ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS

CARACTERIZACIÓN DE FUNCIONES FRACCIONARIAS ANALÍTICAS EN EL SENTIDO DE RIEMANN-LIOUVILLE SOBRE ESTRUCTURAS HIPERCOMPLEJAS

TRABAJO DE TITULACIÓN PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE MATEMÁTICO

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

ERICK SANTIAGO VELA MORALES
esantvela@gmail.com

DIRECTOR: DR. ANTONIO NICOLA DI TEODORO
nditeodoro@usfq.edu.ec

CODIRECTOR: DR. MIGUEL YANGARI SOSA
miguel.yangari@epn.edu.ec

QUITO, ENERO 2022

DECLARACIÓN

Yo ERICK SANTIAGO VELA MORALES, declaro bajo juramento que el trabajo aquí escrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

A través de la presente declaración cedo mis derechos de propiedad intelectual, correspondientes a este trabajo, a la Escuela Politécnica Nacional, según lo establecido por la Ley de Propiedad Intelectual, por su reglamento y por la normatividad institucional vigente.

Erick Santiago Vela Morales

CERTIFICACIÓN

Certificamos que el presente trabajo fue desarrollado por ERICK SANTIAGO VELA MORALES, bajo nuestra supervisión.

Dr. Antonio Nicola di Teodoro
Director del Proyecto

Dr. Miguel Yangari Sosa
Codirector del Proyecto

AGRADECIMIENTOS

A mi familia que ha sido mi primera escuela y me ha apoyado en todas las circunstancias, a mi madre que me ha enseñado disciplina y empatía; a saber vivir con altura y dignidad.

A mis abuelos que, con su forma de vida sencilla y desde mi infancia, han sido mi fuente de inspiración para trabajar hacia un futuro de paz.

A mis amigos entrañables, entre ellos Daniel y Álvaro, que en su franqueza, soporte, cariño y lealtad han podido sacar lo mejor de mí y me han incitado siempre a continuar, incluso cuando no lo creía posible. A todos quienes sin ser familia me han tendido alguna vez la mano y su comprensión.

Al Dr. Nicola di Teodoro por su guía y experiencia aplicada para este trabajo, siempre con comentarios oportunos. Por haberme recibido con brazos abiertos al camino de la investigación.

A mis profesores de escuela y colegio, que fueron quienes me guiaron hacia las Matemáticas y el conocimiento; a todos los que conocí en el trayecto, ausentes y presentes.

DEDICATORIA

A los que no son favoritos, a los que se esfuerzan.

A los que son últimos pero quieren ser primeros.

Índice general

Resumen

Se presenta una construcción del cálculo en el ámbito de los números hipercomplejos, que permite definir una teoría análoga a la de las funciones holomorfas o analíticas en el plano complejo, estableciendo las similitudes y diferencias con la misma. Para ello, se utilizan representaciones matriciales de números hipercomplejos, permitiendo clasificarlos y usar herramientas del álgebra lineal. Por otro lado, se considera una breve introducción al cálculo fraccionario, en específico, se formula el concepto de integral y derivada fraccionaria de Riemann-Liouville y sus propiedades básicas. Con estos preliminares, se estudian funciones fraccionarias analíticas hipercomplejas, siendo de especial interés el caso particular de los números complejos generalizados. Finalmente, se realiza una exploración de sucesiones de polinomios fraccionarios analíticos, que cumplan con la propiedad de «bajar» de grado al aplicarles un operador adecuado que reemplace a la derivada en este contexto; y se expone condiciones suficientes para poder rescatar el caso con derivadas ordinarias como caso límite del desarollado con derivadas fraccionarias.

Palabras claves: números hipercomplejos, cálculo fraccionario, funciones fraccionarias analíticas, sucesiones de polinomios.

Abstract

For the context of hypercomplex numbers, a construction of calculus is presented, which allows to define an analogous theory to the one of holomorphic or analytic functions in the complex plane, stating similarities and differences. In order to achieve this task, a matrix representation of a hypercomplex number is used, allowing to use tools from standard linear algebra and to classify them. Furthermore, an introduction to fractional calculus is considered, specifically the Riemann-Liouville integral and derivative are studied and their basic properties. Taking into account these preliminaries, fractional hypercomplex analytic functions are introduced, being of special interest the particular case of generalized complex numbers. Finally, series of fractional analytic polynomial are explored, with the additional property of having one degree less when a substitute of the derivative for this context, is applied. Sufficient conditions will be given to address the theory developed for ordinary derivatives as the limit case for the theory with fractional derivatives.

Key words: hypercomplex numbers, fractional calculus, fractional analytic functions, series of polynomials.

Capítulo 1

Introducción

Los *números hipercomplejos* o *álgebras hipercomplejas*, casos particulares de álgebras asociativas sobre $\mathbb{R}^n$ que van a ser descritas en el capítulo dos, parten de una larga tradición en busca de generalizaciones relevantes para los cuerpos $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$. Históricamente, uno de los primeros ejemplos se da en 1843 con el físico Sir William Rowan Hamilton, que describe con su nombre moderno a los *cuaterniones* $\mathbb{H}$, un álgebra sobre $\mathbb{R}^4$. Los cuaterniones ocupan un lugar especial en la física, ya que describen con facilidad los movimientos de objetos en un espacio tridimensional [1, pág. 135-140]. Además, junto al campo real y complejo, son los únicos números hipercomplejos que son álgebras de división, es decir, que todo número distinto de cero tiene inverso [18, Teo. 18.12]; este hecho fue descubierto por Frobenius en 1877.

Es un hecho conocido que el álgebra de los cuaterniones tiene el inconveniente de no ser conmutativa, porque $xy = yx$ no siempre es cierto para todo $x, y \in \mathbb{H}$. Esta propiedad es preservada para toda una familia de álgebras hipercomplejas en $\mathbb{R}^n$, conocidas como *álgebras de Clifford* $\mathscr{C}\ell_n$, las cuales también tiene profundas relaciones con ramas de la física como la mecánica cuántica, véase [1] y [7]. Debido a esta relevancia, la teoría concerciente para estas álgebras hipercomplejas no conmutativas está muy avanzada, con respecto a sus contrapartes conmutativas.

Dos de los ejemplos más importantes de álgebras hipercomplejas conmutativas, después de $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$, son el álgebra de los *números complejos generalizados* $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ y el álgebra de los *bicomplejos* $\mathbb{BC}$. El álgebra $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ se define sobre $\mathbb{R}^2$, depende de dos escalares reales α y β, y el vector $i = (0, 1)$ cumple que $i^2 = -\beta i - \alpha$, englobando a los números complejos, ya que si $\alpha = 1$ y $\beta = 0$, entonces $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ es isomorfa a $\mathbb{C}$. En general, para otros valores de α y β, esto no se cumple y $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ no es un álgebra de división. Los números complejos generalizados fueron clasificados, usando como criterio el signo del número $\beta^2 - 4\alpha$, por I. Yaglom en [26, Cap. 1] y son útiles para describir geometrías no euclidianas en el plano ([11] y [27]). En cambio, los números bicomplejos son definidos sobre $\mathbb{R}^4$ y son la versión conmutativa de los cuaterniones, por tanto, por el teorema de Frobenius, tampoco todos los elementos son invertibles; su importancia también radica en su capacidad para representar movimientos y generalizar geometrías no euclideanas a dimensiones superiores [16, Cap. 3]. Todos los números hipercomplejos, conmutativos o no, han sido ya clasificados para $\mathbb{R}^n$ con $n = 2, 3, 4$ por [25], y para dimensiones superiores sigue siendo una rama activa de investigación. El *análisis hipercomplejo* busca estudiar las derivadas para una función definida en un álgebra hipercompleja.

El *cálculo* o *análisis fraccionario* es también una rama de la matemáticas que busca generalizar conceptos tradicionales, pero esta vez con respecto a los operadores diferenciales usuales, haciendo que la operación de derivar n veces: $\frac{d}{dx^n}$, tenga sentido incluso si n no es un número natural. Distintos operadores fraccionarios diferenciales han sido propuestos, como son el caso de la derivada de Caputo y la de Grünwald-Letnikov ([9] y [15]), entre otras; para este trabajo, sin embargo, se considera una de las más simples: la derivada de Riemann-Liouville [17, Sec. 2.3]. Propiedades análogas a la teoría del cálculo clásico, como la linealidad y la regla del producto, también son ciertas para el cálculo fraccionario considerando esta derivada.

Propuestas para unir ambas ramas, el análisis hipercomplejo y el análisis fraccionario, han dado lugar a las *funciones fraccionarias hipercomplejas*. Uno de los primeros estudios se dio en [14] donde se describe funciones fraccionarias en álgebras de Clifford, para la derivada fraccionaria de Caputo. Otros ejemplos son, el estudio de las funciones fraccionarias con respecto a la derivada de Riemann-Liouville sobre el álgebra de los números complejos [5], números bicomplejos [6] y álgebras de Clifford [10].

Este trabajo se divide en 5 capítulos, siendo el primero la presente introducción.

El segundo capitulo se basa en los preliminares necesarios para el desarollo de los capítulos posteriores. En primer lugar, se discuten las distintas estructuras algebraicas usadas: anillos, álgebras sobre espacios vectoriales y álgebras hipercomplejas. En la sección de *anillos* se asume la existencia de una identidad, y se recuerda los resultados básicos acerca de ideales principales que permiten asegurar, en el capítulo cuatro, cuándo $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ es un cuerpo. En la sección de *álgebras sobre espacios vectoriales* se postula la definición de producto bilineal de un álgebra y se demuestra que es enteramente determinada por un arreglo de escalares reales, conocidos como constantes de estructura, además se determina la relación de las álgebras con los anillos. Para la sección de *álgebras hipercomplejas* se postula condiciones necesarias y suficientes para que un álgebra sea hipercompleja, basadas en hipótesis sobre las constantes de estructura, más aún se describen detalladamente los tipos más importantes de álgebras hipercomplejas. Finalmente, usando las constantes de estructura se describen representaciones matriciales $\mathscr{M}$ y $\mathscr{M}'$, por la derecha e izquierda respectivamente; las cuales son homomorfismos inyectivos

$$V \to \mathbb{R}^{n\times n},$$

donde V es un álgebra hipercompleja sobre $\mathbb{R}^n$. Dado que $\mathscr{M}$ y $\mathscr{M}'$ son iguales cuando el álgebra es conmutativa, se trabaja por facilidad solamente en ese caso y los ejemplos se concentran para el caso de números complejos generalizados y bicomplejos. La representación matricial de un número x, es la matriz $\mathscr{M}(x)$, a la que también se le da el nombre de característica, y de la cual se pueden deducir distintas propiedades. En efecto, se puede describir una magnitud $|x|_V$ (ver definición 2.12) en función del determinante de esta matriz, a las conjugaciones del número como soluciones de la ecuación característica $\det(\mathscr{M}(x) - Id \cdot t)$ y a los elementos invertibles como todos aquellos que tienen una matriz característica singular.

La segunda parte del capitulo dos, se basa en una exposición breve del cálculo fraccionario, centrándose en la integral y derivada de Riemann-Liouville y citando los resultados más importantes para el trabajo, los cuales que se encuentran en [9], [15], [17], [20], entre otros.

El tercer capítulo habla de la teoría del análisis hipercomplejo, el cual cabe recalcar se simplifica gracias a que se ha asumido conmtutatividad del álgebra hipercompleja, caso contrario la exposición es más detallada y laboriosa (ver [8] y [22]). Se hace un recuento de las principales características de la teoría para cuando el álgebra a tratar es $\mathbb{C}$, que no es otra cosa que el análisis complejo. Luego de ello, se postula el resultado principal para caracterizar a una función hipercompleja que admite una derivada, a las que se les bautiza como *analíticas* u *holomorfas*, enumerando las propiedades de esta derivada, que se conoce como hipercompleja. Estas condiciones son conocidas como *condiciones de Scheffers* y fueron demostradas en [21], la exposición presente formula estas condiciones de forma novedosa, usando la representación matricial $\mathscr{M}$ para afirmar así que toda función hipercompleja analítica tiene como jacobiano a una matriz característica. Se demuestra que las condiciones generalizadas de Cauchy-Riemann (véase [3]) son equivalentes a las de Scheffers, en la versión presentada, y como su nombre lo indica tienen como caso particular a las condiciones de Cauchy-Riemann en $\mathbb{C}$. En la última parte del capítulo se describe un resultado original que permite afirmar que las componentes de una función hipercompleja analítica, suficientemente regulares, admiten ser soluciones de $n-1$ ecuaciones diferenciales ordinarias: $\Delta_V^{(l)} = 0$, con $l = 1, \ldots, n-1$, donde V es un álgebra hipercompleja sobre $\mathbb{R}^n$ y n es un número natural; esto con analogía al hecho de que las componentes de una función holomorfa en $\mathbb{C}$, son soluciones de la ecuación de Laplace $\Delta = 0$. Además, en este resultado se ilustra la importancia de las conjugaciones de un número hipercomplejo, ya que permiten factorizar a los operadores diferenciales $\Delta_V^{(l)}$.

En el capítulo cuarto se hace una discusión detallada de los números hipercomplejos generalizados, clasificándolos y aplicando todos los conceptos de la teoría general, determinando así su magnitud, determinante y conjugados. Se propone un operador de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial}{\partial y} - i\frac{\partial}{\partial x},$$

que tiene en su núcleo a todas las funciones analíticas definidas en $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$. Se considera las diferencias presentadas con respecto al operador de Cauchy-Riemann usual que se estudia en el análisis complejo:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Adicionalmente, se determina el operador conjugado de Cauchy-Riemann y se lo propone como un sustituto de la derivada hipercompleja, ya que es su múltiplo. El énfasis en los números complejos generalizados se da para ilustrar la teoría y como podría generalizarse para los números bicomplejos y otros números hipercomplejos conmutativos.

Para terminar, el capítulo final se centra en definir funciones fraccionarias analíticas sobre un dominio cuadrangular Ω en $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$, usando como modelo lo realizado en [5]: definir un operador de Cauchy-Riemann fraccionario, que dependa de constantes r_0 y r_1 en el intervalo $(0,1)$ y estudiar las funciones que son parte de su núcleo. Al igual que en [14], lo cual motivó los estudios en [5] y [6], es de especial interés encontrar sucesiones de funciones polinomiales $(Z^n)_{n\in\mathbb{N}}$, que consten de funciones fraccionarias analíticas y que al aplicarles el operador conjugado de Cauchy-Riemann, bajen de grado, similarmente a como pasa con los polinomios $\frac{x^n}{n!}$. Los resultados de este capitulo construyen los polinomios deseados y además permiten discernir que, cuando $\beta^2 - 4\alpha = 0$, no siempre es posible encontrar polinomios con estas características que no sean todos iguales a cero. Este afán se da para que en trabajos futuros, funciones fraccionarias elementales y fraccionarias trigonométricas puedan ser definidas, en $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$, como series de potencias en los polinomios Z^n, trabajo que ya ha sido realizado en [6] para el álgebra $\mathbb{BC}$.

Capítulo 2

Preliminares del análisis y el álgebra

2.1. Fundamentos algebraicos

Se revisa conceptos preliminares acerca de estructuras algebraicas como son los anillos, álgebras hipercomplejas y de matrices; conceptos claves para la formulación teórica en los capítulos posteriores. Muchas de los resultados no tienen demostración, a menos que sean originales o se quiere recalcar su importancia. Durante todo este trabajo se entiende que $[\![1, n]\!]$ es el intervalo discreto $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ y $\mathbb{N}^+$ representa el conjunto de los números naturales $1, 2, 3, \ldots$

2.1.1. Anillos

Se hará uso de algunos resultados de la teoría de anillos en los capítulos siguientes. Las definiciones y demostraciones de los resultados se pueden encontrar en detalle en [13, Cap. 3].

DEFINICIÓN 2.1. *Un anillo unitario es un conjunto R armado de dos operaciones binarias*

$$\begin{aligned} +\colon V \times V &\longrightarrow V \\ (x, y) &\longmapsto x + y \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \cdot\colon V \times V &\longrightarrow V \\ (x, y) &\longmapsto x \cdot y, \end{aligned}$$

tal que R con la operación $+$ es un grupo abeliano, esto es, cumple:

1. *Asociatividad: $(x + y) + z = x + (y + z)$ para todo $x, y, z \in R$.*

2. *Conmutatividad:* $x + y = y + x$ para todo $x, y \in R$.

3. *Existencia de neutro aditivo:* Existe $0 \in R$ tal que $x + 0 = x$ para todo $x \in R$.

4. *Existencia de inverso aditivo:* Para todo $x \in R$ existe $-x$ tal que $x + (-x) = 0$.

Por otro lado, la operación $\cdot$ cumple:

1. *Asociatividad:* $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ para todo $x, y, z \in R$.

2. *Distributividad por la derecha e izquierda:* $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$, $(y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x$ para todo $x, y, z \in R$.

3. *Existencia de unidad:* Existe un elemento $1 \in R$ tal que $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ para todo $a \in R$.

A la operación $+$ se le llamará adición. En cambio, la operación $\cdot$ se conocerá como multiplicación. Un anillo unitario se dice *conmutativo* si $x \cdot y = y \cdot x$ para todo $x, y, \in R$.

DEFINICIÓN 2.2. *Un ideal en un anillo unitario R es un subconjunto U tal que:*

1. *Es un subgrupo de R con respecto a la adición, es decir $u + v \in U$ y también $-u \in U$, para todo $u, v \in U$.*

2. *Se cumple que $ux \in U$ y $xu \in U$, para todo $u \in U$ y $x \in R$.*

PROPOSICIÓN 2.1. *Dado un anillo unitario R y un ideal U se define el anillo cociente como el conjunto R partido por la relación de equivalencia $x \sim y$ si y solo si $x + (-y) \in U$. Es decir, es el conjunto*

$$R/U := \{x + U \ : \ x \in R\},$$

donde $x + U = y + U$ si $x - y \in U$. Además, se definen la adición y el producto como

$$(x + U) \ + \ (x' + U) = (x + x') + U,$$

$$(x + U) \ \cdot \ (x' + U) = (x \cdot x') + U.$$

Estas operaciones están bien definidas.

Demostración. Véase [13, Lema 3.6]. $\square$

DEFINICIÓN 2.3. *Un ideal $U \subsetneq R$, en un anillo unitario R, se dice que es maximal si para cualquier otro ideal $W \subset R$ se tiene que $U \subset W \subset R$ implica $W = R$ o $W = U$.*

PROPOSICIÓN 2.2. *Sea R un anillo unitario conmutativo y U un ideal en R, entonces U es un ideal maximal si y solo si R/U es un cuerpo.*

Demostración. Véase [13, Teo. 3.B]. □

El siguiente ejemplo es importante para discusiones futuras.

EJEMPLO 1. Dado un cuerpo K entonces el conjunto de polinomios, con coeficientes en K, en una variable x:

$$K[x] := \left\{ \sum_{i=0}^{n} k_i x^i \ : \ n \in \mathbb{N},\ k_i \in K \right\};$$

es un anillo unitario con la operación de suma de dos polinomios

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \quad q(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i;$$

$p(x) + q(x) = \sum_{i=0}^{\text{máx}(n,m)} (a_i + b_i) x^i$ y la multiplicación estará dada por

$$p(x) \cdot q(x) = \sum_{i=0}^{nm} c_i x^i,$$

donde $c_i = \sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k}$. La unidad está dada por el elemento neutro multiplicativo del cuerpo K, visto como polinomio constante. Más aún, es un anillo conmutativo y se conocerá como *anillo polinomial*.

PROPOSICIÓN 2.3. *Dado un anillo polinomial $K[x]$, entonces si $p(x) \in K[x]$, se tiene que*

$$\langle p(x) \rangle := \{ k p(x) \ : \ k \in K \}$$

es un ideal.

Adicionalmente, $\langle p(x) \rangle$ es un ideal maximal si y solo si $p(x)$ es irreducible en K, esto quiere decir que no existe elemento $a \in K$ tal que $p(a) = 0$.

Demostración. Véase [13, Lema 3.22]. □

Combinando la proposición 2.2 y la proposición 2.3, se obtiene:

PROPOSICIÓN 2.4. *Dado un cuerpo K, entonces el anillo cociente*

$$K[x]/\langle p(x)\rangle = \{q(x) + \langle p(x)\rangle\rangle :\ q(x) \in K[x]\}$$

es un cuerpo si y solo si $p(x)$ es irreducible en K.

2.1.2. Álgebras sobre espacios vectoriales

DEFINICIÓN 2.4. *Sea K un cuerpo, un álgebra sobre K es un K-espacio vectorial V, armado de una operación binaria*

$$\begin{aligned} \odot \colon V \times V &\longrightarrow V \\ (x,y) &\longmapsto x \odot y \end{aligned}$$

que cumple las siguientes propiedades:

1. *Distributiva por la izquierda: Para todo $x, y, z \in V$, se tiene que $x \odot (y+z) = x \odot y + x \odot z$.*
2. *Distributiva por la derecha: Para todo $x, y, z \in V$ se tiene que $(x+y) \odot z = x \odot z + y \odot z$.*
3. *Compatible con la multiplicación por escalar: Para todo $x, y \in V$ y $a \in K$ se tiene que $a(x \odot y) = (ax) \odot y = x \odot (ay)$.*

A la operación $\odot$ se le dice producto bilineal o, simplemente, producto del álgebra V.

DEFINICIÓN 2.5. *Sean V, W, álgebras sobre K. Un homomorfismo de álgebras es una aplicación K-lineal $T : V \to W$ tal que*

$$T(x \odot_V y) = T(x) \odot_W T(y)$$

para todo $x, y \in V$; donde $\odot_V$ y $\odot_W$ son los productos de V y W, respectivamente.

Un álgebra V se dice isomorfa a otra álgebra W (notado por $V \cong W$), si es que existe un homomorfismo de álgebras $T : V \to W$, que sea biyectivo.

DEFINICIÓN 2.6. *Una subálgebra de un álgebra V sobre K, es un K-subespacio vectorial U, tal que*

$$x \odot y \in U,$$

cuando $x, y \in V$.

DEFINICIÓN 2.7. *Un producto $\odot$, en un álgebra V, se dice*

- *Asociativo: Si para todo $x, y, z \in V$ se tiene que $x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z$.*

- *Conmutativo: Si para todo $x, y \in V$ se tiene que $x \odot y = y \odot x$.*

Respectivamente, se dirá que V es un álgebra asociativa o conmutativa.

Un elemento $e \in V$ se dice una unidad si $e \odot x = x \odot e = x$ para todo $x \in V$. Si es que existe una unidad en V entonces se dirá que esta es un álgebra unitaria.

Dada un álgebra unitaria V, entonces un elemento $x \in V$ se dice que tiene un inverso a la derecha (resp. a la izquierda) si es que existe $y \in V$ tal que $x \odot y = e$ (resp. $y \odot x = e$). Un elemento $x \in V$ se dice invertible si es que tiene un mismo inverso a la derecha como a la izquierda, es decir, existe $y \in V$ tal que $x \odot y = y \odot x = e$.

OBSERVACIÓN. De las definiciones, se observa que toda álgebra asociativa unitaria es un anillo unitario, donde la adición es la suma del espacio vectorial sobre el que está definido el álgebra, y la multiplicación es el producto $\odot$. De esta manera, todos los resultados de la subsección anterior son también ciertos para este tipo de álgebra. Un tratamiento más completo de la relación entre álgebras y anillos lo realiza Roman en [18].

Se puede comprobar fácilmente lo siguiente.

LEMA 2.5. *Si V es un álgebra y tiene una unidad e, entonces esta es única.*

Si $x \in V$ es invertible entonces tiene un único inverso $y \in V$. Se le llamará el inverso de x, y se lo escribe como x^{-1}.

Si es que V tiene dimensión finita entonces se fijará una base de la misma:

$$\mathscr{B} = \{v_1, \ldots, v_n\},$$

con $n = \dim(V)$. Así, cada elemento $x \in V$ es de la forma $x = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$, con $x_i \in K$ para todo $i \in [\![1, n]\!]$.

EJEMPLO 2.

- El espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ es un álgebra sobre $\mathbb{R}$, con el producto cruz de vectores $\times$. Este producto no es asociativo ni conmutativo y tampoco tiene unidad. Su dimensión es 3.

- Dado un cuerpo K, entonces el espacio vectorial $K^{n \times n}$ de matrices cuadradas $n \times n$ con coeficientes en K, es un álgebra sobre K. El producto de esta álgebra está dado por la multiplicación usual de matrices. Es asociativo, tiene unidad (dada por la matriz identidad), pero no necesariamente es conmutativo. Su dimensión es n^2.

- Dado un cuerpo K, el conjunto de polinomios con coeficientes en K, en una variable x:
$$K[x] = \left\{ \sum_{i=0}^{n} k_i x^i \ : \ n \in \mathbb{N},\ k_i \in K \right\};$$
es un álgebra sobre K. El producto está dado por el producto entre polinomios, considerando la regla $x^i \odot x^j = x^{i+j}$. ES asociativo, tiene unidad (dado por el elemento neutro multiplicativo del cuerpo K, visto como polinomio constante) y conmutativo. Es de dimensión infinita.

- Dado un K-espacio vectorial V, entonces el espacio de los operadores K-lineales $L : V \to V$, denotado por $\mathscr{L}_K(V)$, es un álgebra sobre K. El producto está dado por la composición de operadores. El operador identidad $i : V \to V$, con $i(x) = x$ para todo $x \in V$, será la unidad. Es asociativo pero no conmutativo. Es de dimensión infinita.

- En el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ podemos definir un estructura de álgebra sobre $\mathbb{R}$, por medio del producto
$$(x_1, x_2) \odot (y_1, y_2) := (x_1 y_1 - x_2 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1).$$
El producto es asociativo, tiene unidad (dado por el vector $(1, 0)$) y es conmutativo. La dimensión de esta álgebra es 2 y será conocida como *álgebra de los números complejos*, denotada por $\mathbb{C}$. Usualmente a un dupla $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ se la escribe como $x_1 + ix_2$ (de esta manera: $i = (0, 1)$, $i^2 = -(1, 0) = -1$) y el producto se leerá como
$$(x_1 + ix_2)(y_1 + iy_2) = x_1 y_1 - x_2 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$
Por todas las propiedades anteriores y dado que todo elemento distinto de cero tiene un inverso, se puede concluir que $\mathbb{C}$ es también un cuerpo.

DEFINICIÓN 2.8. *[19] Sea K un anillo unitario. Una matriz de matrices $n \times n$ en K es una familia de escalares $\{H_{ijk}\} \subset K$ con $i, j, k \in [\![1, n]\!]$ tal que para cada $i \in [\![1, n]\!]$ se tiene que $(H_{ijk})_{jk} \in K^{n \times n}$.*

LEMA 2.6. *Sea V un K-espacio vectorial de dimensión $n \in \mathbb{N}^+$, $\mathscr{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V y $H = \{H_{ijk}\}$ una matriz de matrices $n \times n$, entonces existe un único* *producto $\odot$ que hace de V un álgebra y tal que verifica*

$$v_i \odot v_j = \sum_{k=1}^{n} H_{ijk} v_k \qquad \forall i,j \in [\![1,n]\!] \tag{2.1}$$

Demostración. Supongamos que existe otro producto $\otimes$ que hace de V un álgebra y que cumple (2.1), entonces se puede ver que para todo $x, y \in V$:

$$\begin{aligned} x \otimes y &= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i\right) \otimes \left(\sum_{j=1}^{n} y_j v_j\right) = \sum_{i=1}^{n} (x_i v_i) \otimes \left(\sum_{j=1}^{n} y_j v_j\right), \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i \left(v_i \otimes \left(\sum_{j=1}^{n} y_j v_j\right)\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i (v_i \otimes (y_j v_j)), \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j (v_i \otimes v_j) = \sum_{i,j,k=1}^{n} x_i y_j H_{ijk} v_k, \end{aligned}$$

donde hemos usado (2.1) y las tres propiedades del producto bilineal, repetidamente. De manera análoga, también se cumple:

$$x \odot y = \sum_{i,j,k=1}^{n} x_i y_j H_{ijk} v_k; \tag{2.2}$$

por tanto $\odot$ y $\otimes$ coinciden.

Se ha probado así que toda matriz de matrices H y toda base $\mathscr{B}$ determinan un único producto bilineal $\odot$ en V tal que cumple (2.1). Más aún, se sigue que todo producto bilineal definido en un espacio vectorial de dimensión finita es descrito por una ecuación de la forma (2.2). $\square$

OBSERVACIÓN. A los escalares $H_{ijk} \in K$ que determinan el producto bilineal en V, por medio de (2.1) se les llamará *constantes de estructura*.

OBSERVACIÓN. Toda álgebra sobre K, de dimensión finita n, es isomorfa (como espacio vectorial) a K^n, por medio de la aplicación K-lineal:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i v_i \longmapsto \sum_{i=1}^{n} x_i e_i,$$

donde e_i es el i-ésimo vector canónico en $\mathbb{R}^n$:

$$e_i := (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{i\text{-ésima posición}}, 0, \ldots, 0).$$

En adelante, se asumirá por defecto a K^n (junto con la base canónica) para referirnos a una álgebra sobre K de dimensión n. Por convención, se asume que el primer vector de la base canónica:

$$(1, 0, \ldots, 0)$$

es la unidad, si es que esta existe, y se representará por el símbolo 1. Además, para simplificar la notación, al producto $x \odot y$ se lo escribirá como la yuxtaposición xy, siempre que no haya riesgo de confusión.

EJEMPLO 3. Por el lema 2.6, un álgebra de dimensión finita se puede describir solamente sabiendo cómo es el producto en los elementos de la base, por medio de la ecuación (2.1).

- En el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ se construye un álgebra sobre $\mathbb{R}$. Para ello, se escribe una cuádrupla $(x_1, x_2, x_3, x_1) \in \mathbb{R}^4$ como

  $$x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4.$$

  Es decir $1 = (1, 0, 0, 0)$, $i = (0, 1, 0, 0)$, $j = (0, 0, 1, 0)$ y $k = (0, 0, 0, 1)$. Ya que 1 debe ser la unidad, se satisface:

  $$i1 = 1i = i, \quad j1 = 1j = j, \quad k1 = 1k = k.$$

  Adicionalmente, se cumple para los otros elementos de la base que

  $$i^2 = j^2 = -1$$

  y

  $$ij = k, \quad ji = -k.$$

  Para extender el producto a todos los elementos $x = x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4$, se asume la propiedad distributiva. Esto define un producto asociativo y no conmutativo. Se verifica que todo elemento tendrá un inverso. La dimensión del álgebra es 4 y será conocida como *álgebra de los cuaterniones*, denotada por $\mathbb{H}$. Como no es conmutativo, no es un cuerpo.

- En $\mathbb{R}^4$, por otro lado existe otra estructura de álgebra muy similar, conocida como *álgebra de los bicomplejos*, denotada por $\mathbb{BC}$, la cual cumple en cambio que

  $$i^2 = j^2 = -1$$

  y

  $$ij = ji = k.$$

Esto define un producto que es asociativo y conmutativo. Sin embargo, no todos los elementos son invertibles y tampoco es un cuerpo.

2.1.3. Álgebras hipercomplejas

El siguiente concepto, como se lo presenta, se puede encontrar en [19], [23] y [25].

DEFINICIÓN 2.9. *Un álgebra V sobre el cuerpo $\mathbb{R}$, que sea unitaria, asociativa y de dimensión finita se dice que es un sistema de números hipercomplejos o álgebra hipercompleja.*

Se presenta un criterio para verificar que un álgebra es hipercompleja.

PROPOSICIÓN 2.7. *Un álgebra de dimensión n, determinada por una matriz de matrices $H = \{H_{ijk}\}$, es un álgebra hipercompleja si y solo si para todo $i, j, m, l \in [\![1, n]\!]$ se cumple que*

$$\left.\begin{aligned} &H_{1jk} = \delta_{jk}, \\ &H_{i1k} = \delta_{ik}, \\ &\textstyle\sum_{k=1}^{n} H_{jmk}H_{ikl} = \sum_{k=1}^{n} H_{ijk}H_{kml}. \end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

Demostración. Como se había convenido, se puede suponer que un álgebra hipercompleja es $\mathbb{R}^n$, junto con la base canónica $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Es sencillo, usando esta base, notar que e_1 es la unidad y el producto es asociativo si y solo si para todo $i, j, m \in [\![1, \ldots, n]\!]$ se tiene que

$$\left.\begin{aligned} e_1 e_j &= e_j, \\ e_i e_1 &= e_i, \\ e_i(e_j e_m) &= (e_i e_j)e_m. \end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

Luego, usando (2.1) tenemos que

$$e_1 e_j = \sum_{k=1}^{n} H_{1jk} e_k = e_j,$$

por tanto $H_{1jk} = \delta_{jk}$. De forma similar se obtienen la segunda y tercera condición.

□

El siguiente resultado es inmediato.

LEMA 2.8. *Un álgebra hipercompleja es conmutativa si cumple* (2.3) *y se tiene que* *para todo* $i, j, k \in [\![1, n]\!]$*:*

$$H_{ijk} = H_{jik}. \tag{2.5}$$

EJEMPLO 4.

- Usando las ecuaciones (2.3) o (2.4) se puede verificar que $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ y $\mathbb{BC}$ son álgebras hipercomplejas. Por ejemplo, en $\mathbb{C}$ se tiene que $1i = i$, $i1 = 1$, $1(1i) = (11)i$, $1(ii) = (1i)i$, $(ii)i = i(ii)$, lo cual prueba (2.4).

  Alternativamente, $\mathbb{C}$ es determinada por una matriz de matrices 2×2, que consta de $2^3 = 8$ números. A saber:

  $$H_{111} = 1, \quad H_{112} = 0, \quad H_{121} = 0, \quad H_{122} = 1,$$

  $$H_{211} = 0, \quad H_{212} = 1, \quad H_{221} = -1, \quad H_{222} = 0;$$

  de donde se deduce (2.3). Los casos para $\mathbb{H}$ y $\mathbb{BC}$ son similares.

- Fijando dos escalares reales α y β, se considera a $\mathbb{R}^2$ como un álgebra sobre $\mathbb{R}$, determinada por las constantes de estructura:

  $$H_{111} = 1, \quad H_{112} = 0, \quad H_{121} = 0, \quad H_{122} = 1,$$

  $$H_{211} = 0, \quad H_{212} = 1, \quad H_{221} = -\alpha, \quad H_{222} = \beta.$$

  Es decir, la unidad es $(1, 0)$ y el vector $i := (0, 1)$ cumple que

  $$i^2 = -\alpha - \beta i.$$

  Al igual que antes, se comprueba que $\mathbb{R}^2$ con este producto es un álgebra hipercompleja y es además conmutativa. Se los conoce como *números complejos generalizados*, o también *números complejos en* 2 *dimensiones* y denotados por $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$.

  El nombre se debe a que el álgebra de los números complejos es un caso particular de los números complejos generalizados, pues $\mathbb{C} = \mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ con $\alpha = 1$ y $\beta = 0$. Serán el álgebra en el que este trabajo se centrará y serán explorados a fondo más adelante.

- Las álgebras de Clifford son famosas por sus aplicaciones a la física, véase [1], son una generalización de las álgebras ya vistas. Se construyen de la siguiente manera: dado $n \in \mathbb{N}$, se considera el espacio $\mathbb{R}^{2^n}$, en donde cada elemento de la base canónica, se lo nombra como e_A, donde $A = \emptyset$ o $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_s\}$

con $s \in [\![1, n]\!]$, $a_i \in [\![1, n]\!]$ y $a_i < a_{i+1}$ para todo índice i. Es decir, la base está escrita como

$$e_0,\ e_1,\ e_2,\ \ldots\ ,e_n,\ e_{12},\ e_{13},\ \ldots\ ,\ e_{n-1\,n},\ \ldots\ ,\ e_{12\ldots n}.$$

En lo anterior, se ha simplificado la notación con $0 = \emptyset$ y

$$a_1 a_2 \ldots a_s = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}.$$

El producto está definido como

$$e_A e_B = (-1)^{|A \cap B|} (-1)^{p(A,B)} e_{A \triangle B},$$

donde $|\cdot|$ es la cardinalidad de un conjunto, $\triangle$ es la suma simétrica de conjuntos y $p(A, B) = \sum_{l \in B} |\{i \in A \ : \ i > l\}|$. Se comprueba que son álgebras hipercomplejas pero no necesariamente son conmutativas. En particular, se tiene que e_0 es la unidad y que para todo $i, j \in [\![1, n]\!]$:

$$\begin{aligned} e_i^2 &= -1, \\ e_i e_j &= -e_j e_i, \quad \text{para todo } i \neq j. \end{aligned}$$

Además, $e_{a_1} e_{a_2} \ldots e_{a_s} = e_{a_1 a_2 \ldots a_s}$ para $1 \leq a_1 < a_2 < \ldots a_s \leq n$. Las álgebras de Clifford se denotan como $\mathscr{A}_n$ o $\mathscr{C}\ell_n$ y verifican que $\mathscr{A}_0 \cong \mathbb{R}$, $\mathscr{A}_1 \cong \mathbb{C}$ y $\mathscr{A}_2 \cong \mathbb{H}$. Para más información acerca de las álgebras de Clifford se puede revisar [4] y [7].

DEFINICIÓN 2.10. *Un elemento $x \in V$, con $x \neq 0$, se dice un divisor de cero por la izquierda (resp. a la derecha), si $xy = 0$ (resp. $yx = 0$) para algún $y \neq 0$. Es un divisor de cero, si lo es por la derecha e izquierda.*

LEMA 2.9. *En un álgebra hipercompleja, un número distinto de cero es invertible si y solamente si no es un divisor de cero.*

Demostración. Primero se prueba una afirmación preliminar: en un álgebra hipercompleja, un elemento es un divisor de cero por la izquierda si y solo si es un divisor de cero por la derecha; por tanto, si y solo si es un divisor de cero.

En efecto, sea V un álgebra hipercompleja y $x \in V$ tal que no es un divisor de cero por la izquierda. Se considera la aplicación lineal $T : V \to V$, tal que $T(y) = xy$ para todo $y \in V$. Se observa que $T(y) = 0$ implica que $y = 0$, pues x no es divisor de cero por la izquierda, por tanto T es inyectiva. Ya que V es de dimensión finita se tiene que T es sobreyectiva. Por tanto, como V es unitaria, existe $u \in V$ tal que $xu = 1$, donde 1 es la unidad de V. Se concluye entonces que x no es un divisor de cero por la derecha, porque si $bx = 0$, entonces $b = bxu = 0$. El recíproco se prueba de manera análoga, probando la afirmación.

Para demostrar el enunciado del lema, se supone $a \in V$ es invertible y que $ab = 0$. Entonces, $b = a^{-1}ab = 0$, por tanto no es un divisor de cero por la izquierda; luego, por la afirmación demostrada antes, no es un divisor de cero.

Para probar la dirección opuesta, sea ahora a un elemento de V que no es un divisor de cero, esto es equivalente a que no es un divisor de cero por la izquierda. De esta manera, $ab = 0$ implica que $b = 0$. Por reducción al absurdo, supongamos que a no es invertible. Se considera el conjunto

$$\{1, a, a^2, a^3, \ldots, a^n\},$$

donde n es la dimensión de V. Es linealmente dependiente en V, por tanto existen constantes reales $k_0, \ldots, k_n$, no todas iguales a cero, tales que

$$k_0 + k_1 a + k_2 a^2 + \cdots + k_n a^n = 0.$$

Es decir, a es raíz del polinomio $p(t) \in \mathbb{R}[t]$, con $p(t) = k_0 + k_1 t + k_2 t^2 + \cdots + k_n t^n$. Sea $q(t) = r_0 + r_1 t + \cdots + r_m t^m \in \mathbb{R}[t]$, con $m \leq n$, el polinomio de menor grado tal que $q(a) = 0$. El polinomio minimal existe pues se demuestra que es un factor del polinomio $p(t)$. Se tiene que $r_0 = 0$, porque si no fuera así entonces

$$-\frac{1}{r_0}(r_1 + r_2 a \cdots + r_m a^{m-1})$$

es un inverso para a, lo cual contradice el hecho de que a no es invertible. Por tanto $q(t) = ts(t)$, para algún polinomio $s(t)$. Así $0 = as(a)$ y por hipótesis, dado que a no es divisor de cero por la izquierda, se tiene que $s(a) = 0$. Esto es una contradicción pues $s(t)$ es un polinomio de menor grado que $q(t)$, tal que a es una de sus raíces. Se concluye que lo supuesto era falso y a es invertible. □

Por el lema 2.9, para cualquier álgebra hipercompleja se tiene que la operación división:

$$\frac{x}{y} := xy^{-1}$$

solo está bien definida si y es distinto de cero y no es un divisor de cero.

2.1.4. Representación matricial

DEFINICIÓN 2.11. *Dada V un álgebra sobre K, se define una representación de V como un homomorfismo de álgebras*

$$\mu : V \to \mathscr{L}_K(V).$$

Se dice que la representación es fiel si es que tal homomorfismo es inyectivo. Por otro lado, se dice que V tiene una representación matricial si es que existe un homomorfismo de álgebras inyectivo

$$\mathscr{M} : V \to K^{n\times n},$$

para algún $n \in \mathbb{N}$.

LEMA 2.10. *Toda álgebra hipercompleja tiene una representación fiel y una representación matricial.*

Demostración. Para probar la existencia de la representación fiel, se considera la función

$$\mu : V \to \mathscr{L}_{\mathbb{R}}(V),$$

dada por $\mu(x) = \mu_x$, donde $\mu_x(y) = xy$ para todo $y \in V$. Es claro que $\mu_x \in \mathscr{L}_{\mathbb{R}}(V)$ para todo $x \in V$, además por la bilinealidad del producto en V, se verifica que μ es una aplicación $\mathbb{R}$-lineal. La propiedad $\mu_{xy} = \mu_x \circ \mu_y$ es consecuencia inmediata de la asociatividad del producto. Por lo tanto, μ es un homomorfismo de álgebras. Se tiene que μ inyectiva ya que si $\mu_x = \mu_{x'}$ entonces, en particular $x1 = x'1$ y así $x = x'$. Cabe notar que se puede definir otra representación fiel $\mu' : V \to \mathscr{L}_{\mathbb{R}}(V)$, donde ahora $\mu'_x(y) = yx$.

Para la existencia de representaciones matriciales, sea n la dimensión de V y se considera la función inyectiva

$$i : \mathscr{L}_{\mathbb{R}}(V) \to \mathbb{R}^{n\times n},$$

dada por $i(T) = [T]_{\mathscr{C}}$, donde $[T]_{\mathscr{C}}$ es la matriz asociada a la aplicación lineal T con respecto a la base canónica $\mathscr{C} = \{e_1, \ldots, e_n\}$. Especificamente, si es que $T(e_j) = \sum_{i=1}^{n} T_{ij}e_i$, entonces $[T]_{\mathscr{C}}$ es la matriz $(T_{ij})_{i,j=1}^{n}$. La aplicación i es lineal y un homomorfismo. De esta manera, $\mathscr{M} := i \circ u$ y $\mathscr{M}' := i \circ u'$ son representaciones matriciales de V. □

Al homomorfismo $\mathscr{M}$, descrito en la anterior demostración, se lo conoce como *representación matricial por la izquierda* y a $\mathscr{M}'$ como *representación matricial por la derecha*. El siguiente resultado da una descripción explícita de estas representaciones.

PROPOSICIÓN 2.11. *Sea V un álgebra hipercompleja de dimensión n. La representación matricial por la derecha:*

$$\mathscr{M} : V \to \mathbb{R}^{n\times n},$$

está dada por

$$\mathscr{M}(x) = (X_{kj})_{k,j=1}^{n}; \tag{2.6}$$

donde $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ y $X_{kj} = \sum_{i=1}^{n} H_{ijk} x_i$.

Alternativamente, para la representación matricial por la izquierda, se tiene que

$$\mathscr{M}'(x) = (X'_{kj})_{k,j=1}^{n}; \tag{2.7}$$

donde $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ y $X'_{kj} = \sum_{i=1}^{n} H_{jik} x_i$.

Demostración. Fijamos un elemento $x \in V$ y se define la matriz $A(x) = (X_{kj})_{k,j=1}^{n}$. Sea ahora $y \in V$ cualquiera, de la ecuación (2.2) se deduce que

$$xy = A(x)y,$$

donde la multiplicación anterior es de una matriz con un vector. Ahora, $\mu_x(y) = xy$, por lo tanto se satisface que $\mathscr{M}(x)y = i \circ u_x(y) = A(x)y$. Puesto que y es arbitrario, $\mathscr{M}(x)$ cumple la ecuación (2.6). Similarmente se tiene para $\mathscr{M}'$, notando que si $B(x) = (X'_{kj})_{k,j=1}^{n}$, entonces

$$yx = B(x)y.$$

$\square$

OBSERVACIÓN. Obsérvese que si V es un álgebra hipercompleja conmutativa, entonces las dos representaciones matriciales coinciden, es decir, $\mathscr{M} = \mathscr{M}'$.

De ahora en adelante se asumirá que todas las álgebras hipercomplejas son conmutativas y a $\mathscr{M}$ se la dirá la representación matricial del álgebra.

Dado que $\mathscr{M}$ es un homomorfismo de álgebras inyectivo entonces, si $\mathscr{M}(V)$ es su imagen directa, se tiene que V es isomorfo a ella:

$$V \cong \mathscr{M}(V),$$

por medio de la asignación $x \mapsto \mathscr{M}(x)$. El conjunto $\mathscr{M}(V)$ es una subálgebra de

$\mathbb{R}^{n\times n}$ y sus elementos se llamarán *matrices características*.

Si no se asume conmutatividad, los conceptos a continuación tienen versiones similares usando la representación por la derecha y por la izquierda, como por ejemplo se presenta en [22].

DEFINICIÓN 2.12. *Dado un elemento x en un álgebra hipercompleja V, entonces se define su* magnitud *como el número*

$$|x|_V := |\det(\mathscr{M}(x))|^{1/n},$$

donde $\det$ *es el determinante y n es la dimensión de V.*

La representación matricial permite caracterizar a los elementos invertibles.

PROPOSICIÓN 2.12. *Para cualesquier elementos x, y en un álgebra hipercompleja V, se cumple que*

$$|xy|_V = |x|_V|y|_V. \tag{2.8}$$

Además, un elemento x es invertible cuando $|x|_V \neq 0$. También se tiene que x es un divisor de cero, o es igual a cero, si $|x|_V = 0$.
Adicionalmente, si x es invertible, su inverso estará dado por

$$x^{-1} = \frac{x'}{|x|^n \operatorname{sgn}(\det(\mathscr{M}(X)))}, \tag{2.9}$$

donde x' es tal que $\mathscr{M}(x')$ es la matriz adjunta $\operatorname{adj}(\mathscr{M}(x))$ *y* sgn *es la función signo.*

Demostración. Como el determinante es una función multiplicativa, es decir $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ para todo $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$; y como $\mathscr{M}$ es un homomorfismo de álgebras, se deduce directamente 2.8.

Para probar (2.9), se recuerda que $\mathscr{M}(xy) = \mathscr{M}(x)\mathscr{M}(y)$, por ser homomorfismo de álgebras, de donde se tiene que $\mathscr{M}(1) = Id$ y $\mathscr{M}(0) = 0_{\mathbb{R}^{n\times n}}$. Aquí Id es la matriz identidad. Sin pérdida de generalidad, se asume que $x \neq 0$, si x es invertible, entonces existe $xx^{-1} = 1$; por tanto $|x|_V|x|_V^{-1} = 1$ y $|x|_V \neq 0$. Si $|x|_V = 0$ entonces x no es invertible y, por el lema 2.9, es un divisor de cero.

Por último, para probar la fórmula (2.9), si se supone que $\mathscr{M}(x)$ es una matriz invertible, entonces su inversa estará dada por

$$\frac{1}{\det(\mathscr{M}(x))}\operatorname{adj}(\mathscr{M}(x)).$$

Luego, como la inversa es única y $\mathscr{M} : V \to \mathscr{M}(V)$ es un isomorfismo, se obtiene: $\mathscr{M}(x^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathscr{M}(x))}\mathrm{adj}(\mathscr{M}(x))$, de donde se deduce de forma directa lo requerido. □

La anterior proposición prueba que todas los elementos invertibles tienen como representación matricial, una matriz invertible o no singular, por otro lado todos los divisores de cero estarán representados por una matriz singular. Por esta razón al conjunto de los divisores de cero, junto al cero, se lo puede escribir como

$$Sing_V.$$

De forma directa de la proposición 2.12 se sigue el siguiente resultado.

LEMA 2.13. *Dados V un álgebra hipercompleja, $x \in Sing_V$, $y \in V$; entonces*

$$xy \in Sing_V.$$

EJEMPLO 5. Sea $\mathbb{C}$ el álgebra de los números complejos y $z = x + iy$ en $\mathbb{C}$, entonces por la ecuación (2.6) se cumple que

$$\mathscr{M}(z) = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$$

y por consiguiente $|z|_{\mathbb{C}} = \sqrt{x^2 + y^2} = \|z\|$. Es así como en el caso de los números complejos, la magnitud y el módulo coinciden. Más aún, como el módulo es una norma, no existen divisores de cero y $Sing_{\mathbb{C}} = \{0\}$.

Además, para cada número $z = x + iy$ existe su *conjugado* $\overline{z}$ definido como $x - iy$ y cumple la importante propiedad:

$$z\overline{z} = \overline{z}z = x^2 + y^2 = |x|^2_{\mathbb{C}}$$

Por tanto, $\overline{z} = z'$ usando la notación de la ecuación (2.9), la cual a su vez toma la familiar forma:

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{\|z\|^2}.$$

En el anterior ejemplo se ve que el conjugado de un número complejo coincide con aquel número que tiene como representación matricial a la matriz conjugada. Sin embargo, para generalizar a una dimensión mayor a dos, se hará uso del siguiente resultado, cuya demostración se encuentra en [3, Teorema 2.8].

TEOREMA 2.14. *Dado x un elemento de un álgebra hipercompleja V, entonces su* *polinomio característico $P_x(t) \in \mathbb{R}[t]$, está definido como*

$$P_x(t) := \det(\mathscr{M}(x) - Id \cdot t), \tag{2.10}$$

donde $Id \cdot t$ es la matriz diagonal:

$$\begin{pmatrix} t & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & t \end{pmatrix}.$$

Además, existen n soluciones en $\mathscr{M}(V)$ para la ecuación $P_x(A) = 0$. En particular, por el teorema de Cayley-Hamilton: $P_x(\mathscr{M}(x)) = 0$; las otras $n-1$ soluciones se llamarán conjugaciones principales, *notadas como $\mathscr{M}({}^k\overline{x})$, con $k \in [\![1, n-1]\!]$, y cumplen con que*

$$(x)({}^1\overline{x})({}^2\overline{x})\dots({}^{n-1}\overline{x}) = \det(\mathscr{M}(x)).$$

OBSERVACIÓN. Es evidente que también se tendrá

$$(x)({}^1\overline{x})({}^2\overline{x})\dots({}^{n-1}\overline{x}) = |x|_V^n \operatorname{sgn}(\det(\mathscr{M}(x))).$$

EJEMPLO 6. Dado un número $z = a + bi + cj + dk$ en el álgebra de los números bicomplejos $\mathbb{BC}$, su representación matricial está dada por

$$\mathscr{M}(z) = \begin{pmatrix} a & -b & -c & d \\ b & a & -d & -c \\ c & -d & a & -b \\ d & c & b & a \end{pmatrix}. \tag{2.11}$$

El determinante es:

$$\begin{aligned} \det(\mathscr{M}(z)) =& |z|_{\mathbb{BC}}^4 \operatorname{sgn}(\det(\mathscr{M}(x))), \\ =& a^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 - 2a^2d^2 + 8abcd + \\ & b^4 - 2b^2c^2 + 2b^2d^2 + c^4 + 2c^2d^2 + d^4. \end{aligned}$$

En [16, Sec. 1.3] se definen tres conjugaciones para un número bicomplejo:

$$\overline{z} = a - bi + cj - dk,$$

$$z^\dagger = a + bi - cj - dk,$$

$$z^* = a - bi - cj + dk.$$

Se puede comprobar que, en efecto: $z\,\bar{z}\,z^{\dagger}\,z^{*} = \det(\mathscr{M}(z))$.

2.2. Cálculo fraccionario

El calculo fraccionario es una generalización del cálculo ordinario, en donde los operadores diferenciales

$$\frac{d}{dx^n}$$

están definidos solo para $n \in \mathbb{N}$. La idea general es extender este operador tanto para valores reales positivos, como negativos, siempre y cuando se considere el tipo correcto de funciones. Para lograr lo propuesto se establece en primer lugar una integral fraccionaria.

2.2.1. Integral fraccionaria de Riemann-Liouville

Durante esta sección se hace referencia a las funciones Riemann-integrables, Lebesgue-integrables, espacios de Lebesgue L^p y espacios de funciones n veces continuamente diferenciables C^n. Su tratamiento más detallado se puede encontrar en cualquier libro de análisis real, como en [12].

Sea f una función Riemann-integrable en un intervalo real finito $[x_0, x_1]$. Entonces se define el operador integral:

$$I_{x_0} f(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

para todo $x \in [x_0, x_1]$. Nótese que este operador depende de un punto base x_0.
El n-ésimo operador integral $I_{x_0}^n$ es definido inductivamente como

$$I_{x_0}^n = I_{x_0}^{n-1} I_{x_0}, \qquad I_{x_0}^1 = I_{x_0}, \qquad I_{x_0}^0 = Id;$$

donde Id es la aplicación identidad $f \mapsto f$.
La fórmula de Cauchy para integrales iteradas permite tener una expresión para $I_{x_0}^n$ aplicada a funciones continuas, la cual se demuestra fácilmente por inducción y usando la formula integral de Leibniz (véase [20, Ec. 2.16]).

LEMA 2.15. *Si $f \in C[x_0, x_1]$, entonces se tiene para todo $x \in [x_0, x_1]$:*

$$I_{x_0}^n f(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_{x_0}^{x} (x-t)^{n-1} f(t)dt,$$

donde $\Gamma(n) = (n-1)!$ *para todo* $n \in \mathbb{N}^+$*; Aquí* Γ *es la función gamma, definida para todo* $z \in \mathbb{C}$ *con parte real positiva, como*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^t dt.$$

Usando el anterior lema y la función gamma, se motiva el siguiente concepto, usado en [9], [15], [17] y [20].

DEFINICIÓN 2.13. *Dada una función* $f : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ *Riemann-integrable, se define la integral fraccionaria de Riemann-Liouville* de orden $r \in \mathbb{R}^+$*, como*

$$I_{x_0}^r f(x) = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_{x_0}^x (x-t)^{r-1} f(t) dt,$$

y $x \in [x_0, x_1]$.

Algunas propiedades de la integral fraccionaria de Riemann-Liouville se enuncian a continuación y sus demostraciones se pueden encontrar en [9].

LEMA 2.16. *Si* $f \in L^1[x_0, x_1]$*, entonces para todo* $r > 0$ *se tiene que* $I_{x_0}^r f(x)$ *existe para c.t.p.* $x \in [x_0, x_1]$*, además* $I_{x_0}^r f \in L^1[x_0, x_1]$.

Demostración. En [9, Teo 2.1]. □

Por lo anterior, para todo $r > 0$ el operador

$$I_{x_0}^r : L^1[x_0, x_1] \to L^1[x_0, x_1]$$

está bien definido y es rutinario comprobar que es lineal.

LEMA 2.17. *Si* $r, s > 0$ *y* $f \in L^1[x_0, x_1]$*, entonces se cumple que*

$$I_{x_0}^r I_{x_0}^s f = I_{x_0}^{r+s} f = I_{x_0}^s I_{x_0}^r f$$

c.t.p. en $[x_0, x_1]$*. Si* $f \in C[x_0, x_1]$*, entonces la igualdad es para todo punto en* $[x_0, x_1]$.

Demostración. En [9, Teo 2.4]. □

EJEMPLO 7. Sea $f(x) = (x - x_0)^s$ con $s > -1$ y $x \neq x_0$. Entonces para todo $r > 0$ se tiene que

$$I_{x_0}^r f(x) = \frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(r+s+1)} (x - x_0)^{r+s}. \tag{2.12}$$

Para comprobarlo, se observa que

$$I_{x_0}^r f(x) = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_{x_0}^{x} (x-t)^{r-1}(t-x_0)^s dt,$$

de donde, usando la sustitución $y = \frac{t-x}{x-x_0} + 1$, se cumple que

$$\begin{aligned} I_{x_0}^r f(x) &= \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^1 ((1-y)(x-x_0))^{r-1}((y)(x-x_0))^s (x-x_0)dy \\ &= \frac{(x-x_0)^{r+s}}{\Gamma(r)} \int_0^1 (1-y)^{r-1} y^s dy. \end{aligned}$$

Adicionalmente se tiene, como $s > -1$, que

$$\int_0^1 (1-y)^{r-1} y^s dy = \frac{\Gamma(r)\Gamma(s+1)}{\Gamma(r+s+1)},$$

lo cual permite obtener (2.12).

Nótese que como $g(x) = (x-x_0)^l$ con $l > -1$ es continuo en $[x_0, x_1]$, entonces pertenece a $L^1[x_0, x_1]$, con lo cual el lema 2.17 se cumple. Esto también se puede calcular directamente de la ecuación (2.12). En particular, tomando $x_0 = 0, r = s = \frac{1}{2}$ y $l = 1$ se tiene que

$$I_0^{\frac{1}{2}} x = \frac{1}{\Gamma(\frac{5}{2})} x^{3/2},$$

donde $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$ y

$$I_0^1(x) = I_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\Gamma(\frac{5}{2})} x^{3/2} \right) = \frac{x^2}{2}.$$

TEOREMA 2.18. *Sea $r > 0$ y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente en $C[x_0, x_1]$ (converge uniformemente), entonces $(I_{x_0}^r f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en $C[x_0, x_1]$ y además*

$$\left(I_{x_0}^r \left(\lim_{n\to\infty} f_n \right) \right)(x) = \left(\lim_{n\to\infty} I_{x_0}^r f_n \right)(x)$$

para todo $x \in [x_0, x_1]$.

Demostración. En [9, Teo 2.7]. □

TEOREMA 2.19. *Sea $f \in L^p[x_0, x_1]$ con $1 \le p < \infty$ y $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números no negativos, con límite r. Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} I_{x_0}^{r_n} f = I_{x_0}^r f$$

en $L^p[x_0, x_1]$.

Demostración. En [9, Teo 2.9]. □

OBSERVACIÓN. El teorema anterior no necesariamente se cumple con convergencia en $C[x_0, x_1]$. Por ejemplo, sea $f = 1$, $r_n = 1/n$ y $r = 0$. Entonces se cumple que

$$I_{x_0}^{r_n} f(x_0) = 0,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Pero $I_{x_0}^{r} f(x_0) = 1$, por lo tanto $I_{x_0}^{r_n} f$ no converge puntualmente; luego, tampoco converge en $C[x_0, x_1]$.

2.2.2. Derivada fraccionaria de Riemann-Liouville

Hasta ahora se ha generalizado el operador integral, para hacer lo mismo con el operador derivada se nota que si $f \in C^n[x_0, x_1]$, entonces:

$$D^n f = D^m I_{x_0}^{m-n} f,$$

para todo $m, n \in \mathbb{N}^+$ con $m > n$, donde $D^n = \frac{d^n}{dx^n}$, es decir, es la n-ésima derivada. Esta es la inspiración para definir la derivada de orden arbitrario de la siguiente manera.

DEFINICIÓN 2.14. *Dada una función $f : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrable, se define la derivada fraccionaria de Riemman-Liouville, de orden $r \in \mathbb{R}^+$, como*

$$D_{x_0}^r f(x) := D^n I_{x_0}^{n-r} f(x) = \frac{d^n}{dx^n} \frac{1}{\Gamma(r-n)} \int_{x_0}^{x} (x-t)^{r-n-1} f(t) dt,$$

donde $n = \lceil r \rceil$, es decir es el número natural más pequeño que es mayor a r, y $x \in [x_0, x_1]$.

OBSERVACIÓN. Cuando $r \in \mathbb{N}$, entonces $n = \lceil r \rceil = r$ y $D_{x_0}^r = D^r I_{x_0}^0 = \frac{d^r}{dx^r}$. Por tanto, la derivada de Riemann-Liouville coincide con la derivada ordinaria cuando tiene orden natural.

Los resultados a continuación que no son demostrados, se pueden encontrar en [15] y [20].

EJEMPLO 8. Usando el ejemplo 7, se tiene un análogo de la ecuación (2.12), para derivadas de polinomios. Específicamente, si $f(x) = (x - x_0)^s$ con $s > -1$ y $x \neq x_0$, entonces para todo $r > 0$:

$$D_{x_0}^r f(x) = \frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(s+1-r)} (x - x_0)^{s-r}. \tag{2.13}$$

Para su demostración ver [15, Propiedad 2.1]. En particular, tomando $s = 0$, se puede ver que $D^r_{x_0} 1 = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1-r)}(x - x_0)^r \neq 0$. Esta es una diferencia importante con respecto a la derivada ordinaria, en el sentido de que la derivada de Riemann-Liouville de una constante no es necesariamente igual a 0. Sin embargo, hay funciones no constantes que sí se anulan con el operador $D^r_{x_0}$.

LEMA 2.20. *Sea $r > 0$ y $n = \lceil r \rceil$. Entonces*

$$D^r_{x_0} f = 0$$

si y solamente si existen constantes reales c_k, con $k \in [\![1, n]\!]$ tales que

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k (x - x_0)^{r-k},$$

para todo $x \in [x_0, x_1]$.

Demostración. En [15, Cor. 2.1] □

Al igual que en el lema 2.16, la existencia de la derivada de Riemann-Liouville se puede caracterizar, en casi todo punto. Antes de presentar este resultado, se considera un espacio funcional clave.

DEFINICIÓN 2.15. *Una función $f : I \to \mathbb{R}$, donde I es un intervalo de $\mathbb{R}$, se dice absolutamente continua si es que para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que*

$$\sum_{i=1}^{n} |f(u_i) - f(l_i)| < \epsilon,$$

para toda familia de intervalos disjuntos $(l_i, u_i) \subset I$, con $i = 1, \ldots, n$ que cumplan

$$\sum_{i=1}^{n} (u_i - l_i) < \delta.$$

Al espacio de estas funciones se le denotará por $AC(I)$. Por otro lado, se dirá que f pertenece a $AC^n(I)$ si es que $f \in C^{n-1}(I)$ (tiene derivadas continuas hasta el orden $n-1$) y se tiene que $D^{n-1} f \in AC(I)$.

Sea ahora $I = [x_0, x_1]$ un intervalo compacto.

LEMA 2.21. *Una función $f : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ se encuentra en el espacio $AC^1[x_0, x_1]$ si y* *solo si existe una función $\varphi \in L^1[x_0, x_1]$ tal que:*

$$f(x) = c + \int_{x_0}^{x} \varphi(t)dt$$

para todo $x \in [x_0, x_1]$. En particular, f tiene una derivada para c.t.p $x \in [x_0, x_1]$: $f'(x) = \varphi(x)$ y $c = f(x_0)$.

Una función $f : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ se encuentra en el espacio $AC^n[x_0, x_1]$ si y solo si existe una función $\varphi \in L^1[x_0, x_1]$ y constantes c_k con $k \in [\![0, n-1]\!]$ tales que

$$f(x) = (I^n_{x_0}\varphi)(x) + \sum_{k=0}^{n-1} c_k(x-a)^k,$$

para todo $x \in [x_0, x_1]$. Además, f tiene una n-ésima derivada para c.t.p $x \in [x_0, x_1]$: $\frac{d^n f}{dx^n}(x) = \varphi(x)$ y $c_k = \frac{1}{k!}\frac{d^k f}{dx^k}$ para $k \in [\![0, n-1]\!]$.

Demostración. En [15, Lem. 1.3] □

La primera parte del anterior resultado también es conocido como teorema fundamental del cálculo integral de Lebesgue [12, Teo. 3.5], y afirma que toda función absolutamente continua tiene una derivada que es Lebesgue-integrable y está definida para casi todo punto. De forma general: $C^n[x_0, x_1] \subset AC^n[x_0, x_1] \subset C^{n-1}[x_0, x_1]$.

El siguiente lema hace uso de esta derivada.

LEMA 2.22. *Sea $f \in AC^1[x_0, x_1]$ y $0 < r < 1$. Entonces $D^r_{x_0}f$ existe para c.t.p $x \in [x_0, x_1]$. Más aún $D^r f \in L^1[x_0, x_1]$ y*

$$D^r_{x_0}f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-r)}\left(\frac{f(x_0)}{(x-x_0)^r} + \int_{x_0}^{x} \frac{f'(t)}{(x-t)^r}\, dt\right).$$

De manera general, si $r \in \mathbb{R}^+$ y $n = \lceil r \rceil$. Entonces para todo $f \in AC^n[x_0, x_1]$ se tiene que $D^r_{x_0}f$ existe para c.t.p $x \in [x_0, x_1]$. Más aún $D^r f \in L^1[x_0, x_1]$ y

$$D^r_{x_0}f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-x_0)^{k-r}}{\Gamma(1+k-r)}\frac{d^k f}{dx^k}(x_0) + \frac{1}{\Gamma(n-r)}\int_{x_0}^{x} \frac{1}{(x-t)^{r-n+1}}\frac{d^n f}{dx^n}(t)dt.$$

Demostración. En [20, Sec. 2] y [15, Lem. 2.2]. □

Por los anteriores resultados, se satisface que $D^r_{x_0} : AC^n[x_0, x_1] \to L^1[x_0, x_1]$ es un operador bien definido, es claro que es lineal.

En general, no se cumple un análogo al lema 2.17 para la derivada de Riemann-Liouville, es decir

$$D_{x_0}^r D_{x_0}^s = D_{x_0}^s D_{x_0}^r$$

o

$$D_{x_0}^r D_{x_0}^s = D_{x_0}^{r+s}$$

no son necesariamente ciertas. En las secciones 2.3.6 y 2.3.7 de [17] y [10, Ec. 2.6] se da un resultado que permite inferir condiciones suficientes para que eso se satisfaga, como se enuncia a continuación.

TEOREMA 2.23. *Sean $r, s > 0$ y $n = [s] + 1$, donde $[s]$ es la parte entera del número s. Si $f \in AC^n[x_0, x_1]$, y además*

$$\frac{d^k f}{dx^k}(x_0) = 0,$$

para todo $k \in [\![0, n-1]\!]$, entonces $D^{r+s} f$ existe y cumple con que

$$D_{x_0}^r (D_{x_0}^s f) = D_{x_0}^{r+s} f.$$

EJEMPLO 9. La función $f(x) = (x - x_0)^l$ con $l > 0$, cumple con estar en $AC^1[x_0, x_1]$; además, si $r, s \in (0, 1)$ entonces $n = [s] + 1 = 1$, con lo cual ya que $f(x_0) = 0$, se tiene que satisface las condiciones del teorema 2.23. Esto se puede notar directamente del ejemplo 8, porque

$$\begin{aligned} D_{x_0}^r D_{x_0}^s f(x) &= D_{x_0}^r \left(\frac{\Gamma(l+1)}{\Gamma(l+1-s)} (x - x_0)^{l-s} \right) \\ &= \frac{\Gamma(l-s+1)}{\Gamma(l-s+1-r)} \frac{\Gamma(l+1)}{\Gamma(l+1-s)} (x - x_0)^{l-s-r} \\ &= \frac{\Gamma(l+1)}{\Gamma(l+1-(s+r))} (x - x_0)^{l-(s+r)} = D_{x_0}^{r+s} f(x). \end{aligned}$$

En particular, tomando $x_0 = 0$, $r = s = \frac{1}{2}$ y $l = 1$, se tiene

$$D_0^{\frac{1}{2}} x = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \sqrt{x},$$

donde $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ y

$$D_0^1 x = D_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \sqrt{x} \right) = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{1} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} x^0 = 1 = \frac{d}{dx} x.$$

El análogo del teorema 2.19 se da en [9, Teorema 2.20]. La convergencia solo se da en un sentido débil, pero puede mejorar con una hipótesis extra.

TEOREMA 2.24. *Si* $f \in C^n[x_0, x_1]$ *para algún* $n \in \mathbb{N}$. *Entonces,*

$$\lim_{r \to n^-} D^r_{x_0} f(x) = \frac{d^n f}{dx^n}(x)$$

para todo $x \in (x_0, x_1]$.

Adicionalmente, si se cumple la siguiente hipótesis:

***H0**: Existen constantes positivas* ϵ, δ, M, *tales que*

$$0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x)| \leq M(x - x_0)^{n+\epsilon}.$$

Entonces,

$$\lim_{r \to n^-} D^r_{x_0} f = \frac{d^n f}{dx^n}$$

en $C[x_0, x_1]$.

Capítulo 3

Análisis hipercomplejo

El análisis hipercomplejo es la generalización que existe del análisis complejo, para determinar qué funciones $f : \Omega \subset V \to V$, con V álgebra hipercompleja, admiten una derivada, a las cuales se les conoce como holomorfas o analíticas.

Para ello, se considera como modelo base, el álgebra compleja $\mathbb{C}$.

OBSERVACIÓN. De ahora en adelante a cualquier álgebra hipercompleja V, de dimensión n, se le armará de la topología usual de $\mathbb{R}^n$. Esto quiero decir que estará inducida por la norma

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Otros tipos de análisis se pueden hacer, haciendo uso de la magnitud $|x|_V$ para definir una topología (no necesariamente metrizable) en V; véase, por ejemplo, [11] para el caso $n = 2$.

3.1. El caso complejo

Se referencia algunos resultados clásicos del análisis complejo. Las demostraciones se pueden encontrar en [24].

DEFINICIÓN 3.1. *Sea Ω un conjunto abierto del álgebra compleja $\mathbb{C}$. Sea $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función compleja. Se dirá que f es analítica u holomorfa en un punto $z \in \Omega$, si es que el límite*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

existe, $z + h \in \Omega$. Además a este límite se le conocerá como la derivada compleja de f en el punto z, y notada por $f'(z)$, ya que no depende de h.

Si la función f es analítica en todo punto $z \in \Omega$, se dice que es analítica en Ω.

El siguiente resultado es fundamental en el análisis complejo y justifica, en este caso, el nombre de función análitica. Sin embargo, como veremos más adelante, esto no se cumple generalmente para álgebras hipercomplejas.

PROPOSICIÓN 3.1. *Sea f una función analítica en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$. Sea D una bola abierta con centro z_0 tal que la clausura de D está contenida en Ω, entonces f se puede expandir como una serie centrada en z_0:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

para todo $z \in D$, para algunas constantes reales a_n con $n \in \mathbb{N}$.

Por otro lado, el hecho de que una función sea analítica u holomorfa, se puede caracterizar por medio de relaciones entre las derivadas parciales de sus componentes.

PROPOSICIÓN 3.2. *Sea f una función compleja en un abierto $\Omega \subset \Omega$, con $f(x,y) = f_1(x,y) + i f_2(x,y)$, donde f_1, f_2 son funciones real valuadas sobre Ω. Entonces f es analítica en Ω si y solo si*

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y} \quad y \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{\partial f_2}{\partial x}, \tag{3.1}$$

en Ω.

El sistema de ecuaciones (3.1) se conoce como *condiciones de Cauchy-Riemann*

Notemos que una función $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ se puede ver simplemente como una función $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, si la vemos solamente como una función entre espacios vectoriales. Por tanto, tiene sentido calcular su jacobiano en un punto $z \in \Omega$:

$$J_f(z) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(z) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(z) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(z) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(z) \end{pmatrix}.$$

Si es que f es analítica en Ω, usando (3.1), se obtiene que

$$J_f(z) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(z) & -\frac{\partial f_2}{\partial x}(z) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(z) & \frac{\partial f_1}{\partial x}(z) \end{pmatrix}.$$

Por tanto, por el ejemplo 5, se tiene que $J_f(z)$ es una matriz característica.

PROPOSICIÓN 3.3. *Sea f una función compleja en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$, con $f(x,y) = f_1(x,y) + if_2(x,y)$, donde f_1, f_2 son funciones real valuadas sobre Ω. Entonces f es analítica en Ω si y solo si*

$$J_f(z) \in \mathscr{M}(\mathbb{C}) \tag{3.2}$$

para todo $z \in \Omega$, donde $\mathscr{M}$ es la representación matricial.

Por último, en el análisis complejo son de especial relevancia, los siguientes operadores:

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

y

$$\frac{\partial}{\partial z} := \overline{\frac{\partial}{\partial \overline{z}}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

conocidos como operador de Cauchy-Riemann y operador conjugado de Cauchy-Riemman, respectivamente. Su importancia se muestra en el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 3.4. *Si f es analítica en z_0, entonces se cumple que*

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = 0 \quad y \quad \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = f'(z_0).$$

3.2. El caso general

Dada V un álgebra hipercompleja de dimensión n, una *función hipercompleja* es una función $f : \Omega \subset V \to V$, donde Ω es un abierto en $\mathbb{R}^n$. Se la puede escribir como

$$f(z) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_1, \ldots, x_n)$$

donde $z = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = (x_1, \ldots, x_n)$ y las funciones f_i, con $i = [\![1, n]\!]$, son real valuadas sobre Ω. Asumiremos además, que todas las funciones f_i tienen derivadas parciales $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ continuas, con $i, j \in [\![1, n]\!]$.

DEFINICIÓN 3.2. *Sea V un álgebra hipercompleja, $\Omega \subset V$ y $f : \Omega \subset V \to V$ una función hipercompleja. Se dirá que f es analítica u holomorfa en un punto $z \in \Omega$, si es que el límite*

$$f'(z) := \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \notin Sing_V}} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

existe, con $z + h \in \Omega$, y no depende de h. Además, a este límite se le conocerá como la derivada hipercompleja de f en el punto z, y notada por $f'(z)$.

Si la función f es analítica en todo punto $z \in \Omega$, se dice que es analítica en Ω.

OBSERVACIÓN. Nótese que en la definición anterior siempre es posible hacer $h \to 0$, con $h \notin Sing_V$. A saber, se puede tomar un escalar real suficientemente pequeño tal que $z + h \in V$, con $h \neq 0$; entonces no es divisor de cero y la división está bien definida.

Por otro lado, el dominio Ω no tiene que ser abierto para definir la derivada hipercompleja, basta que para todo punto $z \in \Omega$, exista al menos una sucesión de escalares reales h_n tal que $z + h_n \in \Omega$ y $h_n \to 0$. Por ejemplo, si es que $V = \mathbb{R}^n$ y se considera

$$\Omega = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$$

donde cada $[a_i, b_i] \subset \mathbb{R}$ es un intervalo finito, entonces en una función $f : \Omega \subset V \to V$ se puede definir la derivada hipercompleja. Este tipo de dominio será usado en el capítulo 4.

Directamente de la definición anterior, se tiene el siguiente resultado.

LEMA 3.5. *Una función hipercompleja $f : \Omega \subset V \to V$ es analítica en $z \in \Omega$, si y solo si, existe una función $\epsilon_{f,z} : V \to V$, tal que*

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \notin Sing_V}} \epsilon_{f,z}(h) = 0;$$

y además

$$f(z + h) - f(z) = f'(z)h + \epsilon_{f,z}(h)h, \tag{3.3}$$

para todo $h \notin Sing_V$.

COROLARIO 3.6. *Si una función hipercompleja $f : \Omega \subset V \to V$ es analítica en z, entonces se tiene que*

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \notin Sing_V}} f(z + h) = f(z).$$

Demostración. En primer lugar se nota que si f y g son funciones hipercomplejas definidas en Ω y $z_0 \in \Omega$ son tales que $\lim_{z \to z_0} f(z)$ y $\lim_{z \to z_0} g(z)$ existen, entonces

$$\lim_{z \to z_0} f(z)g(z) = \lim_{z \to z_0} f(z) \lim_{z \to z_0} g(z).$$

En efecto,

$$\lim_{z\to z_0} f(z)g(z) = \lim_{z\to z_0} \sum_{i,j,k=1}^{n} f_i(z)g_j(z)H_{ijk}e_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\lim_{z\to z_0} \sum_{i,j=1}^{n} f_i(z)g_j(z)H_{ijk}e_k \right)$$

$$= \sum_{i,j,k=1}^{n} \lim_{z\to z_0} f_i(z) \lim_{z\to z_0} g_j(z)H_{ijk}e_k = \lim_{z\to z_0} f(z) \lim_{z\to z_0} g(z).$$

Ahora, por lo anterior y tomando el límite $h \to 0$ en (3.3) se obtiene el resultado. □

El último corolario prueba que una función analítica está «muy cerca» de ser una función continua. Si es que $Sing_V = \{0\}$, esto es, cuando V es un cuerpo, entonces toda función analítica es continua.

La derivada hipercompleja tiene propiedades similares a su contraparte compleja.

TEOREMA 3.7. *Sean $f, g : \Omega \subset V \to V$ dos funciones hipercomplejas, $c \in V$ y sea $z \in \Omega$, entonces:*

1. $(f+g)'(z) = f'(z) + g'(z)$.
2. $(cf)'(z) = cf'(z)$.
3. $(fg)'(z) = f'(z)g(z) + g'(z)f(z)$.
4. *Si g es continua en z y $g(z) \notin Sing_V$, entonces se tiene que*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{(g(z))^2}.$$

Demostración. Gracias al lema 3.5 se tiene que existen dos funciones $\epsilon_{f,z}, \epsilon_{g,z} : V \to V$, tales que

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\notin Sing_V}} \epsilon_{f,z}(h) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\notin Sing_V}} \epsilon_{g,z}(h) = 0$$

y

$$f(z+h) - f(z) = f'(z)h + \epsilon_{f,z}(h)h, \tag{3.4}$$

$$g(z+h) - g(z) = g'(z)h + \epsilon_{g,z}(h)h, \tag{3.5}$$

para todo $h \notin Sing_V$. De esta manera, sumando (3.4) y (3.5), luego tomando el limite de $h \to 0$ con $h \notin Sing_V$, obtenemos 1. Si es que multiplicamos (3.4) por c y tomando el mismo límite, obtenemos 2.

Por otro lado, se observa que

$$\begin{aligned} f(z+h)g(z+h) =& f(z)g(z) + (f'(z)g(z) + f(z)g'(z))h \\ &+ (f(z)\epsilon_{f,z}(h) + g(z)\epsilon_{g,z}(h))h \\ &+ (f'(z)g'(z) + f'(z)\epsilon_{g,z}(h) + g'(z)\epsilon_{f,z}(h) + \epsilon_{f,z}(h)\epsilon_{g,z}(h))h^2. \end{aligned}$$

Por tanto, si se define

$$\begin{aligned} \epsilon_{fg,z}(h) :=& f(z)\epsilon_{f,z}(h) + g(z)\epsilon_{g,z}(h) + (f'(z)g'(z) \\ &+ f'(z)\epsilon_{g,z}(h) + g'(z)\epsilon_{f,z}(h) + \epsilon_{f,z}(h)\epsilon_{g,z}(h))h, \end{aligned}$$

se obtiene que

$$\lim_{\substack{h\to 0 \\ h\notin Sing_V}} \epsilon_{fg,z}(h) = 0,$$

pues $\epsilon_{f,z}$ y $\epsilon_{g,z}$ tienden a cero y así $f(z+h)g(z+h) = f(z)g(z) + (f'(z)g(z) + f(z)g'(z))h + \epsilon_{fg,z}(h)$, lo cual, por el lema 3.5, permite deducir 3.

Finalmente, para probar 4, se nota que $Sing_V$ es un conjunto cerrado de $\mathbb{R}^n$. En efecto, es la imagen inversa de un conjunto cerrado, a través de una función continua; a saber: $Sing_V = (det \circ \mathscr{M})^{-1}(\{0\})$. De lo anterior, se deduce que si g es continua en z y $g(z) \notin Sing_V$, entonces $g(w) \notin Sing_V$ para todo w en alguna vecindad de z, en Ω. En particular, para h suficientemente pequeño, se tiene que $g(z+h)$ es invertible. Luego:

$$\frac{f(z+h)}{g(z+h)} - \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f(z+h)g(z) - g(z+h)f(z)}{g(z+h)g(z)},$$

de donde, si es que usamos (3.4) y (3.5), obtenemos que

$$\frac{f(z+h)}{g(z+h)} - \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{(f'(z)g(z) - g'(z)f(z))h + (g(z)\epsilon_{f,z}(h) + f(z)\epsilon_{g,z}(h))h}{g(z+h)g(z)}.$$

Ahora, se tiene que

$$\lim_{\substack{h\to 0 \\ h\notin Sing_V}} \frac{1}{g(z+h)} - \frac{1}{g(z)} = 0,$$

gracias a que g es continua y los límites se conservan también con la división de números hipercomplejos. Así, si $\epsilon(h) := \frac{1}{g(z+h)} - \frac{1}{g(z)}$, entonces $\frac{f(z+h)}{g(z+h)} - \frac{f(z)}{g(z)}$ es igual a

$$\frac{(f'(z)g(z) - g'(z)f(z))h + (g(z)\epsilon_{f,z}(h) + f(z)\epsilon_{g,z}(h))h}{g(z)^2}(1 + g(z)\epsilon(h)).$$

Por tanto, si es que se define

$$\begin{aligned}\epsilon_{f/g,z}(h) :=& \frac{g(z)\epsilon_{f,z}(h) + f(z)\epsilon_{g,z}(h)}{g(z)^2}\\ &+ \epsilon(h)\frac{(f'(z)g(z) - g'(z)f(z)) + g(z)\epsilon_{f,z}(h) + f(z)\epsilon_{g,z}(h)}{g(z)},\end{aligned}$$

entonces se obtiene que

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\notin Sing_V}} \epsilon_{f/g,z}(h) = 0$$

y

$$\frac{f(z+h)}{g(z+h)} - \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{(g(z))^2}h + \epsilon_{f/g,z}(h)h.$$

De nuevo por el lema 3.5, se prueba lo requerido. □

Condiciones necesarias y suficientes para que una función hipercompleja sea analítica se presentaron por primera vez en [21] y son conocidas como condiciones de Scheffers. La versión presentada a continuación es similar a las de [23] y [19] pero hace uso de la representación matricial, generalizando la proposición 3.3 en el contexto de cualquier álgebra hipercompleja.

TEOREMA 3.8 (Scheffers). *Sea $f : \Omega \subset V \to V$ una función hipercompleja. Entonces f es analítica en Ω si y solo si*

$$J_f(z) \in \mathscr{M}(V), \tag{3.6}$$

para todo $z \in \Omega$, donde $\mathscr{M}$ es la representación matricial.

Demostración. Consideremos $z \in \Omega$ y un $h \notin Sing_V$ cualquiera tal que $z + h \in \Omega$, h será de la forma $(h_1, \ldots, h_n)$. Supongamos que f es analítica. Notemos que

$$f(z+h) - f(z) = \sum_{i=1}^{n}(f_i(z+h) - f_i(z))e_i. \tag{3.7}$$

Para todo $i \in [\![1, n]\!]$, f_i es real valuada y, como sus derivadas parciales son continuas, es Frechet-diferenciable, es decir

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f_i(z+h) - f_i(z) - Df_i(z)h\|}{\|h\|} = 0; \tag{3.8}$$

donde $Df_i(z)(h)$ es igual a $\nabla f_i(z) \cdot h$ con $\nabla f_i(z) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{j=1}^{n}$. Por consiguiente, el límite (3.8) se puede reescribir como

$$f_i(z+h) - f_i(z) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} h_j \right) + \epsilon_i(h)\|h\|, \tag{3.9}$$

donde $\lim_{h\to 0} \epsilon_i(h) = 0$. De (3.7) y (3.9) se deduce:

$$f(z+h) - f(z) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} h_j \right) + \epsilon_i(h)\|h\| \right) e_i. \tag{3.10}$$

Por el lema 3.5, como se supuso que f es analítica, se tiene que existe una función $\epsilon_{f,z} : V \to V$ tal que

$$f(z+h) - f(z) = f'(z)h + \epsilon_{f,z}(h)h.$$

Si es que

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{n} f_k'(z)e_k,$$

entonces

$$\begin{aligned} f(z+h) - f(z) &= \left(\sum_{k=1}^{n} f_k'(z)e_k \right) \left(\sum_{j=1}^{n} h_j e_j \right) + \epsilon_{f,z}(h)h \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k,j=1}^{n} f_k' h_j H_{kji} \right) e_i + \epsilon_{f,z}(h)h. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Igualando (3.10) y (3.11), luego tomando el limite cuando $h \to 0$ con $h \notin Sing_V$, se sigue que

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} h_j \right) \right) e_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k,j=1}^{n} f_k' h_j H_{kji} \right) e_i.$$

Así, para todo $i, j \in [\![1, n]\!]$, se tiene que

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(z) = \sum_{k=1}^{n} f_k'(z) H_{kji}. \tag{3.12}$$

Comparando la ecuación (3.12) con (2.6), se obtiene que

$$\mathscr{M}(\vec{f}'(z)) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(z) \right)_{i,j=1}^{n} = J_f(z),$$

donde $\vec{f}'(z) = (f_k'(z))_{k=1}^{n}$. Esto permite afirmar que $J_f(z) \in \mathscr{M}(V)$.

Para el recíproco, se considera que $J_f(z) \in \mathscr{M}(V)$, entonces existe $w(z) = (w_i(z))_{i=1}^{n}$

tal que $\mathscr{M}(w) = J_f(z)$. Luego, por (2.6):

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(z) = \sum_{k=1}^{n} w_k(z) H_{kji}.$$

La fórmula (3.10) sigue siendo válida, entonces

$$f(z+h) - f(h) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j,k=1}^{n} w_k(z) h_j H_{kji} + \epsilon_i(h) \|h\| \right) e_i. \tag{3.13}$$

donde $\epsilon_i : V \to V$ es tal que $\epsilon_i(h) \to 0$, si $h \to 0$ con $h \notin Sing_V$. Por tanto:

$$f(z+h) - f(h) = w(z)h + \epsilon_{f,z}(h)h$$

con $\epsilon_{f,z}(h) \to 0$ si $h \to 0$ con $h \notin Sing_V$. Por el lema 3.5 podemos concluir que f tiene derivada hipercompleja en z y $f'(z) = w(z)$, por tanto es analítica. □

La derivada hipercompleja de una función analítica se puede calcular fácilmente.

COROLARIO 3.9. *Si f es analítica en z, entonces $f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(z)$.*

Demostración. Gracias al teorema 3.8, se tiene que

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{n} f'_k(z) H_{kji},$$

para todo $i, j \in [\![1, n]\!]$. En particular, para $j = 1$, y usando la proposición 2.7, se cumple que

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_1}(z) = \sum_{k=1}^{n} f'_k(z) \delta_{ik} = f'_i(z).$$

Se concluye que

$$f'(z) = \sum_{i=1}^{n} f'_i(z) e_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(z) e_i = \frac{\partial f}{\partial x_1}(z).$$

□

De manera alternativa, algunos autores, como en [3], han buscado generalizar las condiciones de Cauchy-Riemann en (3.1) y el operador de Cauchy-Riemann que, como se ve en proposición 3.4, contiene en su núcleo a todas las funciones analíticas. Para ello se introduce las condiciones de Cauchy-Riemann generalizadas.

TEOREMA 3.10 (Condiciones de Cauchy-Riemann generalizadas)**.** *Sea $f : \Omega \subset V \to$*

V una función hipercompleja. Entonces f es analítica en Ω si y solo si

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(z) = e_j \frac{\partial f}{\partial x_1}(z), \tag{3.14}$$

para todo $z \in \Omega$ y $j \in [\![1, n]\!]$.

Demostración. Como f es analítica en Ω, sabemos por el teorema 3.8 que es condición necesaria y suficiente que

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(z) = \sum_{k=1}^{n} f_k'(z) H_{kji},$$

para todo $i, j \in [\![1, n]\!]$ y $z \in \Omega$. Ahora, por el corolario 3.9, se cumple que

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial x_1}(z) H_{kji}.$$

De esta manera

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(z) = \sum_{i,k=1}^{n} \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_1}(z) H_{kji} e_i \right) = e_j \frac{\partial f}{\partial x_1}(z).$$

Para el recíproco se fija $j \in [\![1, n]\!]$, se nota que (3.14) implica

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial x_1}(z) H_{kji},$$

al analizar la i-ésima componente de cada lado de la expresión, con $i \in [\![1, n]\!]$. Luego, $J_f(z) = \mathscr{M}(g(z))$, con $g(z) := \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}(z) \right)$; por tanto f es analítica en z, por el teorema 3.8. $\square$

Por el teorema anterior, una función hipercompleja es analítica si pertenece al núcleo de todos los operadores

$$\frac{\partial}{\partial x_j} - e_j \frac{\partial}{\partial x_1},$$

con $j \in [\![1, n]\!]$.

EJEMPLO 10. Cuando $V = \mathbb{C}$, se puede rescatar el caso complejo de los anteriores resultados. En efecto, tomando $e_2 = i$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, $n = 2$ vemos que

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} - i \frac{\partial}{\partial x} \right) f = 0$$

si y solo si f es analítica. Además, multiplicando por $\frac{i}{2}$ la anterior ecuación, se obtiene que

$$0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) f = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}.$$

Adicionalmente, si esto se cumple entonces

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) f = \frac{\partial f}{\partial x} = f'.$$

EJEMPLO 11. Cuando $V = \mathbb{BC}$, se obtiene que $f(z) = f_1(z) + if_2(z) + jf_3(z) + kf_4(z)$ es analítica en su dominio Ω si y solo si

$$J(f) \in \mathscr{M}(\mathbb{BC}),$$

en todo punto $z \in \Omega$. Usando la representación matricial (2.11), lo anterior se traduce en las condiciones

$$\begin{array}{ccccccc}
\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & = & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & = & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} & = & \frac{\partial f_4}{\partial x_4}, \\
-\frac{\partial f_2}{\partial x_1} & = & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & = & -\frac{\partial f_4}{\partial x_3} & = & \frac{\partial f_3}{\partial x_4}, \\
-\frac{\partial f_3}{\partial x_1} & = & -\frac{\partial f_4}{\partial x_2} & = & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & = & \frac{\partial f_2}{\partial x_4}, \\
\frac{\partial f_4}{\partial x_1} & = & -\frac{\partial f_3}{\partial x_2} & = & -\frac{\partial f_2}{\partial x_3} & = & \frac{\partial f_1}{\partial x_4}.
\end{array}$$

para todo punto en Ω.

En el álgebra $\mathbb{C}$, sea una función $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica, tal que todas sus derivadas parciales de segundo orden $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, y $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ existen en Ω y son continuas. Entonces sus componentes f_1 y f_2 son funciones armónicas, lo que quiere decir que

$$\Delta f_i(z) = 0,$$

para todo $z \in \Omega$, con $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. En efecto, por el teorema de Schwarz para derivadas mixtas, se tiene que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

gracias a las hipotesis; más aún $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ por la proposición 3.4, de donde

$$0 = 4\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f = \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) f = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) f = \Delta f_1 + i\Delta f_2.$$

Este resultado puede ser generalizado para otras álgebras hipercomplejas, para ello se introduce la notación de los multi-índices:

Un multi-índice n dimensional es un vector

$$\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$$

donde cada γ_i pertenece a $\mathbb{N} \cup \{0\}$. Se define su valor absoluto como

$$|\gamma| := \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n.$$

Un vector $z \in \mathbb{R}^n$ puede ser elevado a la potencia de un multi-índice:

$$z^\gamma := z_1^{\gamma_1} z_2^{\gamma_2} \ldots z_n^{\gamma_n};$$

La magnitud en $\mathbb{C}$, y las de las otras álgebras hipercomplejas como se verá en el siguiente teorema, se puede escribir como una suma usando multi-índices. En efecto, si $c_{(2,0)} = 1$, $c_{(1,1)} = 0$, $c_{(0,2)} = 1$ y $z = x + iy$ entonces

$$|z|_{\mathbb{C}}^2 = x^2 + y^2 = \sum_{|\gamma|=2} c_\gamma z^\gamma.$$

Por otro lado, se puede definir operadores diferenciales por medio de multi-índices

$$\partial^\gamma := \frac{\partial^{\gamma_1}}{\partial x_1} \frac{\partial^{\gamma_2}}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial^{\gamma_n}}{\partial x_n};$$

de esta manera

$$\Delta = \sum_{|\gamma|=2} c_\gamma \partial^\gamma = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

TEOREMA 3.11. *Dada un álgebra hipercompleja V de dimensión n con $n \geq 2$. Si $z_1 = x_2 - e_2 x_1$, entonces*

$$|z_1|_V^n = \sum_{|\gamma|=n} c_\gamma z_1^\gamma \tag{3.15}$$

para algunas constantes reales c_γ. Adicionalmente, si se define el operador diferencial

$$\Delta_V := \sum_{|\gamma|=n} c_\gamma \partial^\gamma$$

y si $f : \Omega \subset V \to V$ es un función hipercompleja analítica tal que todas sus derivadas parciales de orden n:

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_i^n} \qquad i \in [\![1, n]\!]$$

existen y son continuas en Ω; entonces se cumple que

$$\Delta_V f_i = 0,$$

en Ω, para todo $i \in [\![1, n]\!]$.

Demostración. Primero hay que verificar que la fórmula (3.15) es válida. Nótese que para un $z \in V$ arbitrario, $|z|_V^n$ y $\det(\mathscr{M}(z))$ son iguales salvo por un signo. Por otro lado,

$$\mathscr{M}(z) = (X_{jk})_{j,k=1}^n$$

donde $X_{jk} = \sum_{i=1}^n H_{ijk} x_i$ y $z = (x_1, \ldots, x_n)$. Se sabe que el determinante de una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se puede escribir como

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} s_\sigma \prod_{j=1}^n A_{j\sigma(j)},$$

donde S_n es el conjunto de todas las permutaciones de $\{1, \ldots, n\}$, es decir todas las funciones biyectivas $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$, donde s_σ es 1 o -1. Por lo tanto, tomando $A = \mathscr{M}(z)$, se observa que para cada $\sigma \in S_n$:

$$\prod_{j=1} X_{j\sigma(j)}$$

es un polinomio de orden n en las variables $x_1, \ldots, x_n$. Multiplicando por s_σ, sumando para todas las permutaciones σ y multiplicando por -1 si es necesario, se obtiene (3.15).

Por el teorema 2.14, se sabe que si ${}^i\overline{z_1}$ es la i-ésima conjugación principal, entonces

$$(z_1) \prod_{i=1}^{n-1} {}^i\overline{z_1} = \det(\mathscr{M}(z_1)). \tag{3.16}$$

Se puede asumir que z_1 es un número invertible, de lo contrario $|z_1|_V^n = 0$, $\Delta_V = 0$ y el teorema se vuelve evidente. De esta manera se cumple que

$$\mathscr{M}(z_1)\mathrm{adj}(\mathscr{M}(z_1)) = \det(\mathscr{M}(z_1))Id$$

y la matriz adjunta es la única con esta propiedad, luego de (3.16):

$$\mathscr{M}\left(\prod_{i=1}^{n-1} {}^i\overline{z_1}\right) = \mathrm{adj}(\mathscr{M}(z_1)). \tag{3.17}$$

Sea $y = \prod_{i=1}^{n-1} {}^i\overline{z_1}$, se prueba que

$$y = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{|\gamma|=n-1} a_\gamma^{(i)} z_1^\gamma\right) e_i, \tag{3.18}$$

para algunas constantes $a_\gamma^{(i)}$. En efecto, de (3.17) y la definición de matriz adjunta:

$$\mathscr{M}(y) = ((-1)^{j+k} M_{kj})_{j,k=1}^n,$$

donde M_{kj} es el determinante de $\mathscr{M}(z_1)$ cuando se le quita la k-ésima fila y j-ésima columna. Como $\mathscr{M}(z_1) = (\sum_{i=1}^n H_{ijk} x_i)_{j,k=1}^n$, entonces existen constantes $b_\gamma^{(j,k)}$ tales que

$$\mathscr{M}(y) = ((-1)^{j+k} M_{kj})_{j,k=1}^n = \left(\sum_{|\gamma|=n-1} b_\gamma^{(j,k)} z_1^\gamma \right)_{j,k=1}^n. \tag{3.19}$$

Si es que $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$, entonces por (3.19):

$$\sum_{i=1}^n H_{ijk} y_i = \sum_{|\gamma|=n-1} b_\gamma^{(j,k)} z_1^\gamma,$$

para todo $j, k \in [\![1, n]\!]$. En particular, tomando $j = 1$ y usando la proposición 2.7:

$$y_i = \sum_{|\gamma|=n-1} b_\gamma^{(1,i)} z_1^\gamma,$$

para todo $i \in [\![1, n]\!]$. Definiendo $a_\gamma^{(i)} = b_\gamma^{(1,i)}$ se ha verificado (3.18).

Para concluir, notemos que de (3.15), (3.16), (3.18) y como $z_1 = x_2 - e_2 x_1$:

$$\left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{|\gamma|=n-1} a_\gamma^{(i)} z_1^\gamma \right) e_i \right) (x_2 - e_2 x_1) = \det(\mathscr{M}(z_1)) = s \sum_{|\gamma|=n} c_\gamma z_1^\gamma, \tag{3.20}$$

donde $s = \operatorname{sgn}(\det(\mathscr{M}(z_1)))$. Ahora definimos dos operadores:

$$D_1 := \frac{\partial}{\partial x_2} - e_2 \frac{\partial}{\partial x_1},$$

$$D_2 := \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{|\gamma|=n-1} a_\gamma^{(i)} \partial^\gamma \right) e_i \right).$$

Gracias a que las derivadas parciales de f de orden n existen y son continuas; y haciendo uso repetidamente del teorema de Schwarz para derivadas mixtas, tenemos que

$$\partial^\gamma \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \partial^\gamma$$

para todo multi-índice γ con $|\gamma| = n - 1$. Por consiguiente, comparando con (3.20), se obtiene:

$$(D_1D_2)f = (D_2D_1)f = s\left(\sum_{|\gamma|=n} c_\gamma \partial^\gamma\right) f = s\Delta_V f.$$

Al ser f analítica en Ω, obtenemos que $D_1 f = 0$ en Ω, por las condiciones de Cauchy-Riemann generalizadas (3.14), por lo tanto $\Delta_V f = 0$ en Ω. Como Δ_V tiene solo coeficientes reales, entonces $\Delta_V f_i = 0$ para todo $i \in [\![1, n]\!]$. $\square$

OBSERVACIÓN. Nótese que el teorema anterior sigue siendo cierto si en lugar de $z_1 = x_2 - e_2x_1$, se considera cualquiera de los números:

$$z_l := x_{l+1} - e_{l+1}x_1$$

con $l \in [\![1, n-1]\!]$. Así, con $|z_l|_V^n = \sum_{|\gamma|=n} c_\gamma^{(l)} z_l^\gamma$, y para las mismas hipótesis sobre f, se tiene que

$$\Delta_V^{(l)} f_i = 0$$

en Ω, para todo $i \in [\![1, n]\!]$, con

$$\Delta_V^{(l)} = \sum_{|\gamma|=n} c_\gamma^{(l)} \partial^\gamma.$$

Esto se debe a que, por las condiciones de Cauchy-Riemann generalizadas (3.14), cualquiera de los operadores

$$D_1^{(l)} := \frac{\partial}{\partial x_{l+1}} - e_{l+1}\frac{\partial}{\partial x_1}$$

cumple que $D_1^{(l)} f = 0$, para $l \in [\![1, n]\!]$.

De esta manera toda función hipercompleja analítica, que tenga suficiente regularidad en sus componentes, hace que los mismos satisfagan al menos $n-1$ ecuaciones diferenciales parciales lineales:

$$\Delta_V^{(l)} u = 0, \qquad l \in [\![1, n-1]\!].$$

Esto generaliza el hecho de que una función compleja analítica tiene componentes que satisfacen la ecuación de Laplace: $\Delta u = 0$.

Capítulo 4

Números complejos generalizados

Como se había dicho en el capítulo 2, existe un álgebra hipercompleja sobre $\mathbb{R}^2$:

$$\mathbb{C}_{\alpha,\beta} = \{x + iy \ : \ i^2 = -\beta i - \alpha\},$$

para α, β escalares reales arbitrarios. Veremos a profundidad las propiedades de estos números hipercomplejos. Utilizando los resultados del capítulo 2, se tiene que para todo $z = x + iy$ en $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$, su representación matricial está dada por

$$\mathscr{M}(z) = \begin{pmatrix} x & -\alpha y \\ y & x - \beta y \end{pmatrix}, \tag{4.1}$$

y su magnitud estará dada por:

$$|z|_{\mathbb{C}_{\alpha,\beta}} = \sqrt{|x^2 - \beta xy + \alpha y^2|}. \tag{4.2}$$

Para acortar la notación se escribirá en adelante $|z|_{\alpha,\beta}$, en lugar de $|z|_{\mathbb{C}_{\alpha,\beta}}$.

Un nombre alternativo al de números complejos generalizados es *números hipercomplejos en dos dimensiones*, la razón se da a continuación.

LEMA 4.1. *Si V es un álgebra hipercompleja con $\dim(V) = 2$, entonces V es conmutativa y $V \cong \mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ para algunos escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.*

Demostración. Dado que, por convención, V tiene la unidad $1 = (1, 0) = e_1$, solo tenemos otro elemento de la base: $i = (0, 1) = e_2$, con el cual debe conmutar, por definición de unidad: $1i = i1 = i$. Aparte, la ecuación (2.1) nos dice que

$$i^2 = ii = \sum_{k=1}^{2} H_{22k} e_k.$$

Luego, tomando $H_{221} = -\alpha$ y $H_{222} = -\beta$, obtenemos lo requerido. $\square$

4.1. Clasificación

Para poder clasificar a $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ en clases isomorfas, se recuerda que toda álgebra hipercompleja conmutativa es un anillo unitario conmutativo, por tanto se puede usar los resultados de la teoría de anillos para obtener:

TEOREMA 4.2. *Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, se cumple que*

$$\mathbb{C}_{\alpha,\beta} \cong \mathbb{R}[X]/\langle X^2 + \beta X + \alpha \rangle,$$

donde $\mathbb{R}[X]$ es el anillo de polinomios reales en una variable arbitraria X. Más aún, $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ es un cuerpo si y solo si $\Delta < 0$, con $\Delta := \beta^2 - 4\alpha$.

Demostración. Se debe hallar un homomorfismo biyectivo de álgebras

$$T : \mathbb{C}_{\alpha,\beta} \to \mathbb{R}[X]/\langle X^2 + \beta X + \alpha \rangle.$$

Para ello, para todo $z = z_0 + iz_1$ en $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ se define

$$T(z) := z_0 + Xz_1 + \langle X^2 + \beta X + \alpha \rangle.$$

Es claro que $T(cz + z') = cT(z) + T(z')$ para todo $z, z' \in \mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ y $c \in \mathbb{R}$. Por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned} T(zz') &= T(z_0z_0' - \alpha z_1z_1' + (z_0z_1' + z_0'z_1 - \beta z_1z_1')i) \\ &= z_0z_0' - \alpha z_1z_1' + (z_0z_1' + z_0'z_1 - \beta z_1z_1')X + \langle X^2 + \beta X + \alpha \rangle \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} T(z)T(z') &= (z_0 + Xz_1)(z_0' + Xz_1') + \langle X^2 + \beta X + \alpha \rangle \\ &= z_0z_0' + (z_0z_1' + z_1z_0')X + z_1z_1'X^2 + \langle X^2 + \beta X + \alpha \rangle. \end{aligned}$$

Luego, $T(zz') = T(z)T(z')$ porque

$$[z_0z_0' - \alpha z_1z_1' + (z_0z_1' + z_0'z_1 - \beta z_1z_1')X] - [z_0z_0' + (z_0z_1' + z_1z_0')X + z_1z_1'X^2]$$

$$= z_1z_1'(X^2 + \beta X + \alpha) \in \langle X^2 + \beta X + \alpha \rangle.$$

Por tanto es un homomorfismo de álgebras. Para probar que T es inyectivo, se considera la ecuación $T(z) = T(z')$, la cual implica que

$$z_0 + Xz_1 + \langle X^2 + \beta X + \alpha \rangle = z_0' + Xz_1' + \langle X^2 + \beta X + \alpha \rangle,$$

de donde se obtiene

$$z_0 - z_0' + X(z_1 - z_1') \in \langle X^2 + \beta X + \alpha \rangle$$

y así $z_0 - z_0' + X(z_1 - z_1') = k(X^2 + \beta X + \alpha)$ para algún $k \in \mathbb{R}$. Pero lo último implica que $k = 0$, pues el lado izquierdo de la ecuación no tiene término que acompañe a X^2. Así $z_0 = z_0'$ y $z_1 = z_1'$.

Para probar que es sobreyectivo, se nota que todo elemento de $\mathbb{R}[X]/\langle X^2 + \beta X + \alpha \rangle$ es de la forma $p(X) + \langle X^2 + \beta X + \alpha \rangle$ donde $p(X)$ es un polinomio de grado menor a 2. La razón es que si $p(x) = k_0 + k_1 X + k_2 X^2$, entonces $p(x) + \langle X^2 + \beta X + \alpha \rangle = k_0 + k_1 X - \beta X - \alpha X + \langle X^2 + \beta X + \alpha \rangle$; similarmente para potencias superiores de X. Por consiguiente, si se tiene un elemento arbitrario $p(x) = k_0 + k_1 X + \langle X^2 + \beta X + \alpha \rangle$, entonces $T(k_0 + ik_1) = p(x)$.

Se puede usar entonces la proposición 2.4 y el isomorfismo que se acaba de demostrar, para deducir que $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ es un cuerpo si y solo si $X^2 + \beta X + \alpha$ es irreducible en $\mathbb{R}$. Esto se dará cuando $X^2 + \beta X + \alpha$ no tenga raíces reales, es decir, cuando su discriminante $\Delta = \beta^2 - 4\alpha$ es negativo. □

El hecho de que $\mathbb{C}$ es un cuerpo, es un caso particular del anterior teorema, ya que $\mathbb{C}_{\alpha,\beta} = \mathbb{C}$, cuando $\alpha = 1$, $\beta = 0$ y entonces $\Delta = -4 < 0$. A $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$, cuando $\Delta < 0$, se le conoce como *álgebra de los números elípticos*.

Para otros valores de α y β, se tiene que $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ no es un cuerpo y por tanto no todo número tiene inverso, con lo cual necesariamente existirán divisores de cero. Dos de los ejemplos más importantes, véase [26], son:

- El álgebra $\mathbb{C}_{-1,0}$, conocida como *números dobles* o *split-complex*. Cada elemento se escribe como $x + ey$, donde $e^2 = 1$. En general, el álgebra $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$, con $\Delta > 0$, es conocida como álgebra de números hiperbólicos.

- El álgebra $\mathbb{C}_{0,0}$, conocida como *números duales*. Cada elemento se escribe como $x + \epsilon y$, donde $\epsilon^2 = 0$. En general, el álgebra $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$, con $\Delta = 0$, es conocida como álgebra de números parabólicos.

PROPOSICIÓN 4.3. *Se tienen los siguientes isomorfismos:*

$$\mathbb{C}_{\alpha,\beta} \cong \mathbb{C} \qquad \textit{si y solamente si} \quad \Delta < 0,$$

$$\mathbb{C}_{\alpha,\beta} \cong \mathbb{C}_{-1,0} \quad \textit{si y solamente si} \quad \Delta > 0,$$
$$\mathbb{C}_{\alpha,\beta} \cong \mathbb{C}_{0,0} \quad \textit{si y solamente si} \quad \Delta = 0.$$

Demostración. Si $\Delta < 0$, entonces se define la aplicación lineal

$$T_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}_{\alpha,\beta},$$

por

$$T_1(z) = T_1(x,y) = x + \frac{\beta}{\sqrt{-\Delta}}y + i\frac{2}{\sqrt{-\Delta}}y.$$

Para probar que es un homomorfismo, se puede ver que para todo $z, z' \in \mathbb{C}$:

$$T_1(zz') = T_1(xx' - yy', xy' + yx') = xx' - yy' + \frac{\beta}{\sqrt{-\Delta}}(xy' + yx') + i\frac{2}{\sqrt{-\Delta}}(xy' + yx'),$$

y además que

$$T_1(z)T_1(z') = \left(x + \frac{\beta}{\sqrt{-\Delta}}y + i\frac{2}{\sqrt{-\Delta}}y\right)\left(x' + \frac{\beta}{\sqrt{-\Delta}}y' + i\frac{2}{\sqrt{-\Delta}}y'\right)$$

de donde, usando que $i^2 = -\beta i - \alpha$, se deduce que $T_1(zz') = T_1(z)T_1(z')$. Para la biyectividad, al ser una aplicación lineal entre espacios vectoriales de dimensión finita, basta con probar que es inyectiva y para ello, se prueba que $T(z) = 0$ implica $z = 0$. En efecto, si $T(z) = 0$ entonces $x + \frac{\beta}{\sqrt{-\Delta}}y = 0$ y $\frac{2}{\sqrt{-\Delta}}y = 0$, con lo cual $x = y = 0$. Es así como se obtiene el isomorfismo requerido para $\Delta < 0$.

De manera análoga, si $\Delta > 0$, se considera

$$T_2 : \mathbb{C}_{-1,0} \to \mathbb{C}_{\alpha,\beta},$$

dado por

$$T_2(z) = T_2(x + ey) = x + \frac{\beta}{\sqrt{\Delta}}y + i\frac{2}{\sqrt{\Delta}}y$$

y se comprueba que es el isomorfismo requerido. De igual manera, si $\Delta = 0$

$$T_3 : \mathbb{C}_{0,0} \to \mathbb{C}_{\alpha,\beta},$$

dado por

$$T_3(z) = T_3(x + \epsilon y) = x + \frac{\beta}{2}y + iy,$$

se comprueba que es un isomorfismo.

Para probar la necesidad en cada caso, como la relación $\cong$ es una relación de equivalencia, bastan con probar que $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}_{-1,0}$ y $\mathbb{C}_{0,0}$ no son isomorfos. Para ello se nota que no es posible $\mathbb{C} \cong \mathbb{C}_{-1,0}$ o $\mathbb{C} \cong \mathbb{C}_{0,0}$ pues ambas álgebras de números duales o dobles, tienen divisores de cero. Luego, de existir un isomorfismo T, se tendría que $T(a)$ es divisor de cero en $\mathbb{C}$, para todo divisor de cero a, en $\mathbb{C}_{-1,0}$ o $\mathbb{C}_{0,0}$, lo cual es una contradicción. Por otro lado, tampoco se tiene que $\mathbb{C}_{-1,0} \cong \mathbb{C}_{0,0}$. En efecto, por reducción al absurdo, se supone que existe un isomorfismo $T : \mathbb{C}_{0,0} \to \mathbb{C}_{-1,0}$, luego

$$0 = T(0) = T(\epsilon^2) = T(\epsilon)T(\epsilon) = T(\epsilon)^2,$$

por tanto $T(\epsilon)$ es un elemento de $\mathbb{C}_{-1,0}$ tal que al elevarse al cuadrado es cero. Sin embargo, si $a + be = T(\epsilon)$, con $e^2 = 1$, entonces $a^2 + b^2 + 2abe = 0$, luego $a = b = 0$. Pero entonces $T(\epsilon) = 0$ y esto no es posible pues $\epsilon \neq 0$ y T debe ser inyectivo. □

Por la proposición anterior, existen tres clases de álgebras, ninguna isomorfa a la otra, en $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$: números hiperbólicos ($\Delta > 0$), números elípticos ($\Delta < 0$) y números parabólicos ($\Delta = 0$).

La razón de estos nombres se debe a que el conjunto $\{z \in \mathbb{C}_{\alpha,\beta} \ : \ |z|_{\alpha,\beta} = 1\}$ es una curva y una cónica; respectivamente, será una hipérbola, una elipse y un par de rectas (parábola degenerada). Véase por ejemplo [11].

Otros subconjuntos de $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$, también cambian con respecto al signo del discriminante Δ.

PROPOSICIÓN 4.4. *Sea*

$$Sing_{\alpha,\beta}$$

el conjunto de los divisores de cero, incluido el cero, en $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$. *Se verifican los siguientes enunciados:*

- *Si* $\Delta < 0$, *entonces* $Sing_{\alpha,\beta} = \{0\}$.
- *Si* $\Delta > 0$, *entonces* $Sing_{\alpha,\beta}$ *es la unión de dos rectas que pasan por el origen. Cuando* $\alpha = 0$ *estas rectas son* $x = 0$ *y* $y = \frac{x}{\beta}$. *Cuando* $\alpha \neq 0$ *estas rectas son* $y = \frac{(\beta+\sqrt{\Delta})x}{2\alpha}$ *y* $y = \frac{(\beta-\sqrt{\Delta})x}{2\alpha}$.
- *Si* $\Delta > 0$, *entonces* $Sing_{\alpha,\beta} = \{0\}$ *es una sola recta que pasa por el origen:* $x = \frac{\beta}{2}y$.

Demostración. Por la proposición 2.12, se cumple

$$Sing_{\alpha,\beta} = \{z \in \mathbb{C}_{\alpha,\beta} \ : \ |z|_{\alpha,\beta} = 0\}.$$

Cuando $\Delta < 0$, entonces el teorema 4.2 afirma que no hay divisores de cero y así $Sing_{\alpha,\beta} = \{0\}$.

Si $\Delta > 0$ y tomando en cuenta la ecuación (4.2), se cumple $z = x + iy$ está en $Sing_{\alpha,\beta}$ si y solo si

$$x^2 - \beta xy + \alpha y^2 = 0 \tag{4.3}$$

Cuando $\alpha = 0$, entonces $\beta \neq 0$, además se cumple que $x(x - \beta y) = 0$, así $x = 0$ o $y = \frac{x}{\beta}$. Cuando $\alpha \neq 0$, se usa la formula cuadrática en (4.3), viéndola como una ecuación de segundo grado en y, luego:

$$y = \frac{\beta x \pm \sqrt{(\beta^2 - 4\alpha)x^2}}{2\alpha},$$

lo que prueba lo requerido.

Si $\Delta = 0$, entonces $\alpha = \frac{\beta^2}{4}$, con lo cual (4.3) se convierte en

$$\left(x - \frac{\beta}{2}y\right)^2 = 0,$$

lo cual permite concluir que $x = \frac{\beta}{2}y$ como se requería.

□

Usando el teorema 2.14, se puede calcular las conjugaciones principales en $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$.

LEMA 4.5. *Si $z = x + iy$ es elemento de $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$, entonces $x - \beta y - iy$ cumple con ser solución de la ecuación característica* (2.10)*:*

$$P_z(t) = \det(\mathscr{M}(z) - Id \cdot t) = 0.$$

De esta manera, $x - \beta y - iy$ es una conjugación principal de z y no existen más soluciones de (2.10) *además de z. Se escribirá como $\overline{z}$ y cumple $z\overline{z} = |z|^2_{\alpha,\beta}$.*

Demostración. Se considera $z = x + iy$, y si $t = x - \beta y - iy$, entonces

$$\mathscr{M}(z) - Id \cdot t = \begin{pmatrix} x & -\alpha y \\ y & x - \beta y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x - \beta y - iy & 0 \\ 0 & x - \beta y - iy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta y + iy & -\alpha y \\ y & iy \end{pmatrix}$$

Luego

$$P_z(t) = (i\beta y^2 + (-\beta i - \alpha)y^2) + \alpha y^2 = 0.$$

Para probar que es la única, se nota que para $t \in \mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ arbitrario:

$$P_z(t) = 0 \Leftrightarrow t^2 + t(\beta y - 2x) + x^2 - \beta xy + \alpha y^2 = 0$$

que debe tener dos soluciones:

$$t = \frac{-\beta y + 2x \pm yu}{2}, \tag{4.4}$$

donde u es tal que $u^2 = \Delta$. Se puede comprobar que $(\beta + 2i)^2 = \Delta$, por tanto, reemplazando en (4.4) se tienen las soluciones

$$t_1 = x + iy = z, \qquad t_2 = x - \beta y - iy = \overline{z}.$$

Gracias al teorema 2.14, estas son todas las soluciones y satisfacen $z\overline{z} = \det(\mathscr{M}(z)) = |z|^2_{\alpha,\beta}$. □

OBSERVACIÓN. Dado el número $z \in \mathbb{C}_{\alpha,\beta}$, a su única conjugación principal $\overline{z}$, se la llamará simplemente el *conjugado* de z.

LEMA 4.6. *La magnitud*

$$|\cdot|_{\alpha,\beta} : \mathbb{C}_{\alpha,\beta} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

es una norma cuando $\Delta < 0$. *Caso contrario, es una seminorma.*

Demostración. Para todo $z, w \in \mathbb{C}_{\alpha,\beta}$, se considera la cantidad

$$\langle z, w\rangle_{\alpha,\beta} := \frac{z\overline{w} + w\overline{z}}{2},$$

cumple las siguientes propiedades:

- Para todo $z, w \in \mathbb{C}_{\alpha,\beta}$, $\langle z, w\rangle_{\alpha,\beta}$ es un número real. En efecto, si $z = x + iy$ y $w = x' + iy'$ entonces

  $$\overline{\overline{z}} = \overline{x - \beta y - iy} = x - \beta y + \beta y + iy = z$$

  y

  $$\begin{aligned}\overline{zw} &= \overline{xx' - \alpha yy' + i(xy' + yx' - \beta yy')} \\ &= xx' - \alpha yy' + \beta^2 yy' - \beta(xy' + yx') - i(xy' + yx' - \beta yy') \\ &= (x - \beta y - iy)(x' - \beta y' - iy') \\ &= \overline{z}\,\overline{w}.\end{aligned}$$

  Por tanto, si $y = z\overline{w} = y_1 + y_2 i$ entonces

  $$\langle z, w\rangle_{\alpha,\beta} = \frac{z\overline{w} + \overline{z\overline{w}}}{2} = \frac{2y_1 - \beta y_2}{2} \in \mathbb{R}.$$

- Simetría: Para todo $z, w \in \mathbb{C}_{\alpha,\beta}$, $\langle z, w\rangle_{\alpha,\beta} = \langle w, z\rangle_{\alpha,\beta}$.
- Bilinealidad: Para todo $z, z', w \in \mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ y $c \in \mathbb{R}$ se verifica que $\langle c(z+z'), w\rangle_{\alpha,\beta} = c\langle z, w\rangle_{\alpha,\beta} + \langle z', w\rangle_{\alpha,\beta}$.
- No negatividad: Para todo $z \in \mathbb{C}_{\alpha,\beta}$, $\langle z, z\rangle_{\alpha,\beta} \geq 0$.

Si es que $\Delta < 0$, entonces $0 = \langle z, z\rangle_{\alpha,\beta} = |z|^2_{\alpha,\beta}$ si y solo si $z = 0$, por tanto $\langle \cdot, \cdot\rangle$ es un producto interno real en $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ y $|\cdot|_{\alpha,\beta} = \sqrt{\langle \cdot, \cdot\rangle_{\alpha,\beta}}$ es una norma. Para los otros casos se tiene que $\langle z, z\rangle_{\alpha,\beta} = 0$ cuando z es un divisor de cero, en consecuencia $|\cdot|_{\alpha,\beta}$ solo puede ser una seminorma. $\square$

Se observa que, por lo anterior, $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ es un espacio de Hilbert real si y solo si $\Delta < 0$.

4.2. Funciones analíticas en números complejos generalizados

Gracias a las condiciones de Scheffers, introducidas en el capítulo 3, se tiene que una función

$$f : \Omega \subset \mathbb{C}_{\alpha,\beta} \to \mathbb{C}_{\alpha,\beta}$$

tal que f_1, f_2 tienen derivadas parciales continuas, es analítica si y solo si

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}(\mathbb{C}_{\alpha,\beta}).$$

Comparando la anterior matriz anterior con la ecuación (4.1), esto se traduce en que

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = -\alpha \frac{\partial f_2}{\partial x}, \tag{4.5}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \beta \frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}. \tag{4.6}$$

Por otro lado, las ecuaciones de Cauchy-Riemann generalizadas se transforman en

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} - i\frac{\partial}{\partial x}\right) f = 0. \tag{4.7}$$

En el álgebra $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$, al contrario de $\mathbb{C}$, no siempre se cumple que

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} - i\frac{\partial}{\partial x}\right) f = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) f = 0.$$

Para comprobar lo dicho, se considera el caso cuando $\alpha = -1$ y $\beta = 0$. De esta manera se cumple que $i^2 = 1$. Sea ahora

$$f(x,y) = x + iy$$

entonces $\left(\frac{\partial}{\partial y} - i\frac{\partial}{\partial x}\right) f = 0$, pero $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) f = 1$. Por otro lado, si se tiene

$$g(x,y) = x - iy$$

entonces $\left(\frac{\partial}{\partial y} - i\frac{\partial}{\partial x}\right) g = -2i$ y $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) f = 0$.

Considerando lo anterior, es claro que el operador de Cauchy-Riemann en $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ tendrá que ser

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{\partial}{\partial y} - i\frac{\partial}{\partial x}, \tag{4.8}$$

y su correspondiente operador conjugado siendo

$$\overline{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} := \frac{\partial}{\partial y} + \beta\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial x}. \tag{4.9}$$

Observación. En [3, Sec. C.7.1] también se ha definido un operador de Cauchy-Riemann en $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$. Se lo notará como

$$\partial_{\bar{z}} := \frac{S-\beta}{2S}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{S}\frac{\partial}{\partial y}.$$

Su respectivo conjugado es

$$\overline{\partial_{\bar{z}}} := \frac{S+\beta}{2S}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{S}\frac{\partial}{\partial y},$$

donde en ambos casos se ha definido $S := \beta + 2i$. Al igual que con el operador $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$, se tiene que una función hipercompleja f es analítica si y solo si

$$\partial_{\bar{z}} f = 0.$$

Esto se puede comprobar rápidamente observando que como $\frac{1}{S} = \frac{1}{\Delta}(\beta + 2i)$, entonces

$$\partial_{\bar{z}} = -\frac{\beta + 2i}{\Delta}\frac{\partial}{\partial \bar{z}},$$

con $\Delta = b^2 - 4\alpha$. Adicionalmente, se cumple que

$$\overline{\partial_{\overline{z}}} = \frac{\beta + 2i}{\Delta}\overline{\frac{\partial}{\partial \overline{z}}}.$$

La ventaja del operador de Cauchy-Riemann presentado en este trabajo es que está definido en $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$, para todos los valores de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; lo cual no es el caso de los operadores $\partial_{\overline{z}}$ y $\overline{\partial_{\overline{z}}}$ que solo están definidos cuando $\Delta \neq 0$.

Observación. Se puede mirar a los operadores $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}$ y $\overline{\frac{\partial}{\partial \overline{z}}}$ en el contexto del teorema 3.11.

En efecto, si $z_1 = y - ix$, entonces $|z_1|^2_{\alpha,\beta} = y^2 + \beta xy + \alpha x^2$ y por tanto

$$\Delta^{(1)}_{\mathbb{C}_{\alpha,\beta}} := \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \beta \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} + \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

Más aún, se cumple que si $f : \Omega \subset \mathbb{C}_{\alpha,\beta} \to \mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ es analítica en Ω y $f_1, f_2 \in C^2(\Omega)$ (sus derivadas parciales de segundo orden existen y son continuas), entonces

$$\Delta^{(1)}_{\mathbb{C}_{\alpha,\beta}} f = \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \beta \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} + \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) f = \left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\overline{\frac{\partial}{\partial \overline{z}}}\right) f = \left(\overline{\frac{\partial}{\partial \overline{z}}}\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right) f = 0$$

en Ω. El operador $\Delta^{(1)}_{\mathbb{C}_{\alpha,\beta}}$ es una generalización del operador laplaciano $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, tomando $\alpha = 1$ y $\beta = 0$. Además, otros resultados similares se pueden lograr cambiando los parámetros α y β. Si es que $\alpha < 0$ y $\beta = 0$, estamos en el caso de los números hiperbólicos, y las componentes f_1 y f_2 de una función hipercompleja analítica, satisfacen la ecuación de tipo onda:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},$$

con $c = \sqrt{-\alpha}$.

El operador conjugado de Cauchy-Riemman se relaciona con la derivada hipercompleja.

Lema 4.7. *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{C}_{\alpha,\beta} \to \mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ una función hipercompleja analítica, entonces*

$$\overline{\frac{\partial}{\partial \overline{z}}} f = (\beta + 2i) f', \tag{4.10}$$

en Ω.

Demostración. Como f es analítica se sabe que $\frac{\partial}{\partial \overline{z}} f = 0$ y $f' = \frac{\partial f}{\partial x}$ por el corolario 3.9.

De la primera ecuación se deduce que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = i\frac{\partial f}{\partial x}.$$

Reemplazando esto en (4.9), se obtiene que

$$\overline{\frac{\partial}{\partial \overline{z}}} f = (\beta + 2i)\frac{\partial f}{\partial x},$$

demostrando lo requerido $\square$

OBSERVACIÓN. El número $\beta + 2i$ es invertible si y solo si $\Delta \neq 0$. De la ecuación (4.10), se tiene que

$$\frac{\beta + 2i}{\Delta}\overline{\frac{\partial}{\partial \overline{z}}} f = f',$$

para todo f función hipercompleja analítica si y solo si $\Delta \neq 0$. Caso contrario, es decir para los números parabólicos, la derivada hipercompleja no es un múltiplo del operador conjugado.

EJEMPLO 12. Los polinomios z^n, con $n \in \mathbb{N}$ y $z = x + iy$, son analíticos en $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$. La prueba es por inducción:

- $n = 1$: Se cumple que

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} z = \left(\frac{\partial}{\partial y} - i\frac{\partial}{\partial x}\right)(x + iy) = i - i = 0$$

- $n = 2$: Se observa que $z^2 = x^2 - \alpha y^2 + 2xyi - \beta y^2 i$, por tanto

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \overline{z}} z^2 &= \left(\frac{\partial}{\partial y} - i\frac{\partial}{\partial x}\right)(x^2 - \alpha y^2 + 2xyi - \beta y^2 i)\\ &= -2\alpha y - 2\beta yi + 2xi - i(2x - 2yi)\\ &= -2\alpha y - 2\beta yi + 2yi^2 = 0\end{aligned}$$

- $n = k$. Se asume que $\frac{\partial}{\partial \overline{z}} z^{k-1} = 0$. Se debe probar que $\frac{\partial}{\partial \overline{z}} z^k = 0$. Para ello se nota que si dos funciones hipercomplejas son analíticas, entonces su producto también lo es. En efecto, sean $f, g : \Omega \subset \mathbb{C}_{\alpha,\beta} \to \mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ son tales que $\frac{\partial}{\partial \overline{z}} f = \frac{\partial}{\partial \overline{z}} g = 0$ en Ω, entonces:

$$\frac{\partial}{\partial x}(f(z)g(z)) = \left(\frac{\partial}{\partial x} f(z)\right) g(z) + f(z)\left(\frac{\partial}{\partial x} g(z)\right).$$

Lo anterior se puede comprobar para cualquier álgebra hipercompleja. Similarmente para la derivada con respecto a y. Luego

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \overline{z}}(f(z)g(z)) = &\left(\frac{\partial}{\partial x}f(z)\right)g(z) + f(z)\left(\frac{\partial}{\partial x}g(z)\right)\\ &- i\left(\left(\frac{\partial}{\partial y}f(z)\right)g(z) + f(z)\left(\frac{\partial}{\partial y}g(z)\right)\right)\\ =&\frac{\partial f(z)}{\partial \overline{z}}g(z) + \frac{\partial g(z)}{\partial \overline{z}}f(z) = 0.\end{aligned}$$

Como z y z^{k-1} son analíticas, se concluye que su producto z^k lo es también.

Debido a que todas las funciones z^n son analíticas, entonces por el corolario 3.9 se tiene que $(z^n)' = \frac{\partial}{\partial x}z^n$, al igual que antes se puede comprobar por inducción que $(z^n)' = nz^{n-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}^+$, haciendo uso de la regla del producto para la derivada hipercompleja en el teorema 3.7. Por último, usando el lema 4.7 se cumple que

$$\overline{\frac{\partial}{\partial \overline{z}}}z^n = (\beta + 2i)(z^n)' = (\beta + 2i)nz^{n-1}.$$

Observación. Como se había dicho antes, la proposición 3.1 que es válida en $\mathbb{C}$, no necesariamente lo es para un álgebra hipercompleja arbitraria V. El siguiente enunciado se puede encontrar en [2], junto con su demostración, y da un contraejemplo en el álgebra de los números dobles $\mathbb{C}_{-1,0}$:

Proposición 4.8. *Sea $V = \mathbb{C}_{-1,0}$ el álgebra de los números dobles y*

$$e^z := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!},$$

entonces $e^z : V \to V$ es un función analítica u holomorfa. Además, la función

$$g(z) = \begin{cases} e^{-1\frac{1}{z^2}} & si\ \ |z|^2_{-1,0} \neq 0, \\ \frac{1}{2}(1 \pm i)e^{-\frac{1}{4x^2}} & si\ \ |z|^2_{-1,0} = 0,\ pero\ z \neq 0, \\ 0 & si\ \ z = 0. \end{cases}$$

es también analítica en todo V. Sin embargo, para todo $z_0 \in Sing_{-1,0}$, se cumple que $g(z_0)$ no puede ser expresada como una serie de potencias centrada en z_0 y que converja para alguna vecindad de z_0.

Capítulo 5

Funciones analíticas fraccionarias

En [5] y [6] se desarrolla la noción de función analítica fraccionaria, en el ámbito de las álgebras $\mathbb{C}$ y $\mathbb{BC}$, respectivamente. Estas funciones cumplen las condiciones de Scheffers o condiciones de Cauchy-Riemann generalizadas cuando los operadores diferenciales ordinarios son reemplazados por operadores fraccionarios, específicamente por la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville.

Más aún, en los mismos trabajos, se construyen los cimientos para definir funciones analíticas fraccionarias que sean análogas a las funciones elementales usadas en el cálculo, por ejemplo la función exponencial y las funciones trigonométricas. La idea principal se da al observar que, en el caso complejo, las funciones

$$e^z, \cos(z), \sin(z)$$

pueden ser expresadas de la forma

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{z^n}{n!},$$

para algunas constantes reales c_k. En este sentido, los polinomios $Z^n := \frac{z^n}{n!}$ son de especial importancia y cumplen dos propiedades centrales:

$$\frac{d}{d\overline{z}} Z^n = 0 \tag{5.1}$$

y

$$\frac{d}{dz} Z^n = (Z^n)' = Z^{n-1}. \tag{5.2}$$

El objetivo de este capítulo es definir y entender las propiedades de las funciones analíticas fraccionarias en el álgebra $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ y construir polinomios fraccionarios $Z^n_{\alpha,\beta}$

que cumplan las propiedades (5.1) y (5.2) para el operador de Cauchy-Riemann y su conjugado, respectivamente.

5.1. Funciones fraccionarias analíticas en dos dimensiones

Sea el dominio

$$\Omega = [x_0, x_1] \times [y_0, y_1],$$

donde $[x_0, x_1]$ y $[y_0, y_1]$ son intervalos reales acotados y sean dos escalares reales positivos r_0 y r_1. De aquí en adelante, estos elementos serán fijos y de ellos dependerán todos los conceptos presentados.

Utilizando la ecuación (4.7) se define el operador fraccionario de Cauchy-Riemann fraccionario de orden $r := (r_0, r_1)$ en $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ como

$$D_+^r := D_{y_0}^{r_1} - iD_{x_0}^{r_0},$$

su conjugado será

$$\overline{D_+^r} := D_{y_0}^{r_1} + \beta D_{x_0}^{r_0} + iD_{y_0}^{r_1}.$$

DEFINICIÓN 5.1. *Una función hipercompleja*

$$f : \Omega \subseteq \mathbb{C}_{\alpha,\beta} \to \mathbb{C}_{\alpha,\beta}$$

se dirá fraccionaria analítica en Ω, si es que $D_+^r f$ existe y además

$$D_+^r f = 0, \tag{5.3}$$

en Ω. Una función $f_1 : \Omega \subset \mathbb{C}_{\alpha,\beta} \to \mathbb{R}$ se dirá que pertenece a $AC^n(\Omega)$ si es que para cada $y \in [y_0, y_1]$, la función

$$x \to f_1(x, y)$$

pertenece a $AC^n[x_0, x_1]$; y para cada $x \in [x_0, x_1]$ la función

$$y \to f_1(x, y)$$

pertenece a $AC^n[y_0, y_1]$.

OBSERVACIÓN. Cuando $r_0 = 1$ y $r_1 = 1$ se tiene que el operador D_+^r coincide con el operador de Cauchy-Riemann $\frac{\partial}{\partial z}$. Similarmente, para los respectivos operadores conjugados.

Por otro lado, si $f = f_1 + if_2$ y cumple (5.3), entonces como las derivadas de Riemann-Liouville son lineales, se cumple que

$$D^{r_1}_{y_0} f_1 = -\alpha D^{r_0}_{x_0} f_2 \tag{5.4}$$

$$D^{r_0}_{x_0} f_1 = \beta D^{r_0}_{x_0} f_2 + D^{r_1}_{y_0} f_2. \tag{5.5}$$

que justamente coinciden con las ecuaciones (4.5) y (4.6) cuando $r_0 = 1$ y $r_1 = 1$.

Además, por facilidad al calcular, así como se hizo para el caso de las álgebras $\mathbb{C}$ y $\mathbb{BC}$ en [5] y [6], en adelante se asumirá que $r_0, r_1 \in (0,1)$.

A continuación estudiamos la linealidad de los operadores D^r_+ y $\overline{D^r_+}$.

Teorema 5.1. *Para cada par de funciones hipercomplejas $f, g : \Omega \subset \mathbb{C}_{\alpha,\beta} \to \mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ con $f = f_1 + if_2$ y $g = g_1 + ig_2$ tales que $f_j, g_j \in AC^1(\Omega)$ para $j \in [\![1,2]\!]$, se tiene que:*

$$D^r_+(f+g) = D^r_+ f + D^r_+ g,$$

$$\overline{D^r_+}(f+g) = \overline{D^r_+} f + \overline{D^r_+} g.$$

Además, para todo $k \in \mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ se cumple que

$$D^r_+(kf) = kD^r_+(f) \qquad y \qquad \overline{D^r_+}(kf) = k\overline{D^r_+}(f).$$

Demostración. Gracias a la hipótesis en las componentes f_j y g_j y la definición de $AC^n(\Omega)$, se tiene que estas funciones son absolutamente continuas cuando se las ve como funciones de una sola variable, es decir, que las funciones $x \mapsto f_j(x,y)$ pertenecen a $AC^n[x_0,x_1]$ y las funciones $y \mapsto f_j(x,y)$ pertencen a $AC^n[y_0,y_1]$ para todo $j \in [\![1,2]\!]$ y $x, y \in \Omega$.

Luego, por el teorema 2.22, se tiene que las derivadas $D^{r_1}_{y_0} f_j$ y $D^{r_0}_{x_0} f_j$ existen para $j \in [\![1,2]\!]$; con lo cual $D^r_+ f$ y $D^r_+ g$ están bien definidas. Más aún, como $AC^1[x_0,x_1]$ y $AC^1[y_0,y_1]$ son espacios vectoriales, entonces $AC^1(\Omega)$ también lo es y así $D^r_+(f+g)$, $\overline{D^r_+}(f+g)$ existen.

Luego, calculando

$$\begin{aligned} D^r_+(f+g) &= \begin{pmatrix} D^{r_1}_{y_0}(f_1+g_1) + \alpha D^{r_0}_{x_0}(f_2+g_2) \\ -D^{r_0}_{x_0}(f_1+g_1) + D^{r_1}_{y_0}(f_2+g_2) + \beta D^{r_0}_{x_0}(f_2+g_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} D^{r_1}_{y_0} f_1 + \alpha D^{r_0}_{x_0} f_2 \\ -D^{r_0}_{x_0} f_1 + D^{r_1}_{y_0} f_2 + \beta D^{r_0}_{x_0} f_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D^{r_1}_{y_0} g_1 + \alpha D^{r_0}_{x_0} g_2 \\ -D^{r_0}_{x_0} g_1 + D^{r_1}_{y_0} g_2 + \beta D^{r_0}_{x_0} g_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= D^r_+ f + D^r_+ g.$$

Similarmente se prueba que $D^r_+(kf) = kD^r_+(f)$. Para probar las propiedades con $\overline{D^r_+}$, se nota que

$$\overline{D^r_+} f = \overline{D^r_+ \overline{f}}. \tag{5.6}$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
\overline{D^r_+}\,\overline{f} &= (D^{r_1}_{y_0} + \beta D^{r_0}_{x_0} + iD^{r_0}_{x_0})(f_0 - \beta f_1 - if_1) \\
&= D^{r_1}_{y_0} f_0 - \beta D^{r_1}_{y_0} f_1 + \beta D^{r_0}_{x_0} f_0 + (\alpha - \beta^2) D^{r_0}_{x_0} f_1 + i(D^{r_0}_{x_0} f_0 - D^{r_1}_{y_0} f_1 - \beta D^{r_0}_{x_0} f_1)
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\overline{D^r_+ f} &= \overline{D^{r_1}_{y_0} f_0 + \alpha D^{r_0}_{x_0} f_1 + i(D^{r_1}_{y_0} f_1 + \beta D^{r_0}_{x_0} f_1 - D^{r_0}_{x_0} f_0)} \\
&= D^{r_1}_{y_0} f_0 - \beta D^{r_1}_{y_0} f_1 + \beta D^{r_0}_{x_0} f_0 + (\alpha - \beta^2) D^{r_0}_{x_0} f_1 + i(D^{r_0}_{x_0} f_0 - D^{r_1}_{y_0} f_1 - \beta D^{r_0}_{x_0} f_1).
\end{aligned}$$

Luego $\overline{D^r_+}\,\overline{f} = \overline{D^r_+ f}$ y como $\overline{\overline{f}} = f$, se prueba (5.6). Como $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$ para todo $z, w \in \mathbb{C}_{\alpha,\beta}$, se cumple que

$$\overline{D^r_+}(f+g) = \overline{D^r_+ \overline{f+g}} = \overline{D^r_+(\overline{f}+\overline{g})} = \overline{D^r_+ \overline{f} + D^r_+ \overline{g}} = \overline{D^r_+ \overline{f}} + \overline{D^r_+ \overline{g}} = \overline{D^r_+} f + \overline{D^r_+} g$$

y

$$\overline{D^r_+}(kf) = \overline{D^r_+ \overline{kf}} = \overline{D^r_+ \overline{k}\,\overline{f}} = \overline{\overline{k}\, D^r_+ \overline{f}} = k\overline{D^r_+ \overline{f}} = k\overline{D^r_+}(f).$$

$\square$

OBSERVACIÓN. Cuando $\Delta \neq 0$, usando el lema 4.7 se tiene que el operador conjugado $\overline{\frac{\partial}{\partial \overline{z}}}$ es un múltiplo de la derivada hipercompleja. Los resultados del teorema anterior para el operador fraccionario conjugado $\overline{D^r_+}$ son así análogos, en el ámbito fraccionario, a los hechos en el teorema 3.7 para la derivada hipercompleja.

TEOREMA 5.2. *Si es que una función hipercompleja*

$$f : \Omega \subset \mathbb{C}_{\alpha,\beta} \to \mathbb{C}_{\alpha,\beta}$$

con $f = f_1 + if_2$, cumple la siguiente hipótesis:

***H1**: Para $j \in [\![1,2]\!]$ se tiene que $f_j \in AC^2(\Omega)$ y para todo $x \in [x_0, x_1]$, $y \in [y_0, y_1]$ se cumple*

$$f_1(x, y_0) = f_2(x_0, y) = 0.$$

Entonces $D_+^r f$, $\overline{D_+^r} f$ existen y además

$$\overline{D_+^r} D_+^r f = D_+^r \overline{D_+^r} f.$$

Demostración. Por el teorema 2.23 y de la definición de $AC^2(\Omega)$ se obtiene que $D_{y_0}^{r_1} f_j$, $D_{x_0}^{r_0} f_j$ existen para $j \in [\![1,2]\!]$ y además conmutan:

$$D_{y_0}^{r_1} D_{x_0}^{r_0} f_j = D_{x_0}^{r_0} D_{y_0}^{r_1} f_j,$$

$$D_{y_0}^{r_1} D_{y_0}^{r_1} f_j = D_{y_0}^{2r_1} f_j,$$

$$D_{x_0}^{r_0} D_{x_0}^{r_0} f_j = D_{x_0}^{2r_0} f_j.$$

De donde, D_+^r y $\overline{D_+^r}$ existen y también conmutan, con:

$$\overline{D_+^r} D_+^r f = D_+^r \overline{D_+^r} f = (D_{y_0}^{2r_1} + \beta D_{x_0}^{r_0} D_{y_0}^{r_1} + \alpha D_{x_0}^{2r_0}) f.$$

□

OBSERVACIÓN. Nótese que el operador

$$D_{y_0}^{2r_1} + \beta D_{x_0}^{r_0} D_{y_0}^{r_1} + \alpha D_{x_0}^{2r_0}$$

es la versión fraccionaria del operador $\Delta_{\mathbb{C}_{\alpha,\beta}}^{(1)}$ y coinciden cuando $r = (r_0, r_1) = (1,1)$. Es claro, por el teorema anterior, que una función fraccionaria analítica $f : \Omega \subset \mathbb{C}_{\alpha,\beta} \to \mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ que cumpla **H1** satisface la ecuación en derivadas fraccionarias:

$$(D_{y_0}^{2r_1} + \beta D_{x_0}^{r_0} D_{y_0}^{r_1} + \alpha D_{x_0}^{2r_0}) f = 0,$$

al igual que sus componentes f_1, f_2. Esto es un análogo al teorema 3.11 cuando $V = \mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ y las derivadas ordinarias son reemplazadas por derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville.

5.2. Polinomios fraccionarios analíticos

En concordancia con el trabajo de [5], para $s \in (0,1)$ y un número natural n se define el polinomio fraccionario real de Riemann-Liouville de orden n, como:

$$X^{s,n} = \frac{(x - x_0)^{(n+1)s-1}}{\Gamma(s)\Gamma((n+1)s)}, \tag{5.7}$$

definido para todo $x \in [x_0, x_1]$. Las propiedades de las funciones $X^{s,n}$ se resumen a continuación.

LEMA 5.3. *Para $r_0 \in (0,1)$ se cumple que*

$$D_{x_0}^{r_0} X^{r_0,0} = 0 \tag{5.8}$$

y para $n \in \mathbb{N}^+$:

$$D_{x_0}^{r_0} X^{r_0,n} = X^{r_0,n-1}. \tag{5.9}$$

Demostración. Por el ejemplo 8, se tiene, para todo $n \in \mathbb{N}^+$, que

$$\begin{aligned} D_{x_0}^{r_0}(x-x_0)^{(n+1)r_0-1} &= \frac{\Gamma((n+1)r_0-1+1)}{\Gamma((n+1)r_0-1+1-r_0)}(x-x_0)^{(n+1)r_0-1-r_0} \\ &= \frac{\Gamma((n+1)r_0)}{\Gamma(nr_0)}(x-x_0)^{nr_0-1} \end{aligned}$$

Multiplicando a ambos lados por $\frac{1}{\Gamma(r_0)\Gamma((n+1)r_0)}$ se obtiene:

$$D_{x_0}^{r_0} X^{r_0,n} = \frac{(x-x_0)^{nr_0-1}}{\Gamma(r_0)\Gamma(nr_0)} = X^{r_0,n-1}.$$

Para probar (5.8), se usa el lema 2.20, notando que $\lceil r_0 \rceil = 1$ y así $D_{x_0}^{r_0} f = 0$ si y solo si

$$f(x) = c_1(x-x_0)^{r_0-1}$$

para alguna constante real c_1. Eligiendo $c_1 = \frac{1}{(\Gamma(r_0))^2}$ se obtiene que

$$f = c_1(x-x_0)^{r_0-1} = \frac{1}{(\Gamma(r_0))^2}(x-x_0)^{r_0-1} = \frac{(x-x_0)^{(0+1)s-1}}{\Gamma(r_0)\Gamma((0+1)r_0)} = X^{r_0,0},$$

probando lo requerido. □

Se puede pensar en los polinomios $X^{r_0,n}$ como la versión fraccionaria de los polinomios reales $\frac{x^n}{n!}$ y a $X^{r_0,0}$ como el polinomio constante para la derivada fraccionaria $D_{x_0}^{r_0}$. En efecto, cuando $x_0 = 0$ y $r_0 \to 1^-$ en (5.7), se tiene que

$$\lim_{r_0 \to 1^-} X^{r_0,n} = \frac{x^{(n+1)-1}}{\Gamma(1)\Gamma(n+1)} = \frac{x^n}{n!}$$

ya que $\Gamma(n) = (n-1)!$ y es continua en su dominio.

OBSERVACIÓN. Se usará la notación $Y^{r_1,n}$ para referirse a la función

$$\frac{(y-y_0)^{(n+1)r_1-1}}{\Gamma(r_1)\Gamma((n+1)r_1)}.$$

A partir de los polinomios fraccionarios reales, el siguiente objetivo es crear polinomios fraccionarios hipercomplejos

$$Z^{r,n}_{\alpha,\beta} : \Omega \subset \mathbb{C}_{\alpha,\beta} \to \mathbb{C}_{\alpha,\beta},$$

con $r = (r_0, r_1)$ y $n \in \mathbb{N}$, que sean analíticos, es decirm se busca

$$D^r_+ Z^{r,n}_{\alpha,\beta} = 0. \tag{5.10}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Como sustituto de la derivada hipercompleja, se usará el operador $\overline{D^r_+}$, ya que para $\Delta \neq 0$ es un múltiplo de la misma. De esta manera se pide adicionalmente que

$$\overline{D^r_+} Z^{r,n}_{\alpha,\beta} = Z^{r,n-1}_{\alpha,\beta}, \tag{5.11}$$

para todo $n \in \mathbb{N}^+$, en concordancia con las condiciones (5.2) y (5.9). Cabe preguntarse si exigir la condición (5.11) es válido para cuando $\Delta = 0$; como se verá, está condición hace que $Z^{r,n}_{\alpha,\beta} = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

En primer lugar, se toma en cuenta el anillo $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}[x, y]$ de todos los polinomios con coeficientes en $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ en las variables x e y. Es evidente que todos tendrán la forma

$$\sum_{l=0}^{n} \sum_{k=0}^{l} A^l_{k,n} x^{l-k} y^k$$

donde $A^l_{k,n} \in \mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ para todo k, n, l y n es el grado del polinomio. Esto motiva la siguiente definición.

DEFINICIÓN 5.2. *Una polinomio fraccionario hipercomplejo de grado $n \in \mathbb{N}$ es una función $Z^{r,n}_{\alpha,\beta}$, con*

$$Z^{r,n}_{\alpha,\beta} : \Omega \subset \mathbb{C}_{\alpha,\beta} \to \mathbb{C}_{\alpha,\beta},$$

de la forma:

$$\sum_{l=0}^{n} \sum_{k=0}^{l} A^l_{k,n} X^{r_0, l-k} Y^{r_1, k}.$$

OBSERVACIÓN. Para facilitar los cálculos, se acortará la notación con las siguientes convenciones:

$$X^n := X^{r_0,n},$$

$$Y^n := Y^{r_1,n},$$

$$Z^n := Z^{r,n}_{\alpha,\beta},$$

donde, como se ha dicho antes, $r_0, r_1 \in (0, 1)$ son constantes fijas y $r = (r_0, r_1)$.

TEOREMA 5.4. *Sea* $(Z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de polinomios fraccionarios hipercomplejos tal que satisface las condiciones* (5.10) *y* (5.11). *Entonces:*

$$Z^n = 0 \qquad \textit{para todo } n \in \mathbb{N}$$

implica que $\Delta = \beta^2 - 4\alpha = 0$.

Demostración. Supóngase que $\Delta \neq 0$, se debe hallar una sucesión de polinomios fraccionarios hipercomplejos $(Z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ no todos igual a cero, tal que cumplan (5.10) y (5.11). Tómese

$$Z^n = \sum_{k=0}^{n} i^k(\beta+2i)^{-n}X^{n-k}Y^k, \tag{5.12}$$

donde $(\beta+2i)^{-n} = ((\beta+2i)^{-1})^n$ y $\beta+2i$ es invertible porque $\Delta \neq 0$. Entonces

$$D_{y_0}^{r_1}Z^n = D_{y_0}^{r_1}\left(\sum_{k=0}^{n} i^k(\beta+2i)^{-n}X^{n-k}Y^k\right) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} i^{k+1}(\beta+2i)^{-n}X^{n-k-1}Y^k\right),$$

pues $D_{y_0}^{r_1}Y^k = Y^{k-1}$ y $D_{y_0}^{r_1}Y^0 = 0$. Similarmente

$$D_{x_0}^{r_0}Z^n = \left(\sum_{k=0}^{n-1} i^k(\beta+2i)^{-n}X^{n-k-1}Y^k\right).$$

De donde, $D_+^r(Z^n) = D_{y_0}^{r_1}(Z^n) - iD_{x_0}^{r_0}(Z^n) = 0$. Por otro lado

$$\begin{aligned}
\overline{D_+^r}(Z^n) &= D_{y_0}^{r_1}(Z^n) + \beta D_{x_0}^{r_0}(Z^n) + iD_{x_0}^{r_0}(Z^n)\\
&= \left(\sum_{k=0}^{n-1}(i^{k+1} + \beta i^k + i^{k+1})(\beta+2i)^{-n}X^{n-k-1}Y^k\right)\\
&= \left(\sum_{k=0}^{n-1} i^k(\beta+2i)(\beta+2i)^{-n}X^{n-k-1}Y^k\right)\\
&= \left(\sum_{k=0}^{n-1} i^k(\beta+2i)^{-(n-1)}X^{n-k-1}Y^k\right)\\
&= Z^{n-1}.
\end{aligned}$$

De esta manera los polinomios $Z^n_{n\in\mathbb{N}}$ definidos por (5.12) son distintos de cero, cumplen con (5.10) y (5.11); el enunciado del teorema se consigue por contrapositiva. □

De esta manera, cuando $\Delta \neq 0$ se asegura la existencia de polinomios fraccionarios hipercomplejos Z^n, con $n \in \mathbb{N}$ usando la ecuación (5.12). Estos polinomios no todos son iguales a 0, son analíticos y cumplen que $\overline{D_+^r}Z^n = Z^{n-1}$. Cuando $\Delta = 0$ polinomios fraccionarios hipercomplejos con las anteriores propiedades no pueden construirse, como lo ilustra el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 13. Sea $V = \mathbb{C}_{0,0}$ es decir el álgebra de los números duales. Entonces $\Delta = 0$, $i^2 = 0$, $D^r_+ = D^{r_1}_{y_0} - iD^{r_0}_{x_0}$ y $\overline{D^r_+} = D^{r_1}_{y_0} + iD^{r_0}_{x_0}$. Supóngase que existe una sucesión de polinomios fraccionarios hipercomplejos que cumpla (5.10) y (5.11). Por lo tanto

$$\begin{aligned}(D^{r_1}_{y_0} - iD^{r_0}_{x_0})Z^n &= 0,\\ (D^{r_1}_{y_0} + iD^{r_0}_{x_0})Z^n &= Z^{n-1},\end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}^+$. Si es que $Z^n = Z^n_1 + iZ^n_2$, entonces lo anterior se traduce en

$$\begin{aligned}D^{r_1}_{y_0}Z^n_1 + iD^{r_1}_{y_0}Z^n_2 - iD^{r_0}_{x_0}Z^n_1 &= 0\\ D^{r_1}_{y_0}Z^n_1 + iD^{r_1}_{y_0}Z^n_2 + iD^{r_0}_{x_0}Z^n_1 &= Z^{n-1}.\end{aligned}$$

Restando estas ecuaciones se deduce que

$$2iD^{r_0}_{x_0}Z^n_1 = Z^{n-1}.$$

Sin embargo, se observa que $D^{r_0}_{x_0}Z^n_1$ es un número real, por lo tanto Z^{n-1} no tiene parte real, es decir, $Z^{n-1}_1 = 0$ y $Z^{n-1}_2 = 2iD^{r_0}_{x_0}Z^n_1$. Pero por el mismo razonamiento, usando $n+1$, se tiene que $Z^n_1 = 0$, de donde $Z^{n-1}_2 = 2i0 = 0$. Así,

$$Z^{n-1} = 0$$

para todo $n \in \mathbb{N}^+$.

5.2.1. Caso límite

Como se ha visto en todo el capítulo, cuando $r_0 = r_1 = 1$ se recupera el caso hipercomplejo con derivadas ordinarias y se observó que los polinomios fraccionarios reales $X^{s,n}$ convergen a los polinomios $\frac{x^n}{n!}$. Cabe preguntarse bajo que condiciones, para un función hipercompleja arbitraria, se puede asegurar la convergencia cuando $r_0 \to 1^-$ y $r_1 \to 1^-$.

TEOREMA 5.5. *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{C}_{\alpha,\beta} \to \mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ una función hipercompleja tal que es fraccionaria analítica en Ω para una sucesión de pares*

$$r_n = (r_{0,n}, r_{1,n})$$

con $r_{i,n} \in (0,1)$, para $i \in [\![1,2]\!]$ y todo $n \in \mathbb{N}$. Además, supóngase que $f_i \in C^1(\Omega)$ y

$r_{i,n} \to 1^-$; para $i \in [\![1,2]\!]$. Entonces,

$$f : \Omega' \subset \mathbb{C}_{\alpha,\beta} \to \mathbb{C}_{\alpha,\beta}$$

es analítica, con

$$\Omega' = (x_0, x_1] \times (y_0, y_1].$$

Demostración. Dado que $C^1(\Omega) \subset AC^1(\Omega)$ entonces del teorema 5.1 se tiene que en efecto $D_+^{r_n} f$ está bien definido. Aplicando el teorema 2.24, se tiene que

$$\left(D_{x_0}^{r_{0,n}}\right) f_i(x,y) \to \frac{\partial f_i}{\partial x}(x,y)$$

cuando $n \to \infty$, $x \in (x_0, x_1]$, $y \in [y_0, y_1]$ y $i \in [1,2]$. Similarmente,

$$\left(D_{y_0}^{r_{1,n}}\right) f_i(x,y) \to \frac{\partial f_i}{\partial y}(x,y)$$

cuando $n \to \infty$, $y \in (y_0, y_1]$, $x \in [x_0, x_1]$ y $i \in [1,2]$. Como $D_+^{r_n} f(x) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $x \in \Omega$; aplicando las convergencias anteriores, se tendrá que

$$0 = D_+^{r_n} f(x) \to \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(x)$$

para todo $x \in \Omega'$. $\square$

Capítulo 6

Conclusiones y trabajo futuro

6.1. Conclusiones

- La representación matricial $\mathscr{M}$ de un álgebra hipercompleja V, permitió caracterizar de manera sencilla al conjunto de sus divisores de cero, justificando completamente así la definición de derivada hipercompleja y sus propiedades generales. Además, justificó la definición de conjugado, usando la ecuación característica.

- La formulación de las condiciones de Scheffers, por medio de la representación matricial, como se ilustra en el teorema 3.8, permitió la demostración de las condiciones de Cauchy-Riemann generalizadas, sin necesidad de usar formas diferenciales como en [3]. Esto tuvo ventajas al momento de definir el operador de Cauchy-Riemann $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ y en la demostración del teorema 3.11.

- El operador conjugado de Cauchy-Riemann $\overline{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}}$ en $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$ es un múltiplo de la derivada hipercompleja y como tal puede ser usado como sustituto, además tiene la ventaja, junto con el operador de Cauchy-Riemann de ofrecer una factorización de un operador diferencial de grado superior: $\Delta^{(1)}_{\mathbb{C}_{\alpha,\beta}}$, que es una generalización del operador de Laplace.

- El operador conjugado de Cauchy-Riemann no puede considerarse un buen sustituto de la derivada hipercompleja en $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$, cuando $\beta^2 - 4\alpha = 0$. Como lo ilustra el teorema 5.4, polinomios fraccionarios hipercomplejos que satisfagan (5.10) y (5.11) solo pueden ser construidos por medio de la fórmula (5.12) para números hiperbólicos y elípticos, imposibilitando la creación de funciones elementales fraccionarias para los números parabólicos .

6.2. Trabajo futuro

- Generalizar el concepto de funciones fraccionarias analíticas para álgebras de mayor dimensión a la de los números complejos generalizados $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$, usando para el efecto las ecuaciones de Cauchy-Riemann generalizadas.

- Estudiar una generalización del teorema 3.11 que pueda ser aplicado para funciones fraccionarias analíticas, esto también permitirá tener operadores laplacianos fraccionarios, similares a los operadores $\Delta_V^{(l)}$.

- Utilizar los polinomios fraccionarios hipercomplejos descritos en el teorema 5.4 para definir funciones analíticas fraccionarias elementales, es decir que sean sustitutos de la función exponencial y funciones trigonométricas en $\mathbb{C}_{\alpha,\beta}$, de la forma:
$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n Z^n$$
donde C_n son constantes reales.

- Establecer qué operador en lugar de $\overline{D_+^r}$ es necesario usar cuando $\Delta = \beta^2 - 4\alpha = 0$ para obtener polinomios fraccionarios hipercomplejos que cumplan con ser analíticos y sean adecuados para aplicaciones.

Bibliografía

[1] Ablamowicz, R., Baylis, W. E., Branson, T., Lounesto, P., Porteous, I., Ryan, J., Selig, J. M., y Sobczyk, G. *Lectures on Clifford (Geometric) Algebras and Applications*. Birkhäuser Boston, 2004.

[2] Antonuccio, F. *Semi-complex analysis & mathematical physics (corrected version)*. arXiv: General Relativity and Quantum Cosmology, 1993.

[3] Boccaletti, D., Cannata, R., Catoni, V., Nichelatti, E., y Zampetti, P. *The Mathematics of Minkowski Space-Time*. Birkhäuser Basel, 2008.

[4] Brackx, F., Delanghe, R., y Sommen, F. *Clifford analysis*, volume 76 of *Research Notes in Mathematics*. Pitman Books Limited, 1982.

[5] Ceballos, J., Coloma, N., Teodoro, A. D., y Ochoa–Tocachi, D. *Generalized fractional Cauchy–Riemann operator associated with the fractional Cauchy–Riemann operator*. Advances in Applied Clifford Algebras, 30(5), October 2020.

[6] Coloma, N., Teodoro, A. D., Ochoa-Tocachi, D., y Ponce, F. *Fractional elementary bicomplex functions in the Riemann–Liouville sense*. Advances in Applied Clifford Algebras, 31(4), August 2021.

[7] Delanghe, R., Sommen, F., y Souček, V. *Clifford Algebra and Spinor-Valued Functions*. Springer Netherlands, 1992.

[8] Dickson, L. E. *Linear Algebras*. Cambridge University press, Chicago, 2015.

[9] Diethelm, K. *The Analysis of Fractional Differential Equations*. Springer Berlin Heidelberg, 2010.

[10] Ferreira, M. y Vieira, N. *Eigenfunctions and Fundamental Solutions of the Fractional Laplace and Dirac Operators: The Riemann-Liouville Case*. Complex Analysis and Operator Theory. 10(5):1081–1100, 2016.

[11] Fjelstad, P. y Gal, S. G. *Two-dimensional geometries, topologies, trigonometries and physics generated by complex-type numbers*. Advances in Applied Clifford Algebras, 11(1):81–107, 2001.

[12] Folland, G. B. *Real analysis : modern techniques and their applications*. Wiley, New York, 1999.

[13] Herstein, I. *Topics in algebra*. Xerox College Publications, Waltham, Mass, 1964.

[14] Kähler, U. y Vieira, N. *Fractional Clifford analysis*. Bernstein, S., Kähler, U., Sabadini, I., y Sommen, F., editors, Hypercomplex Analysis: New Perspectives and Applications, 191–201, Cham, 2014. Springer International Publishing.

[15] Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., y Trujillo, J. J. *Theory and applications of fractional differential equations*. Elsevier, Amsterdam, 2006.

[16] Luna-Elizarrarás, M. E., Shapiro, M., Struppa, D. C., y Vajiac, A. *Bicomplex Holomorphic Functions*. Springer International Publishing, 2015.

[17] Podlubny, I. *Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*. Academic Press, San Diego, 1999.

[18] Roman, S. *Advanced Linear Algebra*. Springer New York, 2005.

[19] Salimov, A. A., Cengiz, N., y Asl, M. B. *On holomorphic hypercomplex connections*. 23(1):179–207, 2012.

[20] Samko, S. G., Kilbas, A. A., y Marichev, O. I. *Fractional integrals and derivatives: Theory and Applications*. Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam, 1993.

[21] Scheffers, G. *Sur la généralisation des fonctions analytiques*. Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences, 116:1114–1117, 1893.

[22] Scorza, G. *Corpi numerici e algebre*. Casa Editrice Giuseppe Principato, Mesina, 1921.

[23] Soh, C. W. y Mahomed, F. M. *Hypercomplex analysis and integration of systems of ordinary differential equations*. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 39(14):4139–4157, 2016.

[24] Stein, E. *Complex analysis*. Princeton University Press, Princeton, 2003.

[25] Study, E. *Über systeme complexer zahlen und ihre anwendung in der theorie der transformationsgruppen*. Monatshefte für Mathematik und Physik, 1(1):283– 354, 1890.

[26] Yaglom, I. *Three types of complex numbers*. Complex Numbers in Geometry, 1–25. Elsevier, 1968.

[27] Yaglom, I. *A Simple Non-Euclidean Geometry and Its Physical Basis*. Springer New York, 1979.