculamos el término de la izquierda dentro del producto en dualidad.

$$\begin{aligned}
&\partial_t \hat{K}_\eta(t,\cdot)\hat{u}_0 - \partial_t \left(\hat{K}_\eta(t,\cdot) \int_0^t \hat{K}_\eta(-\tau,\cdot)\, (u\partial_x u(\tau,\cdot))^\wedge\, d\tau\right) \\
&= \partial_t \hat{K}_\eta(t,\cdot) \left(\hat{u}_0 - \int_0^t \hat{K}_\eta(-\tau,\cdot)(u\partial_x u(\tau,\cdot))^\wedge d\tau\right) - \hat{K}_\eta(t,\cdot)\partial_t \left(\int_0^t \hat{K}_\eta(-\tau,\cdot)\, (u\partial_x u(\tau,\cdot))^\wedge\, d\tau\right) \\
&= \left(i\,|\xi|\,\xi + \eta\,(|\xi| - |\xi|^3)\right) \left(\hat{K}_\eta(t,\cdot)\hat{u}_0 - \int_0^t \hat{K}_\eta(t-\tau,\cdot)\, (u\partial_x u(\tau,\cdot))^\wedge\, d\tau\right) - (u\partial_x u(t,\cdot))^\wedge \\
&= \left(i\,|\xi|\,\xi + \eta\,(|\xi| - |\xi|^3)\right) \hat{u}(t,\cdot) - (u\partial_x u(t,\cdot))^\wedge .
\end{aligned}$$

Reemplazamos esta última igualdad en (3.14), así

$$\langle \partial_t u, \varphi\rangle = \left\langle \left(i\,|\xi|\,\xi + \eta(|\xi| - |\xi|^3)\right) \hat{u}(t,\cdot) - (u\partial_x u(t,\cdot))^\wedge, \varphi^\vee \right\rangle. \qquad (3.15)$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
&\langle \mathcal{H}\partial_x^2 u + u\partial_x u + \eta(\mathcal{H}\partial_x u + \partial_x^3 u), \varphi\rangle \\
&= \langle ((\mathcal{H}\partial_x^2 u + u\partial_x u + \eta(\mathcal{H}\partial_x u + \partial_x^3 u))^\wedge)^\vee, \varphi\rangle \\
&= \langle (\mathcal{H}\partial_x^2 u(t,\cdot) + u\partial_x u(t,\cdot) + \eta\mathcal{H}(\partial_x u(t,\cdot) + \partial_x^3 u(t,\cdot)))^\wedge, \varphi^\vee\rangle \\
&= \langle i\ \mathrm{sgn}(\xi)(i\xi)^2\hat{u}(t,\cdot) + (u\partial_x u(t,\cdot))^\wedge + \eta(i\ \mathrm{sgn}(\xi))((i\xi)\hat{u}(t,\xi) + (i\xi)^3\hat{u}(t,\cdot)), \varphi^\vee\rangle \\
&= -\langle (i\,|\xi|\,\xi + \eta(|\xi| - |\xi|^3))\hat{u}(t,\cdot) - (u\partial_x(t,\cdot))^\wedge, \varphi^\vee\rangle. \qquad (3.16)
\end{aligned}$$

Como el lector podrá percatarse, los lados derechos de (3.15) y (3.16) son la misma expresión pero con signos contrarios. Sumando las dos igualdades se sigue que

$$\left\langle \partial_t u + \mathcal{H}\partial_x^2 u + u\partial_x u + \eta\mathcal{H}\left(\partial_x u + \partial_x^3 u\right), \varphi \right\rangle = 0.$$

□

4. Buen planteamiento local y global en los espacios de Sobolev

En esta sección nuestros esfuerzos estarán orientados a documentar el buen planteamiento del problema (3.1) en el entorno de los espacios $H^s(\mathbb{R})$ (con $s \geqslant 0$). Es preciso entonces establecer lo que entenderemos como buen planteamiento. De manera general, dado E un espacio de Banach, diremos que el problema (3.1) está bien planteado localmente en E si para cualquier dato inicial $u_0 \in E$, existe un tiempo finito $T(||u_0||_E) > 0$ y una única función $u \in \mathscr{C}([0,T]; E)$, solución *mild* de (3.1). Asimismo, diremos que el problema está bien planteado globalmente si T puede ser tomado arbitrariamente.

Para alcanzar nuestro objetivo de establecer el buen planteamiento de (3.1), nos remitimos a la estructura integral de la solución *mild* asociada a $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$:

$$u(t,x) = K_\eta(t,\cdot) * u_0(x) - \int_0^t K_\eta(t-\tau,\cdot) * \left(u(\tau,\cdot)\partial_x u(\tau,\cdot)\right)(x)d\tau, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T,\ x \in \mathbb{R}. \tag{3.17}$$

La presencia de la solución u en la integral de la derecha sugiere que una manera oportuna de resolver el problema (3.1) es manejarlo como un problema de punto fijo en algún espacio de Banach. Por tal razón, precisaremos el teorema de punto fijo que garantice la existencia de una solución de nuestro problema.

Teorema 3.1 (Teorema de punto fijo de Picard). *Sean $(E, ||\cdot||_E)$ un espacio de Banach, $U_0 \in E$ un dato inicial y $B : E \times E \to E$ una forma bilineal. Si existe una constante $C \geqslant 0$ que satisface:*

1. $||B(u,v)||_E \leqslant C\,||u||_E\,||v||_E$*, para todo* $u, v \in E$.

2. $4C\,||U_0||_E < 1$.

Entonces existe $u \in E$ *solución del problema*

$$u = U_0 + B(u,u), \tag{3.18}$$

y esta es la única solución dentro de la bola $B_E(0, 2\,||U_0||_E)$.

La demostración de este teorema se puede consultar en el Apéndice D, página 146, de Loachamín (2020).

Ahora bien, en el contexto del buen planteamiento local del problema (3.1), nuestro principal candidato de espacio de Banach para el uso del Teorema 3.1 debería ser $\mathscr{C}([0,T]; H^s(\mathbb{R}))$. Sin embargo, la misma estructura integral de las soluciones *mild* sugiere que dichas soluciones no necesariamente pertenecen a este espacio, es así que antes de trabajar en el espacio de las funciones continuas de $[0,T]$ a valores en $H^s(\mathbb{R})$, nos enfocaremos en construir soluciones en un espacio de Banach que contenga a $\mathscr{C}([0,T]; H^s(\mathbb{R}))$. Por la igualdad de normas, el espacio de Banach sugerido es el siguiente:

Sean $s \geqslant 0$ y $T > 0$. Notaremos al espacio de Banach

$$E_T^s = L^\infty\left([0,T]; H^s(\mathbb{R})\right) = \{u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}) \mid ||u||_{E_T^s} < +\infty\}, \tag{3.19}$$

provisto de la norma

$$||u||_{E_T^s} = \sup_{0\leqslant t\leqslant T} ||u(t,\cdot)||_{H^s}\,, \qquad u \in E_T^s.$$

Para facilitar nuestro estudio reescribimos la fórmula (3.17) del siguiente modo

$$u(t,x) = U_0(t,x) + B_\eta(u,u)(t,x), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T,\, x \in \mathbb{R}, \tag{3.20}$$

donde

$$U_0(t,x) = K_\eta(t,\cdot) * u_0(x), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T,\; x \in \mathbb{R},$$

$$B_\eta(u,v)(t,x) = -\frac{1}{2}\int_0^t \partial_x K_\eta(t-\tau,\cdot) * (u(\tau,\cdot)v(\tau,\cdot))(x)d\tau, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T,\ x \in \mathbb{R}, \quad (3.21)$$

y $u, v \in E_T^s$. En la igualdad (3.20) utilizamos el hecho que

$$\int_0^t K_\eta(t-\tau,\cdot) * (u(\tau,\cdot)\partial_x u(\tau,\cdot))(x)d\tau = \frac{1}{2}\int_0^t \partial_x K_\eta(t-\tau,\cdot) * u^2(\tau,\cdot)(x)d\tau.$$

Más adelante justificaremos la existencia del término $\partial_x K_\eta(t,\cdot)$, en el Corolario 3.1 (página 70).

Se puede mostrar sin ninguna complicación que $U_0 \in E_T^s$. En efecto, de la continuidad de los operadores $(S_\eta(t))_{t\geqslant 0}$ en $H^s(\mathbb{R})$ (ver la Observación 3.3) se tiene que

$$||U_0||_{E_T^s} = \sup_{0\leqslant t\leqslant T} ||K_\eta(t,\cdot) * u_0||_{H^s} = \sup_{0\leqslant t\leqslant T} ||S_\eta(t)u_0|| \leqslant \sup_{0\leqslant t\leqslant T} \left(e^{\eta t}\, ||u_0||_{H^s}\right) = e^{\eta T}\, ||u_0||_{H^s}\,, \quad (3.22)$$

que es finito y por ende $U_0 \in E_T^s$.

Para demostrar las hipótesis faltantes del Teorema 3.2 necesitamos algunas propiedades particulares del semigrupo $(S_\eta(t))_{t\geqslant 0}$. En la siguiente subsección produndizaremos sobre el tema.

4.1. Estimaciones del semigrupo continuo S_η. En esta subsección reunimos algunos resultados relativos al semigrupo continuo $(S_\eta(t))_{t\geqslant 0}$ definido en (3.8), página 53. Es importante mencionar que todo lo que veremos a continuación funciona solamente si trabajamos con un tiempo t estríctamente positivo.

El primer lema que presentamos avala una propiedad de aumento de regularidad de la familia $(S_\eta(t))_{t>0}$ en el marco de los espacios de Sobolev no homogéneos.

Lema 3.1. *Sean $\eta > 0$, $t > 0$, $s \in \mathbb{R}$ y $\lambda \geqslant 0$. Entonces se tiene que $S_\eta(t) \in \mathscr{L}(H^s(\mathbb{R}), H^{s+\lambda}(\mathbb{R}))$. Además, existe una constante $c_\lambda > 0$ tal que*

$$||S_\eta(t)u||_{H^{s+\lambda}} \leqslant c_\lambda \frac{e^{\frac{3}{2}\eta t}}{(\eta t)^{\frac{\lambda}{2}}}\, ||u||_{H^s} \qquad \textit{para todo } u \in H^s(\mathbb{R}).$$

La idea completa de la demostración fue extraida de la página 10 de la tesis de doctorado de Álvarez (Álvarez (2003)).

Demostración. Sea $u \in H^s(\mathbb{R})$, el caso cuando $\lambda = 0$ se sigue directamente de la desigualdad

$$||S_\eta(t)u||_{H^s} \leqslant e^{\eta t} ||u||_{H^s} ,$$

vista en la Observación 3.3, página 56. Entonces supondremos que λ es positivo para el resto de la demostración. Se tiene que

$$\begin{aligned}
||S_\eta(t)u||^2_{H^{s+\lambda}} &= \int_{\mathbb{R}} \left(1+\xi^2\right)^{s+\lambda} e^{2\eta t\,(|\xi|-|\xi|^3)} \, |\hat{u}(\xi)|^2 \, d\xi \\
&\leqslant \sup_{\xi\in\mathbb{R}} \left((1+|\xi|^2)^\lambda e^{2\eta t\,(|\xi|-|\xi|^3)}\right) \int_{\mathbb{R}} \left(1+|\xi|^2\right)^s |\hat{u}(\xi)|^2 \, d\xi \\
&\leqslant c_\lambda \sup_{\xi\in\mathbb{R}} \left((1+|\xi|^{2\lambda}) e^{2\eta t\,(|\xi|-|\xi|^3)}\right) ||u||^2_{H^s} \\
&\leqslant c_\lambda \left[\sup_{\xi\geqslant 0} e^{2\eta t\,(\xi-\xi^3)} + \sup_{\xi\geqslant 0} \left(\xi^{2\lambda} e^{2\eta t\,(\xi-\xi^3)}\right)\right] ||u||^2_{H^s} \\
&\leqslant c_\lambda \left[e^{2\eta t} + \sup_{0\leqslant\xi\leqslant 1} \left(\xi^{2\lambda} e^{2\eta t\,(\xi-\xi^3)}\right) + \sup_{1\leqslant\xi} \left(\xi^{2\lambda} e^{2\eta t\,(\xi-\xi^3)}\right)\right] ||u||^2_{H^s} \\
&\leqslant c_\lambda \left[e^{2\eta t} + \sup_{0\leqslant\xi\leqslant 1} \left(\xi^{2\lambda}\right) \sup_{0\leqslant\xi\leqslant 1} \left(e^{2\eta t\,(\xi-\xi^3)}\right) + \sup_{1\leqslant\xi} \left(\xi^{2\lambda} e^{2\eta t\,(\xi-\xi^3)}\right)\right] ||u||^2_{H^s} \\
&\leqslant c_\lambda \left[2e^{2\eta t} + \sup_{1\leqslant\xi} \left(\xi^{2\lambda} e^{2\eta t\,(\xi-\xi^2)}\right)\right] ||u||^2_{H^s} . \qquad (3.23)
\end{aligned}$$

Para acotar el término $\sup_{1\leqslant\xi} \left(\xi^{2\lambda} e^{2\eta t\,(\xi-\xi^2)}\right)$ definimos una función g como

$$g(\xi) = \xi^{2\lambda} e^{2\eta t\,(\xi-\xi^2)}, \qquad \text{para todo } \xi \geqslant 0.$$

A fin de hallar el máximo de g calculamos su derivada e igualamos a 0. Buscamos $\xi > 0$ que satisfaga

$$g'(\xi) = 2\lambda\xi^{2\lambda-1} e^{2\eta t\,(\xi-\xi^2)} + 2\eta t(1-2\xi)\xi^{2\lambda} e^{2\eta t\,(\xi-\xi^2)} = 0.$$

Es decir, queremos encontrar $\xi > 0$ que cumpla

$$\begin{aligned}
\lambda + \eta t\xi(1-2\xi) &= \lambda + \eta t\xi - 2\eta t\xi^2 \\
&= -2\eta t\left(\xi^2 - \frac{\xi}{2} - \frac{1}{2}\frac{\lambda}{\eta t}\right) \\
&= -2\eta t\left(\xi - \frac{1}{4}\left(1-\sqrt{1+8\frac{\lambda}{\eta t}}\right)\right)\left(\xi - \frac{1}{4}\left(1+\sqrt{1+8\frac{\lambda}{\eta t}}\right)\right) = 0.
\end{aligned}$$

Pero como ξ debe ser positivo, la única opción posible de ξ es

$$\xi_0 := \frac{1}{4}\left(1+\sqrt{1+8\frac{\lambda}{\eta t}}\right).$$

Dado que $g(0) = 0$, $g(\xi) > 0$ para todo $\xi > 0$ y $\xi_0 > 0$ es el único punto crítico de g, entonces g debe alcanzar su máximo en ξ_0. Ahora calculamos $g(\xi_0)$, tenemos que

$$\begin{aligned}
2\eta t\left(\xi_0 - \xi_0^2\right) &= 2\eta t\left[\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{1+8\frac{\lambda}{\eta t}} - \frac{1}{16}\left(2 + 8\frac{\lambda}{\eta t} + 2\sqrt{1+8\frac{\lambda}{\eta t}}\right)\right] \\
&= \frac{1}{4}\eta t + \frac{1}{4}\eta t\sqrt{1+8\frac{\lambda}{\eta t}} - \lambda.
\end{aligned}$$

Luego $g(\xi_0)$ se estima

$$\begin{aligned}
g(\xi_0) &= \xi_0^{2\lambda} e^{2\eta t\,(\xi_0 - \xi_0^2)} \\
&= \frac{1}{16^\lambda}\left(1+\sqrt{1+8\frac{\lambda}{\eta t}}\right)^{2\lambda} e^{\frac{1}{4}\eta t + \frac{1}{4}\eta t\sqrt{1+8\frac{\lambda}{\eta t}} - \lambda} \\
&\leqslant \frac{1}{16^\lambda}\left(2 + \sqrt{8\lambda}\frac{1}{\sqrt{\eta t}}\right)^{2\lambda} e^{\frac{1}{2}\eta t + \frac{1}{4}\sqrt{8\lambda}\sqrt{\eta t}}.
\end{aligned}$$

Gracias a la desigualdad de Young para números no negativos (véase la página 12 de Brezis (2011)) se tiene que

$$g(\xi_0) \leqslant c_\lambda\left(1 + \frac{1}{(\eta t)^\lambda}\right) e^{\frac{1}{2}\eta t + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}(\sqrt{8\lambda})^2 + \frac{1}{2}(\sqrt{\eta t})^2\right)} = c_\lambda\left(\frac{(\eta t)^\lambda + 1}{(\eta t)^\lambda}\right) e^{\frac{5}{8}\eta t}.$$

Trayendo a colación la Proposición A.1 que se encuentra en la página 135 del Apéndice A, podemos acotar $(\eta t)^\lambda \leqslant c_\lambda e^{\eta t}$. De esta manera tenemos que

$$\sup_{0\leqslant\xi} g(\xi) = g(\xi_0) \leqslant c_\lambda \left(\frac{e^{\eta t}+e^{\eta t}}{(\eta t)^\lambda}\right) e^{\frac{5}{8}\eta t} \leqslant c_\lambda \frac{e^{2\eta t}}{(\eta t)^\lambda}. \tag{3.24}$$

Ayudándonos de esta desigualdad volvemos a (3.23), obteniendo finalmente

$$\begin{aligned} ||S_\eta(t)u||^2_{H^{s+\lambda}} &\leqslant c_\lambda \left[2e^{2\eta t} + \sup_{0\leqslant\xi} g(\xi)\right] \\ &\leqslant c_\lambda \left[e^{2\eta t} + \frac{e^{2\eta t}}{(\eta t)^\lambda}\right] \\ &= c_\lambda e^{2\eta t}\frac{(\eta t)^\lambda + 1}{(\eta t)^\lambda} \leqslant c_\lambda \frac{e^{3\eta t}}{(\eta t)^\lambda}. \end{aligned}$$

Se concluye el resultado tomando tomando la raíz cuadrada a cada lado. □

Observación 3.6. *Del Lema 3.1 tenemos que el operador $S_\eta(t)$ $(t > 0)$ aumenta la regularidad de las distribuciones temperadas en los espacios de Sobolev no homogéneos de forma ilimitada.*

De manera más específica, para cualquier $s \in \mathbb{R}$ y $u \in H^s(\mathbb{R})$ se tiene que $S_\eta(t)u$ pertenece al espacio $H^\infty(\mathbb{R}) := \bigcap_{r\geqslant 0} H^r(\mathbb{R})$.

El siguiente lema muestra que si $s > -1/2$, entonces los operadores $(S_\eta(t))_{t>0}$ también pueden ser vistos como aplicaciones lineales y continuas de $L^1(\mathbb{R})$ en $H^s(\mathbb{R})$ $(s > -1/2)$.

LEMA 3.2. *Sean $\eta > 0$, $t > 0$ y $s > -1/2$. Entonces se tiene que $S_\eta(t) \in \mathscr{L}(L^1(\mathbb{R}), H^s(\mathbb{R}))$ y existe una constante $c_s > 0$ tal que*

$$||S_\eta(t)u||_{H^s} \leqslant c_s \frac{e^{\frac{5}{2}\eta t}}{(\eta t)^{\frac{2s+1}{6}}} ||u||_{L^1}, \qquad \textit{para todo } u \in L^1(\mathbb{R}).$$

La demostración que presentamos es idéntica a la desarrollada por Borys Álvarez en la página 7 de Álvarez (2003), salvo por mínimas diferencias en los cálculos y en la cantidad de constantes que aparecen en la parte derecha de la desigualdad.

Demostración. Sea $u \in L^1(\mathbb{R})$. El plan de la demostración consiste en obtener la función Gamma (definida en (A.3), página 136 del Apéndice A), que conocemos que es finita para todo número real positivo. Se tiene que

$$\begin{aligned}
||S_\eta(t)u||_{H^s}^2 &= \int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|^2)^s |\hat{K}_\eta(t,\xi)|^2 \, |\hat{u}(\xi)|^2 \, d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|^2)^s e^{2\eta t\,(|\xi|-|\xi|^3)} \, |\hat{u}(\xi)|^2 \, d\xi \\
&\leqslant 2\, ||\hat{u}||_{L^\infty}^2 \int_0^{+\infty} (1+\xi^2)^s e^{2\eta t\,(\xi-\xi^3)} d\xi \\
&\leqslant 2\, ||u||_{L^1}^2 \left(\int_0^{\sqrt{2}} (1+\xi^2)^s e^{2\eta t\,(\xi-\xi^3)} d\xi + \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} (1+\xi^2)^s e^{2\eta t\,(\xi-\xi^3)} d\xi \right) \\
&\leqslant 2\, ||u||_{L^1}^2 \left(\sqrt{2} 3^s e^{2\sqrt{2}\eta t} + \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} (2\xi^2)^s e^{2\eta t\,(\xi-\xi^3)} d\xi \right). \qquad (3.25)
\end{aligned}$$

Para todo $\xi \geqslant \sqrt{2}$, tenemos que $\dfrac{\xi^2}{2} \geqslant 1$, por tanto $\xi^3 - \xi \geqslant \dfrac{\xi^3}{2}$ y así

$$\begin{aligned}
||S_\eta(t)u||_{H^s}^2 &\leqslant 2\, ||u||_{L^1}^2 \left(\sqrt{2} 3^s e^{2\sqrt{2}\eta t} + 2^s \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \xi^{2s} e^{-\eta t \xi^3} d\xi \right) \\
&\leqslant 2\, ||u||_{L^1}^2 \left(\sqrt{2} 3^s e^{2\sqrt{2}\eta t} + \frac{2^s}{3(\eta t)^{\frac{2s+1}{3}}} \int_0^{+\infty} x^{\frac{2s-2}{3}} e^{-x} dx \right) \\
&= 2\, ||u||_{L^1}^2 \left(\sqrt{2} 3^s e^{2\sqrt{2}\eta t} + \frac{2^s}{3(\eta t)^{\frac{2s+1}{3}}} \Gamma\left(\frac{2s+1}{3}\right) \right) \\
&\leqslant c_s\, ||u||_{L^1}^2 \left(e^{2\sqrt{2}\eta t} + \frac{1}{(\eta t)^{\frac{2s+1}{3}}} \right) \\
&= c_s\, ||u||_{L^1}^2 \, \frac{e^{2\sqrt{2}\eta t} (\eta t)^{\frac{2s+1}{3}} + 1}{(\eta t)^{\frac{2s+1}{3}}}.
\end{aligned}$$

Utilizando la Proposición A.1, página 135 del Apéndice A, podemos acotar $(\eta t)^{\frac{2s+1}{3}} \leqslant c_s e^{\eta t}$. Luego

$$||S_\eta(t)u||_{H^s}^2 \leqslant c_s\, ||u||_{L^1}^2 \, \frac{e^{(2\sqrt{2}+1)\eta t}}{(\eta t)^{\frac{2s+1}{3}}} \leqslant c_s\, ||u||_{L^1}^2 \, \frac{e^{5\eta t}}{(\eta t)^{\frac{2s+1}{3}}}.$$

Tomando la raíz cuadrada a ambos lados el resultado se tiene. □

A partir de las propiedades expuestas en los Lemas 3.1 y 3.2 podemos encontrar las estimaciones de $B_\eta(\cdot,\cdot)$ (definida en (3.21), página 63) en términos de la norma del espacio E_T^s (dado en (3.19), página 62) necesarias para obtener todas hipótesis del Teorema (3.1). Pero antes completaremos esta subsección con tres resultados más, el primero de ellos complementa el estudio de aumento de regularidad de la familia de operadores $(S_\eta(t))_{t>0}$ y a la vez establece la continuidad del semigrupo $(S_\eta(t))_{t\geqslant 0}$ en el intervalo $(0,+\infty)$.

Lema 3.3 (Continuidad con respecto a la variable temporal). *Sean $\eta>0$, $s\in\mathbb{R}$, $\lambda\geqslant 0$, $u\in H^s(\mathbb{R})$, $t>0$ y $(t_n)_{n\in N}$ una sucesión de números positivos que convergen a t. Entonces se tiene que*

$$\lim_{n\to+\infty}||S_\eta(t)u-S_\eta(t_n)u||_{H^{s+\lambda}}=0.$$

Demostración. Por un lado tenemos

$$\begin{aligned}||S_\eta(t)-S_\eta(t_n)||^2_{H^{s+\lambda}}&=\int_{\mathbb{R}}(1+|\xi|^2)^{s+\lambda}\left|e^{t(i\xi|\xi|+\eta(|\xi|-|\xi|^3))}-e^{t_n(i\xi|\xi|+\eta(|\xi|-|\xi|^3))}\right|^2|\hat{u}_0(\xi)|^2\,d\xi\\&=\int_{\mathbb{R}}(1+|\xi|^2)^{\lambda}\left|e^{t(i\xi|\xi|+\eta(|\xi|-|\xi|^3))}-e^{t_n(i\xi|\xi|+\eta(|\xi|-|\xi|^3))}\right|^2(1+|\xi|^2)^s|\hat{u}_0(\xi)|^2\,d\xi.\end{aligned}\tag{3.26}$$

Queremos encontrar una cota que no dependa de n para la cantidad

$$(1+|\xi|^2)^{\lambda}\left|e^{t(i\xi|\xi|+\eta(|\xi|-|\xi|^3))}-e^{t_n(i\xi|\xi|+\eta(|\xi|-|\xi|^3))}\right|^2,$$

para seguido tomar e introducir el límite en la integral (3.26) vía el teorema de convergencia dominada de Lebesgue. Con esto en mente, tomamos $\rho=\inf_{n\in\mathbb{N}}t_n$, número estríctamente positivo, pues si este no fuera el caso podríamos encontrar una sub-sucesión $(t_m)_{m\in\mathbb{N}}$ tal que $t_m<\frac{1}{m}$, contradiciendo el hecho que $t>0$. Por otro lado, como $(t_n)_{n\in N}$ es una sucesión acotada (pues es convergente), si notamos $M = \sup_{n\in\mathbb{N}} t_n$ se sigue que

$$\begin{aligned}
&(1+|\xi|^2)^\lambda |e^{\eta t(|\xi|-|\xi|^3)} - e^{\eta t_n(|\xi|-|\xi|^3)}|^2 \\
&\leqslant c_\lambda (1+|\xi|^{2\lambda}) \left(e^{2\eta t(|\xi|-|\xi|^3)} + e^{2\eta t_n(|\xi|-|\xi|^3)}\right) \\
&\leqslant c_\lambda \left[\sup_{0\leqslant|\xi|\leqslant 1} \left((1+|\xi|^{2\lambda}) \left(e^{2\eta t(|\xi|-|\xi|^3)} + e^{2\eta M(|\xi|-|\xi|^3)}\right)\right) + \sup_{1<|\xi|} \left((1+|\xi|^{2\lambda}) \left(e^{2\eta t(|\xi|-|\xi|^3)} + e^{2\eta\rho(|\xi|-|\xi|^3)}\right)\right)\right] \\
&\leqslant c_\lambda \left[2\left(e^{2\eta t} + e^{2\eta M}\right) + \sup_{1<|\xi|} \left((1+|\xi|^{2\lambda}) \left(e^{2\eta t(|\xi|-|\xi|^3)} + e^{2\eta\rho(|\xi|-|\xi|^3)}\right)\right)\right].
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Luego, como vimos en (3.24), página 66 de la demostración del Lema 3.1, podemos dominar

$$\begin{aligned}
(1+|\xi|^2)^\lambda \left|e^{\eta t(|\xi|-|\xi|^3)} - e^{\eta t_n(|\xi|-|\xi|^3)}\right|^2 &\leqslant c_\lambda \left[2(e^{2\eta t} + e^{2\eta M}) + e^{2\eta t} + e^{2\eta\rho} + \frac{e^{2\eta t}}{(\eta t)^\lambda} + \frac{e^{2\eta\rho}}{(\eta\rho)^\lambda}\right] \\
&= c_{\lambda,\eta,t,\rho,M}.
\end{aligned}$$

Esta cota completa la demostración. $\square$

Observación 3.7. *El Lema 3.3 nos informa que si fijamos $T > 0$, $s \in \mathbb{R}$ y $u \in H^s(\mathbb{R})$, entonces la función*

$$\begin{aligned}
S_\eta(\cdot)u \colon (0,T] &\to H^{s+\lambda}(\mathbb{R}) \\
t &\mapsto (S_\eta(\cdot)u)(t) = S_\eta(t)u
\end{aligned}$$

es continua para todo $\lambda \geqslant 0$. Es decir que la función $S_\eta(\cdot)u$ pertenece al espacio

$$\mathscr{C}((0,T]; H^\infty(\mathbb{R})) := \bigcap_{r\geqslant 0} \mathscr{C}((0,T]; H^r(\mathbb{R})). \tag{3.28}$$

Para concluir esta subsección mostraremos una proposición que utilizaremos posteriormente en el Capítulo 4, cuando estudiemos el decrecimiento en variable espacial del núcleo K_η. Lo enunciamos en este punto pues también nos permite determinar la diferenciabilidad de $K_\eta(t,\cdot)$, justificando así la aparición del término $\partial_x K_\eta$ en la forma bilineal $B_\eta(\cdot,\cdot)$.

Proposición 3.3. *Sean $\eta > 0$, $t > 0$ y $m > -1$, entonces*

$$\int_{\mathbb{R}} |\xi|^m \, |\hat{K}_\eta(t,\xi)| d\xi \leqslant c_m \frac{e^{3\eta t}}{(\eta t)^{\frac{m+1}{3}}}.$$

Demostración. De nuevo ocupamos la finitud de la función Gamma, definida en (A.3), página 136 del Apéndice A. Como $\frac{\xi}{2} \leqslant \xi^3 - \xi$ para todo $\xi \geqslant \sqrt{2}$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |\xi|^m \, |\hat{K}_\eta(t,\xi)| d\xi &= 2 \left(\int_0^{\sqrt{2}} \xi^m e^{\eta t(\xi - \xi^3)} d\xi + \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \xi^m e^{\eta t(\xi - \xi^3)} d\xi \right) \\
&\leqslant 2 \left(e^{\sqrt{2}\eta t} \int_0^{\sqrt{2}} \xi^m d\xi + \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \xi^m e^{-\eta t \frac{\xi^3}{2}} d\xi \right) \\
&\leqslant 2 \left(e^{\sqrt{2}\eta t} \frac{(\sqrt{2})^{m+1}}{m+1} + \frac{2^{\frac{m+1}{3}}}{3(\eta t)^{\frac{m+1}{3}}} \int_0^{+\infty} x^{\frac{m-2}{3}} e^{-x} dx \right) \\
&= 2 \left(e^{\sqrt{2}\eta t} \frac{(\sqrt{2})^{m+1}}{m+1} + \frac{2^{\frac{m+1}{3}}}{3(\eta t)^{\frac{m+1}{3}}} \Gamma\left(\frac{m+1}{3}\right) \right) \\
&\leqslant c_m \left(e^{\sqrt{2}\eta t} + \frac{1}{(\eta t)^{\frac{m+1}{3}}} \right) \\
&\leqslant c_m \frac{e^{\sqrt{2}\eta t} (\eta t)^{\frac{m+1}{3}} + 1}{(\eta t)^{\frac{m+1}{3}}}.
\end{aligned}$$

Gracias a la Proposición A.1 (página 135 del Apéndice A) se tiene la acotación $(\eta t)^{\frac{m+1}{3}} \leqslant c_m e^{\eta t}$, luego podemos escribir:

$$\int_{\mathbb{R}} |\xi|^m \, |\hat{K}_\eta(t,\xi)| d\xi \leqslant c_m \frac{e^{(\sqrt{2}+1)\eta t}}{(\eta t)^{\frac{m+1}{3}}} \leqslant c_m \frac{e^{3\eta t}}{(\eta t)^{\frac{m+1}{3}}}.$$

□

Corolario 3.1. *Sean $t > 0$ y $\eta > 0$, entonces $K_\eta(t,\cdot) \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$.*

Demostración. Por la Proposición 3.3 con $m = 0$ se tiene que $\hat{K}_\eta(t,\cdot) \in L^1_\xi(\mathbb{R})$. Luego, nos remontamos a la propiedad 7 de la Proposición 1.4 (página 13), para colegir que $(\hat{K}_\eta(t,\cdot))^\vee = K_\eta(t,\cdot) \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$. De la misma manera, utilizando la Proposición 3.3 con

$m = 1$ tenemos que $((i\xi)\hat{K}_\eta(t,\cdot))^\vee = \partial_x K_\eta(t,\cdot) \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$. Es decir que $K_\eta(t,\cdot) \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R})$ y se sigue de esta manera recursivamente. $\square$

4.2. Estimaciones de la forma bilineal B_η. Como mencionamos anteriormente, entre los preparativos para la aplicación del teorema de punto fijo de Picard (Teorema 3.1) es necesario obtener estimaciones de la forma bilineal $B_\eta(\cdot,\cdot)$ (definida en (3.21), página 63). En los dos siguientes lemas contenidos en esta subsección daremos estimativas más bien generales, las cuales nos permiten estudiar tanto la existencia local como la regularidad de las soluciones *mild* de (3.1) en los espacios $H^s(\mathbb{R})$ $(s \geqslant 0)$. El siguiente lema comprende el caso cuando $s > 1/2$. Esta restricción se debe a que utilizaremos las Leyes de producto en $H^s(\mathbb{R})$ $(s > 1/2)$, enunciados en el Teorema 1.5 (página 26).

Lema 3.4. *Sean $\eta > 0$, $T > 0$, $s > 1/2$ y $0 \leqslant \lambda < 1$. Entonces se tiene que $B_\eta \in \mathscr{B}(E_T^s \times E_T^s, E_T^{s+\lambda})$ (donde el espacio E_T^s está definido en (3.19) de la página 62) y se cumple la siguiente desigualdad*

$$||B_\eta(u,v)||_{E_T^{s+\lambda}} \leqslant c_{\lambda,\eta}\, e^{\frac{3}{2}\eta T} T^{\frac{1-\lambda}{2}}\, ||u||_{E_T^s}\, ||v||_{E_T^s}\,, \qquad \textit{para todo } u,v \in E_T^s.$$

Demostración. Dados $u, v \in E_T^s$ y $0 \leqslant t \leqslant T$ arbitrario, se tiene que

$$\begin{aligned} ||B_\eta(u,v)(t,\cdot)||_{H^{s+\lambda}} &= \left|\left| \int_0^t \partial_x K_\eta(t-\tau,\cdot) * (u(\tau,\cdot)v(\tau,\cdot))\, d\tau \right|\right|_{H^{s+\lambda}} \\ &\leqslant \int_0^t ||\partial_x K_\eta(t-\tau,\cdot) * (u(\tau,\cdot)v(\tau,\cdot))||_{H^{s+\lambda}}\, d\tau. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Estimaremos la norma que se encuentra dentro de la integral (3.29). Tomando $0 \leqslant \tau < t$, se tiene que

$$\begin{aligned} ||\partial_x K_\eta(t-\tau,\cdot) * (uv(\tau,\cdot))||^2_{H^{s+\lambda}} &= \int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|^2)^{s+\lambda} |\left[\partial_x K_\eta(t-\tau,\cdot) * (uv(\tau,\cdot))\right]^\wedge(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|^2)^{s+\lambda}\, |\xi|^2\, |\hat{K}_\eta(t-\tau,\xi)(uv(\tau,\cdot))^\wedge(\xi)|^2 d\xi \end{aligned}$$

$$\leqslant \int_{\mathbb{R}} \left(1+|\xi|^2\right)^{s+\lambda+1} |\hat{K}_\eta(t-\tau,\xi)(uv(\tau,\cdot))^\wedge(\xi)|^2 d\xi$$

$$= ||S_\eta(t-\tau)(uv(\tau,\cdot))||^2_{H^{s+\lambda+1}}\,. \tag{3.30}$$

Por otro lado, como $s > 1/2$, estamos en la capacidad de aplicar las Leyes de producto 1 (Teorema 1.5, página 26). Entonces $uv(\tau,\cdot) \in H^s(\mathbb{R})$ y $||uv(\tau,\cdot)||_{H^s} \leqslant ||u(\tau,\cdot)||_{H^s}\, ||v(\tau,\cdot)||_{H^s}$. De esta manera podemos utilizar el Lema 3.1 (página 63) con la función $uv(\tau,\cdot)$ para obtener

$$\begin{aligned}
||\partial_x K_\eta(t-\tau,\cdot) * (uv(\tau,\cdot))||_{H^{s+\lambda}} &\leqslant ||S_\eta(t-\tau)(uv(\tau,\cdot))||_{H^{s+\lambda+1}} \\
&\leqslant c_\lambda \frac{e^{\frac{3}{2}\eta(t-\tau)}}{(\eta(t-\tau))^{\frac{\lambda+1}{2}}} ||uv(\tau,\cdot)||_{H^s} \\
&\leqslant c_\lambda \frac{e^{\frac{3}{2}\eta(t-\tau)}}{(\eta(t-\tau))^{\frac{\lambda+1}{2}}} ||u(\tau,\cdot)||_{H^s}\, ||v(\tau,\cdot)||_{H^s}\,. \qquad (3.31)
\end{aligned}$$

Combinando esta estimativa con (3.29), se tiene que

$$\begin{aligned}
||B_\eta(u,v)(t,\cdot)||_{H^{s+\lambda}} &\leqslant \int_0^t ||\partial_x K_\eta(t-\tau,\cdot) * (u(\tau,\cdot)v(\tau,\cdot))||_{H^{s+\lambda+1}}\, d\tau \\
&\leqslant c_\lambda \int_0^t \frac{e^{\frac{3}{2}\eta(t-\tau)}}{(\eta(t-\tau))^{\frac{\lambda+1}{2}}} ||u(\tau,\cdot)||_{H^s}\, ||v(\tau,\cdot)||_{H^s}\, d\tau \qquad (3.32) \\
&\leqslant \frac{c_\lambda}{\eta^{\frac{\lambda+1}{2}}} e^{\frac{3}{2}\eta t} \left(\sup_{0\leqslant\tau\leqslant T} ||u(\tau,\cdot)||_{H^s}\right)\left(\sup_{0\leqslant\tau\leqslant T} ||v(\tau,\cdot)||_{H^s}\right) \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{\lambda+1}{2}}} d\tau \\
&= c_{\lambda,\eta}\, e^{\frac{3}{2}\eta t}\, ||u||_{E^s_T}\, ||v||_{E^s_T}\, \frac{2}{1-\lambda} t^{\frac{1-\lambda}{2}} \\
&= c_{\lambda,\eta}\, e^{\frac{3}{2}\eta t} t^{\frac{1-\lambda}{2}}\, ||u||_{E^s_T}\, ||v||_{E^s_T}\,. \qquad (3.33)
\end{aligned}$$

Luego, ya que $1-\lambda > 0$, tomando el supremo en el intervalo $[0,T]$ concluimos que

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T} ||B_\eta(u,v)(t,\cdot)||_{H^{s+\lambda}} = ||B_\eta(u,v)||_{E^s_T} \leqslant c_{\lambda,\eta}\, e^{\frac{3}{2}\eta T} T^{\frac{1-\lambda}{2}}\, ||u||_{E^s_T}\, ||v||_{E^s_T}\,.$$

$\square$

LEMA 3.5. *Sean $\eta > 0$, $\lambda \geqslant 0$ y $s \geqslant 0$ tales que $s + \lambda < 3/2$. Entonces se tiene que $B_\eta \in \mathscr{B}(E_T^s \times E_T^s, E_T^{s+\lambda})$ (donde el espacio E_T^s está definido en (3.19) de la página 62) y se cumple la siguiente desigualdad*

$$||B_\eta(u,v)||_{E_T^{s+\lambda}} \leqslant c_{s,\lambda,\eta}\, e^{\frac{5}{2}\eta T} T^{\frac{3-2(s+\lambda)}{6}} ||u||_{E_T^s} ||v||_{E_T^s}, \qquad \textit{para todo } u, v \in E_T^s.$$

DEMOSTRACIÓN. Sean $u, v \in E_T^s$. Como hemos visto en (3.30) de la demostración anterior, dados $t > 0$ y $0 \leqslant \tau < t$, podemos mayorar

$$||\partial_x K_\eta(t-\tau,\cdot) * (uv(\tau,\cdot))||_{H^{s+\lambda}} \leqslant ||S_\eta(t-\tau)(uv(\tau,\cdot))||_{H^{s+\lambda+1}}. \tag{3.34}$$

Notemos que $uv \in L^1(\mathbb{R})$. En efecto, gracias a la identidad de Plancherel (propiedad 12 de la Proposición 1.4, página 13) se tiene que

$$\begin{aligned}
||uv(\tau,\cdot)||_{L^1} &\leqslant ||u(\tau,\cdot)||_{L^2} ||v(\tau,\cdot)||_{L^2} \\
&= \frac{1}{2\pi} ||\hat{u}(\tau,\cdot)||_{L^2} ||\hat{v}(\tau,\cdot)||_{L^2} \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi} ||u(\tau,\cdot)||_{H^s} ||v(\tau,\cdot)||_{H^s} < +\infty.
\end{aligned}$$

Luego, del Lema 3.2 (página 66) se sigue que

$$\begin{aligned}
||S_\eta(t-\tau)(uv(\tau,\cdot))||_{H^{s+\lambda+1}} &\leqslant c_{s,\lambda} ||uv(\tau,\cdot)||_{L^1} \frac{e^{\frac{5}{2}\eta(t-\tau)}}{(\eta(t-\tau))^{\frac{2(s+\lambda)+3}{6}}} \\
&\leqslant c_{s,\lambda} ||u(\tau,\cdot)||_{H^s} ||v(\tau,\cdot)||_{H^s} \frac{e^{\frac{5}{2}\eta(t-\tau)}}{(\eta(t-\tau))^{\frac{2(s+\lambda)+3}{6}}}.
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Acoplando (3.34) con (3.35) tenemos que

$$\begin{aligned}
||B_\eta(u,v)(t,\cdot)||_{H^{s+\lambda}} &\leqslant \int_0^t ||S_\eta(t-\tau)(uv(\tau,\cdot))||_{H^{s+\lambda+1}} d\tau \\
&\leqslant c_{s,\lambda} \int_0^t ||u(\tau,\cdot)||_{H^s} ||v(\tau,\cdot)||_{H^s} \frac{e^{\frac{5}{2}\eta(t-\tau)}}{(\eta(t-\tau))^{\frac{2(s+\lambda)+3}{6}}} d\tau \\
&\leqslant \frac{c_{s,\lambda}}{\eta^{\frac{2(s+\lambda)+3}{3}}} e^{\frac{5}{2}\eta t} \left(\sup_{0\leqslant\tau\leqslant T} ||u(\tau,\cdot)||_{H^s}\right) \left(\sup_{0\leqslant\tau\leqslant T} ||u(\tau,\cdot)||_{H^s}\right) \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{2(s+\lambda)+3}{6}}} d\tau
\end{aligned}$$

$$= c_{s,\lambda,\eta}\, e^{\frac{5}{2}\eta t}\, ||u||_{E_T^s}\, ||v||_{E_T^s}\, \frac{6}{3-2(s+\lambda)} t^{\frac{3-2(s+\lambda)}{6}}$$

$$= c_{s,\lambda,\eta}\, e^{\frac{5}{2}\eta t} t^{\frac{3-2(s+\lambda)}{6}}\, ||u||_{E_T^s}\, ||v||_{E_T^s}\, . \tag{3.36}$$

Como $3 - 2(s + \lambda) > 0$ se tiene finalmente

$$||B_\eta(u,v)||_{E_T^{s+\lambda}} = \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} ||B_\eta(u,v)(t,\cdot)|| \leqslant c_{s,\lambda,\eta} e^{\frac{5}{2}\eta T} T^{\frac{3-2(s+\lambda)}{6}}\, ||u||_{E_T^s}\, ||v||_{E_T^s}\, .$$

□

El lector podrá darse cuenta que el Lema 3.5 comprende el caso cuando $0 \leqslant s \leqslant 1/2$ y $0 \leqslant \lambda \leqslant 1/2$. Así, los Lemas 3.4 y 3.5 comprenden todos los casos para $s \geqslant 0$.

4.3. Existencia y unicidad local Como explicamos al comienzo del capítulo actual, el método con el que llevaremos a cabo el estudio del buen planteamiento local del problema (3.1) en los espacios $H^s(\mathbb{R})$ (con $s \geqslant 0$), consistirá en tratarlo como un problema de punto fijo en el espacio de Banach E_T^s (definido en (3.19), página 62).

Lo interesante es que esta existencia de solución, unida a los lemas anteriores referentes a la ganancia de regularidad de la forma bilineal asociada a nuestro problema, nos posibilita mejorar el objetivo deseado. Tal es así que, como veremos, nuestra solución *mild* termina siendo una solución clásica de nuestro problema. No siendo más enunciaremos uno de los principales resultados de nuestro trabajo.

TEOREMA 3.2. *Sean $s \geqslant 0$ y $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ un dato inicial. Entonces, existen un tiempo $T = T(||u_0||_{H^s}) > 0$ y una función $u \in \mathscr{C}([0,T]; H^s(\mathbb{R}))$, única solución mild del problema (3.1). Además, la solución mild verifica $u \in \mathscr{C}^1((0,T]; H^\infty(\mathbb{R}))$, donde $\mathscr{C}^1((0,T]; H^\infty(\mathbb{R})) := \bigcap_{r \geqslant 0} \mathscr{C}^1((0,T]; H^r(\mathbb{R}))$.*

Este teorema ya fue previamente demostrado en Fonseca et al. (2019). En nuestra labor nos ocupamos de todos los detalles técnicos y ofrecemos una forma alternativa y original para estudiar la regularidad de la solución.

Demostración. Dividiremos la demostración en tres partes (existencia, unicidad y regularidad) y en cada parte separaremos en ocasiones los casos cuando $0 \leqslant s \leqslant 1/2$ y cuando $s > 1/2$.

Existencia

Para cumplir los requisitos del teorema de punto fijo de Picard (Teorema 3.1, página 61) tomamos el espacio de Banach E_T^s, definido en (3.19) de la página 62, donde $T > 0$ es un tiempo por determinar. El dato inicial electo es

$$U_0(t,x) = K_\eta(t,\cdot) * u_0(x), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T,\ x \in \mathbb{R},$$

el cual pertence a E_T^s, debido a (3.22) (página 63). Como forma bilineal seleccionamos a nuestra ya conocida $B_\eta(\cdot,\cdot)$, definida en (3.21) (página 63). El tiempo T dependerá de la constante C_T que queremos hallar y que debe satisfacer:

1. $||B_\eta(u,v)||_{E_T^s} \leqslant C_T \, ||u||_{E_T^s} \, ||v||_{E_T^s}$ para todo $u, v \in E_T^s$.
2. $4C_T \, ||U_0||_{E_T^s} < 1$,

de donde, buscaremos la constante C_T y fijaremos T de modo que se satisfagan las condiciones de arriba, dependiendo del valor de s.

- Si $0 \leqslant s \leqslant 1/2$ podemos aplicar el Lema 3.5 (página 73) con $\lambda = 0$, entonces

$$||B_\eta(u,v)||_{E_T^s} \leqslant c_{s,\eta}\, e^{\frac{5}{2}\eta T} T^{\frac{3-2s}{6}} \, ||u||_{E_T^s} \, ||v||_{E_T^s} = C_T \, ||u||_{E_T^s} \, ||v||_{E_T^s} \,. \tag{3.37}$$

Donde $C_T = c_{s,\eta}\, e^{\frac{5}{2}\eta T} T^{\frac{3-2s}{6}}$. Ahora debemos fijar un tiempo T suficientemente pequeño de modo que $4C_T \, ||U_0|| < 1$. Por un lado, si $T \leqslant 1$, de la acotación de

$||U_0||_{E_T^s}$ en (3.22) (página 63) se tiene que

$$4C_T\, ||U_0||_{E_T^s} \leqslant 4c_{s,\eta}\, e^{\frac{5}{2}\eta T} T^{\frac{3-2s}{6}} e^{\frac{3}{2}\eta T}\, ||u_0||_{H^s} \leqslant 4c_{s,\eta} e^{4\eta}\, ||u_0||_{H^s}\, T^{\frac{3-2s}{6}}.$$

La elección de T

$$T = \text{mín}\left(1, \frac{1}{(8c_{s,\eta}\, e^{4\eta}\, ||u_0||_{H^s})^{\frac{6}{3-2s}}}\right) \tag{3.38}$$

cumple con nuestro propósito.

- Si $s > 1/2$, usamos el Lema 3.4 (página 71) con $\lambda = 0$. Se sigue que

$$||B_\eta(u,v)||_{E_T^s} \leqslant c_\eta\, e^{\frac{3}{2}\eta T} T^{\frac{1}{2}}\, ||u||_{E_T^s}\, ||v||_{E_T^s} = C_T\, ||u||_{E_T^s}\, ||v||_{E_T^s}\,, \tag{3.39}$$

donde $C_T = c_\eta\, e^{\frac{3}{2}\eta T} T^{\frac{1}{2}}$. Luego tomamos

$$T = \text{mín}\left(1, \frac{1}{(8c_\eta e^{3\eta}\, ||u_0||_{H^s})^2}\right), \tag{3.40}$$

de manera que

$$4C_T\, ||U_0|| \leqslant 4c_\eta\, e^{3\eta}\, T^{\frac{1}{2}}\, ||u_0||_{H^s} \leqslant \frac{1}{2} < 1.$$

Tanto si $0 \leqslant s \leqslant 1/2$ como cuando $s > 1/2$, se sigue del Teorema 3.1 (página 61) que existe una función $u \in E_T^s$ que es solución del problema

$$u = U_0 + B_\eta(u,u).$$

En otras palabras, existe u que verifica

$$u(t,x) = K_\eta(t,\cdot) * u_0(x) - \frac{1}{2}\int_0^t \partial_x K_\eta(t-\tau,\cdot) * u^2(\tau,\cdot)(x)d\tau, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T,\ x \in \mathbb{R}, \tag{3.41}$$

donde el tiempo T está definido en (3.38) si $0 \leqslant s \leqslant 1/2$, o bien en (3.40) si $s > 1/2$.

Notemos que por la definición de solución *mild* de (3.1) (Definición 3.2, página 49), u debería escribirse

$$u(t,x) = K_\eta(t,\cdot) * u_0(x) - \int_0^t K_\eta(t-\tau,\cdot) * \left(u(\tau,\cdot)\partial_x u(\tau,\cdot)\right)(x)d\tau, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T,\ x \in \mathbb{R},$$

que no es la misma expresión dada en (3.41). En los siguientes renglones trabajaremos con funciones que sean soluciones de la ecuación integral (3.41) y luego mostraremos que estas mismas coinciden con las soluciones *mild* del problema (3.1), cuando conozcamos que son más regulares en la última parte de esta demostración.

Unicidad

Una consecuencia del teorema de punto fijo de Picard (Teorema 3.1, página 61) es que nuestra solución *mild* que cumple la ecuación (3.41) es única en la bola $B_{E^s_T}(0, 2\,||U_0||_{E^s_T})$. Esto no nos permite concluir la no existencia de otra solución fuera de dicha bola.

Así, para la prueba de la unicidad de solución sobre todo el espacio E^s_T de la ecuación integral (3.41) suponemos que existen $u, v \in E^s_T$, dos soluciones distintas asociadas a un mismo dato inicial u_0. Entonces u y v se escriben

$$u(t,x) = K_\eta(t) * u_0(x) - \frac{1}{2}\int_0^t \partial_x K_\eta(t-\tau,\cdot) * u^2(\tau,\cdot)(x)d\tau, \qquad x \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant t \leqslant T,$$

$$v(t,x) = K_\eta(t) * u_0(x) - \frac{1}{2}\int_0^t \partial_x K_\eta(t-\tau,\cdot) * v^2(\tau,\cdot)(x)d\tau, \qquad x \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Notamos $w = u - v$, de modo que w tiene la forma

$$\begin{aligned} w(t,x) = &-\frac{1}{2}\int_0^t \partial_x K_\eta(t-\tau,\cdot) * \left(u^2(\tau,\cdot) - v^2(\tau,\cdot)\right)(x)d\tau \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^t \partial_x K_\eta(t-\tau,\cdot) * \left(\left(u(\tau,\cdot) - v(\tau,\cdot)\right)\left(u(\tau,\cdot) + v(\tau,\cdot)\right)\right)(x)d\tau \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^t \partial_x K_\eta(t-\tau,\cdot) * \left(w(\tau,\cdot)\left(u(\tau,\cdot) + v(\tau,\cdot)\right)\right)(x)d\tau. \end{aligned}$$

Luego definimos

$$T^* = \sup\{0 \leqslant t \leqslant T \mid w(t',\cdot) = 0,\ \text{para todo } 0 \leqslant t' \leqslant t\},$$

que es el tiempo máximal para el cual u y v son iguales. Nuestro objetivo es probar que $T^* = T$, de manera que $u(t,\cdot) = v(t,\cdot)$ para todo $t \in [0,T]$. Por absurdo suponemos que

$T^* < T$, así podemos tomar un tiempo intermedio $T^* < T_1 < T$, el cual usaremos para contradecir el hecho que T^* es maximal. Se tiene que

$$\begin{aligned}\sup_{T^*\leqslant t\leqslant T_1} ||w(t,\cdot)||_{H^s} &= \sup_{0\leqslant t\leqslant T_1-T^*} ||w(t+T^*,\cdot)||_{H^s} \\ &\leqslant \sup_{0\leqslant t\leqslant T_1-T^*} \int_0^{t+T^*} ||\partial_x K_\eta(t+T^*-\tau,\cdot) * (w(\tau,\cdot)\,(u(\tau,\cdot)+v(\tau,\cdot)))||_{H^s}\, d\tau.\end{aligned}$$

Pero como $w(\tau,\cdot)=0$ para todo $0\leqslant\tau\leqslant T^*$, es posible escribir

$$\begin{aligned}\sup_{T^*\leqslant t\leqslant T_1} ||w(t,\cdot)||_{H^s} &\leqslant \sup_{0\leqslant t\leqslant T_1-T^*} \int_{T^*}^{t+T^*} ||\partial_x K_\eta(t+T^*-\tau,\cdot) * (w(\tau,\cdot)\,(u(\tau,\cdot)+v(\tau,\cdot)))||_{H^s}\, d\tau \\ &\leqslant \sup_{0\leqslant t\leqslant T_1-T^*} \int_{T^*}^{t+T^*} ||S_\eta(t+T^*-\tau)\,(w(\tau,\cdot)\,(u(\tau,\cdot)+v(\tau,\cdot)))||_{H^{s+1}}\, d\tau. \qquad (3.42)\end{aligned}$$

Nuevamente dividiremos la demostración en casos:

- Si $s > 1/2$, por las Leyes de producto 1 (Teorema 1.5, página 26) y el Lema 3.1 de la página 63 se sigue que

$$\begin{aligned}&\sup_{T^*\leqslant t\leqslant T_1} ||w(t,\cdot)||_{H^s} \\ &\leqslant \sup_{0\leqslant t\leqslant T_1-T^*} \left(c_\eta\, e^{\frac{3}{2}\eta(t+T^*)} \int_{T^*}^{t+T^*} \frac{1}{(t+T^*-\tau)^{\frac{1}{2}}}\, ||w(\tau,\cdot)||_{H^s}\, ||u(\tau,\cdot)+v(\tau,\cdot)||_{H^s}\, d\tau \right) \\ &\leqslant c_\eta \sup_{0\leqslant t\leqslant T_1-T^*} \left(2e^{\frac{3}{2}\eta(t+T^*)} \left(\sup_{T^*\leqslant\tau\leqslant t+T^*} ||w(\tau,\cdot)||_{H^s} \right) t^{\frac{1}{2}} \right) ||u+v||_{E_T^s} \\ &= c_\eta\, e^{\frac{3}{2}\eta T_1} \left(\sup_{T^*\leqslant\tau\leqslant T_1} ||w(\tau,\cdot)||_{H^s} \right) (T_1-T^*)^{\frac{1}{2}}\, ||u+v||_{E_T^s}\,.\end{aligned}$$

  Tomamos T_1 lo suficientemente cercano a T^*, de modo que $\sup\limits_{T^*\leqslant t\leqslant T_1} ||w(t,\cdot)||_{H^s} \leqslant \dfrac{1}{2} \sup\limits_{T^*\leqslant t\leqslant T_1} ||w(t,\cdot)||_{H^s}$ y por ende que $w(t,\cdot)$ se anule en $[T^*, T_1]$, lo cual es contradictorio por la definición de T^*.

- Si $0\leqslant s\leqslant 1/2$, empleamos el Lema 3.2. Entonces tenemos

$$\begin{aligned}&\sup_{T^*\leqslant t\leqslant T_1} ||w(t,\cdot)||_{H^s} \\ &\leqslant c_{s,\eta} \sup_{0\leqslant t\leqslant T_1-T^*} \left(e^{\frac{5}{2}\eta(t+T^*)} \int_{T^*}^{t+T^*} \frac{1}{(t+T^*-\tau)^{\frac{2s+3}{6}}}\, ||w(\tau,\cdot)(u(\tau,\cdot)+v(\tau,\cdot))||_{L^1}\, d\tau \right) \\ &\leqslant c_{s,\eta} \sup_{0\leqslant t\leqslant T_1-T^*} \left(e^{\frac{5}{2}\eta(t+T^*)} \int_{T^*}^{t+T^*} \frac{1}{(t+T^*-\tau)^{\frac{2s+3}{6}}}\, ||w(\tau,\cdot)||_{H^s}\, ||u(\tau,\cdot)+v(\tau,\cdot)||_{H^s}\, d\tau \right)\end{aligned}$$

$$\leqslant c_{s,\eta} \sup_{0\leqslant t\leqslant T_1-T^*} \left(e^{\frac{5}{2}\eta(t+T^*)} \left(\sup_{T^*\leqslant\tau\leqslant t+T^*} ||w(\tau,\cdot)||_{H^s} \right) \int_{T^*}^{t+T^*} \frac{1}{(t+T^*-\tau)^{\frac{2s+3}{6}}} d\tau \right) ||u+v||_{E_T^s}$$

$$= c_{s,\eta} \sup_{0\leqslant t\leqslant T_1-T^*} \left(e^{\frac{5}{2}\eta(t+T^*)} \left(\sup_{T^*\leqslant\tau\leqslant t+T^*} ||w(\tau,\cdot)||_{H^s} \right) \frac{6}{3-2s} t^{\frac{3-2s}{6}} \right) ||u+v||_{E_T^s}$$

$$= c_{s,\eta} e^{\frac{5}{2}\eta T_1} \sup_{T^*\leqslant\tau\leqslant T_1} ||w(\tau,\cdot)||_{H^s} (T_1-T^*)^{\frac{3-2s}{6}} ||u+v||_{E_T^s}.$$

De igual manera al punto anterior, podemos tomar T_1 lo suficientemente cercano a T^* para concluir que $w(\tau,\cdot)$ se anula para todo $T^* \leqslant t \leqslant T_1$, lo cual no es posible porque contradice la definición de T^*.

Regularidad

En esta última parte de la demostración probaremos que $u \in \mathscr{C}([0,T];H^s(\mathbb{R})) \cap \mathscr{C}^1((0,T];H^\infty(\mathbb{R}))$, donde $\mathscr{C}^1((0,T];H^\infty(\mathbb{R})) = \bigcap_{r\geqslant 0} \mathscr{C}^1((0,T];H^r(\mathbb{R}))$.

Empezaremos comprobando la continuidad de u en el tiempo $t=0$. Como la solución se escribe como

$$u(t,x) = S_\eta(t)u_0(x) + B_\eta(u,u)(t,x), \qquad 0\leqslant t\leqslant T,\ x\in\mathbb{R}, \tag{3.43}$$

debemos analizar la parte lineal $S_\eta(t)u_0$ y la parte no lineal $B_\eta(u,u)(t,\cdot)$ separadamente. La continuidad en el tiempo $t=0$ de la parte lineal ya fue probada cuando vimos que $(S_\eta(t))_{t\geqslant 0}$ es un semigrupo continuo en $H^s(\mathbb{R})$ $(s\geqslant 0)$, en la Proposición 3.1 de la página 53. La continuidad de $B_\eta(u,u)$ en el tiempo $t=0$ la demostraremos por medio de sucesiones. Sea $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números positivos tal que $\lim_{n\to+\infty} t_n = 0$.

- Si $0\leqslant s\leqslant 1/2$, de la estimación (3.36) (página 74) con $\lambda=0$ se sigue que

$$\begin{aligned} ||B_\eta(u,u)(t_n,\cdot) - B_\eta(u,u)(0,\cdot)||_{H^s} &= ||B_\eta(u,u)(t_n,\cdot)||_{H^s} \\ &\leqslant c_{s,\eta}\, e^{\frac{5}{2}\eta t_n} t_n^{\frac{3-2s}{6}} ||u||_{E_T^s}^2, \end{aligned}$$

que tiende a 0 cuando $n\to+\infty$.

- Si $s > 1/2$, de (3.33) (página 72) con $\lambda = 0$ se tiene

$$\begin{aligned}||B_\eta(u,u)(t_n,\cdot) - B_\eta(u,u)(0,\cdot)||_{H^s} &= ||B_\eta(u,u)(t_n,\cdot)||_{H^s}\\ &\leqslant c_\eta\, e^{\frac{3}{2}\eta t_n} t_n^{\frac{1}{2}}\, ||u||^2_{E^s_T}\,,\end{aligned}$$

  que tiende a 0 cuando $n \to +\infty$.

Esto comprueba que $B_\eta(u,u)$ es continua en el tiempo $t = 0$ y por consiguiente u también lo es.

Para la continuidad de u en el intervalo $(0,T]$ probaremos provisionalmente que $\sup\limits_{\rho\leqslant t\leqslant T} ||u(t,\cdot)||_{H^r} < +\infty$ para todo $0 < \rho < T$ y todo $r \geqslant 0$ ($u \in \bigcap\limits_{r\geqslant 0} L^\infty([\rho,T]); H^s(\mathbb{R})$ para todo $0 < \rho < T$), esto nos será de utilidad para estatuir que u pertenece a $\mathscr{C}((0,T];H^\infty(\mathbb{R}))$. Por un lado, de la Observación 3.7 (página 69) sabemos que $S_\eta(\cdot)u_0 \in \mathscr{C}((0,T];H^\infty(\mathbb{R}))$, entonces en particular se verifica que $\sup\limits_{\rho\leqslant t\leqslant T} ||S_\eta(t)u_0||_{H^r} < +\infty$ para todo $0 < \rho < T$ y todo $r \geqslant 0$. Por otro lado, para comprobar se cumple el mismo control sobre $B_\eta(u,u)(t,\cdot)$ (y por tanto sobre u) seguiremos un minucioso procedimiento, en el cual utilizaremos recursivamente el siguiente lema técnico

Lema 3.6. *Sean $\eta > 0$, $T > 0$, $0 < \rho < T$ tal que $0 < 2\rho < T$, $0 \leqslant \lambda < 1$, $s \geqslant 0$ y $r \geqslant 0$ tales que $s + r > 1/2$. Supongamos además que $u, v \in L^\infty([0,\rho];H^s(\mathbb{R})) \cap L^\infty([\rho,T];H^{s+r}(\mathbb{R}))$. Entonces $B_\eta(u,v) \in L^\infty([2\rho,T];H^{s+r+\lambda}(\mathbb{R}))$ y se cumple la desigualdad*

$$\begin{aligned}&\sup_{2\rho\leqslant t\leqslant T} ||B_\eta(u,v)(t,\cdot)||_{H^{s+r+\lambda}}\\ &\leqslant c_{s,r,\lambda,T,\rho,\eta}\left(\left[\sup_{0\leqslant t\leqslant\rho} ||u(\tau,\cdot)||_{H^s}\right]\left[\sup_{0\leqslant t\leqslant\rho} ||v(\tau,\cdot)||_{H^s}\right] + \left[\sup_{\rho\leqslant t\leqslant T} ||u(\tau,\cdot)||_{H^{s+r}}\right]\left[\sup_{\rho\leqslant t\leqslant T} ||v(\tau,\cdot)||_{H^{s+r}}\right]\right).\end{aligned}$$

Su demostración la situamos en el Apéndice C (página 142). Siguiendo con la demostración sobre la regularidad de la solución, tomamos $0 < \rho < T$ y $N \in \mathbb{N}$ cualesquiera. El procedimiento mencionado anteriormente lo detallamos aquí, dependiendo del valor de s:

- Si $0 \leqslant s \leqslant 1/2$. Puesto que $u \in E_T^s$, estamos en la capacidad de utilizar el Lema 3.5 (página 73) con $\lambda = 3/4$ (esta elección de λ es para tener que $1/2 < s + \lambda < 3/2$). Entonces $B_\eta(u,u) \in E_T^{s+\lambda}$ y $u = S_\eta(\cdot)u_0 + B_\eta(u,u) \in L^\infty([2^{-N}\rho, T]; H^{s+\frac{3}{4}})$. Luego, del Lema 3.6 con $r = 3/4$ y $\lambda = 3/4$, se sigue que $B_\eta(u,u) \in L^\infty([2^{1-N}\rho, T]; H^{s+\frac{3}{2}}(\mathbb{R}))$. A partir de este punto podemos aumentar la regularidad de u iterativamente con el Lema 3.6, con *paso* constante $\lambda = 3/4$ hasta obtener $u \in L^\infty([\rho, T]; H^{s+(N+1)\frac{3}{4}}(\mathbb{R}))$, pero como N y ρ son arbitrarios, este proceso nos permite concluir que

$$u \in L^\infty([\rho, T], H^\infty(\mathbb{R})) := \bigcap_{r \geqslant 0} L^\infty([\rho, T], H^r(\mathbb{R})), \qquad \text{para todo } 0 < \rho < T. \tag{3.44}$$

- Si $1/2 < s$, argumentamos bajo el mismo procedimiento explicado arriba, pero utilizando el Lema 3.6 durante todo el proceso.

Teniendo en mente (3.44), ahora probaremos que $B_\eta(u,u) \in \mathscr{C}((0,T]; H^\infty(\mathbb{R}))$ mediante sucesiones. Sean $\lambda > 0$ arbitrario, $t > 0$ y $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números positivos tal que $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = t$. Tomamos $\rho = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} t_n$, número estrictamente positivo, pues de no serlo podríamos encontrar una subsucesión $(t_m)_{m\in\mathbb{N}}$ tal que $t_m < \frac{1}{m}$, contradiciendo el hecho que $t > 0$. Suponemos sin pérdida de generalidad que $t_n \geqslant t$, se tiene que

$$\begin{aligned}
&||B_\eta(u,u)(t_n,\cdot) - B_\eta(u,u)(t,\cdot)||_{H^{s+\lambda}} \\
&= \left|\left|\int_0^{t_n} \partial_x K_\eta(t_n-\tau,\cdot) * u^2(\tau,\cdot)d\tau - \int_0^t \partial_x K_\eta(t-\tau,\cdot) * u^2(\tau,\cdot)d\tau\right|\right|_{H^{s+\lambda}} \\
&\leqslant \int_t^{t_n} \left|\left|\partial_x K_\eta(t_n-\tau,\cdot) * u^2(\tau,\cdot)\right|\right|_{H^{s+\lambda}} d\tau + \int_0^t \left|\left|\partial_x K_\eta(t_n-\tau,\cdot) * u^2(\tau,\cdot) - \partial_x K_\eta(t-\tau,\cdot) * u^2(\tau,\cdot)\right|\right|_{H^{s+\lambda}} d\tau \\
&= \int_t^{t_n} \left|\left|\partial_x K_\eta(t_n-\tau,\cdot) * u^2(\tau,\cdot)\right|\right|_{H^{s+\lambda}} d\tau + \int_0^{\rho/2} \left|\left|\partial_x K_\eta(t_n-\tau,\cdot) * u^2(\tau,\cdot) - \partial_x K_\eta(t-\tau,\cdot) * u^2(\tau,\cdot)\right|\right|_{H^{s+\lambda}} d\tau \\
&\quad + \int_{\rho/2}^t \left|\left|\partial_x K_\eta(t_n-\tau,\cdot) * u^2(\tau,\cdot) - \partial_x K_\eta(t-\tau,\cdot) * u^2(\tau,\cdot)\right|\right|_{H^{s+\lambda}} d\tau \\
&\leqslant \int_t^{t_n} \left|\left|S_\eta(t_n-\tau)(u^2(\tau,\cdot))\right|\right|_{H^{s+\lambda+1}} d\tau + \int_0^{\rho/2} \left|\left|S_\eta(t_n-\tau)(u^2(\tau,\cdot)) - S_\eta(t-\tau)(u^2(\tau,\cdot))\right|\right|_{H^{s+\lambda+1}} d\tau \\
&\quad + \int_{\rho/2}^T \left|\left|S_\eta(t_n-\tau)(u^2(\tau,\cdot)) - S_\eta(t-\tau)(u^2(\tau,\cdot))\right|\right|_{H^{s+\lambda+1}} d\tau \\
&= I_1(t_n) + I_2(t_n) + I_3(t_n).
\end{aligned}$$

Estimaremos cada integral y tomaremos el límite cuando $n \to +\infty$. Primero para $I_1(t_n)$, del Lema 3.1 (página 63), se tiene

$$\begin{aligned} I_1(t_n) &= \int_t^{t_n} \left|\left|S_\eta(t_n-\tau)(u^2(\tau,\cdot))\right|\right|_{H^{s+\lambda+1}} d\tau \\ &\leqslant e^{\frac{3}{2}\eta t_n} \int_t^{t_n} ||u(\tau,\cdot)||^2_{H^{s+\lambda+1}} d\tau \\ &\leqslant e^{\frac{3}{2}\eta t_n} \sup_{t\leqslant\tau\leqslant t_n} ||u(\tau,\cdot)||^2_{H^{s+\lambda+1}} (t_n-t) \\ &\leqslant e^{\frac{3}{2}\eta t_n} \sup_{\rho\leqslant\tau\leqslant T} ||u(\tau,\cdot)||^2_{H^{s+\lambda+1}} (t_n-t). \end{aligned}$$

que tiende a 0 cuando $n \to +\infty$.

Para $I_2(t_n)$ utilizamos el teorema de convergencia dominada de Lebesgue. Esto es posible pues del Lema 3.2 (página 66), la norma dentro de la integral $I_2(t_n)$ para $0 \leqslant \tau \leqslant \rho/2$ se estima

$$\begin{aligned} &||S_\eta(t_n-\tau)(u^2(\tau,\cdot)) - S_\eta(t-\tau)(u^2(\tau,\cdot))||_{H^{s+\lambda+1}} \\ &\qquad\leqslant \left|\left|S_\eta(t_n-\tau)(u^2(\tau,\cdot))\right|\right|_{H^{s+\lambda+1}} + \left|\left|S_\eta(t-\tau)(u^2(\tau,\cdot))\right|\right|_{H^{s+\lambda+1}} \\ &\qquad\leqslant c_{\eta,s,\lambda}\left(\frac{e^{\frac{5}{2}\eta(t_n-\tau)}}{(t_n-\tau)^{\frac{2(s+\lambda)+3}{6}}} + \frac{e^{\frac{5}{2}\eta(t-\tau)}}{(t-\tau)^{\frac{2(s+\lambda)+3}{6}}}\right) ||u(\tau,\cdot)||^2_{H^s} \\ &\qquad\leqslant c_{\eta,s,\lambda} e^{\frac{5}{2}\eta T} \frac{1}{(\rho-\tau)^{\frac{2(s+\lambda)+3}{6}}} \sup_{0\leqslant\tau\leqslant\frac{\rho}{2}} ||u(\tau,\cdot)||^2_{H^s}\,, \end{aligned}$$

donde la función

$$\begin{aligned} [0,\rho/2] &\to \mathbb{R}^+ \\ \tau &\mapsto \frac{1}{(\rho-\tau)^{\frac{2(s+\lambda)+3}{6}}} \end{aligned}$$

es integrable, en efecto

$$\int_0^{\rho/2} \frac{1}{(\rho-\tau)^{\frac{2(s+\lambda)+3}{6}}} d\tau = \frac{6}{2(s+\lambda)-3}\left(\left(\frac{\rho}{2}\right)^{\frac{3-2(s+\lambda)}{6}} - \rho^{\frac{3-2(s+\lambda)}{6}}\right) < +\infty.$$

Finalmente para $I_3(t_n)$ nos valemos una vez más del Lema 3.1 (página 63) y del teorema de convergencia dominada de Lebesgue. Acotando lo que se encuentra dentro de la integral, para todo $\rho/2 \leqslant \tau \leqslant T$ se tiene que

$$\begin{aligned}
&||S_\eta(t_n-\tau)(u^2(\tau,\cdot)) - S_\eta(t-\tau)(u^2(\tau,\cdot))||_{H^{s+\lambda+1}} \\
&\qquad \leqslant \left|\left|S_\eta(t_n-\tau)(u^2(\tau,\cdot))\right|\right|_{H^{s+\lambda+1}} + \left|\left|S_\eta(t-\tau)(u^2(\tau,\cdot))\right|\right|_{H^{s+\lambda+1}} \\
&\qquad \leqslant c_\eta \left(e^{\frac{3}{2}\eta(t_n-\tau)} \,||u(\tau,\cdot)||^2_{H^{s+\lambda+1}} + e^{\frac{3}{2}\eta(t-\tau)} \,||u(\tau,\cdot)||^2_{H^{s+\lambda+1}}\right) \\
&\qquad \leqslant c_\eta (e^{\frac{3}{2}\eta T} + e^{\frac{3}{2}\eta t}) \sup_{\rho/2 \leqslant \tau \leqslant T} ||u(\tau,\cdot)||^2_{H^{s+\lambda+1}} < +\infty.
\end{aligned}$$

Recopilando los límites de las tres integrales concluimos

$$\lim_{n\to+\infty} ||B_\eta(u,u)(t_n,\cdot) - B_\eta(u,u)(t,\cdot)||_{H^{s+\lambda}} \leqslant \lim_{n\to+\infty} (I_1(t_n) + I_2(t_n) + I_3(t_n)) = 0.$$

Se ha pues, demostrado que $B_\eta(u,u) \in \mathscr{C}((0,T];H^{s+\lambda}(\mathbb{R}))$. Luego $u \in \mathscr{C}((0,T];H^{s+\lambda}(\mathbb{R}))$, pero como $\lambda > 0$ es arbitrario, se sigue que $u \in \mathscr{C}((0,T];H^{\infty}(\mathbb{R}))$.

Una vez estudiada la regularidad de la solución de la ecuación integral (3.41), observemos que en efecto es la única solución *mild* del problema (3.1). Como $u \in \mathscr{C}((0,T];H^{\infty}(\mathbb{R}))$, en particular se tiene que $u(\tau,\cdot) \in H^2(\mathbb{R})$ para todo $0 < \tau \leqslant T$. Luego, $\partial_x u(\tau,\cdot)$ y $u(\tau,\cdot)$ pertenecen a $H^1(\mathbb{R})$ y por las Leyes de producto 1 (Teorema 1.5, página 26) se sigue que $\partial_x(u^2(\tau,\cdot)) = 2u\partial_x u(\tau,\cdot) \in H^1(\mathbb{R})$. Por ende, del Lema 3.1 (página 63 con $\lambda = 0$), la convolución $K_\eta(t-\tau,\cdot) * (u\partial_u(\tau,\cdot))$ está bien definida. Esto nos autoriza a escribir las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}
u(t,x) &= K_\eta(t,\cdot) * u_0(x) - \frac{1}{2}\int_0^t \partial_x K_\eta(t-\tau,\cdot) * u^2(t,\cdot)(x)d\tau \\
&= K_\eta(t,\cdot) * u_0(x) - \frac{1}{2}\int_0^t K_\eta(t-\tau,\cdot) * \partial_x(u^2(t,\cdot))(x)d\tau \\
&= K_\eta(t,\cdot) * u_0(x) - \int_0^t K_\eta(t-\tau,\cdot) * (u(\tau,\cdot)\partial_x u(\tau,\cdot))\,(x)d\tau, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T,\ x \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

fórmula que concuerda con la definición de solución *mild* de (3.1).

Lo único que queda restando en este estudio de regularidad es verificar que $\partial_t u$ también pertenece al espacio $\mathscr{C}((0,T];H^\infty(\mathbb{R}))$. Primero, como u es solución *mild* de (3.1), entonces satisface la ecuación diferencial

$$\partial_t u = -\mathcal{H}\partial_x^2 u - u\partial_x u - \eta\mathcal{H}(\partial_x u + \partial_x^3 u), \tag{3.45}$$

en el sentido de las distribuciones temperadas. Entonces podemos observar que la continuidad de $\partial_t u$ (en la norma de los espacios de Sobolev no homogéneos) depende de los términos de la derecha de la igualdad (3.45). Puesto que $u \in \mathscr{C}((0,T];H^\infty(\mathbb{R}))$, basta con saber si la transformada de Hilbert preserva la continuidad en variable temporal de funciones y qué sucede con el término no lineal $u\partial_x u$. Solventaremos estas dudas a continuación. Con respecto a la transformada de Hilbert, veamos de manera general que si $v \in \mathscr{C}((0,T];H^r(\mathbb{R})$ $(r \in \mathbb{R})$, entonces $\mathcal{H}v$ pertenece al mismo espacio. En efecto, tomamos $t > 0$ y $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números positivos que convergen a t. Ya que la transformada de Hilbert es una isometría en los espacios de Sobolev no Homogéneos (Proposición B.1, página 141 del Apéndice B), se tiene que

$$||\mathcal{H}v(t,\cdot) - \mathcal{H}v(t_n,\cdot)||_{H^r} = ||v(t,\cdot) - v(t_n)||_{H^r}$$

que tiende a 0 cuando $n \to +\infty$.

Para ocuparnos de la parte no lineal tomamos $\lambda > 1/2$ arbitrario y la misma sucesión $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que tomamos arriba. Tenemos

$$\begin{aligned} ||u(t,\cdot)\partial_x u(t,\cdot) - u(t_n,\cdot)\partial_x u(t_n,\cdot)||_{H^{s+\lambda}} &= ||u(t,\cdot)(\partial_x u(t,\cdot) - \partial_x u(t_n,\cdot)) + \partial_x u(t_n,\cdot)(u(t,\cdot) - u(t_n,\cdot))||_{H^{s+\lambda}} \\ &\leqslant ||u(t,\cdot)(\partial_x u(t,\cdot) - \partial_x u(t_n,\cdot))||_{H^{s+\lambda}} + ||\partial_x u(t_n,\cdot)(u(t,\cdot) - u(t_n,\cdot))||_{H^{s+\lambda}}. \end{aligned} \tag{3.46}$$

Pero como $u(t,\cdot), u(t_n,\cdot), \partial_x u(t,\cdot), \partial_x u(t_n,\cdot) \in H^{s+\lambda}(\mathbb{R})$ y $s+\lambda > 1/2$, podemos aplicar las Leyes de producto 1 (Teorema 1.5, página 26), así

$$\begin{aligned}
||u(t,\cdot)(\partial_x u(t,\cdot) - \partial_x u(t_n,\cdot))||_{H^{s+\lambda}} &\leqslant c_{s,\lambda} ||u(t,\cdot)||_{H^{s+\lambda}} ||\partial_x u(t,\cdot) - \partial_x u(t_n,\cdot)||_{H^{s+\lambda}} \\
&\leqslant c_{s,\lambda} ||u(t,\cdot)||_{H^{s+\lambda}} ||u(t,\cdot) - u(t_n,\cdot)||_{H^{s+\lambda+1}}, \quad (3.47)
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
||\partial_x u(t_n,\cdot)(u(t,\cdot) - u(t_n,\cdot))||_{H^{s+\lambda}} &\leqslant c_{s,\lambda} ||\partial_x u(t_n,\cdot)||_{H^{s+\lambda}} ||u(t,\cdot) - u(t_n,\cdot)||_{H^{s+\lambda}} \\
&\leqslant c_{s,\lambda} ||u(t_n,\cdot)||_{H^{s+\lambda+1}} ||u(t,\cdot) - u(t_n,\cdot)||_{H^{s+\lambda}} \\
&\leqslant c_{s,\lambda} M ||u(t,\cdot) - u(t_n,\cdot)||_{H^{s+\lambda}}, \quad (3.48)
\end{aligned}$$

donde M es una constante no negativa tal que $||u(t_n,\cdot)||_{H^{s+\lambda+1}} \leqslant M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, que existe pues la sucesión $(||u(t_n,\cdot)||_{H^{s+\lambda+1}})_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente (debido a la continuidad de u). Acoplando (3.46), (3.47) y (3.48) obtenemos

$$\begin{aligned}
||u(t,\cdot)\partial_x u(t,\cdot) - u(t_n,\cdot)\partial_x u(t_n,\cdot)||_{H^{s+\lambda}} &\leqslant c_{s,\lambda} ||u(t,\cdot)||_{H^{s+\lambda}} ||u(t,\cdot) - u(t_n,\cdot)||_{H^{s+\lambda+1}} \\
&\quad + c_{s,\lambda} M ||u(t,\cdot) - u(t_n,\cdot)||_{H^{s+\lambda}},
\end{aligned}$$

que tiende a 0 cuando $n \to +\infty$ con motivo de la continuidad de u. □

Observación 3.8. *Utilizando el resultado visto en la Proposición 4.2, página 18 de Cortez y Jarrín (2020), el cual utiliza la regularidad de la solución, podemos concluir que nuestra solución mild es en realidad una solución clásica.*

4.4. Existencia global En el Teorema 3.2 de la sección anterior aseguramos la existencia de una función $u \in \mathscr{C}([0,T]; H^s(\mathbb{R})) \cap \mathscr{C}^1((0,T]; H^\infty(\mathbb{R}))$, única solución *mild* del problema (3.1), donde $T > 0$ es un tiempo de existencia finito y $\mathscr{C}^1((0,T); H^s(\mathbb{R})) = \bigcap_{r\geqslant 0} \mathscr{C}^1((0,T), H^r(\mathbb{R}))$.

La razón final de este capítulo reside en comprobar que se puede extender el tiempo T indefinidamente, de modo que u sea la única solución *mild* global en tiempo del problema (3.1). Con respecto a este útimo punto, Fonseca, Pastrán y Rodriguez mostraron que en efecto el tiempo de existencia puede ser arbitrariamente grande (véase la sección 3.3 de Fonseca et al. (2019)), en los siguientes renglones nos dedicamos a detallar los pormenores de sus resultados. El método utilizado tiene como base un lema de Grönwall (Lema A.1, página 138 del Apéndice 3), que asegura la no existencia de un fenómeno de explosión en tiempo finito de u en la norma del espacio $L^2(\mathbb{R})$. Esto nos deja extender temporalmente a la solución u en el marco del espacio $L^2(\mathbb{R})$. Luego, la propiedad de aumento de regularidad en variable espacial ya estudiada de la solución nos permite concluir que $u \in \mathscr{C}([0,+\infty); H^s(\mathbb{R})) \cap \mathscr{C}^1((0,+\infty); H^\infty(\mathbb{R}))$, donde $\mathscr{C}^1((0,+\infty); H^\infty(\mathbb{R})) = \bigcap\limits_{r \geqslant 0} \mathscr{C}^1((0,+\infty), H^r(\mathbb{R}))$.

Empecemos pues, demostrando que no existe un tiempo de explosión para $||u(t,\cdot)||_{L^2}$.

Proposición 3.4. *Sean $T > 0$, $s \geqslant 0$ y $u \in \mathscr{C}([0,T]; H^s(\mathbb{R})) \cap \mathscr{C}^1((0,T]; H^\infty(\mathbb{R}))$ solución mild local de (3.1). Se tiene entonces la siguiente estimación:*

$$||u(t,\cdot)||_{L^2} \leqslant ||u_0||_{L^2}\, e^{Ct}, \quad \textit{para todo } 0 \leqslant t \leqslant T,$$

donde $C > 0$ es una constante.

Demostración. Como u es solución *mild* de (3.1), $u(0) = u_0$ y satisface

$$\partial_t u(t,x) + \mathcal{H}\partial_x^2 u(t,x) + u(t,x)\,\partial_x u(t,x) + \eta\mathcal{H}(\partial_x u(t,x) + \partial_x^3 u(t,x)) = 0,$$

para todo $0 < t \leqslant T$ y todo $x \in \mathbb{R}$. Luego, fijamos $0 < t < T$, multiplicamos $u(x,t)$ a ambos lados de la anterior igualdad e integramos sobre todo $\mathbb{R}$ para obtener:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\,||u(t,\cdot)||_{L^2}^2 + \int_{\mathbb{R}} u(t,x)\,\mathcal{H}\partial_x^2 u(t,x)dx + \int_{\mathbb{R}} u^2(t,x)\,\partial_x u(t,x)dx$$

$$+\,\eta\int_{\mathbb{R}} u(t,x)\left(\mathcal{H}(\partial_x u(t,x)+\partial_x^3 u(t,x))\right)dx = 0. \quad (3.49)$$

Analizemos cada término por separado. Para la integral $\int_{\mathbb{R}} u(t,x)\,\mathcal{H}\partial_x^2 u(t,x)dx$ intercambiamos la derivada con la transformada de Hilbert (ver la Proposición 2.5 de la página 43) e integramos por partes.

$$\int_{\mathbb{R}} u(t,x)\,\mathcal{H}\partial_x^2 u(t,x)\,dx = -\int_{\mathbb{R}} \partial_x u(t,x)\,\partial_x(\mathcal{H}u)(t,x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \partial_x^2 u(t,x)\,\mathcal{H}u(t,x)\,dx.$$

Pero como el operador adjunto de $\mathcal{H}$ en $L^2(\mathbb{R})$ es $\mathcal{H}^* = -\mathcal{H}$ (ver la ecuación (2.15) en la página 43), se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}} u(t,x)\,\mathcal{H}\partial_x^2 u(t,x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \partial_x^2 u(t,x)\,\mathcal{H}u(t,x)\,dx = -\int_{\mathbb{R}} \mathcal{H}\partial_x^2 u(t,x)\,u(t,x)\,dx,$$

es decir

$$\int_{\mathbb{R}} u(t,x)\,\mathcal{H}\partial_x^2 u(t,x)dx = 0. \quad (3.50)$$

Para calcular la integral $\int_{\mathbb{R}} u^2(t,x)\,\partial_x u(t,x)\,dx$ la integramos por partes.

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} u^2(t,x)\,\partial_x u(t,x)\,dx &= -\int_{\mathbb{R}} u(t,x)2(u(t,x)\partial_x u(t,x))dx\\ &= -2\int_{\mathbb{R}} u^2(t,x)\partial_x u(t,x)\,dx.\end{aligned}$$

Por tanto este término también se anula:

$$\int_{\mathbb{R}} u^2(t,x)\partial_x u(t,x)\,dx = 0. \quad (3.51)$$

La integral $\int_{\mathbb{R}} u(t,x)\left(\mathcal{H}(\partial_x u(t,x)+\partial_x^3 u(t,x))\right)dx$ la estimaremos en términos de la transformada de Fourier, por medio de la Relación de Parseval (propiedad 11 de la Proposición 1.4, página 13). Se tiene:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} u(t,x)(\mathcal{H}(\partial_x u(t,x)+\partial_x^3 u(t,x))\,dx &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \left(\mathcal{H}(\partial_x u(t,\cdot)+\partial_x^3 u(t,\cdot))\right)^\wedge(\xi)\overline{\hat{u}(t,\xi)}\,d\xi\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} (i\,\mathrm{sgn}(\xi))((i\xi)+(i\xi)^3)\hat{u}(t,\xi)\overline{\hat{u}(t,\xi)}\,d\xi\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(- |\xi| + |\xi|^3\right) |\hat{u}(t,\xi)|^2 \, d\xi. \tag{3.52}$$

Acoplando los estimativos (3.49), (3.50), (3.51) y (3.52) obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \|u(t,\cdot)\|_{L^2}^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} (|\xi| - |\xi|^3) |\hat{u}(t,\xi)|^2 \, d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi| \leqslant 1} (|\xi| - |\xi|^3) |\hat{u}(t,\xi)|^2 \, d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi|>1} (|\xi| - |\xi|^3) |\hat{u}(t,\xi)|^2 \, d\xi \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi| \leqslant 1} (|\xi| - |\xi|^3) |\hat{u}(t,\xi)|^2 \, d\xi \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi} \sup_{|\xi| \leqslant 1} \left(|\xi| - |\xi|^3\right) \|\hat{u}(t,\cdot)\|_{L^2}^2 \\
&= \sup_{|\xi| \leqslant 1} \left(|\xi| - |\xi|^3\right) \|u(t,\cdot)\|_{L^2}^2 .
\end{aligned}$$

Lo que, mediante el lema de Grönwall (Lema A.1 del Apéndice A, página 138), produce el control deseado:

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^2} \leqslant \|u_0\|_{L^2} \, e^{Ct},$$

donde $C = \left(\sup_{|\xi| \leqslant 1} \left(|\xi| - |\xi|^3\right)\right)^{\frac{1}{2}} > 0.$ □

Para finalizar este capítulo estudiaremos el buen planteamiento global del problema (3.1) en $H^s(\mathbb{R})$ ($s \geqslant 0$), utilizando el último resultado visto. Tal estudio se ve reflejado en el teorema siguiente.

TEOREMA 3.3. *Sean $s \geqslant 0$ y $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$. Entonces el tiempo de existencia de la única solución mild del problema (3.1) con dato inicial u_0, construida en el Teorema 3.2 (página 74), es $+\infty$.*

DEMOSTRACIÓN. Por el teorema de existencia y unicidad local (Teorema 3.2, página 74) sabemos que existe una única función $u \in \mathscr{C}([0,T]; H^s(\mathbb{R})) \cap \mathscr{C}^1((0,T]; H^\infty(\mathbb{R}))$, solución *mild* del problema (3.1) derivada del dato inicial $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$. Definimos

$$T^* = \sup\{T > 0 \mid \exists!\, u \in \mathscr{C}([0,T]; H^s(\mathbb{R})) \cap \mathscr{C}^1((0,T]; H^\infty(\mathbb{R})) \text{ solución } \textit{mild} \text{ de (3.1) asociada a } u_0\}.$$

Vamos a probar que $T^* = +\infty$. Por absurdo, suponemos que $T^* < +\infty$ y construiremos una solución *mild* de (3.1) para un tiempo más grande que T^*, lo cual sería contradictorio con la definición de T^*.

Por una parte, recordemos que en la demostración del teorema de existencia y unicidad local del problema de Cauchy (3.1) para un dato inicial $v_0 \in L^2(\mathbb{R})$, fue necesario fijar un tiempo T para satisfacer las hipótesis del teorema de punto fijo de Picard (Teorema 3.1, página 61). Este tiempo, que dependía de la norma de v_0 en $L^2(\mathbb{R})$ y aseguraba la existencia de una solución *mild* de (3.1) al menos hasta el mismo tiempo T, es el siguiente

$$T(||v_0||_{L^2}) = \frac{1}{\left(8c_\eta e^{4\eta} ||v_0||_{L^2}\right)^2} \tag{3.53}$$

(el lector puede constatar dicha elección de T en (3.38), página 76). Consideraremos construir una solución desde un tiempo cercano a T^*, para lo cual tomamos $\epsilon > 0$ arbitrario, $v_\epsilon = u(T^* - \epsilon, \cdot)$ y consideramos el siguiente problema de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t v(t,x) + \mathcal{H}\partial_x^2 v(t,x) + v(t,x)\,\partial_x v(t,x) + \eta\mathcal{H}(\partial_x v(t,x) + \partial_x^3 v(t,x)) = 0, & (t,x) \in (0,T_2] \times \mathbb{R} \\ v(0,x) = v_\epsilon(x) = u(T^* - \epsilon, x), \qquad x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Gracias al teorema de existencia y unicidad local (Teorema 3.2, página 74) existe una única solución *mild* $v \in \mathscr{C}([0, T_2(\epsilon)]; L^2(\mathbb{R}))$, donde $T_2(\epsilon) = T(||v_\epsilon||_{L^2})$ (dado en (3.53)). Además, del mismo teorema sabemos que tal solución verifica $v \in \mathscr{C}^1((0, T_2(\epsilon)]; H^\infty(\mathbb{R}))$ y entonces, en particular v pertenece al espacio $\mathscr{C}((0, T_2(\epsilon)]; H^s(\mathbb{R}))$.

A partir de v podemos construir una nueva solución *mild* w para el problema (3.1) con dato inicial u_0. Dicha solución queda definida en partes como:

$$w(t) = \begin{cases} u(t) & t \in [0, T^* - \epsilon] \\ v(t - (T^* - \epsilon)) & t \in [T^* - \epsilon, T^* - \epsilon + T_2(\epsilon)]. \end{cases}$$

Como $w \in \mathscr{C}([0, T^* - \epsilon + T_2(\epsilon)]; H^s(\mathbb{R})) \cap \mathscr{C}^1((0, T^* - \epsilon + T_2(\epsilon)]; H^\infty(\mathbb{R}))$ es una nueva solución mild de (3.1) asociada al dato inicial u_0, por la definición de T^* se tiene que

$T^* - \epsilon + T_2(\epsilon) \leqslant T^*$ y por tanto $T_2(\epsilon) \leqslant \epsilon$. Por otro lado, del control de $u(t, \cdot)$ en la norma de $L^2(\mathbb{R})$ proporcionado por la Proposición 3.4 (página 86), tenemos

$$||v_\epsilon||_{L^2} = ||u(T^* - \epsilon, \cdot)||_{L^2} \leqslant e^{C(T^* - \epsilon)} ||u_0||_{L^2} \leqslant e^{CT^*} ||u_0||_{L^2},$$

donde C es constante que está descrita en la misma proposición. La última estimativa conduce a esta otra

$$\frac{1}{\left(8c_\eta e^{4\eta} \left(e^{CT^*} ||u_0||_{L^2}\right)\right)^2} \leqslant \frac{1}{\left(8c_\eta e^{4\eta} ||v_\epsilon||_{L^2}\right)^2} = T_2(\epsilon) \leqslant \epsilon,$$

pero como ϵ es arbitrario, podemos tomarlo más pequeño que $\dfrac{1}{\left(8c_\eta e^{4\eta} \left(e^{CT^*} ||u_0||_{L^2}\right)\right)^2}$ (que es fijo) y entonces tenemos que $\epsilon < \epsilon$, lo cual es absurdo. Esto concluye que T^* debe ser infinito y la solución u puede ser definida temporalmente sobre todo $[0, +\infty)$. $\square$

Capítulo 4

Comportamiento asintótico en variable espacial

En los últimos años se ha impulsado el estudio del buen planteamiento del problema de valor inicial (3.1), no solo en espacios funcionales que midan regularidad, sino también en aquellos que indiquen algún tipo de decrecimiento, tanto en variable espacial como temporal. Este tipo de espacios permiten profundizar en detalle las características de decaimiento particulares que presentan las soluciones de ciertas ecuaciones dispersivas.

Por otro lado, en una visión general, una vez establecido el buen planteamiento del problema de Cauchy de una ecuación en derivadas parciales, surgen otro tipo de interrogantes. Una noción que abarca muchas de ellas son las *propiedades de persistencia*.

A grosso modo se plantea lo siguiente: Si u_0, condición inicial de nuestro problema, verifica la propiedad A (soporte compacto, decaimiento en variable espacial, analiticidad, etc.), entonces, ¿se puede (o no) asegurar que, $u(t,\cdot)$, la solución asociada a este dato inicial, verifique la propiedad A para todo $t > 0$?

Una vez explicado lo que son las propiedades de persistencia, podemos presentar la contribución principal de nuestra investigación. Así pues, este capítulo será íntegramente consagrado a un problema de persistencia que describa el decaimiento en variable espacial de la solución de la ecuación (3.1).

En este contexto Pastrán y Rodríguez (véase Pastrán y Rodríguez-Blanco (2006)) mostraron el siguiente problema de persistencia: Si $u_0 \in Z_{2,1} = H^2(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}, |\cdot|^2\, dx)$, entonces la solución *mild* u de (3.1) asociada a u_0 pertenece al espacio $\mathscr{C}((0,T]; Z_{2,1})$.

Notemos ahora que si $u \in \mathscr{C}([0,+\infty); Z_{2,1})$, entonces se verifica

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 \left|u(x,t)\right|^2 \, dx < +\infty, \qquad \text{para todo } t \geqslant 0.$$

Para que la anterior expresión tenga sentido es necesario que u decrezca en variable de espacio al menos más rápido que la función $\dfrac{1}{1+|x|}$. Dicho de otra forma, necesitamos que $u \sim \dfrac{c}{1+|x|^{1+\epsilon}}$ (con $\epsilon > 0$) cuando $|x|$ es suficientemente grande. De esta manera sabríamos cómo se comporta la solución u cuando $|x| \geqslant M$, para algún $M > 0$. Esta conducta de la solución es conocida como su *comportamiento asintótico* en variable espacial. Siendo así que el comportamiento asintótico en variable espacial de la solución está estréchamente relacionado con la rapidez de su decrecimiento en la misma variable. Se discutirá sobre este punto en la última sección de este trabajo.

Por otra parte, es importante destacar que las conclusiones de Pastrán y Rodríguez reflejan un decrecimiento en variable espacial de la solución u en promedio, debido a que se encuentran expresadas en términos de la norma del espacio $L^2(\mathbb{R})$, pero sugieren que la solución u podría mantener el mismo tipo de decaimiento *puntualmente*. A diferencia de los resultados obtenidos por Pastrán y Rodríguez en los espacios de Lebesgue *ponderados*, nosotros abordaremos las propiedades de persistencia del decaimiento puntual en la variable espacial de la solución. El problema de persistencia que pretendemos resolver es el siguiente: si consideramos un dato inicial $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ que verifique

$$|u_0(x)| \leqslant \frac{c}{1+|x|^{\beta}}, \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R},$$

para algún $\beta > 0$, la pregunta que nos compete es saber si se cumple o no que

$$|u(t,x)| \leqslant \frac{c}{1+|x|^{\beta}}, \qquad \text{para todo } t \geqslant 0, \text{ y para todo } x \in \mathbb{R},$$

donde u es la solución del problema (3.1) asociada a u_0. Con esta interrogante surge otra: ¿Cuál es el β óptimo que mantiene la propiedad de persistencia? En este aspecto, Pastrán y Rodríguez mejoraron sus propios resultados con la ayuda de Fonseca (vease Fonseca et al. (2019)). En su labor, probaron en primer lugar la persistencia del problema (3.1) en los espacios $Z_{s,r} = H^s(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}, |x|^{2r}\, dx)$, para todo $r < 3/2$ y todo $s \geqslant r$. Para el caso crítico cuando $r = \frac{3}{2}$, demostraron que no se mantiene la propiedad de persistencia salvo cuando el dato inicial verifica que $\hat{u}_0(0) = 0$.

Motivados por los trabajos recientes de Cortez y Jarrín (véase Cortez y Jarrín (2019) y las referencias allí citadas), quienes estudiaron el decrecimiento puntual en variable de espacio para las soluciones de una perturbación no local de la ecuación KdV, deseamos ofrecer resultados análogos que den algunas luces tanto en el problema de decaimiento en variable espacial así como en la optimalidad del índice β.

Antes de comenzar, es conveniente recordar la estructura integral de las soluciones *mild* del problema (3.1), descrita por:

$$u(t,x) = K_\eta(t,\cdot) * u_0(x) - \frac{1}{2}\int_0^t \partial_x K_\eta(t-\tau,\cdot) * u^2(\tau,\cdot)(x)d\tau, \qquad 0 \leqslant t,\ x \in \mathbb{R}. \quad (4.1)$$

Esta expresión nos ayuda a visualizar que para estudiar el decrecimiento puntual en variable espacial de u, necesitamos conocer la rapidez de decaimiento de las siguientes funciones: el dato inicial u_0 (esto quedará a nuestra elección), el núcleo K_η (definido en (3.5), página 51) y la derivada del núcleo $\partial_x K_\eta$. Al mismo tiempo, visto que el operador convolución interviene tanto en la parte lineal como en la parte no lineal de u, la misma formulación sugiere que para este análisis sería oportuno conocer qué sucede con el decrecimiento de la convolución de dos funciones que posean propiedades de decaimiento distintas. Por tal motivo empezaremos con la siguiente proposición, que indica que la convolución de dos funciones que decaigan como inversos de polinomios, adoptará el decrecimiento menos pronunciado. Lo enunciamos para el caso general n-dimensional pues es un resultado que se puede utilizar para diversos estudios.

Proposición 4.1. *Sean dos funciones $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ para las cuales existen constantes $c_1, c_2 \geqslant 0$ y $\alpha, \beta > n$ tales que*

$$|f(x)| \leqslant \frac{c_1}{1+|x|^{\alpha}}, \quad |g(x)| \leqslant \frac{c_2}{1+|x|^{\beta}}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Entonces existe una constante $c_{\alpha,\beta,n} \geqslant 0$ tal que

$$|f * g(x)| \leqslant \frac{c_{\alpha,\beta,n}}{1+|x|^{\text{mín}(\alpha,\beta)}}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Demostración. Sin pérdida de generalidad suponemos que $\alpha \geqslant \beta$. Por las hipótesis de decrecimiento de las funciones f y g, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene que

$$\begin{aligned} |f * g(x)| &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\, |g(x-y)|\, dy \\ &\leqslant c_1 c_2 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{1+|y|^{\alpha}} \frac{1}{1+|x-y|^{\beta}}\, dy \\ &= c \left(\int_{|x-y| \geqslant \frac{1}{2}|x|} \frac{1}{1+|y|^{\alpha}} \frac{1}{1+|x-y|^{\beta}}\, dy + \int_{|x-y| < \frac{1}{2}|x|} \frac{1}{1+|y|^{\alpha}} \frac{1}{1+|x-y|^{\beta}}\, dy \right). \end{aligned} \tag{4.2}$$

La primera integral se puede dominar fácilmente por su región de integración. Tenemos

$$\int_{|x-y| \geqslant \frac{1}{2}|x|} \frac{1}{1+|y|^{\alpha}} \frac{1}{1+|x-y|^{\beta}}\, dy \leqslant \frac{1}{1+\frac{1}{2^{\beta}}|x|^{\beta}} \int_{|x-y| \geqslant \frac{1}{2}|x|} \frac{1}{1+|y|^{\alpha}} dy. \tag{4.3}$$

En cambio, para mayorar la segunda integral notemos que si $|x-y| < \frac{1}{2}|x|$, gracias a la desigualdad triangular inversa se tiene $\frac{1}{2}|x| < |y|$. Con esto podemos acotar

$$\int_{|x-y| < \frac{1}{2}|x|} \frac{1}{1+|y|^{\alpha}} \frac{1}{1+|x-y|^{\beta}} dy \leqslant \frac{1}{1+\frac{1}{2^{\alpha}}|x|^{\alpha}} \int_{|x-y| < \frac{1}{2}|x|} \frac{1}{1+|x-y|^{\beta}} dy. \tag{4.4}$$

Combinando las desigualdades (4.2), (4.3) y (4.4), obtenemos

$$\begin{aligned} |f * g(x)| &\leqslant c \left(\frac{1}{1+\frac{1}{2^{\beta}}|x|^{\beta}} \int_{|x-y| \geqslant \frac{1}{2}|x|} \frac{1}{1+|y|^{\alpha}} dy + \frac{1}{1+\frac{1}{2^{\alpha}}|x|^{\alpha}} \int_{|x-y| < \frac{1}{2}|x|} \frac{1}{1+|x-y|^{\beta}} dy \right) \\ &\leqslant c_{\alpha,\beta} \left(\frac{1}{1+|x|^{\beta}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{1+|y|^{\alpha}} dy + \frac{1}{1+|x|^{\alpha}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{1+|y|^{\beta}} dy \right) \end{aligned} \tag{4.5}$$

A continuación probamos que las dos últimas integrales son finitas, recordando que $\alpha \geqslant \beta > n$. Estimamos solo la primera integral pues la finitud de la otra se sigue de la misma manera. Se tiene

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+|y|^\alpha} dy &= \int_{|y|\leqslant 1} \frac{1}{1+|y|^\alpha} dy + \int_{|y|>1} \frac{1}{1+|y|^\alpha} dy \\
&\leqslant c_{\alpha,n} + \int_{|y|>1} \frac{1}{|y|^\alpha} dy \\
&\leqslant c_{\alpha,n} + c_n \int_1^{+\infty} \rho^{n-1-\alpha} dy \\
&= c_{\alpha,n} + c_n \frac{1}{\alpha - n} \\
&= c_{\alpha,n} < +\infty.
\end{aligned}$$

Volviendo a (4.5) se sigue que

$$|f * g(x)| \leqslant c_{\alpha,\beta,n} \left(\frac{1}{1+|x|^\beta} + \frac{1}{1+|x|^\alpha} \right).$$

Para obtener finalmente la estimación propuesta en esta proposición analizamos separadamente los casos cuando $|x| \leqslant 1$ y cuando $|x| > 1$.

- Si $|x| \leqslant 1$, tenemos $1 + |x|^\beta \leqslant 2 \leqslant 2(1+|x|^\alpha)$. Entonces se sigue que $\frac{1}{1+|x|^\alpha} \leqslant \frac{2}{1+|x|^\beta}$ y por ende

$$|f * g(x)| \leqslant c_{\alpha,\beta,n} \left(\frac{1}{1+|x|^\beta} + \frac{2}{1+|x|^\beta} \right) = c_{\alpha,\beta,n} \frac{1}{1+|x|^\beta}.$$

- Si $|x| > 1$ entonces $1 + |x|^\beta \leqslant 1 + |x|^\alpha$. Luego, $\frac{1}{1+|x|^\alpha} \leqslant \frac{1}{1+|x|^\beta}$ y por tanto

$$|f * g(x)| \leqslant c_{\alpha,\beta,n} \left(\frac{1}{1+|x|^\beta} + \frac{1}{1+|x|^\beta} \right) = c_{\alpha,\beta,n} \frac{1}{1+|x|^\beta}.$$

Para cualquiera de los dos casos, tenemos que

$$|f * g(x)| \leqslant c_{\alpha,\beta,n} \frac{1}{1+|x|^\beta} = c_{\alpha,\beta,n} \frac{1}{1+|x|^{\text{mín}(\alpha,\beta)}}.$$

$\square$

En la siguiente sección nos dedicaremos a describir el decrecimiento en variable espacial de K_η y de su derivada. Así también encontraremos el decaimiento óptimo de K_η.

1. Estimaciones de decaimiento en variable espacial del núcleo

Continuando por el camino preliminar para poder estudiar el decrecimiento en variable espacial de las soluciones *mild* del problema (3.1), necesitamos conocer el decaimiento del núcleo K_η y de su derivada $\partial_x K_\eta$. En la siguiente proposición daremos un primer resultado del decaimiento de K_η.

Proposición 4.2 (Decrecimiento en variable espacial del núcleo)**.** *Dados $\eta > 0$ y $t > 0$, entonces existe una constante $c_\eta > 0$ tal que*

$$|K_\eta(t,x)| \leqslant c_\eta \frac{e^{5\eta t}}{t^{\frac{1}{3}}} \frac{1}{1+x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Demostración. Para la prueba acotaremos los términos $|K_\eta(t,x)|$ y $x^2\,|K_\eta(t,x)|$. Primero para $|K_\eta(t,x)|$, utilizamos la Proposición 3.3 (página 70) con $m = 0$. Se tiene que

$$|K_\eta(t,x)| \leqslant ||K_\eta(t,\cdot)||_{L^\infty} = \left|\left|(\hat{K}_\eta(t,\cdot))^\vee\right|\right|_{L^\infty} \leqslant \frac{1}{2\pi}||\hat{K}_\eta(t,\cdot)||_{L^1} \leqslant c\frac{e^{3\eta t}}{(\eta t)^{\frac{1}{3}}}. \tag{4.6}$$

Para el término $x^2\,|K_\eta(t,x)|$ utilizamos la definición del núcleo K_η como la transformada de Fourier inversa de $\hat{K}_\eta$:

$$K_\eta(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}\hat{K}_\eta(t,\xi)\,d\xi = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{0} e^{ix\xi}\hat{K}_\eta(t,\xi)\,d\xi + \int_{0}^{+\infty} e^{ix\xi}\hat{K}_\eta(t,\xi)\,d\xi\right).$$

Luego, multiplicamos y dividimos ix e integramos por partes cada integral, obteniendo

$$\begin{aligned}
K_\eta(t,x) &= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{ix}\int_{-\infty}^{0}(ix)e^{ix\xi}\hat{K}_\eta(t,\xi)\,d\xi + \frac{1}{ix}\int_{0}^{+\infty}(ix)e^{ix\xi}\hat{K}_\eta(t,\xi)\,d\xi\right)\\
&= \frac{1}{2\pi ix}\left(e^{ix\xi}\hat{K}_\eta(t,\xi)\Big|_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0} e^{ix\xi}\partial_\xi\hat{K}_\eta(t,\xi)\,d\xi + e^{ix\xi}\hat{K}_\eta(t,\xi)\Big|_{0}^{+\infty} - \int_{0}^{+\infty} e^{ix\xi}\partial_\xi\hat{K}_\eta(t,\xi)\,d\xi\right).
\end{aligned}$$

Debido al decrecimiento exponencial de la función $\hat{K}_\eta(t,\xi) = e^{t(i|\xi|\xi+\eta\,(|\xi|-|\xi|^3))}$ cuando $|\xi|$ es suficientemente grande, se tiene que

$$\lim_{\xi\to+\infty}\left(\xi^N\hat{K}_\eta(t,\xi)\right) = \lim_{\xi\to-\infty}\left(\xi^N\hat{K}_\eta(t,\xi)\right) = 0, \qquad \text{para todo } N\in\mathbb{N}$$

(ver la Proposición A.2, en la página 135 del Apéndice A). Así,

$$\begin{aligned} K_\eta(t,x) &= -\frac{1}{2\pi ix}\left(\int_{-\infty}^{0} e^{ix\xi}t\left(-2i\xi+\eta(-1+3\xi^2)\right)\hat{K}_\eta(t,\xi)\,d\xi + \int_0^{+\infty} e^{ix\xi}t\left(2i\xi+\eta(1-3\xi^2)\right)\hat{K}_\eta(t,\xi)\,d\xi\right)\\ &= -\frac{1}{2\pi ix}\left(I_1(t,x)+I_2(t,x)\right). \end{aligned}$$

Nuevamente multiplicamos y dividimos por ix e integramos por partes. Para $I_1(t,x)$ se tiene

$$\begin{aligned} I_1(t,x) &= \int_{-\infty}^{0} e^{ix\xi}t(-2i\xi+\eta(-1+3\xi^2))\hat{K}_\eta(t,\xi)\,d\xi\\ &= \frac{1}{ix}\int_{-\infty}^{0}(ix)e^{ix\xi}t(-2i\xi+\eta(-1+3\xi^2))\hat{K}_\eta(t,\xi)\,d\xi\\ &= \frac{1}{ix}e^{ix\xi}t\left(-2i\xi+\eta(-1+3\xi^2)\right)\hat{K}_\eta(t,\xi)\Big|_{-\infty}^{0} - \frac{1}{ix}\int_{-\infty}^{0} e^{ix\xi}\partial_\xi\left(t(-2i\xi+\eta(-1+3\xi^2))\hat{K}_\eta(t,\xi)\right)d\xi\\ &= -\frac{\eta t}{ix} - \frac{1}{ix}\int_{-\infty}^{0} e^{ix\xi}\left(t\left(-2i+6\eta\xi\right)+t^2\left(-2i\xi+\eta(-1+3\xi^2)\right)^2\right)\hat{K}_\eta(t,\xi)\,d\xi\\ &= -\frac{\eta t}{ix} - \frac{1}{ix}I_3(t,x). \end{aligned}$$

Para $I_2(t,x)$:

$$\begin{aligned} I_2(t,x) &= \int_0^{+\infty} e^{ix\xi}t\left(2i\xi+\eta(1-3\xi^2)\right)\hat{K}_\eta(t,\xi)\,d\xi\\ &= \frac{1}{ix}\int_0^{+\infty}(ix)e^{ix\xi}t\left(2i\xi+\eta(1-3\xi^2)\right)\hat{K}_\eta(t,\xi)\,d\xi\\ &= \frac{1}{ix}e^{ix\xi}t(2i\xi+\eta(1-3\xi^2))\hat{K}_\eta(t,\xi)\Big|_0^{+\infty} - \frac{1}{ix}\int_0^{+\infty} e^{ix\xi}\partial_\xi\left(t(2i\xi+\eta(1-3\xi^2))\hat{K}_\eta(t,\xi)\right)d\xi\\ &= -\frac{\eta t}{ix} - \frac{1}{ix}\int_0^{+\infty} e^{ix\xi}\left(t\left(2i-6\eta\xi\right)+t^2\left(2i\xi+\eta(1-3\xi^2)\right)^2\right)\hat{K}_\eta(t,\xi)\,d\xi\\ &= -\frac{\eta t}{ix} - \frac{1}{ix}I_4(t,x). \end{aligned}$$

De esta forma tenemos que el núcleo K_η está dado por

$$K_\eta(t,x) = -\frac{1}{2\pi ix}(I_1(t,x)+I_2(t,x))$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2\pi i x}\left(-\frac{\eta t}{ix} - \frac{1}{ix}I_3(t,x) - \frac{\eta t}{ix} - \frac{1}{ix}I_4(t,x)\right)\\
&= -\frac{\eta t}{\pi x^2} - \frac{1}{2\pi x^2}(I_3(t,x) + I_4(t,x)). \qquad (4.7)
\end{aligned}
$$

Ahora sólo basta acotar las integrales $I_3(t,x)$ e $I_4(t,x)$ con respecto a x. Tomando el valor absoluto de $I_3(t,x)$ se sigue que

$$
\begin{aligned}
|I_3(t,x)| &= \left|\int_{-\infty}^{0} e^{ix\xi}\left(t\left(-2i + 6\eta\xi\right) + t^2\left(-2i\xi + \eta(-1+3\xi^2)\right)^2\right)\hat{K}_\eta(t,\xi)d\xi\right|\\
&\leqslant \int_{-\infty}^{0}\left|t\left(-2i + 6\eta\xi\right) + t^2\left(-2i\xi + \eta(-1+3\xi^2)\right)^2\right||\hat{K}_\eta(t,\xi)|d\xi\\
&\leqslant c\int_{\mathbb{R}}\left(t + \eta t\,|\xi| + t^2\xi^2 + (\eta t)^2 + (\eta t)^2\xi^4\right)|\hat{K}_\eta(t,\xi)|d\xi
\end{aligned}
$$

Mayoraremos esta integral por medio de la Proposición 3.3 (página 70) con $m \in \{0,1,2,4\}$. Se tiene que

$$
\begin{aligned}
|I_3(t,x)| &\leqslant ce^{3\eta t}\left(t\frac{1}{(\eta t)^{\frac{1}{3}}} + \eta t\frac{1}{(\eta t)^{\frac{2}{3}}} + t^2\frac{1}{\eta t} + (\eta t)^2\frac{1}{(\eta t)^{\frac{1}{3}}} + (\eta t)^2\frac{1}{(\eta t)^{\frac{5}{3}}}\right)\\
&= ce^{3\eta t}\left(\frac{1}{\eta}(\eta t)^{\frac{2}{3}} + (\eta t)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{\eta^2}(\eta t) + (\eta t)^{\frac{5}{3}} + (\eta t)^{\frac{1}{3}}\right)\\
&\leqslant ce^{4\eta t}\left(\frac{1}{\eta} + 1 + \frac{1}{\eta^2}\right)\\
&\leqslant ce^{4\eta t}\left(\frac{1}{\eta} + 1\right)^2.
\end{aligned}
$$

De manera similar obtenemos la misma cota superior para $|I_4(t,x)|$. Luego se tiene:

$$
\begin{aligned}
|K_\eta(t,x)| &\leqslant \frac{\eta t}{\pi x^2} + \frac{1}{2\pi x^2}(|I_3(t,x)| + |I_4(t,x)|)\\
&\leqslant \frac{\eta t}{\pi x^2} + c\frac{1}{x^2}e^{4\eta t}\left(\frac{1}{\eta} + 1\right)^2\\
&\leqslant c\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{\eta} + 1\right)^2 e^{4\eta t}.
\end{aligned}
$$

Multiplicando por x^2 a la anterior estimativa se sigue que

$$
x^2\,|K_\eta(t,x)| \leqslant c\left(\frac{1}{\eta} + 1\right)^2 e^{4\eta t}. \qquad (4.8)
$$

Finalmente, de (4.6) y (4.8) obtenemos

$$
\begin{aligned}
\left(1+x^2\right)|K_\eta(t,x)| &\leqslant c\left(\frac{e^{3\eta t}}{(\eta t)^{\frac{1}{3}}}+e^{4\eta t}\left(\frac{1}{\eta}+1\right)^2\right)\\
&\leqslant c\frac{1}{(\eta t)^{\frac{1}{3}}}\left(e^{3\eta t}+(\eta t)^{\frac{1}{3}}e^{4\eta t}\left(\frac{1}{\eta}+1\right)^2\right)\\
&\leqslant c_\eta\frac{e^{5\eta t}}{t^{\frac{1}{3}}},
\end{aligned}
$$

es decir, se tiene la estimación:

$$|K_\eta(t,x)| \leqslant c_\eta\frac{e^{5\eta t}}{t^{\frac{1}{3}}}\frac{1}{1+x^2}.$$

$\square$

Observación 4.1. *Podemos comprobar además que este decrecimiento del núcleo es optimal, es decir que* K_η *no puede decrecer más rápido que la función* $\dfrac{1}{1+x^2}$.

En efecto, usando la reducción al absurdo suponemos que existen $\epsilon>0$ y una constante $c>0$ (que puede depender de t) tales que

$$|K_\eta(t,x)| \leqslant c\frac{1}{1+|x|^{2+\epsilon}} \qquad t>0,\ x\in\mathbb{R}.$$

Con esto se prueba que $\||\cdot|\,K_\eta(t,\cdot)\|_{L^1}<+\infty$, pues podemos escribir:

$$\int_{\mathbb{R}}|x|\,|K_\eta(t,x)|\,dx \leqslant c\int_{\mathbb{R}}\frac{|x|}{1+|x|^{2+\epsilon}}dx = c\left(\int_{|x|\leqslant 1}\frac{|x|}{1+|x|^{2+\epsilon}}dx+\int_{|x|>1}\frac{|x|}{1+|x|^{2+\epsilon}}dx\right).$$

La primera integral del lado derecho es convergente pues es la integral de una función continua sobre un conjunto compacto. La segunda integral también es convergente pues

$$\int_{|x|>1}\frac{|x|}{1+|x|^{2+\epsilon}}dx \leqslant \int_{|x|>1}\frac{|x|}{|x|^{2+\epsilon}}dx = 2\int_1^{+\infty}x^{-1-\epsilon}dx=\frac{2}{\epsilon}<+\infty.$$

Tenemos entonces que el mapeo $x\mapsto(-ix)K_\eta(t,x)$ pertenece a $L^1(\mathbb{R})$, lo cual implica que la función $((-ix)K_\eta(t,x))^\wedge=\partial_\xi\hat{K}_\eta(t,\xi)$ sea continua en todo $\xi\in\mathbb{R}$ (propiedad 7 de la Proposición 1.4, página 13). Por otro lado, se tiene

$$\partial_\xi \hat{K}_\eta(t,\xi) = \operatorname{sgn}(\xi)(2i\xi + \eta(1-3\xi^2))\hat{K}_\eta(t,\xi), \qquad \text{para todo } \xi \in \mathbb{R}\backslash\{0\},$$

donde obtenemos una contradiccón, pues podemos observar que esta función no es continua en 0.

En la siguiente proposición se especifica el decrecimiento en variable de espacio de $\partial_x K_\eta$.

Proposición 4.3 (Decrecimiento en variable espacial de la derivada del núcleo)**.** *Dados $\eta > 0$ y $t > 0$, entonces existe una constante $c_\eta > 0$ tal que*

$$|\partial_x K_\eta(t,x)| \leqslant c_\eta \frac{e^{5\eta t}}{t^{\frac{2}{3}}} \frac{1}{1+|x|^3}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Demostración. Procederemos de la misma manera que en la demostración de la proposición anterior, esta vez buscando cotas para los términos $|\partial_x K_\eta(t,x)|$ y $|x|^3 |\partial_x K_\eta(t,x)|$. Por un lado tenemos

$$|\partial_x K_\eta(t,x)| \leqslant ||((\partial_x K_\eta(t,\cdot))^\wedge)^\vee||_{L^\infty} \leqslant \frac{1}{2\pi}||(\partial_x K_\eta(t,\cdot))^\wedge||_{L^1} = \frac{1}{2\pi}||\,|\cdot|\,\hat{K}_\eta(t,\cdot)||_{L^1}.$$

Luego, utilizando la Proposición 3.3 (página 70) con $m = 1$ se tiene que

$$|\partial_x K_\eta(t,x)| \leqslant c\frac{e^{3\eta t}}{(\eta t)^{\frac{2}{3}}}. \tag{4.9}$$

Por otro lado, para encontrar una cota para $|x|^3 |\partial_x K_\eta(t,x)|$ utilizamos la transformada de Fourier e integramos por partes.

$$\partial_x K_\eta(t,x) = ((\partial_x K_\eta(t,\cdot))^\wedge)^\vee (x)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}(\partial_x K_\eta(t,\cdot))^\wedge(\xi)\,d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}(i\xi)\hat{K}_\eta(t,\xi)\,d\xi$$

$$= \frac{i}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^0 e^{ix\xi}\xi\hat{K}_\eta(t,\xi)\,d\xi + \int_0^{+\infty} e^{ix\xi}\xi\hat{K}_\eta(t,\xi)\,d\xi\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi x}\left(e^{ix\xi}\xi\hat{K}_\eta(t,\xi)\Big|_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0} e^{ix\xi}\partial_\xi\left(\xi\hat{K}_\eta(t,\xi)\right)d\xi + e^{ix\xi}\xi\hat{K}_\eta(t,\xi)\Big|_{0}^{+\infty} - \int_{0}^{+\infty} e^{ix\xi}\partial_\xi\left(\xi\hat{K}_\eta(t,\xi)\right)d\xi\right)$$

$$= -\frac{1}{2\pi x}\left(\int_{-\infty}^{0} e^{ix\xi}(1-t(2i\xi^2+\eta(\xi-3\xi^3)))\hat{K}_\eta(t,\xi)\,d\xi + \int_{0}^{+\infty} e^{ix\xi}(1+t(2i\xi^2+\eta(\xi-3\xi^3)))\hat{K}_\eta(t,\xi)\,d\xi\right)$$

$$= -\frac{1}{2\pi ix^2}\left(e^{ix\xi}(1-t(2i\xi^2+\eta(\xi-3\xi^3)))\hat{K}_\eta(t,\xi)\Big|_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0} e^{ix\xi}\partial_\xi\left((1-t(2i\xi^2+\eta(\xi-3\xi^3)))\hat{K}_\eta(t,\xi)\right)d\xi\right.$$

$$\left. + e^{ix\xi}(1+t(2i\xi^2+\eta(\xi-3\xi^3)))\hat{K}_\eta(t,\xi)\Big|_{0}^{+\infty} - \int_{0}^{+\infty} e^{ix\xi}\partial_\xi\left((1+t(2i\xi^2+\eta(\xi-3\xi^3)))\hat{K}_\eta(t,\xi)\right)d\xi\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi ix^2}\left(I_1(t,x)+I_2(t,x)\right).$$

Integramos por partes nuevamente, ahora con las integrales $I_1(t,x)$ e $I_2(t,x)$. Primero para $I_1(t,x)$ se tiene que

$$I_1(t,x) = \int_{-\infty}^{0} e^{ix\xi}\partial_\xi\left((1-t(2i\xi^2+\eta(\xi-3\xi^3)))\hat{K}_\eta(t,\xi)\right)d\xi$$

$$= -\int_{-\infty}^{0} e^{ix\xi}t\left((4i\xi+\eta(1-9\xi^2))+(2i\xi+\eta(1-3\xi^2))(1-t(2i\xi^2+\eta(\xi-3\xi^3)))\right)\hat{K}_\eta(t,\xi)d\xi$$

$$= -\frac{1}{ix}\left(e^{ix\xi}t\left((4i\xi+\eta(1-9\xi^2))+(2i\xi+\eta(1-3\xi^2))(1-t(2i\xi^2+\eta(\xi-3\xi^3)))\right)\hat{K}_\eta(t,\xi)\Big|_{-\infty}^{0}\right.$$

$$\left. - \int_{-\infty}^{0} e^{ix\xi}\partial_\xi\left[t\left((4i\xi+\eta(1-9\xi^2))+(2i\xi+\eta(1-3\xi^2))(1-t(2i\xi^2+\eta(\xi-3\xi^3)))\right)\hat{K}_\eta(t,\xi)\right]d\xi\right)$$

$$= -\frac{1}{ix}\left(2\eta t - \int_{-\infty}^{0} e^{ix\xi}\partial_\xi\left[P_1(t,\xi)\hat{K}_\eta(t,\xi)\right]d\xi\right).$$

Luego, $I_2(t,x)$ se calcula como sigue:

$$I_2(t,x) = \int_{0}^{+\infty} e^{ix\xi}\partial_\xi\left((1+t(2i\xi^2+\eta(\xi-3\xi^3)))\hat{K}_\eta(t,\xi)\right)d\xi$$

$$= \int_{0}^{+\infty} e^{ix\xi}t\left((4i\xi+\eta(1-9\xi^2))+(2i\xi+\eta(1-3\xi^2))(1+t(2i\xi^2+\eta(\xi-3\xi^3)))\right)\hat{K}_\eta(t,\xi)d\xi$$

$$= \frac{1}{ix}\left(e^{ix\xi}t\left((4i\xi+\eta(1-9\xi^2))+(2i\xi+\eta(1-3\xi^2))(1+t(2i\xi^2+\eta(\xi-3\xi^3)))\right)\hat{K}_\eta(t,\xi)\Big|_{0}^{+\infty}\right.$$

$$\left. - \int_{0}^{+\infty} e^{ix\xi}\partial_\xi\left[t\left((4i\xi+\eta(1-9\xi^2))+(2i\xi+\eta(1-3\xi^2))(1+t(2i\xi^2+\eta(\xi-3\xi^3)))\right)\hat{K}_\eta(t,\xi)\right]d\xi\right)$$

$$= \frac{1}{ix}\left(-2\eta t - \int_{0}^{+\infty} e^{ix\xi}\partial_\xi\left[P_2(t,\xi)\hat{K}_\eta(t,\xi)\right]d\xi\right)$$

$$= -\frac{1}{ix}\left(2\eta t + \int_{0}^{+\infty} e^{ix\xi}\partial_\xi\left[P_2(t,\xi)\hat{K}_\eta(t,\xi)\right]d\xi\right).$$

Así se tiene:

$$\partial_x K_\eta(t,x) = \frac{1}{2\pi ix^2}(I_1(t,x)+I_2(t,x))$$

$$= \frac{1}{2\pi x^3}\left(4\eta t - \int_{-\infty}^{0} e^{ix\xi}\partial_\xi\left[P_1(t,\xi)\hat{K}_\eta(t,\xi)\right]d\xi + \int_{0}^{+\infty} e^{ix\xi}\partial_\xi\left[P_2(t,\xi)\hat{K}_\eta(t,\xi)\right]d\xi\right). \tag{4.10}$$

Para terminar la demostración, resta acotar las dos integrales de la derecha. Para la integral $\int_{-\infty}^{0} e^{ix\xi}\partial_\xi\left[P_1(t,\xi)\hat{K}_\eta(t,\xi)\right]d\xi$, primero estimamos la cantidad $\partial_\xi\left[P_1(t,\xi)\hat{K}_\eta(t,\xi)\right]$ y luego mayoramos la integral en valor absoluto. Dado $\xi < 0$ se tiene que

$$\partial_\xi[P_1(t,\xi)\hat{K}_\eta(t,\xi)] = \partial_\xi\left[t\left((4i\xi+\eta(1-9\xi^2)) + (2i\xi+\eta(1-3\xi^2))(1-t(2i\xi^2+\eta(\xi-3\xi^3)))\right)\hat{K}_\eta(t,\xi)\right]$$

$$= t\big[4 - 18\eta\xi + (2i-6\eta\xi)\left(1-t(2i\xi^2+\eta(\xi-3\xi^3))\right) - t(2i\xi+\eta(1-3\xi^2))(4i\xi+\eta(1-9\xi^2))$$

$$-t(2i\xi+\eta(1-3\xi^2))\left((4i\xi+\eta(1-9\xi^2)) + (2i\xi+\eta(1-3\xi^2))(1-t(2i\xi^2+\eta(\xi-3\xi^3)))\right)\big]\hat{K}_\eta(t,\xi).$$

Luego

$$\left|\int_{-\infty}^{0} e^{ix\xi}\partial_\xi\big[P_1(t,\xi)\hat{K}_\eta(t,\xi)\big]d\xi\right| \leqslant c\int_{\mathbb{R}}\Big(t + \eta t|\xi| + t^2\xi^2 + \eta t^2|\xi| + \eta t^2|\xi|^3 + \eta^2t^2\xi^2 + \eta^2t^2\xi^4 + \eta^2t^2$$
$$+ t^3\xi^4 + \eta t^3|\xi|^3 + \eta t^3|\xi|^5 + \eta^2t^3\xi^2 + \eta^2t^3\xi^4 + \eta^2t^3\xi^6 + \eta^3t^3|\xi| + \eta^3t^3|\xi|^3$$
$$+\eta^3t^3|\xi|^5 + \eta^3t^3|\xi|^7\Big)|\hat{K}_\eta(t,\xi)|d\xi.$$

Seguido utilizamos la Proposición 3.3 (página 70), con $m \in \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$, así

$$\left|\int_{-\infty}^{0} e^{ix\xi}\partial_\xi\big[P_1(t,\xi)\hat{K}_\eta(t,\xi)\big]d\xi\right| \leqslant c\int_{\mathbb{R}}\Big(t + \eta t|\xi| + t^2\xi^2 + \eta t^2|\xi| + \eta t^2|\xi|^3 + \eta^2t^2\xi^2 + \eta^2t^2\xi^4 + \eta^2t^2$$
$$+ t^3\xi^4 + \eta t^3|\xi|^3 + \eta t^3|\xi|^5 + \eta^2t^3\xi^2 + \eta^2t^3\xi^4 + \eta^2t^3\xi^6 + \eta^3t^3|\xi| + \eta^3t^3|\xi|^3$$
$$+\eta^3t^3|\xi|^5 + \eta^3t^3|\xi|^7\Big)\left|\hat{K}_\eta(t,\xi)\right|d\xi$$
$$\leqslant ce^{3\eta t}\Big(\frac{1}{\eta}(\eta t)^{\frac{2}{3}} + (\eta t)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{\eta^2}(\eta t) + \frac{1}{\eta}(\eta t)^{\frac{4}{3}} + \frac{1}{\eta}(\eta t)^{\frac{2}{3}} + (\eta t) + (\eta t)^{\frac{1}{3}} + (\eta t)^2$$
$$+ \frac{1}{\eta^3}(\eta t)^{\frac{4}{3}} + \frac{1}{\eta^2}(\eta t)^{\frac{5}{3}} + \frac{1}{\eta^2}(\eta t) + \frac{1}{\eta}(\eta t)^2 + \frac{1}{\eta}(\eta t)^{\frac{4}{3}} + \frac{1}{\eta}(\eta t)^{\frac{2}{3}} + (\eta t)^{\frac{7}{3}} + (\eta t)^{\frac{5}{3}}$$
$$+(\eta t) + (\eta t)^{\frac{1}{3}}\Big)$$
$$\leqslant ce^{4\eta t}\left(\frac{1}{\eta} + 1 + \frac{1}{\eta^2} + \frac{1}{\eta^3}\right)$$
$$\leqslant ce^{4\eta t}\left(1 + \frac{1}{\eta}\right)^3.$$

De manera similar obtenemos la misma cota superior para $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{ix\xi}\partial_\xi\left(P_2(\xi)\hat{K}_\eta(t,\xi)\right)d\xi$.
Se sigue entonces que

$$
\begin{aligned}
|\partial_x K_\eta(t,x)| &= \left|\frac{1}{2\pi x^3}\left(4\eta t - \int_{-\infty}^{0} e^{ix\xi}\partial_\xi\left[P_1(\xi)\hat{K}_\eta(t,\xi)\right]d\xi + \int_0^{+\infty} e^{ix\xi}\partial_\xi\left[P_2(\xi)\hat{K}_\eta(t,\xi)\right]d\xi\right)\right| \\
&\leqslant c\frac{1}{|x|^3}\left(4\eta t + e^{4\eta t}\left(1+\frac{1}{\eta}\right)^3\right) \\
&\leqslant c\frac{e^{4\eta t}}{|x|^3}\left(1+\frac{1}{\eta}\right)^3.
\end{aligned}
$$

De esta manera, podemos escribir:

$$
|x|^3\,|\partial_x K_\eta(t,x)| \leqslant ce^{4\eta t}\left(1+\frac{1}{\eta}\right)^3. \tag{4.11}
$$

Finalmente, sumando (4.9) y (4.11) obtenemos

$$
\begin{aligned}
(1+|x|^3)\,|K_\eta(t,x)| &\leqslant c\left(\frac{e^{3\eta t}}{(\eta t)^{\frac{2}{3}}} + e^{4\eta t}\left(1+\frac{1}{\eta}\right)^3\right) \\
&= \frac{c}{(\eta t)^{\frac{2}{3}}}\left(e^{3\eta t} + (\eta t)^{\frac{2}{3}}\, e^{4\eta t}\left(1+\frac{1}{\eta}\right)^3\right) \\
&\leqslant c_\eta \frac{1}{t^{\frac{2}{3}}}e^{5\eta t}.
\end{aligned}
$$

□

Con nuestra última proposición terminamos el preámbulo para poder mostrar el decrecimiento de las soluciones *mild* del problema (3.1).

2. Decrecimiento en variable espacial de las soluciones de una perturbación no local de ecuación de la Benjamin-Ono

En vista de la formulación integral de las soluciones mild del problema (3.1)

$$
u(t,x) = K_\eta(t,\cdot) * u_0(x) - \frac{1}{2}\int_0^t \partial_x K_\eta(t-\tau,\cdot) * u^2(\tau,\cdot)(x)d\tau, \qquad 0 \leqslant t,\ x\in\mathbb{R},
$$

y la propiedad de la convolución que tiene que ver con el decrecimiento de funciones (Proposición 4.1, página 94), intuimos que los términos K_η y $\partial_x K_\eta$ podrían restringir el decaimiento de u, incluso si se diera el caso que el dato inicial $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ decrezca muy rápido. Por ejemplo, si únicamente nos enfocamos en la parte lineal de la solución y consideramos $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ tal que $|u_0(x)| \leqslant \dfrac{c}{1+|x|^{1000}}$, gracias al decrecimiento del núcleo (Proposición 4.2, página 96) y la Proposición 4.1 se tendría que $K_\eta(t,\cdot) * u_0$ decrecerá como la función $\dfrac{1}{1+|x|^{\text{mín}(2,1000)}} = \dfrac{1}{1+|x|^2}$. Esto limita el decrecimiento en variable espacial de la solución.

De otra parte, la misma observación anterior nos dice que si el dato inicial decae como $\dfrac{1}{1+|x|^\beta}$, con $\beta \leqslant 2$, se tendría que $|K_\eta(t,\cdot) * u_0(x)| \leqslant \dfrac{1}{1+|x|^{\text{mín}(2,\beta)}} = \dfrac{1}{1+|x|^\beta}$ siempre y cuando $\beta > 1$ (ver la Proposición 4.1).

Con estas dos precisiones podemos delimitar el *grado de decaimiento* β en el intervalo $(1,2]$ y establecer nuestro problema de persistencia. En consecuencia, nuestro objetivo se reduce a probar que dado un dato inicial $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ que posee un decrecimiento puntual de la forma $\dfrac{1}{1+|x|^\beta}$, con $1 < \beta \leqslant 2$, entonces la solución *mild* del problema (3.1) preserva este decaimiento en variable espacial.

El método que seguiremos consiste nuevamente en expresar a (3.1) como un problema de punto fijo (ver el Teorema 3.1 en la página 61) en algún espacio de Banach que se adapte al estudio del decrecimiento puntual en variable espacial. Este proceso asegurará inicialmente que la solución *mild* del problema (3.1) mantiene el decaimiento del dato u_0 hasta algún tiempo finito. Finalmente mostraremos que el tiempo maximal de existencia de la solución es $+\infty$.

Con el objetivo de identificar al espacio de Banach que nos será de utilidad, empezaremos por considerar $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ $(s \geqslant 0)$ tal que

$$|u_0(x)| \leqslant \frac{c}{1+|x|^\beta}, \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{4.12}$$

$(1 < \beta \leqslant 2)$ y con ello estimar puntualmente

$$U_0(t,x) = K_\eta(t,\cdot) * u_0(x), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T,\ x \in \mathbb{R}, \tag{4.13}$$

en variable espacial, donde $T > 0$. Notemos que (4.12) implica que $\left|\left|(1+|\cdot|)^\beta u_0\right|\right|_{L^\infty} := \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|(1+|x|^\beta)u_0(x)\right| < +\infty$. Luego, dados $x \in \mathbb{R}$ y $0 < t \leqslant T$, utilizando el decrecimiento en variable espacial del K_η determinado por la Proposición 4.2 (página 96) se tiene que

$$\begin{aligned} |U_0(t,x)| &= |K_\eta(t,\cdot) * u_0(x)| \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}} |K_\eta(t,x-y)|\, |u_0(y)| \frac{1+|y|^\beta}{1+|y|^\beta} dy \\ &\leqslant c_\eta \left|\left|(1+|\cdot|^\beta)u_0\right|\right|_{L^\infty} \frac{e^{5\eta t}}{t^{\frac{1}{3}}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+|x-y|^2} \frac{1}{1+|y|^\beta} dy. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Percatémonos que la integral en (4.14) es la convolución de la función $\dfrac{1}{1+x^2}$ con la función $\dfrac{1}{1+|x|^\beta}$. De este modo, de la Proposición 4.1 (página 94) se sigue que

$$\begin{aligned} |U_0(t,x)| &\leqslant c_\eta \left|\left|(1+|\cdot|^\beta)u_0\right|\right|_{L^\infty} \frac{e^{5\eta t}}{t^{\frac{1}{3}}} \frac{1}{1+|x|^{\text{mín}(2,\beta)}} \\ &= c_\eta \left|\left|(1+|\cdot|^\beta)u_0\right|\right|_{L^\infty} \frac{e^{5\eta t}}{t^{\frac{1}{3}}} \frac{1}{1+|x|^\beta}. \end{aligned}$$

Por lo tanto se tiene que

$$t^{\frac{1}{3}} \left|\left|(1+|\cdot|^\beta)\, U_0(t,\cdot)\right|\right|_{L^\infty} \leqslant c_\eta \left|\left|(1+|\cdot|^\beta)u_0\right|\right|_{L^\infty} e^{5\eta t}. \tag{4.15}$$

Esta estimación nos provee el espacio de Banach idóneo.

Definición 4.1. *Sean $T > 0$, $s \geqslant 0$ y $\beta \geqslant 0$. Definimos los siguientes espacios:*

$$F_T^\beta = \{u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}) \mid ||u||_{F_T^\beta} < +\infty\},$$

provisto de la norma

$$||u||_{F_T^\beta} = \sup_{0\leqslant t\leqslant T} \left(t^{\frac{1}{3}} \left|\left|(1+|\cdot|^\beta)u(t,\cdot)\right|\right|_{L^\infty} \right), \quad u \in F_T^\beta,$$

y $\tilde{F}_T^{s,\beta} = E_T^s \cap F_T^\beta$ *(donde* $E_T^s = L^\infty([0,T]; H^s(\mathbb{R}))$*), cuya norma viene dada por*

$$||u||_{\tilde{F}_T^{s,\beta}} = ||u||_{E_T^s} + ||u||_{F_T^\beta} = \sup_{0\leqslant t\leqslant T} ||u(t,\cdot)||_{H^s} + \sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left(t^{\frac{1}{3}} \left|\left|(1+|\cdot|^\beta)u(t,\cdot)\right|\right|_{L^\infty}\right), \quad u \in \tilde{F}_T^{s,\beta}.$$

En particular, el segundo término de esta norma nos permite estudiar el decrecimiento en variable de espacio de la solución. En este término podemos observar una variable de ponderación en el tiempo ($t^{\frac{1}{3}}$), cuya razón de ser es puramente técnica, ya que neutraliza el término $t^{-\frac{1}{3}}$ que aparece en todas las estimaciones del decaimiento puntual en variable espacial del núcleo asociado a nuestro problema.

La siguiente proposición muestra que el espacio $\tilde{F}_T^{s,\beta}$ es completo.

Proposición 4.4. *Sean* $T > 0$ *y* $\beta \geqslant 0$*. Entonces* $\left(\tilde{F}_T^{s,\beta}, ||\cdot||_{\tilde{F}_T^{s,\beta}}\right)$ *es un espacio de Banach.*

Demostración. Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $\tilde{F}_T^{s,\beta}$. Así, para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$||u_n - u_m||_{\tilde{F}_T^{s,\beta}} = ||u_n - u_m||_{E_T^s} + ||u_n - u_m||_{F_T^\beta} < \epsilon, \tag{4.16}$$

para todo $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $n, m \geqslant N$. En particular esto implica que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sea una sucesión de Cauchy en E_T^s, pero como este es un espacio de Banach, entonces existe $u_1 \in E_T^s$ tal que

$$\lim_{n\to+\infty} ||u_n - u_1||_{E_T^s} = \lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant T} ||u_n(t,\cdot) - u_1(t,\cdot)||_{H^s}\right) = 0.$$

Ahora definimos la sucesión de funciones $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ por

$$w_n(t,x) = t^{\frac{1}{3}}(1+|x|^\beta)u_n(t,x), \qquad t > 0,\ x \in \mathbb{R}.$$

Como $u_n \in F_T^\beta$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T} ||w_n(t,\cdot)||_{L^\infty} = \sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left(\left|\left|t^{\frac{1}{3}}(1+|\cdot|^\beta)u_n(t,\cdot)\right|\right|_{L^\infty}\right) = ||u_n||_{F_T^\beta} < \infty.$$

Es decir que $w_n \in L^\infty([0,T];L^\infty(\mathbb{R}))$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Además, (4.16) implica que

$$\begin{aligned}||u_n - u_m||_{F_T^\beta} &= \sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left(t^{\frac{1}{3}}\left|\left|(1+|\cdot|^\beta)(u_n(t,\cdot)-u_m(t,\cdot))\right|\right|_{L^\infty}\right)\\ &= \sup_{0\leqslant t\leqslant T}||w_n - w_m||_{L^\infty} < \epsilon.\end{aligned}$$

De tal modo que $(w_n)_{n\in\mathbb{R}}$ es una sucesión de Cauchy en $L^\infty([0,T];L^\infty(\mathbb{R}))$, pero como este es un espacio de Banach, entonces existe $w \in L^\infty([0,T];L^\infty(\mathbb{R}))$ tal que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}||w_n(t,\cdot)-w(t,\cdot)||_{L^\infty}\right) = 0.$$

Con esto definimos la función

$$u_2(t,x) = \frac{1}{t^{\frac{1}{3}}}\frac{1}{1+|x|^\beta}w(t,x), \qquad t>0,\ x\in\mathbb{R},$$

que pertenece F_T^β pues

$$||u_2(t,x)||_{F_T^\beta} = \sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left(t^{\frac{1}{3}}\left|\left|(1+|\cdot|^\beta)u_2(t,\cdot)\right|\right|_{L^\infty}\right) = \sup_{0\leqslant t\leqslant T}||w(t,\cdot)||_{L^\infty} < +\infty,$$

y es el límite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en F_T^β. En efecto,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}||u_n - u_2||_{F_T^\beta} &= \lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left(t^{\frac{1}{3}}\left|\left|(1+|\cdot|^\beta)(u_n(t,\cdot)-u_2(t,\cdot))\right|\right|_{L^\infty}\right)\right)\\ &= \lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}||w_n(t,\cdot)-w(t,\cdot)||_{L^\infty}\right)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Recapitulando, hasta ahora hemos encontrado $u_1 \in E_T^s$ y $u_2 \in F_T^\beta$ tales que

$$\lim_{n\to+\infty}||u_n - u_1||_{E_T^s} = \lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}||u_n(t,\cdot)-u_1(t,\cdot)||_{H^s}\right) = 0, \tag{4.17}$$

y

$$\lim_{n\to+\infty}||u_n - u_2||_{F_T^\beta} = \lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left(t^{\frac{1}{3}}\left|\left|(1+|\cdot|^\beta)(u_n(t,\cdot)-u_2(t,\cdot))\right|\right|_{L^\infty}\right)\right) = 0. \tag{4.18}$$

Mostraremos que $u_1 = u_2$ en casi todo punto. Sea $t \in [0, T]$ tal que $u_1(t, x)$ y $u_2(t, x)$ está bien definido c.t.p. $x \in \mathbb{R}$. En primer lugar, por (4.17), tenemos en particular que

$$\lim_{n\to+\infty} ||u_n(t,\cdot) - u_1(t,\cdot)||_{L^2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{n\to+\infty} ||u_n(t,\cdot) - u_1(t,\cdot)||_{H^s} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{n\to+\infty} ||u_n - u_1||_{E_T^s} = 0.$$

En otras palabras, tenemos que la sucesión $(u_n(t,\cdot))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $u_1(t,\cdot)$ en $L^2(\mathbb{R})$. Esto implica que exista una subsucesión $(u_k(t,\cdot))_{k\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{n\to+\infty} u_k(t,x) = u_1(t,x), \qquad \text{c.t.p. } x \in \mathbb{R}.$$

En segundo lugar, (4.18) implica que

$$\lim_{n\to+\infty} t^{\frac{1}{3}}(1+|x|^\beta)\,|u_n(t,x) - u_2(t,x)| \leqslant \lim_{n\to+\infty} ||u_n - u_2||_{F_T^\beta} = 0, \qquad \text{c.t.p. } x \in \mathbb{R},$$

o lo que es lo mismo,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n(t,x) = u_2(t,x), \qquad \text{c.t.p. } x \in \mathbb{R}.$$

Por la unicidad del límite se sigue que $u_1(t,x) = u_2(t,x)$ c.t.p. $x \in \mathbb{R}$. □

Ahora estamos en la capacidad de enunciar y demostrar el teorema designado al estudio local del decrecimiento puntual en variable espacial de las soluciones *mild* del problema (3.1).

Teorema 4.1. *Sean $s \geqslant 0$, $1 < \beta \leqslant 2$ y $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ un dato inicial que verifica*

$$|u_0(x)| \leqslant \frac{c}{1+|x|^\beta}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Entonces, existen un tiempo $T = T\left(||u_0||_{H^s}, \left|\left|(1+|\cdot|^\beta)u_0\right|\right|_{L^\infty}\right) > 0$ y una función $u \in \mathscr{C}([0,T]; H^s(\mathbb{R}))$, única solución mild local del problema (3.1), que posee el siguiente decrecimiento puntual en variable espacial:

$$|u(t,x)| \leqslant \frac{c_\eta}{t^{\frac{1}{3}}} \frac{1}{1+|x|^\beta}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T,\ x \in \mathbb{R}.$$

Además, la solución mild verifica $u \in \mathscr{C}^1((0,T];H^\infty(\mathbb{R}))$, donde $\mathscr{C}^1((0,T];H^\infty(\mathbb{R})) := \bigcap_{r\geqslant 0} \mathscr{C}^1((0,T];H^r(\mathbb{R}))$.

Demostración. Para el uso del teorema de punto fijo de Picard (Teorema 3.1, página 53) vamos a considerar el espacio de Banach $\tilde{F}_T^{s,\beta}$ (ver la Definición 4.1 en la página 105). Como forma bilineal escogemos a $B_\eta(\cdot,\cdot)$ (descrita en (3.21), página 63), cuya buena definición en $\tilde{F}_T^{s,\beta}$ precisaremos más abajo, y como dato inicial tomamos

$$U_0(t,x) = K_\eta(t,\cdot) * u_0(x), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T,\ x \in \mathbb{R},$$

el cual pertenece a $\tilde{F}_T^{s,\beta} = E_T^s \cap F_T^\beta$. En efecto, por un lado, de la estimación (3.22) (página 63) sabemos que $U_0 \in E_T^s$ y se tiene que

$$||U_0||_{E_T^s} \leqslant e^{\eta T} ||u_0||_{H^s}.$$

Por otro lado, para verificar que $U_0 \in F_T^\beta$, nos remontamos a la estimativa (4.15) (página 105), de donde tenemos que

$$\begin{aligned} ||U_0||_{F_T^\beta} &= \sup_{0\leqslant t\leqslant T} \left(t^{\frac{1}{3}} \left|\left|(1+|\cdot|^\beta)U_0(t,\cdot)\right|\right|_{L^\infty} \right) \\ &\leqslant c_\eta \left|\left|(1+|\cdot|^\beta)u_0\right|\right|_{L^\infty} \sup_{0\leqslant t\leqslant T} \left(e^{5\eta t}\right) \\ &= c_\eta \left|\left|(1+|\cdot|^\beta)u_0\right|\right|_{L^\infty} e^{5\eta T} < +\infty. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Lo siguiente que debemos hacer para estar en las hipótesis del Teorema 3.1 es encontrar una constante $C_T > 0$ tal que para todo $u, v \in \tilde{F}_T^{s,\beta}$ se cumpla

$$\begin{aligned} ||B_\eta(u,v)||_{\tilde{F}_T^{s,\beta}} &= ||B_\eta(u,v)||_{E_T^s} + ||B_\eta(u,v)||_{F_T^\beta} \\ &\leqslant C_T\, ||u||_{\tilde{F}_T^{s,\beta}}\, ||v||_{\tilde{F}_T^{s,\beta}}. \end{aligned}$$

Esto probará al mismo tiempo que la forma bilineal $B_\eta\colon \tilde{F}_T^{s,\beta} \times \tilde{F}_T^{s,\beta} \to \tilde{F}_T^{s,\beta}$ está bien definida. Recordemos que en las fórmulas (3.37) y (3.39) (página 75) aparecen las siguientes estimaciones

$$\begin{cases} ||B_\eta(u,v)||_{E^s_T} \leqslant c_{s,\eta}\, e^{\frac{5}{2}\eta T}T^{\frac{3-2s}{6}}\, ||u||_{E^s_T}\, ||v||_{E^s_T} \leqslant c_{s,\eta}\, e^{\frac{5}{2}\eta T}T^{\frac{3-2s}{6}}\, ||u||_{\tilde{F}^{s,\beta}_T}\, ||v||_{\tilde{F}^{s,\beta}_T}, & \text{si } 0 \leqslant s \leqslant 1/2, \\ ||B_\eta(u,v)||_{E^s_T} \leqslant c_\eta\, e^{\frac{3}{2}\eta T}T^{\frac{1}{2}}\, ||u||_{E^s_T}\, ||v||_{E^s_T} \leqslant c_\eta\, e^{\frac{3}{2}\eta T}T^{\frac{1}{2}}\, ||u||_{\tilde{F}^{s,\beta}_T}\, ||v||_{\tilde{F}^{s,\beta}_T}, & \text{si } 1/2 < s. \end{cases} \tag{4.20}$$

Por otra parte, para estimar $||B_\eta(u,v)||_{F^\beta_T}$, tomamos $x \in \mathbb{R}$, $0 < t \leqslant T$ y $0 < \tau < t$ arbitrarios. Del decrecimiento puntual en variable espacial de $\partial_x K_\eta$ (Proposición 4.3, página 100) y además que $u \in F^\beta_T$, se tiene

$$\begin{aligned} &(1+|x|^\beta)|\partial_x K_\eta(t-\tau,\cdot) * (u(\tau,\cdot)v(\tau,\cdot))(x)| \\ &\qquad \leqslant (1+|x|^\beta)\int_{\mathbb{R}} |\partial_x K_\eta(t-\tau,x-y)|\, |u(\tau,y)|\, |v(\tau,y)|\, \frac{1+|y|^\beta}{1+|y|^\beta}dy \\ &\qquad \leqslant c_\eta(1+|x|^\beta)\left|\left|(1+|\cdot|^\beta)u(\tau,\cdot)\right|\right|_{L^\infty} \frac{e^{5\eta t}}{(t-\tau)^{\frac{2}{3}}}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+|x-y|^3}\frac{1}{1+|y|^\beta}\, |v(\tau,y)|\, dy. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Notemos que la función $f_x(y) = \dfrac{1}{1+|x-y|^3}\dfrac{1}{1+|y|^\beta}$ pertenece a $L^2(\mathbb{R})$ pues

$$||f_x||^2_{L^2} = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{1+|x-y|^3}\,\frac{1}{1+|y|^\beta}\right)^2 dy \leqslant c\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+|x-y|^6}\,\frac{1}{1+|y|^{2\beta}}dy,$$

donde la integral de la derecha es la convolución entre las funciones $\dfrac{1}{1+|x|^6}$ y $\dfrac{1}{1+|x|^{2\beta}}$. Entonces, de la Proposición 4.1 (página 94) se tiene que

$$||f_x||^2_{L^2} \leqslant c_\beta \frac{1}{1+|x|^{\text{mín}(6,2\beta)}} = c_\beta \frac{1}{1+|x|^{2\beta}}$$

y por tanto

$$||f_x||_{L^2} \leqslant c_\beta \frac{1}{1+|x|^\beta}. \tag{4.22}$$

De esta manera, de (4.21), (4.22) y de la desigualdad de Hölder obtenemos

$$\begin{aligned} &(1+|x|^\beta)|\partial_x K_\eta(t-\tau,\cdot) * (u(\tau,\cdot)v(\tau,\cdot))(x)| \\ &\qquad \leqslant c_\eta(1+|x|^\beta)\left|\left|(1+|\cdot|^\beta)u(\tau,\cdot)\right|\right|_{L^\infty} \frac{e^{5\eta t}}{(t-\tau)^{\frac{2}{3}}}\, ||v(\tau,\cdot)||_{L^2}\, ||f_x||_{L^2} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant c_{\eta,\beta}\frac{\tau^{\frac{1}{3}}}{\tau^{\frac{1}{3}}}\left|\left|(1+|\cdot|^{\beta})u(\tau,\cdot)\right|\right|_{L^{\infty}}||v(\tau,\cdot)||_{H^s}\,e^{5\eta t}\frac{1}{(t-\tau)^{\frac{2}{3}}}\,\frac{1+|x|^{\beta}}{1+|x|^{\beta}}\\
&\leqslant c_{\eta,\beta}\left(\tau^{\frac{1}{3}}\left|\left|(1+|\cdot|^{\beta})u(\tau,\cdot)\right|\right|_{L^{\infty}}\right)||v(\tau,\cdot)||_{H^s}\,e^{5\eta t}\frac{1}{(t-\tau)^{\frac{2}{3}}\tau^{\frac{1}{3}}} \qquad (4.23)\\
&\leqslant c_{\eta,\beta}\,||u||_{F_T^{\beta}}\,||v||_{E_T^s}\,e^{5\eta t}\frac{1}{(t-\tau)^{\frac{2}{3}}\tau^{\frac{1}{3}}}.
\end{aligned}
$$

Pero dado que x es arbitrario, podemos escribir

$$
\left|\left|(1+|\cdot|^{\beta})\partial_x K_{\eta}(t-\tau,\cdot)*(u(\tau,\cdot)v(\tau,\cdot))\right|\right|_{L^{\infty}}\leqslant c_{\eta,\beta}\,||u||_{F_T^{\beta}}\,||v||_{E_T^s}\,e^{5\eta t}\frac{1}{(t-\tau)^{\frac{2}{3}}\tau^{\frac{1}{3}}},
$$

y con esto estimamos

$$
\begin{aligned}
t^{\frac{1}{3}}\left|\left|(1+|\cdot|^{\beta})B_{\eta}(u,v)(t,\cdot)\right|\right|_{L^{\infty}}&\leqslant\frac{1}{2}\int_0^t\left|\left|(1+|\cdot|^{\beta})\partial_x K_{\eta}(t-\tau,\cdot)*(u(\tau,\cdot)v(\tau,\cdot))\right|\right|_{L^{\infty}}d\tau\\
&\leqslant t^{\frac{1}{3}}c_{\eta,\beta}\,||u||_{F_T^{\beta}}\,||v||_{E_T^s}\,e^{5\eta t}\int_0^t\frac{1}{(t-\tau)^{\frac{2}{3}}\tau^{\frac{1}{3}}}d\tau. \qquad (4.24)
\end{aligned}
$$

Luego, de la Proposición A.3, página 138 del Apéndice A, con $\mu=\frac{2}{3}$ y $\nu=\frac{1}{3}$, deducimos que la integral en (4.24) es convergente y se tiene que

$$
\begin{aligned}
t^{\frac{1}{3}}\left|\left|(1+|\cdot|^{\beta})\,B_{\eta}(u,v)(t,\cdot)\right|\right|_{L^{\infty}}&\leqslant t^{\frac{1}{3}}c_{\eta,\beta}\,||u||_{F_T^{\beta}}\,||v||_{E_T^s}\,e^{5\eta t}\int_0^t\frac{1}{(t-\tau)^{\frac{2}{3}}\tau^{\frac{1}{3}}}d\tau\\
&=t^{\frac{1}{3}}c_{\eta,\beta}\,||u||_{F_T^{\beta}}\,||v||_{E_T^s}\,e^{5\eta t}t^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}-1}\\
&\leqslant c_{\eta,\beta}\,||u||_{\tilde{F}_T^{s,\beta}}\,||v||_{\tilde{F}_T^{s,\beta}}\,e^{5\eta t}\,t^{\frac{1}{3}}. \qquad (4.25)
\end{aligned}
$$

Tomando el supremo en el intervalo $[0,T]$ tenemos

$$
||B_{\eta}(u,v)||_{F_T^{\beta}}\leqslant c_{\eta,\beta}\,||u||_{\tilde{F}_T^{s,\beta}}\,||v||_{\tilde{F}_T^{s,\beta}}\,e^{5\eta T}\,T^{\frac{1}{3}}. \qquad (4.26)
$$

En resumen, de (4.20) y (4.26) concluimos que

$$
||B_{\eta}(u,v)||_{\tilde{F}_T^{s,\beta}}\leqslant C_T\,||u||_{\tilde{F}_T^{s,\beta}}\,||v||_{\tilde{F}_T^{s,\beta}}\,,
$$

donde

$$C_T = \begin{cases} c_{s,\eta,\beta}(e^{\frac{5}{2}\eta T} T^{\frac{3-2s}{6}} + e^{5\eta T} T^{\frac{1}{3}}), & \text{si } 0 \leqslant s \leqslant 1/2, \\ c_{\eta,\beta}(e^{\frac{3}{2}\eta T} T^{\frac{1}{2}} + e^{5\eta T} T^{\frac{1}{3}}), & \text{si } 1/2 < s. \end{cases} \tag{4.27}$$

Para cualquiera de los dos casos, podemos encontrar T suficientemente pequeño, de modo que

$$4C_T \|U_0\|_{\tilde{F}_T^{s,\beta}} = 4C_T(\|U_0\|_{E_T^s} + \|U_0\|_{F_T^\beta}) \leqslant 4C_T \left(e^{\eta T} \|u_0\|_{H^s} + e^{5\eta T} \left\|(1 + |\cdot|^\beta)u_0\right\|_{L^\infty}\right) < 1. \tag{4.28}$$

Esto asegura que se cumplan todas las hipótesis del teorema de punto fijo de Picard (Teorema 3.1, página 53) y por tanto que exista una solución *mild* del problema (3.1), $u \in \tilde{F}_T^{s,\beta}$ (con T un tiempo pequeño que satisfaga (4.28)). La unicidad se sigue pues en particular tenemos que $u \in E_T^s$ y la unicidad de solución ya fue demostrada en este espacio más grande. Asimismo ya se comprobó que $u \in \mathscr{C}^1((0,T]; H^\infty(\mathbb{R})) = \bigcap_{r \geqslant 0} \mathscr{C}^1((0,T]; H^r(\mathbb{R}))$ (ver el Teorema 3.2 en la página 74). $\square$

Para completar esta sección aseguraremos que el decrecimiento puntual en variable espacial de la solución *mild* del problema (3.1) se preserva para todo tiempo $t > 0$.

Teorema 4.2. *Sean $s \geqslant 0$, $1 < \beta \leqslant 2$, $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ un dato inicial*

$$|u_0(x)| \leqslant \frac{c}{1 + |x|^\beta}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

y $u \in \mathscr{C}([0, +\infty); H^s(\mathbb{R}))$, la única solución mild *local del problema (3.1) asociada a u_0. Entonces u posee el siguiente decrecimiento puntual en variable espacial:*

$$|u(t,x)| \leqslant \frac{c_\eta}{t^{\frac{1}{3}}} \frac{1}{1 + |x|^\beta}, \qquad t > 0,\ x \in \mathbb{R}.$$

DEMOSTRACIÓN. Denotemos por T al tiempo dado por el Teorema 4.1 (página 108), para el cual se cumple que

$$|u(t,x)| \leqslant \frac{c_\eta}{t^{\frac{1}{3}}} \frac{1}{1+|x|^\beta}, \qquad 0 < t \leqslant T,\ x \in \mathbb{R}.$$

Para garantizar que T se puede extender indefinidamente, buscaremos una función continua $h : [0,T] \to [0,+\infty)$ que satisfaga

$$g(t) := t^{\frac{1}{3}} \left\| (1+|\cdot|^\beta) u(t,\cdot) \right\|_{L^\infty} \leqslant h(t), \qquad t \in [0,T].$$

Este control no permite que exista un fenómeno de explosión en tiempo finito de u en la norma del espacio F_T^β (ver la Definición 4.13, página 105). Para encontrar tal función h nos apoyaremos en el lema siguiente:

LEMA 4.1. *Sean $\mu > 0$ y $\nu > 0$ tales que $\mu + \nu > 1$. Sea $g\colon [0,T] \to \mathbb{R}^+$ una función que verifica*

1. $g \in L^1_{loc}([0,T])$,
2. $t^{\nu-1} g \in L^1_{loc}([0,T])$,
3. *Existen dos constantes $a \geqslant 0$ y $b \geqslant 0$ tales que para todo $t \in [0,T]$ tenemos*

$$g(t) \leqslant a + b \int_0^t (t-\tau)^{\mu-1} \tau^{\nu-1} g(\tau) d\tau,$$

entonces:

a) Existe una función continua y creciente $\Theta : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ definida por

$$\Theta(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k t^{\sigma k},$$

donde $\sigma = \mu + \nu - 1$ y los coeficientes $c_k > 0$ están dados por la fórmula recursiva:

$$c_0 = 1, \quad y \quad \frac{c_{k+1}}{c_k} = \frac{\Gamma(k\sigma + \nu)}{\Gamma(k\sigma + \mu + \nu)}, \qquad \textit{para } k \geqslant 1,$$

en la cual Γ *representa la función Gamma (definida en el Apéndice A, página 134).*

b) Para todo tiempo $t \in [0,T]$*, tenemos que*

$$g(t) \leqslant a\Theta((b\Gamma(\mu))^{\frac{1}{\sigma}} t).$$

Su demostración se localiza en la página 189 de Henry (1981).

Retomando la demostración del Teorema 4.2, para todo $t \in [0,T]$ se tiene que

$$\begin{aligned} g(t) &= t^{\frac{1}{3}} \left\| (1+|\cdot|^{\beta}) u(t,\cdot) \right\|_{L^\infty} \\ &= t^{\frac{1}{3}} \left\| (1+|\cdot|^{\beta})(K_\eta(t,\cdot) * u_0 + B_\eta(u,u)(t,\cdot)) \right\|_{L^\infty} \\ &\leqslant t^{\frac{1}{3}} \left\| (1+|\cdot|^{\beta})\, U_0(t,\cdot) \right\|_{L^\infty} + t^{\frac{1}{3}} \left\| (1+|\cdot|^{\beta}) B_\eta(u,u)(t,\cdot) \right\|_{L^\infty}, \end{aligned}$$

donde $U_0(t,\cdot) = K_\eta(t,\cdot) * u_0$ y la forma bilineal $B_\eta(\cdot,\cdot)$ está definida en (3.21), página 63. Primero, para la estimación de la parte lineal, de (4.19) (página 109) sabemos que

$$t^{\frac{1}{3}} \left\| (1+|\cdot|^{\beta})\, U_0(t,\cdot) \right\|_{L^\infty} \leqslant c_\eta \left\| (1+|\cdot|^{\beta}) u_0 \right\|_{L^\infty} e^{5\eta T} =: c_1. \tag{4.29}$$

Para la parte no lineal, tomamos $0 < \rho < T$ fijo y consideramos dos casos separadamente.

- Si $0 \leqslant t \leqslant \rho$, de (4.26) (página 111) en la demostración del teorema anterior sabemos que $B_\eta(u,u) \in F_T^{\beta}$, entonces en particular tenemos

$$t^{\frac{1}{3}} \left\| (1+|\cdot|^{\beta})\, B_\eta(u,u)(t,\cdot) \right\|_{L^\infty} \leqslant \sup_{0\leqslant t\leqslant \rho} \left(t^{\frac{1}{3}} \left\| (1+|\cdot|^{\beta})\, B_\eta(u,u)(t,\cdot) \right\|_{L^\infty} \right) =: c_2. \tag{4.30}$$

- Si $\rho < t \leqslant T$, separamos en dos partes a la integral en variable de tiempo que define a $B_\eta(\cdot,\cdot)$:

$$
\begin{aligned}
&\left\|\left(1+|\cdot|^{\beta}\right) B_{\eta}(u,u)(t,\cdot)\right\|_{L^{\infty}} = \frac{1}{2}\left\|\int_0^t \left(1+|\cdot|^{\beta}\right)\partial_x K_{\eta}(t-\tau,\cdot) * u^2(\tau,\cdot)d\tau\right\|_{L^{\infty}} \\
&\leqslant \frac{1}{2}\left(\int_0^{\rho}\left\|\left(1+|\cdot|^{\beta}\right)\left(\partial_x K_{\eta}(t-\tau,\cdot) * u^2(\tau,\cdot)\right)\right\|_{L^{\infty}} d\tau + \int_{\rho}^{t}\left\|\left(1+|\cdot|^{\beta}\right)\left(\partial_x K_{\eta}(t-\tau,\cdot) * u^2(\tau,\cdot)\right)\right\|_{L^{\infty}} d\tau\right) \\
&= \tfrac{1}{2}\left(I_1 + I_2\right).
\end{aligned} \tag{4.31}
$$

La convolución dentro de la integral I_1 ya fue analizada anteriormente en (4.23) (página 111), de donde se tiene que

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^{\rho}\left\|\left(1+|\cdot|^{\beta}\right)\left(\partial_x K_{\eta}(t-\tau,\cdot) * u^2(\tau,\cdot)\right)\right\|_{L^{\infty}} d\tau \\
&\leqslant c_{\eta,\beta}\sup_{0\leqslant\tau\leqslant\rho}\left(\tau^{\frac{1}{3}}\left\|\left(1+|\cdot|^{\beta}\right)u(\tau,\cdot)\right\|_{L^{\infty}}\right)\left(\sup_{0\leqslant\tau\leqslant\rho}||u(\tau,\cdot)||_{H^s}\right)e^{5\eta t}\int_0^{\rho}\frac{1}{(t-\tau)^{\frac{2}{3}}\tau^{\frac{1}{3}}}d\tau \\
&\leqslant c_{\eta,\beta}\, e^{5\eta T}\sup_{0\leqslant\tau\leqslant\rho}\left(\tau^{\frac{1}{3}}\left\|\left(1+|\cdot|^{\beta}\right)u(\tau,\cdot)\right\|_{L^{\infty}}\right)\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant\rho}||u(\tau,\cdot)||_{H^s}\right)\int_0^{\rho}\frac{1}{(\rho-\tau)^{\frac{2}{3}}\tau^{\frac{1}{3}}}d\tau.
\end{aligned}
$$

La integral de la derecha es finita por la Proposición A.3 (página 138 del Apéndice A) y podemos escribir

$$
\begin{aligned}
I_1 &\leqslant c_{\eta,\beta}e^{5\eta T}\sup_{0\leqslant\tau\leqslant\rho}\left(\tau^{\frac{1}{3}}\left\|\left(1+|\cdot|^{\beta}\right)u(\tau,\cdot)\right\|_{L^{\infty}}\right)\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant\rho}||u(\tau,\cdot)||_{H^s}\right)\rho^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}-1} \\
&= c_{\eta,\beta}e^{5\eta T}\sup_{0\leqslant\tau\leqslant\rho}\left(\tau^{\frac{1}{3}}\left\|\left(1+|\cdot|^{\beta}\right)u(\tau,\cdot)\right\|_{L^{\infty}}\right)\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant\rho}||u(\tau,\cdot)||_{H^s}\right) \\
&=: c_3.
\end{aligned} \tag{4.32}
$$

Para estimar I_2, primero *pasamos* la derivada en variable espacial del núcleo K_{η} en la función u^2, esto es posible pues la solución satisface que $u(\tau,\cdot) \in H^{\infty}(\mathbb{R}) = \bigcap_{r\geqslant 0} H^r(\mathbb{R})$ para todo $0 < \tau \leqslant t$. Se tiene:

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_{\rho}^{t}\left\|\left(1+|\cdot|^{\beta}\right)\left(\partial_x K_{\eta}(t-\tau,\cdot) * u^2(\tau,\cdot)\right)\right\|_{L^{\infty}} d\tau \\
&= 2\int_{\rho}^{t}\left\|\left(1+|\cdot|^{\beta}\right)\left(K_{\eta}(t-\tau,\cdot) * (u(\tau,\cdot)\partial_x u(\tau,\cdot))\right)\right\|_{L^{\infty}} d\tau.
\end{aligned}
$$

Ahora estimamos la cantidad dentro de la integral. Para $x \in \mathbb{R}$ y $\rho < \tau \leqslant t$ arbitrarios, del decrecimiento puntual en variable espacial de K_{η} (Proposición 4.2 en la página 96) se sigue que

$$
\begin{aligned}
(1+&|x|^{\beta})|K_\eta(t-\tau,\cdot)*(u(\tau,\cdot)\partial_x u(\tau,\cdot))(x)|\\
&\leqslant c_\eta\, e^{5\eta t}\,(1+|x|^{\beta})\frac{1}{(t-\tau)^{\frac{1}{3}}}\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{1+|x-y|^2}\frac{1+|y|^{\beta}}{1+|y|^{\beta}}\,|\partial_x u(\tau,y)|\,|u(\tau,y)|\,dy\\
&\leqslant c_\eta\, e^{5\eta t}\,(1+|x|^{\beta})\frac{1}{(t-\tau)^{\frac{1}{3}}}\left|\left|(1+|\cdot|^{\beta})u(\tau,\cdot)\right|\right|_{L^\infty}\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{1+|x-y|^2}\frac{1}{1+|y|^{\beta}}\,|\partial_x u(\tau,y)|\,dy.
\end{aligned}
$$

Luego, con el mismo proceso hecho en (4.22) (página 110), podemos probar que la función $f_x(y) = \dfrac{1}{1+|x-y|^2}\dfrac{1}{1+|y|^{\beta}}$ pertenece a $L^2(\mathbb{R})$ y se cumple que $||f_x||_{L^2} \leqslant c_\beta \dfrac{1}{1+|x|^{\beta}}$. Entonces podemos acotar

$$
\begin{aligned}
(1+|x|^{\beta})&|K_\eta(t-\tau,\cdot)*(u(\tau,\cdot)\partial_x u(\tau,\cdot))(x)|\\
&\leqslant c_\eta\, e^{5\eta t}(1+|x|^{\beta})\frac{1}{(t-\tau)^{\frac{1}{3}}}\left|\left|(1+|\cdot|^{\beta})u(\tau,\cdot)\right|\right|_{L^\infty}||\partial_x u(\tau,\cdot)||_{L^2}\,||f_x||_{L^2}\\
&\leqslant c_{\eta,\beta}\, e^{5\eta t}\frac{1}{(t-\tau)^{\frac{1}{3}}}\left|\left|(1+|\cdot|^{\beta})\,u(\tau,\cdot)\right|\right|_{L^\infty}||u(\tau,\cdot)||_{H^1}\,\frac{1+|x|^{\beta}}{1+|x|^{\beta}}\\
&\leqslant c_{\eta,\beta}\, e^{5\eta t}\frac{1}{(t-\tau)^{\frac{1}{3}}\tau^{\frac{1}{3}}}\,||u(\tau,\cdot)||_{H^1}\left(\tau^{\frac{1}{3}}\left|\left|(1+|\cdot|^{\beta})\,u(\tau,\cdot)\right|\right|_{L^\infty}\right)\\
&\leqslant c_{\eta,\beta}\, e^{5\eta T}\sup_{\rho\leqslant t\leqslant T}||u(t,\cdot)||_{H^1}\,\frac{1}{(t-\tau)^{\frac{1}{3}}\tau^{\frac{1}{3}}}\,g(\tau).
\end{aligned}
$$

La cantidad $\sup\limits_{\rho\leqslant t\leqslant T}||u(t,\cdot)||_{H^1}$ es finita puesto que $u \in \mathscr{C}^1((0,T];H^\infty(\mathbb{R}))$ (ver Teorema 3.2, página 74). Luego, como x es arbitrario, se tiene que

$$
\left|\left|(1+|x|^{\beta})\left(K_\eta(t-\tau,\cdot)*(u(\tau,\cdot)\partial_x u(\tau,\cdot)\right)\right|\right|_{L^\infty} \leqslant c_{\eta,\beta}\, e^{5\eta T}\sup_{\rho\leqslant t\leqslant T}||u(t,\cdot)||_{H^1}\,\frac{1}{(t-\tau)^{\frac{1}{3}}\tau^{\frac{1}{3}}}\,g(\tau).
$$

Entonces, la integral I_2 se estima como sigue:

$$
\begin{aligned}
I_2 &= 2\int_\rho^t \left|\left|(1+|\cdot|^{\beta})K_\eta(t-\tau,\cdot)*(u(\tau,\cdot)\partial_x u(\tau,\cdot))\right|\right|_{L^\infty}d\tau\\
&\leqslant c_{\eta,\beta}\, e^{5\eta T}\sup_{\rho\leqslant t\leqslant T}||u(t,\cdot)||_{H^1}\int_\rho^t \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{1}{3}}\tau^{\frac{1}{3}}}g(\tau)d\tau\\
&\leqslant \frac{b}{2}\int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{1}{3}}\tau^{\frac{1}{3}}}g(\tau)d\tau \qquad (4.33)
\end{aligned}
$$

donde $b = 2c_{\eta,\beta}\, e^{5\eta T} \sup\limits_{\rho\leqslant t\leqslant T} ||u(t,\cdot)||_{H^1}$. En resumen, de (4.29), (4.30), (4.31), (4.32) y (4.33), para todo $0 \leqslant t \leqslant T$ tenemos que

$$g(t) \leqslant a + b\int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{1}{3}}\tau^{\frac{1}{3}}} g(\tau)d\tau,$$

donde $a = c_1 + c_2 + \frac{1}{2}c_3$. Esta última desigualdad es similar a la tercera condición del Lema 4.1 (página 113) con $\mu = \nu = \dfrac{2}{3}$. Así, para emplear el lema antes mencionado, únicamente faltaría mostrar que $g \in L^1_{loc}([0,T])$ y $t^{-\frac{1}{3}} g \in L^1_{loc}([0,T])$. La primera aseveración se sigue del hecho que $g \in L^\infty([0,T]) \subseteq L^p_{loc}([0,T])$ para todo $p \in [1,+\infty)$. La segunda aseveración es trivial ya que $g \in L^\infty([0,T])$, $t^{-\frac{1}{3}} \in L^1([0,T])$ y por ende $t^{-\frac{1}{3}} g \in L^1_{loc}([0,T])$. Ahora, utilizando el Lema 4.1, sabemos que existe una función Θ (descrita en el mismo lema) continua y creciente tal que

$$g(t) = t^{\frac{1}{3}} \left|\left|(1+|\cdot|^\beta)\, u(t,\cdot)\right|\right|_{L^\infty} \leqslant a\Theta\left(\left(b\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\right)^3 t\right), \qquad \text{para todo } 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Finalmente tomamos la función continua $h(t) = a\Theta\left(\left(b\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\right)^3 t\right)$, de manera que se tenga $g(t) \leqslant h(t)$ para todo $0 \leqslant t \leqslant T$, esto completa la demostración. □

3. Estudio del decrecimiento optimal y comportamiento asintótico

Una vez concluido el problema de persistencia referente al estudio del decrecimiento puntual en variable espacial de la ecuación (3.1), es natural preguntar si los resultados obtenidos son optimales. Entenderemos por optimalidad de decrecimiento al mayor escalar positivo β que conserve la propiedad de persistencia del decaimiento puntual en variable de espacio. En otras palabras, si consideramos un dato $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ $(s \geqslant 0)$ que decae como $|u_0(x)| \leqslant \dfrac{1}{1+|x|^{\beta+\epsilon}}$, con $\epsilon > 0$, entonces la solución $u(t,x)$ asociada a dicho dato inicial no preservará su decaimiento en al menos algún tiempo $t > 0$.

En este aspecto, autores como Fonseca, Pastrán y Rodríguez (véase Fonseca et al. (2019)), quienes estudiaron el comportamiento en variable espacial de la solución *mild* del problema (3.1) en el contexto de los espacios de Sobolev con peso $Z_{s,r} = H^s(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}, |x|^{2r}\, dx)$ $(r < 3/2 \leqslant s)$, presentaron un análisis exitoso sobre optimalidad de decrecimiento. En su trabajo demostraron que la hipótesis sobre el dato inicial, $\hat{u}_0(x) \neq 0$ $(\int_{\mathbb{R}} u_0(x)dx \neq 0)$, es una condición suficiente para asegurar la optimalidad de la propiedad de persistencia.

Por otro lado, con respecto a las conclusiones de optimalidad para el decaimiento en nuestro marco teórico, un paso previo es conocer el comportamiento asintótico en variable espacial de nuestra solución. El teorema siguiente nos permite entender dicho comportamiento asintótico.

TEOREMA 4.3. *Sean $s \geqslant 0$, $t > 0$, $\epsilon > 0$, $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ un dato inicial que satisface*

$$|u_0(x)| \leqslant \frac{c}{1 + |x|^{2+\epsilon}}, \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{4.34}$$

y $u \in \mathscr{C}([0,T]; H^s(\mathbb{R}))$, la única solución mild *del problema (3.1). Entonces, cuando $|x|$ es suficientemente grande, u posee el siguiente comportamiento asintótico en variable espacial*

$$u(t,x) = K_\eta(t,x)\left(\int_{\mathbb{R}} u_0(x)\, dx\right) - \frac{1}{2}\int_0^t \partial_x K_\eta(t-\tau,x)\left(\int_{\mathbb{R}} u^2(\tau,y)\, dy\right) d\tau + o(t)\left(\frac{1}{x^2}\right). \tag{4.35}$$

Donde $o(t)\left(\frac{1}{x^2}\right)$ denota a cualquier cantidad que dependa de x y t, para la cual se cumpla que

$$\lim_{|x| \to +\infty} \left(x^2 o(t)\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = 0. \tag{4.36}$$

Antes de proporcionar una demostración para este teorema, notemos que la condición que debe verificar el dato inicial (4.34) tiene que ver con el teorema de persistencia (Teorema 4.2 en la página 112) que se tiene hasta $\beta = 2$. Por tal motivo nos interesa conocer datos iniciales que decaigan más rápido que $\dfrac{1}{1 + x^2}$ y la condición (4.34) abarca a todos ellos.

Demostración. Primero nos ocupamos de la parte lineal de u, separando en cuatro partes la integral que define a la convolución $K_\eta(t,\cdot)*u_0$. Dado $x\in\mathbb{R}$ se tiene que

$$
\begin{aligned}
&K_\eta(t,\cdot)*u_0(x)=\int_{\mathbb{R}} K_\eta(t,x-y)u_0(y)dy\\
&=\int_{|y|\leqslant\frac{|x|}{2}}(K_\eta(t,x-y)-K_\eta(t,x))\,u_0(y)\,dy+\int_{|y|>\frac{|x|}{2}}K_\eta(t,x-y)\,u_0(y)\,dy+\int_{|y|\leqslant\frac{|x|}{2}}K_\eta(t,x)\,u_0(y)\,dy\\
&=\int_{|y|\leqslant\frac{|x|}{2}}(K_\eta(t,x-y)-K_\eta(t,x))\,u_0(y)\,dy+\int_{|y|>\frac{|x|}{2}}K_\eta(t,x-y)\,u_0(y)\,dy\\
&\quad+K_\eta(t,x)\left(\int_{\mathbb{R}}u_0(x)\,dx-\int_{|y|>\frac{|x|}{2}}u_0(y)\,dy\right)\\
&=\int_{|y|\leqslant\frac{|x|}{2}}(K_\eta(t,x-y)-K_\eta(t,x))\,u_0(y)\,dy+\int_{|y|>\frac{|x|}{2}}K_\eta(t,x-y)\,u_0(y)\,dy\\
&\quad-K_\eta(t,x)\int_{|y|>\frac{|x|}{2}}u_0(y)\,dy+K_\eta(t,x)\int_{\mathbb{R}}u_0(x)dx\\
&=I_a(t,x)+I_b(t,x)-K_\eta(t,x)I_c(x)+K_\eta(t,x)\int_{\mathbb{R}}u_0(x)dx. \qquad (4.37)
\end{aligned}
$$

Notemos que el cuarto término en la anterior igualdad es uno de los buscados. Ahora nos disponemos a estimar los términos $I_a(t,x)$, $I_b(t,x)$ y $K_\eta(t,x)I_c(t,x)$ por separado.

En primer lugar para $I_a(t,x)$, utilizamos el teorema del valor medio en la función $K_\eta(t,\cdot)$. Entonces, para todo $y\in\mathbb{R}$, existe $z=\lambda x+(1-\lambda)(x-y)=x+(\lambda-1)y$ (con $0\leqslant\lambda\leqslant 1$) tal que

$$K_\eta(t,x-y)-K_\eta(t,x)=-y\,\partial_x K_\eta(t,z). \qquad (4.38)$$

Luego, si suponemos que $|y|\leqslant\dfrac{|x|}{2}$ (de modo que y pertenezca la región de integración de $I_a(t,x)$), podemos estimar

$$|z|=|x+(\lambda-1)y|\geqslant|x|-(1-\lambda)\,|y|\geqslant|x|-|y|\geqslant\frac{|x|}{2}. \qquad (4.39)$$

Combinando (4.38), (4.39) y gracias al decrecimiento en variable espacial de $\partial_x K(t,\cdot)$ (Proposición 4.3 en la página 100), obtenemos

$$|K_\eta(t,x-y)-K_\eta(t,x)|=|y|\,|\partial_x K_\eta(t,z)|\leqslant c_\eta\frac{e^{5\eta t}}{t^{\frac{2}{3}}}\,|y|\,\frac{1}{1+|z|^3}\leqslant c_\eta\frac{e^{5\eta t}}{t^{\frac{2}{3}}}\,|y|\,\frac{1}{1+|x|^3}.$$

Con este estimativo, mayoramos a la integral $I_a(t,x)$ en valor absoluto:

$$|I_a(t,x)| \leqslant \int_{|y|\leqslant\frac{|x|}{2}} |K_\eta(t,x-y) - K_\eta(t,x)|\,|u_0(y)|\,dy \leqslant c_\eta \frac{e^{5\eta t}}{t^{\frac{2}{3}}} \frac{1}{1+|x|^3} \int_{\mathbb{R}} |y|\,|u_0(y)|\,dy, \tag{4.40}$$

en donde se puede probar sin dificultad que la integral de la derecha es finita debido al decrecimiento de u_0 dado por (4.34). Por ende tenemos que

$$I_a(t,x) = o(t)\left(\frac{1}{x^2}\right). \tag{4.41}$$

En segundo lugar, estimamos $I_b(t,x)$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} |I_b(t,x)| &\leqslant \int_{|y|>\frac{|x|}{2}} |K_\eta(t,x-y)u_0(y)|\,dy \\ &\leqslant \left|\left|(1+|\cdot|^{2+\epsilon})u_0\right|\right|_{L^\infty} \int_{|y|>\frac{|x|}{2}} |K_\eta(t,x-y)|\,\frac{1}{1+|y|^{2+\epsilon}}dy \\ &\leqslant c_\epsilon \left|\left|(1+|\cdot|^{2+\epsilon})u_0\right|\right|_{L^\infty} \frac{1}{1+|x|^{2+\epsilon}} \int_{|y|>\frac{|x|}{2}} |K_\eta(t,x-y)|\,dy \\ &\leqslant c_\epsilon \left|\left|(1+|\cdot|^{2+\epsilon})u_0\right|\right|_{L^\infty} \frac{1}{1+|x|^{2+\epsilon}} \left|\left|K_\eta(t,\cdot)\right|\right|_{L^1}, \end{aligned} \tag{4.42}$$

donde $||K_\eta(t,\cdot)||_{L^1} < +\infty$ debido al decaimiento de $K_\eta(t,\cdot)$ (Proposición 4.2, página 96). Entonces para $I_b(t,x)$ también se tiene que

$$I_b(t,x) = o(t)\left(\frac{1}{x^2}\right). \tag{4.43}$$

En tercer lugar, el término $|K_\eta(t,x)I_c(x)|$ se domina mediante el decrecimiento de $K_\eta(t,\cdot)$ y de u_0. Tenemos

$$\begin{aligned} &|K_\eta(t,x)I_c(x)| \leqslant |K_\eta(t,x)| \int_{|y|>\frac{|x|}{2}} |u_0(y)|\,dy \\ &\leqslant c_\eta \frac{e^{5\eta t}}{t^{\frac{1}{3}}} \frac{1}{1+|x|^2} \int_{|y|>\frac{|x|}{2}} \frac{1}{1+|y|^{2+\epsilon}}dy \left|\left|(1+|\cdot|^{2+\epsilon})u_0\right|\right|_{L^\infty} \\ &= c_\eta \frac{e^{5\eta t}}{t^{\frac{1}{3}}} \frac{1}{1+|x|^2} \left(\int_{1\geqslant|y|>\frac{|x|}{2}} \frac{1}{1+|y|^{2+\epsilon}}dy + \int_{\left\{|y|>\frac{|x|}{2}\right\}\cap\{|y|>1\}} \frac{1}{1+|y|^{2+\epsilon}}dy\right) \left|\left|(1+|\cdot|^{2+\epsilon})u_0\right|\right|_{L^\infty} \\ &\leqslant c_{\eta,\epsilon} \frac{e^{5\eta t}}{t^{\frac{1}{3}}} \frac{1}{1+|x|^2} \left(\frac{1}{1+|x|^{2+\epsilon}} \int_{1\geqslant|y|} dy + \int_{\left\{|y|>\frac{|x|}{2}\right\}\cap\{|y|>1\}} \frac{1}{|y|^{2+\epsilon}}dy\right) \left|\left|(1+|\cdot|^{2+\epsilon})u_0\right|\right|_{L^\infty} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant c_{\eta,\epsilon}\frac{e^{5\eta t}}{t^{\frac{1}{3}}}\frac{1}{1+|x|^2}\left(\frac{1}{1+|x|^{2+\epsilon}}+\frac{1}{|x|^{\epsilon}}\int_{\{|y|>\frac{|x|}{2}\}\cap\{|y|>1\}}\frac{1}{|y|^2}dy\right)\left\|(1+|\cdot|^{2+\epsilon})u_0\right\|_{L^\infty}\\
&\leqslant c_{\eta,\epsilon}\frac{e^{5\eta t}}{t^{\frac{1}{3}}}\frac{1}{1+|x|^2}\left(\frac{1}{1+|x|^{2+\epsilon}}+\frac{1}{|x|^{\epsilon}}\int_{|y|>1}\frac{1}{|y|^2}dy\right)\left\|(1+|\cdot|^{2+\epsilon})u_0\right\|_{L^\infty}\\
&= c_{\eta,\epsilon}\frac{e^{5\eta t}}{t^{\frac{1}{3}}}\frac{1}{1+|x|^2}\left(\frac{1}{1+|x|^{2+\epsilon}}+\frac{1}{|x|^{\epsilon}}\right)\left\|(1+|\cdot|^{2+\epsilon})u_0\right\|_{L^\infty}\\
&= o(t)\left(\frac{1}{x^2}\right). \qquad (4.44)
\end{aligned}
$$

Recopilando las estimativas (4.37), (4.41), (4.43) y (4.44) se sigue que

$$
K_\eta(t,\cdot)*u_0(x)=K_\eta(t,x)\left(\int_{\mathbb{R}}u_0(x)\,dx\right)+o(t)\left(\frac{1}{x^2}\right). \qquad (4.45)
$$

Con esto hemos terminado de estimar la parte lineal de u y ahora nos corresponde hacer cálculos en su parte no lineal. Sumamos y restamos el segundo término que queremos que aparezca y luego estimamos las integrales sobrantes.

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\int_0^t \partial_x K_\eta(t-\tau,\cdot)*u^2(\tau,\cdot)(x)d\tau &= -\frac{1}{2}\int_0^t\int_{\mathbb{R}}\partial_x K_\eta(t-\tau,x-y)\,u^2(\tau,y)\,dy\,d\tau\\
&= -\frac{1}{2}\int_0^t\int_{\mathbb{R}}\partial_x K_\eta(t-\tau,x-y)\,u^2(\tau,y)\,dy\,d\tau\\
&\quad+\frac{1}{2}\int_0^t\int_{\mathbb{R}}\partial_x K_\eta(t-\tau,x)\,u^2(\tau,y)\,dy\,d\tau-\frac{1}{2}\int_0^t\int_{\mathbb{R}}\partial_x K_\eta(t-\tau,x)\,u^2(\tau,y)\,dy\,d\tau\\
&= -\frac{1}{2}I_d(t,x)+\frac{1}{2}I_e(t,x)-\frac{1}{2}\int_0^t\partial_x K_\eta(t-\tau,x)\int_{\mathbb{R}}u^2(\tau,y)\,dy\,d\tau. \qquad (4.46)
\end{aligned}
$$

Antes de enfocarnos en determinar el decrecimiento en variable espacial de $I_d(t,x)$ y $I_e(t,x)$, notemos que la hipótesis de decrecimiento del dato inicial (ver (4.34)) implica que en particular u_0 también decrezca como la función $\dfrac{1}{1+|x|^2}$. Luego, debido a que ya demostramos la propiedad de persistencia de decaimiento en variable espacial del problema (3.1) para el índice de decrecimiento $\beta=2$, esto nos permite concluir que la solución u mantiene el siguiente decrecimiento en variable de espacio

$$
|u(\tau,x)|\leqslant c_\eta\frac{1}{\tau^{\frac{1}{3}}}\frac{1}{1+|x|^2},\qquad 0<\tau\leqslant t.
$$

Después, estimamos la integral $I_d(t,x)$ de acuerdo a lo recién mencionado y trayendo a colación el decrecimiento en variable espacial de $\partial_x K_\eta$ (Proposición 4.3, página 100).

$$\begin{aligned}
|I_d(t,x)| &= \left| \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \partial_x K_\eta(t-\tau, x-y)\, u^2(\tau,y)\, dy\, d\tau \right| \\
&\leqslant \int_0^t \int_{\mathbb{R}} |\partial_x K_\eta(t-\tau, x-y)|\, |u(\tau,y)|^2 \; dy\, d\tau \\
&\leqslant c_\eta\, e^{5\eta t} \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{2}{3}}} \frac{1}{\tau^{\frac{1}{6}}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+|x-y|^3} \left(\frac{1}{1+|y|^2} \right)^2 dy\, d\tau \\
&\leqslant c_\eta\, e^{5\eta t} \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{2}{3}}} \frac{1}{\tau^{\frac{1}{6}}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+|x-y|^3} \frac{1}{1+|y|^4}\, dy\, d\tau.
\end{aligned}$$

La integral en variable de espacio en la anterior estima es la convolución de la función $\dfrac{1}{1+|x|^3}$ y la función $\dfrac{1}{1+|x|^4}$. Entonces, por la Proposición 4.1 (página 94) se sigue que

$$|I_d(t,x)| \leqslant c_\eta\, e^{5\eta t} \frac{1}{1+|x|^3} \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{2}{3}}} \frac{1}{\tau^{\frac{1}{6}}}\, d\tau.$$

La integral de la derecha es finita debido a la Proposición A.3 (página 70 del Apéndice 134) y podemos escribir

$$|I_d(t,x)| \leqslant c_\eta\, e^{5\eta t}\, \frac{1}{1+|x|^3} t^{\frac{5}{6}+\frac{1}{3}-1} = c_\eta\, e^{5\eta t} \frac{1}{1+|x|^3} t^{\frac{1}{6}} = o(t) \left(\frac{1}{x^2} \right). \tag{4.47}$$

Por último, para la integral $I_e(t,x)$ basta con utilizar el decrecimiento de $\partial_x K_\eta(t,\cdot)$. Tenemos que

$$\begin{aligned}
|I_e(t,x)| &= \left| \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \partial_x K_\eta(t-\tau, x)\, u^2(\tau,y)\, dy\, d\tau \right| \\
&\leqslant c_\eta\, e^{5\eta t} \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{2}{3}}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+|x|^3}\, |u(\tau,y)|^2 \; dy\, d\tau \\
&= c_\eta\, e^{5\eta t} \frac{1}{1+|x|^3} \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{2}{3}}}\, ||u(\tau,\cdot)||_{L^2}^2 \; d\tau \\
&\leqslant c_\eta\, e^{5\eta t} \frac{1}{1+|x|^3} \left(\sup_{0\leqslant\tau\leqslant t} ||u(\tau,\cdot)||_{L^2}^2 \right) \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{2}{3}}}\, d\tau \\
&= c_\eta\, e^{5\eta t} \frac{1}{1+|x|^3} \left(\sup_{0\leqslant\tau\leqslant t} ||u(\tau,\cdot)||_{L^2}^2 \right) (3t^{\frac{1}{3}})
\end{aligned}$$

$$= o(t)\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Volviendo a (4.46), con lo realizado resulta que la parte no lineal de u se escribe como

$$-\frac{1}{2}\int_0^t \partial_x K_\eta(t-\tau,\cdot) * u^2(\tau,\cdot)(x)d\tau = -\frac{1}{2}\int_0^t \partial_x K_\eta(t-\tau,x)\int_{\mathbb{R}} u^2(\tau,y)\,dy\,d\tau + o(t)\left(\frac{1}{x^2}\right). \tag{4.48}$$

Para terminar, acoplamos las partes lineal y no lineal de u, escritas en (4.45) y (4.48) respectivamente, para obtener la estimación propuesta en el Teorema 4.3. $\square$

Prestemos atención a la valiosa información que nos provee el Teorema 4.3 acerca del comportamiento asintótico en variable espacial de la solución, descrito en la igualdad:

$$u(t,x) = K_\eta(t,x)\left(\int_{\mathbb{R}} u_0(x)\,dx\right) - \frac{1}{2}\int_0^t \partial_x K_\eta(t-\tau,x)\left(\int_{\mathbb{R}} u^2(\tau,y)\,dy\right)d\tau + o(t)\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Primero, por definición de $o(t)\left(\frac{1}{x^2}\right)$, podemos despreciar esta cantidad ya que en principio es muy pequeña. Con respecto al término $K_\eta(t,x)\left(\int_{\mathbb{R}} u_0(x)\,dx\right)$, es evidente que su comportamiento está determinado por el núcleo K_η (siempre y cuando $\int_{\mathbb{R}} u_0(x)\,dx \neq 0$). Por último, el término restante se puede reescribir como

$$-\frac{1}{2}\int_0^t \partial_x K_\eta(t-\tau,x)\left(\int_{\mathbb{R}} u^2(\tau,y)\,dy\right)d\tau = -\frac{1}{2}\int_0^t \partial_x K_\eta(t-\tau,x)\,||u(\tau,\cdot)||_{L^2}^2\,d\tau,$$

en donde encontramos únicamente la participación de la derivada del núcleo $\partial_x K_\eta$, debido a la independencia de $||u(\tau,\cdot)||_{L^2}^2$ con respecto a x.

En suma, el Teorema 4.3 nos muestra explícitamente que si $\int_{\mathbb{R}} u_0(x)dx \neq 0$ y $|x|$ es suficientemente grande, el comportamiento de u (en variable de espacio) dependerá completamente de K_η y de $\partial_x K_\eta$. Además, recordemos que K_η posee un decrecimiento en variable espacial optimal de la forma $\frac{1}{1+|x|^2}$ (ver la Proposición 4.2 y la Observación 4.1, en las páginas 96 y 99 respectivamente) mientras que $\partial_x K_\eta$ decrece como la función $\frac{1}{1+|x|^3}$ (Proposición 4.3, página 100). Con esta información, desde un análisis superficial se podría pensar que el decaimiento de K_η, al ser el menos pronunciado, es el que controla al decrecimiento de u. Se sigue que la solución debería decaer en variable de espacio a lo más como K_η. Para probar rigurosamente lo que acabamos de mencionar, enunciamos el siguiente teorema.

TEOREMA 4.4. *Sean $s \geqslant 0$, $\epsilon > 0$ y $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ un dato inicial que satisface:*

1. $|u_0(x)| \leqslant \dfrac{c}{1+|x|^{2+\epsilon}}$, $x \in \mathbb{R}$.
2. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} u_0(x)dx \neq 0$.

Sea además $u \in \mathscr{C}([0,+\infty); H^s(\mathbb{R}))$, la única solución de (3.1) asociada a u_0. Entonces se cumple el siguiente control de u por debajo

$$c_t \frac{1}{x^2}\left|\int_{\mathbb{R}} u_0(x)\,dx\right| \leqslant |u(t,x)|\,, \qquad t>0,\ |x| \geqslant M_t, \tag{4.49}$$

donde $M_t > 0$ y $c_t > 0$ son constantes (que dependen de t).

Observación 4.2.

1. *Antes que nada, la desigualdad (4.49) implica automáticamente que en este caso ($\int_{\mathbb{R}} u_0(x)dx \neq 0$) se tiene la optimalidad del problema de persistencia. Es decir que por más que el dato inicial decaiga con una rapidez arbitraria, digamos $u_0 \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, la solución que se genera a partir de este dato inicial no puede decaer más rápido que la función $\dfrac{1}{1+x^2}$.*
2. *En relación con las conclusiones de optimalidad de Fonseca, Pastrán y Rodríguez (Fonseca et al. (2019)), se puede observar que la hipótesis sobre el dato inicial es igual a la nuestra.*

DEMOSTRACIÓN. Note que si logramos demostrar que u tenga el siguiente comportamiento asintótico:

$$u(t,x) = c_t \frac{1}{x^2}\int_{\mathbb{R}} u_0(x)\,dx + o(t)\left(\frac{1}{x^2}\right), \tag{4.50}$$

con c_t, una constante distinta de 0. Entonces, por la definición de $o(t)\left(\frac{1}{x^2}\right)$ (ver (4.36) en la página 118) existiría $M_t > 0$ tal que

$$\left|o(t)\left(\frac{1}{x^2}\right)\right| \leqslant \frac{|c_t|}{2}\frac{1}{x^2}\left|\int_{\mathbb{R}} u_0(x)dx\right|,$$

para todo $|x| \geqslant M_t$. Luego, de (4.50) tendríamos que

$$|u(t,x)| \geqslant |c_t|\frac{1}{x^2}\left|\int_{\mathbb{R}} u_0(x)dx\right| - \left|o(t)\left(\frac{1}{x^2}\right)\right| \geqslant \frac{|c_t|}{x^2}\left|\int_{\mathbb{R}} u_0(x)dx\right| - \frac{|c_t|}{2}\frac{1}{x^2}\left|\int_{\mathbb{R}} u_0(x)dx\right| = \frac{|c_t|}{2}\frac{1}{x^2}\left|\int_{\mathbb{R}} u_0(x)dx\right|,$$

y por tanto

$$\frac{c_t}{2}\frac{1}{x^2}\left|\int_{\mathbb{R}} u_0(x)dx\right| \leqslant |u(t,x)|, \qquad |x| \geqslant M_t.$$

Así, nuestro problema se limita a demostrar la igualdad (4.50). El Teorema 4.3 nos provee de una descripción del comportamiento asintótico de u de la que podemos partir, gracias a ella sabemos que la solución u se puede identificar como

$$u(t,x) = K_\eta(t,x)\left(\int_{\mathbb{R}} u_0(x)\,dx\right) - \frac{1}{2}\int_0^t \partial_x K_\eta(t-\tau,x)\left(\int_{\mathbb{R}} u^2(\tau,y)\,dy\right)d\tau + o(t)\left(\frac{1}{x^2}\right). \tag{4.51}$$

Primeramente, estimaremos el término $K_\eta(t,x)\left(\int_{\mathbb{R}} u_0(x)\,dx\right)$, para lo cual nos remontamos a la estimativa del núcleo que obtuvimos en (4.7) (página 98):

$$K_\eta(t,x) = -\frac{\eta t}{\pi x^2} - \frac{1}{2\pi x^2}(I_3(t,x) + I_4(t,x)), \tag{4.52}$$

donde

$$I_3(t,x) = \int_{-\infty}^0 e^{ix\xi}\left(t\left(-2i+6\eta\xi\right) + t^2\left(-2i\xi + \eta(-1+3\xi^2)\right)^2\right)\hat{K}_\eta(t,\xi)\,d\xi$$

$$I_4(t,x) = \int_0^{+\infty} e^{ix\xi}\left(t\left(2i-6\eta\xi\right) + t^2\left(2i\xi + \eta(1-3\xi^2)\right)^2\right)\hat{K}_\eta(t,\xi)\,d\xi.$$

Notemos que (4.52) ya nos provee del término $\frac{1}{x^2}$ que deseamos acompañe a $\int_{\mathbb{R}} u_0(x)\,dx$, pero necesitamos que los términos restantes conformen un $o(t)\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Para este propósito, repetimos el mismo procedimiento que utilizamos para llegar al estimativo (4.52), esto es, multiplicamos y dividimos ix e integramos por partes para extraer un término $\dfrac{1}{x}$ adicional. Recordando que la transformada de Fourier de $K_\eta(t,\cdot)$ es $\hat{K}_\eta(t,\xi) = e^{t(i|\xi|\xi+\eta(|\xi|-|\xi|^3))}$, se tiene que

$$
\begin{aligned}
I_3(t,x) &= \frac{1}{ix}\int_{-\infty}^{0}(ix)e^{ix\xi}\left(t\left(-2i+6\eta\xi\right)+t^2\left(-2i\xi+\eta(-1+3\xi^2)\right)^2\right)\hat{K}_\eta(t,\xi)d\xi \\
&= \frac{1}{ix}e^{ix\xi}\left(t\left(-2i+6\eta\xi\right)+t^2\left(-2i\xi+\eta(-1+3\xi^2)\right)^2\right)\hat{K}_\eta(t,\xi)\Big|_{-\infty}^{0} \\
&\quad -\frac{1}{ix}\int_{-\infty}^{0}e^{ix\xi}\partial_\xi\left(t(-2i+6\eta\xi)+t^2\left(-2i\xi+\eta(-1+3\xi^2)\right)^2)\hat{K}_\eta(t,\xi)\right)d\xi \\
&= \frac{1}{ix}(-2it+\eta^2t^2)-\frac{1}{ix}I_5(t,x). \\
I_4(t,x) &= \frac{1}{ix}\int_{0}^{+\infty}(ix)e^{ix\xi}\left(t\left(2i-6\eta\xi\right)+t^2\left(2i\xi+\eta(1-3\xi^2)\right)^2\right)\hat{K}_\eta(t,\xi)d\xi \\
&= \frac{1}{ix}e^{ix\xi}\left(t\left(2i-6\eta\xi\right)+t^2\left(2i\xi+\eta(1-3\xi^2)\right)^2\right)\hat{K}_\eta(t,\xi)\Big|_{0}^{+\infty} \\
&\quad -\frac{1}{ix}\int_{0}^{+\infty}e^{ix\xi}\partial_\xi\left(t(2i-6\eta\xi)+t^2(2i\xi+\eta(1-3\xi^2))^2)\hat{K}_\eta(t,\xi)\right)d\xi \\
&= \frac{1}{ix}(-2it-\eta^2t^2)-\frac{1}{ix}I_6(t,x).
\end{aligned}
$$

Luego

$$
K_\eta(t,x) = -\frac{\eta t}{\pi x^2}-\frac{1}{2\pi x^2}(I_3(t,x)+I_4(t,x)) = -\frac{\eta t}{\pi x^2}+\frac{1}{2\pi i x^3}(4it+I_5(t,x)+I_6(t,x)). \tag{4.53}
$$

Probemos que $|I_5(t,x)|$ es acotado con respecto a x, la mayoración de $|I_6(t,x)|$ se seguirá de manera análoga. El interior de la integral $I_5(t,x)$ para $\xi<0$ se calcula

$$
\begin{aligned}
&\partial_\xi\left(t(-2i+6\eta\xi)+t^2\left(-2i\xi+\eta(-1+3\xi^2)\right)^2)\hat{K}_\eta(t,\xi)\right) \\
&= \big(6\eta t+2t^2(-2i+6\eta\xi)(-2i\xi+\eta(-1+3\xi^2)) \\
&\quad +(t^2(-2i+6\eta\xi)+t^3(-2i\xi+\eta(-1+3\xi^2))^2)(-2i\xi+\eta(-1+3\xi^2))\big)\hat{K}_\eta(t,\xi).
\end{aligned}
$$

Por consiguiente,

$$
\begin{aligned}
|I_5(t,x)| &= \left| \int_{-\infty}^{0} e^{ix\xi} \partial_\xi \left(t(-2i+6\eta\xi) + t^2(-2i\xi + \eta(-1+3\xi^2))^2) \hat{K}_\eta(t,\xi) \right) d\xi \right| \\
&\leqslant c \int_{\mathbb{R}} \big(\eta t + t^2 |\xi| + \eta t^2 + \eta t^2 |\xi|^2 + \eta^2 t^2 |\xi| + \eta^2 t^2 |\xi|^3 + t^3 |\xi|^3 + \eta t^3 |\xi|^2 + \eta t^3 |\xi|^4 \\
&\qquad + \eta^2 t^3 |\xi| + \eta^3 t^3 + \eta^3 t^3 |\xi|^2 + \eta^2 t^3 |\xi|^5 + \eta^3 t^3 |\xi|^4 + \eta^3 t^3 |\xi|^6 \big) |\hat{K}_\eta(t,\xi)| d\xi.
\end{aligned}
$$

Luego, nos valemos de la Proposición 3.3 (página 70) con $m \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$ para tener la siguiente acotación

$$
\begin{aligned}
|I_5(t,x)| &\leqslant c e^{3\eta t} \Bigg((\eta t)^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{\eta^2}(\eta t)^{\frac{4}{3}} + \frac{1}{\eta}(\eta t)^{\frac{5}{3}} + \frac{1}{\eta}(\eta t) + (\eta t)^{\frac{4}{3}} + (\eta t)^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{\eta^3}(\eta t)^{\frac{5}{3}} + \frac{1}{\eta^2}(\eta t)^2 + \frac{1}{\eta^2}(\eta t)^{\frac{4}{3}} \\
&\qquad + \frac{1}{\eta}(\eta t)^{\frac{7}{3}} + (\eta t)^{\frac{8}{3}} + (\eta t)^2 + \frac{1}{\eta}(\eta t) + (\eta t)^{\frac{4}{3}} + (\eta t)^{\frac{2}{3}} \Bigg) \\
&\leqslant c e^{4\eta t} \left(1 + \frac{1}{\eta^2} + \frac{1}{\eta} + \frac{1}{\eta^3} \right) \\
&\leqslant c e^{4\eta t} \left(1 + \frac{1}{\eta} \right)^3 .
\end{aligned} \tag{4.54}
$$

Uniendo esta información con (4.53) y multiplicando $\int_{\mathbb{R}} u_0(x)\, dx$ se colige que

$$
\begin{aligned}
K_\eta(t,x) \left(\int_{\mathbb{R}} u_0(x)\, dx \right) &= -\frac{\eta t}{\pi x^2} \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\, dx + \frac{1}{2\pi i x^3} (4it + I_5(t,x) + I_6(t,x)) \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\, dx \\
&= c_t \frac{1}{x^2} \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\, dx + o(t) \left(\frac{1}{x^2} \right).
\end{aligned} \tag{4.55}
$$

Lo único que nos falta es estimar $\dfrac{1}{2} \displaystyle\int_0^t \partial_x K_\eta(t-\tau,x) \left(\int_{\mathbb{R}} u^2(\tau,y)\, dy \right) d\tau$, pero nos ahorramos tal proceso notando que este término es la integral $I_e(t,x)$ que figura en la ecuación (4.46) (página 121), para la cual ya conocemos que $I_e(t,x) = o(t)\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$. Teniendo esto en mente, juntamos (4.51) con (4.55) para obtener finalmente

$$
u(t,x) = c_t \frac{1}{x^2} \int_{\mathbb{R}} u_0(x) dx + o(t) \left(\frac{1}{x^2} \right),
$$

como se buscaba. □

Hasta este momento hemos probado que la hipótesis sobre el dato inicial, $\int_{\mathbb{R}} u_0(x) dx \neq 0$, es un criterio suficiente de optimalidad para nuestra propiedad de persistencia. No obstante, ¿qué sucede cuando $\int_{\mathbb{R}} u_0(x)dx = 0$? Para incorporar a nuestra investigación el efecto de esta hipótesis (contraria a la condición suficiente de optimalidad), ofrecemos una última proposición, que nos permite mejorar el índice con respecto a la propiedad de persistencia del decaimiento $\beta = 2$.

Proposición 4.5. *Sean $s \geqslant 0$, $0 < \epsilon \leqslant 1$ y $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ un dato inicial que satisface:*

1. $|u_0(x)| \leqslant \dfrac{c}{1 + |x|^{2+\epsilon}}$.
2. $\int_{\mathbb{R}} u_0(x)\, dx = 0$.

Entonces, la única solución de (3.1), $u \in \mathscr{C}([0, +\infty); H^s(\mathbb{R}))$, posee el siguiente decrecimiento puntual en variable espacial:

$$|u(t,x)| \leqslant c_{\eta,t,u_0,\epsilon} \frac{1}{|x|^{2+\epsilon}}, \qquad t > 0,\ |x| \geqslant 1.$$

Demostración. Cortemos la integral que define a la convolución $K_\eta(t,\cdot) * u_0$, de la siguiente manera

$$\begin{aligned} K_\eta(t,\cdot) * u_0(x) &= \int_{\mathbb{R}} K_\eta(t, x-y) u_0(y)\, dy \\ &= \int_{|y| \leqslant \frac{|x|}{2}} (K_\eta(t,x-y) - K_\eta(t,x)) u_0(y)\, dy + \int_{|y| > \frac{|x|}{2}} K_\eta(t,x-y) u_0(y)\, dy \\ &\quad - K_\eta(t,x) \int_{|y| > \frac{|x|}{2}} u_0(y)\, dy + K_\eta(t,x) \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\, dx \\ &= I_a(t,x) + I_b(t,x) - K_\eta(t,x) I_c(x). \end{aligned}$$

Con esto, u se reescribe como

$$\begin{aligned} u(t,x) &= K_\eta(t,\cdot) * u_0(x) - \frac{1}{2} \int_0 \partial_x K_\eta(t-\tau,\cdot) * u^2(\tau,\cdot)(x) d\tau \\ &= I_a(t,x) + I_b(t,x) - K_\eta(t,x) I_c(x) - \frac{1}{2} \int_0 \int_{\mathbb{R}} \partial_x K_\eta(t-\tau, x-y) u^2(\tau,y)\, dy\, d\tau \\ &= I_a(t,x) + I_b(t,x) - K_\eta(t,x) I_c(x) - I_d(t,x). \end{aligned}$$

Cada una de estos términos ya fueron estimados en (4.40), (4.42), (4.44) y (4.47). Acoplando las cuatro estimativas se sigue que

$$|u(t,x)| \leqslant c_{\eta,t,u_0,\epsilon}\left(\frac{1}{1+|x|^3}+\frac{1}{1+|x|^{2+\epsilon}}+\left(\frac{1}{1+|x|^{2+\epsilon}}+\frac{1}{|x|^{\epsilon}}\right)\right),$$

pero como $|x| \geqslant 1$ y $0 < \epsilon \leqslant 1$, entonces

$$\begin{aligned}
|u(t,x)| &\leqslant c_{\eta,t,u_0,\epsilon}\left(\frac{1}{|x|^3}+\frac{1}{|x|^{2+\epsilon}}+\frac{1}{|x|^2}\left(\frac{1}{|x|^{2+\epsilon}}+\frac{1}{|x|^{\epsilon}}\right)\right)\\
&= c_{\eta,t,u_0,\epsilon}\left(\frac{1}{|x|^3}+\frac{1}{|x|^{2+\epsilon}}+\frac{1}{|x|^{4+\epsilon}}+\frac{1}{|x|^{2+\epsilon}}\right).\\
&\leqslant c_{\eta,t,u_0,\epsilon}\frac{1}{|x|^{2+\epsilon}}.
\end{aligned}$$

□

Conclusiones

De este proyecto quedan una serie de conclusiones, de las cuales, nos limitamos a señalar las más importantes de los siguientes ejes: transformada de Hilbert, buen planteamiento del problema y decrecimiento puntual en variable espacial. Además, presentamos de manera breve las mejorías de los resultados de persistencia y los problemas, que en nuestra opinión, serán materia de investigaciones futuras.

La Transformada de Hilbert

Para el desarrollo de este punto, se realizó una revisión detallada sobre este operador; enfatizando en su buena definición y sus propiedades en la clase de Schwartz, en los espacios de Sobolev no homogéneos y en los espacios de Lebesgue. Así mismo, estudiamos la interacción que mantiene este operador con la transformada de Fourier. Al final, los resultados de esta revisión sirvieron para construir un cuadro general de la transformada de Hilbert, en el que se incluyeron todas las propiedades necesarias para nuestra investigación.

Buen planteamiento local y global en los espacios de Sobolev

Este punto se puede resumir en dos teoremas dedicados al estudio del problema de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + \mathcal{H}\partial_x^2 u(t,x) + u(t,x)\partial_x u(t,x) + \eta\,\mathcal{H}(\partial_x u(t,x) + \partial_x^3 u(t,x)) = 0, & (t,x) \in (0,T] \times \mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x), \qquad x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{npBO}$$

desde el marco de los espacios de Sobolev no homogéneos de orden no negativo. El primero (Teorema 3.2, página 74), comprende lo siguiente: existencia local, unicidad y regularidad de las soluciones *mild* de (npBO). La prueba de la existencia de dichas soluciones se basa en su estructura integral

$$u(t,x) = K_\eta(t,\cdot) * u_0(x) - \frac{1}{2}\int_0^t \partial_x K_\eta(t-\tau,\cdot) * u^2(\tau,\cdot)(x)d\tau, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T,\ x \in \mathbb{R},$$

Esta formulación posibilita tratar la ecuación (npBO) como un problema de punto fijo y construir de esta manera su solución bajo el Teorema de punto fijo de Picard (3.1, página 61). Así mismo la unicidad y el estudio de regularidad aprovechan la estructura de solución *mild*. Del segundo teorema, se demostró que el tiempo de existencia T se extiende hasta el infinito (Teorema 3.3, página 88). Se llegó a este resultado con base en una estimación de tipo Grönwall de la solución en la norma del espacio $L^2(\mathbb{R})$ (Proposición 3.4, página 86).

Decrecimiento puntual en variable espacial y optimalidad

En lo relativo a este punto, logramos demostrar la persistencia del decaimiento en variable de espacio de las soluciones (Teorema 4.2, página 112). Así pues, se comprobó que si el dato inicial $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ ($s \geqslant 0$) posee el siguiente decrecimiento puntual:

$$|u_0(x)| \leqslant \frac{c}{1+|x|^\beta}, \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad 1 < \beta \leqslant 2,$$

la única solución *mild* de nuestro problema, $u(t,x)$, preserva el decaimiento en variable espacial de u_0 para todo tiempo $t > 0$.

Complementariamente, demostramos que la condición impuesta sobre el dato inicial, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} u_0(x)\,dx \neq 0$, asegura la optimalidad de persistencia para el índice de decrecimiento $\beta = 2$. Es importante señalar que este resultado fue precedido por un análisis sobre el comportamiento asintótico en variable espacial de las soluciones (Teorema 4.3, página 118). Por último, logramos probar que en caso de no cumplirse el criterio de optimalidad, el rango de β se amplia hasta el intervalo $(1,3]$ (Proposición 4.5, página 128).

Mejorías en los resultados

Para llegar a estos últimos resultados nos basamos en herramientas anteriormente utilizadas por Cortez y Jarrín (Cortez y Jarrín (2020)), dos autores que estudiaron el decrecimiento puntual en variable espacial de las soluciones del problema de valor inicial para una ecuación generalizada; que bajo parámetros específicos coincide con la ecuación (npBO). Sin embargo, en la forma de abordar esta ecuación, nosotros conseguimos dos mejoras significativas. En primer lugar, en contraste con el estudio de decrecimiento de Cortez y Jarrín, centrado en el índice $\beta = 2$, tomamos cualquier índice dentro del intervalo $(1, 2]$. En segundo lugar, a diferencia de sus datos iniciales: $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$, con $s > 3/2$, consideramos que s puede ser cualquier número no negativo.

Estudios futuros

Al término de este proyecto de titulación, creemos que quedan un conjunto de problemas para futuras investigaciones, los siguientes nos parecen los más relevantes.

1. Las limitaciones que nuestras herramientas presentan para el análisis sobre las propiedades de persistencia en los casos cuando $0 < \beta \leqslant 1$ dejan abierta la interrogante sobre qué pasa en dichos casos.
2. Para valores de β más grandes que 3, si bien desde un análisis somero, prevemos que no se cumpliría la propiedad de persistencia, principalmente por la presencia de la derivada del núcleo, que decae de la forma $\dfrac{1}{1+|x|^3}$ (Proposición 4.3, página 100), en la parte no lineal de la solución. Sin embargo, esta es una pregunta abierta de nuestro trabajo.
3. En vista de que la metodología empleada no es exclusiva para el estudio de la ecuación (npBO), se incentiva la búsqueda de ecuaciones de características similares que puedan ser abordadas bajo las mismas técnicas, como por ejemplo podría

ser el caso de la ecuación de Kuramoto-Velarde dispersiva (Pilod (2008)), cuyo núcleo asociado $E_{\delta,\mu}(t) = (e^{i\delta xi^3 + \mu t\,(\xi^2 - \xi^4)})^{\vee}$ $(\delta \in \mathbb{R},\ \mu > 0)$, posee propiedades de decrecimiento similares al nuestro.

4. Consideramos indispensable el desarrollo de métodos que contribuyan al estudio del decrecimiento puntual en variable espacial para problemas a mayores dimensiones. Entre los candidatos posibles de este género de estudios, está la ecuación de Benjamin-Ono-Zakharov-Kuznetsov, tratada en (Latorre et al. (2007)). Cabría decir, que en la actualidad, la propiedad de persistencia de esta ecuación solo ha sido estudiada en el espacio de Sobolev con peso $\mathrm{Z}_{s,r} = H^s(\mathbb{R}^2) \cap L^2(\mathbb{R}^2, (1 + x^2 + y^2)\,dx\,dy)$ (Cunha y Pastor (2014)). Sin embargo, la adaptación de nuestros métodos al caso de mayores dimensiones es más complejo.

Apéndice A

Resultados complementarios

En este apéndice se demuestran varios resultados que intervienen en algunas de las demostraciones presentes en este trabajo de titulación.

1. Estimaciones diversas

Empezamos por comprobar ciertas igualdades y desigualdades. La primera es la siguiente:

Notando a la función $m(\xi) = i \operatorname{sgn}(\xi)$, se tiene la siguiente identidad.

$$1 + m(\xi)m(\eta) + m(\xi)m(\xi - \eta) = m(\eta)m(\xi - \eta), \qquad \text{para todo } \eta \neq 0. \tag{A.1}$$

Demostración. Como m es la función $i \operatorname{sgn}(\cdot)$, probar (A.1) es exactamente lo mismo que comprobar la igualdad

$$\operatorname{sgn}(\xi) \operatorname{sgn}(\eta) + \operatorname{sgn}(\xi) \operatorname{sgn}(\xi - \eta) - \operatorname{sgn}(\eta) \operatorname{sgn}(\xi - \eta) = 1.$$

Consideremos cinco posibilidades que analizaremos separadamente.

i. Si $\xi = 0$, entonces

$$\operatorname{sgn}(\xi) \operatorname{sgn}(\eta) + \operatorname{sgn}(\xi) \operatorname{sgn}(\xi - \eta) - \operatorname{sgn}(\eta) \operatorname{sgn}(\xi - \eta) = -\operatorname{sgn}(\eta) \operatorname{sgn}(-\eta) = 1.$$

ii. Si $\xi = \eta$ ($\xi \neq 0$), tenemos que

$$\operatorname{sgn}(\xi) \operatorname{sgn}(\eta) + \operatorname{sgn}(\xi) \operatorname{sgn}(\xi - \eta) - \operatorname{sgn}(\eta) \operatorname{sgn}(\xi - \eta) = \operatorname{sgn}(\xi) \operatorname{sgn}(\eta) = 1.$$

iii. Si ξ y η son distintos pero poseen el mismo signo, se sigue que

$$\operatorname{sgn}(\xi)\operatorname{sgn}(\eta)+\operatorname{sgn}(\xi)\operatorname{sgn}(\xi-\eta)-\operatorname{sgn}(\eta)\operatorname{sgn}(\xi-\eta)=1+\operatorname{sgn}(\xi-\eta)-\operatorname{sgn}(\xi-\eta)=1.$$

iv. Si $\xi>0$ y $\eta<0$:

$$\operatorname{sgn}(\xi)\operatorname{sgn}(\eta)+\operatorname{sgn}(\xi)\operatorname{sgn}(\xi-\eta)-\operatorname{sgn}(\eta)\operatorname{sgn}(\xi-\eta)=-1+1-(-1)=1.$$

v. Si $\xi<0$ y $\eta>0$, entonces

$$\operatorname{sgn}(\xi)\operatorname{sgn}(\eta)+\operatorname{sgn}(\xi)\operatorname{sgn}(\xi-\eta)-\operatorname{sgn}(\eta)\operatorname{sgn}(\xi-\eta)=-1+(-1)(-1)-(-1)=1.$$

□

Proposición A.1. *Sean $x\geqslant 0$ y $a\geqslant 0$, existe una constante $c_a>0$ tal que*

$$c_a x^a \leqslant e^x.$$

Demostración. En efecto, por la propiedad arquimediana existe un número natural $N_a\in\mathbb{N}$ tal que $N_a\geqslant a$. Si $x>1$ utilizamos expansión en series de Taylor de la función e^x en el punto 0, se sigue que

$$e^x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}\geqslant\frac{x^{N_a}}{N_a!}\geqslant\frac{x^a}{N_a!}.$$

Y si $x\leqslant 1$:

$$x^a\leqslant 1\leqslant e^x\leqslant N_a!e^x.$$

□

Proposición A.2. *Dados $\eta>0$, $t>0$ y $N\in\mathbb{N}$, se tiene que*

$$\lim_{|\xi|\to+\infty}\left(\xi^N\hat{K}_\eta(t,\xi)\right)=0, \tag{A.2}$$

donde K_η es el núcleo definido en (3.5), página 51.

Demostración. El caso cuando $N = 0$ se sigue sin problema.

$$\lim_{|\xi|\to+\infty} |\hat{K}_\eta(t,\xi)| = \lim_{|\xi|\to+\infty} e^{\eta t(|\xi|-|\xi|^3)} = \lim_{y\to+\infty} e^{\eta t(y-y^3)} = 0.$$

Tomamos ahora $N \geqslant 1$, se tiene que

$$\lim_{|\xi|\to+\infty} |\xi^N \hat{K}_\eta(t,\xi)| = \lim_{y\to+\infty} \left(y^N e^{\eta t(y-y^3)} \right).$$

Calculamos el límite cuando $y \to +\infty$ de $y\, e^{\frac{\eta t}{N}(y-y^3)}$, para seguido utilizar la continuidad de la función x^N. De la regla de L'Hôpital se sigue que

$$\begin{aligned}
\lim_{y\to+\infty} y\, e^{\frac{\eta t}{N}(y-y^3)} &= \lim_{y\to+\infty} \frac{y}{e^{-\frac{\eta t}{N}(y-y^3)}} \\
&= \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{\frac{-\eta t}{N}(1-3y^2)e^{-\frac{\eta t}{N}(y-y^3)}} \\
&= \lim_{y\to+\infty} \frac{e^{\frac{\eta t}{N}(y-y^3)}}{-\frac{\eta t}{N}(1-3y^2)} \\
&\leqslant \lim_{y\to+\infty} \frac{e^{\frac{\eta t}{N}}}{\frac{\eta t}{N}\,|1-3y^2|} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Entonces

$$\lim_{|\xi|\to+\infty} = |\xi^N K_\eta(t,\xi)| = \lim_{y\to+\infty} y^N e^{\eta t(y-y^3)} = \left(\lim_{y\to+\infty} y\, e^{\frac{\eta t}{N}(y-y^3)} \right)^N = 0$$

□

2. Función Gamma y función Beta

Dado z un número complejo tal que $\mathrm{Re}(z) > 0$, entonces

$$\Gamma(z) := \int_0^{+\infty} \tau^{z-1} e^{-\tau} d\tau < +\infty. \tag{A.3}$$

A Γ se la conoce como la *función Gamma*.

Demostración. Tomando $\Gamma(z)$ módulo absoluto estimamos

$$|\Gamma(z)| = \left|\int_0^{+\infty} e^{((\operatorname{Re}(z)+i\operatorname{Im}(z)-1)\ln(\tau))}e^{-\tau}d\tau\right| \leqslant \int_0^{+\infty} e^{((\operatorname{Re}(z)-1)\ln(\tau))}e^{-\tau}d\tau = \int_0^{+\infty} \tau^{(\operatorname{Re}(z)-1)}e^{-\tau}d\tau.$$

Debido al decrecimiento de la función $e^{-\frac{\tau}{2}}$, existe un $M > 0$ suficientemente grande tal que $\tau^{(\operatorname{Re}(z)-1)}e^{-\frac{\tau}{2}} < 1$ para todo $\tau > M$. Vía esta estimativa podemos dominar

$$\begin{aligned}
|\Gamma(z)| &\leqslant \int_0^{M} \tau^{(\operatorname{Re}(z)-1)}e^{-\tau}d\tau + \int_M^{+\infty} \tau^{(\operatorname{Re}(z)-1)}e^{-\tau}d\tau \\
&\leqslant \int_0^{M} \tau^{(\operatorname{Re}(z)-1)}d\tau + \int_M^{+\infty} e^{-\frac{\tau}{2}}d\tau \\
&= \frac{1}{\operatorname{Re}(z)}M^{\operatorname{Re}(z)} + 2e^{-\frac{M}{2}} < +\infty.
\end{aligned}$$

□

Dados μ y ν dos números complejos tales que $\operatorname{Re}(\mu) > 0$ y $\operatorname{Re}(\nu) > 0$, entonces

$$B(\mu,\nu) := \int_0^1 \tau^{\mu-1}(1-\tau)^{\nu-1}d\tau < +\infty.$$

A B se la conoce como *función Beta.*

Demostración. Estimando $B(\mu,\nu)$ en módulo se tiene que

$$\begin{aligned}
|B(\mu,\nu)| &= \left|\int_0^1 \tau^{\mu-1}(1-\tau)^{\nu-1}d\tau\right| \\
&\leqslant \int_0^1 \left|e^{((\operatorname{Re}(\mu)+i\operatorname{Im}(\mu)-1)\ln(\tau))}\right| \left|e^{((\operatorname{Re}(\nu)+i\operatorname{Im}(\nu)-1)\ln(1-\tau))}\right| d\tau \\
&= \int_0^1 e^{((\operatorname{Re}(\mu)-1)\ln(\tau))}e^{((\operatorname{Re}(\nu)-1)\ln(1-\tau))}d\tau \\
&= \int_0^1 \tau^{(\operatorname{Re}(\mu)-1)}(1-\tau)^{(\operatorname{Re}(\nu)-1)}d\tau \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \tau^{(\operatorname{Re}(\mu)-1)}(1-\tau)^{(\operatorname{Re}(\nu)-1)}d\tau + \int_{\frac{1}{2}}^1 \tau^{(\operatorname{Re}(\mu)-1)}(1-\tau)^{(\operatorname{Re}(\nu)-1)}d\tau \\
&\leqslant \left(\sup_{0\leqslant\tau\leqslant\frac{1}{2}}(1-\tau)^{\operatorname{Re}(\nu)-1}\right)\int_0^{\frac{1}{2}} \tau^{(\operatorname{Re}(\mu)-1)}d\tau + \left(\sup_{\frac{1}{2}\leqslant\tau\leqslant 1}\tau^{\operatorname{Re}(\mu)-1}\right)\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-\tau)^{(\operatorname{Re}(\nu)-1)}d\tau \\
&= c_\nu\frac{1}{\operatorname{Re}(\mu)}\frac{1}{2^{\operatorname{Re}(\mu)}} + c_\mu\frac{1}{\operatorname{Re}(\nu)}\frac{1}{2^{\operatorname{Re}(\nu)}} < +\infty.
\end{aligned}$$

$\square$

Proposición A.3. *Dados* $\mu > 0$, $\nu > 0$ *y* $t > 0$, *entonces*

$$\int_0^t \tau^{\mu-1}(t-\tau)^{\nu-1}d\tau = B(\mu,\nu)\, t^{\mu+\nu-1}.$$

Demostración. Simplemente extraemos el término $t^{\mu+\nu-2}$ de la integral y hacemos un cambio de variable. Tenemos

$$\begin{aligned}\int_0^t \tau^{\mu-1}(t-\tau)^{\nu-1}d\tau &= \int_0^t \left(\frac{\tau}{t}\right)^{\mu-1}\left(1-\frac{\tau}{t}\right)^{\nu-1} d\tau\, t^{\mu+\nu-2}\\ &= \int_0^1 y^{\mu-1}(1-y)^{\nu-1}dy\, t^{\mu+\nu-1}\\ &= B(\mu,\nu)\, t^{\mu+\nu-1}.\end{aligned}$$

$\square$

3. Lema de Gröwnwall

Lema A.1 (Lema de Grönwall forma diferencial). *Sean* $a, b \in \mathbb{R}$ $(a < b)$, $\beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ *y* $u\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *funciones continuas. Si* u *es diferenciable en* (a,b) *y satisface la desigualdad*

$$\frac{d}{dt}u(t) \leqslant \beta(t)u(t), \qquad \textit{para todo } t \in (a,b), \tag{A.4}$$

entonces

$$u(t) \leqslant u(a)\, e^{\int_a^t \beta(s)ds}, \qquad \textit{para todo } t \in [a,b].$$

Demostración. Pasamos el término $\beta(t)u(t)$ a la izquierda en (A.4) y multiplicamos $e^{-\int_a^t \beta(s)ds}$ a cada lado. Se tiene que

$$e^{-\int_a^t \beta(s)ds}\left(\frac{d}{dt}u(t) - \beta(t)u(t)\right) = \frac{d}{dt}\left(u(t)\, e^{-\int_a^t \beta(s)ds}\right) \leqslant 0.$$

Luego, integrando entre a y t obtenemos

$$u(t)\, e^{-\int_a^t \beta(s)ds} \leqslant u(a).$$

Es decir que

$$u(t) \leqslant u(a)\, e^{\int_a^t \beta(s)ds}.$$

$\square$

Apéndice B

Transformada de Hilbert en los espacios de Sobolev no homogéneos

En este apéndice construimos una extensión continua de la transformada de Hilbert en $H^s(\mathbb{R})$ ($s \in \mathbb{R}$) por medio de sucesiones y basándonos fuertemente en la igualdad

$$||\mathcal{H}\varphi||_{H^s}^2 = \int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|^2)^s |\widehat{\mathcal{H}\varphi}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|^2)^s \left|i \operatorname{sgn}(\xi)\hat{\varphi}(\xi)\right|^2 d\xi = ||\varphi||_{H^s}^2 \,, \quad \text{(B.1)}$$

para todo $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Tomamos $u \in H^s(\mathbb{R})$ arbitrario. Como $\overline{\mathscr{S}(\mathbb{R})} = H^s(\mathbb{R})$, entonces existe una sucesión $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ tal que

$$\lim_{n\to+\infty} \varphi_n = u, \qquad \text{en } H^s(\mathbb{R}).$$

En particular tenemos que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy, lo cual implica que la sucesión $(\mathcal{H}\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ también sea de Cauchy pues, por (B.1) tenemos que

$$||\mathcal{H}\varphi_n - \mathcal{H}\varphi_m||_{H^s} = ||\mathcal{H}(\varphi_n - \varphi_m)||_{H^s} = ||\varphi_n - \varphi_m||_{H^s} \,,$$

para todo $n, m \in \mathbb{N}$. Pero como $H^s(\mathbb{R})$ es completo, entonces existe el límite de la sucesión $(\mathcal{H}\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en este espacio, que notaremos por $\mathcal{H}u \in H^s(\mathbb{R})$ y el cual es nuestro candidato a ser la transformada de Hilbert de u. Sin embargo, es imperativo probar que este límite no varía según la sucesión que aproxima a u. En efecto, supongamos que existe otra sucesión $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ tal que

$$\lim_{n\to+\infty} \phi_n = \lim_{n\to+\infty} \varphi_n = u \qquad \text{en } H^s(\mathbb{R}).$$

Realizando el mismo proceso anterior, sabemos que existe $b \in H^s(\mathbb{R})$ que es el límite de la sucesión $(\mathcal{H}\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pero b es igual a $\mathcal{H}u$ pues

$$\begin{aligned}||\mathcal{H}u - b||_{H^s} &\leqslant ||\mathcal{H}u - \mathcal{H}\varphi_n||_{H^s} + ||\mathcal{H}\varphi_n - \mathcal{H}\phi_n||_{H^s} + ||\mathcal{H}\phi_n - b||_{H^s} \\ &= ||\mathcal{H}u - \mathcal{H}\varphi_n||_{H^s} + ||\varphi_n - \phi_n||_{H^s} + ||\mathcal{H}\phi_n - b||_{H^s},\end{aligned}$$

que tiende a 0 cuando $n \to +\infty$.

Definición B.1 (Transformada de Hilbert en los espacios de Sobolev no homogéneos)**.** *Sean $s \in \mathbb{R}$ y $u \in H^s(\mathbb{R})$. La transformada de Hilbert de u, notada por $\mathcal{H}u$, se define como el límite*

$$\mathcal{H}u := \lim_{n\to+\infty} \mathcal{H}\varphi_n \qquad en\, H^s(\mathbb{R}),$$

donde $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ tal que $\lim_{n\to+\infty} \varphi_n = u$ en $H^s(\mathbb{R})$.

Una vez definida la transformada de Hilbert sobre $H^s(\mathbb{R})$, resta comprobar que es un operador lineal y continuo en este espacio.

Proposición B.1. *Dado $s \in \mathbb{R}$, la transformada de Hilbert es una isometría en $H^s(\mathbb{R})$.*

Demostración. Sean $u \in H^s(\mathbb{R})$ y (φ_n) una sucesión en $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ tal que $\lim_{n\to+\infty} \varphi_n = u$ en $H^s(\mathbb{R})$. Luego, de (B.1) se sigue que

$$||\mathcal{H}u||_{H^s} = \left|\left|\lim_{n\to+\infty} \mathcal{H}\varphi_n\right|\right|_{H^s} = \lim_{n\to+\infty} ||\varphi_n||_{H^s} = ||u||_{H^s}.$$

$\square$

Apéndice C

Demostración del Lema 3.6

Sea $2\rho \leqslant t \leqslant T$. Separaremos la integral que define a $B_\eta(\cdot,\cdot)$ en dos partes:

$$\begin{aligned}
||B_\eta(u,v)(t,\cdot)||_{H^{s+r+\lambda}} &= \left|\left|\int_0^\rho \partial_x K_\eta(t-\tau) * (uv(\tau,\cdot))d\tau + \int_\rho^t \partial_x K_\eta(t-\tau) * (uv(\tau,\cdot))d\tau\right|\right|_{H^{s+r+\lambda}} \\
&\leqslant \int_0^\rho ||S_\eta(t-\tau)(uv(\tau,\cdot))||_{H^{s+r+\lambda+1}} + \int_\rho^t ||S_\eta(t-\tau)(uv(\tau,\cdot))||_{H^{s+r+\lambda+1}} \\
&= I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

Estimamos las dos integrales. Para I_1, del Lema 3.2 (página 66) se sigue que

$$\begin{aligned}
I_1 &\leqslant c_{s,r,\lambda,\eta} e^{\frac{5}{2}\eta t} \int_0^\rho \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{2(s+r+\lambda)+3}{6}}} ||uv(\tau,\cdot)||_{L^1}\, d\tau \\
&\leqslant c_{s,r,\lambda,\eta} e^{\frac{5}{2}\eta t} \int_0^\rho \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{2(s+r+\lambda)+3}{6}}} ||u(\tau,\cdot)||_{H^s} ||v(\tau,\cdot)||_{H^s}\, d\tau.
\end{aligned}$$

Vamos a considerar tres casos separadamente.

1. Si $\frac{3-2(s+r+\lambda)}{6} = 1 - \frac{2(s+r+\lambda)+3}{6} > 0$, se tiene que

$$\begin{aligned}
I_1 &\leqslant c_{s,r,\lambda,\eta} e^{\frac{5}{2}\eta T} \frac{6}{3-2(s+r+\lambda)} \left(t^{\frac{3-2(s+r+\lambda)}{6}} - (t-\rho)^{\frac{3-2(s+r+\lambda)}{6}}\right) \left(\sup_{0\leqslant t\leqslant\rho} ||u(\tau,\cdot)||_{H^s}\right) \left(\sup_{0\leqslant t\leqslant\rho} ||v(\tau,\cdot)||_{H^s}\right) \\
&\leqslant c_{s,r,\lambda,T,\eta} T^{\frac{3-2(s+r+\lambda)}{6}} \left(\sup_{0\leqslant t\leqslant\rho} ||u(\tau,\cdot)||_{H^s}\right) \left(\sup_{0\leqslant t\leqslant\rho} ||v(\tau,\cdot)||_{H^s}\right) \\
&\leqslant c_{s,r,\lambda,T,\eta} \left(\sup_{0\leqslant t\leqslant\rho} ||u(\tau,\cdot)||_{H^s}\right) \left(\sup_{0\leqslant t\leqslant\rho} ||v(\tau,\cdot)||_{H^s}\right).
\end{aligned}$$

2. Si $\frac{3-2(s+r+\lambda)}{6} = 1 - \frac{2(s+r+\lambda)+3}{6} < 0$:

$$\begin{aligned}
I_1 &\leqslant c_{s,r,\lambda,T,\eta} \frac{6}{3-2(s+r+\lambda)} \left(t^{\frac{3-2(s+r+\lambda)}{6}} - (t-\rho)^{\frac{3-2(s+r+\lambda)}{6}}\right) \left(\sup_{0\leqslant t\leqslant\rho} ||u(\tau,\cdot)||_{H^s}\right) \left(\sup_{0\leqslant t\leqslant\rho} ||v(\tau,\cdot)||_{H^s}\right) \\
&= c_{s,r,\lambda,T,\eta} \frac{6}{2(s+r+\lambda)-3} \left((t-\rho)^{\frac{3-2(s+r+\lambda)}{6}} - t^{\frac{3-2(s+r+\lambda)}{6}}\right) \left(\sup_{0\leqslant t\leqslant\rho} ||u(\tau,\cdot)||_{H^s}\right) \left(\sup_{0\leqslant t\leqslant\rho} ||v(\tau,\cdot)||_{H^s}\right) \\
&\leqslant c_{s,r,\lambda,T,\eta} (2\rho-\rho)^{\frac{3-2(s+r+\lambda)}{6}} \left(\sup_{0\leqslant t\leqslant\rho} ||u(\tau,\cdot)||_{H^s}\right) \left(\sup_{0\leqslant t\leqslant\rho} ||v(\tau,\cdot)||_{H^s}\right) \\
&\leqslant c_{s,r,\lambda,T,\rho,\eta} \left(\sup_{0\leqslant t\leqslant\rho} ||u(\tau,\cdot)||_{H^s}\right) \left(\sup_{0\leqslant t\leqslant\rho} ||v(\tau,\cdot)||_{H^s}\right).
\end{aligned}$$

3. Si $\frac{3-2(s+r+\lambda)}{6} = 1 - \frac{2(s+r+\lambda)+3}{6} = 0$, entonces $\frac{2(s+r+\lambda)+3}{6} = 1$ y por tanto

$$\begin{aligned} I_1 &\leqslant c_{s,r,\lambda,\eta} e^{\frac{5}{2}\eta T} \int_0^\rho \frac{1}{t-\tau} \sup_{0\leqslant t\leqslant \rho} ||u(\tau,\cdot)||_{H^s} \sup_{0\leqslant t\leqslant \rho} ||v(\tau,\cdot)||_{H^s} \, d\tau \\ &\leqslant c_{s,r,\lambda,T,\eta} (\ln(t) - \ln(t-\rho)) \sup_{0\leqslant t\leqslant \rho} ||u(\tau,\cdot)||_{H^s} \sup_{0\leqslant t\leqslant \rho} ||v(\tau,\cdot)||_{H^s} . \end{aligned}$$

Controlamos la cantidad $\ln(t) - \ln(t-\rho)$ por casos. Si $t > t-\rho \geqslant 1$ entonces $\ln(t) - \ln(t-\rho) \leqslant \ln(T)$. Luego, si $t \geqslant 1 \geqslant t-\rho$ entonces $\ln(t) - \ln(t-\rho) \leqslant \ln(T) - \ln(2\rho - \rho) = \ln(T) - \ln(\rho)$. Finalmente, si $1 > t > t-\rho$ se tiene $\ln(t) - \ln(t-\rho) \leqslant -\ln(2\rho-\rho) = -\ln(\rho)$.

De esta manera

$$I_1 \leqslant c_{s,r,\lambda,T,\rho,\eta} \left(\sup_{0\leqslant t\leqslant \rho} ||u(\tau,\cdot)||_{H^s} \right) \left(\sup_{0\leqslant t\leqslant \rho} ||v(\tau,\cdot)||_{H^s} \right). \tag{C.1}$$

Para estimar la integral I_2 usamos el Lema 3.1 de la página 63. Se tiene que

$$\begin{aligned} I_2 &\leqslant c_{\lambda,\eta} e^{\frac{3}{2}\eta t} \int_\rho^t \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{\lambda+1}{2}}} ||u(\tau,\cdot)||_{H^{s+r}} ||u(\tau,\cdot)||_{H^{s+r}} \, d\tau \\ &\leqslant c_{\lambda,\eta} e^{\frac{3}{2}\eta T} \frac{2}{1-\lambda} (t-\rho)^{\frac{1-\lambda}{2}} \left(\sup_{\rho\leqslant t\leqslant T} ||u(\tau,\cdot)||_{H^{s+r}} \right) \left(\sup_{\rho\leqslant t\leqslant T} ||v(\tau,\cdot)||_{H^{s+r}} \right) \\ &\leqslant c_{\lambda,T,\eta} (T-\rho)^{\frac{1-\lambda}{2}} \left(\sup_{\rho\leqslant t\leqslant T} ||u(\tau,\cdot)||_{H^{s+r}} \right) \left(\sup_{\rho\leqslant t\leqslant T} ||v(\tau,\cdot)||_{H^{s+r}} \right) \\ &= c_{\lambda,T,\rho,\eta} \left(\sup_{\rho\leqslant t\leqslant T} ||u(\tau,\cdot)||_{H^{s+r}} \right) \left(\sup_{\rho\leqslant t\leqslant T} ||v(\tau,\cdot)||_{H^{s+r}} \right). \end{aligned} \tag{C.2}$$

De las cotas obtenidas para I_1 e I_2 en (C.1) y (C.2) respectivamente concluimos la desigualdad enunciada en este lema.

Referencias

Álvarez, B. (2003). On the Cauchy problem for a nonlocal perturbation of the kdv equation. *Differential Integral Equations*, *16*, 1249 - 1280.

Bahouri, H., Chemin, J., y Danchin, R. (2011). *Fourier analysis and nonlinear partial differential equations* (primera ed., Vol. 343). Nueva York, Estados Unidos: Springer.

Benjamin, T. (1967). Internal waves of permanent form in fluids of great depth. *Journal of Fluid Mechanics*, *29*, 559-592.

Brezis, H. (2011). *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations* (primera ed.). Nueva York, Estados Unidos: Springer.

Chamorro, D. (2020). *Espacios de Lebesgue y de Lorentz* (primera ed., Vol. 3). París, Francia: Asociación Amarun.

Cortez, M., y Jarrín, O. (2019). On decay properties and asymptotic behavior of solutions to a non-local perturbed kdv equation. *Nonlinear Analysis*, *187*, 365-396.

Cortez, M., y Jarrín, O. (2020). *Spatial behavior of solutions for a large class of non-local pde's arising from stratified flows.* (arXiv:2006.09594)

Cunha, A., y Pastor, A. (2014). The ivp for the Benjamin-Ono-Zakharov-Kuznetsov equation in weighted Sobolev spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, *417*, 660-693.

Fonseca, G., Pastrán, R., y Rodríguez-Blanco, G. (2019). The ivp for a nonlocal perturbation of the Benjamin-Ono equation in classical and weighted Sobolev spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, *476*, 391-425.

Grafakos, L. (2008). *Classical Fourier analysis* (segunda ed., Vol. 249). New York, Estados Unidos: Springer.

Grafakos, L. (2009). *Modern Fourier analysis* (segunda ed., Vol. 250). New York, Estados Unidos: Springer.

Haroske, D. (2008). *Distributions, Sobolev spaces, elliptic equations* (primera ed.). Freiburgo, Alemania: European Mathematical Society.

Henry, D. (1981). *Geometric theory of semilinear parabolic equations* (primera ed., Vol. 840). Nueva York, Estados Unidos: Springer.

Hille, E., y Phillips, R. (1957). *Functional analysis and semi-groups* (segunda ed., Vol. 31). Providence, Estados Unidos: American Mathematical Society.

Hörmander, L. (1990). *The analysis of linear partial differential operator i, distribution theory and Fourier analysis* (segunda ed.). Nueva York, Estados Unidos: Springer.

Kato, T., y Tanabe, H. (1962). On the abstract evolution equation. *Osaka Journal of Mathematics*, *14*, 107-133.

King, F. (2009). *Hilbert transforms* (primera ed., Vol. 1). Nueva York, Estados Unidos: Cambridge University Press.

Kunisch, K., y Schappacher, W. (1980). Mild and strong solutions for partial differential equations with delay. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, *125*, 193–219.

Latorre, J., Minzoni, A., Vargas, C., y Smyth, N. (2007). Evolution of Benjamin-Ono solitons in the presence of weak Zakharov-Kutznetsov lateral dispersion. *Chaos (Woodbury, N.Y.)*, *16*, 043103.

Lemarié-Rieusset, P. (2016). *The Navier-Stokes equations in the 21st century* (primera ed.). Florida, Estados Unidos: CRC Press Chapman & Hall.

Linares, F., y Ponce, G. (2015). *Introduction to nonlinear dispersive equations* (segunda ed.). Nueva York, Estados Unidos: Springer.

Loachamín, G. (2020). *Sobre el problema de Cauchy para la ecuación del calor fraccionaria*. Quito: EPN.

Narici, L., y Beckenstein, E. (2010). *Topological vector spaces* (segunda ed.). Florida, Estados Unidos: CRC Press Chapman & Hall.

Ono, H. (1975). Algebraic solitary waves in stratified fluids. *Journal of the Physical Society of Japan*, *39*, 1082-1091.

Pastrán, R., y Rodríguez-Blanco, G. (2006). El problema de Cauchy asociado a una perturbación no local de la ecuación de Benjamin-Ono. *Boletín de Matemáticas*, *13*, 20-42.

Pilod, D. (2008). Sharp well-posedness results for the Kuramoto-Velarde equation. *Communications on Pure and Applied Analysis*, *7*, 867-881.

Qian, S., Lee, Y., y Chen, H. (1989). A study of nonlinear dynamical models of plasma turbulence. *Physics of Fluids B*, *1*, 87-98.