

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

MAESTRÍA EN OPTIMIZACIÓN MATEMÁTICA

**CONTROL ÓPTIMO NO CONVEXO DE
ECUACIONES DIFERENCIALES ELÍPTICAS
CON RESTRICCIONES PUNTUALES DE
ESTADO**

**TESIS PREVIA A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE
MAGÍSTER EN OPTIMIZACIÓN MATEMÁTICA**

DIEGO MAURICIO VARGAS JARAMILLO
diego.vargas@epn.edu.ec

DIRECTOR: DR. PEDRO MARTÍN MERINO ROSERO
pedro.merino@epn.edu.ec

QUITO, FEBRERO DE 2022

DECLARACIÓN

Yo, Diego Mauricio Vargas Jaramillo, declaro bajo juramento que el trabajo aquí descrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentada para ningún grado o calificación profesional; y, que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

La Escuela Politécnica Nacional puede hacer uso de los derechos correspondientes a este trabajo, según lo establecido por la Ley de Propiedad Intelectual, por su Reglamento y por la normatividad institucional vigente.

A handwritten signature in blue ink that reads "Diego Vargas". The signature is written in a cursive style with a clear, legible font.

Diego Mauricio Vargas Jaramillo

CERTIFICACIÓN

Certifico que el presente trabajo fue desarrollado por **Diego Mauricio Vargas Jaramillo**, bajo mi supervisión.



Dr. Pedro Martín Merino Rosero
DIRECTOR

Índice general

Resumen	5
Abstract	6
1. Introducción	7
1.1. Presentación del problema y estado del arte	7
1.2. Notaciones y conceptos relevantes	11
1.3. Medidas de Borel como multiplicadores de Lagrange	15
2. Sistemas de optimalidad	17
2.1. Regularización de Lavrentiev del estado	17
2.2. Condiciones necesarias de primer orden	20
3. Resolución numérica del problema	29
3.1. Algoritmo semi suave de Newton	29
3.2. Detalles de la implementación	34
3.3. Forma cualitativa de la solución	36
3.3.1. Variación de α	40
3.3.2. Variación de β	41
3.3.3. Variación de p	41
3.4. Variación de los parámetros de regularización	43
3.5. Tasa de convergencia del algoritmo	44
4. Conclusiones	46
Bibliografía	50

Resumen

Consideraremos un problema de control óptimo gobernado por una ecuación en derivadas parciales elíptica con condición de Neumann homogénea, cuya función de costo presenta una penalización no convexa y su estado asociado tiene restricciones puntuales. Las herramientas usuales del análisis convexo no pueden aplicarse directamente para la formulación de un sistema de optimalidad, por tanto es necesario introducir algunas técnicas del análisis no suave. Adicionalmente, la presencia de restricciones de estado de tipo puntual conducen a multiplicadores de Lagrange poco regulares (ver [6]) dificultando su resolución numérica.

Debido a estas dificultades, introducimos dos regularizaciones para tratar tanto la falta de convexidad y diferenciabilidad de la función de costo, como con la poca regularidad de los multiplicadores de Lagrange que producen las restricciones de estado. Específicamente, consideramos una regularización tipo Huber para la cuasinorma de la función de costo y una regularización tipo Lavrentiev para el estudio de las restricciones de estado. Gracias a estas regularizaciones, es posible formular una familia de problema de control óptimo (que dependen de los parámetros de regularización asociados) para los cuales obtenemos un sistema de optimalidad mediante la teoría de Diferencia de funciones Convexas (DC) y cuyos multiplicadores de Lagrange son más regulares.

Posteriormente, resolvemos numéricamente el problema regularizado mediante la aplicación del algoritmo semi suave de Newton. Analizaremos la forma cualitativa de la solución del problema regularizado, y estudiamos numéricamente lo que sucede a medida que los parámetros de regularización que aparecen en el problema regularizado varían. Finalmente estudiaremos la tasa de convergencia del algoritmo propuesto, y daremos nuestras conclusiones sobre el trabajo y las preguntas abiertas que el mismo deja para futuras investigaciones.

Palabras clave: Problema de control óptimo elíptico, restricciones de estado de tipo puntual, no convexidad, diferencia de funciones convexas, regularización de Huber, regularización de Lavrentiev, Método semi suave de Newton.

Abstract

We consider an optimal control problem governed by an elliptic partial differential equation with homogeneous Neumann conditions, whose cost function involves a non-convex penalty term and pointwise state constraints are imposed. The usual tools from convex analysis cannot be applied directly for deriving an optimality system therefore, it is necessary to introduce techniques from nonsmooth analysis. In addition, the presence of pointwise state constraints leads to poor regularity Lagrange multipliers (see [6]), making it difficult to compute solutions numerically.

Due to these difficulties, we introduce two regularizations to deal with the lack of convexity of the cost function and the low regularity of the Lagrange multipliers associated with the pointwise state constraints. Specifically, we use a Huber-like regularization to cope with the quasinorm, whereas a Lavrentiev regularization is considered for the state constraints. Thanks to these regularizations, it is possible to formulate a family of optimal control problems (depending on the regularization parameters) for which we derive an optimality system by using the Difference of Convex Functions (DC) theory involving more regular Lagrange multipliers.

Later, we solve the regularized problem numerically by applying the semi-smooth Newton method. We analyze the qualitative properties of the solution of the regularized problem, and we numerically assess the variation of the parameters associated to the regularized problem. Finally, we study the convergence rate of the proposed algorithm numerically, and we draw conclusions and discuss open questions for future research.

Keywords: Elliptic optimal control problem, pointwise constraints, non-convexity, difference of convex functions, Huber regularization, Lavrentiev regularization, Semi-smooth Newton method.

Capítulo 1

Introducción

Consideramos un problema de control similar al estudiado en [20], con la diferencia importante que, sobre este problema imponemos restricciones de tipo puntual sobre el estado. Estas restricciones son relevantes desde el punto de vista teórico como práctico. Iniciamos nuestra discusión mencionando las investigaciones hechas acerca de problemas de control con funciones de costo no convexo así como problemas de control con restricciones de estado de tipo puntual y las aplicaciones que se pueden lograr formulando problemas con penalizaciones convexas y no convexas. Finalmente, abordaremos las notaciones y conceptos nuevos y pertinentes que se utilizarán para el desarrollo de este trabajo.

1.1. Presentación del problema y estado del arte

Consideramos problemas de control óptimo gobernado por una ecuación elíptica lineal, cuyo funcional de costo incluye una penalización usando una cuasi norma en L^q , con $q \in (0, 1)$. Este término es conocido por inducir dispersión en la solución, similar al efecto de dispersión inducido por la norma en L^1 (ver [30] y [15]).

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, con $n = 2$ o $n = 3$, un dominio acotado tipo Lipschitz con frontera Γ . Para $p > 1$, la penalización en la cuasi norma del espacio L^q se define por

$$\begin{aligned} \Upsilon_p: L^2(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto \int_{\Omega} |u|^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Sean $\alpha, \beta > 0$. Consideramos el siguiente problema de control óptimo elíptico:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min_{(y,u) \in H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)} & J(y, u) := \frac{1}{2} \|y - y_d\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \beta \Upsilon_p(u) \\ \text{sujeto a:} & \\ -\Delta y(x) + y(x) = u(x), & x \in \Omega, \\ \partial_{\bar{n}} y(x) = 0, & x \in \Gamma, \\ y_a \leq y(x) \leq y_b, & x \in K \subset\subset \Omega, \end{array} \right. \quad (\text{P})$$

donde $y_a, y_b \in \mathbb{R}$ son escalares dados, aunque nuestro estudio se puede extender fácilmente a restricciones sobre el estado que sean funciones continuas, y K es un subconjunto compacto de Ω . El objetivo de nuestro trabajo será establecer un sistema de optimalidad

para este problema con restricciones de estado y función de costo no convexa. Además, basándonos en este sistema, propondremos un esquema de Newton semi suave para (P). Posteriormente, se realizará una experimentación numérica exhaustiva mediante una discretización del problema. Este problema de control óptimo es novedoso debido a dos aspectos importantes: primero, la presencia de una penalización dentro de la función de costo del problema, y segundo, la presencia de restricciones puntuales sobre el estado. Ambos aspectos dificultan la aplicación directa de técnicas estándar del análisis convexo y la teoría clásica de Control Óptimo para la obtención un sistema de optimalidad que permita la implementación de un esquema semi suave de Newton.

Diversos problemas de control óptimo con penalización en la función de costo han sido estudiados recientemente. Dichos términos son ampliamente conocidos por inducir esparcidad en el control óptimo. Por ejemplo, en [30] se considera un problema de control óptimo con una penalización de norma L^1 en la función de costo. El efecto que se logra con dicha penalización es que el control sea idénticamente igual a cero en gran parte de su dominio. Evidentemente la presencia de una penalización como ésta, hace que la función de costo del problema de control sea no suave, y por tanto, que el control óptimo difiera significativamente del caso en que la función de costo es suave.

Desde un punto de vista práctico, dichos problemas de control con penalización en norma L^1 sirven para los casos en que no se puede o no se necesita colocar equipos tecnológicos que implementan el control sobre todo el dominio, sino que se requiere emplazarlos de una manera óptima. Por ejemplo, los problemas inversos en imagenología biomédica o sísmica (ver [32]), han sido estudiados ampliamente en los últimos años. En dichos problemas es frecuente el uso de problemas de control óptimo con E.D.P's, cuyas funciones de costo son no suaves. El uso de una norma L^1 dentro de la función de costo ha probado ser una estrategia que conduce a mejores resultados para la recuperación de los datos que se produce por medidas afectadas con ruido, en comparación a problemas con costos regulares (ver [30]). Otro uso de los problemas con penalizaciones de norma L^1 , como ha sido mencionado previamente, es conocer una forma óptima de emplazamiento de artefactos de control. En este caso, los valores del control son cero en una región de su dominio, emplazándolos en un dominio más localizado. Aunque esto podría hacerse de manera heurística, el hecho es que usualmente el modelo físico que refleja la E.D.P. es muy complejo o no se cuenta con una experiencia a priori de dichas locaciones. Las penalizaciones de norma L^1 en el costo también aparecen en ciertos modelos de eficiencia energético, como por ejemplo, el consumo total de combustible por autos que puede modelarse a través del costo que involucre una penalización de norma L^1 , ver [33].

Al respecto de problemas de control con penalizaciones de norma L^p con $p > 1$, se ha desarrollado también una basta literatura acerca de su tratamiento y resolución, ver por ejemplo [4], [9] o [14]. Sin embargo, problemas de control óptimo con penalización de cuasi normas L^q y $q \in [0, 1[$ son problemas menos estudiados (ver [20]). La dificultad de éstos radica en la pérdida de convexidad de la función de costo, por lo que la aplicación de técnicas estándar del análisis convexo no son aplicables directamente.

A fin de poder estudiar estos problemas es necesario la introducción de términos de regularización, que dependerán de la estructura del problema en consideración. La elección

de dichos términos dependerá de la estructura del problema que se estudie, pudiéndose distinguir entre problemas de control óptimo cuyas soluciones no dependen de su estado adjunto, de aquellos que sí. En la primer clase de problemas, conviene la introducción de una regularización con funciones en L^2 , mientras que para la segunda se utilizan funciones en H^1 . (ver [15]).

El caso límite de una penalización L^0 requiere un tratamiento especial debido a que hay una selección de las variables más representativas en el proceso de optimización, extendiendo la noción de la norma de cardinalidad ℓ^0 (ver [20]). Para tratar con las convergencias en el espacio L^0 se debe proveer una métrica adecuada: por ejemplo, la métrica de Ekeland, la cual es diferente a la usada comúnmente para probar resultados de convergencia. Dicha métrica es una forma de extensión de la métrica de Donoho para ℓ^0 (ver [9]). Sin embargo, este caso límite también hace que la función de costo asociada al problema de control óptimo pierda convexidad y semi continuidad inferior, por lo cual habrá que introducir, como en el caso en que $0 < q < 1$, un término de regularización adecuada. El tratamiento de este caso requiere el uso de otras herramientas a diferencia del caso de penalización de norma L^q con $0 < q < 1$ (ver [15]).

En [20] se estudia un problema de control óptimo similar al propuesto en este trabajo. La diferencia entre éste, y el propuesto por [15] está en la formulación del problema: mientras que en [15] se estudia un problema de control en H_0^1 , en [20] se estudia el problema con un término de Tikhonov de norma L^2 . Esto hace que en el primer caso se pueda obtener un sistema de optimalidad directamente al cual se le puede aplicar un método semi suave de Newton (ver [31]), mientras que en [20] la presencia de dicho término hace que exista, bajo ciertas condiciones, una solución al problema, la cual no necesariamente va a ser única debido a la no convexidad del costo.

Para tratar con la no convexidad de la función de costo en el problema de control óptimo, es posible introducir una regularización que permita reescribir la función de costo como una diferencia de dos funciones convexas, ver [20]. La introducción de una función suave tipo Huber que regulariza la cuasi norma L^q , permite obtener un conjunto de problemas regularizados cuyas funciones de costo se pueden expresar como un problema de diferencia de funciones convexas y a los cuales se les pueden aplicar las herramientas diseñadas para problemas de este tipo (ver [26]).

En nuestro caso, a diferencia del problema planteado en [20], consideraremos restricciones puntuales sobre el estado. Esto hace que los métodos desarrollados en el trabajo de [20] no sean aplicables directamente, debido a que se presenta una dificultad intrínseca a la hora de conducir al problema a una formulación de sistema de optimalidad. De manera general, problemas de control óptimo con restricciones puntuales sobre el estado hacen que los multiplicadores de Lagrange sean medidas regulares de Borel (ver [6]). La elección de los espacios funcionales es importante para probar la existencia de multiplicadores de Lagrange asociados a las restricciones sobre el estado (ver [3], [6]).

La presencia de medidas de Borel dificulta el tratamiento numérico del problema. Incluso, las técnicas de conjuntos activos propuestas por ejemplo por Bergounioux, Ito y Kunisch [1], Bergounioux y Kunisch [2], o Kunisch y Rosch [18] no pueden ser aplicadas incluso para

restricciones sobre el estado de tipo puntual. Sin embargo, en [22] se introduce una técnica que permite la obtención de un subproblema que si admite multiplicadores de Lagrange de tipo L^2 . Esta técnica consiste en introducir una regularización tipo Lavrentiev que implica crear un control artificial que involucra al control y estado original. Específicamente, la regularización de Lavrentiev consiste en definir el control artificial

$$v_\lambda(x) = \lambda u(x) + y(x);$$

esto permite reformular al problema original como uno cuyo sistema de optimalidad sí admite multiplicadores en L^2 [23]. La idea es hacer que las restricciones de estado pasen a ser restricciones sobre el control artificial v_λ y, de esta manera, analizar el comportamiento de las soluciones del subproblema al hacer tender λ hacia cero. Esto facilita también el tratamiento numérico, ya que es posible establecer esquemas numéricos para el problema regularizado. En [23] se observa, de hecho, que el tratamiento numérico de un problema similar al nuestro obtiene buenos resultados, a más del hecho de probar que bajo ciertas condiciones de regularidad en el dominio el problema con control artificial si admitirá multiplicadores de Lagrange en L^2 .

Para un tratamiento más amplio de la regularización de Lavrentiev, se puede revisar el trabajo de Hofmann [13] en el cual se considera un problema no lineal y mal condicionado sobre un espacio de Hilbert. Aquí se muestra que mediante la introducción de una regularización de Lavrentiev, se formulan subproblemas que generan soluciones que converjan a la solución original del problema a medida que el parámetro λ tiende a cero, es decir, que la regularización es consistente.

La derivación de un subproblema con un control artificial que tiene restricciones sobre el control nos permitirá recurrir a técnicas derivadas en [20], para posteriormente realizar un tratamiento numérico similar al hecho en [21] y estudiar lo que sucede con las soluciones del subproblema derivado y las soluciones del problema original. Para este análisis numérico recurriremos a una técnica conocida para tratar problemas no convexos de manera numérica: el método semi suave de Newton, el cuál fue introducido por primera vez por Mifflin en [24] para funciones real valuadas definidas sobre espacios finito dimensionales. La extensión del método hacia funciones entre espacios finito dimensionales fue realizado por Qi [27] y Qi y Sun [28]. Su importancia radica en que este método puede aplicarse para resolver ecuaciones de la forma $F(x) = 0$ con un método que imite el algoritmo clásico de Newton, pero en donde la función F carece de la regularidad suficiente para poder aplicar dicho método, o en su defecto, cuando el dominio de la función F es un espacio vectorial de dimensión infinita. En nuestro caso el método de Newton está enmarcado en la teoría desarrollada en Ulbrich [31]. En el trabajo mencionado, se demuestra que bajo ciertas hipótesis sobre los espacios funcionales, el método semi suave genera una sucesión de soluciones aproximadas que converge hacia una solución del problema. Además, dicha sucesión converge con una tasa q-superlineal. En la sección 1.2 de este trabajo daremos una breve introducción a los conceptos de derivada generalizada de Newton, y las condiciones que debe cumplir un funcional.

El tratamiento numérico de nuestro problema se deriva también de algunas ideas propuestas en [22]. En este trabajo se observa que para tratar un problema de control óptimo con restricciones puntuales en el estado se recurre a una regularización de Lavrentiev para

derivar un sistema de optimalidad con multiplicadores de Lagrange en L^2 . En nuestro trabajo haremos una experimentación numérica exhaustiva, ilustrando cómo la elección de los parámetros afecta al desempeño del algoritmo.

Esta tesis tiene la siguiente estructura: en la primera sección del Capítulo 2 se introducen dos regularizaciones: una tipo Huber para tratar el término no convexo del problema y una de Lavrentiev para tratar las restricciones de estado de tipo puntual, con lo cual plantearemos un problema de control óptimo nuevo a partir de dichos términos. Posteriormente se procederá a derivar un sistema de optimalidad a partir del sub problema regularizado. Finalmente obtendremos un sistema susceptible de ser resuelto utilizando el esquema semi suave de Newton.

En el Capítulo 3 realizaremos una serie de experimentos numéricos mostrando diferentes escenarios. Primero examinaremos cualitativamente nuestro problema, variando para ello los parámetros α, β y p individualmente. Posteriormente realizaremos la variación individual de los parámetros de regularización de manera separada, y finalmente haremos un estudio acerca de la tasa de convergencia del algoritmo implementado. Finalmente, en el capítulo 4 daremos nuestras conclusiones sobre el trabajo, así como explorar hacia donde podríamos enfocar nuevas investigaciones que permitan solventar las dificultades de convergencia evidenciadas en el capítulo 3.

1.2. Notaciones y conceptos relevantes

Como es usual notamos por $H^1(\Omega)$ al espacio clásico de Sobolev $W^{1,2}(\Omega)$. El producto interno de dos elementos $u, v \in L^2(\Omega)$ será representado por $(u, v)_{L^2(\Omega)}$. El producto en dualidad de un elemento $\varphi \in L^2(\Omega)^*$ con un elemento $f \in L^2(\Omega)$ se representará como $\langle \varphi, f \rangle_{L^2(\Omega)^*, L^2(\Omega)}$. Finalmente, notaremos al espacio de aplicaciones lineales de X en Y por $\mathcal{L}(X, Y)$.

Si X es un espacio de Banach, y $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ es una función, denotaremos por f_+ a la parte positiva de f , es decir, $[f]_+ : X \rightarrow [0, +\infty[$ es la función definida por

$$[f]_+(x) = \max_{x \in X}(f(x), 0),$$

mientras que la parte negativa de f , denotada por $[f]_-$, es la función $[f]_- : X \rightarrow]-\infty, 0]$ definida por

$$[f]_-(x) = \max_{x \in X}(-f(x), 0).$$

Además, denotaremos la función indicatriz sobre X , notada como χ_X a la función

$$\chi_X : X \longrightarrow \{0, 1\}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} 0, & x \notin X, \\ 1, & x \in X. \end{cases}$$

Como podemos observar, nuestro problema de control óptimo está gobernado por una ecuación en derivadas parciales de tipo elíptico con condiciones de Neumann. La teoría estándar de las ecuaciones en derivadas parciales (ver por ejemplo los libros clásicos de

Evans, [11], Brezis [5]) nos garantizan que, dado un control $u \in L^2(\Omega)$, se puede encontrar un único estado $y \in H^1(\Omega)$ que satisfaga la ecuación

$$\begin{cases} -\Delta y(x) + y(x) = u(x), & x \in \Omega, \\ \partial_{\bar{n}} y(x) = 0, & x \in \Gamma. \end{cases}$$

La existencia de tal $y \in H^1(\Omega)$ para cada $u \in L^2(\Omega)$ permite definir un operador $S : L^2(\Omega) \rightarrow H^1(\Omega)$ tal que $y = S(u)$, donde y es la solución de la EDP elíptica anterior. Esto se puede seguir gracias al teorema de Lax-Milgram (ver [11]). Más aún, si consideramos que $u \in L^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, se puede usar un operador de inmersión compacta $E : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ (ver [22]) para definir $R = ES$. Éste operador será crucial para la introducción de una regularización tipo Lavrentiev, como se detallará posteriormente.

Los problemas de control óptimo con restricciones de estado de tipo puntual presentan en la formulación de su sistema de optimalidad, multiplicadores de Lagrange que son medidas regulares de Borel. A continuación daremos la definición de dichas medidas.

Definición 1.1 (Medida de Borel). Una medida μ sobre \mathbb{R}^n se dice que es una medida de Borel, si cualquier conjunto de Borel de \mathbb{R}^n es μ medible.

Definición 1.2 (Medida regular de Borel). Una medida μ sobre \mathbb{R}^n se dice que es una medida regular de Borel, si μ es Borel medible, y si para cualquier $A \subseteq \mathbb{R}^n$, existe un conjunto de Borel B tal que $A \subseteq B$ y $\mu(A) = \mu(B)$.

Si X es un espacio de Banach y $F : X \rightarrow \mathbb{R}$, usaremos la notación $\partial F(x)$, para denotar al subdiferencial de F en x . Además, si $Y \subseteq X$, la función $\mathbf{I}_Y : X \rightarrow \{0, +\infty\}$ es la función indicadora sobre Y , la cual satisface con

$$\mathbf{I}_Y(x) = \begin{cases} 0, & x \in Y, \\ +\infty, & x \notin Y. \end{cases}$$

Si $Y \subseteq X$ es un conjunto convexo, el subdiferencial de la función \mathbf{I}_Y en $x \in Y$, denominado también el *cono normal de Y en x* , se denotará por $N_Y(x)$. Gracias a la teoría del análisis convexo (ver [29]) sabemos que el cono normal se puede caracterizar como

$$N_Y(x) = \partial \mathbf{I}_Y(x) = \{x^* \in X^* : \langle x^*, \tilde{x} - x \rangle_{X^*, X} \leq 0, \text{ para todo } \tilde{x} \in Y\}. \quad (1.1)$$

Si $Y \subseteq X$ es un conjunto, el operado proyección $\mathcal{P}_Y : X \rightarrow Y$ se define como

$$\mathcal{P}_Y(x) = \arg \min_{y \in Y} \|x - y\|_X.$$

La ejecución de experimentos numéricos requiere de la incorporación de un algoritmo. En nuestro trabajo usaremos el método semi suave de Newton, el cual fue desarrollado por M. Ulbrich, en [31]. Comenzamos introduciendo la definición de función semi suave.

Definición 1.3 (Función semi suave). Diremos que una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es semi suave en $x \in \mathbb{R}^n$ si f es localmente Lipschitz continua en x , tiene derivada direccional en x , y si además

$$\max_{M \in \partial f(x+h)} \|f(x+h) - f(x) - Mh\| = o(\|h\|),$$

donde $\partial f(x)$ nota al jacobiano generalizado de Clarke [8].

Sea Y un espacio de Banach, $r \geq 1$, $m \in \mathbb{N}$, $\{r_1, \dots, r_m\} \subset [1, \infty[$ tales que $r_i \geq r$ para todo $i = 1, \dots, m$. Consideramos dos funciones $\psi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ y $F : Y \rightarrow \prod_{i=1}^m L^{r_i}(\Omega)$. El concepto de semi suavidad de Newton que usaremos, será aplicado a funciones de la forma

$$\Phi : Y \rightarrow L^r(\Omega), \quad \Phi(y)(w) = \psi(F(y)(w)). \quad (1.2)$$

Sobre estas funciones ψ, Φ, F haremos las siguientes suposiciones: existe $1 \leq r \leq r_i < q_i \leq \infty$ para todo $i = 1, \dots, m$ tal que

1. $F : Y \rightarrow \prod_{i=1}^m L^{r_i}(\Omega)$ es continuamente Fréchet diferenciable.
2. La función $Y \ni y \mapsto F(y) \in \prod_{i=1}^m L^{q_i}(\Omega)$ es localmente Lipschitz continua; es decir, para todo $y \in Y$, existe una vecindad $U = U(y)$ y una constante L_F que depende de U tal que

$$\sum_i \|F_i(y_1) - F_i(y_2)\|_{L^{q_i}(\Omega)} \leq L_F \|y_1 - y_2\|, \quad \text{para todo } y_1, y_2 \in U.$$

3. ψ es Lipschitz continua con constante de continuidad L_ψ .
4. ψ es semi suave en todo $x \in \mathbb{R}^n$.

En función a estos supuestos, podemos introducir la derivada generalizada de Φ como sigue.

Definición 1.4 (Derivada generalizada de Newton). La derivada generalizada $\partial_s \Phi \rightrightarrows \mathcal{L}(Y, L^r(\Omega)) := \mathbf{L}$ como el conjunto

$$\partial_s \Phi(y) = \left\{ M \in \mathbf{L} : M : v \mapsto \sum_i d_i \cdot (F'_i(y)v), d \text{ una selección medible de } \partial\psi(F(y)) \right\},$$

donde decir que d es una selección medible de $\partial\psi(F(y))$ quiere decir que d es tal que $d : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $d(w) \in \partial\psi(F(y)(w))$, casi todo $w \in \Omega$.

Con este concepto, podemos decir cuando un operador como Φ es semi suave.

Definición 1.5 (Operador semi suave). Decimos que Φ es semi suave en $y \in Y$ si

$$\sup_{M \in \partial_s \Phi(y+h)} \|\Phi(y+h) - \Phi(y) - Mh\|_{L^r(\Omega)} = o(\|h\|_Y).$$

Se puede probar (Teorema 5.2 de [31]) que bajo los supuestos 1., 2., y 3. anteriores, Φ es semi suave.

El siguiente teorema será de utilidad posteriormente al momento de formular nuestro algoritmo semi suave de Newton.

Teorema 1.6. Sean Y un espacio de Banach, $\Phi_1 : Y \rightarrow L^r(\Omega)$, $\Phi_2 : Y \rightarrow L^r(\Omega)$ dos funciones semi suaves en algún $y \in Y$. Entonces la función

$$\begin{aligned} \Phi : Y &\longrightarrow L^r(\Omega) \times L^r(\Omega) \\ \tilde{y} &\longmapsto (\Phi_1(\tilde{y}), \Phi_2(\tilde{y})), \end{aligned}$$

es semi suave en y .

Demostración. Dado que Φ_1, Φ_2 son semi suaves en y , tendremos que

$$\sup_{M_1 \in \partial_s \Phi_1(y+h)} \|\Phi_1(y+h) - \Phi_1(y) - M_1 h\|_{L^r(\Omega)} = o(\|h\|_Y),$$

$$\sup_{M_2 \in \partial_s \Phi_2(y+h)} \|\Phi_2(y+h) - \Phi_2(y) - M_2 h\|_{L^r(\Omega)} = o(\|h\|_Y),$$

Tomando $M = (M_1, M_2) \in \partial_s \Phi_1(y+h) \times \partial_s \Phi_2(y+h)$, donde $\partial_s(\cdot)$ es el conjunto presentado en la Definición 1.4, y notemos la norma en $L^r(\Omega)^2$ como $\|\cdot\|$ sin índice. Tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\|\Phi(y+h) - \Phi(y) - Mh\|}{\|h\|} &= \frac{\|(\Phi_1(y+h) - \Phi_1(y) - M_1 h, \Phi_2(y+h) - \Phi_2(y) - M_2 h)\|}{\|h\|} \\ &= \frac{\|\Phi_1(y+h) - \Phi_1(y) - M_1 h\|_{L^r(\Omega)}}{\|h\|} \\ &\quad + \frac{\|\Phi_2(y+h) - \Phi_2(y) - M_2 h\|_{L^r(\Omega)}}{\|h\|} \\ &= 0, \quad \text{si } h \rightarrow 0. \end{aligned}$$

La igualdad a cero de la última línea se produce debido a nuestra suposición de que Φ_1, Φ_2 son semi suaves en y , y por lo tanto cumplen con la Definición 1.5 cada una. Por tanto,

$$\|\Phi(y+h) - \Phi(y) - Mh\| = o(\|h\|),$$

probando así el resultado. \square

El siguiente teorema permitirá justificar un resultado importante en el capítulo 3 acerca de la semi suavidad de una función que servirá posteriormente para la resolución numérica del problema. Su demostración puede ser encontrada en el Lema 8.15 de [16].

Teorema 1.7. Sean X, Y, Z tres espacios de Banach y supongamos que $H : D \subset X \rightarrow Y$ es continuamente Fréchet diferenciable en $x \in D$ y $\phi : Y \rightarrow Z$ es semi suave en $H(x)$ con derivada generalizada de Newton G . Entonces $\phi \circ H$ es semi suave en x con derivada generalizada de Newton igual a $G(H(x+h))H'(x+h) \in \mathcal{L}(X, Z)$ para h suficientemente pequeño.

Con el método semi suave de Newton, resolvemos el problema

$$\Phi(y) = 0, \tag{1.3}$$

donde Φ es el funcional definido en (1.2). Suponemos adicionalmente que existe un espacio de Banach Y_0 que contiene continuamente a Y , además de constantes positivas η, C_M tal que para todo $y \in y + \eta B_Y$, todo $M \in \partial_s \Phi(y)$ puede ser extendido a un operador invertible $\widetilde{M} \in \mathcal{L}(Y_0, L^r)$ tal que $\|\widetilde{M}^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y_0, L^r)} \leq C_M$.

El algoritmo semi suave de Newton consiste en los siguientes pasos:

1. Escoger un $y_0 \in Y$ suficientemente cercano a la solución de (1.3). Fijar una constante $C > 0$ Y $K = 0$.
2. Si $\Phi(y_k) = 0$, terminar el algoritmo. La solución del problema es y_k .

3. Encontrar $M_k \in \partial_s \Phi(y_k)$. Determinar $s_k \in Y_0$, resolviendo

$$M_k s_k = \Phi(y_k),$$

y tomar $y_{k+1} = y_k + s_k$.

4. Incrementar k en una unidad, y regresar al paso 2.

El Teorema 6.4 de Ulbrich [31] nos demuestra que el algoritmo presentado está bien definido y termina con una solución del problema, o genera una sucesión $\{y_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que converge a la solución del problema con una tasa superlineal.

Para finalizar esta sección, recordemos la definición de tasa de convergencia de una sucesión de vectores, la cual será utilizada en la sección 3.5 de nuestro trabajo.

Definición 1.8 (Tasa de convergencia de orden p). Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de un espacio de Banach, que convergen a x^* . Se dice que la sucesión $\{x_n\}$ converge q -superlinealmente con tasa ρ , si es que

$$\|x_{n+1} - x^*\| = o(\|x_n - x^*\|^\rho)$$

1.3. Medidas de Borel como multiplicadores de Lagrange

A diferencia de [19], en el trabajo de Casas [6] se logra probar la existencia de multiplicadores de Lagrange asociados a las restricciones puntuales en el estado, para un problema de control óptimo con función de costo convexa sin la necesidad de recurrir a la formulación dual del problema como en [25] o [19]. En el trabajo de Casas se prueba que los multiplicadores de Lagrange son medidas de Borel. Además, Casas estudia la regularidad que poseen los estado y control óptimo del problema. Específicamente, se tiene el siguiente resultado:

dado el problema de control óptimo:

$$\begin{cases} \min_{(y,u) \in H_0^1(\Omega) \times K(\Omega)} J(y, u) = \frac{1}{2} \|y - y_d\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ \text{sujeto a} \\ Ay = u, & \text{en } \Omega \\ y = 0, & \text{en } \Gamma, \end{cases}$$

donde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ con $n = 1, 2$ o $n = 3$, es un dominio abierto y acotado, con frontera tipo Lipschitz Γ , y Ω situado localmente a un lado de Γ , A es el operador diferencial definido como

$$Ay = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} y \right) + a_0 y,$$

con $a_0 \in L^\infty(\Omega)$, $a_0(x) \geq 0$ c.t.p. $x \in \Omega$, a_{ij} Lipschitz continua para todo $i, j \in \{1, \dots, n\}$, y

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha \|\xi\|^2,$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$, con $\alpha > 0$, y $K(\Omega)$ es un subconjunto de $L^2(\Omega)$ no vacío, convexo y cerrado. Con este problema, en el Capítulo dos de [6] se prueba que existe una medida regular de Borel μ sobre Ω que satisface el siguiente sistema de optimalidad:

$$Ay = u, \quad \text{en } \Omega, \quad (1.4)$$

$$\int_{\Omega} pAz \, dx = \int_{\Omega} z(y - y_d) \, dx + \int_{\Omega} z \, d\mu, \quad \text{para todo } z \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \quad (1.5)$$

$$\int_{\Omega} y \, d\mu = \sup_{z \in B} \int_{\Omega} z \, d\mu, \quad \text{con } B = \{z \in C_0(\Omega) : \|z\| = 1\}, \quad y \in B, \quad (1.6)$$

$$\int_{\Omega} (p + ru)(s - u) \, dx \geq 0, \quad \text{para todo } s \in K. \quad (1.7)$$

De la condición de optimalidad (1.3) enlistada en la parte de arriba, se observa que si $\|y\|_{L^\infty} < 1$, entonces $\mu = 0$. Si, por otro lado, $|y(x)| = 1$ se satisface para una cantidad finita de puntos $\{x_j\}_{j=1}^m$, se tiene que

$$\mu = \sum_{j=1}^m \lambda_j \delta(x_j),$$

donde $\lambda_j \in \mathbb{R}$ y $\delta(x_j)$ es la medida de Dirac conentrada en x_j .

Respecto a la regularidad del multiplicador p , en [6] se establece que $p \in W_0^{1,s}(\Omega)$ para $s \in [1, n/(n-1)[$, donde n la dimensión del espacio \mathbb{R}^n .

Capítulo 2

Sistemas de optimalidad

En este capítulo introduciremos dos regularizaciones para tratar la falta de convexidad de la función de costo de (P) así como las restricciones de estado de tipo puntual. Esto permite obtener un nuevo problema de control óptimo que dependerá de dos parámetros adicionales. Posteriormente, formulamos el sistema de optimalidad asociado al problema regularizado y probaremos que los multiplicadores de Lagrange asociados son funciones en $L^2(\Omega)$. Finalmente, a partir del sistema de optimalidad obtenido, más algunos resultados de diferenciabilidad obtenidos en [20], formulamos un funcional F para aplicarle posteriormente el método semi suave de Newton. Dicho funcional dependerá de los parámetros globales del problema: α, β, p , así como los parámetros de regularización.

2.1. Regularización de Lavrentiev del estado

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, con $n = 2$ o $n = 3$, un dominio acotado tipo Lipschitz con frontera Γ . Para $p > 1$, la penalización en la cuasi norma del espacio L^q se define por

$$\begin{aligned} \Upsilon_p: L^2(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto \int_{\Omega} |u|^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Sean $\alpha, \beta > 0$. Consideramos el siguiente problema de control óptimo elíptico:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{(y,u) \in H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)} J(y, u) := \frac{1}{2} \|y - y_d\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \beta \Upsilon_p(u) \\ \text{sujeto a:} \\ -\Delta y(x) + y(x) = u(x), \quad x \in \Omega, \\ \partial_{\bar{n}} y(x) = 0, \quad x \in \Gamma, \\ y_a \leq y(x) \leq y_b, \quad x \in K \subset\subset \Omega. \end{array} \right. \quad (\text{P})$$

La existencia de soluciones en $L^2(\Omega)$ para el problema de control óptimo será asumida a lo largo de este trabajo. Sin embargo, la tarea de demostrar dicho resultado no es una tarea fácil de llevar a cabo. La existencia de soluciones aproximadas en $L^2(\Omega)$ para el problema puede ser deducida usando el principio variacional de Ekeland (ver [7]). En efecto, debido a la continuidad y no negatividad de la función de costo $\frac{1}{2} \|y - y_d\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \beta \Upsilon_p(u)$, se tiene la semicontinuidad inferior de la misma, por lo que, dado $\epsilon > 0$, el principio variacional de Ekeland establece la existencia de $(\bar{y}_\epsilon, \bar{u}_\epsilon) \in H^1(\Omega) \times U_{ad}$ tal que

$$\inf_{H^1(\Omega) \times U_{ad}} J(y, u) \leq J(\bar{y}_\varepsilon, \bar{u}_\varepsilon) \leq \inf_{H^1(\Omega) \times U_{ad}} J(y, u) + \varepsilon, \text{ y que}$$

$$J(\bar{y}_\varepsilon, \bar{u}_\varepsilon) < J(y, u) + \varepsilon \|\bar{u}_\varepsilon - u\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u \in U_{ad}.$$

Sin embargo, dicho principio demostraría la existencia de soluciones aproximadas para nuestro problema de control óptimo. Como se verá en el capítulo de resolución numérica del problema, la estructura del control óptimo que se obtendrá sugiere que la elección de los espacios funcionales para la demostración de existencia de soluciones será importante, sobre todo aquellos espacios que permitan cuantificar los saltos que presentan las soluciones de un problema de control óptimo, como por ejemplo el espacio de medidas de Young. Claramente la existencia de soluciones para el problema será un tema abierto que podría ser resuelto en futuras investigaciones.

Recordando la definición del operador S presentada en la Sección 1.2, el problema de control óptimo se puede escribir como:

$$\begin{cases} \min_{u \in L^2(\Omega)} & H(u) := \frac{1}{2} \|Su - y_d\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \beta \Upsilon_p(u) \\ \text{sujeto a:} & \\ y_a \leq S(u(x)) \leq y_b, & x \in K \subset \subset \Omega. \end{cases} \quad (\text{P}')$$

Para estudiar el problema (P') introducimos una regularización de tipo Lavrentiev, la cual nos permite definir un nuevo problema (Q) tomando un parámetro de regularización $\lambda > 0$, de la siguiente forma

$$\begin{cases} \min_{u \in L^2(\Omega)} & H(u) := \frac{1}{2} \|Su - y_d\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \beta \Upsilon_p(u) \\ \text{sujeto a:} & \\ y_a \leq S(u(x)) + \lambda u(x) \leq y_b, & x \in K \subset \subset \Omega \end{cases} \quad (\text{Q})$$

Recordemos que el operador $R := ES : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ ha sido definido en la sección 1.2. Ahora, dado que E es compacto, se tiene la compacidad de R por composición.

Definimos el control artificial $v = y + \lambda u = (R + \lambda I)u$. Gracias a la compacidad de R se tiene que $(\lambda I + R)$ es un operador de Fredholm que tiene una cantidad numerable de valores propios cuyo punto de acumulación es cero (ver [22]). Como S es definido positivo, $-S$ tiene todos sus valores propios negativos. Consecuentemente se tiene por la teoría de operadores de Fredholm que el operador $\lambda I + R$ es invertible continuamente. Es decir, existe un operador $B_\lambda : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ tal que

$$B_\lambda v = B_\lambda(y + \lambda u) = (\lambda I + R)^{-1}(R + \lambda I)(u) = u$$

Con este nuevo operador, el problema (Q) se transforma en

$$\begin{cases} \min_{v \in L^2(\Omega)} & \tilde{H}(v) := \frac{1}{2} \|SB_\lambda v - y_d\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2} \|B_\lambda v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \beta \Upsilon_p(B_\lambda v) \\ \text{sujeto a:} & \\ y_a \leq v(x) \leq y_b, & x \in K \subset \subset \Omega \end{cases} \quad (\text{Q}')$$

Sin embargo, este problema no es convexo ni diferenciable debido a la presencia del término $\Upsilon_p(B_\lambda v)$. Por tanto, consideramos una regularización de tipo Hubert con el fin de poder lidiar con el término v presente en (Q') (ver [20]). Para $\gamma \gg 1$ Definimos entonces

$$h_{q,\gamma}(t) = \begin{cases} q\gamma^{\frac{1-q}{q}} |t|^{\frac{1}{q}}, & t \in \left[-\frac{1}{\gamma}, \frac{1}{\gamma}\right], \\ |t| - \frac{1-q}{\gamma}, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

En base a esta función, consideremos la función

$$\begin{aligned} \Upsilon_{q,\gamma}: L^2(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto \int_{\Omega} h_{q,\gamma}[(u)(x)]^q dx \end{aligned} \quad (2.1)$$

A partir de (2.1), formulamos un nuevo problema de control óptimo asociado a (Q'), el cual viene dado por:

$$\begin{cases} \min_{v \in L^2(\Omega)} & \frac{1}{2} \|SB_\lambda v - y_d\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2} \|B_\lambda v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \beta \Upsilon_{q,\gamma}(B_\lambda v) \\ \text{sujeto a:} & \\ y_a \leq v(x) \leq y_b, & x \in K \subset\subset \Omega. \end{cases} \quad (Q'')$$

Por otro lado, definimos el conjunto de controles admisibles para (Q''):

$$V_{ad} := \{v \in L^2(\Omega) : y_a \leq v(x) \leq y_b, \text{ c.t.p } x \in K \subset\subset \Omega\}.$$

Con este conjunto, el problema (Q'') se puede escribir como

$$\begin{cases} \min_{v \in L^2(\Omega)} & \frac{1}{2} \|SB_\lambda v - y_d\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2} \|B_\lambda v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \beta \Upsilon_{q,\gamma}(B_\lambda v) \\ \text{sujeto a:} & \\ v(x) \in V_{ad} & \end{cases}$$

Introducimos las funciones F y G como siguen:

$$\begin{aligned} F: L^2(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto \frac{1}{2} \|SB_\lambda v - y_d\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2} \|B_\lambda v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \beta \kappa_\gamma \|B_\lambda v\|_{L^1(\Omega)} + \mathbf{I}_{V_{ad}}(v), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G: L^2(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto \beta (\kappa_\gamma \|B_\lambda v\|_{L^1(\Omega)} - \Upsilon_{p,\gamma}(B_\lambda v)), \end{aligned}$$

donde $\mathbf{I}_{V_{ad}}(v)$ denota la función indicadora sobre V_{ad} , la cual ha sido definida en la Sección 1.2. Con esto, claramente (Q'') se puede reescribir como

$$\min_{v \in L^2(\Omega)} F(v) - G(v). \quad (2.2)$$

Claramente las funciones F y G son convexas, por lo que la fórmula (2.2) es una diferencia de funciones convexas. Esta reestructuración del problema nos permite aplicar la teoría de optimización DC para la formulación del sistema de optimalidad asociado a (Q'') (ver [26]).

El siguiente resultado nos permitirá demostrar que la función $\Upsilon_{p,\gamma}(B_\lambda)$ es Gâteaux diferenciable. Su demostración puede ser encontrada en el Lema 4 de [20].

Teorema 2.1. La función

$$t \mapsto \kappa_\gamma |t| - h_{q,\gamma}(t)$$

es Gâteaux diferenciable, con derivada

$$j(t) = \begin{cases} \kappa_\gamma - q \left(|t| + \frac{q-1}{\gamma} \right)^{q-1} \text{sign}(t), & \text{si } |t| \geq \frac{1}{\gamma}, \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

En base a este resultado, tenemos lo siguiente.

Lema 2.2. La función

$$v \mapsto G(v) = \beta \left(\kappa_\gamma \|B_\lambda v\|_{L^1(\Omega)} - \Upsilon_{q,\gamma}(B_\lambda v) \right),$$

para todo $v \in L^2(\Omega)$, es Gâteaux diferenciable.

Demostración. Si definimos

$$\begin{aligned} H: L^2(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto \beta \left(\kappa_\gamma \|v\|_{L^1(\Omega)} - \Upsilon_{q,\gamma}(v) \right), \end{aligned}$$

el Lema 6 de [20] garantiza que H es Gâteaux diferenciable, a partir de la Gâteaux diferenciable de la función definida en el teorema 2.1. Por otro lado, B_λ es un operador lineal invertible, por lo cual garantizamos que es Gâteaux diferenciable. Esto implica finalmente que la composición $G \circ B_\lambda$ sea Gâteaux diferenciable. Por tanto, la derivada de G , $G'(v; \cdot)$, estará dada por un representante $(\beta w, \cdot)$ con $w \in L^2(\Omega)$. \square

2.2. Condiciones necesarias de primer orden

La teoría de programación de diferencia de funciones convexas nos permite verificar que si \bar{v} es una solución para (2.2), debe cumplir con

$$\partial G(\bar{v}) \subset \partial F(\bar{v}), \quad (2.3)$$

ver [20]. Esta última identidad nos permite obtener una caracterización para las soluciones del problema (2.2).

Definimos la función

$$\begin{aligned} f: L^2(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto \frac{1}{2} \|SB_\lambda v - y_d\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2} \|B_\lambda v\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

El siguiente resultado permitirá caracterizar a la derivada de f en términos del estado adjunto de la E.D.P., así como del operador B_λ .

Teorema 2.3. La función f es Fréchet diferenciable, con derivada

$$\nabla f(\bar{v}) = B_\lambda^*(\bar{\phi} + \alpha B_\lambda \bar{v}),$$

donde B_λ^* es el operador adjunto de B_λ , y $\bar{\phi}$ es la solución de la ecuación

$$\begin{cases} -\Delta \bar{\phi} + \bar{\phi} = \bar{y} - y_d, & x \in \Omega \\ \partial_{\bar{n}} \bar{\phi}(x) = 0, & x \in \Gamma, \end{cases} \quad (2.4)$$

Demostración. La diferenciabilidad de Fréchet de f se obtiene gracias a que los términos que la componen son normas en $L^2(\Omega)$ compuestas con el operador B_λ que es lineal y continuo. Por otro lado, gracias al teorema de representación de Riesz podemos identificar la derivada de f con una función en $L^2(\Omega)$. Notemos a este representante como $\nabla f(v)$. Más aún, dado que si $B_\lambda(\bar{v}) = \bar{u}$ y $S\bar{u} = \bar{y}$, según las definiciones de los operadores B_λ y S y sus respectivos adjuntos, se tiene que para todo $\varphi \in L^2(\Omega)$ se cumple que

$$\begin{aligned}\nabla f(\bar{v})\varphi &= (SB_\lambda\bar{v} - y_d, SB_\lambda\varphi)_{L^2(\Omega)} + \alpha(B_\lambda\bar{v}, B_\lambda\varphi)_{L^2(\Omega)} \\ &= (SB_\lambda\varphi, SB_\lambda\bar{v} - y_d)_{L^2(\Omega)} + \alpha(B_\lambda\bar{v}, B_\lambda\varphi)_{L^2(\Omega)} \\ &= (B_\lambda\varphi, S^*(SB_\lambda\bar{v} - y_d))_{L^2(\Omega)} + \alpha(B_\lambda\varphi, B_\lambda\bar{v})_{L^2(\Omega)} \\ &= (B_\lambda\varphi, S^*(\bar{y} - y_d))_{L^2(\Omega)} + \alpha(B_\lambda\varphi, B_\lambda\bar{v})_{L^2(\Omega)} \\ &= (B_\lambda\varphi, S^*(\bar{y} - y_d))_{L^2(\Omega)} + \alpha(B_\lambda\varphi, B_\lambda\bar{v})_{L^2(\Omega)}\end{aligned}$$

Sea $H = \{y \in H^1(\Omega) : \partial_{\bar{n}}y = 0 \text{ casi todo } x \in \Gamma\}$. Si consideremos el operador

$$\begin{aligned}E: H &\longrightarrow H^{-1}(\Omega) \\ y &\longmapsto -\Delta y + y,\end{aligned}\tag{2.5}$$

tenemos que la E.D.P. que rige el problema de control óptimo (P) se puede escribir como

$$Ey = u,$$

y dado que E es claramente auto adjunto, al considerar $\bar{\phi}$, solución de la ecuación adjunta

$$\begin{cases} -\Delta\bar{\phi} + \bar{\phi} = \bar{y} - y_d, & x \in \Omega \\ \partial_{\bar{n}}\bar{\phi}(x) = 0, & x \in \Gamma, \end{cases}\tag{2.6}$$

se debe tener que $\bar{\phi} = S^*(y - y_d)$. Por tanto, concluimos que

$$\begin{aligned}\nabla f(\bar{v})\varphi &= (\bar{\phi} + \alpha B_\lambda\bar{v}, B_\lambda\varphi)_{L^2(\Omega)} \\ &= (B_\lambda^*(\bar{\phi} + \alpha B_\lambda\bar{v}), \varphi)_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Dado que la última igualdad se cumple para todo $\varphi \in L^2(\Omega)$, se puede concluir que $\nabla f(\bar{v}) = B_\lambda^*(\bar{\phi} + \alpha B_\lambda\bar{v})$. \square

Considerando que F es una función convexa, es claro que F se puede escribir como

$$F(v) = f(v) + \beta\kappa_\gamma \|B_\lambda v\|_{L^1(\Omega)} + \mathbf{I}_{V_{ad}(v)},$$

por lo que, tomando en cuenta que f es Fréchet diferenciable, su subdiferencial está dado por:

$$\partial F(v) = \{\nabla f(v)\} + \beta\kappa_\gamma \partial(\|B_\lambda v\|_{L^1(\Omega)}) + N_{V_{ad}}(v),\tag{2.7}$$

donde $N_{V_{ad}}$ es el cono normal de V_{ad} en v (ver (1.1)). Por otro lado, dado que B_λ es un operador lineal y continuo, la teoría del cálculo subdiferencial nos dice que

$$\partial(\|B_\lambda \cdot\|_{L^1(\Omega)})(v) = B_\lambda^* \partial(\|\cdot\|_{L^1(\Omega)})(B_\lambda v).$$

La caracterización del subdiferencial de la norma $L^1(\Omega)$ está dada por los elementos $\zeta \in \partial(\|\cdot\|_{L^1(\Omega)})(B_\lambda v)$ tales que

$$\zeta(x) = \begin{cases} 1, & \text{casi todo } x \in \Omega \text{ tal que } B_\lambda v(x) > 0, \\ -1, & \text{casi todo } x \in \Omega \text{ tal que } B_\lambda v(x) < 0 \\ \mu \in [-1, 1], & \text{casi todo } x \in \Omega \text{ tal que } B_\lambda v(x) = 0, \end{cases} \quad (2.8)$$

por lo que cualquier elemento del conjunto $\partial(\|\cdot\|_{L^1(\Omega)})(B_\lambda v)$ puede ser representado como $B_\lambda^* \zeta$. En conjunto con (2.7), tendremos que:

$$\partial F(v) = \{\nabla f(v) + \beta \kappa_\gamma B_\lambda^* \zeta : \zeta \in \partial(\|\cdot\|_{L^1(\Omega)})(B_\lambda v)\},$$

y gracias al Teorema 2.3 obtenemos

$$\partial F(v) = \{B_\lambda^*(\bar{\phi} + \alpha B_\lambda \bar{v}) + \beta \kappa_\gamma B_\lambda^* \zeta + \theta, \theta \in N_{V_{ad}(v)}\}. \quad (2.9)$$

Por otro lado, el Lema 2.2 nos dice que la función $G(v)$ es Gâteaux diferenciable, cuya derivada direccional $G'(v; h)$ puede representarse por medio de $G'(v; h) = (\beta w, h)_{L^2(\Omega)}$, para algún $w \in L^2(\Omega)$ que depende de v . Definiendo $\tilde{G}(v) = G(B_\lambda v)$, tenemos gracias a la linealidad de B_λ que

$$\begin{aligned} \tilde{G}'(v; h) &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} (\tilde{G}(v + th) - \tilde{G}(v)) \\ &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} (G(B_\lambda(v + th)) - G(B_\lambda v)) \\ &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} (G(B_\lambda v + t B_\lambda h) - G(B_\lambda v)) \\ &= G'(B_\lambda v; B_\lambda h). \end{aligned}$$

Así, dado que $G'(u; h) = (\beta w, h)$, tendremos que

$$\tilde{G}'(v; h) = G'(B_\lambda v; B_\lambda h) = (\beta w(B_\lambda v), B_\lambda h)_{L^2(\Omega)} = (\beta B_\lambda^* w, h)_{L^2(\Omega)}, \quad (2.10)$$

por lo que de acuerdo con la teoría del cálculo de subdiferenciales (ver [29]) se tiene que:

$$\partial G(v) = \{\beta B_\lambda^* w\}. \quad (2.11)$$

Por la inclusión (2.3), y gracias a (2.9) y (2.11), tenemos el siguiente resultado:

Teorema 2.4. Si \bar{v} es una solución de (2.2), entonces existen $\bar{w} \in L^2(\Omega)$, $\bar{\phi} \in H^1(\Omega)$, $\zeta \in L^\infty(\Omega)$ y $\theta \in N_{V_{ad}}$ tales que

$$\beta B_\lambda^* \bar{w} = B_\lambda^*(\bar{\phi} + \alpha B_\lambda \bar{v}) + \beta \kappa_\gamma B_\lambda^* \zeta + \theta. \quad (2.12)$$

De la expresión (2.12) tenemos que

$$\theta = \beta B_\lambda^* \bar{w} - B_\lambda^*(\bar{\phi} + \alpha B_\lambda \bar{v}) - \beta \kappa_\gamma B_\lambda^* \zeta,$$

y de la caracterización dada en (1.1) tenemos el siguiente resultado:

Teorema 2.5. Si \bar{v} es una solución de (2.2), entonces existen $\bar{w} \in L^2(\Omega)$, $\bar{\phi} \in H^1(\Omega)$, $\zeta \in L^\infty(\Omega)$ y $\theta \in N_{V_{ad}}$ tales que

$$\langle B_\lambda^*(\bar{\phi} + \alpha B_\lambda \bar{v}) + \beta \kappa_\gamma B_\lambda^* \zeta - \beta B_\lambda^* \bar{w}, \nu - \bar{v} \rangle_{L^2(\Omega)^*, L^2(\Omega)} \geq 0, \quad \text{para todo } \nu \in V_{ad}, \quad (2.13)$$

o que es equivalente a decir que

$$\langle B_\lambda^*(\bar{\phi} + \alpha B_\lambda \bar{v} + \beta \kappa_\gamma \zeta - \beta \bar{w}), \nu - \bar{v} \rangle_{L^2(\Omega)^*, L^2(\Omega)} \geq 0, \quad \text{para todo } \nu \in V_{ad}. \quad (2.14)$$

Formulamos entonces el sistema de optimalidad asociado a nuestro problema (Q'').

Teorema 2.6. Sea \bar{v} una solución para (Q''). Entonces existen $\bar{y} \in H^1(\Omega)$, $\bar{w} \in L^2(\Omega)$, $\bar{\phi} \in H^1(\Omega)$, $\zeta \in L^\infty(\Omega)$ que satisfacen las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} -\Delta \bar{y} + \bar{y} &= B_\lambda \bar{v}, \\ \partial_{\bar{n}} \bar{y} &= 0, \\ -\Delta \bar{\phi} + \bar{\phi} &= \bar{y} - y_d, \\ \partial_{\bar{n}} \bar{\phi} &= 0, \\ \langle B_\lambda^*(\bar{\phi} + \alpha B_\lambda \bar{v} + \beta(\kappa_\gamma \zeta - \bar{w})), \nu - \bar{v} \rangle_{L^2(\Omega)^*, L^2(\Omega)} &\geq 0 \quad \text{para todo } \nu \in V_{ad}, \\ \zeta(x) &= \begin{cases} 1, & \text{casi todo } x \in \Omega \text{ tal que } B_\lambda v(x) > 0, \\ -1, & \text{casi todo } x \in \Omega \text{ tal que } B_\lambda v(x) < 0 \\ \mu \in [-1, 1], & \text{casi todo } x \in \Omega \text{ tal que } B_\lambda v(x) = 0, \end{cases} \\ w - j(B_\lambda \bar{v}) &= 0. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Utilizando el teorema de representación de Riesz para transformar el producto en dualidad del sistema de optimalidad de arriba en un producto interno en $L^2(\Omega)$, tendremos que el sistema de optimalidad de arriba es equivalente a

$$\begin{aligned} -\Delta \bar{y} + \bar{y} &= B_\lambda \bar{v}, \\ \partial_{\bar{n}} \bar{y} &= 0, \\ -\Delta \bar{\phi} + \bar{\phi} &= \bar{y} - y_d, \\ \partial_{\bar{n}} \bar{\phi} &= 0, \\ (B_\lambda^*(\bar{\phi} + \alpha B_\lambda \bar{v} + \beta(\kappa_\gamma \zeta - w)), \nu - \bar{v})_{L^2(\Omega)} &\geq 0, \quad \text{para todo } \nu \in V_{ad}, \\ \zeta(x) &= \begin{cases} 1, & \text{casi todo } x \in \Omega \text{ tal que } B_\lambda v(x) > 0, \\ -1, & \text{casi todo } x \in \Omega \text{ tal que } B_\lambda v(x) < 0 \\ \mu \in [-1, 1], & \text{casi todo } x \in \Omega \text{ tal que } B_\lambda v(x) = 0, \end{cases} \\ w - j(B_\lambda \bar{v}) &= 0, \end{aligned} \quad (2.16)$$

donde hemos usado la misma notación del operador $B_\lambda^*(\bar{\phi} + \alpha B_\lambda \bar{v} + \beta(\kappa_\gamma \zeta - w))$ para nombrar a su representante en $L^2(\Omega)$.

El siguiente resultado nos permitirá introducir multiplicadores de Lagrange a nuestro sistema de optimalidad:

Teorema 2.7. Sea X un espacio de Hilbert, y $Y \subseteq X$ un conjunto no vacío, cerrado y convexo. Entonces, para todo $x \in X$ y todo $c > 0$, las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. $y \in Y, (x, \nu - y)_X \geq 0$.
2. $y = \mathcal{P}(y - cx)$.

Demostración. Supongamos que se cumple 1. Denotemos $\tilde{y} = y - cx$. Entonces, para cualquier $\nu \in Y$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\|\nu - \tilde{y}\|_X^2 - \|\tilde{y} - y\|_X^2 &= (\nu, \nu)_X - 2(\nu, \tilde{y})_X + (\tilde{y}, \tilde{y})_X - (\tilde{y}, \tilde{y})_X + 2(\tilde{y}, y)_X - (y, y)_X \\
&= (\nu, \nu)_X - 2(\nu, \tilde{y})_X + 2(\tilde{y}, y)_X - (y, y)_X \\
&= (\nu, \nu)_X - 2(\nu, y) + (y, y)_X - 2(y, y)_X + 2(\tilde{y}, y)_X + 2(\nu, y)_X \\
&\quad - 2(\nu, \tilde{y}) \\
&= (\nu - y, \nu - y)_X + 2((\nu, y) - (y, y)_X - (\nu, \tilde{y})_X + (y, \tilde{y})_X) \\
&= \|\nu - y\|_X^2 + 2((\nu - y, y) - (\nu - y, \tilde{y})_X) \\
&= \|\nu - y\|_X^2 + 2(\nu - y, y - \tilde{y})_X \\
&= \|\nu - y\|_X^2 + 2(\nu - y, cx)_X \\
&= \|\nu - y\|_X^2 + 2c(x, \nu - y)_X \geq 0,
\end{aligned}$$

debido a que $c > 0$, y gracias a la hipótesis que 1. se cumple. Esto prueba entonces que para cualquier $\nu \in Y$,

$$\|\nu - \tilde{y}\|_X \geq \|y - \tilde{y}\|_X,$$

y por tanto, de acuerdo a la definición del operador proyección, que $y = \mathcal{P}(\tilde{y})$.

Supongamos ahora que se cumple 2., es decir, que $y = \mathcal{P}(\tilde{y})$. Dado que Y es convexo y $y \in Y$, tenemos que para todo $\lambda \in [0, 1]$, todo $\nu \in Y$, $\lambda\nu + (1 - \lambda)y \in Y$. Por tanto,

$$\|\tilde{y} - y\| \leq \|\tilde{y} - \lambda\nu - (1 - \lambda)y\|,$$

lo que equivale a decir que

$$\|\tilde{y} - \lambda\nu - (1 - \lambda)y\|^2 - \|\tilde{y} - y\|^2 \geq 0,$$

pero de la primer parte de la demostración, acomodando términos a conveniencia, se tiene que

$$\begin{aligned}
\|\tilde{y} - \lambda\nu - (1 - \lambda)y\|^2 - \|\tilde{y} - y\|^2 &= \|\lambda\nu + (1 - \lambda)y - y\|_X^2 + 2(\lambda\nu + (1 - \lambda)y - y, y - \tilde{y})_X \\
&= \lambda^2\|\nu - y\|_X^2 + 2\lambda(\nu - y, y - \tilde{y})_X \\
&= \lambda^2\|\nu - y\|_X^2 + 2\lambda c(\nu - y, x)_X.
\end{aligned}$$

Como $\|\tilde{y} - \lambda\nu - (1 - \lambda)y\|^2 - \|\tilde{y} - y\|^2 \geq 0$, debe tenerse que

$$\lambda^2\|\nu - y\|_X^2 + 2\lambda c(\nu - y, x)_X \geq 0,$$

pero esto puede darse solo si $(\nu - y, x) \geq 0$. □

Gracias al Teorema 2.7, tenemos la siguiente reformulación de la desigualdad que aparece en el sistema de optimalidad (2.16).

Teorema 2.8. Existen $\bar{\phi} \in L^2(\Omega)$, $\zeta \in L^\infty(\Omega)$, $\bar{w} \in L^2(\Omega)$ tales que casi todo $x \in \Omega$

$$\bar{v}(x) = \mathcal{P}_{[y_a, y_b]}(\bar{v}(x) - c\mu(x)), \quad (2.17)$$

donde

$$\mu(x) = B_\lambda^*(\bar{\phi}(x) + \alpha B_\lambda \bar{v}(x) + \beta(\kappa_\gamma \zeta(x) - \bar{w}(x))).$$

El siguiente teorema prueba la existencia de multiplicadores de Lagrange en $L^2(\Omega)$ asociados a la restricción de desigualdad $(B_\lambda^*(\bar{\phi} + \alpha B_\lambda \bar{v} + \beta(\kappa_\gamma \zeta - w)), \nu - \bar{v})_{L^2(\Omega)} \geq 0$ para todo $\nu \in V_{ad}$ presentada en el sistema (2.16).

Teorema 2.9. Existen dos funciones $\mu_a, \mu_b : L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ tales que

1. $\mu_a(x), \mu_b(x) \geq 0$ para todo $x \in \Omega$.
2. Para casi todo $x \in \Omega$ se tiene que

$$B_\lambda^*(\bar{\phi} + \alpha B_\lambda \bar{v} + \beta(\kappa_\gamma \zeta - w)) + \mu_b - \mu_a = 0.$$

3. $\mu_a(x)(\bar{v}(x) - y_a) = 0$, casi todo $x \in \Omega$.
4. $\mu_b(x)(\bar{v}(x) - y_b) = 0$, casi todo $x \in \Omega$.

Demostración. Definamos

$$\begin{aligned} \mu_a &= [B_\lambda^*(\bar{\phi} + \alpha B_\lambda \bar{v} + \beta \kappa_\gamma \zeta - w)]_+, \\ \mu_b &= [B_\lambda^*(\bar{\phi} + \alpha B_\lambda \bar{v} + \beta \kappa_\gamma \zeta - w)]_-, \quad y, \\ \mu &= \mu_a - \mu_b. \end{aligned}$$

Por las definiciones de la parte positiva y negativa de una función, es claro que $\mu_a, \mu_b \geq 0$ para todo $x \in \Omega$. Por otro lado, sabemos que B_λ es un operador que va de $L^2(\Omega)$ en sí mismo. También, dado que $\bar{\phi}$ es una función que satisface la ecuación (2.4), la cual claramente es una ecuación en derivadas parciales elípticas con condición de Neumann homogénea, sabemos por lo discutido en la Sección 1 que $\bar{\phi} \in H^1(\Omega)$. Además, de la definición de la caracterización (2.8) de ζ , tenemos que $\zeta \in L^\infty(\Omega)$, y por tanto $\zeta \in L^2(\Omega)$. Finalmente, el Lema 6 de [20] nos permite concluir que $\bar{w} \in L^2(\Omega)$. Esto nos dice finalmente que

$$B_\lambda^*(\bar{\phi} + \alpha B_\lambda \bar{v} + \beta \kappa_\gamma \zeta - \bar{w}) \in L^2(\Omega),$$

y por tanto $\mu_a, \mu_b \in L^2(\Omega)$.

Dadas las definiciones de la parte positiva y negativa, es claro que

$$\mu_a - \mu_b = B_\lambda^*(\bar{\phi} + \alpha B_\lambda \bar{v} + \beta \kappa_\gamma \zeta - \bar{w}),$$

por lo que

$$B_\lambda^*(\bar{\phi} + \alpha B_\lambda \bar{v} + \beta \kappa_\gamma \zeta - \bar{w}) + \mu_b - \mu_a = 0. \quad (2.18)$$

Por otro lado, dada la forma del conjunto V_{ad} , se puede ver que, de acuerdo con el Teorema 2.7, que

$$\bar{v}(x) = \mathcal{P}_{[y_a, y_b]}(\bar{v}(x) - c\mu(x)).$$

Ahora, tenemos que si $\mu(x) \leq 0$, claramente $\mu_a(x) = 0$, por lo que la identidad

$$\mu_a(x)(\bar{v}(x) - y_a) = 0,$$

es cierta. Si ahora $\mu(x) > 0$, tendremos que $\mu(x) = \mu_a(x)$. Por otro lado, dado que c es positiva, la única forma de satisfacer la ecuación es que $\bar{v}(x) - c\mu(x) < y_a$, caso contrario, dado que $c, \mu(x) > 0$, claramente $\bar{v}(x) - c\mu(x) < \bar{v}(x)$. Si suponemos que $y_a \leq \bar{v}(x) - c\mu(x) \leq y_b$, la fórmula de proyección nos dice que

$$\mathcal{P}_{[y_a, y_b]}(\bar{v}(x) - c\mu(x)) = \bar{v}(x) - c\mu(x),$$

pero de la optimalidad de \bar{v} , se tendría que

$$\bar{v} = \mathcal{P}_{[y_a, y_b]}(\bar{v}(x) - c\mu(x)) = \bar{v}(x) - c\mu(x),$$

lo cual es absurdo. Entonces debe tenerse que $\mathcal{P}_{[y_a, y_b]}(\bar{v}(x) - c\mu(x)) = y_a$, y por la optimalidad de \bar{v} se cumple claramente que para todo $\nu \in [y_a, y_b]$,

$$\mu_a(x)(\nu - \bar{v}(x)) \geq 0, \quad \text{casi todo } x \in \Omega.$$

Tomando, en particular $\nu = y_a$, se tiene que $\mu_a(x)(\nu - \bar{v}(x)) = 0$.

Para demostrar la cuarta propiedad de este teorema, seguimos un razonamiento similar a la propiedad tres. Así, suponiendo que $\mu(x) \geq 0$, claramente $\mu_b(x) = 0$, por lo que

$$\mu_b(x)(\bar{v}(x) - y_b) = 0.$$

Si en cambio $\mu(x) < 0$, tendremos que $\mu_b = \mu(x)$. Dado que c es positiva, la única forma de satisfacer la ecuación es que $\bar{v}(x) - c\mu(x) > y_b$, puesto que si no, dado que $c > 0$ y $\mu(x) < 0$, claramente $\bar{v}(x) - c\mu(x) > \bar{v}(x)$. Si suponemos que $y_a \leq \bar{v}(x) - c\mu(x) \leq y_b$, tendremos que

$$\mathcal{P}_{[y_a, y_b]}(\bar{v}(x) - c\mu(x)) = \bar{v}(x) - c\mu(x),$$

pero de la optimalidad de \bar{v} se sigue que

$$\bar{v} = \mathcal{P}_{[y_a, y_b]}(\bar{v}(x) - c\mu(x)) = \bar{v}(x) - c\mu(x),$$

lo cual es absurdo. Por tanto, $\mathcal{P}_{[y_a, y_b]}(\bar{v}(x) - c\mu(x)) = y_b$, y nuevamente gracias a la optimalidad de \bar{v} se sigue que para todo $\nu \in [y_a, y_b]$,

$$\mu_b(x)(\nu - \bar{v}(x)) \leq 0, \quad \text{casi todo } x \in \Omega.$$

Tomando en particular $\nu = y_b$, se tiene que $\mu_b(\bar{v} - y_b) = 0$. □

Gracias al Teorema 2.9, podemos reformular el sistema de optimalidad como un sistema KKT, es decir, existen $\bar{y} \in H^1(\Omega)$, $\bar{w} \in L^2(\Omega)$, $\bar{\phi} \in H^1(\Omega)$, $\zeta \in L^\infty(\Omega)$, $\mu_a, \mu_b \in L^2(\Omega)$

que satisfacen las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned}
-\Delta \bar{y} + \bar{y} &= B_\lambda \bar{v}, & \text{en } \Omega \\
\partial_{\bar{n}} \bar{y} &= 0, & \text{sobre } \Gamma \\
-\Delta \bar{\phi} + \bar{\phi} &= \bar{y} - y_d, & \text{en } \Omega \\
\partial_{\bar{n}} \bar{\phi} &= 0, & \text{sobre } \Gamma \\
B_\lambda^*(\bar{\phi} + \alpha B_\lambda \bar{v} + \beta(\kappa_\gamma \zeta - \bar{w})) + \mu_b - \mu_a &= 0, \\
\mu_a, \mu_b &\geq 0, \\
\mu_a(\bar{v} - y_a) &= 0, \\
\mu_b(\bar{v} - y_b) &= 0, \\
\zeta(x) &= \begin{cases} 1, & \text{casi todo } x \in \Omega \text{ tal que } B_\lambda v(x) > 0, \\ -1, & \text{casi todo } x \in \Omega \text{ tal que } B_\lambda v(x) < 0, \\ \mu \in [-1, 1], & \text{casi todo } x \in \Omega \text{ tal que } B_\lambda v(x) = 0, \end{cases} \\
\bar{w} - j(B_\lambda \bar{v}) &= 0.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

A partir de la ecuación (2.18), y dado que B_λ es biyectivo y autoadjunto, se tiene que $B_\lambda^* = B_\lambda$. En efecto, para todo $v, \varphi \in L^2(\Omega)$,

$$\begin{aligned}
(B_\lambda^* v, \varphi)_{L^2(\Omega)} &= ([(\lambda I + R)^{-1}]^* v, \varphi)_{L^2(\Omega)} \\
&= ([(\lambda I + R)^*]^{-1} v, \varphi)_{L^2(\Omega)} \\
&= ([\lambda I^* + R^*]^{-1} v, \varphi)_{L^2(\Omega)} \\
&= ([\lambda I + R]^{-1} v, \varphi)_{L^2(\Omega)} \\
&= (B_\lambda v, \varphi)_{L^2(\Omega)},
\end{aligned}$$

donde $R^* = R$ por la definición de R . Por tanto, B_λ^* es invertible, y gracias a (2.18) tenemos que

$$\bar{\phi} + \alpha B_\lambda \bar{v} + \beta \kappa_\gamma \zeta - \bar{w} + B_\lambda^{-*}(\mu_b - \mu_a) = 0. \tag{2.20}$$

Como $B_\lambda^{-*} = \lambda I + R$, podemos escribir

$$B_\lambda^{-*}(\mu_b - \mu_a) = (\lambda I + R)(\mu_b - \mu_a) = \lambda(\mu_b - \mu_a) + R\mu_b - R\mu_a.$$

Reemplazando esta última igualdad en (2.20) nos queda

$$\bar{\phi} + \alpha B_\lambda \bar{v} + \beta(\kappa_\gamma \zeta - \bar{w}) + \lambda(\mu_b - \mu_a) + R\mu_b - R\mu_a = 0. \tag{2.21}$$

Gracias a la linealidad del operador solución R , podemos reformular la ecuación del estado adjunto, colocando en el lado derecho de dicha ecuación el término $\mu_b - \mu_a$. En conjunto

con la ecuación (2.21), el sistema (2.19) se puede reescribir en términos de \bar{u} como:

$$\begin{aligned}
-\Delta \bar{y} + \bar{y} &= \bar{u}, & \text{en } \Omega, \\
\partial_{\bar{n}} \bar{y} &= 0, & \text{sobre } \Gamma, \\
-\Delta \bar{\phi} + \bar{\phi} &= \bar{y} - y_d + \mu_b - \mu_a, & \text{en } \Omega, \\
\partial_{\bar{n}} \bar{\phi} &= 0, & \text{sobre } \Gamma, \\
\bar{\phi} + \alpha \bar{u} + \beta(\kappa_\gamma \zeta - \bar{w}) + \lambda(\mu_b - \mu_a) &= 0, \\
\mu_a, \mu_b &\geq 0, \\
\mu_a(B_\lambda^{-1} \bar{u} - y_a) = \mu_b(B_\lambda^{-1} \bar{u} - y_b) &= 0, \\
\zeta(x) &= \begin{cases} 1, & \text{casi todo } x \in \Omega \text{ tal que } B_\lambda v(x) > 0, \\ -1, & \text{casi todo } x \in \Omega \text{ tal que } B_\lambda v(x) < 0, \\ \mu \in [-1, 1], & \text{casi todo } x \in \Omega \text{ tal que } B_\lambda v(x) = 0, \end{cases} \\
\bar{w} - j(\bar{u}) &= 0, \\
y_a \leq \lambda \bar{u} + \bar{y} \leq y_b, & \text{ casi todo } \Omega.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Aquí, hemos reemplazado el término \bar{v} que aparece en (2.19) mediante la identidad $\bar{u} = B_\lambda \bar{v}$. El siguiente teorema nos permite obtener un sistema de optimalidad en términos de las variables originales \bar{y}, \bar{u} del problema de control óptimo original.

Teorema 2.10. Sea $\bar{u} \in L^2(\Omega)$. Existen $\bar{y}, \bar{\phi} \in H^1(\Omega)$, $\mu_a, \mu_b, \bar{w} \in L^2(\Omega)$, $\zeta \in L^\infty(\Omega)$ tales que satisfacen el siguiente sistema KKT:

$$\begin{aligned}
-\Delta \bar{y} + \bar{y} &= \bar{u}, & \text{en } \Omega, \\
\partial_{\bar{n}} \bar{y} &= 0, & \text{sobre } \Gamma, \\
-\Delta \bar{\phi} + \bar{\phi} &= \bar{y} - y_d + \mu_b - \mu_a, & \text{en } \Omega, \\
\partial_{\bar{n}} \bar{\phi} &= 0, & \text{sobre } \Gamma, \\
\bar{\phi} + \alpha \bar{u} + \beta(\kappa_\gamma \zeta - \bar{w}) + \lambda(\mu_b - \mu_a) &= 0, \\
\mu_a, \mu_b &\geq 0, \\
\mu_a(\lambda \bar{u} + \bar{y} - y_a) = \mu_b(B_\lambda \bar{u} + \bar{y} - y_b) &= 0, \\
\zeta(x) &= \begin{cases} 1, & \text{casi todo } x \in \Omega \text{ tal que } B_\lambda v(x) > 0, \\ -1, & \text{casi todo } x \in \Omega \text{ tal que } B_\lambda v(x) < 0, \\ \mu \in [-1, 1], & \text{casi todo } x \in \Omega \text{ tal que } B_\lambda v(x) = 0, \end{cases} \\
\bar{w} - j(\lambda \bar{u} + \bar{y}) &= 0. \\
y_a \leq \lambda \bar{u}(x) + \bar{y}(x) \leq y_b, & \text{ casi todo } x \in \Omega
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Demostración. Dado que $B_\lambda^{-1} \bar{u} = (\lambda I + R) \bar{u} = \lambda \bar{u} + R \bar{u} = \lambda \bar{u} + \bar{y}$, la ecuación $\mu_a(B_\lambda^{-1} \bar{u} - y_a) = 0$ del sistema (2.22) se reescribe como $\mu_a(\lambda \bar{u} + \bar{y} - y_a) = 0$. De igual forma, la ecuación $\mu_b(B_\lambda^{-1} \bar{u} - y_b) = 0$ del mismo sistema (2.22) puede reescribirse como $\mu_b(\lambda \bar{u} + \bar{y} - y_b) = 0$. La existencia de $\bar{y}, \bar{\phi}, \zeta, \bar{w}, \mu_a, \mu_b$ ha sido demostrada en los teoremas anteriores. \square

Capítulo 3

Resolución numérica del problema

En este capítulo haremos una exposición de los resultados obtenidos luego de la formulación del algoritmo semi suave de Newton, obtenido en el capítulo 2. Nuestro objetivo ha sido analizar lo que sucede con tres aspectos del problema introducido: la forma cualitativa y cuantitativa del control óptimo bajo los parámetros α, β y p del problema, el comportamiento de la solución del problema regularizado a medida que variamos los valores de γ y λ ; y finalmente, cuestiones propias del algoritmo, como la velocidad de convergencia del mismo.

3.1. Algoritmo semi suave de Newton

Los siguientes resultados permitirán reescribir las condiciones de complementariedad de (2.23) en términos de una función semi suave de Newton.

Teorema 3.1. Sean \bar{v} la función definida en (2.16), $\mu_a, \mu_b \in L^2(\Omega)$ los multiplicadores de Lagrange asociados al sistema de optimalidad (2.23), $\mu = \mu_a - \mu_b$ y $c_1 > 0$. Definamos la función

$$C_1: L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega) \\ (v, \mu) \longmapsto \mu - \max(0, c_1(v - y_b) + \mu) - \min(0, c_1(v - y_a) + \mu)$$

Si \bar{v}, μ satisfacen

$$C_1(\bar{v}, \mu) = 0,$$

entonces satisface también las ecuaciones

$$\mu_a(\bar{v} - y_a) = \mu_b(\bar{v} - y_b) = 0.$$

Demostración. Consideramos la ecuación $C_1(\bar{v}, \mu) = 0$. Tenemos los siguientes casos:

1. Si $c_1(\bar{v} - y_b) + \mu > 0$, se tiene que $c_1(\bar{v} - y_a) + \mu > 0$. En efecto, suponiendo que $c_1(\bar{v} - y_b) + \mu > 0$, tendremos que

$$\begin{aligned} c_1(\bar{v} - y_b) + \mu > 0 &\Rightarrow \bar{v} - y_b + \frac{1}{c_1} > 0, \\ &\Rightarrow \bar{v} + \frac{1}{c_1}\mu > y_b > y_a, \\ &\Rightarrow \bar{v} + \frac{1}{c_1}\mu - y_a > 0, \\ &\Rightarrow c_1(\bar{v} - y_a) + \mu > 0, \end{aligned}$$

por tanto $\max(0, c_1(\bar{v} - y_b) + \mu) = c_1(\bar{v} - y_b) + \mu$ y $\min(0, c_1(\bar{v} - y_a) + \mu) = 0$. Así, la ecuación $C_1(\bar{v}, \mu) = 0$ implica que

$$\mu - c_1(\bar{v} - y_b) - \mu = 0,$$

y puesto que $c_1 \neq 0$, la única posibilidad para que ocurra la ecuación de arriba es que $\bar{v} = y_b$.

2. Si $c_1(\bar{v} - y_a) + \mu < 0$, se tiene que $c_1(\bar{v} - y_b) + \mu < 0$. En efecto, suponiendo que $c_1(\bar{v} - y_a) + \mu < 0$, se tiene que

$$\begin{aligned} c_1(\bar{v} - y_a) + \mu < 0 &\Rightarrow \bar{v} - y_a + \frac{1}{c_1} < 0, \\ &\Rightarrow \bar{v} + \frac{1}{c_1}\mu < y_a > y_b, \\ &\Rightarrow \bar{v} + \frac{1}{c_1}\mu - y_b < 0, \\ &\Rightarrow c_1(\bar{v} - y_b) + \mu < 0, \end{aligned}$$

por tanto $\max(0, c_1(\bar{v} - y_b) + \mu) = 0$ y $\min(0, c_1(\bar{v} - y_a) + \mu) = c_1(\bar{v} - y_a) + \mu$. Así, la ecuación $C_1(\bar{v}, \mu) = 0$ implica que

$$\mu - c_1(\bar{v} - y_a) - \mu = 0,$$

y puesto que $c_1 \neq 0$, la única posibilidad para que se cumpla la ecuación de arriba es que $\bar{v} = y_a$.

3. Si $c_1(\bar{v} - y_b) + \mu \leq 0$, o bien $c_1(\bar{v} - y_a) + \mu \geq 0$ y la ecuación $C_1(\bar{v}, \mu) = 0$ implicaría que $\mu = 0$, o bien $c_1(\bar{v} - y_a) + \mu < 0$, lo cual nos remite al análisis del caso 2. Si $\mu = 0$, $c_1(\bar{v} - y_b) \leq 0$ y $c_1(\bar{v} - y_a) \geq 0$, lo que implica que $y_a \leq \bar{v} \leq y_b$, proposición que es verdadera dado que $\bar{v} \in V_{ad}$.
4. Si $c_1(\bar{v} - y_a) + \mu \geq 0$, o bien $c_1(\bar{v} - y_b) + \mu \leq 0$ y la ecuación $C_1(\bar{v}, \mu) = 0$ implicaría que $\mu = 0$, o bien $c_1(\bar{v} - y_b) + \mu > 0$, en cuyo caso nos remitimos al apartado 1 de este análisis. Si $\mu = 0$, $c_1(\bar{v} - y_b) \leq 0$ y $c_1(\bar{v} - y_a) \geq 0$, por tanto $y_a \leq \bar{v} \leq y_b$, proposición que es verdadera dado que $\bar{v} \in V_{ad}$.

Vemos claramente que la ecuación $C_1(v, \mu) = 0$ reúne en sí todas las condiciones de complementariedad asociadas a los multiplicadores μ_a, μ_b , demostrando así el resultado. \square

El teorema que se presenta a continuación nos permite reescribir la definición de ζ del sistema (2.23) mediante una función semi suave de Newton.

Teorema 3.2. Sean $\zeta \in L^\infty(\Omega)$ definida en (2.8), $c_2 > 0$ y consideramos la función

$$\begin{aligned} C_2: L^2(\Omega) \times L^\infty(\Omega) &\longrightarrow L^2(\Omega) \\ (u, \zeta) &\longmapsto u - \max(0, u + c_2\kappa_\gamma\beta(\zeta - 1)) - \min(0, u + c_2\kappa_\gamma\beta(\zeta + 1)). \end{aligned}$$

Entonces si u, ζ satisfacen la ecuación $C_2(u, \zeta) = 0$, satisfacen también la condición (2.8).

Demostración. Considerando la ecuación $C_2(u, \zeta) = 0$, podemos analizar los siguientes casos:

1. Si $u > 0$, claramente $u + c_2\kappa_\gamma\beta(\zeta + 1) > 0$, pues $\zeta + 1 \geq 0$ y además $c_2, \kappa_\gamma, \beta > 0$, por lo cual $\min(0, u + c_2\kappa_\gamma\beta(\zeta + 1)) = 0$. De la ecuación $C_2(u, \zeta) = 0$ nos queda

$$u = \max(0, u + c_2\kappa_\gamma\beta(\zeta - 1)),$$

y como $c_2\kappa_\gamma\beta(\zeta - 1) \leq 0$, la única posibilidad para que se cumpla la igualdad de arriba es que $\zeta = 1$.

2. Si $u < 0$, claramente $u + c_2\kappa_\gamma\beta(\zeta - 1) < 0$, pues $\zeta - 1 \leq 0$ y además $c_2, \kappa_\gamma, \beta > 0$. Luego, $C_2(u, \zeta) = 0$ implica que

$$u = \min(0, u + c_2\kappa_\gamma\beta(\zeta + 1)),$$

y como $c_2\kappa_\gamma\beta(\zeta + 1) \geq 0$, la única posibilidad para que se cumpla la igualdad de arriba es que $\zeta = -1$.

$$u = u + c_2\kappa_\gamma\beta(\zeta + 1),$$

lo cual se cumple únicamente si $\zeta = -1$.

3. Si $u = 0$, la ecuación $C_2(u, \zeta) = 0$ implica que

$$\max(0, c_2\kappa_\gamma\beta(\zeta - 1)) + \min(0, c_2\kappa_\gamma\beta(\zeta + 1)) = 0.$$

Si $\zeta > 1$, entonces $\min(0, c_2\kappa_\gamma\beta(\zeta + 1)) = 0$ y la ecuación de arriba nos queda

$$\max(0, c_2\kappa_\gamma\beta(\zeta - 1)) = 0,$$

lo cual implica que $c_2\kappa_\gamma\beta(\zeta - 1) \leq 0$ y por tanto que $\zeta \leq 1$, lo cual supone una contradicción a nuestra suposición de que $\zeta > 1$.

Si $\zeta < -1$, entonces $\max(0, c_2\kappa_\gamma\beta(\zeta - 1)) = 0$ y por tanto la ecuación $C_2(u, \zeta) = 0$ implica que

$$\min(0, c_2\kappa_\gamma\beta(\zeta + 1)) = 0,$$

lo cual se cumple si $c_2\kappa_\gamma\beta(\zeta + 1) \geq 0$ y por lo tanto que $\zeta \geq -1$, lo que contradice nuestra suposición de que $\zeta \leq -1$.

En cada caso, hemos visto que la ecuación $C_2(u, \zeta) = 0$ implica que si $u(x) > 0$ se debe tener que $\zeta(x) = 1$, si $u(x) < 0$, $\zeta(x) = -1$ y si $u(x) = 0$, se debe tener que $-1 \leq \zeta(x) \leq 1$, probando que ζ cumple con (2.8). \square

Consideremos el hecho de que $v = B_\lambda^{-1}u = (\lambda I + R)u = \lambda u + Ru$. Dada la definición de R tenemos que $y = Ru$, por lo que podremos reemplazar v por $\lambda u + y$ en la definición de C_1 quedando entonces

$$C_1(\lambda u + y, \mu) = \mu - \max(0, c_1(\lambda u + y - y_b) + \mu) + \min(0, c_1(\lambda u + y - y_a) + \mu).$$

La función de arriba claramente depende de u , y y μ , por lo que podemos definir

$$\begin{aligned} \tilde{C}_1: L^2(\Omega) \times H^1(\Omega) \times L^2(\Omega) &\longrightarrow L^2(\Omega) \\ (u, y, \mu) &\longmapsto C_1(\lambda u + y, \mu), \end{aligned}$$

Como el teorema 3.1 nos dice que $C_1(v, \mu) = 0$ implica las condiciones de complementariedad $\mu_a(\bar{v} - y_a) = \mu_b(\bar{v} - y_b) = 0$, claramente la ecuación $\tilde{C}(u, y, \mu) = 0$ satisficará las condiciones de complementariedad

$$\mu_a(\lambda u + y - y_a) = \mu_b(\lambda u + y - y_b) = 0.$$

del sistema (2.23), por lo cual, gracias a esto y al teorema 3.2 concluimos el siguiente resultado.

Teorema 3.3. Si $(\bar{y}, \bar{u}, \bar{\phi}, \mu, \zeta, \bar{w}) \in H^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times H^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^\infty(\Omega) \times L^2(\Omega)$, son las funciones asociadas al sistema de optimalidad (2.23), se tiene que

$$E\bar{y} - \bar{u} = 0, \quad (3.1a)$$

$$E\bar{\phi} - \bar{y} + y_d + \mu = 0, \quad (3.1b)$$

$$\bar{\phi} + \alpha\bar{u} + \beta(\kappa_\gamma\zeta - w) + \lambda\mu = 0, \quad (3.1c)$$

$$\tilde{C}_1(u, y, \mu) = 0, \quad (3.1d)$$

$$C_2(u, \zeta) = 0, \quad (3.1e)$$

$$w - j(u) = 0, \quad (3.1f)$$

donde E denota al operador diferencial definido en (2.5).

Una vez que hemos obtenido el sistema de optimalidad (3.1), buscamos una forma de resolverlo. Como hemos mencionado en la introducción de esta tesis, el método que nosotros usaremos es el método semi suave de Newton, aplicado a espacios infinito dimensionales.

Teorema 3.4. Sea $F : H^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^\infty(\Omega) \times L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ una función de variables $\bar{y}, \bar{u}, \bar{\phi}, \mu, \zeta, w$ definida por los lados izquierdos de las ecuaciones presentadas en (3.1). Entonces F es semisuave.

Demostración. Para cada $u \in L^2(\Omega)$ definamos $Tu = S^*(S(u) - y_d)$. Entonces sabemos que $\bar{y} = S\bar{u}$, $\bar{\phi} = T\bar{u}$ y además $w = j(u)$. De la ecuación (3.1).c tenemos que

$$\kappa_\gamma\beta\zeta = \beta w - \lambda\mu - \bar{\phi} - \alpha\bar{u},$$

y usando las definiciones de j, S, T tenemos que

$$\kappa_\gamma\beta\zeta = \beta j(u) - \lambda\mu - T\bar{u} - \alpha\bar{u}.$$

Definamos ahora las funciones

$$F_1(u, \mu) = \mu - \max(0, c_1(\lambda u + Su - y_b) + \mu) - \min(0, c_1(\lambda u + Su - y_a) + \mu),$$

$$F_2(u, \mu) = u - \max(0, u + c_2(\beta j(u) - \lambda\mu - Tu - \alpha u - \kappa_\gamma\beta)) \\ - \min(0, u + c_2(\beta j(u) - \lambda\mu - Tu - \alpha u + \kappa_\gamma\beta)).$$

Si $c_1 = \frac{1}{\lambda}$ tendremos que

$$F_1(u, \mu) = \mu - \max\left(0, u + \frac{1}{\lambda}Su - \frac{1}{\lambda}y_b + \mu\right) - \min\left(0, u + \frac{1}{\lambda}Su - \frac{1}{\lambda}y_a + \mu\right),$$

mientras que si $c_2 = \frac{1}{\alpha}$, tenemos que

$$F_2(u, \mu) = u - \frac{\beta}{\alpha} \left[\begin{aligned} &\text{máx} \left(0, j(u) - \frac{\lambda}{\beta} \mu - \frac{1}{\beta} Tu - \kappa_\gamma \right) \\ &- \text{mín} \left(0, j(u) - \frac{\lambda}{\beta} \mu - \frac{1}{\beta} Tu + \kappa_\gamma \right) \end{aligned} \right].$$

Definiendo

$$\begin{aligned} \tilde{F}: L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u, \mu) &\longmapsto (F_1(u, \mu), (F_2(u, \mu))) \end{aligned}$$

tendremos que $F(\bar{y}, \bar{u}, \bar{\phi}, \mu, \zeta, w) = 0$ es equivalente a

$$\tilde{F}(u, \mu) = (0, 0),$$

por lo que verificaremos que \tilde{F} es semi suave. Ahora, gracias al teorema 1.6 bastará probar que F_1 y F_2 son semi suaves para concluir con la demostración del teorema. Si definimos

$$M(u, \mu) = u + \frac{1}{\lambda} Su + \mu + c,$$

con c una constante que puede ser $-\frac{1}{\lambda}y_a$ o $-\frac{1}{\lambda}y_b$ y dado que S es un operador lineal y continuo, claramente M es Fréchet diferenciable para cualquier $(u, \mu) \in L^2(\Omega)^2$ puesto que M puede ser visto como una suma de dos funciones las cuales solo dependen o bien de u o bien de μ que son Fréchet diferenciables en sus respectivas variables. Finalmente, las funciones $\text{máx}(0, \cdot)$ y $\text{mín}(0, \cdot)$ son semisuaves (ver [10] o [16]), por lo que la composición de las funciones $\text{máx}(0, \cdot)$ y $\text{mín}(0, \cdot)$ con M resulta en una función semisuave según el Teorema 1.7.

Para analizar la semi suavidad de F_2 , notemos que al definir

$$N(u, \mu) = j(u) - \frac{1}{\beta} Tu - \frac{\lambda}{\beta} \mu + c'$$

donde c' puede ser o bien κ_γ o bien $-\kappa_\gamma$, tenemos que N se puede ver como la suma de dos funciones

$$u \mapsto j(u) - \frac{1}{\beta} Tu,$$

la cual es semi suave de acuerdo a un resultado presentado en [21], y la función

$$\mu \mapsto -\frac{\lambda}{\beta} \mu + c',$$

la cual claramente es Fréchet diferenciable. Por tanto la composición de las funciones $\text{máx}(0, \cdot)$ y $\text{mín}(0, \cdot)$ con N resultan en funciones semi suaves según el Teorema 1.7. \square

El teorema anterior justifica la aplicación un algoritmo de Newton semi suave para la resolución numérica del problema $F(p) = 0$, siendo $p = (\bar{y}, \bar{\phi}, \bar{u}, \bar{\mu}, \bar{\zeta}, \bar{w})$, y F la función del teorema 3.4. Según [31] o [16], el algoritmo semi suave de Newton genera una sucesión de elementos $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tales que convergen a una solución del problema $F(p) = 0$. La sucesión $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ satisface la igualdad:

$$p_{k+1} = p_k + \delta_{p_k}, \quad \text{con} \quad F'(p_k) \delta_{p_k} = -F(p_k),$$

donde F' representa la derivada generalizada de Newton de F y $\delta_p = (\delta_y, \delta_\phi, \delta_u, \delta_\mu, \delta_\zeta, \delta_w)$. representa el incremento que sufre $\bar{y}, \bar{\phi}, \bar{u}, \mu, \zeta, \bar{w}$ respecto a la anterior iteración.

Considerando los conjuntos

$$A_1 = \{x : c_1(\lambda u + y - y_b) + \mu \geq 0\}, \quad A_2 = \{x : c_1(\lambda u + y - y_a) + \mu \leq 0\}, \quad A = A_1 \cup A_2,$$

$$A_3 = \{x : u + c\kappa_\gamma\beta(\zeta - 1) \geq 0\}, \quad A_4 = \{x : u + c\kappa_\gamma\beta(\zeta + 1) \leq 0\}, \quad \tilde{A} = A_3 \cup A_4.$$

Tomando $\chi_A = \chi_{A_1} + \chi_{A_2}$, $\chi_{\tilde{A}} = \chi_{A_3} + \chi_{A_4}$, donde χ_X es la función indicatriz sobre el conjunto X , como se ha definido en la sección 1.2, y siguiendo un proceso similar al hecho en [21] para la deducción de F' , se puede ver que

$$F'(p) = \begin{pmatrix} E & 0 & -I & 0 & 0 & 0 \\ -I & E & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & I & \alpha I & \lambda I & \beta\kappa_\gamma I & -\beta I \\ \chi_A & 0 & \lambda(\chi_A) & c_1\lambda(I - \chi_A) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I - \chi_{\tilde{A}} & 0 & -c_2\kappa_\gamma\beta(\chi_{\tilde{A}}) & 0 \\ 0 & 0 & j'(u_k) & 0 & 0 & -I \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

donde j' representa a la derivada de la función j definida en el Teorema 2.1. De acuerdo con el Lema 4 de [20], esta función es no negativa, convexa y continuamente diferenciable, cuya derivada para cualquier $t \in \mathbb{R}$ viene dada por:

$$j'_y(t) = \begin{cases} (1-q)q \left(|t| + \frac{q-1}{\gamma} \right)^{q-2}, & |t| > \frac{1}{\gamma} \\ 0, & \text{caso contrario,} \end{cases}$$

3.2. Detalles de la implementación

Realizamos una partición uniforme del cuadrado unitario $\Omega = [0, 1]^2$, dividiendo cada lado del cuadrado en n puntos internos, lo que implicará contar con n^2 nodos internos, de coordenadas (x_1^i, x_2^j) , cada una de la forma

$$x_1^i = \frac{i}{n+1}, \quad x_2^j = \frac{j}{n+1}, \quad i, j \in \{1, \dots, n\}.$$

Denotaremos por $h = \frac{1}{n+1}$. La aproximación numérica de todas las integrales propuestas en el trabajo son calculadas a través de diferencias finitas, usándose para su aproximación la siguiente regla de punto medio:

$$\int_a^b \int_c^d u(x_1, x_2) dx_2 dx_1 \approx \frac{1}{4} h^2 \left[u(a, c) + u(b, c) + u(a, d) + u(b, d) \right. \\ \left. + 2 \sum_{i=1}^{n-2} u(x_i, c) + 2 \sum_{i=1}^{n-2} u(x_i, d) + 2 \sum_{i=1}^{n-2} u(a, y_i) \right. \\ \left. + 2 \sum_{i=1}^{n-2} u(b, y_i) + 4 \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{i=1}^{n-2} u(x_i, y_j) \right] \quad (3.3)$$

1. Fijar una tolerancia $\epsilon > 0$, y escoger una solución inicial $p_0 = (\bar{y}_0, \bar{\phi}_0, \bar{u}_0, \bar{\mu}, \bar{\zeta}_0, \bar{w}_0)$. Tomar $k = 0$.
2. Tomar un valor inicial de residuo $\|\delta_{p_k}\| > \epsilon$.
3. Mientras que $\|\delta_{p_0}\| \geq \epsilon$:
 - a) Calcular $F(x_k)$, $F'(p_k)$ y resolver para δ_{p_k} el sistema

$$F'(p_k)\delta_{p_k} = -F(x_k)$$
 - b) Tomar

$$p_{k+1} = p_k + \delta_{p_k}$$
 - c) Calcular el residuo $\|\delta_{p_k}\|$ y regresar al paso 2
4. Si $\|\delta_{p_k}\| \leq \epsilon$, el algoritmo para y entrega como solución a p_k .

Ahora, si definimos las funciones

$$\begin{aligned} F_1(\bar{y}, \bar{\phi}, \bar{u}, \bar{\mu}, \bar{\zeta}, \bar{w}) &= E\bar{y} - \bar{u}, \\ F_2(\bar{y}, \bar{\phi}, \bar{u}, \bar{\mu}, \bar{\zeta}, \bar{w}) &= E\bar{\phi} - \bar{y} + y_d + \mu, \\ F_3(\bar{y}, \bar{\phi}, \bar{u}, \bar{\mu}, \bar{\zeta}, \bar{w}) &= \bar{\phi} + \alpha\bar{u} + \beta(\kappa\gamma\zeta - w) + \lambda\mu, \\ F_4(\bar{y}, \bar{\phi}, \bar{u}, \bar{\mu}, \bar{\zeta}, \bar{w}) &= \tilde{C}_1(u, y, \mu) \\ F_5(\bar{y}, \bar{\phi}, \bar{u}, \bar{\mu}, \bar{\zeta}, \bar{w}) &= C_2(u, \zeta), \\ F_6(\bar{y}, \bar{\phi}, \bar{u}, \bar{\mu}, \bar{\zeta}, \bar{w}) &= w - j(u), \end{aligned}$$

como $F(p) = 0$, se tiene que $F_i(p) = 0$ para cada $i \in \{1, \dots, 6\}$, es claro que el algoritmo semi suave de Newton genera una sucesión de tuplas $\{(\bar{y}_k, \bar{\phi}_k, \bar{u}_k, \bar{\mu}_k, \bar{\zeta}_k, \bar{w}_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F_i(\bar{y}_k, \bar{\phi}_k, \bar{u}_k, \bar{\mu}_k, \bar{\zeta}_k, \bar{w}_k) = 0,$$

para cada $i \in \{1, \dots, 6\}$. Por tanto, es aceptable también contar como criterio de parada la siguiente condición: dada una tolerancia $\epsilon > 0$, mientras la cantidad

$$\eta_k = \sum_{i \in \{1, \dots, 6\}} \|F_i(\bar{y}_k, \bar{\phi}_k, \bar{u}_k, \bar{\mu}_k, \bar{\zeta}_k, \bar{w}_k)\|_{L^2(\Omega)} \geq \epsilon,$$

el algoritmo debe seguir iterando, donde la norma es tomada en el espacio producto.

3.3. Forma cualitativa de la solución

Consideraremos un problema de control óptimo bidimensional, con $\Omega = [0, 1]^2$. Además, tenemos que y_d es la función definida por

$$y_d(x_1, x_2) = \left(x_1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x_2 - \frac{1}{2}\right)^2,$$

para todo $(x_1, x_2) \in [0, 1]^2$. Además consideramos $y_a = 0, y_b = 0, 1$.

Como primer experimento numérico, consideramos el problema de control óptimo con los parámetros $\alpha = 1e - 3, \beta = 2e - 5$ y $p = 2$. Usando como criterio de parada que el residuo de la iteración k y la iteración $k - 1, k \in \mathbb{N}$ sea menor que cierta tolerancia (que en nuestro caso ha sido fijada en $9e - 7$), en nuestro ensayo numérico se obtiene una convergencia de nuestro algoritmo en 58 iteraciones. Aquí, los parámetros de regularización toman los valores $\gamma = 2500, \lambda = 1e - 4$. Las gráficas que presentamos a continuación muestran el comportamiento del algoritmo semi suave de Newton para este caso particular, respecto al número de iteraciones que se realizan.

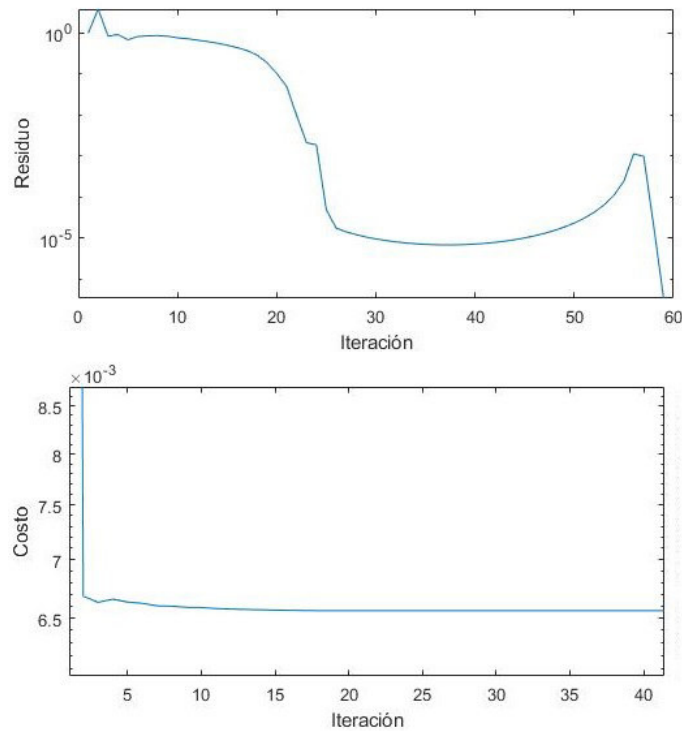


Figura 3.1: En el primer gráfico de arriba a abajo se puede ver como el residuo decrece en función del número de iteraciones, mientras que en el segundo gráfico se observa como el costo de la función decrece en función del número de iteraciones y se estabiliza a partir de la quinta iteración aproximadamente. Es posible ver que el costo de la función objetivo no decrece significativamente luego de las primeras iteraciones del algoritmo, pese a que el residuo no alcanza un valor menor que la tolerancia sino a partir de las últimas iteraciones

Las gráficas del control y estado soluciones para nuestro problema, así como el multiplicador μ que aparece en el sistema de optimalidad (2.23) son las siguientes:

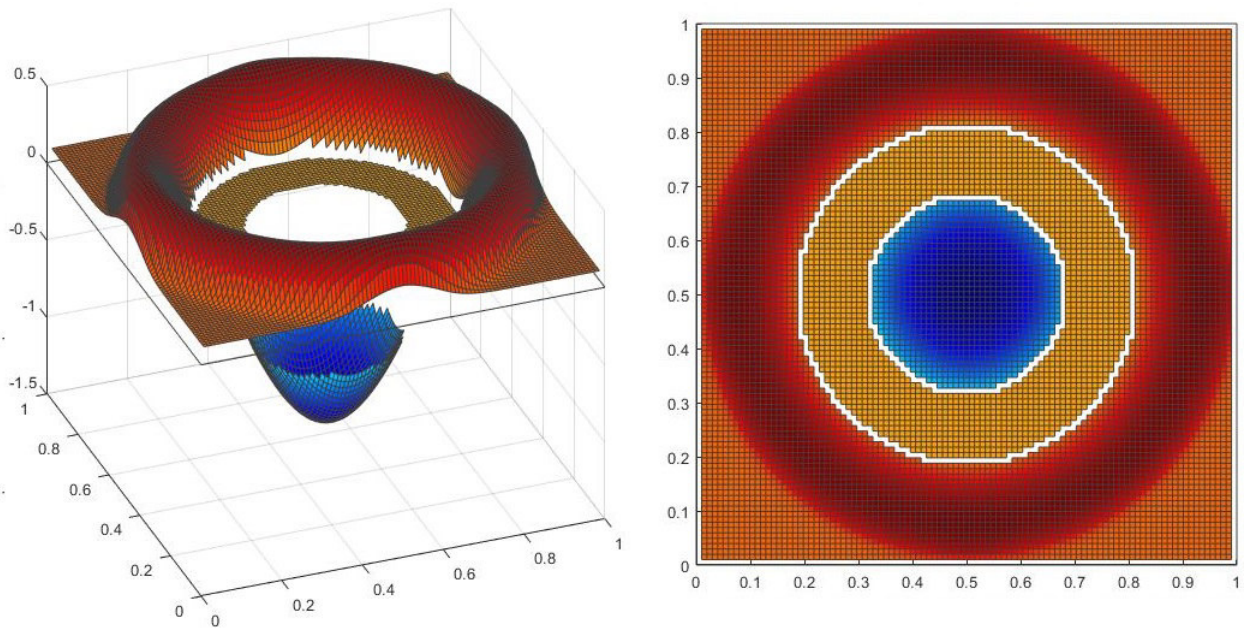


Figura 3.2: Gráfico del control óptimo (izquierda) y una vista desde arriba del mismo (derecha). Apreciamos que nuestro control toma varios valores nulos y además las regiones donde hay saltos.

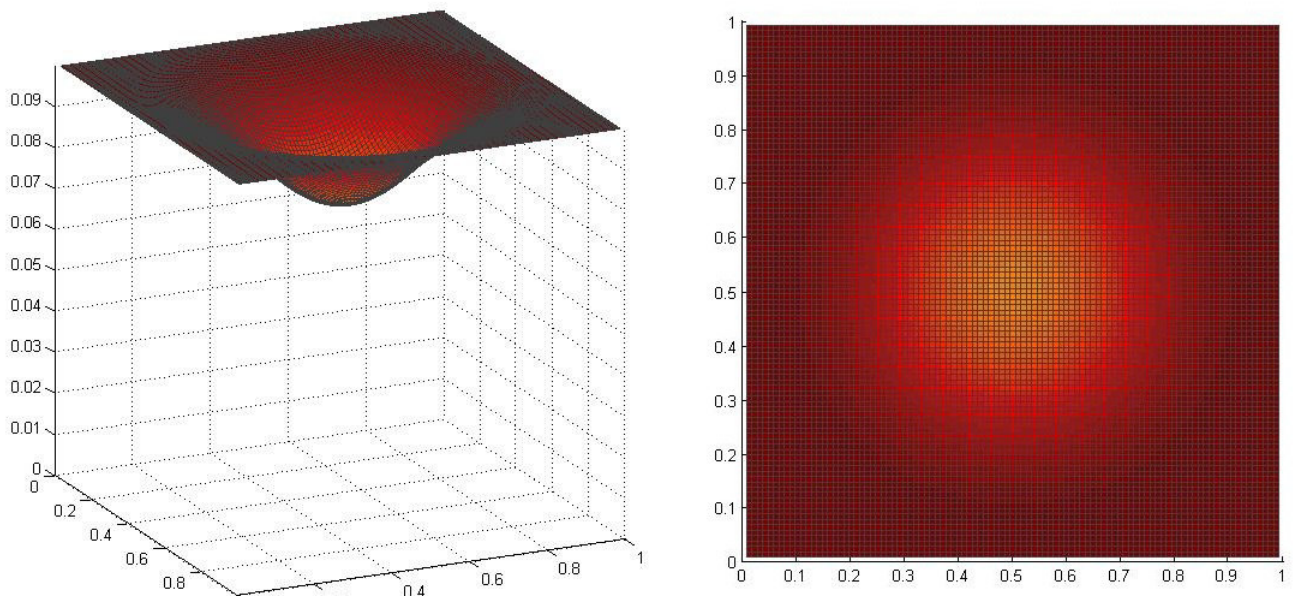


Figura 3.3: Gráfico del estado óptimo (izquierda) y una vista desde arriba del mismo (derecha). Se puede ver que nuestro estado toma el valor de la restricción $y_b = 0,1$ en varias partes, y además que el estado encontrado respeta las restricciones $0 \leq y(x) \leq 0,1$ para todo $x \in \Omega$.

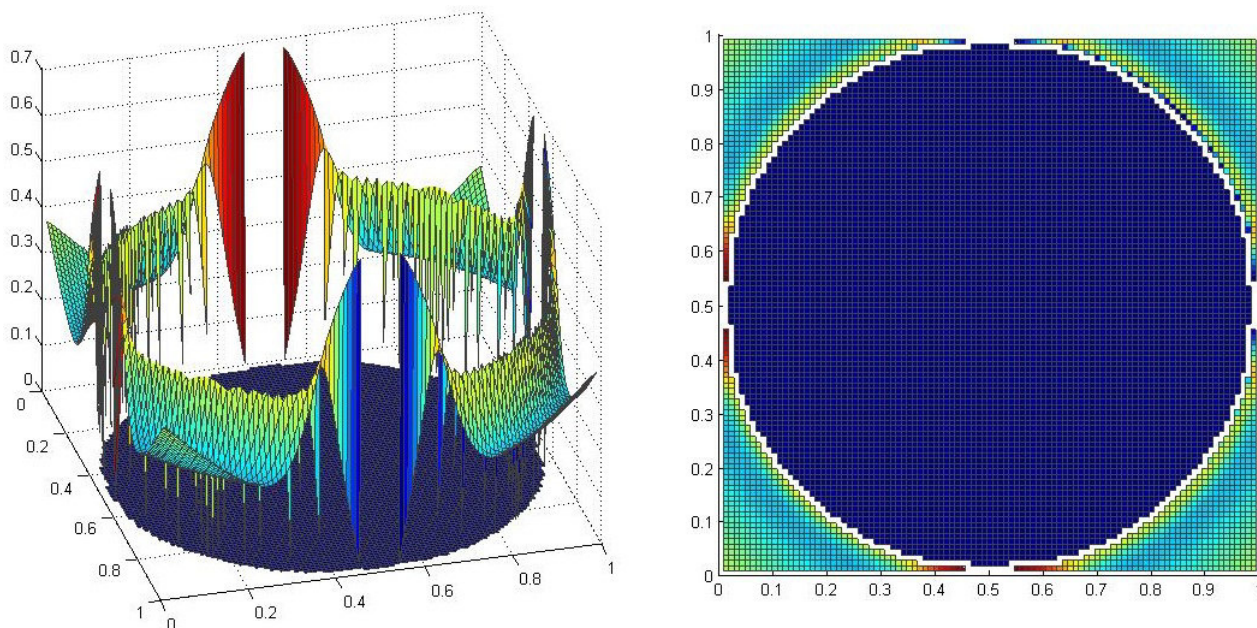


Figura 3.4: Gráfico del multiplicador μ obtenido en el sistema (2.23) (izquierda), y una vista desde arriba del mismo (derecha). Se aprecia en conjunto con la gráfica del estado óptimo que, en las regiones donde el estado no alcanza la igualdad $y = 0,1$, el multiplicador toma el valor de cero, lo cual esperábamos de las condiciones de complementariedad del sistema (2.23).

La siguiente tabla muestra, iteración por iteración, así como el número de elementos nulos presentes en el control óptimo, el número de restricciones activas presentes en el estado óptimo así como el residuo del algoritmo y el costo del problema regularizado:

It.	Elem. nulos en u	Restr. activas	Residuo	Costo
0	0	10000	1	0.344265638446928
1	0	10000	3.83036978882777	0.00668268189225603
2	0	6700	0.839112499727451	0.0066305544684931
3	1528	6560	0.919843813886426	0.00665764552239938
4	764	6296	0.683046182845302	0.00663299863752665
5	744	5996	0.822826531032546	0.00662285624621469
10	1508	4692	0.725433064844341	0.00657926450065266
15	1840	3528	0.441002557856864	0.00656425797832007
20	1996	2912	0.0493040819422262	0.00656068763271004
25	2036	2912	1.72395372964967e-05	0.00656063392629559
35	2036	2912	6.81232382173966e-06	0.00656063391973602
45	2036	2912	1.12677964327372e-05	0.00656063391407774
55	2036	2912	0.00113618953469055	0.00656063829076042
56	2044	2912	0.00096848178374818	0.006560632870709
57	2044	2912	1.97444610330716e-05	0.00656063287122464
58	2044	2912	3.3646513451666e-07	0.00656063287117022

Como se puede observar en la anterior tabla de valores, existe una convergencia del costo óptimo, mientras que la cantidad de elementos nulos presentes en el control óptimo y el

número de restricciones activas presentes en el estado asociado se estabilizan en un valor concreto. El siguiente gráfico muestra la evolución de los elementos nulos y las restricciones activas en función de las iteraciones.

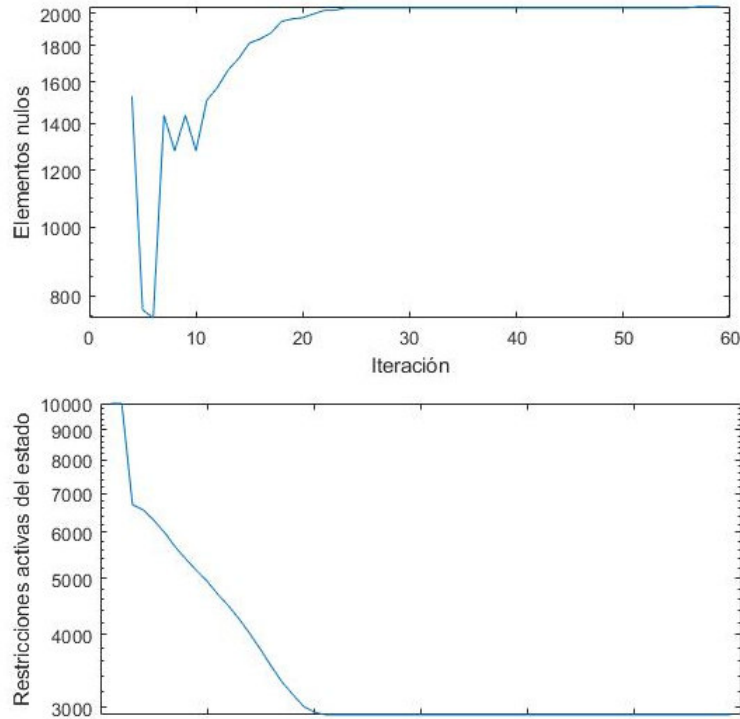


Figura 3.5: Evolución del número de elementos nulos presentes en el control óptimo (primer gráfico de arriba a abajo) en función del número de iteraciones, y evolución del número de restricciones activas presentes en el estado asociado (segundo gráfico de arriba a abajo)

A continuación presentamos una serie de resultados, manteniendo fijo en cada sección de experimentos dos parámetros, α , β o p , y variando solo uno de ellos. En cada sección se indicará con mayor detalle qué parámetros se quedan fijos y qué parámetros cambian.

3.3.1. Variación de α

Para esta sección consideramos valores fijos de parámetros $\beta = 2e - 5$, $p = 2$, $\lambda = 1e - 4$ y $\gamma = 2500$, mientras que variamos α . Se pudo comprobar experimentalmente que para $\alpha = 0,1$, si bien el algoritmo converge, no hay elementos nulos, mientras que si $\alpha \geq 1e - 4$, el algoritmo no converge. Para los casos $\alpha = 0,01$ y $\alpha = 0,001$ se logra convergencia del algoritmo, registrándose los siguientes resultados.

α	Costo óptimo	Elem. nulos en u	Restr. activas	Iteraciones
0.01	0.00670516383568474	1372	3460	34
0.007	0.0066836804697779	1492	3260	36
0.004	0.00665304899170793	1640	3040	36
0.001	0.00656063287117022	2044	2192	58
5e-4	0.00649906804635514	2232	3124	37

Podemos observar que, a medida que α es más pequeño, la cantidad de elementos nulos presentes en el control óptimo u aumenta al igual que el número de elementos del estado que alcanzan el valor $y(x) = 0,1$, lo cual se puede explicar debido a que el término de Tikhonov presente en la función de costo pierde influencia, ganando más representatividad la penalización en cuasi norma regularizada, que hace que el número de entradas nulas presentes en el control óptimo aumenten.

3.3.2. Variación de β

Ahora, variaremos el parámetro β considerando $\alpha = 1e - 3, p = 2, \gamma = 2500$ y $\lambda = 1e - 4$. Experimentalmente se puede observar que para valores de $\beta < 3e - 5$, el algoritmo no converge, mientras que, a medida que β tiende a cero, la cantidad de elementos nulos desaparecen. Los resultados de los experimentos numéricos son los siguientes:

β	Costo óptimo	Elem. nulos en u	Res. activas	Iteraciones
3e-5	0.00657658252718495	2688	2980	40
2e-5	0.00656063287117022	2044	2912	58
5e-6	0.00654387065225956	604	2832	27
1e-6	0.00654152279967477	152	2824	29
4e-7	0.00654119297941687	80	2816	28
5e-8	0.006541000651051	8	2816	24
2e-9	0.00654097427909516	8	2816	24

Claramente vemos que a medida que β desciende, la cantidad de elementos nulos presentes en el control óptimo u desciende, mientras que las restricciones activas del estado no varían significativamente, por lo que el parámetro β tiene una influencia muy grande en la cantidad de elementos nulos presentes en el control óptimo, lo cual se debe a que la penalidad en cuasi norma presente en la función de costo del problema de control óptimo pierde su efecto.

3.3.3. Variación de p

El parámetro p , según las experimentaciones, no puede variar demasiado sin que el algoritmo deje de converger. Hemos notado experimentalmente que, bajo los parámetros $\alpha = 1e - 3, \beta = 2e - 5, \gamma = 2500$ y $\lambda = 1e - 4$, el valor de p no puede crecer mucho más allá de 2 (aproximadamente valores de $p > 2,3$ hacen que el algoritmo no converja). Aquí se muestran algunas variaciones de p .

p	Costo óptimo	Elem. nulos en u	Res. activas	Iteraciones
1.1	0.00654850973311925	204	2832	28
1.3	0.0065494483296574	440	2832	38
1.7	0.00655216978952694	1220	2864	28
1.95	0.00655828132485952	1896	2904	39
2.1	0.00656583405775372	2332	2944	37
2.3	0.00657618502771438	2748	3004	34

A continuación presentaremos una serie de gráficos del control óptimo de algunas variaciones de p registradas en la tabla anterior.

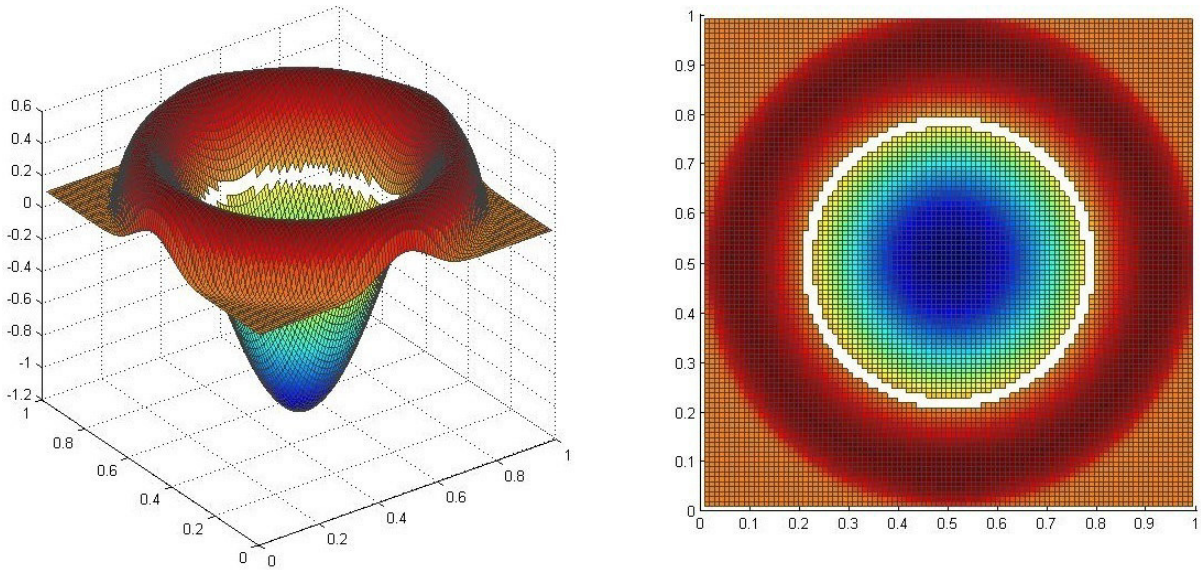


Figura 3.6: Gráfico del control óptimo cuando $p = 1,1$. Se aprecia que el control se rompe en el plano $z = 0$, pero hay muy pocos elementos nulos presentes en esta solución. Gráficamente podemos notar que, a diferencia del control óptimo presentado en la sección de forma cualitativa de la solución, no hay regiones visibles del control contenidas en el plano $z = 0$.

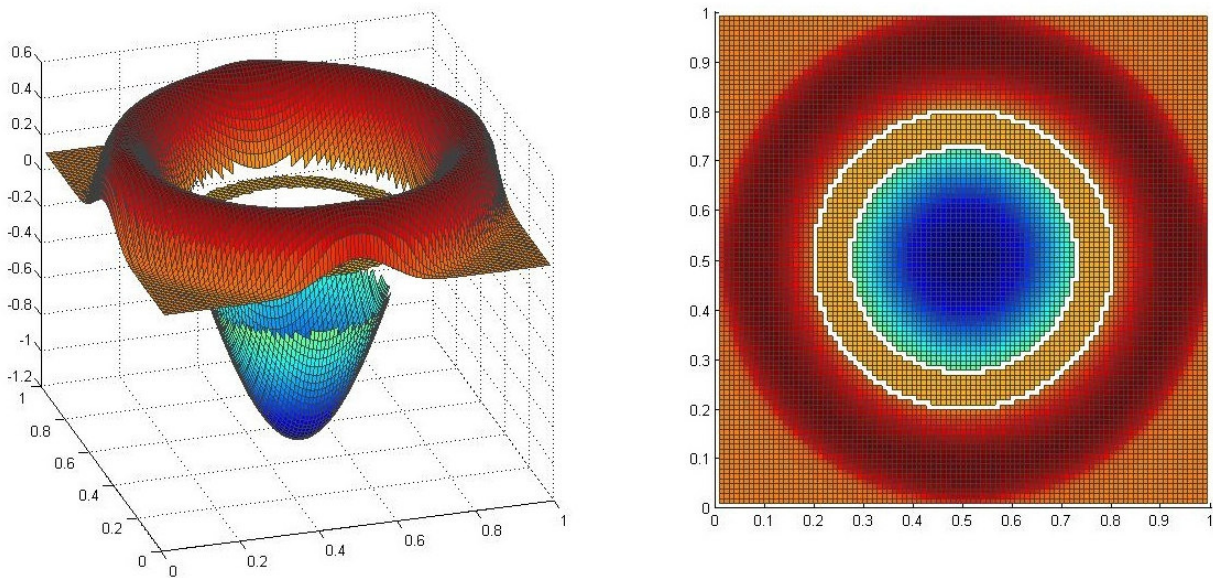


Figura 3.7: Gráfico del control óptimo cuando $p = 1,7$. Se aprecia que el control se rompe en el plano $z = 0$, y que además la cantidad de elementos nulos presentes en el control óptimo aumenta considerablemente respecto al caso $p = 1,1$. En el gráfico podemos observar que surge una región del control que está contenida en el plano $z = 0$, mientras que la región con valores más bajos del control cada vez se desplaza horizontalmente hacia abajo.

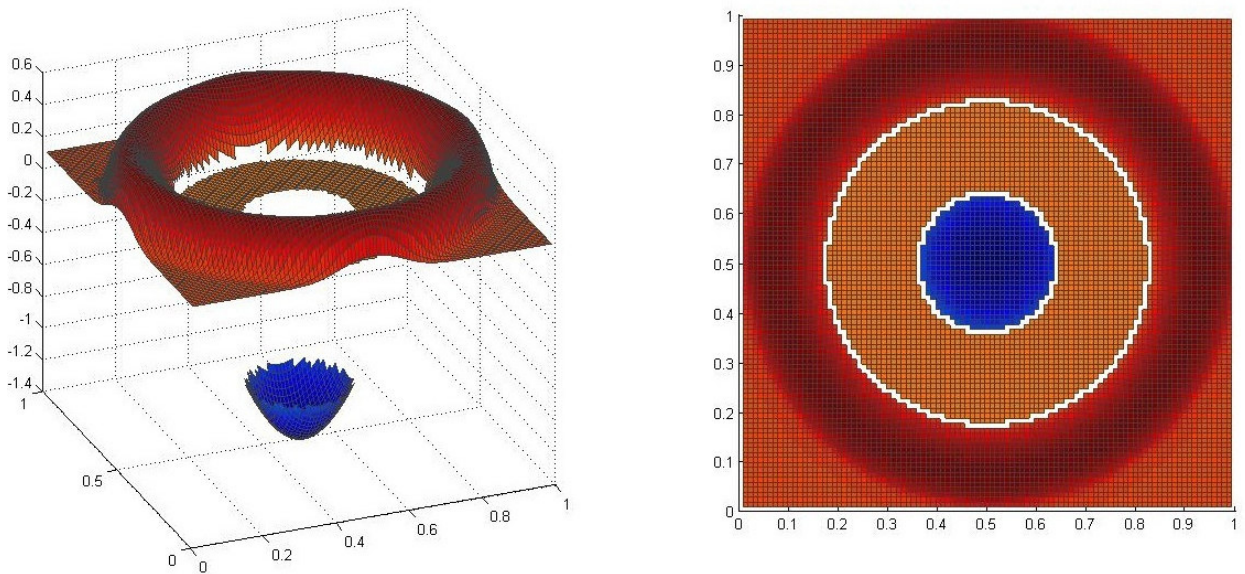


Figura 3.8: Gráfico del control óptimo cuando $p = 2,3$. A diferencia de los anteriores casos, en el gráfico de esta solución apreciamos que la región del control óptimo contenida en el plano $z = 0$ aumenta considerablemente, mientras que hay una región significativamente más pequeña del control que toma valores menores a -1 .

En conclusión a esta serie de experimentos, vemos que el parámetro p tiene una influencia en la esparcidad del control óptimo u , siendo más alta a medida que p crece respecto a valores cercanos a 2.

3.4. Variación de los parámetros de regularización

Una vez analizada la solución de manera cualitativa, nos enfocaremos en la variación de los parámetros de regularización γ y λ con el propósito de registrar cómo varían las soluciones óptimas en función de dichas variaciones. Intuitivamente tenemos que a medida que γ crezca hacia infinito y λ decrezca hacia cero, las soluciones para el problema regularizado deberían converger hacia las soluciones del problema (P), debido a que si γ tiende a infinito, la regularización $\Upsilon_{q,\gamma}$ tiende a ser Υ_q , mientras que en nuestro control artificial $v = \lambda u + y$, claramente tenemos que a medida que λ tiende a cero, el control v tiende a y . Sin embargo, dado que en este trabajo no estudiamos la existencia de soluciones para el problema (P), como ha sido expuesto al inicio de la sección 2.1 y no conocemos la regularidad de las soluciones a priori, en esta sección daremos una serie de experimentaciones que nos permitirán ver numéricamente el comportamiento de las soluciones a medida que variamos nuestros parámetros.

Para dichas experimentaciones, dejaremos fijos los parámetros del problema α, β y p , y variaremos individualmente γ y λ . Como el fijar α, β y p por separado conduce a diferentes problemas de control óptimo, realizaremos la variación de los parámetros γ y λ con diferentes ternas (α, β, p) fijas. Como primer experimento tomamos $\alpha = 1e - 3$, $\beta = 2e - 5$, $p = 2$ y fijamos $\gamma = 2500$. Experimentando con diferentes valores de λ se obtienen los siguientes resultados:

λ	Costo óptimo	Elem. nulos en u	Res. activas	Iteraciones
1e-3	0.00656384001348802	1780	0	12
1e-4	0.00656063287117022	2044	2912	58
1e-5	0.00655987881792726	2044	2952	50
1e-6	0.00655980238505406	2044	2960	59
1e-7	0.00655979478263429	2044	2960	54
1e-8	0.00655979402402702	2044	2960	54

Fijando ahora el valor de $\lambda = 1e - 4$, y tomando diferentes valores de γ y los mismos valores de α, β y p , obtenemos lo siguiente:

γ	Costo óptimo	Elem. nulos en u	Res. activas	Iteraciones
1000	0.00655398800851507	1444	2872	69
1500	0.00655610037386899	1704	2872	34
2000	0.00655809812389265	1880	2904	55
2500	0.00656063287117022	2044	2912	58
3000	0.00656297162764257	2184	2920	38
3500	0.00656537439122958	2316	2944	35
4000	0.00656728729255839	2412	2952	42
4500	0.00656863557205384	2464	2960	31
5000	0.00657057834615816	2536	2960	37
5500	0.00657161543679267	2568	2968	42

Vemos que en la primer tabla, a medida que λ tiende a cero, el costo óptimo converge hacia un valor concreto, al igual que la cantidad de elementos nulos presentes en el control óptimo y la cantidad de elementos del estado asociado que alcanzan el valor de la restricción. En la otra tabla podemos ver que el costo óptimo converge al menos en las primeras 5 cifras hacia un valor concreto, pero el número de elementos nulos no convergen a primera vista hacia un valor, aunque tampoco se observan cambios muy drásticos en este número. La cantidad de elementos del estado asociado en cada experimento si converge hacia un valor concreto.

Es notorio observar el siguiente fenómeno: cuando fijamos $\gamma = 2500$ y variamos λ , vemos que la cantidad de elementos nulos presentes en la solución óptima se estabiliza en 2044, mientras que si nos fijamos en la tabla de variación de γ vemos que al fijar $\lambda = 1e - 4$, la cantidad de elementos nulos en el control óptimo u es el mismo que la cantidad de elementos nulos presentes en la tabla de variación de λ .

3.5. Tasa de convergencia del algoritmo

Para determinar el orden de convergencia del algoritmo, utilizaremos la siguiente idea propuesta en [17]. Si nuestro algoritmo de Newton implementado para resolver el problema $F(p) = 0$ produce una sucesión de elementos $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tales que $p_n \rightarrow p$ cuando $n \rightarrow \infty$ con una tasa de convergencia de orden ρ , esperaríamos que exista una constante $K > 0$ tal que

$$\|F(x_{n+1})\| \approx K \|F(x_n)\|^\rho.$$

Si esta acotación ocurre, entonces, cuando $n \rightarrow \infty$ se esperaría que

$$\log(\|F(x_{n+1})\|) \approx \rho \log(\|F(x_n)\|),$$

y por ende que

$$\rho \approx \frac{\log(\|F(x_{n+1})\|)}{\log(\|F(x_n)\|)}, \quad (3.4)$$

por lo que podremos estimar el orden de convergencia a través del uso de (3.4). En esta sección veremos mediante la implementación de varios experimentos cual es el orden que se obtiene para nuestro algoritmo. Recordemos que en nuestro caso, F es la función dependiente de \bar{y} .

Empecemos con el experimento siguiente: tomando $\alpha = 1e-3$, $\beta = 2e-5$, $p = 2$, $\gamma = 2500$ y usando la misma función y_d y los extremos y_a, y_b que en las anteriores secciones, y variando λ , obtenemos los siguientes resultados:

λ	No. iter. N	$\ F(x_N)\ $	$\ F(x_{N-1})\ $	ρ
1e-3	12	7.64403974350958e-10	8.92133551652591e-09	1.132566946991170
1e-4	58	1.18446262155899e-08	3.15843773119083e-08	1.056789465645827
1e-5	50	1.6674828320536e-08	2.70770307956085e-08	1.027821933103589
1e-6	59	3.89112236757133e-08	6.43560609143975e-08	1.030385494476077
1e-7	54	2.19343469540646e-08	3.47526087096444e-08	1.026794793458353
1e-8	54	2.19262544545788e-08	3.47067531258846e-08	1.026737346610116

Vemos que en cada experimento al variar λ se tiene un orden de convergencia aproximadamente igual a 1,02, siendo más pequeño dicho valor a medida que λ tiende a cero.

Fijemos ahora λ en $\lambda = 1e-4$ y variemos los valores de γ . Obtenemos los siguientes resultados:

γ	No. iter. N	$\ F(x_N)\ $	$\ F(x_{N-1})\ $	ρ
1000	69	9.10066513233264e-08	9.08261323057973e-08	0.9998775433978
1500	34	1.97993054468711e-09	6.60028604200037e-09	1.063922353560318
2000	55	3.79960671445302e-08	8.35276918605143e-08	1.048330551170624
2500	58	1.18446262155899e-08	3.15843773119083e-08	1.056789465645827
3000	38	6.49324658100649e-08	7.65879045391511e-08	1.010075872092468
3500	35	2.17863566293343e-08	4.32125831961428e-08	1.040387001426347
4000	42	7.59966324139648e-09	2.50081612194684e-08	1.068046958151960
4500	31	5.0267249122304e-08	7.38084530961427e-08	1.023390839326775
5000	37	3.17077283351317e-08	6.75327520569477e-08	1.045791783169720
5500	42	1.61785072718263e-08	2.41390152724771e-08	1.022814061025794

Nuevamente vemos que a medida que γ varia, el orden aproximado de convergencia no cambia, manteniéndose entre 0,9999 y 1,06805, lo cual nos permitiría concluir que en general nuestro algoritmo tiene un orden de convergencia ligeramente superlineal.

Capítulo 4

Conclusiones

1. La falta de convexidad de nuestro problema de control óptimo no permite la aplicación de la teoría del análisis convexo para la obtención de un sistema de optimalidad, debido a la presencia de una cuasi norma en la función de costo. Sin embargo, introduciendo una regularización tipo Huber de dicha cuasi norma, y una regularización de Lavrentiev en las restricciones de estado podemos convertir a la función de costo en una diferencia de dos funciones convexas, y así utilizar la teoría DC para formular un sistema de optimalidad basado en las condiciones necesarias de primer orden que se tiene en dicha teoría.
2. La presencia de restricciones puntuales sobre el estado hace que luego de la derivación de un sistema de optimalidad para el problema de control óptimo se obtengan multiplicadores de Lagrange que son medidas regulares de Borel, (ver [6]), lo cual dificulta mucho el tratamiento numérico del problema. Para resolver este problema, se propone una regularización de Lavrentiev del problema, la cual consiste en introducir un control artificial que depende de un parámetro de regularización $\lambda > 0$, para reformular el problema de control óptimo original en otro, el cual tiene restricciones de tipo puntual sobre el control artificial y no sobre el estado. Esto permite la obtención de un sistema de optimalidad del problema regularizado cuyos multiplicadores de Lagrange adquieran más regularidad ([23]).
3. En nuestro trabajo, las restricciones de tipo puntual que se imponen sobre el estado son números reales, por lo cual, al momento de usar una regularización de Lavrentiev para el problema original, obtenemos un problema de control artificial con restricciones de estado puntuales. Por tanto, cuando se formula el sistema de optimalidad para el problema regularizado, se obtienen dos multiplicadores de Lagrange en $L^2(\Omega)$, lo cual ha sido demostrado en el Teorema 2.9. Dicha demostración hace uso de la estructura del conjunto admisible para el control artificial, puesto que para conjuntos admisibles de tipo caja como el que tenemos, se puede usar un teorema de proyección como el demostrado en el Teorema 2.7.
4. Una vez planteado el sistema KKT para el problema regularizado, y gracias a que el control artificial depende del control y estado originales del problema, podemos reescribir el sistema de optimalidad del problema regularizado en términos del control y estado originales. Esto se logra gracias a las condiciones de regularidad del dominio de nuestro problema, así como de los teoremas de existencia y unicidad para las ecuaciones en derivadas parciales elípticas con condiciones de Neumann,

las cuales permiten la definición de un operador invertible que relacione el control artificial con el control y estado originales del problema. Este último sistema fue el que usamos para la resolución numérica del problema.

5. Para la resolución numérica del problema regularizado hemos propuesto un algoritmo semi suave de Newton, lo cual nos llevó a definir una función basada en el sistema de optimalidad del problema regularizado con el control y estado originales del problema inicial. Hemos verificado en el Teorema 3.4 que dicha función es semi suave y por lo tanto factible de aplicársela el método mencionado.
6. En los experimentos numéricos se observa que el algoritmo es muy sensible a las variaciones de los parámetros α , β y p , no pudiendo variarlos de manera arbitraria. En la sección 3.1 hemos procedido a experimentar con diferentes valores de α , β y p con los cuales obteníamos la convergencia de nuestro programa implementado en Matlab, procediendo siempre a variar individualmente cada parámetro y fijando los otros dos.
7. El control óptimo que aparece como solución en los experimentos donde se logra la convergencia del algoritmo presenta saltos y rupturas, siendo evidente que una parte de éste toma valores nulos, en lugar de proseguir continuamente al pasar por el plano $z = 0$. Esto se puede explicar gracias a la presencia de la penalización no convexa tipo Huber que presenta nuestro problema, la cual hace que el control en ciertos lugares del dominio opte por anularse en lugar de tomar otros valores que podrían elevar mucho el costo del problema, puesto que la regularización de Huber de la cuasi norma Υ_p hace que el costo de $\Upsilon_{q,\gamma}$ se eleve en valores cercanos a cero mientras que en otros valores no crece tan significativamente, haciendo que el control se rompa en cierto sector del plano $z = 0$.
8. Respecto al orden de convergencia de nuestro algoritmo, los experimentos revelan que dicho valor se encuentra ligeramente sobre 1, lo cual prueba que el algoritmo es al menos linealmente convergente, con un orden un poco mejor de convergencia, ya que en cada caso de experimentación se obtiene un orden siempre mayor que 1, aunque no significativamente mayor. Esto nos induce a analizar la posibilidad de introducir técnicas de globalización con el fin de mejorar la convergencia de nuestro algoritmo.
9. Nuestro trabajo deja abiertas varias preguntas que pueden ser respondidas con una investigación más a fondo, como la existencia de soluciones para el problema de control óptimo original y regularizado, que en nuestro caso hemos supuesto que existen a priori. Se ve a través de las experimentaciones numéricas que hemos incorporado que la elección de los espacios funcionales para tratar el problema de existencia de soluciones es importante, teniendo en cuenta la estructura del control óptimo que hemos obtenido a través de experimentaciones numéricas. También queda abierta la pregunta de si el método semi suave de Newton es el mejor algoritmo de resolución numérica para nuestro problema debido a la sensibilidad experimentada en los cambios de los parámetros del problema α , β y p , así como también queda abierta la cuestión de si es posible mejorar la convergencia de nuestro algoritmo con alguna técnica de globalización numérica para lograr que la sensibilidad mencionada no sea tan fuerte como en nuestro caso.

Bibliografía

- [1] Maïtine Bergounioux, Kazufumi Ito y Karl Kunisch. “Primal-dual Strategy for Constrained Optimal Control Problems”. En: *SIAM Journal on Control and Optimization* 37, no 4 (1999), pp. 1176-1194.
- [2] Maïtine Bergounioux y Karl Kunisch. “On the structure of Lagrange multipliers for state-constrained optimal control problems”. En: *Systems Control Lett.* 48 (mar. de 2003), págs. 169-176.
- [3] J. F. Bonnans y E. Casas. “On the choice of the function spaces for some state-constrained control problems”. En: *J. Numer. Funct. Anal. Optimiz* (1985).
- [4] K. Bredies y D. Lorenz. *Mathematische Bildverarbeitung: Einführung in Grundlagen und moderne Theorie*. Studium (Braunschweig, Germany). Vieweg+Teubner Verlag, 2010.
- [5] Haim Brezis. *Function Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer Science+Business Media, LLC 2011, 2010.
- [6] Eduardo Casas. “Control of an Elliptic Problem with Pointwise State Constraint”. En: *SIAM Journal on Control and Optimization* 24 (1986), págs. 1309-1318.
- [7] P.G. Ciarlet. *Linear and Nonlinear Functional Analysis with Applications*. Other Titles in Applied Mathematics. Society for Industrial y Applied Mathematics (SIAM, 3600 Market Street, Floor 6, Philadelphia, PA 19104), 2013. ISBN: 9781611972597.
- [8] F.H. Clarke. *Optimization and nonsmooth analysis*. John Wiley y Sons Inc., New York, 1983.
- [9] D.L. Donoho. , *Compressed sensing*. IEEE Trans. Inform. Theory, 52, 2006, págs. 1289-1306.
- [10] J.C De los Reyes. *Theory of PDE-constrained optimization*. Springer, Berlin, 2015.
- [11] L.C. Evans. *Partial Differential Equations*. Graduate studies in mathematics. American Mathematical Society, 2010.
- [12] L.C. Evans y R.F. Gariepy. *Measure Theory and Fine Properties of Functions*. Studies in Advanced Mathematics. Taylor y Francis, 1991.
- [13] Bernd Hofmann, Barbara Kaltenbacher y Elena Resmerita. *Lavrentiev’s regularization method in Hilbert spaces revisited*. 2016. arXiv: 1506.01803.
- [14] M. Defrise I. Daubechies y C. D. Mol. *An iterative thresholding algorithm for linear inverse problems with a sparsity constraint*. Vol. 57. SComm. Pure Appl. Math. Vieweg+Teubner Verlag, 2004, págs. 1413-1457.
- [15] K. Ito y K. Kunisch. *Optimal control with $L^P(\Omega)$, $p \in [0, 1)$, control cost*. SIAM J. Control optim. 2014 Society for Industrial y Applied Mathematics Vol.52, No.2, 2014, págs. 1251-1275.

- [16] Kazufumi Ito y Karl Kunisch. *Lagrange Multiplier Approach to Variational Problems and Applications*. 1.^a ed. Society for Industrial y Applied Mathematics, 2008.
- [17] C.T. Kelley. *Solving Nonlinear Equations with Newton's Method*. Fundamentals of Algorithms. Society for Industrial y Applied Mathematics, 2003.
- [18] Karl Kunisch y Arnd Rösch. “Primal-dual active set strategy for a general class of constrained optimal control problems”. En: *SIAM Journal on Optimization* 13.2 (2002), págs. 321-334.
- [19] U. Mackenroth. “Convex parabolic boundary control problems with pointwise state constraints”. En: *Math. Anal. Appl.*, 87 (1982), págs. 256-277.
- [20] Pedro Merino. *A difference-of-convex functions approach for sparse PDE optimal control problems with nonconvex costs*. Comput Optim Appl 74. Springer Science+Business Media, LLC, 2019, págs. 225-258.
- [21] Pedro Merino. *A Semismooth Newton Method for Regularized Lq-quasinorm Sparse Optimal Control Problems*. Numerical Mathematics and Advanced Applications ENUMATH 2019. Springer Nature Switzerland AG 2021, 2019, págs. 723-731.
- [22] Chr. Meyer, U. Prüfert y F. Tröltzsch. “On two numerical methods for state-constrained elliptic control problems”. En: *Optimization Methods and Software* 22.6 (2007), págs. 871-899.
- [23] Christian Meyer, Arnd Rösch y Fredi Tröltzsch. “Optimal control of PDEs with regularized pointwise state constraints”. En: *Computational Optimization and Applications* (2003).
- [24] R. Mifflin. “Semismooth and semiconvex functions in constrained optimization”. En: *SIAM J. Control Optim.*, 15 (1977), págs. 959-972.
- [25] J. Mossino. “An application of duality to distributed optimal control problems with constraints on the control and the state”. En: *J. Math. Anal. Appl.*, 50 (1975), págs. 223-242.
- [26] Tao Pham Dinh y Hoai An Le Thi. *Recent Advances in DC Programming and DCA*. Ed. por Ngoc-Thanh Nguyen y Hoai An Le-Thi. Springer Berlin Heidelberg, 2014, págs. 1-37.
- [27] L. Qi. “C-differential operators, C-differentiability and generalized Newton methods”. En: *Research Report AMR96/5, School of Mathematics, University of New South Wales, Sydney, New South Wales, Australia*, (1996).
- [28] L. Qi y J. Sun. “A nonsmooth version of Newton's method”. En: *Math. Programming*, 58 (1993), págs. 353-367.
- [29] R. Tyrrell Rockafellar. *Convex analysis*. Princeton Mathematical Series. Princeton University Press, 1970.
- [30] Georg Stadler. “Elliptic optimal control problems with L1-control cost and applications for the placement of control devices”. En: *Computational Optimization and Applications* 44 (2009), págs. 159-181.
- [31] Michael Ulbrich. “Semismooth Newton Methods for Operator Equations in Function Spaces”. En: *SIAM Journal on Optimization* 13 (mayo de 2000).

- [32] Curtis R. Vogel. *Computational Methods for Inverse Problems*. Society for Industrial y Applied Mathematics, 2002.
- [33] Georg Vossen y H. Maurer. “On L^1 -minimization in optimal control and applications to robotics”. En: *Optimal Control Applications and Methods* 27 (nov. de 2006), págs. 301-321.