

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

**MAESTRÍA DE INVESTIGACIÓN EN OPTIMIZACIÓN
MATEMÁTICA**

**ANÁLISIS DE UN PROBLEMA DE CONTROL ÓPTIMO
NO-SUAVE ASOCIADO A UN FLUIDO DILATANTE**

**TESIS PREVIA A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE MAGÍSTER EN
OPTIMIZACIÓN MATEMÁTICA**

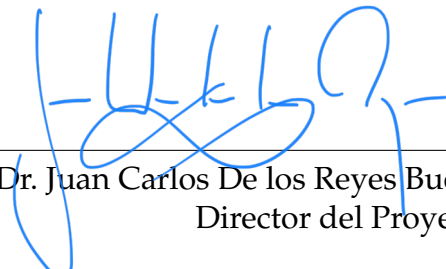
PAOLA NATHALY QUILOANGO CHIMARRO
paola.quiloango@epn.edu.ec

Director: DR. JUAN CARLOS DE LOS REYES BUENO
juan.delosreyes@epn.edu.ec

QUITO, AGOSTO 2021

CERTIFICACIÓN

Certifico que el presente trabajo fue desarrollado por PAOLA NATHALY QUILOANGO CHIMARRO, bajo mi supervisión.



Dr. Juan Carlos De los Reyes Bueno
Director del Proyecto

DECLARACIÓN

“Yo, PAOLA NATHALY QUILOANGO CHIMARRO, declaro bajo juramento que el trabajo aquí escrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

Sin perjuicio de los derechos reconocidos en el primer párrafo del artículo 114 del Código Orgánico de la Economía de los Conocimientos, Creatividad e Innovación -COESC-, cedo los derechos patrimoniales de este trabajo, a la Escuela Politécnica Nacional.”

Paola Quiloango

Paola Nathaly Quiloango Chimarro

C.I.: 1750406595

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, quiero agradecer a mi director de tesis, Dr. Juan Carlos De los Reyes, por su apoyo y paciencia durante la maestría y a lo largo del desarrollo de este trabajo. Agradezco también a los miembros del tribunal calificador de mi tesis, Dr. Pedro Merino y Dr. Sergio González, por sus valiosas observaciones y sugerencias que contribuyeron a la mejora de este trabajo.

Gracias a la Escuela Politécnica Nacional por el financiamiento otorgado a través de las becas concedidas durante mis estudios. Gracias al Centro de Modelización Matemática (MODEMAT) por todas las facilidades, recursos y apoyo brindado durante la maestría, especialmente a Myri, por apoyarnos permanentemente. Quiero agradecer también a mis profesores de la maestría, por sus enseñanzas que han sido muy importantes para mi formación académica.

Agradezco a mis compañeros de la maestría, de forma especial a Alexander y Mishelle, por su apoyo y compañía durante todo este tiempo, por todas las tardes de estudio compartidas, los nervios antes de las pruebas y demás experiencias compartidas. Gracias a mis amigos y amigas, por escucharme, por animarme, y sobre todo, gracias por estar ahí. Finalmente, agradezco infinitamente a mi familia por el amor y apoyo incondicional, este trabajo no hubiera sido posible sin ustedes.

DEDICATORIA

A mis padres, Luis y Celia

Índice general

1. Introducción	1
2. Preliminares	3
2.1. Ecuaciones básicas para el flujo de un fluido	3
2.1.1. Descripción euleriana	4
2.1.2. Descripción lagrangiana	6
2.2. Fluidos newtonianos	7
2.3. Fluidos no newtonianos	8
3. Planteamiento del problema	11
4. Diferenciabilidad del operador solución	15
4.1. Cálculo de la derivada direccional de la no linealidad	16
4.2. Diferenciabilidad del operador de Nemytskii asociado a la no linealidad	20
4.3. Diferenciabilidad direccional del operador control-a-estado	21
5. Análisis del problema de control	30
5.1. Existencia de soluciones	30
5.2. Condiciones de optimalidad de primer orden	32
5.2.1. Regularización y paso al límite	33
5.2.2. Estacionariedad fuerte	48
6. Conclusiones	54

Resumen

En la presente tesis estudiamos un problema de control óptimo no-suave asociado a una ecuación que modela un fluido dilatante. Analizamos la diferenciabilidad direccional de una no linealidad no-suave presente en la ecuación de estado. Luego, analizamos la diferenciabilidad direccional del operador solución asociado a la ecuación de estado. Se establece una condición necesaria de optimalidad de primer orden, relacionada al concepto de estacionariedad de Bouligand, la cual se deduce de la diferenciabilidad del operador solución. Obtenemos un sistema de optimalidad correspondiente a un concepto de estacionariedad débil, mediante una regularización del problema de control óptimo y posterior paso al límite. Finalmente, obtenemos un sistema de optimalidad relacionado a un concepto de estacionariedad más fuerte, y demostramos que este concepto es equivalente a la estacionariedad de Bouligand, en el caso de nuestro problema de control óptimo.

Palabras clave: optimización no-suave, control óptimo de EDP, fluido dilatante, condiciones de optimalidad

Abstract

This thesis focuses on the analysis of an optimal control problem governed by a nonsmooth equation that models a shear-thickening fluid. First, we study the directional differentiability of the non-smooth nonlinearity in the state equation. Next, we analyze the directional differentiability of the solution operator. We establish a necessary first order optimality condition, which is deduced from the directional differentiability of the solution operator. This condition is related to the concept of Bouligand stationarity. Also, we derive another necessary optimality condition by using a regularization and passage to the limit technique. The optimality system derived in this way is considered a weak stationarity condition. Finally, we combine both optimality conditions to obtain an optimality system, which is related to a stronger stationarity concept. Furthermore, we show that this stronger stationarity concept is equivalent to the Bouligand stationarity concept, in the case of our problem.

Key words: non-smooth optimization, optimal control of PDE, shear-thickening fluid, optimality conditions

Capítulo 1

Introducción

Esta tesis se enmarca en el área de la optimización continua, particularmente, nos enfocamos en el control óptimo de una ecuación que modela un fluido dilatante, la cual contiene un término no-suave.

El estudio de problemas de control óptimo de ecuaciones en derivadas parciales con no linealidades no-suaves presenta algunas dificultades en cuanto a la obtención de condiciones de optimalidad mediante el cálculo adjunto, que se usa en el caso de ecuaciones con operadores solución diferenciables en los sentidos de Gâteaux o Fréchet. En el caso de problemas con no linealidades no-suaves, como el problema que estudiaremos, no es posible usar el cálculo adjunto para obtener condiciones de optimalidad, por lo cual se considera solamente las propiedades de la diferenciabilidad direccional tanto de la no linealidad, como del operador solución de la ecuación de estado [20], [7].

El análisis de diferenciabilidad permite encontrar condiciones de optimalidad puramente primales [19, Sección 3.1], que incluyen la información de la derivada direccional del operador solución. Para obtener condiciones de optimalidad que contengan variables duales, generalmente se hace una regularización del problema para obtener un primer sistema de optimalidad. Este sistema de optimalidad constituye una condición de estacionariedad débil, en el contexto de los conceptos de estacionariedad de los programas matemáticos con restricciones de equilibrio (MPECs). Para obtener una condición de estacionariedad más fuerte para el problema, se combinan la condición primal y la condición de estacionariedad débil, con lo cual es posible obtener información sobre los signos de las variables duales.

El interés de estudiar este tipo de problemas de control óptimo es también práctico, pues entender los aspectos teóricos de los fluidos dilatantes es fundamental

para el desarrollo de aplicaciones prácticas. Los fluidos dilatantes han sido usados en muchas aplicaciones, por ejemplo, la mejora de la resistencia de materiales textiles ante los impactos, sensores de movimiento y electrolitos en baterías de litio para mejorar la resistencia y rendimiento de plataformas electromecánicas [29], armaduras líquidas, estructuras inteligentes y dispositivos con amortiguamiento adaptativo [10]. Adicionalmente, el planteamiento del sistema de optimalidad correspondiente al concepto de estacionariedad débil es útil en el desarrollo de métodos para resolver numéricamente este tipo de problemas de control óptimo [7].

El objetivo principal de esta tesis es analizar la diferenciabilidad y condiciones de optimalidad de primer orden de un problema de control óptimo no-suave asociado a una ecuación que modela un fluido dilatante. Por ello, en el Capítulo 2, iniciamos presentando algunos conceptos básicos de la mecánica de fluidos y los modelos matemáticos que se usan para describir a los fluidos. Además, se describe de forma general a los fluidos dilatantes. En el Capítulo 3, se presenta la ecuación que modela el fluido dilatante y se plantea el problema de control óptimo a estudiar. A continuación, en el Capítulo 4, se presenta el estudio de diferenciabilidad del operador solución asociado a la ecuación de estado del problema de control óptimo. En el Capítulo 5, se analiza la existencia de soluciones para el problema de control y se establecen las condiciones de optimalidad de primer orden.

Capítulo 2

Preliminares

En este capítulo describiremos algunos conceptos de la mecánica de fluidos. Presentaremos las ecuaciones básicas que se usan para modelar los fluidos, de acuerdo a las distintas perspectivas que se usan para describir su movimiento. También describiremos, de forma general, los diferentes tipos de fluidos.

Intuitivamente, un fluido es una sustancia que se mueve libremente. La definición del diccionario [11], de forma más precisa, nos dice que un fluido es un cuerpo "cuyas moléculas tienen entre sí poca coherencia, y toma siempre la forma del recipiente donde está contenido". Sin embargo, estas nociones y definiciones no son útiles para el modelamiento matemático de los fluidos. Para esto es necesario considerar una definición un poco más rigurosa. De acuerdo a [15], un fluido es una sustancia que sufre una deformación continua cuando se somete a esfuerzos cortantes. Esta característica, diferencia a los fluidos de otros estados de la materia, como los sólidos.

En el estudio de los fluidos se asume que estos están distribuidos continuamente dentro de una región de interés, lo cual refleja el concepto de continuo. Un fluido es un continuo pues sus moléculas se encuentran lo suficientemente cerca unas de otras. La propiedad del continuo implica que si se subdivide a un volumen de fluido en volúmenes pequeños, hasta obtener volúmenes infinitesimales, estos volúmenes preservan las características del volumen entero [23].

2.1. Ecuaciones básicas para el flujo de un fluido

Las ecuaciones básicas para el flujo de un fluido se basan en los principios de la conservación de la masa, el momento y la energía [25, Sección 10.1]. Estas ecua-

ciones se complementan con una ecuación del estado termodinámico del estado del material. El objetivo de estudiar un fluido es encontrar las componentes de la velocidad, y las variables termodinámicas, que son la densidad y la presión [23, Sección 1.2]. El modelamiento del fluido se simplifica si, por ejemplo, consideramos que el fluido tiene una entropía o temperatura constante, o si consideramos que no existen cambios de las propiedades del fluido en el tiempo. Primero, consideramos un fluido ideal, es decir, un fluido con viscosidad y conducción termal constantes.

Para describir el movimiento de un fluido, existen dos perspectivas complementarias: la descripción euleriana y la descripción lagrangiana. En la descripción euleriana se considera el punto de vista de un observador en un punto fijo del espacio (x, y, z) . En este punto el fluido se mueve con velocidad $v = v(x, y, z, t)$, al tiempo t . Además, la densidad de la partícula de fluido que se encuentra en el punto (x, y, z) al tiempo t , es $\rho = \rho(x, y, z, t)$. La tasa de cambio de la velocidad del fluido mientras pasa por el punto (x, y, z) se expresa mediante las derivadas parciales $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial z}$. La velocidad del fluido también puede variar con el tiempo, lo cual se expresa mediante la derivada parcial $\frac{\partial v}{\partial t}$. La aceleración de la partícula de fluido está dada por $\frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v$, donde $\frac{D}{Dt}$ es el operador de la derivada material o derivada sustancial [23, Sección 1.2].

En la descripción lagrangiana el punto de vista corresponde a un observador situado en una partícula específica, el cual se mueve con la partícula [17, Sección 3.2]. La velocidad y la densidad de una partícula de fluido en un tiempo t después de haber partido de la posición inicial (x_0, y_0, z_0) , están dadas por $v = v(x_0, y_0, z_0, t)$ y $\rho = \rho(x_0, y_0, z_0, t)$, respectivamente. Como la perspectiva lagrangiana describe el movimiento de una partícula individual de fluido, la aceleración de una partícula está dada por $a = \frac{dv}{dt}$ [17, Sección 3.2]. La variación espacial producida por el movimiento de la partícula se refleja en la derivada total $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v \cdot \nabla$, donde v son las componentes de la velocidad del fluido.

2.1.1. Descripción euleriana

Veamos una deducción de la ecuación de conservación de la masa. Consideramos un volumen de control fijo W . La tasa de cambio de la masa de fluido contenida dentro del volumen W es igual a la masa que ingresa en el volumen W , a través de su frontera ∂W , es decir:

$$\frac{d}{dt} \int_W \rho dW = - \int_{\partial W} \rho v \cdot n dS \quad (2.1)$$

donde n es el vector normal a la superficie ∂W . Aplicando el teorema de la divergencia [12, p. 712] en el lado derecho de esta ecuación, obtenemos que

$$\int_W \frac{\partial \rho}{\partial t} dW = \int_W \nabla \cdot (\rho v) dW$$

Puesto que esta ecuación se verifica para un volumen de control arbitrario W , se sigue que los términos dentro de las integrales son iguales. De aquí, se deduce la ecuación diferencial que expresa la conservación de la masa [23, Sección 1.4.1]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) = 0.$$

Esta ecuación puede ser reescrita como

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot v = 0. \quad (2.2)$$

La ecuación (2.2) es conocida como ecuación de continuidad. Como en la descripción euleriana la densidad del fluido es constante, tenemos que $\frac{D\rho}{Dt} = 0$ y por lo tanto,

$$\nabla \cdot v = 0.$$

Es decir, el fluido es incompresible.

Ahora, deduciremos la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento o impulso. Sea W un volumen de control fijo. La variación en la cantidad de movimiento se da por la cantidad de movimiento que ingresa a W a través de su borde ∂W , y las fuerzas que actúan sobre el fluido: sobre su superficie y fuerzas externas [23, Sección 1.4.2]. De esta manera, la ecuación de balance de la cantidad de movimiento está dada por

$$\frac{d}{dt} \int_W \rho v dW = - \int_{\partial W} (\rho v) v \cdot n dS + \int_W f dW + \int_{\partial W} \sigma \cdot n dS,$$

donde σ es el tensor de esfuerzos y n es un vector normal a la superficie ∂W . Usando el teorema de la divergencia tenemos que

$$\int_W \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) dW = - \int_W \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_i v_j) dW + \int_W f_i dW + \int_W \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij}) dW. \quad (2.3)$$

Puesto que esta ecuación se verifica para un volumen de control arbitrario, los tér-

minos dentro de las integrales son iguales, es decir,

$$\rho \frac{Dv}{Dt} + v \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) \right) = f + \nabla \cdot \sigma. \quad (2.4)$$

Debido a que la masa se conserva, el segundo término del lado izquierdo de esta ecuación se anula, con lo cual, obtenemos la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento:

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = f + \nabla \cdot \sigma. \quad (2.5)$$

2.1.2. Descripción lagrangiana

En la descripción lagrangiana, la posición, la velocidad y el estado termodinámico de una partícula son funciones que dependen solo del tiempo, debido a que cada partícula de fluido se identifica con un sistema de coordenadas, (α, β, γ) , que está fijo en la partícula [23].

Ahora, veamos una deducción de la ecuación de conservación de la masa. Consideremos que las partículas tienen masa constante $\Delta m = \rho \Delta V$, donde ΔV es la variación de volumen de la partícula. Sea ΔS la superficie cubierta por la partícula mientras se mueve. En un tiempo δt el volumen de la partícula aumenta de acuerdo a

$$\delta(\Delta V) = \int_{\Delta S} v \cdot n dS \delta t, \quad (2.6)$$

donde v es la velocidad de la partícula [23, Sección 1.3.1]. Gracias al teorema de la divergencia, la ecuación (2.6) implica que

$$\delta(\Delta V) = \int_{\Delta V} \nabla \cdot v dV \delta t. \quad (2.7)$$

Por otra parte, la tasa de dilatación de la partícula está dada por

$$\frac{1}{\Delta V} \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta(\Delta V)}{\delta t} = \frac{1}{\Delta V} \lim_{\delta t \rightarrow 0} \int_{\Delta V} \nabla \cdot v dV = \nabla \cdot v. \quad (2.8)$$

Puesto que la masa de la partícula es constante, se tiene que

$$\nabla \cdot v = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt}. \quad (2.9)$$

De aquí obtenemos la ecuación de conservación de la masa en la perspectiva lagran-

giana:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot v = 0. \quad (2.10)$$

Si la densidad del fluido es constante, obtenemos que

$$\nabla \cdot v = 0. \quad (2.11)$$

Es decir, el fluido es incompresible y la tasa de dilatación es nula. Por lo tanto, el volumen de un elemento de fluido es constante.

Ahora, para la derivación de la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento, consideramos los cambios en la cantidad de movimiento debidos a las fuerzas que se ejercen sobre el fluido. La fuerza total se debe a la fuerza ejercida por la gravedad, Δmg , y la fuerza debida a la presión que se ejerce hacia el interior del fluido a través de su superficie [23, Sección 1.3.2]:

$$- \int_{\Delta S} p dS = - \int_{\Delta V} \nabla p dV \approx -\nabla p \Delta V. \quad (2.12)$$

Entonces, usando la segunda ley del movimiento de Newton [6, Sección 1.1], obtenemos la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + g. \quad (2.13)$$

La ecuación (2.13) se conoce como ecuación de Euler.

En la siguiente sección presentaremos las ecuaciones que describen fluidos en los cuales se considera la viscosidad, es decir la acción tangencial de capas contiguas de fluido [28].

2.2. Fluidos newtonianos

En este tipo de fluidos se considera que la relación entre el tensor de esfuerzos y el gradiente de velocidades es lineal. Así, el tensor de esfuerzos está dado por

$$\sigma = -pI + \tau, \quad (2.14)$$

donde p es una función escalar, que se identifica con la variable de presión y es la parte isótropa del tensor de esfuerzos [28, Sección 6.1]. La parte desviatoria está

dada por τ y depende del gradiente de velocidades, de la siguiente manera:

$$\tau = \lambda(\nabla \cdot v)I + 2\mu D, \quad (2.15)$$

donde D es el tensor velocidad de deformación, el cual está definido por

$$D = \frac{1}{2} (\nabla v + \nabla v^T). \quad (2.16)$$

Además, μ y λ son coeficientes de viscosidad. Calculando la divergencia del tensor de esfuerzos, podemos expresar las ecuaciones de conservación de cantidad de movimiento en forma vectorial, (2.5), mediante

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\nabla p + \mu \Delta v + (\mu + \lambda) \nabla(\nabla \cdot v) + f \quad (2.17)$$

Las ecuaciones en (2.17), se conocen como las ecuaciones de Navier-Stokes [1, Sección 5.1]. En el caso de fluidos incompresibles, tenemos que la densidad del fluido es constante, y por lo tanto, $\nabla \cdot v = 0$. El tensor de esfuerzos se transforma en $\sigma = -pI + 2\mu D$. Si suponemos que $\bar{\mu}$ es una constante conocida, la ecuación (2.17), se escribe como

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta v + \frac{1}{\rho} f. \quad (2.18)$$

Aquí, $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ es una constante conocida como coeficiente de viscosidad cinemática, y μ se conoce como el coeficiente de viscosidad dinámica [23].

En los fluidos newtonianos, el esfuerzo cortante depende linealmente del gradiente de velocidad [15]. Existen fluidos en los cuales la relación entre el esfuerzo cortante y el gradiente de velocidad, es no lineal. Estos fluidos se denominan no newtonianos, y serán descritos en la siguiente sección.

2.3. Fluidos no newtonianos

En estos fluidos el esfuerzo cortante tiene una relación no lineal con la velocidad de deformación, lo cual implica que la viscosidad varía de acuerdo a la fuerza aplicada [15]. En algunos fluidos no-newtonianos la viscosidad también varía con el tiempo. Los fluidos no newtonianos pueden clasificarse en tres categorías: independientes del tiempo, dependientes del tiempo y fluidos viscoelásticos.

Fluidos independientes del tiempo. En este tipo de fluidos la viscosidad no

depende del historial del esfuerzo cortante del fluido. Estos fluidos se clasifican en fluidos dilatantes y fluidos pseudoplásticos.

En los fluidos dilatantes la viscosidad se incrementa cuando se incrementa el esfuerzo cortante. Este comportamiento de los fluidos dilatantes depende del tamaño, distribución y forma de las partículas de la suspensión que constituye el fluido. Las propiedades de estas suspensiones dependen de la teoría de Hamaker y de las fuerzas de van der Waals [15]. Un ejemplo clásico de fluido dilatante es la mezcla de maicena y agua, la cual fluye con facilidad cuando se agita lentamente y se comporta como un fluido muy viscoso cuando se agita fuerte y rápidamente.

Por otro lado, en los fluidos pseudoplásticos, la viscosidad disminuye cuando se incrementa el esfuerzo cortante. Un ejemplo de fluido pseudoplástico es la sangre.

Algunos fluidos no newtonianos independientes del tiempo son los fluidos de Bingham, los fluidos modelados por la ley de potencia, los fluidos de Herschel-Bulkley, los fluidos de Casson y los fluidos de Powell-Eyring.

Los fluidos de Bingham son fluidos con una relación lineal entre el esfuerzo cortante y la velocidad de deformación, y requieren superar un umbral de esfuerzo para comenzar a fluir. La crema dental, las suspensiones de arcilla, la mayonesa, el chocolate y la mostaza son algunos ejemplos de fluidos de Bingham [15, p. 75].

Los fluidos modelados por la ley de potencia, tienen una ley constitutiva que define la viscosidad, μ , en función del gradiente simetrizado D [3], [14]:

$$\mu(|D|) = \mu_0 \left(1 + |D|^2\right)^{\frac{p-2}{2}}, \quad (2.19)$$

donde μ_0 es un parámetro positivo y $p \in (1, \infty)$. Definiendo τ en (2.14), como $\tau = 2\mu(|D|)D$, tenemos que si $1 < p < 2$, la relación (2.19) modela un fluido pseudoplástico. Para $p \geq 2$, esta relación constitutiva sirve para modelar fluidos dilatantes.

En el caso particular de $p \geq 2$, notemos que gracias a (2.19), la correspondiente relación constitutiva es una relación suave entre el tensor de esfuerzos y la velocidad de deformación. Además, la viscosidad, como función de la velocidad de deformación, definida en (2.19), debe satisfacer algunas condiciones de crecimiento [3]. En otros modelos de fluidos dilatantes que usan la ley de la potencia se requiere incluso que el tensor de esfuerzo cortante tenga un potencial C^2 [26]. En general, el análisis de estos modelos y otros modelos suaves de fluidos dilatantes requiere el uso de la teoría de espacios de Banach. El modelo de fluido dilatante que consideraremos en

los siguientes capítulos tiene una relación constitutiva en la cual el tensor de esfuerzos σ depende de la velocidad de deformación D mediante una función no-suave. Como veremos más adelante, este modelo es más simple que los modelos suaves, pero tiene la ventaja de que puede ser formulado y analizado en el contexto de los espacios de Hilbert [9].

Fluidos dependientes del tiempo. Estos fluidos dependen de la velocidad de deformación y también del tiempo en el que se aplica la fuerza, es decir, la viscosidad de estos fluidos va cambiando de acuerdo a los esfuerzos cortantes que soportan. Estos fluidos se clasifican en fluidos reopécticos y tixotrópicos.

Los fluidos reopécticos, también conocidos como fluidos dilatantes que dependen del tiempo, incrementan su viscosidad con el tiempo. Es decir, estos fluidos se espesan o solidifican cuando se los sacude. La tinta de impresora y la pasta de yeso son ejemplos de fluidos reopécticos [15, p. 76].

Los fluidos tixotrópicos se conocen también como fluidos pseudoplásticos dependientes del tiempo. Estos fluidos disminuyen su viscosidad con el tiempo, es decir, mientras más largo sea el tiempo en el cual estos fluidos soportan esfuerzos cortantes, su viscosidad será menor. Las pinturas, el yogurt, los geles de gelatina, el lodo bentonítico y el aceite de castor hidrogenado son algunos ejemplos de fluidos tixotrópicos [15, p. 76].

Fluidos viscoelásticos. Estos fluidos tienen un comportamiento viscoso y elástico. En otras palabras, los fluidos viscoelásticos son fluidos viscosos que tienen la propiedad de almacenar y liberar energía, la cual está dada por su comportamiento elástico [13]. Así como otros materiales elásticos, los fluidos viscoelásticos están regidos por la ley de Hooke. Algunos ejemplos de fluidos viscoelásticos son la crema batida, algunos lubricantes y fluidos con grandes moléculas poliméricas.

Capítulo 3

Planteamiento del problema

En este capítulo presentamos el problema de control óptimo no-suave a estudiar. Primero, describiremos la ecuación de estado del problema, la cual modela un fluido dilatante. Además, presentaremos algunas notaciones y los espacios de funciones usados en el análisis del problema. Finalmente, plantearemos el problema de control óptimo asociado a la ecuación del fluido dilatante.

Consideramos el modelo de un fluido dilatante de [9], el cual está dado por las ecuaciones de conservación de la cantidad de movimiento y la masa:

$$-\operatorname{div} \sigma = u \quad \text{en } \Omega \quad (3.1)$$

$$\nabla \cdot y = 0 \quad \text{en } \Omega, \quad (3.2)$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un dominio acotado tipo Lipschitz bidimensional o tridimensional, y es la velocidad del fluido y u es una fuerza externa. Además, el modelo consta de una relación constitutiva, dada por la definición del tensor de esfuerzos σ :

$$\sigma = \begin{cases} -pI + 2\mu \varepsilon y & \text{si } |\varepsilon y| \leq g, \\ -pI + 2 \left(\mu + \nu - \nu \frac{g}{|\varepsilon y|} \right) \varepsilon y & \text{si } |\varepsilon y| > g. \end{cases} \quad (3.3)$$

Aquí, $\mu > 0$ y $\nu \geq 0$ son viscosidades, y g es un parámetro positivo. Adicionalmente, ε denota a la función que relaciona la velocidad del fluido con la velocidad de deformación por corte:

$$\varepsilon y = \frac{1}{2} \left(\nabla y + \nabla y^T \right).$$

Denotamos por $|\cdot|$ a la norma de Frobenius de los tensores de segundo orden, defi-

nida de la siguiente manera:

$$|A| = (A : A)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall A \in \mathbb{R}^{N \times N},$$

donde “:” es el producto escalar de tensores de segundo orden:

$$A : B = \text{tr}(A^T B) = \text{tr}(AB^T) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij} b_{ij}, \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^{N \times N}.$$

Las ecuaciones (3.1), (3.2) y (3.3) modelan un fluido dilatante, el cual incrementa su viscosidad cuando la velocidad de corte excede el parámetro positivo g [9].

Notemos que el tensor de esfuerzos, definido en (3.3), puede ser escrito usando la función $\text{máx}(0, \cdot)$, como sigue:

$$\sigma = -pI + 2\mu \varepsilon y + 2\nu \text{máx}(0, |\varepsilon y| - g) \frac{\varepsilon y}{|\varepsilon y|}. \quad (3.4)$$

Así, la formulación variacional de las ecuaciones (3.1)-(3.3) es: dado $u \in L^2(\Omega)^N$, encontrar $y \in Y$ que satisface

$$\mu \int_{\Omega} \varepsilon y : \varepsilon v \, dx + \nu \int_{\Omega} \text{máx}(0, |\varepsilon y| - g) \frac{\varepsilon y}{|\varepsilon y|} : \varepsilon v = \int_{\Omega} u \cdot v, \quad \forall v \in Y, \quad (3.5)$$

donde Y es el espacio definido por

$$Y = \left\{ y \in H^1(\Omega)^N : \nabla \cdot y = 0 \text{ en } \Omega, y = 0 \text{ sobre } \Gamma \right\}, \quad (3.6)$$

con $\Gamma = \partial\Omega$. La ecuación (3.5) es la ecuación de estado del problema de control óptimo no-suave que estudiaremos:

$$\min_{(y,u) \in Y \times U} J(y, u) = \frac{1}{2} \|y - z_d\|_{L^2(\Omega)^N}^2 + \frac{\alpha}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)^N}^2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} \mu \int_{\Omega} \varepsilon y : \varepsilon v \, dx + \int_{\Omega} \tau : \varepsilon v \, dx &= \int_{\Omega} u \cdot v \, dx, \quad \text{para todo } v \in Y \\ \tau - \nu \text{máx}(0, |\varepsilon y| - g) \frac{\varepsilon y}{|\varepsilon y|} &= 0, \quad \text{c.t.p. en } \Omega. \end{aligned} \quad (\text{P})$$

Aquí, el espacio de estado es Y , definido en (3.6) y el espacio de control es $U = L^2(\Omega)^N$. Adicionalmente, introducimos un tensor simétrico τ , para escribir la ecuación de estado. El funcional objetivo es un funcional tipo tracking, donde $z_d \in$

$L^2(\Omega)^N$ es el estado deseado del sistema y $\alpha > 0$ es un parámetro relacionado con el costo del control.

La ecuación de estado también puede ser escrita como

$$\mu \int_{\Omega} \varepsilon y : \varepsilon v \, dx + \nu \int_{\Omega} m(\varepsilon y) : \varepsilon v \, dx = \int_{\Omega} u \cdot v \, dx, \quad \forall v \in Y, \quad (3.7)$$

donde la función $m : \mathbb{R}^{N \times N} \rightarrow \mathbb{R}^{N \times N}$ está definida por

$$m(\varepsilon) = \begin{cases} \max(0, |\varepsilon| - g) \frac{\varepsilon}{|\varepsilon|}, & \text{si } \varepsilon \neq 0, \\ 0, & \text{si } \varepsilon = 0. \end{cases}$$

Respecto a la existencia de soluciones para la ecuación (3.7), de acuerdo a [9, Teorema 2.1], para todo $u \in L^2(\Omega)^N$, la ecuación (3.7) tiene una solución única $y \in Y$. Con esto podemos definir el operador solución asociado a la ecuación de estado.

DEFINICIÓN 3.1 (Operador solución) *El operador $S : U \rightarrow Y$, definido mediante $u \mapsto S(u) = y$, donde $y \in Y$ es la solución única de la ecuación (3.7) asociada a $u \in U$, se denomina operador solución u operador control-a-estado.*

La particularidad de la ecuación de estado es que contiene la no linealidad m , la cual es no-suave, es decir, no es diferenciable en los sentidos de Fréchet o Gâteaux. La presencia de la no linealidad no-suave es un obstáculo para determinar las propiedades de diferenciability del operador solución de la ecuación de estado y plantear un sistema de optimalidad para el problema (P), usando el método del cálculo adjunto, como en [27].

En nuestro caso, la no linealidad es solamente direccionalmente diferenciable y, además, involucra el gradiente simetrizado de γ . En [20] y [7], se estudia las condiciones de optimalidad para problemas de control óptimo de ecuaciones diferenciales parciales con no linealidades no-suaves, que dependen solo de la función en el espacio de estado, mas no de su gradiente. En [24], se estudia una regularización del problema (P), donde la función objetivo es la misma función del problema (P) y la ecuación de estado tiene un operador solución Fréchet y Gâteaux diferenciable, pues involucra una regularización de la función máximo. Usando el cálculo adjunto, se obtiene un sistema de optimalidad para el problema regularizado y mediante paso al límite, también se obtiene un sistema de optimalidad para el problema (P).

En este trabajo de investigación queremos analizar la diferenciability direccional del operador solución de la ecuación de estado del problema (P) y extender los

resultados sobre las condiciones de optimalidad fuertes, obtenidos en [20] y [7], a nuestro caso.

Capítulo 4

Diferenciabilidad del operador solución

En este capítulo analizaremos las propiedades de diferenciabilidad del operador solución de la ecuación de estado del problema (P). Empezamos calculando la derivada direccional de la no linealidad de la ecuación de estado. Luego, usaremos estos cálculos para obtener la derivada direccional del operador de Nemytskii asociado a la no linealidad. Finalmente, estableceremos que el operador solución es direccionalmente diferenciable.

Observemos que la función $m : \mathbb{R}^{N \times N} \rightarrow \mathbb{R}^{N \times N}$ es la derivada de la función convexa $\tau \mapsto \max(0, |\tau| - g)^2$, definida para todo $\tau \in \mathbb{R}^{N \times N}$. Consecuentemente, la función m , es monótona:

$$(m(\varepsilon) - m(\tau)) : (\varepsilon - \tau) \geq 0, \quad \forall \varepsilon, \tau \in \mathbb{R}^{N \times N} \quad (4.1)$$

Utilizaremos esta propiedad de monotonía en la demostración del resultado sobre la diferenciabilidad direccional del operador solución de la ecuación de estado.

Para calcular la derivada direccional del operador de Nemytskii asociado a m , el cual es una función de $L^2(\Omega; \mathbb{R}^{N \times N})$ en $L^2(\Omega; \mathbb{R}^{N \times N})$, nos basamos en la derivada direccional de la función m . Por eso, primero, estudiamos la diferenciabilidad de la no linealidad de la ecuación (3.7).

4.1. Cálculo de la derivada direccional de la no linealidad

De forma equivalente, podemos escribir la no linealidad $m : \mathbb{R}^{N \times N} \rightarrow \mathbb{R}^{N \times N}$ como

$$m(\varepsilon) = \begin{cases} \varepsilon - g \frac{\varepsilon}{|\varepsilon|}, & \text{si } |\varepsilon| > g, \\ 0, & \text{si } |\varepsilon| \leq g. \end{cases} \quad (4.2)$$

En primer lugar, notemos que la función m es continua. Para el cálculo de la derivada direccional de m en $\varepsilon \in \mathbb{R}^{N \times N}$, consideramos tres casos: $|\varepsilon| < g$, $|\varepsilon| > g$ y $|\varepsilon| = g$.

Caso 1. Sea $\varepsilon \in \mathbb{R}^{N \times N}$ tal que $|\varepsilon| < g$, entonces, $m(\varepsilon) = 0$. Existe una vecindad de ε , $V(\varepsilon)$, tal que

$$|\varepsilon + th| < g, \quad \forall h \in V(\varepsilon),$$

para $t > 0$ suficientemente pequeño. De esta manera, $m(\varepsilon + th) = 0$ y

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{m(\varepsilon + th) - m(\varepsilon)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{t} = 0.$$

Entonces,

$$m'(\varepsilon; h) = 0, \quad \forall h \in \mathbb{R}^{N \times N}.$$

Caso 2. Sea $\varepsilon \in \mathbb{R}^{N \times N}$ tal que $|\varepsilon| > g$, entonces $m(\varepsilon) = \varepsilon - g \frac{\varepsilon}{|\varepsilon|}$. Existe una vecindad de ε , $V(\varepsilon)$, tal que

$$|\varepsilon + th| > g, \quad \forall h \in V(\varepsilon),$$

para $t > 0$ suficientemente pequeño. Así, $m(\varepsilon + th) = \varepsilon + th - g \frac{\varepsilon + th}{|\varepsilon + th|}$ y

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{m(\varepsilon + th) - m(\varepsilon)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left\{ th - g \frac{\varepsilon + th}{|\varepsilon + th|} + g \frac{\varepsilon}{|\varepsilon|} \right\} = h - gF'(\varepsilon; h). \quad (4.3)$$

Aquí $F'(\varepsilon; h)$ es la derivada direccional de la función $\varepsilon \mapsto F(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{|\varepsilon|}$, en $\varepsilon \in \mathbb{R}^{N \times N}$ y en la dirección $h \in \mathbb{R}^{N \times N}$.

Ahora, calculemos la derivada direccional de la función F en $\varepsilon \in \mathbb{R}^{N \times N}$ tal que $|\varepsilon| > g$. Sean $h \in \mathbb{R}^{N \times N}$ y $t > 0$ arbitrarios. Entonces,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(\frac{\varepsilon + th}{|\varepsilon + th|} - \frac{\varepsilon}{|\varepsilon|} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(\frac{\varepsilon|\varepsilon| + th|\varepsilon| - \varepsilon|\varepsilon + th|}{|\varepsilon + th||\varepsilon|} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ -\frac{\varepsilon}{|\varepsilon| |\varepsilon + th|} \left(\frac{|\varepsilon + th| - |\varepsilon|}{t} \right) + \frac{h}{|\varepsilon + th|} \right\} \\
&= -\frac{\varepsilon}{|\varepsilon|^2} G'(\varepsilon; h) + \frac{h}{|\varepsilon|}, \tag{4.4}
\end{aligned}$$

donde $G'(\varepsilon; h)$ es la derivada direccional de la función G , definida por $G(\varepsilon) = |\varepsilon|$, para todos los $\varepsilon \in \mathbb{R}^{N \times N}$ tales que $\varepsilon \neq 0$. En tal caso, tenemos que $G'(\varepsilon; h) = \frac{\varepsilon : h}{|\varepsilon|}$, para todo $h \in \mathbb{R}^{N \times N}$ y $\varepsilon \neq 0$. Reemplazando el valor de $G'(\varepsilon; h)$ en la ecuación (4.4), tenemos que

$$F'(\varepsilon; h) = -\frac{\varepsilon}{|\varepsilon|^3} (\varepsilon : h) + \frac{h}{|\varepsilon|}.$$

Reemplazamos este valor en la ecuación (4.3), con lo cual obtenemos

$$m'(\varepsilon; h) = h - g \left(-\frac{\varepsilon}{|\varepsilon|^3} (\varepsilon : h) + \frac{h}{|\varepsilon|} \right), \quad \forall h \in \mathbb{R}^{N \times N}.$$

Caso 3. Sea $\varepsilon \in \mathbb{R}^{N \times N}$ tal que $|\varepsilon| = g$. En este caso, $m(\varepsilon) = 0$ y dependiendo de $h \in \mathbb{R}^{N \times N}$, para $t > 0$ suficientemente pequeño, $m(\varepsilon + th)$ toma un valor distinto.

Si h es tal que $0 \leq \varepsilon : h$, se tiene que para $t > 0$ suficientemente pequeño, $|\varepsilon + th| > g$ y entonces,

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow 0} \frac{m(\varepsilon + th) - m(\varepsilon)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varepsilon + th}{t |\varepsilon + th|} (|\varepsilon + th| - g) \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varepsilon + th}{|\varepsilon + th|} \left(\frac{|\varepsilon + th| - |\varepsilon|}{t} \right) \\
&= \frac{\varepsilon}{|\varepsilon|} G'(\varepsilon; h) \\
&= \frac{\varepsilon}{|\varepsilon|^2} \varepsilon : h.
\end{aligned}$$

Ahora, si h es tal que $\varepsilon : h < 0$, tenemos que para $t > 0$ suficientemente pequeño, $|\varepsilon + th| < g$. En este caso,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{m(\varepsilon + th) - m(\varepsilon)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{t} = 0.$$

Entonces, si $|\varepsilon| = g$,

$$m'(\varepsilon; h) = \begin{cases} \frac{\varepsilon}{g^2} \varepsilon : h, & \text{si } \varepsilon : h \geq 0, \\ 0, & \text{si } \varepsilon : h < 0. \end{cases}$$

En síntesis, la derivada direccional de m en ε y en la dirección h está dada por

$$m'(\varepsilon; h) = \mathbb{1}_{\{|\varepsilon| < g\}} 0 + \mathbb{1}_{\{|\varepsilon| > g\}} \left(h + \frac{g\varepsilon}{|\varepsilon|^3} (\varepsilon : h) - \frac{gh}{|\varepsilon|} \right) + \mathbb{1}_{\{|\varepsilon| = g\}} \max(0, (\varepsilon : h)) \frac{\varepsilon}{g^2}.$$

Notemos que la derivada direccional de m en $\varepsilon \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $m'(\varepsilon; \cdot)$, no es lineal con respecto a la dirección, y por lo tanto, no puede ser la derivada de Gâteaux de m .

Una propiedad importante de la derivada direccional de m es la Lipschitz continuidad global respecto a la dirección.

PROPOSICIÓN 4.1 *Sea $\varepsilon \in \mathbb{R}^{N \times N}$, entonces, la derivada direccional de m en ε es Lipschitz continua respecto a la dirección, es decir:*

$$|m'(\varepsilon; h) - m'(\varepsilon; s)| \leq |h - s|, \quad \forall h, s \in \mathbb{R}^{N \times N}. \quad (4.5)$$

Demostración. De acuerdo al cálculo de la derivada direccional de m , tenemos que

$$m'(\varepsilon; h) = \mathbb{1}_{\{|\varepsilon| < g\}} 0 + \mathbb{1}_{\{|\varepsilon| > g\}} \left[h - g \left(-\frac{\varepsilon}{|\varepsilon|^3} \varepsilon : h + \frac{h}{|\varepsilon|} \right) \right] + \mathbb{1}_{\{|\varepsilon| = g\}} M(\varepsilon; h),$$

donde $M(\varepsilon; h)$ es la derivada direccional de m en ε y en la dirección h en el caso de $|\varepsilon| = g$. Analizamos la Lipschitz continuidad de m' en ε en cada uno de los casos: $|\varepsilon| < g$, $|\varepsilon| > g$ y $|\varepsilon| = g$.

1. Si $|\varepsilon| < g$, vemos que se verifica trivialmente (4.5).
2. Si $|\varepsilon| > g$, tenemos que

$$\begin{aligned} |m'(\varepsilon; h) - m'(\varepsilon; s)| &= \left| h + g \frac{\varepsilon}{|\varepsilon|^3} \varepsilon : h - g \frac{h}{|\varepsilon|} - s - g \frac{\varepsilon}{|\varepsilon|^3} \varepsilon : s + g \frac{s}{|\varepsilon|} \right| \\ &= \left| (h - s) + g \frac{\varepsilon}{|\varepsilon|^3} \varepsilon : (h - s) - g \frac{h}{|\varepsilon|} (h - s) \right| \\ &\leq \left| \left(1 - \frac{g}{|\varepsilon|} \right) (h - s) \right| + \left| g \frac{\varepsilon}{|\varepsilon|^3} \varepsilon : (h - s) \right|. \end{aligned}$$

Como $\left(1 - \frac{g}{|\varepsilon|} \right) > 0$, la desigualdad anterior se transforma en

$$\begin{aligned} |m'(\varepsilon; h) - m'(\varepsilon; s)| &\leq \left(1 - \frac{g}{|\varepsilon|} \right) |h - s| + g \frac{|\varepsilon|}{|\varepsilon|^3} |\varepsilon| |h - s| \\ &= |h - s|. \end{aligned}$$

3. Consideramos el caso $|\varepsilon| = g$. Primero, tomamos h tal que $0 \leq h : \varepsilon$. Si s verifica $0 \leq s : \varepsilon$, tenemos que

$$\begin{aligned} |M(\varepsilon; h) - M(\varepsilon; s)| &= \left| \frac{\varepsilon}{g^2} \varepsilon : (h - s) \right| \\ &\leq \frac{|\varepsilon|^2}{g^2} |h - s| \\ &= |h - s|. \end{aligned}$$

Por otro lado, si s verifica $s : \varepsilon < 0$, tenemos que

$$|M(\varepsilon; h) - M(\varepsilon; s)| = \left| \frac{\varepsilon}{g^2} \varepsilon : h \right| = \frac{|\varepsilon|}{g^2} |\varepsilon : h|.$$

Como $-\varepsilon : s > 0$ y $\varepsilon : h \geq 0$, la ecuación anterior se transforma en

$$\begin{aligned} |M(\varepsilon; h) - M(\varepsilon; s)| &\leq \frac{1}{g} \varepsilon : h - \frac{1}{g} \varepsilon : s \\ &\leq \frac{1}{g} |\varepsilon : (h - s)| \\ &\leq |h - s|. \end{aligned}$$

Ahora, tomamos h tal que verifica $h : \varepsilon < 0$. Si s es tal que $0 \leq s : \varepsilon$, tenemos que

$$|M(\varepsilon; h) - M(\varepsilon; s)| = \left| -\frac{\varepsilon}{g^2} \varepsilon : s \right| = \frac{|\varepsilon|}{g^2} |-\varepsilon : s|.$$

Como $-\varepsilon : s + \varepsilon : h < -\varepsilon : s \leq 0$, tenemos que $|-\varepsilon : s| < |-\varepsilon : s + \varepsilon : h|$. Combinando esta desigualdad con la ecuación anterior, obtenemos

$$\begin{aligned} |M(\varepsilon; h) - M(\varepsilon; s)| &< \frac{1}{g} |-\varepsilon : s + \varepsilon : h| \\ &\leq \frac{1}{g} |\varepsilon| |h - s| \\ &= |h - s|. \end{aligned}$$

Si, por otro lado, s verifica que $s : \varepsilon < 0$, tenemos que

$$|M(\varepsilon; h) - M(\varepsilon; s)| = 0 \leq |h - s|.$$

En resumen, si $|\varepsilon| = g$,

$$|M(\varepsilon; h) - M(\varepsilon; s)| \leq |h - s|, \quad \forall h, s \in \mathbb{R}^{N \times N}.$$

En conclusión, para todo $\varepsilon \in \mathbb{R}^{N \times N}$, se tiene (4.5). \square

OBSERVACIÓN 4.2 *La función m es globalmente Lipschitz continua [9, Sección 2], en consecuencia, también es localmente Lipschitz continua. Puesto que la función m es direccionalmente diferenciable en todo $\varepsilon \in \mathbb{R}^{N \times N}$ y localmente Lipschitz continua, tenemos que m es Bouligand diferenciable en ε [19, Definición 4.2.1]. De esta manera, el resultado de la Proposición 4.1, también se puede obtener de las propiedades de las funciones Bouligand diferenciables [19, Proposición 4.2.2].*

4.2. Diferenciabilidad del operador de Nemytskii asociado a la no linealidad

Sea G el operador de Nemytskii asociado a la no linealidad m , es decir $G : L^2(\Omega; \mathbb{R}^{N \times N}) \rightarrow L^2(\Omega; \mathbb{R}^{N \times N})$ es el operador que a la función $z \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^{N \times N})$ asocia la función $G(z) \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^{N \times N})$ definida por $G(z)(x) = m(z(x))$, para casi todo $x \in \mathbb{R}^N$.

Primero, verificamos que el operador G , en efecto, toma valores en $L^2(\Omega; \mathbb{R}^{N \times N})$. De acuerdo a la definición de la norma en $L^2(\Omega; \mathbb{R}^{N \times N})$, que notaremos por $\|\cdot\|_{L^2}$, tenemos que

$$\|G(z)\|_{L^2}^2 = \int_{\Omega} |G(z)(x)|^2 dx = \int_{\Omega} |m(z(x))|^2 dx,$$

para todo $z \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^{N \times N})$. Entonces, de la definición de m , se sigue que, si $z(x) = 0$, para casi todo $x \in \Omega$,

$$\|G(z)\|_{L^2}^2 = \int_{\Omega} |0|^2 dx = 0$$

Por otro lado, si $z(x) \neq 0$, para casi todo $x \in \Omega$, tenemos que

$$\begin{aligned} \|G(z)\|_{L^2}^2 &= \int_{\Omega} \left| \max(0, |z(x)| - g) \frac{z(x)}{|z(x)|} \right|^2 dx \\ &\leq \int_{\Omega} |z(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Entonces, para todo $z \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^{N \times N})$ se tiene que el valor de la norma $\|G(z)\|_{L^2}$ es

finito, y por lo tanto, $G(z) \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^{N \times N})$.

Ahora, mostraremos que el operador G es direccionalmente diferenciable de $L^2(\Omega; \mathbb{R}^{N \times N})$ en $L^2(\Omega; \mathbb{R}^{N \times N})$.

De acuerdo a la definición de G , para casi todo $x \in \mathbb{R}^N$ y todo $z, h \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^{N \times N})$ arbitrarios, tenemos que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{G(z + th)(x) - G(z)(x)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{m(z(x) + th(x)) - m(z(x))}{t}. \quad (4.6)$$

El límite del lado derecho de esta ecuación es la derivada direccional de m en $z(x)$ y en la dirección $h(x)$, entonces, $G'(z; h)(x) = m'(z(x); h(x))$, c.t.p. $x \in \Omega$. Como m es direccionalmente diferenciable, tenemos la siguiente convergencia:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{m(z(x) + th(x)) - m(z(x))}{t} = m'(z(x); h(x)), \quad \text{c.t.p. } x \in \Omega.$$

Además, puesto que m es Lipschitz continua [9, Sección 2] y, según la Proposición 4.1, la derivada direccional de m es globalmente Lipschitz continua respecto a la dirección, tenemos que

$$\left| \frac{m(z(x) + th(x)) - m(z(x))}{t} - m'(z(x); h(x)) \right| \leq \frac{1}{t} |z(x) + th(x) - z(x)| + |h(x)| \leq 2|h(x)|,$$

c.t.p. $x \in \Omega$. Por lo tanto, gracias al teorema de convergencia dominada de Lebesgue [4, Teorema 4.2],

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left\| \frac{G(z + th) - G(z)}{t} - G'(z, h) \right\|_{L^2} = 0. \quad (4.7)$$

4.3. Diferenciabilidad direccional del operador control-a-estado

Para analizar la diferenciabilidad direccional del operador control-a-estado S , dado $h \in U$, estudiamos el siguiente límite:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{S(u + th) - S(u)}{t}.$$

PROPOSICIÓN 4.3 *Sea $y \in Y$ solución de la ecuación (3.7). Para todo $h \in L^2(\Omega)^N$,*

la ecuación

$$\mu \int_{\Omega} \varepsilon z : \varepsilon v \, dx + \nu \int_{\Omega} m'(\varepsilon y; \varepsilon z) : \varepsilon v \, dx = \int_{\Omega} h \cdot v \, dx, \quad \forall v \in Y, \quad (4.8)$$

tiene una única solución $z \in Y$. Aquí, $m'(\varepsilon y; \varepsilon z)$ denota la derivada direccional del operador de Nemytskii asociado a la función m , en εy y en la dirección εz .

Demostración. Mostraremos que para todo $l \in Y'$, la ecuación $T(z) = l$, donde el operador $T : Y \rightarrow Y'$ está definido por

$$\langle T(z), v \rangle_{Y', Y} = \mu (\varepsilon z, \varepsilon v) + \nu (m'(\varepsilon y; \varepsilon z), \varepsilon v) \quad \forall v \in Y,$$

tiene una única solución. Para ello debemos verificar que el operador T es monótono, hemicontinuo y coercivo.

Primero, para demostrar que T es hemicontinuo, probaremos que para todo $v \in Y$, la función $t \mapsto \langle T(z + tw), v \rangle_{Y', Y}$ es continua para todo $t \in [0, 1]$ y todo $z, w \in Y$.

Sea $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $[0, 1]$ que converge hacia $t \in [0, 1]$. En primer lugar, notemos que el operador asociado a la forma $\mu(\varepsilon z, \varepsilon \cdot)$ es lineal y acotado, y por lo tanto secuencialmente continuo. Entonces,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \varepsilon(z + t_n w) : \varepsilon v = \int_{\Omega} \varepsilon(z + tw) : \varepsilon v. \quad (4.9)$$

Ahora, si $|\varepsilon y| < g$, $m'(\varepsilon y; \varepsilon(z + t_n w)) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, y entonces

$$m'(\varepsilon y; \varepsilon(z + t_n w)) : \varepsilon v \rightarrow m'(\varepsilon y; \varepsilon(z + tw)) : \varepsilon v = 0, \quad \text{c.t.p. } x \in \Omega.$$

Además,

$$|m'(\varepsilon y; \varepsilon(z + t_n w)) : \varepsilon v| = 0 \leq 0$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Como la función $0 \in L^1(\Omega)$, por el teorema de convergencia dominada de Lebesgue, tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \mathbb{1}_{\{|\varepsilon y| < g\}} m'(\varepsilon y; \varepsilon(z + t_n w)) : \varepsilon v = \int_{\Omega} \mathbb{1}_{\{|\varepsilon y| < g\}} m'(\varepsilon y; \varepsilon(z + tw)) : \varepsilon v. \quad (4.10)$$

Si $|\varepsilon y| > g$, tenemos que

$$m'(\varepsilon y; \varepsilon(z + t_n w)) = \varepsilon(z + t_n w) - g \left(-\frac{\varepsilon y}{|\varepsilon y|^3} \varepsilon y : \varepsilon(z + t_n w) + \frac{\varepsilon(z + t_n w)}{|\varepsilon y|} \right),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. De modo que, si $n \rightarrow \infty$,

$$m'(\varepsilon y; \varepsilon(z + t_n w)) : \varepsilon v \rightarrow \varepsilon(z + t w) : \varepsilon v - g \left(-\frac{\varepsilon y}{|\varepsilon y|^3} \varepsilon y : \varepsilon(z + t w) + \frac{\varepsilon(z + t w)}{|\varepsilon y|} \right) : \varepsilon v, \quad (4.11)$$

c.t.p. $x \in \Omega$. Adicionalmente, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} |m'(\varepsilon y; \varepsilon(z + t_n w)) : \varepsilon v| &\leq |\varepsilon(z + t_n w) : \varepsilon v| \\ &\quad + \frac{g}{|\varepsilon y|^3} |\varepsilon y : \varepsilon v| |\varepsilon y : \varepsilon(z + t_n w)| + \frac{g}{|\varepsilon y|} |\varepsilon(z + t_n w) : \varepsilon v|. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} |m'(\varepsilon y; \varepsilon(z + t_n w)) : \varepsilon v| &\leq (|\varepsilon z| + |\varepsilon w|) |\varepsilon v| + \frac{g |\varepsilon y|^2}{|\varepsilon y|^3} |\varepsilon v| (|\varepsilon z| + |\varepsilon w|) + (|\varepsilon z| + |\varepsilon w|) |\varepsilon v| \\ &\leq 3(|\varepsilon z| + |\varepsilon w|) |\varepsilon v|. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Veamos que la función $x \mapsto 3(|\varepsilon z(x)| + |\varepsilon w(x)|) |\varepsilon v(x)|$ pertenece a $L^1(\Omega)$. Para casi todo $x \in \Omega$, tenemos que

$$\begin{aligned} |\varepsilon z(x)| |\varepsilon v(x)| &= \left| \frac{1}{2} (\nabla z(x) + \nabla z(x)^T) \right| \left| \frac{1}{2} (\nabla v(x) + \nabla v(x)^T) \right| \\ &\leq \frac{1}{4} (|\nabla z(x)| + |\nabla z(x)^T|) (|\nabla v(x)| + |\nabla v(x)^T|) \\ &= \frac{1}{4} (2 |\nabla z(x)|) (2 |\nabla v(x)|) \\ &= |\nabla z(x)| |\nabla v(x)|. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\int_{\Omega} |\varepsilon z(x)| |\varepsilon v(x)| dx \leq \int_{\Omega} |\nabla z(x)| |\nabla v(x)| dx. \quad (4.13)$$

Además, la desigualdad de Hölder implica que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla z(x)| |\nabla v(x)| dx &\leq \left(\int_{\Omega} |\nabla z(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \int_{\Omega} \left(\frac{\partial z_i(x)}{\partial x_j} \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v_i(x)}{\partial x_j} \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|z\|_{H^1(\Omega)^N} \|v\|_{H^1(\Omega)^N}. \end{aligned}$$

Combinando esta desigualdad con (4.13), obtenemos

$$\int_{\Omega} |\varepsilon z(x)| |\varepsilon v(x)| \, dx \leq \|z\|_{H^1(\Omega)^N} \|v\|_{H^1(\Omega)^N}. \quad (4.14)$$

De manera similar,

$$\int_{\Omega} |\varepsilon w(x)| |\varepsilon v(x)| \, dx \leq \|w\|_{H^1(\Omega)^N} \|v\|_{H^1(\Omega)^N}. \quad (4.15)$$

Las integrales en (4.14) y (4.15) tienen un valor finito pues estamos usando la norma de $H^1(\Omega)^N$ en el espacio Y .

Entonces, por el teorema de convergencia dominada de Lebesgue, obtenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \mathbb{1}_{\{|\varepsilon y| > g\}} m'(\varepsilon y; \varepsilon(z + t_n w)) : \varepsilon v = \int_{\Omega} \mathbb{1}_{\{|\varepsilon y| > g\}} m'(\varepsilon y; \varepsilon(z + t w)) : \varepsilon v. \quad (4.16)$$

Ahora, si $|\varepsilon y| = g$, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$m'(\varepsilon y; \varepsilon(z + t_n w)) = \begin{cases} \frac{\varepsilon y}{g^2} \varepsilon y : \varepsilon(z + t_n w), & \text{si } \varepsilon(z + t_n w) : \varepsilon y \geq 0, \\ 0, & \text{si } \varepsilon(z + t_n w) : \varepsilon y < 0. \end{cases}$$

Puesto que $\varepsilon(z + t_n w) : \varepsilon y \rightarrow \varepsilon(z + t w) : \varepsilon y$, si $n \rightarrow \infty$, tenemos que,

$$m'(\varepsilon y; \varepsilon(z + t_n w)) : \varepsilon v \rightarrow m'(\varepsilon y; \varepsilon(z + t w)) : \varepsilon v,$$

c.t.p. $x \in \Omega$, si $n \rightarrow \infty$. Además, si $0 \leq \varepsilon(z + t_n w) : \varepsilon y \leq g$, tenemos que

$$\begin{aligned} |m'(\varepsilon y; \varepsilon(z + t_n w)) : \varepsilon v| &= \left| \frac{\varepsilon y : \varepsilon v}{g^2} \varepsilon y : \varepsilon(z + t_n w) \right| \\ &\leq \frac{|\varepsilon y|^2}{g^2} |\varepsilon v| (|\varepsilon z| + t_n |\varepsilon w|) \\ &\leq |\varepsilon v| (|\varepsilon z| + |\varepsilon w|). \end{aligned} \quad (4.17)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Si $\varepsilon(z + t_n w) : \varepsilon y < 0$, se tiene que

$$|m'(\varepsilon y; \varepsilon(z + t_n w)) : \varepsilon v| = |0| \leq 0, \quad (4.18)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. De acuerdo a las ecuaciones (4.17) y (4.18), vemos que la función $|m'(\varepsilon y; \varepsilon(z + t_n w)) : \varepsilon v|$ está acotada por funciones en $L^1(\Omega)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Entonces, gracias al teorema de convergencia dominada de Lebesgue, se concluye que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \mathbb{1}_{\{|\varepsilon y|=g\}} m'(\varepsilon y; \varepsilon(z + t_n w)) : \varepsilon v = \int_{\Omega} \mathbb{1}_{\{|\varepsilon y|=g\}} m'(\varepsilon y; \varepsilon(z + tw)) : \varepsilon v. \quad (4.19)$$

Las ecuaciones (4.9), (4.10), (4.16) y (4.19) implican que para todo $v, z, w \in Y$

$$\langle T(z + t_n w), v \rangle_{Y', Y} \rightarrow \langle T(z + tw), v \rangle_{Y', Y},$$

si $n \rightarrow \infty$, es decir, el operador T es hemicontinuo.

Para demostrar que T es monótono, mostraremos que

$$\langle T(z) - T(w), z - w \rangle_{Y', Y} \geq 0, \quad \forall z, w \in Y.$$

Como

$$\langle T(z) - T(w), z - w \rangle_{Y', Y} = \mu(\varepsilon(z - w), \varepsilon(z - w)) \quad (4.20)$$

$$+ \nu(m'(\varepsilon y; \varepsilon z) - m'(\varepsilon y; \varepsilon w), \varepsilon(z - w)), \quad \forall z, w \in Y, \quad (4.21)$$

analizaremos los términos en las ecuaciones (4.20) y (4.21) por separado. Primero, analizamos el término de la ecuación (4.21). Sean $z, w \in Y$, entonces

$$\begin{aligned} \nu(m'(\varepsilon y; \varepsilon z) - m'(\varepsilon y; \varepsilon w), \varepsilon(z - w)) &= \nu \int_{\Omega} \mathbb{1}_{\{|\varepsilon y| > g\}} \left[\frac{g}{|\varepsilon y|} \left(-\varepsilon(z - w) : \varepsilon(z - w) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{(\varepsilon y : \varepsilon(z - w))^2}{|\varepsilon y|^2} \right) + \varepsilon(z - w) : \varepsilon(z - w) \right] \\ &\quad + \nu \int_{\Omega} \mathbb{1}_{\{|\varepsilon y|=g\}} (M(\varepsilon y; \varepsilon z) - M(\varepsilon y; \varepsilon w)) : \varepsilon(z - w), \end{aligned}$$

donde $M(\varepsilon y; \varepsilon z)$ es la derivada direccional del operador de Nemytskii asociado a la función m , en εy y en la dirección εz , en el caso $|\varepsilon| = g$, es decir:

$$M(\varepsilon y; \varepsilon z) = \begin{cases} \frac{\varepsilon y}{g^2} \varepsilon y : \varepsilon z, & \text{si } \varepsilon z : \varepsilon y \geq 0, \\ 0, & \text{si } \varepsilon z : \varepsilon y < 0. \end{cases}$$

Si $\varepsilon z : \varepsilon y \geq 0$ y $\varepsilon w : \varepsilon y \geq 0$, tenemos que

$$\begin{aligned} (M(\varepsilon y; \varepsilon z) - M(\varepsilon y; \varepsilon w)) : \varepsilon(z - w) &= \frac{(\varepsilon y : \varepsilon z)^2}{g^2} - \frac{(\varepsilon y : \varepsilon w)(\varepsilon y : \varepsilon z)}{g^2} - \frac{(\varepsilon y : \varepsilon z)(\varepsilon y : \varepsilon w)}{g^2} \\ &\quad + \frac{(\varepsilon y : \varepsilon w)^2}{g^2} \\ &= \frac{1}{g^2} (\varepsilon y : \varepsilon(z - w))^2. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Si $\varepsilon z : \varepsilon y \geq 0$ y $\varepsilon w : \varepsilon y < 0$,

$$(M(\varepsilon y; \varepsilon z) - M(\varepsilon y; \varepsilon w)) : \varepsilon(z - w) = \frac{(\varepsilon y : \varepsilon z)^2}{g^2} - \frac{(\varepsilon y : \varepsilon w)(\varepsilon y : \varepsilon z)}{g^2}. \quad (4.23)$$

Si $\varepsilon z : \varepsilon y < 0$ y $\varepsilon w : \varepsilon y \geq 0$,

$$(M(\varepsilon y; \varepsilon z) - M(\varepsilon y; \varepsilon w)) : \varepsilon(z - w) = -\frac{(\varepsilon y : \varepsilon z)(\varepsilon y : \varepsilon w)}{g^2} + \frac{(\varepsilon y : \varepsilon w)^2}{g^2}. \quad (4.24)$$

Si $\varepsilon z : \varepsilon y < 0$ y $\varepsilon w : \varepsilon y < 0$,

$$(M(\varepsilon y; \varepsilon z) - M(\varepsilon y; \varepsilon w)) : \varepsilon(z - w) = 0, \quad \text{c.t.p. } x \in \Omega. \quad (4.25)$$

De acuerdo a las ecuaciones (4.22)-(4.25), tenemos que en cualquier caso,

$$(M(\varepsilon y; \varepsilon z) - M(\varepsilon y; \varepsilon w)) : \varepsilon(z - w) \geq 0, \quad \text{c.t.p. } x \in \Omega. \quad (4.26)$$

Ahora, si $|\varepsilon y| > g$, tenemos que $1 - \frac{g}{|\varepsilon y|} > 0$ y entonces

$$\left(1 - \frac{g}{|\varepsilon y|}\right) \varepsilon(z - w) : \varepsilon(z - w) + \frac{(\varepsilon y : \varepsilon(z - w))^2}{|\varepsilon y|^2} \geq 0. \quad (4.27)$$

Gracias a (4.26) y (4.27), tenemos que para todo $z, w \in Y$:

$$v (m'(\varepsilon y; \varepsilon z) - m'(\varepsilon y; \varepsilon w), \varepsilon(z - w)) \geq 0.$$

Entonces, para todo $z, w \in Y$

$$\begin{aligned} \langle T(z) - T(w), z - w \rangle_{Y', Y} &\geq \mu \int_{\Omega} \varepsilon(z - w) : \varepsilon(z - w) \\ &\geq \mu C \|z - w\|_Y^2, \end{aligned} \quad (4.28)$$

donde C es una constante positiva dada por la desigualdad de Korn [22, Teorema 1.10]. De la ecuación (4.28), concluimos que T es un operador monótono. Además, si escogemos $z \neq w$ en la misma ecuación, tenemos que T es estrictamente monótono.

Notemos que en la ecuación (4.28), para el caso particular $w = 0$, obtenemos que para todo $z \in Y$

$$\langle T(z), z \rangle_{Y', Y} \geq \mu C \|z\|_Y^2,$$

y entonces,

$$\lim_{\|z\|_Y \rightarrow \infty} \frac{\langle T(z), z \rangle_{Y', Y}}{\|z\|_Y} \geq \lim_{\|z\|_Y \rightarrow \infty} \mu C \|z\|_Y = +\infty,$$

por lo tanto, el operador T es coercivo.

Gracias al Teorema de Minty Browder [8, Teorema 2.7], la ecuación

$$\langle T(z), v \rangle_{Y', Y} = \langle l, v \rangle_{Y', Y}, \quad \forall v \in Y,$$

con l definido como

$$\langle l, v \rangle_{Y', Y} = \int_{\Omega} h \cdot v \, dx, \quad \forall v \in Y,$$

con $h \in L^2(\Omega)^N$, tiene una única solución $z \in Y$. □

TEOREMA 4.4 *El operador solución $S : U \rightarrow Y$ de la ecuación (3.7) es direccionalmente diferenciable, y su derivada direccional $\delta = S'(u; h) \in Y$ en $u \in U$ y en la dirección $h \in U$, está dada por la única solución de la ecuación (4.8), es decir, δ satisface la ecuación*

$$\mu \int_{\Omega} \varepsilon \delta : \varepsilon v \, dx + \nu \int_{\Omega} m'(\varepsilon y; \varepsilon \delta) : \varepsilon v \, dx = \int_{\Omega} h \cdot v \, dx, \quad \forall v \in Y,$$

donde $y = S(u)$.

Demostración. Notamos por y_t a la solución de la ecuación (3.7) asociada a $u + th$:

$$\mu \int_{\Omega} \varepsilon y_t : \varepsilon v \, dx + \nu \int_{\Omega} \max(0, |\varepsilon y_t| - g) \frac{\varepsilon y_t}{|\varepsilon y_t|} : \varepsilon v \, dx = \int_{\Omega} (u + th) \cdot v \, dx, \quad \forall v \in Y. \quad (4.29)$$

Restamos la ecuación (3.7) de la ecuación (4.29), con lo cual obtenemos:

$$\begin{aligned} \mu \int_{\Omega} \frac{\varepsilon(y_t - y)}{t} : \varepsilon v \, dx + \frac{\nu}{t} \int_{\Omega} \left(\max(0, |\varepsilon y_t| - g) \frac{\varepsilon y_t}{|\varepsilon y_t|} - \max(0, |\varepsilon y| - g) \frac{\varepsilon y}{|\varepsilon y|} \right) : \varepsilon v \, dx \\ = \int_{\Omega} h \cdot v \, dx, \quad \forall v \in Y. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Sea $\bar{z} \in Y$ la única solución de la ecuación (4.8) y sea $z_t := \frac{y_t - y}{t}$. Restando la ecuación (4.8) de la ecuación (4.30), obtenemos que

$$\mu \int_{\Omega} \varepsilon z_t : \varepsilon v + \nu \int_{\Omega} \frac{1}{t} (m(\varepsilon y_t) - m(\varepsilon y)) : \varepsilon v - \mu \int_{\Omega} \varepsilon \bar{z} : \varepsilon v - \nu \int_{\Omega} m'(\varepsilon y; \varepsilon \bar{z}) : \varepsilon v = 0 \quad (4.31)$$

para todo $v \in Y$. Ahora, reescribimos la ecuación anterior como

$$\begin{aligned} \mu \int_{\Omega} \varepsilon(z_t - \bar{z}) : \varepsilon v + \nu \int_{\Omega} \frac{1}{t} (m(\varepsilon y_t) - m(\varepsilon y + t\varepsilon \bar{z})) : \varepsilon v \\ + \nu \int_{\Omega} \left(\frac{m(\varepsilon y + t\varepsilon \bar{z}) - m(\varepsilon y)}{t} - m'(\varepsilon y; \varepsilon \bar{z}) \right) : \varepsilon v = 0, \quad \forall v \in Y. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Tomamos $v = z_t - \bar{z}$ con lo cual obtenemos:

$$\begin{aligned} \mu \int_{\Omega} \varepsilon(z_t - \bar{z}) : \varepsilon(z_t - \bar{z}) + \nu \int_{\Omega} \frac{1}{t^2} (m(\varepsilon y + t\varepsilon z_t) - m(\varepsilon y + t\varepsilon \bar{z})) : t\varepsilon(z_t - \bar{z}) \\ = -\nu \int_{\Omega} \left(\frac{m(\varepsilon y + t\varepsilon \bar{z}) - m(\varepsilon y)}{t} - m'(\varepsilon y; \varepsilon \bar{z}) \right) : \varepsilon(z_t - \bar{z}). \end{aligned} \quad (4.33)$$

De (4.1), tenemos que la función m es monótona, entonces,

$$(m(\varepsilon y + t\varepsilon z_t) - m(\varepsilon y + t\varepsilon \bar{z})) : t\varepsilon(z_t - \bar{z}) \geq 0.$$

En consecuencia, de la ecuación (4.33) se tiene que

$$\mu \|\varepsilon(z_t - \bar{z})\|_{L^2}^2 \leq -\nu \int_{\Omega} \left(\frac{m(\varepsilon y + t\varepsilon \bar{z}) - m(\varepsilon y)}{t} - m'(\varepsilon y; \varepsilon \bar{z}) \right) : \varepsilon(z_t - \bar{z}).$$

Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz en la ecuación anterior, tenemos que

$$\mu \|\varepsilon(z_t - \bar{z})\|_{L^2}^2 \leq \nu \left\| \frac{m(\varepsilon y + t\varepsilon \bar{z}) - m(\varepsilon y)}{t} - m'(\varepsilon y; \varepsilon \bar{z}) \right\|_{L^2} \|\varepsilon(z_t - \bar{z})\|_{L^2},$$

y esta ecuación equivale a

$$\mu \|\varepsilon(z_t - \bar{z})\|_{L^2} \leq \nu \left\| \frac{m(\varepsilon y + t\varepsilon \bar{z}) - m(\varepsilon y)}{t} - m'(\varepsilon y; \varepsilon \bar{z}) \right\|_{L^2}. \quad (4.34)$$

Ahora, usando la desigualdad de Korn en (4.34), tenemos que existe una constante $C > 0$ tal que

$$\mu C \|z_t - \bar{z}\|_Y \leq \nu \left\| \frac{m(\varepsilon y + t\varepsilon \bar{z}) - m(\varepsilon y)}{t} - m'(\varepsilon y; \varepsilon \bar{z}) \right\|_{L^2}. \quad (4.35)$$

Gracias a la diferenciabilidad direccional del operador $m : L^2(\Omega; \mathbb{R}^{N \times N}) \rightarrow L^2(\Omega; \mathbb{R}^{N \times N})$, en εy y en la dirección $\varepsilon \bar{z}$, dada por la ecuación (4.7), tenemos que si $t \rightarrow 0$,

$$\left\| \frac{m(\varepsilon y + t\varepsilon \bar{z}) - m(\varepsilon y)}{t} - m'(\varepsilon y; \varepsilon \bar{z}) \right\|_{L^2} \rightarrow 0.$$

Por lo tanto, de la ecuación (4.35), obtenemos que $\|z_t - \bar{z}\|_Y \rightarrow 0$, y entonces,

$$z_t \rightarrow \bar{z} \quad \text{en } Y.$$

□

Capítulo 5

Análisis del problema de control

En este capítulo analizaremos la existencia de soluciones para el problema (P) y obtendremos una condición de optimalidad primal para dicho problema. Además, obtendremos un sistema de optimalidad, correspondiente al concepto de estacionariedad débil. Finalmente, plantearemos un sistema de optimalidad relacionado a un concepto de estacionariedad más fuerte, el cual contiene información sobre los signos de las variables duales del sistema de optimalidad.

5.1. Existencia de soluciones

A continuación, establecemos la existencia de soluciones para el problema de control óptimo (P).

PROPOSICIÓN 5.1 *Existe una solución global para el problema de control óptimo (P).*

Demostración. Puesto que el funcional J está acotado inferiormente por 0, existe una sucesión $(y_n, u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $Y \times U$, con $y_n = S(u_n)$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(y_n, u_n) = \inf_{(y, u) \in Y \times U} J(y, u) := \hat{J}. \quad (5.1)$$

Ahora, supongamos que la sucesión $(y_n, u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ no es acotada, entonces si $n \rightarrow \infty$, tenemos que $\|(y_n, u_n)\|_{Y \times U} \rightarrow \infty$. En consecuencia, como

$$J(y_n, u_n) \geq \frac{\alpha}{2} \|u_n\|_{L^2(\Omega)^N}^2,$$

se sigue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(y_n, u_n) = \infty,$$

pero esto contradice (5.1). Por lo tanto, la sucesión $(y_n, u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada, es decir, existe una constante $C > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\|(y_n, u_n)\|_{Y \times U} \leq C. \quad (5.2)$$

Entonces, gracias a [2, Teorema 1.2.10], existe una subsucesión notada de la misma manera, y $\bar{y} \in Y$ y $\bar{u} \in U$ tales que

$$(y_n, u_n) \rightharpoonup (\bar{y}, \bar{u}) \quad \text{en } Y \times U. \quad (5.3)$$

Como la inyección $U \hookrightarrow Y'$ es compacta, tenemos que (5.3) implica que

$$u_n \rightarrow \bar{u} \quad \text{en } Y'. \quad (5.4)$$

Ahora, vemos que

$$\mu \int_{\Omega} \varepsilon(S(u_n) - S(\bar{u})) : \varepsilon v + \nu \int_{\Omega} (m(\varepsilon(S(u_n))) - m(\varepsilon S(\bar{u}))) : \varepsilon v = \langle u_n - \bar{u}, v \rangle_{Y', Y}, \quad (5.5)$$

para todo $v \in Y$. Tomando $v = S(u_n) - S(\bar{u})$ en (5.5), de la monotonía de la función m y la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se sigue que

$$\mu \|\varepsilon(S(u_n) - S(\bar{u}))\|_{L^2}^2 \leq \|u_n - \bar{u}\|_{Y'} \|S(u_n) - S(\bar{u})\|_Y.$$

Usando la desigualdad de Korn en esta ecuación, obtenemos que existe una constante $C > 0$ tal que

$$\mu C \|S(u_n) - S(\bar{u})\|_Y^2 \leq \|u_n - \bar{u}\|_{Y'} \|S(u_n) - S(\bar{u})\|_Y,$$

de donde,

$$\|S(u_n) - S(\bar{u})\|_Y \leq \frac{1}{\mu C} \|u_n - \bar{u}\|_{Y'}. \quad (5.6)$$

Si $n \rightarrow \infty$, gracias a (5.4) y (5.6), tenemos que

$$y_n \rightarrow S(\bar{u}), \quad \text{en } Y.$$

Como el límite débil de la sucesión y_n es único, tenemos que $\bar{y} = S(\bar{u})$. Ahora, como J es convexo y continuo respecto a las dos variables, es débilmente semicontinuo

inferiormente, es decir:

$$J(\bar{y}, \bar{u}) \leq \liminf_n J(y_n, u_n) = \hat{J}.$$

De esta manera, (\bar{y}, \bar{u}) es un óptimo global del problema (P). □

5.2. Condiciones de optimalidad de primer orden

En la siguiente proposición obtenemos una condición de optimalidad que se deduce de la diferenciabilidad direccional del operador control-a-estado S . De acuerdo a los conceptos de las condiciones de optimalidad para MPECs, llamaremos a este tipo de condición de optimalidad, estacionariedad de Bouligand.

PROPOSICIÓN 5.2 *Sea $(\bar{y}, \bar{u}) \in Y \times U$ un óptimo local del problema (P), entonces*

$$J_y(\bar{y}, \bar{u})S'(\bar{u}; h) + J_u(\bar{y}, \bar{u})h \geq 0, \quad \forall h \in U. \quad (5.7)$$

Demostración. Gracias a la Proposición 4.4 y [18, Lema 3.9], el funcional $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ definido por $f(u) = J(S(u), u)$, para todo $u \in U$, es direccionalmente diferenciable en \bar{u} y su derivada direccional está dada por

$$f'(\bar{u}; h) = J'(\bar{y}, \bar{u})(S'(\bar{u}; h), h) = J_y(\bar{y}, \bar{u})S'(\bar{u}; h) + J_u(\bar{y}, \bar{u})h, \quad \forall h \in U.$$

Como \bar{u} es óptimo local del problema

$$\min_{u \in U} f(u) \quad (5.8)$$

y h es una dirección admisible, tenemos que $f'(\bar{u}; h) \geq 0$, es decir,

$$J_y(\bar{y}, \bar{u})S'(\bar{u}; h) + J_u(\bar{y}, \bar{u})h \geq 0, \quad \forall h \in U. \quad \square$$

La ecuación (5.7), se escribe, en el caso de nuestro problema, como

$$(\bar{y} - z_d, S'(\bar{u}; h)) + \alpha(\bar{u}, h) \geq 0, \quad \forall h \in U.$$

5.2.1. Regularización y paso al límite

Estamos interesados en la derivación de condiciones de optimalidad necesarias de primer orden que contengan variables duales. Puesto que el operador solución S es no-suave, gracias a la presencia de la no linealidad m , no se puede usar el cálculo adjunto, en el cual se requiere la existencia de la derivada de Gâteaux del operador S . Entonces, usualmente se usan métodos de regularización. A continuación, utilizaremos dicho método para obtener un sistema de optimalidad para el problema (P).

Sea $(\bar{y}, \bar{u}) \in Y \times U$ un minimizador local arbitrario del problema (P). Usamos una técnica usada, por ejemplo, en [20] o [21]. Definimos el siguiente problema de control óptimo regularizado:

$$\begin{aligned} \min_{(y,u) \in Y \times U} K(y,u) &= \frac{1}{2} \|y - z_d\|_{L^2(\Omega)^N}^2 + \frac{\alpha}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)^N}^2 + \frac{1}{2} \|u - \bar{u}\|_{L^2(\Omega)^N}^2 \\ \text{sujeto a} & \\ \mu \int_{\Omega} \varepsilon y : \varepsilon v \, dx + \nu \int_{\Omega} m_{\delta}(\varepsilon y) : \varepsilon v \, dx &= \int_{\Omega} u \cdot v \, dx, \quad \text{para todo } v \in Y, \end{aligned} \tag{P_{\delta}}$$

donde $\delta > 0$ es el parámetro de la regularización y m_{δ} es una versión regularizada de la función m que satisface las siguientes hipótesis:

1. $m_{\delta} \in C^1(\mathbb{R}^{N \times N}, \mathbb{R}^{N \times N})$, para todo $\delta > 0$.
2. Para todo $\tau \in \mathbb{R}^{N \times N}$

$$|m_{\delta}(\tau) - m(\tau)| \rightarrow 0, \quad \text{si } \delta \rightarrow 0. \tag{5.9}$$

3. Existe una constante $c > 0$ tal que para todo $\tau, \varepsilon \in \mathbb{R}^{N \times N}$,

$$(m_{\delta}(\tau) - m_{\delta}(\varepsilon) : \tau - \varepsilon) \geq c |\tau - \varepsilon|^2. \tag{5.10}$$

4. Existe una constante $C > 0$ tal que para todo $\tau, \varepsilon \in \mathbb{R}^{N \times N}$

$$|m_{\delta}(\tau) - m_{\delta}(\varepsilon)| \leq C |\tau - \varepsilon|. \tag{5.11}$$

5. $m_{\delta}(0) = 0$

6. Existe una constante $C > 0$, que no depende de ε , tal que $|m'_{\delta}(\varepsilon)h| \leq C|h|$, para todo $\varepsilon, h \in \mathbb{R}^{N \times N}$

7. Para todo $\varepsilon \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $\tau \in \mathbb{R}^{N \times N}$ y $h \in \mathbb{R}^{N \times N}$ se tiene que

$$(m'_\delta(\varepsilon)\tau - m'_\delta(\varepsilon)h) : (\tau - h) \geq 0.$$

PROPOSICIÓN 5.3 Para todo $u \in L^2(\Omega)^N$ existe una única solución $y_\delta \in Y$ para la ecuación de estado del problema (P_δ) :

$$\mu \int_{\Omega} \varepsilon y_\delta : \varepsilon v \, dx + \nu \int_{\Omega} m_\delta(\varepsilon y_\delta) : \varepsilon v \, dx = \int_{\Omega} u \cdot v \, dx, \quad \forall v \in Y. \quad (5.12)$$

Además, el operador solución de esta ecuación, $S_\delta : L^2(\Omega)^N \rightarrow Y$, es débilmente continuo y Gâteaux diferenciable. Su derivada en $u \in L^2(\Omega)^N$ y en la dirección $h \in L^2(\Omega)^N$ está dada por la única solución $w \in Y$ de la ecuación:

$$\mu \int_{\Omega} \varepsilon w : \varepsilon v \, dx + \nu \int_{\Omega} m'_\delta(\varepsilon y_\delta) \varepsilon w : \varepsilon v \, dx = \int_{\Omega} h \cdot v \, dx, \quad \forall v \in Y, \quad (5.13)$$

donde $y_\delta = S_\delta(u)$.

Demostración. Para probar la existencia de soluciones para la ecuación (5.12), definimos el operador $A : Y \rightarrow Y'$, por

$$\langle A(y), v \rangle_{Y', Y} = \mu(\varepsilon y, v) + \nu(m_\delta(\varepsilon y), \varepsilon v) \quad \forall v \in Y.$$

Mostraremos que para todo $l \in Y'$, la ecuación $\langle A(y), v \rangle_{Y', Y} = \langle l, v \rangle_{Y', Y}$ tiene una solución única.

Primero, mostraremos que el operador A es hemicontinuo, es decir que la función $t \mapsto \langle A(y), v \rangle_{Y', Y}$, definida para todo $t \in [0, 1]$, es continua. Sea $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $[0, 1]$, tal que $t_k \rightarrow t$, si $k \rightarrow \infty$, para algún $t \in [0, 1]$. Dados $y, z \in Y$ arbitrarios, debemos probar que

$$\mu(\varepsilon y + t_k \varepsilon z, \varepsilon v) + \nu(m_\delta(\varepsilon y + t_k \varepsilon z), \varepsilon v) \rightarrow \mu(\varepsilon y + t \varepsilon z, \varepsilon v) + \nu(m_\delta(\varepsilon y + t \varepsilon z), \varepsilon v),$$

para todo $v \in Y$. Vemos que si $k \rightarrow \infty$,

$$\mu(\varepsilon y + t_k \varepsilon z, \varepsilon v) \rightarrow \mu(\varepsilon y + t \varepsilon z, \varepsilon v), \quad (5.14)$$

pues el operador asociado a la forma $(\varepsilon y, \cdot)$ es lineal y acotado. Por otro lado, por la

hipótesis 1, tenemos que

$$m_\delta(\varepsilon y(x) + t_k z(x)) : \varepsilon v(x) \rightarrow m_\delta(\varepsilon y(x) + t z(x)) : \varepsilon v(x), \quad \text{c.t.p. } x \in \Omega,$$

si $k \rightarrow \infty$. Además, de la Lipschitz continuidad de m_δ , dada por la ecuación (5.11), obtenemos

$$\begin{aligned} |m_\delta(\varepsilon y + t_k \varepsilon z) : \varepsilon v| &\leq |m_\delta(\varepsilon y + t_k \varepsilon z) - m_\delta(\varepsilon y) + m_\delta(\varepsilon y) - m_\delta(0)| |\varepsilon v| \\ &\leq (|m_\delta(\varepsilon y + t_k \varepsilon z) - m_\delta(\varepsilon y)| + |m_\delta(\varepsilon y) - m_\delta(0)|) |\varepsilon v| \\ &\leq (|\varepsilon y + t_k \varepsilon z - \varepsilon y| + |\varepsilon y - 0|) |\varepsilon v| \\ &\leq (|\varepsilon z| + |\varepsilon y|) |\varepsilon v|, \end{aligned}$$

c.t.p. $x \in \Omega$. Como la función $x \mapsto (|\varepsilon z(x)| + |\varepsilon y(x)|) |\varepsilon v(x)|$ pertenece a $L^1(\Omega)$, por el teorema de convergencia dominada de Lebesgue, tenemos que

$$v(m_\delta(\varepsilon y + t_k z), \varepsilon v) \rightarrow v(m_\delta(\varepsilon y + t z), \varepsilon v). \quad (5.15)$$

En consecuencia, de (5.14) y (5.15), obtenemos que el operador A es hemicontinuo.

Ahora, probaremos que A es monótono. Sean $y, z \in Y$, tenemos que

$$\begin{aligned} \langle A(y) - A(z), y - z \rangle_{Y', Y} &= \mu (\varepsilon(y - z), \varepsilon(y - z)) + v (m_\delta(\varepsilon y) - m_\delta(\varepsilon z), \varepsilon y - \varepsilon z) \\ &\geq \mu \|\varepsilon(y - z)\|_{L^2}^2 + v c \|\varepsilon(y - z)\|_{L^2}^2, \end{aligned}$$

donde c es la constante positiva de (5.10). Gracias a la desigualdad de Korn, obtenemos que existe una constante positiva C tal que

$$\langle A(y) - A(z), y - z \rangle_{Y', Y} \geq C(\mu + v c) \|y - z\|_Y^2. \quad (5.16)$$

Esta ecuación implica que A es monótono. Adicionalmente, si tomamos $z = 0$ en (5.16), tenemos que

$$\frac{\langle A(y), y \rangle_{Y', Y}}{\|y\|_Y} \geq C(\mu + v c) \|y\|_Y,$$

por lo tanto

$$\lim_{\|y\|_Y \rightarrow \infty} \frac{\langle A(y), y \rangle_{Y', Y}}{\|y\|_Y} = \infty.$$

Concluimos que el operador A es coercivo. Entonces, por el teorema de Minty-Browder, la ecuación $A(y) = l$, tiene una solución. Además, tomando $y \neq z$ en (5.16), tenemos que A es estrictamente monótono. Como resultado, para cada $l \in Y'$,

la ecuación $A(y) = l$, tiene una solución única. Tomando $\langle l, v \rangle_{Y', Y} = (u, v)$, para todo $v \in Y$, concluimos que la ecuación (5.12), tiene una única solución para cada $u \in L^2(\Omega)^N$.

De manera similar a la demostración de la Proposición 5.1, probaremos que el operador S_δ es débilmente continuo. Sea $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $L^2(\Omega)^N$ que converge débilmente hacia $\tilde{u} \in L^2(\Omega)^N$. Definimos la sucesión $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ por $y_k := S_\delta(u_k)$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Entonces, se verifica que

$$\mu \int_{\Omega} \varepsilon y_k : \varepsilon v \, dx + \nu \int_{\Omega} m_\delta(\varepsilon y_k) : \varepsilon v \, dx = \int_{\Omega} u_k \cdot v \, dx, \quad \forall v \in Y,$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Tomando $v = y_k$ en esta ecuación, gracias a (5.10), obtenemos que

$$\mu \| \varepsilon y_k \|_{L^2}^2 + \nu c \| \varepsilon y_k \|_{L^2}^2 \leq \| u_k \|_{L^2(\Omega)^N} \| y_k \|_{L^2(\Omega)^N}.$$

Usando la desigualdad de Korn, y la inyección $Y \hookrightarrow L^2(\Omega)^N$ tenemos que existen constantes positivas C_1 y C_2 tales que

$$(\mu + \nu c) C_1 \| y_k \|_Y^2 \leq C_2 \| u_k \|_{L^2(\Omega)^N} \| y_k \|_Y.$$

Esta ecuación equivale a

$$\| y_k \|_Y \leq \frac{C_2}{(\mu + \nu c) C_1} \| u_k \|_{L^2(\Omega)^N}. \quad (5.17)$$

Puesto que la sucesión $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es débilmente convergente, es una sucesión acotada. Entonces, por (5.17), la sucesión $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ también es acotada. Puesto que Y es reflexivo, existe una subsucesión de $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$, notada de la misma manera, que converge débilmente en Y , hacia $\tilde{y} \in Y$:

$$y_k \rightharpoonup \tilde{y} \quad \text{en } Y.$$

Como la inyección $L^2(\Omega)^N \hookrightarrow Y'$ es compacta y $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge débilmente en $L^2(\Omega)^N$, tenemos que

$$u_k \rightarrow \tilde{u}, \quad \text{en } Y'. \quad (5.18)$$

Por otra parte, de (5.22), que será demostrado más adelante en la Proposición 5.5, tenemos que

$$\| S_\delta(u_k) - S_\delta(\tilde{u}) \|_Y \leq C \| u_k - \tilde{u} \|_{Y'},$$

donde C es una constante positiva. De esta ecuación y (5.18), tenemos que $S_\delta(u_k) \rightarrow S_\delta(\tilde{u})$ en Y , cuando $k \rightarrow \infty$. Como el límite débil es único, concluimos que $\tilde{y} = S_\delta(\tilde{u})$.

Por lo tanto, S_δ es débilmente continuo.

Ahora, mostraremos que la ecuación (5.13) tiene una solución única $w \in Y$, para todo $h \in L^2(\Omega)^N$. Para ver esto, definimos una forma bilineal $a : Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}$, por

$$a(w, v) = \mu(\varepsilon w, \varepsilon v) + \nu m'_\delta(\varepsilon y) \varepsilon w, \varepsilon v, \quad \forall (w, v) \in Y \times Y.$$

Entonces, la ecuación (5.13), puede escribirse como

$$a(w, v) = (h, v), \quad \forall v \in Y.$$

Vemos que la forma bilineal a es continua, gracias a la hipótesis 6. En efecto, sea $(w, v) \in Y \times Y$

$$\begin{aligned} |a(w, v)| &= |\mu(\varepsilon w, \varepsilon v) + \nu(m'_\delta(\varepsilon y) \varepsilon w, \varepsilon v)| \\ &\leq \mu |(\varepsilon w, \varepsilon v)| + \nu |(m'_\delta(\varepsilon y) \varepsilon w, \varepsilon v)| \\ &\leq \mu |\varepsilon w| |\varepsilon v| + \nu C |\varepsilon w| |\varepsilon v| \\ &\leq (\mu + \nu C) \|w\|_Y \|v\|_Y. \end{aligned}$$

Además, la forma bilineal a es coerciva pues, si $w \in Y$ es arbitrario, gracias a la hipótesis 7, tenemos que

$$\begin{aligned} a(w, w) &= \mu(\varepsilon w, \varepsilon w) + \nu(m'_\delta(\varepsilon y) \varepsilon w, \varepsilon w) \\ &\geq \mu \|\varepsilon w\|_{L^2}^2 \\ &\geq \mu C_1 \|w\|_Y^2, \end{aligned}$$

donde C_1 es una constante positiva dada por la desigualdad de Korn. Puesto que la forma bilineal a es continua y coerciva, y el lado derecho de (5.13) es una función lineal y acotada sobre Y , concluimos que (5.13) tiene una solución única, gracias al teorema de Lax-Milgram [4, Corolario 5.8].

Ahora, demostraremos que $S_\delta : L^2(\Omega)^N \rightarrow Y$ es Gâteaux diferenciable. Sean $u \in L^2(\Omega)^N$, $h \in L^2(\Omega)^N$ y $t > 0$ arbitrarios. Sean $y_{u+th} = S_\delta(u + th)$ y $y_u = S_\delta(u)$, entonces, para todo $v \in Y$, tenemos que

$$\mu \int_{\Omega} (\varepsilon y_{u+th} - \varepsilon y_u) : \varepsilon v + \nu \int_{\Omega} (m_\delta(\varepsilon y_{u+th}) - m_\delta(\varepsilon y_u)) : \varepsilon v = (th, v).$$

Restamos (5.13) de esta ecuación, con lo cual obtenemos:

$$\mu \int_{\Omega} \left(\frac{\varepsilon(y_{u+th} - y_u)}{t} - \varepsilon w \right) : \varepsilon v = -\nu \int_{\Omega} \left(\frac{m_{\delta}(\varepsilon y_{u+th}) - m_{\delta}(\varepsilon y_u)}{t} - m'_{\delta}(\varepsilon y_u) \varepsilon w \right) : \varepsilon v$$

para todo $v \in Y$. Notemos $w_t := \frac{y_{u+th} - y_u}{t}$. Con esto, $y_{u+th} = y_u + tw_t$. Reescribimos la ecuación anterior como

$$\begin{aligned} \mu(\varepsilon(w_t - w), \varepsilon v) + \nu \left(\frac{m_{\delta}(\varepsilon y_u + t\varepsilon w_t) - m_{\delta}(\varepsilon y_u + t\varepsilon w)}{t}, \varepsilon v \right) \\ + \nu \left(\frac{m_{\delta}(\varepsilon y_u + t\varepsilon w) - m_{\delta}(\varepsilon y_u)}{t} - m'_{\delta}(\varepsilon y_u) \varepsilon w, \varepsilon v \right) = 0, \quad \forall v \in Y. \end{aligned}$$

Tomando $v = w_t - w$ en esta ecuación, obtenemos

$$\begin{aligned} \mu \|\varepsilon w_t - w\|_{L^2}^2 + \frac{\nu}{t^2} (m_{\delta}(\varepsilon y_u + t\varepsilon w_t) - m_{\delta}(\varepsilon y_u + t\varepsilon w), t\varepsilon(w_t - w)) \\ \leq \nu \left\| \frac{m_{\delta}(\varepsilon y_u + t\varepsilon w) - m_{\delta}(\varepsilon y_u)}{t} - m'_{\delta}(\varepsilon y_u) \varepsilon w \right\|_{L^2} \|\varepsilon(w_t - w)\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Gracias a (5.10), esta ecuación se transforma en

$$\|\varepsilon w_t - w\|_{L^2}^2 \leq \frac{\nu}{\mu + \nu C} \left\| \frac{m_{\delta}(\varepsilon y_u + t\varepsilon w) - m_{\delta}(\varepsilon y_u)}{t} - m'_{\delta}(\varepsilon y_u) \varepsilon w \right\|_{L^2} \|\varepsilon(w_t - w)\|_{L^2},$$

donde $C > 0$. Debido a desigualdad de Korn tenemos que

$$C_1 \|w_t - w\|_Y \leq \frac{\nu}{\mu + \nu C} \left\| \frac{m_{\delta}(\varepsilon y_u + t\varepsilon w) - m_{\delta}(\varepsilon y_u)}{t} - m'_{\delta}(\varepsilon y_u) \varepsilon w \right\|_{L^2}, \quad (5.19)$$

donde C_1 es una constante positiva. Como el operador de Nemytskii asociado a m_{δ} es Gâteaux diferenciable de $L^2(\Omega, \mathbb{R}^{N \times N})$ en $L^2(\Omega, \mathbb{R}^{N \times N})$ [16, Teorema 8], tenemos que si $t \rightarrow 0$, el lado derecho de (5.19) converge a cero, y por lo tanto,

$$w_t \rightarrow w \quad \text{en } Y.$$

□

Ahora estudiamos la convergencia del operador S_{δ} hacia S .

PROPOSICIÓN 5.4 *Sea $u \in U$ arbitrario, entonces, si $\delta \rightarrow 0$*

$$S_{\delta}(u) \rightarrow S(u), \quad \text{en } Y. \quad (5.20)$$

Demostración. Sea $u \in U$ y definamos $y := S(u)$ y $y_\delta := S_\delta(u)$. Restando (5.12) de (3.7), tenemos que

$$\mu \int_{\Omega} \varepsilon(y - y_\delta) : \varepsilon v \, dx + \nu \int_{\Omega} (\mathfrak{m}(\varepsilon y) - \mathfrak{m}_\delta(\varepsilon y_\delta)) : \varepsilon v \, dx = 0 \quad \forall v \in Y,$$

lo cual equivale a

$$\begin{aligned} \mu \int_{\Omega} \varepsilon(y - y_\delta) : \varepsilon v \, dx + \nu \int_{\Omega} (\mathfrak{m}(\varepsilon y) - \mathfrak{m}_\delta(\varepsilon y)) : \varepsilon v \, dx + \\ \nu \int_{\Omega} (\mathfrak{m}_\delta(\varepsilon y) - \mathfrak{m}_\delta(\varepsilon y_\delta)) : \varepsilon v \, dx = 0 \quad \forall v \in Y. \end{aligned}$$

Tomamos $v = y - y_\delta$ en esta ecuación, con lo cual obtenemos:

$$\begin{aligned} \mu \|\varepsilon(y - y_\delta)\|_{L^2}^2 + \nu \int_{\Omega} (\mathfrak{m}_\delta(\varepsilon y) - \mathfrak{m}_\delta(\varepsilon y_\delta)) : \varepsilon(y - y_\delta) \, dx = \\ - \nu \int_{\Omega} (\mathfrak{m}(\varepsilon y) - \mathfrak{m}_\delta(\varepsilon y)) : \varepsilon(y - y_\delta) \, dx. \end{aligned}$$

Gracias a la hipótesis (5.10) y la desigualdad de Cauchy-Schwarz, tenemos que

$$(\mu + \nu) \|\varepsilon(y - y_\delta)\|_{L^2}^2 \leq \nu \|\mathfrak{m}(\varepsilon y) - \mathfrak{m}_\delta(\varepsilon y)\|_{L^2} \|\varepsilon(y - y_\delta)\|_{L^2},$$

de donde,

$$\|\varepsilon(y - y_\delta)\|_{L^2} \leq \frac{\nu}{\mu + \nu} \|\mathfrak{m}(\varepsilon y) - \mathfrak{m}_\delta(\varepsilon y)\|_{L^2}.$$

Ahora, usando la desigualdad de Korn [22, Teorema 1.10], sabemos que existe una constante positiva C tal que

$$C \|y - y_\delta\|_Y \leq \frac{\nu}{\mu + \nu} \|\mathfrak{m}(\varepsilon y) - \mathfrak{m}_\delta(\varepsilon y)\|_{L^2}. \quad (5.21)$$

Por otro lado, de la hipótesis (5.9),

$$|\mathfrak{m}(\varepsilon y) - \mathfrak{m}_\delta(\varepsilon y)| \rightarrow 0, \quad \text{c.t.p. } x \in \Omega.$$

Además, de (5.11) y la hipótesis 5, tenemos que

$$\begin{aligned} |\mathfrak{m}(\varepsilon y) - \mathfrak{m}_\delta(\varepsilon y)| &\leq |\mathfrak{m}(\varepsilon y) - \mathfrak{m}(0)| + |\mathfrak{m}(0) - \mathfrak{m}_\delta(0)| + |\mathfrak{m}_\delta(0) - \mathfrak{m}_\delta(\varepsilon y)| \\ &\leq 2|\varepsilon y|, \end{aligned}$$

para casi todo $x \in \Omega$. Por lo tanto, del teorema de convergencia dominada de Le-

besgue, tenemos que

$$\|m(\varepsilon y) - m_\delta(\varepsilon y)\|_{L^2} \rightarrow 0.$$

Finalmente, esta ecuación junto a (5.21), implica (5.20). \square

PROPOSICIÓN 5.5 Sean $u_1, u_2 \in Y'$. Entonces,

$$\|S_\delta(u_1) - S_\delta(u_2)\|_Y \leq C \|u_1 - u_2\|_{Y'}, \quad (5.22)$$

donde C es una constante positiva.

Demostración. Sean $w_\delta := S_\delta(u_1)$, $z_\delta := S_\delta(u_2)$. Restamos las ecuaciones satisfechas por w_δ y z_δ :

$$\mu \int_{\Omega} \varepsilon(w_\delta - z_\delta) : \varepsilon v + \nu \int_{\Omega} (m_\delta(\varepsilon w_\delta) - m_\delta(\varepsilon z_\delta)) : \varepsilon v = \langle u_1 - u_2, v \rangle_{Y', Y}, \quad \forall v \in Y.$$

Tomando $v = w_\delta - z_\delta$ en esta ecuación y usando la monotonía de la función m_δ tenemos que

$$\mu \|\varepsilon(w_\delta - z_\delta)\|^2 \leq \langle u_1 - u_2, w_\delta - z_\delta \rangle_{Y', Y}.$$

Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la desigualdad de Korn en la ecuación anterior tenemos que

$$\mu C_1 \|w_\delta - z_\delta\|_Y^2 \leq \|u_1 - u_2\|_{Y'} \|w_\delta - z_\delta\|_Y,$$

donde C_1 es una constante positiva. De aquí, concluimos que

$$\|S_\delta(u_1) - S_\delta(u_2)\|_Y \leq \frac{C_2}{\mu C_1} \|u_1 - u_2\|_{Y'}.$$

\square

LEMA 5.6 Sea $(u_\delta)_{\delta>0}$ una sucesión en U tal que $u_\delta \rightharpoonup u$ en U , entonces $S_\delta(u_\delta) \rightarrow S(u)$ en Y , si $\delta \rightarrow 0$.

Demostración. Usando la desigualdad triangular tenemos que

$$\|S_\delta(u_\delta) - S(u)\|_Y \leq \|S_\delta(u_\delta) - S_\delta(u)\|_Y + \|S_\delta(u) - S(u)\|_Y.$$

Ahora, de la Proposición 5.5 deducimos que

$$\|S_\delta(u_\delta) - S(u)\|_Y \leq L \|u_\delta - u\|_{Y'} + \|S_\delta(u) - S(u)\|_Y,$$

donde $L > 0$ es una constante. Como $U \hookrightarrow Y'$ es compacta, $u_\delta \rightarrow u$ en Y' , cuando $\delta \rightarrow 0$. Entonces, por (5.20) concluimos que

$$S_\delta(u_\delta) \rightarrow S(u) \quad \text{en } Y,$$

si $\delta \rightarrow 0$. □

En la siguiente proposición establecemos la existencia de soluciones para el problema de control óptimo regularizado (P_δ).

PROPOSICIÓN 5.7 *Sea $(\bar{y}, \bar{u}) \in Y \times U$ un minimizador local arbitrario del problema (P). Existe una solución global para el problema de control óptimo (P_δ).*

Demostración. Puesto que el funcional K es acotado por abajo, por cero, existe una sucesión $(y_k, u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ en $Y \times U$ tal que

$$K(y_k, u_k) \rightarrow \min_{(y,u) \in Y \times U} K(y, u) =: \hat{K}.$$

La sucesión $(y_k, u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es acotada. En efecto, supongamos que no lo es, entonces,

$$\|(y_k, u_k)\| \rightarrow \infty, \tag{5.23}$$

si $k \rightarrow \infty$. Notemos que por la estructura del funcional K ,

$$\frac{\alpha}{2} \|u_k\|_{L^2(\Omega)^N} \leq K(y_k, u_k), \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{5.24}$$

De (5.23) y (5.24), concluimos que $K(y_k, u_k) \rightarrow \infty$, si $k \rightarrow \infty$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $(y_k, u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es acotada. Así, existen una subsucesión, notada de la misma forma, $\hat{y} \in Y$ y $\hat{u} \in U$, tales que

$$\begin{aligned} y_k &\rightharpoonup \hat{y} \quad \text{en } Y \\ u_k &\rightharpoonup \hat{u} \quad \text{en } U. \end{aligned}$$

Como la inyección $U \hookrightarrow Y'$ es compacta, tenemos que

$$u_k \rightarrow \hat{u} \quad \text{en } Y'.$$

De (5.22), tenemos que

$$y_k = S_\delta(u_k) \rightarrow S_\delta(\hat{u}).$$

El límite débil de la sucesión $(y_k)_k$ es único, entonces, $\hat{y} = S_\delta(\hat{u})$. Además, el funcional K es convexo y continuo, y por lo tanto, débilmente semicontinuo inferiormente. En consecuencia,

$$K(\hat{y}, \hat{u}) \leq \liminf_k K(y_k, u_k) = \hat{K}.$$

Por lo tanto, (\hat{y}, \hat{u}) es un mínimo global de (P_δ) . \square

TEOREMA 5.8 Sean $\bar{u} \in U$ una solución local del problema (5.8) y $(y_\delta, u_\delta) \in Y \times U$ una solución local de (P_δ) y sea $p_\delta \in Y$ el estado adjunto asociado. Entonces, $u_\delta, y_\delta, p_\delta$ satisfacen el siguiente sistema de optimalidad:

$$\mu \int_{\Omega} \varepsilon y_\delta : \varepsilon v \, dx + \nu \int_{\Omega} m_\delta(\varepsilon y_\delta) : \varepsilon v \, dx = \int_{\Omega} u_\delta \cdot v \, dx, \quad \forall v \in Y \quad (5.25)$$

$$\mu \int_{\Omega} \varepsilon p_\delta : \varepsilon v \, dx + \nu \int_{\Omega} [m'_\delta(\varepsilon y_\delta)]^* \varepsilon p_\delta : \varepsilon v \, dx = \int_{\Omega} (y_\delta - z_d) \cdot v \, dx, \quad \forall v \in Y \quad (5.26)$$

$$-p_\delta = (\alpha + 1)u_\delta - \bar{u}, \quad \text{c.t.p. } x \in \Omega. \quad (5.27)$$

Demostración. Para todo $u \in U$ definamos el funcional

$$j_\delta(u) = \frac{1}{2} \|S_\delta(u) - z_d\|_{L^2(\Omega)^N}^2 + \frac{\alpha}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)^N}^2 + \frac{1}{2} \|u - \bar{u}\|_{L^2(\Omega)^N}^2.$$

Notemos que u_δ es una solución local del problema

$$\min_{u \in U} j_\delta(u). \quad (5.28)$$

Por la regla de la cadena, tenemos que j_δ es Gâteaux diferenciable y su derivada en u_δ y en dirección $h \in U$ está dada por

$$\begin{aligned} j'_\delta(u_\delta)h &= J_y(y_\delta, u_\delta)S'_\delta(u_\delta; h) + J_u(y_\delta, u_\delta)h + (u_\delta - \bar{u}, h) \\ &= (y_\delta - z_d, S'_\delta(u_\delta; h)) + \alpha(u_\delta, h) + (u_\delta - \bar{u}, h). \end{aligned} \quad (5.29)$$

Para todo $z \in Y'$ la ecuación

$$\mu \int_{\Omega} \varepsilon p_\delta : \varepsilon v \, dx + \nu \int_{\Omega} [m'_\delta(\varepsilon y_\delta)]^* \varepsilon p_\delta : \varepsilon v \, dx = \langle z, v \rangle, \quad \forall v \in Y$$

tiene una única solución. Entonces, la ecuación (5.26), tiene una única solución $p_\delta \in (Y')' = Y$. Reemplazando, la ecuación (5.26) en (5.29) tenemos que

$$j'_\delta(u_\delta)h = \mu(\varepsilon p_\delta, \varepsilon S'_\delta(u_\delta; h)) + \nu([m'_\delta(\varepsilon y_\delta)]^* \varepsilon p_\delta, \varepsilon S'_\delta(u_\delta; h)) + \alpha(u_\delta, h) + (u_\delta - \bar{u}, h)$$

$$= \mu(\varepsilon p_\delta, \varepsilon S'_\delta(u_\delta; h)) + \nu(\varepsilon p_\delta, m'_\delta(\varepsilon y_\delta) \varepsilon S'_\delta(u_\delta; h)) + \alpha(u_\delta, h) + (u_\delta - \bar{u}, h). \quad (5.30)$$

Ahora, la ecuación (5.25) puede ser escrita como $e(y_\delta, u_\delta) = 0$, donde $e : Y \times U \rightarrow Y'$ está dado por:

$$\langle e(y_\delta, u_\delta), v \rangle_{Y', Y} = \mu(\varepsilon y_\delta, \varepsilon v) + \nu(m'_\delta(\varepsilon y_\delta), \varepsilon v) - (u_\delta, v) = 0, \quad \forall v \in Y. \quad (5.31)$$

Como $y_\delta = S_\delta(u_\delta)$, podemos derivar la ecuación anterior respecto a u :

$$\begin{aligned} 0 &= \langle e_y(y_\delta, u_\delta) S'_\delta(u_\delta; h), v \rangle_{Y', Y} + \langle e_u(y_\delta, u_\delta) h, v \rangle_{Y', Y} \\ &= \mu(\varepsilon S'_\delta(u_\delta; h), \varepsilon v) + \nu(m'_\delta(\varepsilon y_\delta) \varepsilon S'_\delta(u_\delta; h), \varepsilon v) - (h, v). \end{aligned}$$

Entonces,

$$\mu(\varepsilon S'_\delta(u_\delta; h), \varepsilon v) + \nu(m'_\delta(\varepsilon y_\delta) \varepsilon S'_\delta(u_\delta; h), \varepsilon v) = (h, v).$$

Reemplazando esta ecuación, con $v = p_\delta$, en (5.30), tenemos que

$$j'_\delta(u_\delta)h = (p_\delta, h) + \alpha(u_\delta, h) + (u_\delta - \bar{u}, h), \quad \forall h \in U. \quad (5.32)$$

Debido a que u_δ es mínimo local del problema (5.28), tenemos que $j'_\delta(u_\delta)h = 0$, para todo $h \in U$. De esta manera, de (5.32), deducimos la ecuación (5.27). \square

PROPOSICIÓN 5.9 *Sea $\bar{u} \in U$ un minimizador local del problema reducido asociado al problema (P). Entonces, existe una sucesión $(u_\delta)_{\delta>0}$ de minimizadores locales del problema (P_δ) tal que*

$$u_\delta \rightarrow \bar{u} \quad \text{en } U, \quad (5.33)$$

si $\delta \rightarrow 0$. Además,

$$S_\delta(u_\delta) \rightarrow S(\bar{u}) \quad \text{en } Y. \quad (5.34)$$

Demostración. Sea $B(\bar{u}, r) := \overline{B_U(\bar{u}, r)}$ la vecindad donde \bar{u} es óptimo local, es decir:

$$f(\bar{u}) \leq f(u), \quad \forall u \in B(\bar{u}, r),$$

donde f es el funcional objetivo reducido del problema (P), definido en la demostración de la Proposición 5.2. Consideremos el siguiente problema de control óptimo

auxiliar:

$$\begin{aligned} & \min_{u \in U} j_\delta(u) \\ & \text{s.a.} \\ & u \in B(\bar{u}, r) \end{aligned} \tag{5.35}$$

La existencia de minimizadores globales para el problema (5.35) puede ser probada de manera similar a la demostración de la Proposición 5.1. Sea u_δ un minimizador global de (5.35). Como para todo $\delta > 0$, $u_\delta \in B(\bar{u}, r)$, existe una subsucesión, que denotaremos por el mismo símbolo, que converge débilmente a un elemento \hat{u} :

$$u_\delta \rightharpoonup \hat{u} \quad \text{en } U. \tag{5.36}$$

Puesto que \bar{u} es factible para el problema (5.35), tenemos que

$$J(S_\delta(u_\delta), u_\delta) \leq j_\delta(u_\delta) \leq j_\delta(\bar{u}) = J(S_\delta(\bar{u}), \bar{u}). \tag{5.37}$$

Por la Proposición 5.4, tenemos que $S_\delta(\bar{u}) \rightarrow S(\bar{u})$, si $\delta \rightarrow 0$. Entonces, como J es continuo, tenemos que

$$J(S_\delta(\bar{u}), \bar{u}) \rightarrow J(S(\bar{u}), \bar{u}) = f(\bar{u}),$$

si $\delta \rightarrow 0$. Entonces, de la ecuación (5.37), obtenemos que

$$\limsup_{\delta \rightarrow 0} j_\delta(u_\delta) \leq f(\bar{u}). \tag{5.38}$$

Por otro lado, de (5.36), tenemos que

$$J(S(\hat{u}), \hat{u}) + \frac{1}{2} \|\hat{u} - \bar{u}\|_U^2 \leq \liminf_{\delta \rightarrow 0} j_\delta(u_\delta).$$

Puesto que \bar{u} es minimizador local del problema (5.8), tenemos que $f(\bar{u}) \leq J(S(\hat{u}), \hat{u})$. Entonces, por la ecuación anterior se obtiene:

$$f(\bar{u}) + \frac{1}{2} \|\hat{u} - \bar{u}\|_U^2 \leq \liminf_{\delta \rightarrow 0} j_\delta(u_\delta). \tag{5.39}$$

Combinando las ecuaciones (5.38) y (5.39), tenemos que

$$f(\bar{u}) \leq \liminf_{\delta \rightarrow 0} j_\delta(u_\delta) \leq \limsup_{\delta \rightarrow 0} j_\delta(u_\delta) \leq f(\bar{u}), \tag{5.40}$$

y además,

$$f(\bar{u}) + \frac{1}{2} \|\hat{u} - \bar{u}\|_U^2 \leq f(\bar{u}),$$

de donde, $\hat{u} = \bar{u}$.

De manera similar, de (5.37), obtenemos

$$\limsup_{\delta \rightarrow 0} J(S_\delta(u_\delta), u_\delta) \leq f(\bar{u}).$$

Además, de (5.36) y el Lema 5.6, tenemos que

$$J(S(\bar{u}), \bar{u}) \leq \liminf_{\delta \rightarrow 0} J(S_\delta(u_\delta), u_\delta).$$

Ahora, combinamos las dos últimas ecuaciones, con lo cual se obtiene:

$$f(\bar{u}) \leq \liminf_{\delta \rightarrow 0} J(S_\delta(u_\delta), u_\delta) \leq \limsup_{\delta \rightarrow 0} J(S_\delta(u_\delta), u_\delta) \leq f(\bar{u}).$$

De esta ecuación, tenemos que $J(S_\delta(u_\delta), u_\delta) \rightarrow f(\bar{u})$ y de (5.40), deducimos que $j_\delta(u_\delta) \rightarrow f(\bar{u})$, cuando $\delta \rightarrow 0$. Notemos que

$$\frac{1}{2} \|u_\delta - \bar{u}\|_U^2 = j_\delta(u_\delta) - J(S_\delta(u_\delta), u_\delta).$$

Entonces, gracias a lo anterior,

$$\frac{1}{2} \|u_\delta - \bar{u}\|_U^2 \rightarrow 0,$$

cuando $\delta \rightarrow 0$, es decir, concluimos (5.33). La convergencia de los estados asociados de la ecuación (5.34), se obtiene del Lema 5.6.

A continuación, usamos un argumento de localización de [5] para mostrar que para $\delta > 0$ suficientemente pequeño, u_δ es, en efecto, un minimizador local de (5.28). Tomemos $R = \frac{r}{2}$ y sea $u \in B(u_\delta, R)$, entonces,

$$\|u - u_\delta\|_U \leq \frac{r}{2} \tag{5.41}$$

De (5.33), tenemos que existe $\bar{\delta} > 0$, tal que para todo $\delta \leq \bar{\delta}$,

$$\|u_\delta - \bar{u}\|_U \leq \frac{r}{2}. \tag{5.42}$$

Entonces, gracias a la desigualdad triangular,

$$\begin{aligned} \|u - \bar{u}\|_U &\leq \|u - u_\delta\|_U + \|u_\delta - \bar{u}\|_U \\ &\leq \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r, \end{aligned}$$

donde hemos usado (5.41) y (5.42). Por lo tanto, tenemos que $u \in B(\bar{u}, r)$. Como u_δ , con $\delta \leq \bar{\delta}$, es minimizador global de (5.35), concluimos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|S_\delta(u_\delta) - z_d\|_{L^2(\Omega)^N}^2 + \frac{\alpha}{2} \|u_\delta\|_{L^2(\Omega)^N}^2 + \frac{1}{2} \|u_\delta - \bar{u}\|_{L^2(\Omega)^N}^2 &\leq \frac{1}{2} \|S_\delta(u) - z_d\|_{L^2(\Omega)^N}^2 \\ &\quad + \frac{\alpha}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)^N}^2 + \frac{1}{2} \|u - \bar{u}\|_{L^2(\Omega)^N}^2, \end{aligned}$$

para todo $u \in B(u_\delta, R) \cap B(\bar{u}, r)$. □

En el siguiente lema establecemos la acotación de las sucesiones de variables duales.

LEMA 5.10 *Sea $(p_\delta)_{\delta>0}$ la sucesión de estados adjuntos dada por la ecuación (5.26) y asociada a la sucesión de mínimos locales $(u_\delta)_{\delta>0}$ de la Proposición 5.9. Para todo $\delta > 0$, definimos*

$$\lambda_\delta := [m'_\delta(\varepsilon y_\delta)]^* \varepsilon p_\delta.$$

Entonces, existen constantes $C_1, C_2 > 0$ tales que para todo $\delta > 0$:

$$\|p_\delta\|_Y \leq C_1, \quad \|\lambda_\delta\|_W \leq C_2.$$

Aquí, W está definido por

$$W := \left\{ w \in L^2\left(\Omega, \mathbb{R}^{N \times N}\right) : \exists y \in Y, w = \varepsilon y \right\}. \quad (5.43)$$

Demostración. Como $(\lambda_\delta, \varepsilon v) = (\varepsilon p_\delta, m'_\delta(\varepsilon y_\delta) \varepsilon v)$, tomando $v = p_\delta$ en la ecuación (5.26), tenemos que

$$\mu \|\varepsilon p_\delta\|_{L^2}^2 \leq (y_\delta - z_d, p_\delta), \quad (5.44)$$

gracias a la hipótesis 7. Ahora, usando la desigualdad de Korn y la desigualdad de Cauchy-Schwarz, tenemos que

$$\mu c_1 \|p_\delta\|_Y^2 \leq \|y_\delta - z_d\|_{L^2(\Omega)^N} \|p_\delta\|_{L^2(\Omega)^N},$$

donde c_1 es una constante positiva. Además, la inyección $Y \hookrightarrow L^2(\Omega)^N$ implica la

existencia de una constante $C > 0$ tal que

$$\mu c_1 \|p_\delta\|_Y^2 \leq C(C \|y_\delta\|_Y + \|z_d\|_{L^2(\Omega)^N}) \|p_\delta\|_Y.$$

Adicionalmente, de (5.34), se tiene que $(y_\delta)_{\delta>0}$ es uniformemente acotada y por lo tanto,

$$\|p_\delta\|_Y \leq \frac{C}{\mu c_1} (c_2 C + \|z_d\|_{L^2(\Omega)^N}),$$

con $c_2 > 0$ una constante.

Ahora, mostraremos que la sucesión $(\lambda_\delta)_{\delta>0}$ es acotada. En primer lugar, usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, tenemos que

$$|(\lambda_\delta, \varepsilon v)| \leq \| [m'_\delta(\varepsilon y_\delta)]^* \varepsilon p_\delta \| \| \varepsilon v \|.$$

Puesto que el operador $[m'_\delta(\varepsilon y_\delta)]^*$ es lineal y acotado, la desigualdad anterior implica

$$\begin{aligned} |(\lambda_\delta, \varepsilon v)| &\leq \| [m'_\delta(\varepsilon y_\delta)]^* \| \| \varepsilon p_\delta \| \| \varepsilon v \| \\ &= \| m'_\delta(\varepsilon y_\delta) \| \| \varepsilon p_\delta \| \| \varepsilon v \|, \end{aligned}$$

donde se ha usado el hecho de que la norma del operador $m'_\delta(\varepsilon y_\delta)$ es igual a la norma de su operador adjunto. Finalmente, gracias a la hipótesis 6, existe una constante $c > 0$ tal que

$$|(\lambda_\delta, \varepsilon v)| \leq c \|p_\delta\|_Y \| \varepsilon v \|.$$

Ahora, como la sucesión $(p_\delta)_{\delta>0}$ es uniformemente acotada, tenemos que

$$\|\lambda_\delta\|_{W'} = \sup_{\|\varepsilon v\|=1} |(\lambda_\delta, \varepsilon v)| \leq C,$$

donde C es una constante positiva independiente de δ . □

En la siguiente proposición establecemos un sistema de optimalidad para el problema (P).

TEOREMA 5.11 *Sea $(\bar{y}, \bar{u}) \in Y \times U$ una solución local del problema (P). Entonces, existen un único estado adjunto $p \in Y$ y un único $\lambda \in W'$, tales que*

$$\mu \int_{\Omega} \varepsilon \bar{y} : \varepsilon v \, dx + \nu \int_{\Omega} m(\varepsilon \bar{y}) : \varepsilon v \, dx = \int_{\Omega} \bar{u} \cdot v \, dx, \quad \forall v \in Y \quad (5.45)$$

$$\mu \int_{\Omega} \varepsilon p : \varepsilon v \, dx + \nu \langle \lambda, \varepsilon v \rangle_{W', W} = \int_{\Omega} (\bar{y} - z_d) \cdot v \, dx, \quad \forall v \in Y \quad (5.46)$$

$$-(p, h) = \alpha(\bar{u}, h), \quad \forall h \in U \quad (5.47)$$

Demostración. Sea $(u_\delta)_{\delta>0}$ la sucesión de la Proposición 5.9 y $(y_\delta)_{\delta>0}$ la sucesión de estados asociados.

Como los espacios Y y W' son reflexivos y se tiene el Lema 5.10, obtenemos que existen subsucesiones de $(p_\delta)_{\delta>0}$ y $(\lambda_\delta)_{\delta>0}$, notadas de la misma forma, $p \in Y$ y $\lambda \in W'$, tales que

$$\begin{aligned} p_\delta &\rightharpoonup p, & \text{en } Y, \\ \lambda_\delta &\rightharpoonup \lambda, & \text{en } W'. \end{aligned}$$

Ahora, de la continuidad débil del operador en la ecuación (5.26), pasando al límite cuando $\delta \rightarrow 0$, tenemos la ecuación (5.46). Ahora, de la convergencia de la sucesión $(p_\delta)_{\delta>0}$ y la continuidad débil del operador del lado izquierdo de la ecuación (5.27), tenemos que $-(p_\delta, h) \rightarrow -(p, h)$. Además, como el lado derecho de la ecuación (5.27), converge a $\alpha(\bar{u}, h)$, si $\delta \rightarrow 0$, obtenemos la ecuación (5.47). El estado adjunto $p \in Y$ es único, y por la ecuación (5.46), $\lambda \in W'$ también es único. \square

Como el sistema de optimalidad dado por las ecuaciones (5.45)-(5.47) no contiene ninguna condición sobre el signo de p o λ , este sistema puede considerarse como una condición de estacionariedad débil.

5.2.2. Estacionariedad fuerte

El siguiente lema será usado en la demostración del teorema a continuación.

LEMA 5.12 *Sea $(\bar{y}, \bar{u}) \in Y \times U$ una solución local óptima del problema (P). El conjunto $\{S'(\bar{u}; h) : h \in U\}$ es denso en Y .*

Demostración. Sea $\xi \in Y$. Probaremos que el conjunto $A = \{S'(\bar{u}; h) : h \in U\}$ es denso en Y , es decir, que existe una sucesión $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en U tal que

$$S'(\bar{u}; h_n) \rightarrow \xi \quad \text{en } Y.$$

Denotamos por $\mathcal{S}_l : U \rightarrow Y$ al operador solución de la ecuación linealizada (4.8). Ahora, definamos $z \in U$ como el lado derecho de la ecuación (4.8) satisfecha por ξ ,

es decir, z satisface

$$\mu \int_{\Omega} \varepsilon \xi : \varepsilon v \, dx + \nu \int_{\Omega} m'(\varepsilon \bar{y}; \varepsilon \xi) : \varepsilon v \, dx = \int_{\Omega} z \cdot v \, dx, \quad \forall v \in Y.$$

Así, $\xi = \mathcal{S}_l(z)$. Por otro lado, como $Id : Y \hookrightarrow U$ es densa, existe una sucesión $(\hat{h}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en Y tal que

$$Id(\hat{h}_n) \rightarrow z \quad \text{en } U, \quad (5.48)$$

si $n \rightarrow \infty$. Del Teorema 4.4, sabemos que $S'(\bar{u}; h) = \mathcal{S}_l(h)$, para todo $h \in U$. En particular, para $h = Id(\hat{h}_n)$, tenemos que

$$S'(\bar{u}; Id(\hat{h}_n)) = \mathcal{S}_l(Id(\hat{h}_n)), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Considerando (5.48) y que \mathcal{S}_l es Lipschitz continuo, tenemos que

$$\mathcal{S}_l(Id(\hat{h}_n)) \rightarrow \mathcal{S}_l(z) = \xi, \quad \text{en } Y,$$

es decir,

$$S'(\bar{u}; Id(\hat{h}_n)) \rightarrow \xi, \quad \text{en } Y,$$

de donde concluimos el resultado. \square

TEOREMA 5.13 *Sea $(\bar{y}, \bar{u}) \in Y \times U$ una solución local óptima del problema (P). Entonces existe un único estado adjunto $p \in Y$ y un multiplicador $\lambda \in W'$ tales que*

$$\mu(\varepsilon p, \varepsilon v) + \nu \langle \lambda, \varepsilon v \rangle_{W', W} = (\bar{y} - z_d, v) \quad \forall v \in Y, \quad (5.49)$$

$$\langle \lambda, \varepsilon \xi \rangle_{W', W} \geq \int_{\Omega} m'(\varepsilon \bar{y}; \varepsilon \xi) : \varepsilon p \, dx, \quad \forall \xi \in Y, \quad (5.50)$$

$$-p = \alpha \bar{u}, \quad \text{c.t.p. } x \in \Omega. \quad (5.51)$$

La ecuación (5.50), se puede escribir como

$$\begin{aligned} \langle \lambda, \varepsilon \xi \rangle_{W', W} &= 0, \quad \forall \xi \in Y, \quad \text{si } |\varepsilon \bar{y}(x)| < g \\ \langle \lambda, \varepsilon \xi \rangle_{W', W} &= \left(\varepsilon p + g \left(\frac{\varepsilon \bar{y}}{|\varepsilon \bar{y}|^3} : \varepsilon p \right) \varepsilon \bar{y} - g \frac{\varepsilon p}{|\varepsilon \bar{y}|}, \varepsilon \xi \right), \quad \forall \xi \in Y, \quad \text{si } |\varepsilon \bar{y}(x)| > g \\ \left(\left(\frac{\varepsilon \bar{y}}{g^2} : \varepsilon p \right) \varepsilon \bar{y}, \varepsilon \xi \right) &\leq \langle \lambda, \varepsilon \xi \rangle_{W', W} \leq 0, \quad \forall \xi \in Y, \quad \text{si } |\varepsilon \bar{y}(x)| = g. \end{aligned}$$

Demostración. Sean $p \in Y$ y $\lambda \in W'$ que satisfacen la ecuación (5.46) y sea $h \in U$

arbitrario. Tomando $v = S'(\bar{u}, h) \in Y$ en (5.46), obtenemos

$$\mu \int_{\Omega} \varepsilon p : \varepsilon S'(\bar{u}, h) dx + \nu \langle \lambda, \varepsilon S'(\bar{u}, h) \rangle_{W', W} = \int_{\Omega} (\bar{y} - z_d) \cdot S'(\bar{u}, h) dx = J_y(\bar{y}, \bar{u}) S'(\bar{u}, h). \quad (5.52)$$

Por otro lado, tomando $v = p$ en la ecuación linealizada (4.8), tenemos que

$$\mu \int_{\Omega} \varepsilon S'(\bar{u}, h) : \varepsilon p dx + \nu \int_{\Omega} m'(\varepsilon \bar{y}; \varepsilon S'(\bar{u}, h)) : \varepsilon p dx = \int_{\Omega} h \cdot p dx. \quad (5.53)$$

Además, de la Proposición 5.11, tenemos que existe un único $p \in Y$ tal que

$$-p = \alpha \bar{u}, \quad \text{c.t.p. } x \in \Omega.$$

Reemplazamos esta ecuación en (5.53), con lo cual obtenemos

$$\mu \int_{\Omega} \varepsilon S'(\bar{u}, h) : \varepsilon p dx + \nu \int_{\Omega} m'(\varepsilon \bar{y}; \varepsilon S'(\bar{u}, h)) : \varepsilon p dx = -\alpha \int_{\Omega} h \cdot \bar{u} dx = -J_u(\bar{y}, \bar{u}) h. \quad (5.54)$$

Ahora, de la condición de optimalidad (5.7), tenemos que $J_y(\bar{y}, \bar{u}) S'(\bar{u}, h) \geq -J_u(\bar{y}, \bar{u}) h$, para todo $h \in U$, lo cual, gracias a (5.52) y (5.54), implica que

$$\begin{aligned} \mu \int_{\Omega} \varepsilon p : \varepsilon S'(\bar{u}, h) dx + \nu \langle \lambda, \varepsilon S'(\bar{u}, h) \rangle_{W', W} &\geq \mu \int_{\Omega} \varepsilon S'(\bar{u}, h) : \varepsilon p dx \\ &+ \nu \int_{\Omega} m'(\varepsilon \bar{y}; \varepsilon S'(\bar{u}, h)) : \varepsilon p dx \quad \forall h \in U. \end{aligned}$$

Esta ecuación equivale a

$$\nu \langle \lambda, \varepsilon S'(\bar{u}, h) \rangle_{W', W} \geq \nu \int_{\Omega} m'(\varepsilon \bar{y}; \varepsilon S'(\bar{u}, h)) : \varepsilon p dx, \quad \forall h \in U. \quad (5.55)$$

Sea $\xi \in Y$ arbitrario, entonces por el Lema 5.12, existe una sucesión $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en U tal que $S'(\bar{u}, h_n) \rightarrow \xi$ en Y , si $n \rightarrow \infty$. La ecuación (5.55) se verifica, en particular, para $h = h_n$, es decir

$$\nu \langle \lambda, \varepsilon S'(\bar{u}, h_n) \rangle_{W', W} \geq \nu \int_{\Omega} m'(\varepsilon \bar{y}; \varepsilon S'(\bar{u}, h_n)) : \varepsilon p dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (5.56)$$

Como la derivada direccional de m es Lipschitz continua respecto a la dirección y el operador ε es continuo, pasando al límite cuando $n \rightarrow \infty$ en (5.56), deducimos que

$$\langle \lambda, \varepsilon \xi \rangle_{W', W} \geq \int_{\Omega} m'(\varepsilon \bar{y}; \varepsilon \xi) : \varepsilon p dx, \quad \forall \xi \in Y. \quad (5.57)$$

Definamos los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \{x \in \Omega : |\varepsilon\bar{y}(x)| < g\}, \\ \Omega_2 &= \{x \in \Omega : |\varepsilon\bar{y}(x)| > g\}, \\ \Omega_3 &= \{x \in \Omega : |\varepsilon\bar{y}(x)| = g\}.\end{aligned}$$

De acuerdo a la definición de la derivada direccional de m , la ecuación (5.57) puede escribirse como

$$\langle \lambda, \varepsilon\bar{\zeta} \rangle_{W',W} \geq \int_{\Omega} \mathbb{1}_{\Omega_2} \left[\varepsilon\bar{\zeta} + g \left(\frac{\varepsilon\bar{y}}{|\varepsilon\bar{y}|^3} : \varepsilon\bar{\zeta} \right) \varepsilon\bar{y} - g \frac{\varepsilon\bar{\zeta}}{|\varepsilon\bar{y}|} \right] : \varepsilon p + \mathbb{1}_{\Omega_3} M(\varepsilon\bar{y}; \varepsilon\bar{\zeta}) : \varepsilon p, \quad \forall \bar{\zeta} \in Y \quad (5.58)$$

donde $M(\varepsilon\bar{y}; \varepsilon\bar{\zeta})$ es la derivada direccional de m en $\varepsilon\bar{y}$ y en la dirección $\varepsilon\bar{\zeta}$ en el caso de $|\varepsilon\bar{y}| = g$.

Si $|\varepsilon\bar{y}| < g$, tomando $-\bar{\zeta}$ en la ecuación (5.58), tenemos que

$$-\langle \lambda, \varepsilon\bar{\zeta} \rangle_{W',W} \geq 0. \quad (5.59)$$

Combinando (5.58) y (5.59), obtenemos

$$\langle \lambda, \varepsilon\bar{\zeta} \rangle_{W',W} = 0, \quad \forall \bar{\zeta} \in Y.$$

Si $|\varepsilon\bar{y}| > g$. Testeando con $-\bar{\zeta}$, en (5.58), obtenemos

$$-\langle \lambda, \varepsilon\bar{\zeta} \rangle_{W',W} \geq \left(-\varepsilon\bar{\zeta} + g \left(\frac{\varepsilon\bar{y}}{|\varepsilon\bar{y}|^3} : (-\varepsilon\bar{\zeta}) \right) \varepsilon\bar{y} - g \frac{-\varepsilon\bar{\zeta}}{|\varepsilon\bar{y}|}, \varepsilon p \right),$$

que equivale a

$$\langle \lambda, \varepsilon\bar{\zeta} \rangle_{W',W} \leq \left(\varepsilon\bar{\zeta} + g \left(\frac{\varepsilon\bar{y}}{|\varepsilon\bar{y}|^3} : \varepsilon\bar{\zeta} \right) \varepsilon\bar{y} - g \frac{\varepsilon\bar{\zeta}}{|\varepsilon\bar{y}|}, \varepsilon p \right). \quad (5.60)$$

Combinando (5.58) y (5.60), obtenemos que

$$\langle \lambda, \varepsilon\bar{\zeta} \rangle_{W',W} = \left(\varepsilon p + g \frac{\varepsilon\bar{y}}{|\varepsilon\bar{y}|^3} : \varepsilon p \varepsilon\bar{y} - g \frac{\varepsilon p}{|\varepsilon\bar{y}|}, \varepsilon\bar{\zeta} \right), \quad \forall \bar{\zeta} \in Y.$$

Consideramos el caso $|\varepsilon\bar{y}| = g$. Si $\varepsilon\bar{y} : \varepsilon\bar{\zeta} \geq 0$, tenemos que

$$\langle \lambda, \varepsilon\bar{\zeta} \rangle_{W',W} \geq \left(\left(\frac{\varepsilon\bar{y}}{g^2} : \varepsilon p \right) \varepsilon\bar{y}, \varepsilon\bar{\zeta} \right).$$

Testeando con $-\bar{\zeta}$, tenemos que $\varepsilon\bar{\zeta} : \varepsilon\bar{y} \leq 0$, y por lo tanto,

$$-\langle \lambda, \varepsilon\bar{\zeta} \rangle_{W',W} \geq 0.$$

Como $\bar{\zeta}$ es arbitrario, combinando las dos últimas ecuaciones obtenemos:

$$\left(\left(\frac{\varepsilon\bar{y}}{g^2} : \varepsilon p \right) \varepsilon\bar{y}, \varepsilon\bar{\zeta} \right) \leq \langle \lambda, \varepsilon\bar{\zeta} \rangle_{W',W} \leq 0, \quad \forall \bar{\zeta} \in Y.$$

□

El resultado del Teorema 5.13 es más riguroso que el resultado del sistema optimalidad de la estacionariedad débil, en el sentido de que la condición (5.50), que podría considerarse como una condición sobre el signo del multiplicador λ , no está presente en el sistema de optimalidad dado por las ecuaciones (5.45)-(5.47).

Además, el Teorema 5.13 es equivalente a la estacionariedad de Bouligand, como mostraremos en la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 5.14 Sean $(\bar{y}, \bar{u}) \in Y \times U$, $p \in Y$ y $\lambda \in W'$ tales que verifican las ecuaciones (5.49)-(5.51). Entonces, también satisfacen la condición de optimalidad (5.7).

Demostración. Sea $h \in U$ arbitrario. Sea $z = S'(\bar{u}; h)$. Testeamos la ecuación (5.51), con el h arbitrario:

$$-\alpha(\bar{u}, h) = (p, h), \quad \forall h \in U.$$

Ahora, reemplazamos la ecuación (4.8), en el lado derecho de esta ecuación, con lo cual obtenemos:

$$-\alpha(\bar{u}, h) = \mu \int_{\Omega} \varepsilon z : \varepsilon p \, dx + \nu \int_{\Omega} m'(\varepsilon\bar{y}; \varepsilon z) : \varepsilon p \, dx.$$

Reemplazamos, la ecuación (5.49), en la ecuación anterior:

$$-\alpha \int_{\Omega} \bar{u} \cdot h \, dx = -\langle \lambda, \varepsilon z \rangle_{W',W} + \int_{\Omega} (\bar{y} - z_d) \cdot z \, dx + \nu \int_{\Omega} m'(\varepsilon\bar{y}; \varepsilon z) : \varepsilon p \, dx.$$

Entonces, gracias a (5.50), esta ecuación se transforma en

$$-\alpha \int_{\Omega} \bar{u} \cdot h \, dx \leq \int_{\Omega} (\bar{y} - z_d) \cdot z \, dx,$$

que es precisamente la condición de optimalidad (5.7). □

Capítulo 6

Conclusiones

1. Se estudiaron las propiedades de diferenciabilidad de la no linealidad no suave presente en la ecuación de estado del problema (P). Se estableció la diferenciabilidad direccional de la no linealidad, como función de tensores de segundo orden y también de su operador de Nemytskii asociado. Además, se estableció la Lipschitz continuidad global de la derivada direccional de la no linealidad con respecto a la dirección.
2. Se estableció la existencia de una solución única para la ecuación linealizada asociada a la ecuación de estado del problema (P). En esta ecuación linealizada aparece la derivada direccional del operador de Nemytskii asociado a la no linealidad. Adicionalmente, se obtuvo que el operador solución de la ecuación de estado es direccionalmente diferenciable y su derivada direccional está dada por la solución de la ecuación linealizada.
3. Usando el resultado de diferenciabilidad direccional del operador solución se obtuvo una condición de optimalidad primal para el problema (P), relacionada al concepto de estacionariedad de Bouligand. Luego, usando un método de regularización y paso al límite, se obtuvo un sistema de optimalidad para el problema de control óptimo (P), relacionado al concepto de estacionariedad débil. En este sistema de optimalidad no se tiene ninguna información sobre los signos de los multiplicadores.
4. Combinando el resultado del sistema de optimalidad relacionado al concepto de estacionariedad débil, con la condición de optimalidad primal se obtuvo un sistema de optimalidad correspondiente a un concepto de estacionariedad más fuerte. De hecho, los controles, estados, estados adjuntos y multiplicadores

que satisfacen este sistema de optimalidad, también satisfacen la desigualdad variacional correspondiente al concepto de estacionariedad de Bouligand. De esta manera, se tiene una equivalencia entre las condiciones de optimalidad correspondientes a ambos conceptos de estacionariedad.

Bibliografía

- [1] Rainer Ansorge y Thomas Sonar. *Mathematical Models of Fluid Dynamics*. Wiley Online Library, 2009.
- [2] Marino Badiale y Enrico Serra. *Semilinear Elliptic Equations for Beginners: Existence Results via the Variational Approach*. Springer Science & Business Media, 2010.
- [3] Dominic Breit. Analysis of generalized Navier–Stokes equations for stationary shear thickening flows. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 75(14):5549–5560, 2012.
- [4] Haim Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer Science & Business Media, 2010.
- [5] Eduardo Casas y Fredi Tröltzsch. Error estimates for the finite-element approximation of a semilinear elliptic control problem. *Control and Cybernetics*, 31(3):695–712, 2002.
- [6] Alexandre Joel Chorin y Jerrold E. Marsden. *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*, volume 3. Springer, 1990.
- [7] Constantin Christof, Christian Meyer, Stephan Walther, y Christian Clason. Optimal control of a non-smooth semilinear elliptic equation. *Mathematical Control & Related Fields*, 8(1):247, 2018.
- [8] Juan Carlos De los Reyes. *Numerical PDE-Constrained Optimization*. Springer, 2015.
- [9] Juan Carlos De los Reyes y Georg Stadler. A nonsmooth model for discontinuous shear thickening fluids: Analysis and numerical solution. *Interfaces and Free Boundaries*, 16(4):575–602, 2014.

- [10] Jie Ding, Weihua Li, y Shirley Z. Shen. Research and applications of shear thickening fluids. *Recent Patents on Materials Science*, 4(1):43–49, 2011.
- [11] Espasa-Calpe. Fluido. In *Diccionario de la lengua española*. Espasa-Calpe, 2005.
- [12] Lawrence C. Evans. *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, Providence, R.I., 2010.
- [13] Angiolo Farina, Andro Mikelić, Giuseppe Saccomandi, Adélia Sequeira, y Eleuterio F. Toro. *Non-Newtonian fluid mechanics and complex flows*. Springer, 2018.
- [14] Jens Frehse, Josef Málek, y Mark Steinhauer. An existence result for fluids with shear dependent viscosity—steady flows. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 30(5):3041–3049, 1997.
- [15] Majid Ghassemi y Azadeh Shahidian. *Nano and Bio Heat Transfer and Fluid Flow*. Academic Press, 2017.
- [16] Helmuth Goldberg, Winfried Kampowsky, y Fredi Tröltzsch. On Nemytskij operators in L_p -spaces of abstract functions. *Mathematische Nachrichten*, 155(1):127–140, 1992.
- [17] William Graebel. *Engineering Fluid Mechanics*. CRC Press, 2001.
- [18] Roland Herzog, Christian Meyer, y Gerd Wachsmuth. B-and strong stationarity for optimal control of static plasticity with hardening. *SIAM Journal on Optimization*, 23(1):321–352, 2013.
- [19] Zhi-Quan Luo, Jong-Shi Pang, y Daniel Ralph. *Mathematical Programs with Equilibrium Constraints*. Cambridge University Press, 1996.
- [20] Christian Meyer y Livia M. Susu. Optimal control of nonsmooth, semilinear parabolic equations. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 55(4):2206–2234, 2017.
- [21] F. Mignot y J.P. Puel. Optimal control in some variational inequalities. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 22(3):466–476, 1984.
- [22] J. Nečas, J. Málek, Mirko Rokyta, y Michael Růžička. *Weak and Measure-valued Solutions to Evolutionary PDEs*, volume 13. CRC Press, 1996.

- [23] Geoffrey J. Pert. *Introductory Fluid Mechanics for Physicists and Mathematicians*. John Wiley & Sons, 2013.
- [24] Paola Quiloango. Análisis de un problema de control óptimo de fluidos dilatantes. Tesis de pregrado, Escuela Politécnica Nacional, Quito, 2018.
- [25] Bastian E. Rapp. *Microfluidics: Modeling, Mechanics and Mathematics*. William Andrew, 2016.
- [26] Thomas Slawig. Distributed control for a class of non-newtonian fluids. *Journal of Differential Equations*, 219(1):116–143, 2005.
- [27] Fredi Tröltzsch. *Optimal Control of Partial Differential Equations: Theory, Methods, and Applications*, volume 112. American Mathematical Soc., 2010.
- [28] Juan Luis Vázquez. Fundamentos matemáticos de la mecánica de fluidos. *Madrid: Departamento de Matemáticas-Universidad Autónoma de Madrid*, 2003.
- [29] Mohammad Zarei y Jamal Aalaie. Application of shear thickening fluids in material development. *Journal of Materials Research and Technology*, 9(5):10411–10433, 2020.