ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS

EXISTENCIA, UNICIDAD Y REGULARIDAD HÖLDER DE SOLUCIONES DE LA ECUACIÓN DE HAMILTON-JACOBI CON DERIVADA TEMPORAL DE TIPO CAPUTO

TRABAJO DE TITULACIÓN PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE MATEMÁTICO

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

KEVIN WLADIMIR PUCHA ATÁN

kevin.pucha@epn.edu.ec

DIRECTOR: MIGUEL ÁNGEL YANGARI SOSA, Ph.D

miguel.yangari@epn.edu.ec

Quito, abril, 2022

Declaración

Yo, Kevin Wladimir Pucha Atán, declaro bajo juramento que el trabajo aquí descrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

La Escuela Politécnica Nacional puede hacer uso de los derechos correspondientes a este trabajo, según lo establecido por la Ley de Propiedad Intelectual, por su Reglamento y por la normatividad institucional vigente.

Kevin Wladimir Pucha Atán

Certificación

Certifico que el presente trabajo fue desarrollado por Kevin Wladimir Pucha Atán, bajo mi supervisión.

\-

Miguel Ángel Yangari Sosa

Director

Agradecimientos

A mis padres y hermanos que me brindaron el apoyo incondicional para culminar mi carrera.

A Miguel Yangari, por confiar en mí y permitirme trabajar con él.

A Javier por nunca dudar de mi capacidad.

A Daniela y Danny por hacer que mi mundo siempre sea feliz.

Dedicatoria

A mis padres Gloria y Manuel;

hermanos Jenny, Patricio y Fabián;

familiares y amigos.

Contenido

Título: Existencia, unicidad y regularidad Hölder de soluciones de la ecuación de Hamilton-Jacobi con derivada temporal de tipo Caputo.

Autor: Pucha Atán Kevin Wladimir.

Tutor: Yangari Sosa Miguel Ángel, Ph.D

Resumen

Estamos interesados en el estudio del siguiente problema de Cauchy:

$$D^\alpha u(t,x) + H(t,x,u(t,x),Du(t,x)) = 0, \quad (t,x) \in Q := (0,+\infty) \times \mathbb{T}^N$$

sujeto a la condición inicial

$$u(0,x) = u_0(x), \quad \forall\ x \in \mathbb{T}^N$$

donde $u_0 \in \mathrm{Lip}(\mathbb{T}^N)$ y $H \in \mathrm{C}(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$ son funciones dadas. Además $\mathbb{T}^N$ denota el toro $N-$dimensional, $\mathrm{Lip}(\mathbb{T}^N)$ denota el conjunto de las funciones Lipschitz continuas sobre $\mathbb{T}^N$, u es la función incógnita, Du es el gradiente espacial de u, i.e., $Du = (D_{x_1}u, \ldots, D_{x_N}u)$ y D^α denota la derivada fraccionara de Caputo de orden $\alpha \in (0,1)$.

Se definen los conceptos de solución viscosa y solución viscosa discontinua para este tipo de problemas. Mostraremos existencia de soluciones viscosas discontinuas usando el Método de Perron. Probaremos el Principio de Comparación, que junto al Método de Perron permite demostrar la existencia y unicidad de una solución viscosa para el problema. Finalmente analizamos la regularidad de la solución tanto en tiempo como en espacio.

Palabras clave: Problema de Cauchy, Derivada de Caputo, Ecuaciones Diferenciales Parciales no lineales, Regularidad, Soluciones viscosas, Principio de comparación.

Title: Existence, uniqueness and Hölder regularity of solutions of the Hamilton-Jacobi equation with Caputo-type time derivative.

Author: Pucha Atán Kevin Wladimir.

Tutor: Yangari Sosa Miguel Ángel, Ph.D

Abstract

We are interested in the following Cauchy's problem:

$$D^{\alpha}u(t,x) + H(t,x,u(t,x),Du(t,x)) = 0, \quad (t,x) \in Q := (0,+\infty) \times \mathbb{T}^N$$

subject to the initial condition

$$u(0,x) = u_0(x), \quad \forall\ x \in \mathbb{T}^N,$$

where $u_0 \in \mathrm{Lip}(\mathbb{T}^N)$ and $H \in \mathrm{C}(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$ are given functions. Moreover $\mathbb{T}^N$ denotes the $N-$dimensional Torus and $\mathrm{Lip}(\mathbb{T}^N)$ denotes the set of the Lipschitz continuos functions on $\mathbb{T}^N$, u is the unknown function, Du is the spatial gradient of u, i.e., $Du = (D_{x_1}u, \ldots, D_{x_N}u)$ and D^{α} is the Caputo's fractional derivative of order $\alpha \in (0,1)$.

The concept of a viscosity solution and discontinuous viscosity solution for this type of problem are defined. We will show the existence of discontinuous viscosity solutions using Perron's Method. We will show the Comparison Principle, which together with Perron's Method allows us to prove the existence and uniqueness of a viscosity solution to the problem. Finally we analyze the regularity of the solution both in time and space.

Key words: Cauchy's problem, Caputo derivative, Nonlinear Partial Differential Equations, Regularity, Viscosity solutions, Comparison Principle.

Introducción

En varios campos de la ciencia, el modelamiento matemático de fenómenos desemboca en un problema ligado a la resolución de algún tipo de Ecuación Diferencial Parcial (EDP). Un correcto abordaje de estos problemas implica formular una noción adecuada de lo que se entenderá por solución de la EDP, y posteriormente, se debe estudiar propiedades de dicha solución; entre estas tenemos: existencia, unicidad y regularidad.

Varias de estas formulaciones pueden ser vistas como un tipo particular de EDP's, las cuales toman el nombre de Ecuaciones de Hamilton-Jacobi (abreviado como EHJ), donde estas pueden clasificarse en dos casos: elíptico y parabólico; siendo esta última el enfoque de nuestro estudio. Sir William Rowan Hamilton realizó un estudio en el campo de la Geometría Óptica (1830-1832), que posteriormente, al observar analogías con respecto a campos de la Mecánica, lleva todos los conceptos conseguidos a esta rama de la Física. Posteriormente Carl Gustav Jacob Jacobi trabaja en las ecuaciones de Hamilton (1842-1843), encontrando más aplicaciones útiles en la Mecánica, dando origen así a las EHJ.

El movimiento de una partícula y el de una onda se pueden describir en los mismos términos en una EHJ, y esta es la razón por la cual la Física Teórica se enfoca en el estudio de este tipo de ecuaciones. En este contexto, en una EHJ, se encuentra una función denotada por H, la cual toma el nombre de Hamiltoniano y usualmente es igual a la energía mecánica total de un sistema.

Una EHJ pueden ser vista como una EDP de primer orden, por tanto surge la necesidad de dar un concepto de solución para este tipo de EDP. Así, el matemático Francés, Pierre-Louis Lions y el matemático Americano, Michael G. Crandall, en el año de 1983, introducen el concepto de solución viscosa [13] como una generalización del concepto clásico de lo que se entiende por solución de una EDP. Recibe este nombre en base al método que se usó para mostrar existencia de una solución, el cual fue el método viscoso de desvanecimiento. Resulta que el concepto de solución viscosa es el concepto natural de solución que se puede dar a las EHJ. Cabe recalcar que el estudio de soluciones viscosas es motivado principalmente por la Teoría de Control Óptimo y la propagación de interfaces.

Una ecuación de Hamilton-Jacobi de primer orden, en general tiene la siguiente forma:

$$u_t(t,x) + H(t,x,u(t,x),Du(t,x)) = 0, \tag{1}$$

donde H es una función dada, u es la función incógnita, u_t es la derivada (estándar) respecto al tiempo de

u y Du denota el gradiente espacial de u. Resultados de existencia, unicidad y estabilidad para (1) bajo el concepto de solución viscosa fueron estudiados por Lions y Crandall en [13]. Resultados de Regularidad Hölder para el caso estacionario de (1) son mostrados en [14].

Con la introducción del Cálculo Fraccional se define un nuevo concepto de derivada, conocida como Derivada fraccionaria de Caputo. Esta derivada generalmente es denotada como D^α para $\alpha \in (0,1)$ y es definida como

$$D^\alpha f(t) = D_t^\alpha f(t) = \Gamma(1-\alpha)^{-1} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} f'(s) ds,$$

donde Γ denota la función Gamma.

Naturalmente nos preguntamos si los resultados de existencia y unicidad se mantienen si en (1) cambiamos la derivada temporal estándar por la Derivada fraccionaria de Caputo, dando origen a ecuaciones del tipo

$$D^\alpha u(t,x) + H(t,x,u(t,x), Du(t,x)) = 0, \tag{2}$$

las cuales aparecen en varios campos como son la Física, Finanzas e Hidrología.

Nuestro trabajo se enfoca en el estudio de este tipo de ecuaciones, por tanto mostraremos existencia de soluciones viscosas para (2) mediante el Método de Perron, el cual fue introducido por Ishii en [15], para posteriormente mostrar la unicidad de soluciones viscosas haciendo uso del Principio de Comparación. Este último será también una herramienta necesaria para las estimaciones de regularidad Hölder.

El documento está organizado de la siguiente manera. En el Capítulo 1 estudiamos la teoría de soluciones viscosas para las Ecuaciones de Hamilton-Jacobi de primer orden parabólicas. Aqui hacemos un especial enfoque a la existencia y unicidad de la solución para este tipo de problemas, para lo cual usamos el Método de Perron y el Principio de Comparación. El Capítulo 2 está dirigido a una revisión de definiciones y resultados básicos del Cálculo Fraccional, enfocándonos sobre todo en la Derivada fraccionaria de Caputo. En el Capítulo 3 nos centramos en la existencia y unicidad de soluciones para Ecuaciones de Hamilton-Jacobi de primer orden parabólicas con derivada temporal tipo Caputo. Los resultados que se muestran aquí siguen procedimientos análogos a los realizados en el Capítulo 1, por tanto, expondremos el Método de Perron y Principio de Comparación para este tipo de problemas. Finalmente en el Capítulo 4 analizamos la regularidad Hölder de las soluciones viscosas de los problemas abordados en el Capítulo 3.

Definición del problema

Planteamiento del problema

En [3] se obtienen resultados acerca de la regularidad Hölder en tiempo y espacio para la ecuación de tipo Hamilton-Jacobi siguiente:

$$D^{\alpha}u(t,x) + H(x, Du(t,x)) = 0, \quad (t,x) \in Q := (0,+\infty) \times \mathbb{T}^N, \tag{3}$$

sujeto a la condición inicial

$$u(0,x) = g(x), \quad x \in \mathbb{T}^N,$$

para algún $H \in \mathrm{C}(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N)$ y $g \in \mathrm{Lip}(\mathbb{T}^N)$ dados, donde $\mathbb{T}^N$ es el Toro $N-$ dimensional.

En (3), $u = u(t,x)$ para $(t,x) \in Q$ es la función incógnita, Du denota la primera derivada de u respecto a la variable espacial x y $D^{\alpha}u$ denota la Derivada de Caputo de orden $\alpha \in (0,1)$ de u. Lo que planteamos en el presente trabajo es el estudio de existencia y unicidad de una solución viscosa continua, y posteriormente el estudio de regularidad Hölder de dicha solución para la ecuación tipo Hamilton-Jacobi siguiente:

$$D^{\alpha}u(t,x) + H(t, x, u(t,x), Du(t,x)) = 0, \quad (t,x) \in Q := (0,+\infty) \times \mathbb{T}^N, \tag{4}$$

sujeto a la misma condición inicial de (3).

En este caso, lo interesante es que ahora el Hamiltoneano H depende de la incógnita u y de la variable temporal t, mientras que los resultados de regularidad Hölder obtenidos en [3] no incluyen estas dos variables.

Justificación del problema

El estudio de las Ecuaciones Diferenciales Parciales con derivada fraccionaria temporal ha incrementado en los últimos años, puesto que este tipo de operadores permiten modelar ciertos sistemas con memoria [8]. En particular las ecuaciones parabólicas no lineales de tipo Hamilton-Jacobi sirven para el modelamiento de fenómenos físicos que presentan difusión anómala [5], también para modelos que surgen en otros campos, por ejemplo, en control estocástico, hidrología [6] y finanzas [7].

Tal es la importancia de este tipo de operadores que recientemente se han iniciado estudios enfocados en la aproximación numérica [9], [10] bajo un esquema de diferencias finitas.

Se aprecia entonces cuan transcendental es el estudio de este tipo de EDP's, por lo cual se necesita trabajar en ellas para obtener resultados que permitan garantizar la existencia de soluciones y sus propiedades.

El estudio del problema que se plantea en este trabajo de investigación permitirá extender la teoría hasta ahora desarrollada para este tipo de EDP's con respecto a la regularidad Hölder de la solución.

El concepto de soluciones bajo el que se estudia las ecuaciones de Hamilton-Jacobi es el de soluciones viscosas, el cual es abordado, tanto para el caso elíptico como parabólico, por Cardaliaguet [2]; y Crandall, Ishii y Lions [4], mostrando así que dicho concepto de solución es el más adecuado y natural para estos problemas.

La existencia y unicidad para casos particulares de (4) es estudiada por Yangari, Topp [1] haciendo uso principalmente de herramientas como el Método de Perron y del Principio de Comparación. Por otro lado, Yangari, Topp, Ley [3] trabajan en (3) mostrando que bajo hipótesis de regularidad del crecimiento sobre el Hamiltoneano H, las soluciones viscosas de (3) poseen regularidad Hölder con respecto al espacio y tiempo. Además si la solución viscosa u es acotada obtenemos un módulo de continuidad para u independiente de t. Esto muestra la viabilidad del estudio a realizar. En el problema que se plantea estudiar en (4), usando las ideas desarrolladas en [3] y [1], se busca probar existencia, unicidad y regularidad Hölder en tiempo y espacio, considerando ahora Hamiltoneanos que dependen también de la variable temporal y de la función incógnita u.

Objetivos

Objetivo general

Probar existencia, unicidad y regularidad Hölder de las soluciones de Ecuaciones Diferenciales Parciales no lineales, parabólicas de tipo Hamilton-Jacobi con derivada fraccionaria de orden $\alpha \in (0, 1)$ de tipo Caputo.

Objetivos específicos

i) Desarrollar la teoría general de ecuaciones parabólicas no lineales bajo el concepto de solución viscosa.

ii) Analizar existencia y unicidad de soluciones para (4).

iii) Deducir si es posible obtener regularidad Hölder de la solución de la ecuación (4) con respecto a la variable espacial y con respecto a la variable temporal.

Capítulo 1

Ecuaciones Parabólicas no lineales

1.1. Definiciones

Estamos interesados en EDPs que poseen la forma

$$u_t(t,x) + H(t,x,u(t,x),Du(t,x)) = 0; \quad (t,x) \in Q, \tag{1.1.1}$$

con $Q := (0,+\infty) \times \mathbb{R}^N$, y sujetos a la condición incial

$$u(0,x) = u_0(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^N, \tag{1.1.2}$$

donde $u_0 \in \mathrm{C}_b(\mathbb{R}^N)$. En la ecuación (1.1.1) u denota la función incógnita, u_t la derivada de u respecto al tiempo t y Du denota el gradiente de u respecto a la variable espacial x. La aplicación no lineal y continua $H\colon (0,+\infty) \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ y $u_0 \in \mathrm{C}_b(\mathbb{R}^N)$ son dadas. Además, conjuntamente (1.1.1) con (1.1.2) es conocido como problema de Cauchy.

Veamos ahora que entenderemos por solución del problema desde dos puntos de vista: clásica y viscosa. Para esto nos enfocaremos en el horizonte finito, es decir (1.1.1) es reemplazada por

$$u_t(t,x) + H(t,x,u(t,x),Du(t,x)) = 0; \quad (t,x) \in Q_T, \tag{1.1.3}$$

donde $Q_T := (0,T] \times \mathbb{R}^N$ para $T > 0$.

Definición 1.1.1 (Sub-solución, súper-solución, solución clásica)**.** Sea $u\colon \bar{Q}_T \to \mathbb{R}$ tal que $u \in \mathrm{C}^1(\bar{Q}_T)$. Se dice que u es sub-solución (resp. súper-solución) clásica de (1.1.3) si para todo $(t,x) \in Q_T$ se verifica que

$$u_t(t,x) + H(t,x,u(t,x),Du(t,x)) \leq \text{(resp. } \geq \text{) } 0.$$

Si u es sub-solución y súper-solución clásica a la vez de (1.1.3), entonces diremos que u es solución clásica de (1.1.3).

Definición 1.1.2 (Sub-solución, súper-solución, solución viscosa)**.** Sea $u\colon \bar{Q}_T \to \mathbb{R}$. Se dice que u es sub-solución (resp. súper-solución) viscosa de (1.1.3) si u es semi-continua superior (s.c.s.) (resp. semi-continua inferior (s.c.i.)) y si, para toda función test $\phi \in \mathrm{C}^1(\bar{Q}_T)$ tal que $u - \phi$ alcanza un máximo (resp. mínimo) local en un punto $(t_0, x_0) \in Q_T$, se verifica que

$$\phi_t(t_0,x_0) + H(t_0,x_0,u(t_0,x_0),D\phi(t_0,x_0)) \leq \text{(resp. } \geq \text{) } 0. \tag{1.1.4}$$

Se dice que u es solución viscosa de (1.1.3) si u es sub- y súper-solución de (1.1.3).

Observación 1. Puesto que una función es continua si y solamente si es s.c.i. y s.c.s., vemos por definición que toda solución viscosa es continua.

La necesidad de introducir el concepto de solución viscosa es motivada por el hecho de que existen ecuaciones que surgen de manera natural para explicar algún fenómeno, pero no existe una solución clásica que resuelva el problema. Un claro ejemplo de esto es la llamada ecuación de la eikonal.

Observación 2. A partir de ahora omitiremos, si no hay riesgo de equivocación, los términos clásica y viscosa al momento de referirnos a los distintos tipos de soluciones. Por ejemplo, escribiremos sub-solución para referirnos a una sub-solución viscosa.

A continuación vemos que cuando u posee suficiente regularidad, la Definición 1.1.1 y la Definición 1.1.2 coinciden.

Proposición 1.1.3. *Sea $u \in \mathrm{C}^1(\bar{Q}_T)$, u es súper-solución clásica si y solamente si u es súper-solución viscosa. Similarmente, u es sub-solución clásica si y solamente si u es sub-solución viscosa.*

Demostración: Supongamos que u es súper-solución viscosa. Por hipótesis podemos tomar a u como función test, con ello basta notar que $u - u$ alcanza un mínimo para todo $(t,x) \in (0,T) \times \Omega$, lo cual implica que u es súper-solución clásica.

Recíprocamente, asumamos que u es súper-solución clásica. Sea $\phi \in \mathrm{C}^1(\bar{Q}_T)$ tal que $u-\phi$ alcanza un mínimo en $(t_0, x_0) \in Q_T$. Luego, de las condiciones necesarias de optimalidad podemos deducir que $u_t(t_0, x_0) = \phi_t(t_0, x_0)$ y $Du(t_0, x_0) = D\phi(t_0, x_0)$. El resultado deseado se sigue ya que al ser u súper-solución clásica y reemplanzando las igualdades anteriores, tenemos que:

$$u_t(t_0, x_0) + H(t_0, x_0, u(t_0, x_0), Du(t_0, x_0)) \geq 0,$$

lo cual muestra que u es súper-solución viscosa.

La demostración para caso de sub-soluciones sigue líneas análogas a lo realizado. ∎

1.2. Estabilidad y paso al límite

Muchas veces es complicado trabajar directamente con el problema original, lo cual motiva a considerar variaciones del problema que sean más fáciles de trabajar y que a su vez permitan tener una idea de cual es el comportamiento de la solución original. El resultado principal de esta sección nos muestra que podemos obtener la solución exacta si conocemos las soluciones de problemas aproximados.

Observación 3. Las bolas en tiempo-espacio, llamadas también cilindros, serán denotadas como:

$$\mathcal{C}_{\delta_1,\delta_2}(t, x) = B_{\delta_1}(t) \times B_{\delta_2}(x) = (t - \delta_1, t + \delta_1) \times B_{\delta_2}(x),$$

donde $(t, x) \in \mathbb{R}^{1+n}$ y $\delta_1, \delta_2 > 0$. Si $\delta_1 = \delta_2 = \delta$, escribiremos $\mathcal{C}_\delta(t, x) = \mathcal{C}_{\delta_1,\delta_2}(t, x)$.

La demostración del resultado principal de la presente sección hace uso de dos lemas que se presentan a continuación.

Lema 1.2.1. *En la Definición 1.1.2 se puede reemplazar "máximo local" (resp. "mínimo local") por "máximo local estricto" (resp. "mínimo local estricto").*

Demostración: Notemos que todo máximo local estricto es un máximo local, por tanto la definición que involucra el máximo local implica la que involucra el máximo local estricto.

Recíprocamente, supongamos que $u - \phi$ alcanza un máximo local en $(t_0, x_0) \in Q_T$, donde $\phi \in \mathrm{C}^1(\bar{Q}_T)$. Consideremos la función $\phi_1(t, x) = \phi(t, x) + \|x - x_0\|^2 + |t - t_0|^2$. Es claro que $\phi_1 \in \mathrm{C}^1(\bar{Q}_T)$ y que $u - \phi_1$

alcanza un máximo local estricto en $(t_0, x_0) \in Q_T$. En efecto, sabemos que existen $\delta_1, \delta_2 > 0$ tales que

$$u(t_0, x_0) - \phi(t_0, x_0) \geq u(t, x) - \phi(t, x), \quad \forall (t, x) \in \mathcal{C}_{\delta_1,\delta_2}(t_0, x_0)$$

de donde utilizando la definición de ϕ_1 obtenemos que para $(t, x) \in \mathcal{C}_{\delta_1,\delta_2}(t_0, x_0) \setminus (t_0, x_0)$

$$u(t_0, x_0) - \phi(t_0, x_0) > u(t, x) - \phi(t, x) - \|x - x_0\|^2 - |t - t_0|^2 = u(t, x) - \phi_1(t, x).$$

Ya que u es sub-solución, usando la definición que involucra un máximo estricto, se sigue que

$$(\phi_1)_t(t_0, x_0) + H(t_0, x_0, u(t_0, x_0), D\phi_1(t_0, x_0)) \leq 0. \tag{1.2.5}$$

Usando la regla de la cadena obtenemos que para todo $(t, x) \in Q_T$ se verifica que

$$(\phi_1)_t(t, x) = \phi_t(t, x) + 2(t - t_0) \quad \text{y} \quad D\phi_1(t, x) = D\phi(t, x) + 2(x - x_0).$$

Al evaluar estas expresiones en el punto óptimo podemos notar que $\phi_{1t}(t_0, x_0) = \phi_t(t_0, x_0)$ y $D\phi_1(t_0, x_0) = D\phi(t_0, x_0)$, lo cual conjuntamente con (1.2.5) permite concluir la desigualdad deseada, i.e.,

$$\phi_t(t_0, x_0) + H(t_0, x_0, u(t_0, x_0), D\phi(t_0, x_0)) \leq 0,$$

lo cual finaliza la demostración. ■

Lema 1.2.2. *Sean $u\colon \bar{Q}_T \to \mathbb{R}$ una función continua y $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{C}(\bar{Q}_T)$ tales que u_n converge localmente uniformemente a u. Si u posee un máximo local estricto en un punto $(t_0, x_0) \in Q_T$, entonces existe una sucesión $((t_n, x_n))_{n\in\mathbb{N}} \subset Q_T$ tal que (t_n, x_n) es un máximo local de u_n y, además, que converge hacia (t_0, x_0).*

Demostración: Sabemos que existen $\delta_i^j > 0, i = 1, 2; j = 1, 2, 3$ tales que

i) u alcanza un máximo local estricto en $(t_0, x_0) \in Q_T$ sobre $\mathcal{C}_{\delta_1^1,\delta_2^1}(t_0, x_0)$.

ii) $\mathcal{C}_{\delta_1^2,\delta_2^2}(t_0, x_0) \subset Q_T$

iii) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a u sobre $\mathcal{C}_{\delta_1^3,\delta_2^3}(t_0, x_0)$.

Tomemos $\hat{\delta}_1 = \min\limits_{j=1,2,3}\{\delta_1^j\}$ y $\hat{\delta}_2 = \min\limits_{j=1,2,3}\{\delta_2^j\}$ y definamos $\delta_1 = \hat{\delta}_1/2$ y $\delta_2 = \hat{\delta}_2/2$.

Notemos que si reemplazamos δ_1^j por δ_1 y δ_2^j por δ_2 para todo $j \in \{1,2,3\}$, entonces i), ii) y iii) se verifican simultáneamente. Se sigue que

$$u(t_0,x_0) = \max_{\mathcal{C}_{\delta_1,\delta_2}(t_0,x_0)} u > \max_{\partial\mathcal{C}_{\delta_1,\delta_2}(t_0,x_0)} u := M.$$

Utilizando la convergencia uniforme de u_n a u sobre $\overline{\mathcal{C}_{\delta_1,\delta_2}(t_0,x_0)}$ se sigue que para $\epsilon := [u(t_0,x_0)-M]/3 > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$

$$|u_n(t,x) - u(t,x)| \leq \epsilon, \quad \forall (t,x) \in \overline{\mathcal{C}_{\delta_1,\delta_2}(t_0,x_0)};$$

de donde, por la construcción de ϵ, podemos concluir que

$$\max_{\partial\mathcal{C}_{\delta_1,\delta_2}(t_0,x_0)} u_n \leq M + \epsilon < u(t_0,x_0) - \epsilon \leq u_n(t_0,x_0). \tag{1.2.6}$$

Puesto que u_n es continua sobre el compacto $\overline{\mathcal{C}_{\delta_1,\delta_2}(t_0,x_0)}$, para $n \geq n_0$ sabemos que u_n alcanza un máximo en $(t_n,x_n) \in \overline{\mathcal{C}_{\delta_1,\delta_2}(t_0,x_0)}$. Podemos apreciar gracias a (1.2.6) que el máximo se alcanza en el interior de la clausura del cilindro, i.e., $(t_n,x_n) \in \mathcal{C}_{\delta_1,\delta_2}(t_0,x_0)$.

Consideremos la sucesión de puntos de máximo $((t_n,x_n))_{n\geq n_0} \subset \mathcal{C}_{\delta_1,\delta_2}(t_0,x_0)$, la cual vemos que es acotada por la contenencia presentada. Por el Teorema de Bolzano-Weierstrass sabemos que existe una subsucesión $((t_{n_k},x_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ que converge a $(\hat{t},\hat{x}) \in \overline{\mathcal{C}_{\delta_1,\delta_2}(t_0,x_0)}$.

Por construcción tenemos que

$$u_{n_k}(t_{n_k},x_{n_k}) \geq u_{n_k}(t,x), \quad \forall (t,x) \in \overline{\mathcal{C}_{\delta_1,\delta_2}(t_0,x_0)},$$

de donde gracias a la convergencia uniforme de $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ a u, tras tomar el límite conseguimos que

$$u(\hat{t},\hat{x}) \geq u(t,x) \quad \forall (t,x) \in \overline{\mathcal{C}_{\delta_1,\delta_2}(t_0,x_0)},$$

y así obtenemos que necesariamente $(\hat{t},\hat{x}) = (t_0,x_0)$ ya que (t_0,x_0) es el único punto de máximo global de u sobre $\overline{\mathcal{C}_{\delta_1,\delta_2}(t_0,x_0)}$. Así basta tomar como sucesión a $((t_n,x_n))_{n\in\mathbb{N}} := ((t_{n_k},x_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$, la cual verifica las propiedades deseadas. Esto concluye la demostración. ■

Enunciamos ahora el resultado principal de esta sección.

Teorema 1.2.3 (Estabilidad)**.** *Sean $H_n, H : (0,T] \times \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ aplicaciones dadas para cada $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que u_n es sub-solución continua del problema*

$$u_t(t,x) + H_n(t,x,u(t,x),Du(t,x)) = 0, \quad (t,x) \in Q_T, \tag{1.2.7}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ *y además se cumple que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a* $u\colon \bar{Q}_T \to \mathbb{R}$ *sobre todos los compactos de* $\bar{Q}_T$*. Adicionalmente supongamos que* $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformemente hacia* H *sobre todos los compactos de* $(0,T] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$*. Entonces* u *es sub-solución de* (1.1.1)

Demostración: Mostremos que u es sub-solución viscosa usando la definición equivalente dada por el Lema (1.2.1). Sea $\phi \in \mathrm{C}^1(\bar{Q}_T)$ una función test tal que $u-\phi$ alcanza un máximo local estricto en $(t_0,x_0) \in Q_T$. Dado que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge localmente uniformemente a u y las funciones u_n son continuas, tenemos que u es continua. Además, es claro que $(u_n-\phi)_{n\in\mathbb{N}}$ converge localmente uniformemente a $u-\phi$; y puesto que $u-\phi$ posee un máximo local estricto en (t_0,x_0) y es continua, el Lema (1.2.2) permite concluir que existe una sucesión $(t_n,x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset Q_T$ tal que:

i) (t_n,x_n) es punto de máximo local de $u_n-\phi$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

ii) $(t_n,x_n) \to (t_0,x_0), \quad n \to \infty$.

Puesto que u_n es sub-solución viscosa de (1.2.7), de i) podemos ver que

$$\phi_t(t_n,x_n) + H_n(t_n,x_n,u_n(t_n,x_n),D\phi(t_n,x_n)) \leq 0.$$

Finalmente, dado que H_n converge localmente uniformemente a H, conjuntamente con ii), obtenemos que en el límite se verifica

$$\phi_t(t_0,x_0) + H(t_0,x_0,u(t_0,x_0),D\phi(t_0,x_0)) \leq 0.$$

■

1.3. Supremo de sub-soluciones

En la sección anterior vimos el buen compartamiento asintótico del problema (1.1.3) bajo ciertas condiciones. Ahora nos enfocamos en el estudio de la existencia de una solución para este problema y para ello debemos recordar que H es continua.

Las siguientes definiciones son necesarias para el abordaje del problema.

Definición 1.3.1. Sea $u\colon \bar{Q}_T \to \mathbb{R}$ una función. Llamamos envolvente semi-continua superior a la más pequeña función s.c.s. mayor a u. Esta función es notada por u^* y está caracterizada por la expresión

$$u^*(t,x) = \limsup_{(\hat{t},\hat{x})\to(t,x)} u(\hat{t},\hat{x}).$$

Simétricamente, llamamos envolvente semi-continua inferior a la más grande función s.c.i. menor a u. Denotamos esta función mediante u_* y se caracteriza por la expresión

$$u_*(t,x) = \liminf_{(\hat{t},\hat{x})\to(t,x)} u(\hat{t},\hat{x}).$$

Observación 4. Por la definición de u^* (resp. u_*) es claro que $u^* \geq u$ (resp. $u_* \leq u$).

Definición 1.3.2 (Sub-solución, súper-solución, solución viscosa discontinua)**.** Sea $u\colon \bar{Q}_T \to \mathbb{R}$. Se dice que u es sub-solución (resp. súper-solución) viscosa discontinua de (1.1.3) si u^* (resp. u_*) es sub-solución viscosa (resp. súper-solución) de (1.1.3). Se dice que u es solución viscosa discontinua de (1.1.3) si es sub- y súper-solución viscosa discontinua a la vez.

El siguiente resultado nos permite ver que el supremo de una familia de sub-soluciones viscosas discontinuas es también una sub-solución viscosa discontinua.

Lema 1.3.3. *Sea A un conjunto de índices. Para cada $\alpha \in A$ supongamos que $u_\alpha\colon \bar{Q}_T \to \mathbb{R}$ es sub-solución viscosa discontinua de* (1.1.3)*. Definimos la función*

$$\begin{aligned} u\colon\ \bar{Q}_T &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t,x) &\longmapsto u(t,x) = \sup_{\alpha\in A} u_\alpha(t,x). \end{aligned}$$

Entonces u es una sub-solución viscosa discontinua de (1.1.3)*. Resultados análogos se tienen para súper-soluciones, donde el supremo es reemplazado por el ínfimo.*

Demostración: Sea $\phi \in \mathrm{C}^1(\bar{Q}_T)$ tal que $u^* - \phi$ alcanza un máximo en $(t_0,x_0) \in Q_T$. Mostremos que se verifica

$$\phi_t(t_0,x_0) + H(t_0,x_0,u^*(t_0,x_0),D\phi(t_0,x_0)) \leq 0. \tag{1.3.8}$$

De la condición de maximalidad tenemos que existen $\delta_1,\delta_2 > 0$ tales que

i) $\overline{\mathcal{C}_{\delta_1,\delta_2}(t_0,x_0)} \subset Q_T$.

ii) $(u^* - \phi)(t_0,x_0) > \max\limits_{\partial\mathcal{C}_{\delta_1,\delta_2}(t_0,x_0)} (u^* - \phi)$.

Por otro lado tenemos que existe una sucesión $(t_n, x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset Q_T$ de modo que se verifica

iii) $(t_n, x_n) \to (t_0, x_0), \quad n \to +\infty$

iv) $u(t_n, x_n) \to u^*(t_0, x_0), \quad n \to +\infty.$

En efecto, por definición de u^* tenemos que

$$u^*(t_0, x_0) = \limsup_{(t,x)\to(t_0,x_0)} u(t, x) = \inf_{\delta\to 0} \left\{ \sup_{(t,x)\in\mathcal{C}_\delta(t_0,x_0)} \{u(t, x)\} \right\}.$$

Tomemos $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ tal que $\delta_n \searrow 0$, de donde gracias a las propiedades del supremo para todo $n \in \mathbb{N}$ podemos garantizar la existencia de $(t_n, x_n) \in Q_T$ tal que

$$\sup_{(t,x)\in\mathcal{C}_{\delta_n}(t_0,x_0)} u(t, x) - \frac{1}{n} \leq u(t_n, x_n) \leq \sup_{(t,x)\in\mathcal{C}_{\delta_n}(t_0,x_0)} u(t, x).$$

Este nos permite concluir el punto iv), mientras que la condición $\delta_n \searrow 0$ implica iii). Usando la definición de la función u tenemos:

v) $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \exists\, \alpha_n \in A \quad \text{tal que} \quad u^*(t_n, x_n) - \dfrac{1}{n} \leq u_{\alpha_n}(t_n, x_n).$

Verifiquemos que la sucesión $(u^*_{\alpha_n}(t_n, x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $u^*(t_0, x_0)$. Para esto vemos que se satisface la siguiente cadena de desigualdades:

$$\begin{aligned}
u^*(t_0, x_0) &\geq \limsup_{n\to+\infty} u^*(t_n, x_n) \\
&\geq \limsup_{n\to+\infty} (u_{\alpha_n})^*(t_n, x_n) \\
&\geq \liminf_{n\to+\infty} (u_{\alpha_n})^*(t_n, x_n) \\
&\geq \liminf_{n\to+\infty} u_{\alpha_n}(t_n, x_n) \\
&\geq \liminf_{n\to+\infty} u_{\alpha_n}(t_n, x_n) + \liminf_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{n}\right) \\
&= u^*(t_0, x_0)
\end{aligned}$$

Vemos que el límite superior e inferior de la sucesión $(u^*_{\alpha_n}(t_n, x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ coinciden, de donde se concluye que el límite de la sucesión existe y además que esta converge al valor $u^*(t_0, x_0)$. Mas aún, la continuidad de la función test ϕ implica directamente que

$$\lim_{n\to+\infty} ((u_{\alpha_n})^* - \phi)(t_n, x_n) = (u^* - \phi)(t_0, x_0).$$

Tomando $\epsilon = \left[(u^* - \phi)(t_0, x_0) - \max_{\partial\mathcal{C}_{\delta_1,\delta_2}(t_0,x_0)} (u^* - \phi)\right] \Big/ 4 > 0$, la anterior convergencia nos brinda la existencia de $n_{0,1} \in \mathbb{N}$ tal que

$$-\epsilon \leq ((u_{\alpha_n})^* - \phi)(t_n, x_n) - (u^* - \phi)(t_0, x_0), \quad \forall n \geq n_{0,1};$$

además de iii) sabemos existe $n_{0,2} \in \mathbb{N}$ tal que

$$(t_n, x_n) \in \mathcal{C}_{\delta_1,\delta_2}(t_0, x_0), \quad \forall n \geq n_{0,2}.$$

Si tomamos $n_0 = \max\{n_{0,1}, n_{0,2}\}$, entonces ambas propiedades anteriores se verifican simultáneamente. Es claro que $(u^* - \phi)(t_0, x_0) - \epsilon > \max_{\partial\mathcal{C}_{\delta_1,\delta_2}(t_0,x_0)} (u^* - \phi)$. Recordando que la envoltura s.c.s. se mantiene bajo desigualdades tenemos que $u^* - \phi \geq (u_{\alpha_n})^* - \phi$ sobre $\bar{Q}_T$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y por i) tenemos que en particular esto se verifica sobre $\partial\mathcal{C}_{\delta_1,\delta_2}(t_0, x_0)$. Juntando estos resultados obtenemos que

$$((u_{\alpha_n})^* - \phi)(t_n, x_n) > \max_{\partial\mathcal{C}_{\delta_1,\delta_2}(t_0,x_0)} (u_{\alpha_n})^* - \phi, \quad \forall n \geq n_0. \tag{1.3.9}$$

Dado que $(u_{\alpha_n})^* - \phi$ es s.c.s., entonces esta alcanza un máximo sobre $\overline{\mathcal{C}_{\delta_1,\delta_2}(t_0, x_0)} \subset Q_T$, y gracias a (1.3.9) podemos inferir que para todo $n \geq n_0$ existe $(s_n, y_n) \in \mathcal{C}_{\delta_1,\delta_2}(t_0, x_0)$, el cual es un máximo local de $(u_{\alpha_n})^* - \phi$. Por hipótesis tenemos que $(u_{\alpha_n})^*$ es sub-solución de (1.1.3), por tanto

$$\phi_t(s_n, y_n) + H(s_n, y_n, (u_{\alpha_n})^*(s_n, y_n), D\phi(s_n, y_n)) \leq 0, \quad \forall n \geq n_0. \tag{1.3.10}$$

Notemos que la sucesión $((s_n, y_n))_{n \geq n_0} \subset \mathcal{C}_{\delta_1,\delta_2}(t_0, x_0)$ es acotada, de este modo el Teorema de Bolzano-Weierstrass garantiza la existencia de una subsucesión, que la denotamos de la misma manera, que converge a un punto $(s, y) \in \overline{\mathcal{C}_{\delta_1,\delta_2}(t_0, x_0)}$. Además las siguientes desigualdades se verifican

$$\begin{aligned}(u^* - \phi)(t_0, x_0) &\geq (u^* - \phi)(s_n, y_n)\\ &\geq ((u_{\alpha_n})^* - \phi)(s_n, y_n)\\ &\geq ((u_{\alpha_n})^* - \phi)(t_n, x_n).\end{aligned}$$

La primera y tercera desigualdad implican que

$$\lim_{n\to+\infty} (u^* - \phi)(s_n, y_n) = (u^* - \phi)(t_0, x_0);$$

y por propiedades de funciones s.c.s. sabemos que

$$(u^* - \phi)(t_0, x_0) = \limsup_{n\to+\infty} (u^* - \phi)(s_n, y_n) = \lim_{n\to+\infty} (u^* - \phi)(s_n, y_n) \leq (u^* - \phi)(s, t),$$

pero (t_0, x_0) es el único punto de máximo sobre $\overline{\mathcal{C}_{\delta_1,\delta_2}(t_0, x_0)}$, de donde necesariamente $(s, y) = (t_0, x_0)$. Así hemos mostrado que se verifica

$$\lim_{n\to+\infty}(s_n, y_n) = (t_0, x_0).$$

Gracias a la continuidad de ϕ tenemos que $\phi(s_n, y_n) \to \phi(t_0, x_0), n \to +\infty$, que conjuntamente con la segunda y tercera desigualdades implican que

$$\lim_{n\to+\infty}(u_{\alpha_n})^*(s_n, y_n) = u^*(t_0, x_0).$$

Finalmente, dado que $D\phi(s_n, y_n) \to D\phi(t_0, x_0)$ cuando $n \to +\infty$, la continuidad de H nos permite obtener que tras tomar el límite sobre (1.3.10), se verifica (1.3.8), lo cual muestra el resultado deseado. ■

1.4. Método de Perron

El siguiente teorema nos permite la construcción de una solución viscosa discontinua a partir de una sub-solución y una súper-solución. Cabe recalcar que lo importante de aquí es retener las ideas generales, ya que serán de utilidad en el estudio de existencia de soluciones para problemas similares.

Teorema 1.4.1. *Sean $u, v : \bar{Q}_T \to \mathbb{R}$ sub- y súper-soluciones de* (1.1.3) *respectivamente. Si $u \leq v$ sobre $\bar{Q}_T$, entonces existe $w : \bar{Q}_T \to \mathbb{R}$ solución viscosa discontinua de* (1.1.3) *tal que $u \leq w \leq v$ sobre $\bar{Q}_T$.*

Demostración: Nuestra demostración se basa en mostrar la existencia de una función w que sea solución discontinua y que verifique $u \leq w \leq v$, por tanto es natural considerar el conjunto

$$\mathcal{G} := \left\{z : \bar{Q}_T \to \mathbb{R} | z^* \text{ es sub-solución de (1.1.3) y } u \leq z \leq v\right\}.$$

En primera instancia verifiquemos que $\mathcal{G}$ es no vacío. Este es el caso ya que u es sub-solución de (1.1.3), por tanto $u = u^*$ ya que u es s.c.s. Además por hipótesis $u \leq v$ lo cual implica que $u \leq u^* \leq v$. Esto muestra que $u \in \mathcal{G}$, i.e., $\mathcal{G}$ es no vacío.

Definimos la función

$$\begin{aligned} w: \ \bar{Q}_T &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) &\longmapsto w(t, x) = \sup_{z\in\mathcal{G}} z(t, x). \end{aligned}$$

Esta función se encuentra bien definida ya que hemos visto que $\mathcal{G}$ es no vacío. A continuación mostramos que w es la solución viscosa discontinua buscada.

Etapa 1: Mostremos que $w \in \mathcal{G}$.

Como $w = \sup_{z \in \mathcal{G}} z$ y para todo $z \in \mathcal{G}$, z^* es sub-solución de (1.1.3), el Lema 1.3.3 nos permite asegurar que w^* es también sub-solución de (1.1.3). Además, para todo $z \in \mathcal{G}$ se tiene que $u \leq z \leq v$, de donde tomando el supremo sobre $\mathcal{G}$, vemos que $u \leq w \leq v$. En consecuencia tenemos que $w \in \mathcal{G}$.

Etapa 2: Mostremos que w_* es súper-solución de (1.1.1).

Supongamos, por absurdo, que w_* no es súper-solución, i.e., supongamos que existe una función test $\phi \in \mathrm{C}^1(\bar{Q}_T)$ y un punto $(t_0, x_0) \in Q_T$ tal que $w_* - \phi$ alcanza un mínimo local estricto en (t_0, x_0) y se verifica

$$\phi_t(t_0, x_0) + H(t_0, x_0, w_*(t_0, x_0), D\phi(t_0, x_0)) < 0. \tag{1.4.11}$$

Es fácil de ver que tomando como función test $\hat{\phi} = \phi - \phi(t_0, x_0) + w_*(t_0, x_0)$, esta hereda todas las propiedades que se verifican para ϕ. En consecuencia, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que la función test verifica que $\phi(t_0, x_0) = w_*(t_0, x_0)$.

Notemos que para $\epsilon > 0$ arbitrario pero fijo, se tiene que

$$\phi(t_0, x_0) + \epsilon > w_*(t_0, x_0).$$

Realizando un procedimiento análogo al hecho en la demostración del Lema 1.3.3, tenemos que por definición de $w_*(t_0, x_0)$ existe una sucesión $((t_n, x_n))_{n \in \mathbb{N}} \subset Q_T$ tal que

$$\lim_{n \to +\infty} (t_n, x_n) = (t_0, x_0) \quad \text{y} \quad \lim_{n \to +\infty} w(t_n, x_n) = w_*(t_0, x_0).$$

De la continuidad de ϕ tenemos que $\phi(t_n, x_n) + \epsilon \to \phi(t_0, x_0) + \epsilon$ cuando $n \to +\infty$. Si tomamos $\hat{\epsilon} = [\phi(t_0, x_0) + \epsilon - w_*(t_0, x_0)]/4$ tenemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$w(t_n, x_n) \leq w_*(t_0, x_0) + \hat{\epsilon} < \phi(t_0, x_0) + \epsilon - \hat{\epsilon} < \phi(t_n, x_n) + \epsilon, \quad \forall n \geq n_0. \tag{1.4.12}$$

Sea $\delta > 0$ cualquiera, así existe $\hat{n}_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(t_n, x_n) \in \mathcal{C}_\delta(t_0, x_0)$ para todo $n \geq \hat{n}_0$. Consideremos la función $z_{\delta,\epsilon} \colon \bar{Q}_T \to \mathbb{R}$, $(t, x) \mapsto z_{\delta,\epsilon}(t, x)$; donde

$$z_{\delta,\epsilon}(t, x) = \begin{cases} w(t, x) & \text{si } (t, x) \in \mathcal{C}_\delta^c(t_0, x_0), \\ \max\{w(t, x), \phi(t, x) + \epsilon\} & \text{si } (t, x) \in \mathcal{C}_\delta(t_0, x_0). \end{cases}$$

Por comodidad de notación escribiremos $z := z_{\delta,\epsilon}$. Gracias a (1.4.12) vemos que $z(t_n, x_n) = \phi(t_n, x_n) + \epsilon > w(t_n, x_n)$ para todo $n \geq \max\{n_0, \hat{n}_0\}$, lo cual implica que

$$z > w. \tag{1.4.13}$$

Si además mostramos que $z \in \mathcal{G}$ tendríamos una contradicción, ya que por definición de w, tenemos que $z \leq w$. Los siguientes puntos nos ayudarán a encontrar los valores adecuados para ϵ y δ de modo que $z = z_{\delta,\epsilon} \in \mathcal{G}$.

i) Mostremos que $w_*(t_0, x_0) < v(t_0, x_0)$. En efecto, supongamos por absurdo que $w_*(t_0, x_0) \geq v(t_0, x_0)$. Como $w \leq v$ y v es s.c.i. se tiene que $w_* \leq v_* = v$; y por tanto $w_*(t_0, x_0) \leq v(t_0, x_0)$, de donde vemos que $w_*(t_0, x_0) = v(t_0, x_0)$.

Dado que $w_* - \phi$ alcanza un mínimo local estricto sabemos existe $r > 0$ tal que

$$(w_* - \phi)(t_0, x_0) \leq (w_* - \phi)(t, x), \quad \forall (t, x) \in \mathcal{C}_r(t_0, x_0).$$

Pero $w_* \leq v$ y $(w_* - \phi)(t_0, x_0) = (v - \phi)(t_0, x_0)$, de donde tenemos que

$$(v - \phi)(t_0, x_0) \leq (v - \phi)(t, x), \quad \forall (t, x) \in \mathcal{C}_r(t_0, x_0).$$

Esto muestra que $v - \phi$ alcanza un mínimo local en (t_0, x_0), y dado que v es súper-solución se tiene que

$$\phi_t(t_0, x_0) + H(t_0, x_0, w_*(t_0, x_0), D\phi(t_0, x_0)) \geq 0,$$

pero esto es una contradicción con (1.4.11). En conclusión, hemos mostrado que $\phi(t_0, x_0) = w_*(t_0, x_0) < v(t_0, x_0)$.

Tomamos $\tilde{\epsilon} = \{v(t_0, x_0) - \phi(t_0, x_0)\}/4$. De la semicontinuidad inferior de v y la continuidad de ϕ tenemos que existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$\phi(t, x) \leq \phi(t_0, x_0) + \tilde{\epsilon} < v(t_0, x_0) - \tilde{\epsilon} \leq v(t, x), \quad \forall (t, x) \in \mathcal{C}_{\delta_1}(t_0, x_0).$$

De la construcción de $\tilde{\epsilon} > 0$ tenemos que al tomar $\epsilon_1 \in (0, \tilde{\epsilon})$ se verifica

$$\phi(t, x) < v(t, x) - \epsilon_1, \quad \forall (t, x) \in \mathcal{C}_{\delta_1}(t_0, x_0).$$

ii) Por nuestra hipótesis tenemos que $w_* - \phi$ alcanza un mínimo local estricto en $(t_0, x_0) \in Q_T$, luego existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$0 = (w_* - \phi)(t_0, x_0) < (w_* - \phi)(t, x), \quad \forall (t, x) \in \mathcal{C}_{\delta_2}(t_0, x_0) \setminus \{(t_0, x_0)\}.$$

Como la función $w_* - \phi$ es s.c.i. su restricción al compacto $\partial\mathcal{C}_{\delta_2}(t_0, x_0)$ alcanza un mínimo y de lo anterior se tiene que $\hat{m} := \min\limits_{\partial\mathcal{C}_{\delta_2}((t_0,x_0))} (w_* - \phi) > 0$. Así tomando $\epsilon_2 \in (0, \hat{m})$ obtenemos que

$$(w_* - \phi)(t, x) > \epsilon_2, \quad \forall (t, x) \in \partial\mathcal{C}_{\delta_2}(t_0, x_0).$$

iii) Consideremos la función

$$\begin{aligned} F\colon (0,T]\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N &\longrightarrow \mathbb{R}\\ (t,x,s,p) &\longmapsto F(t,x,s,p)=\phi_t(t,x)+H(t,x,s,p). \end{aligned}$$

Por facilidades de notación trabajamos con la métrica del máximo sobre el espacio métrico producto $M := (0,T)\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$.

F es continua en el punto $m_0 := (t_0,x_0,\phi(t_0,x_0),D\phi(t_0,x_0))$ dadas las continuidades de ϕ_t y H. Así, de (1.4.11) tenemos que existe $r_0>0$ tal que

$$F(t,x,s,p)<0,\quad \forall (t,x,s,p)\in B_{r_0}(m_0), \tag{1.4.14}$$

donde se sobreentiende que $B_{r_0}(m_0)\subset M$ es la bola de centro $m_0\in M$ y radio r_0. Por la medida considerada sobre M, para que se verifique (1.4.14), basta tener que

$$(t,x)\in\mathcal{C}_{r_0}(t_0,x_0), s\in B_{r_0}(\phi(t_0,x_0)), p\in B_{r_0}(D\phi(t_0,x_0)); \tag{1.4.15}$$

donde las bolas deben ser consideradas en los respectivos espacios métricos que componen a M.

Usando la continuidad de ϕ y $D\phi$ en $(t_0,x_0)\in Q_T$, sabemos existen $r_1,r_2>0$ respectivamente tales que

- $\phi(t,x)\in B_{\frac{r_0}{4}}(\phi(t_0,x_0)),\quad \forall (t,x)\in\mathcal{C}_{r_1}(t_0,x_0)$
- $D\phi(t,x)\in B_{r_0}(D\phi(t_0,x_0)),\quad \forall (t,x)\in\mathcal{C}_{r_2}(t_0,x_0)$

El primero de estos puntos implica que tomando $\epsilon_3\in(0,r_0/4)$ se verifica que

$$\phi(t,x)+\epsilon_3\in B_{r_0}(\phi(t_0,x_0)),\quad \forall (t,x)\in\mathcal{C}_{r_1}(t_0,x_0).$$

Es claro que tomando $\delta_3=\text{mín}\{r_0,r_1,r_2\}>0$ tenemos que (t,x) y las imágenes de $\phi+\epsilon_3$, $D\phi$ verifican (1.4.15) y en consecuencia se verifica (1.4.14), i.e., se cumple que

$$\phi_t(t,x)+H(t,x,\phi(t,x)+\epsilon_3,D\phi(t,x))<0,\quad \forall (t,x)\in\mathcal{C}_{\delta_3}(t_0,x_0).$$

Los literales i), ii) y iii) nos ayudan a concluir que para $\delta=\text{mín}\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}$ y ϵ tal que $\epsilon\in(0,\text{mín}\{\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3\})$, se verifica que

$$\phi(t,x)+\epsilon<v(t,x),\quad \forall (t,x)\in\mathcal{C}_\delta(t_0,x_0) \tag{1.4.16}$$

$$w_*(t,x)>\phi(t,x)+\epsilon,\quad \forall (t,x)\in\partial\mathcal{C}_\delta(t_0,x_0) \tag{1.4.17}$$

$$0>\phi_t(t,x)+H(t,x,\phi(t,x)+\epsilon,D\phi(t,x)),\quad \forall (t,x)\in\mathcal{C}_\delta(t_0,x_0). \tag{1.4.18}$$

Mostremos que estos valores para δ y ϵ son tales que $z \in \mathcal{G}$.

Por definición de z se sigue que $w \leq z$. También $u \leq w$ y por tanto $u \leq z$. Por otro lado, $w \leq v$ y usando (1.4.16) tenemos que $\phi + \epsilon \leq v$ sobre $\mathcal{C}_\delta(t_0, x_0)$, con lo cual $z \leq v$. Esto muestra que $u \leq z \leq v$.

El último paso de esta etapa es mostrar que z^* es sub-solución de (1.1.3).

Sean $\varphi \in \mathrm{C}^1(\bar{Q}_T)$ y $(\hat{t}_0, \hat{x}_0) \in Q_T$ cualesquiera, tales que $z^* - \varphi$ alcanza un máximo local estricto en $(\hat{t}_0, \hat{x}_0)$, i.e., existe $\hat{r} > 0$ tal que

$$(z^* - \varphi)(\hat{t}_0, \hat{x}_0) \geq (z^* - \varphi)(t, x), \quad \forall (t, x) \in \mathcal{C}_{\hat{r}}(\hat{t}_0, \hat{x}_0). \tag{1.4.19}$$

Como $w \leq z_\epsilon^\delta$, luego necesariamente $w^*(\hat{t}_0, \hat{x}_0) \leq z^*(\hat{t}_0, \hat{x}_0)$. Estudiemos estas dos posibilidades en casos.

Caso 1. $w^*(\hat{t}_0, \hat{x}_0) = z^*(\hat{t}_0, \hat{x}_0)$

Esta igualdad junto con (1.4.19) nos dice que $w^* - \varphi$ alcanza un máximo local en $(\hat{t}_0, \hat{x}_0)$. Esto es claro ya que

$$(w^* - \varphi)(\hat{t}_0, \hat{x}_0) = (z^* - \varphi)(\hat{t}_0, \hat{x}_0) \geq (z^* - \varphi)(t, x) \geq (w^* - \varphi)(t, x), \quad \forall (t, x) \in \mathcal{C}_{\hat{r}}(\hat{t}_0, \hat{x}_0).$$

Recordemos que w^* es sub-solución y en consecuencia obtenemos que

$$\varphi_t(\hat{t}_0, \hat{x}_0) + H(\hat{t}_0, \hat{x}_0, z^*(\hat{t}_0, \hat{x}_0), D\varphi(\hat{t}_0, \hat{x}_0)) \leq 0,$$

mostrando así que z^* es sub-solución de (1.1.3).

Caso 2. $w^*(\hat{t}_0, \hat{x}_0) < z^*(\hat{t}_0, \hat{x}_0)$

Si $(\hat{t}_0, \hat{x}_0) \in \hat{Q}_T := Q_T \setminus \overline{\mathcal{C}_\delta(t_0, x_0)}$ tenemos que $w^*(\hat{t}_0, \hat{x}_0) = z^*(\hat{t}_0, \hat{x}_0)$ debido a la definición de envoltura s.c.s.. Pero esto no es posible por la hipótesis de este caso, por tanto $(\hat{t}_0, \hat{x}_0) \in \overline{\mathcal{C}_\delta(t_0, x_0)}$.

Observemos que para cualquier $(\hat{t}, \hat{x}) \in \overline{\mathcal{C}_\delta(t_0, x_0)}$ y cualquier $\hat{\delta} > 0$ se cumple que

$$\sup_{(t,x) \in \mathcal{C}_{\hat{\delta}}(\hat{t}, \hat{x})} z(t, x) \geq \sup_{(t,x) \in \mathcal{C}_{\hat{\delta}}(\hat{t}, \hat{x}) \cap \mathcal{C}_\delta(t_0, x_0)} \phi(t, x) + \epsilon,$$

de donde tras tomar el ínfimo sobre $\hat{\delta}$ y usando la continuidad de $(\phi + \epsilon)$, se sigue que $z^*(\hat{t}, \hat{x}) \geq \phi(\hat{t}, \hat{x}) + \epsilon$; y como $z^* \geq w^*$, luego $z^*(\hat{t}, \hat{x}) \geq \text{máx}\left\{w^*(\hat{t}, \hat{x}), \phi(\hat{t}, \hat{x}) + \epsilon\right\}$. Por otro lado es claro que $z \leq \text{máx}\{w^*, \phi + \epsilon\}$, de donde

$$z^*(\hat{t}, \hat{x}) \leq (\text{máx}\left\{w(\hat{t}, \hat{x}), \phi(\hat{t}, \hat{x}) + \epsilon\right\})^* = \text{máx}\left\{w^*(\hat{t}, \hat{x}), \phi(\hat{t}, \hat{x}) + \epsilon\right\}.$$

En conclusión, hemos mostrado que $z^*(\hat{t}, \hat{x}) = \text{máx}\left\{w^*(\hat{t}, \hat{x}), \phi(\hat{t}, \hat{x}) + \epsilon\right\}$ sobre $\overline{\mathcal{C}_\delta(t_0, x_0)}$. Como supusimos que $w^*(\hat{t}_0, \hat{x}_0) < z^*(\hat{t}_0, \hat{x}_0)$, la anterior igualdad concluye que $z^*(\hat{t}_0, \hat{x}_0) = \phi(\hat{t}_0, \hat{x}_0) + \epsilon$. Notemos que (1.4.17) forza a que $(\hat{t}_0, \hat{x}_0) \in \mathcal{C}_\delta(t_0, x_0)$. Se tiene que $\phi + \epsilon - \varphi \in \mathrm{C}^1(\bar{Q}_T)$ alcanza un máximo local en $(\hat{t}_0, \hat{x}_0)$. En efecto, ya que $(\hat{t}_0, \hat{x}_0) \in \mathcal{C}_\delta(t_0, x_0)$, podemos asumir que $\hat{r}$, además de verificar (1.4.19), también cumple con $\mathcal{C}_{\hat{r}}(\hat{t}_0, \hat{x}_0) \subset \mathcal{C}_\delta(t_0, x_0)$, y así se sigue que

$$(\phi - \varphi)(\hat{t}_0, \hat{x}_0) + \epsilon = (z^* - \varphi)(\hat{t}_0, \hat{x}_0) \geq (z^* - \varphi)(t, x) \geq (\phi - \varphi)(t, x) + \epsilon, \quad \forall (t, x) \in \mathcal{C}_{\hat{r}}(\hat{t}_0, \hat{x}_0),$$

y gracias a las condiciones necesarias de optimalidad se tiene que

$$\phi(\hat{t}_0, \hat{x}_0) = \varphi(\hat{t}_0, \hat{x}_0) \quad \text{y} \quad D\phi(\hat{t}_0, \hat{x}_0) = D\varphi(\hat{t}_0, \hat{x}_0).$$

Finalmente, de (1.4.18) inferimos que

$$\begin{aligned} 0 &\geq \phi(\hat{t}_0, \hat{x}_0) + H(\hat{t}_0, \hat{x}_0, \phi(\hat{t}_0, \hat{x}_0), D\phi(\hat{t}_0, \hat{x}_0)) \\ &= \varphi_t(\hat{t}_0, \hat{x}_0) + H(\hat{t}_0, \hat{x}_0, z^*(\hat{t}_0, \hat{x}_0), D\varphi(\hat{t}_0, \hat{x}_0)), \end{aligned}$$

lo cual muestra que z^* es sub-solución de (1.1.3).

En resumen, hemos verificado que $z \in \mathcal{G}$; además es claro que (1.4.13) se cumple, pero esto es imposible por la definición de w. En consecuencia debemos tener necesariamente que w_* es una súper-solución de (1.1.3), lo cual concluye la Etapa 2.

Así, ambas etapas confirman que la función w es una solución viscosa discontinua de (1.1.3) como se quería demostrar. ■

1.5. Principio de comparación

Hemos visto que a través del Método de Perron podemos obtener una solución viscosa discontinua. El resultado que ahora veremos permite obtener soluciones continuas del problema de Cauchy (1.1.3)-(1.1.2). Para esto necesitamos dos hipótesis adicionales sobre el Hamiltoniano H.

(H1) Existe $\kappa > 0$ para todo $u, v \in \mathbb{R}$ y para todo $(t, x, p) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ tal que, si $u \geq v$ entonces

$$H(t, x, u, p) - H(t, x, v, p) \geq \kappa(u - v).$$

(H2) Para todo $R > 0$ y $T > 0$, existen módulos de continuidad $\omega, \omega_{R,T}$ tales que para todo $\gamma > 0$, $|x|, |y| \leq R$; $|u| \leq R$ y para todo $s, t \in [0, T]$; si $s(\beta) \to 0$ tenemos que

$$H(s, y, u, p + s(\beta)) - H(t, x, u, p) \leq \omega(\beta) + \omega_{R,T}((1 + |p|)(|x - y| + |s - t|)),$$

con $p = (x-y)/\gamma$.

Lema 1.5.1. *Sea* $u\colon \bar{Q}_T \to \mathbb{R}$ *sub-solución de* (1.1.3)*. Para cada* $\eta > 0$ *definimos la función*

$$\begin{aligned} u_\eta\colon \ \bar{Q}_T &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t,x) &\longmapsto u_\eta(t,x) = u(t,x) - \eta t. \end{aligned}$$

Entonces se verifica que u_η *es sub-solución de*

$$u_t + F(t,x,u,Du) + \eta = 0 \quad \textit{en} \quad \bar{Q}_T. \tag{1.5.20}$$

Demostración: Supongamos que existe $\varphi \in \mathrm{C}^1(\bar{Q}_T)$ tal que $u_\eta - \varphi$ alcanza un máximo en el punto $(t_0,x_0) \in Q_T$ sobre $\mathcal{C}_\delta(t_0,x_0)$, con $0 < \delta < t_0$. Esto nos dice que

$$u(t_0,x_0) - \phi(t_0,x_0) \geq u(t,x) - \phi(t,x), \quad \forall (t,x) \in \mathcal{C}_\delta(t_0,x_0),$$

donde $\phi(t,x) = \eta t + \varphi(t,x)$. Podemos ver entonces que $u - \phi$ alcanza un máximo en $(t_0,x_0) \in Q_T$ sobre $\mathcal{C}_\delta(t_0,x_0)$, con $\phi \in \mathrm{C}^1(\bar{Q}_T)$. Por hipótesis sabemos que u es sub-solución, y por tanto

$$\phi_t(t_0,x_0) + H(t_0,x_0,u(t_0,x_0),D\phi(t_0,x_0)) \leq 0. \tag{1.5.21}$$

Notemos que $\phi_t(t_0,x_0) = \eta + \varphi_t(t_0,x_0)$ y $D\phi(t_0,x_0) = D\varphi(t_0,x_0)$. Además, como $u_\eta(t_0,x_0) \leq u(t_0,x_0)$, la hipótesis **(H1)** implica que

$$H(t_0,x_0,u(t_0,x_0),D\phi(t_0,x_0)) \geq H(t_0,x_0,u_\eta(t_0,x_0),D\varphi(t_0,x_0)) \tag{1.5.22}$$

Usando (1.5.22) sobre (1.5.21) se concluye la demostración. ■

El lema previo, aunque simple, será de gran utilidad en la demostración del siguiente Teorema. Este nos dice que basta saber el comportamiento de una sub-solución y súper-solución en la frontera parabólica para conocer el comportamiento de estas funciones en todo $\bar{Q}_T$.

Teorema 1.5.2. *Supongamos que se verifican las hipótesis* ***(H1)*** *y* ***(H2)****. Sean* $u\colon \bar{Q}_T \to \mathbb{R}$ *y* $v\colon \bar{Q}_T \to \mathbb{R}$ *sub-solución y súper-solución acotadas de* (1.1.3) *respectivamente, tales que* $u(0,x) \leq v(0,x)$ *para todo* $x \in \mathbb{R}^N$*, entonces* $u \leq v$ *en* $\bar{Q}_T$*.*

Demostración: Razonemos por absurdo. Así tenemos que existe $(\tilde{t},\tilde{x}) \in \bar{Q}_T$ de modo que $u(\tilde{t},\tilde{x})-v(\tilde{t},\tilde{x}) > 0$. Vemos que para $\eta_0 > 0$ suficientemente pequeño se verifica que para todo $\eta \le \eta_0$, $u(\tilde{t},\tilde{x}) - \eta\tilde{t} - v(\tilde{t},\tilde{x}) > 0$ y en consecuencia

$$\sup_{(t,x)\in\bar{Q}_T} \{u_\eta(t,x) - v(t,x)\} := \theta > 0.$$

Consideremos una función $\psi \in \mathrm{C}_b^1(\mathbb{R}^N)$ tal que $\psi = 0$ en B_1 y $\psi \ge \|u_\eta\|_\infty + \|v\|_\infty + 1$ en B_2^c. Esta función nos permite obtener un máximo en lugar del supremo anteriormente conseguido. Vamos a definir para cada $\beta > 0$ la función ψ_β como sigue:

$$\begin{aligned} \psi_\beta \colon\ \bar{Q}_T &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t,x) &\longmapsto \psi_\beta(t,x) = \psi(\beta x). \end{aligned}$$

De las propiedades del supremo garantizamos la existencia de $(\hat{t},\hat{x}) \in \bar{Q}_T$, el cual verifica $u_\eta(\hat{t},\hat{x}) - v(\hat{t},\hat{x}) \ge \theta/2$. Sea $\beta_0 > 0$ suficientemente pequeño tal que $\|\hat{x}\| < 1/\beta$, y así, para todo $0 < \beta \le \beta_0$ tenemos que $\psi_\beta(\hat{x}) = 0$, de donde $u_\eta(\hat{t},\hat{x}) - v(\hat{t},\hat{x}) - \psi_\beta(\hat{x}) \ge \theta/2 > 0$. Como $\psi \ge \|u_\eta\|_\infty + \|v\|_\infty + 1$ sobre B_2^c tenemos que $\psi_\beta \ge \|u_\eta\|_\infty + \|v\|_\infty + 1$ sobre $B_{2/\beta}^c$. Esto implica que para $(t,x) \in [0,T] \times B_{2/\beta}^c$ se verifica que $\psi_\beta(x) \ge \theta + 1$, y por tanto $u_\eta(t,x) - v(t,x) - \psi_\beta(x) \le \theta - (\theta+1) = -1 < 0$. Vemos entonces que $u_\eta - v - \psi$ alcanza un máximo global de modo que

$$\max_{(t,x)\in\bar{Q}_T} \{u_\eta(t,x) - v(t,x) - \psi(x)\} := \tilde{\theta} = \tilde{\theta}(\beta) \ge \frac{\theta}{2} > 0, \tag{1.5.23}$$

para cierto $(t^*,x^*) \in (0,T] \times B_{2/\beta}$. Procedemos ahora a realizar un doblamiento de variables, para ello definimos la función

$$\begin{aligned} \xi_{\gamma,\epsilon} \colon [0,T] \times [0,T] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t,s,x,y) &\longmapsto \xi_{\gamma,\epsilon}(t,s,x,y), \end{aligned}$$

donde $\epsilon < \gamma$ y

$$\xi_{\gamma,\epsilon}(t,s,x,y) = u_\eta(t,x) - v(s,y) - \psi_\beta(y) - \frac{|x-y|^2}{2\gamma} - \frac{|t-s|^2}{2\epsilon}.$$

De la definición de $\xi_{\gamma,\epsilon}$ y (1.5.23) tenemos que la función $\xi_{\gamma,\epsilon}$ posee un máximo global, i.e., existe $(\bar{t},\bar{s},\bar{x},\bar{y}) := (t_{\gamma,\epsilon}, s_{\gamma,\epsilon}, x_{\gamma,\epsilon}, y_{\gamma,\epsilon}) \in [0,T] \times [0,T] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ tal que

$$\max_{(t,s,x,y)\in[0,T]\times[0,T]\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} \{\xi_{\gamma,\epsilon}(t,s,x,y)\} = \xi_{\gamma,\epsilon}(\bar{t},\bar{s},\bar{x},\bar{y}) := \tilde{\theta}_{\gamma,\epsilon} \ge \tilde{\theta} > 0, \tag{1.5.24}$$

con $\bar{y} \in B_{2/\beta}$ por la definición de ψ_β sobre $B_{2/\beta}$. Usando (1.5.23) podemos concluir que

$$\frac{|\bar{x}-\bar{y}|^2}{2\gamma} - \frac{|\bar{t}-\bar{s}|^2}{2\epsilon} \le \|u_\eta\|_\infty + \|v\|_\infty + \|\psi\|_\infty,$$

y esto a su vez implica que

$$|\bar{x}-\bar{y}|^2 \leq C\gamma \quad \text{y} \quad |\bar{t}-\bar{s}|^2 \leq C\epsilon.$$

Como vimos, el término de localización ψ_β hace que $\bar{x},\bar{y} \in B_{2/\beta}$, para $\epsilon,\gamma > 0$ suficientemente pequeños. Luego, a través de un argumento de subsucesiones sabemos que existe $(t',x') \in \bar{Q}_T$ tal que $\bar{t},\bar{s} \to t'$ y $\bar{x},\bar{y} \to x'$ cuando $\epsilon,\gamma \to 0$. Tenemos también que al usar la semicontinuidad de u_η y (1.5.23), argumentos de viscosidad estándar implican que

$$\lim_{\gamma\to 0} \limsup_{\epsilon\to 0} \frac{|\bar{x}-\bar{y}|^2}{\gamma} = 0. \tag{1.5.25}$$

Definimos las funciones ϕ_1 y ϕ_2 como sigue:

$$\begin{aligned}
\phi_1(t,x) &= v(\bar{s},\bar{y}) + \psi_\beta(\bar{y}) + \frac{|x-\bar{y}|^2}{2\gamma} + \frac{|t-\bar{s}|^2}{2\epsilon}, \quad \forall (t,x) \in \bar{Q}_T \\
\phi_2(s,y) &= u_\eta(\bar{t},\bar{x}) - \psi(y) - \frac{|\bar{x}-y|^2}{2\gamma} - \frac{|\bar{t}-s|^2}{2\epsilon}, \quad \forall (s,y) \in \bar{Q}_T.
\end{aligned}$$

Es claro usando la maximalidad de $\xi_{\gamma,\epsilon}$ dada por (1.5.24), que $u_\eta - \phi_1$ alcanza un máximo global en $(\bar{t},\bar{x}) \in Q_T$. Recordando que u_η es sub-solución del problema (1.5.20) gracias al Lema 1.5.1, y usando el hecho que $\phi_1 \in \mathrm{C}^1(\bar{Q}_T)$ por su definición, tenemos que para cualquier $\delta \in (0, \min\{\bar{t},\bar{s}\})$

$$(\phi_1)_t(\bar{t},\bar{x}) + H(\bar{t},\bar{x},u_\eta(\bar{t},\bar{x}),D\phi_1(\bar{t},\bar{x})) \leq -\eta. \tag{1.5.26}$$

De manera similar vemos que $v-\phi_2$ alcanza un mínimo global en $(\bar{s},\bar{y})$ y como v es súper-solución de (1.1.3) se tiene que para cualquier $\delta \in (0, \min\{\bar{t},\bar{s}\})$

$$(\phi_2)_t(\bar{s},\bar{y}) + H(\bar{s},\bar{y},v(\bar{s},\bar{y}),D\phi_2(\bar{s},\bar{y})) \geq 0. \tag{1.5.27}$$

Calculando la diferencia entre (1.5.26) y (1.5.27) y desarrollando las expresiones tenemos que

$$\eta \leq [(\phi_2)_t(\bar{s},\bar{y}) - (\phi_1)_t(\bar{t},\bar{x})] + A, \tag{1.5.28}$$

donde $A = H(\bar{s},\bar{y},v(\bar{s},\bar{y}),\bar{p} - D\psi_\beta(\bar{y})) - H(\bar{t},\bar{x},u_\eta(\bar{t},\bar{x}),\bar{p})$.

Es claro que $(\phi_2)_t(\bar{s},\bar{y}) = (\phi_1)_t(\bar{t},\bar{x}) = (\bar{t}-\bar{s})/\epsilon$. Estimemos ahora el término A. De (1.5.24) obtenemos que $u_\eta(\bar{t},\bar{x}) \geq v(\bar{s},\bar{y})$, y de la hipótesis **(H1)** tenemos

$$H\left(\bar{s},\bar{y},v(\bar{s},\bar{y}),\bar{p} - D\psi_\beta(\bar{y})\right) \leq H(\bar{s},\bar{y},u_\eta(\bar{t},\bar{x}),\bar{p} - D\psi_\beta(\bar{y})).$$

De aquí vemos, junto con la hipótesis **(H2)** con $R = 2/\beta$, que

$$A \leq H(\bar{s}, \bar{y}, u_\eta(\bar{t}, \bar{x}), \bar{p} - D\psi_\beta(\bar{y})) - H(\bar{t}, \bar{x}, u_\eta(\bar{t}, \bar{x}), \bar{p})$$

$$\leq \omega(\beta) + \omega_{\beta,T}((1 + |\bar{p}|)(|\bar{x} - \bar{y}| + |\bar{t} - \bar{s}|)).$$

Usando (1.5.25) y tomando $\epsilon \ll \gamma$ concluímos que

$$A \leq o_\beta(1) + \omega_{\beta,T}(o_\gamma(1))$$

donde $o_\gamma(1) \to 0$ cuando $\gamma \to 0$ independientemente de los otros parámetros. Reemplazando las estimas obtenidas en (1.5.28) y tomando límite cuando $\epsilon \ll \gamma \to 0$ y $\beta \to 0$ conseguimos que

$$\eta \leq 0,$$

lo cual es un absurdo pues $\eta > 0$. ■

1.6. Existencia y Unicidad de soluciones continuas

Ahora usaremos todos los resultados previos para mostrar la existencia y unicidad de soluciones viscosas. Sin embargo, es necesaria la siguiente hipótesis para este fin.

(H3) Para cada $R > 0$ existe una constante $C_H(R) > 0$ tal que $|H(t, x, u, p)| \leq C_H(R)$ para todo $(t, x) \in Q$, y para todo $|u|, |p| \leq R$.

Teorema 1.6.1. *Supongamos que se verifican **(H1)-(H3)**. Sea $u_0 \in \mathrm{C}_b(\mathbb{R}^N)$. El problema de Cauchy* (1.1.1)-(1.1.2) *posee una única solución viscosa $u \in \mathrm{C}(\bar{Q})$. Más aún, existe $\tilde{C} > 0$ tal que la solución u verifica que*

$$|u(t, x)| \leq \tilde{C}t + \|u_0\|_\infty, \quad \forall\ (t, x) \in Q.$$

Demostración: Estudiemos primero el problema en el horizonte finito, i.e., el problema (1.1.3)-(1.1.2).

Etapa 1. Sea $T > 0$ cualquiera. Primero supondremos que $u_0 \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^N)$ y que $\|u_0\|_{\mathrm{C}^1(\mathbb{R}^N)} \leq \Lambda$ para algún $0 < \Lambda < +\infty$.

Sea $C > 0$ cualquiera y consideremos la función $u^+(t, x) = u_0(x) + Ct$, la cual satisface que $u^+(0, x) = u_0(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Notemos que la función u^+ es suave, por tanto puede ser evaluada de manera clásica en

(1.1.3). Usando ahora **(H3)** tenemos que existe una constante $C_H(\Lambda, T) > 0$ tal que

$$u_t^+(t,x) + H(t,x,u_0(x)+Ct, Du_0(x)) \geq C - C_H(\Lambda,T), \quad \forall\ (t,x) \in Q_T.$$

Vemos que si tomamos $C > 0$ suficientemente grande tal que $C - C_H(\Lambda,T) \leq 0$, entonces la función u^+ es una súper-solución (clásica, y por tanto viscosa) del problema (1.1.3)-(1.1.2).

Similarmente obtenemos para $C > 0$ suficientemente grande que la función $u^-(t,x) = u_0(x) - Ct$ verifica que $u^-(0,x) = u_0(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ y es sub-solución viscosa del mismo problema. Ya que $u^- \leq u^+$ sobre $\bar{Q}_T$ y además ambas son acotadas, ya que u_0 lo es, las hipótesis del Teorema 1.4.1 se verifican y garantizamos la existencia de $u : \bar{Q}_T \to \mathbb{R}$ solución viscosa discontinua del problema tal que $u^- \leq u \leq u^+$ en $\bar{Q}_T$.

Mostremos ahora la continuidad de u. De lo anterior vemos que, en particular, $u^-(0,x) \leq u(0,x) \leq u^+(0,x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$, y de las definiciones de u^- y u^+ tenemos que $u_*(0,x) = u^*(0,x) = u_0(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Como u_+ es súper-solución y u^- es sub-solución, luego usando el Teorema 1.5.2 (el Principio de comparación) obtenemos que $u^* \leq u_*$, y como siempre se cumple que $u^* \geq u_*$, hemos concluído que $u_* = u^*$,i.e., hemos mostrado que $u \in \mathrm{C}(\bar{Q}_T)$. Esto muestra la existencia de una solución viscosa continua.

Mostremos ahora la unicidad de la solución. Supongamos, por absurdo, que existe $\tilde{u} \neq u$ solución viscosa continua del problema (1.1.3)-(1.1.2), y así, dado que u es también solución, necesariamente se debe cumplir que

$$\tilde{u}(0,x) = u(0,x), \quad \forall\ x \in \mathbb{R}^N. \tag{1.6.29}$$

Como toda solución es sub-solución y súper-solución, asumamos que $\tilde{u}$ es sub-solución y que u es súper-solución. Por tanto, usando (1.6.29), el Teorema 1.5.2 nos dice que $\tilde{u} \leq u$ en $\bar{Q}_T$. De manera análoga, tomando ahora a u como sub-solución y a $\tilde{u}$ como súper-solución, obtenemos que $\tilde{u} \geq u$ sobre $\bar{Q}_T$, y por tanto que $\tilde{u} = u$ sobre $\bar{Q}_T$, lo cual es absurdo, mostrando así la unicidad de la solución.

Etapa 2. Nos enfocamos ahora en el caso general donde $u \in \mathrm{C}_b(\mathbb{R}^N)$. Tomemos una familia de funciones suaves y acotadas $(u_{0,\epsilon})_{\epsilon>0} \subset \mathrm{C}_b(\mathbb{R}^N)$ tales que,

$$\|u_{0,\epsilon}\|_{\mathrm{C}^1(\mathbb{R}^N)} < +\infty \quad \text{y} \quad \|u_{0,\epsilon} - u_0\|_\infty < \epsilon.$$

Sea $\epsilon > 0$ cualquiera. Vamos a considerar la función $u_\epsilon^+(t,x) = u_{0,\epsilon}(x) + \epsilon + Ct$. De la segunda condición podemos ver que $u_{0,\epsilon} - \epsilon \leq u_0 \leq u_{0,\epsilon} + \epsilon$, y así $u_\epsilon^+(0,x) = u_{0,\epsilon} + \epsilon \geq u_0(x)$. Realizando un proceso análogo al hecho en la Etapa 1 vemos que para $C_\epsilon > 0$ suficientemente grande $u_\epsilon^+(t,x) = u_{0,\epsilon}(x) + \epsilon + C_\epsilon t$ es súper solución del problema (1.1.3)-(1.1.2). También tenemos considerando $C_\epsilon > 0$ suficientemente grande, que la función $u_\epsilon^-(t,x) = u_{0,\epsilon}(x) - \epsilon - C_\epsilon t$ es subsolución del problema. Utilizando el Lema 1.3.3 sabemos que las funciones

$$u^-(t,x) = \sup_{\epsilon>0}\{u_\epsilon^-(t,x)\} \quad \text{y} \quad u^+(t,x) = \inf_{\epsilon>0}\{u_\epsilon^+(t,x)\}$$

son sub- y súper-soluciones respectivamente. Además, por definición de estas funciones, tenemos que $u^+(0,x) = u^-(0,x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Siguiendo exactamente los mismos pasos de la etapa anterior obtenemos la existencia de una única solución $u \in \mathrm{C}(\bar{Q}_T)$ del problema.

Etapa 3. La solución para el problema de Cauchy (1.1.1)-(1.1.2) se obtiene al hacer $T \to +\infty$ en las Etapas 1 y 2.

Etapa 4. Mostremos ahora la estimación para la solución u.

Notemos en primera instancia que $\sup\limits_{(t,x)\in\mathbb{Q}}\{|F(t,x,0,0)|\} < +\infty$. En efecto, sea $R > 0$ arbitrario pero fijo. Utilizando **(H3)** sabemos que existe $C_H(R) > 0$ tal que $|H(t,x,u,p)| < C_H(R)$ para todo $(t,x) \in Q$, para todo $|u|, \|p\| < R$. Vemos entonces que $|H(t,x,0,0)| < C_H(R)$ para todo $(t,x) \in Q$, lo cual implica que $\sup\limits_{(t,x)\in\mathbb{Q}}\{|F(t,x,0,0)|\} < +\infty$.

Consideremos ahora la función $z_1(t,x) = C_1 t + \|u_0\|_\infty$, con $C_1 > 0$ por fijar. Es claro que z_1 es suave, por tanto, puede ser evaluada clásicamente en (1.1.1), de donde obtenemos que

$$\begin{aligned}(z_1)_t(t,x) + H(t,x,z_1(t,x),Dz_1(t,x)) &\geq C_1 + H(t,x,C_1 t + \|u_0\|_\infty, 0)\\ &\geq C_1 + H(t,x,0,0),\end{aligned}$$

donde en la última desigualdad hemos utilizado **(H1)** con $w := Ct + \|u_0\|_\infty \geq 0 =: v$. Si tomamos $C_1 = \|H(\cdot,\cdot,0,0)\|_\infty$, entonces z_1 es súper-solución de (1.1.1)-(1.1.2). Tomamos ahora a la solución u como subsolución. Para $x \in \mathbb{R}^N$ vemos que $u(x,0) \leq z_1(x,0)$ ya que $u(x,0) \leq \|u_0\|_\infty$, por tanto, utilizando el principio de comparación obtenemos que $u \leq z_1$ sobre $\bar{Q}$, i.e.,

$$u(t,x) \leq \|H(\cdot,\cdot,0,0)\|_\infty t + \|u_0\|_\infty, \quad \forall (t,x) \in \bar{Q}.$$

Análogamente, considerando la función $z_2(t,x) = -C_2 t - \|u_0\|_\infty$. Para $C_2 = C_1 > 0$ obtenemos una subsolución, tal que

$$-\|H(\cdot,\cdot,0,0)\|_\infty t - \|u_0\|_\infty \leq u(t,x), \quad \forall (t,x) \in Q.$$

Vemos entonces que basta tomar $C = C_1 = C_2$, lo concluye la demostración. $\blacksquare$

Capítulo 2

Derivada fraccionaria de Caputo

La integración y diferenciación de orden no entero han sido objeto de estudio desde la época de Leibniz. Por ello en este Capítulo nos centramos en dar una introducción con definiciones y resultados básicos para que se pueda apreciar como se resolvió este problema. Conceptos como integrales y derivadas de Riemann-Liouville serán revisados para luego usar estas ideas y definir la Derivada Fraccionaria de Caputo.

2.1. Definiciones y resultados preliminares

Consideremos primero notaciones importantes dadas en la siguiente definición.

Definición 2.1.1. i) Denotamos por D el operador que mapea una función diferenciable sobre su derivada, i.e.,

$$Df(x) := f'(x).$$

ii) Denotamos por J_a el operador que mapea una función $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrable sobre su primitiva centrada en a, i.e.,

$$J_a f(x) := \int_a^x f(t)dt,$$

para $a \leq x \leq b$.

iii) Para $n \in \mathbb{N}$, denotamos por D^n y J_a^n la $n-$ésima iteración de D y J_a, i.e., denotamos $D^1 := D$, $J_a^1 = J_a$ y $D^n := DD^{n-1}$ y $J_a^n = J_a J_a^{n-1}$ para $n \geq 2$.

Como vimos, la derivada (estándar) n-ésima abarca el caso para $n \in \mathbb{N}$, y así es natural preguntarnos por el significado que tendrían expresiones del tipo $D^{1/2}$ o D^e, i.e., queremos obtener una generalización del concepto estándar de derivada y poder dar sentido a una derivada $n-$ésima, con $n \in (0, +\infty) := R_+$.

Las siguientes proposiciones nos serán de ayuda para dar una idea de como definir dicha generalización de derivada.

Proposición 2.1.2. *Sea f una función Riemann-integrable sobre el intervalo $[a, b]$, donde $a, b \in \mathbb{R}$. Sean $t_0 \in [a, b]$ y $n \in \mathbb{N}$ cualesquiera. Entonces se verifica que*

$$J_a^n f(t_0) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^{t_0} (t_0 - t)^{n-1} f(t) dt.$$

Demostración: Ver referencia [12] página 8. ■

Proposición 2.1.3. *Sean $m, n \in \mathbb{N}$ tales que $m > n$, y sea f una función cuya n-ésima derivada es continua en el intervalo $[a, b]$. Entonces,*

$$D^n f = D^m J_a^{m-n} f.$$

Demostración: Ver referencia [12] página 8. ■

2.2. Integrales de Riemann-Liouville

En base a la Proposición 2.1.2 surge un nuevo concepto de integral que detallamos a continuación.

Definición 2.2.1. Sea $n \in \mathbb{R}_+$. Definimos el operador $J_a^n : \mathrm{L}^1([a, b]) \to \mathrm{L}^1([a, b])$ de modo que

$$J_a^n f(x) := \frac{1}{\gamma(n)} \int_a^x (x - t)^{n-1} f(t) dt, \quad \forall x \in [a, b].$$

J_a^n es llamado Operador integral fraccional de Riemann-Liouville de orden n. Para $n = 0$ denotamos $J_a^0 := I$, donde I es el operador identidad.

Debemos asegurarnos que la definición anterior es correcta, lo cual es garantizado por el siguiente teorema.

Teorema 2.2.2. *Sea $f \in L^1([a, b])$ y $n \in \mathbb{R}_+$. Entonces, la integral $J_a^n f(x)$ existe para casi todo $x \in [a, b]$. Más aún, la función $J_a^n f$ pertenece a $L^1([a, b])$.*

Demostración: Ver referencia [12] página 13. ■

Es interesante notar que estos operadores verifican propiedades análogas a las que cumple la integral de Riemann.

Teorema 2.2.3. *Sean $m, n \geq 0$ y $f \in L^1([a,b])$. Entonces,*

$$J_a^m J_a^n f(x) = J_a^{m+n} f(x)$$

casi todo punto $x \in [a,b]$. Si $f \in \mathrm{C}([a,b])$ o si $m+n \geq 1$, entonces la anterior igualdad se tiene para todo $x \in [a,b]$. Más aún, $J_a^m J_a^n f = J_a^n J_a^m f$.

Demostración: Ver referencia [12] página 14. ■

2.3. Derivada de Riemann-Liouville

Buscamos ahora generalizar el resultado dado por la Proposición 2.1.3, para ello consideremos la siguiente definición.

Definición 2.3.1. Sea $n \in \mathbb{R}_+$ y $m = \lceil n \rceil$. El operador $\hat{D}_a^n$ definido por

$$\hat{D}_a^n f := D^m J_a^{m-n},$$

es llamado operador diferencial fraccional de Riemann-Liouville de orden n. Para $n = 0$, definimos $\hat{D}_a^n := I$, con I el operador identidad.

Bajo esta definición tenemos un resultado análogo a la Proposición 2.1.3, que se cumple para los operadores fraccionarios diferenciales e integrales de Riemann-Liouville.

Proposición 2.3.2. *Sea $n \in \mathbb{R}_+$ y sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $m > n$. Entonces,*

$$\hat{D}_a^n = D^m J_a^{m-n}.$$

Demostración: *Ver referencia [12] página 27.* ■

Observando la Definición 2.3.1 vemos que es un tanto complicada la definición ya que requerimos que la integral de Riemann-Liouville sea diferenciable, pero el Teorema 2.2.2 solo nos asegura que la función resultante es L^1. Por tanto es importante enunciar el siguiente resultado referente a la correcta definición de $\hat{D}_a^n$.

Teorema 2.3.3. *Sean* $f \in \mathrm{A}^1([a,b])$ *y* $0 < n < 1$. *Entonces* $\hat{D}_a^n f$ *existe casi todo punto en* $[a,b]$.

Demostración: Ver referencia [12] página 27. ■

Observación 5. $\mathrm{A}^1[a,b]$ denota el conjunto de las funciones cuya primera derivada es absolutamente continua.

2.4. Derivada de Caputo

Sabemos que si nosotros decimos que una función f posee segunda derivada f'' es por que necesariamente posee su primera derivada f'. De manera general, si f posee $n-$ésima derivada $f^{(n)}$, con $n \geq 2$, es porque necesariamente existe $f^{(m)}$ para todo $m \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Además sabemos, por el Teorema Fundamental del Cálculo, que

$$\int f^{(n)}(x)dx = f^{(n-1)} + C,$$

i.e., que conociendo la $n-$ésima derivada de f, $f^{(n)}$, basta integrar $f^{(n)}$ para conocer $f^{(n-1)}$. Es justamente esta idea la que explica la siguiente definición.

Definición 2.4.1. Sea $0 < \alpha < 1$ y $\beta = \lceil \alpha \rceil$. Sea $f \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $D^\beta f \in \mathrm{L}^1([a,b])$. Definimos el operador D_a^α como

$$D_a^\alpha f := J_a^{\beta-\alpha} D^\beta f.$$

D_a^α es llamado operador diferencial de Caputo de orden α.

Observación 6. La definición para el operador diferencial de Caputo se la hace de manera general para cada $\alpha > 0$ e involucra resultados adicionales. Lo importante es que para el caso que nos interesa, i.e., cuando $0 < \alpha < 1$, la Definición 2.4.1 y la definición general coinciden.

Como se esperaba, para funciones continuas, tenemos que la derivada de Caputo es la inversa de la integral de Riemman-Liouville.

Teorema 2.4.2. *Sea f una función continua y $\alpha \in (0,1)$. Entonces*

$$D_a^\alpha J_a^\alpha f = f.$$

Demostración: Ver referencia [12] página 53. ■

Observación 7. Todo lo que se ha tratado hasta aquí es un compendio del Cálculo Fraccionario y la Derivada temporal de Caputo; si se desea profundizar en estos conceptos, se recomienda al lector revisar la referencia [12].

Procedemos ahora establecer notaciones y conceptos que facilitarán el tratamiento del problema que se abordará en el siguiente capítulo.

Definición 2.4.3. Sea $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ una función suficientemente suave. $D^\alpha u$ representa la derivada fraccionaria temporal de Caputo de f de orden α, para $\alpha \in (0,1)$ fijo; la cual está definida por la siguiente expresión:

$$D^\alpha f(t) := D_0^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{f'(s)}{(t-s)^\alpha} ds, \quad \forall\ t \in [0,+\infty).$$

Observación 8. Usando esta última expresión, es claro que la derivada de Caputo es lineal.

Observación 9. La constante en frente de la derivada de Caputo permite obtener que $D^\alpha f(t) \to f'(t)$ cuando $\alpha \to 1^-$ si f es suficientemente suave en t.

Si $f \in \mathrm{C}^1([0,+\infty))$, realizando una integración por partes podemos arribar a la siguiente expresión:

$$D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{f(t)-f(0)}{t^\alpha} + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{f(t)-f(s)}{(t-s)^{1+\alpha}} ds.$$

Más aún, dado que se tiene la siguiente igualdad:

$$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{(t-s)^{1+\alpha}} ds = \frac{1}{\alpha t^\alpha};$$

y realizando una extensión de f haciendo $f(t) = f(0)$ para $t < 0$, es claro que la derivada de Caputo puede ser reescrita como

$$D^\alpha f(t) = c_\alpha \int_{-\infty}^t \frac{f(t)-f(s)}{(t-s)^{1+\alpha}} ds, \tag{2.4.1}$$

donde $c_\alpha := \alpha/\Gamma(1-\alpha)$.

La notación con respecto a la evaluación sobre la derivada de Caputo D^α estará dada de la siguiente forma. Para $a \leq b$, $t \in \mathbb{R}$ y $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ denotamos

$$D^\alpha[a, b](f, t) := c_\alpha \int_a^b \frac{f(t) - f(s)}{|t - s|^{1+\alpha}} ds.$$

Si $a = -\infty$, únicamente escribiremos $D^\alpha[b](f, t)$. Notemos que bajo estas notaciones se verifica la igualdad $D^\alpha[t](f, t) = D^\alpha f(t)$.

Capítulo 3

Ecuaciones de Hamilton-Jacobi con derivada temporal tipo Caputo

3.1. Definiciones y resultados previos

En el Capítulo 1 trabajamos EDPs parabólicas cuya derivada en el tiempo está dada por la derivada estándar. Como hemos visto en el Capítulo 2 existe otro tipo de derivada llamada Derivada de Caputo, y por tanto es natural que existan formulaciones donde intervenga este tipo de derivada. Por ello, en el presente capítulo estamos interesados en el estudio del siguiente problema:

$$D^{\alpha}u(t,x) + H(t,x,u(t,x),Du(t,x)) = 0, \quad (t,x) \in Q = (0,+\infty) \times \mathbb{R}^N; \tag{3.1.1}$$

sujeto a la condición inicial

$$u(0,t) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N \tag{3.1.2}$$

con $u_0 \in \mathrm{C}_b(\mathbb{R}^N)$. En la ecuación (3.1.1) u denota la función incógnita, $D^{\alpha}u$ la derivada de Caputo de u de orden α y Du denota el gradiente de u respecto a la variable espacial x. La aplicación no lineal y continua $H\colon (0,+\infty) \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ y $u_0 \in \mathrm{C}_b(\mathbb{R}^N)$ son dadas.

Por comodidad en la notación, escribimos

$$H[u,\phi,t,x] = H(t,x,u(t,x),D\phi(t,x)),$$

y una notación similar será usada para la derivada temporal no local

$$D^\alpha_\delta[u,\phi,t,x] := D^\alpha[t-\delta](u(\cdot,x),t) + D^\alpha[t-\delta,t](\phi(\cdot,x),t).$$

Con respecto a la última notación, cabe mencionar que basta que u sea acotada s.c.s. o s.c.i. para que $D^\alpha[t-\delta](u(\cdot,x),t)$ exista, mientras que $D^\alpha[t-\delta,t](\phi(\cdot,x),t)$ existe cuando la función es suficientemente suave, por ejemplo, si $\phi \in \mathrm{C}^1(\bar{Q}_T)$.

Como se puede apreciar, la ecuación (3.1.1) y la ecuación (1.1.1) tienen estructuras muy parecidas. En consecuencia, como veremos en cada resultado, las técnicas que usamos en las demostraciones son las mismas, pero adaptadas al nuevo problema en cuestión.

Enfocaremos el estudio en el horizonte finito. Sea $T > 0$ cualquiera y consideremos el conjunto $Q_T := (0,T] \times \mathbb{R}^N$. Luego el problema a abordar será

$$D^\alpha u(t,x) + H(t,x,u,Du) = 0, \quad \forall (t,x) \in Q_T. \tag{3.1.3}$$

Todos los resultados que se presentan a continuación son adaptaciones de aquellos que se han obtenido en [1] y [11]. Por tanto, si se quiere ver una versión más general del problema de Cauchy abordado en este capítulo, se recomienda al lector revisar estas referencias.

Presentamos a continuación las definiciones de soluciones en el sentido viscoso.

Definición 3.1.1. Sea $u : Q_T \to \mathbb{R}$. Diremos que u es sub-solución (resp. súper-solución) viscosa de (3.1.3) en el punto $(t_0,x_0) \in Q_T$ si u es s.c.s. (resp. s.c.i.) y si para toda función test $\phi \in \mathrm{C}^1(\bar{Q}_T)$ y cualesquiera $\delta_1, \delta_2 > 0$ tales que (t_0,x_0) es un punto de máximo (resp. mínimo) de $u-\phi$ sobre $\mathcal{C}_{\delta_1,\delta_2}(t_0,x_0) \cap \bar{Q}_T$ se verifica que

$$D^\alpha_{\delta_1}[u,\phi,t_0,x_0] + H[u,\phi,t_0,x_0] \leq \text{(resp. } \geq \text{) } 0.$$

Si u es sub-solución y súper solución de (3.1.3) diremos que $u : \bar{Q}_T \to \mathbb{R}$ es solución viscosa de (3.1.3).

Definición 3.1.2. Sea $u : \bar{Q}_T \to \mathbb{R}$. Diremos que u es sub-solución viscosa (resp. súper-solución) del problema de Cauchy (3.1.3)-(3.1.2) si u es sub-solución (resp. súper-solución) viscosa y $u \leq$ (resp. $\geq$) u_0 sobre $\{0\} \times \mathbb{R}^N$.

Diremos que u es solución viscosa del problema de Cauchy (3.1.3)-(3.1.2) si u es sub- y súper-solución viscosa de dicho problema.

Los siguientes lemas nos ayudan a evitar errores técnicos en las demostraciones que se realizarán.

Lema 3.1.3. *Sean* $u : \bar{Q}_T \to \mathbb{R}$, $\phi \in C^1(\bar{Q}_T)$ *y* $(t_0, x_0) \in Q_T$. *Si* (t_0, x_0) *es un punto de máximo (resp. mínimo) de* $u - \phi$ *sobre* $\mathcal{C}_{\delta_1,\delta_2}(t_0, x_0)$, *entonces para* $0 < \sigma \leq \delta_1$ *se verifica que*

$$D^{\alpha}_{\delta_1}[u, \phi, t_0, x_0] \leq \textit{(resp. } \geq\textit{)} D^{\alpha}_{\sigma}[u, \phi, t_0, x_0].$$

Demostración: Demostramos el caso relativo al máximo dado que el caso del mínimo sigue ideas totalmente análogas. Sea $0 < \sigma \leq \delta_1$ cualquiera. Puesto que (t_0, x_0) es el máximo de $u - \phi$ sobre $\mathcal{C}_{\delta_1,\delta_2}(t_0, x_0)$ se sigue que

$$u(t_0, x_0) - u(t, x) \geq \phi(t_0, x_0) - \phi(t, x), \quad \forall (t, x) \in (t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1) \times \mathrm{B}_{\delta_2}(x_0).$$

En particular tenemos que $u(t_0, x_0) - u(t, x_0) \geq \phi(t_0, x_0) - \phi(t, x_0)$ para todo $t \in (t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1)$, lo cual, juntamente con el hecho que $\sigma \leq \delta_1$, implica que

$$\begin{aligned} D^{\alpha}[t_0 - \delta_1, t_0 - \sigma](u(\cdot, x_0), t_0) &= c_{\alpha} \int_{t_0-\delta_1}^{t_0-\sigma} \frac{u(t_0, x_0) - u(t, x_0)}{(t_0 - t)^{1+\alpha}} dt \\ &\geq c_{\alpha} \int_{t_0-\delta_1}^{t_0-\sigma} \frac{\phi(t_0, x_0) - \phi(t, x_0)}{(t_0 - t)^{1+\alpha}} dt \\ &= D^{\alpha}[t_0 - \delta_1, t_0 - \sigma](\phi(\cdot, x_0), t_0). \end{aligned}$$

La anterior desigualdad nos permite concluir el resultado deseado ya que se verifica lo siguiente:

$$\begin{aligned} D^{\alpha}_{\sigma}[u, \phi, t_0, x_0] &= D^{\alpha}[t_0 - \sigma](u(\cdot, x_0), t_0) + D^{\alpha}[t_0 - \sigma, t_0](\phi(\cdot, x_0), t_0) \\ &= D^{\alpha}[t_0 - \delta_1](u(\cdot, x_0), t_0) + D^{\alpha}[t_0 - \delta_1, t_0 - \sigma](u(\cdot, x_0), t_0) \\ &\quad + D^{\alpha}[t_0 - \sigma, t_0](\phi(\cdot, x_0), t_0) \\ &\geq D^{\alpha}[t_0 - \delta_1](u(\cdot, x_0), t_0) + D^{\alpha}[t_0 - \delta_1, t_0 - \sigma](\phi(\cdot, x_0), t_0) \\ &\quad + D^{\alpha}[t_0 - \sigma, t_0](\phi(\cdot, x_0), t_0) \\ &= D^{\alpha}_{\delta_1}[u, \phi, t_0, x_0]. \end{aligned}$$

■

Lema 3.1.4. *La Definición 3.1.1 puede ser reformulada requiriendo que se verifiquen los siguientes puntos:*

i) $\delta_1 = \delta_2 = \delta$

ii) $0 < \delta_1 \le t_0$

Demostración: Mostraremos únicamente el caso que envuelve sub-soluciones ya que la demostración para el caso de súper-soluciones sigue líneas análogas.

Notemos que los requerimientos solicitados en este Lema envuelven casos particulares de la Definición 3.1.1, por tanto, la Definición 3.1.1 implica las nuevas definiciones de sub-solución dadas por las condiciones i) y ii) del presente Lema.

Mostremos ahora la otra implicación.

i) Sean $u : \bar{Q}_T \to \mathbb{R}$ una función s.c.s. y $\phi \in \mathrm{C}^1(\bar{Q}_T)$ tales que $u - \phi$ alcanza un máximo en $(t_0, x_0) \in Q_T$ sobre $\mathcal{C}_{\delta_1,\delta_2}(t_0, x_0)$ para ciertos $\delta_1, \delta_2 > 0$. Por tanto, al tomar $\delta < \min\{\delta_1, \delta_2\}$, es claro que $u - \phi$ alcanza un máximo en $(t_0, x_0) \in Q_T$ sobre $\mathcal{C}_\delta(t_0, x_0)$. Así, usando la variación de la definición de sub-solución viscosa dada por este caso, obtenemos que

$$D^\alpha_\delta[u, \phi, t_0, x_0] + H[u, \phi, t_0, x_0] \le 0.$$

Gracias a como hemos tomado $\delta > 0$, el Lema 3.1.3 permite concluir la desigualdad deseada, i.e., obtenemos que

$$D^\alpha_{\delta_1}[u, \phi, t_0, x_0] + H[u, \phi, t_0, x_0] \le 0.$$

ii) Sean $u : \bar{Q}_T \to \mathbb{R}$ una función s.c.s. y $\phi \in \mathrm{C}^1(\bar{Q}_T)$ tales que $u - \phi$ alcanza un máximo en $(t_0, x_0) \in Q_T$ sobre $\mathcal{C}_{\delta_1,\delta_2}(t_0, x_0)$ para ciertos $\delta_1, \delta_2 > 0$. En este punto se pueden dar dos casos: o $\delta_1 \le t_0$ o $\delta_1 > t_0$. La demostración para el primer caso es trivial. Ahora, si tenemos que $\delta_1 > t_0$, es claro que en particular $u - \phi$ alcanza un máximo en $(t_0, x_0) \in Q_T$ sobre $\mathcal{C}_{t_0,\delta_2}(t_0, x_0)$. Utilizando ahora la variación de la definición de sub-solución viscosa dada por este caso, tenemos que

$$D^\alpha_{t_0}[u, \phi, t_0, x_0] + H[u, \phi, t_0, x_0] \le 0.$$

Finalmente el resultado se obtiene tras utilizar el Lema 3.1.3. ■

Definición 3.1.5. Sea $u : \bar{Q}_T \to \mathbb{R}$. Diremos que u es sub-solución viscosa de (3.1.1) en el punto $(t_0, x_0) \in Q_T$ si u es s.c.s. y si para toda función test $\phi \in \mathrm{C}^1(\bar{Q}_T)$ acotada tal que (t_0, x_0) es el punto de máximo global de $u - \phi$ se verifica que

$$D^\alpha \phi(\cdot, x_0)(t_0) + H[\phi, t_0, x_0] \le 0.$$

Lema 3.1.6. *Las Definiciones 3.1.1 y 3.1.5 son equivalentes.*

Demostración: Sean $u : \bar{Q}_T \to \mathbb{R}$ una función s.c.s. y $\phi \in \mathrm{C}^1(\bar{Q}_T)$ tales que $u - \phi$ alcanza un máximo estricto en $(t_0, x_0) \in Q_T$ sobre $\mathcal{C}_\delta(t_0, x_0)$ para cierto $\delta > 0$. Sin pérdida de generalidad, supondremos que $u(t_0, x_0) = \phi(t_0, x_0)$. Se sabe que existen funciones $\mathrm{C}^1(\bar{Q}_T)$ acotadas tales que:

i) $\tilde{\phi}_n = \phi$ en $\mathcal{C}_\delta(t_0, x_0)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

ii) $\tilde{\phi}_n \to u$ cuando $n \to +\infty$ localmente uniformemente sobre $(\bar{\mathcal{C}}_\delta(t_0, x_0))^{\mathrm{c}}$.

iii) $\tilde{\phi}_n \geq u$ en $\bar{Q}_T$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Es claro de i) y iii) que para todo $n \in \mathbb{N}$, la función $u - \tilde{\phi}_n$ alcanza un máximo global en $(t_0, x_0) \in Q_T$. Usando la Definición 3.1.5 tenemos que

$$D^\alpha[\tilde{\phi}_n, t_0, x_0] + H[\tilde{\phi}_n, t_0, x_0] \leq 0. \tag{3.1.4}$$

Analicemos los términos de forma separada. En primer lugar podemos ver que

$$\begin{aligned}
D^\alpha[\tilde{\phi}_n, t_0, x_0] &= D^\alpha_\delta[\tilde{\phi}_n, \tilde{\phi}_n, t_0, x_0] \\
&= c_\alpha \int_{-\infty}^{t_0-\delta} \frac{\tilde{\phi}_n(t_0, x_0) - \tilde{\phi}_n(t, x_0)}{(t_0 - t)^{1+\alpha}} dt + c_\alpha \int_{t_0-\delta}^{t_0} \frac{\phi(t_0, x_0) - \phi(t, x_0)}{(t_0 - t)^{1+\alpha}} dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{u(t_0, x_0) - \tilde{\phi}_n(0, x_0)}{t_0^\alpha} + c_\alpha \int_0^{t_0-\delta} \frac{u(t_0, x_0) - \tilde{\phi}_n(t, x_0)}{(t_0 - t)^{1+\alpha}} dt \\
&\quad + c_\alpha \int_{t_0-\delta}^{t_0} \frac{\phi(t_0, x_0) - \phi(t, x_0)}{(t_0 - t)^{1+\alpha}} dt.
\end{aligned}$$

De ii) obtenemos la convergencia puntual y la existencia de $M > 0$ tal que $|\tilde{\phi}_n|_{[0, t_0-\delta]}| < M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de donde es posible la aplicación del Teorema de Convergencia Dominada en la expresión anterior, por tanto concluimos que $D^\alpha[\tilde{\phi}_n, t_0, x_0] \to D^\alpha_\delta[u, \phi, t_0, x_0]$ cuando $n \to +\infty$. Por otro lado, es claro que

$$\begin{aligned}
H[\tilde{\phi}_n, t_0, x_0] &= H(t_0, x_0, \tilde{\phi}_n(t_0, x_0), D\tilde{\phi}_n(t_0, x_0)) \\
&= H(t_0, x_0, u(t_0, x_0), D\phi_n(t_0, x_0)) \\
&= H[u, \phi, t_0, x_0].
\end{aligned}$$

Así, tomando el límite cuando $n \to +\infty$ en (3.1.4) llegamos al resultado deseado.

Para la otra implicación basta notar que la función test de la Definición 3.1.5 es un caso particular de la función test requerida en la Definición 3.1.1, por tanto, la demostración es inmediata notando que $-\phi(t,x_0) \leq -u(t,x_0)$ para todo $t \in (-\infty, t_0-\delta)$. ■

A continuación tenemos un resultado importante que se trata de lo que sucede cuando una sub-solución posee un buen comportamiento en la variable temporal, y este es ser Lipschitz continua en el tiempo.

Proposición 3.1.7. *Sea u una sub-solución de (3.1.3) en el punto $(t_0,x_0) \in Q_T$, acotada por $M>0$ tal que*

$$|u(t,x_0)-u(s,x_0)| \leq C|t-s|^{\alpha'} \quad \forall\ s,t \in (t_0-\delta', t_0+\delta')$$

para algunos $\alpha' \in (\alpha,1]$, $\delta'>0$ y $C>0$. Entonces la cantidad $D^\alpha u(\cdot,x_0)(t_0)$ dada por (2.4.1) está bien definida y es finita. Más aún, si existe una función test $\phi \in C^1(\bar{Q}_T)$ tal que (t_0,x_0) es el punto de máximo de $u-\phi$ en $\mathcal{C}_{\delta_1,\delta_2}(t_0,x_0)$ para algunos $\delta_1,\delta_2>0$, entonces

$$D^\alpha u(\cdot,x_0)(t_0) + H[u,\phi,t_0,x_0] \leq 0.$$

Demostración: Para mostrar la correcta definición de $D^\alpha u(\cdot,x_0)(t_0)$ basta notar que:

$$\begin{aligned}\int_0^{t_0} \frac{u(t_0,x_0)-u(t,x_0)}{(t_0-t)^{1+\alpha}}dt &\leq \int_0^{t_0-\delta'} \frac{|u(t_0,x_0)-u(t,x_0)|}{(t_0-t)^{1+\alpha}}dt + \int_{t_0-\delta'}^{t_0} \frac{|u(t_0,x_0)-u(t,x_0)|}{(t_0-t)^{1+\alpha}}dt \\ &\leq \int_0^{t_0-\delta'} \frac{2M}{(t_0-t)^{1+\alpha}}dt + C\int_{t_0-\delta'}^{t_0} \frac{1}{(t_0-t)^{1+\alpha-\alpha'}}dt < +\infty.\end{aligned}$$

Para la segunda parte, como u es sub-solución, las hipótesis nos permiten concluir que

$$D^\alpha_{\delta_1}[u,\phi,t_0,x_0] + H[u,\phi,t_0,x_0] \leq 0. \tag{3.1.5}$$

Notemos que

$$\begin{aligned}c_\alpha^{-1} D^\alpha[t_0-\delta_1,t_0](\phi(\cdot,x_0),t_0) &= \int_0^{t_0} \frac{\phi(t_0,x_0)-\phi(t,x_0)}{(t_0-t)^{1+\alpha}} \mathbb{1}_{(t_0-\delta_1,t_0)}(t)dt \\ &\leq \int_0^{t_0} \frac{|\phi(t_0,x_0)-\phi(t,x_0)|}{(t_0-t)^{1+\alpha}}dt.\end{aligned}$$

Como ϕ es suave, la última integral existe, y además es claro que la función de la primera integral converge a 0 cuando $\delta_1 \to 0$. Aplicando el Teorema de Convergencia Dominada tenemos que

$$D^\alpha[t_0-\delta_1,t_0](\phi(\cdot,x_0),t_0)) \to 0, \quad \text{cuando} \quad \delta_1 \to 0.$$

De manera análoga podemos ver que

$$D^{\alpha}[t_0-\delta_1](u(\cdot,x_0),t_0)\to D^{\alpha}u(\cdot,x_0)(t_0),\quad \text{cuando}\quad \delta_1\to 0.$$

Por tanto, tomando el límite cuando $\delta_1 \to 0$ en (3.1.5) logramos el resultado deseado. ■

3.2. Supremo de sub-soluciones

Para el abordaje de esta sección es necesario recordar las definiciones de envolvente s.c.s. y envolvente s.c.i. dadas en la Sección 1.3.

Definición 3.2.1. Diremos que una función $u:\bar{Q}_T\to\mathbb{R}$ es una sub-solución (resp. súper-solución) viscosa discontinua de (3.1.3) si u^* (resp. u_*) es una sub-solución (resp. súper-solución) viscosa de (3.1.3). Diremos que u es solución viscosa discontinua de (3.1.3) si es sub- y súper-solución discontinua a la vez.

Lema 3.2.2. *Sea A un conjunto de índices. Para cada $\alpha\in A$ supongamos que $u_\alpha\colon \bar{Q}_T\to\mathbb{R}$ es sub-solución viscosa discontinua de* (3.1.3)*. Definimos la función*

$$\begin{aligned} u\colon\ \bar{Q}_T &\longrightarrow \mathbb{R}\\ (t,x) &\longmapsto u(t,x)=\sup_{\alpha\in A}u_\alpha(t,x). \end{aligned}$$

Entonces u es una sub-solución viscosa discontinua de (3.1.3)*. Un resultado simétrico se obtiene para súper-soluciones reemplazando el supremo por el ínfimo.*

Demostración: Sea $\phi\in \mathrm{C}^1(\bar{Q}_T)$ tal que $u^*-\phi$ alcanza un máximo estricto en $\mathcal{C}_\delta(t_0,x_0)$ en el punto $(t_0,x_0)\in Q_T$ con $0<\delta<t_0$. Sea $\sigma\in(0,\delta/3)$ cualquiera. Es claro que (t_0,x_0) sigue siendo punto de máximo estricto en $\mathcal{C}_\sigma(t_0,x_0)$ de $u^*-\phi$. Usando argumentos estándar (ver la demostración del Lema 1.3.3) obtenemos lahttps://www.overleaf.com/project/6062972d716dbf285b50369a existencia de sucesiones $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $((s_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tales que:

i) $(u_n^*-\phi)(s_n,y_n)=\max\{(u_n^*-\phi)(t,x);(t,x)\in\mathcal{C}_\sigma(s_n,y_n)\}$.

ii) $(u_n^*)(s_n,y_n)\to u^*(t_0,x_0)$ cuando $n\to+\infty$.

iii) $(s_n,y_n)\to(t_0,x_0)$ cuando $n\to+\infty$.

Puesto que para cada $n \in \mathbb{N}$ sabemos que $(u_{\alpha_n})^*$ es sub-solución de (3.1.3) tenemos que

$$D^\alpha_\sigma[(u_{\alpha_n})^*, \phi, s_n, y_n] + H[(u_{\alpha_n})^*, \phi, s_n, y_n] \leq 0. \tag{3.2.6}$$

Gracias a que $\phi \in \mathrm{C}^1(\bar{Q}_T)$ y $s_n \to t_0$ podemos aplicar el Teorema de Convergencia Dominada, de modo que obtenemos

$$D^\alpha[s_n - \sigma, s_n](\phi(\cdot, y_n), s_n) \to D^\alpha[t_0 - \sigma, t_0](\phi(\cdot, x_0), t_0). \tag{3.2.7}$$

Por otro lado, recordando que $u^* \geq (u_{\alpha_n})^*$, tenemos que

$$\begin{aligned} c_\alpha^{-1} D^\alpha[s_n - \sigma]((u_{\alpha_n})^*(\cdot, y_n), s_n) = [(u_{\alpha_n})^*(y_n, s_n) - u^*(t_0, x_0)] \int_{-\infty}^{s_n - \sigma} \frac{1}{(s_n - t)^{1+\alpha}} dt \\ + \int_{-\infty}^{s_n - \sigma} \frac{u^*(t_0, x_0) - (u_{\alpha_n})^*(t, s_n)}{(s_n - t)^{1+\alpha}} dt \\ \geq o_n(1) \frac{\sigma^{-\alpha}}{\alpha} + \int_{-\infty}^{s_n - \sigma} \frac{u^*(t_0, x_0) - u^*(t, y_n)}{(s_n - t)^{1+\alpha}} dt. \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

Como $s_n \to t_0$, entonces sabemos que para todo $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande en términos de σ, se verifica que

$$s_n - \sigma \leq t_0 - \frac{\sigma}{2} \quad \text{y} \quad (s_n - t)^{1+\alpha} \geq \left[\left(t_0 - \frac{\sigma}{4}\right) - t\right]^{1+\alpha}, \ \forall\, t \in \left(-\infty, t_0 - \frac{\sigma}{2}\right).$$

Además, como u^* es acotada, es claro que

$$u^*(t, y_n) - u^*(t_0, x_0) \leq 2 \left\| u^* \right\|_\infty.$$

De lo anterior podemos concluir que

$$\frac{u^*(t_0, x_0) - u^*(y_n, t)}{(s_n - t)^{1+\alpha}} \mathbb{1}_{(-\infty, s_n - \sigma)}(t) \geq \frac{-2\left\| u^* \right\|_\infty}{\left[\left(t_0 - \frac{\sigma}{4}\right) - t\right]^{1+\alpha}} \mathbb{1}_{(-\infty, t_0 - \frac{\sigma}{2})}(t), \tag{3.2.9}$$

para todo $t \in (-\infty, t_0 - \sigma/2)$ donde la última función es integrable ya que $\sigma > 0$. De la ecuación (3.2.9) podemos ver que las hipótesis del Lema de Fatou en su versión dominada se cumplen, por tanto, usando iii) y el hecho que u es s.c.s. tenemos que

$$\begin{aligned} \liminf_{n \to +\infty} \int_{-\infty}^{s_n - \sigma} \frac{u^*(t_0, x_0) - u^*(t, y_n)}{(s_n - t)^{1+\alpha}} dt \geq \int_{-\infty}^{t_0 - \sigma} \liminf_{n \to +\infty} \frac{u^*(t_0, x_0) - u^*(t, y_n)}{(s_n - t)^{1+\alpha}} dt \\ \geq \int_{-\infty}^{t_0 - \sigma} \frac{u^*(t_0, x_0) + \liminf_{n \to +\infty}\{-u^*(t, y_n)\}}{\liminf_{n \to +\infty}(s_n - t)^{1+\alpha}} dt \\ \geq \int_{-\infty}^{t_0 - \sigma} \frac{u^*(t_0, x_0) - u^*(t, x_0)}{(t_0 - t)^{1+\alpha}} dt. \end{aligned} \tag{3.2.10}$$

Bajo un argumento de subsucesiones tenemos que en la ecuación (3.2.10) el límite inferior puede ser reemplazado por un límite. Usamos esta observación en conjunto con (3.2.7) y (3.2.8), para concluir que

$$\lim_{n\to+\infty} D_\sigma^\alpha[(u_{\alpha_n})^*, \phi, s_n, y_n] \geq D_\sigma^\alpha[u^*, \phi, t_0, x_0].$$

Usando la continuidad de H,ii), iii) y la suavidad de ϕ, es claro que

$$H[(u_{\alpha_n})^*, \phi, s_n, y_n] \to H[u^*, \phi, t_0, x_0].$$

Finalmente, podemos ver que al tomar el límite en (3.2.6), obtenemos que

$$D_\sigma^\alpha[u^*, \phi, t_0, x_0] + H[u^*, \phi, t_0, x_0] \leq 0.$$

Así, usando el Lema 3.1.3 obtenemos el resultado deseado ya que $\sigma < \delta$. ■

3.3. Método de Perron

Teorema 3.3.1. *Sean $u, v : \bar{Q}_T \to \mathbb{R}$ sub y súper soluciones acotadas de* (3.1.3) *respectivamente. Si $u \leq v$ sobre $\bar{Q}_T$, entonces existe $w : \bar{Q}_T \to \mathbb{R}$ solución viscosa discontinua de* (3.1.3) *tal que $u \leq w \leq v$ sobre $\bar{Q}_T$.*

Demostración: Consideremos el conjunto

$$\mathcal{G} := \left\{ z : \bar{Q}_T \to \mathbb{R} | z^* \text{ es sub-solución de (3.1.3) y } u \leq z \leq v \right\}.$$

Es claro que $u \in G$, luego G es no vacío. Definimos la función

$$\begin{aligned} w :\ \bar{Q}_T &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t,x) &\longmapsto w(t,x) = \sup_{z\in\mathcal{G}} z(t,x), \end{aligned}$$

y así del Lema 3.2.2 tenemos que w^* es sub-solución de (3.1.3) con $u \leq w^* \leq v$, lo cual muestra que $w \in G$. Mostremos que w_* es súper-solución. Supongamos por absurdo que w_* no es súper-solución. Usando la equivalencia de definiciones dada por el Lema 3.1.6, tenemos que existen $(t_0, x_0) \in Q_T$ y $\phi \in \mathrm{C}^1(\bar{Q}_T)$ acotada tales que $w_* - \phi$ alcanza un mínimo global en (t_0, x_0) sobre $\bar{Q}_T$ y verifican que

$$D^\alpha[\phi, t_0, x_0] + H[\phi, t_0, x_0] < 0,$$

o equivalentemente

$$D^\alpha[\phi, t_0, x_0] + H[\phi, t_0.x_0] < -\theta, \tag{3.3.11}$$

para algún $\theta > 0$.

De ser necesario, tras usar la linealidad de la derivada de Caputo y el hecho de que la derivada de Caputo de constantes es cero, sin pérdida de generalidad podemos asumir que $w_*(t_0, x_0) = \phi(t_0, x_0)$. Consideremos la función $z := z_{\delta,\epsilon}$ definida por

$$z(t,x) = \begin{cases} \max\{w(t,x), \phi(t,x) + \epsilon\} & \text{si } (t,x) \in \mathcal{C}_\delta(t_0, x_0), \\ \\ w(t,x) & \text{si } (t,x) \in \mathcal{C}_\delta^c(t_0, x_0), \end{cases}$$

y hallemos valores de $\epsilon, \delta > 0$ tales que $z \in G$ de modo que $z > w$ en algún punto de $\bar{Q}_T$.

i) Mostremos que $w_*(t_0, x_0) < v(t_0, x_0)$. Supongamos por absurdo que $w_*(t_0, x_0) \geq v(t_0, x_0)$. Así, como $w_* \leq v$ y v es s.c.i. se tiene que $w_*(t_0, x_0) \leq v(t_0, x_0)$ y por tanto $w_*(t_0, x_0) = v(t_0, x_0)$. Notemos que la anterior igualdad permite ver que

$$(v - \phi)(t_0, x_0) = (w_* - \phi)(t_0, x_0) \leq (w_* - \phi)(t, x) \leq (v - \phi)(t, x), \quad \forall\ (t, x) \in \bar{Q}_T,$$

i.e., $v - \phi$ alcanza un mínimo global en (t_0, x_0). Como v es súper-solución, según la Definición 3.1.5 tenemos que

$$D^\alpha[\phi, t_0, x_0] + H[\phi, t_0, x_0] \geq 0,$$

lo cual contradice (3.3.11). Tomando $\epsilon_1 = \{v(t_0, x_0) - \phi(t_0, x_0)\}/4$, de la semicontinuidad inferior de v y la continuidad de ϕ tenemos que existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$\phi(t, x) < v(t, x) - \epsilon_1, \quad \forall\ (t, x) \in C_{\delta_1}(t_0, x_0).$$

ii) Dado que $w_* - \phi$ alcanza un mínimo global estricto en $(t_0, x_0) \in Q_T$ tenemos que, en particular,

$$(w_* - \phi)(t, x) > (w_* - \phi)(t_0, x_0), \quad \forall\ (t, x) \in \mathcal{C}_{\delta_1} \setminus \{(t_0, x_0)\}.$$

Como $w_* - \phi$ es s.c.i., luego su restricción al compacto $\partial\mathcal{C}_{\delta_1}$ alcanza un mínimo; denotando a este mínimo por $\hat{m} := \min\{w_* - \phi; \partial\mathcal{C}_{\delta_1}(t_0, x_0)\} > 0$ y luego tomando $\epsilon_2 = \hat{m}/2$ obtenemos que

$$(w_* - \phi)(t, x) > \epsilon_2, \quad \forall\ (t, x) \in \partial\mathcal{C}_{\delta_1}(t_0, x_0).$$

iii) Notemos que la función $(t, x) \mapsto D^\alpha\phi(\cdot, x)(t)$ es continua gracias a la suavidad de ϕ y posteriormente a la aplicación del Teorema de Convergencia Dominada. Luego, la aplicación

$$\begin{aligned} F\colon [0,T] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N =: M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, x, u, p) &\longmapsto F(t, x, u, p) = D^\alpha(\cdot, x)(t) + H(t, x, u, p) \end{aligned}$$

es continua en el punto $m_0 = (t_0, x_0, \phi(t_0, x_0), D\phi(t_0, x_0))$ gracias a la continuidad del Hamiltoniano H. Por tanto, gracias a (3.3.11) tenemos que existe $r_0 > 0$ tal que

$$F(t, x, u, p) < -\theta/2, \quad \forall (t, x, u, p) \in B_{r_0}(m_0),$$

donde sobreentendemos que $B_{r_0}(m_0) \subset M$ denota la bola de centro $m_0 \in M$ y radio r_0. Lo anterior es equivalente a verificar que

$$(t, x) \in \mathcal{C}_{r_0}(t_0, x_0), u \in B_{r_0}(\phi(t_0, x_0)), p \in B_{r_0}(D\phi(t_0, x_0)),$$

donde las bolas deben ser consideradas en sus respectivos espacios métricos que componen a M. Usando la continuidad de ϕ y $D\phi$ en $(t_0, x_0) \in Q_T$, sabemos existen $r_1, r_2 > 0$ respectivamente tales que

- $\phi(t, x) \in B_{r_0/4}(\phi(t_0, x_0)), \quad \forall (t, x) \in \mathcal{C}_{r_1}(t_0, x_0)$
- $D\phi(t, x) \in B_{r_0}(D\phi(t_0, x_0)), \quad \forall (t, x) \in \mathcal{C}_{r_2}(t_0, x_0)$

El primero de estos puntos implica que tomando $\epsilon_3 = r_0/4$ se verifica que

$$\phi(t, x) + \epsilon_3 \in B_{r_0}(\phi(t_0, x_0)), \quad \forall (t, x) \in \mathcal{C}_{r_1}(t_0, x_0).$$

Es claro que tomando $\delta_2 = \text{mín}\{r_0, r_1.r_2\} > 0$, tenemos que

$$D^\alpha \phi(\cdot, x)(t) + H(t, x, \phi(t, x) + \epsilon_3, D\phi(t_0, x_0)) \leq -\theta/2, \quad \forall\ (t, x) \in \mathcal{C}_{\delta_2}(t_0, x_0).$$

Los literales i), ii) y iii) nos ayudan a concluir que para $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ y $\epsilon \in (0, \text{mín}\{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\})$ se verifica que

$$\phi(t, x) + \epsilon < v(t, x), \quad \forall\ (t, x) \in \mathcal{C}_\delta(t_0, x_0) \tag{3.3.12}$$

$$w_*(t, x) > \phi(t, x) + \epsilon, \quad \forall\ (t, x) \in \partial\mathcal{C}_\delta(t_0, x_0) \tag{3.3.13}$$

$$-\theta/2 \geq D^\alpha \phi(\cdot, x)(t) + H(t, x, \phi(t, x) + \epsilon, D\phi(t_0, x_0)), \quad \forall\ (t, x) \in \mathcal{C}_\delta(t_0, x_0) \tag{3.3.14}$$

Mostremos que estos valores para δ y ϵ son tales que $z \in \mathcal{G}$. Por definición de z se sigue que $w \leq z$. También $u \leq w$ y por tanto $u \leq z$. Por otro lado $w \leq v$, y usando (3.3.12) tenemos que $\phi + \epsilon \leq v$ sobre $\mathcal{C}_\delta(t_0, x_0)$, lo que implica que $z \leq v$. Esto muestra que $u \leq z \leq v$. Mostremos ahora que z es sub-solución discontinua de (3.1.3).

Sean $\varphi \in \mathrm{C}^1(\bar{Q}_T)$ y $(\hat{t}_0, \hat{x}_0) \in Q_T$ cualesquiera, tales que $(\hat{t}_0, \hat{x}_0)$ es el punto de máximo estricto de $z^* - \varphi$ sobre $\mathcal{C}_{\hat{\delta}}(\hat{t}_0, \hat{x}_0)$, i.e.,

$$(z^* - \varphi)(\hat{t}_0, \hat{x}_0) \geq (z^* - \varphi)(t, x), \quad \forall (t, x) \in \mathcal{C}_{\hat{\delta}}(\hat{t}_0, \hat{x}_0), \tag{3.3.15}$$

con $0 < \hat{\delta} < \hat{t}_0$. Además, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $z^*(\hat{t}_0, \hat{x}_0) = \varphi(\hat{t}_0, \hat{x}_0)$. Como $w \leq z$, entonces necesariamente $w^*(\hat{t}_0, \hat{x}_0) \leq z^*(\hat{t}_0, \hat{x}_0)$. Estudiemos estas posibilidades en dos casos.

Caso 1. $w^*(\hat{t}_0, \hat{x}_0) = z^*(\hat{t}_0, \hat{x}_0)$

Es claro que para todo $(t, x) \in \mathcal{C}_{\hat{\delta}}(\hat{t}_0, \hat{x}_0)$ se verifica que

$$(w^* - \varphi)(\hat{t}_0, \hat{x}_0) = (z^* - \varphi)(\hat{t}_0, \hat{x}_0) \geq (z^* - \varphi)(t, x) \geq (w^* - \varphi)(t, x),$$

lo cual muestra que $w^* - \varphi$ alcanza un máximo en $\mathcal{C}_{\hat{\delta}}(\hat{t}_0, \hat{x}_0)$ en el punto $(\hat{t}_0, \hat{x}_0)$. Así, como w^* es sub-solución, se sigue que

$$D^{\alpha}_{\hat{\delta}}[w^*, \phi, \hat{t}_0, \hat{x}_0] + H[w^*, \phi, \hat{t}_0, \hat{x}_0] \leq 0. \tag{3.3.16}$$

Además, como $w^* \leq z^*$ tenemos que $D^{\alpha}_{\hat{\delta}}[w^*, \phi, \hat{t}_0, \hat{x}_0] \geq D^{\alpha}_{\hat{\delta}}[z^*, \phi, \hat{t}_0, \hat{x}_0]$. Esto junto con (3.3.16) muestra que z^* es sub-solución.

Caso 2. $w^*(\hat{t}_0, \hat{x}_0) < z^*(\hat{t}_0, \hat{x}_0)$

En este caso (3.3.13) nos dice que necesariamente se debe cumplir que $(\hat{t}_0, \hat{x}_0) \in \mathcal{C}_{\delta}(t_0, x_0)$, y por tanto tenemos que $z^*(\hat{t}_0, \hat{x}_0) = \phi(\hat{t}_0, \hat{x}_0) + \epsilon$. Ya que $(\hat{t}_0, \hat{x}_0) \in \mathcal{C}_{\delta}(t_0, x_0)$ podemos asumir que $\hat{\delta}$, además de verificar (3.3.15), también cumple con $\mathcal{C}_{\hat{\delta}}(\hat{t}_0, \hat{x}_0) \subset \mathcal{C}_{\delta}(t_0, x_0)$, y así se sigue que para todo $(t, x) \in \mathcal{C}_{\hat{\delta}}(\hat{t}_0, \hat{x}_0)$

$$(\phi - \varphi)(\hat{t}_0, \hat{x}_0) + \epsilon = (z^* - \varphi)(\hat{t}_0, \hat{x}_0) \geq (z^* - \varphi)(t, x) \geq (\phi - \varphi)(t, x) + \epsilon,$$

y gracias a las condiciones necesarias de optimalidad se tiene que $D\phi(\hat{t}_0, \hat{x}_0) = D\varphi(\hat{t}_0, \hat{x}_0)$. Además, es claro que $\varphi(\hat{t}_0, \hat{x}_0) = \phi(\hat{t}_0, \hat{x}_0) + \epsilon$. Esto permite entonces concluir que

$$H(\hat{t}_0, \hat{x}_0, z^*(\hat{t}_0, \hat{x}_0), D\varphi(\hat{t}_0, \hat{x}_0)) = H(\hat{t}_0, \hat{x}_0, \phi(\hat{t}_0, \hat{x}_0) + \epsilon, D\phi(\hat{t}_0, \hat{x}_0)). \tag{3.3.17}$$

Recordemos que $w_* - \phi$ alcaza un mínimo global en $\bar{Q}_T$, cuyo mínimo es cero; por tanto podemos concluir que $\phi \leq z^*$. Con ello observamos que

$$
\begin{aligned}
c_\alpha^{-1} D_{\hat{\delta}}^\alpha[z^*, \varphi, \hat{t}_0, \hat{x}_0)] &= \int_{-\infty}^{\hat{t}_0-\hat{\delta}} \frac{z^*(\hat{t}_0, \hat{x_0}) - z^*(t, \hat{x}_0)}{(\hat{t}_0 - t)^{1+\alpha}} dt + \int_{\hat{t}_0-\hat{\delta}}^{\hat{t}_0} \frac{\varphi(\hat{t}_0, \hat{x}_0) - \varphi(t, \hat{x}_0)}{(\hat{t}_0 - t)^{1+\alpha}} dt \\
&\leq \int_{-\infty}^{\hat{t}_0-\hat{\delta}} \frac{\phi(\hat{t}_0, \hat{x}_0) + \epsilon - \phi(t, \hat{x}_0)}{(\hat{t}_0 - t)^{1+\alpha}} dt \\
&\quad + \int_{\hat{t}_0-\hat{\delta}}^{\hat{t}_0} \frac{\phi(\hat{t}_0, \hat{x}_0) - \phi(t, \hat{x}_0) - [\phi(t, \hat{x}_0) + \epsilon]}{(\hat{t}_0 - t)^{1+\alpha}} dt \\
&= c_\alpha^{-1} D\phi(\cdot, \hat{x}_0)(\hat{t}_0) + \epsilon \frac{1}{\alpha \delta'^\alpha},
\end{aligned}
$$

y en consecuencia

$$
D_{\hat{\delta}}^\alpha[z^*, \varphi, \hat{t}_0, \hat{x}_0)] \leq D\phi(\cdot, \hat{x}_0)(\hat{t}_0) + c_\alpha \epsilon \frac{1}{\alpha \delta'^\alpha}. \tag{3.3.18}
$$

Tomamos $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño de modo que $-\theta/2 + c_\alpha \alpha^{-1} \epsilon \delta'^{-\alpha} \leq 0$, y así conseguimos que z^* sea sub-solución tras utilizar (3.3.14), (3.3.17) y (3.3.18).

Vemos que en ambos casos llegamos a que $z \in \mathcal{G}$. Finalmente, el hecho de que $z > w$ se sigue usando la definición de w^* cerca a (t_0, x_0) y la positividad de ϵ (ver la demostración del Lema 1.3.3). Pero esto es un absurdo por la definición de w. Así hemos mostrado que necesariamente w_* es súper-solución, lo cual concluye la demostración. ∎

3.4. Principio de comparación

Ahora veremos un resultado que nos permitirá garantizar la existencia de soluciones del problema (3.1.3). Este resultado es conocido como el Principio de comparación y para su demostración necesitaremos las siguientes hipótesis:

(H1) Existe $\kappa > 0$ para todo $u, v \in \mathbb{R}$ y para todo $(t, x, p) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ tal que, si $u \geq v$ entonces

$$
H(t, x, u, p) - H(t, x, v, p) \geq \kappa(u - v).
$$

(H2) Para todo $R > 0$ y $T > 0$, existen módulos de continuidad $\omega, \omega_{R,T}$ tales que para todo $\gamma > 0$, $|x|, |y| \leq R$; $|u| \leq R$ y para todo $s, t \in [0, T]$; si $s(\beta) \to 0$ cuando $\beta \to 0$ entonces

$$
H(s, y, u, p + s(\beta)) - H(t, x, u, p) \leq \omega(\beta) + \omega_{R,T}((1 + |p|)(|x - y| + |s - t|)),
$$

con $p = (x-y)/\gamma$.

Lema 3.4.1. *Sea* $u\colon \bar{Q}_T \to \mathbb{R}$ *sub-solución de* (3.1.3). *Para cada* $\eta > 0$ *definimos la función*

$$\begin{aligned} u_\eta\colon \ \bar{Q}_T &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t,x) &\longmapsto u_\eta(t,x) = u(t,x) - \eta t^\alpha \end{aligned}.$$

Entonces se verifica que u_η *es subsolución de*

$$D^\alpha u + F(t,x,u,Du) + \tilde{c}_\alpha \eta = 0 \quad en \quad \bar{Q}_T, \tag{3.4.19}$$

para cierta constante $\tilde{c}_\alpha > 0$ *no dependiente de* η.

Demostración: Sean $(t_0,x_0) \in Q_T$ y $\varphi \in \mathrm{C}^1(\bar{Q}_T)$ tales que $u_\eta - \varphi$ alcanza un máximo en (t_0,x_0) sobre $\mathcal{C}_\delta(t_0,x_0)$, con $0 < \delta < t_0$. Esto implica que

$$u(t_0,x_0) - \phi(t_0,x_0) \geq u(t,x) - \phi(t,x), \quad \forall (t,x) \in \mathcal{C}_\delta(t_0,x_0),$$

donde $\phi(t,x) = \eta t^\alpha + \varphi(t,x)$. Es claro entonces que $u - \phi$ alcanza un máximo en $(t_0,x_0) \in Q_T$ sobre $\mathcal{C}_\delta(t_0,x_0)$ con $\phi \in \mathrm{C}^1(\bar{Q}_T)$. Como u es sub-solución luego se verifica la siguiente desigualdad:

$$D^\alpha_\delta[u,\phi,t_0,x_0] + H[u,\phi,t_0,x_0] \leq 0. \tag{3.4.20}$$

Usando propiedades de la derivada de Caputo tenemos que

$$\begin{aligned} D^\alpha u_\eta(t,x) &= D^\alpha u(t,x) - D^\alpha(\eta t^\alpha) \\ &= D^\alpha u(t,x) - \eta D^\alpha(t^\alpha) \\ &= D^\alpha u(t,x) - \eta \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-\alpha+1)} t^{\alpha-\alpha} \\ &= D^\alpha u(t,x) - \eta \tilde{c}_\alpha, \end{aligned}$$

y con ello podemos concluir que

$$\begin{aligned} D^\alpha_\delta[u,\phi,t_0,x_0] &= D^\alpha[t_0-\delta](u(\cdot,x_0),t_0) + D^\alpha[t_0-\delta,t_0](\phi(\cdot,x_0),t_0) \\ &\quad - D^\alpha[t_0-\delta](\eta\cdot,t_0) + D^\alpha[t_0-\delta](\eta\cdot,t_0) \\ &= D^\alpha[t_0-\delta](u_\eta(\cdot,x_0),t_0) + D^\alpha[t_0-\delta](\eta\cdot,t_0) \\ &\quad + D^\alpha[t_0-\delta,t_0](\varphi(\cdot,x_0),t_0) + D^\alpha[t_0-\delta](\eta\cdot,t_0) \\ &= D^\alpha[t_0-\delta](u_\eta(\cdot,x_0),t_0) + D^\alpha[t_0-\delta,t_0](\phi(\cdot,x_0),t_0) + \eta\tilde{c}_\alpha \\ &= D^\alpha_\delta[u_\eta,\varphi,t_0,x_0] + \eta\tilde{c}_\alpha. \end{aligned} \tag{3.4.21}$$

Vemos que $Du_\eta(t_0,x_0) = Du(t_0,x_0)$; además, como $u(t_0,x_0) \geq u(t_0,x_0) - \eta t_0^\alpha$, la hipótesis **(H1)** implica que

$$\begin{aligned} H(t_0,x_0,u(t_0,x_0),Du(t_0,x_0)) &\geq H(t_0,x_0,u(t_0,x_0)-\eta t_0^\alpha, D\phi(t_0,x_0)) \\ &= H(t_0,x_0,u_\eta(t_0,x_0),D\varphi(t_0,x_0)). \end{aligned} \tag{3.4.22}$$

Así, aplicando (3.4.21) y (3.4.22) sobre (3.4.20) la demostración concluye. ■

A continuación presentamos el resultado principal de esta sección.

Teorema 3.4.2 (Principio de comparación)**.** *Supongamos que se verifican las hipótesis **(H1)-(H2)**. Sean* $u\colon \bar{Q}_T \to \mathbb{R}$ *y* $v\colon \bar{Q}_T \to \mathbb{R}$ *sub-solución y súper-solución acotadas de* (3.1.3) *respectivamente, tales que* $u(0,x) \leq v(0,x)$ *para todo* $x \in \mathbb{R}^N$*, entonces* $u \leq v$ *en* $\bar{Q}_T$*.*

Demostración: Supongamos, por absurdo, que existe $(\tilde{t},\tilde{x}) \in \bar{Q}_T$ tal que $u(\tilde{t},\tilde{x}) - v(\tilde{t},\tilde{x}) > 0$. Tomando $\eta_0 > 0$ suficientemente pequeño vemos que para todo $\eta \leq \eta_0$ se verifica que $u(\tilde{t},\tilde{x}) - \eta\tilde{t}^\alpha - v(\tilde{t},\tilde{x}) > 0$ y por tanto tenemos que

$$\sup_{(t,x)\in\bar{Q}_T} \{u_\eta(t,x) - v(t,x)\} := \theta > 0.$$

Para fines de localización, consideremos una función $\psi \in \mathrm{C}^1_b(\mathbb{R}^N)$ tal que $\psi = 0$ en B_1 y $\psi \geq \|u_\eta\|_\infty + \|v\|_\infty + 1$ en B_2^c. Definamos la familia de funciones $(\psi_\beta)_{\beta>0}$ de modo que para cada $\beta > 0$ se tiene

$$\begin{aligned} \psi_\beta\colon\ \bar{Q}_T &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t,x) &\longmapsto \psi_\beta(t,x) = \psi(\beta x). \end{aligned}$$

Por propiedades del supremo sabemos que existe $(\hat{t},\hat{x}) \in \bar{Q}_T$ tal que $u_\eta(\hat{t},\hat{x}) - v(\hat{t},\hat{x}) \geq \theta/2$. Sea $\beta_0 > 0$ suficientemente pequeño tal que $\psi_\beta(\hat{x}) = 0$ para todo $0 < \beta \leq \beta_0$, de donde $u_\eta(\hat{t},\hat{x}) - v(\hat{t},\hat{x}) - \psi_\beta(\hat{x}) \geq \theta/2 >$

0. Por otro lado, notemos que para $(t,x) \in [0,T] \times B^c_{2/\beta}$ se verifica que $\psi_\beta(x) \geq \theta + 1$, y en consecuencia $u_\eta(t,x) - v(t,x) - \psi_\beta(x) \leq \theta - (\theta+1) = -1 < 0$. Esto nos permite concluir que $u_\eta - v - \psi$ alcanza un máximo global de modo que

$$\max_{(t,x)\in \bar{Q}_T} \{u_\eta(t,x) - v(t,x) - \psi(x)\} := \tilde{\theta} = \tilde{\theta}(\beta) \geq \frac{\theta}{2} > 0, \tag{3.4.23}$$

donde dicho máximo se alcanza en cierto $(t^*, x^*) \in (0,T] \times B_{2/\beta}$. Realizamos ahora un doblamiento de variables. Definimos la función

$$\begin{aligned} \xi_{\gamma,\epsilon} \colon [0,T] \times [0,T] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t,s,x,y) &\longmapsto \xi_{\gamma,\epsilon}(t,s,x,y) \end{aligned}$$

donde

$$\xi_{\gamma,\epsilon}(t,s,x,y) = u_\eta(t,x) - v(s,y) - \psi_\beta(y) - \frac{|x-y|^2}{2\gamma} - \frac{|t-s|^2}{2\epsilon}.$$

Gracias a la definición de $\xi_{\gamma,\epsilon}$ y a (3.4.23) tenemos que la función $\xi_{\gamma,\epsilon}$ alcanza un máximo en su dominio, i.e., existe $(\bar{t}, \bar{s}, \bar{x}, \bar{y}) := (t_{\gamma,\epsilon}, s_{\gamma,\epsilon}, x_{\gamma,\epsilon}, y_{\gamma,\epsilon}) \in [0,T] \times [0,T] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ tal que

$$\max_{(t,s,x,y)\in[0,T]\times[0,T]\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} \{\xi_{\gamma,\epsilon}(t,s,x,y)\} = \xi_{\gamma,\epsilon}(\bar{t},\bar{s},\bar{x},\bar{y}) := \tilde{\theta}_{\gamma,\epsilon} \geq \tilde{\theta} > 0, \tag{3.4.24}$$

donde claramente $\bar{y} \in B_{2/\beta}$ por la definición de ψ.

Utilizando la maximalidad de la función $\xi_{\gamma,\epsilon}$ podemos concluir que

$$\frac{|\bar{x}-\bar{y}|^2}{2\gamma} - \frac{|\bar{t}-\bar{s}|^2}{2\epsilon} \leq \|u_\eta\|_\infty + \|v\|_\infty + \|\psi\|_\infty,$$

lo cual implica que

$$|\bar{x}-\bar{y}|^2 \leq C\gamma \quad \text{y} \quad |\bar{t}-\bar{s}|^2 \leq C\epsilon.$$

Como vimos, el término de localización ψ_β hace que $\bar{x}, \bar{y} \in B_{2/\beta}$ para $\epsilon, \gamma > 0$ suficientemente pequeños. Luego, a través de un argumento de subsucesiones, sabemos que existe $(t', x') \in \bar{Q}_T$ tal que $\bar{t}, \bar{s} \to t'$ y $\bar{x}, \bar{y} \to x'$ cuando $\epsilon, \gamma \to 0$. Tenemos también que al usar la semicontinuidad de u_η y (3.4.23), argumentos de viscosidad estándar implican que

$$\lim_{\gamma\to 0} \limsup_{\epsilon\to 0} \frac{|\bar{x}-\bar{y}|^2}{\gamma} = 0. \tag{3.4.25}$$

A continuación consideremos las siguientes funciones, las cuales son $\mathrm{C}^1(\bar{Q}_T)$:

$$\begin{aligned} \phi_1(t,x) &= v(\bar{s},\bar{y}) + \psi_\beta(\bar{y}) + \frac{|x-\bar{y}|^2}{2\gamma} + \frac{|t-\bar{s}|^2}{2\epsilon}, \quad \forall (t,x) \in \bar{Q}_T \\ \phi_2(s,y) &= u_\eta(\bar{t},\bar{x}) - \psi(y) - \frac{|\bar{x}-y|^2}{2\gamma} - \frac{|\bar{t}-s|^2}{2\epsilon}, \quad \forall (s,y) \in \bar{Q}_T. \end{aligned}$$

Notemos que $u_\eta - \phi_1$ alcanza un máximo global en $(\bar{t}, \bar{x}) \in Q_T$ gracias a (3.4.24). Recordando que u_η es sub-solución del problema (3.4.19) gracias al Lema 3.4.1 y a la suavidad de ϕ_1 tenemos que para cualquier $\delta \in (0, \min\{\bar{t}, \bar{s}\})$

$$D^\alpha_\delta[u_\eta, \phi_1, \bar{t}, \bar{x}] + H[u_\eta, \phi_1, \bar{t}, \bar{x}] \leq -\tilde{c}_\alpha \eta. \tag{3.4.26}$$

Razonando análogamente vemos que $v - \phi_2$ alcanza un mínimo global en $(\bar{s}, \bar{y})$ y ya que v es súper-solución de (3.1.3) obtenemos que para cualquier $\delta \in (0, \min\{\bar{t}, \bar{s}\})$

$$D^\alpha_\delta[v, \phi_2, \bar{s}, \bar{y}] + H[v, \phi_2, \bar{s}, \bar{y}] \geq 0. \tag{3.4.27}$$

Sustrayendo (3.4.26) de (3.4.27) y desarrollando las expresiones concluimos que

$$\tilde{c}_\alpha \eta \leq A_1 + A_2 + B, \tag{3.4.28}$$

donde

$$A_1 = D^\alpha[\bar{s} - \delta, \bar{s}](\phi_2(\cdot, \bar{y}), \bar{s}) - D^\alpha[\bar{t} - \delta, \bar{t}](\phi_1(\cdot, \bar{x}), \bar{t}),$$

$$A_2 = D^\alpha[\bar{s} - \delta](v(\cdot, \bar{y}), \bar{s}) - D^\alpha[\bar{t} - \delta](u_\eta(\cdot, \bar{x}), \bar{t}),$$

$$B = H(\bar{s}, \bar{y}, v(\bar{s}, \bar{y}), \bar{p} - D\psi_\beta(\bar{y})) - H(\bar{t}, \bar{x}, u_\eta(\bar{t}, \bar{x}), \bar{p}).$$

Nos enfocamos ahora en la estimación de cada uno de los términos anteriores.

Tomemos la función $\tau \mapsto |\bar{t} - \tau|^2$. Esta función es diferenciable en todo $\mathbb{R}$, por tanto del Teorema del valor medio tenemos que existe $\tilde{\tau}_1$ entre $\bar{s}$ y τ tal que

$$|\bar{t} - \bar{s}|^2 - |\bar{t} - \tau|^2 = 2(\tilde{\tau}_1 - \bar{t})(\bar{s} - \tau).$$

De forma análoga, si consideramos la función $\tau \mapsto |\tau - \bar{s}|^2$ tenemos la existencia de un $\tilde{\tau}_2$ entre $\bar{t}$ y τ tal que

$$|\bar{t} - \bar{s}|^2 - |\tau - \bar{s}|^2 = 2(\tilde{\tau} - \bar{s})(\bar{t} - \tau).$$

Usando las anteriores igualdades podemos estimar A_1 como sigue:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \int_{\bar{s}-\delta}^{\bar{s}} \frac{\phi_2(\bar{s},\bar{y})-\phi_2(\tau,\bar{y})}{(\bar{s}-\tau)^{1+\alpha}}d\tau - \int_{\bar{t}-\delta}^{\bar{t}} \frac{\phi_1(\bar{t},\bar{x})-\phi_1(\tau,\bar{x})}{(\bar{t}-\tau)^{1+\alpha}}d\tau \\
&= -\frac{1}{2\epsilon}\int_{\bar{s}-\delta}^{\bar{s}} \frac{|\bar{t}-\bar{s}|^2-|\bar{t}-\tau|^2}{(\bar{s}-\tau)^{1+\alpha}}d\tau - \frac{1}{2\epsilon}\int_{\bar{t}-\delta}^{\bar{t}} \frac{|\bar{t}-\bar{s}|^2-|\tau-\bar{s}|^2}{(\bar{t}-\tau)^{1+\alpha}}d\tau \\
&= \frac{1}{\epsilon}\int_{\bar{s}-\delta}^{\bar{s}} \frac{(\bar{t}-\tilde{\tau}_1)(\bar{s}-\tau)}{(\bar{s}-\tau)^{1+\alpha}}d\tau + \frac{1}{\epsilon}\int_{\bar{t}-\delta}^{\bar{t}} \frac{(\bar{s}-\tilde{\tau}_2)(\bar{t}-\tau)}{(\bar{t}-\tau)^{1+\alpha}}d\tau \\
&\leq \frac{2T}{\epsilon}\left[\int_{\bar{s}-\delta}^{\bar{s}} (\bar{s}-\tau)^{-\alpha}d\tau + \int_{\bar{t}-\delta}^{\bar{t}} (\bar{t}-\tau)^{-\alpha}d\tau\right] \\
&= \frac{2T}{1-\alpha}\epsilon^{-1}\delta^{1-\alpha}.
\end{aligned}$$

Ahora nos enfocamos en la estimación del término A_2. Para esto consideramos el cambio de variable $\bar{s}-\tau = z$, y así obtenemos la igualdad

$$\begin{aligned}
c_\alpha^{-1} D^\alpha[\bar{s}-\delta](v(\cdot,\bar{y}),\bar{s}) &= \int_{-\infty}^{\bar{s}-\delta} \frac{v(\bar{s},\bar{y})-v(\tau,\bar{y})}{(\bar{s}-\tau)^{1+\alpha}}d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{0} \frac{v(\bar{s},\bar{y})-v(\tau,\bar{y})}{(\bar{s}-\tau)^{1+\alpha}}d\tau + \int_{0}^{\bar{s}-\delta} \frac{v(\bar{s},\bar{y})-v(\tau,\bar{y})}{(\bar{s}-\tau)^{1+\alpha}}d\tau \\
&= [v(\bar{s},\bar{y})-v(0,\bar{y})]\frac{1}{\alpha(\bar{s})^\alpha} + \int_{\delta}^{\bar{s}} \frac{v(\bar{s},\bar{y})-v(\bar{s}-z,\bar{y})}{z^{1+\alpha}}dz.
\end{aligned}$$

De manera similar, considerando el cambio de variable $\bar{t}-\tau = z$, obtenemos que

$$c_\alpha^{-1} D^\alpha[\bar{t}-\delta](u_\eta(\cdot,\bar{x}),\bar{t}) = [u_\eta(\bar{t},\bar{x})-u_\eta(0,\bar{x})]\frac{1}{\alpha(\bar{t})^\alpha} + \int_{\delta}^{\bar{t}} \frac{u_\eta(\bar{t},\bar{x})-u_\eta(\bar{t}-z,\bar{x})}{z^{1+\alpha}}dz.$$

De la condición de maximalidad dada en (3.4.24) se sigue que

$$\begin{aligned}
&v(\bar{s},\bar{y})-v(0,\bar{y}) \leq u_\eta(\bar{t},\bar{x})-u_\eta(0,\bar{x}) \quad \text{y} \\
&v(\bar{s},\bar{y})-u_\eta(\bar{t},\bar{x}) \leq v(\bar{s}-z,\bar{y})-u_\eta(\bar{t}-z,\bar{x}), \quad \forall z \in (\delta, \text{mín}\{\bar{t},\bar{s}\}).
\end{aligned}$$

Con esta información ahora podemos ver que

$$
\begin{aligned}
c_\alpha^{-1}A_2 = &\frac{1}{\alpha}\left\{\left[v(\bar s,\bar y)-v(0,\bar y)\right](\bar s)^{-1}-\left[u_\eta(\bar t,\bar x)-u_\eta(0,\bar x)\right](\bar t)^{-1}\right\}\\
&+\int_\delta^{\min\{\bar t,\bar s\}}\frac{[v(\bar s,\bar y)-u_\eta(\bar t,\bar x)]-[v(\bar s-z,\bar y)-u_\eta(\bar t-z,\bar x)]}{z^{1+\alpha}}dz\\
&+\int_{\min\{\bar t,\bar s\}}^{\max\{\bar t,\bar s\}}\frac{[v(\bar s,\bar y)-u_\eta(\bar t,\bar x)]-[v(\bar s-z,\bar y)-u_\eta(\bar t-z,\bar x)]}{z^{1+\alpha}}dz\\
\le&\frac{1}{\alpha}((\bar s)^{-1}-(\bar t)^{-1})[u_\eta(\bar t,\bar x)-u_\eta(0,\bar x)]+\int_\delta^{\min\{\bar s,\bar t\}}\frac{0}{z^{1+\alpha}}dz\\
&+2(\|u_\eta\|_\infty+\|v\|_\infty)\int_{\min\{\bar s,\bar t\}}^{\max\{\bar s,\bar t\}}\frac{1}{z^{1+\alpha}}dz\\
=&\,o_\epsilon(1).
\end{aligned}
$$

Enfocamos ahora nuestra atención en B. Para ello recordamos (3.4.24) y así obtenemos que $u_\eta(\bar t,\bar x)\ge v(\bar s,\bar y)$. Usando ahora la hipótesis **(H1)** tenemos que

$$H\left(\bar s,\bar y,v(\bar s,\bar y),\bar p-D\psi_\beta(\bar y)\right)\le H(\bar s,\bar y,u_\eta(\bar t,\bar x),\bar p-D\psi_\beta(\bar y))$$

De aquí vemos, junto con la hipótesis **(H2)** con $R=2/\beta$ que

$$
\begin{aligned}
B&\le H(\bar s,\bar y,u_\eta(\bar t,\bar x),\bar p-D\psi_\beta(\bar y))-H(\bar t,\bar x,u_\eta(\bar t,\bar x),\bar p)\\
&\le\omega(\beta)+\omega_{\beta,T}((1+|\bar p|)(|\bar x-\bar y|+|\bar t-\bar s|))
\end{aligned}
$$

Usando (3.4.25) y tomando $\epsilon\ll\gamma$ concluimos que

$$B\le o_\beta(1)+\omega_{\beta,T}(o_\gamma(1))$$

donde $o_\gamma(1)\to0$ cuando $\gamma\to0$ independientemente de los otros parámetros. Reemplazando las estimas obtenidas en (3.4.28) y tomando el límite cuando $\delta\to0$, $\epsilon\ll\gamma\to0$ y $\beta\to0$ conseguimos que

$$\tilde c_\alpha\eta\le0,$$

lo cual es un absurdo pues $\eta>0$ y $\tilde c_\alpha>0$. ■

3.5. Existencia y Unicidad de soluciones continuas

Los resultados que se presentan a continuación dependen de la siguiente hipótesis.

(H3) Para cada $R > 0$ existe una constante $C_H(R) > 0$ tal que $|H(t,x,u,p)| \leq C_H(R)$ para todo $(t,x) \in Q$, y para todo $|u|, |p| \leq R$.

Teorema 3.5.1. *Supongamos que se verifican **(H1)-(H3)**. Sea $u_0 \in \mathrm{C}_b(\mathbb{R}^N)$. El problema de Cauchy* (3.1.1)-(3.1.2) *posee una única solución viscosa $u \in \mathrm{C}(\bar{Q})$. Más aún, existe $\tilde{C}_\alpha > 0$ tal que la solución u verifica que*

$$|u(t,x)| \leq \tilde{C}_\alpha t^\alpha + \|u_0\|_\infty, \quad \forall\ (t,x) \in Q.$$

Demostración: Estudiemos primero el problema en el horizonte finito, i.e., el problema (3.1.3)-(3.1.2).

Etapa 1. Supongamos en primera instancia que $u_0 \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^N)$ y que $\|u_0\|_{\mathrm{C}^1(\mathbb{R}^N)} \leq \Lambda$ para algún $0 < \Lambda < +\infty$. Sea $C > 0$ cualquiera y consideremos la función $u^+(t,x) = u_0(x) + Ct^\alpha$, la cual satisface que $u^+(0,x) = u_0(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Notemos que la función u^+ es suave, por tanto puede ser evaluada de manera clásica en (3.1.3). Usando ahora **(H3)** tenemos que existe una constante $C_H(\Lambda, T) > 0$ tal que

$$D^\alpha u^+(t,x) + H(t,x,u_0(x) + Ct^\alpha, Du_0(x)) \geq \Gamma(\alpha+1)C - C_H(\Lambda,T), \quad \forall\ (t,x) \in Q_T.$$

Vemos que si tomamos $C > 0$ suficientemente grande tal que $\Gamma(\alpha+1)C - C_H(\Lambda,T) \geq 0$, entonces la función u^+ es una súper-solución (clásica, y por tanto viscosa) del problema (3.1.3)-(3.1.2).

De forma análoga, obtenemos que para $C > 0$ suficientemente grande la función $u^-(t,x) = u_0(x) - Ct^\alpha$ verifica que $u^-(0,x) = u_0(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ y es sub-solución viscosa del mismo problema. Puesto que $u^- \leq u^+$ sobre $\bar{Q}_T$ y además ambas funciones son acotadas ,ya que u_0 lo es, las hipótesis del Teorema 3.3.1 se verifican y así obtenemos que existe $u : \bar{Q}_T \to \mathbb{R}$ solución viscosa discontinua del problema (3.1.3)-(3.1.2), tal que $u_- \leq u \leq u_+$ en $\bar{Q}_T$.

Mostremos ahora la continuidad de u. De lo anterior vemos que, en particular, $u^-(0,x) \leq u(0,x) \leq u^+(0,x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$, y de las definiciones de u^- y u^+ tenemos que $u_*(0,x) = u^*(0,x) = u_0(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Pero sabemos que u_* es súper-solución y u^* es sub-solución, luego usando el Principio de Comparación concluímos que $u^* \leq u_*$, y como siempre se cumple que $u^* \geq u_*$, hemos conseguido mostrar que $u_* = u^*$,i.e., hemos mostrado que $u \in \mathrm{C}(\bar{Q}_T)$. Esto muestra la existencia de una solución viscosa continua.

A continuación mostramos la unicidad de dicha solución. Para ello supongamos, por absurdo, que existe $\tilde{u} \neq u$ solución viscosa continua del problema (3.1.3)-(3.1.2) sobre Q_T. Por tanto necesariamente tenemos que $\tilde{u}(0,x) = u_0(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$, y como u también es solución, tenemos que

$$\tilde{u}(0,x) = u(0,x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N. \tag{3.5.29}$$

Como toda solución es sub-solución y súper-solución, asumamos que $\tilde{u}$ es sub-solución y que u es súper-solución. Por tanto, usando (3.5.29), el Teorema 3.4.2 nos dice que $\tilde{u} \leq u$ en $\bar{Q}_T$. Similarmente, tomando ahora a u como sub-solución y a $\tilde{u}$ como súper-solución, obtenemos que $\tilde{u} \geq u$ sobre $\bar{Q}_T$, y por tanto $\tilde{u} = u$ sobre $\bar{Q}_T$, lo cual es absurdo, mostrando así la unicidad de la solución.

Etapa 2 Estudiamos ahora el caso general donde $u \in \mathrm{C}_b(\mathbb{R}^N)$. Para esto consideremos una familia de funciones suaves y acotadas $(u_{0,\epsilon})_{\epsilon>0} \subset \mathrm{C}_b(\mathbb{R}^N)$ tales que,

$$\|u_{0,\epsilon}\|_{\mathrm{C}^1(\mathbb{R}^N)} < +\infty \quad \text{y} \quad \|u_{0,\epsilon} - u_0\|_\infty < \epsilon.$$

Sea $\epsilon > 0$ cualquiera. Consideremos la función $u_\epsilon^+(t,x) = u_{0,\epsilon}(x) + \epsilon + Ct^\alpha$. Usando la segunda condición podemos concluir que $u_{0,\epsilon} - \epsilon \leq u_0 \leq u_{0,\epsilon} + \epsilon$, y por tanto $u_\epsilon^+(0,x) = u_{0,\epsilon} + \epsilon \geq u_0(x)$. Sea $C_\epsilon > 0$ suficientemente grande tal que $u_\epsilon^+(t,x) = u_{0,\epsilon}(x)+\epsilon+C_\epsilon t^\alpha$ es súper-solución del problema (3.1.3)-(3.1.2) sobre Q_T. También se tiene que al considerar $C_\epsilon > 0$ suficientemente grande, la función $u_\epsilon^-(t,x) = u_{0,\epsilon}(x)-\epsilon-C_\epsilon t^\alpha$ es sub-solución del problema. Gracias al Lema 3.2.2 sabemos que las funciones

$$u^-(t,x) = \sup_{\epsilon>0}\{u_\epsilon^-(t,x)\} \quad \text{y} \quad u^+(t,x) = \inf_{\epsilon>0}\{u_\epsilon^+(t,x)\}$$

son sub- y súper-soluciones respectivamente. Además, por definición de estas funciones, tenemos que $u^+(0,x) = u^-(0,x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Siguiendo exactamente los mismos pasos de la etapa anterior tenemos que existe una única solución $u \in \mathrm{C}(\bar{Q}_T)$ del problema.

Etapa 3. La solución para el problema de Cauchy (3.1.1)-(3.1.2) se obtiene al hacer $T \to +\infty$ en las Etapas 1 y 2.

Etapa 4. Para demostrar la estimación de la solución u primero notemos que $\sup_{(t,x)\in\mathbb{Q}}\{|F(t,x,0,0)|\} < +\infty$. En efecto, sea $R > 0$ arbitrario pero fijo. Utilizando **(H3)** sabemos que existe $C_H(R) > 0$ tal que $|H(t,x,u,p)| < C_H(R)$ para todo $(t,x) \in Q$, para todo $|u|, |p| < R$. Podemos ver entonces que $|H(t,x,0,0)| < C_H(R)$ para todo $(t,x) \in Q$, lo cual implica que el supremo sobre $(t,x) \in Q$ sea finito, como se quería demostrar.

Consideremos ahora la función $z_1(t,x) = C_1 t^\alpha + \|u_0\|_\infty$, con $C_1 > 0$ por fijar. Es claro que z_1 es suave, por lo que puede ser evaluada clásicamente en (3.1.1), de donde obtenemos que

$$
\begin{aligned}
D^\alpha z_1(t,x) + H(t,x,z_1(t,x),Dz_1(t,x)) &\geq c_\alpha C_1 + H(t,x,C_1 t^\alpha + \|u_0\|_\infty, 0) \\
&\geq c_\alpha C_1 + H(t,x,0,0),
\end{aligned}
$$

donde la última desigualdad resulta de **(H1)** con $w := Ct^\alpha + \|u_0\|_\infty \geq 0 =: v$. Gracias a esta cadena de desigualdades podemos ver que si tomamos $C_1 = c_\alpha^{-1} \|H(\cdot,\cdot,0,0)\|_\infty$, entonces z_1 es súper-solución de (3.1.1)-(3.1.2). Tomamos ahora a la solución u como sub-solución. Para $x \in \mathbb{R}^N$ vemos que $u(x,0) \leq z_1(x,0)$ ya que $u(x,0) \leq \|u_0\|_\infty$, por tanto, utilizando el Principio de Comparación obtenemos que $u \leq z_1$ sobre $\bar{Q}$, i.e.,

$$
u(t,x) \leq c_\alpha^{-1} \|H(\cdot,\cdot,0,0)\|_\infty t^\alpha + \|u_0\|_\infty, \quad \forall (t,x) \in \bar{Q}.
$$

Análogamente, considerando la función $z_2(t,x) = -C_2 t^\alpha - \|u_0\|_\infty$. Para $C_2 = C_1 > 0$ obtenemos una sub-solución, tal que

$$
-c_\alpha^{-1} \|H(\cdot,\cdot,0,0)\|_\infty t^\alpha - \|u_0\|_\infty \leq u(t,x), \quad \forall (t,x) \in Q.
$$

Vemos entonces que basta tomar $\tilde{C}_\alpha = C_1 = C_2$, lo concluye la demostración. ■

Capítulo 4

Regularidad de soluciones viscosas

En el Capítulo 3 hemos demostrado la existencia y unicidad de soluciones viscosas continuas para ecuaciones de Hamilton-Jacobi con derivada temporal tipo Caputo, donde se tenía una condición inicial ligada a una función continua y acotada. Estamos ahora interesados en investigar qué sucede con la solución si la función que nos da la condición inicial ya no es solamente continua, si no que posee mejores propiedades que tan solo la continuidad.

4.1. Definiciones y resultados previos

En el presente capítulo trabajaremos con el siguiente problema:

$$D^{\alpha}u(\cdot,x)(t) + H(x,u(t,x),Du(t,x)) = 0, \quad (t,x) \in Q := (0,+\infty)\times\mathbb{T}^N \tag{4.1.1}$$

sujeto a la condición inicial

$$u(0,x) = u_0(x), \quad \forall\ x \in \mathbb{T}^N \tag{4.1.2}$$

donde $u_0 \in \mathrm{Lip}(\mathbb{T}^N)$ y $H \in \mathrm{C}(\mathbb{T}^N\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N)$ son funciones dadas. Además $\mathbb{T}^N$ denota el toro $N-$dimensional y $\mathrm{Lip}(\mathbb{T}^N)$ denota el conjunto de las funciones Lipschitz continuas sobre $\mathbb{T}^N$.

Si comparamos el problema (4.1.1)-(4.1.2) con el problema (3.1.1)-(3.1.2) del Capítulo 3, vemos que en el primero trabajamos en $\mathbb{T}^N$ mientras que en el segundo en $\mathbb{R}^N$. Existe una evidente diferencia entre estos conjuntos, pues $\mathbb{T}^N$ (al ser compacto) es acotado mientras que $\mathbb{R}^N$ no lo es; y por otro lado, el Hamiltoniano que consideramos ahora no tiene dependencia de la variable temporal t. Es natural entonces preguntarnos por el buen planteamiento de (4.1.1)-(4.1.2),i.e., por la existencia y unicidad de una solución.

Nuevamente el estudio que realizamos aquí está enfocado en la Teoría de soluciones viscosas y para ello trabajamos con las siguientes hipótesis:

(H1') Existe $\kappa > 0$ para todo $u, v \in \mathbb{R}$ y para todo $(x, p) \in \mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N$ tal que si $u \geq v$ entonces

$$H(x, u, p) - H(x, v, p) \geq k(u - v).$$

(H2') Para todo $R > 0, T > 0$ existe un módulo de continuidad tal que para todo $\gamma > 0$, $|x|, |y| \leq R$, $|u| \leq R$ y para todo $t, s \in [0, T]$ se cumple que

$$|H(y, u, p) - H(x, u, p)| \leq \omega_{R,T}((1 + |p|)(|x - y| + |t - s|)),$$

con $p = (x - y)/\gamma$.

(H3') Para cada $R > 0$ existe una constante $C_H(R) > 0$ tal que $|H(x, u, p)| \leq C_H(R)$ para todo $(t, x) \in Q$, y para todo $|u|, |p| \leq R$.

Definición 4.1.1. Sea $u : \bar{Q} \to \mathbb{R}$. Diremos que u es sub-solución (resp. súper-solución) viscosa de (4.1.1) en el punto $(t_0, x_0) \in Q$ si u es s.c.s. (resp. s.c.i.) y si para toda función test $\phi \in \mathrm{C}^1(\bar{Q})$ y cualesquiera $\delta_1, \delta_2 > 0$ tales que (t_0, x_0) es un punto de máximo (resp. mínimo) de $u - \phi$ sobre $\mathcal{C}_{\delta_1,\delta_2}(t_0, x_0) \cap [0, +\infty) \times \mathbb{T}^N$ se verifica que

$$D^{\alpha}_{\delta_1}[u, \phi, t_0, x_0] + H[u, \phi, t_0, x_0] \leq (\text{resp.}\geq)\ 0.$$

Si u es sub-solución y súper solución de (4.1.1) diremos que $u : \bar{Q} \to \mathbb{R}$ es solución viscosa de (4.1.1).

Definición 4.1.2. Sea $u : \bar{Q} \to \mathbb{R}$. Diremos que u es sub-solución viscosa (resp. súper-solución) del problema de Cauchy (4.1.1)-(4.1.2) si u es sub-solución (resp. súper-solución) viscosa y $u(0, x) \leq$ (resp. $\geq$) $u_0(x)$ para todo $x \in \mathbb{T}^N$.

El Capítulo 3 nos garantiza la existencia y unicidad de una solución viscosa del problema (4.1.1)-(4.1.2).

Teorema 4.1.3. *Supongamos que **(H1')-(H3')** se verifican. Entonces el problema* (4.1.1)-(4.1.2) *posee una única solución viscosa* $u \in \mathrm{C}(\bar{Q})$.

Observación 10. La conclusión del teorema precedente se mantiene únicamente pidiendo que $u_0 \in \mathrm{C}(\mathbb{T}^N)$.

Obviamos la demostración del Teorema 4.1.3 ya que todo el procedimiento realizado para obtener el Teorema 3.5.1 se replica en este teorema, obviamente, bajo las modificaciones necesarias.

La Observación 10 hace parecer que (4.1.2) sea inútil, sin embargo es precisamente (4.1.2) lo que nos permite mejorar la regularidad de la solución u.

Los resultados que presentamos a continuación muestran que la regularidad de la solución u es mejorada cuando mejoramos las propiedades de la función dato.

4.2. Regularidad Hölder en la variable temporal

A continuación presentamos el resultados de regularidad Hölder dado en [3]. Es necesario la introducción de las siguientes hipótesis sobre H, la cual está relacionada al crecimiento de H respecto a la variable del gradiente.

(H4') Existe $C_H > 0$ tal que para todo $u, v \in \mathbb{R}$, para todo $x, y \in \mathbb{T}^N$ y todo $p \in \mathbb{R}^N$ se verifica que

$$|H(x,u,p) - H(y,v,p)| \leq C_H(1+|p|)|x-y|.$$

Observación 11. En la demostración de los siguientes teoremas emplearemos la siguiente notación: Sea $x \in \mathbb{R}^d$, con $d \in \mathbb{N}$, entonces escribiremos

$$\widehat{x} = \frac{x}{\|x\|_{\mathbb{R}^d}}.$$

Teorema 4.2.1. *Supongamos que **(H4')** se verifica. Sea $u \in \mathrm{C}(\bar{Q})$ la solución viscosa de* (4.1.1)-(4.1.2). *Entonces u es Hölder-continua en tiempo, i.e., existe $L > 1$ para todo $x \in \mathbb{T}^N$ y todo $t, s \in [0, +\infty)$ tal que*

$$|u(t,x) - u(s,x)| \leq L|t-s|^{\alpha}. \tag{4.2.3}$$

Demostración: Supongamos por absurdo que

$$\forall\ L > 1, \exists\ x_L \in \mathbb{T}^N, s_L, t_L \in [0,+\infty), \quad |u(t_L,x_L) - u(s_L,x_L)| \geq L|t_L - s_L|^{\alpha}, \tag{4.2.4}$$

por tanto, usando la propiedad transitiva obtenemos que

$$\sup_{(t,s,x)\in[0,+\infty]^2\times\mathbb{T}^N} \{u(t,x) - u(s,x) - L|t-s|^{\alpha}\} := \theta_L > 0.$$

Introducimos ahora una función $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\psi \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R})$, $\psi = 0$ si $t \leq 1$ y $\psi \leq 2\|u\|_{\infty}$ si $t \geq 2$. La función ψ la utilizamos para fines de localización en el tiempo.

Vemos que para $\beta > 0$ suficientemente pequeño se verifica que $\psi(s_L) = 0$ y entonces de (4.2.4) obtenemos que

$$u(t_L, x_L) - u(s_L, x_L) - L|t_L - s_L|^\alpha - \psi_\beta(s_L) > 0,$$

y por otro lado, para cualquier $(t, x) \in Q$ y todo $s \geq 2/\beta$

$$u(t, x) - u(s, x) - L|t - s|^\alpha - \psi_\beta(s) \leq 0.$$

En consecuencia tenemos que

$$M = M(L, \beta) = \max_{t,s\in[0,+\infty), x\in\mathbb{T}^N} \{u(t, x) - u(s, x) - L|t - s|^\alpha - \psi_\beta(s)\} \geq \frac{\theta_L}{4} > 0,$$

y este máximo se alcanza en $(t^*, s^*, x^*) \in [0, +\infty) \times B_{2/\beta}$.

Realizemos un doblamiento de variables, para ello, para cada $\epsilon > 0$ definimos la función

$$\begin{aligned} \xi_\epsilon \colon [0, +\infty)^2 \times (\mathbb{T}^N)^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, s, x, y) &\longmapsto \xi_\epsilon(t, s, x, y) \end{aligned},$$

donde

$$\xi_\epsilon(t, s, x, y) = u(t, x) - u(s, y) - L|t - s|^\alpha - \psi_\beta(s) - \frac{|x - y|^2}{2\epsilon^2}.$$

Por la definición de ξ_ϵ tenemos que esta alcanza un máximo de modo que para algún $(t_\epsilon, s_\epsilon, x_\epsilon, y_\epsilon) \in [0, +\infty)^2 \times (\mathbb{T}^N)^2$

$$M_\epsilon := \max_{(t,s,x,y)\in[0,+\infty)^2\times(\mathbb{T}^N)^2} \{\psi_\epsilon(t, s, x, y)\} = \psi_\epsilon(t_\epsilon, s_\epsilon, x_\epsilon, y_\epsilon) \geq \frac{\theta_L}{4} > 0. \tag{4.2.5}$$

Notando que $\xi_\epsilon(t^*, s^*, x^*, x^*) \leq \xi(t_\epsilon, s_\epsilon, x_\epsilon, y_\epsilon)$ vemos que

$$\begin{aligned} M_\epsilon &\leq u(t_\epsilon, x_\epsilon) - u(s_\epsilon, y_\epsilon) - L|t_\epsilon - s_\epsilon|^\alpha - \psi_\epsilon(s_\epsilon) - \frac{|x_\epsilon - y_\epsilon|^2}{2\epsilon^2} \\ &\leq 2\|u\|_\infty + \|\psi\|_\infty - L|t_\epsilon - s_\epsilon|^\alpha - \frac{|x_\epsilon - y_\epsilon|^2}{2\epsilon^2}, \end{aligned}$$

pero $M_\epsilon > 0$, y en consecuencia, para alguna constante $C > 0$ tenemos:

$$|x_\epsilon - y_\epsilon|^2 \leq C\epsilon^2, \quad L|t_\epsilon - s_\epsilon|^\alpha \leq C.$$

Esto implica que $|x_\epsilon - y_\epsilon| \to 0$ cuando $\epsilon \to 0$, y $|t_\epsilon - s_\epsilon| \leq CL^{-1/\alpha}$. Podemos entonces suponer que para todo $L > 1$ suficientemente grande $|t_\epsilon - s_\epsilon| < 1$ ya que la función $L \mapsto L^{-1/\alpha}$ es decreciente y converge a 0 cuando $L \to +\infty$. En consecuencia podemos ver que $s_\epsilon, t_\epsilon \leq 4/\beta$ para todo $\epsilon > 0$.

Usando técnicas similares a las realizadas en la demostración del Teorema 3.5.1 conseguimos la existencia de una constante $C > 0$ suficientemente grande tal que $g^+(t,x) = g(x) + Ct^\alpha$ y $g^-(t,x) = g(x) - Ct^\alpha$ son súper- y sub-soluciones del problema (4.1.1)-(4.1.2). Por tanto, del principio de comparación obtenemos las desigualdades:

$$u_0(x) - Ct^\alpha \le u(t,x) \le u_0(x) + C^\alpha, \quad \forall\ (t,x) \in \bar{Q}. \tag{4.2.6}$$

Ahora mostremos que $t_\epsilon, s_\epsilon > 0$ para L suficientemente grande y $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño en términos de L. Supongamos, por absurdo, que $t_\epsilon = 0$, luego de (4.2.6) podemos ver que

$$\begin{aligned} M_\epsilon &\le \xi_\epsilon(0, s_\epsilon, x_\epsilon, y_\epsilon) \\ &= u(0, x_\epsilon) - u(s_\epsilon, y_\epsilon) - Ls_\epsilon^\alpha - \psi_\beta(s_\epsilon) - \frac{|x_\epsilon - y_\epsilon|^2}{2\epsilon^2} \\ &\le u(0, x_\epsilon) - u(s_\epsilon, y_\epsilon) - Ls_\epsilon^\alpha \\ &\le [u_0(x_\epsilon) - u_0(y_\epsilon)] + (C - L)s_\epsilon^\alpha \\ &\le L_0|x_\epsilon - y_\epsilon| + (C - L)s_\epsilon^\alpha. \end{aligned}$$

Tomando $L > C$ tenemos

$$0 < M_\epsilon \le L_0|x_\epsilon - y_\epsilon|,$$

luego para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño obtenemos una contradicción gracias a que $|x_\epsilon - y_\epsilon| \to 0$ cuando $\epsilon \to 0$. Adicionalmente, tenemos que $s_\epsilon \neq t_\epsilon$ para L suficientemente grande y $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño en términos de L. En efecto, suponiendo por absurdo que $\tau_\epsilon := s_\epsilon = t_\epsilon$, gracias a (4.2.5) y a la continuidad uniforme de u en $\mathbb{T}^N$ tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\theta_L}{4} &\le \xi_\epsilon(\tau_\epsilon, \tau_\epsilon, x_\epsilon, y_\epsilon) \\ &= u(\tau_\epsilon, x_\epsilon) - u(\tau\, y_\epsilon) - \psi_\beta(\tau_\epsilon) \\ &\le o_\epsilon(1) - \psi_\beta(\tau_\epsilon) \\ &\le o_\epsilon(1), \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño. Notemos que, por lo mostrado anteriormente, la función $\phi_{1,\epsilon}\colon \bar{Q} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\phi_{1,\epsilon}(t,x) = u(s_\epsilon, y_\epsilon) + L|t - s_\epsilon|^\alpha + \psi_\beta(s_\epsilon) + \frac{|x - y_\epsilon|^2}{2\epsilon^2}$$

es $C^1(\bar{Q})$ y por tanto puede ser usada como función test.

Utilizando (4.2.5) sabemos que $u - \phi_{1,\epsilon}$ alcanza un máximo en $(t_\epsilon, x_\epsilon) \in Q$, y como u es sub-solución, obtenemos para cualquier $\delta > 0$ que

$$D^\alpha_\delta[u, \phi_{1,\epsilon}, t_\epsilon, x_\epsilon] + H[u, \phi_{1,\epsilon}, t_\epsilon, x_\epsilon] \leq 0. \tag{4.2.7}$$

Análogamente vemos que de (4.2.5), $u - \phi_{2,\epsilon}$ alcanza un mínimo en $(s_\epsilon, y_\epsilon) \in Q$ donde

$$\phi_{2,\epsilon}(s, y) = u(t_\epsilon, x_\epsilon) - L|t_\epsilon - s|^\alpha - \psi_\beta(s) - \frac{|x_\epsilon - y|^2}{2\epsilon^2}.$$

Como u es súper-solución conseguimos que para cualquier $\delta > 0$:

$$D^\alpha_\delta[u, \phi_{2,\epsilon}, s_\epsilon, y_\epsilon] + H[u, \phi_{2,\epsilon}, s_\epsilon, y_\epsilon] \geq 0. \tag{4.2.8}$$

Tomamos $\delta = \delta(\epsilon) = |t_\epsilon - s_\epsilon|/2$, desarrollando (4.2.7) y (4.2.8) para posteriormente sustraer estas expresiones, tenemos la siguiente desigualdad:

$$\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2 \leq \mathcal{H}, \tag{4.2.9}$$

donde, denotando $p_\epsilon = (x_\epsilon - y_\epsilon)/\epsilon^2$,

$$\mathcal{D}_1 = D^\alpha[t_\epsilon - \delta](u(\cdot, x_\epsilon), t_\epsilon) - D^\alpha[s_\epsilon - \delta](u(\cdot, y_\epsilon), s_\epsilon),$$

$$\mathcal{D}_2 = D^\alpha[t_\epsilon - \delta, t_\epsilon](\phi_{1,\epsilon}(\cdot, x_\epsilon), t_\epsilon) + D^\alpha[s_\epsilon - \delta, s_\epsilon](-\phi_{2,\epsilon}(\cdot, y_\epsilon), s_\epsilon),$$

$$\mathcal{H} = H(y_\epsilon, u(s_\epsilon, y_\epsilon), p_\epsilon) - H(t_\epsilon, u(t_\epsilon, x_\epsilon), p_\epsilon).$$

Enfocamos ahora nuestra atención en la realización de estimaciones para cada uno de los términos anteriores. Empezemos con $\mathcal{D}_1$. De (4.2.5) podemos ver que para cualquier $\tau \in \mathbb{R}$, $\xi_\epsilon(t_\epsilon - \tau, s_\epsilon - \tau, x_\epsilon, y_\epsilon) \leq \xi_\epsilon(t_\epsilon, s_\epsilon, x_\epsilon, y_\epsilon)$, lo cual implica que

$$\psi_\beta(s_\epsilon) - \psi_\beta(s_\epsilon - \tau) \leq [u(t_\epsilon, x_\epsilon) - u(s_\epsilon, y_\epsilon)] - [u(t_\epsilon - \tau, x_\epsilon) - u(s_\epsilon - \tau, y_\epsilon)]. \tag{4.2.10}$$

Usando apropiadamente los cambios de variables $\tau = t_\epsilon - t$ y $\tau = s_\epsilon - s$, junto con (4.2.10) tenemos que

$$\begin{aligned} c_\alpha^{-1}\mathcal{D}_1 = c_\alpha^{-1}\{&D^\alpha[t_\epsilon - 1](u(\cdot, x_\epsilon), t_\epsilon) + D^\alpha[t_\epsilon - 1, t_\epsilon - \delta](u(\cdot, x_\epsilon), t_\epsilon) \\ &- D^\alpha[s_\epsilon - 1](u(\cdot, y_\epsilon), s_\epsilon) - D^\alpha[s_\epsilon - 1, s_\epsilon - \delta](u(\cdot, y_\epsilon), s_\epsilon)\} \\ = &\int_{-\infty}^{t_\epsilon - 1} \frac{u(t_\epsilon, x_\epsilon) - u(t, x_\epsilon)}{(t_\epsilon - t)^{1+\alpha}} dt + \int_{-\infty}^{s_\epsilon - 1} \frac{u(s, y_\epsilon) - u(s_\epsilon, y_\epsilon)}{(s_\epsilon - s)^{1+\alpha}} ds \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\int\limits_{t_\epsilon-1}^{t_\epsilon-\delta}\frac{u(t_\epsilon,x_\epsilon)-u(t,x_\epsilon)}{(t_\epsilon-t)^{1+\alpha}}dt-\int\limits_{s_\epsilon-1}^{s_\epsilon-\delta}\frac{u(s_\epsilon,y_\epsilon)-u(s,y_\epsilon)}{(s_\epsilon-s)^{1+\alpha}}ds\\
&\geq -2\left\|u\right\|_\infty\left\{\int\limits_{-\infty}^{t_\epsilon-1}\frac{1}{(t_\epsilon-t)^{1+\alpha}}dt+\int\limits_{-\infty}^{s_\epsilon-1}\frac{1}{(s_\epsilon-s)^{1+\alpha}}ds\right\}\\
&+\int\limits_{\delta}^{1}\frac{u(t_\epsilon,x_\epsilon)-u(t_\epsilon-\tau,x_\epsilon)}{\tau^{1+\alpha}d\tau}-\int\limits_{\delta}^{1}\frac{u(s_\epsilon,y_\epsilon)-u(s_\epsilon-\tau,y_\epsilon)}{\tau^{1+\alpha}}d\tau\\
&=\tilde{c}_\alpha\left\|u\right\|_\infty+\int\limits_{\delta}^{1}\frac{[u(s_\epsilon,y_\epsilon)-u(s_\epsilon,y_\epsilon)]-[u(t_\epsilon-\tau,x_\epsilon)-u(s_\epsilon-\tau,y_\epsilon)]}{\tau^{1+\alpha}}d\tau\\
&\geq-\tilde{c}_\alpha\left\|u\right\|_\infty+\int\limits_{\delta}^{1}\frac{\psi_\beta(s_\epsilon)-\psi_\beta(s_\epsilon-\tau)}{\tau^{1+\alpha}}d\tau\\
&\geq-\tilde{c}_\alpha\left\|u\right\|_\infty-\int\limits_{\delta}^{1}\frac{\hat{C}\beta\tau}{\tau^{1+\alpha}}d\tau\\
&=-\tilde{c}_\alpha\left\|u\right\|_\infty-o_\beta(1),
\end{aligned}
$$

donde la última desigualdad se tiene utilizando el Teorema del valor medio sobre la función $\tau\mapsto\psi_\beta(s_\epsilon-\tau)$ con $\hat{C}>0$. Así, en conclusión:

$$
\mathcal{D}_1\geq-\tilde{c}_\alpha\left\|u\right\|-o_\beta(1). \tag{4.2.11}
$$

Tratemos ahora en $\mathcal{D}_2$. Para esto hacemos una expansión de segundo orden a la función $\tau\mapsto|t_\epsilon-s_\epsilon+\tau|^\alpha$ y recordando que $\delta=|t_\epsilon-s_\epsilon|/2$, obtenemos que existe $\rho(\tau)\in(-\delta,\delta)$ tal que

$$
\begin{aligned}
-\Big(|t_\epsilon-s_\epsilon+\tau|^\alpha-|t_\epsilon-s_\epsilon|^\alpha-\alpha|t_\epsilon-s_\epsilon|^{\alpha-1}\widehat{t_\epsilon-s_\epsilon}\tau|\Big)&=-\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}|t_\epsilon-s_\epsilon+\rho(\tau)|^{\alpha-2}\tau^2\\
&\geq-\frac{\alpha(\alpha-1)}{2^{\alpha-1}}|t_\epsilon-s_\epsilon|^{\alpha-2}\tau^2.
\end{aligned}
$$

Desarrollando $\mathcal{D}_2$, usando cambios de variables y argumentos sobre ψ_β similares a los realizados para estimar $\mathcal{D}_1$, tenemos que

$$
\begin{aligned}
c_\alpha^{-1}\mathcal{D}_2&=L\int\limits_{t_\epsilon-\delta}^{t_\epsilon}\frac{|t_\epsilon-s_\epsilon|^\alpha-|t-s_\epsilon|^\alpha}{(t_\epsilon-t)^{1+\alpha}}dt+L\int\limits_{s_\epsilon-\delta}^{s_\epsilon}\frac{|t_\epsilon-s_\epsilon|^\alpha-|t_\epsilon-s|^\alpha}{(s_\epsilon-s)^{1+\alpha}}ds\\
&+\int\limits_{s_\epsilon-\delta}^{s_\epsilon}\frac{\psi_\beta(s_\epsilon)-\psi_\beta(s)}{(s_\epsilon-s)}ds\\
&=L\int\limits_{0}^{\delta}\frac{|t_\epsilon-s_\epsilon|^\alpha-|t_\epsilon-s_\epsilon-\tau|^\alpha}{\tau^{1+\alpha}}d\tau+L\int\limits_{0}^{\delta}\frac{|t_\epsilon-s_\epsilon|^\alpha-|t_\epsilon-s_\epsilon+\tau|^\alpha}{\tau^{1+\alpha}}d\tau
\end{aligned}
$$

$$+\int_0^\delta \frac{\psi_\beta(s_\epsilon)-\psi_\beta(s_\epsilon-\tau)}{\tau^{1+\alpha}}$$

$$\geq L\int_0^\delta \frac{|t_\epsilon-s_\epsilon|^\alpha-|t_\epsilon-s_\epsilon-\tau|^\alpha}{|\tau|^{1+\alpha}}d\tau + L\int_{-\delta}^0 \frac{|t_\epsilon-s_\epsilon|^\alpha-|t_\epsilon-s_\epsilon-\tau|^\alpha}{|\tau|^{1+\alpha}}d\tau + o_\beta(1)$$

$$= -L\int_{-\delta}^\delta \frac{|t_\epsilon-s_\epsilon-\tau|^\alpha-|t_\epsilon-s_\epsilon|^\alpha}{|\tau|^{1+\alpha}}d\tau + o_\beta(1)$$

$$= -L\int_{-\delta}^\delta \frac{|t_\epsilon-s_\epsilon-\tau|^\alpha-|t_\epsilon-s_\epsilon|^\alpha-\alpha|t_\epsilon-s_\epsilon|^{\alpha-1}\widehat{t_\epsilon-s_\epsilon}\tau}{|\tau|^{1+\alpha}}d\tau + o_\beta(1)$$

$$\geq \frac{L\alpha(1-\alpha)}{2^{\alpha-1}}|t_\epsilon-s_\epsilon|^{\alpha-2}\int_{-\delta}^\delta |\tau|^{1-\alpha}d\tau + o_\beta(1)$$

$$= \tilde{C}_\alpha L + o_\beta(1).$$

Deducimos entonces que

$$\mathcal{D}_2 \leq cL - o\beta(1). \tag{4.2.12}$$

Finalmente estimemos $\mathcal{H}$. Usando su definición y **(H4')** tenemos que

$$\mathcal{H} \leq C_H(1+|\bar{p}|)|\bar{x}-\bar{t}| = o_\epsilon(1). \tag{4.2.13}$$

Reemplazando (4.2.11), (4.2.12) y (4.2.13) en (4.2.9) vemos que

$$cL \leq C\,\|u\|_\infty + o_\beta(1) + o_\epsilon(1).$$

Tomando los límites cuando $\epsilon \to 0$, $\beta \to 0$, vemos que para L suficientemente grande en términos de u se obtiene una contradicción, lo cual concluye la demostración. ■

4.3. Regularidad en la variable espacial

La demostración del resultado de esta sección necesita de una herramienta importante la cual detallamos a continuación.

Definición 4.3.1 (Sub-convolución)**.** Sea $g\colon \bar{Q} \to \mathbb{R}$ una función acotada. Definimos la sub-convolución de g de parámetro $\epsilon > 0$ como la función

$$\begin{aligned} g^\epsilon\colon\ \bar{Q} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t,x) &\longmapsto g^\alpha(t,x) = \sup_{s\in[0,+\infty)}\left\{g(s) - \frac{(s-t)^2}{\epsilon}\right\}. \end{aligned}$$

La sub-convolución cumple varias propiedades interesantes, una de ellas es que a través de esta podemos obtener una mejor regularidad de la función de la cual hemos tomado la sub-convolución.

Proposición 4.3.2. *Sea $g\colon \bar{Q} \to \mathbb{R}$ acotada. Sea $\epsilon > 0$ cualquiera. La sub-convolución de u de parámetro ϵ, u^ϵ, es Lipschitz continua en el tiempo con constante de Lipschitz $C\epsilon^{-1}$, donde $C = C(\|g\|_\infty) > 0$.*

Usando la Definición 4.3.1, podemos obtener el siguiente corolario del Teorema 4.2.1.

Corolario 4.3.3. *Sea u la solución viscosa del problema* (4.1.1)-(4.1.2) *dada por el Teorema 4.1.3. Entonces u^ϵ es Hölder continua en tiempo verificando* (4.2.3)*,i.e., existe $C > 1$ para todo $x \in \mathbb{T}^N$ y todo $t, s \in [0, +\infty)$ tal que*

$$|u^\epsilon(t,x) - u^\epsilon(s,x)| \leq C|t-s|^\alpha, \tag{4.3.14}$$

Más aún, se tiene la siguiente desigualdad:

$$\|u^\epsilon - u\|_\infty \leq C\epsilon^{\alpha/2}. \tag{4.3.15}$$

Lema 4.3.4. *Sea u la solución viscosa del problema* (4.1.1)-(4.1.2) *dada por el Teorema 4.1.3. Entonces u^ϵ es sub-solución viscosa de* (4.1.1) *sobre $(a_\epsilon, +\infty)$ para algún a_ϵ tal que $a_\epsilon \to 0$ cuando $\epsilon \to 0$.*

La demostración de este resultado se encuentra en [1], Lema 4.2.

El estudio de la regularidad de u en la variable espacial depende de una propiedad del Hamiltoniano, la cual es la coercividad. Por tanto consideramos la siguiente hipótesis:

(H5') $\displaystyle\lim_{|p|\to+\infty} \inf_{x\in\mathbb{T}^N, u\in\mathbb{R}} H(x,u,p) = +\infty.$

Enunciamos el resultado principal de esta sección.

Teorema 4.3.5. *Supongamos que **(H4')-(H5')** se verifica. Sea $u \in \mathrm{C}(\bar{Q})$ la solución viscosa de* (4.1.1)-(4.1.2)*. Entonces existe un módulo de continuidad $m \in \mathrm{C}([0,+\infty))$ independiente de t tal que para todo $t \in [0, +\infty)$ y todo $x, y \in \mathbb{T}^N$*

$$|u(t,x) - u(t,y)| \leq m(|x-y|).$$

Demostración: Sean $x_0 \in \mathbb{T}^N$ y $s_0 > 0$ cualesquiera. Para $\beta > 0$ y $L > 0$ por ser fijados consideremos

$$\sup_{x\in\mathbb{T}^N, s\in[0,+\infty)} \left\{ u^\epsilon(s,x) - u^\epsilon(s_0,x_0) - L|x-x_0| - \frac{s-s_0}{\beta^2} \right\}, \tag{4.3.16}$$

donde elejimos ϵ suficientemente pequeño de modo que $s_0 > a_\epsilon$ tras utilizar el Lema 4.3.4. Argumentos estándar implican que el máximo se alcanza en $(s_\beta, x_\beta) \in [0, +\infty) \times \mathbb{T}^N$, de modo que $s_\beta \to s_0$ cuando $\beta \to 0$. Esto nos permite ahora tomar $\beta > 0$ suficientemente pequeño tal que $s_\beta > a_\epsilon$. Notemos que $x_\beta = x_0$. En efecto, supongamos por absurdo que $x_\beta \neq x_0$ y definamos la función $\xi_\beta : \bar{Q} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\xi_\beta(s, x) = u^\epsilon(s_0, x_0) + L|x - x_0| + \frac{|s - s_0|^2}{\beta^2}.$$

Claramente ξ_β es diferenciable y, gracias al Lema 4.3.4, podemos usarla como función test para la sub-solución u^ϵ de (4.1.1) sobre $(a_\epsilon, +\infty) \times \mathbb{T}^N$. Tenemos entonces que para todo $0 < \hat{\delta} < 1$ se verifica la desigualdad

$$D^\alpha[s_\beta - \hat{\delta}](u^\epsilon(\cdot, x_\beta), s_\beta) + D^\alpha[s_\beta - \hat{\delta}, s_\beta]\left(\frac{|\cdot - s_0|}{\beta^2}, s_\beta\right) + H(x_\beta, u(s_\beta, x_\beta), L\widehat{x_\beta - x_0}) \leq 0.$$

Es claro que el segundo término del lado izquierdo de la desigualdad anterior tienda a 0 cuando $\hat{\delta} \to 0$ gracias a la suavidad de la función de la cual se quiere calcular la derivada de Caputo. Usando el símil del Lema 3.1.7 para este caso, vemos que el primer término tiende a la derivada de Caputo de $u^\epsilon(\cdot, x_\beta)$ en s_β cuando $\hat{\delta} \to 0$. Por tanto, tenemos que

$$D^\alpha[s_\beta](u^\epsilon(\cdot, x_\beta), s_\beta) + H(x_\beta, u(s_\beta, x_\beta), L\widehat{x_\beta - x_0}) \leq 0. \tag{4.3.17}$$

Ahora estimamos $D^\alpha[s_\beta](u^\epsilon(\cdot, x_\beta), s_\epsilon)$ en términos de $0 < \delta < 1$. Para ello notemos que

$$\begin{aligned} D^\alpha[s_\beta](u^\epsilon(\cdot, x_\beta), s_\epsilon) &= D^\alpha[s_\beta - 1](u^\epsilon(\cdot, x_\beta), s_\beta) + D^\alpha[s_\beta - 1, s_\beta - \delta](u^\epsilon(\cdot, x_\beta), s_\beta) \\ &\quad + D^\alpha[s_\beta - \delta, s_\beta](u^\epsilon(\cdot, x_\beta), s_\beta). \end{aligned}$$

Usando (4.3.15) vemos que

$$D^\alpha[s_\beta - 1](u^\epsilon(\cdot, x_\beta), s_\beta) \geq -C\left\|u^\epsilon\right\|_\infty \geq -C(\|u\|_\infty + \epsilon^{\alpha/2}).$$

De (4.3.14) concluímos lo siguiente:

$$\begin{aligned} c_\alpha^{-1} D^\alpha[s_\beta - 1, s_\beta - \delta](u^\epsilon(\cdot, x_\beta), s_\beta) &= \int_{s_\beta - 1}^{s_\beta - \delta} \frac{u^\epsilon(s_\beta, x_\beta) - u_\epsilon(s, x_\beta)}{(s_\beta - s)^{1+\alpha}} ds \\ &\geq -C \int_{s_\beta - 1}^{s_\beta - \delta} \frac{1}{s_\beta - s} ds \\ &\geq -C|log(\delta)|. \end{aligned}$$

Para el tercer término, usando la Proposición 4.3.2 obtenemos que

$$c_\alpha^{-1} D^\alpha [s_\beta - \delta, s_\beta](u^\epsilon(\cdot, x_\beta), s_\beta) \geq -C \int_{s_\beta - \delta}^{s_\beta} \frac{1}{(s_\beta - s)^\alpha} ds \geq -\frac{C}{\epsilon}\delta^{1-\alpha}.$$

Utilizamos estas estimaciones en (4.3.17) y así tenemos la siguiente desigualdad:

$$H(x_\beta, u(s_\beta, x_\beta), L\widehat{x_\beta - x_0}) \leq C(1 + |\ln(\delta)| + \epsilon^{-1}\delta^{1-\alpha}),$$

donde $C > 0$ depende únicamente de los datos y de $\|u\|_\infty$. Tomando el ínfimo en la expresión anterior sobre $\delta > 0$ tenemos que

$$H(x_\beta, u(s_\beta, x_\beta), L\widehat{x_\beta - x_0}) \leq C(1 + |\ln(\delta)|).$$

Usando **(H5')** con $L = L(\epsilon)$ suficientemente grande vemos que llegamos a una contracción. Esto muestra entonces que $x_\beta = x_0$. El reemplazar esta igualdad en (4.3.16) implica que

$$u^\epsilon(x, s_\beta) - u^\epsilon(x_0, s_\beta) \leq L(\epsilon)|x - x_0|, \quad \forall\, x \in \mathbb{T}^N.$$

Tomando el límite cuando $\beta \to 0$, recordando que $s_\beta \to s_0$ cuando $\beta \to 0$ y que s_0, x_0 fueron tomados arbitrariamente, obtenemos que para todo $t \in [0, +\infty)$ y todo $x, y \in \mathbb{T}^N$,

$$u(t,x) - u(t,y) \leq u^\epsilon(t,x) - u^\epsilon(t,y) + C\epsilon^{\alpha/2} \leq L(\epsilon)|x - y| + C\epsilon^{\alpha/2}$$

con $0 < \epsilon < 1$, y esto implica que la función u es uniformemente continua con respecto a x independientemente de t. Basta entonces tomar $m(s) = L(\epsilon)s + C\epsilon^{\alpha/2}$, lo cual concluye la demostración. ■

Conclusiones

(I) La teoría de soluciones viscosas para el estudio de Ecuaciones de Hamilton-Jacobi (EHJ) tiene como gran ventaja el hecho de que las soluciones siempre serán funciones continuas, caso que no se tiene en la teoría de soluciones débiles para EDPs. Además, tenemos resultados generales de existencia y unicidad de soluciones viscosas.

(II) La teoría desarrollada para EHJ y para EHJ con derivada temporal fraccionaria de Caputo en esencia son las mismas. De hecho, basta comprender completamente la teoría para EHJ para obtener resultados análogos para el otro tipo de problemas haciendo las modificaciones necesarias. Más aún, dado que la derivada de Caputo generaliza la derivada estándar, el estudio de los Capítulos 1 y 3 muestran como se pueden generalizar resultados a partir de ciertos resultados conocidos.

(III) Varios de los resultados vistos en el documento dependen únicamente del comportamiento que presenta el Hamiltoniano H, por esto es imprescindible tener buenas propiedades sobre H, de modo que se asegure la existencia y unicidad de las soluciones viscosas.

(IV) Es natural preguntarnos si es posible la extensión de los resultados de regularidad a problemas del tipo (4.1.1) donde reemplazamos el Hamiltoniano por $H(t, x, u(t, x), v(t, x))$, i.e., consideramos ahora el problema

$$D^{\alpha}u(t, x) + H(t, x, u(t, x), Du(t, x)) = 0, \quad (t, x) \in Q := (0, +\infty) \times \mathbb{T}^N \tag{4.3.18}$$

sujeto a la condición inicial

$$u(0, x) = u_0(x), \quad \forall\, x \in \mathbb{T}^N \tag{4.3.19}$$

donde $u_0 \in \mathrm{Lip}(\mathbb{T}^N)$ y $H \in \mathrm{C}(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$ son funciones dadas.

Para la regularidad en el tiempo, estamos tentados a trabajar con una hipótesis análoga a **(H5')**, como se detalla a continuación:

(H4'-a) Existe $C_H > 0$ tal que para todo $u, v \in \mathbb{R}$, $t \in [0, +\infty)$, para todo $x, y \in \mathbb{T}^N$, y todo $p \in \mathbb{R}^N$ se verifica que

$$|H(t, x, u, p) - H(s, y, v, p)| \leq C_H(1 + |p|)|x - y|.$$

Con esta hipótesis es claro que el resultado de regularidad para tiempo dado por el Teorema 4.2.1 se mantiene. Sin embargo este caso no es interesante ya que **(H4'-a)** nos dice que el tiempo no tiene ningún efecto sobre el crecimiento del Hamiltoniano respecto a la variable del gradiente. Por tanto, la hipótesis correcta que debemos considerar es la siguiente:

(H4") Existe $C_H > 0$ tal que para todo $u, v \in \mathbb{R}$, $t, s \in [0, +\infty)$, para todo $x, y \in \mathbb{T}^N$, y todo $p \in \mathbb{R}^N$ se verifica que

$$|H(t,x,u,p) - H(t,y,v,p)| \leq C_H(1+|p|)(|x-y| - |t-s|).$$

Desafortunadamente, usando el procedimiento hecho en la demostración del Teorema 4.2.1, la regularidad Hölder no se tiene, pues se dan varios problemas que detallamos a continuación. Para esto debemos ponernos en el contexto de la demostración de este teorema.

Cuando queremos realizar el doblamiento de variables, nuestra intuición nos dice que la función ξ_ϵ debe ser reemplazada por la función ξ_γ^ϵ definida como

$$\xi_{\gamma,\epsilon}(t,s,x,y) = u(t,x) - u(s,y) - L|t-s|^\alpha - \psi_\beta(s) - \frac{|x-y|^2}{2\epsilon^2} - \frac{|t-s|^2}{2\gamma^2}.$$

Pero el término de penalización $|t-s|^2/2\gamma^2$, lo que haría, es hacer que asintóticamente $t^* = s^*$ lo cual no existe una garantía de que esto se tenga. De hecho, esta suposición es completamente errónea ya que uno de los argumentos estándar que permite esta conclusión no se tiene. Más precisamente, tendríamos que $\xi_{\gamma,\epsilon}(t^*, s^*, x^*, x^*) \leq \xi_{\gamma,\epsilon}(t_{\gamma,\epsilon}, s_{\gamma,\epsilon}, x_{\gamma,\epsilon}, y_{\gamma,\epsilon})$, lo cual implica

$$u(t^*,x^*) - u(s^*,x^*) - L|t^*-s^*|^\alpha - \psi_\beta(s^*) - \frac{|t^*-s^*|^2}{2\epsilon^2} \leq M_\epsilon,$$

pero esto no permite concluir que $M \leq M_\epsilon$, lo cual es clave para obtener la convergencia de t, s a un mismo punto cuando $\epsilon, \gamma \to 0$. Esto muestra que el doblamiento de variables realizado no es adecuado para tratar el problema.

Posteriormente consideramos la función ξ_ϵ definida como

$$\begin{aligned}\xi_\epsilon(t,s,x,y) = u(t,x) - u(s,y) - L|t-s|^\alpha - \psi_\beta(s) - \frac{|x-y|^2}{2\epsilon^2} - |t^*-t|^2 \\ - |s^*-s|^2 - |x^*-x|^2.\end{aligned}$$

Con esta función para el doblamiento de variables conseguimos que $t_\epsilon \to t^*$, $s_\epsilon \to s^*$, $x, y \to x^*$ cuando $\epsilon \to 0$. Luego, para la estimación de $\mathcal{H}$, modificando ligeramente **(H4")** de modo que admita un error, tendríamos que

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= H(s_\epsilon, y_\epsilon, u(s_\epsilon, y_\epsilon), p_\epsilon) - H(t_\epsilon, s_\epsilon, u(t_\epsilon, x_\epsilon), p_\epsilon + 2(x^* - x_\epsilon)) \\ &\leq C_H(1 + |p_\epsilon|)(|x_\epsilon - y_\epsilon| + |t_\epsilon - s_\epsilon| + o_\epsilon(1)).\end{aligned}$$

Aquí vemos el inconveniente que existe ya que, el paso final es tomar el límite cuando $\epsilon \to 0$, pero nosotros no tenemos ningún control sobre $|t_\epsilon - s_\epsilon|$. Por lo cual es evidente que el resultado no es posible ser demostrado usando este método.

(V) Como el resultado de regularidad en el tiempo no la tenemos, no podemos mostrar la regularidad en el espacio ya que el resultado es necesario para su demostración. Más aún, el Lema 4.3.4 no se verifica para el problema (4.3.18) ya que se presentan inconvenientes nuevamente con el Hamiltoniano en la variable temporal.

Recomendaciones

(i) Evitar el uso de conceptos como sub-convolución y súper-convolución en la demostración de los Principios de Comparación cuando el Hamiltoniano dependa del tiempo t, ya que no es posible utilizar eficientemente el Hamiltoniano evualuado en el punto de máximo en el tiempo.

(ii) Buscar hipótesis adecuadas para el Hamiltoniano H que permitan realizar una generalización de los resultados de regularidad Hölder obtenidos para (4.1.1), enfocándonos ahora en ecuaciones del tipo (4.1.1) pero donde ahora el Hamiltoniano también dependa del gradiente de u, o incluso que tenga dependencia de operadores integro-diferenciales.

(iii) Se debe realizar una investigación acerca de la regularidad Hölder de las soluciones viscosas para (4.3.18) usando una metodología distinta a la planteada en el Capítulo 4.

Bibliografía

[1] E. Topp y M. Yangari, *Existence and uniqueness for parabolic problems with Caputo time derivative*, J. Differential Equations 262(12) (2017), 6018-6046.

[2] P. Cardaliaguet, *Solutions de viscosité d'équations elliptiques et paraboliques non linéaire*, (2004), notas precedentes de un curso de la DEA impartido en Rennes a finales del 2003.

[3] O. Ley, E. Topp y M. Yangari, *Some Results for the large time behavior of Hamilton-Jacobi equations with Caputo time derivative, Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series A*, 41(8) (2021), 3555–3577.

[4] M. G. Crandall, H. Ishii y P.-L. Lions, *User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations*, Bull. Amer. Math. Soc., 27(1) (1992), 1-67.

[5] R. Metzler, J. Klafter, *The random walk's guide to anomalous diffusion: afractional dynamics approach*, Phys. Rep., 339(1) (2000), 1–77.

[6] D. Benson, M. Meerschaert, S. Wheatcraft, *Application of a fractional advection–dispersion equation*, Water Resour. Res., 36(1) (2000), 1403–1412.

[7] M.M. Meerschaert, E. Scalas, *Coupled continuous time random walks in finance*, Phys. A, 370(1) (2006), 114–118.

[8] V.E. Tarasov, *Review of some promising fractional physical models*, Internat. J. Modern Phys. B, 27(9) (2013), 1330005 (32 páginas).

[9] J.-G. Liu, Z. Ma, Z. Zhou, *Explicit and implicit TVD schemes for conservation laws with Caputo derivatives*, Journal of Scientific Computing, 72(1) (2017), 291–313.

[10] M. Concezzi, R. Spigle, *Some analytical and numerical properties of the Mittag–Lefflerfunctions*, Fractional Calculus and Applied Analysis, 18(1) (2015), 64-94.

[11] E. Topp y M. Yangari, *Weakly coupled systems of parabolic Hamilton-Jacobi equations withs Caputo time derivative*, NoDEA, 25(5) (2018), 41.

[12] Kai Diethelm, *The Analysis of Fractional Differential Equations, An Application-Oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type*

[13] Michael G. Crandall y Pierre-Louis Lions *Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations* 277(1) (1983), 1-42.

[14] Caffarelli, Luis A.; Cabré, Xavier *Fully nonlinear elliptic equations,* American Mathematical Society Colloquium Publications.

[15]] H. Ishii, Perron's method for Hamilton–Jacobi equations, Duke Math. J. 55(1) (1987), 369–384.