ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS

CUANTIFICACIÓN DEL RIESGO DE LONGEVIDAD BAJO LA NORMATIVA DE SOLVENCIA II EN EL SISTEMA DE PENSIONES ECUATORIANO: UN ENFOQUE HACIA EL SISTEMA DE CAPITALIZACIÓN INDIVIDUAL

TRABAJO DE TITULACIÓN PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE INGENIERO MATEMÁTICO

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

MAURICIO XAVIER MUÑOZ ESCOBAR

mauro-xavi_epn@hotmail.com

DIRECTOR: MSc. DIEGO PAÚL HUARACA SHAGÑAY

diego.huaracas@epn.edu.ec

CODIRECTOR: MSc. MÉNTHOR OSWALDO URVINA MAYORGA

menthor.urvina@epn.edu.ec

QUITO, OCTUBRE 2021

Declaración

Yo, Mauricio Xavier Muñoz Escobar, declaro bajo juramento que el trabajo aquí descrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y, que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

La Escuela Politécnica Nacional puede hacer uso de los derechos correspondientes a este trabajo, según lo establecido por la Ley de Propiedad Intelectual, por su Reglamento y por la normatividad institucional vigente.

Mauricio Xavier Muñoz Escobar

Certificación

Certifico que el presente trabajo fue desarrollado por Mauricio Xavier Muñoz Escobar, bajo mi supervisión.

Firmado electrónicamente por:
DIEGO PAUL
HUARACA
SHAGÑAY

MSc. Diego Paúl Huaraca Shagñay

Director

MENTHOR
OSWALDO URVINA
MAYORGA

Firmado digitalmente por
MENTHOR OSWALDO
URVINA MAYORGA
Fecha: 2021.10.13 08:57:14
-05'00'

MSc. Ménthor Oswaldo Urvina Mayorga

Codirector

Agradecimientos

Principalmente a Dios por siempre darme la fortaleza para siempre luchar, quién está y estará en cada paso que siga.

Mira que te mando que te esfuerces y seas valiente; no temas ni desmayes, porque Jehová tu Dios estará contigo en dondequiera que vayas.

Josué 1:9

A mamita Ximena Escobar, quién me enseño a luchar, no rendirme, siempre seguir adelante, y me da día a día el apoyo, cariño y amor incondicional que solo ella puede darme, ¡Madrecilla, lo logramos!.

A Iván Guano, quién considero un hombre ejemplar tanto profesional como personalmente, gracias por todo.

A mis profesores que estuvieron a lo largo de este camino, en especial a mi director de tesis, M.Sc. Diego Huaraca, por todo su apoyo, conocimiento, paciencia y confianza en mi, gracias por permitirme desarrollar mi trabajo de titulación con su guía. Agradezco a M.Sc. Ménthor Urvina por su apoyo, y ser parte de este proceso que me llena de orgullo y felicidad.

A mis amigos de la universidad; Ronny Tonato, David Cárdenas, Andres Bolaños, Karen Acosta, Ricardo Arias, Jorge Jácome, Tefita Carpio, Mabecita Rosero, entre otros, si se me pasa alguno sepan disculparme todos hicieron de la carrera una experiencia excepcional.

Finalmente pero no menos importante a mis amigos de la infancia, Xavicho, Pako, Negrito (Andrés) y Fer, que han estado presentes en todas las etapas de mi vida, espero seguir juntos cosechando éxitos.

Mauricio E. Muñoz

Dedicatoria

A mi querida abuelita Fanny Argentina Paredes Díaz (†).

A mi mamita linda Ximena Escobar Paredes por todo su apoyo.

A mis perritos que me han acompañado en las largas noches Maky(†), Kamy y Giorgio.

Mauricio E. Muñoz

Índice General

Índice de Figuras 8

Índice de Tablas 9

Resumen 10

Abstract 11

1. Introducción 12

1.1. Planteamiento del Problema 12

1.2. Justificación 14

1.3. Objetivo General 15

1.4. Objetivos Específicos 15

1.5. Software R 16

1.5.1. RStudio 16

1.5.2. ¿Por qué R? 17

1.5.3. Paquete lifecontingencies 17

2. Conceptos fundamentales 18

2.1. Fundamentos de matemática financiera 18

2.1.1. Interés y tipos de interés 18

2.1.2. Leyes de capitalización 19

2.1.2.1. Régimen de capitalización simple 19

2.1.2.2. Régimen de capitalización compuesta 21

2.1.3. Tipo de interés nominal 22

2.1.4. Rentas financieras 23

2.1.4.1. Rentas anuales, constantes e inmediatas 25

2.1.4.2. Rentas anuales, constantes y diferidas 30

2.2. Fundamentos de matemática actuarial 32

2.2.1. Modelo biométrico 32

2.2.1.1. Función de fallecimiento 32

2.2.1.2. Función de supervivencia 33

2.2.1.3. Vida residual 34

2.2.2. Tablas de mortalidad 36

2.2.3. Rentas actuariales 37

2.2.3.1. Rentas vitalicias y temporales, anuales, constantes 37

2.2.3.2. Rentas vitalicias y temporales, anuales, diferidas, constantes 38

2.2.4. Reserva matemática 39

2.3. El riesgo de longevidad y la esperanza de vida 41

2.4. Sistema de pensiones de la Seguridad Social en Ecuador 43

2.5. Solvencia II 49

3. La fórmula estándar **53**

3.1. Descripción de la fórmula estándar 53

3.2. Discusión del shock de longevidad 56

4. Datos y sistema de capitalización **58**

4.1. Sistema de capitalización 58

4.1.1. Sistema de capitalización individual 59

4.1.2. Reserva matemática del sistema de capitalización individual 60

4.2. Descripción de la base de datos 62

4.3. Variables utilizadas 63

4.3.1. Tratamiento para personas afiliados 63

4.4. Extracción de la muestra 64

5. Cálculo del SCR del sub-módulo de longevidad **67**

5.1. Funciones del paquete lifecontingencies 67

5.1.1. Cálculos de matemática financiera en R 67

5.1.2. Cálculo matemática actuarial en R 69

5.2. Prima para personas en activo 71

5.3. Estimación de la pensión para personas en activo 75

5.4. Aplicación del shock de longevidad 77
5.5. Análisis de sensibilidad 79
5.6. Cálculo del SCR 80

6. Conclusiones y recomendaciones **84**
6.1. Conclusiones 84
6.2. Recomendaciones 85

Bibliografía **87**

Anexos **89**
A. Anexo Muestreo Estratificado 90
B. Anexo Tabla de Mortalidad 92
C. Anexo Renta Financiera y Valor Actual 96
D. Anexo Pensión Jubilados 98
E. Anexo Estimación Prima Jubilados con Shock Longevidad 100
F. Anexo Cálculo SCR riesgo de longevidad 103

Índice de Figuras

2.1. Esquema de la generación de interés 19
2.2. Esquema de rentas financieras 23
2.3. Esquema de rentas inmediatas, temporales y pospagable 25
2.4. Esquema de rentas inmediatas, temporal y prepagable 27
2.5. Esquema de rentas inmediatas, perpetuas y pospagable 28
2.6. Esquema de rentas inmediatas, perpetuas y prepagable 29
2.7. Esquema de rentas diferidas, temporales y pospagable 30
2.8. Esquema de rentas diferidas, temporales y pospagable 31
2.9. Esquema de la variable vida residual 35
2.10. Interpretación de la reserva matemática 40
2.11. Evolución de la esperanza de vida al nacer Mundial 42
2.12. Evolución de la esperanza de vida al nacer en Ecuador 43
2.13. Pirámide poblacional 2020, 2050, 2090 y 2100 48
2.14. Evolución de la tasa de natalidad en Ecuador 48
2.15. Pilares de *Solvencia II* 50

3.1. Estructura general de la fórmula del SCR 54

4.1. Esquema temporal de las primas 59
4.2. Esquema temporal de las rentas 59

5.1. Diferencia de primas para las pensiones 80

Índice de Tablas

2.1. Clasificación de las rentas financieras 24
2.2. Funciones de las tablas de mortalidad 36
2.3. Proyección de personas mayores en Ecuador 46

4.1. Incremento Tasa Salarial 64
4.2. Conglomerado de la población (N) 65
4.3. Conglomerado de la submuestra de los estratos 65

5.1. Proyección Incremento Tasa Salarial 72
5.2. Ejemplo individuo 73
5.3. Promedio de primas 74
5.4. Mínimo de primas 74
5.5. Máximo de primas 75
5.6. Promedio de rentas 76
5.7. Mínimo de rentas 77
5.8. Máximo de rentas 77
5.9. Promedio de rentas aplicado el shock 78
5.10. Mínimo de rentas aplicado el shock 78
5.11. Máximo de rentas aplicado el shock 78
5.12. Diferencia de primas 80
5.13. Flujos por edad y género con escenario sin estresar 81
5.14. Mejor estimación por edad y género con escenario sin estresar 82
5.15. Flujos por edad y género con escenario estresado 82
5.16. Flujos por edad y género con escenario estresado 83

Resumen

El aumento de la esperanza de vida ha traído varias consecuencias en el sistema de pensiones en todo el mundo, a causa de ello los sistema de pensiones se ven obligados a cumplir con más prestaciones de las estimadas, en consecuencia de que las personas viven por mayor tiempo, ocasionando inestabilidad en el sistema y generando pérdidas no esperadas.

En el presente trabajo introduciremos la idea de acogerse a la normativa *Solvencia II* la cual se centra en la idea de mitigar las posibles pérdidas mediante tres pilares fundamentales. En el pilar I, materia principal de este trabajo cuantificaremos el riesgo de longevidad mediante la fórmula estándar que propone la normativa y se analizarán los resultados mediante un análisis de sensibilidad.

Finalmente, se estiman las pensiones de los individuos mediante un sistema de capitalización individual debido a que mantiene el equilibrio financiero - actuarial, este sistema como propuesta a una alternativa al sistema de reparto hoy vigente en el Ecuador.

Palabras clave: Solvencia II, riesgo de longevidad, sistema de capitalización, pilares, esperanza de vida, seguridad social.

Abstract

The increase in life expectancy has brought several consequences in the pension system around the world, as a result, the pension systems are forced to comply with more benefits than estimated, thereby people living longer causes instability in the system and generates unexpected losses.

In this paper we will introduce the idea of benefiting from the Solvency II regulation which focuses on the idea of mitigating possible losses through three fundamental pillars. In pillar I, the main subject of this work, we will quantify the longevity risk using the standard formula proposed by the regulations and the results will be analyzed through a sensitivity analysis.

Finally, the pensions of individuals are estimated through a system of individual capitalization because it maintains the financial-actuarial equilibrium, this system as a proposal to an alternative to the distribution system currently in force in Ecuador.

Keywords: Solvency II, longevity risk, capitalization system, pillars, life expectancy, social security.

Capítulo 1

Introducción

1.1. Planteamiento del Problema

Las reducciones de la mortalidad que dieron inicio en Europa han continuado extendiéndose a nivel mundial pues a medida que se logre un mayor nivel de desarrollo en cada país, la esperanza de vida seguirá en un firme aumento; siendo los países industrializados los más avanzados en este proceso (Raleigh V, 2019). Las posibilidades de supervivencia se ven reflejadas por las mejoras en las condiciones de vida a causa de una mejor nutrición y numerosos desarrollos médicos; por ejemplo Luy, M. (2019) relaciona las mejoras en la expectativa de vida con las medidas de salud pública y los nuevos avances médicos, como los avances en la detección, la prevención y el tratamiento de enfermedades en especial cardiovasculares, incrementando así la longevidad en la población mundial.

De acuerdo a la información del Instituto Nacional de Estadística y Censo (INEC) la esperanza de vida de la población ecuatoriana en el año 2010 fue de 75 años a diferencia del año 2050 que se estima llegará a 80.5 años. De modo que, uno de los problemas de mayor relevancia que deberá afrontar la Seguridad Social en el Ecuador es el incremento de la esperanza de vida lo que incide en un inminente riesgo de longevidad; definiéndolo formalmente como "El riesgo de que las reservas constituidas resulten insuficientes para el pago de rentas o indemnizaciones, a causa de infravalorar la esperanza de vida reflejada en las tablas de mortalidad"(Huaraca D, 2018). En consecuencia, dada la disminución que pudiera existir en las tasas de mortalidad por un aumento en la esperanza de vida, esto implicará para la Seguridad Social ampliar el valor de las obligaciones contraídas por los jubilados.

En la búsqueda de una solución nos encontramos con el marco regulatorio de *Solvencia II* elaborado por la Autoridad Europea de Seguros y Pensiones de Jubilación (EIOPA) y la Unión Europea (UE), que se crea como equivalente para el sector bancario a *Basilea II*, pero con el fin de garantizar a las entidades de seguros y reaseguros el cumplimiento de sus obligaciones con los asegurados, el mismo que está siendo adoptado en países de Latinoamérica tales como Perú, Colombia, Brasil y Chile.

Así, *Solvencia II* es una normativa que regula la actividad aseguradora, delante de la anterior legislación, *Solvencia I* que ha tenido vigencia desde el año 1973 hasta el 2015. La normativa emerge para establecer un modelo de capital centrado en la protección del asegurador por lo cual, dentro de su marco de acción sustenta tres pilares fundamentales (Del Castillo J, 2011):

- **Pilar I:** Se basa principalmente en la parte cuantitativa de la norma, la valoración de los activos, pasivos y el capital. Este pilar establece un capital requerido dependiendo de la exposición al riesgo (con un nivel de confianza del 99.5 %) que el asegurador debe disponer según un modelo denominado estándar (Solvency Capital Requirement) para afrontar posibles pérdidas en una ventana temporal de un año.
- **Pilar II:** Este pilar recoge todos los detalles operativos del riesgo actuarial y financiero al cual el asegurador deberá regirse para dar cumplimiento a la normativa y a los procesos de control que darán seguimiento a los casos en los que el capital requerido no sea el adecuado.
- **Pilar III:** Se centra en la transparencia de la entidad aseguradora para facilitar a los intervinientes los resultados del perfil de riesgo y la rentabilidad que la entidad maneja con el fin de dar reconocimiento y valor a la misma.

Motivados especialmente por el *Pilar I* de la normativa, este trabajo busca evaluar el impacto de acogerse a los conceptos fundamentales del riesgo de longevidad aplicados a *Solvencia II* en las pensiones de jubilación para la Seguridad Social en el Ecuador bajo el escenario de capitalización individual.

1.2. Justificación

Los países de la Unión Europea revelan como está afectando el hecho de que la esperanza de vida tenga un efecto cada vez más elevado ya que una vida más larga implica la necesidad de disponer de una mayor cantidad de recursos para el pago de prestaciones, enfocándose en que la calidad de vida no baje por el simple hecho de vivir por más tiempo por esta razón, se valora el efecto de introducir la normativa de *Solvencia II* dada la importancia en desarrollar metodologías de gestión de riesgo de longevidad y que, *Solvencia II* por otra parte también incentive a las entidades aseguradoras a poseer estructuras financieras más sólidas, aptas para hacer frente a los riesgos asumidos con los asegurados (López P, 2016).

En consecuencia, este trabajo se centra en la aplicación de la normativa de *Solvencia II* en la Seguridad Social debido al riesgo de longevidad, evaluando la posibilidad de quedarse con fondos insuficientes para hacer frente a las obligaciones de las pensiones para sus jubilados por el hecho de que están calculadas con tablas de mortalidad que reflejan hipótesis de supervivencia inferiores a las reales (Del Castillo J, 2014).

En Latinoamérica, varios son los países que se encuentran trabajando para implementar un esquema de capital basado en riesgos. Al cierre de 2016, México fue el primer país en acogerse de manera integral al marco regulatorio de *Solvencia II* incorporando los estándares de los tres pilares establecidos por la normativa (INESE, 2017).

Lo mismo ocurre con países como es el caso de Chile, Brasil, Perú, Colombia que se encuentran gestionando la implementación paulatina del esquema de capital basado en riesgos. La aplicación de la normativa, para algunos de estos países será parcial, acogiéndose a algún pilar en específico o enfocándose en un riesgo en particular (riesgo operacional, riesgo de contraparte, etc.), esto se puede notar en Chile y Brasil que emplearán una metodología que añade un componente técnico similar a la fórmula usada en *Solvencia II* (INESE, 2017).

Por otro lado, resumiendo la forma de cálculo de la pensión por jubilación que emplea la Seguridad Social Ecuatoriana, en primer lugar toma los 5 mejores años donde los promedios de salarios de cada cotizante hayan sido los más altos para calcular el promedio aritmético y obtener una base de cálculo. En segundo lugar, multiplica el porcentaje de la base de cálculo por el coeficiente anual de cotización que obedece principalmente a los años de imposición de cada cotizante (IESS, 2020); de manera que el sistema no es actuarialmente justo, es decir, no hay una equivalencia financiera - actuarial entre las primas y las prestaciones de un determinando colectivo en un horizonte de tiempo establecido (Vidal-Meliá, 2017)

Además, la Seguridad Social tampoco considera la evolución de la mortalidad a la hora de fijar las pensiones para sus jubilados, por ejemplo, las tablas de mortalidad de la Seguridad Social vigentes fueron construidas con información anterior al año 2001[1], afectando en el cálculo de la pensión, como mitigante la normativa de *Solvencia II* podrá cuantificar dichos gastos adicionales, en los que puede incurrir la Seguridad Social en dicha evolución, evitando posibles pérdidas no esperadas.

1.3. Objetivo General

Aplicar el método de cálculo que propone el marco de *Solvencia II* en el sub-módulo del riesgo de longevidad en el sistema de pensiones ecuatoriano, bajo el escenario de capitalización individual.

1.4. Objetivos Específicos

- Comparar la metodología utilizada para el cálculo de pensiones de la Seguridad Social con una alternativa actuarialmente justa como lo es el sistema de capitalización individual, y evaluar los impactos.

- Calcular el capital de solvencia requerido que la Seguridad Social debería conservar ante un posible riesgo de longevidad en el Ecuador.

- Otorgar un análisis actuarial cuantitativo que establezca referencias para la Seguridad Social bajo *Solvencia II*, con los parámetros de justicia y equivalencia actuarial.

[1]Según se estableció en la resolución del Consejo Directivo del Instituto Ecuatoriano de Seguridad Social en la sesión celebrada el 11 de Octubre del 2005 (C.D 100)

1.5. Software R

R es un lenguaje de programación para la computación, inicialmente fue diseñado por Robert Gentleman y Ross Ishaka; el análisis estadístico, la manipulación y visualización de datos son uno de los entornos de ejecución que este lenguaje aprovecha (The R Foundation, 2021). Actualmente, es un proyecto colaborativo de GNU como software libre bajo los términos de la "Free Software Foundation", su sintaxis se emplea en el lenguaje "S"desarollado en Bell Laboratories (antes AT&T) por John Chambers y sus colegas, se compila y se ejecuta en varias plataformas UNIX y sistemas similares Linux, Windows y MacOS (The R Foundation, 2021).

R es un pilar fundamental para la ciencia de datos debido a que es altamente extensible, esto ocasiona que los usuarios que deseen implementar nuevas funciones o paquetes lo puedan realizar sin ninguna limitación lo que hace que R sea un conjunto mas rico de capacidades constantemente. R por medio de CRAN[2] actualiza su código y proporciona a los usuarios toda la documentación en todo el mundo mediante el sitio web *https://cran.r-project.org/*.

Actualmente R es utilizado por varias industrias para el análisis estadístico, cuenta con más de 15 000 paquetes disponibles con amplias funciones relacionadas a técnicas de análisis de datos las cuales se han desarrollado por un sin número de miembros de la comunidad de R en el transcurso del tiempo.

1.5.1. RStudio

Rstudio es un entorno de desarrollo integrado (IDE) para R. Una vez que el computador reconozca el lenguaje de programación R se lo puede ejecutar usando RStudio, este se encuentra disponible en su versión gratuita y de pago para Windows, Linux y MacOS en el siguiente enlace *https:/www.rstudio.com/products/rstudio/*.

Hay un sin número de ventajas que RStudio ofrece, entre ellas posee un entorno amigable para el usuario a la hora de implementar código haciéndolo más sencillo que el entorno original de R. Otra característica importante es que admite la creación de HTML, PDF, documentos Word y presentaciones mediante el uso de *R Markdown* e inclusive apli-

[2]CRAN: Comprehensive R Archive Network

caciones interactivas web como dashboards con el servidor *Shiny*, en resumidas palabras RStudio integra las herramientas que usa R en un solo entorno, permitiendo una navegación más fluida a archivos, funciones y diversos modos de presentaciones.

1.5.2. ¿Por qué R?

A continuación algunas características por las que se escogió el software estadístico R en base a lo expuesto por Wickham, H. (2019) en el libro "Advanced R".

- R es open source, es decir, es de código abierto y además está disponible para todas las plataformas fundamentales tales como Windows, Mac y Linux.
- Contiene un sin número de paquetes para modelamiento estadístico, aprendizaje automático, visualización e importación, big data y cálculos actuariales.
- Potentes herramientas para visualización de resultados, tales como shiny, Rmarkdown. Una base sólida de programación funcional.

1.5.3. Paquete lifecontingencies

Se utilizó el paquete llamado *lifecontingencies* por sus amplias funciones relacionadas al cálculo de matemática financiera y actuarial, fundamentales para el desarrollo de este trabajo.

Su instalación se la efectúa mediante el uso del comando *install.packages()* donde se descarga de la página oficial **CRAN** toda la información y versión necesaria hacia el sistema, para hacer uso de toda su funcionalidad basta realizar el llamado desde la consola de RStudio mediante el comando *library()* como se muestra a continuación:

```
>> install.packages("lifecontingencies", dependences = TRUE)
>> library("lifecontingencies")
```

Capítulo 2

Conceptos fundamentales

En este capítulo se abordarán los conceptos fundamentales sobre matemática financiera, matemática actuarial y se expondrán detalles de como la esperanza de vida y el riesgo de longevidad afecta al los sistemas de pensiones mundiales y en especial al de la población ecuatoriana. Además, también se específica el sistema de pensiones que se encuentra en vigencia en el Ecuador así como los rasgos más importantes que emplea la normativa de *Solvencia II* en las empresas aseguradoras y sistemas de pensiones.

2.1. Fundamentos de matemática financiera

A continuación describiremos los fundamentos principales de la matemática financiera que dan paso a procesos de cálculo en un entorno actuarial. Para ello se supondrá un ambiente de certidumbre, es decir, se conoce con total seguridad el valor que tomarán las variables económicas en el futuro y, además supondremos la inexistencia de oportunidades de arbitraje[1] en la economía (Navarro E, 2001).

2.1.1. Interés y tipos de interés

El término interés lo definiremos como "el valor de dinero a pagar por la colocación de capitales ajenos durante un periodo de tiempo t determinando"(Navarro E, 2001). El interés depende de varios factores los cuales son:

- La cantidad de capital cedido comúnmente denotado por C_0.
- El plazo de tiempo del cual es cedido el capital, generalmente en años y se denota como t_n o por simplicidad únicamente n.

[1]La hipótesis de oportunidad de arbitraje expresa que dos operaciones equivalentes deben generar el mismo rendimiento.

- El tipo de interés que se debe cancelar por unidad de tiempo y unidad de capital monetario, denotado por I.

Una representación gráfica de la generación de interés sería:

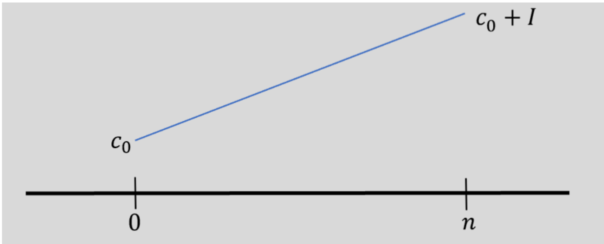


Figura 2.1: Esquema de la generación de interés

Fuente: Elaboración propia

Es importante mencionar que el tipo de interés viene determinado por: la oferta y la demanda de dinero en la economía, es decir, depende de la política monetaria y fiscal y, la expectativa de los agentes económicos sobre el futuro de la actividad económica (Navarro E, 2001).

2.1.2. Leyes de capitalización

Una vez definido el interés, motiva responder a la siguiente pregunta: ¿cómo se determina la cantidad de la recompensa por disponer de un capital C_0 durante un periodo de amplitud de n años?. Para ello existen las leyes de capitalización, estas se utilizan para plantear operaciones en las que un individuo *presta* a otro un capital de cuantía C_0 en un tiempo actual t_0 de manera que este último le devuelva en un tiempo $t_1 > t_0$ el capital más una recompensa de interés I de cuantía, es decir, el objetivo de las leyes de capitalización consisten en la entrega de un capital de cuantía C_0 en t_0 a cambio de un capital de cuantía $C_0 + I$ en t_1 (Navarro E, 2001).

Al término C_n se lo conoce como *valor final* o *valor futuro*. En la práctica existen dos tipos de capitalización: el régimen de capitalización simple y el régimen de capitalización compuesta.

2.1.2.1. Régimen de capitalización simple

En el régimen de capitalización simple el interés I se determina de forma proporcional al capital cedido y al periodo de tiempo pactado que se dispone del capital C_0, de manera que lo podemos formular como (Navarro E, 2001):

$$I = C_0 \cdot i \cdot n \tag{2.1}$$

Siendo,

- C_0: La cuantía del capital cedido expresado en unidades monetarias.
- i: El tipo de interés pactado.
- n: El periodo de tiempo que se dispondrá del capital.

Así, utilizando la ecuación (2.1) el capital cedido C_0 luego de n periodos de tiempo estará representado por:

$$\begin{aligned} C_n &= C_0 + I \\ &= C_0 + (C_0 \cdot i \cdot n) \\ &= C_0 \cdot (1 + i \cdot n) \end{aligned} \tag{2.2}$$

Notemos que tanto el interés como el periodo deben mantener concordancia de modo que, si el tiempo se expresa en años (n), el tipo de interés (i) deberá ser anual. Existen dos tipos de duración que se puede emplear en operaciones financieras: a) año natural o base 0, es aquella en la cual el número de días de la operación se la divide entre 365 días (366 en el caso de ser año bisiesto) y, b) año comercial o base 5, el cual se considera el número de días de la operación entre 360 días (González V, 1992).

Ejemplo 2.1. *Un individuo solicita a una entidad financiera un capital de \$ 9 000 durante un periodo de 28 días, la operación ha sido pactada bajo el régimen de capitalización simple y el tipo de interés anual del 5 %. Considerando el año natural, determine la cantidad que deberá cancelar el individuo a la entidad al finalizar la operación financiera.*

Desarrollo. Notemos que el tipo de interés es anual y el periodo de tiempo están expresados en días, estos deben mantener concordancia en consecuencia, 28 días lo podemos expresar en años naturales como $\frac{28}{365}$ entonces, utilizando la ecuación (2.2) el individuo al finalizar la operación deberá cancelar:

$$\begin{aligned} C_{\frac{28}{365}} &= 9000 \left[1 + (0.05)\left(\frac{28}{365}\right)\right] \\ &= \$\ 9\ 034.52 \end{aligned}$$

□

El tipo de interés se lo puede dividir en subperiodos de amplitud $1/m$ con $m \in \mathbb{N}$ por consiguiente, el tipo de interés i expresado en las nuevas unidades de tiempo se lo llama *tipo de interés subperiodal* y bajo el régimen de capitalización simple debe cumplir la siguiente igualdad (Navarro E, 2001):

$$I = C_0 \cdot i^{(m)} \cdot n^{(m)} = C_0 \cdot i \cdot n \tag{2.3}$$

Siendo $n^{(m)} = n \cdot m$, la nueva unidad de tiempo. Así, de la ecuación (2.3) el interés subperiodal esta dado por:

$$i^{(m)} = \frac{i}{m} \tag{2.4}$$

2.1.2.2. Régimen de capitalización compuesta

A diferencia de la capitalización simple, la capitalización compuesta tiene como fin capitalizar a parte del monto cedido, el interés, de manera que en cada unidad de tiempo este incremente progresivamente (González V, 1992).

Así, definiendo un capital inicial C_0 al finalizar una unidad de tiempo se convierte en un nuevo capital $C_1 = C_0 + I_1$ con $I_1 = C_0 \cdot i$ y sobre este valor nuevamente se generan interés $C_2 = C_1 + I_2$ con $I_2 = C_1 \cdot i$ así sucesivamente hasta n periodos, es decir, el n-ésimo término viene dado por $C_n = C_{n-1} + I_n$ y, a su vez $I_n = C_{n-1} \cdot i$ reemplazando recursivamente se tiene:

$$C_n = C_0 \cdot (1+i)^n \tag{2.5}$$

Y, por lo tanto el interés se calcula como:

$$I = C_0 \left[(1+i)^n - 1\right] \tag{2.6}$$

Ejemplo 2.2. *Una entidad financiera remunera una cuenta de depósito a un interés del 3 % anual bajo el régimen de capitalización compuesta y de base 0. Al cabo de 4 años el ahorrador decide cerrar dicha cuenta. ¿cúal es el monto que debe recibir el ahorrador si su deposito inicial fue de \$ 6 000?*

Desarrollo. De la ecuación (2.5) se obtiene:

$$
\begin{aligned}
C_4 = &\ 6000\,(1+0.03)^4 \\
= &\ \$\ 6\,753.05
\end{aligned}
$$
□

De la misma manera que en el régimen de capitalización simple, el régimen de capitalización compuesta también se lo puede dividir en subperiodos $1/m$ con $m \in \mathbb{N}$ de modo que, el interés subperiodal $i^{(m)}$ verifique la siguiente igualdad (Navarro E, 2001):

$$I = C_0\left[\left(1+i^{(m)}\right)^{n^{(m)}} - 1\right] = C_0\left[(1+i)^n - 1\right] \tag{2.7}$$

Siendo $n^{(m)} = n \cdot m$, la nueva unidad de tiempo. Así, de la ecuación (2.7) el interés subperiodal esta dado por:

$$i^{(m)} = (1+i)^{1/m} - 1 \tag{2.8}$$

Es necesario resaltar que C_0 se lo llama *valor actual* o *valor descontado*, términos que generalmente se los utiliza para las leyes financieras de descuento, estas se las pueden obtener despejando el valor actual (C_0) de las ecuaciones (2.2) y (2.5) para el régimen de capitalización simple y compuesta, respectivamente.

2.1.3. Tipo de interés nominal

La tasa de interés nominal mide el crecimiento del dinero en m periodos de tiempo de amplitud $1/m$. A la tasa de interés nominal calculada en m fracciones del año se la denota como $j^{(m)}$, existe una equivalencia entre la tasa de interés nominal y la tasa de interés efectiva subperiodal representada por la siguiente ecuación (Navarro E, 2001).

$$i^{(m)} = \frac{j^{(m)}}{m} \tag{2.9}$$

Bajo el régimen de capitalización simple, el interés nominal es equivalente al interés efectivo distinto del régimen de capitalización compuesta, pues deben cumplir con las siguientes propiedades:

$$\left(1+\frac{j^{(m)}}{m}\right)^m = (1+i) \tag{2.10}$$

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{j^{(m)}}{m}\right)^{m}=e^{j^{(m)}} \tag{2.11}$$

La ecuación (2.10) representa una equivalencia entre la tasa de interés nominal y la tasa de interés efectiva, mientras que la ecuación (2.11) hace referencia a un interés instantáneo (Navarro E, 2001).

Por otro lado, la fuerza de interés se expresa como $\lim_{m\to\infty} j^{(m)}=\delta$ y a partir de la igualdad (2.10) y (2.11) se obtiene $\delta=ln(1+i)$.

2.1.4. Rentas financieras

Las rentas financieras siguiendo a González, V. (1992) se definen como una sucesión de capitales que deberán hacerse efectivos en determinados vencimientos. La renta está conformada por n cuantías en un intervalo de $I=[t_0,t_n]$ de tiempo, un esquema gráfico puede expresarse como:

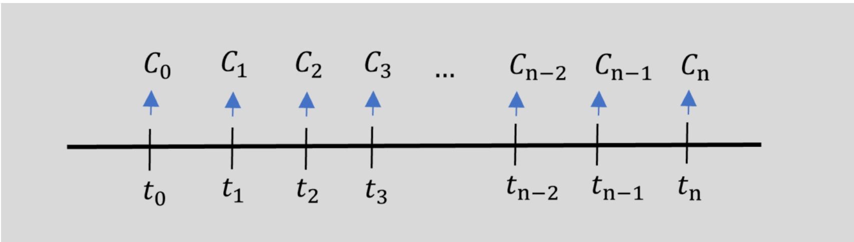


Figura 2.2: Esquema de rentas financieras

Fuente: Elaboración propia

Notemos que sus vencimientos se dividen en subintervalos $I_1=[t0,t_1]$, $I_2=[t1,t_2],\ldots,$ $I_r=[t_r,t_{r-1}]$, es decir, $I_r\in I$, no vacíos y disjuntos, que se asocian periodos de maduración. En la figura (2.2) las cuantías C_0, C_1, C_2, C_3, $\ldots$, C_{n-1}, C_n se los llama términos de la renta, t_0 origen de la renta, t_n fin de la renta y la diferencia entre el origen y el fin de la renta se denomina duración de la renta (González V, 1992). Ejemplos claros de renta se lo puede notar en: el salario que un ciudadano activo percibe cada mes, la pensión de un jubilado, mensualidades de pago a causa de prestamos, etc.

Podemos diferenciar varias clasificaciones de las rentas, en el siguiente cuadro se muestra un resumen de los diferentes criterios que cada renta nos brinda.

Criterio	Tipo de renta	Descripción
Cuantía	Constante	Las rentas en cuantía constante son aquellas que no varían sus términos, es decir, su cuantía permanece constante en el tiempo $C_1 = C_2 = \cdots = C_n$.
	Variable	Las rentas en cuantía variable son aquellas que sus términos no son constantes, varían mientras transcurre el tiempo. La variación de los términos se puede dar en progresión aritmética o en progresión geométrica.
Intervalo	Prepagables	La renta prepagable es aquella en la que los vencimientos de los capitales se dan al inicio de los subintervalos de tiempo.
	Pospagable	La renta pospagable en cambio cuando los vencimientos de los capitales se dan al final de los subintervalos de tiempo.
Duración	Temporales	Las rentas temporales son aquellas que su duración es de un tiempo n, es decir, de tiempo finito.
	Perpetuas	Las rentas perpetuas son aquellas que duran un tiempo indefinido; perduran en el tiempo.
Valoración	Inmediatas	La renta inmediata es aquella en la que la primera cuantía se hace efectiva en el primero periodo.
	Diferidas	La renta diferida es aquella en la que la primera cuantía se efectiviza en un periodo posterior al inicial (cuando menos el segundo y, está denotado por a), la diferencia entre el tiempo inicial y a se lo conoce como periodo de diferimiento.
Periodo	Anuales	Las rentas anuales son aquellas en las que el periodo es de un año.
	Fraccionadas	Las rentas fraccionadas son las que tienen un periodo inferior a un año en sus vencimiento, pueden ser mensuales, trimestrales o semestrales.

Tabla 2.1: Clasificación de las rentas financieras

Fuente: Elaboración propia a partir de González, V. (1992).

Es importante resaltar que para la valoración de rentas se utiliza el régimen de capitalización compuesta ya que la duración en la gran mayoría de casos será a un año. Las rentas se pueden expresar en varias combinaciones según cada criterio, a continuación detallaremos las rentas que más nos interesa para el desarrollo de este trabajo.

2.1.4.1. Rentas anuales, constantes e inmediatas

Una renta anual, constante e inmediata es aquella cuya cuantía C es la misma para toda su perdurabilidad, dura n periodos y cada periodo es de exactamente un año, esta renta a su vez puede ser prepagable o pospagable. Es importante mencionar que también puede ser indefinida, es decir, una duración infinita en el tiempo (Navarro E, 2001). Sin pérdida de generalidad, vamos a tomar como $C = 1$ (renta de cuantía unitaria) para el desarrollo de las diferentes rentas anuales, contantes e inmediatas.

Rentas inmediatas, temporales y pospagables

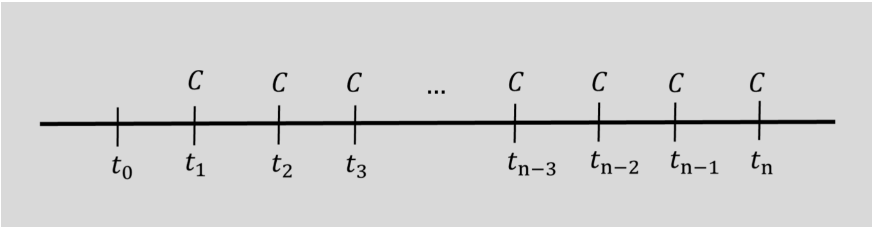


Figura 2.3: Esquema de rentas inmediatas, temporales y pospagable

Fuente: Elaboración propia

En base a la figura (2.3) notemos que el pago de las cuantías de la renta pospagable son al final de cada periodo, el valor actual de este tipo de rentas se las denota como $a_{\overline{n}|i}$ donde i hace referencia al tipo de interés y n representa el número de periodos de duración, viene dado por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} a_{\overline{n}|i} &= \frac{1}{(1+i)} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{1}{(1+i)^{n-1}} + \frac{1}{(1+i)^n} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(1+i)^k} \end{aligned} \tag{2.12}$$

La ecuación (2.12) se trata de una sumatoria geométrica finita a razón de $\frac{1}{(1+i)}$ así, recordando la fórmula de esta particular serie, se tiene:

$$S = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1} \tag{2.13}$$

donde,

- S : suma de la progresión geométrica

- a_1: primer término de la progresión
- a_n: ultimo término de la progresión
- r: razón de la progresión

De modo que, aplicando la fórmula de la serie en progresión geométrica en la ecuación (2.12) y desarrollando analíticamente se tiene:

$$\begin{aligned}
a_{\overline{n}|i} &= \frac{\dfrac{1}{(1+i)^n}\cdot\dfrac{1}{(1+i)} - \dfrac{1}{(1+i)}}{\dfrac{1}{(1+i)} - 1} \\
&= \frac{\dfrac{1}{(1+i)^{n+1}} - \dfrac{1}{(1+i)}}{\dfrac{1-(1+i)}{(1+i)}} \\
&= \frac{(1+i)^n - 1}{i\,(1+i)^n} \\
&= \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \qquad (2.14)
\end{aligned}$$

Finalmente la ecuación (2.14) representa el valor actual de una renta anual, constante, inmediata, temporal y pospagable.

Análogamente para encontrar el valor final de la renta expresado por $s_{\overline{n}|i}$ donde i hace referencia al tipo de interés y n representa el número de periodos de duración, esta viene dado por:

$$\begin{aligned}
s_{\overline{n}|i} &= (1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-3} + \cdots + (1+i) + 1 \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (1+i)^k \qquad (2.15)
\end{aligned}$$

Al igual que en el caso anterior, notemos que la serie (2.15) se trata de una suma en progresión geométrica, esta vez a razón de $(1+i)$, de modo que, aplicando la ecuación (2.13) se tiene:

$$s_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^{n-1}\cdot(1+i) - 1}{(1+i) - 1} \qquad (2.16)$$

Resolviendo la ecuación (2.16) analíticamente se puede representar al valor final de una renta anual, constante, inmediata, temporal y pospagable como:

$$s_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} \tag{2.17}$$

Resulta preciso mencionar que la relación existente entre el valor actual y el valor final de una renta anual, constante, inmediata, temporal y pospagable es:

$$a_{\overline{n}|i} = (1+i)^{-n}\ s_{\overline{n}|i} \tag{2.18}$$

Rentas inmediatas, temporales, prepagables

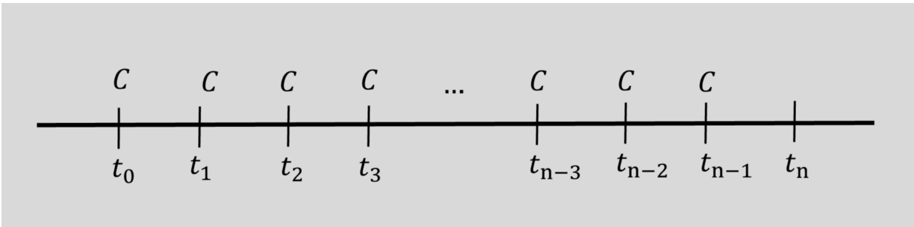


Figura 2.4: Esquema de rentas inmediatas, temporal y prepagable

Fuente: Elaboración propia

Según la figura (2.4) el pago de las cuantías de la renta prepagable son al inicio de cada periodo, el valor actual de este tipo de rentas se las denota como $\ddot{a}_{\overline{n}|i}$ donde i hace referencia al tipo de interés y n representa el número de periodos de duración, viene dado por la siguiente expresión:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = 1 + \frac{1}{(1+i)} + \frac{1}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{1}{(1+i)^{n-2}} + \frac{1}{(1+i)^{n-1}} \tag{2.19}$$

Se establece una relación entre el valor actual de una renta pospagable y prepagable, ya que la primera se vence al final de cada periodo y la segunda al inicio, entonces se capitaliza un periodo, así se mantiene la siguiente igualdad:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = (1+i)\ a_{\overline{n}|i} \tag{2.20}$$

En consecuencia, de la ecuación (2.20) se obtiene:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = (1+i)\ \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \tag{2.21}$$

La ecuación (2.21) representa el valor actual de una renta anual, constante, inmediata, temporal y prepagable.

Análogamente, el valor final de la renta denotada por $\ddot{s}_{\overline{n}|i}$ donde i hace referencia al tipo de interés y n representa el número de periodos de duración, se la obtiene como:

$$\ddot{s}_{\overline{n}|i} = (1+i)^n + (1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \cdots + (1+i)^2 + (1+i)$$

Se mantiene la siguiente relación:

$$\ddot{s}_{\overline{n}|i} = (1+i)\ s_{\overline{n}|i} \tag{2.22}$$

De manera que a partir de la ecuación (2.22), se tiene:

$$\ddot{s}_{\overline{n}|i} = (1+i)\ \frac{(1+i)^n - 1}{i} \tag{2.23}$$

Así la ecuación (2.23) es el valor final de una renta anual, constante, inmediata, temporal y prepagable. Además, cabe resaltar la conexión que existe entre el valor actual y el valor final de una renta anual, constante, inmediata, temporal y prepagable como:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = (1+i)^{-n}\ \ddot{s}_{\overline{n}|i} \tag{2.24}$$

Rentas inmediatas, perpetuas y pospagables

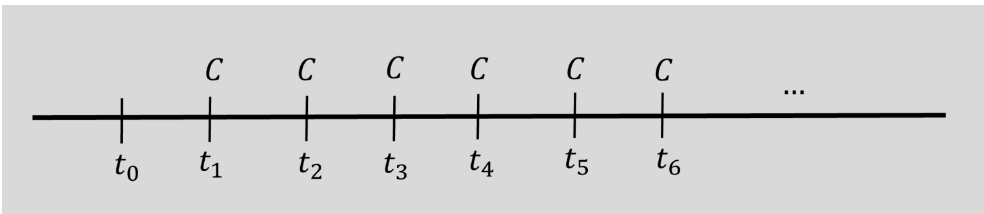


Figura 2.5: Esquema de rentas inmediatas, perpetuas y pospagable

Fuente: Elaboración propia

Tomando como referencia a la figura (2.5), una renta perpetua es aquella que tiene un número infinito de términos, en este caso, tratándose de una renta perpetua pospagable pues sus vencimiento son al finalizar cada periodo, se denota como $a_{\overline{\infty}|i}$ y esta representada como:

$$a_{\overline{\infty}|i} = \frac{1}{(1+i)} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \cdots \tag{2.25}$$

Este tipo de renta se la obtiene aplicando el límite cuando n tiende al infinito de una renta temporal pospagable, así:

$$\begin{aligned} a_{\overline{\infty}|i} &= \lim_{n\to\infty} a_{\overline{n}|i} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \\ &= \frac{1}{i} \end{aligned} \tag{2.26}$$

Donde la ecuación (2.26) corresponde al valor actual de una renta inmediata, perpetua y pospagable.

Rentas inmediatas, perpetuas y prepagables

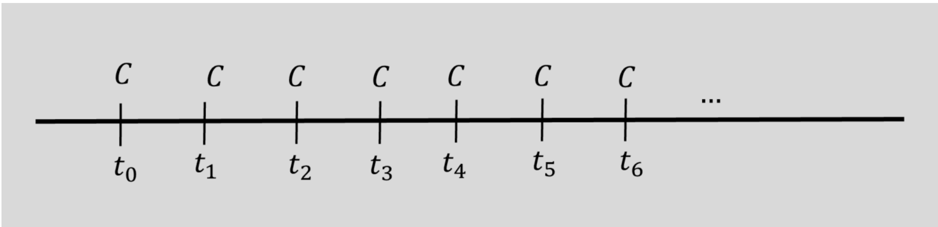


Figura 2.6: Esquema de rentas inmediatas, perpetuas y prepagable

Fuente: Elaboración propia

Según la figura (2.6) una renta perpetua pospagable tiene sus vencimiento al iniciar cada periodo, se denota como $\ddot{a}_{\overline{\infty}|i}$ y esta se la puede expresar:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = 1 + \frac{1}{(1+i)} + \frac{1}{(1+i)^2} + \cdots \tag{2.27}$$

De manera similar al caso de una renta perpetua pospagable, la renta perpetua prepagable se la adquiere aplicando el límite cuando n tiende al infinito de una renta temporal prepagable como:

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{\overline{\infty}|i} &= \lim_{n\to\infty} \ddot{a}_{\overline{n}|i} \\ &= \lim_{n\to\infty} (1+i)\ \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{1+i}{i} \end{aligned} \tag{2.28}$$

Donde la ecuación (2.28) corresponde al valor actual de una renta inmediata, perpetua y prepagable. Un valioso punto a destacar es que para el caso de una renta perpetua solo tiene sentido calcular el valor actual dado que se desconoce el valor final de la renta.

2.1.4.2. Rentas anuales, constantes y diferidas

Se define una renta diferida aquella que han de pasar h periodos después de su valoración para que sus cuantías empiecen a vencer (González V, 1992). Al igual que una renta anual, constante e inmediata, estas también pueden ser temporales o perpetuas y a su vez prepagables o pospagbles. Sin pérdida de generalidad para el desarrollo de este tipo de rentas vamos a suponer que $C = 1$ (renta diferida unitaria).

Rentas diferidas, temporales y pospagables

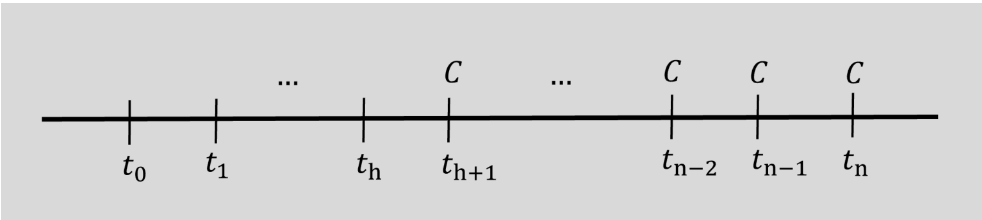


Figura 2.7: Esquema de rentas diferidas, temporales y pospagable

Fuente: Elaboración propia

Según la figura (2.7) notemos que es una renta diferida en h periodos, temporal y pospagable pues sus cuantías vencen al final de cada uno de sus periodos. El valor actual de está renta se la denota como ${}_{h|}a_{\overline{n-h|}i}$ y está dada por:

$$ {}_{h|}a_{\overline{n-h|}i} = (1+i)^{-h}\ a_{\overline{n-h|}i} \tag{2.29}$$

Donde $a_{\overline{n-h|}i}$ se la puede deducir de la ecuación (2.14) y, el término $\frac{1}{(1+1)^h}$ se lo denomina *factor de descuento financiero* y se lo denota como v.

A su vez, el valor final de esta renta se la denota como ${}_{h|}s_{\overline{n-h|}i}$ y por la ecuación (2.18) se sigue:

$$ {}_{h|}s_{\overline{n-h|}i} = (1+i)^{n}\ {}_{h|}a_{\overline{n-h|}i} \tag{2.30}$$

En consecuencia de las ecuaciones (2.29) y (2.30), el valor final de una renta diferida h

periodos, temporal y pospagable es:

$$ {}_{h|}s_{\overline{n-h}|i} = (1+i)^{n-m}\ a_{\overline{n-h}|i} \tag{2.31} $$

Rentas diferidas, temporales y prepagables

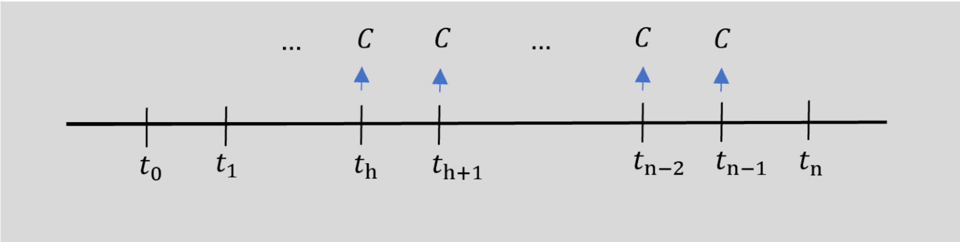


Figura 2.8: Esquema de rentas diferidas, temporales y pospagable

Fuente: Elaboración propia

De acuerdo a la figura (2.8) es una renta diferida en h periodos, temporal y prepagable, sus cuantías vencen al inicio de cada periodo. El valor actual de esta renta se la denota como ${}_{h|}\ddot{a}_{\overline{n-h}|i}$ y está dada por:

$$ {}_{h|}\ddot{a}_{\overline{n-h}|i} = (1+i)^{-h}\ \ddot{a}_{\overline{n-h}|i} \tag{2.32} $$

A su vez, el valor final de esta renta se la expresa como ${}_{h|}\ddot{s}_{\overline{n-h}|i}$ y está dada por la siguiente relación:

$$ \begin{aligned} {}_{h|}\ddot{s}_{\overline{n-h}|i} &= (1+i)^{n}\ {}_{h|}\ddot{s}_{\overline{n-h}|i} \\ &= (1+i)^{n-h}\ \ddot{s}_{\overline{n-h}|i} \end{aligned} \tag{2.33} $$

Rentas diferidas, perpetuas

Las rentas perpetuas se las pueden conseguir utilizando el factor de descuento mencionado anteriormente y las ecuaciones (2.26) para el caso de una renta diferida, perpetua y pospagable y, la ecuación (2.28) para el caso de una renta diferida, perpetua y prepagable. Por lo tanto, estas vienen dadas por:

$$ {}_{h|}a_{\overline{\infty}|i} = (1+i)^{-h}\ a_{\overline{\infty}|i} \tag{2.34} $$

$$ {}_{h|}\ddot{a}_{\overline{\infty}|i} = (1+i)^{-h}\ \ddot{a}_{\overline{\infty}|i} \tag{2.35} $$

2.2. Fundamentos de matemática actuarial

El estudio de la supervivencia en *la biometríca humana* es parte de la Estadística Actuarial y se encarga fundamentalmente de estudiar y relacionar conceptos de la misma mediante lo que se conoce como *modelo biométrico* (Ayuso M, 2007).

2.2.1. Modelo biométrico

Un modelo biométrico es un proceso estocástico, en su estructura forma parte una variable aleatoria X que la llamaremos *edad de fallecimiento*, esta variable aleatoria representa el tiempo biológico de un individuo desde su nacimiento hasta su fallecimiento (Ayuso M, 2007). La variable aleatoria edad de fallecimiento está definida en el intervalo $[0, \infty^{+}[$, sin embargo, comúnmente en la práctica existe un límite w el cual representa la edad máxima que un individuo alcanzaría a vivir, conocida como infinito actuarial, de modo que, el campo de variación de X sería en el intervalo $[0, w]$ (Sandoya M, 2007).

2.2.1.1. Función de fallecimiento

La función de distribución de la variable aleatoria *edad de fallecimiento* representada por $F(x)$ se define como:

$$F(x) = P[X < x], \qquad \text{para todo } x \geq 0 \tag{2.36}$$

La ecuación (2.36) considera la probabilidad de que un individuo no supere una edad x, dicha función se la conoce como *función de fallecimiento* de la cual podemos mencionar las siguientes propiedades (Ayuso M, 2007):

- $F(0) = 0$
- $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$
- F es una función no decreciente
- F es una función continua por la derecha

Una vez definida la función de fallecimiento, se deben mencionar las hipótesis en las que descansa el modelo biométrico (Ayuso M, 2007):

- **Homogeneidad:** El comportamiento estadístico de la edad de fallecimiento es idéntico para todos individuos, en consecuencia forman un grupo homogéneo, es decir, la función de fallecimiento X es la misma para todos. Formalmente, dadas dos edades de fallecimiento X_i y X_j, con $i \neq j$:

$$F_{X_i}(x) = F_{X_j}(x) = F(x), \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^+ \tag{2.37}$$

- **Independencia:** Las variables que describen las edades de fallecimiento de distintos individuos son estadísticamente independientes. Formalmente dadas dos edades de fallecimiento X_i y X_j, con $i \neq j$:

$$F_{X_i|X_j=y}(x) = F(x), \qquad \text{para todo } x, y \in \mathbb{R}^+ \tag{2.38}$$

  Es decir, las probabilidades de fallecimiento para un individuo no dependen de la edad de fallecimiento de otro individuo cualquiera.

- **Estacionaridad:** Las probabilidades biométricas sobre los individuos no dependen de las fechas de nacimiento, si no únicamente de las edades en las que se encuentran cruzando. Un ejemplo de aquello es un individuo que nació en el año 1995 y fallece en el año 2020, tiene la misma probabilidad que un individuo que nació en el año 1991 y fallece en el año 2016; ambos individuos con edad de 25 años. Es importante mencionar que en la actualidad esta hipótesis ya no se aplica debido a la introducción de tablas de mortalidad dinámicas.

2.2.1.2. Función de supervivencia

En este apartado se enuncia la función de supervivencia $S(x)$ que representa la probabilidad que un individuo llegue a vivir hasta una edad x, mantiene una relación con la función de fallecimiento pues esta se expresa como (Ayuso M, 2007):

$$S(x) = 1 - F(x), \qquad \text{para todo } x \geq 0 \tag{2.39}$$

La función de supervivencia por su parte, cumple con las siguientes propiedades (Ayuso M, 2007):

- $S(0) = 1$
- $\lim\limits_{x \to \infty} S(x) = 0$
- S es una función monótona decreciente

- La probabilidad de que un recién nacido fallezca entre x y y años, sobreviviendo a la edad de x y esta viene dada por:

$$\begin{aligned}
P[x < X \leq y \,|\, X > x] &= \frac{P[x < X \leq y]}{P[X \geq x]} \\
&= \frac{F(y) - F(x)}{1 - F(x)} \\
&= \frac{S(x) - S(y)}{S(x)}
\end{aligned} \tag{2.40}$$

2.2.1.3. Vida residual

La vida residual la definiremos como una variable aleatoria que simboliza el tiempo que le resta a un individuo de edad x alcanzar la edad de fallecimiento X, la denotamos como $T(x)$ y se expresa como (Sandoya M, 2007):

$$T(x) = X - x, \qquad X > x \tag{2.41}$$

Se define sobre el conjunto $[0, w - x]$ donde w denota la edad máxima que puede alcanzar un individuo. La función de distribución de la variable aleatoria vida residual se denota como $F_T(t)$ y representa la probabilidad que un individuo fallezca antes de los t años dado que sobrevivió a la edad de x años viene dada por:

$$\begin{aligned}
F_T(t) &= P[T(x) \leq t] \\
&= P[X - x \leq t \,|\, X > x] \\
&= \frac{P[x < X \geq x + t]}{P[x > x]} \\
&= \frac{F(x+t) - F(x)}{1 - F(x)}
\end{aligned} \tag{2.42}$$

Por otra parte, la probabilidad que un individuo sobreviva t años dado que sobrevivió a la edad de x años se denota como $S_T(x)$ y viene expresada como:

$$\begin{aligned}
S_T(t) &= 1 - F_T(t) \\
&= 1 - \frac{F(x+t) - F(x)}{1 - F(x)} \\
&= \frac{1 - F(x+t)}{1 - F(x)} \\
&= \frac{S(x+t)}{S(x)}
\end{aligned} \tag{2.43}$$

A continuación, un esquema que relaciona la variable vida residual con la variable edad de fallecimiento.

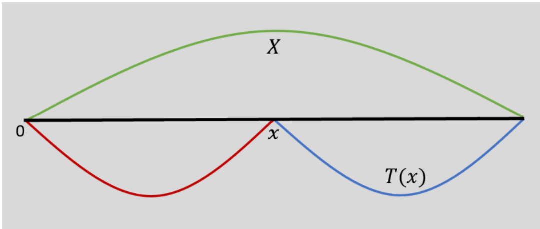


Figura 2.9: Esquema de la variable vida residual

Fuente: Elaboración propia

En matemática actuarial normalmente se calculan las probabilidades sobre la variable aleatoria $T(x)$ por lo cual es necesario detallar las notaciones de uso frecuente que se utilizan para su cálculo (Sandoya M, 2007).

- La probabilidad que un individuo de edad x fallezca en t años se denota por:

$$ {}_tq_x = P[T(x) \leq t], \qquad \text{para todo } t \geq 0 \tag{2.44}$$

- La probabilidad que un individuo de edad x sobreviva t años se denota por:

$$ {}_tp_x = 1 - {}_tq_x = P[T(x) > t], \qquad \text{para todo } t \geq 0 \tag{2.45}$$

- La probabilidad que un individuo de edad x sobreviva t años más y fallezca en los siguientes n años se denota por:

$$ {}_{t|n}q_x = P[x < T(x) \leq t + n], \qquad \text{para todo } t \geq 0 \tag{2.46}$$

  A su vez, esta probabilidad cumple con las siguientes propiedades:

  - ${}_{t|n}q_x = 1 - {}_{t|n}p_x$
  - ${}_{t|n}q_x = {}_tp_x \cdot {}_nq_{x+t}$

Es habitual representar a las probabilidades de fallecimiento y supervivencia con $t = 1$ del la siguiente manera p_x y q_x en lugar de ${}_1p_x$ y ${}_1q_x$, respectivamente.

2.2.2. Tablas de mortalidad

A partir de datos demográficos y de defunciones se construyen las tablas de mortalidad o tablas de vida, estas tablas contienen tabulaciones de valores estimados de supervivencia y mortalidad de una población (Ayuso M, 2007). Una tabla de mortalidad se compone de un conjunto de funciones biométricas definidas sobre un cohorte de individuos, de estas funciones surgen las aproximaciones estadísticas a partir de las defunciones observaciones de la población en estudio. A continuación, el siguiente cuadro detalla cada una de las funciones que se consideran en las tablas:

Funciones	Descripción
x	Edad del individuo.
l_x	Tomando l_0 como el número de recién nacidos. Si $\lambda(x)$ es una variable aleatoria que expresa el número de sobrevivientes de edad x entonces $l_x = E[\lambda(x)]$ representa el número de individuos que se espera lleguen con vida a la edad de x.
d_{x+1}	Tomando δ_x como la v.a que mide el número de defunciones. Entonces $d_{x+1} = E[\delta_x]$ representa el número de individuos que se espera fallezcan entre la edad de x y $x+1$.
q_x	Representa la probabilidad de que un individuo fallezca entre la edad x y $x+1$, esta se calcula como: $$q_x = \frac{d_x}{l_x}$$
L_x	Corresponde al tiempo total vivido por los individuos, medido en años alcanzando la edad x. Se la estimada generalmente como: $$L_x = \frac{l_x + l_{x+1}}{2}$$
T_x	Se calcula de la siguiente manera, donde w es la edad máxima que puede alcanzar un individuo, $$T_x = \sum_{x}^{w} L_x$$
e_x	Representa la esperanza de vida para un individuo de edad x, se calcula como: $$e_x = \frac{T_x}{l_x}$$

Tabla 2.2: Funciones de las tablas de mortalidad

Fuente: Elaboración propia a partir de Ayuso, M. (2007).

2.2.3. Rentas actuariales

En esta sección detallaremos las prestaciones para el caso de la supervivencia de los individuos, es decir, los valores actuales de las denominadas rentas actuariales. Una definición de rentas actuariales nos menciona Ayuso, M. (2007) como una sucesión de pagos que se efectúan de manera periódica durante una determinada cantidad de tiempo, a diferencia de las rentas financieras, en estas rentas intervienen las probabilidades de fallecimiento de los individuos, para el caso particular de este trabajo se va a considerar la tarificación de las rentas utilizando el caso discreto.

Al inicio de este capítulo vimos tipos de rentas financieras, algo similar ocurre con las rentas actuariales, estas pueden ser vitalicias y temporales, que a su vez pueden ser pospagable y prepagables.

2.2.3.1. Rentas vitalicias y temporales, anuales, constantes

Una renta vitalicia consiste en el pago de una cuantía anual constante C hasta el fallecimiento del asegurado. Por otro lado, una renta temporal es aquella que tiene una duración de n años mientras viva el asegurado. El vencimiento de las cuantías para el caso de una renta vitalicia o temporal pueden ser al inicio o al final de cada periodo. Sin pérdida de generalidad vamos a tomar como $C = 1$.

Rentas vitalicias y temporales, anuales, pospagables

La representación del valor presente de una renta actuarial vitalicia pospagable se denota por a_x y considera la prima pura de la operación al final de cada periodo, esta se expresa:

$$\begin{aligned} a_x &= \sum_{k=0}^{w-(x+1)} v^{k+1} \ {}_{k+1}p_x \\ &= \sum_{k=1}^{w-x} v^k \ {}_k p_x \end{aligned} \tag{2.47}$$

Por su parte, la prima pura al final de cada periodo de una renta actuarial temporal pospagable se denota por $a_{x:\overline{n}|}$ y esta se expresa:

$$a_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \ {}_{k+1}p_x \tag{2.48}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} v^k \ {}_k p_x \tag{2.49}$$

Rentas vitalicias y temporales, anuales, prepagables

El valor presente de una renta actuarial vitalicia prepagable se denota por $\ddot{a}_x$ y considera la prima pura de la operación al inicio de cada periodo, esta se expresa:

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{w-(x+1)} v^{k+1} \ {}_{k+1}p_x \tag{2.50}$$

Por su parte, la prima pura al inicio de cada periodo de una renta actuarial temporal prepagable se denota por $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ y esta se expresa:

$$a_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \ {}_{k+1}p_x \tag{2.51}$$

2.2.3.2. Rentas vitalicias y temporales, anuales, diferidas, constantes

Una renta vitalicia diferida surge cuando la valoración es anterior al comienzo de los pagos de cuantía constante C anual, hasta el fallecimiento del asegurado. A su vez, una renta temporal diferida tiene una duración de n años mientras viva el asegurado y su valoración es anterior al comienzo de sus pagos. El vencimiento de las cuantías para el caso de una renta vitalicia o temporal diferida pueden ser al inicio o al final de cada periodo. Sin pérdida de generalidad vamos a tomar como $C = 1$.

Rentas vitalicias y temporales, diferidas, anuales, pospagables

La representación de la prima pura de una renta actuarial vitalicia pospagable, diferida m periodos se denota por ${}_{m|}a_x$ y esta se expresa:

$${}_{m|}a_x = {}_mE_x \ a_{x+m} \tag{2.52}$$

Donde ${}_mE_x = (1+i)^{-m} \ {}_mp_x$ y se lo conoce como el *factor de descuento financiero - actuarial* de m periodos.

Por su parte, la representación de la prima pura para una renta actuarial temporal pospagable, diferida m periodos se le denota por ${}_{m|}a_{x:\overline{n}|}$ y esta se expresa:

$${}_{m|}a_{x:\overline{n}|} = {}_mE_x \ a_{x+m:\overline{n}|} \tag{2.53}$$

Rentas vitalicias y temporales, diferidas, anuales, prepagables

La prima pura de una renta actuarial vitalicia prepagable, diferida m periodos se denota por ${}_{m|}\ddot{a}_x$ y esta se expresa:

$$
{}_{m|}\ddot{a}_x = {}_mE_x \ \ddot{a}_{x+m} \tag{2.54}
$$

Por su parte, la prima pura para una renta actuarial temporal prepagable, diferida m se le denota por ${}_{m|}\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ y esta se expresa:

$$
{}_{m|}\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = {}_mE_x \ \ddot{a}_{x+m:\overline{n}|} \tag{2.55}
$$

2.2.4. Reserva matemática

La reserva matemática técnicamente es la parte de la prima que debe ser utilizada para el cumplimiento de las obligaciones futuras. Considerando que no se toma en cuenta los gastos, tanto internos como externos obtendremos la prima neta, defina por L_0^n es:

$$
L_0^n = VA \ prestaciones \ aseguradas - VA \ prima \ neta \tag{2.56}
$$

Bajo la perspectiva de que la esperanza de la pérdida futura sea igual a cero al inicio del contrato, significa que:

$$
E\left[L_0^n\right] = E\left[VA \ prestaciones \ aseguradas - VA \ prima \ neta\right] = 0 \tag{2.57}
$$

Así, de acuerdo al principio de equivalencia financiera - actuarial, se obtiene:

$$
E\left[VA \ prestaciones \ aseguradas\right] = \left[VA \ prima \ neta\right] \tag{2.58}
$$

Es decir, se debe considerar un punto importante; la prima de una operación debe tener en cuenta que la esperanza de ésta se corresponde con la esperanza de las prestaciones aseguradas en la póliza. Ahora, supongamos el siguiente caso de una operación actuarial:

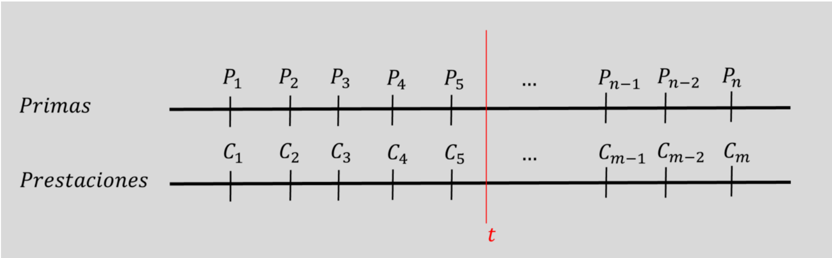


Figura 2.10: Interpretación de la reserva matemática

Fuente: Elaboración propia

Notemos que la figura (2.10) en el instante t debe cumplir la siguiente igualdad:

$$E\left[VA(beneficios)\right]_{(0,n]} - E\left[VA(primas)\right]_{(0,m]} = 0 \tag{2.59}$$

Es decir, la esperanza de todas las primas valoradas al instante t deben ser equivalentes a la esperanza de todas las prestaciones al mismo instante de tiempo. Formalmente, definiendo la variable aleatoria $_t\pi$ como la diferencia al instante t del valor actual de las prestaciones futuras y el valor actual del pago de las primas futuras por el asegurado, se tiene el valor actuarial de la reserva matemática en el instante t como la esperanza de $_t\pi$ dado $T > t$ y se denota como $_tV$ (Ayuso M, 2007).

Ahora, consideremos la ecuación (2.59), esta se la puede descomponer de la siguiente forma:

$$E\left[VA(beneficios)\right]_{(0,t]} - \left[VA(primas)\right]_{(0,t]} = E\left[VA(beneficios)\right]_{(t,n]} - E\left[VA(primas)\right]_{(t,m]}$$

$$_tV(0) = E\left[VA(beneficios)\right]_{(0,t]} - \left[VA(primas)\right]_{(0,t]} \tag{2.60}$$

A la ecuación (2.60), se la conoce como reserva matemática calculada mediante el método retrospectivo y es importante resaltar que se encuentra valorada en el tiempo t al periodo 0. Para valorar la reserva matemática al periodo t se debe utilizar el factor de actualización actuarial de modo que se tenga:

$$_tV(0) = {_tV(t)}\ {_tE(x)} \tag{2.61}$$

$$_tV(t) = \frac{_tV(0)}{_tE(x)} \tag{2.62}$$

La ecuación (2.62) es conocida como reserva matemática calcula bajo el método prospectivo.

2.3. El riesgo de longevidad y la esperanza de vida

La esperanza de vida en la población mundial, evidencia un aumento debido a la reducción en las tasas de mortalidad en todas las edades, en especial una importante disminución en el deceso de menores de cinco años según argumenta la *OECD*[2]. El efecto del incremento de la longevidad tiene varios factores entre los cuales podemos nombrar: aumento de los estándares de vida, mejora de los estilos de vida, empleos con menor esfuerzo físico en comparación a décadas pasadas, el incremento del nivel educativo y a sistemas de salud con mayor solidez al brindar una atención más accesible y de mayor calidad (Raleigh V, 2019).

Varios países, principalmente europeos a partir de siglo XX se han visto en constantes transiciones demográficas en consecuencia del descenso de la natalidad y, un incremento en la vida de los individuos de edad avanzada, en vista de aquello; numerosos investigadores han llevado a cuestionarse sobre el verdadero límite que una persona podría vivir, pues genera una incertidumbre sobre la evolución que en un futuro pueda presentarse acerca del fenómeno del envejecimiento (Huaraca D, 2018). El premio Nobel de Medicina Iliá Méchnikov menciona que *"la vida humana por lo general resulta demasiado breve en relación a la cantidad de años de la cual es potencialmente capaz"*.

Por otro lado, Aubrey De Grey, gerontólogo biomédico, etiquetado como el "profeta de la longevidad", considera que se puede interrumpir el proceso de envejecimiento y afirma que un ser humano podría alcanzar los 1000 años a medida que se afiance la ciencia médica con avances para superar todas las enfermedades que los individuos pudiesen contraer a lo largo de la vida. Un ejemplo, lo menciona el Dr. Tedros Adhanom Ghebreyesus, Director General de la Organización Mundial de la Salud (OMS), afirmando que: *"en los últimos 70 años, el derecho a la salud ha servido como plataforma para lograr grandes mejoras sanitarias. En todo el mundo, la esperanza de vida ha aumentado en 25 años. Se ha erradicado la viruela y se está a punto de erradicar la poliomielitis"*. Sin embargo, a pesar de los grandes descubrimientos es posible que nuevas enfermedades surjan a lo largo de los

[2] La Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico

años azotando a la humanidad, de modo que la vida humana tiene un límite que hemos alcanzado o estaremos próximos por alcanzar.

En países desarrollados el aumento en la esperanza de vida se debe por una parte a la reducción de la mortalidad en edades mayores, en consecuencia a un aumento de la vida residual de la población. A diferencia de otros países, la disminución de la probabilidad de muerte en recién nacidos es también un factor del incremento en la esperanza de vida, a causa de los avances médicos y tecnológicos en especial en el cuidado de las mujeres embarazadas y una mejor atención al parto (López P, 2016). Es así, como la esperanza de vida en la población mundial se ha incrementado a lo largo de los años, problema que origina un riesgo latente en la población. En la figura (2.11) se presenta la evolución de la esperanza de vida de forma general a lo largo de los últimos 58 años, para dar una idea del crecimiento constante que la expectativa de vida a desarrollado a nivel mundial.

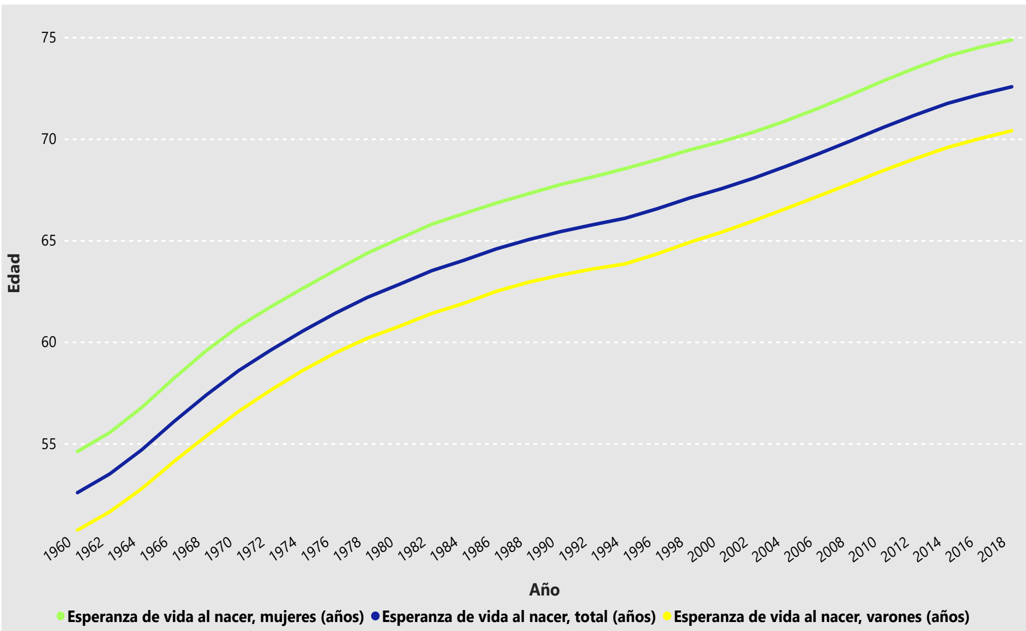


Figura 2.11: Evolución de la esperanza de vida al nacer Mundial

Fuente: Elaboración propia a partir de datos del Banco Mundial

Según datos del Banco Mundial, la esperanza de vida ha estado en un incremento constante, en 1960 la expectativa de vida total fue de 52.58 años y en el 2018 alcanzó los 72.56 años aumentando en 6 décadas casi 20 años de los cuales 5 años fueron en los últimos 20 años, lo que da una idea de con que rapidez está evolucionando la longevidad en el mundo.

Para el caso en Ecuador la esperanza de vida en el 2000 fue 72.76 años mientras que para el 2018 aumentó a 76.8 años, es decir, los habitantes ahora presentan una longevidad alta con respecto al total de la población. En el figura (2.12) la evolución de la expectativa de vida en Ecuador en los últimos 28 años.

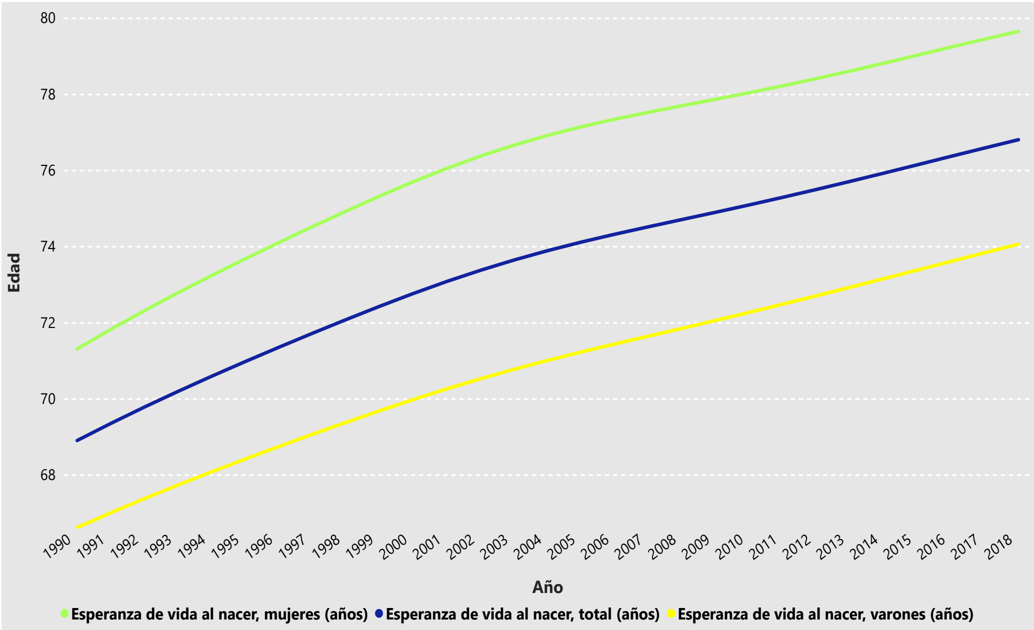


Figura 2.12: Evolución de la esperanza de vida al nacer en Ecuador

Fuente: Elaboración propia a partir de datos del Banco Mundial

En la figura (2.12) se evidencia la rapidez con la cual crece la esperanza de vida en la población ecuatoriana, de esta manera representa un reto para la Seguridad Social Ecuatoriana garantizar las pensiones para los jubilados tomando en consideración el riesgo de longevidad, pues la disminución en las tablas de mortalidad para edades avanzadas a causa de un aumento en la esperanza de vida afecta a productos en los cuales el beneficio está basado en la supervivencia, como lo son: los seguros de vida y rentas (vejez, invalidez, viudez, etc).

2.4. Sistema de pensiones de la Seguridad Social en Ecuador

Los individuos de una sociedad se encuentran expuestos a diversas necesidades sociales que podrían presentarse a lo largo de su vida, por ejemplo: la enfermedad, la viudez, la orfandad, la invalidez, la vejez, entre otros. Los sistemas públicos de seguridad social surgen con el objetivo de proteger a aquellos individuos ante una de estas posibles necesidades (López P, 2016). La Seguridad Social es el principal ente de bienestar que el Estado ofrece a sus ciudadanos y su funcionamiento se basa en las aportaciones que las personas afiliados realizan obligatoriamente. En Ecuador, la ley de la Seguridad Social (2001) contempla:

> **Art. 17.-** El IESS tiene la misión de proteger a la población urbana y rural, con relación de dependencia laboral o sin ella, contra las contingencias de enfermedad, maternidad, riesgos del trabajo, discapacidad, cesantía, invalidez, vejez y muerte, en los términos que consagra esta Ley.

El tema que vamos a desarrollar se enfoca de entre todas las contingencias sociales en la protección a la vejez, teniendo en cuenta que esta necesidad nace por la imposibilidad de los individuos de edades avanzadas en generar recursos económicos propios, causando así, la necesidad de protección (López P, 2016). Según la constitución del Ecuador (2001) en el artículo 34, se contempla:

> **Art. 34.-** El derecho a la seguridad social es un derecho irrenunciable de todas las personas, y será deber y responsabilidad primordial del Estado. La seguridad social se regirá por los principios de solidaridad, obligatoriedad, universalidad, equidad, eficiencia, subsidiaridad, suficiencia, transparencia y participación, para la atención de las necesidades individuales y colectivas.
>
> El Estado garantizará y hará efectivo el ejercicio pleno del derecho a la seguridad social, que incluye a las personas que realizan trabajo no remunerado en los hogares, actividad para el auto sustento en el campo, toda forma de trabajo autónomo y a quienes se encuentran en situación de desempleo.

Es decir, la constitución establece la obligatoriedad del Estado en proporcionar a todos los ciudadanos ecuatorianos trabajadores un Sistema de Seguridad Social y el Estado es quién debe velar por el mismo, es decir, a todos los individuos que mantienen una relación de contrato laboral con una empresa, así como de personas que quieren aportar de manera voluntaria. El sistema de financiamiento del nivel contributivo de la Seguridad Social en el Ecuador particularmente para el caso de la protección por vejez es el *sistema de reparto* y las tablas de mortalidad con las que opera este sistema fueron aprobadas por el

Consejo Directivo del Instituto Ecuatoriano de Seguridad Social en 2001 y se elaboraron con datos de afiliados y jubilados hasta dicha fecha (IESS, 2001).

En el sistema de reparto la característica principal es establecer una equivalencia entre las cotizaciones y prestaciones en un periodo de tiempo, es decir, los individuos que se encuentran afiliados financian las pensiones de los que están jubilados en el mismo instante de tiempo t y, a medida que cada cohorte vaya alcanzando su edad de jubilación las nuevas generaciones serán quienes financien las pensiones de los nuevos jubilados. Desde el punto de vista financiero, el sistema funciona bien mientras exista una equivalencia entre el número de personas afiliadas con el número de individuos jubilados en el mismo periodo y una permanencia constante a lo largo del tiempo, siendo así un sistema transversal en el sentido demográfico, tanto para las cotizaciones como para las prestaciones, otro factor importante que se debe considerar en el sistema de reparto es la estructura salarial, esta también debe permanecer constante para cada cohorte a lo largo del tiempo, en consecuencia igualmente es transversal en el sentido económico (Vidal-Meliá, 2017).

Se debe comprobar el principio de equivalencia financiera en el sistema, de modo que las aportaciones sean iguales a las prestaciones para cada periodo de tiempo i. Definamos como N_i el número de jubilados, L_i el número de individuos asegurados, P_i la pensión media de un individuo jubilado y, S_i el salario medio de cotización de un individuo activo de edad x en el periodo i, López, P. (2016) hace referencia al trabajo *"El control de estos factores es básico para la viabilidad del sistema"* del autor Vicente (2015) donde relaciona al número de individuos jubilados con la población activa llamándola tasa de dependencia β y la pensión media frente el salario medio como tasa de sustitución de ingresos α para cada periodo i, de modo que se tenga:

$$\beta_i = \frac{N_i}{L_i} \qquad\qquad \alpha_i = \frac{\overline{P_i}}{\overline{S_i}} \tag{2.63}$$

Claramente de las ecuaciones en (2.61) se desprende un supuesto muy acentuado, para que se conserve la equivalencia financiera, el número de personas afiliadas (L_i) y los pensionistas (N_i) deben permanecer constantes en cada uno de los periodos de tiempo así como el salario medio $\left(\overline{S_i}\right)$ y la pensión media $\left(\overline{P_i}\right)$ para que el sistema siga funcionando de manera adecuada, es decir, $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_i$ y $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_i$ por ende *el* *envejecimiento de la población, el descenso de la natalidad, el aumento de la esperanza de vida* y *un cambio en la estructura salarial de la población* son problemas que amenazan al sistema constantemente.

La Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico en su artículo publicado; *Panorama de la Salud: Latinoamérica y el Caribe 2020* (OECD, 2020) enfatiza que se espera que la población mayor a 65 años en el 2050 alcance una proporción de más del 18 % en los países de LAC[3] y, que la población económicamente activa en dicho año sea únicamente 4 veces mayor que la población de edad avanzada a diferencia del 2015 que se situó 9 veces mayor. En consecuencia los sistemas de salud y los sistemas de seguridad social se ven afectados por la sostenibilidad financiera a causa de los cambios demográficos de la población (OECD, 2020). Según datos de CEPAL (2019), la proporción de personas mayores de 60 años en Ecuador en el 2000 fue de 7.1 %, mientras que las proyecciones para los años 2020, 2050, 2080 y 2100 serán:

Año	Ciudadanos	Porcentaje
2020	1 940 937	11.0 %
2050	4 994 113	21.4 %
2090	7 969 517	31.6 %
2100	8 906 534	36.4 %

Tabla 2.3: Proyección de personas mayores en Ecuador

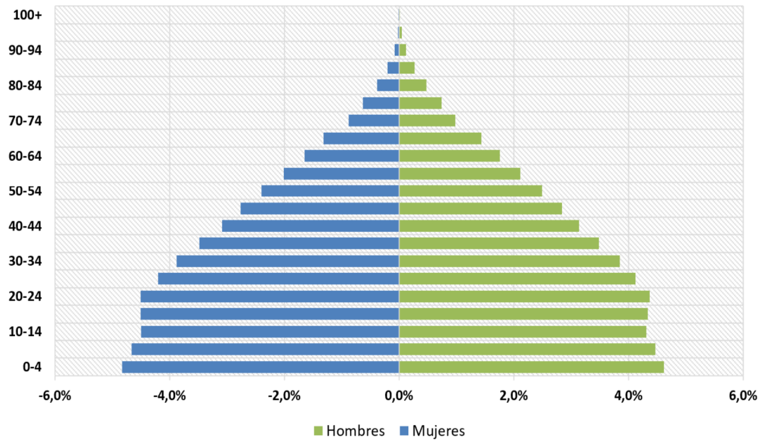
Fuente: Elaboración propia a partir de datos del CEPAL (2019)

Notemos que la proporción de los individuos de edad avanzada mantienen una tendencia creciente al transcurrir los años, siendo los incrementos más notorios en el periodo correspondiente a 2020 al 2050 cuyo aumento es del 150.30 %, y del año 2050 al 2090 que se estima llegue a 59.58 %.

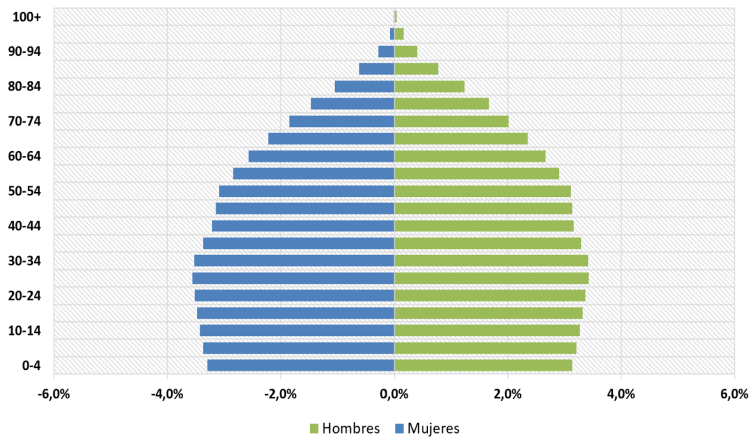
En la figura (2.13), elaboradas a partir de datos obtenidos por el INEC, se presenta la pirámide poblacional del Ecuador en los mismos años en referencia 2020, 2050, 2090 y 2100.

[3]Países de Latinoamérica y el Caribe

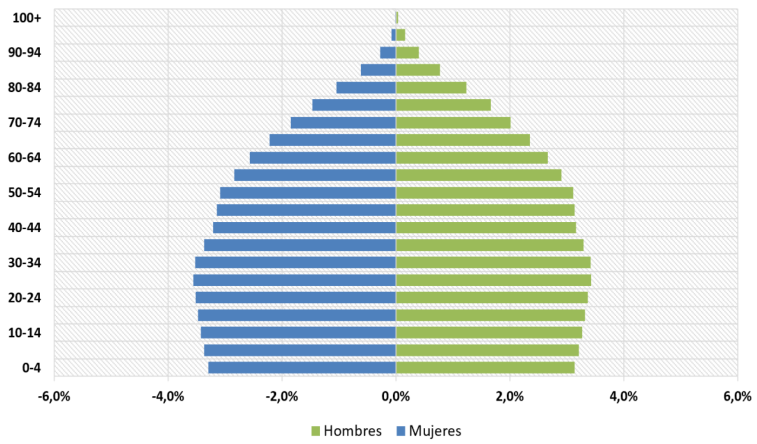
Pirámide poblacional 2020



Pirámide poblacional 2050



Pirámide poblacional 2090



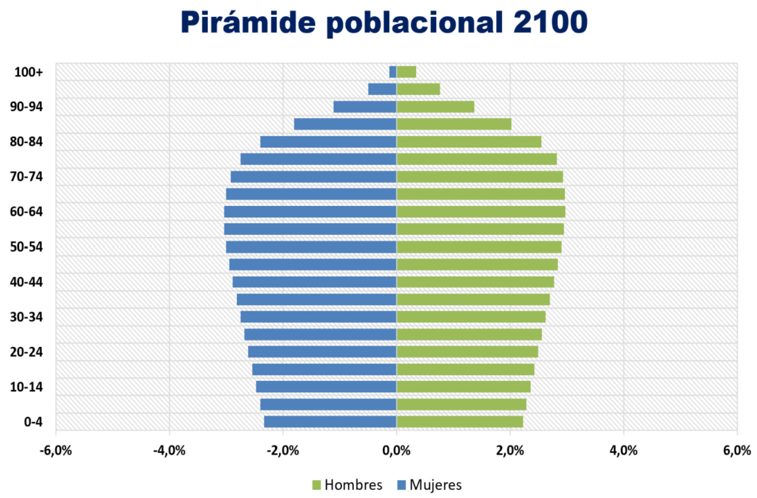


Figura 2.13: Pirámide poblacional 2020, 2050, 2090 y 2100

Fuente: Elaboración propia a partir de datos del INEC

En la figura (2.13) podemos observar como evoluciona la pirámide poblacional; en el año 2020 la concentración de ciudadanos se encuentra en edad de 0 a 24 años. Sin embargo, al avanzar los años vemos como la distribución empieza a cambiar debido a una baja natalidad. En la siguiente figura vemos como la tasa de natalidad va decreciendo en los últimos años:

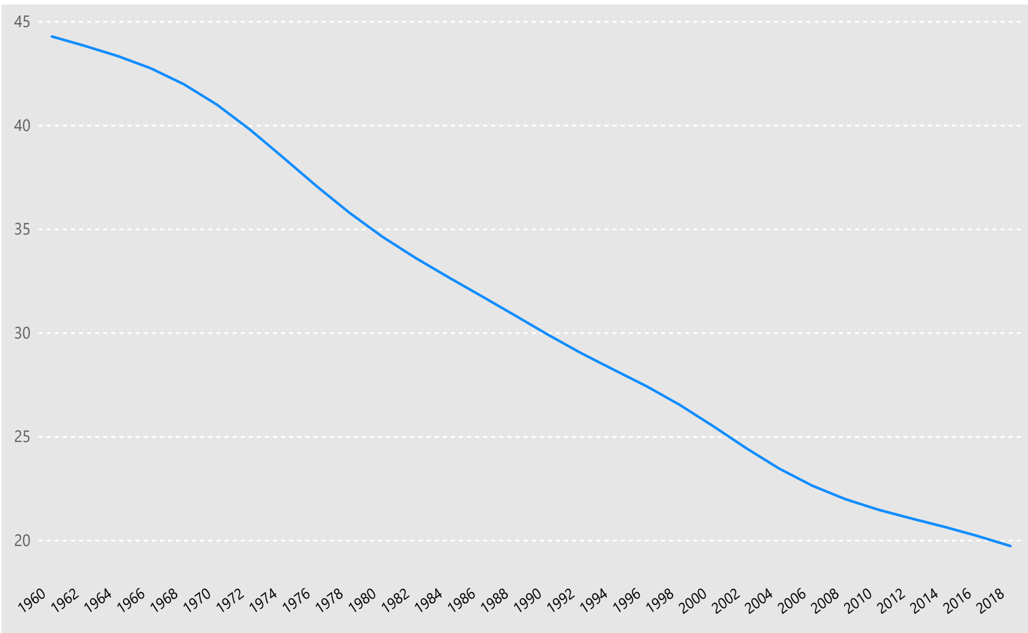


Figura 2.14: Evolución de la tasa de natalidad en Ecuador

Fuente: Elaboración propia a partir de datos del Banco Mundial

En conclusión una expectativa de vida más larga y una tasa de natalidad baja producen un estrechamiento en la pirámide más marcada, es decir, que la distribución de la población no será compensada con nuevos nacimientos.
De modo que el sistema de reparto en el futuro sería una consecuencia severa para el sistema de pensiones ecuatoriano, una posible solución es una transición del sistema de reparto a un sistema de capitalización el cual se propone en este trabajo y a la vez, se evaluará todo lo que este cambio conllevaría.

2.5. Solvencia II

Definiendo solvencia como "la facultad de disponer de suficientes activos para hacer frente a todas las obligaciones que pudieran enfrentarse en un futuro el negocio asegurador", *Solvencia II* surge de la necesidad de garantizar la transparencia y estabilidad de los mercados financieros para así sobreguardar a todos los asegurados (Del Castillo J, 2014).

Solvencia II es una normativa Europea que regula a las aseguradoras y reaseguradoras, entro en vigencia en el año del 2016 y fue aprobada por la Unión Europea y la Autoridad Europea de Seguros y Pensiones de Jubilación, esta nueva normativa se implementa para reemplazar a la anterior legislación *Solvencia I* que carecía de dinamismo ya que solo se enfocaba en los riesgos de seguro (volumen de primas y reservas técnicas), además no consideraba un marco integrado de gestión de riesgos a diferencia de *Solvencia II* que recoge la volatilidad que puede influenciar en el riesgo de mercado, riesgo de crédito y el riesgo operacional, en consecuencia la nueva normativa mejorará la gestión del riesgo de las empresas aseguradoras y de los sistemas de pensiones (López P, 2016).

Así, la normativa de *Solvencia II* lo que trata es de comprender todos los aspectos de interés sobre los posibles siniestros que en un futuro una aseguradora o un sistema de pensiones pueden estar expuestos y como estos aspectos pueden impactar en el cálculo de las reservas técnicas previamente estimadas, de modo que sea crucial contar con un enfoque que permita establecer una mejor estimación de los compromisos contraídos por las aseguradoras para lograr mitigar todos los riesgos adyacentes que implica el contrato del seguro.

Adicionalmente, *Solvencia II* propone en su normativa que el cálculo de las provisiones técnicas se las efectúen con una curva libre de riesgos, y recalca que las aseguradoras no deberán preocuparse de su obtención pues la EIOPA[4] será quien les proporcione a la finalización de cada trimestre (López P, 2016).

La normativa de *Solvencia II* se basa en tres pilares fundamentales; el primero acerca de la cuantificación de la normativa, el segundo sobre la gobernanza de la normativa y finalmente el tercero sobre su transparencia.

En la figura (2.15) se evidencia de manera más general cada pilar y lo que cada uno conlleva para la normativa de *Solvencia II* para el sector asegurador y el sistema de pensiones.

Figura 2.15: Pilares de *Solvencia II*

Fuente: Del Castillo, J (2014). El riesgo de longevidad y su aplicación práctica a Solvencia II: modelos actuariales avanzados para su gestión

De manera más detallada, la normativa de *Solvencia II* ha tenido un largo trayecto en especial en lo que se refiere al pilar I, siendo el pilar cuantitativo de la norma donde se vió sujeto a varias pruebas empíricas antes de entrar en vigencia, los denominados *QIS* [5] cuyo objetivo se vió centrado en formular y encontrar un modelo general para la estimación del nivel del capital adecuado a los riesgos asumidos por las aseguradoras, en las primeras etapas se introdujeron conceptos generales de modo que paso a paso se

[4]European Insurance and Occupational Pensions Authority
[5]Quantitive Impact Study por sus siglas en inglés

fueron afinando las expresiones analíticas y los parámetros para un cálculo correcto en lo que respecta a provisiones técnicas (Del Castillo J, 2014).

El pilar II está centrado en la supervisión del cumplimiento de los requisitos establecidos en la normativa por una parte el gobierno que será el encargado de decretar las políticas de la compañía en materia de gestión de riesgos y por otra parte, las entidades reguladoras quienes son las encargadas de controlar el cálculo de solvencia de la compañía (López P, 2016). Es decir, este pilar se concentra en supervisar a la organización para dar cumplimiento de toda la normativa.

El pilar III, se centra básicamente en la transparencia con la cual las compañías mantienen su funcionamiento, aquí la aseguradora está en la obligación de crear informes sobre la situación financiera que serán de libre acceso; elaborados mediante esquemas que permitan una comparabilidad institucional, *Solvencia II* se implementa con el fin de proteger al asegurado y que en todo momento sepa de la situación de la compañía (López P, 2016).

En este trabajo nos vamos a centrar únicamente en la parte cuantitativa de la norma, es decir, en el Pilar I donde se establece la metodología de cálculo para detectar el capital de solvencia obligatorio que la seguridad social en el Ecuador debería estimar en un supuesto caso que se adopte a la normativa *Solvencia II*.

La normativa estable dos nivel de Solvencia; el nivel inferior denominado Minimum Capital Requirement (MSR) por debajo del cual la compañía será intervenida por los entes de control y declarada insolvente y, el nivel superior Solvency Capital Requirement (SCR) para el cual la compañía hará frente a posibles desviaciones que pudiera existir durante el contrato del seguro (Del Castillo J, 2014). La directiva para el capital de solvencia obligatorio contempla:

> *"El capital de solvencia obligatorio será igual al valor en riesgo de los fondos propios básicos de una empresa de seguros o de reaseguros, con un nivel de confianza del 99,5 %, a un horizonte de un año".*

Es decir, de esta forma mediante un cálculo, la empresa aseguradora recogerá todos los riesgos cuantificables a los que se enfrenta para cumplir con todas sus obligaciones. Para que las empresas puedan cumplir con el requerimiento de capital deben hacer uso de dos metodológicas; la primera haciendo uso de la fórmula estándar que establece la normativa y la segunda, es acogerse a un modelo interno de forma parcial o total de modo que se ajuste a las necesidades de la compañía siempre y cuando este sea aprobado y evaluado previamente por la entidad reguladora (López P, 2016).

Para el cálculo de capital de solvencia obligatorio existen tres módulos principales: el capital de solvencia obligatorio por riesgo operacional, el capital de solvencia básico y el importe del ajuste destinado a tener en cuenta la capacidad de absorción de pérdidas de las provisiones técnicas y los impuestos diferidos, el resultado del SCR es la suma de estos tres módulos (López P, 2016). El capital de solvencia básico a su vez está conformado por varios sub-módulos y en cada uno de ellos se aplica un nivel de stress a las probabilidades dependiendo del tipo de riesgo al que se haga referencia, cada stress se define según lo indicado en la normativa *Solvencia II*. Por otra parte, el capital mínimo de solvencia (Minimum Capital Requirement, MSR), el cual emplea un nivel más bajo de exigencia para la compañía de modo que podría hacer frente a sus obligaciones con un nivel de confianza del 85 % en un horizonte de un año (Del Castillo, 2014).

En la actualidad, varias aseguradoras en países de Latinoamérica como miembros de la Unión Europea se encuentran dedicados a la implementación y adaptación de la normativa de *Solvencia II*, sabiendo que fruto de aquello levantarán organizaciones más firmes y sobretodo solventes, además de dinámicas con el objetivo de mitigar cualquier evento que pueda poner en riesgo el cumplimiento de las obligaciones contraídas por los asegurados o afiliados y su efectivo manejo (López P, 2016).

Capítulo 3

La fórmula estándar

3.1. Descripción de la fórmula estándar

Con la finalidad que las aseguradoras y sistemas de pensiones puedan enfrentarse a las pérdidas esperadas, la Unión Europea elige como modelo el Value at Risk (VaR) para cuantificar dichas pérdidas es por ello que el SCR[1] se fundamenta bajo esta definición, así el SCR es el Valor en Riesgo de los fondos propios a un nivel de confianza del 99.5 % durante el periodo de un año (Gatzert N, 2012).

El cálculo para encontrar el SCR es la suma de tres componentes que detallaremos a continuación (López P, 2016):

- El capital de solvencia básico obligatorio (Basic SCR).
- El capital de solvencia obligatorio por riesgo operacional.
- El importe del ajuste destinado a tener en cuenta la capacidad de absorción de pérdidas de las provisiones técnicas y los impuestos diferidos.

A su vez el cálculo del capital de solvencia básico obligatorio se divide en módulos entre los cuales tenemos:

- Riesgo de suscripción en seguros de vida.
- Riesgo de mercado.
- Riesgo de suscripción en seguros de no vida.
- Riesgo de incumplimiento de contraparte.

[1]Solvency capital requirement

Dichos riesgos utilizan unos coeficientes de correlación los cuales se especifican en la normativa de *Solvencia II* más el valor en riesgo del nivel de confianza antes mencionado, de manera que la fórmula de cálculo para cuantificar el SCR básico está definido de la siguiente manera:

$$BasicSCR = \sqrt{\sum_{i,j} Corr_{ij} \cdot SCR_i \cdot SCR_j} + SCR_{intangible} \tag{3.1}$$

De la ecuación (3.1) se especifica el factor $SCR_{intangible}$ que hace referencia al riesgo de activos intangibles. Según lo acordado en la directiva estos módulos de riesgo a su vez tienen sub-módulos, el siguiente esquema pormenoriza de manera más global todas las divisiones que integran el cálculo del SCR.

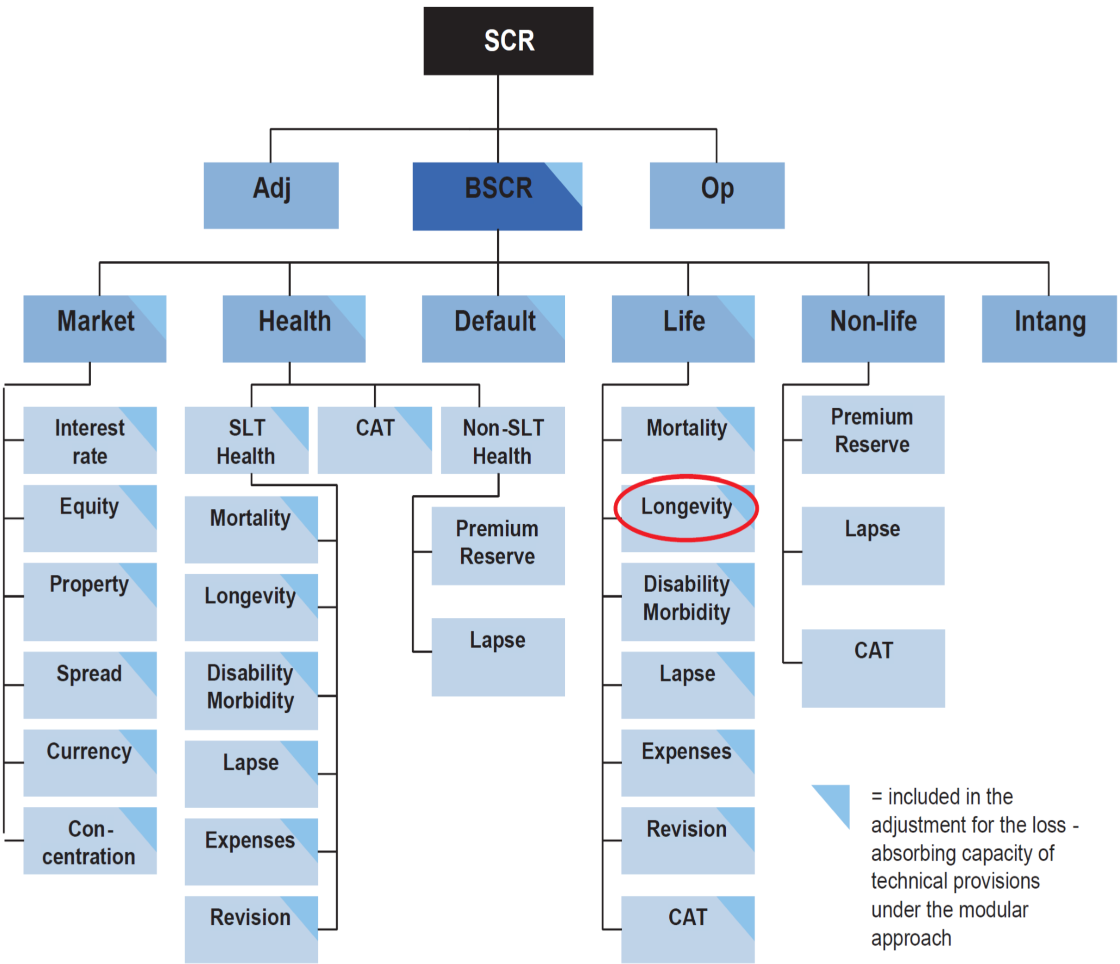


Figura 3.1: Estructura general de la fórmula del SCR

Fuente: Autoridad Europea de Seguros y Pensiones de Jubilación (EIOPA)

Este trabajo se centra en la estimación del SCR bajo el riesgo de longevidad correspondiente al módulo de vida, la normativa de *Solvencia II* define a este sub-módulo como:

> *"Riesgo de pérdida o de modificación adversa del valor de los compromisos contraídos en virtud de los seguros, debido a variaciones en el nivel, la tendencia o la volatilidad de las tasas de mortalidad, para aquellos casos en que un descenso de la tasa de mortalidad genere un aumento en el valor de los compromisos contraídos en virtud de los seguros"*

Inicialmente el riesgo de longevidad hasta comienzos del presente siglo ha sido un tema que no se ha podido investigar con profundidad, efecto de aquello existe una fuerte incertidumbre en lo que engloba este riesgo y como evolucionará en el futuro, por consiguiente la directiva de *Solvencia II* en su artículo 138 establece un nivel de prudencia al momento de calcular las provisiones técnicas (Del Castillo J, 2014).

El nivel de prudencia consiste en aplicar un shock sobre la supervivencia de los asegurados o pensionistas. Las tablas de mortalidad deben someterse al shock de longevidad que resulta ser equivalente a una reducción única, inmediata y permanente del 20 % independientemente del género, edad y duración del contrato del seguro (Del Castillo J, 2014).

Siendo así, la ecuación formulada para el cálculo del SCR de longevidad se presenta como:

$$SCR_{long}^{shock} \;=\; NAV_0 \;-\; (\, NAV_0 \,|\, shock\ longevidad\,) \tag{3.2}$$

El término NAV en la ecuación (3.2) significa Valor del Activo Neto (Net Asset Value, NAV). Resumiendo, para el riesgo de longevidad la normativa establece una reducción permanente del 20 % en las tablas de mortalidad para calcular las provisiones técnicas y que el capital de solvencia obligatorio será igual a la pérdida de fondos propios básicos resultado de aplicar dicho estrés (López P, 2016).

A causa de que la normativa *Solvencia II* maneja un enfoque conservador en lo que se refiere al shock de longevidad con el fin de proteger la exposición al riesgo de este submódulo, este shock se ve envuelto de varias críticas y de muchas discusiones en el área aseguradora.

3.2. Discusión del shock de longevidad

El shock del 20 % que se aplica a las tablas de mortalidad para el cálculo del SCR ha sido y sigue siendo una de las discusiones más relevantes de la normativa de *Solvencia II* por las empresas aseguradoras. De hecho, inicialmente este shock en los estudios de impacto cuantitativo (QIS) era aún mayor al establecido actualmente (López P, 2016).

El shock surge de una investigación realizada por Watson Wyatt acerca de las exigencias de capital en Reino Unido (ICAS[2]), se define que la reducción de las tablas de mortalidad deben tener una disminución única, inmediata y permanente en rango que va del 5 % a 35 %, luego en estudios de impacto cuantitativo en el año 2007 (QIS3) bajo análisis posteriores de las ICAS y tomando como referencia la investigación *Longevity in the* 21^{st} *century* se define que el shock de longevidad adecuado para la reducción de la mortalidad es del 25 % manteniéndose constante durante los siguientes 2 años (López P, 2016).

Finalmente, en el estudio de impacto cuantitativo realizado en el 2010 (QIS5), última valoración de la normativa *Solvencia II*, se consiguió ajustar el shock de longevidad a un 20 % siendo aún un porcentaje excesivamente conservador, sin embargo debido a que el objetivo es cubrir la exposición al riesgo de longevidad independientemente de la composición de la cartera asegurada mediante el cálculo del SCR es comprensible pensar que el shock del 20 % este sobrestimado a la realidad que maneja el mercado asegurador (Del Castillo J, 2014).

A pesar de lo conservador del shock de longevidad, en trabajos desarrollados sobre la historia del comportamiento de la expectativa de vida nunca se ha comprobado una evolución en contexto de longevidad de manera inesperada y abrupta si no una evolución progresiva, de modo que aplicar un shock único, inmediato y permanente sobre las tablas de mortalidad no resulta realista, de hecho en los Consulation Papers[3] publicados por la EIOPA se menciona que estresar las tablas de mortalidad con un shock gradual sería más adecuado que un shock constante y uniforme, así mismo hace referencia que el shock de longevidad debería ser recogido dependiendo de la edad y el género de cada asegurador o pensionista (Del Castillo J, 2014).

[2] Individual Capital Assessment Standards
[3] www.EIOPA.europa.eu

En esta discusión resulta importante responderse la siguiente pregunta, ¿Qué impacto tiene el hecho de aplicar el shock de longevidad del 20 % en las tablas de mortalidad?, para dar una idea de tal respuesta nos basamos en el trabajo realizado por Del Castillo (2014) en su investigación sobre el riesgo de longevidad bajo la normativa de *Solvencia II*, aquí utiliza los datos sobre las principales causas de mortalidad en adultos mayores a 60 años obtenidos de UK's Office for National Statistics con el fin de tener una visión más clara y tangible de lo que representa aplicar el shock del 20 % único, inmediato y permanente en las tablas de mortalidad.

El autor hace referencia que el aplicar el stress establecido por la normativa resultaría equivalente en los hombres a erradicar de un día para el otro y de forma permanente alrededor de un 60 % de enfermedades circulatorias, de manera similar en las mujeres erradicar de un día para el otro los problemas de muerte derivados del cáncer, en consecuencia los escenarios planteados son poco realistas, principalmente porque se ignora los efectos colaterales que implica el erradicar dichas enfermedades, pues la desaparición de una enfermedad supondría un incremento en otras dado que las causas de muerte no son independientes unas de otras.

De las diferentes discusiones que engloba el shock de longevidad en la normativa de *Solvencia II* y ante la transparencia e importancia de la misma se sigue examinando por parte de las compañías de seguros la metodología idónea para los requerimientos de capital obligatorio de modo que se llegue a un consenso de un shock más realista para cada uno de los riesgos a los que se expone una compañía de seguros (Del Castillo J, 2014).

Capítulo 4

Datos y sistema de capitalización

4.1. Sistema de capitalización

A partir del trabajo realizado por Vidal-Meliá (2017) se define el sistema de capitalización como aquel en que el equilibrio se establece entre el valor actual actuarial de las primas y el valor actual actuarial de las prestaciones para cada uno de los individuos o para uno de los grupos de individuos ya que existen dos métodos de sistemas de capitalización; el sistema de capitalización individual y el sistema de capitalización colectivo.

- **Sistema de capitalización individual:** En este sistema es importante la edad en que el individuo empieza a cotizar en vista de que el equilibro del mismo se estable individuo a individuo, es decir, las prestaciones futuras de cada cotizante se encuentran actuarialmente garantizadas, en ese sentido este es un sistema autosustentable debido a que no necesita que ingresen nuevas personas al colectivo aunque, siempre es importante resaltar que deben existir individuos en activo teniendo en cuenta que sin ello no habrá producción y a su vez las inversiones financieras carecerían de valor.

- **Sistema de capitalización colectiva:** Por su parte este sistema se desarrolla bajo el principio de solidaridad lo que quiere decir que todos los individuos del colectivo asumen el mismo riesgo, generalmente la prima para todo el colectivo es idéntico con independencia de la edad.

El riesgo de que el sistema colapse es menor, pero siempre puede ocurrir que el gobierno dirija los fondos incorrectamente. En este trabajo nos centraremos específicamente en el *Sistema de Capitalización Individual* y la manera que las rentas de los afiliados progresan mediante la reserva matemática.

4.1.1. Sistema de capitalización individual

Se describe el modelo mediante el cual funciona el sistema de capitalización individual, dado un colectivo de individuos de edades $x_1, x_2, \ldots, x_{h-1}, x_h$ suponiendo que la edad de jubilación es x_r, con primas constantes $P_1, P_2, \ldots, P_{h-1}, P_h$ y jubilaciones contantes $R_1, R_2, \ldots, R_{h-1}, R_h$ respectivamente, será (Vidal- Meliá, 2017):

- **Primas**

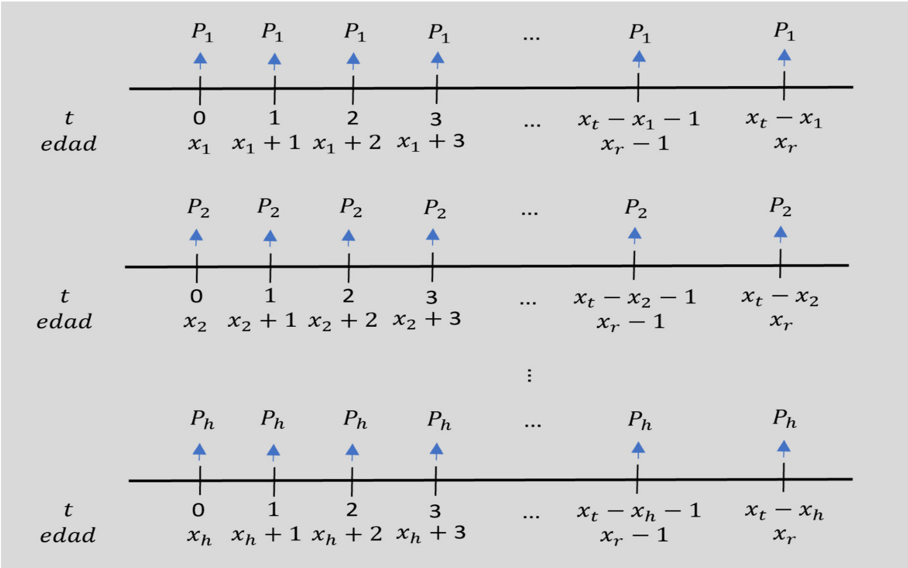


Figura 4.1: Esquema temporal de las primas

- **Prestaciones**

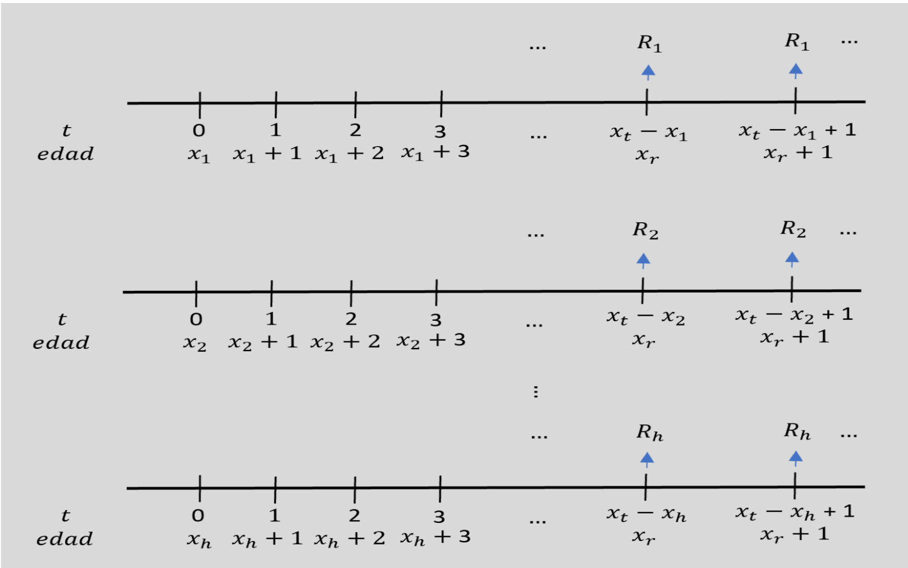


Figura 4.2: Esquema temporal de las rentas

Se enfatiza que para cada i-ésimo individuo las primas tienen una distinta duración, esta se ve afectada por la edad en que la persona empieza a cotizar con la edad de jubilación x_r. Similarmente, las prestaciones mantienen un distinto diferimiento, es decir, las rentas vitalicias tienen un diferimiento dependiendo de la diferencia de la edad del i-ésimo individuo y la edad de jubilación x_r (Vidal- Meliá, 2017).

De lo detallado anteriormente, la formulación de cada una de las ecuaciones de equivalencia son las siguientes:

$$
\begin{aligned}
P_1\, \ddot{a}_{x_1:\overline{x_r-x_1|}} &= R_1\, {}_{x_r-x_1|}\ddot{a}_{x_1} &= R_1\, {}_{x_r-x_1}E_{x_1}\, \ddot{a}_{x_r} \\
P_2\, \ddot{a}_{x_2:\overline{x_r-x_2|}} &= R_2\, {}_{x_r-x_2|}\ddot{a}_{x_2} &= R_2\, {}_{x_r-x_2}E_{x_2}\, \ddot{a}_{x_r} \\
P_3\, \ddot{a}_{x_3:\overline{x_r-x_3|}} &= R_3\, {}_{x_r-x_3|}\ddot{a}_{x_3} &= R_3\, {}_{x_r-x_3}E_{x_3}\, \ddot{a}_{x_r} \\
&\vdots \\
P_h\, \ddot{a}_{x_h:\overline{x_r-x_h|}} &= R_h\, {}_{x_r-x_h|}\ddot{a}_{x_h} &= R_h\, {}_{x_r-x_h}E_{x_h}\, \ddot{a}_{x_r}
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

donde,

- x_r : Edad de jubilación para cada individuo.
- P_i : Prima anual, constante que aporta cada individuo de edad i.
- R_i : Renta anual, contaste de jubilación para un individuo de edad i.
- $\ddot{a}_{x_i:\overline{x_r-x_i|}}$: Valor actual actuarial de una renta temporal $x_r - x_i$, anual, constante y prepagable para un individuo de edad x_i.
- ${}_{x_r-x_i|}\ddot{a}_{x_i}$: Valor actual actuarial de una renta vitalicia diferida $x_r - x_i$ periodos, anual, constante y prepagable para un individuo de edad x_i.
- ${}_{x_r-x_i}E_{x_i}$: Factor de actualización actuarial para un individuo de edad x_i y un plazo de $x_r - x_i$ periodos.
- $\ddot{a}_{x_r}$: Valor actual actuarial de una renta vitalicia, anual, constante y prepagable para un individuo de edad x_i.

4.1.2. Reserva matemática del sistema de capitalización individual

La formulación para calcular la reserva matemática que genera la rentabilidad de la operación actuarial t años después de haber cancelado la primera prima para las edades de $x_1, x_2, \ldots, x_h$ respectivamente, son (Vidal- Meliá, 2017):

$$
\begin{aligned}
{}_tV_{x_1} &= {}_{x_r-x_1-t|}\ddot{a}_{x_1+t}\, R_1 - P_1\, \ddot{a}_{x_1+t:\overline{x_r-x_1-t}|} \\
&= \ddot{a}_{x_r}\; {}_{x_r-x_1-t}E_{x_1+t} - P_1\, \ddot{a}_{x_1+t:\overline{x_r-x_1-t}|} \\
&= \frac{P_1\, \ddot{a}_{x_1:\overline{t}|}}{{}_tE_{x_1}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}_tV_{x_2} &= {}_{x_r-x_2-t|}\ddot{a}_{x_2+t}\, R_2 - P_2\, \ddot{a}_{x_2+t:\overline{x_r-x_2-t}|} \\
&= \ddot{a}_{x_r}\; {}_{x_r-x_2-t}E_{x_2+t} - P_2\, \ddot{a}_{x_2+t:\overline{x_r-x_2-t}|} \\
&= \frac{P_2\, \ddot{a}_{x_2:\overline{t}|}}{{}_tE_{x_2}}
\end{aligned}
$$

$$\vdots$$

$$
\begin{aligned}
{}_tV_{x_h} &= {}_{x_r-x_h-t|}\ddot{a}_{x_h+t}\, R_h - P_h\, \ddot{a}_{x_h+t:\overline{x_r-x_h-t}|} \\
&= \ddot{a}_{x_r}\; {}_{x_r-x_h-t}E_{x_h+t} - P_h\, \ddot{a}_{x_h+t:\overline{x_r-x_h-t}|} \\
&= \frac{P_h\, \ddot{a}_{x_h:\overline{t}|}}{{}_tE_{x_h}}
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

donde,

- P_i : Prima anual, constante que aporta cada individuo de edad i.
- R_i : Renta anual, constaste de jubilación para un individuo de edad i.
- ${}_{x_r-x_h-t|}\ddot{a}_{x_h+t}$: Valor actual actuarial de una renta vitalicia diferida $x_r - x_h - t$ periodos, anual, constante y prepagable para un individuo de edad $x_h + t$
- ${}_{x_r-x_i-t}E_{x_i+t}$: Factor de actualización actuarial para un individuo de edad $x_i + t$ y un plazo de $x_r - x_i - t$ periodos.
- $\ddot{a}_{x_i+t:\overline{x_r-x_i-t}|}$: Valor actual actuarial de una renta temporal $x_i + t$, anual, constante y prepagable para un individuo de edad $x_r - x_i - t$.

4.2. Descripción de la base de datos

Los datos que se utilizan para realizar el presente trabajo son de *La Muestra Continua de Vidas Laborales (MCVL)* de la Seguridad Social, la cual contiene una muestra representativa de individuos que estuvieron afiliados y jubilados con información a la fecha Diciembre de 2019.

Toda la información obtenida para el análisis y desarrollo del presente trabajo confirman la veracidad de los datos, los mismos que se obtuvieron muy gentilmente de una fuente anónima.

En los datos de la MCVL, para cada individuo se encuentra información como el género, la edad, el estado civil, entre otras variables demográficas referentes a la trayectoria laboral. Los datos se estructuran en cuatro tablas que se relacionan mutuamente mediante una identificación anónima que corresponde a cada individuo, además cabe mencionar que los datos incluyen información histórica de la Seguridad Social que conversa en sus archivos.

La descripción de las variables que contiene la información MCVL se detallan a continuación:

- **Tabla 1 (Personas) :** Esta tabla contiene variables como: el género de los individuos, la edad de los individuos, estado civil de los individuos, marca cuya información es referente sobre si el individuo es afiliado o pensionista, el sector consiguiente al tipo de seguro que el afiliado posee, por ejemplo: Privado, Público, Voluntario, Seguro Campesino, Trabajadoras no remuneradas del hogar, entre otros.
- **Tabla 2 (Afiliados) :** Esta tabla comprende información sobre los periodos de afiliación, las variables más relevantes son: numimp es el número de imposiciones del afiliado, feciniafi cuya información hace referencia a la fecha en la que el individuo se afilio por primera vez a la Seguridad Social, poraponor la tasa de cotización.
- **Tabla 3 (Base de cotización) :** Esta tabla contiene información referente a las cotizaciones mensuales de los individuos afiliados, las variables mas relevantes son: valsue el valor monetario del salario de los individuos afiliados, valaponor es el valor monetario que los afiliados aportan a la Seguridad Social.

- **Tabla 4 (Pensiones) :** Esta tabla engloba registros sobre la pensión que recibe cada individuo jubilado o ha percibido a lo largo de su vida, entre sus variables más relevantes se tienen: fecha inicial pensión es la que el individuo jubilado empezó a recibir la pensión, coeficiente con el cual se calculo la pensión de jubilación, promedio sueldo que representa el valor monetario del promedio del sueldo de cada individuo jubilado, valor a cobrar es el valor monetario de la pensión que recibe cada individuo jubilado, número imposiciones que cotizaron los individuos jubilados en sus años en activo, fecha a cobrar es la fecha en la que el jubilado a recibido la pensión por parte de la Seguridad Social.

Al consolidar la información, se decide excluir a los individuos afiliados del seguro campesino y las trabajadoras no remuneradas del hogar debido a que el financiamiento de las prestaciones es totalmente diferente al Seguro General Obligatorio.

4.3. Variables utilizadas

Se realiza el tratamiento de la información pertinente para el desarrollo del presente trabajo con el fin de obtener datos homogéneos para el cálculo del sub-módulo del riesgo de longevidad bajo la normativa de *Solvencia II*, en ese sentido el primer paso a seguir es la partición de los datos entre personas afiliadas y personas jubiladas. Es conveniente resaltar que para el tratamiento de la información se utilizó el ya conocido software estadístico R.

4.3.1. Tratamiento para personas afiliados

- Como un primero punto a considerar, en la tabla 1 que recoge los datos personales se han excluído a los individuos fallecidos, además en este mismo punto se filtran a las personas que a Diciembre 2019 tienen una edad superior a 20 años; edad que se ha fijado como la mínima para acceder al sistema.

- Una vez efectuado el paso anterior se supone en este trabajo que, la edad de los individuos para jubilarse es de 60 años así, el número máximo de aportaciones que estos pudieran obtener a la fecha de corte es de 40 imposiciones, de manera que se excluyen a todos aquellos que tienen como marca afiliación y han superado dicha edad.

- A continuación se realiza el cruce de información mediante el identificador anónimo que distingue a cada individuo entre el resultado de aplicar los filtros en la tabla 1 y la tabla 2 extrayendo variables como el género, edad, número de imposiciones y fecha de la primera afiliación en la Seguridad Social, obteniendo los prospectos totales susceptibles de pertenecer a la cartera.

- Finalmente, el resultado de las dos tablas anteriores se le añade la tabla 3 que hace referencia a la base de cotizaciones anuales, esta base contiene registros de aportaciones de los afiliados desde el año 2003 hasta el 2014, por consiguiente para realizar la proyección hasta el 2019 se considera la información de la tasa de incremento salarial cuyo trabajo fue realizado por el Instituto Ecuatoriano de Seguridad Social (2018) en el estudio actuarial, estos incrementos anuales se ven reflejados en la siguiente tabla:

Año	Tasa de crecimiento (%)
2011	9.06 %
2012	6.51 %
2013	6.06 %
2013	4.85 %
2014	4.85 %
2015	3.46 %
2016	1.50 %
2017	2.11 %
2018	1.88 %

Tabla 4.1: Incremento Tasa Salarial

Fuente: Elaboración propia a partir del estudio actuarial (IESS, 2018)

Logrando así consolidar la información pertinente para la elaboración de los diferentes escenarios de aplicación.

4.4. Extracción de la muestra

Según el trabajo realizado por López, P. (2016) se enfatiza que es necesario únicamente una cartera de 10 000 registros entre afiliados y jubilados, la cual menciona que es un tamaño apropiado para este tipo de simulación, por un lado es razonable pues hay una gran dificultad al momento de recolectar, validar y certificar la información de todos los individuos de modo que, se decide realizar un muestreo estratificado para obtener la cartera con la cual se trabajará en el cálculo del submódulo del riesgo de longevidad bajo la normativa de *Solvencia II*. Realizando los filtros y consideraciones de la sub-sección anterior se han obtenido un total de 163 621 individuos afiliados y a su vez un total de 52 824 individuos jubilados. Para realizar el muestreo estratificado se han tomado variables como la edad y el género siendo estas las fundamentales en cuando a estudios acerca de sistemas de pensiones y riesgo de longevidad se refiere (López P, 2016).

Así, el muestreo estratificado resulta de dividir en L subpoblaciones al total de la población de tamaño N, de modo que la suma de las subpoblaciones $N_1, N_2, \ldots, N_L$ sumen el total de la población, cada subpoblaciones se les denomina estratos y a su vez de cada una se extrae una submuestra de tamaño $n_1, n_2, \ldots, n_L$ a causa de la aplicación se obtiene una muestra total. Partiendo de la población total de N = 216 436 la cual contiene tanto individuos afiliados y jubilados, los datos se divide en $L = 8$ conglomerados distintos $L_1, L_2, \ldots, L_9, L_8$ de tamaños $N_1, N_2, \ldots, N_9, N_8$ como se muestra en la siguiente tabla.

Conglomerado	Hombres	Mujeres
De 20 a 30 años	$N_1 = 18\,780$	$N_2 = 13\,192$
De 30 a 40 años	$N_3 = 31\,344$	$N_4 = 25\,486$
De 40 a 50 años	$N_5 = 23\,496$	$N_6 = 19\,459$
De 50 a 60 años	$N_7 = 17\,436$	$N_8 = 14\,428$
Mayor a 60 años	$N_9 = 23\,779$	$N_{10} = 29\,045$

Tabla 4.2: Conglomerado de la población (N)

Fuente: Elaboración propia a partir de los datos.

El siguiente paso es obtener las submuestras de cada uno de los estrados de tal manera que la suma de ellos sume 10 000 individuos, según la muestra el porcentaje de afiliados al corte de la información es de 86.21 % mientras que los jubilados es un 13.79 % por lo cual obtendremos un total de 8 621 afiliados y 1 379 jubiladas, con la siguiente distribución:

Conglomerado	Hombres	Mujeres
De 20 a 30 años	$n_1 = 2\,026$	$n_2 = 1\,436$
De 30 a 40 años	$n_3 = 1\,833$	$n_4 = 1\,632$
De 40 a 50 años	$n_5 = 420$	$n_6 = 366$
De 50 a 60 años	$n_7 = 505$	$n_8 = 403$
Mayor a 60 años	$n_9 = 1\,099$	$n_{10} = 1\,342$

Tabla 4.3: Conglomerado de la submuestra de los estratos

Fuente: Elaboración propia a partir de los datos.

Notemos que el siguiente trabajo se enfoca en un sistema de capitalización, por lo cual solo consideraremos los individuos en esta activo, eso con el fin de calcular la rentabilidad de cada año cotizado hacia su edad de jubilación y estimar la pensión hasta su fallecimiento, es decir, se trabajará con un total de 8 621 personas. El código de R correspondiente a la implementación del muestreo estratificado se lo puede encontrar en el ANEXO A.

Capítulo 5

Cálculo del SCR del sub-módulo de longevidad

En este capítulo se realiza el cálculo del SCR correspondiente al sub-módulo de longevidad y, además se expone algunos ejemplo de funciones referentes al paquete *life-contingencies* insumo que facilitará los cálculos financieros y actuariales mediante el software estadístico RStudio. Las tablas de mortalidad utilizadas para esté capítulo son las aprobadas por el estudio *"Análisis, revisión y aprobación de la valuación actuarial del Seguro de Invalidez, Vejez y Muerte del Seguro General Obligatorio"* (IESS, 2018) y se encuentran en el ANEXO B.

5.1. Funciones del paquete lifecontingencies

5.1.1. Cálculos de matemática financiera en R

Las funciones *"annuity"* y *"accumulatedValue"*nos permiten calcular el valor actual y final, respectivamente de una renta con pagos constantes en periodos simétricamente espaciados (G.A. Spedicato, 2021). El llamado de las funciones en R responde a las siguientes lineas de código:

```
>> annuity(i, n, m, k, type)
>> accumulatedValue(i, n, m, k, type)
```

Donde sus argumentos son:

- i: El tipo de interés efectivo expresado en forma decimal.
- n: Periodo de pago.

- m: Periodo diferido, el default en este argumento es cero.

- k: La frecuencia anual de pagos.

- $type$: Tipo de pago, si se trata de una renta prepagable el argumento debe ser "due" y si se trata de una pospagable "immediate".

Ejemplo 5.1. *Un individuo piensa en realizar 36 pagos contantes al final de cada mes para obtener un crédito para la compra de un vehículo de USD 24 000 en una entidad bancaria, ¿cuál será la cuota que el individuo debe cancelar cada mes?, si la entidad financiera le ofrece un interés del 14 %.*

Desarrollo. Notemos que el tipo de interés es anual y el periodo de tiempo están expresados en meses, estos deben mantener concordancia en consecuencia, obtenemos el interés subperiodal mensual como:

$$i^{(12)} = (1 + 0.14)^{\frac{1}{12}} - 1 = 0.01098$$

Una vez obtenido el tipo de interés mensual $i^{(12)} = 0.01098$ y un periodo de $n = 36$, se calculan los pagos mediante la expresión detallada en capítulos anteriores, como:

$$\begin{aligned}
VA &= C\ a_{\overline{n}|i^{(12)}}, \quad \text{despejando } C \text{, se obtiene} \\
C &= \frac{VA}{a_{\overline{n}|i^{(12)}}}, \quad \text{reemplazando } a_{\overline{n}|i^{(12)}} \\
C &= \frac{VA}{\dfrac{1 - \left(1 + i^{(12)}\right)^{-n}}{i^{(12)}}} \\
C &= \frac{24000}{\dfrac{1 - (1 + 0.01098)^{-36}}{0.01098}} \\
C &= \$\ 810.70
\end{aligned}$$

Ahora, mediante la función *annuity* de R:

```
>> 24000 / annuity(i=0.01098, n=36, type="immediate")
[1] 810.70
```

Logrando así los mismos resultados, de modo que el valor de los pagos será USD 810.70 □

Ejemplo 5.2. *Un individuo de 29 años cotiza para su pensión USD 132.3 al finalizar el mes, cuando recibe su salario. ¿Qué cantidad de dinero acumulará al cumplir los 30 años de edad?, si el tipo de interés anual es de 6.25 %.*

Desarrollo. Notemos que el tipo de interés es anual y el periodo de tiempo están expresados en meses, estos deben mantener concordancia en consecuencia, obtenemos el interés subperiodal mensual como:

$$i^{(12)} = (1 + 0.0625)^{\frac{1}{12}} - 1 = 0.005065$$

Una vez obtenido el tipo de interés mensual $i^{(12)} = 0.005065$ y un periodo de $n = 12$, se calculan los pagos mediante la expresión detallada en capítulos anteriores, como:

$$\begin{aligned}
VF &= C\ s_{\overline{n}|i^{(12)}}, \quad \text{reemplazando } s_{\overline{n}|i^{(12)}}, \text{ se obtiene} \\
VF &= C\ \frac{\left(1 + i^{(12)}\right)^n - 1}{i^{(12)}} \\
VF &= 132.3\ \frac{(1 + 0.005065)^{12} - 1}{0.005065} \\
VF &= \$\ 1\,632.58
\end{aligned}$$

Ahora, mediante la función *accumulatedValue* de R:

```
>> 132.3*accumulatedValue(i=0.005065, n=12, type="immediate")
[1] 1632.58
```

Logrando así los mismos resultados, de modo que el individuo acumulará al cumplir 30 años un monto de USD 1 632.58 □

5.1.2. Cálculo matemática actuarial en R

El paquete *lifecontingencies* cuenta con una gran variedad de funciones para la tarificación de seguros de vida, de las que podemos destacar están: *Exn* para seguro de supervivencia, *Axn* para seguro de vida en caso de fallecimiento, *AExn* para un seguro de vida mixto, *axn* para evaluar un renta actuarial, entre otras (G.A. Spedicato, 2021).

Para la realización de este trabajo nos enfocaremos en una función en particular; *axn* para evaluar un renta actuarial misma que hace referencia a las cuantías que recibirán los individuos luego de alcanzar la edad de jubilación. La llamada de la función en R responde a la siguiente linea de código:

```
>> axn(actuarialtable, x, n, i, m, k, payment)
```

Donde sus argumentos son:

- *actuarialtable*: Tabla de mortalidad a utilizar en el cálculo de la renta.
- x: Edad del individuo.
- n: Número de periodos para la renta actuarial, en el caso de ser vitalicia, este parámetro se omite.
- i: El tipo de interés técnico expresado en forma decimal.
- m: Periodo diferido, el default en este argumento es cero.
- k: Número de pagos fraccionados por periodo.
- *payment*: Tipo de pago, si se trata de una renta prepagable el argumento debe ser "due" y si se trata de una pospagable "immediate".

Ejemplo 5.3. *Calcular la prima única que un individuo de 60 años debería cancelar para acceder a una renta actuarial vitalicia pospagable de cuantía USD 15 000 anuales desde dicha edad, el tipo de interés técnico anual es de 6.25 %.*

Desarrollo. Se calcula la prima pura según la siguiente expresión:

$$
\begin{aligned}
\Pi &= C\ a_{60}, \quad \text{reemplazando } a_{60}\text{, se obtiene} \\
&= 15\,000 \sum_{k=1}^{50} v^k\ {}_kp_{60} \\
&= \$\ 179\,287.85
\end{aligned}
$$

Ahora, mediante la función *axn* de R:

```
>> 15000*axn(TH, x = 60, n = 50, i = 0.0625, payment = "immediate")
[1] 179287.85
```

Logrando así los mismos resultados, de modo que el individuo deberá cancelar una prima pura de USD 179 287.85 □

5.2. Prima para personas en activo

En esta sección calcularemos el capital acumulado que cada individuo cotizó antes de alcanzar la edad de jubilación para las personas seleccionadas en la muestra que se obtuvo en el capítulo anterior, para ello se mencionan unos puntos importantes:

- Como se mencionó anteriormente, se ha supuesto que los individuos empiezan a cotizar a la edad mínima de 20 años, asumiendo que es una edad pertinente para ingresar a la población económicamente activa (PEA), y recibir legalmente un salario formal.

- En lo referente a la proyección de aportaciones hasta que el individuo alcance los 60 años, edad que se ha establecido para acceder a la jubilación, se considera la tasa de incremento salarial, misma que se encuentra en el estudio *"Análisis, revisión y aprobación de la valuación actuarial del Seguro de Invalidez, Vejez y Muerte del Seguro General Obligatorio"* (IESS, 2018) hasta el año 2057 y se detalla en la siguiente tabla:

Año	Tasa de crecimiento (%)
2019	3.33 %
2020	4.33 %
2021	3.08 %
2022	2.99 %
2023	2.91 %
2024	2.82 %
2025	2.74 %
2026	2.67 %
2027	2.60 %
2028	2.53 %
2029	2.47 %
2030	2.41 %
2031	2.35 %
2032	2.30 %
2033	2.25 %
2034	2.20 %
2035	2.15 %
2036	2.11 %
2037	2.06 %
2038	4.05 %
2039	1.94 %
2040	1.91 %
2041	1.87 %

Año	Tasa de crecimiento (%)
2042	1.83 %
2043	1.80 %
2044	1.77 %
2045	1.74 %
2046	1.71 %
2047	1.68 %
2048	1.65 %
2049	1.63 %
2050	1.88 %
2051	1.57 %
2052	1.55 %
2053	1.53 %
2054	1.50 %
2055	1.48 %
2056	1.46 %
2057	1.44 %

Tabla 5.1: Proyección Incremento Tasa Salarial

Fuente: Elaboración propia a partir del estudio actuarial (IESS, 2018)

- Se ha supuesto que los individuos se jubilan respondiendo a la edad más no a los años de aportaciones que alcanzarán a obtener en su tiempo en actividad y que todos podrían optar a una pensión del 100 % al valor cotizado, es decir, el individuo obtiene una renta acorde al valor que aportó.

- Los individuos cuando empiezan a cotizar, se asume que permanecerán con trabajo remunerado formal sin lagunas de tiempo y su incremento salarial responde al Estudio Actuarial (IESS, 2018).

- El tipo de interés utilizado para la obtención del rendimiento es 6.25 % el cual se encuentra detallado en el Estudio Actuarial (IESS, 2018).

Se ha implementado el código en R, para calcular el capital acumulado que cada individuo cotizó hasta la edad de jubilación. Este código correspondiente se lo puede visualizar en el ANEXO C.

Así, pongamos como ejemplo el caso de un individuo de género femenino que empieza a cotizar a la edad de 23 años la cantidad de USD 54.02 durante todos los meses del primer año, en el transcurso del tiempo el individuo cotiza cada mes de cada año en curso, según la siguiente tabla hasta alcanzar la edad de jubilación.

Edad	Año	Aporte
23 años	2013	\$ 54.02
24 años	2014	\$ 56.63
25 años	2015	\$ 58.59
26 años	2016	\$ 59.47
27 años	2017	\$ 60.72
28 años	2018	\$ 61.86
⋮	⋮	⋮
55 años	2045	\$ 122.15
56 años	2046	\$ 124.28
57 años	2047	\$ 126.41
58 años	2048	\$ 128.54
59 años	2049	\$ 130.67
60 años	2050	\$ 132.80

Tabla 5.2: Ejemplo individuo

Fuente: Elaboración propia a partir de los datos.

El esquema de cálculo para obtener el capital acumulado de cada año responde a las siguientes ecuaciones:

$$
\begin{array}{ll}
\text{23 años:} & VF_{23} = C_{23}\ s_{\overline{12}|i}\ (1+i)^{60-23} = 6\,121.70 \\
\text{24 años:} & VF_{24} = C_{24}\ s_{\overline{12}|i}\ (1+i)^{60-24} = 6\,041.04 \\
\text{25 años:} & VF_{25} = C_{25}\ s_{\overline{12}|i}\ (1+i)^{60-25} = 5\,882.41 \\
\text{26 años:} & VF_{26} = C_{26}\ s_{\overline{12}|i}\ (1+i)^{60-26} = 5\,619.43 \\
\text{27 años:} & VF_{27} = C_{27}\ s_{\overline{12}|i}\ (1+i)^{60-27} = 5\,400.47 \\
\text{28 años:} & VF_{28} = C_{28}\ s_{\overline{12}|i}\ (1+i)^{60-28} = 5\,178.35 \\
\text{29 años:} & VF_{29} = C_{29}\ s_{\overline{12}|i}\ (1+i)^{60-29} = 5\,036.04 \\
 & \vdots \\
\text{55 años:} & VF_{55} = C_{55}\ s_{\overline{12}|i}\ (1+i)^{60-55} = 1\,989.49 \\
\text{56 años:} & VF_{56} = C_{56}\ s_{\overline{12}|i}\ (1+i)^{60-56} = 1\,905.09 \\
\text{57 años:} & VF_{57} = C_{57}\ s_{\overline{12}|i}\ (1+i)^{60-57} = 1\,823.75
\end{array}
$$

$$\text{58 años:} \qquad VF_{58} = C_{58}\ s_{\overline{12}|i}\ (1+i)^{60-58} = 1\,745.38$$

$$\text{59 años:} \qquad VF_{59} = C_{59}\ s_{\overline{12}|i}\ (1+i)^{60-59} = 1\,669.91$$

$$\text{60 años:} \qquad VF_{60} = C_{60}\ s_{\overline{12}|i}\ (1+i)^{60-60} = 1\,597.29$$

Donde C_j simboliza la cuantía que el individuo cotiza, $s_{\overline{12}|i}$ expresa una renta financiera y $(1+i)^{60-j}$ el factor de actualización financiero $\forall j = 23, \ldots, 60$. Por último, la prima con la que el individuo llegará a su jubilación resulta de sumar cada valor VF_j que representa el rendimiento de cada año cotizado actualizado a la edad de jubilación. Se lo puede formular matemáticamente de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} VF_{total} &= \sum_{j=23}^{60} C_j\ s_{\overline{12}|i}\ (1+i)^{60-j} \\ &= \$\ 134\,678.36 \end{aligned}$$

Siguiendo la misma lógica del ejemplo, se calcula el valor actual de todos los individuos seleccionados de la muestra, dando como resultado los siguiente cuadros que hacen referencia al promedio, mínimo y máximo de las primas según cada rango de edad y género:

Conglomerado	Hombres	Mujeres
De 20 a 30 años	\$ 112 605.66	\$ 115 666.84
De 30 a 40 años	\$ 97 500.13	\$ 101 079.19
De 40 a 50 años	\$ 77 963.74	\$ 84 984.89
De 50 a 60 años	\$ 45 238.31	\$ 42 822.41

Tabla 5.3: Promedio de primas

Fuente: Elaboración propia.

Conglomerado	Hombres	Mujeres
De 20 a 30 años	\$ 37 797.28	\$ 36 774.80
De 30 a 40 años	\$ 22 629.43	\$ 21 379.55
De 40 a 50 años	\$ 20 841.69	\$ 20 769.73
De 50 a 60 años	\$ 7 782.14	\$ 7 451.11

Tabla 5.4: Mínimo de primas

Fuente: Elaboración propia.

Conglomerado	Hombres	Mujeres
De 20 a 30 años	\$ 1 018 144.80	\$ 584 667.30
De 30 a 40 años	\$ 824 522.46	\$ 964 862.83
De 40 a 50 años	\$ 721 469.27	\$ 530 366.69
De 50 a 60 años	\$ 594 946.16	\$ 358 693.17

Tabla 5.5: Máximo de primas

Fuente: Elaboración propia.

5.3. Estimación de la pensión para personas en activo

Una vez calculada la prima con la cual los individuos financiarán su propia pensión, vamos a estimar dicha pensión utilizando las fórmulas actuariales de los seguros de rentas. Es decir, utilizaremos la igualdad entre la prima y el producto de multiplicar la cuantía que recibirá el individuo con el valor actual actuarial de una renta vitalicia. Formalmente esto sería:

$$\Pi_j = C_j \; a_{x_j}, \qquad \text{para todo individuo } j \tag{5.1}$$

Donde,

- Π_j: Representa la prima que cada individuo cotizó en sus años en actividad.
- C_j: Expresa la cuantía de la renta en términos monetarios que cada individuo percibirá en su jubilación.
- a_{x_j}: Renta actuarial vitalicia.

Se menciona las definiciones acogidas para el cálculo de la pensión, se considera el incremento de las pensiones a razón de 1.826 % cada año, este valor se lo tomó en base al Estudio Actuarial realizado por el IESS en 2018 al igual que las tablas de mortalidad utilizadas para dicha estimación.

El código R implementado para el cálculo de la pensión se lo puede visualizar en el ANEXO D. Retomando con el ejemplo expuesto en la sección anterior, donde se estimó que la prima del individuo al alcanzar los 60 años es de USD 134 678.36 y despejando la cuantía de la ecuación (5.1) podemos valorar la pensión como sigue:

$$
\begin{aligned}
C &= \frac{\Pi}{a_x^{(12)}} \\
&= \frac{134\,678.36}{\sum_{k=0}^{50}\sum_{j=0}^{11} \frac{1}{12} v^{k+(j/12)} \; {}_{k+(j/12)}p_{60}} \\
&= \frac{134\,678.36}{295.6} \\
&= \$\,455.61
\end{aligned}
$$

Donde, $v = (1+i)^{-1}$ es el factor de actualización con el tipo de interés mensual y, siguiendo a Börger, M. (2010) se encuentra el tipo de interés relacionado con el porcentaje de incremento, convirtiéndolo en un esquema de rentas con cuantía constante como:

$$
i_{nuevo} = \frac{(i - incremento)}{1 + incremento}
$$

Donde el incremento de pensiones se lo obtuvo del Estudio Actuarial (IESS, 2018) y es $\alpha = 0.018261$, el fin de aplicar este cambio al interés es que la cuantía de la renta actuarial sea constante en el tiempo. El término ${}_kp_x$ representa la probabilidad de que el individuo de edad x alcance la edad $x+k$.

A continuación el resumen de los resultados de aplicar la función de cálculo para obtener la pensión para las personas extraídas de la muestra:

Conglomerado	Hombres	Mujeres
De 20 a 30 años	$ 380.99	$ 391.35
De 30 a 40 años	$ 329.88	$ 341.99
De 40 a 50 años	$ 263.78	$ 287.54
De 50 a 60 años	$ 153.06	$ 144.88

Tabla 5.6: Promedio de rentas

Fuente: Elaboración propia.

Conglomerado	Hombres	Mujeres
De 20 a 30 años	$ 127.89	$ 124.43
De 30 a 40 años	$ 76.57	$ 72.34
De 40 a 50 años	$ 70.52	$ 70.27
De 50 a 60 años	$ 26.33	$ 25.21

Tabla 5.7: Mínimo de rentas

Fuente: Elaboración propia.

Conglomerado	Hombres	Mujeres
De 20 a 30 años	$ 3 444.87	$ 1 978.21
De 30 a 40 años	$ 2 789.75	$ 3 264.59
De 40 a 50 años	$ 2 441.07	$ 1 794.48
De 50 a 60 años	$ 2 012.99	$ 1 213.63

Tabla 5.8: Máximo de rentas

Fuente: Elaboración propia.

5.4. Aplicación del shock de longevidad

Siguiendo el esquema que plantea la normativa de *Solvencia II* sobre el riesgo de longevidad, a continuación se realiza la estimación de las pensiones para las personas activas de la muestra aplicando un shock único, inmediato y permanente del 20 % a las tablas de mortalidad expuestas en el ANEXO A, formalmente esto sería:

$$q'_x = q_x\,(1 - 0.20), \quad \text{para todo individuo de edad } x = 20,\ldots, 110$$

El código R implementado para el cálculo de la pensión bajo con el shock de longevidad se lo puede visualizar en el ANEXO E. Continuando con el ejemplo expuesto en las secciones anteriores, se estimó que la prima del individuo al alcanzar los 60 años es de USD 134 678.36 y despejando la cuantía de la ecuación (5.1) podemos valorar la pensión aplicada el shock como sigue:

$$\begin{aligned} C &= \frac{\Pi}{a'^{(12)}_x} \\ &= \frac{134\,678.36}{\displaystyle\sum_{k=0}^{50}\sum_{j=0}^{11} \frac{1}{12}\, v^{k+(j/12)}\ {}_{k+(j/12)}p_{60}} \end{aligned}$$

$$= \frac{134\,678.36}{314.04}$$

$$= \$\,428.85$$

A continuación el resumen de los resultados de aplicar la función de cálculo para obtener la pensión para las personas extraídas de la muestra:

Conglomerado	Hombres	Mujeres
De 20 a 30 años	$ 358.56	$ 368.31
De 30 a 40 años	$ 310.46	$ 321.86
De 40 a 50 años	$ 248.25	$ 270.61
De 50 a 60 años	$ 144.05	$ 136.35

Tabla 5.9: Promedio de rentas aplicado el shock

Fuente: Elaboración propia.

Conglomerado	Hombres	Mujeres
De 20 a 30 años	$ 120.36	$ 117.10
De 30 a 40 años	$ 72.06	$ 68.08
De 40 a 50 años	$ 66.37	$ 66.14
De 50 a 60 años	$ 24.78	$ 23.73

Tabla 5.10: Mínimo de rentas aplicado el shock

Fuente: Elaboración propia.

Conglomerado	Hombres	Mujeres
De 20 a 30 años	$ 3 242.06	$ 1 861.74
De 30 a 40 años	$ 2 625.51	$ 3 072.39
De 40 a 50 años	$ 2 297.36	$ 1 688.83
De 50 a 60 años	$ 1 894.47	$ 1 142.18

Tabla 5.11: Máximo de rentas aplicado el shock

Fuente: Elaboración propia.

Notemos que la distribución de las rentas para cada escenario es diferente dado el estrés de las tablas de mortalidad, es importante dar a notar dicha diferencia con un análisis de sensibilidad, de como el shock afecta de manera significativa la cuantía que la Seguridad Social debería entregar a cada uno de sus jubilados, según la prima que alcanzar a valorar a la edad de jubilación.

5.5. Análisis de sensibilidad

Para el análisis de sensibilidad en el cálculo de las rentas vamos a considerar el ejemplo de las secciones anteriores, notemos que el individuo mediante sus cotizaciones en años en activo logró recolectar a la edad de jubilación una prima de USD 134 678.36, y con ello percibe una renta igual a USD 455.61, sin embargo al estresar la tabla de mortalidad la renta se reduce en un 6.24 % pasando a USD 428.85 ocasionando así, una diferencia monetaria de USD 26.76

Es por ello que vamos a estimar que prima debería haber aportado el individuo para que estresada la tabla de mortalidad su renta no varié, para ello vamos a considerar el cálculo de la prima según la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned}
\Pi' &= C \cdot a_x'^{(12)} \\
&= 455.61 \cdot \sum_{k=0}^{50} \sum_{j=0}^{11} \frac{1}{12}\, v^{k+(j/12)}\ {}_{k+(j/12)}p'_{60} \\
&= (455.61) \cdot (314.04) \\
&= \$\ 143\,103.12
\end{aligned}$$

Es evidente que el individuo debió cancelar un prima superior a la que cotizó, cuantificando la diferencia obtenemos:

$$\begin{aligned}
\Delta\,\Pi &= 134\,678.36 - 143\,103.12 \\
&= \text{-}\ \$\ 8\,424.76
\end{aligned}$$

El resultado obtenido es la diferencia de no considerar la evolución de la mortalidad, por lo cual los individuos cotizan primas inferiores a las que realmente deberían, en consecuencia la Seguridad Social no estaría considerando el riesgo de longevidad bajo el supuesto de un sistema de capitalización individual. Veamos a continuación una tabla con las diferencias de las primas para todas las personas de la muestra pensando en las tablas de mortalidad aprobadas por el Estudio Actuarial y las tablas de mortalidad aplicadas el shock que *Solvencia II* propone en su normativa.

Se evidencia que el riesgo de longevidad se va incrementando conforme aumentan las

Conglomerado	Prima Normal	Prima Shock	Diferencia
De 20 a 30 años	$ 394 236 664	$ 418 898 972	$ -24 662 308
De 30 a 40 años	$ 343 678 996	$ 365 178 442	$ -21 499 447
De 40 a 50 años	$ 63 849 246	$ 67 843 449	$ -3 994 203
De 50 a 60 años	$ 40 102 783	$ 42 611 478	$ -2 508 695

Tabla 5.12: Diferencia de primas

Fuente: Elaboración propia.

aportaciones, esto sucede debido a que el individuo se encuentra expuesto a una mayor variación de las tablas de mortalidad, esto se lo puede apreciar mejor en la figura (5.1).

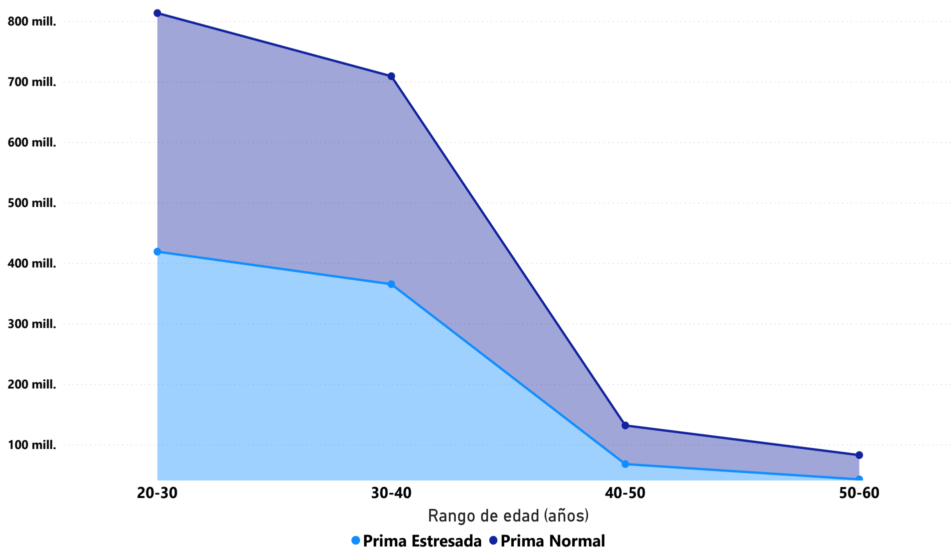


Figura 5.1: Diferencia de primas para las pensiones

Fuente: Elaboración propia

Es así como *Solvencia II* introduce el cálculo del SCR (Solvency Capital Requirement), con el fin de provisionar el valor subestimado para equilibrar los compromisos adquiridos con los afiliados asociados al riesgo de longevidad.

5.6. Cálculo del SCR

Se implementa el cálculo para la obtención del capital de solvencia obligatorio según la normativa *Solvencia II* correspondiente al sub-módulo de *riesgo de longevidad*, para ello se resumen los siguientes puntos:

- Las entradas de caja del sistema serán las cuantías que aporten los individuos activos.

- Las salidas de caja del sistema serán las pensiones que cancelarán a los individuos cuando alcancen su edad de jubilación.

- Sobre la curva libre de riesgos, en este sentido y dado que la normativa es europea se decide trabajar con la publicada por la EIOPA, la disponible en el mismo año de corte de la información, a pesar de que dada la poca variación que esta curva mantiene en sus diferentes años, se podría considerar la última disponible.

Para encontrar el valor de la *Mejor Estimación (BEL)*[1], se realizará una proyección de las rentas de cada uno de los individuos como se detalló en capítulos anteriores, con la diferencia de que los flujos se los estimará de forma anual, como lo menciona la directiva, una vez obtenidos los flujos se descontará a valor actual en función de la curva libre de riesgos, consiguiendo así la Mejor Estimación, los resultados de dichos cálculo se lo podría representar formalmente como:

$$FlujoPagos_t = \sum_i R_i \qquad \forall\ t\ =\ 0, \ldots, 110$$

Donde el contador en la sumatoria hace referencia a cada individuo que se le va ha cancelar la renta en cada tiempo t, para estimar los individuos que sobreviven en cada tiempo t se utilizó la probabilidad de supervivencia de la tabla de mortalidad. La implementación en código R se lo podrá encontrar en el ANEXO F. Los resultados por edad y género se muestran a continuación:

Rango de edad	Hombres	Mujeres	Total
De 60 a 70 años	\$ 346 454 098	\$ 284 396 546	\$ 630 850 644
De 70 a 80 años	\$ 310 632 278	\$ 254 446 833	\$ 565 079 111
De 80 a 90 años	\$ 294 193 594	\$ 241 517 843	\$ 535 711 437
De 90 a 100 años	\$ 224 723 775	\$ 184 931 310	\$ 409 655 085
De 100 a 110 años	\$ 70 734 377	\$ 59 527 726	\$ 130 262 103

Tabla 5.13: Flujos por edad y género con escenario sin estresar

Fuente: Elaboración propia.

[1]Best Estimate Liability

A continuación, actualizamos los flujos de las rentas a valor presente utilizando la curva libre de riegos, de modo que la mejor estimación (BEL) resulta de aplicar la siguiente expresión:

$$BestEstimate_0 = \sum_t \frac{FlujoPagos_t}{(1+i)^t}$$

Del cuadro (5.13) se tomaron los flujos y actualizaron considerando la curva libre de riesgos, obteniendo los siguientes resultados por edad y género.

Rango de edad	Hombres	Mujeres	Total
De 60 a 70 años	\$ 177 410 966	\$ 147 037 743	\$ 324 448 709
De 70 a 80 años	\$ 127 481 241	\$ 105 446 179	\$ 232 927 420
De 80 a 90 años	\$ 97 877 478	\$ 81 177 711	\$ 179 055 189
De 90 a 100 años	\$ 61 062 872	\$ 50 768 435	\$ 111 831 307
De 100 a 110 años	\$ 16 070 731	\$ 13 678 824	\$ 29 749 556

Tabla 5.14: Mejor estimación por edad y género con escenario sin estresar

Fuente: Elaboración propia.

De forma análoga, se estimarán los flujos así como la mejor estimación para el escenario cuando se estresan las probabilidades de la tabla de mortalidad mediante el shock del 20 % que exige la normativa *Solvencia II*, los resultados se presentan a continuación.

Los flujos de caja por edad y género se muestran a continuación.

Rango de edad	Hombres	Mujeres	Total
De 60 a 70 años	\$ 347 102 935	\$ 284 822 318	\$ 631 925 253
De 70 a 80 años	\$ 311 924 373	\$ 255 671 387	\$ 567 595 760
De 80 a 90 años	\$ 299 288 595	\$ 245 286 271	\$ 544,574,866
De 90 a 100 años	\$ 242 389 612	\$ 199 771 171	\$ 442,160,783
De 100 a 110 años	\$ 114 063 975	\$ 94 680 770	\$ 208 744 744

Tabla 5.15: Flujos por edad y género con escenario estresado

Fuente: Elaboración propia.

La mejor estimación por edad y género.

Rango de edad	Hombres	Mujeres	Total
De 60 a 70 años	$ 177 763 639	$ 147 262 353	$ 325 025 992
De 70 a 80 años	$ 28 006 704	$ 105 942 963	$ 233 949 667
De 80 a 90 años	$ 99 550 134	$ 82 372 208	$ 181 922 343
De 90 a 100 años	$ 65 705 099	$ 54 674 327	$ 120 379 426
De 100 a 110 años	$ 25 500 858	$ 21 412 574	$ 46 913 433

Tabla 5.16: Flujos por edad y género con escenario estresado

Fuente: Elaboración propia.

Finalmente, siguiendo la normativa se tiene que el capital de solvencia obligatorio bajo el riesgo de longevidad es igual a la diferencia entre el valor actual de los flujos calculados mediante las tablas de mortalidad sin estresar y el valor actual de los flujos calculados mediante un estrés a las tablas de mortalidad, formalmente:

$$\begin{aligned} SCR_{long}^{shock} &= NAV_0 - (NAV_0 \,|\, shock\ longevidad) \\ &= \$\ 908\ 190\ 859 - \$\ 878\ 012\ 181 \\ &= \$\ 30\ 178\ 678 \end{aligned}$$

De modo que, la Seguridad Social Ecuatoriana debería provisionar por el riesgo de longevidad bajo la normativa *Solvencia II* un valor de *USD* 30 178 678 para las personas seleccionadas en la muestra. Esto representaría provisionar un porcentaje de 3.44 % respecto al valor actual actuarial del escenario sin estresar.

Capítulo 6

Conclusiones y recomendaciones

Sin duda la importancia de adquirir conocimientos actuariales para el cálculo de las pensiones de jubilación en el Sistema de Seguridad Social ecuatoriano es una ventaja ya que permiten obtener valores adecuados al momento de estimar la pensión a los jubilados y a su vez asegura que cada individuo en activo obtendrá una renta a la edad de jubilación, afianzando la sostenibilidad del sistema.

6.1. Conclusiones

- Al desarrollar el presente trabajo es notable que el sistema de capitalización es viable principalmente porque se estable el equilibrio financiero actuarial, otorgando al individuo una pensión a base de sus aportaciones en los años cotizados.
- A pesar de la viabilidad del sistema de capitalización, se presenta el problema de elevar el porcentaje de contribución de 9.45 %, con el fin de obtener pensiones dignas para que gocen los individuos en edad avanzada, lo que conlleva a su vez a un incremento del salario para mantener el nivel de vida de la población.
- El efecto de migrar a un sistema de capitalización afecta en el sentido demográfico a la población, pongamos el ejemplo de un individuo que ingreso a un empleo formal a la edad de 50 años, el individuo alcanzado los 60 años, edad en la cual se supuso en este trabajo se jubile la población, deberá aportar una cuantía excesivamente elevada para obtener una jubilación apropiada para mantener un buen estilo de vida, lo que no ocurrirá en el caso de un individuo que entra al sistema a una edad joven de 20 años ya que deberá abonar cuantías reducidas para alcanzar el mismo valor de renta por el simple hecho que aporta más años.

- En materia de longevidad notemos que con el uso de tablas de mortalidad desactualizadas se corre el riesgo de incurrir en pérdidas no esperadas, por esta razón acudir a la normativa *Solvencia II* es la manera más adecuada por las exigencias que plantea, lo que asegura a respaldar los riesgos asumidos con metodologías y estructuras más capaces ante cualquier eventualidad.

- El uso del software estadístico R resulta ser un aliado a la hora de resolver problemas analíticos y manipulación de grandes bases (big data), una ventaja sin duda para presentar trabajos y análisis que ayuden a la sociedad.

6.2. Recomendaciones

- Las bases de datos siempre son fundamentales para realizar análisis de diferentes aristas en lo que se refiere a materia de Matemática Acturial y así encontrar diferentes sistemas de financiamiento para el Sistemas de Pensiones que se ajusten con la realidad ecuatoriana, por consiguiente la principal recomendación es que la Seguridad Social proporcione de manera periódica información anonimizada tanto de personas afiliadas como jubiladas para desarrollar futuros proyectos.

- En el sentido de longevidad la normativa de *Solvencia II* exige una gestión basada en riesgos, estimar estos riesgos a merita de un shock único, inmediato y permanente del 20 % de manera transversal a las tablas de mortalidad, se considera muy conservador a la hora de calcular el Capital Mínimo Requerido (SCR), en su lugar y para futuras investigación se consideraría un shock más gradual, por edad y género ya que sería más acertado y menos severo para las aseguradoras y Sistema de Pensiones.

- Sería interesante implementar modelos internos que menciona la normativa para la estimación del Capital Mínimo Requerido (SCR) en el caso ecuatoriano, y así evidenciar el comportamiento de la mortalidad e inclusive medir el impago que a traído la pandemia Covid-19 a la población, hipótesis que en este trabajo no se consideró.

- A pesar que el sistema de capitalización mantiene el equilibrio financiero - actuarial, el paso de un sistema de reparto a un sistema de capitalización producirá fuertes costos a la población ya que dada las evidencias de este trabajo, el mecanismo actual de cálculo que la Seguridad Social ofrece se traduciría en primas más elevadas, efecto de ello incrementos en las cuantías que cada individuo en activo deberá abonar hasta alcanzar la edad de jubilación. Es por ello que la Seguridad Social debe explorar artilugios distintos, por ejemplo establecer una cota mínima de rentas para que cada individuo busque completar su jubilación en sistemas privados, incentivando a la población a investigar todas las opciones de empresas aseguradoras para una mejor jubilación.

- Considerar, dado un escenario donde Ecuador se acoja a la normativa de *Solvencia II* y en vista que ella estable una metodológica basada en riesgos mitigar dicho riesgo con contratos de reaseguros y así obtener swaps de longevidad.

Bibliografía

[1] Banco Mundial, (2018). *Esperanza de vida al nacer, total años - Ecuador.* Recuperado el 08 de Noviembre de 2020 de https://datos.bancomundial.org/indicator/SP.DYN .LE00.IN?locations=EC & start=2016& end=2016& view=map

[2] Börger, M. (2010). Deterministic shock vs. stochastic value-at-riskan analysis of the Solvency II standard model approach to longevity risk. *Blätter der DGVFM*, 31(2), 225-259.

[3] Del Castillo, J. (2011). El riesgo de longevidad en la Directiva Comunitaria de Solvencia II Longevity risk in the EU directive on Solvency II. *Revista Universitaria Europea Nº. 14*, 23-36.

[4] Del Castillo, J., Lozano, I., Rodríguez, F., Juárez, V., & Reguera, M. (2014). El riesgo de longevidad y su aplicación práctica a Solvencia II: modelos actuariales avanzados para su gestión. *Fundación Mapfre*.

[5] G. A. Spedicato, *Package "lifecontingencies"*, [Online]. Recuperado el 12 de Septiembre de 2021.
https://cran.r-project.org/web/packages/lifecontingencies/lifecontingencies.pdf

[6] Gatzert, Nadine and Martin, Michael (2012): "Quantifying credit and market risk under solvency II: Standard approach versus internal model". *Insurance: Mathematics and Economics*

[7] González Catalá, V. (1992). *Análisis de las operaciones financieras, bancarias y bursátiles*. Madrid: Ciencias Sociales.

[8] Huaraca, D. (2018). *Estimación de Tablas de Mortalidad Dinámicas y Evaluación del Riesgo de Longevidad*. España, Madrid, Universidad de Alcalá.

[9] INESE, (2017). *Solvencia II para el Seguro Latinoamericano se traducirá en productos de riesgo menor y una política más conservadora de inversiones.* Recuperado el 08 de Noviembre de 2020 de https://www.inese.es/solvencia-ii-para-en-seguro-latinoamericano-se-traducira-en-productos-de-riesgo-menor-y-una-politica-mas-conse rvadora-de-inversiones.

[10] Instituto Ecuatoriano de Seguridad Social, (2020). Jubilación ordinaria vejez. IESS. Recuperado el 08 de Noviembre de 2020 de https://www.iess.gob.ec/es/web/guest/ jubilación-ordinaria-vejez.

[11] Instituto Ecuatoriano de Seguridad Social, (2018). Análisis, revisión y aprobación de la valuación actuarial del Seguro de Invalidez, Vejez y Muerte del Seguro General Obligatorio.

[12] M.Ayuso, H. Corrales, M. Guillén, A. Pérez, and J.Rojo, *Estadística Actuarial Vida.* Barcelona: Publicacions i Edicions de la Universitat de Barcelona, 2007.

[13] Navarro, E. & Nave, J.M (2001). Fundamentos de Matemática Financiera. Barcelona: Antoni Bosch

[14] La Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos, (2020). Panorama de la Salud: Latinoamérica y el Caribe 2020. Recuperado el 26 de Enero de 2021 de https://doi.org/10.1787/740f9640-es

[15] López, P. (2016). Aplicación de la normativa Solvencia II. Estudio del riesgo de longevidad: Efectos sobre el sistema de pensiones de jubilación de la Seguridad Social española bajo el supuesto de un sistema de capitalización individual. España, Madrid, Universidad Complutense.

[16] Luy, M., Zannella, M., Siegmundt, C., Minagawa, Y., Lutz, W., & Caselli, G. (2019). "The impact of increasing education levels on rising life expectancy: a decomposition analysis for Italy, Denmark, and the USA?. *Genius - Springer*, 75(1), 11.

[17] Plat, R. (2011). One-year value-at-risk for longevity and mortality. *Insurance: Mathematics and Economics*, 49(3), 462-470.

[18] Raleigh, V. (2019), "Trends in life expectancy in EU and other OECD countries : Why are improvements slowing?", *OECD Health Working Papers*, Nº. 108, Ediciones OCDE, París.

[19] Sandoya, M. *Matemáticas Actuariales y Operaciones de Seguros.* ESPOL, segunda edición, 2007.

[20] The R Foundation (s.f). R: What is R? [Online]. Recuperado el 05 de Septiembre de 2021 de https://www.r-project.org/about.html

[21] Vidal - Meliá, C. (2017). Sistema Básicos de Financiación de las Prestaciones: Fundamentos Actuariales. *Apuntes Previsión Social Complementaria, UHA, pages 1-57*

[22] Wickham, H. (2019). Avanzado R. chapman y hall / CRC.

Anexos

A. Anexo Muestreo Estratificado

```
# ===================================== #
#        TESIS INGENIERIA MATEMATICA    #
#         AUTOR: MAURICIO E. XAVIER     #
#          MUESTREO ESTRATIFICADO       #
# ===================================== #

# Limpiar el ambiente
rm(list = ls())

# ruta para exportar los resultados
ruta <- "C:/Estudiantil/Tesis/Base/"

# Lecturas de las bases finales de afiliados
load(paste0(ruta, "AfiliadosFinal.RData"))

# Discretizacion de la Edad
Aportacion <- Aportacion %>%
  dplyr::mutate(RangoEdad = cut(edad,
                                breaks = c(-Inf, 30, 40, 50, Inf),
                                labels = c("20-30", "30-40",
                                           "40-50", "50-60")))
table(Aportacion$RangoEdad, Aportacion$sexo)
```

```
# Creción de variables
Aportacion <- Aportacion %>%
  dplyr::mutate(diff = 60 - edad,
                AporDiff = diff*12,
                AporMax = AportacionTecho + AporDiff)
table(Aportacion$RangoEdad, Aportacion$sexo) %>% prop.table()

# Obtención de la muestra con el porcentaje de los estratos
sample <- sampling::strata(data = Aportacion,
                           stratanames = c("RangoEdad", "sexo"),
                           size = c(8621*0.04680,
                                    8621*0.05861,
                                    8621*0.04248,
                                    8621*0.04875,
                                    8621*0.21272,
                                    8621*0.18937,
                                    8621*0.16659,
                                    8621*0.23508),
                           method = c("srswor"))
table(sample$RangoEdad, sample$sexo)

# Seleccion de la muestra resultante y seleccion de variables
Aportacion <- sampling::getdata(data = Aportacion, m = sample)
Aportacion <- Aportacion %>%
  dplyr::select(numafi, edad, sexo,
                AportacionTecho, `2003-01`:`2019-12`)
```

B. Anexo Tabla de Mortalidad

```
# ====================================== #
#        TESIS INGENIERIA MATEMATICA       #
#          AUTOR: MAURICIO E. XAVIER       #
#     CALCULO DE TABLAS DE MORTALIDAD      #
# ====================================== #

# Limpiar el ambiente
rm(list = ls())

# ruta para exportar los resultados
ruta <- "C:/Estudiantil/Tesis/Base/"

# Cargar libreria
library(lifecontingencies)

# Carga probabilidades de muerte
probs <- unname(unlist(readxl::read_excel(
  paste0(ruta, "Tablas_Mortalidad.xlsx"),
  sheet = 1)[,c(2)]))

# Tabla de mortalidad
TH <- lifecontingencies::probs2lifetable(probs,
                                          radix = 100000,
                                          type = "qx",
                                          name = "Ecuador")
```

x	l_x	p_x	e_x
14	100000.00	0.9994	68.50955
15	99940.36	0.99934	67.55044
16	99874.095	0.99927	66.59526
17	99801.26	0.99921	65.64386
18	99722.155	0.99915	64.69593
19	99637.27	0.9991	63.75105
20	99547.275	0.99905	62.80868
21	99452.94	0.99902	61.86826
22	99355.105	0.99899	60.92918
23	99254.6	0.99897	59.99088
24	99152.225	0.99896	59.05282
25	99048.69	0.99895	58.11454
26	98944.595	0.99895	57.17568
27	98840.39	0.99895	56.23596
28	98736.425	0.99895	55.29518
29	98632.86	0.99895	54.35324
30	98529.755	0.99896	53.41011
31	98427.005	0.99896	52.46587
32	98324.41	0.99895	51.52061
33	98221.625	0.99895	50.57453
34	98118.2	0.99893	49.62784
35	98013.605	0.99892	48.6808
36	97907.32	0.99889	47.73365
37	97798.805	0.99886	46.78661
38	97687.56	0.99883	45.83989
39	97573.035	0.99879	44.89369
40	97454.705	0.99874	43.9482
41	97332.01	0.99869	43.0036
42	97204.37	0.99863	42.06007
43	97071.18	0.99856	41.11778
44	96931.805	0.99849	40.1769
45	96785.585	0.99841	39.2376
46	96631.805	0.99832	38.30004
47	96469.735	0.99823	37.36439
48	96298.585	0.99812	36.4308
49	96117.5	0.998	35.49943
50	95925.545	0.99787	34.57047
51	95721.66	0.99773	33.6441
52	95504.67	0.99758	32.72054
53	95273.27	0.9974	31.80002
54	95025.98	0.99721	30.88277
55	94761.17	0.997	29.96907
56	94476.98	0.99676	29.05922

Tabla de Mortalidad

x	l_x	p_x	e_x
57	94171.335	0.9965	28.15354
58	93841.915	0.99621	27.25236
59	93486.085	0.99588	26.35609
60	93100.89	0.99551	25.46514
61	92682.99	0.9951	24.57996
62	92228.62	0.99463	23.70105
63	91733.595	0.99411	22.82895
64	91193.27	0.99352	21.96422
65	90602.585	0.99286	21.10741
66	89955.965	0.99212	20.25914
67	89247.335	0.99129	19.41999
68	88470.09	0.99036	18.59061
69	87617.075	0.98931	17.7716
70	86680.61	0.98814	16.9636
71	85652.48	0.98682	16.16722
72	84523.985	0.98535	15.38307
73	83285.995	0.98371	14.61173
74	81929.035	0.98187	13.85374
75	80443.41	0.97981	13.10959
76	78819.275	0.97751	12.37972
77	77046.375	0.97492	11.66459
78	75113.925	0.972	10.96468
79	73010.695	0.9687	10.28055
80	70725.195	0.96495	9.61276
81	68245.96	0.96067	8.96198
82	65561.965	0.95579	8.32886
83	62663.2	0.95018	7.71415
84	59541.475	0.94374	7.1186
85	56191.445	0.9363	6.543
86	52611.95	0.92769	5.98816
87	48807.68	0.91771	5.4549
88	44791.14	0.90609	4.94405
89	40584.945	0.89255	4.45645
90	36224.25	0.87674	3.99292
91	31759.175	0.85823	3.55429
92	27256.82	0.83657	3.1414
93	22802.155	0.8112	2.75511
94	18497.125	0.78156	2.39634
95	14456.68	0.7471	2.06608
96	10800.59	0.70739	1.76546
97	7640.205	0.66234	1.49575
98	5060.44	0.61255	1.25827
99	3099.77	0.55967	1.05415

Tabla de Mortalidad

x	l_x	p_x	e_x
100	1734.855	0.50666	0.88351
101	878.975	0.457	0.74382
102	401.69	0.41206	0.62761
103	165.52	0.36796	0.52311
104	60.905	0.3182	0.42164
105	19.38	0.26213	0.32508
106	5.08	0.20571	0.24016
107	1.045	0.15311	0.16746
108	0.16	0.09375	0.09375

Tabla de Mortalidad

C. Anexo Renta Financiera y Valor Actual

```
# ==================================== #
#        TESIS INGENIERIA MATEMATICA       #
#         AUTOR: MAURICIO E. XAVIER        #
#           VALOR PRESENTE FLUJOS          #
# ==================================== #

# Limpiar el ambiente
rm(list = ls())

# ruta para exportar los resultados
ruta <- "C:/Estudiantil/Tesis/Base/"

# Cargar libreria
library(lifecontingencies)

# Valor presente de los flujos
ValorActual <- function(base, interes) {
  base <- base %>%
    dplyr::filter(Aporte > 0) %>%
    dplyr::mutate(
      FechaAporte = as.numeric(FechaAporte),
      EdadProyectada = edad + (max(FechaAporte)-2019),
      EdadDinamica = EdadProyectada -
        max(FechaAporte) - FechaAporte),
      ValorFinAnio =
        Aporte*12*accumulatedValue(i = (1+interes)^(1/12) - 1,
                                   n = 1, k = 12,
                                   type = "immediate"),
      ValorActualFin =
        ValorFinAnio*((1+interes)^(60-EdadDinamica))) %>%
    dplyr::filter(EdadDinamica <= 60) %>%
```

```
    dplyr::mutate(TotalValorActual = sum(ValorActualFin)) %>%
    dplyr::filter(!duplicated(numafi, fromLast = TRUE))
  return(base)
}

# Aplicacion de la función
Aportacion <- plyr::llply(Aportacion, function(x)
  ValorActual(base = x, interes = 0.0625))
Aportacion <- bind_rows(Aportacion)

# Estadistica descriptiva
tabla <- Aportacion %>%
  dplyr::mutate(
    RangoEdad = cut(edad,
                    breaks = c(-Inf, 30, 40, 50, Inf),
                    labels = c("20-30", "30-40",
                               "40-50", "50-60"))) %>%
  dplyr::group_by(RangoEdad, sexo) %>%
  dplyr::summarise(PromedioPrima = mean(TotalValorActual),
                   MinimoPrima = min(TotalValorActual),
                   MaximoPrima = max(TotalValorActual))
```

D. Anexo Pensión Jubilados

```
# ====================================== #
#        TESIS INGENIERIA MATEMATICA       #
#         AUTOR: MAURICIO E. XAVIER        #
#         ESTIMACION DE LA PENSION         #
# ====================================== #

# Limpiar el ambiente
rm(list = ls())

# ruta para exportar los resultados
ruta <- "C:/Estudiantil/Tesis/Base/"

# Cargar libreria
library(lifecontingencies)

# Pensión de los individuos
RentaSistemaCapitalizacion <- function(prima, int, edadJub, incremento){
  iint <- (int - incremento)/(1 + incremento)
  iint_sub <- (1 + iint)^(1/12) - 1

  renta <- 12*axn(TH,
                  x = edadJub,
                  n = 110-edadJub,
                  i = iint_sub,
                  k = 12,
                  payment = "immediate")
  pension <- prima / renta

  return(round(pension, 2))
}
```

```
# Aplicacion de la función de renta
Aportacion$Pension <-
  RentaSistemaCapitalizacion(prima = Aportacion$TotalValorActual,
                             int = 0.0625,
                             edadJub = Aportacion$EdadDinamica,
                             incremento = 0.018261)

# Estadistica descriptiva
tabla <- Aportacion %>%
  dplyr::mutate(
    RangoEdad = cut(edad,
                    breaks = c(-Inf, 30, 40, 50, Inf),
                    labels = c("20-30", "30-40",
                               "40-50", "50-60"))) %>%
  dplyr::group_by(RangoEdad, sexo) %>%
  dplyr::summarise(PromedioPrima = mean(Pension),
                   MinimoPrima = min(Pension),
                   MaximoPrima = max(Pension))
```

E. Anexo Estimación Prima Jubilados con Shock Longevidad

```
# ======================================= #
#         TESIS INGENIERIA MATEMATICA       #
#          AUTOR: MAURICIO E. XAVIER        #
#           ESTIMACION DE LA PRIMA          #
#           CON SHOCK DE LONGEVIDAD         #
# ======================================= #

# Limpiar el ambiente
rm(list = ls())

# ruta para exportar los resultados
ruta <- "C:/Estudiantil/Tesis/Base/"

# Tarificación de las personas en Activo según capitalización individual
load(paste0(ruta, "MuestraAfiliadosFinal.RData"))

# Renta anual de los afiliados
RentaAnualSistemaCapitalizacion <- function(prima, int, edadJub, incremento)
  iint <- (int - incremento)/(1 + incremento)

  renta <- axn(TH,
               x = edadJub,
               n = 110-edadJub,
               i = iint,
               payment = "immediate")

  pension <- prima / renta

  return(round(pension, 2))
}
```

```
Aportacion$PensionAnual <-
  RentaAnualSistemaCapitalizacion(prima = Aportacion$TotalValorActual,
                                  int = 0.0625,
                                  edadJub = Aportacion$EdadDinamica,
                                  incremento = 0.018261)

Aportacion <- split(Aportacion, f = Aportacion$numafi)

RentaAnualTiempos <- function(base, edadJub){
  AnioJub <- base$FechaAporte
  EdadIndividuo <- base$EdadDinamica
  base <- base[rep(seq_len(nrow(base)), each = 110-edadJub),]
  base <- base %>% dplyr::mutate(
    FechaPension = seq(from = AnioJub,
                       to = AnioJub + nrow(base) - 1,
                       by = 1),
    Edad = seq(from = EdadIndividuo,
               to = EdadIndividuo + nrow(base) - 1,
               by = 1)) %>%
    dplyr::select(numafi, sexo, FechaPension,
                  Edad, PensionAnual)
  return(base)
}

Aportacion <- plyr::llply(Aportacion,
                          function(x)
                          RentaAnualTiempos(base = x, edadJub = 60))
Aportacion <- bind_rows(Aportacion)
Aportacion$RangoEdad <- cut(Aportacion$Edad,
                            breaks = c(-Inf, 70, 80, 90, 100, Inf),
                            labels = c("60-70", "70-80",
                                       "80-90", "90-100", "100-110"))
```

```
Aportacion <- split(Aportacion, f = Aportacion$Edad)
px <- 1 - probs[61:110]

set.seed(12344)
for (i in 1:50){
  aux <- sample(x = nrow(Aportacion[[i]]),
                size = nrow(Aportacion[[i]])*px[i], replace = FALSE)
  Aportacion[[i]] <- Aportacion[[i]][aux,]
}
Aportacion <- bind_rows(Aportacion)

tabla <- Aportacion %>%
  dplyr::mutate(
    RangoEdad = cut(Edad,
                    Breaks = c(-Inf, 70, 80, 90, 100, Inf),
                    labels = c("60-70", "70-80",
                               "80-90", "90-100", "100-110"))) %>%
  dplyr::group_by(RangoEdad, sexo) %>%
  dplyr::summarise(Suma = sum(PensionAnual))
tabla <- reshape2::dcast(data = tabla,
                         formula = RangoEdad ~ sexo,
                         value.var = "Suma")

tabla$Total <- tabla$F + tabla$M
tabla[,c(2:4)] <- lapply(tabla[,c(2:4)], scales::dollar)
```

F. Anexo Cálculo SCR Riesgo de Longevidad

```
# ======================================= #
#         TESIS INGENIERIA MATEMATICA     #
#         AUTOR: MAURICIO E. XAVIER       #
# CALUCLO DEL SCR RIESGO DE LONGEVIDAD    #
# ======================================= #

# Limpiar el ambiente
rm(list = ls())

# ruta para exportar los resultados
ruta <- "C:/Estudiantil/Tesis/Base/"

# Tarificación de las personas en Activo según capitalización individual
load(paste0(ruta, "MuestraAfiliadosFinal.RData"))

# Renta anual de los afiliados
RentaAnualSistemaCapitalizacion <- function(prima, int, edadJub, incremento)
  iint <- (int - incremento)/(1 + incremento)

  renta <- axn(TH,
               x = edadJub,
               n = 110-edadJub,
               i = iint,
               payment = "immediate")

  pension <- prima / renta

  return(round(pension, 2))
}

Aportacion$PensionAnual <-
```

```
  RentaAnualSistemaCapitalizacion(prima = Aportacion$TotalValorActual,
                                  int = 0.0625,
                                  edadJub = Aportacion$EdadDinamica,
                                  incremento = 0.018261)

Aportacion <- split(Aportacion, f = Aportacion$numafi)

RentaAnualTiempos <- function(base, edadJub){
  AnioJub <- base$FechaAporte
  EdadIndividuo <- base$EdadDinamica
  base <- base[rep(seq_len(nrow(base)), each = 110-edadJub),]
  base <- base %>% dplyr::mutate(
    FechaPension = seq(from = AnioJub,
                       to = AnioJub + nrow(base) - 1,
                       by = 1),
    Edad = seq(from = EdadIndividuo,
               to = EdadIndividuo + nrow(base) - 1,
               by = 1)) %>%
    dplyr::select(numafi, sexo, FechaPension,
                  Edad, PensionAnual)
  return(base)
}

Aportacion <- plyr::llply(Aportacion,
                          function(x)
                          RentaAnualTiempos(base = x, edadJub = 60))
Aportacion <- bind_rows(Aportacion)
Aportacion$RangoEdad <- cut(Aportacion$Edad,
                            breaks = c(-Inf, 70, 80, 90, 100, Inf),
                            labels = c("60-70", "70-80",
                                       "80-90", "90-100", "100-110"))

Aportacion <- split(Aportacion, f = Aportacion$Edad)
```

```r
px <- 1 - probs[61:110]

set.seed(12344)
for (i in 1:50){
  aux <- sample(x = nrow(Aportacion[[i]]),
                size = nrow(Aportacion[[i]])*px[i], replace = FALSE)
  Aportacion[[i]] <- Aportacion[[i]][aux,]
}
Aportacion <- bind_rows(Aportacion)

tabla <- Aportacion %>%
  dplyr::mutate(
    RangoEdad = cut(Edad,
                    Breaks = c(-Inf, 70, 80, 90, 100, Inf),
                    labels = c("60-70", "70-80",
                               "80-90", "90-100", "100-110"))) %>%
  dplyr::group_by(RangoEdad, sexo) %>%
  dplyr::summarise(Suma = sum(PensionAnual))
tabla <- reshape2::dcast(data = tabla,
                         formula = RangoEdad ~ sexo,
                         value.var = "Suma")

tabla$Total <- tabla$F + tabla$M
tabla[,c(2:4)] <- lapply(tabla[,c(2:4)], scales::dollar)

FechaEdad <- Aportacion %>%
  dplyr::group_by(FechaPension, Edad, sexo) %>%
  dplyr::summarise(Suma = sum(PensionAnual)) %>%
  dplyr::mutate(N_periodo = FechaPension - 2019,
                ValorActual = Suma/(1+CRL)^N_periodo)
                # CURVA LIBRE RIESGOS = CRL

tabla <- FechaEdad %>%
```

```
  dplyr::mutate(RangoEdad = cut(Edad,
                                breaks = c(-Inf, 70, 80, 90, 100, Inf),
                                labels = c("60-70", "70-80",
                                           "80-90", "90-100", "100-110"))) %
  dplyr::group_by(RangoEdad, sexo) %>%
  dplyr::summarise(Suma = sum(ValorActual))
tabla <- reshape2::dcast(data = tabla,
                         Formula = RangoEdad ~ sexo,
                         value.var = "Suma")
tabla$Total <- tabla$F + tabla$M
tabla[,c(2:4)] <- lapply(tabla[,c(2:4)], scales::dollar)
```