ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS

ENTROPÍAS GEOMÉTRICAS Y MONOTONICIDAD BAJO EL FLUJO DE RICCI

PROYECTO PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE MATEMÁTICO

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

ANDRÉS ALEJANDRO SOLEDISPA TIBÁN
asoledispatiban@gmail.com

Director: DR. OSCAR ANDRÉS LASSO ANDINO
oscar.lasso@udla.edu.ec

Codirector: DR. MIGUEL ANGEL YANGARI SOSA
miguel.yangari@epn.edu.ec

QUITO, ENERO 2022

DECLARACIÓN

Yo ANDRÉS ALEJANDRO SOLEDISPA TIBÁN, declaro bajo juramento que el trabajo aquí escrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

A través de la presente declaración cedo mis derechos de propiedad intelectual, correspondientes a este trabajo, a la Escuela Politécnica Nacional, según lo establecido por la Ley de Propiedad Intelectual, por su reglamento y por la normatividad institucional vigente.

Andrés Alejandro Soledispa Tibán

CERTIFICACIÓN

Certificamos que el presente trabajo fue desarrollado por ANDRÉS ALEJANDRO SOLEDISPA TIBÁN, bajo nuestra supervisión.

Dr. Oscar Andrés Lasso Andino
Director del Proyecto

Dr. Miguel Angel Yangari Sosa
Codirector del Proyecto

AGRADECIMIENTOS

A Dios, por ayudarme a alcanzar mi sueños y guiar mi camino.

A mis padres, Ángel y Blanca, quienes me han apoyado incondicionalmente en cada momento de mi vida, todo lo que he logrado no hubiese sido posible sin ellos. A mis hermanas, Gaby y Josselyn, quienes estuvieron a mi lado siempre que las necesité, su amor y paciencia son muy importantes en mi vida.

A mi director, Dr. Oscar Lasso, por guiarme adecuadamente a lo largo de todo este proyecto y, sobre todo, por su valioso tiempo invertido. Su conocimiento en física teórica es algo que admiro mucho.

A mi codirector, Dr. Miguel Yangari, por su apoyo en este proyecto y sus enseñanzas impartidas en las aulas.

Al Dr. Marco Calahorrano, por su apoyo en cada uno de los eventos en los que quise participar y los gratos momentos compartidos en sus clases.

Al Dr. Nicolás Vásquez, por su amistad, consejos y divertidos viajes.

A mis amigos de la EPN, en especial a Daniel "el pez", Diego, Javier, Santiago y Sebastián, con quienes viví buenos momentos dentro y fuera de las aulas. Cuando el camino se ponía difícil, ellos estuvieron presentes.

A mis amigos, Frank y Pamela, por todos los momentos divertidos y cariño.

> *"No le tengo miedo a la muerte, pero yo no tengo prisa en morir. Tengo tantas cosas que quiero hacer antes".*
>
> – Stephen Hawking

DEDICATORIA

A mis abuelitos, Carmen y Manuel, quienes supieron darme su amor y cariño. Sus consejos los llevaré siempre en mi corazón.

Índice general

Resumen

En el presente trabajo, se estudia a la familia de entropías tipo Perelman $\mathcal{W}_{ek}$ propuestas por Jun-Fang Li [20], su relación con las entropías de Boltzmann-Shannon y Boltzmann-Nash-Shannon y, posteriormente, se analiza su monotonía bajo un sistema de ecuaciones diferenciales que involucra al flujo de Ricci. Luego, se construye una nueva familia de entropías tipo Perelman y se realiza un análisis similar al efectuado con la familia $\mathcal{W}_{ek}$, considerando a la entropía de Shannon tipo exponencial en los cálculos. En los capítulos del 2 al 4, se presentan las principales herramientas que se usarán en este trabajo. Principalmente, se exhiben propiedades importantes del flujo de Ricci y los efectos de este en los tensores de curvatura. Asimismo, se estudian un par de propiedades de las entropías $\mathcal{F}$ y $\mathcal{W}$ de Perelman que son de vital importancia para nuestros fines. Finalmente, se presentan las conclusiones obtenidas en nuestro estudio.

Palabras clave: Variedad Riemanniana, escalar de curvatura, tensor de Ricci, flujo de Ricci, familia de entropías.

Abstract

In this paper, we study the Perelman $\mathcal{W}_{ek}$ entropy family proposed by Jun-Fang Li [20], its relationship with the Boltzmann-Shannon and Boltzmann-Nash-Shannon entropies and, later, we analyze its monotony under a system of differential equations involving the Ricci flow. Then, we constructed a new Perelman-type entropy family and we make an analysis, similar to that made with the family $\mathcal{W}_{ek}$, taking in consideration the Shannon Entropy power in our calculations. In chapters 2 to 4, we present the main tools that we will use in this work. Mainly, we exhibit important properties of the Ricci flow and its effects on curvature tensors. In addition, we study a couple of properties of the Perelman entropies $\mathcal{F}$ and $\mathcal{W}$ that are of vital importance for our purposes. Finally, we present the conclusions obtained in our study.

Keywords: Riemannian manifold, scalar curvature, Ricci tensor, Ricci flow, entropy family.

Capítulo 1

Introducción

El Análisis Geométrico es una rama relativamente nueva de las matemáticas. En este campo, se usan las técnicas analíticas de las Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP's) para resolver problemas de la geometría Riemanniana. Generalmente, se suele considerar una variedad Riemanniana cuya métrica evoluciona siguiendo una ecuación de tipo difusivo. A estas EDP's que describen la evolución de los coeficientes de la métrica, bajo un parámetro afín, se las denomina flujos geométricos. El flujo geométrico más conocido es el flujo de Ricci [6, 12]. Este flujo es un sistema de ecuaciones parabólicas y se ha estudiado ampliamente [5, 27]. El flujo de Ricci fue uno de los pilares fundamentales para la demostración del Teorema de Geometrización de Thurston hecha por Perelman [12, 24, 25, 26]. En el trabajo de Perelman, se logra escribir el flujo de Ricci como un flujo de gradiente usando las entropías $\mathcal{F}$ y $\mathcal{W}$. Estas entropías son monótonas bajo el flujo de Ricci salvo en los solitones contractivos. Recientemente, estas entropías se han podido interpretar usando las entropías de Boltzman-Nash-Shannon [21, 24].

Los flujos geométricos también aparecen en la física de altas energías. Se conoce que el flujo de renormalización del modelo sigma no-lineal a primer orden en α' es el flujo de Ricci [8], donde α' es el parámetro de la perturbación y está relacionado con la longitud de una cuerda en la teoría de las supercuerdas. Si se considera el siguiente término (α'^2) en el desarrollo perturvativo, se obtiene lo que se conoce como RG-2 flow [9]. Este flujo también ha sido usando para abordar algunos problemas en holografía y agujeros negros [17, 18].

Existen algunos trabajos que profundizan en las aplicaciones de los flujos geométricos, especialmente en la física de altas energías, ver por ejemplo [1, 7, 11, 13, 16].

Las entropías de Perelman nos permiten escribir el flujo de Ricci en su formulación de gradiente; por esta razón, la exploración de nuevas familias que nos permitan profundizar en el estudio de solitones contractivos es muy importante. Sin embargo, esta tarea no es sencilla, debido a esto la comunidad matemática tuvo algunos inconvenientes en encontrar la formulación de gradiente para este flujo. Perelman se inspiró en las ecuaciones del flujo de renormalización de las cuerdas para plantear unas entropías, que resultaron ser las adecuadas.

En [20], se construyen familias de entropías tipo Perelman y se estudia su comportamiento. En el presente trabajo, se analiza estas familias de entropías tipo Perelman para obtener conclusiones sobre las entropías de Boltzman-Shannon, Shannon tipo exponencial y Boltzman-Nash-Shannon [21, 23]. Lo que se busca es encontrar resultados de monotonicidad para este tipo de entropías usando los resultados de monotonicidad que se presentan en [20]. La primera parte consiste en reescribir a las familias de entropías de Perelman en función de las otras tres entropías. Luego, usando los resultados de monotonicidad de tales familias, pasamos a encontrar ciertas condiciones para la monotonicidad de las nuevas entropías. Estos resultados servirán para entender mejor el comportamiento de las familias de entropías tipo Perelman, pero además permitirán construir nuevas entropías, especialmente con la adición de nuevos campos.

En el Capítulo 2, se presenta una breve introducción de los resultados conocidos en geometría Riemanniana. En el Capítulo 3, se presenta la definición formal del flujo de Ricci y se enuncian algunos resultados básicos conocidos. En el Capítulo 4, se presentan las entropías geométricas con las que se trabajará. En el Capítulo 5, se presentan los resultados de monotonicidad obtenidos en el presente trabajo. Se mostrarán las demostraciones detalladas de los resultados. Finalmente, en el Capítulo 6, se exhiben las conclusiones obtenidas.

Adelantamos al lector que las demostraciones de los capítulos 2, 3 y 4 han sido tomadas de las referencias que se indican. Sin embargo, el autor ha procedido a presentar en detalle los pasos intermedios que en principio no figuraban en las demostraciones originales, esto con el objetivo de ganar claridad y entender de mejor manera algunos aspectos de las demostraciones.

Capítulo 2

Geometría Riemanniana

Un hecho importante en las matemáticas se produce en el siglo XVII: el advenimiento del cálculo diferencial, promovido principalmente por Isaac Newton en Inglaterra e, independientemente, por Gottfried Wilhelm Leibniz en Alemania. Gradualmente, el uso de técnicas diferenciales para resolver problemas de geometría provocó la creación de la rama de las matemáticas que ahora llamamos Geometría Diferencial. En los siglos posteriores, varias mentes brillantes trabajaron en la traducción de propiedades geométricas en términos de ecuaciones en derivadas parciales y ecuaciones diferenciales ordinarias, lo cual condujo a la geometría diferencial a una nueva fase en la que se interrelacionaban algunos aspectos geométricos con otros de la teoría de ecuaciones diferenciales. Personajes como Karl Friedrich Gauss, Nikolai Ivanovich Lobachevski y János Bolyai presentaron en sus trabajos una nueva geometría suponiendo que, al contrario de lo que sucede en la geometría euclidiana, por un punto exterior a una recta pasa más de una recta paralela. De esta forma, nació la geometría no euclidiana.

A mediados del siglo XIX, Bernhard Riemann (alumno de Gauss) en su conferencia titulada *"Sobre las hipótesis que yacen en los fundamentos de la Geometría"*, presentó un nuevo principio sobre lo que se puede entender por geometría. Según Riemann, para construir una geometría es necesario dar: una variedad de elementos, las coordenadas de estos elementos y la ley que mide la distancia entre elementos de la variedad infinitamente próximos. Con esta nueva perspectiva, empezaron a surgir varias aplicaciones basadas en las ideas de Riemann, como por ejemplo, la teoría de la relatividad, la cual hace uso de variedades 4-dimensionales Lorentzianas para modelar el espacio-tiempo.

Como era de esperar, en los años posteriores al trabajo de Riemann, los matemáticos Gregorio Ricci y Tullio Levi-Civita dieron tratamiento a las obras de Riemann para así finalmente desembarcar en lo que hoy conocemos como Geometría Riemanniana. Esta rama de las matemáticas abarca la mayor parte de los modelos geométricos que le precedieron. Por una lado, los espacios euclidianos pueden ser vistos como variedades Riemannianas con curvatura de Riemann nula, las esferas tienen una estructura de variedades Riemannianas elípticas y los espacios no euclidianos son casos particulares de variedades Riemannianas hiperbólicas.

En este capítulo, daremos una introducción a la Geometría Diferencial y, posteriormente, a la Geometría Riemanniana. Principalmente, presentaremos una serie de conceptos y resultados que nos serán de gran utilidad en los capítulos posteriores.

2.1. Geometría Diferencial

En esta sección, discutiremos los conceptos básicos de la geometría diferencial como: variedades y mapas diferenciables, campos vectoriales diferenciables y corchetes de Lie. Adicionalmente, haremos un breve repaso sobre la orientabilidad de una variedad y, también, presentaremos la definición y ciertas propiedades sobre las variedades diferenciables acotadas. Estos dos últimos conceptos jugarán un rol importante cuando abordemos el tema de la integración sobre variedades Riemannianas.

2.1.1. Variedades diferenciables

DEFINICIÓN 2.1. *Sea M un espacio topológico. Decimos que M es una n-variedad topológica si verifica lo siguiente:*

(i) *M es de Hausdorff.*

(ii) *M es segundo contable, es decir, existe una base contable para la topología de M.*

(iii) *M es localmente euclidiano de dimensión n, esto es, para cada $p \in M$, existen U una vecindad abierta de p, $\widetilde{U}$ un abierto de $\mathbb{R}^n$ y un mapa $\varphi : U \to \widetilde{U}$, el cual es un homeomorfismo de U en $\widetilde{U}$.*

DEFINICIÓN 2.2. *Sea M una n-variedad topológica. Una carta coordenada sobre M es un par (U, φ), donde U es un subconjunto abierto de M y $\varphi : U \to \widetilde{U}$ es un* *homeomorfismo de U en un subconjunto abierto $\widetilde{U} = \varphi(U)$ de $\mathbb{R}^n$. Al mapa*

$$\begin{aligned} \varphi : U &\rightarrow \widetilde{U} \\ p &\mapsto \varphi(p) = \left(x^1(p), ..., x^n(p)\right), \end{aligned}$$

lo denominaremos mapa de coordenadas y a las funciones $x^i : U \rightarrow \mathbb{R}$ con $i \in \{1, ..., n\}$ las llamaremos coordenadas locales sobre U. De esta forma, podemos denotar a la carta coordenada (U, φ) también por (U, x^i).

En adelante, a los mapas que son infinitamente diferenciables (C^∞) los llamaremos mapas diferenciables o suaves.

DEFINICIÓN 2.3. *Sean M una n-variedad topológica y $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ una familia de cartas coordenadas sobre M. Se dice que el par $(M, \mathcal{A})$ es una variedad diferenciable de dimensión n (o n-variedad diferenciable), si verifica las siguientes propiedades:*

(i) $\bigcup_{i \in I} U_i = M$.

(ii) *Para cada $i, j \in I$, tales que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, se tiene que*

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j)$$

y

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

son diferenciables.

(iii) *La familia $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ es maximal con respecto a (i) y (ii), esto es, si $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ es una carta coordenada sobre M, tal que $\varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_i$ y $\varphi_i^{-1} \circ \varphi_\alpha$ son mapas diferenciables para cada $i \in I$, entonces $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{A}$.*

NOTACIÓN 2.1.

(a) *A la familia $\mathcal{A}$ la denominaremos atlas y a sus elementos los llamaremos cartas diferenciables.*

(b) *Si (U, φ) es una carta diferenciable, denominaremos a U dominio suave de coordenadas y a φ mapa de coordenadas diferenciable.*

(c) *Cuando nos refiramos a la n-variedad diferenciable $(M, \mathcal{A})$, simplemente diremos que M es una n-variedad diferenciable, es decir, omitimos la escritura de $\mathcal{A}$. Solo escribiremos el atlas cuando sea necesario.*

(d) *En ocasiones, no se especificará la dimensión de la n-variedad diferenciable y simplemente diremos variedad diferenciable.*

2.1.2. Aplicaciones diferenciables

DEFINICIÓN 2.4. *Sean M, N dos variedades diferenciables y $f : M \to N$ un mapa. Decimos que f es diferenciable, si para todo $p \in M$, existen dos cartas diferenciables (U, φ) sobre M y (V, ψ) sobre N, tales que $p \in U$, $f(p) \in V$, $f(U) \subseteq V$ y*

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$$

es diferenciable.

PROPOSICIÓN 2.1. *([19], Proposición 2.10, p. 36) Sean M, N y P tres variedades diferenciables. Entonces:*

(i) *Cada mapa constante $c : M \to N$ es diferenciable.*

(ii) *El mapa identidad de M es diferenciable.*

(iii) *Si $f : M \to N$ y $g : N \to P$ son diferenciables, se tiene que $g \circ f : M \to P$ es diferenciable.*

DEFINICIÓN 2.5. *Sean M, N dos variedades diferenciables y $f : M \to N$ un mapa. Se dice que f es un difeomorfismo entre M y N cuando f es biyectiva y diferenciable, y $f^{-1} : N \to M$ es diferenciable.*

EJEMPLO 2.1. *Dadas una n-variedad diferenciable M y una carta diferenciable (U, φ) sobre M, se sigue que*

$$\varphi : U \to \varphi(U)$$

es un difeomorfismo entre U y $\varphi(U)$.

DEFINICIÓN 2.6. *Sean M una variedad diferenciable, $v : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ un mapa lineal y $p \in M$. Decimos que v es una derivación en p, si verifica que*[1]

$$v(fg) = f(p)v(g) + g(p)v(f),$$

para cada $f, g \in C^\infty(M)$.
Al conjunto de todas las derivaciones en p lo denotaremos por T_pM y lo denomina-

[1] Esta propiedad suele conocerse como propiedad de Leibniz.

remos espacio tangente a M en p. Asimismo, a los elementos de T_pM los llamaremos vectores tangentes en p.

OBSERVACIÓN 2.1. *Si M es una n-variedad diferenciable, se cumple que T_pM es un espacio vectorial real de dimensión n para cada $p \in M$.*

DEFINICIÓN 2.7. *Sea M una variedad diferenciable. Para cada $p \in M$, se define el espacio cotangente a M en p, denotado por T_p^*M, como el espacio dual a T_pM:*

$$T_p^*M = (T_pM)^*.$$

A los elementos de T_p^*M los llamaremos covectores en p.

En una n-variedad diferenciable M es posible construir una base para T_pM a partir de una carta diferenciable (U, φ) $\left((U, x^i)\right)$, cuyo dominio suave de coordenadas contiene a p. Para visualizar esto, consideremos las siguientes aplicaciones:

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_{\varphi(p)}, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_{\varphi(p)},$$

las cuales verifican que

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\varphi(p)} f = \frac{\partial f}{\partial x^i}(\varphi(p)), \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}, \ \forall f \in C^\infty(R^n).$$

Luego, el conjunto

$$B = \left\{ \left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_{p}, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_{p} \right\},$$

donde

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{p} := d\left(\varphi^{-1}\right)_{\varphi(p)} \left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\varphi(p)} \right), \forall i \in \{1, \ldots, n\},$$

es una base para T_pM. Llamaremos a B base coordenada para T_pM asociada a la carta (U, φ), y a sus elementos los denominaremos vectores en coordenadas en p asociados a la carta (U, φ).

Ahora bien, si tomamos $v \in T_pM$, existen escalares $v^1, \ldots, v^n$, tales que

$$v = v^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{p}.$$

A los escalares v^i con $i \in \{1, \ldots, n\}$ los llamaremos componentes de v con respecto a la base coordenada. Además, estos componentes verifican la siguiente propiedad:

$$v\left(x^i\right) = v^i,\ \forall i \in \{1, \ldots, n\}. \tag{2.1}$$

Por otro lado, la base coordenada de T_pM induce una base sobre T_p^*M, a la cual denotaremos por

$$\left\{\lambda^1|_p, \ldots, \lambda^n|_p\right\}.$$

Además, se cumple que

$$\lambda^i\Big|_p \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p\right) = \delta_{ij},\ \forall i, j \in \{1, \ldots, n\}.$$

A la base $\left\{\lambda^i\big|_p\right\}_{i=1}^n$ la denominaremos base dual inducida por $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p\right\}_{i=1}^n$.

Proposición 2.2. *([19], Lema 3.4, p. 54) Sean M una variedad diferenciable y $v \in T_pM$ con $p \in M$. Entonces:*

(i) Si c es una función constante, se tiene que $v(c) = 0$.

(ii) Si $f, g \in C^\infty(M)$, tales que $f(p) = g(p) = 0$, se tiene que $v(fg) = 0$.

Demostración. Sean $p \in M$ y $v \in T_pM$ arbitrarios pero fijos. Para demostrar la primera propiedad, consideremos las siguientes funciones:

$$\begin{array}{rcl} c : M & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & c \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{rcl} 1 : M & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1, \end{array}$$

donde $c \in \mathbb{R}$ es una constante. Así, puesto que v es una derivación, se tiene que

$$\begin{aligned} v(c) &= v(1c) = c(p)v(1) + 1(p)v(c) \\ &= cv(1) + 1v(c) = cv(1) + v(c), \end{aligned}$$

con lo cual

$$cv(1) = 0.$$

Por lo tanto, como v es lineal, se concluye que

$$v(c) = 0.$$

Ahora bien, demostrar la segunda propiedad no presenta dificultad alguna, pues basta usar la definición de derivación. En efecto, consideremos $f, g \in C^\infty(M)$, tales que $f(p) = g(p) = 0$. Puesto que v es una derivación, tenemos que

$$v(fg) = f(p)v(g) + g(p)v(f) = 0.$$

$\square$

DEFINICIÓN 2.8. *Sean M, N dos variedades diferenciables y $f : M \to N$ un mapa diferenciable. Para cada $p \in M$, se define el mapa lineal*

$$df_p : T_pM \to T_{f(p)}N,$$

llamado el diferencial de f en p, como sigue. Dado $v \in T_pM$, se tiene que $df_p(v)$ es una derivación en $f(p)$ que actúa sobre cada $h \in C^\infty(N)$ por la siguiente regla:

$$df_p(v)(h) = v(h \circ f).$$

OBSERVACIÓN 2.2. *Si $h, g \in C^\infty(N)$, se tiene que*

$$\begin{aligned} df_p(v)(hg) &= v((hg) \circ f) = v((h \circ f)(g \circ f)) \\ &= (h \circ f)(p)v(g \circ f) + (g \circ f)(p)v(h \circ f) \\ &= h(f(p))df_p(v)(g) + g(f(p))df_p(v)(h), \end{aligned}$$

lo cual demuestra que $df_p(v) \in T_{f(p)}N$.

PROPOSICIÓN 2.3. *([19], Proposición 3.9, p. 56) Sean M una variedad diferenciable y U un subconjunto abierto de M. El mapa inclusión $\iota : U \to M$, satisface que*

$$d\iota_p : T_pU \to T_pM$$

es un isomorfismo para cada $p \in U$.

DEFINICIÓN 2.9. *Sea M una variedad diferenciable. Se define el fibrado tangente de M, denotado por TM, como la unión disjunta de todos los espacios tangentes de todos los puntos de M, esto es,*

$$TM := \coprod_{p \in M} T_pM.$$

A los elementos de TM, los denotaremos por (p, v) con $p \in M$ y $v \in T_pM$. Además, al mapa

$$\begin{aligned} \pi : TM &\to M \\ (p, v) &\mapsto \pi(p, v) = p, \end{aligned}$$

lo llamaremos mapa de proyección.

PROPOSICIÓN 2.4. *([19], Proposición 3.18, p. 66) Sea M una n-variedad diferenciable. El fibrado tangente TM admite una topología natural y un atlas maximal, con los cuales TM es una $2n$-variedad diferenciable y la proyección $\pi : TM \to M$ es diferenciable.*

DEFINICIÓN 2.10. *Sean M, N dos variedades diferenciables y $f : M \to N$ un mapa diferenciable. Definimos el diferencial global de f como*

$$df : TM \to TN,$$

el cual es el mapa cuya restricción sobre T_pM es df_p para cada $p \in M$.

PROPOSICIÓN 2.5. *([19], Proposición 3.21, p. 68) Sean M, N dos variedades diferenciables y $f : M \to N$ un mapa diferenciable. Se tiene que*

$$df : TM \to TN$$

es diferenciable.

2.1.3. Campos vectoriales

DEFINICIÓN 2.11. *Sea M una variedad diferenciable. Un campo vectorial sobre M es un mapa continuo $X : M \to TM$, usualmente escrito como $p \mapsto X_p$, con la propiedad de que*

$$\pi \circ X = Id_M,$$

o equivalentemente, $X_p \in T_pM$ para cada $p \in M$.

EJEMPLO 2.2. *Consideremos una n-variedad diferenciable M y una carta diferenciable (U, x^i) sobre M. El mapa*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^i} : U &\to TU \\ p &\mapsto \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \end{aligned} \quad \text{con } i \in \{1, ..., n\},$$

es un campo vectorial diferenciable sobre U. A este mapa lo llamaremos i-ésimo campo vectorial coordenado. Además, gracias a la Proposición 2.3, podemos expresar el mapa $\frac{\partial}{\partial x^i}$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^i} : U &\to TM \\ p &\mapsto \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p . \end{aligned}$$

Sabemos que existe una identificación natural entre T_pU y T_pM para cada $p \in U$. Esta identificación nos permite asociar TU con el subconjunto abierto $\pi^{-1}(U) \subseteq TM$. Por lo tanto, un campo vectorial definido sobre U puede verse como un mapa de U en TU o como un mapa de U en TM. Además, si consideramos un campo vectorial X sobre M, su restricción $X|_U$ es un campo vectorial sobre U y, más aún, esta restricción es diferenciable si X lo es.

OBSERVACIÓN 2.3. *Si tomamos una carta diferenciable (U, x^i) sobre M, podemos expresar el valor de X sobre cualquier punto $p \in U$ en términos de los vectores en coordenadas de la siguiente manera:*

$$X_p = X^i(p) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p .$$

Así, la ecuación anterior nos permite definir n funciones $X^i : U \to \mathbb{R}$ con $i \in \{1, ..., n\}$. Estas funciones se denominan componentes de X con respecto a la carta diferenciable (U, x^i).

DEFINICIÓN 2.12. *Sean M una variedad diferenciable y $X : M \to TM$ un campo vectorial sobre M. Decimos que X es diferenciable, si sus componentes, con respecto a cualquier carta diferenciable sobre M, son diferenciables. Al conjunto de todos los campos vectoriales diferenciables sobre M lo denotaremos por $\mathfrak{X}(M)$.*

El espacio $\mathfrak{X}(M)$ es un espacio vectorial bajo las siguientes operaciones:

$$(aX + bY)_p = aX_p + bY_p, \forall p \in M,$$

donde $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ y $a, b \in \mathbb{R}$. El elemento nulo de este espacio vectorial es el campo vectorial nulo, el cual asigna a cada $p \in M$ el elemento nulo de T_pM.

DEFINICIÓN 2.13. *Sean M una variedad diferenciable, X un campo vectorial sobre M y $f : M \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Definimos el mapa $fX : M \to TM$ como*

$$(fX)_p = f(p)X_p,$$

para cada $p \in M$.

DEFINICIÓN 2.14. *Sean M una variedad diferenciable, X un campo vectorial diferenciable sobre M y $f : U \to \mathbb{R}$ una función diferenciable sobre un subconjunto abierto U de M. Se define la función $Xf : U \to \mathbb{R}$ como*

$$(Xf)(p) = X_pf,$$

para cada $p \in M$. La función Xf se denomina derivada direccional de f a lo largo de X.

A través de la definición precedente podemos ver a X como un operador lineal de la forma $X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$.

PROPOSICIÓN 2.6. *([19], Proposición 8.14, p. 180) Sean M una variedad diferenciable y X un campo vectorial diferenciable sobre M. Entonces:*

(i) Para cada $f \in C^\infty(M)$, la función Xf es diferenciable sobre M.

(ii) Para cada subconjunto abierto U de M y cada $f \in C^\infty(U)$, la función Xf es diferenciable sobre U.

Si consideramos X e Y dos campos vectoriales diferenciables sobre M, es posible definir la "composición" de estos dos campos a partir de la Definición 2.14 como sigue:

$$\begin{aligned} X \circ Y : C^\infty(M) &\to C^\infty(M) \\ f &\mapsto X(Yf) =: XYf. \end{aligned}$$

Este mapa no corresponde a un campo vectorial, pues sus imágenes no satisfacen la regla de Leibniz. Sin embargo, el conmutador $X \circ Y - Y \circ X$ define un campo vectorial sobre M. Esto lo visualizamos en la proposición siguiente.

PROPOSICIÓN 2.7. *([10], Proposición 6.2, p. 27-28) Sean M una variedad diferenciable y $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Entonces, existe un único campo vectorial diferenciable $W \in \mathfrak{X}(M)$, tal que*

$$Wf = (X \circ Y - Y \circ X)f,$$

para cada $f \in C^\infty(M)$.

Al campo vectorial diferenciable W de la proposición previa lo denominaremos corchete de Lie de X e Y y lo denotaremos por $[X, Y]$.

OBSERVACIÓN 2.4. *Localmente, el corchete de Lie de X e Y puede ser expresado de la siguiente forma:*

$$[X, Y] = \left(XY^i - YX^i\right) \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Así, la i-ésima componente de $[X, Y]$ es

$$[X, Y]^i := \left(XY^i - YX^i\right).$$

Además, cuando $[X, Y] = 0$, diremos que X e Y conmutan.

EJEMPLO 2.3. *Consideremos una variedad diferenciable M y una carta diferenciable (U, x^i) sobre M. Se tiene que*

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right] = \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j} - \frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i} = 0,$$

para cada $i, j \in \{1, ..., n\}$.

EJEMPLO 2.4. *Sea $M = \mathbb{R}^3$ con coordenadas (x, y, z). Consideremos los siguientes campos vectoriales sobre M:*

$$X = 2xz\frac{\partial}{\partial x} + e^{yz}\frac{\partial}{\partial y} \ \text{ e } \ Y = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\frac{\partial}{\partial x} + 5\frac{\partial}{\partial z}.$$

En este caso, tenemos que

$$[X, Y] = \left(2x^2z - 2y^2z - 2z^3 - 10x + 2ye^{yz}\right)\frac{\partial}{\partial x} - 5ye^{yz}\frac{\partial}{\partial y}.$$

PROPOSICIÓN 2.8. *([19], Proposición 8.28, p. 187-188) Sea M una variedad diferenciable. Para cada $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, se siguen las siguientes propiedades:*

(i) Bilinealidad: Para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$[\alpha X + \beta Y, Z] = \alpha[X, Z] + \beta[Y, Z] \ \text{ y } \ [X, \alpha Y + \beta Z] = \alpha[X, Y] + \beta[X, Z].$$

(ii) Antisimetría: $[X, Y] = -[Y, X]$.

(iii) Identidad de Jacobi:

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0.$$

(iv) Regla de Leibniz: Para todo $f, g \in C^\infty(M)$, se tiene que

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X.$$

2.1.4. Orientabilidad

DEFINICIÓN 2.15. *Sea V un espacio vectorial real de dimensión n. Consideremos dos bases ordenadas $B = \{v_1, ..., v_n\}$ y $B' = \{w_1, ..., w_n\}$ para V. Recordemos que existe una única transformación lineal $S : V \to V$, tal que*

$$Sv_i = w_i,$$

para cada $i \in \{1, ..., n\}$. Se dice que B y B' son equivalentes, si det $(S) > 0$.

Esta definición nos permite establecer una relación de equivalencia que divide al conjunto de todas las bases ordenadas de V en dos clases de equivalencia. De esta forma, con la misma notación de la definición anterior, introducimos el siguiente concepto.

DEFINICIÓN 2.16. *Una orientación para V es una asignación de un signo positivo para los elementos de una clase de equivalencia y un signo negativo para los elementos de la otra. Si B es una base ordenada para V con un signo asignado, llamaremos a este signo orientación de B, y diremos que B está orientada positivamente u orientada negativamente de acuerdo a este signo.*

OBSERVACIÓN 2.5.

(a) *Existen exactamente dos posibles orientaciones para V.*

(b) *El orden de la base es muy importante. Si intercambiamos las posiciones de dos vectores base, entonces obtenemos una base ordenada diferente con la orientación opuesta.*

(c) *Si la dimensión de V es cero, su orientación es solo una asignación de un signo $+1$ o -1.*

Si consideremos un isomorfismo $A : V \to W$ entre dos espacios vectoriales orientados, es natural pensar que este mapa lleve bases ordenadas equivalentes de V a bases ordenadas equivalentes de W. Esto que acabamos de mencionar siempre se cumple. Por lo tanto, para cualquier base ordenada B de V, el signo de la imagen $A(B)$ es siempre el mismo que el signo de B o siempre el opuesto. Si el signo de B y $A(B)$ es el mismo, diremos que el isomorfismo A preserva la orientación. Por otro lado, si el signo de B y $A(B)$ es diferente, diremos que el isomorfismo A invierte la orientación.

Ahora bien, por medio de la siguiente definición daremos una noción de orientación sobre una variedad diferenciable.

DEFINICIÓN 2.17. *Sea M una n-variedad diferenciable. Una orientación de M consiste en una elección de orientaciones para todos los espacios tangentes sobre M. Si $\dim(M) = n \geq 1$, estas orientaciones tienen que encajar suavemente, esto es, para cada punto $p \in M$, existe una carta diferenciable (U, φ), cuyo dominio suave de coordenadas contiene a p, tal que*

$$d\varphi_p : T_pU \to T_{\varphi(p)}\varphi(U)$$

preserva la orientación estándar[2] *de* $\mathbb{R}^n$ *en cada punto* $p \in U$.

Observación 2.6. *Si* M *es una variedad diferenciable de dimensión cero, una orientación para* M *es solo una asignación de un signo* ($+1$ *o* -1) *en cada espacio tangente.*

Al signo que determina la orientación lo denominaremos número de orientación.

Definición 2.18. *Sea* M *una variedad diferenciable. Decimos que* M *es orientable si admite una orientación.*

Con la ayuda de la proposición siguiente podemos dar un caracterización alternativa de la orientabilidad de una variedad diferenciable.

Proposición 2.9. *([10], Proposición 8.5, p. 48) Sea* M *una variedad diferenciable. Se tiene que* M *es orientable si, y sólo si, existe un atlas* $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ *para el cual todos los mapas superpuestos* $\varphi_i^{-1} \circ \varphi_j$ *preservan la orientación.*

Definición 2.19. *Sea* M *una variedad diferenciable. Se dice que* M *es orientada si es orientable junto con una elección de orientación.*

Definición 2.20. *Sean* M, N *dos* n*-variedades diferenciables orientadas y* $f : M \to N$ *un mapa diferenciable. Decimos que* f *preserva la orientación, si* df_p *preserva la orientación en cada punto* $p \in M$. *Análogamente, decimos que* f *invierte la orientación, si* df_p *invierte la orientación en cada punto* $p \in M$.

2.1.5. Variedades acotadas

Consideremos el semiespacio superior cerrado

$$\mathbb{H}^n = \left\{ \left(x^1, ..., x^n \right) \in \mathbb{R}^n : \ x^n \geq 0 \right\},$$

dotado con la topología inducida por la topología usual de $\mathbb{R}^n$. Un mapa $f : U \to \mathbb{R}^m$ definido sobre un conjunto abierto U de $\mathbb{H}^n$ se dice diferenciable, si es la restricción sobre U de un mapa diferenciable $\tilde{f}$ definido sobre un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ que contiene a U. En este caso, el diferencial df_p se define como $d\tilde{f}_p$. Además, este diferencial es independiente de la extensión, ya que cualquiera de las extensiones utilizadas debe coincidir en U.

Definición 2.21. *Sea* M *una* n*-variedad diferenciable cuyo atlas viene dado por*

[2] El de la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

$\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$. *Se dice que M es una n-variedad diferenciable acotada, si dada una carta diferenciable (U, φ) sobre M, se tiene que $\varphi : U \to \widetilde{U}$ es un homeomorfismo, donde U es un subconjunto abierto de M y $\widetilde{U}$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{H}^n$.*

Diremos que $p \in M$ es un punto límite, si existe una carta diferenciable (U, φ), tal que $\varphi\left(x^1, ..., x^{n-1}, 0\right) = p$ para algún $\left(x^1, ..., x^{n-1}\right) \in \mathbb{R}^{n-1}$. Al conjunto de todos los puntos límite lo denotaremos por ∂M.

PROPOSICIÓN 2.10. *([10], Proposición 9.2, p. 51) Sea M una n-variedad diferenciable acotada. Se tiene que ∂M es una $(n-1)$-variedad diferenciable.*

PROPOSICIÓN 2.11. *([10], Proposición 9.4, p. 51-52) Sea M una n-variedad diferenciable, orientable y acotada. Se tiene que ∂M es también orientable.*

A lo largo de todo este trabajo usaremos variedades diferenciables cerradas. Estas variedades no son más que variedades diferenciables compactas cuyo conjunto de puntos límite es vacío. Nuestra necesidad de presentar el concepto de una variedad diferenciable acotada se debe a que algunos de los resultados que exhibiremos más adelante consideran este tipo de variedad.

2.2. Tensores

El cálculo tensorial es una herramienta bastante poderosa dentro de la física, pues los tensores son cantidades matemáticas que no dependen del sistema coordenado. En otras palabras, un tensor, como objeto físico, no se ve afectado por la forma de medirlo o de observarlo; por esta razón, son usados para modelar las cantidades físicas observables. Por otro lado, desde el punto de vista matemático, un tensor es una función multilineal, esto es, una función de varias variables, lineal en cada una de sus componentes y cuyo dominio es el producto cartesiano de un espacio vectorial varias veces.

En esta sección, estudiaremos a los tensores y a ciertas propiedades importantes que estos poseen. El lector podrá verificar que esta sección es una parte medular de este capítulo, pues, algunas de las propiedades locales de los tensores más importantes que usaremos, se desprenden de los resultados y observaciones que hacemos en esta sección.

DEFINICIÓN 2.22. *Sea V un espacio vectorial real de dimensión n. Un k-tensor en V*

es una función multilineal real definida sobre el producto $V \times \cdots \times V$ de k copias de V. El conjunto de todos los k-tensores sobre V es un espacio vectorial y se denota por $\mathcal{T}^k(V^*)$.

DEFINICIÓN 2.23. *Sea V un espacio vectorial real de dimensión n. Dados $T \in \mathcal{T}^k(V^*)$ y $S \in \mathcal{T}^m(V^*)$, se define su producto tensorial como el $(k+m)$-tensor $T \otimes S$, dado por*

$$T \otimes S = (v_1, ..., v_k, v_{k+1}, ..., v_{k+m}) := T(v_1, ..., v_k)S(v_{k+1}, ..., v_{k+m}),$$

para cada $v_1, ..., v_{k+m} \in V$. Esta operación es bilineal y asociativa, pero no conmutativa.

PROPOSICIÓN 2.12. *([19], Proposición 12.4, p. 306) Sean $V_1, ..., V_k$ espacios vectoriales reales de dimensiones $n_1, ..., n_k$, respectivamente. Para todo $j \in \{1, ..., k\}$, sean $\left\{v_1^{(j)}, ..., v_{n_j}^{(j)}\right\}$ una base para V_j y $\left\{T_{(j)}^1, ..., T_{(j)}^{n_j}\right\}$ la base dual correspondiente para V_j^*. Se tiene que el conjunto*

$$\left\{T_{(1)}^{i_1} \otimes \cdots \otimes T_{(k)}^{i_k} : 1 \leq i_1 \leq n_1, ..., 1 \leq i_k \leq n_k\right\}$$

es una base para $L(V_1, ..., V_k; \mathbb{R})$[3]. Por lo tanto, dim $(L(V_1, ..., V_k; \mathbb{R})) = n_1 \cdots n_k$.

COROLARIO 2.13. *([10], Proposición 1.2, p. 62) Sean V un espacio vectorial real de dimensión n, $\{v_1, ..., v_n\}$ una base para V y $\left\{T^1, ..., T^n\right\}$ la base dual correspondiente para V^*. Se tiene que el conjunto*

$$\left\{T^{i_1} \otimes \cdots \otimes T^{i_k} : 1 \leq i_1, ..., i_k \leq n\right\}$$

es una base para $\mathcal{T}^k(V^*)$. Por lo tanto, dim $\left(\mathcal{T}^k(V)\right) = n^k$.

OBSERVACIÓN 2.7. *Si V un espacio vectorial real de dimensión n, entonces V puede ser identificado con $(V^*)^*$.*

En efecto, denotemos por $\{v_1, ..., v_n\}$ a la base de V. Asimismo, denotemos por $\left\{T^1, ..., T^n\right\}$ y $\{(v_1^*)^*, ..., (v_n^*)^*\}$ a las bases duales correspondientes para V^* y $(V^*)^*$, respectivamente. Sabemos que existe un isomorfismo canónico entre V y $(V^*)^*$, definido por

$$\begin{array}{rcl} I : V & \to & (V^*)^* \\ v & \mapsto & I(x), \end{array}$$

[3] Espacio de las funciones multilineales de $V_1 \times \cdots \times V_k$ en $\mathbb{R}$.

donde

$$I(x)(f) = f(x),$$

para cada $f \in V^*$. Así, por la definición de I, se sigue que

$$I(v_i)(T^j) = T^j(v_i), \ \forall i, j \in \{1, ..., n\}. \tag{2.2}$$

Ahora bien, usando las propiedades de las bases duales, se tiene que

$$T^j(v_i) = \delta_{ij} = (v_i^*)^*(T^j), \ \forall i, j \in \{1, ..., n\}. \tag{2.3}$$

De esta forma, combinando (2.2) y (2.3), se obtiene

$$I(v_i)(T^j) = (v_i^*)^*(T^j), \ \forall i, j \in \{1, ..., n\},$$

de donde, como T^j es un elemento de la base de V^*, entonces

$$I(v_i) = (v_i^*)^*, \ \forall i \in \{1, ..., n\}.$$

Por lo tanto, empleando la fórmula anterior, podemos escribir lo siguiente:

$$v_i = (v_i^*)^*, \ \forall i \in \{1, ..., n\}. \tag{2.4}$$

A través de la ecuación (2.4), podemos identificar a los elementos de $(V^*)^*$ como elementos de V. Así, podemos definir el espacio $\mathcal{T}^k(V)$ como el espacio cuyos elementos son los k-tensores sobre V^*. Estos tensores se denominan tensores contravariantes en V, mientras que los elementos de $\mathcal{T}^k(V^*)$ se denominan tensores covariantes en V.

DEFINICIÓN 2.24. *Sea V un espacio vectorial real de dimensión n. Un (k, m)-tensor en V es una función multilineal real definida sobre el producto $V \times \cdots \times V \times V^* \times \cdots \times V^*$ de k copias de V y m copias de V^*. Un (k, m)-tensor es entonces k veces covariante y m veces contravariante en V. El conjunto de todos los (k, m)-tensores sobre V es un espacio vectorial y se denota por $\mathcal{T}^{(k,m)}(V^*, V)$.*

OBSERVACIÓN 2.8. *Si $\{v_1, ..., v_n\}$ es una base para V y $\{T^1, ..., T^n\}$ es la base dual correspondiente para V^*, se tiene que el conjunto*

$$\left\{T^{i_1} \otimes \cdots \otimes T^{i_k} \otimes v_{j_1} \otimes \cdots \otimes v_{j_m} : \ 1 \leq i_1, ..., i_k, j_1, ..., j_m \leq n\right\}$$

es una base para $\mathcal{T}^{(k,m)}(V^*, V)$. Por lo tanto, dim $\left(\mathcal{T}^{(k,m)}(V^*, V)\right) = n^{k+m}$.

En efecto, denotemos por $\{(v_1^*)^*, ..., (v_n^*)^*\}$ a la base dual correspondiente para $(V^*)^*$. Así, usando la Proposición 2.12, tenemos que el conjunto

$$\left\{T^{i_1} \otimes \cdots \otimes T^{i_k} \otimes (v_{j_1}^*)^* \otimes \cdots \otimes (v_{j_m}^*)^* : \ 1 \leq i_1, ..., i_k, j_1, ..., j_m \leq n\right\} \tag{2.5}$$

es una base para el espacio de los (k, m)-tensores sobre V. Luego, aplicando la fórmula (2.4) en (2.5), se concluye que

$$\left\{T^{i_1} \otimes \cdots \otimes T^{i_k} \otimes v_{j_1} \otimes \cdots \otimes v_{j_m} : \ 1 \leq i_1, ..., i_k, j_1, ..., j_m \leq n\right\}$$

es una base para el espacio de los (k, m)-tensores sobre V.
Finalmente, como $\dim(V^*) = \dim((V^*)^*) = n$, nuevamente por la Proposición 2.12, se sigue que

$$\dim\left(\mathcal{T}^{(k,m)}(V^*, V)\right) = n^{k+m}.$$

DEFINICIÓN 2.25. *Sean V un espacio vectorial real de dimensión n y $T \in \mathcal{T}^k(V^*)$. Se dice que T es un k-tensor alternante, si cambia de signo cada vez que se intercambian dos de sus variables, es decir, si*

$$T(v_1, ..., v_i, ..., v_j, ..., v_k) = -T(v_1, ..., v_j, ..., v_i, ..., v_k),$$

para cada $v_1, ..., v_k \in V$. El espacio de todos los k-tensores alternantes sobre V es un subespacio vectorial de $\mathcal{T}^k(V^*)$ y se denota por $\Lambda^k(V^*)$.

DEFINICIÓN 2.26. *Sean V un espacio vectorial real de dimensión n y $T \in \mathcal{T}^k(V^*)$. Definimos un nuevo k-tensor alternante, denotado por $Alt(T)$, como*

$$Alt(T) := \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} sgn(\sigma) T \circ \sigma,$$

donde S_k es el grupo de todas las permutaciones de $\{1, ..., k\}$.

DEFINICIÓN 2.27. *Sea V un espacio vectorial real de dimensión n. Dados $T \in \mathcal{T}^k(V^*)$ y $S \in \mathcal{T}^m(V^*)$, se define su producto exterior como el $(k+m)$-tensor alternante $T \wedge S$, dado por*

$$T \wedge S := \frac{(k+m)!}{k!m!} Alt(T \otimes S).$$

PROPOSICIÓN 2.14. *([10], Teorema 1.9, p. 65-67) Sean V un espacio vectorial real de dimensión n, $\{v_1, ..., v_n\}$ una base para V y $\left\{T^1, ..., T^n\right\}$ la base dual correspondiente para V^*. Se tiene que el conjunto*

$$\left\{T^{i_1} \wedge \cdots \wedge T^{i_k} : \ 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n\right\}$$

es una base para $\Lambda^k(V^*)$. Más aún, se sigue que

$$dim(\Lambda^k(V^*)) = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

A continuación, definiremos una operación que permite relacionar vectores con tensores alternantes. Esta operación nos ayudará más adelante para definir el operador de divergencia.

DEFINICIÓN 2.28. *Sean V un espacio vectorial de dimensión finita y $v \in V$. Se define el mapa lineal $i_v : \Lambda^k(V^*) \to \Lambda^{k-1}(V^*)$, llamado multiplicación interior por v, como*

$$i_v(\omega)(w_1, ..., w_{k-1}) = \omega(v, w_1, ..., w_{k-1}),$$

para cada $w_1, ..., w_{k-1} \in V$.

DEFINICIÓN 2.29. *Sea M una variedad diferenciable. Un (k, m)-campo tensorial sobre M es un mapa T que asigna a cada punto $p \in M$ un tensor $T_p \in \mathcal{T}^{(k,m)}\left(T_p^*M, T_pM\right)$.*

OBSERVACIÓN 2.9. *El espacio de los (k, m)-campos tensoriales es claramente un espacio vectorial, ya que las combinaciones lineales de (k, m)-tensores siguen siendo (k, m)-tensores.*

EJEMPLO 2.5. *Consideremos M una variedad diferenciable y $X \in \mathfrak{X}(M)$. Por la definición de campo vectorial, sabemos que $X_p \in T_pM$ para cada $p \in M$. Ahora, notemos que*

$$T_pM = \mathcal{T}^1(T_pM) = \mathcal{T}^{(0,1)}\left(T_p^*M, T_pM\right).$$

De esta forma, se sigue que

$$X_p \in \mathcal{T}^{(0,1)}\left(T_p^*M, T_pM\right),$$

para cada $p \in M$. Por lo tanto, X es un $(0, 1)$-campo tensorial sobre M.

EJEMPLO 2.6. *Consideremos M una variedad diferenciable y $f : M \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Se define el $(1, 0)$-campo tensorial df, llamado diferencial de f, como*

$$\begin{aligned} df : M &\to \mathcal{T}^{(1,0)}(T_p^*M, T_pM) \\ p &\mapsto df_p, \end{aligned}$$

donde

$$df_p(v) = vf,$$

para cada $v \in T_pM$.

Las propiedades del diferencial de una función las exhibimos en la proposición siguiente.

PROPOSICIÓN 2.15. *([19], Proposición 11.20, p. 282) Sean M una variedad diferenciable y $f, g \in C^\infty(M)$. Entonces:*

(i) Si a y b son constantes, se tiene que $d(af + bg) = adf + bdg$.

(ii) $d(fg) = fdg + gdf$.

(iii) Si $J \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo que contiene a la imagen de f y $h : J \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable, se tiene que $d(h \circ f) = (h' \circ f)df$.

(iv) Si f es constante, se sigue que $df = 0$.

Con la misma notación del Ejemplo 2.6, tomemos $p \in M$ y (U, x^i) una carta diferenciable sobre M cuyo dominio suave de coordenadas contiene a p. Consideremos $x^j : U \to \mathbb{R}$ una coordenada local sobre U con $j \in \{1, ..., n\}$ arbitrario. Puesto que el mapa de coordenadas de la carta (U, x^i) es diferenciable, se tiene que todas sus coordenadas locales son diferenciables. Por lo tanto, $x^j : U \to \mathbb{R}$ es diferenciable. De esta manera, el diferencial de x^j verifica que

$$dx^j_p(v) = vx^j, \ \forall v \in T_pM.$$

Lo anterior tiene sentido por la Proposición 2.3.
Para referirnos a la evaluación del diferencial de x^j en un punto de U usaremos la siguiente notación:

$$dx^j\Big|_p := dx^j_p, \ \forall p \in U.$$

Ahora bien, empleando la fórmula (2.1), tenemos que

$$dx^j\Big|_p (v) = vx^j = v(x^j) = v^j = \lambda^j\Big|_p (v), \ \forall v \in T_pM,$$

donde $\left\{ \lambda^i|_p \right\}_{i=1}^n$ es la base dual inducida por la base coordenada. Por lo tanto, se sigue que

$$dx^j\Big|_p = \lambda^j\Big|_p,$$

y, como j es un índice arbitrario, concluimos que

$$dx^j\Big|_p = \lambda^j\Big|_p, \ \forall j \in \{1, ..., n\}.$$

Por consiguiente, el conjunto

$$\left\{ dx^1\Big|_p, \ldots, dx^n\Big|_p \right\}$$

es una base para T_p^*M.

OBSERVACIÓN 2.10. *Localmente, un (k,m)-campo tensorial T sobre M puede ser expresado por*

$$T = a_{i_1 \ldots i_k}^{j_1 \ldots j_m}\, dx^{i_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_k} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \otimes \cdots \frac{\partial}{\partial x^{j_m}}.$$

En efecto, consideremos (U, x^i) una carta diferenciable sobre M. Para $p \in U$ arbitrario, sabemos que los conjuntos

$$\left\{ dx^1\Big|_p, \ldots, dx^n|_p \right\} \text{ y } \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_p \right\}$$

son bases para T_p^*M y T_pM, respectivamente. Así, ya que $T_p \in \mathcal{T}^{(k,m)}\left(T_p^*M, T_pM\right)$, empleando la Observación 2.8, se sigue que

$$T_p = a_{i_1 \ldots i_k}^{j_1 \ldots j_m}(p)\, dx^{i_1}\Big|_p \otimes \cdots \otimes dx^{i_k}\Big|_p \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_1}}\Big|_p \otimes \cdots \frac{\partial}{\partial x^{j_m}}\Big|_p.$$

De esta forma, dado que p es arbitrario, vemos que en la carta diferenciable (U, x^i), el campo tensorial T se escribe como

$$T = a_{i_1 \ldots i_k}^{j_1 \ldots j_m}\, dx^{i_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_k} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \otimes \cdots \frac{\partial}{\partial x^{j_m}},$$

donde $a_{i_1, \cdots, i_k}^{j_1, \cdots, j_m} : U \to \mathbb{R}$ son funciones que asignan a cada punto $p \in U$ las componentes de T_p relativas a las bases de T_p^*M y T_pM. A estas funciones las llamaremos componentes de T con respecto a la carta diferenciable (U, x^i).

A través de esta observación, vemos que un campo tensorial puede ser expresado de forma local. Más aún, esta observación nos permite introducir la definición siguiente.

DEFINICIÓN 2.30. *Sean M una variedad diferenciable y T un (k,m)-campo tensorial sobre M. Se dice que T es diferenciable, si sus componentes con respecto a cualquier carta diferenciable sobre M son diferenciables.*

DEFINICIÓN 2.31. *Sea M una variedad diferenciable. Una k-forma sobre M es un mapa ω que asigna a cada punto $p \in M$ un k-tensor alternante $\omega_p \in \Lambda^k(T_p^*M)$.*

OBSERVACIÓN 2.11. *Localmente, una k-forma ω sobre M puede ser expresada como*

$$\omega = \sum \omega_{i_1 \ldots i_k}\, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}, \tag{2.6}$$

donde $\omega_{i_1 \ldots i_k} : U \to \mathbb{R}$ son funciones que asignan a cada punto $p \in U$ las componentes de ω_p relativas a la base de $T_p^* M$. A estas funciones las llamaremos componentes de ω con respecto a la carta diferenciable (U, x^i).

Para un conjunto de índices $I = \{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n\}$, escribimos

$$dx^I := dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k},$$

la cual es una k-forma. De esta manera, podemos expresar (2.6) como

$$\omega = \sum_I \omega_I\, dx^I,$$

donde $\omega_I := \omega_{i_1 \ldots i_k}$.

DEFINICIÓN 2.32. *Sean M una variedad diferenciable y ω una k-forma sobre M. Decimos que ω es diferenciable, si sus componentes con respecto a cualquier carta diferenciable sobre M son diferenciables. Al conjunto de las k-formas diferenciables sobre M lo denotaremos por $\Omega^k(M)$.*

EJEMPLO 2.7. *Si $f \in C^\infty(M)$, podemos ver a f como una 0-forma diferenciable sobre M, es decir, f es un elemento de $\Omega^0(M)$.*

DEFINICIÓN 2.33. *Sean M, N dos variedades diferenciables, $f : M \to N$ un mapa diferenciable y $\omega \in \Omega^k(N)$. El pullback $f^*\omega$ es una k-forma diferenciable sobre M definida por*

$$(f^*\omega)_p(v_1, ..., v_k) = w_{f(p)}(df_p(v_1), ..., df_p(v_k)),$$

para cada $v_1, ..., v_k \in T_p M$ y cada $p \in M$.

El siguiente teorema nos permite asegurar la existencia y unicidad de un operador que extiende el concepto del diferencial de una función a formas diferenciables. Este operador juega un rol fundamental en la generalización de varios resultados clásicos del Cálculo Vectorial como el Teorema de Stokes, el Teorema de Green y más.

TEOREMA 2.16. *([19], Teorema 14.24, p. 365-366) Sea M una variedad diferenciable. Se tiene que para todo k, existe un único operador $d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$, llamado diferenciación exterior, el cual satisface las siguientes propiedades:*

(i) d *es lineal sobre* $\mathbb{R}$.

(ii) *Para cada* $\omega \in \Omega^k(M)$ *y cada* $\eta \in \Omega^l(M)$, *se tiene que*

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta.$$

(iii) $d \circ d \equiv 0$.

(iv) *Si* $f \in C^\infty(M)$, df *es el diferencial de* f, *dado por*

$$df(X) = Xf,$$

para cada campo vectorial X.

(v) *Dada una carta diferenciable* (U, x^i) *sobre* M, *se tiene que*

$$d\left(\sum_I \omega_I \, dx^I\right) = \sum_I d\omega_I \wedge dx^I,$$

donde $d\omega_I$ *es el diferencial de la función* ω_I.

2.3. Variedades Riemannianas

Las propiedades métricas de $\mathbb{R}^n$ (distancias y ángulos) están determinadas por las coordenadas cartesianas canónicas. Sin embargo, en una variedad diferenciable genérica, no existen tales coordenadas. De esta manera, para definir distancias y ángulos, se utiliza un objeto más complejo conocido como tensor métrico, el cual es un $(2,0)$-campo tensorial especial. Este objeto fue presentado por primera vez de forma general por Bernhard Riemann en el siglo XIX y a tenido varias aplicaciones dentro de la física, especialmente en el estudio de la teoría de la relatividad general, donde el espacio-tiempo se describe como una variedad Lorentziana.

En esta sección, daremos a conocer una serie de definiciones y resultados sobre un tipo especial de variedades diferenciables que tienen una estructura más compleja, debido a que están dotadas con un tensor métrico.

2.3.1. Métrica Riemanniana

DEFINICIÓN 2.34. *Sean* M *una* n*-variedad diferenciable y* $p \in M$. *Un tensor* $g \in \mathcal{T}^2(T_p^* M)$ *se dice ser:*

(i) Simétrico: Si $g(v,w) = g(w,v)$ para cada $v, w \in T_pM$.

(ii) No-degenerado: Si $g(v,w) = 0$ para cada $w \in T_pM$ implica que $v = 0$.

(iii) Definido positivo: Si $g(v,v) > 0$ para cada $v \in T_pM \setminus \{0\}$.

A partir de esta definición, a un $(2,0)$-campo tensorial covariante g lo llamaremos simétrico, no-degenerado o definido positivo si, y sólo si, g_p es simétrico, no-degenerado o definido positivo para todo $p \in M$.

DEFINICIÓN 2.35. *Sea M una variedad diferenciable. Una métrica Riemanniana[4] g sobre M es un $(2,0)$-campo tensorial diferenciable, simétrico y definido positivo. En otras palabras, g asigna a cada $p \in M$ una forma bilineal, simétrica y definida positiva sobre T_pM*

$$g_p := g(p) : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}.$$

Además, la condición de diferenciabilidad de g se da en el sentido de que la función

$$p \in M \mapsto g_p(X_p, Y_p)$$

es diferenciable para todos los campos vectoriales diferenciables X e Y definidos localmente en M. Al par (M, g) lo llamaremos variedad Riemanniana.

OBSERVACIÓN 2.12. *La métrica g también es no-degenerada. Esto es una consecuencia del hecho de que g es definida positiva.*

NOTACIÓN 2.2.

(a) En ocasiones, usaremos la siguiente notación:

$$g_p(v,w) = \langle v, w \rangle_{g_p}, \ \forall v, w \in T_pM, \ \forall p \in M.$$

(b) Dada una carta diferenciable (U, x^i), utilizaremos la siguiente notación:

$$g_{ij} := g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right), \ \forall i, j \in \{1, \cdots, n\},$$

donde $\frac{\partial}{\partial x^i}$ y $\frac{\partial}{\partial x^j}$ son el i-ésimo y j-ésimo campos vectoriales coordenados, respectivamente.

(c) A partir de (b), podemos notar que el tensor métrico genera una matriz cuando es evaluado en los campos vectoriales coordenados. A esta matriz la denotaremos por g_{ij} y a su inversa por g^{ij}.

[4] La mayoría del tiempo nos referiremos a g como tensor métrico.

Ejemplo 2.8. *La métrica euclidiana estándar sobre $\mathbb{R}^n$, dada por*

$$g = \sum_{i=1}^{n} dx^i \otimes dx^i,$$

hace de $\mathbb{R}^n$ un variedad Riemanniana. Además, se tiene que

$$g_{ij} = \mathbb{I}_n \;\; y \;\; g^{ij} = \mathbb{I}_n.$$

Ejemplo 2.9. *La 2-esfera*

$$S^2 = \left\{ x = \left(x^1, x^2, x^3 \right) \in \mathbb{R}^3 : \; ||x|| = 1 \right\}$$

es una variedad Riemanniana con la siguiente métrica:

$$ds^2 := g = d\theta^2 + \mathrm{sen}^2(\theta) d\varphi^2.$$

En este caso, tenemos que

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{sen}^2(\theta) \end{pmatrix} \;\; y \;\; g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mathrm{sen}^2(\theta)} \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 2.10. *Un ejemplo no trivial de una variedad Riemanniana es el semiespacio superior de Poincaré (semiplano), dado por*

$$\mathbb{H}^2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0 \right\}$$

y cuya métrica es

$$g = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

En este caso, se tiene que

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix} \;\; y \;\; g^{ij} = \begin{pmatrix} y^2 & 0 \\ 0 & y^2 \end{pmatrix}.$$

La siguiente proposición nos permite asegurar la existencia de una métrica Riemanniana sobre cualquier variedad diferenciable.

Proposición 2.17. *([19], Proposición 13.3, p. 329) Toda variedad diferenciable admite una métrica Riemanniana.*

2.3.2. Forma de volumen Riemanniana

DEFINICIÓN 2.36. *Sea M una n-variedad diferenciable. Se dice que $\omega \in \Omega^n(M)$ es una forma de volumen sobre M si*

$$\omega_p \neq 0,$$

para cada $p \in M$.

En una variedad Riemanniana es posible hallar una forma de volumen que satisfaga ciertas propiedades especiales. Esta forma de volumen juega un rol importante en este trabajo, pues esta nos ayudará a definir integrales sobre variedades Riemannianas. Lo que acabamos de mencionar lo visualizaremos en las dos proposiciones siguientes y en la Sección 2.7.

PROPOSICIÓN 2.18. *([19], Proposición 15.29, p. 389) Sea (M, g) una variedad Riemanniana orietable de dimensión $n \geq 1$. Entonces, existe una única $\omega_g \in \Omega^n(M)$, llamada forma de volumen Riemanniana, tal que*

$$\omega_g(p)\left(v^1, ..., v^n\right) = 1,$$

para cada base ortonormal orientada $\{v^1, ..., v^n\}$ de T_pM y cada $p \in M$.

PROPOSICIÓN 2.19. *([19], Proposición 15.31, p. 389-390) Sea (M, g) una variedad Riemanniana orietable de dimensión $n \geq 1$. Dada una carta diferenciable orientable (U, x^i) sobre M, se tiene que*

$$\omega_g = \sqrt{det(g_{ij})}\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

2.4. Conexiones afines

Sobre el espacio euclidiano, sabemos como definir la derivada direccional de un campo vectorial Y a lo largo de otro campo vectorial X. Sin embargo, esta definición usa la existencia de coordenadas cartesianas, las cuales no existen en una variedad diferenciable genérica. Para resolver este problema, introduciremos un nuevo concepto que nos permitirá generalizar la idea de derivada direccional sobre variedades.

A lo largo de esta sección, usaremos el símbolo ∇ para denotar a la conexión afín.

DEFINICIÓN 2.37. *Sea M una variedad diferenciable. Una conexión afín sobre M es un mapa $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$, el cual verifica las siguientes propiedades:*

(i) $\nabla_{fX+hY}Z = f\nabla_X Z + h\nabla_Y Z$;

(ii) $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$;

(iii) $\nabla_X(fY) = (Xf)Y + f\nabla_X Y$,

para cada $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ y cada $f, h \in C^\infty(M)$ (escribimos $\nabla_X Y := \nabla(X, Y)$). El campo vectorial $\nabla_X Y$ se conoce como la derivada covariante de Y a lo largo de X.

DEFINICIÓN 2.38. *Sean M una n-variedad diferenciable y ∇ una conexión afín sobre M. Dada una carta diferenciable (U, x^i) sobre M, a los mapas $\Gamma^i_{jk} : U \to \mathbb{R}$, tales que*

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^k} = \Gamma^i_{jk} \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \forall i, j, k \in \{1, ..., n\},$$

los denominaremos símbolos de Christoffel.

NOTACIÓN 2.3. *Usaremos la siguiente notación:*

$$\nabla_i := \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}.$$

DEFINICIÓN 2.39. *Sean M una variedad diferenciable y ∇ una conexión afín sobre M. Se define el operador de torsión $T : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ de la conexión afín ∇ como*

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y],$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Se dice que la conexión es simétrica si $T \equiv 0$.

OBSERVACIÓN 2.13. *Localmente, la condición para que una conexión afín sea simétrica es que*

$$\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj},$$

para cada $i, j, k \in \{1, ..., n\}$.

DEFINICIÓN 2.40. *Sean (M, g) una variedad Riemanniana y ∇ una conexión afín sobre M. Se dice que ∇ es compatible con la métrica, si*

$$X\langle Y, Z\rangle_g = \langle \nabla_X Y, Z\rangle_g + \langle Y, \nabla_X Z\rangle_g,$$

para cada $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

A continuación, realizaremos la demostración del Teorema de Levi-Civita, también conocido como el Teorema Fundamental de la Geometría Riemanniana, el cual nos asegura la existencia y unicidad de una conexión afín sobre una variedad Riemanniana.

Teorema 2.20. ***(Teorema de Levi-Civita)****([10], Teorema 3.2, p. 104-105) Sea (M, g) una variedad Riemanniana. Se tiene que existe una única conexión afín ∇ sobre M, la cual es simétrica y compatible con la métrica. Más aún, sobre una carta diferenciable (U, x^i) de M, se sigue que*

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{il} \left(\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} \right). \tag{2.7}$$

Demostración. Desarrollaremos la demostración de este teorema en etapas.

Etapa 1. Primero deduciremos una fórmula que nos permitirá definir una conexión afín sobre M.

Por un momento, supongamos que el Teorema de Levi-Civita es cierto, es decir, existe una conexión afín ∇ sobre M, la cual es simétrica y compatible con la métrica. Así, dados $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ arbitrarios pero fijos, se tiene lo siguiente:

(1) $X\langle Y, Z\rangle_g = \langle \nabla_X Y, Z\rangle_g + \langle Y, \nabla_X Z\rangle_g$;

(2) $Y\langle X, Z\rangle_g = \langle \nabla_Y X, Z\rangle_g + \langle X, \nabla_Y Z\rangle_g$;

(3) $-Z\langle X, Y\rangle_g = -\langle \nabla_Z X, Y\rangle_g - \langle X, \nabla_Z Y\rangle_g$.

Lo anterior se cumple debido a que ∇ es compatible con la métrica. Ahora, usando el hecho de que ∇ es simétrica, se sigue:

- $\langle [X, Z], Y\rangle_g = \langle \nabla_X Z - \nabla_Z X, Y\rangle_g = \langle \nabla_X Z, Y\rangle_g - \langle \nabla_Z X, Y\rangle_g$;
- $\langle [Y, Z], X\rangle_g = \langle \nabla_Y Z, X\rangle_g - \langle \nabla_Z Y, X\rangle_g$;
- $\langle [X, Y], Z\rangle_g = \langle \nabla_X Y, Z\rangle_g - \langle \nabla_Y X, Z\rangle_g$,

de donde obtenemos las siguientes igualdades respectivas:

(4) $-\langle [X, Z], Y\rangle_g = -\langle \nabla_X Z, Y\rangle_g + \langle \nabla_Z X, Y\rangle_g$;

(5) $-\langle [Y, Z], X\rangle_g = -\langle \nabla_Y Z, X\rangle_g + \langle \nabla_Z Y, X\rangle_g$;

(6) $\langle [X,Y], Z\rangle_g = \langle \nabla_X Y, Z\rangle_g - \langle \nabla_Y X, Z\rangle_g$.

Usando (1), (3) y (4), deducimos que

$$\begin{aligned}\langle \nabla_X Y, Z\rangle_g &= X\langle Y, Z\rangle_g - \langle Y, \nabla_X Z\rangle_g \\ &= X\langle Y, Z\rangle_g - \langle [X,Z], Y\rangle_g - \langle \nabla_Z X, Y\rangle_g \\ &= X\langle Y, Z\rangle_g - \langle [X,Z], Y\rangle_g - Z\langle X, Y\rangle_g + \langle X, \nabla_Z Y\rangle_g.\end{aligned} \tag{2.8}$$

De manera similar, empleando (2), (5) y (6), inferimos que

$$\begin{aligned}\langle \nabla_X Y, Z\rangle_g &= \langle [X,Y], Z\rangle_g + \langle \nabla_Y X, Z\rangle_g \\ &= \langle [X,Y], Z\rangle_g + Y\langle X, Z\rangle_g - \langle X, \nabla_Y Z\rangle_g \\ &= \langle [X,Y], Z\rangle_g + Y\langle X, Z\rangle_g - \langle [Y,Z], X\rangle_g - \langle \nabla_Z Y, X\rangle_g.\end{aligned} \tag{2.9}$$

Si sumamos las fórmulas (2.8) y (2.9), entonces

$$\begin{aligned}2\langle \nabla_X Y, Z\rangle_g = {} & X\langle Y, Z\rangle_g + Y\langle X, Z\rangle_g - Z\langle X, Y\rangle_g - \langle [X,Z], Y\rangle_g - \langle [Y,Z], X\rangle_g \\ & + \langle [X,Y], Z\rangle_g,\end{aligned}$$

de donde, ya que X, Y y Z son arbitrarios, concluimos que

$$\begin{aligned}2\langle \nabla_X Y, Z\rangle_g = {} & X\langle Y, Z\rangle_g + Y\langle X, Z\rangle_g - Z\langle X, Y\rangle_g - \langle [X,Z], Y\rangle_g - \langle [Y,Z], X\rangle_g \\ & + \langle [X,Y], Z\rangle_g,\end{aligned} \tag{2.10}$$

para cada $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Esta fórmula es conocida como la *fórmula de Koszul*.

Etapa 2. Probaremos que la fórmula de Koszul define una conexión afín sobre M. Para esto, se define el mapa $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ de tal manera que verifica (2.10).

Primero, demostremos que $\nabla_{fX+hY} Z = f\nabla_X Z + h\nabla_Y Z$:
Sean $X, Y, Z, V \in \mathfrak{X}(M)$ y $f, h \in C^\infty(M)$, cualesquiera. Usando (2.10), conseguimos que

$$\begin{aligned}2\langle \nabla_{fX+hY} Z, V\rangle_g = {} & (fX+hY)\langle Z, V\rangle_g + Z\langle fX+hY, V\rangle_g - V\langle fX+hY, Z\rangle_g \\ & - \langle [fX+hY, V], Z\rangle_g - \langle [Z,V], fX+hY\rangle_g + \langle [fX+hY, Z], V\rangle_g,\end{aligned}$$

de donde, por la fórmula de Leibniz, se sigue que

$$\begin{aligned}
2\langle \nabla_{fX+hY} Z, V\rangle_g &= fX\langle Z, V\rangle_g + hY\langle Z, V\rangle_g + fZ\langle X, V\rangle_g + hZ\langle Y, V\rangle_g + \langle X, V\rangle_g Zf \\
&\quad + \langle Y, V\rangle_g Zh - fV\langle X, Z\rangle_g - hV\langle Y, Z\rangle_g - \langle X, Z\rangle_g Vf - \langle Y, Z\rangle_g Vh \\
&\quad - f\langle [X, V], Z\rangle_g - h\langle [Y, V], Z\rangle_g + \langle X, Z\rangle_g Vf + \langle Y, Z\rangle_g Vh \\
&\quad - f\langle [Z, V], X\rangle_g - h\langle [Z, V], Y\rangle_g + f\langle [X, Z], V\rangle_g + h\langle [Y, Z], V\rangle_g \\
&\quad - \langle X, V\rangle_g Zf - \langle Y, V\rangle_g Zh \\
&= f\left(X\langle Z, V\rangle_g + Z\langle X, V\rangle_g - V\langle X, Z\rangle_g - \langle [X, V], Z\rangle_g - \langle [Z, V], X\rangle_g\right. \\
&\quad \left. +\langle [X, Z], V\rangle_g\right) + h\left(Y\langle Z, V\rangle_g + Z\langle Y, V\rangle_g - V\langle Y, Z\rangle_g\right. \\
&\quad \left. -\langle [Y, V], Z\rangle_g - \langle [Z, V], Y\rangle_g + \langle [Y, Z], V\rangle_g\right) \\
&= 2f\langle \nabla_X Z, V\rangle_g + 2h\langle \nabla_Y Z, V\rangle_g \\
&= 2\langle f\nabla_X Z + h\nabla_Y Z, V\rangle_g,
\end{aligned}$$

con lo cual

$$\langle \nabla_{fX+hY} Z - (f\nabla_X Z + h\nabla_Y Z), V\rangle_g = 0,$$

y, como X, Y, Z y V son arbitrarios, entonces

$$\langle \nabla_{fX+hY} Z - (f\nabla_X Z + h\nabla_Y Z), V\rangle_g = 0,$$

para cada $X, Y, Z, V \in \mathfrak{X}(M)$. En particular, puesto que lo anterior se cumple para cada $V \in \mathfrak{X}(M)$ y el tensor métrico es no-degenerado, podemos inferir que

$$\nabla_{fX+hY} Z - (f\nabla_X Z + h\nabla_Y Z) = 0 \;\Leftrightarrow\; \nabla_{fX+hY} Z = f\nabla_X Z + h\nabla_Y Z,$$

para cada $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Ahora, probemos que $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$:

Sean $X, Y, Z, V \in \mathfrak{X}(M)$, cualesquiera. De (2.10), tenemos que

$$\begin{aligned}
2\langle \nabla_X(Y+Z), V\rangle_g &= X\langle Y+Z, V\rangle_g + (Y+Z)\langle X, V\rangle_g - V\langle X, Y+Z\rangle_g \\
&\quad - \langle [X,V], Y+Z\rangle_g - \langle [Y+Z, V], X\rangle_g + \langle [X, Y+Z], V\rangle_g \\
&= X\langle Y, V\rangle_g + X\langle Z, V\rangle_g + Y\langle X, V\rangle_g + Z\langle X, V\rangle_g - V\langle X, Y\rangle_g \\
&\quad - V\langle X, Z\rangle_g - \langle [X,V], Y\rangle_g - \langle [X,V], Z\rangle_g - \langle [Y,V], X\rangle_g \\
&\quad - \langle [Z,V], X\rangle_g + \langle [X,Y], V\rangle_g + \langle [X,Z], V\rangle_g \\
&= \big(X\langle Y, V\rangle_g + Y\langle X, V\rangle_g - V\langle X, Y\rangle_g - \langle [X,V], Y\rangle_g - \langle [Y,V], X\rangle_g \\
&\quad + \langle [X,Y], V\rangle_g\big) + \big(X\langle Z, V\rangle_g + Z\langle X, V\rangle_g - V\langle X, Z\rangle_g \\
&\quad - \langle [X,V], Z\rangle_g - \langle [Z,V], X\rangle_g + \langle [X,Z], V\rangle_g\big) \\
&= 2\langle \nabla_X Y, V\rangle_g + 2\langle \nabla_X Z, V\rangle_g \\
&= 2\langle \nabla_X Y + \nabla_X Z, V\rangle_g,
\end{aligned}$$

de donde, se sigue que

$$\langle \nabla_X(Y+Z) - (\nabla_X Y + \nabla_X Z), V\rangle_g = 0.$$

Como X, Y, Z y V son arbitrarios en la expresión anterior, entonces

$$\langle \nabla_X(Y+Z) - (\nabla_X Y + \nabla_X Z), V\rangle_g = 0,$$

para cada $X, Y, Z, V \in \mathfrak{X}(M)$. Razonando de manera similar que antes, concluimos que

$$\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z,$$

para cada $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Para finalizar esta etapa, demostremos que $\nabla_X(fY) = (Xf)Y + f\nabla_X Y$:
Sean $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ y $f \in C^\infty(M)$, cualesquiera. Nuevamente por (2.10), se tiene que

$$\begin{aligned}
2\langle \nabla_X(fY), V\rangle_g &= X\langle fY, V\rangle_g + fY\langle X, V\rangle_g - V\langle X, fY\rangle_g - \langle [X,V], fY\rangle_g \\
&\quad - \langle [fY, V], X\rangle_g + \langle [X, fY], V\rangle_g.
\end{aligned}$$

Aplicando la fórmula de Leibniz para campos vectoriales, y las propiedades de antisimetría y regla de Leibniz para los corchetes de Lie en la fórmula anterior, deducimos que

$$\begin{aligned}
2\langle \nabla_X(fY), V\rangle_g &= fX\langle Y,V\rangle_g + \langle Y,V\rangle_g Xf + fY\langle X,V\rangle_g - fV\langle X,Y\rangle_g - \langle X,Y\rangle_g Vf\\
&\quad - f\langle [X,V],Y\rangle_g + f\langle [V,Y],X\rangle_g + \langle Y,X\rangle_g Vf + f\langle [X,Y],V\rangle_g\\
&\quad + \langle Y,V\rangle_g Xf\\
&= 2\langle Y,V\rangle_g Xf + f\left(X\langle Y,V\rangle_g + Y\langle X,V\rangle_g - V\langle X,Y\rangle_g - \langle [X,V],Y\rangle_g\right.\\
&\quad \left. -\langle [Y,V],X\rangle_g + \langle [X,Y],V\rangle_g\right)\\
&= 2\langle (Xf)Y, V\rangle_g + 2f\langle \nabla_X Y, V\rangle_g\\
&= 2\langle (Xf)Y + f\nabla_X Y, V\rangle_g,
\end{aligned}$$

con lo cual

$$\langle \nabla_X(fY) - \left((Xf)Y + f\nabla_X Y\right), V\rangle_g = 0.$$

Otra vez, como X, Y, Z y V son arbitrarios en la fórmula precedente, entonces

$$\langle \nabla_X(fY) - \left((Xf)Y + f\nabla_X Y\right), V\rangle_g = 0,$$

para cada $X, Y, Z, V \in \mathfrak{X}(M)$. Finalmente, razonando de forma similar que antes, concluimos que

$$\nabla_X(fY) = (Xf)Y + f\nabla_X Y,$$

para cada $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Por lo demostrado en esta etapa, inferimos que ∇ es una conexión afín, pues esta verifica las propiedades de la Definición 2.37.

Etapa 3. En esta etapa, demostraremos que la conexión afín definida en la etapa 2 es simétrica.

Sean $X, Y, V \in \mathfrak{X}(M)$, cualesquiera. Por la fórmula (2.10), obtenemos que

$$\begin{aligned}
2\langle \nabla_X Y - \nabla_Y X, V\rangle_g &= 2\langle \nabla_X Y, V\rangle_g - 2\langle \nabla_Y X, V\rangle_g\\
&= X\langle Y,V\rangle_g + Y\langle X,V\rangle_g - V\langle X,Y\rangle_g - \langle [X,V],Y\rangle_g - \langle [Y,V],X\rangle_g\\
&\quad + \langle [X,Y],V\rangle_g - Y\langle X,V\rangle_g - X\langle Y,V\rangle_g + V\langle Y,X\rangle_g\\
&\quad + \langle [Y,V],X\rangle_g + \langle [X,V],Y\rangle_g - \langle [Y,X],V\rangle_g\\
&= 2\langle [X,Y],V\rangle_g,
\end{aligned}$$

de donde, se sigue que

$$\langle \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y], V\rangle_g = 0.$$

Ahora bien, ya que en la expresión anterior X, Y y V son arbitrarios, entonces

$$\langle \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y], V\rangle_g = 0,$$

para cada $X, Y, V \in \mathfrak{X}(M)$. En particular, la fórmula precedente es cierta para cada $V \in \mathfrak{X}(M)$. Por lo tanto, puesto que el tensor métrico es no-degenerado, concluimos que

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] = 0,$$

para cada $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. De esta forma, vemos que el operador de torsión de la conexión afín definida en la etapa 2 es cero, es decir, $T \equiv 0$. Por consiguiente, esta conexión afín es simétrica.

Etapa 4. Ahora, probaremos que la conexión afín de la etapa 2 es compatible con la métrica.

Sean $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, cualesquiera. De nuevo, usando la fórmula de Koszul (2.10), conseguimos que

$$\begin{aligned}
2\langle \nabla_X Y, Z\rangle_g + 2\langle Y, \nabla_X Z\rangle_g &= X\langle Y, Z\rangle_g + Y\langle X, Z\rangle_g - Z\langle X, Y\rangle_g - \langle [X,Z], Y\rangle_g \\
&\quad - \langle [Y,Z], X\rangle_g + \langle [X,Y], Z\rangle_g + X\langle Z, Y\rangle_g + Z\langle X, Y\rangle_g \\
&\quad - Y\langle X, Z\rangle_g - \langle [X,Y], Z\rangle_g - \langle [Z,Y], X\rangle_g + \langle [X,Z], Y\rangle_g \\
&= 2X\langle Y, Z\rangle_g,
\end{aligned}$$

con lo cual

$$X\langle Y, Z\rangle_g = \langle \nabla_X Y, Z\rangle_g + \langle Y, \nabla_X Z\rangle_g.$$

Puesto que X, Y y Z son arbitrarios en la fórmula previa, entonces

$$X\langle Y, Z\rangle_g = \langle \nabla_X Y, Z\rangle_g + \langle Y, \nabla_X Z\rangle_g,$$

para cada $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Así, la conexión afín definida en la etapa 2 también es compatible con la métrica.

Etapa 5. Demostraremos que la conexión afín definida en la etapa 2 es única.

Supongamos que existe otra conexión afín $\widetilde{\nabla}$ que satisface la fórmula de Koszul. Tomemos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ arbitrarios pero fijos. Ya que las conexiones ∇ y $\widetilde{\nabla}$ satisfacen la fórmula (2.10), tenemos que

$$2\langle \nabla_X Y, Z\rangle_g = 2\langle \widetilde{\nabla}_X Y, Z\rangle_g,$$

de donde, se sigue que

$$\langle \nabla_X Y - \widetilde{\nabla}_X Y, Z\rangle_g = 0.$$

Como X, Y y Z son arbitrarios en la fórmula precedente, entonces

$$\langle \nabla_X Y - \widetilde{\nabla}_X Y, Z\rangle_g = 0,$$

para cada $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. En particular, como lo anterior se cumple para cada $Z \in \mathfrak{X}(M)$ y el tensor métrico es no-degenerado, concluimos que

$$\nabla_X Y - \widetilde{\nabla}_X Y = 0 \;\Leftrightarrow\; \nabla_X Y = \widetilde{\nabla}_X Y,$$

para cada $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. De esta forma, vemos que ∇ es única.

Etapa 6. Para concluir con la demostración deduciremos la fórmula (2.7).

Sea (U, x^i) una carta diferenciable sobre M. Recordemos que

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right] = 0 \;\text{ y }\; g_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle_g, \quad \forall i, j \in \{1, ..., n\}.$$

Empleando la fórmula de Koszul (2.10), tenemos que

$$\begin{aligned} 2\left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l}\right\rangle_g &= \frac{\partial}{\partial x^j}\left\langle \frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l}\right\rangle_g + \frac{\partial}{\partial x^k}\left\langle \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^l}\right\rangle_g - \frac{\partial}{\partial x^l}\left\langle \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right\rangle_g \\ &= \frac{\partial}{\partial x^j} g_{kl} + \frac{\partial}{\partial x^k} g_{jl} - \frac{\partial}{\partial x^l} g_{jk}, \end{aligned}$$

de donde, se sigue que

$$\left\langle \Gamma^i_{jk} \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^l}\right\rangle_g = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^j} g_{kl} + \frac{\partial}{\partial x^k} g_{jl} - \frac{\partial}{\partial x^l} g_{jk}\right),$$

y, como el tensor métrico es bilineal, se obtiene

$$g_{il}\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l}\right).$$

Luego, si multiplicamos la fórmula anterior por g^{ml}, entonces

$$(\delta_{im})\,\Gamma^i_{jk} = \left(g^{ml}g_{il}\right)\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}g^{ml}\left(\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l}\right),$$

lo que implica

$$\Gamma^m_{jk} = \frac{1}{2}g^{ml}\left(\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l}\right).$$

Tomando $m = i$ en la fórmula previa se sigue lo deseado. □

DEFINICIÓN 2.41. *Sea (M, g) una variedad Riemanniana de dimensión n. Se define lo siguiente:*

(i) La derivada covariante de una función diferenciable $f : M \to \mathbb{R}$ como

$$\nabla_k f := \frac{\partial f}{\partial x^k} \quad con \quad k \in \{1, ..., n\}.$$

(ii) La derivada covariante de un $(2,0)$-campo tensorial diferenciable T como

$$\nabla_k T_{ij} := \frac{\partial T_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma^p_{ik}T_{pj} - \Gamma^p_{jk}T_{ip} \quad con \quad i, j, k \in \{1, ..., n\}.$$

OBSERVACIÓN 2.14.

(a) Como la conexión afín dada por el Teorema de Levi-Civita es compatible con la métrica, entonces el tensor métrico y su inversa son constantes de la derivada covariante:

$$\nabla_k g_{ij} = 0 \;\; y \;\; \nabla_k g^{ij} = 0, \quad \forall i, j, k \in \{1, ..., n\}.$$

(b) La raíz cuadrada del determinante de la matriz g_{ij} también es una constante de la derivada covariante:

$$\nabla_k \sqrt{det\left(g_{ij}\right)} = 0, \quad \forall i, j, k \in \{1, ..., n\}.$$

2.5. Curvatura

En el campo de la geometría Riemanniana, el estudio de la curvatura es muy importante, razón por la cual se han propuesto varias definiciones y métodos que permiten analizarla. B. Riemann, basándose principalmente en los trabajos de Gauss, definió de una manera abstracta, pero rigurosa, el tensor de curvatura. Este tensor permite estudiar la curvatura de las variedades Riemannianas y sus aplicaciones en la Física Teórica, en especial en la teoría de la relatividad.

En esta sección, presentaremos las definiciones y propiedades de algunos tensores que nos permiten estudiar la curvatura de una variedad Riemanniana, además, haremos énfasis en la estructura local de estos tensores.

En adelante, las conexiones afines que manejaremos sobre variedades Riemannianas serán aquellas dadas por el Teorema de Levi-Civita. Además, al igual que en la sección 2.6, usaremos el símbolo ∇ para denotar a la conexión afín.

DEFINICIÓN 2.42. *Sean (M, g) una variedad Riemanniana y ∇ una conexión afín sobre M. Se dice que Rm es la curvatura de la conexión ∇, si dados X e Y dos campos vectoriales diferenciables sobre M, $Rm(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ es un mapa que verifica lo siguiente:*

$$Rm(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z,$$

para cada $Z \in \mathfrak{X}(M)$.

La curvatura Rm define un $(3, 1)$-campo tensorial. Este campo tensorial es conocido como el tensor de curvatura de Riemann sobre M. En la proposición siguiente, veremos como se expresa este campo tensorial de forma local.

PROPOSICIÓN 2.21. *([10], p. 124-125) Sean (M, g) una variedad Riemanniana de dimensión n y Rm el tensor de curvatura de Riemann sobre M. Dada una carta diferenciable (U, x^i) sobre M, se tiene que*

$$Rm = R^l_{ijk}\, dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes \frac{\partial}{\partial x^l},$$

donde

$$R^l_{ijk} = \frac{\partial \Gamma^l_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x^j} + \Gamma^m_{jk}\Gamma^l_{im} - \Gamma^m_{ik}\Gamma^l_{jm}. \tag{2.11}$$

Demostración. Sea (U, x^i) una carta diferenciable sobre M. Como Rm es un $(3, 1)$-campo tensorial, empleando la Observación 2.10, tenemos que

$$\mathrm{Rm} = R^l_{ijk}\, dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes \frac{\partial}{\partial x^l},$$

con lo cual

$$\begin{aligned} \mathrm{Rm}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^k} &= R^l_{ijk}\, dx^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) dx^j\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) dx^k\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)\frac{\partial}{\partial x^l} \\ &= R^l_{ijk}\,\frac{\partial}{\partial x^l}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

La expresión previa nos dice que el coeficiente R^l_{ijk} es la l-coordenada del campo vectorial $\mathrm{Rm}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^k}$.

Por otro lado, si utilizamos la definición de Rm y el hecho de que $\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right] = 0$ para cada $i, j \in \{1, ..., n\}$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathrm{Rm}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^k} &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial x^k} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^k} \\
&= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\left(\Gamma^m_{jk}\frac{\partial}{\partial x^m}\right) - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\left(\Gamma^m_{ik}\frac{\partial}{\partial x^m}\right) \\
&= \left(\frac{\partial\Gamma^m_{jk}}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^m} + \Gamma^m_{jk}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^m}\right) - \left(\frac{\partial\Gamma^m_{ik}}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^m} + \Gamma^m_{ik}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial x^m}\right) \\
&= \left(\frac{\partial\Gamma^m_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial\Gamma^m_{ik}}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^m} + \Gamma^m_{jk}\Gamma^l_{im}\frac{\partial}{\partial x^l} - \Gamma^m_{ik}\Gamma^l_{jm}\frac{\partial}{\partial x^l} \\
&= \left(\frac{\partial\Gamma^l_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial\Gamma^l_{ik}}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^l} + \left(\Gamma^m_{jk}\Gamma^l_{im} - \Gamma^m_{ik}\Gamma^l_{jm}\right)\frac{\partial}{\partial x^l} \\
&= \left(\frac{\partial\Gamma^l_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial\Gamma^l_{ik}}{\partial x^j} + \Gamma^m_{jk}\Gamma^l_{im} - \Gamma^m_{ik}\Gamma^l_{jm}\right)\frac{\partial}{\partial x^l},
\end{aligned}$$

de donde, a partir de (2.12), deducimos que

$$R^l_{ijk}\frac{\partial}{\partial x^l} = \left(\frac{\partial\Gamma^l_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial\Gamma^l_{ik}}{\partial x^j} + \Gamma^m_{jk}\Gamma^l_{im} - \Gamma^m_{ik}\Gamma^l_{jm}\right)\frac{\partial}{\partial x^l}.$$

Finalmente, empleando la independencia lineal de $\left\{\frac{\partial}{\partial x^l}\right\}_{l=1}^n$, se concluye que

$$R^l_{ijk} = \frac{\partial\Gamma^l_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial\Gamma^l_{ik}}{\partial x^j} + \Gamma^m_{jk}\Gamma^l_{im} - \Gamma^m_{ik}\Gamma^l_{jm}.$$

□

A partir del tensor de Riemann y el tensor métrico es posible definir un $(4,0)$-campo tensorial de la siguiente manera:

$$\mathrm{Rm}(X, Y, Z, W) := g(\mathrm{Rm}(X, Y)W, Z),$$

para cada $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$. En la literatura, a este campo tensorial se lo suele llamar tensor de curvatura.

PROPOSICIÓN 2.22. *([10], Proposición 1.4, p. 126-127) Sea (M, g) una variedad Riemanniana. Para cada $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$, se tiene lo siguiente:*

(i) $Rm(X,Y,Z,W) = -Rm(Y,X,Z,W)$;

(ii) $Rm(X,Y,Z,W) = -Rm(X,Y,W,Z)$;

(iii) $Rm(X,Y,Z,W) = -Rm(Z,W,X,Y)$,

DEFINICIÓN 2.43. *Sean (M,g) un variedad Riemanniana y $\Pi \subseteq T_pM$ un subespacio 2-dimensional con $p \in M$. Se define la curvatura seccional de Π como*

$$K(\Pi) = -\frac{R\left(X_p, Y_p, X_p, Y_p\right)}{||X_p||_{g_p}^2\, ||Y_p||_{g_p}^2 - \left\langle X_p, Y_p \right\rangle_{g_p}},$$

donde X_p y Y_p son dos elementos linealmente independientes de Π.

DEFINICIÓN 2.44. *Sean (M,g) una variedad Riemanniana y Rm el tensor de curvatura de Riemann sobre M. El tensor de Ricci sobre M, denotado por Ric, es el $(2,0)$-campo tensorial dado por*

$$Ric(X,Y) = tr(Rm(\cdot, X)Y),$$

para cada $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

OBSERVACIÓN 2.15. *El tensor de curvatura de Ricci se define localmente como*

$$Ric(X,Y) = dx^k\left(Rm\left(\frac{\partial}{\partial x^k}, X\right)Y\right),$$

para cada $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

PROPOSICIÓN 2.23. *Sea (M,g) una variedad Riemanniana de dimensión n. Se tiene que el tensor de Ricci sobre M es simétrico.*

Demostración. Sean $p \in M$ y $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, cualesquiera. Tomemos una base ortonormal $\{E_1, ..., E_n\}$ sobre T_pM. Puesto que el tensor de Ricci es la traza del mapa $\mathrm{Rm}(\cdot, X)Y$, empleando la Proposición 2.22, deducimos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}_p(X_p, Y_p) &= \sum_{k=1}^{n} \langle \mathrm{Rm}(E_k, X_p)Y_p, E_k\rangle_g = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Rm}(E_k, X_p, Y_p, E_k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Rm}(Y_p, E_k, E_k, X_p) = \sum_{k=1}^{n} -\mathrm{Rm}(E_k, Y_p, E_k, X_p) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Rm}(E_k, Y_p, X_p, E_k) = \sum_{k=1}^{n} \langle \mathrm{Rm}(E_k, Y_p)X_p, E_k\rangle_g \\
&= \mathrm{Ric}_p(Y_p, X_p),
\end{aligned}$$

de donde, como p es arbitrario, entonces

$$\mathrm{Ric}(X,Y) = \mathrm{Ric}(Y,X).$$

Ya que X e Y también son arbitrarios en la expresión anterior, se concluye que

$$\mathrm{Ric}(X,Y) = \mathrm{Ric}(Y,X),$$

para cada $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Por lo tanto, el tensor de Ricci es simétrico. $\square$

PROPOSICIÓN 2.24. *([10], p. 129) Sean (M,g) una variedad Riemanniana y Ric el tensor de Ricci sobre M. Dada una carta diferenciable (U, x^i) sobre M, se tiene que*

$$Ric = R_{ij}\, dx^i \otimes dx^j,$$

donde

$$R_{ij} = R^k_{kij}.$$

Demostración. Sea (U, x^i) una carta diferenciable sobre M. Haciendo uso de la Observación 2.10, tenemos que

$$\mathrm{Ric} = R_{ij}\, dx^i \otimes dx^j.$$

Si evaluamos $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$ en la fórmula anterior, entonces

$$\begin{aligned} \mathrm{Ric}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) &= R_{ij}\, dx^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) dx^j \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) \\ &= R_{ij}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Ahora bien, empleando la Observación 2.15 y la fórmula (2.12), obtenemos que

$$\begin{aligned} \mathrm{Ric}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) &= dx^k \left(\mathrm{Rm}\left(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^i}\right) \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = dx^k \left(R^l_{kij} \frac{\partial}{\partial x^l}\right) \\ &= R^l_{kij}\, dx^k \left(\frac{\partial}{\partial x^l}\right) = R^l_{kij} \left(\delta_{kl}\right) = R^k_{kij}, \end{aligned}$$

de donde, a partir de (2.13), concluimos que

$$R_{ij} = R^k_{kij}.$$

$\square$

OBSERVACIÓN 2.16. *Localmente, el cuadrado del módulo del tensor de Ricci tiene* *la siguiente forma:*

$$\left|R_{ij}\right|^2 := |Ric|^2 = R_{ij}R^{ij} = R^{ij}R_{ij}.$$

DEFINICIÓN 2.45. *Sean (M,g) una variedad Riemanniana y Ric el tensor de Ricci sobre M. El escalar de curvatura $R : M \to \mathbb{R}$ es el mapa definido como*

$$R = tr(Ric(\cdot,\cdot)).$$

Al igual que antes, podemos definir el escalar de curvatura de forma local. Para esto, consideremos el $(1,1)$-campo tensorial T dado por

$$T(X,\omega) = \mathrm{Ric}(X,Y),$$

donde Y es tal que $\omega(Z) = \langle Z, Y\rangle_g$ para cada $Z \in \mathfrak{X}(M)$. Además, X es un campo vectorial diferenciable sobre M y ω una 1-forma diferenciable sobre M. Ahora bien, dada una carta diferenciable (U, x^i) sobre M, definimos el escalar de curvatura como

$$R = T\left(\frac{\partial}{\partial x^k}, dx^k\right). \tag{2.14}$$

PROPOSICIÓN 2.25. *([10], p. 130) Sean (M,g) una variedad Riemanniana y Ric el tensor de Ricci sobre M. Dada una carta diferenciable (U,x^i) sobre M, se tiene que*

$$R = g^{ij}R_{ij}.$$

Demostración. Sea (U,x^i) una carta diferenciable sobre M. Empleando la fórmula (2.14), se obtiene

$$R = T\left(\frac{\partial}{\partial x^k}, dx^k\right) = \mathrm{Ric}\left(\frac{\partial}{\partial x^k}, Y_k\right), \tag{2.15}$$

donde, para cada campo vectorial diferenciable Z sobre U, se tiene que

$$Z^k = dx^k(Z) = \langle Z, Y^k\rangle_g = g_{ij}Z^iY_k^j.$$

La fórmula previa nos dice que

$$Y_k^j = g^{jk},$$

con lo cual

$$Y_k = g^{ik}\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Si reemplazamos la fórmula precedente en (2.15), entonces

$$R = \mathrm{Ric}\left(\frac{\partial}{\partial x^k}, g^{ik}\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = g^{ik}\mathrm{Ric}\left(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^i}\right),$$

y así, dado que el tensor de Ricci es simétrico, se sigue que

$$R = g^{ik}\mathrm{Ric}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right).$$

Finalmente, si aplicamos la fórmula (2.13) en la expresión previa, entonces

$$R = g^{ik}R_{ik}.$$

Tomando $k = j$ se sigue el resultado. $\square$

2.6. Operadores sobre variedades Riemannianas

En esta sección, definiremos los operadores gradiente, divergencia y laplaciano sobre una variedad Riemanniana. Además, exhibiremos algunas de las propiedades que poseen estos operadores.

2.6.1. Gradiente

DEFINICIÓN 2.46. *Sean (M, g) una variedad Riemanniana y $f : M \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Se define el gradiente de f, denotado por ∇f, como el campo vectorial que satisface:*

$$\langle \nabla f, X\rangle_g = df(X) = X(f),$$

para cada $X \in \mathfrak{X}(M)$.

PROPOSICIÓN 2.26. *([3], p. 41) Sea (M, g) una variedad Riemanniana. Se tienen las siguientes propiedades:*

(i) $\nabla(f + h) = \nabla f + \nabla h$;

(ii) $\nabla(fh) = f\nabla h + h\nabla f$,

para todo $f, h \in C^\infty(M)$.

Demostración. Sean $f, h \in C^\infty(M)$, cualesquiera. Para demostrar la primera propiedad, consideremos $X \in \mathfrak{X}(M)$ arbitrario. Así, usando la Proposición 2.15, tenemos que

$$\begin{aligned}\langle \nabla(f + h), X\rangle_g &= d(f + h)(X) = df(X) + dh(Y) = \langle \nabla f, X\rangle_g + \langle \nabla h, X\rangle_g \\ &= \langle \nabla f + \nabla h, X\rangle_g,\end{aligned}$$

con lo cual

$$\langle \nabla(f+h) - (\nabla f + \nabla h)\,, X\rangle_g = 0.$$

Ya que X es arbitrario en la fórmula precedente, entonces

$$\langle \nabla(f+h) - (\nabla f + \nabla h)\,, X\rangle_g = 0,$$

para cada $X \in \mathfrak{X}(M)$. Y así, como el tensor métrico es no-degenerado, se deduce que

$$\nabla(f+h) - (\nabla f + \nabla h) = 0 \;\Leftrightarrow\; \nabla(f+h) = \nabla f + \nabla h.$$

Para probar la segunda propiedad, nuevamente consideremos $X \in \mathfrak{X}(M)$ arbitrario. Otra vez, empleando la Proposición 2.15, se obtiene

$$\begin{aligned}\langle \nabla(fh), X\rangle_g = d(fh)(X) = f\,dh(X) + h\,df(X) &= \langle f\nabla h, X\rangle_g + \langle h\nabla f, X\rangle_g \\ &= \langle f\nabla h + h\nabla f, X\rangle_g,\end{aligned}$$

de donde, se sigue que

$$\langle \nabla(fh) - (f\nabla h + h\nabla f), X\rangle_g = 0.$$

Como X es arbitrario en la fórmula anterior, entonces

$$\langle \nabla(fh) - (f\nabla h + h\nabla f), X\rangle_g = 0,$$

para cada $X \in \mathfrak{X}(M)$. Razonando de forma similar que antes, se concluye que

$$\nabla(fh) = f\nabla h + h\nabla f.$$

□

PROPOSICIÓN 2.27. *([15], p. 119) Sean (M, g) una variedad Riemanniana y $f : M \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Dada una carta diferenciable (U, x^i) sobre M, se tiene que*

$$\nabla f = g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Demostración. Sea (U, x^i) una carta diferenciable sobre M. Tomemos X un campo vectorial diferenciable sobre U arbitrario. Observemos que

$$\begin{aligned}\langle \nabla f, X\rangle_g &= X(f) = X^i \frac{\partial f}{\partial x^i} = \frac{\partial f}{\partial x^i}\left(X^s \delta_{is}\right) = \frac{\partial f}{\partial x^i} X^s \left(g^{ij} g_{js}\right) \\ &= g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} X^s g_{js} = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} X^s \left\langle \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^s} \right\rangle_g \\ &= \left\langle g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j}, X^s \frac{\partial}{\partial x^s} \right\rangle_g = \left\langle g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j}, X \right\rangle_g ,\end{aligned}$$

de donde, se sigue que

$$\left\langle \nabla f - g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j}, X \right\rangle_g = 0.$$

Como X es arbitrario en la fórmula previa, entonces

$$\left\langle \nabla f - g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j}, X \right\rangle_g = 0,$$

para todo campo vectorial diferenciable X sobre U. Finalmente, puesto que el tensor métrico es no-degenerado, concluimos que

$$\nabla f - g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} = 0 \;\Leftrightarrow\; \nabla f = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

□

Otra de las notaciones que usaremos para el gradiente de f es la siguiente:

$$\nabla f = \nabla^j f \frac{\partial}{\partial x^j},$$

donde

$$\nabla^j f = g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

2.6.2. Divergencia

Definición 2.47. *Sean (M, g) una variedad Riemanniana y ω_g su forma de volumen. La divergencia es el operador*

$$div : \mathfrak{X}(M) \to C^{\infty}(M),$$

el cual verifica que

$$d\left(i_X \omega_g\right) = div(X)\, \omega_g,$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$. En esta definición, d representa al operador diferenciación exterior e i_X es el mapa multiplicación interior.

PROPOSICIÓN 2.28. *([3], p. 42) Sea* (M, g) *una variedad Riemanniana de dimensión* n*. Dada una carta diferenciable* (U, x^i) *sobre* M*, se tiene que*

$$
\begin{aligned}
div(X) &= \frac{1}{\sqrt{det(g_{kl})}} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{det(g_{kl})}\; X^i\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{det(g_{kl})}} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{det(g_{kl})}\; g^{ij}\left\langle X, \frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle_g\right),
\end{aligned}
$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$*.*

Demostración. Sean (U, x^i) una carta diferenciable sobre M y $X \in \mathfrak{X}(M)$ arbitrarios. El símbolo ˆ hará referencia a los elementos que son omitidos. Notemos que

$$
\begin{aligned}
i_X\omega_g\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, ..., \frac{\hat{\partial}}{\partial x^i}, ..., \frac{\partial}{\partial x^n}\right) &= \omega_g\left(X, \frac{\partial}{\partial x^1}, ..., \frac{\hat{\partial}}{\partial x^i}, ..., \frac{\partial}{\partial x^n}\right) \\
&= (-1)^{i-1}\omega_g\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, ..., X, ..., \frac{\partial}{\partial x^n}\right),
\end{aligned}
$$

de donde, utilizando la Proposición 2.19, se sigue que

$$
\begin{aligned}
i_X\omega_g\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, ..., \frac{\hat{\partial}}{\partial x^i}, ..., \frac{\partial}{\partial x^n}\right) &= (-1)^{i-1}\sqrt{\det(g_{kl})}\; dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, ..., X, ..., \frac{\partial}{\partial x^n}\right) \\
&= (-1)^{i-1}\sqrt{\det(g_{kl})}\; X^i,
\end{aligned}
$$

con lo cual

$$
i_X\omega_g = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\sqrt{\det(g_{kl})}\; X^i\, dx^1 \wedge \cdots \wedge \hat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^n.
$$

Si evaluamos la fórmula precedente en el operador diferenciación exterior, entonces

$$
d\left(i_X\omega_g\right) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1} d\left(\sqrt{\det(g_{kl})}\; X^i\, dx^1 \wedge \cdots \wedge \hat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^n\right),
$$

de donde, empleando las propiedades (iv) y (v) del Teorema 2.16, se tiene que

$$
\begin{aligned}
d\left(i_X\omega_g\right) &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\, d\left(\sqrt{\det(g_{kl})}\; X^i\right)\wedge dx^1\wedge\cdots\wedge\hat{dx}^i\wedge\cdots\wedge dx^n \\
&= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{\det(g_{kl})}\; X^i\right)\, dx^i\wedge dx^1\wedge\cdots\wedge\hat{dx}^i\wedge\cdots\wedge dx^n \\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{\det(g_{kl})}\; X^i\right) dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n \\
&= \frac{1}{\sqrt{\det(g_{kl})}}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{\det(g_{kl})}\; X^i\right)\sqrt{\det(g_{kl})}\; dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n \\
&= \frac{1}{\sqrt{\det(g_{kl})}}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{\det(g_{kl})}\; X^i\right)\omega_g.
\end{aligned}
$$

Si expresamos la fórmula anterior en términos de la notación de Einstein, entonces

$$
d\left(i_X\omega_g\right) = \frac{1}{\sqrt{\det(g_{kl})}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{\det(g_{kl})}\; X^i\right)\omega_g. \tag{2.16}
$$

Ahora bien, usando las propiedades de las matrices g_{ij} y g^{ij}, conseguimos que

$$
\begin{aligned}
g^{ij}\left\langle X,\frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle_g &= g^{ij}\left\langle X^s\frac{\partial}{\partial x^s},\frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle_g = X^s g^{ij}\left\langle\frac{\partial}{\partial x^s},\frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle_g \\
&= X^s g^{ij} g_{sj} = X^s\left(\delta_{is}\right) \\
&= X^i,
\end{aligned}
$$

es decir,

$$
X^i = g^{ij}\left\langle X,\frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle_g. \tag{2.17}
$$

Si sustituimos la fórmula (2.17) en (2.16), entonces

$$
\begin{aligned}
d\left(i_X\omega_g\right) &= \frac{1}{\sqrt{\det(g_{kl})}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{\det(g_{kl})}\; X^i\right)\omega_g \\
&= \frac{1}{\sqrt{\det(g_{kl})}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{\det(g_{kl})}\; g^{ij}\left\langle X,\frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle_g\right)\omega_g.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, se concluye que

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div}(X) &= \frac{1}{\sqrt{\det(g_{kl})}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{\det(g_{kl})}\; X^i\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\det(g_{kl})}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{\det(g_{kl})}\; g^{ij}\left\langle X,\frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle_g\right).
\end{aligned}
$$

□

OBSERVACIÓN 2.17. *Localmente, el operador de divergencia también puede ser expresado como*

$$div(X) = \nabla_i X^i = \frac{\partial}{\partial x^i} X^i + \Gamma^j_{ij} X^i,$$

donde

$$\nabla_i = \nabla_{\partial_i} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}.$$

PROPOSICIÓN 2.29. *([3], p. 43) Sean (M, g) una variedad Riemanniana y ω_g su forma de volumen. El operador de divergencia satisface las siguientes propiedades:*

(i) $div(X+Y) = div(X) + div(Y)$*;*

(ii) $div(fX) = f div(X) + \langle X, \nabla f \rangle_g$*,*

para cada $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ y cada $f \in C^\infty(M)$.

Demostración. Primero analicemos la siguiente propiedad del mapa multiplicación interior:
Tomemos ω una n-forma sobre M y X e Y dos campos vectoriales sobre M arbitrarios pero fijos. Notemos que

$$\begin{aligned} i_{(X_p+Y_p)}\omega_p \left(X_{1p}, ..., X_{(n-1)p}\right) &= \omega_p \left(X_p + Y_p, X_{1p}, ..., X_{(n-1)p}\right) \\ &= \omega_p \left(X_p, X_{1p}, ..., X_{(n-1)p}\right) + \omega_p \left(Y_p, X_{1p}, ..., X_{(n-1)p}\right) \\ &= i_{X_p}\omega_p \left(X_{1p}, ..., X_{(n-1)p}\right) + i_{Y_p}\omega_p \left(X_{1p}, ..., X_{(n-1)p}\right), \end{aligned}$$

para cada $X_1, ..., X_{n-1}$ campos vectoriales sobre M y cada $p \in M$. Por lo tanto, concluimos que

$$i_{(X+Y)}\omega = i_X\omega + i_Y\omega, \tag{2.18}$$

para toda n-forma ω sobre M y todos X e Y campos vectoriales sobre M.

Ahora, demostremos la primera propiedad. Para esto, consideremos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, cualesquiera. De la linealidad del operador diferenciación exterior y la propiedad (2.18), tenemos que

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(X+Y)\, \omega_g = d\left(i_{(X+Y)}\omega_g\right) &= d\left(i_X\omega_g + i_Y\omega_g\right) = d(i_X\omega_g) + d\left(i_Y\omega_g\right) \\ &= \operatorname{div}(X)\, \omega_g + \operatorname{div}(Y)\omega_g = \left(\operatorname{div}(X) + \operatorname{div}(Y)\right)\, \omega_g, \end{aligned}$$

con lo cual

$$\operatorname{div}(X+Y) = \operatorname{div}(X) + \operatorname{div}(Y).$$

Como X e Y son arbitrarios en la fórmula anterior, entonces

$$\operatorname{div}(X+Y) = \operatorname{div}(X) + \operatorname{div}(Y),$$

para cada $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.
Probemos la segunda propiedad. Para ello, consideremos $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $f \in C^\infty(M)$, cualesquiera. Elijamos una carta diferenciable (U, x^i) sobre M arbitraria. Así, si usamos la Proposición 2.28, entonces

$$\begin{aligned}
\nabla_i \left(fX^i\right) &= \frac{1}{\sqrt{\det(g_{kl})}} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{\det(g_{kl})}\, fX^i\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\det(g_{kl})}} \left(f\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{\det(g_{kl})}\, X^i\right) + \sqrt{\det(g_{kl})}\, X^i \frac{\partial f}{\partial x^i}\right) \\
&= f\, \nabla_i X^i + X^i \frac{\partial f}{\partial x^i},
\end{aligned}$$

de donde, empleando (2.17), se sigue que

$$\begin{aligned}
\nabla_i \left(fX^i\right) &= f\, \nabla_i X^i + g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^i}\left\langle X, \frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle_g = f\, \nabla_i X^i + \left\langle X, g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle_g \\
&= f\, \nabla_i X^i + \langle X, \nabla f\rangle_g\,,
\end{aligned}$$

lo que equivale a

$$\operatorname{div}(fX) = f\operatorname{div}(X) + \langle X, \nabla f\rangle_g.$$

Puesto que f, X y (U, x^i) son arbitrarios en la fórmula previa, concluimos que

$$\operatorname{div}(fX) = f\operatorname{div}(X) + \langle X, \nabla f\rangle_g,$$

para cada $X \in \mathfrak{X}(M)$ y cada $f \in C^\infty(M)$. □

2.6.3. Laplaciano

Definición 2.48. *Sea (M, g) una variedad Riemanniana. El laplaciano es el operador*

$$\Delta : C^\infty(M) \to C^\infty(M),$$

definido como

$$\Delta = div \circ \nabla.$$

Proposición 2.30. *([3], p. 43) Sea (M, g) una variedad Riemanniana. El laplaciano verifica las siguientes propiedades:*

(i) $\Delta(f+h) = \Delta f + \Delta h$;

(ii) $\Delta(hf) = h\Delta f + f\Delta h + 2\langle \nabla h, \nabla f\rangle_g$,

para todo $f, h \in C^\infty(M)$.

Demostración. Probar la primera propiedad no presenta dificultad alguna, pues basta usar la Proposición 2.26 y la Proposición 2.29 (la propiedad (i) en ambos casos). Demostremos la segunda propiedad. Para esto, sean $f, h \in C^\infty(M)$, cualesquiera. Usando la propiedad (ii) de la Proposición 2.29, tenemos que

$$\operatorname{div}(h\nabla f) = h \operatorname{div}(\nabla f) + \langle \nabla h, \nabla f\rangle_g = h\Delta f + \langle \nabla h, \nabla f\rangle_g . \tag{2.19}$$

De forma similar, se tiene que

$$\operatorname{div}(f\nabla h) = f\Delta h + \langle \nabla h, \nabla f\rangle_g . \tag{2.20}$$

Si empleamos las propiedades del gradiente y la divergencia, entonces

$$\Delta(hf) = \operatorname{div}(\nabla(hf)) = \operatorname{div}(h\nabla f + f\nabla h) = \operatorname{div}(h\nabla f) + \operatorname{div}(f\nabla h),$$

lo que implica, gracias a las fórmulas (2.19) y (2.20), que

$$\Delta(hf) = h\Delta f + f\Delta h + 2\langle \nabla h, \nabla f\rangle_g .$$

□

PROPOSICIÓN 2.31. *([3], p. 43) Sean* (M, g) *una variedad Riemanniana y* $f : M \to \mathbb{R}$ *una función diferenciable. Dada una carta diferenciable* (U, x^i) *sobre* M*, se tiene que*

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{det(g_{kl})}} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{det(g_{kl})}\, g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j}\right).$$

Demostración. Sea (U, x^i) una carta diferenciable sobre M. Si usamos la Proposición 2.27, entonces

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f) = \operatorname{div}\left(g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j}\right),$$

de donde, empleando la Proposición 2.28, se sigue que

$$\begin{aligned}
\Delta f &= \frac{1}{\sqrt{\det(g_{kl})}} \frac{\partial}{\partial x^s} \left(\sqrt{\det(g_{kl})}\, g^{sm} \left\langle g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^m} \right\rangle_g \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\det(g_{kl})}} \frac{\partial}{\partial x^s} \left(\sqrt{\det(g_{kl})}\, g^{sm} \frac{\partial f}{\partial x^i} \left(g^{ij} g_{jm} \right) \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\det(g_{kl})}} \frac{\partial}{\partial x^s} \left(\sqrt{\det(g_{kl})}\, g^{sm} \frac{\partial f}{\partial x^i} \left(\delta_{im} \right) \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\det(g_{kl})}} \frac{\partial}{\partial x^s} \left(\sqrt{\det(g_{kl})}\, g^{sm} \frac{\partial f}{\partial x^m} \right),
\end{aligned}$$

es decir,

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{\det(g_{kl})}} \frac{\partial}{\partial x^s} \left(\sqrt{\det(g_{kl})}\, g^{sm} \frac{\partial f}{\partial x^m} \right).$$

Finalmente, tomando $s = i$ y $m = j$ en la fórmula precedente, concluimos que

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{\det(g_{kl})}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{\det(g_{kl})}\, g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j} \right).$$

□

OBSERVACIÓN 2.18. *Localmente, el laplaciano de una función diferenciable f puede ser expresado de la siguiente manera:*

$$\Delta f = \nabla_i \nabla^i f.$$

En efecto, utilizando la Proposición 2.28, la Observación 2.17 y la Proposición 2.27, se sigue que

$$\begin{aligned}
\nabla_i \nabla^i f &= \frac{1}{\sqrt{\det(g_{kl})}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{\det(g_{kl})} \nabla^i f \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\det(g_{kl})}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{\det(g_{kl})} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j} \right).
\end{aligned}$$

Luego, empleando la Proposición 2.31, concluimos que

$$\Delta f = \nabla_i \nabla^i f.$$

Otro de los operadores que también utilizaremos a lo largo de este trabajo es la hessiana de una función. Este operador está estrechamente relacionado con el laplaciano.

DEFINICIÓN 2.49. *Sean (M, g) una variedad Riemanniana y $f : M \to R$ una función* *diferenciable. Se define la hessiana de f como el $(2,0)$-campo tensorial dado por*

$$\nabla\nabla f(X,Y) = X(Yf) - (\nabla_X Y)f,$$

para cada $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

A partir de la definición previa y la definición de los símbolos de Christoffel, tenemos que

$$\nabla_i \nabla_j f := \nabla\nabla f\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j} - \Gamma^k_{ij}\frac{\partial f}{\partial x^k}, \tag{2.21}$$

y así, podemos expresar el laplaciano de una función diferenciable f de la siguiente forma:

$$\Delta f = g^{ij}\nabla_i \nabla_j f. \tag{2.22}$$

2.7. Integración sobre variedades Riemannianas

A partir de todos los conceptos y resultados que hemos presentado en las secciones anteriores, hemos generado una serie de herramientas que nos permitirán dar una noción de integración sobre variedades. En esta sección, veremos está noción de integración, y exhibiremos una serie de resultados que generalizan a algunos de los teoremas más famosos que aparecen en el el cálculo integral sobre espacios euclidianos.

Definición 2.50. *Sean M una n-variedad diferenciable orientada dotada con un atlas $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$, cuyos mapas coordenados preservan la orientación, y ω una n-forma diferenciable sobre M. Supongamos que existe una carta diferenciable $(U_j, \varphi_j) \in \mathcal{A}$, tal que supp$(\omega) \subseteq U_j$. Se define la integral de ω sobre M como*

$$\int_M \omega := \int_{\varphi_j(U_j)} \left(\varphi_j^{-1}\right)^* \omega.$$

Observación 2.19. *En la definición precedente, la integral de ω no depende de la elección de la carta diferenciable.*

Para definir la integral de una forma diferenciable en el caso general, podemos usar particiones de la unidad subordinadas al cubrimiento $\{U_i\}_{i\in I}$ de M, es decir, una familia de funciones diferenciables $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ sobre M, las cuales verifican lo siguiente:

(i) Para cada $p \in M$, existe una vecindad V de p, tal que $V \cap \text{supp}(\rho_\alpha) = \emptyset$, excepto para un número finito de p_α.

(ii) Para todo $p \in M$, se tiene que

$$\sum_{\alpha \in \Lambda} \rho_\alpha(p) = 1.$$

(iii) $0 \leq \rho_\alpha \leq 1$ y $\text{supp}(\rho_\alpha) \subseteq U_{i_\alpha}$ para algún U_{i_α} elemento del cubrimiento.

De esta manera, si consideramos una n-forma diferenciable ω a soporte compacto genérica, por la propiedad (i), se sigue que $\text{supp}(\omega)$ se interseca con un número finito de ρ_α. Por lo tanto, podemos asumir que Λ es finito. Además, se tiene que

$$\omega = \left(\sum_{\alpha \in \Lambda} \rho_\alpha \right) \omega = \sum_{\alpha \in \Lambda} \rho_\alpha \omega = \sum_{\alpha \in \Lambda} \omega_\alpha,$$

donde $\omega_\alpha := \rho_\alpha \omega$ y $\text{supp}(\omega_\alpha) \subseteq U_{i_\alpha}$. Con todo lo mencionado previamente, introducimos la siguiente definición.

DEFINICIÓN 2.51. *Sean M una n-variedad diferenciable orientada dotada con un atlas $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$, cuyos mapas coordenados preservan la orientación, y ω una n-forma diferenciable a soporte compacto sobre M. Si $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ es una partición de la unidad subordinada al cubrimiento $\{U_i\}_{i \in I}$, se define la integral de ω sobre M como*

$$\int_M \omega := \sum_{\alpha \in \Lambda} \int_M \omega_\alpha = \sum_{\alpha \in \Lambda} \int_{\varphi_{i_\alpha}(U_{i_\alpha})} \left(\varphi_{i_\alpha}^{-1} \right)^* \omega_\alpha.$$

OBSERVACIÓN 2.20.

(a) Cuando $\text{supp}(\omega)$ está contenido en un dominio suave de coordenadas, la Definición 2.50 y la Definición 2.51 coinciden.

(b) La definición de la integral es independiente de la elección de la partición de la unidad y la elección del cubrimiento.

(c) La integral es lineal:

$$\int_M a\omega_1 + b\omega_2 = a \int_M \omega_1 + b \int_M \omega_2,$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ y ω_1, ω_2 son n-formas diferenciables sobre M.

(d) La definición de la integral se puede extender fácilmente a variedades orientadas con acotación.

A lo largo de todo este trabajo, integraremos sobre variedades Riemannianas. Para ello, es necesario hacer algunas precisiones.

En una variedad Riemanniana (M, g) podemos definir la integral de cualquier función a soporte compacto $f \in C^\infty(M)$ como sigue:

$$\int_M f := \int_M f\omega_g,$$

donde la orientación de M está determinada por ω_g. Además, si M es compacto, definimos su volumen como

$$\mathrm{vol}(M) := \int_M \omega_g.$$

Notación 2.4. *A la forma de volumen Riemanniana ω_g la notaremos por $d\mu$, es decir,*

$$d\mu := \omega_g.$$

En adelante, siempre asumiremos que una variedad Riemanniana es orientable.

A continuación, exhibiremos una serie de resultados que son de vital importancia para el análisis que pretendemos realizar en este trabajo.

Proposición 2.32. ***(Monotonía de la integral)****([19], Proposición 16.28, p. 422) Sean (M, g) una variedad Riemanniana no vacía y $f : M \to \mathbb{R}$ una función continua a soporte compacto. Si $f \geq 0$, se tiene que*

$$\int_M f d\mu \geq 0,$$

donde la igualdad se da si $f \equiv 0$.

El siguiente resultado que presentaremos es el Teorema de la Divergencia. Antes de enunciar este teorema es necesario realizar un par de aclaraciones. Si consideramos una variedad Riemanniana con acotación (M, g), a través del mapa inclusión $\iota : \partial M \to M$ es posible inducir una métrica Riemanniana sobre ∂M. Esta métrica tiene la siguiente forma:

$$\widetilde{g}_p(v, w) := (\iota^* g)(v, w) = g_p\left(d\iota_p(v), d\iota_p(w)\right),$$

para cada $v, w \in T_p\partial M$ y cada $p \in \partial M$. A la forma de volumen de esta variedad Riemanniana la denotaremos por $d\widetilde{\mu}$.

Teorema 2.33. ***(Teorema de la Divergencia)****([19], Teorema 16.32, p. 424) Sea (M, g) una variedad Riemanniana con acotación. Para cada campo vectorial diferenciable* *a soporte compacto X sobre M, se tiene que*

$$\int_M \mathrm{div}(X) d\mu = \int_{\partial M} \langle X, N \rangle_g \, d\widetilde{\mu},$$

donde N es el campo vectorial normal unitario que apunta hacia afuera a lo largo de ∂M.

A partir del Teorema de la Divergencia es posible deducir otros resultados importantes para nuestros fines. Estos resultados generalizan al Teorema de Integración por Partes y al Teorema de Green.

COROLARIO 2.34. ***(Teorema de Integración por Partes)*** *Sean (M, g) una variedad Riemanniana con acotación, X un campo vectorial diferenciable a soporte compacto sobre M y $f : M \to \mathbb{R}$ una función diferenciable a soporte compacto. Se tiene que*

$$\int_M \langle \nabla f, X \rangle_g \, d\mu = -\int_M f \mathrm{div}(X) d\mu + \int_{\partial M} f \langle X, N \rangle_g \, d\widetilde{\mu}.$$

Demostración. Empleando el Teorema de la Divergencia, tenemos que

$$\int_M \mathrm{div}(fX) d\mu = \int_{\partial M} f \langle X, N \rangle_g \, d\widetilde{\mu}.$$

Luego, usando las propiedades del operador de divergencia, se obtiene

$$\int_M f \mathrm{div}(X) d\mu + \int_M \langle X, \nabla f \rangle_g \, d\mu = \int_{\partial M} f \langle X, N \rangle_g \, d\widetilde{\mu},$$

de donde, se concluye que

$$\int_M \langle \nabla f, X \rangle_g \, d\mu = -\int_M f \mathrm{div}(X) d\mu + \int_{\partial M} f \langle X, N \rangle_g \, d\widetilde{\mu}.$$

□

COROLARIO 2.35. ***(Teorema de Green)*** *Sea (M, g) una variedad Riemanniana con acotación. Dadas $f : M \to \mathbb{R}$ y $h : M \to \mathbb{R}$ dos funciones diferenciables a soporte compacto, se tiene que*

$$\int_M f \Delta h \, d\mu + \int_M \langle \nabla f, \nabla h \rangle_g \, d\mu = \int_{\partial M} f \langle \nabla h, N \rangle_g \, d\widetilde{\mu}$$

y

$$\int_M (f \Delta h - h \Delta f) \, d\mu = \int_{\partial M} \left(f \langle \nabla h, N \rangle_g - h \langle \nabla f, N \rangle_g \right) d\widetilde{\mu}.$$

Demostración. Usando el Teorema de Integración por Partes, conseguimos que

$$\begin{aligned} \int_M \langle \nabla f, \nabla h \rangle_g \, d\mu &= -\int_M f \operatorname{div}(\nabla h) d\mu + \int_{\partial M} f \, \langle \nabla h, N \rangle_g \, d\widetilde{\mu} \\ &= -\int_M f \Delta h \, d\mu + \int_{\partial M} f \, \langle \nabla h, N \rangle_g \, d\widetilde{\mu}. \end{aligned} \tag{2.23}$$

De manera similar, obtenemos que

$$\int_M \langle \nabla f, \nabla h \rangle_g \, d\mu = -\int_M h \Delta f \, d\mu + \int_{\partial M} h \, \langle \nabla f, N \rangle_g \, d\widetilde{\mu}. \tag{2.24}$$

Si restamos la fórmula (2.23) de (2.24), entonces

$$\int_M f \Delta h \, d\mu - \int_{\partial M} f \, \langle \nabla h, N \rangle_g \, d\widetilde{\mu} - \int_M h \Delta f \, d\mu + \int_{\partial M} h \, \langle \nabla f, N \rangle_g \, d\widetilde{\mu} = 0,$$

con lo cual

$$\int_M (f \Delta h - h \Delta f) \, d\mu = \int_{\partial M} \left(f \, \langle \nabla h, N \rangle_g - h \, \langle \nabla f, N \rangle_g \right) d\widetilde{\mu}.$$

□

Capítulo 3

El flujo de Ricci

En 1982, Richard Hamilton introdujo por primera vez el concepto del flujo de Ricci [12]. El flujo de Ricci es una EDP que hace evolucionar el tensor métrico en una variedad Riemanniana. Esta ecuación jugó un rol fundamental en la demostración de dos problemas icónicos sin resolver de las matemáticas del siglo XX: la Conjetura de Geometrización de Thurston y la Conjetura de Poincaré. Ambas conjeturas pudieron ser demostradas a partir de una serie de artículos publicados por G. Perelman en el año 2002. Desde entonces, el flujo de Ricci se ha convertido en la EDP más conocida que permite estudiar la evolución del tensor métrico.

En el presente capítulo, introduciremos el concepto del flujo de Ricci y presentaremos el tipo de soluciones que tiene esta EDP. Además, analizaremos los efectos que tiene la evolución del tensor métrico en la curvatura de una variedad Riemanniana.

DEFINICIÓN 3.1. *[5] Sea (M, g_0) una variedad Riemanniana. El flujo de Ricci de (M, g_0) es una ecuación diferencial que evoluciona el tensor métrico de acuerdo con la ecuación:*

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} g_{ij} & = -2R_{ij}, \\ g_{ij}(x, 0) & = g_{0\,ij}. \end{cases} \tag{3.1}$$

3.1. Soluciones del flujo de Ricci

En esta sección, exhibiremos el concepto de las distintas soluciones que el flujo de Ricci posee y, además, mostraremos un par de resultados sobre existencia y unicidad de soluciones para este flujo.

Definición 3.2. *[5] Sea (M, g_0) una variedad Riemanniana. Se dice que el flujo de Ricci tiene una solución eterna, si existe $g_{ij}(t)$ que satisface* (3.1) *para todo $t \in (-\infty, \infty)$.*

Definición 3.3. *[5] Sea (M, g_0) una variedad Riemanniana. Se dice que el flujo de Ricci tiene una solución antigua, si existe $g_{ij}(t)$ que satisface* (3.1) *para todo $t \in (-\infty, b)$ con $b < \infty$.*

Ejemplo 3.1. *([27], p. 26-27) Consideremos la n-esfera de radio $r(t)$ con $n > 1$. La métrica sobre esta variedad está dada por $g(t) = r(t)^2 g_{can}$, donde g_{can} es la métrica canónica de la esfera unitaria. La curvatura seccional de la n-esfera de radio $r(t)$ es igual a $\frac{1}{r(t)^2}$. De esta manera, el tensor de curvatura de Ricci de la métrica $g(t)$ verifica lo siguiente:*

$$R_{ij} = \frac{(n-1)}{r(t)^2} g_{ij}(t),$$

de donde, como $g(t) = r(t)^2 g_{can}$, se tiene que

$$R_{ij} = (n-1) g_{can\ ij}.$$

Ahora bien, reemplazando la fórmula precedente en (3.1)*, obtenemos que*

$$g_{can\ ij} \frac{d}{dt} r(t)^2 = -2(n-1) g_{can\ ij},$$

con lo cual

$$2r(t) \frac{d}{dt} r(t) = -2(n-1).$$

Si resolvemos la EDO anterior, entonces

$$r(t) = \sqrt{r_0^2 - 2(n-1)t},$$

donde r_0 es el radio inicial de la esfera. Definiendo la constante positiva T como

$$T := \frac{r_0^2}{2(n-1)},$$

inferimos que

$$r(t) = \sqrt{2(n-1)} \sqrt{T-t}.$$

De esta forma, es claro que $r(t)$ existe para todo $t \in (-\infty, T)$. Si sustituimos el valor obtenido para $r(t)$ en la métrica de la n-esfera, se concluye que

$$g_{ij}(t) = \sqrt{2(n-1)} \sqrt{T-t}\, g_{can}, \ \forall t \in (-\infty, T).$$

Por lo tanto, se tiene que $g_{ij}(t)$ es una solución antigua para el flujo de Ricci.

DEFINICIÓN 3.4. *[5] Sea (M, g_0) una variedad Riemanniana. Se dice que el flujo de Ricci tiene una solución inmortal, si existe $g_{ij}(t)$ que satisface (3.1) para todo $t \in (a, \infty)$ con $a > -\infty$.*

TEOREMA 3.1. *([28], Teorema 5.2.1, p. 62) Sea (M, g_0) una variedad Riemanniana. Entonces, existen $\varepsilon > 0$ y una familia de métricas Riemannianas $g(t)$, para $t \in [0, \varepsilon]$, tales que*

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} g_{ij} &= -2R_{ij}, \\ g_{ij}(x, 0) &= g_{0\, ij}. \end{cases}$$

TEOREMA 3.2. *([28], Teorema 5.2.2, p. 63) Supongamos que $g_{1\, ij}(t)$ y $g_{2\, ij}(t)$ son dos flujos de Ricci definidos en una variedad Riemanniana cerrada M, para $t \in [0, \varepsilon]$, donde $\varepsilon > 0$. Si $g_{1\, ij}(s) = g_{2\, ij}(s)$ para algún $s \in [0, \varepsilon]$, se tiene que*

$$g_{1\, ij}(s) = g_{2\, ij}(s),$$

para cada $t \in [0, \varepsilon]$.

3.2. Evolución de la curvatura

A partir del flujo de Ricci vemos como el tensor métrico evoluciona con respecto a un parámetro afín. De este modo, todos los objetos que dependan del tensor métrico también evolucionan. En particular, los coeficientes de los tensores de curvatura e incluso la forma de volumen Riemanniana cambian con la evolución de la métrica.

PROPOSICIÓN 3.3. *([27], Lema 1.20, p. 21-23) Sean M una variedad diferenciable y $\{g(t)\}_t$ una familia suave de métricas Riemannianas sobre M. Si se cumple que*

$$\frac{\partial}{\partial t} g_{ij} = -2R_{ij},$$

se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial t} g^{ij} = 2R^{ij}.$$

Demostración. De las propiedades del tensor métrico, sabemos que

$$g^{ik} g_{kl} = \delta_{il}.$$

Si derivamos la fórmula precedente con respecto a t, entonces

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} g^{ik}\right) g_{kl} + g^{ik}\left(\frac{\partial}{\partial t} g_{kl}\right) = 0,$$

de donde, empleando la hipótesis, se tiene que

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} g^{ik}\right) g_{kl} - 2g^{ik} R_{kl} = 0.$$

Multiplicando la expresión anterior por g^{jl}, se deduce que

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} g^{ik}\right)\left(g^{jl} g_{kl}\right) - 2\left(g^{ik} g^{jl} R_{kl}\right) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\partial}{\partial t} g^{ik}\right)\left(\delta_{jk}\right) - 2R^{ij} = 0,$$

con lo cual

$$\frac{\partial}{\partial t} g^{ij} = 2R^{ij}.$$

□

LEMA 3.4. *([5], Lema 3.3, p. 68-69) Sean M una variedad diferenciable y $\{g(t)\}_t$ una familia suave de métricas Riemannianas sobre M. Si h es un $(2,0)$-campo tensorial simétrico, tal que*

$$\frac{\partial}{\partial t} g_{ij} = h_{ij},$$

se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial t} R^l_{ijk} = \frac{1}{2} g^{ls}\left(\nabla_i \nabla_j h_{ks} + \nabla_i \nabla_k h_{js} - \nabla_i \nabla_s h_{jk} - \nabla_j \nabla_i h_{ks} - \nabla_j \nabla_k h_{is} + \nabla_j \nabla_s h_{ik}\right).$$

COROLARIO 3.5. *(([27], Lema 1.20, p. 21-23)) Sean M una variedad diferenciable y $\{g(t)\}_t$ una familia suave de métricas Riemannianas sobre M. Si se cumple que*

$$\frac{\partial}{\partial t} g_{ij} = -2R_{ij},$$

se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial t} R^l_{ijk} = g^{ls}\left(-\nabla_i \nabla_j R_{ks} - \nabla_i \nabla_k R_{js} + \nabla_i \nabla_s R_{jk} + \nabla_j \nabla_i R_{ks} + \nabla_j \nabla_k R_{is} - \nabla_j \nabla_s R_{ik}\right).$$

Demostración. El resultado es una consecuencia directa del Lema 3.4, donde basta considerar $h_{ij} = -2R_{ij}$. □

La siguiente propiedad será de mucha utilidad para demostrar la proposición subsiguiente. Esta propiedad se conoce como la *segunda identidad de Bianchi*:

$$g^{ij} \nabla_i R_{jk} = \frac{1}{2} \nabla_k R. \tag{3.2}$$

PROPOSICIÓN 3.6. *(([27], Lema 1.20, p. 21-23)) Sean M una variedad diferenciable y $\{g(t)\}_t$ una familia suave de métricas Riemannianas sobre M. Si se cumple que*

$$\frac{\partial}{\partial t}g_{ij} = -2R_{ij},$$

se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial t}R_{ij} = g^{ks}\left(\nabla_i\nabla_j R_{ks} + \nabla_k\nabla_s R_{ij} - \nabla_k\nabla_i R_{js} - \nabla_k\nabla_j R_{is}\right).$$

Demostración. Empleando la Proposición 2.24, tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial t}R_{ij} = \frac{\partial}{\partial t}R^k_{kij}. \tag{3.3}$$

Por otro lado, si tomamos $i = l = k$, $j = i$ y $k = j$ en el Corolario 3.5, entonces

$$\frac{\partial}{\partial t}R^k_{kij} = g^{ks}\left(-\nabla_k\nabla_i R_{js} - \nabla_k\nabla_j R_{is} + \nabla_k\nabla_s R_{ij} + \nabla_i\nabla_k R_{js} + \nabla_i\nabla_j R_{ks} - \nabla_i\nabla_s R_{kj}\right),$$

de donde, se sigue que

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}R^k_{kij} = g^{ks}&\left(\nabla_i\nabla_j R_{ks} + \nabla_k\nabla_s R_{ij} - \nabla_k\nabla_i R_{js} - \nabla_k\nabla_j R_{is}\right) + \nabla_i\left(g^{ks}\nabla_k R_{js}\right)\\ &- \nabla_i\left(g^{ks}\nabla_s R_{kj}\right),\end{aligned}$$

y así, dado que la inversa del tensor métrico y el tensor de Ricci son simétricos, se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}R^k_{kij} = g^{ks}&\left(\nabla_i\nabla_j R_{ks} + \nabla_k\nabla_s R_{ij} - \nabla_k\nabla_i R_{js} - \nabla_k\nabla_j R_{is}\right) + \nabla_i\left(g^{ks}\nabla_k R_{sj}\right)\\ &- \nabla_i\left(g^{sk}\nabla_s R_{kj}\right).\end{aligned}$$

Si aplicamos la segunda identidad de Bianchi en la fórmula anterior, entonces

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}R^k_{kij} &= g^{ks}\left(\nabla_i\nabla_j R_{ks} + \nabla_k\nabla_s R_{ij} - \nabla_k\nabla_i R_{js} - \nabla_k\nabla_j R_{is}\right) + \frac{1}{2}\nabla_i\nabla_j R - \frac{1}{2}\nabla_i\nabla_j R\\ &= g^{ks}\left(\nabla_i\nabla_j R_{ks} + \nabla_k\nabla_s R_{ij} - \nabla_k\nabla_i R_{js} - \nabla_k\nabla_j R_{is}\right).\end{aligned}$$

Finalmente, reemplazando la fórmula previa en (3.3), se deduce que

$$\frac{\partial}{\partial t}R_{ij} = g^{ks}\left(\nabla_i\nabla_j R_{ks} + \nabla_k\nabla_s R_{ij} - \nabla_k\nabla_i R_{js} - \nabla_k\nabla_j R_{is}\right).$$

□

PROPOSICIÓN 3.7. *([28], Proposición 2.5.4, p. 42) Sean M una variedad diferenciable* *y* $\{g(t)\}_t$ *una familia suave de métricas Riemannianas sobre* M. *Si se cumple que*

$$\frac{\partial}{\partial t}g_{ij} = -2R_{ij},$$

se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial t}R = \Delta R + 2\left|R_{ij}\right|^2.$$

Demostración. Si empleamos la Proposición 2.25, entonces

$$\frac{\partial}{\partial t}R = \frac{\partial}{\partial t}\left(g^{ij}R_{ij}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}g^{ij}\right)R_{ij} + g^{ij}\left(\frac{\partial}{\partial t}R_{ij}\right),$$

de donde, utilizando la Proposición 3.3 y la Proposición 3.6, se sigue que

$$\frac{\partial}{\partial t}R = 2R^{ij}R_{ij} + g^{ij}g^{ks}\left(\nabla_i\nabla_j R_{ks} + \nabla_k\nabla_s R_{ij} - \nabla_k\nabla_i R_{js} - \nabla_k\nabla_j R_{is}\right).$$

Como la inversa del tensor métrico es una constante de la derivada covariante, de la fórmula anterior, se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}R &= 2R^{ij}R_{ij} + g^{ij}\nabla_i\nabla_j\left(g^{ks}R_{ks}\right) + g^{ks}\nabla_k\nabla_s\left(g^{ij}R_{ij}\right) - g^{ks}\nabla_k\left(g^{ij}\nabla_i R_{js}\right)\\ &\quad - g^{ks}\nabla_k\left(g^{ij}\nabla_j R_{is}\right)\\ &= 2R^{ij}R_{ij} + g^{ij}\nabla_i\nabla_j R + g^{ks}\nabla_k\nabla_s R - g^{ks}\nabla_k\left(g^{ij}\nabla_i R_{js}\right) - g^{ks}\nabla_k\left(g^{ij}\nabla_j R_{is}\right),\end{aligned}$$

lo que implica, gracias a (2.22), que

$$\frac{\partial}{\partial t}R = 2R^{ij}R_{ij} + \Delta R + \Delta R - g^{ks}\nabla_k\left(g^{ij}\nabla_i R_{js}\right) - g^{ks}\nabla_k\left(g^{ij}\nabla_j R_{is}\right).$$

Si aplicamos al segunda identidad de Bianchi en la fórmula precedente, entonces

$$\frac{\partial}{\partial t}R = 2R^{ij}R_{ij} + 2\Delta R - \frac{1}{2}g^{ks}\nabla_k\nabla_s R - \frac{1}{2}g^{ks}\nabla_k\nabla_s R,$$

de donde, nuevamente por (2.22), conseguimos que

$$\frac{\partial}{\partial t}R = 2R^{ij}R_{ij} + 2\Delta R - \Delta R - \Delta R = 2R^{ij}R_{ij} + \Delta R.$$

Finalmente, haciendo uso de la Observación 2.16, se concluye que

$$\frac{\partial}{\partial t}R = \Delta R + 2\left|R_{ij}\right|^2.$$

□

PROPOSICIÓN 3.8. *([27], Lema 1.20, p. 21-23) Sean* M *una* n*-variedad diferenciable* *y $\{g(t)\}_t$ una familia suave de métricas Riemannianas sobre M. Si se cumple que*

$$\frac{\partial}{\partial t} g_{ij} = -2R_{ij},$$

se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial t} d\mu = -R d\mu.$$

Demostración. Recordemos que por la Proposición 2.19, la forma de volumen Riemanniana tiene la siguiente estructura local:

$$d\mu = \sqrt{\det\left(g_{ij}\right)}\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

Si derivamos la expresión anterior con respecto a t, entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} d\mu &= \left(\frac{\partial}{\partial t}\sqrt{\det\left(g_{ij}\right)}\right) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\det\left(g_{ij}\right)}} \left(\det\left(g_{ij}\right)\right) \operatorname{tr}\left(g^{ij}\frac{\partial}{\partial t} g_{ij}\right) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \\
&= -\operatorname{tr}\left(g^{ij} R_{ji}\right) \sqrt{\det\left(g_{ij}\right)}\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \\
&= -\left(\sum_{i,j=1} g^{ij} R_{ji}\right) d\mu,
\end{aligned}$$

de donde, volviendo a la notación de Einstein, se sigue que

$$\frac{\partial}{\partial t} d\mu = -g^{ij} R_{ij} d\mu.$$

Finalmente, empleando la Proposición 2.25, concluimos que

$$\frac{\partial}{\partial t} d\mu = -R d\mu.$$

□

Capítulo 4

Entropías geométricas

En [26], G. Perelman introdujo la nociones de $\mathcal{F}$-entropía y $\mathcal{W}$-entropía. Estas entropías nos permiten entender al flujo de Ricci como un flujo de gradiente, además, nos ayudan a analizar ciertas propiedades de las variedades, como la existencia de solitones. Hasta hace poco, no se tenía una interpretación de tales entropías, pero ahora se conoce una interpretación que involucra a las entropías de Boltzmann-Shannon y Boltzmann-Nash-Shannon [21, 22]. De igual forma, en el artículo [22], los autores presentan algunas aplicaciones de las entropías de Perelman y su relación con la entropía de Shannon tipo exponencial.

En este capítulo, presentaremos la forma explícita de las entropías de Perelman y exhibiremos algunas propiedades importantes de estas. Asimismo, daremos a conocer la estructura que tienen las entropías de Boltzmann-Shannon, Shannon tipo exponencial y Boltzmann-Nash-Shannon.

4.1. Entropías $\mathcal{F}$ y $\mathcal{W}$ de Perelman

Las entropías de Perelman satisfacen varias propiedades interesantes, pero para fines de este trabajo, solo examinaremos la monotonía de estas bajo un sistema de ecuaciones evolutivas.

Definición 4.1. *[26] Sea (M, g) una variedad Riemanniana cerrada de dimensión n. Se define la entropía $\mathcal{F}$ de Perelman como*

$$\mathcal{F}(g, f) = \int_M \left(R + |\nabla f|^2\right) e^{-f} d\mu,$$

donde $f : M \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable, tal que

$$\int_M e^{-f} d\mu = 1.$$

DEFINICIÓN 4.2. *[26] Sea (M, g) una variedad Riemanniana cerrada de dimensión n. Se define la entropía $\mathcal{W}$ de Perelman como*

$$\mathcal{W}(g, f, \tau) = \int_M \left[\tau\left(R + |\nabla f|^2\right) + f - n\right] (4\pi\tau)^{-n/2} e^{-f} d\mu,$$

donde $f : M \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable, tal que

$$\int_M (4\pi\tau)^{-n/2} e^{-f} d\mu = 1,$$

y $\tau > 0$.

PROPOSICIÓN 4.1. *([2], Proposición 10.10, p. 170-171) Sean $(M, g(t))$ una familia de variedades Riemannianas cerradas de dimensión n y $f : M \times [0, T] \to \mathbb{R}$ una función diferenciable, donde $T > 0$ está fijo. Si se verifica que*

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} g_{ij} & = -2R_{ij}, \\ \frac{\partial}{\partial t} f & = -\Delta f + |\nabla f|^2 - R, \end{cases}$$

se tiene que

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}(g, f) = 2\int_M \left|R_{ij} + \nabla_i \nabla_j f\right|^2 e^{-f} d\mu \geq 0.$$

PROPOSICIÓN 4.2. *([2], Proposición 11.4, p. 176) Sean $(M, g(t))$ una familia de variedades Riemannianas cerradas de dimensión n y $f : M \times [0, T] \to \mathbb{R}$ una función diferenciable, donde $T > 0$ está fijo. Si se verifica que*

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} g_{ij} & = -2R_{ij}, \\ \frac{\partial}{\partial t} f & = -\Delta f + |\nabla f|^2 - R + \frac{n}{2\tau}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \tau & = -1, \end{cases}$$

se tiene que

$$\frac{d}{dt}\mathcal{W}(g, f, \tau) = 2\tau \int_M \left|R_{ij} + \nabla_i \nabla_j f - \frac{1}{2} g_{ij}\right|^2 (4\pi\tau)^{-n/2} e^{-f} d\mu \geq 0.$$

4.2. Entropías de Boltzmann-Shannon, Shannon tipo exponencial y Boltzmann-Nash-Shannon

Las entropías de Perelman tienen algunas interpretaciones y aplicaciones a partir de las entropías de Boltzmann-Shannon y Boltzmann-Nash-Shannon. En particular, existe una interpretación probabilística de la entropía $\mathcal{W}$ para el flujo de Ricci [21]. Esta interpretación es nuestro principal interés, pues aquí es posible visualizar como la entropía $\mathcal{W}$ se reescribe en función de las dos entropías mencionadas. Trataremos de replicar esta idea en el Capítulo 5, pero en lugar de considerar la entropía $\mathcal{W}$, estudiaremos a una familia de entropías tipo Perelman. También, sumaremos la entropía de Shannon tipo exponencial al conjunto de entropías con las que buscaremos reescribir a esta familia.

A lo largo de esta sección, consideraremos una familia de variedades Riemannianas cerradas $(M, g(t))$ de dimensión n, y asumiremos que $f : M \times [0, T] \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable, tal que

$$\int_M (4\pi\tau)^{-n/2} e^{-f} d\mu = 1, \tag{4.1}$$

donde $T > 0$ está fijo. Además, supondremos que el sistema siguiente se verifica:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} g_{ij} & = -2R_{ij}, \\ \frac{\partial}{\partial t} f & = -\Delta f + |\nabla f|^2 - R + \frac{n}{2\tau}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \tau & = -1, \end{cases}$$

donde $\tau > 0$. Empleando la regla de la cadena, se deduce el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \tau} g_{ij} & = 2R_{ij}, \\ \frac{\partial}{\partial \tau} f & = \Delta f - |\nabla f|^2 + R - \frac{n}{2\tau}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \tau & = -1. \end{cases} \tag{4.2}$$

Una vez hechas estas aclaraciones es posible definir las entropías de Boltzmann-Shannon, Shannon tipo exponencial y Boltzmann-Nash-Shannon.

DEFINICIÓN 4.3. *[22] Se define la entropía de Boltzmann-Shannon de la medida de integración $dm = (4\pi\tau)^{-n/2} e^{-f} d\mu$ como*

$$H((u(\tau)) = \int_M u log(u) d\mu,$$

donde $u(\tau) = (4\pi\tau)^{-n/2}e^{-f}$.

OBSERVACIÓN 4.1. *La entropía* $H(u(\tau))$ *puede reescribirse como sigue:*

$$H(u(\tau)) = -\int_M \left(f + \frac{n}{2}\log(4\pi\tau)\right) dm.$$

En efecto, se tiene que

$$\begin{aligned} H(u(\tau)) &= \int_M u\log(u)d\mu = \int_M u\log\left(\frac{e^{-f}}{(4\pi\tau)^{n/2}}\right) d\mu = \int_M -u\left(f + \frac{n}{2}\log(4\pi\tau)\right) d\mu \\ &= -\int_M \left(f + \frac{n}{2}\log(4\pi\tau)\right) u d\mu = -\int_M \left(f + \frac{n}{2}\log(4\pi\tau)\right) dm. \end{aligned}$$

DEFINICIÓN 4.4. *[23] Se define la entropía de Shannon tipo exponencial como*

$$N(u(\tau)) = e^{-\frac{2}{n}H(u(\tau))}.$$

DEFINICIÓN 4.5. *[22] Se define la entropía de Boltzman-Nash-Shannon del kernel gaussiano del calor*[1] *en el espacio euclídeo de dimensión* n *como*

$$H(\gamma_n) = -\frac{n}{2}(1 + \log(4\pi\tau)).$$

PROPOSICIÓN 4.3. *([21], p. 9) La entropía* $\mathcal{W}$ *de Perelman se reescribe en función de las entropías* $H(u(\tau))$ *y* $H(\gamma_n)$ *como*

$$\mathcal{W}(g, f, \tau) = \frac{d}{d\tau}\left(\tau\left[H(\gamma_n) - H(u(\tau))\right]\right).$$

Demostración. Empleando la fórmula (4.1) y la definición de dm, tenemos que

$$\begin{aligned} H(\gamma_n) - H(u(\tau)) &= -\frac{n}{2}(1 + \log(4\pi\tau))\int_M dm + \int_M \left(f + \frac{n}{2}\log(4\pi\tau)\right) dm \\ &= -\int_M \frac{n}{2}(1 + \log(4\pi\tau))dm + \int_M \left(f + \frac{n}{2}\log(4\pi\tau)\right) dm \\ &= \int_M \left(f - \frac{n}{2}\right) dm, \end{aligned}$$

lo cual, implica que

$$\tau\left[H(\gamma_n) - H(u(\tau))\right] = \tau\int_M \left(f - \frac{n}{2}\right) dm.$$

[1] $\gamma_n(x) = \frac{e^{-\frac{||x||^2}{4\tau}}}{(4\pi\tau)^{n/2}}$ donde $x \in \mathbb{R}^n$.

Si derivamos la expresión anterior con respecto a τ, entonces

$$\frac{d}{d\tau}\left(\tau\left[H(\gamma_n)-H(u(\tau))\right]\right)=\int_M\left(f-\frac{n}{2}\right)dm+\tau\int_M\frac{\partial}{\partial\tau}\left(fdm\right)+\tau\frac{n}{2}\int_M\frac{\partial}{\partial\tau}dm. \tag{4.3}$$

Ahora bien, usando la Proposición 3.8 y el sistema (4.2), deducimos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\tau}dm&=\frac{\partial}{\partial\tau}\left((4\pi\tau)^{-n/2}e^{-f}d\mu\right)\\&=-\frac{n}{2\tau}(4\pi\tau)^{-n/2}e^{-f}d\mu-\left(\frac{\partial}{\partial\tau}f\right)(4\pi\tau)^{-n/2}e^{-f}d\mu+(4\pi\tau)^{-n/2}e^{-f}\left(\frac{\partial}{\partial\tau}dm\right)\\&=-\frac{n}{2\tau}dm-\left(\Delta f-|\nabla f|^2+R-\frac{n}{2\tau}\right)dm+(4\pi\tau)^{-n/2}e^{-f}\left(Rd\mu\right)\\&=\left(|\nabla f|^2-\Delta f-R\right)dm+Rdm\\&=\left(|\nabla f|^2-\Delta f\right)dm.\end{aligned}$$

De forma similar, utilizando el sistema (4.2) y la fórmula precedente, se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(fdm\right)&=\left(\frac{\partial}{\partial\tau}f\right)dm+f\left(\frac{\partial}{\partial\tau}dm\right)\\&=\left(\Delta f-|\nabla f|^2+R-\frac{n}{2\tau}\right)dm+f\left(|\nabla f|^2-\Delta f\right)dm.\end{aligned}$$

En resumen,

$$\frac{\partial}{\partial\tau}dm=\left(|\nabla f|^2-\Delta f\right)dm$$

y

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(fdm\right)=\left(\Delta f-|\nabla f|^2+R-\frac{n}{2\tau}\right)dm+f\left(|\nabla f|^2-\Delta f\right)dm.$$

Si reemplazamos las dos fórmulas anteriores en (4.3), entonces

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau}\left(\tau\left[H(\gamma_n)-H(u(\tau))\right]\right)=&\int_M\left(f-\frac{n}{2}\right)dm+\tau\int_M\left(\Delta f-|\nabla f|^2+R-\frac{n}{2\tau}\right)dm\\&+\tau\int_M f\left(|\nabla f|^2-\Delta f\right)dm+\tau\frac{n}{2}\int_M\left(|\nabla f|^2-\Delta f\right)dm.\end{aligned} \tag{4.4}$$

Por otro lado, empleando la Proposición 2.15, se tiene que

$$\begin{aligned}\nabla^i e^{-f}&=g^{ij}\frac{\partial}{\partial x^j}e^{-f}=g^{ij}de^{-f}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)=-g^{ij}e^{-f}df\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)=-e^{-f}g^{ij}\frac{\partial}{\partial x^j}f\\&=-e^{-f}\nabla^i f,\end{aligned} \tag{4.5}$$

y, haciendo uso de la Observación 2.17, se sigue que

$$\Delta e^{-f}=\nabla_i\nabla^i e^{-f}=\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\nabla^i e^{-f}\right)+\Gamma^j_{ij}\nabla^i e^{-f}. \tag{4.6}$$

Si combinamos las fórmulas (4.5) y (4.6), entonces

$$\begin{aligned}
\Delta e^{-f} &= \frac{\partial}{\partial x^i}\left(-e^{-f}\nabla^i f\right) - e^{-f}\Gamma^j_{ij}\nabla^i f \\
&= \left[\left(\frac{\partial}{\partial x^i} f\right)\nabla^i f\right] e^{-f} - \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\nabla^i f + \Gamma^j_{ij}\nabla^i f\right) e^{-f} \\
&= \left(\nabla_i f \nabla^i f\right) e^{-f} - \left(\nabla_i \nabla^i f\right) e^{-f} = \left(|\nabla f|^2 - \Delta f\right) e^{-f}.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Integrando la fórmula anterior sobre M y aplicando el Teorema de la Divergencia, se verifica

$$0 = \int_M \Delta e^{-f} d\mu = \int_M \left(|\nabla f|^2 - \Delta f\right) e^{-f} d\mu.$$

Luego, multiplicando la expresión previa por $(4\pi\tau)^{-n/2}$, se deduce que

$$\int_M \left(\Delta f - |\nabla f|^2\right) dm = 0 \iff \int_M \Delta f dm = \int_M |\nabla f|^2 \, dm. \tag{4.8}$$

Si sustituimos la fórmula (4.8) en (4.4), entonces

$$\frac{d}{d\tau}\left(\tau\left[H(\gamma_n) - H(u(\tau))\right]\right) = \tau \int_M f\left(|\nabla f|^2 - \Delta f\right) dm + \int_M (\tau R + f - n)\, dm. \tag{4.9}$$

Ahora, empleando la fórmula (4.7), se obtiene

$$\int_M f\left(|\nabla f|^2 - \Delta f\right) e^{-f} d\mu = \int_M f \Delta e^{-f} d\mu,$$

lo cual implica, gracias al Teorema de Green, que

$$\int_M f\left(|\nabla f|^2 - \Delta f\right) e^{-f} d\mu = \int_M \Delta f \; e^{-f} d\mu.$$

Multiplicando la fórmula precedente por $(4\pi\tau)^{-n/2}$ y usando (4.8), se sigue que

$$\int_M f\left(|\nabla f|^2 - \Delta f\right) dm = \int_M \Delta f dm = \int_M |\nabla f|^2 \, dm. \tag{4.10}$$

Finalmente, reemplazando la fórmula (4.10) en (4.9), concluimos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\tau}\left(\tau\left[H(\gamma_n) - H(u(\tau))\right]\right) &= \tau \int_M |\nabla f|^2 \, dm + \int_M (\tau R + f - n)\, dm \\
&= \int_M \left[\tau\left(R + |\nabla f|^2\right) + f - n\right] dm \\
&= \int_M \left[\tau\left(R + |\nabla f|^2\right) + f - n\right] (4\pi\tau)^{-n/2} e^{-f} d\mu \\
&= \mathcal{W}(g, f, \tau).
\end{aligned}$$

□

Capítulo 5

Familia de entropías y monotonicidad bajo el flujo de Ricci

En [20], Jun-Fang Li construye la familia de entropías tipo Perelman $\mathcal{W}_{ek}$ y analiza ciertas propiedades de esta. Principalmente, él demuestra que la familia $\mathcal{W}_{ek}$ es no-decreciente bajo un sistema de ecuaciones evolutivas que involucra al flujo de Ricci.

Lo que haremos en este capítulo es tratar de reescribir a la familia de entropías $\mathcal{W}_{ek}$ en función de las entropías de Boltzmann-Shannon y Boltzmann-Nash-Shannon, siguiendo ideas análogas a las de la Proposición 4.3. Luego, estudiaremos la monotonía de la familia $\mathcal{W}_{ek}$ haciendo una variación al sistema utilizado por Jun-Fang Li. Para finalizar, construiremos una nueva familia de entropías y, al igual que con la familia $\mathcal{W}_{ek}$, reescribiremos a esta nueva familia en función de las entropías de Boltzmann-Shannon y Boltzmann-Nash-Shannon, pero también consideraremos a la entropía de Shannon tipo exponencial en nuestros cálculos. Concluiremos nuestro trabajo estudiando la monotonía de la nueva familia.

En todo este capítulo, trabajaremos con una familia de variedades Riemannianas cerradas $(M, g(t))$ de dimensión n, y una función diferenciable $f : M \times [0, T] \to \mathbb{R}$ que satisface lo siguiente:

$$\int_M (4\pi\tau)^{-n/2} e^{-f} d\mu = 1, \tag{5.1}$$

donde $T > 0$ está fijo. Además, supondremos que el siguiente sistema se verifica:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} g_{ij} &= -2R_{ij}, \\ \frac{\partial}{\partial t} f &= -\Delta f + |\nabla f|^2 - R + \frac{n}{2\tau}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \tau &= -1, \end{cases} \tag{5.2}$$

donde $\tau > 0$. Haciendo uso de la regla de la cadena, se deduce el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \tau} g_{ij} &= 2R_{ij}, \\ \frac{\partial}{\partial \tau} f &= \Delta f - |\nabla f|^2 + R - \frac{n}{2\tau}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \tau &= -1. \end{cases} \tag{5.3}$$

5.1. Familia de entropías $\mathcal{W}_{ek}$

DEFINICIÓN 5.1. *[20] Se define la familia de entropías tipo Perelman $\mathcal{W}_{ek}$ como*

$$\mathcal{W}_{ek}(g, \tau, f) = \tau^2 \int_M \left[k \left(R + \frac{n}{2\tau} \right) + \Delta f \right] e^{-f} d\mu,$$

donde $k > 1$.

A continuación, presentaremos nuestro primer resultado.

TEOREMA 5.1. *Sean $(M, g(t))$ una familia de variedades Riemannianas cerradas de dimensión n y $f : M \times [0, T] \to \mathbb{R}$ una función diferenciable, tales que* (5.1) *y* (5.2) *se verifican. Se tiene que*

$$\mathcal{W}_{ek}(g, \tau, f) = (4\pi\tau)^{n/2} \tau^2 \left(\int_M (k-1) R dm - \frac{d}{d\tau} \left[k H(\gamma_n) + H(u(\tau)) \right] \right).$$

Demostración. Si derivamos $H(u(\tau))$ con respecto a τ, entonces

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} H(u(\tau)) &= -\int_M \frac{\partial}{\partial \tau} \left(f + \frac{n}{2} \log(4\pi\tau) \right) dm \\ &= -\int_M \frac{\partial}{\partial \tau} (f dm) - \frac{n}{2} \int_M \frac{\partial}{\partial \tau} (\log(4\pi\tau) dm) . \end{aligned} \tag{5.4}$$

Luego, empleando la Proposición 3.8 y el sistema (5.3), tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \tau} dm &= \frac{\partial}{\partial \tau}\left((4\pi\tau)^{-n/2} e^{-f} d\mu\right) \\
&= -\frac{n}{2\tau}(4\pi\tau)^{-n/2} e^{-f} d\mu - \left(\frac{\partial}{\partial \tau} f\right)(4\pi\tau)^{-n/2} e^{-f} d\mu + (4\pi\tau)^{-n/2} e^{-f}\left(\frac{\partial}{\partial \tau} dm\right) \\
&= -\frac{n}{2\tau} dm - \left(\Delta f - |\nabla f|^2 + R - \frac{n}{2\tau}\right) dm + (4\pi\tau)^{-n/2} e^{-f}\left(R d\mu\right) \\
&= \left(|\nabla f|^2 - \Delta f + R\right) dm + R dm = \left(|\nabla f|^2 - \Delta f\right) dm.
\end{aligned}$$

De forma similar, usando el sistema (5.3) y la fórmula anterior, conseguimos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \tau}(f dm) &= \left(\frac{\partial}{\partial \tau} f\right) dm + f\left(\frac{\partial}{\partial \tau} dm\right) \\
&= \left(\Delta f - |\nabla f|^2 + R - \frac{n}{2\tau}\right) dm + f\left(|\nabla f|^2 - \Delta f\right) dm.
\end{aligned}$$

En resumen,

$$\frac{\partial}{\partial \tau} dm = \left(|\nabla f|^2 - \Delta f\right) dm \tag{5.5}$$

y

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(f dm) = \left(\Delta f - |\nabla f|^2 + R - \frac{n}{2\tau}\right) dm + f\left(|\nabla f|^2 - \Delta f\right) dm. \tag{5.6}$$

Si integramos la fórmula (5.6) sobre M, entonces

$$\int_M \frac{\partial}{\partial \tau}(f dm) = \int_M \left(R - \frac{n}{2\tau}\right) dm + \int_M f\left(|\nabla f|^2 - \Delta f\right) dm + \int_M \left(\Delta f - |\nabla f|^2\right) dm. \tag{5.7}$$

Por otro lado, utilizando la Proposición 2.15, se tiene que

$$\begin{aligned}
\nabla^i e^{-f} &= g^{ij}\frac{\partial}{\partial x^j} e^{-f} = g^{ij} d e^{-f}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = -g^{ij} e^{-f} df\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = -e^{-f} g^{ij}\frac{\partial}{\partial x^j} f \\
&= -e^{-f}\nabla^i f,
\end{aligned} \tag{5.8}$$

y, empleando la Observación 2.17, se obtiene

$$\Delta e^{-f} = \nabla_i \nabla^i e^{-f} = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\nabla^i e^{-f}\right) + \Gamma^j_{ij}\nabla^i e^{-f}. \tag{5.9}$$

Combinando las fórmulas (5.8) y (5.9), se verifica

$$\begin{aligned}
\Delta e^{-f} &= \frac{\partial}{\partial x^i}\left(-e^{-f}\nabla^i f\right) - e^{-f}\Gamma^j_{ij}\nabla^i f \\
&= \left[\left(\frac{\partial}{\partial x^i} f\right)\nabla^i f\right] e^{-f} - \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\nabla^i f + \Gamma^j_{ij}\nabla^i f\right) e^{-f} \\
&= \left(\nabla_i f \nabla^i f\right) e^{-f} - \left(\nabla_i \nabla^i f\right) e^{-f} = \left(|\nabla f|^2 - \Delta f\right) e^{-f}.
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Ahora bien, si integramos la fórmula anterior sobre M y aplicamos el Teorema de la Divergencia, entonces

$$0 = \int_M \Delta e^{-f} d\mu = \int_M \left(|\nabla f|^2 - \Delta f \right) e^{-f} d\mu.$$

Multiplicando la expresión previa por $-(4\pi\tau)^{-n/2}$, se sigue que

$$\int_M \left(\Delta f - |\nabla f|^2 \right) dm = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int_M \Delta f dm = \int_M |\nabla f|^2 \, dm. \tag{5.11}$$

Por otro lado, haciendo uso de la fórmula (5.10), tenemos que

$$\int_M f \left(|\nabla f|^2 - \Delta f \right) e^{-f} d\mu = \int_M f \Delta e^{-f} d\mu,$$

lo que implica, gracias al Teorema de Green, que

$$\int_M f \left(|\nabla f|^2 - \Delta f \right) e^{-f} d\mu = \int_M \Delta f \; e^{-f} d\mu.$$

Si multiplicamos la fórmula precedente por $(4\pi\tau)^{-n/2}$ y usamos (5.11), entonces

$$\int_M f \left(|\nabla f|^2 - \Delta f \right) dm = \int_M \Delta f dm = \int_M |\nabla f|^2 \, dm. \tag{5.12}$$

Reemplazando las fórmulas (5.11) y (5.12) en (5.7), se tiene que

$$\int_M \frac{\partial}{\partial \tau}(f dm) = \int_M \left(R - \frac{n}{2\tau} \right) dm + \int_M \Delta f dm. \tag{5.13}$$

Ahora, usando la fórmula (5.5), conseguimos que

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\log(4\pi\tau) dm \right) = \frac{1}{\tau} dm + \log(4\pi\tau) \left(|\nabla f|^2 - \Delta f \right) dm,$$

de donde, si utilizamos (5.11), entonces

$$\int_M \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\log(4\pi\tau) dm \right) = \int_M \frac{1}{\tau} dm. \tag{5.14}$$

Sustituyendo las fórmulas (5.13) y (5.14) en (5.4), se deduce que

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} H(u(\tau)) &= - \int_M \left(R - \frac{n}{2\tau} \right) dm - \int_M \Delta f dm - \int_M \frac{n}{2\tau} dm \\ &= - \int_M R dm - \int_M \Delta f dm, \end{aligned}$$

lo cual equivale a

$$\int_M \Delta f dm = - \frac{d}{d\tau} H(u(\tau)) - \int_M R dm. \tag{5.15}$$

Por otro lado, derivando $H(\gamma_n)$ con respecto a τ, se obtiene

$$\frac{d}{d\tau}H(\gamma_n) = -\frac{n}{2\tau},$$

de donde, si empleamos (5.1), entonces

$$\frac{d}{d\tau}H(\gamma_n) = -\int_M \frac{n}{2\tau}dm. \tag{5.16}$$

Reescribamos a la familia $\mathcal{W}_{ek}(g, \tau, f)$:

$$\mathcal{W}_{ek}(g, \tau, f) = (4\pi\tau)^{n/2}\tau^2 \left(k\int_M Rdm + k\int_M \frac{n}{2\tau}dm + \int_M \Delta f dm\right).$$

Finalmente, reemplazando las fórmulas (5.15) y (5.16) en la expresión previa, se concluye que

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_{ek}(g, \tau, f) &= (4\pi\tau)^{n/2}\tau^2 \left(k\int_M Rdm - \frac{d}{d\tau}kH(\gamma_n) - \frac{d}{d\tau}H(u(\tau)) - \int_M Rdm\right)\\ &= (4\pi\tau)^{n/2}\tau^2 \left(\int_M (k-1)Rdm - \frac{d}{d\tau}\left[kH(\gamma_n) + H(u(\tau))\right]\right).\end{aligned}$$

□

5.2. Monotonía de la familia de entropías $\mathcal{W}_{ek}$

En esta sección, nuestro objetivo es analizar la monotonía de la familia de entropías $\mathcal{W}_{ek}$ con respecto al sistema de ecuaciones (5.2). Para lograr este objetivo seguiremos los siguientes pasos:

- Primero, deduciremos un nuevo sistema de ecuaciones evolutivas equivalente al sistema (5.2).
- Luego, construiremos una familia de entropías que se acople al nuevo sistema de ecuaciones. Asimismo, esta nueva familia de entropías será equivalente a la familia $\mathcal{W}_{ek}$.
- Finalmente, analizaremos la monotonía de la nueva familia de entropías, lo cual será suficiente para determinar la monotonía de la familia $\mathcal{W}_{ek}$, ya que ambas familias serán equivalentes.

Comencemos notando que, gracias al sistema (5.2), se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial t}f = -\Delta f + |\nabla f|^2 - R + \frac{n}{2\tau} = -\Delta f + |\nabla f|^2 - R - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{n}{2}\log(4\pi\tau)\right),$$

con lo cual

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(f+\frac{n}{2}\log(4\pi\tau)\right)=-\Delta f+|\nabla f|^2-R. \tag{5.17}$$

Además, como la derivada covariante de funciones constantes es cero, entonces

$$\begin{aligned}\nabla^i\left(f+\frac{n}{2}\log(4\pi\tau)\right)&=g^{ij}\frac{\partial}{\partial x^j}\left(f+\frac{n}{2}\log(4\pi\tau)\right)=g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^j}+g^{ij}\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{n}{2}\log(4\pi\tau)\right)\\&=g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^j}=\nabla^i f,\end{aligned}$$

de donde, se sigue que

$$\begin{aligned}|\nabla f|^2=\nabla_i f\nabla^i f&=\left(\nabla_i f+\nabla_i\left(\frac{n}{2}\log(4\pi\tau)\right)\right)\nabla^i\left(f+\frac{n}{2}\log(4\pi\tau)\right)\\&=\nabla_i\left(f+\frac{n}{2}\log(4\pi\tau)\right)\nabla^i\left(f+\frac{n}{2}\log(4\pi\tau)\right)=\left|\nabla\left(f+\frac{n}{2}\log(4\pi\tau)\right)\right|^2\end{aligned} \tag{5.18}$$

y

$$\Delta f=\nabla_i\nabla^i f=\nabla_i\nabla^i\left(f+\frac{n}{2}\log(4\pi\tau)\right)=\Delta\left(f+\frac{n}{2}\log(4\pi\tau)\right). \tag{5.19}$$

Si reemplazamos las fórmulas (5.18) y (5.19) en (5.17), entonces

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(f+\frac{n}{2}\log(4\pi\tau)\right)=-\Delta\left(f+\frac{n}{2}\log(4\pi\tau)\right)+\left|\nabla\left(f+\frac{n}{2}\log(4\pi\tau)\right)\right|^2-R. \tag{5.20}$$

Ahora bien, definiendo

$$\tilde{f}:=f+\frac{n}{2}\log(4\pi\tau),$$

se consigue, gracias a (5.20), que

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{f}=-\Delta\tilde{f}+\left|\nabla\tilde{f}\right|^2-R. \tag{5.21}$$

Por otro lado, empleando la fórmula (5.1), se obtiene

$$\int_M e^{-\tilde{f}}d\mu=(4\pi\tau)^{n/2}(4\pi\tau)^{-n/2}\int_M\frac{e^{-f}}{(4\pi\tau)^{n/2}}d\mu=\int_M\frac{e^{-f}}{(4\pi\tau)^{n/2}}d\mu=1. \tag{5.22}$$

Con lo hecho previamente, vemos que a través de las fórmulas (5.21) y (5.22) es posible deducir un nuevo sistema de ecuaciones evolutivas equivalente al sistema (5.2), donde la condición (5.1) es reemplazada por (5.22). Además, la función que ocuparemos en lugar de f es $\tilde{f}$. En otras palabras, el nuevo sistema que ocuparemos es el siguiente:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} g_{ij} & = -2R_{ij}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \tilde{f} & = -\Delta \tilde{f} + \left|\nabla \tilde{f}\right|^2 - R, \\ \frac{\partial}{\partial t} \tau & = -1, \end{cases} \tag{5.23}$$

donde $\tilde{f}$ verifica

$$\int_M e^{-\tilde{f}} d\mu = 1. \tag{5.24}$$

Ahora, construiremos una nueva nueva familia de entropías que es equivalente a la familia $\mathcal{W}_{ek}$. Para ello, empleando la fórmula (5.19) junto con la definición de $\tilde{f}$, es posible definir una nueva familia de entropías:

$$\widetilde{\mathcal{W}}_{ek}\left(g, \tau, \tilde{f}\right) := (4\pi)^{n/2} \tau^{(n+4)/2} \int_M \left[k\left(R + \frac{n}{2\tau}\right) + \Delta \tilde{f}\right] e^{-\tilde{f}} d\mu,$$

donde $k > 1$. Esta nueva familia es equivalente a $\mathcal{W}_{ek}(g, \tau, f)$.

A continuación, presentaremos un lema que nos será de mucha utilidad al momento de analizar la monotonía de la familia $\widetilde{\mathcal{W}}_{ek}(g, \tau, \tilde{f})$.

LEMA 5.2. *Sean $(M, g(t))$ una familia de variedades Riemannianas cerradas de dimensión n y $\tilde{f} : M \times [0, T] \to \mathbb{R}$ una función diferenciable, tales que (5.23) se satisface. Se tiene que*

$$\frac{d}{dt} \int_M R e^{-\tilde{f}} d\mu = 2 \int_M \left|R_{ij}\right|^2 e^{-\tilde{f}} d\mu \geq 0.$$

Demostración. Empleando la Proposición 3.7, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_M R e^{-\tilde{f}} d\mu &= \int_M \left(\frac{\partial R}{\partial t}\right) e^{-\tilde{f}} d\mu + \int_M R \frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-\tilde{f}} d\mu\right) \\ &= \int_M \left(\Delta R + 2\left|R_{ij}\right|^2\right) e^{-\tilde{f}} d\mu + \int_M R \frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-\tilde{f}} d\mu\right). \end{aligned} \tag{5.25}$$

Luego, usando (5.23), se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-\tilde{f}} d\mu\right) &= -\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t}\right) e^{-\tilde{f}} d\mu + e^{-\tilde{f}}\left(\frac{\partial}{\partial t} d\mu\right) \\ &= \left(\Delta \tilde{f} - |\nabla \tilde{f}|^2 + R\right) e^{-\tilde{f}} d\mu + e^{-\tilde{f}}\left(\frac{\partial}{\partial t} d\mu\right), \end{aligned}$$

lo cual implica, gracias a Proposición 3.8, que

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-\tilde{f}} d\mu\right) = \left(\Delta \tilde{f} - |\nabla \tilde{f}|^2 + R\right) e^{-\tilde{f}} d\mu - R e^{-\tilde{f}} d\mu = \left(\Delta \tilde{f} - |\nabla \tilde{f}|^2\right) e^{-\tilde{f}} d\mu. \tag{5.26}$$

Si sustituimos la fórmula (5.26) en (5.25), entonces

$$\frac{d}{dt}\int_M Re^{-\tilde{f}}d\mu = \int_M \left(\Delta R + 2\left|R_{ij}\right|^2\right) e^{-\tilde{f}}d\mu + \int_M R\left(\Delta\tilde{f} - |\nabla\tilde{f}|^2\right) e^{-\tilde{f}}d\mu. \tag{5.27}$$

Por otro lado, utilizando la Proposición 2.15, se tiene que

$$\begin{aligned}\nabla^i e^{-\tilde{f}} &= g^{ij}\frac{\partial}{\partial x^j}e^{-\tilde{f}} = g^{ij}de^{-\tilde{f}}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = -g^{ij}e^{-\tilde{f}}d\tilde{f}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = -e^{-\tilde{f}}g^{ij}\frac{\partial}{\partial x^j}\tilde{f}\\ &= -e^{-\tilde{f}}\nabla^i\tilde{f},\end{aligned} \tag{5.28}$$

y, empleando la Observación 2.17, se sigue que

$$\Delta e^{-\tilde{f}} = \nabla_i\nabla^i e^{-\tilde{f}} = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\nabla^i e^{-\tilde{f}}\right) + \Gamma^j_{ij}\nabla^i e^{-\tilde{f}}. \tag{5.29}$$

Combinando las fórmulas (5.28) y (5.29), se verifica

$$\begin{aligned}\Delta e^{-\tilde{f}} &= \frac{\partial}{\partial x^i}\left(-e^{-\tilde{f}}\nabla^i\tilde{f}\right) - e^{-\tilde{f}}\Gamma^j_{ij}\nabla^i\tilde{f}\\ &= \left[\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\tilde{f}\right)\nabla^i\tilde{f}\right]e^{-\tilde{f}} - \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\nabla^i\tilde{f} + \Gamma^j_{ij}\nabla^i\tilde{f}\right)e^{-\tilde{f}}\\ &= \left(\nabla_i\tilde{f}\nabla^i\tilde{f}\right)e^{-\tilde{f}} - \left(\nabla_i\nabla^i\tilde{f}\right)e^{-\tilde{f}} = \left(\left|\nabla\tilde{f}\right|^2 - \Delta\tilde{f}\right)e^{-\tilde{f}}.\end{aligned}$$

Si reemplazamos la fórmula anterior en (5.27), entonces

$$\frac{d}{dt}\int_M Re^{-\tilde{f}}d\mu = \int_M \left(\Delta R + 2\left|R_{ij}\right|^2\right) e^{-\tilde{f}}d\mu - \int_M R\Delta e^{-\tilde{f}}d\mu, \tag{5.30}$$

y así, haciendo uso del Teorema de Green, se concluye que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_M Re^{-\tilde{f}}d\mu &= \int_M \left(\Delta R + 2\left|R_{ij}\right|^2\right) e^{-\tilde{f}}d\mu - \int_M \Delta R\, e^{-\tilde{f}}d\mu\\ &= 2\int_M \left|R_{ij}\right|^2 e^{-\tilde{f}}d\mu \geq 0.\end{aligned}$$

□

Ahora, vamos a enunciar y demostrar uno de los resultados más complejos del presente trabajo. Dicho resultado consiste en analizar la monotonía de la familia de entropías $\widetilde{\mathcal{W}}_{ek}(g, \tilde{f}, \tau)$.

Teorema 5.3. *Sean $(M, g(t))$ una familia de variedades Riemannianas cerradas de dimensión n y $\tilde{f} : M \times [0, T] \to \mathbb{R}$ una función diferenciable, tales que* (5.23) *y* (5.24) *se satisfacen. Si existe un intervalo I de t, tal que*

$$\frac{1}{\tau^2}\left[2\tau(n+4)\left(kR + \Delta\tilde{f}\right) + kn(n+2)\right] \leq 8\left[(k-1)\left|R_{ij}\right|^2 + \left|R_{ij} + \nabla_i\nabla_j\tilde{f}\right|^2\right] \tag{5.31}$$

se tiene que

$$\frac{d}{dt}\widetilde{\mathcal{W}}_{ek}(g,\tilde{f},\tau) \geq 0$$

sobre I.

Demostración. Reescribamos a la familia $\widetilde{\mathcal{W}}_{ek}(g,\tau,\tilde{f})$:

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\mathcal{W}}_{ek}(g,\tau,\tilde{f}) \\
&= (4\pi)^{n/2}\tau^{(n+4)/2}\left[\int_M \left[k\left(R+\frac{n}{2\tau}\right)+\Delta\tilde{f}\right]e^{\tilde{f}}d\mu + \left(\int_M Re^{-\tilde{f}}d\mu - \int_M Re^{-\tilde{f}}d\mu\right)\right.\\
&\quad \left. + \left(\int_M \frac{n}{2\tau}e^{-\tilde{f}}d\mu - \int_M \frac{n}{2\tau}e^{-\tilde{f}}d\mu\right)\right]\\
&= (4\pi)^{n/2}\tau^{(n+4)/2}\left[(k-1)\int_M Re^{-\tilde{f}}d\mu + (k-1)\int_M \frac{n}{2\tau}e^{-\tilde{f}}d\mu + \int_M (R+\Delta\tilde{f})e^{-\tilde{f}}d\mu\right.\\
&\quad \left. + \int_M \frac{n}{2\tau}e^{-\tilde{f}}d\mu\right];
\end{aligned}$$

en resumen,

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\mathcal{W}}_{ek}(g,\tau,\tilde{f}) \\
&= (4\pi)^{n/2}\tau^{(n+4)/2}\left[(k-1)\int_M Re^{-\tilde{f}}d\mu + (k-1)\int_M \frac{n}{2\tau}e^{-\tilde{f}}d\mu + \int_M (R+\Delta\tilde{f})e^{-\tilde{f}}d\mu\right.\\
&\quad \left. + \int_M \frac{n}{2\tau}e^{-\tilde{f}}d\mu\right].
\end{aligned}$$

Derivando la fórmula precedente con respecto a t, se obtiene

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(4\pi)^{n/2}}\frac{d}{dt}\widetilde{\mathcal{W}}_{ek}(g,\tilde{f},\tau)\\
&= -\frac{(n+4)\tau^{(n+4)/2}}{2\tau}\left[(k-1)\left(\int_M Re^{-\tilde{f}}d\mu + \int_M \frac{n}{2\tau}e^{-\tilde{f}}d\mu\right) + \int_M \left(R+\Delta\tilde{f}\right)e^{-\tilde{f}}d\mu\right.\\
&\quad \left. + \int_M \frac{n}{2\tau}e^{-\tilde{f}}d\mu\right] + \tau^{(n+4)/2}\left[(k-1)\left(\frac{d}{dt}\int_M Re^{-\tilde{f}}d\mu + \frac{d}{dt}\int_M \frac{n}{2\tau}e^{-\tilde{f}}d\mu\right)\right.\\
&\quad \left. + \frac{d}{dt}\int_M \left(R+\Delta\tilde{f}\right)e^{-\tilde{f}}d\mu + \frac{d}{dt}\int_M \frac{n}{2\tau}e^{-\tilde{f}}d\mu\right]\\
&= \tau^{(n+4)/2}(k-1)\left[\frac{d}{dt}\int_M Re^{-\tilde{f}}d\mu + \frac{d}{dt}\int_M \frac{n}{2\tau}e^{-\tilde{f}}d\mu - \frac{(n+4)}{2}\int_M \frac{R}{\tau}e^{-\tilde{f}}d\mu\right.\\
&\quad \left. - \frac{(n+4)}{2}\int_M \frac{n}{2\tau^2}e^{-\tilde{f}}d\mu\right] + \tau^{(n+4)/2}\left[\frac{d}{dt}\int_M \left(R+\Delta\tilde{f}\right)e^{-\tilde{f}}d\mu + \frac{d}{dt}\int_M \frac{n}{2\tau}e^{-\tilde{f}}d\mu\right.\\
&\quad \left. - \frac{(n+4)}{2}\left(\int_M \frac{(R+\Delta\tilde{f})}{\tau}e^{-\tilde{f}}d\mu + \int_M \frac{n}{2\tau^2}e^{-\tilde{f}}d\mu\right)\right];
\end{aligned}$$

en conclusión,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{(4\pi)^{n/2}}\frac{d}{dt}\widetilde{\mathcal{W}}_{ek}(\tilde{f},\tau)\\
&=\tau^{(n+4)/2}(k-1)\left[\frac{d}{dt}\int_M Re^{-\tilde{f}}d\mu+\frac{d}{dt}\int_M\frac{n}{2\tau}e^{-\tilde{f}}d\mu-\frac{(n+4)}{2}\int_M\frac{R}{\tau}e^{-\tilde{f}}d\mu\right.\\
&\left.-\frac{(n+4)}{2}\int_M\frac{n}{2\tau^2}e^{-\tilde{f}}d\mu\right]+\tau^{(n+4)/2}\left[\frac{d}{dt}\int_M\left(R+\Delta\tilde{f}\right)e^{-\tilde{f}}d\mu+\frac{d}{dt}\int_M\frac{n}{2\tau}e^{-\tilde{f}}d\mu\right.\\
&\left.-\frac{(n+4)}{2}\left(\int_M\frac{(R+\Delta\tilde{f})}{\tau}e^{-\tilde{f}}d\mu+\int_M\frac{n}{2\tau^2}e^{-\tilde{f}}d\mu\right)\right].
\end{aligned}
\tag{5.32}
$$

Ahora, si hacemos uso del sistema (5.23) y la Proposición 3.8, entonces

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_M\frac{n}{2\tau}e^{-\tilde{f}}d\mu&=\int_M\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{n}{2\tau}\right)e^{-\tilde{f}}d\mu+\int_M\frac{n}{2\tau}\left(\frac{\partial}{\partial t}e^{-\tilde{f}}\right)d\mu+\int_M\frac{n}{2\tau}e^{-\tilde{f}}\left(\frac{\partial}{\partial t}d\mu\right)\\
&=\int_M\frac{n}{2\tau^2}e^{-\tilde{f}}d\mu-\int_M\frac{n}{2\tau}\left(-\Delta\tilde{f}+\left|\nabla\tilde{f}\right|^2-R\right)e^{-\tilde{f}}d\mu-\int_M\frac{nR}{2\tau}e^{-\tilde{f}}d\mu\\
&=\int_M\frac{n}{2\tau^2}e^{-\tilde{f}}d\mu+\frac{n}{2\tau}\int_M\left(\Delta\tilde{f}-\left|\nabla\tilde{f}\right|^2\right)e^{-\tilde{f}}d\mu.
\end{aligned}
\tag{5.33}
$$

Por otro lado, utilizando la Proposición 2.15, se tiene que

$$
\begin{aligned}
\nabla^i e^{-\tilde{f}}&=g^{ij}\frac{\partial}{\partial x^j}e^{-\tilde{f}}=g^{ij}de^{-\tilde{f}}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)=-g^{ij}e^{-\tilde{f}}d\tilde{f}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)=-e^{-\tilde{f}}g^{ij}\frac{\partial}{\partial x^j}\tilde{f}\\
&=-e^{-\tilde{f}}\nabla^i\tilde{f},
\end{aligned}
\tag{5.34}
$$

y, empleando la Observación 2.17, se sigue que

$$
\Delta e^{-\tilde{f}}=\nabla_i\nabla^i e^{-\tilde{f}}=\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\nabla^i e^{-\tilde{f}}\right)+\Gamma^j_{ij}\nabla^i e^{-\tilde{f}}.
\tag{5.35}
$$

Combinando las fórmulas (5.34) y (5.35), se verifica

$$
\begin{aligned}
\Delta e^{-\tilde{f}}&=\frac{\partial}{\partial x^i}\left(-e^{-\tilde{f}}\nabla^i\tilde{f}\right)-e^{-\tilde{f}}\Gamma^j_{ij}\nabla^i\tilde{f}\\
&=\left[\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\tilde{f}\right)\nabla^i\tilde{f}\right]e^{-\tilde{f}}-\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\nabla^i\tilde{f}+\Gamma^j_{ij}\nabla^i\tilde{f}\right)e^{-\tilde{f}}\\
&=\left(\nabla_i\tilde{f}\nabla^i\tilde{f}\right)e^{-\tilde{f}}-\left(\nabla_i\nabla^i\tilde{f}\right)e^{-\tilde{f}}=\left(\left|\nabla\tilde{f}\right|^2-\Delta\tilde{f}\right)e^{-\tilde{f}}.
\end{aligned}
$$

Si integramos la fórmula precedente sobre M y aplicamos el Teorema de la Divergencia, entonces

$$
0=\int_M\Delta e^{-\tilde{f}}d\mu=\int_M\left(\left|\nabla\tilde{f}\right|^2-\Delta\tilde{f}\right)e^{-\tilde{f}}d\mu,
$$

con lo cual

$$\int_M \left(\Delta\tilde{f} - |\nabla\tilde{f}|^2\right) e^{-\tilde{f}} d\mu = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int_M \Delta\tilde{f}\, e^{-\tilde{f}} d\mu = \int_M |\nabla\tilde{f}|^2 e^{-\tilde{f}} d\mu. \tag{5.36}$$

Reemplazando la fórmula (5.36) en (5.33), se consigue que

$$\frac{d}{dt}\int_M \frac{n}{2\tau} e^{-\tilde{f}} d\mu = \int_M \frac{n}{2\tau^2} e^{-\tilde{f}} d\mu. \tag{5.37}$$

Ahora bien, usando nuevamente la fórmula (5.36), se sigue que

$$\int_M \left(R + \Delta\tilde{f}\right) e^{-\tilde{f}} d\mu = \int_M \left(R + |\nabla\tilde{f}|^2\right) e^{-\tilde{f}} d\mu = \mathcal{F}\left(g, \tilde{f}\right),$$

lo que implica, gracias a la Proposición 4.1, que

$$\frac{d}{dt}\int_M \left(R + \Delta\tilde{f}\right) e^{-\tilde{f}} d\mu = 2\int_M \left|R_{ij} + \nabla_i\nabla_j\tilde{f}\right|^2 e^{-\tilde{f}} d\mu. \tag{5.38}$$

Además, empleando el Lema 5.2, se satisface

$$\frac{d}{dt}\int_M R e^{-\tilde{f}} d\mu = 2\int_M |R_{ij}|^2 e^{-\tilde{f}} d\mu. \tag{5.39}$$

Por lo tanto, sustituyendo las fórmulas (5.37), (5.38) y (5.39) en (5.32), se tiene que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(4\pi)^{n/2}}\frac{d}{dt}\widetilde{\mathcal{W}}_{ek}(g, \tilde{f}, \tau) \\
&= \tau^{(n+4)/2}(k-1)\left[2\int_M |R_{ij}|^2 e^{-\tilde{f}} d\mu + \int_M \frac{n}{2\tau^2} e^{-\tilde{f}} d\mu - \frac{(n+4)}{2}\int_M \frac{R}{\tau} e^{-\tilde{f}} d\mu \right.\\
&\quad \left. - \frac{(n+4)}{2}\int_M \frac{n}{2\tau^2} e^{-\tilde{f}} d\mu\right] + \tau^{(n+4)/2}\left[2\int_M \left|R_{ij} + \nabla_i\nabla_j\tilde{f}\right|^2 e^{-\tilde{f}} d\mu + \int_M \frac{n}{2\tau^2} e^{-\tilde{f}} d\mu \right.\\
&\quad \left. - \frac{(n+4)}{2}\left(\int_M \frac{(R + \Delta\tilde{f})}{\tau} e^{-\tilde{f}} d\mu + \int_M \frac{n}{2\tau^2} e^{-\tilde{f}} d\mu\right)\right] \\
&= \tau^{(n+4)/2}\left[2\left(\int_M (k-1)\,|R_{ij}|^2 e^{-\tilde{f}} d\mu + \int_M \left|R_{ij} + \nabla_i\nabla_j\tilde{f}\right|^2 e^{-\tilde{f}} d\mu\right) + \int_M k\frac{n}{2\tau^2} e^{-\tilde{f}} d\mu\right] \\
&\quad - \tau^{(n+4)/2}\left[\frac{(n+4)}{2}\int_M \left(k\frac{R}{\tau} + \frac{\Delta\tilde{f}}{\tau} + k\frac{n}{2\tau^2}\right) e^{-\tilde{f}} d\mu\right] \\
&= \tau^{(n+4)/2}\int_M \left[2\left((k-1)\,|R_{ij}|^2 + \left|R_{ij} + \nabla_i\nabla_j\tilde{f}\right|^2\right) - \frac{(n+4)}{2}\left(k\frac{R}{\tau} + \frac{\Delta\tilde{f}}{\tau}\right) \right.\\
&\quad \left. - \frac{kn(n+2)}{4\tau^2}\right] e^{-\tilde{f}} d\mu,
\end{aligned}$$

con lo cual

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\widetilde{\mathcal{W}}_{ek}(g,\tilde{f},\tau)\\ &= (4\pi)^{n/2}\tau^{(n+4)/2}\int_M \left[2\left((k-1)\left|R_{ij}\right|^2+\left|R_{ij}+\nabla_i\nabla_j\tilde{f}\right|^2\right)-\frac{(n+4)}{2}\left(k\frac{R}{\tau}+\frac{\Delta\tilde{f}}{\tau}\right)\right.\\ &\left.-\frac{kn(n+2)}{4\tau^2}\right]e^{-\tilde{f}}d\mu.\end{aligned} \tag{5.40}$$

Ahora bien, haciendo uso de la hipótesis del teorema, se verifica

$$\frac{(n+4)}{2}\left(k\frac{R}{\tau}+\frac{\Delta\tilde{f}}{\tau}\right)+\frac{kn(n+2)}{4\tau^2}\leq 2\left((k-1)\left|R_{ij}\right|^2+\left|R_{ij}+\nabla_i\nabla_j\tilde{f}\right|^2\right),$$

lo cual equivale a

$$2\left((k-1)\left|R_{ij}\right|^2+\left|R_{ij}+\nabla_i\nabla_j\tilde{f}\right|^2\right)-\left(\frac{(n+4)}{2}\left(k\frac{R}{\tau}+\frac{\Delta\tilde{f}}{\tau}\right)-\frac{kn(n+2)}{4\tau^2}\right)\geq 0,$$

y así, se deduce que

$$\left[2\left((k-1)\left|R_{ij}\right|^2+\left|R_{ij}+\nabla_i\nabla_j\tilde{f}\right|^2\right)-\frac{(n+4)}{2}\left(k\frac{R}{\tau}+\frac{\Delta\tilde{f}}{\tau}\right)-\frac{kn(n+2)}{4\tau^2}\right]e^{-\tilde{f}}\geq 0.$$

Integrando la desigualdad previa sobre M y aplicando la Proposición 2.32, entonces

$$\begin{aligned}&\int_M\left[2\left((k-1)\left|R_{ij}\right|^2+\left|R_{ij}+\nabla_i\nabla_j\tilde{f}\right|^2\right)-\frac{(n+4)}{2}\left(k\frac{R}{\tau}+\frac{\Delta\tilde{f}}{\tau}\right)-\frac{kn(n+2)}{4\tau^2}\right]e^{-\tilde{f}}d\mu\\ &\geq 0,\end{aligned}$$

lo que implica, gracias a la fórmula (5.40), que

$$\frac{d}{dt}\widetilde{\mathcal{W}}_{ek}(g,\tilde{f},\tau)\geq 0.$$

□

En el siguiente ejemplo, exhibiremos una función $\tilde{f}$ definida sobre una variedad Riemanniana cerrada y un intervalo I de t, de manera que las hipótesis del Teorema 5.3 se satisfagan.

Ejemplo 5.1. *La* 1*-esfera* $\mathbb{S}^1=\left\{x\in\mathbb{R}^2:||x||=1\right\}$ *es una variedad Riemanniana cerrada conexa de dimensión* 1*. El tensor métrico sobre esta variedad es*

$$g=d\theta^2=d\theta\otimes d\theta,$$

con lo cual

$$g_{ij} = (1).$$

Consideremos la función

$$\tilde{f}(\theta, t) = -log\left(\frac{\theta+1}{2\pi^2+2\pi}\right).$$

Notemos que

$$\int_{\mathbb{S}^1} e^{-\tilde{f}} d\mu = \int_0^{2\pi} e^{log\left(\frac{\theta+1}{2\pi^2+2\pi}\right)} d\theta = \int_0^{2\pi}\left(\frac{\theta+1}{2\pi^2+2\pi}\right) d\theta = \frac{1}{2\pi^2+2\pi}\int_0^{2\pi}(\theta+1)d\theta$$
$$= \frac{1}{2\pi^2+2\pi}\left(\frac{\theta^2}{2}+\theta\right)\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi^2+2\pi}(2\pi^2+2\pi) = 1;$$

en resumen,

$$\int_{\mathbb{S}^1} e^{-\tilde{f}} d\mu = 1. \tag{5.41}$$

Calculando el laplaciano de $\tilde{f}$, se tiene que

$$\Delta\tilde{f} = \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial\theta^2} = \frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(-log\left(\frac{\theta+1}{2\pi^2+2\pi}\right)\right)\right] = \frac{\partial}{\partial\theta}\left(-\frac{1}{\theta+1}\right) = \frac{1}{(\theta+1)^2}.$$

Asimismo, calculando el cuadrado del módulo del gradiente de $\tilde{f}$, se obtiene

$$\left|\nabla\tilde{f}\right|^2 = \left(\frac{\partial\tilde{f}}{\partial\theta}\right)^2 = \left(-\frac{1}{\theta+1}\right)^2 = \frac{1}{(\theta+1)^2}.$$

Por otro lado, ya que los coeficientes de g_{ij} son constantes, se deduce que los símbolos de Christoffel son cero. Por lo tanto, se concluye que $R \equiv 0$ y $R_{ij} \equiv 0$.
Con lo calculado previamente, tenemos que

$$-\Delta\tilde{f} + \left|\nabla\tilde{f}\right|^2 - R = -\frac{1}{(\theta+1)^2} + \frac{1}{(\theta+1)^2} = 0 \ \ y \ \ \frac{\partial\tilde{f}}{\partial t} = 0,$$

lo cual implica

$$\frac{\partial\tilde{f}}{\partial t} = -\Delta\tilde{f} + \left|\nabla\tilde{f}\right|^2 - R.$$

De esta forma, vemos que g_{ij} y $\tilde{f}$ satisfacen el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} g_{ij} & = -2R_{ij}, \\ \frac{\partial}{\partial t}\tilde{f} & = -\Delta\tilde{f} + |\nabla\tilde{f}|^2 - R. \end{cases}$$

Ahora bien, hallemos un intervalo para la variable t, tal que

$$\frac{1}{\tau^2}\left[2\tau(n+4)\left(kR+\Delta\tilde{f}\right)+kn(n+2)\right]\leq 8\left[(k-1)\left|R_{ij}\right|^2+\left|R_{ij}+\nabla_i\nabla_j\tilde{f}\right|^2\right], \tag{5.42}$$

donde

$$\frac{\partial}{\partial t}\tau=-1.$$

Como $g_{ij}=(1)$, se obtiene

$$\left|\nabla_i\nabla_j\tilde{f}\right|^2=\nabla_1\nabla_1\tilde{f}\nabla^1\nabla^1\tilde{f}=\left(\frac{\partial^2\tilde{f}}{\partial\theta^2}\right)^2=\frac{1}{(\theta+1)^4}.$$

Si reemplazamos la fórmula anterior en la desigualdad (5.42) *y usamos el hecho de que $R\equiv 0$ y $R_{ij}\equiv 0$, entonces*

$$\frac{1}{\tau^2}\left[\frac{10\tau}{(\theta+1)^2}+3k\right]\leq\frac{8}{(\theta+1)^4},$$

lo que equivale a

$$\frac{8}{(\theta+1)^4}\tau^2-\frac{10}{(\theta+1)^2}\tau-3k\geq 0.$$

Resolviendo la inecuación precedente, se sigue que

$$\tau\geq\frac{\left(\sqrt{24k+25}+5\right)(\theta+1)^2}{8},$$

pero como se debe satisfacer que $\tau>0$, se concluye que

$$\tau>\frac{\left(\sqrt{24k+25}+5\right)(\theta+1)^2}{8}.$$

Tomemos $\tau=T-t$ con T una constante positiva, tal que la desigualdad anterior se cumple sobre un intervalo I de t. Así, la desigualdad (5.42) *se satisface para dicho intervalo.*
Por lo tanto, se deduce el siguiente sistema:

$$\begin{cases}\frac{\partial}{\partial t}g_{ij} & =-2R_{ij},\\ \frac{\partial}{\partial t}\tilde{f} & =-\Delta\tilde{f}+|\nabla\tilde{f}|^2-R,\\ \frac{\partial}{\partial t}\tau & =-1,\end{cases}$$

donde $\tilde{f}$ verifica

$$\int_{S^1}e^{-\tilde{f}}d\mu=1.$$

Finalmente, aplicando el Teorema 5.3, se concluye que

$$\frac{d}{dt}\widetilde{\mathcal{W}}_{ek}(g,\tilde{f},\tau) \geq 0.$$

5.3. Familia de entropías $\mathcal{W}_{ak}$

DEFINICIÓN 5.2. *Se define la familia de entropías $\mathcal{W}_{ak}$ como*

$$\mathcal{W}_{ak}(g,\tau,f) = \int_M \left[k\left(R - \frac{n}{2}log(\tau)\right) + \tau\left(R + |\nabla f|^2\right) - f - n\right] dm,$$

donde $k > 1$.

En el siguiente resultado, presentaremos el análisis realizado para poder reescribir a la familia de entropías $\mathcal{W}_{ak}$ en función de las entropías de Boltzmann-Shannon, Shannon tipo exponencial y Boltzmann-Nash-Shannon.

TEOREMA 5.4. *Sean $(M, g(t))$ una familia de variedades Riemannianas cerradas de dimensión n y $f : M \times [0,T] \to \mathbb{R}$ una función diferenciable, tales que* (5.1) *y* (5.2) *se satisfacen. Se tiene que*

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_{ak}(g,\tau,f) = k&\left[\int_M Rdm + \frac{d}{d\tau}(\tau log(\tau)H(\gamma_n)) - (log(\tau)+1)\,H(\gamma_n)\right]\\ &+ \frac{d}{d\tau}\left[\tau\left(3H(\gamma_n) + \frac{n}{2}log(N(u(\tau)))\right)\right] - nlog(N(u(\tau))) - 4H(\gamma_n).\end{aligned}$$

Demostración. Podemos reescribir a la familia $\mathcal{W}_{ak}(g,\tau,f)$ como sigue:

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_{ak}(g,\tau,f) = &\int_M kRdm + \int_M \left[\tau\left(R + |\nabla f|^2\right) + f - n\right] dm - 2\int_M fdm\\ &- k\tau\log(\tau)\int_M \frac{n}{2\tau}dm,\end{aligned}$$

con lo cual

$$\mathcal{W}_{ak}(g,\tau,f) = \int_M kRdm + \mathcal{W}(g,\tau,f) - 2\int_M fdm - k\tau\log(\tau)\int_M \frac{n}{2\tau}dm. \tag{5.43}$$

Recordemos que

$$H(\gamma_n) - H(u(\tau)) = \int_M \left(f - \frac{n}{2}\right) dm,$$

lo que equivale a

$$2\int_M fdm = 2H(\gamma_n) - 2H(u(\tau)) + \int_M ndm. \tag{5.44}$$

Ahora, empleando la fórmula (5.1), se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau}\left(2\tau H(\gamma_n)\right) &= 2H(\gamma_n) + 2\tau\left(\frac{d}{d\tau}H(\gamma_n)\right) = 2H(\gamma_n) - 2\tau\left(\frac{n}{2\tau}\right) = 2H(\gamma_n) - n \\ &= 2H(\gamma_n) - \int_M n dm,\end{aligned}$$

de donde, se sigue que

$$\int_M n dm = 2H(\gamma_n) - \frac{d}{d\tau}(2\tau H(\gamma_n)).$$

Reemplazando la fórmula anterior en (5.44), se consigue que

$$2\int_M f dm = 4H(\gamma_n) - 2H(u(\tau)) - \frac{d}{d\tau}(2\tau H(\gamma_n)). \tag{5.45}$$

Por otro lado, si utilizamos nuevamente (5.1), entonces

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau}(\tau\log(\tau)H(\gamma_n)) &= \log(\tau)H(\gamma_n) + H(\gamma_n) + \tau\log(\tau)\left(\frac{d}{d\tau}H(\gamma_n)\right) \\ &= \left(\log(\tau)+1\right)H(\gamma_n) - \tau\log(\tau)\left(\frac{n}{2\tau}\right) \\ &= \left(\log(\tau)+1\right)H(\gamma_n) - \tau\log(\tau)\int_M \frac{n}{2\tau}dm,\end{aligned}$$

con lo cual

$$\tau\log(\tau)\int_M \frac{n}{2\tau}dm = \left(\log(\tau)+1\right)H(\gamma_n) - \frac{d}{d\tau}(\tau\log(\tau)H(\gamma_n)). \tag{5.46}$$

También, recordemos que por la Proposición 4.3, se verifica

$$\mathcal{W}(g,f,\tau) = \frac{d}{d\tau}\left(\tau\left[H(\gamma_n) - H(u(\tau))\right]\right). \tag{5.47}$$

Si sustituimos las fórmulas (5.45), (5.46) y (5.47) en (5.43), entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_{ak}(g,\tau,f) &= \int_M kR dm + \frac{d}{d\tau}\left[\tau(H(\gamma_n) - H(u(\tau)))\right] - 4H(\gamma_n) + 2H(u(\tau)) \\ &\quad + \frac{d}{d\tau}(2\tau H(\gamma_n)) + k\frac{d}{d\tau}(\tau\log(\tau)H(\gamma_n)) - k\left(\log(\tau)+1\right)H(\gamma_n) \\ &= k\left[\int_M R dm + \frac{d}{d\tau}(\tau\log(\tau)H(\gamma_n)) - \left(\log(\tau)+1\right)H(\gamma_n)\right] \\ &\quad + \frac{d}{d\tau}\left[\tau\left(3H(\gamma_n) - H(u(\tau))\right)\right] + 2H(u(\tau)) - 4H(\gamma_n).\end{aligned} \tag{5.48}$$

Luego, de la definición de $N(u(\tau))$, se tiene que

$$H(u(\tau)) = -\frac{n}{2}\log(N(u(\tau))),$$

y así, reemplazando la fórmula precedente en (5.48), se concluye que

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_{ak}(g,\tau,f) = k\left(\int_M Rdm + \frac{d}{d\tau}(\tau\log(\tau)H(\gamma_n)) - (\log(\tau)+1)\,H(\gamma_n)\right)\\ + \frac{d}{d\tau}\left[\tau\left(3H(\gamma_n) + \frac{n}{2}\log(N(u(\tau)))\right)\right] - n\log(N(u(\tau))) - 4H(\gamma_n).\end{aligned}$$

□

5.4. Monotonía de la familia de entropías $\mathcal{W}_{ak}$

Para finalizar, demostraremos que la familia $\mathcal{W}_{ak}$ es no-decreciente bajo el sistema (5.2), donde f satisface (5.1). Este es uno de los resultados más importantes del presente trabajo, pues, a diferencia del Teorema 5.3, no es necesario asumir una desigualdad en particular.

TEOREMA 5.5. *Sean $(M, g(t))$ una familia de variedades Riemannianas cerradas de dimensión n y $f : M \times [0,T] \to \mathbb{R}$ una función diferenciable, tales que* (5.1) *y* (5.2) *se verifican. Se tiene que*

$$\frac{d}{dt}\mathcal{W}_{ak}(g,\tau,f) = 2\int_M \left[k\left(|R_{ij}|^2 + \frac{n}{4\tau}\right) + \tau\left|R_{ij} + \nabla_i\nabla_j f\right|^2 - \frac{n}{4\tau}\right] dm \geq 0.$$

Demostración. Reescribimos a la familia $\mathcal{W}_{ak}(g,\tau,f)$:

$$\mathcal{W}_{ak}(g,\tau,f) = k\int_M Rdm + \tau\int_M \left(R + |\nabla f|^2\right) dm - \int_M f dm - n - k\frac{n}{2}\log(\tau).$$

Derivando la expresión anterior con respecto a t, se obtiene

$$\frac{d}{dt}\mathcal{W}_{ak}(g,\tau,f) = k\frac{d}{dt}\int_M Rdm + \frac{d}{dt}\left(\tau\int_M \left(R + |\nabla f|^2\right) dm\right) - \frac{d}{dt}\int_M f dm + k\frac{n}{2\tau}. \tag{5.49}$$

Ahora, notemos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_M Rdm &= \frac{d}{dt}\int_M R(4\pi\tau)^{-n/2}e^{-f}d\mu = \frac{d}{dt}\int_M Re^{-\frac{n}{2}\log(4\pi\tau)}e^{-f}d\mu\\ &= \frac{d}{dt}\int_M Re^{-\left(f+\frac{n}{2}\log(4\pi\tau)\right)}d\mu = \frac{d}{dt}\int_M Re^{-\tilde{f}}d\mu,\end{aligned}$$

de donde, si empleamos el Lema 5.2, entonces

$$\frac{d}{dt}\int_M R dm = 2\int_M \left|R_{ij}\right|^2 e^{-\tilde{f}} d\mu = 2\int_M \left|R_{ij}\right|^2 dm. \tag{5.50}$$

Por otro lado, observemos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left[\tau\int_M \left(R+|\nabla f|^2\right) dm\right] &= -\int_M \left(R+|\nabla f|^2\right) dm + \tau\frac{d}{dt}\int_M \left(R+|\nabla f|^2\right) dm \\ &= -\int_M \left(R+|\nabla f|^2\right) dm + \tau\frac{d}{dt}\int_M \left(R+|\nabla f|^2\right) e^{-\tilde{f}} d\mu.\end{aligned} \tag{5.51}$$

Luego, haciendo uso de la Proposición 2.15, se tiene que

$$\begin{aligned}\nabla^i e^{-f} &= g^{ij}\frac{\partial}{\partial x^j} e^{-f} = g^{ij} d e^{-f}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = -g^{ij} e^{-f} df\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = -e^{-f} g^{ij}\frac{\partial}{\partial x^j} f \\ &= -e^{-f}\nabla^i f,\end{aligned} \tag{5.52}$$

y, empleando la Observación 2.17, se sigue que

$$\Delta e^{-f} = \nabla_i \nabla^i e^{-f} = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\nabla^i e^{-f}\right) + \Gamma^j_{ij}\nabla^i e^{-f}. \tag{5.53}$$

Combinando las fórmulas (5.52) y (5.53), se verifica

$$\begin{aligned}\Delta e^{-f} &= \frac{\partial}{\partial x^i}\left(-e^{-ff}\nabla^i f\right) - e^{-f}\Gamma^j_{ij}\nabla^i f \\ &= \left[\left(\frac{\partial}{\partial x^i} f\right)\nabla^i f\right] e^{-f} - \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\nabla^i f + \Gamma^j_{ij}\nabla^i f\right) e^{-f} \\ &= \left(\nabla_i f \nabla^i f\right) e^{-f} - \left(\nabla_i \nabla^i f\right) e^{-f} = \left(|\nabla f|^2 - \Delta f\right) e^{-f}.\end{aligned} \tag{5.54}$$

Si integramos la fórmula precedente sobre M y aplicamos el Teorema de la Divergencia, entonces

$$0 = \int_M \Delta e^{-f} d\mu = \int_M \left(|\nabla f|^2 - \Delta f\right) e^{-f} d\mu,$$

con lo cual

$$\int_M \left(\Delta f - |\nabla f|^2\right) e^{-f} d\mu = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \int_M \Delta f\, e^{-f} d\mu = \int_M |\nabla f|^2 e^{-f} d\mu. \tag{5.55}$$

Aplicando la fórmula (5.55) en (5.51), se tiene que

$$\frac{d}{dt}\left[\tau\int_M \left(R+|\nabla f|^2\right) dm\right] = -\int_M \left(R+|\nabla f|^2\right) dm + \tau\frac{d}{dt}\int_M (R+\Delta f)\, e^{-\tilde{f}} d\mu. \tag{5.56}$$

Ahora bien, como la derivada covariante de funciones constantes es cero, entonces

$$
\begin{aligned}
\nabla^i \left(f + \frac{n}{2}\log(4\pi\tau) \right) = g^{ij}\frac{\partial}{\partial x^j}\left(f + \frac{n}{2}\log(4\pi\tau) \right) &= g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^j} + g^{ij}\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{n}{2}\log(4\pi\tau) \right) \\
= g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^j} = \nabla^i f,
\end{aligned}
$$

lo cual implica que

$$
\Delta f = \nabla_i \nabla^i f = \nabla_i \nabla^i \left(f + \frac{n}{2}\log(4\pi\tau) \right) = \Delta \left(f + \frac{n}{2}\log(4\pi\tau) \right) = \Delta \tilde{f}.
$$

Reemplazando la fórmula previa en (5.56), se obtiene

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left[\tau \int_M \left(R + |\nabla f|^2 \right) dm \right] &= -\int_M \left(R + |\nabla f|^2 \right) dm + \tau \frac{d}{dt}\int_M \left(R + \Delta \tilde{f} \right) e^{-\tilde{f}} d\mu \\
&= -\int_M \left(R + |\nabla f|^2 \right) dm + \tau \frac{d}{dt}\mathcal{F}\left(g, \tilde{f} \right),
\end{aligned}
$$

lo que implica, gracias a la Proposición 4.1, que

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left[\tau \int_M \left(R + |\nabla f|^2 \right) dm \right] &= -\int_M \left(R + |\nabla f|^2 \right) dm + 2\tau \int_M \left| R_{ij} + \nabla_i \nabla_j \tilde{f} \right|^2 e^{-\tilde{f}} d\mu \\
&= -\int_M \left(R + |\nabla f|^2 \right) dm + 2\tau \int_M \left| R_{ij} + \nabla_i \nabla_j \tilde{f} \right|^2 dm.
\end{aligned} \tag{5.57}
$$

Otra vez, como la derivada covariante de funciones constantes es cero, se sigue que

$$
\begin{aligned}
\nabla_i \nabla_j f &= \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j} f - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k} f = \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j}\left(f + \frac{n}{2}\log(4\pi\tau) \right) - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}\left(f + \frac{n}{2}\log(4\pi\tau) \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j}\tilde{f} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}\tilde{f} = \nabla_i \nabla_j \tilde{f},
\end{aligned}
$$

y así, sustituyendo la expresión previa en (5.57), se deduce que

$$
\frac{d}{dt}\left[\tau \int_M \left(R + |\nabla f|^2 \right) dm \right] = -\int_M \left(R + |\nabla f|^2 \right) dm + 2\tau \int_M \left| R_{ij} + \nabla_i \nabla_j f \right|^2 dm. \tag{5.58}
$$

Por otro lado, usando el sistema (5.2), se satisface

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_M f dm = \int_M \frac{\partial}{\partial t}(f dm) &= \int_M \left(\frac{\partial}{\partial t} f \right) dm + \int_M f \left(\frac{\partial}{\partial t} dm \right) \\
&= \int_M \left(-\Delta f + |\nabla f|^2 - R + \frac{n}{2\tau} \right) dm + \int_M f \left(\frac{\partial}{\partial t} dm \right),
\end{aligned}
$$

de donde, si empleamos la fórmula (5.55), entonces

$$
\frac{d}{dt}\int_M f dm = \int_M \left(\frac{n}{2\tau} - R \right) dm + \int_M f \left(\frac{\partial}{\partial t} dm \right). \tag{5.59}
$$

Haciendo uso del sistema (5.2) y la Proposición 3.8, se obtiene que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}dm &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{e^{-f}}{(4\pi\tau)^{n/2}}d\mu\right) = \frac{n}{2\tau}\frac{e^{-f}}{(4\pi\tau)^{n/2}}d\mu - \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)\frac{e^{-f}}{(4\pi\tau)^{n/2}}d\mu + \frac{e^{-f}}{(4\pi\tau)^{n/2}}\left(\frac{\partial}{\partial t}d\mu\right)\\
&= \frac{n}{2\tau}dm + \left(\Delta f - |\nabla f|^2 + R - \frac{n}{2\tau}\right)dm + \frac{e^{-f}}{(4\pi\tau)^{n/2}}(-Rd\mu)\\
&= \left(\Delta f - |\nabla f|^2 + R\right)dm - Rdm = \left(\Delta f - |\nabla f|^2\right)dm.
\end{aligned}$$

Reemplazando la fórmula anterior en (5.59), se verifica

$$\frac{d}{dt}\int_M f dm = \int_M \left(\frac{n}{2\tau} - R\right)dm + \int_M f\left(\Delta f - |\nabla f|^2\right)dm. \tag{5.60}$$

Ahora bien, empleando la fórmula (5.54), tenemos que

$$\int_M f\left(|\nabla f|^2 - \Delta f\right)e^{-f}d\mu = \int_M f\Delta e^{-f}d\mu,$$

lo que implica, gracias al Teorema de Green, que

$$\int_M f\left(|\nabla f|^2 - \Delta f\right)e^{-f}d\mu = \int_M \Delta f\, e^{-f}d\mu.$$

Si multiplicamos la fórmula precedente por $-(4\pi\tau)^{-n/2}$ y usamos (5.55), entonces

$$\int_M f\left(\Delta f - |\nabla f|^2\right)dm = -\int_M \Delta f dm = -\int_M |\nabla f|^2 dm.$$

Sustituyendo la expresión anterior en (5.60), se consigue que

$$\frac{d}{dt}\int_M f dm = \int_M \left(\frac{n}{2\tau} - R\right)dm - \int_M |\nabla f|^2 dm = -\int_M \left(R + |\nabla f|^2\right)dm + \frac{n}{2\tau}. \tag{5.61}$$

Finalmente, reemplazando las fórmulas (5.50), (5.58) y (5.61) en (5.49), se concluye que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{W}_{ak}(g,\tau,f) &= 2k\int_M \left|R_{ij}\right|^2 dm - \int_M \left(R + |\nabla f|^2\right)dm + 2\tau\int_M \left|R_{ij} + \nabla_i\nabla_j f\right|^2 dm\\
&\quad + \int_M \left(R + |\nabla f|^2\right)dm - \frac{n}{2\tau} + k\frac{n}{2\tau}\\
&= 2k\int_M \left|R_{ij}\right|^2 dm + (k-1)\int_M \frac{n}{2\tau}dm + 2\tau\int_M \left|R_{ij} + \nabla_i\nabla_j f\right|^2 dm\\
&= 2\int_M \left[k\left(\left|R_{ij}\right|^2 + \frac{n}{4\tau}\right) + \tau\left|R_{ij} + \nabla_i\nabla_j f\right|^2 - \frac{n}{4\tau}\right]dm\\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

□

Capítulo 6

Conclusiones

Finalmente, estableceremos algunas conclusiones obtenidas a lo largo del presente trabajo.

1. En el Teorema 5.1, se demostró que bajo las condiciones (5.1) y (5.2), es posible reescribir a la familia de entropías $\mathcal{W}_{ek}$ en función de las entropías de Boltzmann-Shannon y Boltzmann-Nash-Shannon.

2. En el Teorema 5.3, se demostró que bajo las condiciones (5.23), (5.24) y (5.31), la familia de entropías $\widetilde{\mathcal{W}}_{ek}$ es no-decreciente.

3. Aunque el Teorema 5.3 se verifica para una familia de variedades Riemannianas cerradas de dimensión n, es importante señalar que hallar una función y una variedad que verifiquen las hipótesis de este teorema es una tarea bastante compleja. En el Ejemplo 5.1, exhibimos una función y una variedad que satisfacen las hipótesis del teorema en cuestión para dimensión 1. El lector podría pensar que una de las hipótesis más difíciles de verificar es la desigualdad (5.31), lo cual no es cierto. En realidad, la hipótesis más difícil de satisfacer es la condición (5.1). A continuación, presentamos un par de variedades Riemannianas y funciones que satisfacen las hipótesis del Teorema 5.3 a excepción de la condición (5.1):

   - $\mathbb{S}^2 = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : ||x|| = 1\right\}$ y la función $\tilde{f}(\theta, \varphi, t) = -2t$.
   - $\mathbb{H}^2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\right\}$ y la función $\tilde{f}(x, y, t) = -\frac{1}{2}\log\left(y^2\right) + 2t$.

4. En el Teorema 5.4, se demostró que bajo las condiciones (5.1) y (5.2), es posible reescribir a la familia de entropías $\mathcal{W}_{ak}$ en función de las entropías de Boltzmann-Shannon, Shannon tipo exponencial y Boltzmann-Nash-Shannon.

5. Uno de los resultados más importantes de este trabajo lo encontramos en el Teorema 5.5. En este teorema, vemos que bajo las condiciones (5.1) y (5.2), la familia de entropías $\mathcal{W}_{ak}$ es no-decreciente. A diferencia del Teorema 5.3, no es necesaria una hipótesis que involucre una desigualdad, lo cual resulta en una ventaja.

6. Cuando estudiamos a las familias $\mathcal{W}_{ek}$ y $\mathcal{W}_{ak}$ es posible notar lo siguiente:

   - Por un lado, reescribir a la familia de entropías $\mathcal{W}_{ek}$ en función de las entropías de Boltzmann-Shannon y Boltzmann-Nash-Shannon resulta en una expresión bastante simple, al contrario de lo que sucede con la familia $\mathcal{W}_{ak}$.
   - Por otro lado, estudiar la monotonía de la familia $\mathcal{W}_{ak}$ resulta menos complejo que estudiar la monotonía de la familia $\mathcal{W}_{ek}$, pues, como vimos en el Teorema 5.3, es necesaria una hipótesis adicional para demostrar que la familia $\mathcal{W}_{ek}$ es no-decreciente.

   Esto resulta muy interesante, debido a que se podría analizar que términos involucrados en cada familia de entropías provocan este efecto.

Bibliografía

[1] Aharony, O., Razamat, S. S., Seiberg, N., y Willett, B. The long flow to freedom. *JHEP*, 02:056, 2017.

[2] Andrews, B y Hopper, C. *The Ricci Flow in Riemannian Geometry. A Complete Proof of the Differentiable 1/4-Pinching Sphere Theorem*. Springer, 2010.

[3] Canzani, Y. *Notes for Analysis on Manifolds via the Laplacian*. Harvard University, 2013.

[4] Cao, H y Zhu, X. A complete proof of the Poincaré and Geometrization Conjectures - Application of the Hamilton-Perelman theory of the Ricci Flow*. *Asian Journal of Mathematics*, 2006.

[5] Chow, B. y Knopf, D. *The Ricci Flow: An Introduction*. American mathematical Society, 2004.

[6] DeTurck, D. M. Deforming metrics in the direction of their Ricci tensors. *Journal of Differential Geometry, 18(1):157–162*, 1983.

[7] Fei, T., Guo, B., y Phong, H. Parabolic Dimensional Reductions of 11D Supergravity, jun 2018. arXiv:math.DG/1806300583.

[8] Friedan, D. Nonlinear Models in $2 + \epsilon$ Dimensions. *Phys. Rev. Lett.*, 45:1057–1060, Sep 1980.

[9] Gimre, K., Guenther, C., e Isenberg, J. A geometric introduction to the 2-loop renormalization group flow, 2013.

[10] Godinho, L. y Natário, J. *An Introduction to Riemannian Geometry: With Applications to Mechanics and Relativity*. Springer, 2014.

[11] Gutperle, M., Headrick, M., Minwalla, S., y Schomerus, V. Space-time energy decreases under world sheet RG flow. *JHEP*, 01:073, 2003.

[12] Hamilton, R. Three Manifolds with Positive Ricci Curvature. *J. Diff. Geo., 17:255–306*, 1982.

[13] Headrick, M. y Wiseman, T. Ricci flow and black holes. *Class. Quant. Grav.*, 23:6683–6708, 2006.

[14] Iacovlenco, O. An Introduction to Hamilton's Ricci Flow. 2012.

[15] Jost, J. *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*. Springer, 2017.

[16] Kehagias, A., Lüst, D., y Lüst, S. Swampland, Gradient Flow and Infinite Distance. *JHEP*, 04:170, 2020.

[17] Lasso Andino, O. RG-2 flow, mass and entropy. *Class. Quant. Grav.*, 36:065011, 2019.

[18] Lasso Andino, O. RG-2 flow and black hole entanglement entropy. *Class. Quant. Grav.*, 38(8):085019, 2021.

[19] Lee, J. *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer, 2012.

[20] Li, J. Eigenvalues and energy functionals with monotonicity formulae under Ricci flow. *Mathematische Annalen*, 2007.

[21] Li, X. From the Boltzmann H-theorem to Perelman's W-entropy formula for the Ricci flow*. *arXiv:1303.5193 [math.DG]*, 2013.

[22] Li, S. y Li, X. $\mathcal{W}$-entropy formulas on super Ricci flows and Langevin deformation on Wasserstein space over Riemannian manifolds. *arXiv:1710.05750 [math.DG]*, 2017.

[23] Li, S. y Li, X. On the Shanon Entropy power on Riemannian manifolds and Ricci flow. *arXiv:2001.00410v1 [math.DG]*, 2020.

[24] Perelman, G. Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds. *arXiv:math/0307245 [math.DG]*, 2003.

[25] Perelman, G. Ricci flow with surgery on three-manifolds. *arXiv:math/0303109 [math.DG]*, 2003.

[26] Perelman, G. The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications. *arXiv:math/0211159 [math.DG]*, 2008.

[27] Sheridan, N. *Hamilton's Ricci Flow*. University of Melbourne, 2006.

[28] Topping, P. *Lectures on the Ricci Flow*. Cambridge University Press, 2006.