

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

**FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA Y
ELECTRÓNICA**

**DISEÑO Y SIMULACIÓN DE UN SISTEMA DE TELEOPERACIÓN
DE UN ROBOT HUMANOIDE NAO**

MODELADO CINEMÁTICO DEL ROBOT NAO

**TRABAJO DE INTEGRACIÓN CURRICULAR PRESENTADO COMO
REQUISITO PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE INGENIERA EN
ELECTRÓNICA Y AUTOMATIZACIÓN**

JOMAIRA VANESSA NANDAR CARVAJAL

jomaira.nandar@epn.edu.ec

DIRECTOR: DR. GEOVANNY DANILO CHÁVEZ GARCÍA

daniilo.chavez@epn.edu.ec

DMQ, enero 2022

CERTIFICACIONES

Yo, JOMAIRA VANESSA NANDAR CARVAJAL declaro que el trabajo de integración curricular aquí descrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y, que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.



JOMAIRA VANESSA NANDAR CARVAJAL

Certifico que el presente trabajo de integración curricular fue desarrollado por JOMAIRA VANESSA NANDAR CARVAJAL, bajo mi supervisión.



DR. GEOVANNY DANILO CHÁVEZ GARCÍA
DIRECTOR

DECLARACIÓN DE AUTORÍA

A través de la presente declaración, afirmamos que el trabajo de integración curricular aquí descrito, así como el (los) producto(s) resultante(s) del mismo, son públicos y estarán a disposición de la comunidad a través del repositorio institucional de la Escuela Politécnica Nacional; sin embargo, la titularidad de los derechos patrimoniales nos corresponde a los autores que hemos contribuido en el desarrollo del presente trabajo; observando para el efecto las disposiciones establecidas por el órgano competente en propiedad intelectual, la normativa interna y demás normas.

JOMAIRA VANESSA NANDAR CARVAJAL

DR. GEOVANNY DANILO CHÁVEZ GARCÍA

DEDICATORIA

El presente trabajo está dedicado a mi familia por haber sido un apoyo fundamental a lo largo de mi vida y carrera universitaria.

A todas las personas que me han acompañado en esta etapa, aportando a mi formación personal y profesional.

AGRADECIMIENTO

A mi familia por haberme dado la oportunidad de formarme académicamente y ser mi apoyo durante todo este tiempo.

ÍNDICE DE CONTENIDO

CERTIFICACIONES.....	I
DECLARACIÓN DE AUTORÍA.....	II
DEDICATORIA.....	III
AGRADECIMIENTO.....	IV
ÍNDICE DE CONTENIDO.....	V
RESUMEN	VII
ABSTRACT	VIII
1. INTRODUCCIÓN	1
1.1. Objetivo general.....	2
1.2. Objetivos específicos	2
1.3. Alcance	2
1.4. Marco teórico	3
1.4.1. Robot Humanoide NAO	3
1.4.1.1. Especificaciones técnicas.....	3
1.4.2. Cinemática del robot.....	7
1.4.2.1. Cinemática directa.....	7
1.4.2.1.1. Matriz de transformación homogénea.....	7
1.4.2.1.2. Matriz de traslación	8
1.4.2.1.3. Matriz de rotación.....	8
1.4.2.1.4. Parámetros Denavit Hartenberg (DH).....	9
2. METODOLOGÍA	11
2.1. Cinemática directa del Robot NAO	11
2.1.1. Posición cero del Robot NAO	11
2.1.2. Caracterización del robot NAO	12
2.1.3. Modelo cinemático completo del robot NAO	12

2.1.3.1.	Cadena Cinemática de la Cabeza	12
2.1.3.2.	Cadena Cinemática de los brazos	14
2.1.3.3.	Cadena Cinemática de las piernas	17
2.1.4.	Modelo cinemático Reducido del Robot NAO	21
2.1.5.	Construcción del Modelo 3D del Robot NAO	26
2.1.6.	Interfaz Gráfica en Matlab.....	35
3.	RESULTADOS, CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.....	39
3.1.	Resultados	39
3.1.1.	Modelo Cinemático Completo del Robot NAO	39
3.1.2.	Modelo Cinemático Reducido del robot NAO.....	40
3.1.3.	Integración del modelo 3D del Robot NAO	43
3.1.4.	Resultados empleando la interfaz de usuario	45
3.2.	Conclusiones	48
3.3.	Recomendaciones	49
4.	REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	50
5.	ANEXOS.....	52
	ANEXO I.	52

RESUMEN

Los robots con múltiples grados de libertad como robots humanoides son actualmente plataformas de estudio importantes en el ámbito de la robótica, dado que se busca el desarrollo de robots con habilidades sociales relacionadas con la capacidad de transmitir, reproducir posturas, e imitar comportamientos humanos. La robustez inherente y dinámica natural del cuerpo humano permiten fácilmente la ejecución de tareas simples como caminar, hablar, interactuar en el medio, sin embargo, para robots humanoides esta tarea no es fácil dado que su estructura es compleja y no lineal, por lo que se requiere desarrollar controladores que tengan la capacidad de mover cada una de las articulaciones del robot logrando la estabilidad y equilibrio del sistema robótico. Por lo tanto, desarrollar un modelo del robot permitirá conocer y traducir el movimiento articular del robot al plano tridimensional físico, y con esto definir caminos que ubiquen los extremos articulares del robot que sigan trayectorias de movimiento, es así como este trabajo se centra en la obtención del modelo cinemático directo del robot humanoide NAO usando la metodología de Denavit Hartenberg para todas sus extremidades con el fin de aportar al desarrollo de controladores fiables que puedan preservar la estabilidad del robot y realizar movimientos acordes a una planificación de trayectorias.

PALABRAS CLAVE: robot humanoide, cinemática directa, modelamiento cinemático, NAO

ABSTRACT

Robots with multiple degrees of freedom such as humanoid robots are currently important study platforms in the field of robotics, since the development of robots with social skills related to the ability to transmit, reproduce postures, and imitate human behavior is sought. The inherent robustness and natural dynamics of the human body easily allow the execution of simple tasks such as walking, speaking, interacting in the environment, however, for humanoid robots this task is not easy since its structure is complex and non-linear, so It is required to develop controllers that have the ability to move each of the robot's joints, achieving the stability and balance of the robotic system. Therefore, developing a robot model will allow you to know and translate the articular movement of the robot to the three-dimensional physical plane, and with these defined paths that locate the articular ends of the robot that follow movement trajectories, is how this work focuses on obtaining the direct kinematic model of the NAO Humanoid Robot using the Methodology of Denavit Hartenberg for all its limbs to contribute to the development of reliable controllers that can preserve the stability of the robot and make movements according to a trajectory planning.

KEYWORDS: humanoid robot, forward kinematics, kinematic modeling, NAO

1. INTRODUCCIÓN

Durante las últimas décadas el desarrollo e investigación enfocado en la robótica se ha expandido, inició con manipuladores de robots industriales y al momento existen robots autónomos con funcionalidades como la locomoción bípeda, síntesis de voz y visión artificial que permiten la interacción del robot con el medio[1]. Los robots articulados con múltiples grados de libertad se han convertido en plataformas de investigación populares en el campo de la robótica y la inteligencia artificial dado que los investigadores buscan el desarrollo de un robot social, tales robots tienen la capacidad de realizar movimientos complejos como mantener el equilibrio, caminar, levantarse, entre otras funcionalidades con el fin de que puedan participar en tareas remotas como telecirugía, rehabilitación, búsqueda y rescate, además de ser una herramienta educativa que dependiendo de las características del robot se adapta a los niveles de aprendizaje requeridos por el usuario[2][3]. Sin embargo, un elevado número de grados de libertad y la variabilidad de la estructura mecánica del robot es un importante problema en el desarrollo de estos robots dado que el uso de controladores tradicionales o programación basada en la experiencia humana para la ejecución de movimientos es complicado y depende de las habilidades operativas de los usuarios, habilidades de programación de los desarrolladores y de la experiencia[4]. Para el diseño de movimientos dinámicos complejos es necesario el uso de la cinemática de robots, siendo esta una aplicación de la geometría para el estudio de cadenas robóticas, la cinemática incluye cinemática directa que proporciona un medio para mapear cualquier configuración del robot desde su espacio articular al espacio físico tridimensional en el que el robot opera, también se tiene la cinemática inversa que es un medio para encontrar la configuración de articulaciones que impulsan los efectores finales hacia los puntos del espacio tridimensional deseados, es por esto que la cinemática es necesaria para la planificación de trayectorias y movimientos, de modo que sea posible establecer las articulaciones del robot en ángulos que lleven a los efectores finales a puntos establecidos[2][5]. Otra de la funcionalidad de la cinemática del robot es conseguir el equilibrio del robot a partir del cálculo del centro de masa de este, valor que cambia constantemente a medida que el robot se mueve y en este sentido es necesario conocer la posición y orientación exacta del robot en el espacio tridimensional para conocer esta variable. [6].

En este trabajo presentamos una solución a la cinemática directa completa y exacta para todas las extremidades del robot humanoide NAO que es nuestro objeto de estudio, para ello se usa el método establecido por Denavit y Hartenberg, este trabajo es una base para el desarrollo de sistemas de control para el movimiento del robot, además un aporte para

la ejecución de movimientos del robot en tiempo real a través de una interfaz de usuario que muestra en forma gráfica el comportamiento del robot NAO.

1.1. Objetivo general

Desarrollar el modelo cinemático del robot NAO.

1.2. Objetivos específicos

- Realizar una revisión bibliográfica del modelamiento cinemático de sistemas robóticos y del robot humanoide NAO H25 V6.
- Desarrollar analíticamente el modelo cinemático completo y reducido del robot NAO.
- Diseñar e implementar un modelo mecánico 3D del robot NAO para simular el movimiento de su estructura.
- Implementar una interfaz de usuario que permita manipular las variables asociadas a los grados de libertad del robot y visualizar los resultados del modelo cinemático y mecánico.

1.3. Alcance

El alcance que se ha definido en este proyecto técnico se describe en los siguientes pasos:

- Se realizará la revisión bibliográfica de las características técnicas, componentes y funcionalidades del robot humanoide NAO H25 V6.
- Se realizará un estudio de los métodos de modelamiento cinemático de sistemas robóticos y se escogerá la metodología adecuada para las características del robot.
- Se desarrollará el modelo cinemático directo del robot NAO considerando cada una de las cadenas cinemáticas que lo componen considerando que se obtendrá un modelo completo y reducido del movimiento del robot.
- Se implementará un algoritmo usando Matlab para el cálculo matemático del modelo completo y reducido del robot, y se comprobará el modelo cinemático del robot con los resultados de posición en Matlab y el fundamento teórico revisado.
- Se desarrollará el modelo mecánico del robot NAO mediante la plataforma Simscape Multbody de Matlab-Simulink para simular el movimiento del robot acorde con los parámetros que establezca el usuario.

- Se diseñará e implementará una interfaz de usuario que facilite la visualización del modelo cinemático completo del robot junto con el modelo 3D desarrollado.

1.4. Marco teórico

1.4.1. Robot Humanoide NAO

El robot NAO, es un robot humanoide programable de tamaño pequeño y con una cantidad considerable de funciones tales como su capacidad de comunicación con el entorno, donde mediante la modalidad profesor puede hablar sobre temas de ciencia, robótica, o incluso sobre hábitos de salud para niños, al enseñar sobre estos temas hace uso de sus sensores para explicar el funcionamiento de robots, y además brinda una explicación de como se lo puede programar, otra de sus funciones es el reconocimiento de personas ya que NAO puede recordar personas con las cuales a tenido contacto y recordará su nombre[3], este robot puede programarse a partir de procesos sencillos e intuitivos hasta procesos complejos que se enfocan en la investigación, NAO es un robot humanoide que ha sido desarrollado por la empresa francesa Aldebaran Robotics a partir del año 2004 y con el paso de los años se ha ido mejorando su diseño y al momento existen diferentes versiones de este robot.

1.4.1.1. Especificaciones técnicas

La versión del robot que ha sido considerada para este estudio es el NAO H25 v6.0., un robot humanoide de 57.4 cm de altura y 5.4 kg de peso, lleva consigo un CPU cuyo procesador es de tipo ATOM E3845 y trabaja a la frecuencia de 1.91GHz, cuenta con una memoria RAM de 4GB y una memoria flash de 32GB, el sistema operativo del robot es NAOqi el cual se basa en Linux, y su programación puede realizarse con lenguajes Python, C++ y Java. NAO es alimentado por una batería de iones de litio de 21.6 V/2.9 Ah que permite una operación de aproximadamente 60 a 90 minutos de uso continuo, su comunicación es a través de enlace Ethernet cableado a través de un puerto RJ45, comunicación inalámbrica a través de WIFI-IEEE 802.11a/b/g/n o Bluetooth-4.0(LE)[7].

NAO es un robot humanoide capaz de interactuar con el medio de forma natural, con todo tipo de espectadores, ya que puede ver, escuchar y hablar en diferentes idiomas, según como haya sido programado. Sus movimientos y acciones pueden ser complejos y sin límites gracias al elevado número de grados de libertad que posee, siendo un total de 25 DOF[3], el robot NAO puede relacionarse y desenvolverse en el medio a partir de sus múltiples sensores, entre los cuales se encuentran dos cámaras en su cabeza alineadas verticalmente, cuyas vistas no se superponen y proveen una visión de las áreas frente al robot para reconocimiento de objetos, formas y personas, además de ello posee cuatro

micrófonos, nueve sensores táctiles ubicados en la cabeza y en sus manos, un sintetizador de voz y dos altavoces que le dan un alto grado de interactividad[8], cuenta con cuatro sensores sonares en el torso, dos receptores y dos transmisores que permiten la detección de obstáculos hasta una distancia de 0.8m, también posee una unidad inercial conformada por un giroscopio y un acelerómetro de 3 ejes ubicados en el torso para obtener la información en tiempo real de su movimiento corporal[7]. NAO posee 2 bumpers ubicados en la punta de sus pies, estos son sensores digitales que funcionan conmutando su estado al momento en que el robot detecta obstáculos durante su trayectoria y se detiene, además de esto cada pie posee una serie de resistencias sensibles a la fuerza para proporcionar una retroalimentación acerca de las fuerzas aplicadas a los pies.[7] Las articulaciones y sensores presentes en el robot se pueden visualizar en la Figura 1.1.

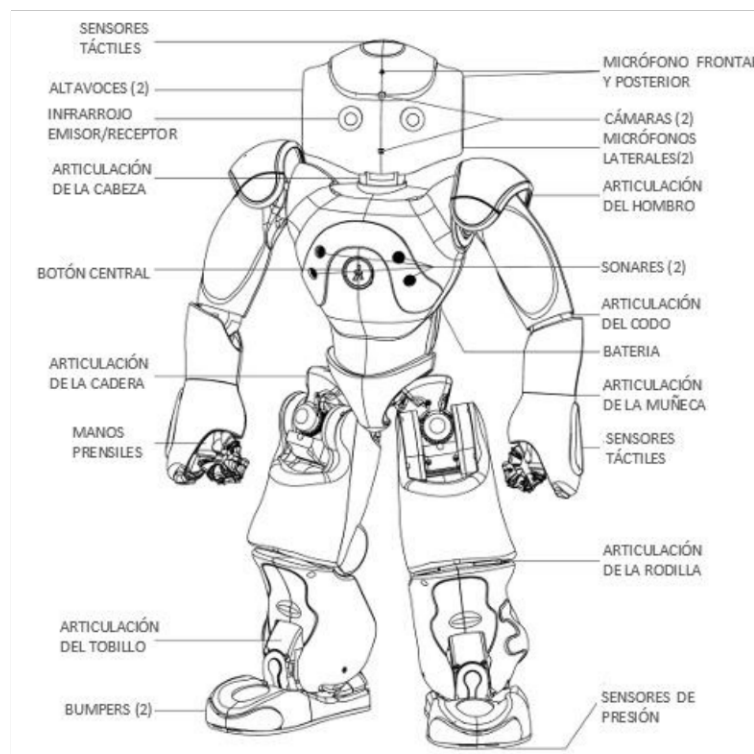


Figura 1.1 Estructura del robot NAO H25 v6[8]

El robot NAO H25 V6 posee 25 grados de libertad que se distribuyen en cinco cadenas cinemáticas tomando en cuenta la cabeza, los brazos y las piernas, se considera que la cabeza tiene como efector final la cámara superior que dispone, para cada brazo su efector final son las manos, y en cada pierna se tiene los pies como efector final, la Figura 1.2 muestra la posición cero del robot junto con la orientación de cada uno de los grados de libertad del robot definidas dentro de los ejes roll, pitch o yaw.

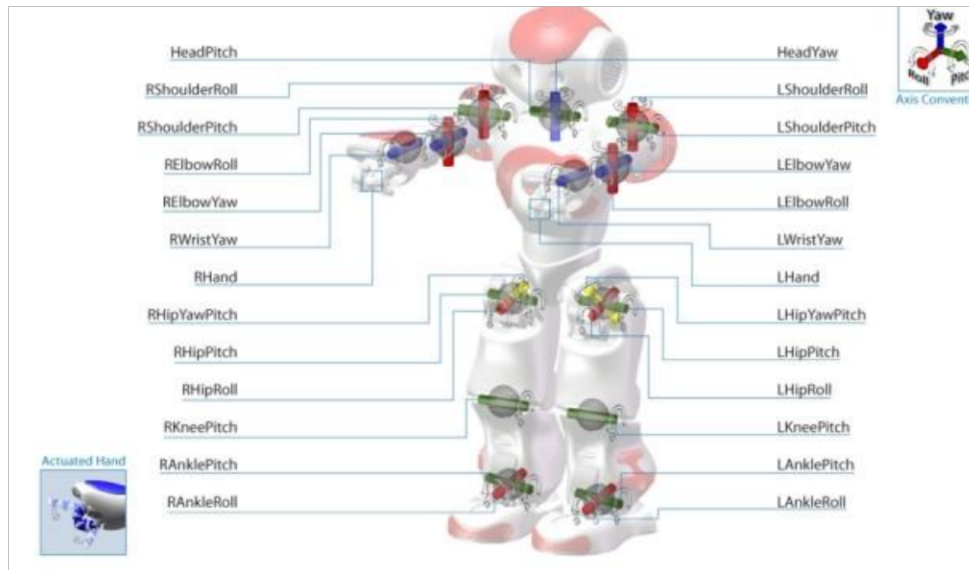


Figura 1.2 Estructura cinemática del robot NAO[8]

El robot NAO posee un rango de movilidad definido para cada una de las articulaciones, la Tabla 1.1 muestra estos valores precisando a su vez las cadenas cinemáticas que constituyen el robot.

Tabla 1.1 Rango de movilidad de cada articulación[8]

Cadena Cinemática	Articulación	Rango de movimiento (Deg)	Rango de movimiento (Rad)
Cabeza	HeadYaw	-119.5 a 119.5	-2.0857 a 2.0857
	HeadPitch	-38.5 a 29.5	-0.6720 a 0.5149
Brazo Derecho	RShoulderPitch	-119.5 a 119.5	-2.0857 a 2.0857
	RShoulderRoll	-76 a 18	-1.3265 a 0.3142
	RElbowYaw	-119.5 a 119.5	-2.0857 a 2.0857
	RElbowRoll	2 a 88.5	0.0349 a 1.5446
	RWristYaw	-104.5 a 104.5	-1.8238 a 1.8238
	RHand	Abrir y Cerrar	Abrir y Cerrar
Brazo Izquierdo	LShoulderPitch	-119.5 a 119.5	-2.0857 a 2.0857
	LShoulderRoll	-18 a 76	-0.3142 a 1.3265
	LElbowYaw	-119.5 a 119.5	-2.0857 a 2.0857
	LElbowRoll	-88.5 a -2	-1.5446 a -0.0349
	LWristYaw	-104.5 a 104.5	-1.8238 a 1.8238
	LHand	Abrir y Cerrar	Abrir y Cerrar
Pierna Derecha	RHipYawPitch	-65.62 a 42.44	-1.145303 a 0.740810
	RHipRoll	-45.29 a 21.74	-0.790477 a 0.379472
	RHipPitch	-88.00 a 27.73	-1.535889 a 0.484090
	RKneePitch	-5.90 a 121.47	-0.103083 a 2.120198
	RAnklePitch	-67.97 a 53.40	-1.186448 a 0.932056
	RAnkleRoll	-44.06 a 22.80	-0.768992 a 0.397935
Pierna Izquierda	LHipYawPitch	-65.62 a 42.44	-1.145303 a 0.740810
	LHipRoll	-21.74 a 45.29	-0.379472 a 0.790477

	LHipPitch	-88.00 a 27.73	-1.535889 a 0.484090
	LKneePitch	-5.29 a 121.04	-0.092346 a 2.112528
	LAnklePitch	-68.15 a 52.86	-1.189516 a 0.922747
	LAnkleRoll	-22.79 a 44.06	-0.397880 a 0.769001

Las articulaciones y eslabones del robot tienen una separación específica, estas medidas se observan en la Figura 1.3 y se detallan en la Tabla 1.2.

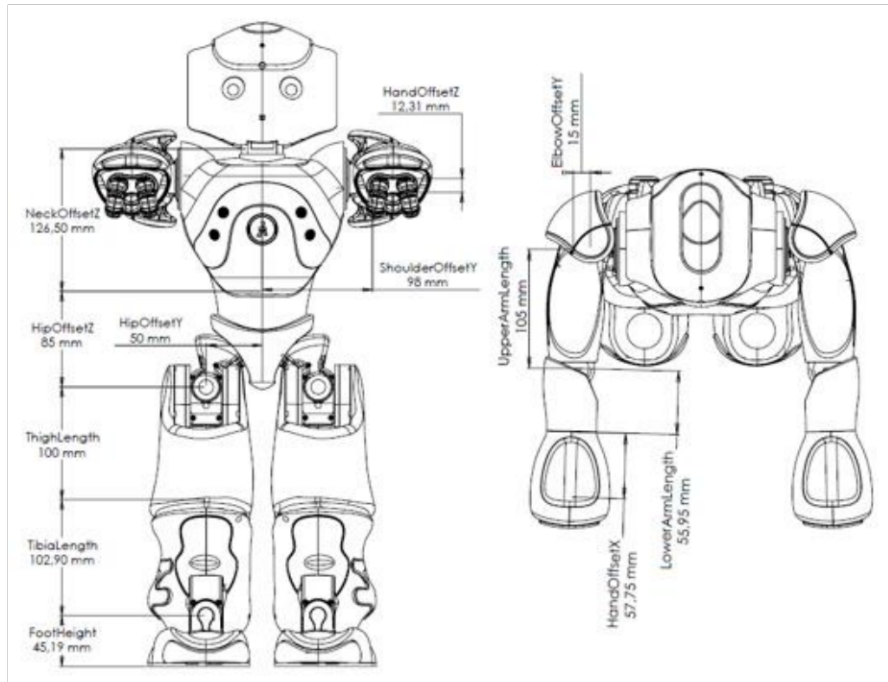


Figura 1.3 Vista frontal y vista superior del robot NAO V6

Tabla 1.2 Distancia entre articulaciones y eslabones del robot NAO V6[8]

Longitud	mm
ShoulderOffsetY	98.00
ElbowOffsetY	15.00
UpperArmLength	105.00
LowerArmLength	55.95
ShoulderOffsetZ	100.00
HandOffsetX	57.75
HandOffsetZ	12.31
HipOffsetZ	85.00
HipOffsetY	50.00
ThighLength	100.00
TibiaLength	102.90
FootHeight	45.19

1.4.2. Cinemática del robot

La cinemática del robot se enfoca en el estudio del movimiento de este con respecto a un sistema de referencia, de modo que se realiza una descripción analítica del movimiento del robot, con el fin de obtener relaciones de posición y orientación del extremo final del robot con respecto a los valores articulares que toma[9]. Una cadena cinemática es un conjunto de enlaces robóticos conectados con articulaciones, la cantidad de articulaciones unidas con un eslabón proporciona el número de grados de libertad que dan lugar al movimiento y flexibilidad de la cadena. La cinemática del robot se aplica para la planificación y ejecución de movimientos así también para el cálculo de fuerzas y pares de los actuadores[6].

En la cinemática del robot se presentan dos problemas a resolver[9], el primero consiste en determinar la posición y orientación del extremo final en el espacio cartesiano tridimensional considerando un sistema de referencia y se conoce como problema cinemático directo, en este caso se conocen los parámetros geométricos del robot y valores articulares, como segundo problema se tiene la cinemática inversa que se enfoca en obtener la configuración y valores articulares que debe tomar la cadena cinemática para llegar a una posición y orientación del extremo final conocida, esto ya que normalmente los robots necesitan alcanzar puntos de destino o seguir trayectorias, así la cinemática inversa proporciona un camino para pasar del espacio tridimensional al espacio articular [3]

1.4.2.1. Cinemática directa

Para definir un objeto en el espacio tridimensional con relación a un sistema de referencia fijo se utiliza algebra vectorial y matricial con el fin de representar y describir su ubicación, como se ha descrito previamente un robot se considera como cadena cinemática constituida por eslabones unidos mediante articulaciones en la cual se puede establecer un sistema de referencia fijo que se sitúe en la base del robot y con ello describir la ubicación de cada eslabón con respecto al sistema de referencia descrito, de este modo el problema cinemático directo se reduce en encontrar una matriz de transformación homogénea en función de las coordenadas articulares que relaciona la posición y orientación del robot con el sistema de referencia fijo ubicado en la base de este[9].

1.4.2.1.1. Matriz de transformación homogénea

Una matriz de transformación es una matriz que representa la transformación de un vector desde un sistema de coordenadas a otro, su dimensión es 4×4 y se considera que se compone por cuatro submatrices de diferente dimensión que representan diferentes parámetros, se tiene la submatriz $R_{3 \times 3}$ que consiste en una matriz de rotación, la submatriz $p_{3 \times 1}$ se refiere a un vector de traslación, la submatriz $f_{1 \times 3}$ corresponde a una transformación

de perspectiva, y la submatriz $w_{1 \times 1}$ que corresponde a una escala global, la matriz final se observa a continuación[9].

$$T = \begin{bmatrix} R_{3 \times 3} & p_{3 \times 1} \\ f_{1 \times 3} & w_{1 \times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Rotación} & \text{Traslación} \\ \text{Perspectiva} & \text{Escalado} \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

Para robótica la submatriz $f_{1 \times 3}$ es una matriz nula y la submatriz $w_{1 \times 1}$ es la unidad y solo es de interés conocer los valores de $R_{3 \times 3}$ y $p_{3 \times 1}$. [3]

1.4.2.1.2. Matriz de traslación

La traslación es una función que permite el movimiento en el espacio cartesiano de cada punto a una distancia y dirección fija, esta traslación en el espacio tridimensional se puede describir con una matriz de transformación homogénea 4x4 donde la submatriz $R_{3 \times 3}$ de la ecuación (1.1) es igual a la matriz identidad y se expresa de la siguiente manera:

$$A(dx, dy, dz) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & dx \\ 0 & 1 & 0 & dy \\ 0 & 0 & 1 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

donde dx,dy,dz define la distancia de traslación a lo largo de los ejes x,y, y z respectivamente[6].

1.4.2.1.3. Matriz de rotación

La rotación es una función que permite el giro de un vector en un ángulo fijo alrededor una dirección específica, esta rotación en el espacio tridimensional se puede describir con diferentes matrices de transformación homogénea que corresponden al giro alrededor del eje x,y o z, donde la submatriz $p_{3 \times 1}$ de la ecuación (1.1) es nula y se expresan de la siguiente manera[10]:

$$R(x, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) & 0 \\ 0 & \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

$$R(y, \theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \text{sen}(\theta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\text{sen}(\theta) & 0 & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

$$R(z, \theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) & 0 & 0 \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

1.4.2.1.4. Parámetros Denavit Hartenberg (DH)

Denavit y Hartenberg han propuesto un método matricial para describir puntos en el extremo de una articulación en relación con un sistema de coordenadas fijo ubicado en otro extremo articular. Este método consiste en definir sistemas de coordenadas en cada una de las articulaciones que conforman el robot siguiendo normas específicas que serán descritas posteriormente, y a su vez garantizan que los sistemas de coordenadas se asocien entre sí, además de que al considerar un marco de referencia cualquiera solo sea necesario realizar cuatro movimientos sucesivos entre rotaciones y traslaciones para llegar al siguiente marco de referencia, estos movimientos se describen con matrices de transformación homogéneas utilizando 4 parámetros a , α , d , y θ [10].

El algoritmo de Denavit Hartenberg que permite obtener el modelo cinemático directo se explicará en base a la Figura 1.4 donde se muestra tres articulaciones denominadas J_{i-1} , J_i y J_{i+1} , se establece que la numeración de las articulaciones empieza con el primer grado de libertad de la cadena cinemática, en cuanto a los eslabones se empieza con el número 0 considerando a este como la base fija del robot y 1 al primer eslabón móvil de la cadena.[9]

La Figura 1.4 muestra como el origen del sistema de coordenadas O_i para i de 1 a $n-1$ se debe ubicar en la intersección del eje Z_i con la perpendicular común a los ejes Z_{i-1} y Z_i .

El eje Z_i se establece siguiendo la dirección del eje de la articulación.

La dirección del eje X_i se ubica a lo largo de la normal común a los ejes Z_{i-1} y Z_i con orientación de Z_{i-1} a Z_i .

El eje Y_i se ubicará usando la regla de la mano derecha considerando Z_i y X_i . [9]

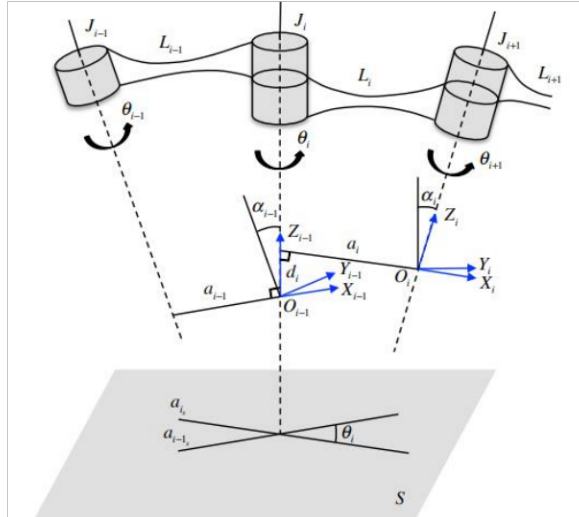


Figura 1.4 Parámetros Denavit Hartenberg [5]

Los parámetros Denavit Hartenberg que se observan en la Figura 1.4 serán descritos a continuación:

a_i : distancia desde el origen del sistema de coordenadas O_{i-1} hasta la intersección del eje Z_{i-1} y el eje X_i a lo largo del eje X_i , cuando son sistemas paralelos se considera a la distancia entre el eje Z_{i-1} y Z_i .

α_i : ángulo de rotación medido desde el eje Z_{i-1} con el eje Z_i respecto al eje X_i .

d_i : distancia desde el origen del sistema de coordenadas O_{i-1} hasta la intersección de los ejes Z_{i-1} y el eje X_i . a lo largo del eje Z_{i-1} .

θ_i : ángulo de rotación desde el eje X_{i-1} al eje X_i medido respecto al eje Z_{i-1} . [9]

Una vez que se ha determinado el sistema de coordenadas para cada articulación siguiendo las normas descritas, se puede desarrollar de manera sencilla una matriz de transformación homogénea que relacione el sistema de coordenadas O_{i-1} con el sistema O_i , así la matriz de Denavit Hartenberg se ha establecido de la siguiente manera [11].

$$T_i^{i-1} = R_x(\alpha)T_x(a)R_z(\theta)T_z(d) \quad (1.6)$$

Análíticamente la matriz de transformación resultante de la composición anterior es la siguiente:

$$T_i^{i-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\text{sen}\theta_i & 0 & a_i \\ \text{sen}\theta_i \cos\alpha_i & \cos\theta_i \cos\alpha_i & -\text{sen}\alpha_i & -d_i \text{sen}\alpha_i \\ \text{sen}\theta_i \text{sen}\alpha_i & \cos\theta_i \text{sen}\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \cos\alpha_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

Previamente se ha descrito el robot NAO y las cinco cadenas cinemáticas que lo conforman[8], con la matriz Denavit Hartenberg se busca obtener el modelo cinemático directo del robot de manera analítica, y con ello se podrá definir la posición de cada uno de los extremos articulares del NAO con relación a un marco de referencia fijo en la base del robot.

2. METODOLOGÍA

El presente trabajo de titulación se ha desarrollado bajo la metodología presentada a continuación, en la cual se realiza una explicación detallada del procedimiento que se ha llevado a cabo en esta investigación, a partir de diferentes actividades que permiten el cálculo teórico del modelo del robot NAO basándose en un previo análisis de la información recolectada en fuentes primarias como libros y fuentes secundarias, como lo son artículos académicos en relación con sistemas robóticos, y a su vez se realiza una comprobación mediante a través softwares de simulación.

2.1. Cinemática directa del Robot NAO

2.1.1. Posición cero del Robot NAO

Es necesario definir el marco de referencia base del robot y la posición cero de cada articulación como primer paso. Se considerará como marco de referencia base al marco del torso del robot, en la Figura 2.1 se observa esto, donde también se puede visualizar la posición cero de todas las articulaciones, mismo que es proporcionado por Aldebaran Robotics.

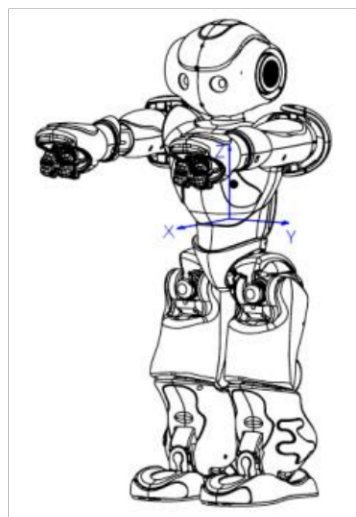


Figura 2.1 Marco de referencia base y posición cero de las articulaciones

2.1.2. Caracterización del robot NAO

La versión del robot NAO de la cual se realiza este estudio tiene 25 grados de libertad, el robot tiene dos DOF en la cabeza, 6 DOF en cada brazo, 5 DOF en cada pierna y un DOF en la pelvis, el cual se comparte entre las dos piernas. Las cinco cadenas cinemáticas y sus articulaciones definidas por Aldebaran Robotics son las siguientes [8]:

Tabla 2.1 Grados de Libertad del robot NAO V6[8]

Cadena Cinemática	Articulación	Grados de libertad
Cabeza	Neck (pitch y yaw)	2 DOFs
Brazo	Shoulder(pitch y roll)	2 DOFs x 2 = 4DOFs
	Elbow(roll y yaw)	2 DOFs x 2 = 4DOFs
	Wrist(yaw)	1 DOFs x 2 = 2DOFs
	Hand(open/close)	1 DOFs x 2 = 2DOFs
Torso	Pelvis(yaw/pitch)	1 DOFs
Pierna	Hip (pitch y roll)	2 DOFs x 2 = 4DOFs
	Knee (pitch)	1 DOFs x 2 = 2DOFs
	Ankle (pitch y roll)	2 DOFs x 2 = 4DOFs
Total		25 DOFs

2.1.3. Modelo cinemático completo del robot NAO

2.1.3.1. Cadena Cinemática de la Cabeza

La cabeza es una cadena cinemática sencilla del robot NAO, en el cual se tiene dos grados de libertad y dos efectores finales las cuales son las cámaras superior e inferior, se busca obtener la posición del efector final considerando la cámara superior y tomando como base de referencia el torso.

Primero es necesario trasladar el sistema de referencia del torso hacia la primera articulación de la cabeza por lo que se realiza una traslación a lo largo del eje Z con la matriz de traslación de la siguiente forma:

$$A_B^0 = A(0,0, NeckOffsetZ) \quad (2.1)$$

A continuación, se establecen los sistemas de coordenadas para cada una de las articulaciones de la cadena cinemática que se observan en la Figura 2.2.

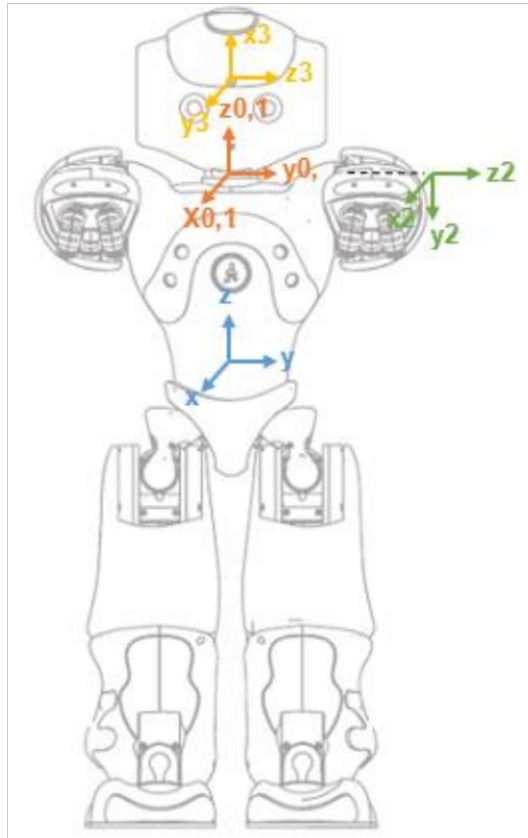


Figura 2.2 Articulaciones de la Cadena cinemática de la Cabeza

La cadena cinemática considera las articulaciones HeadYaw y Head Pitch con los parámetros D-H definidos en la Tabla 2.2.

Tabla 2.2 Parámetros D-H de las articulaciones de la Cabeza

N°	Articulación	θ	d	a	α
1	HeadYaw	θ_1	0	0	0
2	HeadPitch	$\theta_2 - 90^\circ$	0	0	-90

Ubicándonos en la articulación HeadPitch, para llegar hacia el efector final que es la cámara superior será necesario hacer una rotación de 90° en el eje X e Y seguido de una traslación hasta el cuello, que permitirá colocarnos bajo el sistema de referencia del torso, la traslación se realiza de la siguiente manera:

$$A_2^{Ef} = A(TopCameraX, 0, TopCameraZ) \quad (2.2)$$

Finalmente, la matriz de transformación será:

$$T_B^{Ef} = A_B^0 T_0^1 T_1^2 R_X(90^\circ) R_Y(90^\circ) A_2^{Ef} \quad (2.3)$$

De acuerdo con la Tabla 2.2, las matrices de transformación para cada articulación serían las siguientes:

$$T_1^0 = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

$$T_2^1 = \begin{bmatrix} c(\theta_2 - \frac{\pi}{2}) & -s(\theta_2 - \frac{\pi}{2}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s(\theta_2 - \frac{\pi}{2}) & -c(\theta_2 - \frac{\pi}{2}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Como resultado de la ecuación (2.3), se obtiene la matriz de transformación que nos da el modelo cinemático directo de la cabeza del robot NAO. Este resultado se puede observar en la sección Anexo I, a partir de la ecuación (5.1) hasta la ecuación (5.13) que permiten conocer cuál será la orientación y posición del efector final en este caso la cámara superior ubicada en la cabeza, según como se definan los valores articulares para los dos grados de libertad de esta cadena cinemática.

2.1.3.2. Cadena Cinemática de los brazos

La cadena cinemática del brazo izquierdo consiste en 5 articulaciones para las que debemos encontrar los parámetros DH, primero es necesario movernos del torso a la base de la primera articulación para lo cual se realiza una traslación a lo largo del eje Y y del eje Z de la siguiente manera:

$$A_B^0 = A(0, \text{ShoulderOffsetY} + \text{ElbowOffsetY}, \text{ShoulderOffsetZ}) \quad (2.6)$$

Posteriormente se establecen los sistemas de coordenadas para cada una de las articulaciones de la cadena cinemática que se observan en la Figura 2.3.

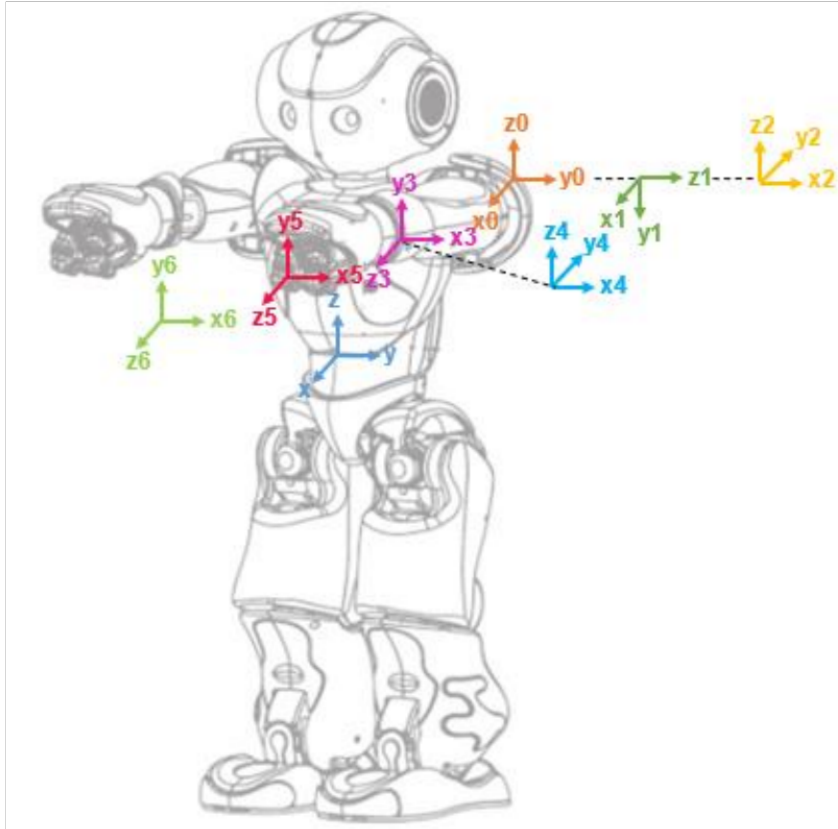


Figura 2.3 Articulaciones de la Cadena cinemática del Brazo

La cadena cinemática considera las articulaciones del brazo desde ShoulderPitch hasta la articulación WristYaw, en la Tabla 2.3 se definen los parámetros D-H.

Tabla 2.3 Parámetros D-H de las articulaciones del Brazo.

N°	Articulación	θ	d	a	α
1	LShoulderPitch	θ_1	0	0	-90
2	LShoulderRoll	$\theta_2 + 90$	0	0	90
3	LElbowYaw	θ_3	UpperArmLength	ElbowOffsetY	90
4	LElbowRoll	θ_4	0	0	-90
5	LWristYaw	θ_5	LowerArmLength	0	90

De acuerdo con la Tabla 2.3 las matrices de transformación para cada articulación serían las siguientes:

$$T_1^0 = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_1 & -c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

$$T_2^1 = \begin{bmatrix} c(\theta_2 + \frac{\pi}{2}) & -s(\theta_2 + \frac{\pi}{2}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s(\theta_2 + \frac{\pi}{2}) & c(\theta_2 + \frac{\pi}{2}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

$$T_3^2 = \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & eoffy \\ 0 & 0 & -1 & -ual \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

$$T_4^3 = \begin{bmatrix} c\theta_4 & -s\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_4 & -c\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

$$T_5^4 = \begin{bmatrix} c\theta_5 & -s\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -lal \\ s\theta_5 & c\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Luego de obtener los parámetros DH para cada una de las articulaciones hasta la articulación LWristYaw es necesario hacer una rotación de -90° en el eje Y y X para luego trasladarnos hasta el efector final a lo largo de los mismos ejes que permita llegar hasta la mano izquierda, en este caso se utiliza la siguiente matriz de traslación:

$$A_2^{Ef} = A(HandOffsetX, 0, 0) \quad (2.12)$$

La matriz de transformación final se define por:

$$T_B^{Ef} = A_B^0 T_0^1 T_1^2 T_2^3 T_3^4 T_4^5 R_y(-90^\circ) R_x(-90^\circ) A_2^{Ef} \quad (2.13)$$

Como resultado de la ecuación (2.13), se obtiene la matriz de transformación que nos da el modelo cinemático directo del brazo izquierdo del robot NAO, este resultado se puede observar en la sección Anexo I, a partir de la ecuación (5.14) hasta la ecuación (5.84)

En el caso del brazo derecho la cadena cinemática se compone por las mismas articulaciones y tendrá los mismos parámetros de DH, la diferencia en este caso es que se realiza una traslación inicial desde el marco de referencia base hasta la primera articulación del brazo, esto se define de la siguiente manera:

$$A_B^0 = A(0, -(ShoulderOffsetY + ElbowOffsetY), ShoulderOffsetZ) \quad (2.14)$$

Por tanto, la matriz de transformación final del brazo derecho sigue la ecuación (2.13) antes descrita, el resultado se puede observar en la sección Anexo I, a partir de la ecuación (5.85)

hasta la ecuación (5.155) , que describen la posición y orientación del efector final del brazo que en este caso es la mano del robot.

2.1.3.3. Cadena Cinemática de las piernas

La cadena cinemática de la pierna izquierda consiste en 6 articulaciones para las que debemos encontrar los parámetros DH, primero es necesario movernos del torso a la base de la primera articulación para lo cual se realiza una traslación a lo largo del eje Y y del eje Z de la siguiente manera:

$$A_B^0 = A(0, HipOffsetY, -HipOffsetZ) \quad (2.15)$$

A continuación, se establecen los sistemas de coordenadas para cada una de las articulaciones de la cadena cinemática que se observan en la Figura 2.4.

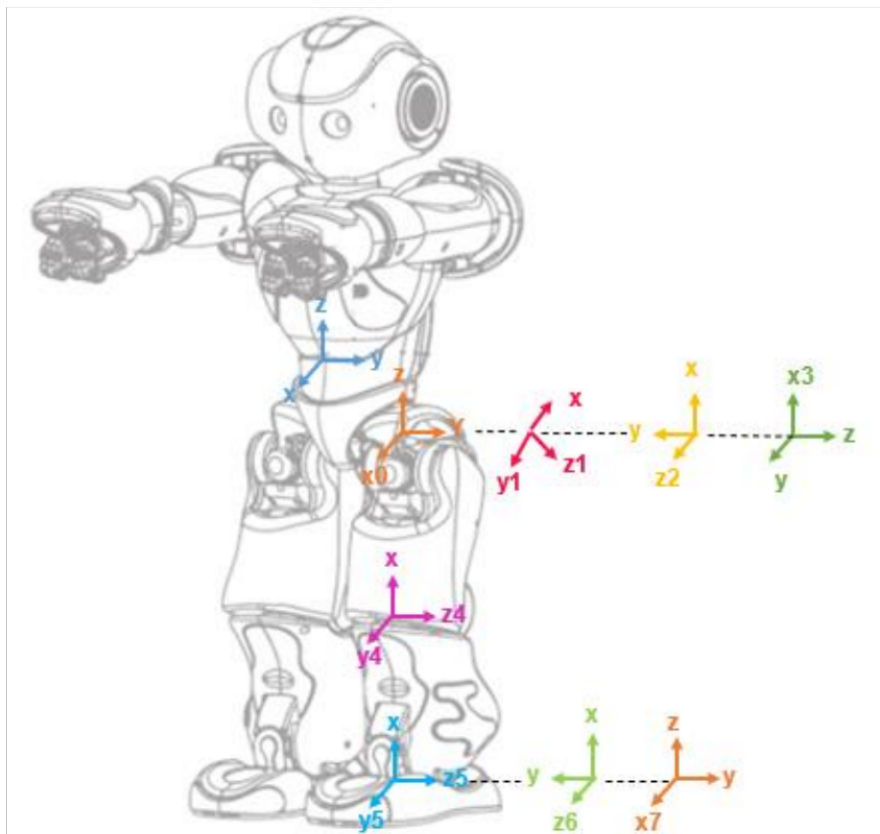


Figura 2.4 Articulaciones de la Cadena cinemática de la Pierna

La cadena cinemática considera las articulaciones de la pierna desde HipYawPitch hasta la articulación AnkleRoll, en la **Tabla 2.4** se definen los parámetros D-H.

Tabla 2.4 Parámetros D-H de las articulaciones de la Pierna izquierda

N°	Articulación	θ	d	a	α
1	LHipYawPitch	$\theta_1 - 90$	0	0	-135
2	LHipRoll	$\theta_2 + 45$	0	0	-90
3	LHipPitch	θ_3	0	0	90
4	LKneePitch	θ_4	0	- ThighLength	0
5	LAnklePitch	θ_5	0	-TibiaLength	0
6	LAnkleRoll	θ_6	0	0	-90

Luego de obtener los parámetros DH para cada una de las articulaciones hasta la articulación LAnkleRoll es necesario trasladarnos hasta el efector final de la pierna, desde la última articulación a lo largo del eje Z, previo a una rotación de 180° alrededor del mismo eje y seguido de una rotación de -90° alrededor del eje Y para llegar al pie izquierdo con un marco de referencia en dirección al marco base, considerando estas condiciones se utiliza la siguiente matriz de traslación:

$$A_2^{Ef} = A(0,0,-FootHeight) \quad (2.16)$$

La matriz de transformación final se define por:

$$T_B^{Ef} = A_B^0 T_0^1 T_1^2 T_2^3 T_3^4 T_4^5 T_5^6 R_z(180^\circ) R_y(-90^\circ) A_2^{Ef} \quad (2.17)$$

De acuerdo con la Tabla 2.4, las matrices de transformación para cada articulación serían las siguientes:

$$T_1^0 = \begin{bmatrix} c(\theta_1 - \frac{\pi}{2}) & -s(\theta_1 - \frac{\pi}{2}) & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} s(\theta_1 - \frac{\pi}{2}) & -\frac{\sqrt{2}}{2} c(\theta_1 - \frac{\pi}{2}) & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} s(\theta_1 - \frac{\pi}{2}) & -\frac{\sqrt{2}}{2} c(\theta_1 - \frac{\pi}{2}) & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

$$T_2^1 = \begin{bmatrix} c(\theta_2 + \frac{\pi}{4}) & -s(\theta_2 + \frac{\pi}{4}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s(\theta_2 + \frac{\pi}{4}) & -c(\theta_2 + \frac{\pi}{4}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

$$T_3^2 = \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

$$T_4^3 = \begin{bmatrix} c\theta_4 & -s\theta_4 & 0 & -ThL \\ s\theta_4 & c\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

$$T_5^4 = \begin{bmatrix} c\theta_5 & -s\theta_5 & 0 & -TL \\ s\theta_5 & c\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

$$T_6^5 = \begin{bmatrix} c\theta_6 & -s\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_6 & -c\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Como resultado de la ecuación (2.17), se obtiene la siguiente matriz que nos da el modelo cinemático directo de la pierna izquierda del robot NAO, este resultado se puede observar en la sección Anexo I, a partir de la ecuación (5.156) hasta la ecuación (5.213).

En el caso de la pierna derecha para llegar al punto de la primera articulación como se realizó anteriormente se necesita de una traslación dada por la siguiente matriz:

$$A_B^0 = A(0, -HipOffsetY, -HipOffsetZ) \quad (2.24)$$

Para cada una de las articulaciones de la pierna derecha se tiene los siguientes parámetros D-H:

Tabla 2.5 Parámetros D-H de las articulaciones de la Pierna derecha

N°	Articulación	θ	d	a	α
1	LHipYawPitch	$\theta_1 - 90$	0	0	-45
2	LHipRoll	$\theta_2 + 45$	0	0	-90
3	LHipPitch	θ_3	0	0	90
4	LKneePitch	θ_4	0	-ThighLength	0
5	LAnklePitch	θ_5	0	-TibiaLength	0
6	LAnkleRoll	θ_6	0	0	-90

Luego de que se haya realizado las operaciones en relación con cada una de las articulaciones para llegar al efector final será necesario ubicar el sistema de referencia en relación con el torso para lo cual se realiza la misma operación que se hizo en la pierna izquierda, de modo que finalmente tendremos la siguiente matriz:

$$T_B^{Ef} = A_B^0 T_0^1 T_1^2 T_2^3 T_3^4 T_4^5 T_5^6 R_z(180^\circ) R_y(-90^\circ) A_2^{Ef} \quad (2.25)$$

Donde:

$$A_2^{Ef} = A(0,0,-FootHeight) \quad (2.26)$$

De acuerdo con la **Tabla 2.5**, las matrices de transformación para cada articulación serían las siguientes:

$$T_1^0 = \begin{bmatrix} c(\theta_1 - \frac{\pi}{2}) & -s(\theta_1 - \frac{\pi}{2}) & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}s(\theta_1 - \frac{\pi}{2}) & \frac{\sqrt{2}}{2}c(\theta_1 - \frac{\pi}{2}) & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}s(\theta_1 - \frac{\pi}{2}) & -\frac{\sqrt{2}}{2}c(\theta_1 - \frac{\pi}{2}) & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

$$T_2^1 = \begin{bmatrix} c(\theta_2 - \frac{\pi}{4}) & -s(\theta_2 - \frac{\pi}{4}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s(\theta_2 - \frac{\pi}{4}) & -c(\theta_2 - \frac{\pi}{4}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

$$T_3^2 = \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -s\theta_3 & -c\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

$$T_4^3 = \begin{bmatrix} c\theta_4 & -s\theta_4 & 0 & ThL \\ s\theta_4 & c\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

$$T_5^4 = \begin{bmatrix} c\theta_5 & -s\theta_5 & 0 & TL \\ s\theta_5 & c\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

$$T_6^5 = \begin{bmatrix} c\theta_6 & -s\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_6 & -c\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

Como resultado de la ecuación (2.25), se obtiene la matriz de transformación que nos da el modelo cinemático directo de la pierna derecha del robot NAO, este resultado se observa en la sección Anexo I, a partir de la ecuación (5.214), hasta la ecuación (5.270)

Es necesario considerar que el modelo matemático expuesto en la sección Anexo I, se obtiene a través del software Matlab y en este estudio se llega a conocer la posición y orientación de cada uno de los efectores del robot mediante el programa que fue realizado y sigue la lógica del diagrama de flujo de la **Figura 2.5**, ya que para cada cadena cinemática antes descrita se tiene una alta complejidad de resolución matemática.

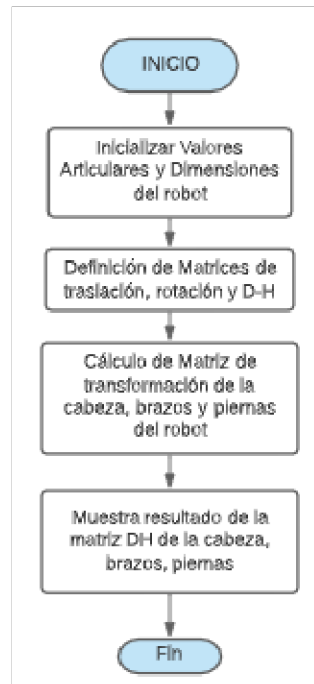


Figura 2.5 Diagrama de flujo modelo cinemático completo del robot NAO

2.1.4. Modelo cinemático Reducido del Robot NAO

El estudio del modelo cinemático reducido del robot NAO se enfocará en las extremidades inferiores del robot NAO, esto debido a que el objetivo del proyecto de titulación es llegar a desarrollar controladores que permitan la ejecución del movimiento de caminata del robot, que pueda llevar a cabo trayectorias evitando obstáculos. Con el fin de que se pueda llegar a una caminata estable y confiable en diferentes condiciones, se debe llegar a un movimiento de pies adecuado y un movimiento suave de la cadera que se puede conseguir mediante el estudio de la cinemática del robot[12]. La **Figura 2.6** permite observar el modelo geométrico de las piernas del robot que nos permite conocer los grados de libertad que se van a considerar en este modelo, que parte desde la pelvis con la articulación HipYawPitch hasta la articulación AnkleRoll de cada pierna.

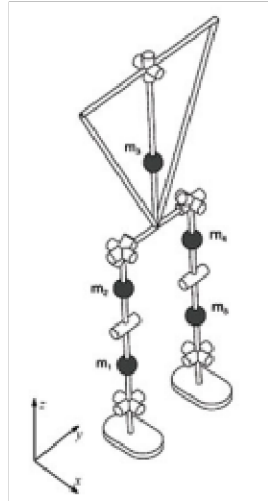


Figura 2.6 Modelo geométrico de las piernas del robot NAO[10]

Como punto de partida es necesario considerar que para la caminata del robot se tiene dos puntos de análisis, primero cuando el pie de la pierna izquierda se considera como marco de referencia fijo ya que será el punto de apoyo del robot mientras da el paso con la pierna derecha, por lo que el pie derecho se considera como extremo libre, como segundo caso de análisis se da cuando el pie derecho se encuentra fijo y el paso se da con el pie izquierdo. Teniendo en cuenta esto se procede a establecer los ejes de referencia para el primer caso de análisis partiendo del pie izquierdo hasta el torso como se indica en la

Figura 2.7

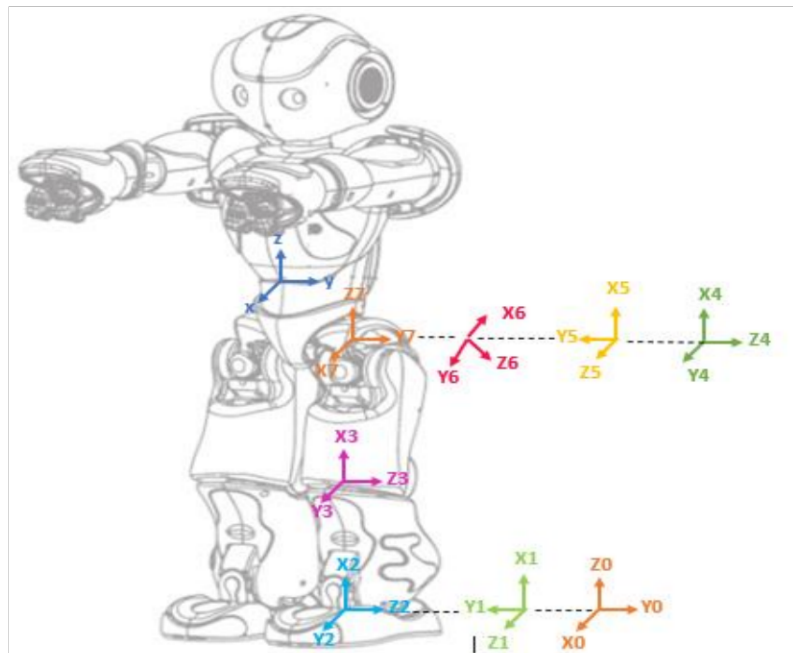


Figura 2.7 Esquema cinemático del robot para la pierna izquierda, marco pie izquierdo al torso.

Luego de llegar al torso del robot se puede notar que la **Figura 2.7** se relaciona con la Figura 2.4 ya que tiene los mismos marcos de referencia de manera invertida ya que el marco de referencia fijo para este caso inicia en el pie, considerando esto no será necesario definir nuevamente los parámetros D-H de esta cadena ya que únicamente para encontrar la solución de la cinemática directa de esta cadena se debe invertir la matriz de transformación antes definida en la ecuación (2.17) [6]., por tanto la matriz de transformación para el marco de referencia del torso desde el pie izquierdo se define de la siguiente manera.

$$T_{Pizq}^{Torso} = (T_{Torso}^{Pizq})^{-1} \quad (2.33)$$

Donde T_{Torso}^{LFoot} esta definida en la ecuación (2.17)(2.25).

Esta propiedad de invertir la solución de la cinemática directa permite combinar varias cadenas cinemáticas para obtener la posición del efector final de una cadena en relación con el marco de referencia de otra cadena cuando estas se unen a través de un punto común, este estudio ha sido desarrollado bajo esta premisa dado que todas las cadenas cinemáticas del robot antes descritas fueron construidas a partir del marco de referencia del torso. Esta construcción nos permite desarrollar el modelo cinemático reducido de las piernas ya que al observar la **Figura 2.8** el marco de referencia fijo se ubica en el pie izquierdo, y el marco de referencia final será el pie derecho, los sistemas de referencia número 7 y 8 representan el torso del robot que es el punto común que permitirá encontrar el modelo cinemático de las piernas a partir de las relaciones ya definidas.

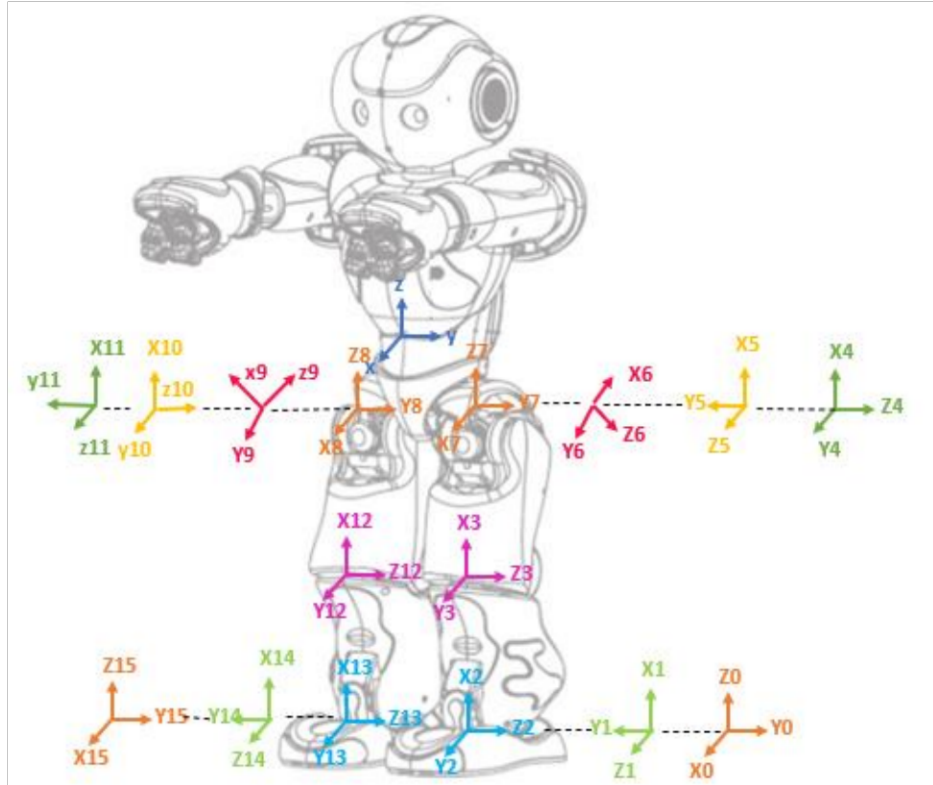


Figura 2.8 Esquema cinemático del robot para la pierna izquierda, marco pie izquierdo(fijo) al pie derecho(móvil).

Como fue descrito con anterioridad al invertir la matriz de transformación de la pierna izquierda nos ubicaremos en el torso con relación al pie izquierdo, entonces simplemente al multiplicar esta matriz con la matriz de transformación del pie izquierdo se obtiene la matriz de transformación que describe el pie derecho en relación con marco fijo del pie izquierdo, de la siguiente manera

$$T_{Pizq}^{Pder} = (T_{Torso}^{Pizq})^{-1} * T_{Torso}^{Pder} \quad (2.34)$$

Donde T_{Torso}^{RFoot} esta definida en la ecuación (2.25), los parámetros D-H corresponden a los valores de la Tabla 2.4 y de la Tabla 2.5.

Es así como esta propiedad nos permite definir fácilmente este modelo cinemático, para el segundo caso de análisis se obtiene la posición del pie izquierdo como marco de referencia móvil cuando se tiene como marco de referencia fijo el pie derecho de la misma forma donde:

$$T_{Pder}^{Pizq} = (T_{Torso}^{Pder})^{-1} * T_{Torso}^{Pizq} \quad (2.35)$$

Al evaluar las ecuaciones (2.34) y (2.35) para los valores articulares definidos en la posición cero se tiene las siguientes matrices

- Cadena Cinemática de la pierna Derecha, con marco de referencia fijo en Pie izquierdo, ecuación (2.34).

$$T_{Pizq}^{Pder} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 50.0 \\ 0 & 0 & 1 & 333.0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} * T_{Torso}^{Pder} \quad (2.36)$$

$$T_{Pizq}^{Pder} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -50.0 \\ 0 & 0 & 1 & 333.0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -50.0 \\ 0 & 0 & 1 & 333.0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

$$T_{Pizq}^{Pder} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -100.0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

- Cadena Cinemática de la pierna Izquierda, con marco de referencia fijo en Pie derecho, ecuación (2.35)

$$T_{Pder}^{Pizq} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -50.0 \\ 0 & 0 & 1 & 333.0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} * T_{Torso}^{Pizq} \quad (2.39)$$

$$T_{Pder}^{Pizq} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 50.0 \\ 0 & 0 & 1 & 333.0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 50.0 \\ 0 & 0 & 1 & 333.0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

$$T_{Pder}^{Pizq} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 100.0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

Las matrices resultantes de las ecuaciones (2.38) y (2.41), reflejan el resultado de la posición del pie derecho y pie izquierdo respectivamente, se puede notar que la ubicación de cada pie es de 100mm de distancia respecto al eje Y, llegando a un valor positivo o negativo según el marco de referencia fijo que sea considerado, dado que la distancia HipOffsetY es de 50mm respecto al torso del robot para cada pierna, los resultados obtenidos son correctos.

Para el desarrollo de este modelo se ha creado un script cuya lógica de programación sigue el siguiente diagrama de flujo.

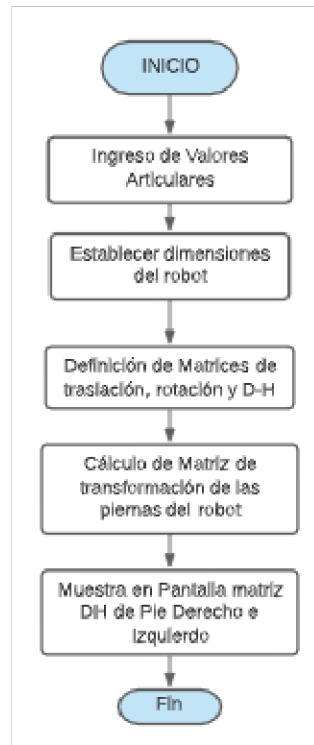


Figura 2.9 Diagrama de flujo para cálculo de modelo reducido robot.

2.1.5. Construcción del Modelo 3D del Robot NAO

Para la construcción del modelo 3D del robot NAO se ha utilizado la plataforma Simscape Multibody de Simulink, este es un entorno de simulación para sistemas 3D mecánicos, como pueden ser maquinaria de construcción, robots, entre otros en esta plataforma es posible modelar sistemas multicuerpo mediante la utilización de bloques, para la representación de cuerpos y articulaciones, donde también es posible incluir restricciones, sensores y fuerzas, mediante esta plataforma el sistema mecánico tendrá movimiento ya que Simscape Multibody formula y resuelve las ecuaciones para este sistema. El modelo del sistema en análisis podrá visualizarse mediante animaciones 3D que se generan para visualizar la dinámica del sistema, estos modelos se pueden generar directamente o importar al entorno de simulación junto con sus masas, inercias, articulaciones, restricciones y todo en relación con la geometría del sistema, es así como esta plataforma será utilizada para la construcción del modelo 3D del robot NAO, para complementar el análisis del modelo del robot.

Para la construcción del modelo inicialmente se ubican los bloques Configuration Solver, Word Frame como sistema de referencia fijo al cual se irá referenciando cada uno de los bloques del sistema mecánico, y el bloque Mechanism Configuration donde se puede cambiar la gravedad tanto en magnitud como en dirección.

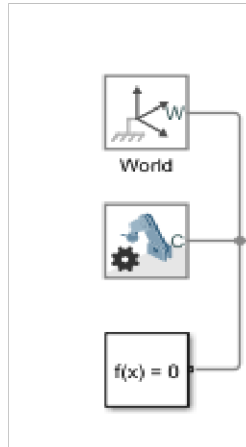


Figura 2.10 Bloques principales del modelo mecánico del robot

Los bloques descritos se conectan a una articulación fija de cero grados de libertad que previamente se une a un bloque de transformación rígida donde se define el movimiento de rotación alrededor de los ejes X, Y, Z, esto nos permite definir el sistema de referencia fijo del robot, al cual se conecta cada una de las articulaciones y eslabones que lo conforman.

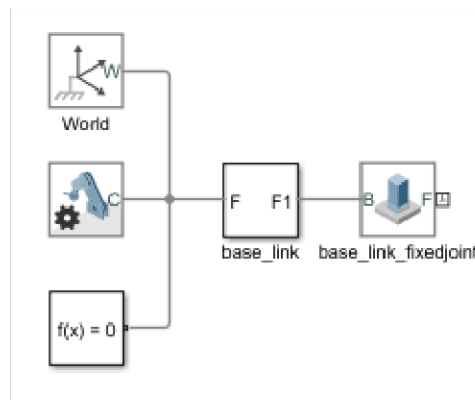


Figura 2.11 Marco de referencia fijo del robot

A continuación, se define un plano de referencia sobre el cual se posicionará el robot, este subsistema también está ligado al marco de referencia fijo creado previamente, aquí se incluye un bloque de transformación rígida donde se ha definido una traslación alrededor del eje Z en donde se ubicará el plano creado, este es un objeto sólido definido en el bloque Word Plane.

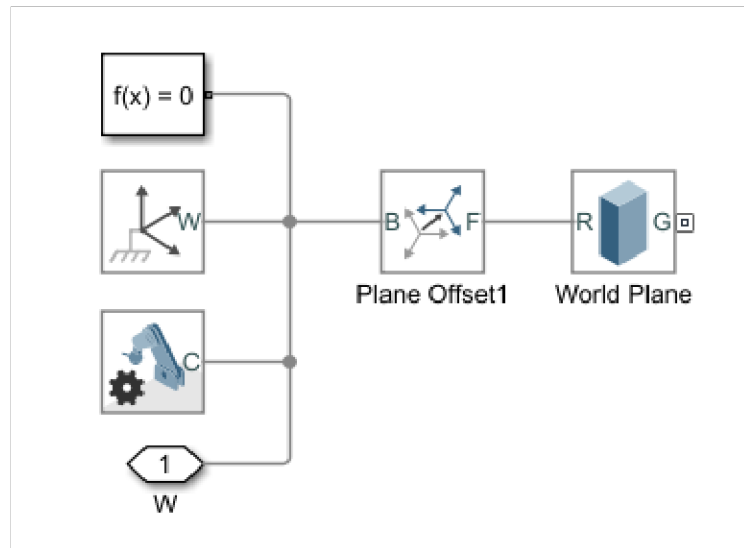


Figura 2.12 Subsistema, plano base del robot

Posterior a la creación del plano base se inicia con la creación del torso del robot, de donde partirán todas las cadenas cinemáticas, para ello se procede a enlazar bloques de transformación de rotación y traslación para ubicar el torso dentro del plano de acuerdo con las especificaciones del robot, a su vez se incluye el bloque File Solid para importar el modelo CAD del torso y realizar diferentes configuraciones visuales de este elemento (Figura 2.13), el bloque Inertia permite definir diferentes datos en relación a la inercia y masa del modelo del torso, para conocer estos datos podemos referirnos al datasheet del fabricante[8]. Paralelamente a esto se hace la creación de los ejes de referencia para cada una de las articulaciones que se conectan al torso del robot que son la base de cada cadena cinemática, y a su vez se conectan los bloques de transformación para ubicar los sensores del robot, Figura 2.14.

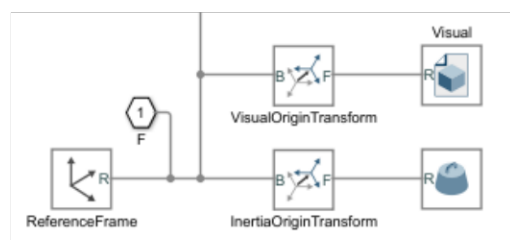


Figura 2.13 Bloques Torso: creación del objeto visual del Torso del robot

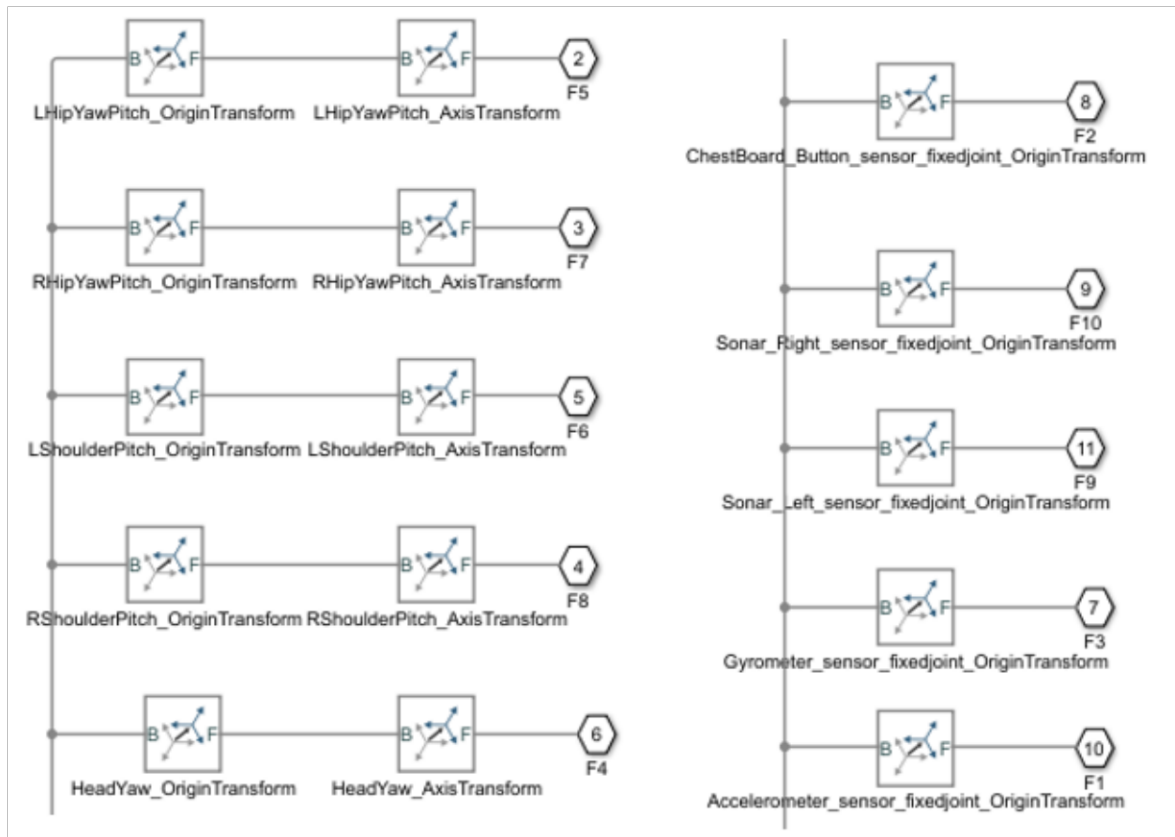


Figura 2.14 Bloque Torso: Sistemas de referencia iniciales de las cadenas cinemáticas y sensores del robot

Luego de la creación de los ejes de referencia iniciales para el robot se procede a conectar cada uno de los eslabones y articulaciones de las cadenas cinemáticas del robot, como se observa en la imagen a continuación, donde cada subsistema contiene el conjunto de bloques para la creación del modelo mecánico de la cabeza, brazos, piernas y sensores del robot.

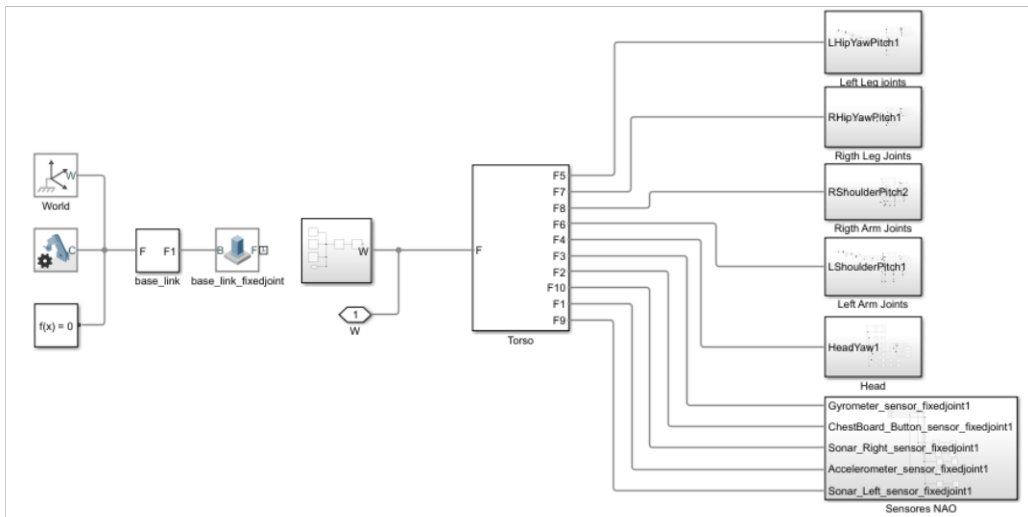


Figura 2.15 Bloques del modelo 3D del robot NAO

La primera cadena cinemática que se procederá a describir es la cabeza, la cual se compone de las articulaciones HeadYaw y HeadPitch, la creación de esta cadena inicia con la conexión del bloque Revolute Joint para la articulación Head Yaw, las configuraciones necesarias de este bloque serán los límites de la articulación, el torque como parámetro que se calculará automáticamente y la entrada del valor articular que podrá ser configurado por el usuario.

Seguido de esto se ubica el bloque Neck (Figura 2.17) que internamente posee los bloques necesarios para importar el modelo CAD de la articulación Head Yaw, especificar masa e inercia y los bloques de transformación para ubicar el siguiente sistema de referencia, a continuación, el bloque Revolute Joint nuevamente será utilizado para definir la articulación Head Pitch de la misma forma que fue realizada en la articulación anterior, seguido de esto se muestra el subsistema Head en el cual internamente se encuentra el bloque visual de esta articulación, la configuración de inercia, masa, y los bloques de transformación para ubicar los sensores que se encuentran en la cabeza del robot, entre estos se encuentran los sensores táctiles, sensores infrarrojos y cámaras.

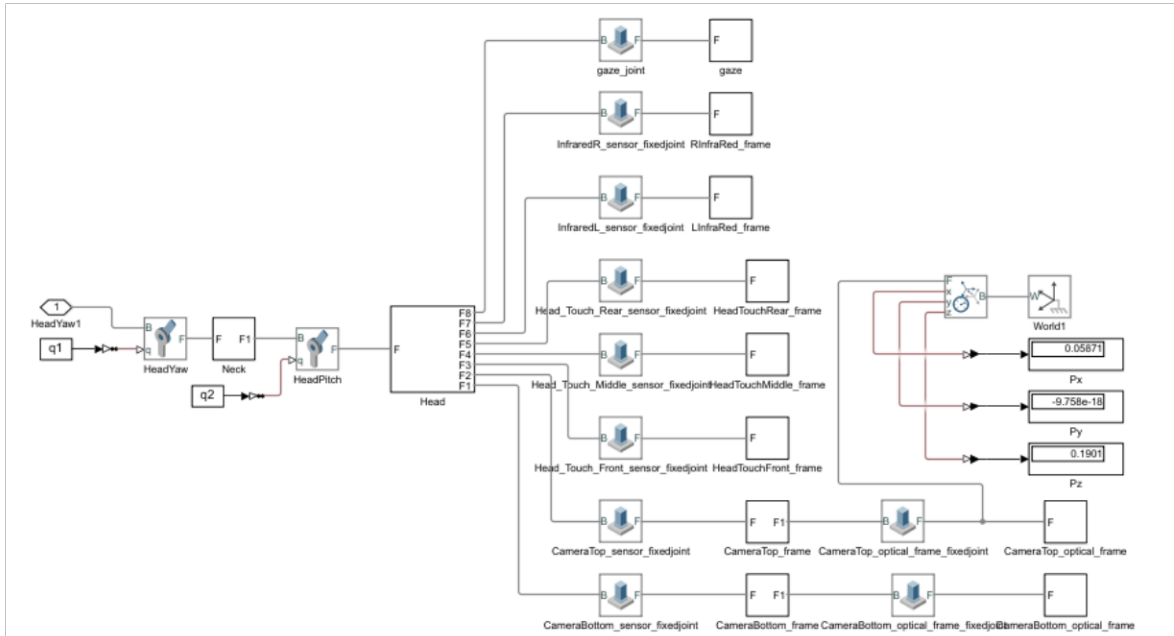


Figura 2.16 Cadena cinemática de la cabeza del robot NAO

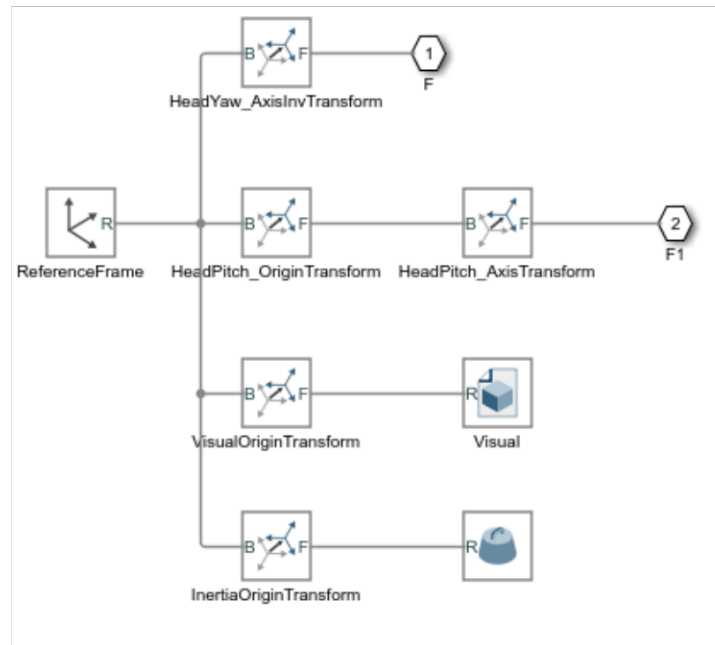


Figura 2.17 Bloques para la creación de la articulación Head Yaw y ubicación de la articulación HeadPitch

Luego del bloque Head se conectan los objetos que representan los sensores de la cabeza del robot, y finalmente en la Figura 2.18 se observa el sensor que está conectado a la cámara superior, efector final de la cabeza, y que nos permite medir la posición en X, Y y Z de la cámara con el fin de verificar los resultados teóricos del modelo cinemático directo que se han obtenido.

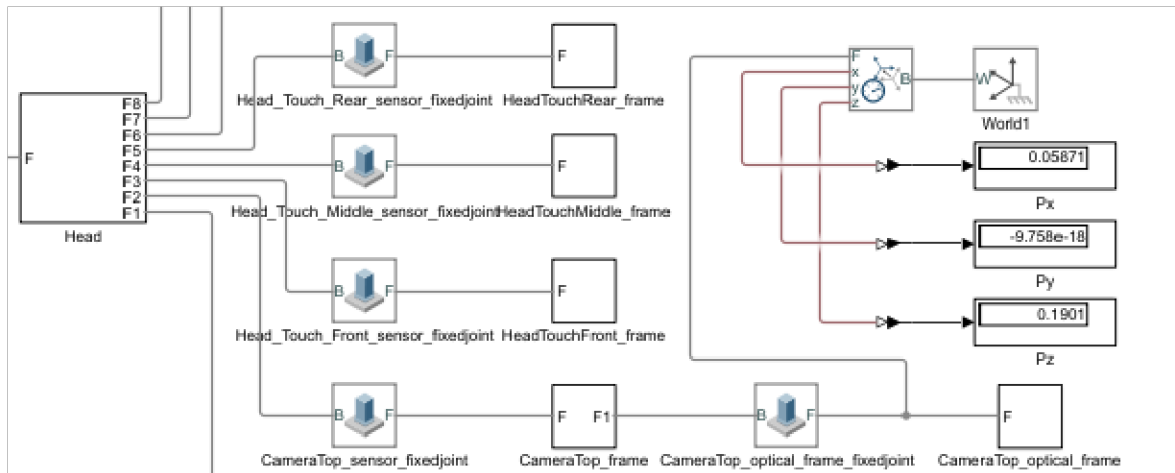


Figura 2.18 Conexión del sensor de posición de la cámara superior del robot

La siguiente cadena cinemática del robot que se procederá a describir será el brazo izquierdo, el cual tiene la misma estructura del brazo derecho, donde luego de la creación del eje de referencia para la articulación LShoulderPitch en el bloque Torso (Figura 2.14), se hace la conexión al subsistema del brazo izquierdo el cual se observa en la Figura 2.19, seguido de esto se ha insertado bloques Revolute Joint para cada una de las articulaciones del brazo, aquí se especifican límites articulares, la opción de cálculo automático de torque y entrada de los valores articulares, cada una de las articulaciones se conectan a un conjunto de bloques de transformación que encierran el objeto visual de la articulación y los eslabones, además de los ejes de referencia de la articulación continua.

La articulación LHand es la última de la cadena cinemática del brazo, esta articulación a pesar de tener un grado de libertad siendo su movimiento el de abrir o cerrar, se compone de una estructura conformada por tres dedos cada uno con 3 a 4 articulaciones, y en conjunto forman la mano del robot para dar el último grado de libertad del brazo, es por eso que estas articulaciones tienen un solo parámetro de configuración que controla a todas las demás, aquí también se ubican los sensores táctiles del robot, y el sensor de posición de la mano como efector final del brazo del robot.

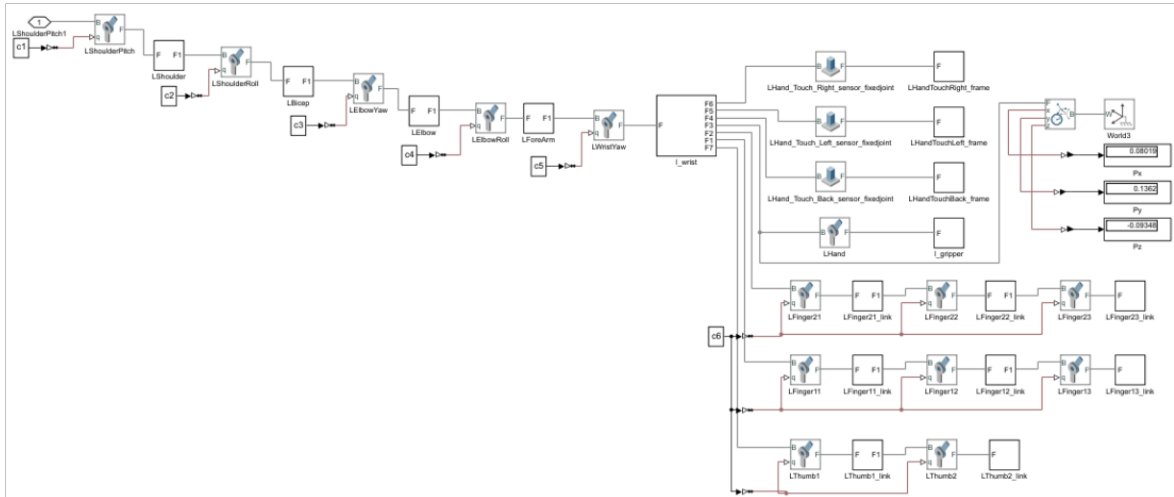


Figura 2.19 Cadena cinemática del brazo del robot NAO

Finalmente, la cadena cinemática del robot que se procederá a describir será la pierna izquierda, la cual tiene la misma estructura de la pierna izquierda, como se explicó anteriormente luego de la creación del eje de referencia para la articulación LHipYawPitch en el bloque Torso (Figura 2.14), se hace la conexión al subsistema de la pierna izquierda el cual se observa en la Figura 2.20, seguido de esto se ha insertado bloques Revolute Joint para cada una de las articulaciones de la pierna, aquí se especifican límites articulares, la opción de cálculo automático de torque y entrada de los valores articulares, cada una de las articulaciones se conectan a un conjunto de bloques de transformación que encierran el objeto visual de la articulación y los eslabones, además de los ejes de referencia de la articulación continua, en este caso también se agrega el sensor para medir la posición del pie como efector final de la pierna.

Se debe considerar que todos los parámetros de configuración para la creación de los bloques se realizan a partir de los datos definidos por el fabricante en relación con límites articulares, posición, masas, inercia, distancia entre eslabones, ubicación de los sensores entre otros datos necesarios para completar el modelo mecánico 3D del robot NAO.

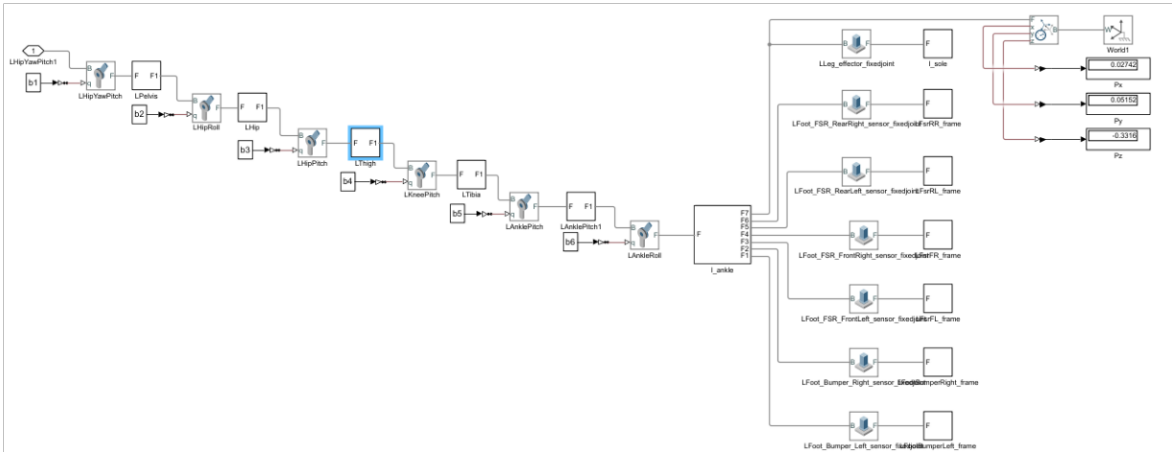


Figura 2.20 Cadena cinemática de la pierna del robot NAO

El modelo 3D que ha sido creado mediante el software Simscape Multibody se visualiza a través de la ventana de Mechanics Explorer, donde el movimiento del robot puede visualizarse en diferentes ángulos de perspectiva, a partir de la animación que se genera, esta herramienta consta de un panel de vista de árbol que tiene el modelo de forma jerárquica y es posible explorar las propiedades y parámetros de los componentes del modelo, la visualización del mismo se presenta de manera interactiva, además de los diferentes puntos de vista, se puede rotar, desplazar, acercar a través de las herramientas de manipulación que presenta Mechanics Explorer.

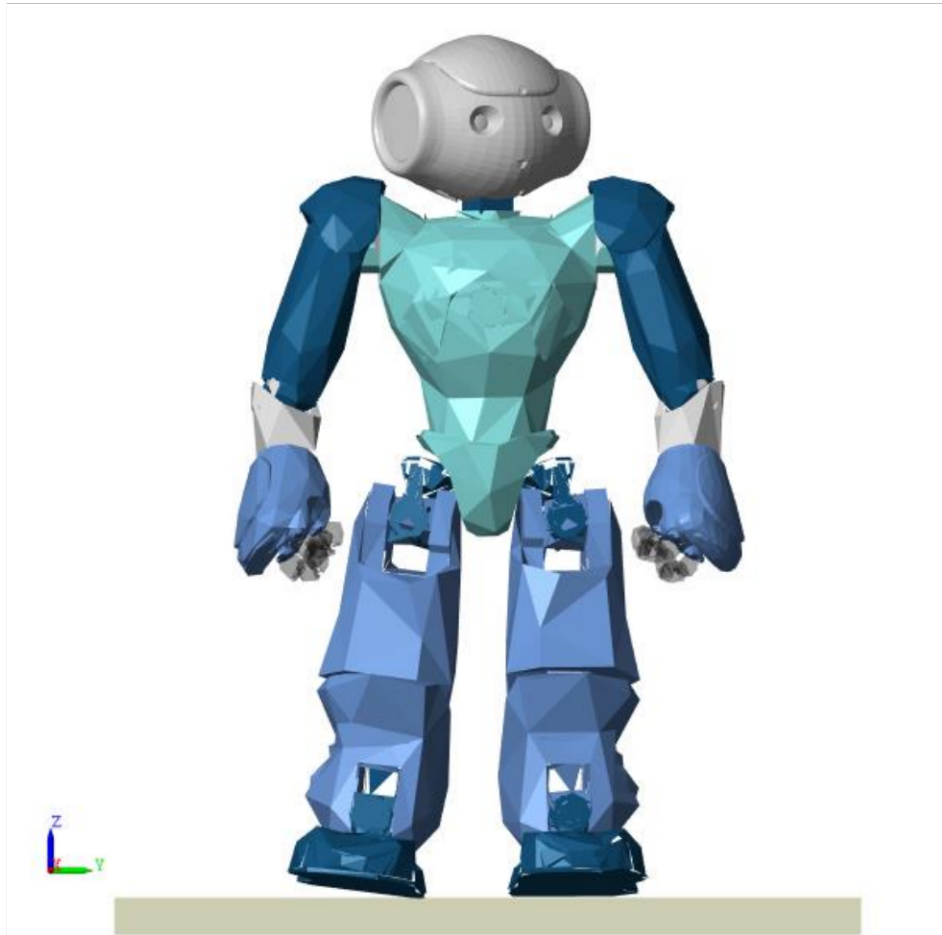


Figura 2.21 Modelo 3D del Robot NAO

2.1.6. Interfaz Gráfica en Matlab

En este apartado se describe el desarrollo de la interfaz gráfica, mediante la cual se permite el manejo de la simulación creada del modelo 3D del robot y con ello visualizar el movimiento que se produce, dados los valores articulares y a su vez obtener el modelo cinemático del robot.

La interfaz se ha dividido en tres niveles, el primero corresponde a la portada del proyecto, la misma que se puede apreciar en la Figura 2.22.



Figura 2.22 Pantalla principal de la interfaz gráfica

Para el segundo nivel se tiene la pantalla de control del modelo 3D del robot, en este nivel se despliegan los valores numéricos generados que definen el modelo cinemático directo del robot, en la Figura 2.23 se observa también la ventana de Mechanics Explorer que visualiza el modelo del robot.

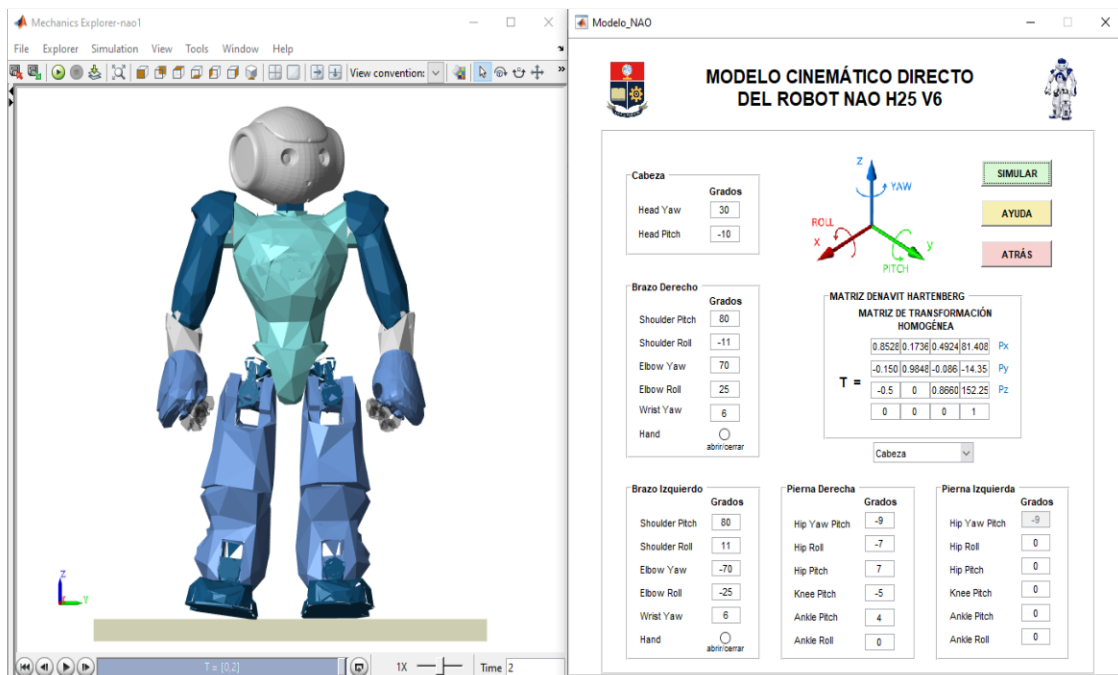


Figura 2.23 Pantalla de control del modelo cinemático del robot

Como parte final el usuario puede acceder a una ventana de información para el usuario que contiene los límites articulares de cada grado de libertad del robot que pudieran ser seteados por el usuario esta ventana se observa en la Figura 2.24.

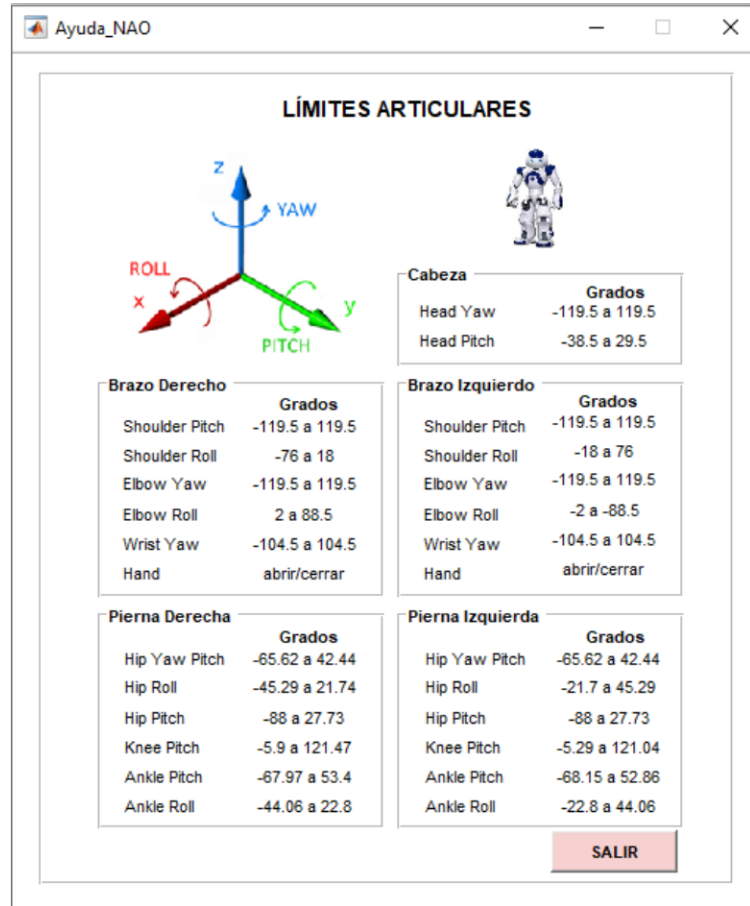


Figura 2.24 Pantalla de información para el usuario

La programación de la interfaz gráfica realizada sigue la lógica del siguiente diagrama de flujo.

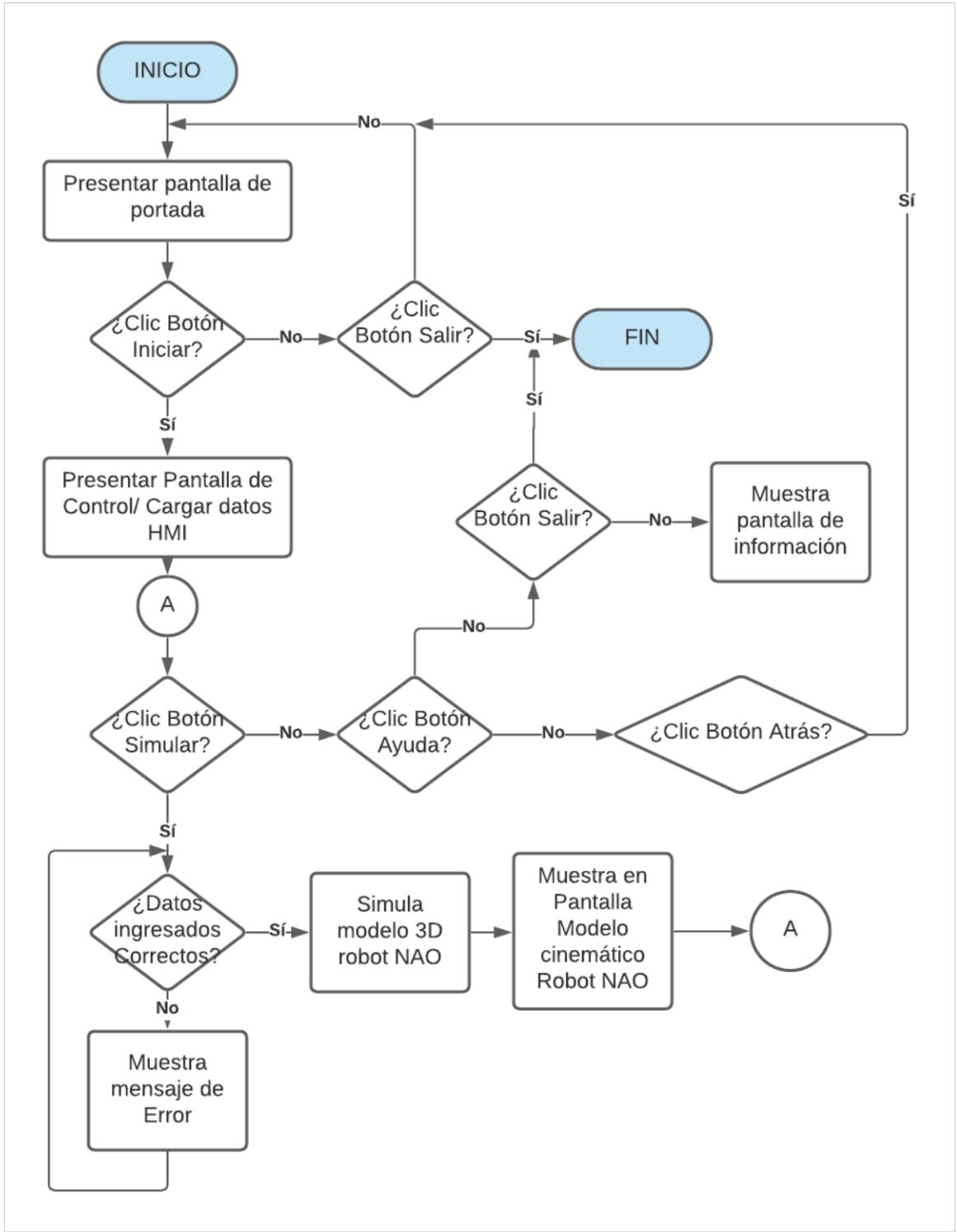


Figura 2.25 Diagrama de Flujo de la Interfaz Gráfica

3. RESULTADOS, CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

3.1. Resultados

3.1.1. Modelo Cinemático Completo del Robot NAO

El modelo cinemático del robot NAO ha sido desarrollado mediante el software Matlab, donde se implementó las matrices de transformación tanto de rotación, translación y la matriz Denavit Hartenberg.

Dado que la posición cero del robot ha sido definida por el fabricante, se parte de estos valores articulares para la comprobación del modelo desarrollado. Con los valores articulares iniciales del robot NAO, la posición final de cada uno de los efectores del robot nos debe reflejar la distancia geométrica que permite alcanzar los extremos articulares de cada una de las cadenas cinemáticas con respecto a la base del robot.

La cadena cinemática de la cabeza hace una traslación alrededor de los ejes Z y X hasta la cámara superior del robot, tal como lo expresa las ecuaciones (2.1) y (2.2), así el extremo articular debiera posicionarse en el punto $P_x=58.71$, $P_y=0$, $P_z=190.14$ (mm), al ubicar los parámetros DH de la Tabla 2.2, y desarrollar la ecuación (2.3), del modelo cinemático de la cabeza, el resultado de la ecuación (3.1), refleja la posición del efector final que se esperaba en la columna 4 de la matriz, la submatriz de rotación da como resultado la matriz identidad dado que los valores iniciales de rotación son cero.

$$TC_B^{Ef} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 58.71 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 190.14 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Considerando las cadenas cinemáticas de los brazos del robot, para ubicarnos en cada una de las manos se realiza una traslación final de $P_x=218.7$, $P_y=113$, $P_z=100$ (mm) para el brazo izquierdo y de $P_x=218.7$, $P_y=-113$, $P_z=100$ (mm) para el brazo derecho, como ha sido expresado en las ecuaciones (2.6), (2.12) y (2.14) estos valores reflejan la posición de las manos del robot con los valores articulares de cero para cada uno de los grados de libertad, al desarrollar las ecuaciones para obtener el modelo cinemático del brazo derecho e izquierdo del robot los resultados obtenidos son los siguientes:

$$TBI_B^{Ef} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 218.7 \\ 0 & 1 & 0 & 113 \\ 0 & 0 & 1 & 100.00 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$$TBD_B^{Ef} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 218.7 \\ 0 & 1 & 0 & -113 \\ 0 & 0 & 1 & 100.00 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Las ecuaciones (3.2) y (3.3), permiten verificar que los parámetros DH para obtener el modelo cinemático directo han sido definidos adecuadamente ya que se obtienen los valores de posición esperados a partir de las distancias geométricas entre cada eslabón.

A continuación, se analiza el resultado obtenido para las matrices definidas por las ecuaciones (2.17) y (2.25) que definen el modelo cinemático directo para las piernas del robot, en este caso se debe considerar que para llegar a los pies del robot tomando como referencia la base se hace una traslación alrededor de los ejes Y y Z, debiendo llegar a los puntos $P_x=0$, $P_y=50$, $P_z=333$ (mm), para la pierna izquierda y $P_x=0$, $P_y=-50$, $P_z=333$ (mm), para la pierna derecha, las ecuaciones (3.4) y (3.5), permiten comprobar que el modelo del robot ha sido definido adecuadamente y nos permitirá conocer la posición de cada efector final de estas dos cadenas cinemáticas para con ello completar el modelo cinemático del robot NAO.

$$TPI_B^{Ef} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 50.0 \\ 0 & 0 & 1 & 333.0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

$$TPD_B^{Ef} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -50.0 \\ 0 & 0 & 1 & 333.0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

3.1.2. Modelo Cinemático Reducido del robot NAO

El modelo cinemático reducido del robot NAO fue desarrollado considerando las extremidades inferiores del robot NAO, luego del análisis realizado y el desarrollo de las ecuaciones (2.34) y (2.35) y al evaluar estas ecuaciones para la posición inicial del robot NAO se llegó al siguiente resultado:

- Cadena Cinemática de la pierna Derecha, con marco de referencia fijo en Pie izquierdo, ecuación (2.34).

$$T_{Pizq}^{Pder} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -100.0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

- Cadena Cinemática de la pierna Izquierda, con marco de referencia fijo en Pie derecho, ecuación (2.35)

$$T_{Pizq}^{Pder} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 100.0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Al observar la Figura 3.1 se puede notar que los resultados de las ecuaciones (3.6) y (3.7) son correctos y permitirán obtener la posición de cada efector desde cualquier perspectiva para el movimiento de las piernas.

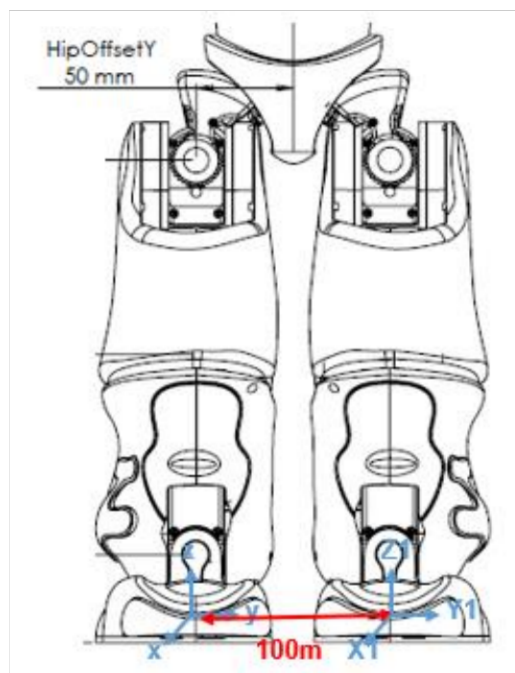


Figura 3.1 Marco de referencia fijo y móvil para las piernas

Se procede a realizar un ejemplo de movimiento considerando los siguientes valores articulares para ambos casos de análisis, el movimiento que llevaría a cabo el robot se observa en la **Figura 3.2**

Tabla 3.1 Valores articulares propuestos

N°	Articulación	Pierna Izquierda	Pierna Derecha
----	--------------	------------------	----------------

1	HipYawPitch	10	10
2	HipRoll	0	-30
3	HipPitch	0	-50
4	KneePitch	0	70
5	AnklePitch	0	0
6	AnkleRoll	0	0

El resultado de este movimiento se tiene a continuación:

- Modelo de la Cadena Cinemática de la pierna Derecha, con marco de referencia fijo en Pie izquierdo, ecuación (2.34).

$$T_{Pizq}^{Pder} = \begin{bmatrix} 0.244 & 0.709 & 0.662 & -160.0 \\ -0.936 & -0.00605 & 0.351 & -155.0 \\ 0.253 & -0.706 & 0.662 & 220.0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

- Modelo de la Cadena Cinemática de la pierna Izquierda, con marco de referencia fijo en Pie derecho, ecuación (2.35)

$$T_{Pder}^{Pizq} = \begin{bmatrix} 0.244 & -0.936 & 0.253 & -161.0 \\ 0.709 & -0.00605 & -0.706 & 267.0 \\ 0.662 & 0.351 & 0.662 & 14.6 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$



Figura 3.2 Movimiento del robot NAO, modelo reducido

Con los resultados obtenidos en las ecuaciones (3.8) y (3.9) se puede conocer la posición de cada pie tomando en cuenta la parte inferior del robot NAO, este modelo y valores encontrados pueden permitir definir la posición que debe tomar cada pierna considerando cada una de sus articulaciones y pueden aportar para el desarrollo de controladores del robot que ejecuten adecuadamente la caminata del robot.

3.1.3. Integración del modelo 3D del Robot NAO

Una vez que se han creado los componentes mecánicos del robot y de han integrado dentro de Simscape Multibody para la creación del modelo 3D se procede a analizar los resultados que reflejan la simulación del modelo, para ello se aplican los mismos valores articulares antes analizados con el fin de verificar los resultados, la animación generada nos permite visualizar la posición cero del robot (Figura 3.3).

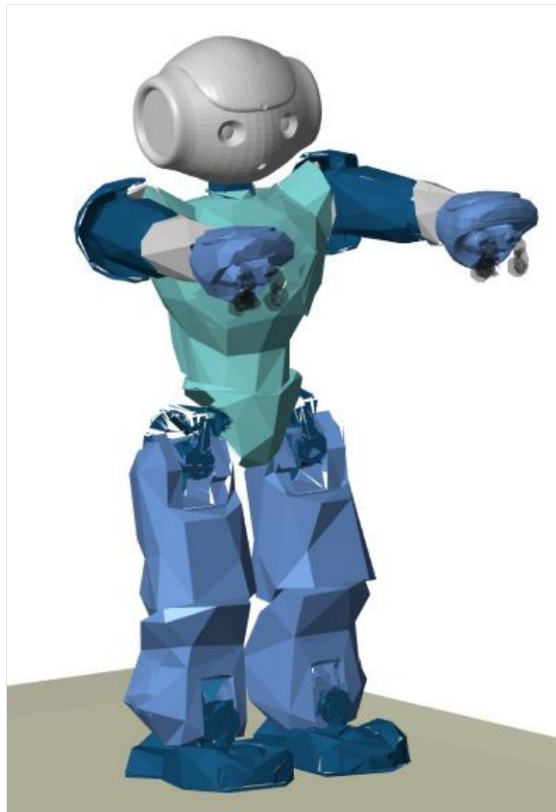


Figura 3.3 Modelo 3D del robot en la posición cero

Primero se verificará la cadena cinemática de la cabeza, donde el sensor conectado a la cámara superior nos permite conocer la posición del efector final, la **Figura 3.4** refleja que el valor obtenido $P_x=58.71\text{mm}$, $P_y=0\text{mm}$, $P_z=190.1$, concuerdan con la distancia que se debe trasladar desde la base del robot hasta el extremo articular cuando el robot no realiza ningún movimiento de rotación.

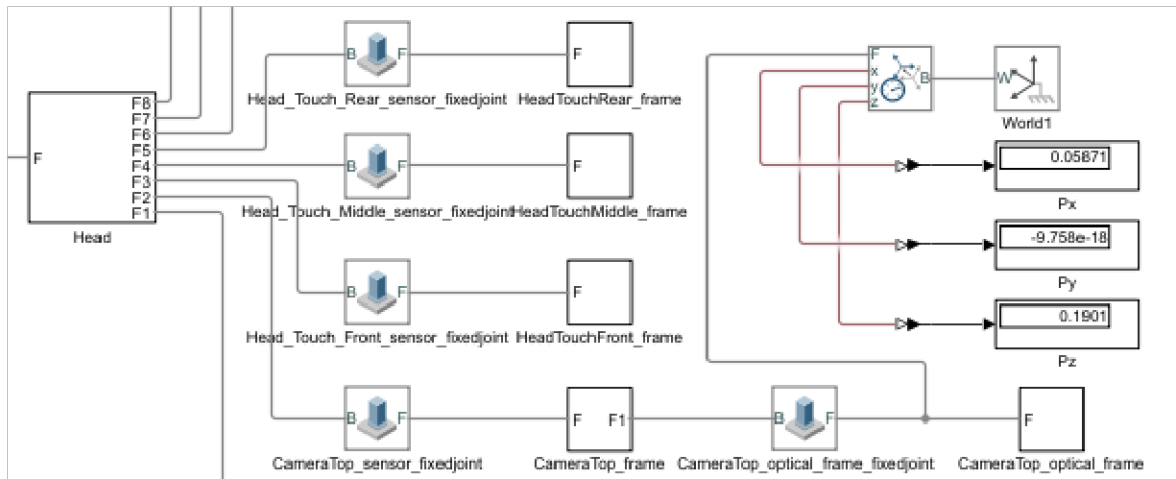


Figura 3.4 Posición del efector final de la cabeza

Dado que la estructura de los brazos es la misma y solo difiere el sentido en el que se realiza la traslación para ubicarse en el efector final, se procede a mostrar los resultados obtenidos de posición para el brazo izquierdo, donde $P_x=218.7\text{mm}$, $P_y=113\text{mm}$, $P_z=100\text{mm}$, valores que son correctos de acuerdo con los valores geométricos del robot.

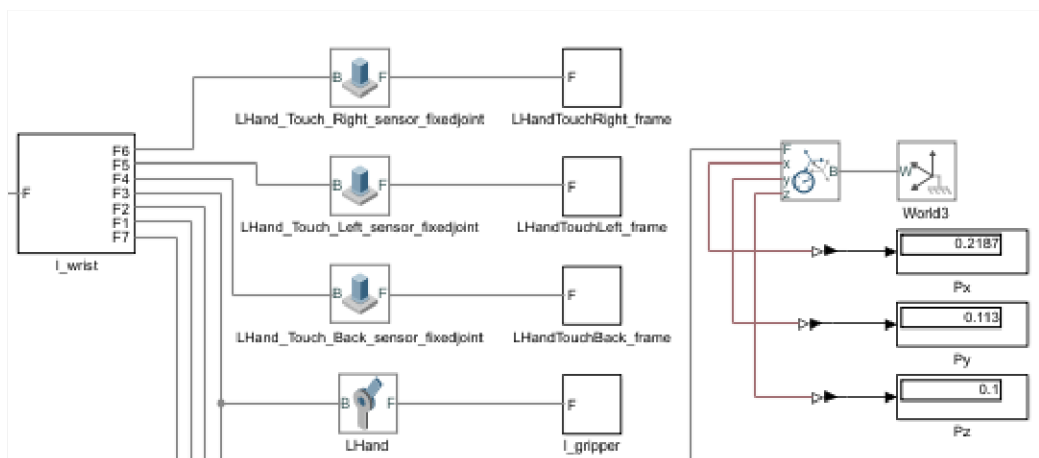


Figura 3.5 Posición del efector final del brazo izquierdo

Las últimas dos cadenas cinemáticas del robot correspondientes a las piernas del robot reflejan los valores de $P_x=0\text{mm}$, $P_y=50\text{mm}$, $P_z=-333\text{mm}$, con la diferencia que en el eje Y, el valor de posición para la pierna derecha es negativo, esto puede apreciarse en la Figura 3.6.

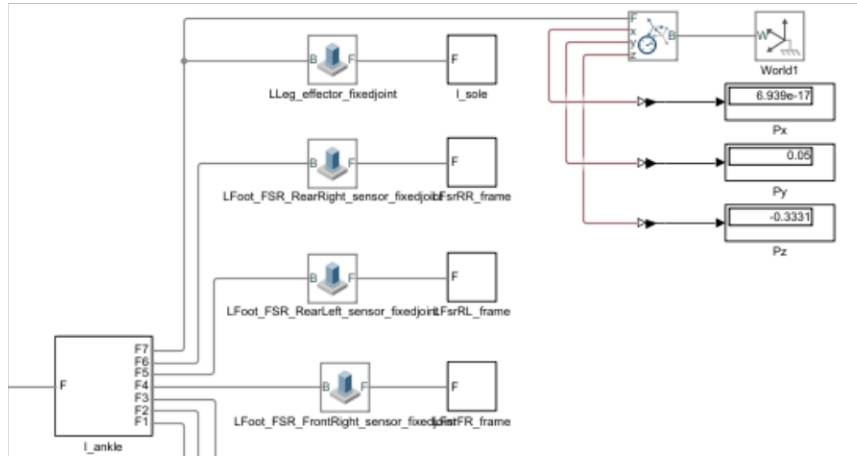


Figura 3.6 Posición del efector final de la pierna izquierda

3.1.4. Resultados empleando la interfaz de usuario

La interfaz diseñada permite el control de los 25 grados de libertad del robot, así como también la visualización del resultado del modelo cinemático directo del NAO. Mediante la interfaz de usuario se puede conocer el comportamiento de cada una de las cadenas cinemáticas mediante el método Denavit Hartenberg que fue aplicado.

Como ejemplo se realiza un cambio de los valores articulares del robot, y se analiza el modelo obtenido junto con los resultados que se obtiene en la simulación del modelo 3D, la pantalla de la interfaz se muestra en la Figura 3.7, la cual cuenta con un menú de selección que permite visualizar los resultados para cada una de las cadenas cinemáticas según los requerimientos del usuario, estos datos se generan a partir de un script desarrollado en Matlab enlazado con la interfaz, los valores mostrados inicialmente corresponden a la matriz del modelo cinemático de la cabeza del robot.

La Figura 3.9 ilustra los resultados para el caso de la pierna derecha cuando HipYawPitch= -9° , HipRoll= -7° , HipPitch= 7° , KneePitch= -5° , AnklePitch= 0° y AnkleRoll= 5° , se llega a la posición de Px=7.14mm, py=-75,63mm, Pz=-331.2.

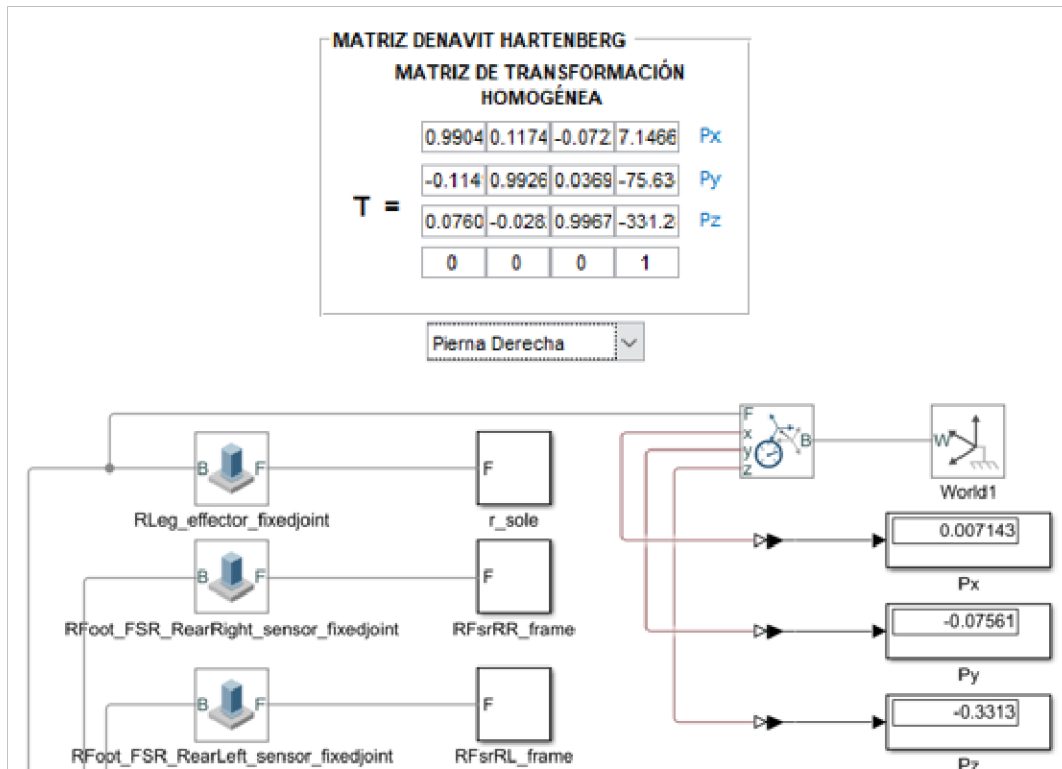


Figura 3.9 Prueba del modelo 3D y de la interfaz para la pierna izquierda. Con las imágenes antes mostradas es posible verificar que el modelo cinemático del robot se ha aplicado de manera correcta dentro de la interfaz desarrollada.

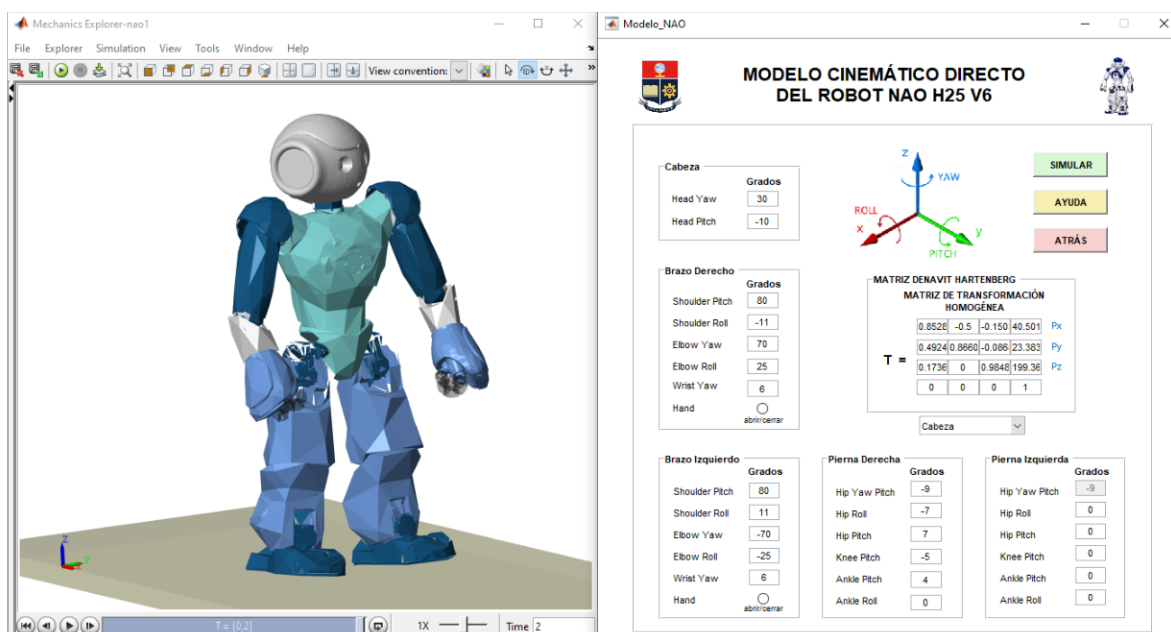


Figura 3.7 Prueba de la interfaz gráfica

Para las cadenas cinemáticas del robot la posición final de los efectores se observa en la **Tabla 3.2**, los cuales son iguales a los valores encontrados a partir del modelo 3D.

Tabla 3.2 Posición de extremos articulares del robot

Cadena Cinemática	Px	Py	Pz
Cabeza	40.5	23.38	199.36
Brazo izquierdo	79.97	136.28	-93.55
Brazo derecho	80.97	-121.8	-99.18
Pierna izquierda	27.44	51.52	-331.5
Pierna derecha	7.14	-75.63	-331.2

La Figura 3.8 permite verificar que tanto el modelo mecánico del robot como el modelo teórico obtienen los mismos resultados de posición para la cabeza cuando HeadYaw=30° y HeadPitch=10°, dando una posición final de Px=40.5mm, Py=23,38mm y Pz=199.36mm.

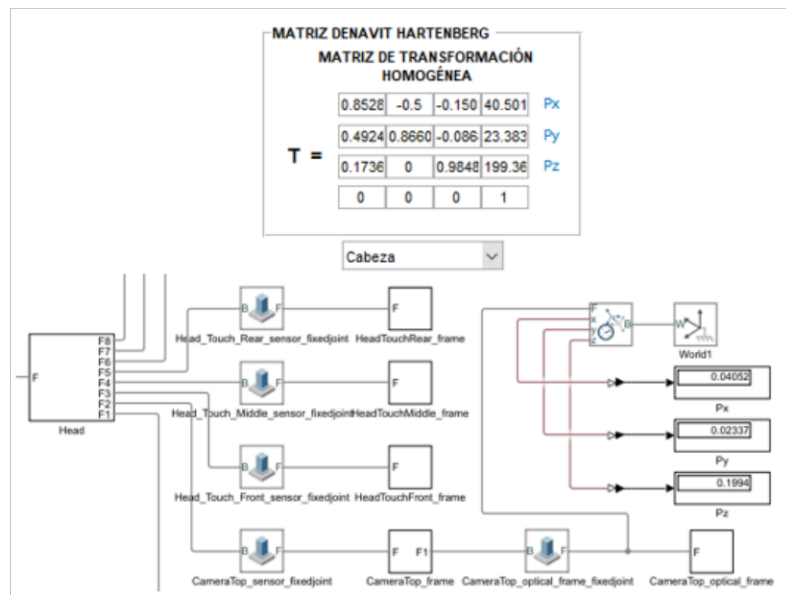


Figura 3.8 Prueba del modelo 3D y de la interfaz para la cabeza

La Figura 3.9 ilustra los resultados para el cazo de la pierna derecha cuando HipYawPitch=-9°, HipRoll=-7°, HipPitch=7°, KneePitch=-5°, AnklePitch=0° y AnkleRoll=5°, se llega a la posición de Px=7.14mm, py=-75,63mm, Pz=-331.2.

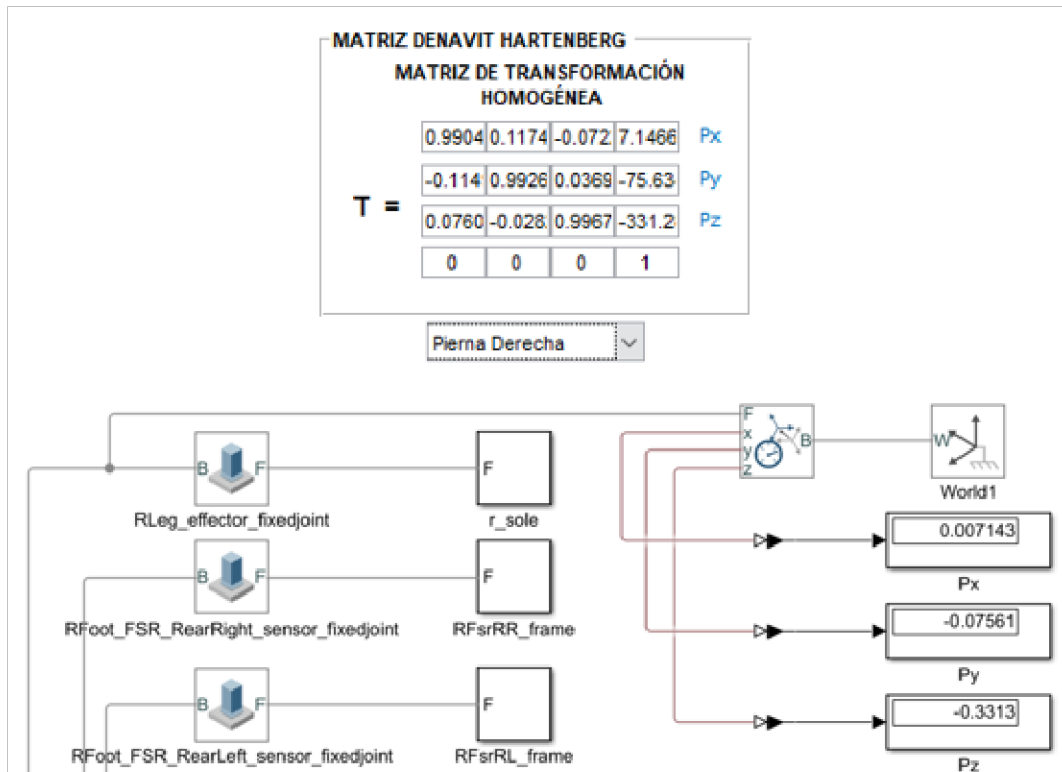


Figura 3.9 Prueba del modelo 3D y de la interfaz para la pierna izquierda

Con las imágenes antes mostradas es posible verificar que el modelo cinemático del robot se ha aplicado de manera correcta dentro de la interfaz desarrollada.

3.2. Conclusiones

- En base a la revisión bibliográfica este documento presenta una solución analítica completa y reducida para conocer la cinemática directa del robot NAO, basándonos en métodos estándar para el estudio de cadenas cinemáticas de robots como lo es el método Denavit Hartenberg, que de acuerdo con las características estructurales del robot permiten lograr este objetivo.
- Los resultados de la simulación verificaron la correcta implementación del método Denavit Hartenberg para la solución de la cinemática directa del robot NAO, ya que las pruebas realizadas con un conjunto de ángulos para las articulaciones del robot permitieron conocer la posición de cada extremidad del robot.
- Al haber realizado el análisis de las cadenas cinemáticas del robot NAO con referencia a un marco fijo en el torso del robot se puede manipular las ecuaciones con el fin de obtener la posición de cualquier efector en referencia a un marco fijo diferente del torso, a partir de operaciones matemáticas aplicadas a las matrices.

- Se desarrollo un modelo 3D completo del robot NAO en el software Simscape Multibody de Matlab que permite la simulación de sistemas mecánicos a través de la creación de bloques que conforman su estructura y permiten su movimiento.
- Se implementó una interfaz de usuario que enlaza el modelo 3D del robot y permite modificar los valores articulares de cada grado de libertad del robot para de esta manera visualizar el movimiento que llevaría a cabo el robot físicamente, además de poder conocer la posición de los efectores finales que posee dentro del plano físico tridimensional.
- Como trabajo futuro se pretende continuar con el estudio de la cinemática del robot centrándose en robots humanoides con el fin de que el trabajo expuesto en este documento sea una base para la implementación de rutinas de movimientos y métodos de equilibrio para el robot NAO.

3.3. Recomendaciones

- El modelo cinemático reducido y completo del robot puede ser aplicado para proyectos que requieran definir movimientos de caminata a través de controladores, los cuales con un estudio complementario de la cinemática inversa del robot permitirían lograr este objetivo.
- Considerar los valores máximos establecidos por el fabricante para la operación del robot, con el fin de poder llevar a cabo los movimientos adecuadamente evitando daños a su estructura.
- Se recomienda que se siga incentivando la investigación de otro tipo de modelos que permitan conocer la dinámica del robot y aporten al desarrollo de controladores que ejecuten tareas con precisión.
- El modelo del robot NAO desarrollado sirve como base para desarrollar un modelo cinemático inverso que permita incluir lazos de control de posición o de trayectoria haciendo al modelo obtenido más útil y completo.
- Este trabajo permite obtener un modelo cinemático de cualquier conjunto de cadenas cinemáticas que han sido analizadas, pero es necesario hacer un análisis de cómo se debe combinar las matrices de transformación, estableciendo primero el marco fijo con el que se desee trabajar.

4. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] F. R. Calvopiña Iglesias and P. E. Valladares Romero, "Interpretación de expresiones faciales en adultos mayores utilizando la visión artificial del robot humanoide NAO," Feb. 2017, Consultado: dic. 23, 2021. [Online]. Disponible: <http://dspace.ups.edu.ec/handle/123456789/14020>
- [2] N. Kofinas, E. Orfanoudakis, and M. G. Lagoudakis, "Complete Analytical Forward and Inverse Kinematics for the NAO Humanoid Robot," *J Intell Robot Syst*, vol. 77, no. 2, pp. 251–264, Feb. 2015, doi: 10.1007/s10846-013-0015-4.
- [3] "Robot NAO," *Aliverobots*. <https://aliverobots.com/nao/> (consultado dic. 13, 2021).
- [4] Z. Zhang, Y. Niu, Z. Yan, and S. Lin, "Real-Time Whole-Body Imitation by Humanoid Robots and Task-Oriented Teleoperation Using an Analytical Mapping Method and Quantitative Evaluation," *Applied Sciences*, vol. 8, no. 10, Art. no. 10, Oct. 2018, doi: 10.3390/app8102005.
- [5] H. Fadli, E. Hidayat, and C. Machbub, "Design and implementation of walking pattern and trajectory compensator of NAO humanoid robot," in *2016 6th International Conference on System Engineering and Technology (ICSET)*, Bandung, Indonesia, Oct. 2016, pp. 184–188. doi: 10.1109/ICSEngT.2016.7849647.
- [6] N. Kofinas, "Forward and Inverse Kinematics for the NAO Humanoid Robot," p. 74, 2012.
- [7] "Specifications_NAO6.pdf." Consultado: dic. 13, 2021. [Online]. Disponible: https://www.generationrobots.com/media/Specifications_NAO6.pdf
- [8] "NAO - Technical Guide — Aldebaran 2.1.4.13 documentation." <http://doc.aldebaran.com/2-1/family/index.html> (consultado ene. 13, 2022).
- [9] C. Barrera, "Fundamentos de robotica", Consultado: ene. 13, 2022. [Online]. Disponible: https://www.academia.edu/10479201/Fundamentos_de_robotica
- [10] J. Liu, "Motion plan and control of humanoid walking robots," 2015, doi: 10.17877/DE290R-16515.
- [11] J. Denavit and R. S. Hartenberg, "A Kinematic Notation for Lower-Pair Mechanisms Based on Matrices," *Journal of Applied Mechanics*, vol. 22, no. 2, pp. 215–221, Jun. 2021, doi: 10.1115/1.4011045.
- [12] J. Fierro, A. Pamanes, V. Santibáñez, G. Ruiz, and J. Ollervides, "AMRob Journal, Robotics: Theory and Applications Condiciones para una marcha elemental del robot NAO Regular Paper," *AMRob Journal, Robotics: Theory and Applications*, vol. 4, pp. 13–18, Nov. 2016.
- [13] E. Hashemi and A. Khajepour, "Kinematic and three-dimensional dynamic modeling of a biped robot," *Proceedings of the IMechE*, vol. 231, no. 1, pp. 57–73, Mar. 2017, doi: 10.1177/1464419316645243.
- [14] S. Wen, Z. Ma, S. Wen, Y. Zhao, and J. Yao, "The study of NAO robot arm based on direct kinematics by using D-H method," in *2014 UKACC International Conference on Control (CONTROL)*, Loughborough, UK, Jul. 2014, pp. 515–518. doi: 10.1109/CONTROL.2014.6915193.
- [15] M. Granja, "Repositorio Digital - EPN: Modelación y análisis de la cinemática directa e inversa del manipulador Stanford de seis grados de libertad." <https://bibdigital.epn.edu.ec/handle/15000/8693> (consultado nov. 31, 2021).
- [16] J. G. Hoyos-Gutiérrez, C. A. Peña-Solórzano, C. L. Garzón-Castro, F. A. Prieto-Ortiz, and J. G. Ayala-Garzón, "Hacia el manejo de una herramienta por un robot NAO usando programación por demostración," *TecnoLógicas*, vol. 17, no. 33, pp. 65–76, Jul. 2014.
- [17] A. Said, E. Rodríguez-Leal, R. Soto, J. L. Gordillo, and L. Garrido, "Decoupled Closed-Form Solution for Humanoid Lower Limb Kinematics," *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2015, pp. 1–14, 2015, doi: 10.1155/2015/437979.
- [18] "Modelado del Robot Nao en MapleSim." <https://www.addlink.es/noticias/maplesim/2554-modelado-robot-nao-maplesim> (consultado ene. 31, 2022).

- [19]J. Fierro, A. Pamanes, H. Moreno Avalos, and J. V. Núñez Nalda, "On the Constrained Walking of the NAO Humanoid Robot," 2017, pp. 13–29. doi: 10.1007/978-3-319-54377-2_2.

5. ANEXOS

ANEXO I. Resolución matemática del Modelo del Robot NAO

A continuación, se presenta el resultado obtenido del modelo cinemático del robot NAO, en primera instancia se considera el modelo de la cadena cinemática de la cabeza el cual se ha obtenido mediante el software Matlab considerando la ecuación (2.3).

- Modelo cinemático de la cabeza

$$TC_B^{Ef} = \begin{bmatrix} R11 & R12 & R13 & dx \\ R21 & R22 & R23 & dy \\ R31 & R32 & R33 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

Donde:

$$\begin{aligned} R11 = & 6.12e - 17 \sin(q_1) + 6.12e - 17 \cos(q_2 - 1.57) \cos(q_1) - 6.12e \\ & - 17 \cos(q_2 - 1.57) \sin(q_1) - 1.0 \sin(q_2 - 1.57) \cos(q_1) \\ & - 3.75e - 33 \sin(q_2 - 1.57) \sin(q_1) \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} R21 = & 6.12e - 17 \cos(q_2 - 1.57) \cos(q_1) - 6.12e - 17 \cos(q_1) + 6.12e \\ & - 17 \cos(q_2 - 1.57) \sin(q_1) + 3.75e - 33 \sin(q_2 \\ & - 1.57) \cos(q_1) - 1.0 \sin(q_2 - 1.57) \sin(q_1) \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$R31 = -1.0 \cos(q_2 - 1.57) - 6.12e - 17 \sin(q_2 - 1.57) - 3.75e - 33 \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} R12 = & -1.0 \sin(q_1) - 3.75e - 33 \cos(q_2 - 1.57) \sin(q_1) - 6.12e \\ & - 17 \sin(q_2 - 1.57) \cos(q_1) \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} R22 = & 1.0 \cos(q_1) + 3.75e - 33 \cos(q_2 - 1.57) \cos(q_1) - 6.12e \\ & - 17 \sin(q_2 - 1.57) \sin(q_1) \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$R32 = 6.12e - 17 - 6.12e - 17 \cos(q_2 - 1.57) \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} R13 = & \cos(q_2 - 1.57) \cos(q_1) - 3.75e - 33 \sin(q_1) + 3.75e - 33 \cos(q_2 \\ & - 1.57) \sin(q_1) + 6.12e - 17 \sin(q_2 - 1.57) \cos(q_1) \\ & - 6.12e - 17 \sin(q_2 - 1.57) \sin(q_1) \end{aligned} \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} R23 = & 3.75e - 33 \cos(q_1) - 3.75e - 33 \cos(q_2 - 1.57) \cos(q_1) + \cos(q_2 \\ & - 1.57) \sin(q_1) + 6.12e - 17 \sin(q_2 - 1.57) \cos(q_1) \\ & + 6.12e - 17 \sin(q_2 - 1.57) \sin(q_1) \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$R33 = 6.12e - 17 \cos(q_2 - 1.57) - 1.0 \sin(q_2 - 1.57) + 2.3e - 49 \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} dx = & 3.59e - 15 \sin(q_1) + 63.6 \cos(q_2 - 1.57) \cos(q_1) - 3.59e \\ & - 15 \cos(q_2 - 1.57) \sin(q_1) - 58.7 \sin(q_2 \\ & - 1.57) \cos(q_1) - 3.9e - 15 \sin(q_2 - 1.57) \sin(q_1) \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$dy = 3.59e - 15 \cos(q_2 - 1.57) \cos(q_1) - 3.59e - 15 \cos(q_1) + 63.6 \cos(q_2 - 1.57) \sin(q_1) + 3.9e - 15 \sin(q_2 - 1.57) \cos(q_1) - 58.7 \sin(q_2 - 1.57) \sin(q_1) \quad (5.12)$$

$$dz = 126.0 - 63.6 \sin(q_2 - 1.57) - 58.7 \cos(q_2 - 1.57) \quad (5.13)$$

Para los brazos del robot NAO se realiza el desarrollo matemático considerando la ecuación (2.13) y se lo ha obtenido mediante el software Matlab.

- **Modelo cinemático del brazo izquierdo**

$$TBI_B^{Ef} = \begin{bmatrix} R11 & R12 & R13 & dx \\ R21 & R22 & R23 & dy \\ R31 & R32 & R33 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

Donde

$$R11 = 2.3e - 49 \sin(q_1) + 6.12e - 17 \cos(q_3) \sin(q_1) + \cos(q_4) \sigma_{33} + \sin(q_4) \sigma_{32} + \sigma_{10} + \sigma_{25} - 3.75e - 33 \cos(q_3) (\sigma_{50} + \sigma_{49}) - 6.12e - 17 \sin(q_3) \sigma_{41} - \sigma_7 + 2.3e - 49 \cos(q_2 + 1.57) \sin(q_1) + \sigma_{51} - \sigma_{13} \quad (5.15)$$

$$R21 = \sigma_{14} - 1.41e - 65 \cos(q_1) - \sigma_{31} + \sigma_{26} - \sigma_{27} - \sigma_8 - 6.12e - 17 \cos(q_3) \sigma_{44} + 3.75e - 33 \cos(q_3) \sigma_{52} - 6.12e - 17 \sin(q_3) \sigma_{43} + \sin(q_4) \sigma_{34} - \sigma_{11} - \sigma_4 + \sigma_2 + 1.41e - 65 \quad (5.16)$$

$$R31 = 2.3e - 49 \cos(q_1) - \sigma_6 + \sigma_{15} - \sigma_{28} + \sin(q_4) \sigma_{35} + 6.12e - 17 \cos(q_3) (\cos(q_1) + 3.75e - 33) + \sigma_{30} - \sigma_9 + 3.75e - 33 \cos(q_3) \sigma_{54} + \sigma_{12} + \cos(q_4) \sigma_{36} - \sigma_{29} + 6.12e - 17 \sin(q_3) \sigma_{46} + 8.61e - 82 \quad (5.17)$$

$$R12 = 6.12e - 17 \sin(q_5) \sigma_{22} - 1.41e - 65 \sin(q_1) - 3.75e - 33 \cos(q_3) \sin(q_1) - 6.12e - 17 \cos(q_4) \sigma_{33} + 6.12e - 17 \cos(q_5) \sigma_{19} - 6.12e - 17 \sin(q_4) \sigma_{32} + \sin(q_5) \sigma_{19} - 3.75e - 33 \cos(q_4) \sigma_{37} + 2.3e - 49 \cos(q_3) (\sigma_{50} + \sigma_{49}) + 3.75e - 33 \sin(q_3) \sigma_{41} - 3.75e - 33 \cos(q_5) \sigma_{16} - 6.12e - 17 \sin(q_5) \sigma_{16} - 1.41e - 65 \cos(q_2 + 1.57) \sin(q_1) - 2.3e - 49 \sin(q_2 + 1.57) \cos(q_1) - 1.0 \cos(q_5) \sigma_{22} \quad (5.18)$$

$$\begin{aligned}
R22 = & \sigma_6 + 8.61e - 82 \cos(q_1) + \cos(q_5) \sigma_{23} - 6.12e - 17 \sin(q_5) \sigma_{23} \\
& - 3.75e - 33 \cos(q_4) \sigma_{38} - 3.75e - 33 \cos(q_5) \sigma_{17} \\
& + 6.12e - 17 \cos(q_4) \sigma_{39} - 6.12e - 17 \sin(q_5) \sigma_{17} \\
& + 3.75e - 33 \cos(q_3) \sigma_{44} - 2.3e - 49 \cos(q_3) \sigma_{52} + 3.75e \quad (5.19) \\
& - 33 \sin(q_3) \sigma_{43} - 6.12e - 17 \sin(q_4) \sigma_{34} - 6.12e \\
& - 17 \cos(q_5) \sigma_{20} - 1.0 \sin(q_5) \sigma_{20} + \sigma_3 - \sigma_1 - 8.61e \\
& - 82
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R32 = & \sigma_5 - 1.41e - 65 \cos(q_1) + \cos(q_5) \sigma_{24} - 6.12e - 17 \sin(q_5) \sigma_{24} \\
& + 3.75e - 33 \cos(q_4) \sigma_{40} - 6.12e - 17 \sin(q_4) \sigma_{35} \\
& - 3.75e - 33 \cos(q_3) (\cos(q_1) + 3.75e - 33) - 3.75e \\
& - 33 \cos(q_5) \sigma_{18} + 6.12e - 17 \cos(q_5) \sigma_{21} - \sigma_4 - 6.12e \quad (5.20) \\
& - 17 \sin(q_5) \sigma_{18} - 2.3e - 49 \cos(q_3) \sigma_{54} + \sin(q_5) \sigma_{21} \\
& - 6.12e - 17 \cos(q_4) \sigma_{36} + \sigma_2 - 3.75e - 33 \sin(q_3) \sigma_{46} \\
& - 5.27e - 98
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R13 = & 8.61e - 82 \sin(q_1) + \sin(q_5) \sigma_{22} + 2.3e - 49 \cos(q_3) \sin(q_1) \\
& + 3.75e - 33 \cos(q_4) \sigma_{33} + \cos(q_5) \sigma_{19} + 3.75e \\
& - 33 \sin(q_4) \sigma_{32} - \sigma_{10} + 2.3e - 49 \cos(q_4) \sigma_{37} - 1.41e \\
& - 65 \cos(q_3) (\sigma_{50} + \sigma_{49}) - 2.3e - 49 \sin(q_3) \sigma_{41} - 6.12e \quad (5.21) \\
& - 17 \cos(q_5) \sigma_{16} + \sigma_7 + 8.61e - 82 \cos(q_2) \\
& + 1.57) \sin(q_1) + 1.41e - 65 \sin(q_2 + 1.57) \cos(q_1) \\
& + \sigma_{13}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R23 = & 2.3e - 49 \cos(q_4) \sigma_{38} - 5.27e - 98 \cos(q_1) - \sigma_{14} \\
& - 1.0 \sin(q_5) \sigma_{23} - \sigma_5 - 6.12e - 17 \cos(q_5) \sigma_{17} - 3.75e \\
& - 33 \cos(q_4) \sigma_{39} + \sigma_8 - 2.3e - 49 \cos(q_3) \sigma_{44} + 1.41e \\
& - 65 \cos(q_3) \sigma_{52} - 2.3e - 49 \sin(q_3) \sigma_{43} + 3.75e \quad (5.22) \\
& - 33 \sin(q_4) \sigma_{34} - 1.0 \cos(q_5) \sigma_{20} + \sigma_{11} - 5.27e \\
& - 98 \cos(q_2 + 1.57) \cos(q_1) + 8.61e - 82 \sin(q_2) \\
& + 1.57) \sin(q_1) + 5.27e - 98
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R33 = & 8.61e - 82 \cos(q_1) - 8.61e - 82 \cos(q_2 + 1.57) - \sigma_{15} \quad (5.23) \\
& - 1.0 \sin(q_5) \sigma_{24} - 2.3e - 49 \cos(q_4) \sigma_{40} + 3.75e \\
& - 33 \sin(q_4) \sigma_{35} + 2.3e \\
& - 49 \cos(q_3) (\cos(q_1) + 3.75e - 33) - 6.12e \\
& - 17 \cos(q_5) \sigma_{18} + \cos(q_5) \sigma_{21} + \sigma_3 + \sigma_9 + 1.41e \\
& - 65 \cos(q_3) \sigma_{54} - \sigma_{12} + 3.75e - 33 \cos(q_4) \sigma_{36} - \sigma_1 \\
& + 2.3e - 49 \sin(q_3) \sigma_{46} + 3.23e - 114
\end{aligned}$$

$$dx = 6.43e - 15 \sin(q_1) + 6.96e - 15 \cos(q_3) \sin(q_1) \quad (5.24)$$

$$\begin{aligned} &+ 114.0 \cos(q_4) \sigma_{33} + 114.0 \sin(q_4) \sigma_{32} + 3.54e \\ &- 15 \sin(q_5) \sigma_{19} + 6.96e - 15 \cos(q_4) \sigma_{37} - 4.26e \\ &- 31 \cos(q_3) (\sigma_{50} + \sigma_{49}) - 6.96e - 15 \sin(q_3) \sigma_{41} \\ &- 2.17e - 31 \sin(q_5) \sigma_{16} + 15.0 \cos(q_2 + 1.57) \cos(q_1) \\ &+ 6.43e - 15 \cos(q_2 + 1.57) \sin(q_1) + 105.0 \sin(q_2 \\ &+ 1.57) \cos(q_1) - 9.18e - 16 \sin(q_2 + 1.57) \sin(q_1) \\ &- 3.54e - 15 \cos(q_5) \sigma_{22} \end{aligned}$$

$$dy = 15.0 \sin(q_2 + 1.57) - 105.0 \cos(q_2 + 1.57) - 3.94e - 31 \cos(q_1) \quad (5.25)$$

$$\begin{aligned} &+ 3.54e - 15 \cos(q_5) \sigma_{23} + 6.96e - 15 \cos(q_4) \sigma_{38} \\ &- 114.0 \cos(q_4) \sigma_{39} - 2.17e - 31 \sin(q_5) \sigma_{17} - 6.96e \\ &- 15 \cos(q_3) \sigma_{44} + 4.26e - 31 \cos(q_3) \sigma_{52} - 6.96e \\ &- 15 \sin(q_3) \sigma_{43} + 114.0 \sin(q_4) \sigma_{34} - 3.54e \\ &- 15 \sin(q_5) \sigma_{20} - 3.94e - 31 \cos(q_2 + 1.57) \cos(q_1) \\ &+ 9.18e - 16 \cos(q_2 + 1.57) \sin(q_1) + 5.62e - 32 \sin(q_2 \\ &+ 1.57) \cos(q_1) + 6.43e - 15 \sin(q_2 + 1.57) \sin(q_1) \\ &+ 113.0 \end{aligned}$$

$$dz = 9.18e - 16 \sin(q_2 + 1.57) - 6.43e - 15 \cos(q_2 + 1.57) + 6.43e \quad (5.26)$$

$$\begin{aligned} &- 15 \cos(q_1) + 3.54e - 15 \cos(q_5) \sigma_{24} - 6.96e \\ &- 15 \cos(q_4) \sigma_{40} + 114.0 \sin(q_4) \sigma_{35} + 6.96e \\ &- 15 \cos(q_3) (\cos(q_1) + 3.75e - 33) + 6.43e - 15 \cos(q_2 \\ &+ 1.57) \cos(q_1) - 2.17e - 31 \sin(q_5) \sigma_{18} + 4.26e \\ &- 31 \cos(q_3) \sigma_{54} + 3.54e - 15 \sin(q_5) \sigma_{21} - 15.0 \cos(q_2 \\ &+ 1.57) \sin(q_1) - 9.18e - 16 \sin(q_2 + 1.57) \cos(q_1) \\ &+ 114.0 \cos(q_4) \sigma_{36} - 105.0 \sin(q_2 + 1.57) \sin(q_1) \\ &+ 6.96e - 15 \sin(q_3) \sigma_{46} + 100.0 \end{aligned}$$

Considerando que:

$$\sigma_1 = 1.41e - 65 \sin(q_2 + 1.57) \sin(q_1) \quad (5.27)$$

$$\sigma_2 = 2.3e - 49 \sin(q_2 + 1.57) \sin(q_1) \quad (5.28)$$

$$\sigma_3 = 8.61e - 82 \cos(q_2 + 1.57) \cos(q_1) \quad (5.29)$$

$$\sigma_4 = 1.41e - 65 \cos(q_2 + 1.57) \cos(q_1) \quad (5.30)$$

$$\sigma_5 = 1.41e - 65 \cos(q_2 + 1.57) \quad (5.31)$$

$$\sigma_6 = 2.3e - 49 \cos(q_2 + 1.57) \quad (5.32)$$

$$\sigma_7 = 3.75e - 33 \sin(q_5) \sigma_{16} \quad (5.33)$$

$$\sigma_8 = 3.75e - 33 \sin(q_5) \sigma_{17} \quad (5.34)$$

$$\sigma_9 = 3.75e - 33 \sin(q_5) \sigma_{18} \quad (5.35)$$

$$\sigma_{10} = 6.12e - 17 \sin(q_5) \sigma_{19} \quad (5.36)$$

$$\sigma_{11} = 6.12e - 17 \sin(q_5) \sigma_{20} \quad (5.37)$$

$$\sigma_{12} = 6.12e - 17 \sin(q_5) \sigma_{21} \quad (5.38)$$

$$\sigma_{13} = 6.12e - 17 \cos(q_5) \sigma_{22} \quad (5.39)$$

$$\sigma_{14} = 6.12e - 17 \cos(q_5) \sigma_{23} \quad (5.40)$$

$$\sigma_{15} = 6.12e - 17 \cos(q_5) \sigma_{24} \quad (5.41)$$

$$\sigma_{16} = \cos(q_4) \sigma_{33} + \sin(q_4) \sigma_{32} + \sigma_{25} \quad (5.42)$$

$$\sigma_{17} = \sigma_{26} - \sigma_{27} + \sin(q_4) \sigma_{34} \quad (5.43)$$

$$\sigma_{18} = \sin(q_4) \sigma_{35} - \sigma_{28} + \cos(q_4) \sigma_{36} \quad (5.44)$$

$$\sigma_{19} = 3.75e - 33 \sin(q_1) + \cos(q_3) \sin(q_1) - \sigma_{42} - 1.0 \sin(q_3) \sigma_{41} \quad (5.45)$$

$$+ 3.75e - 33 \cos(q_2 + 1.57) \sin(q_1) + \sigma_{53}$$

$$\sigma_{20} = \sigma_{57} + 2.3e - 49 \cos(q_1) + \cos(q_3) \sigma_{44} - \sigma_{45} + \sin(q_3) \sigma_{43} + \sigma_{30} \quad (5.46)$$

$$- \sigma_{29} - 2.3e - 49$$

$$\sigma_{21} = 3.75e - 33 \cos(q_1) - \sigma_{31} + \sigma_{47} + \sigma_{56} + \sigma_{48} - \sigma_{55} + \sin(q_3) \sigma_{46} \quad (5.47)$$

$$+ 1.41e - 65$$

$$\sigma_{22} = \sin(q_4) \sigma_{33} - 1.0 \cos(q_4) \sigma_{32} + 6.12e - 17 \sin(q_4) \sigma_{37} \quad (5.48)$$

$$\sigma_{23} = \sin(q_4) \sigma_{39} - 6.12e - 17 \sin(q_4) \sigma_{38} + \cos(q_4) \sigma_{34} \quad (5.49)$$

$$\sigma_{24} = 6.12e - 17 \sin(q_4) \sigma_{40} + \cos(q_4) \sigma_{35} - 1.0 \sin(q_4) \sigma_{36} \quad (5.50)$$

$$\sigma_{25} = 6.12e - 17 \cos(q_4) \sigma_{37} \quad (5.51)$$

$$\sigma_{26} = 6.12e - 17 \cos(q_4) \sigma_{38} \quad (5.52)$$

$$\sigma_{27} = 1.0 \cos(q_4) \sigma_{39} \quad (5.53)$$

$$\sigma_{28} = 6.12e - 17 \cos(q_4) \sigma_{40} \quad (5.54)$$

$$\sigma_{29} = 3.75e - 33 \sin(q_2 + 1.57) \sin(q_1) \quad (5.55)$$

$$\sigma_{30} = 2.3e - 49 \cos(q_2 + 1.57) \cos(q_1) \quad (5.56)$$

$$\sigma_{31} = 3.75e - 33 \cos(q_2 + 1.57) \quad (5.57)$$

$$\sigma_{32} = \sin(q_1) \sin(q_3) + \cos(q_3) \sigma_{41} - 6.12e - 17 \sin(q_3) (\sigma_{50} + \sigma_{49}) \quad (5.58)$$

$$\sigma_{33} = 6.12e - 17 \sin(q_1) + \sigma_{50} + \sigma_{49} \quad (5.59)$$

$$\sigma_{34} = \cos(q_3) \sigma_{43} - 1.0 \sin(q_3) \sigma_{44} + 6.12e - 17 \sin(q_3) \sigma_{52} \quad (5.60)$$

$$\sigma_{35} = \sin(q_3) (\cos(q_1) + 3.75e - 33) - 1.0 \cos(q_3) \sigma_{46} + 6.12e \quad (5.61)$$

$$- 17 \sin(q_3) \sigma_{54}$$

$$\sigma_{36} = 6.12e - 17 \cos(q_1) - \sigma_{57} + \sigma_{58} - 1.0 \sin(q_2 + 1.57) \sin(q_1) + 2.3e \quad (5.62)$$

$$- 49$$

$$\sigma_{37} = \sigma_{42} - 1.0 \cos(q_3) \sin(q_1) + \sin(q_3) \sigma_{41} \quad (5.63)$$

$$\sigma_{38} = \cos(q_3) \sigma_{44} - \sigma_{45} + \sin(q_3) \sigma_{43} \quad (5.64)$$

$$\sigma_{39} = \cos(q_2 + 1.57) + 3.75e - 33 \cos(q_1) + \sigma_{56} - \sigma_{55} - 3.75e - 33 \quad (5.65)$$

$$\sigma_{40} = \sigma_{47} + \sigma_{48} + \sin(q_3) \sigma_{46} \quad (5.66)$$

$$\sigma_{41} = \cos(q_2 + 1.57) \cos(q_1) - \sigma_{55} \quad (5.67)$$

$$\sigma_{42} = 6.12e - 17 \cos(q_3) (\sigma_{50} + \sigma_{49}) \quad (5.68)$$

$$\sigma_{43} = \sin(q_2 + 1.57) + \sigma_{50} + \sigma_{51} \quad (5.69)$$

$$\sigma_{44} = 6.12e - 17 \cos(q_1) - 6.12e - 17 \quad (5.70)$$

$$\sigma_{45} = 6.12e - 17 \cos(q_3) \sigma_{52} \quad (5.71)$$

$$\sigma_{46} = \cos(q_2 + 1.57) \sin(q_1) - 6.12e - 17 \sin(q_2 + 1.57) + \sigma_{53} \quad (5.72)$$

$$\sigma_{47} = \cos(q_3) (\cos(q_1) + 3.75e - 33) \quad (5.73)$$

$$\sigma_{48} = 6.12e - 17 \cos(q_3) \sigma_{54} \quad (5.74)$$

$$\sigma_{49} = \sin(q_2 + 1.57) \cos(q_1) \quad (5.75)$$

$$\sigma_{50} = 6.12e - 17 \cos(q_2 + 1.57) \sin(q_1) \quad (5.76)$$

$$\sigma_{51} = 3.75e - 33 \sin(q_2 + 1.57) \cos(q_1) \quad (5.77)$$

$$\sigma_{52} = \cos(q_2 + 1.57) + \sigma_{56} - \sigma_{55} \quad (5.78)$$

$$\sigma_{53} = 6.12e - 17 \sin(q_2 + 1.57) \cos(q_1) \quad (5.79)$$

$$\sigma_{54} = \sigma_{57} - \sigma_{58} + \sin(q_2 + 1.57) \sin(q_1) \quad (5.80)$$

$$\sigma_{55} = 6.12e - 17 \sin(q_2 + 1.57) \sin(q_1) \quad (5.81)$$

$$\sigma_{56} = 3.75e - 33 \cos(q_2 + 1.57) \cos(q_1) \quad (5.82)$$

$$\sigma_{57} = 6.12e - 17 \cos(q_2 + 1.57) \quad (5.83)$$

$$\sigma_{58} = 6.12e - 17 \cos(q_2 + 1.57) \cos(q_1) \quad (5.84)$$

- Modelo cinemático del brazo derecho

$$TBD_B^{Ef} = \begin{bmatrix} R11 & R12 & R13 & dx \\ R21 & R22 & R23 & dy \\ R31 & R32 & R33 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.85)$$

Donde:

$$\begin{aligned} R11 = & 2.3e - 49 \sin(q_1) + 6.12e - 17 \cos(q_3) \sin(q_1) + \cos(q_4) \sigma_{33} \\ & + \sin(q_4) \sigma_{32} + \sigma_{10} + \sigma_{25} - 3.75e \\ & - 33 \cos(q_3) (\sigma_{50} + \sigma_{49}) - 6.12e - 17 \sin(q_3) \sigma_{41} - \sigma_7 \\ & + 2.3e - 49 \cos(q_2 + 1.57) \sin(q_1) + \sigma_{51} - \sigma_{13} - 6.12e \\ & - 17 \sin(q_3) \sigma_{41} - \sigma_7 + 2.3e - 49 \cos(q_2 + 1.57) \sin(q_1) \\ & + \sigma_{51} - \sigma_{13} \end{aligned} \quad (5.86)$$

$$\begin{aligned}
R21 = & \sigma_{14} - 1.41e - 65 \cos(q_1) - \sigma_{31} + \sigma_{26} - \sigma_{27} - \sigma_8 - 6.12e \\
& - 17 \cos(q_3) \sigma_{44} + 3.75e - 33 \cos(q_3) \sigma_{52} - 6.12e \\
& - 17 \sin(q_3) \sigma_{43} + \sin(q_4) \sigma_{34} - \sigma_{11} - \sigma_4 + \sigma_2 + 1.41e \\
& - 65
\end{aligned} \tag{5.87}$$

$$\begin{aligned}
R31 = & 2.3e - 49 \cos(q_1) - \sigma_6 + \sigma_{15} - \sigma_{28} + \sin(q_4) \sigma_{35} + 6.12e \\
& - 17 \cos(q_3) (\cos(q_1) + 3.75e - 33) + \sigma_{30} - \sigma_9 + 3.75e \\
& - 33 \cos(q_3) \sigma_{54} + \sigma_{12} + \cos(q_4) \sigma_{36} - \sigma_{29} + 6.12e \\
& - 17 \sin(q_3) \sigma_{46} + 8.61e - 82
\end{aligned} \tag{5.88}$$

$$\begin{aligned}
R12 = & 6.12e - 17 \sin(q_5) \sigma_{22} - 1.41e - 65 \sin(q_1) - 3.75e \\
& - 33 \cos(q_3) \sin(q_1) - 6.12e - 17 \cos(q_4) \sigma_{33} + 6.12e \\
& - 17 \cos(q_5) \sigma_{19} - 6.12e - 17 \sin(q_4) \sigma_{32} + \sin(q_5) \sigma_{19} \\
& - 3.75e - 33 \cos(q_4) \sigma_{37} + 2.3e - 49 \cos(q_3) (\sigma_{50} + \sigma_{49}) \\
& + 3.75e - 33 \sin(q_3) \sigma_{41} - 3.75e - 33 \cos(q_5) \sigma_{16} \\
& - 6.12e - 17 \sin(q_5) \sigma_{16} - 1.41e - 65 \cos(q_2 \\
& + 1.57) \sin(q_1) - 2.3e - 49 \sin(q_2 + 1.57) \cos(q_1) \\
& - 1.0 \cos(q_5) \sigma_{22}
\end{aligned} \tag{5.89}$$

$$\begin{aligned}
R22 = & \sigma_6 + 8.61e - 82 \cos(q_1) + \cos(q_5) \sigma_{23} - 6.12e - 17 \sin(q_5) \sigma_{23} \\
& - 3.75e - 33 \cos(q_4) \sigma_{38} - 3.75e - 33 \cos(q_5) \sigma_{17} \\
& + 6.12e - 17 \cos(q_4) \sigma_{39} - 6.12e - 17 \sin(q_5) \sigma_{17} \\
& + 3.75e - 33 \cos(q_3) \sigma_{44} - 2.3e - 49 \cos(q_3) \sigma_{52} \\
& + 3.75e - 33 \sin(q_3) \sigma_{43} - 6.12e - 17 \sin(q_4) \sigma_{34} \\
& - 6.12e - 17 \cos(q_5) \sigma_{20} - 1.0 \sin(q_5) \sigma_{20} + \sigma_3 - \sigma_1 \\
& - 8.61e - 82
\end{aligned} \tag{5.90}$$

$$\begin{aligned}
R32 = & \sigma_5 - 1.41e - 65 \cos(q_1) + \cos(q_5) \sigma_{24} - 6.12e - 17 \sin(q_5) \sigma_{24} \\
& + 3.75e - 33 \cos(q_4) \sigma_{40} - 6.12e - 17 \sin(q_4) \sigma_{35} \\
& - 3.75e - 33 \cos(q_3) (\cos(q_1) + 3.75e - 33) - 3.75e \\
& - 33 \cos(q_5) \sigma_{18} + 6.12e - 17 \cos(q_5) \sigma_{21} - \sigma_4 - 6.12e \\
& - 17 \sin(q_5) \sigma_{18} - 2.3e - 49 \cos(q_3) \sigma_{54} + \sin(q_5) \sigma_{21} \\
& - 6.12e - 17 \cos(q_4) \sigma_{36} + \sigma_2 - 3.75e - 33 \sin(q_3) \sigma_{46} \\
& - 5.27e - 98
\end{aligned} \tag{5.91}$$

$$\begin{aligned}
R13 = & 8.61e - 82 \sin(q_1) + \sin(q_5) \sigma_{22} + 2.3e - 49 \cos(q_3) \sin(q_1) \\
& + 3.75e - 33 \cos(q_4) \sigma_{33} + \cos(q_5) \sigma_{19} + 3.75e \\
& - 33 \sin(q_4) \sigma_{32} - \sigma_{10} + 2.3e - 49 \cos(q_4) \sigma_{37} - 1.41e \\
& - 65 \cos(q_3) (\sigma_{50} + \sigma_{49}) - 2.3e - 49 \sin(q_3) \sigma_{41} - 6.12e \quad (5.92) \\
& - 17 \cos(q_5) \sigma_{16} + \sigma_7 + 8.61e - 82 \cos(q_2 \\
& + 1.57) \sin(q_1) + 1.41e - 65 \sin(q_2 + 1.57) \cos(q_1) \\
& + \sigma_{13}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R23 = & 2.3e - 49 \cos(q_4) \sigma_{38} - 5.27e - 98 \cos(q_1) - \sigma_{14} \\
& - 1.0 \sin(q_5) \sigma_{23} - \sigma_5 - 6.12e - 17 \cos(q_5) \sigma_{17} - 3.75e \\
& - 33 \cos(q_4) \sigma_{39} + \sigma_8 - 2.3e - 49 \cos(q_3) \sigma_{44} + 1.41e \\
& - 65 \cos(q_3) \sigma_{52} - 2.3e - 49 \sin(q_3) \sigma_{43} + 3.75e \quad (5.93) \\
& - 33 \sin(q_4) \sigma_{34} - 1.0 \cos(q_5) \sigma_{20} + \sigma_{11} - 5.27e \\
& - 98 \cos(q_2 + 1.57) \cos(q_1) + 8.61e - 82 \sin(q_2 \\
& + 1.57) \sin(q_1) + 5.27e - 98
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R33 = & 8.61e - 82 \cos(q_1) - 8.61e - 82 \cos(q_2 + 1.57) - \sigma_{15} \\
& - 1.0 \sin(q_5) \sigma_{24} - 2.3e - 49 \cos(q_4) \sigma_{40} + 3.75e \\
& - 33 \sin(q_4) \sigma_{35} + 2.3e \\
& - 49 \cos(q_3) (\cos(q_1) + 3.75e - 33) - 6.12e \quad (5.94) \\
& - 17 \cos(q_5) \sigma_{18} + \cos(q_5) \sigma_{21} + \sigma_3 + \sigma_9 + 1.41e \\
& - 65 \cos(q_3) \sigma_{54} - \sigma_{12} + 3.75e - 33 \cos(q_4) \sigma_{36} - \sigma_1 \\
& + 2.3e - 49 \sin(q_3) \sigma_{46} + 3.23e - 114
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
dx = & 6.43e - 15 \sin(q_1) + 6.96e - 15 \cos(q_3) \sin(q_1) \\
& + 114.0 \cos(q_4) \sigma_{33} + 114.0 \sin(q_4) \sigma_{32} + 3.54e \\
& - 15 \sin(q_5) \sigma_{19} + 6.96e - 15 \cos(q_4) \sigma_{37} - 4.26e \\
& - 31 \cos(q_3) (\sigma_{50} + \sigma_{49}) - 6.96e - 15 \sin(q_3) \sigma_{41} \quad (5.95) \\
& - 2.17e - 31 \sin(q_5) \sigma_{16} + 15.0 \cos(q_2 + 1.57) \cos(q_1) \\
& + 6.43e - 15 \cos(q_2 + 1.57) \sin(q_1) + 105.0 \sin(q_2 \\
& + 1.57) \cos(q_1) - 9.18e - 16 \sin(q_2 + 1.57) \sin(q_1) \\
& - 3.54e - 15 \cos(q_5) \sigma_{22}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
dy = & 15.0 \sin(q_2 + 1.57) - 105.0 \cos(q_2 + 1.57) - 3.94e - 31 \cos(q_1) \\
& + 3.54e - 15 \cos(q_5) \sigma_{23} + 6.96e - 15 \cos(q_4) \sigma_{38} \\
& - 114.0 \cos(q_4) \sigma_{39} - 2.17e - 31 \sin(q_5) \sigma_{17} - 6.96e \\
& - 15 \cos(q_3) \sigma_{44} + 4.26e - 31 \cos(q_3) \sigma_{52} - 6.96e \\
& - 15 \sin(q_3) \sigma_{43} + 114.0 \sin(q_4) \sigma_{34} - 3.54e \quad (5.96) \\
& - 15 \sin(q_5) \sigma_{20} - 3.94e - 31 \cos(q_2 + 1.57) \cos(q_1) \\
& + 9.18e - 16 \cos(q_2 + 1.57) \sin(q_1) + 5.62e - 32 \sin(q_2 \\
& + 1.57) \cos(q_1) + 6.43e - 15 \sin(q_2 + 1.57) \sin(q_1) \\
& + 113.0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
dz = & 9.18e - 16 \sin(q_2 + 1.57) - 6.43e - 15 \cos(q_2 + 1.57) + 6.43e \\
& - 15 \cos(q_1) + 3.54e - 15 \cos(q_5) \sigma_{24} - 6.96e \\
& - 15 \cos(q_4) \sigma_{40} + 114.0 \sin(q_4) \sigma_{35} + 6.96e \\
& - 15 \cos(q_3) (\cos(q_1) + 3.75e - 33) + 6.43e - 15 \cos(q_2 \\
& + 1.57) \cos(q_1) - 2.17e - 31 \sin(q_5) \sigma_{18} + 4.26e \quad (5.97) \\
& - 31 \cos(q_3) \sigma_{54} + 3.54e - 15 \sin(q_5) \sigma_{21} - 15.0 \cos(q_2 \\
& + 1.57) \sin(q_1) - 9.18e - 16 \sin(q_2 + 1.57) \cos(q_1) \\
& + 114.0 \cos(q_4) \sigma_{36} - 105.0 \sin(q_2 + 1.57) \sin(q_1) \\
& + 6.96e - 15 \sin(q_3) \sigma_{46} + 100.0
\end{aligned}$$

Considerando que:

$$\sigma_1 = 1.41e - 65 \sin(q_2 + 1.57) \sin(q_1) \quad (5.98)$$

$$\sigma_2 = 2.3e - 49 \sin(q_2 + 1.57) \sin(q_1) \quad (5.99)$$

$$\sigma_3 = 8.61e - 82 \cos(q_2 + 1.57) \cos(q_1) \quad (5.100)$$

$$\sigma_4 = 1.41e - 65 \cos(q_2 + 1.57) \cos(q_1) \quad (5.101)$$

$$\sigma_5 = 1.41e - 65 \cos(q_2 + 1.57) \quad (5.102)$$

$$\sigma_6 = 2.3e - 49 \cos(q_2 + 1.57) \quad (5.103)$$

$$\sigma_7 = 3.75e - 33 \sin(q_5) \sigma_{16} \quad (5.104)$$

$$\sigma_8 = 3.75e - 33 \sin(q_5) \sigma_{17} \quad (5.105)$$

$$\sigma_9 = 3.75e - 33 \sin(q_5) \sigma_{18} \quad (5.106)$$

$$\sigma_{10} = 6.12e - 17 \sin(q_5) \sigma_{19} \quad (5.107)$$

$$\sigma_{11} = 6.12e - 17 \sin(q_5) \sigma_{20} \quad (5.108)$$

$$\sigma_{12} = 6.12e - 17 \sin(q_5) \sigma_{21} \quad (5.109)$$

$$\sigma_{13} = 6.12e - 17 \cos(q_5) \sigma_{22} \quad (5.110)$$

$$\sigma_{14} = 6.12e - 17 \cos(q_5) \sigma_{23} \quad (5.111)$$

$$\sigma_{15} = 6.12e - 17 \cos(q_5) \sigma_{24} \quad (5.112)$$

$$\sigma_{16} = \cos(q_4) \sigma_{33} + \sin(q_4) \sigma_{32} + \sigma_{25} \quad (5.113)$$

$$\sigma_{17} = \sigma_{26} - \sigma_{27} + \sin(q_4) \sigma_{34} \quad (5.114)$$

$$\sigma_{18} = \sin(q_4) \sigma_{35} - \sigma_{28} + \cos(q_4) \sigma_{36} \quad (5.115)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{19} = & 3.75e - 33 \sin(q_1) + \cos(q_3) \sin(q_1) - \sigma_{42} - 1.0 \sin(q_3) \sigma_{41} \\ & + 3.75e - 33 \cos(q_2 + 1.57) \sin(q_1) + \sigma_{53} \end{aligned} \quad (5.116)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{20} = & \sigma_{57} + 2.3e - 49 \cos(q_1) + \cos(q_3) \sigma_{44} - \sigma_{45} + \sin(q_3) \sigma_{43} + \sigma_{30} \\ & - \sigma_{29} - 2.3e - 49 \end{aligned} \quad (5.117)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{21} = & 3.75e - 33 \cos(q_1) - \sigma_{31} + \sigma_{47} + \sigma_{56} + \sigma_{48} - \sigma_{55} + \sin(q_3) \sigma_{46} \\ & + 1.41e - 65 \end{aligned} \quad (5.118)$$

$$\sigma_{22} = \sin(q_4) \sigma_{33} - 1.0 \cos(q_4) \sigma_{32} + 6.12e - 17 \sin(q_4) \sigma_{37} \quad (5.119)$$

$$\sigma_{23} = \sin(q_4) \sigma_{39} - 6.12e - 17 \sin(q_4) \sigma_{38} + \cos(q_4) \sigma_{34} \quad (5.120)$$

$$\sigma_{24} = 6.12e - 17 \sin(q_4) \sigma_{40} + \cos(q_4) \sigma_{35} - 1.0 \sin(q_4) \sigma_{36} \quad (5.121)$$

$$\sigma_{25} = 6.12e - 17 \cos(q_4) \sigma_{37} \quad (5.122)$$

$$\sigma_{25} = 6.12e - 17 \cos(q_4) \sigma_{37} \quad (5.123)$$

$$\sigma_{26} = 6.12e - 17 \cos(q_4) \sigma_{38} \quad (5.124)$$

$$\sigma_{27} = 1.0 \cos(q_4) \sigma_{39} \quad (5.125)$$

$$\sigma_{28} = 6.12e - 17 \cos(q_4) \sigma_{40} \quad (5.126)$$

$$\sigma_{29} = 3.75e - 33 \sin(q_2 + 1.57) \sin(q_1) \quad (5.127)$$

$$\sigma_{30} = 2.3e - 49 \cos(q_2 + 1.57) \cos(q_1) \quad (5.128)$$

$$\sigma_{31} = 3.75e - 33 \cos(q_2 + 1.57) \quad (5.129)$$

$$\sigma_{32} = \sin(q_1) \sin(q_3) + \cos(q_3) \sigma_{41} - 6.12e - 17 \sin(q_3) (\sigma_{50} + \sigma_{49}) \quad (5.130)$$

$$\sigma_{33} = 6.12e - 17 \sin(q_1) + \sigma_{50} + \sigma_{49} \quad (5.131)$$

$$\sigma_{34} = \cos(q_3) \sigma_{43} - 1.0 \sin(q_3) \sigma_{44} + 6.12e - 17 \sin(q_3) \sigma_{52} \quad (5.132)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{35} = & \sin(q_3) (\cos(q_1) + 3.75e - 33) - 1.0 \cos(q_3) \sigma_{46} + 6.12e \\ & - 17 \sin(q_3) \sigma_{54} \end{aligned} \quad (5.133)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{36} = & 6.12e - 17 \cos(q_1) - \sigma_{57} + \sigma_{58} - 1.0 \sin(q_2 + 1.57) \sin(q_1) \\ & + 2.3e - 49 \end{aligned} \quad (5.134)$$

$$\sigma_{37} = \sigma_{42} - 1.0 \cos(q_3) \sin(q_1) + \sin(q_3) \sigma_{41} \quad (5.135)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{38} = & \cos(q_3) \sigma_{44} - \sigma_{45} + \sin(q_3) \sigma_{43} \sigma_{39} \\ = & \cos(q_2 + 1.57) + 3.75e - 33 \cos(q_1) + \sigma_{56} - \sigma_{55} \\ & - 3.75e - 33 \end{aligned} \quad (5.136)$$

$$\sigma_{40} = \sigma_{47} + \sigma_{48} + \sin(q_3) \sigma_{46} \quad (5.137)$$

$$\sigma_{41} = \cos(q_2 + 1.57) \cos(q_1) - \sigma_{55} \quad (5.138)$$

$$\sigma_{42} = 6.12e - 17 \cos(q_3) (\sigma_{50} + \sigma_{49}) \quad (5.139)$$

$$\sigma_{43} = \sin(q_2 + 1.57) + \sigma_{50} + \sigma_{51} \quad (5.140)$$

$$\sigma_{44} = 6.12e - 17 \cos(q_1) - 6.12e - 17 \quad (5.141)$$

$$\sigma_{45} = 6.12e - 17 \cos(q_3) \sigma_{52} \quad (5.142)$$

$$\sigma_{46} = \cos(q_2 + 1.57) \sin(q_1) - 6.12e - 17 \sin(q_2 + 1.57) + \sigma_{53} \quad (5.143)$$

$$\sigma_{47} = \cos(q_3) (\cos(q_1) + 3.75e - 33) \quad (5.144)$$

$$\sigma_{48} = 6.12e - 17 \cos(q_3) \sigma_{54} \quad (5.145)$$

$$\sigma_{49} = \sin(q_2 + 1.57) \cos(q_1) \quad (5.146)$$

$$\sigma_{50} = 6.12e - 17 \cos(q_2 + 1.57) \sin(q_1) \quad (5.147)$$

$$\sigma_{51} = 3.75e - 33 \sin(q_2 + 1.57) \cos(q_1) \quad (5.148)$$

$$\sigma_{52} = \cos(q_2 + 1.57) + \sigma_{56} - \sigma_{55} \quad (5.149)$$

$$\sigma_{53} = 6.12e - 17 \sin(q_2 + 1.57) \cos(q_1) \quad (5.150)$$

$$\sigma_{54} = \sigma_{57} - \sigma_{58} + \sin(q_2 + 1.57) \sin(q_1) \quad (5.151)$$

$$\sigma_{55} = 6.12e - 17 \sin(q_2 + 1.57) \sin(q_1) \quad (5.152)$$

$$\sigma_{56} = 3.75e - 33 \cos(q_2 + 1.57) \cos(q_1) \quad (5.153)$$

$$\sigma_{57} = 6.12e - 17 \cos(q_2 + 1.57) \quad (5.154)$$

$$\sigma_{58} = 6.12e - 17 \cos(q_2 + 1.57) \cos(q_1) \quad (5.155)$$

Para las piernas del robot NAO se realiza el desarrollo matemático considerando la ecuación (2.17)(2.13) y la ecuación (2.25), se lo ha obtenido mediante el software Matlab.

- **Modelo cinemático de la pierna izquierda**

$$TPI_B^{Ef} = \begin{bmatrix} R11 & R12 & R13 & dx \\ R21 & R22 & R23 & dy \\ R31 & R32 & R33 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.156)$$

Donde:

$$\begin{aligned} R11 = & 1.0 \cos(q_5) \sigma_{26} - 3.75e - 33 \sin(q_6) \sigma_{17} - 3.75e - 33 \sin(q_1 \\ & - 1.57) - 7.5e - 33 \cos(q_6) \sigma_{21} + 6.12e - 17 \sin(q_6) \sigma_{21} \\ & + 6.12e - 17 \cos(q_1 - 1.57) \sin(q_2 + 0.785) + 3.75e \\ & - 33 \cos(q_2 + 0.785) \sin(q_1 - 1.57) - 6.12e \\ & - 17 \cos(q_6) \sigma_{18} - 7.5e - 33 \sin(q_6) \sigma_{18} + 4.59e \\ & - 49 \cos(q_6) \sigma_{17} + \sin(q_5) \sigma_{27} \end{aligned} \quad (5.157)$$

$$\begin{aligned} R21 = & \sigma_{11} - \sigma_9 + 7.5e - 33 \sin(q_6) \sigma_{13} - \cos(q_5) \sigma_{24} - 4.59e \\ & - 49 \cos(q_6) \sigma_{16} + 3.75e - 33 \sin(q_6) \sigma_{16} + \sigma_{25} + \sigma_4 \\ & - 7.5e - 33 \cos(q_6) \sigma_{19} - \sigma_2 + 6.12e - 17 \sin(q_6) \sigma_{19} \\ & + 6.12e - 17 \cos(q_6) \sigma_{13} + 1.62e - 49 \end{aligned} \quad (5.158)$$

$$\begin{aligned}
R31 = & \cos(q_5) \sigma_{23} - \sigma_{11} - 3.75e - 33 \sin(q_6) \sigma_{14} - \sigma_9 - 6.12e \\
& - 17 \cos(q_6) \sigma_{15} - 7.5e - 33 \sin(q_6) \sigma_{15} + \sin(q_5) \sigma_{22} \\
& + \sigma_4 + 7.5e - 33 \cos(q_6) \sigma_{20} - \sigma_2 - 6.12e
\end{aligned} \tag{5.159}$$

$$\begin{aligned}
R12 = & \cos(q_6) \sigma_{21} - 7.5e - 33 \sin(q_6) \sigma_{17} + 1.22e - 16 \sin(q_6) \sigma_{21} \\
& - 1.22e - 16 \cos(q_6) \sigma_{18} + 1.0 \sin(q_6) \sigma_{18} - 6.12e \\
& - 17 \cos(q_6) \sigma_{17}
\end{aligned} \tag{5.160}$$

$$\begin{aligned}
R22 = & 6.12e - 17 \cos(q_6) \sigma_{16} - \sin(q_6) \sigma_{13} + 7.5e - 33 \sin(q_6) \sigma_{16} \\
& + \cos(q_6) \sigma_{19} + 1.22e - 16 \sin(q_6) \sigma_{19} + 1.22e \\
& - 16 \cos(q_6) \sigma_{13}
\end{aligned} \tag{5.161}$$

$$\begin{aligned}
R32 = & 1.0 \sin(q_6) \sigma_{15} - 1.22e - 16 \cos(q_6) \sigma_{15} - 7.5e - 33 \sin(q_6) \sigma_{14} \\
& - 1.0 \cos(q_6) \sigma_{20} - 1.22e - 16 \sin(q_6) \sigma_{20} - 6.12e \\
& - 17 \cos(q_6) \sigma_{14}
\end{aligned} \tag{5.162}$$

$$\begin{aligned}
R13 = & 6.12e - 17 \sin(q_6) \sigma_{17} - 2.3e - 49 \sin(q_1 - 1.57) + 6.12e \\
& - 17 \cos(q_5) \sigma_{26} + 1.22e - 16 \cos(q_6) \sigma_{21} \\
& - 1.0 \sin(q_6) \sigma_{21} + 3.75e - 33 \cos(q_1 - 1.57) \sin(q_2 \\
& + 0.785) + 2.3e - 49 \cos(q_2 + 0.785) \sin(q_1 - 1.57) \\
& + 1.0 \cos(q_6) \sigma_{18} + 1.22e - 16 \sin(q_6) \sigma_{18} - 7.5e \\
& - 33 \cos(q_6) \sigma_{17} + 6.12e - 17 \sin(q_5) \sigma_{27}
\end{aligned} \tag{5.163}$$

$$\begin{aligned}
R23 = & \sigma_{10} - \sigma_8 - 1.22e - 16 \sin(q_6) \sigma_{13} - 6.12e - 17 \cos(q_5) \sigma_{24} \\
& + 7.5e - 33 \cos(q_6) \sigma_{16} - 6.12e - 17 \sin(q_6) \sigma_{16} + 6.12e \\
& - 17 \sin(q_5) \sigma_{31} + \sigma_3 + 1.22e - 16 \cos(q_6) \sigma_{19} - \sigma_1 \\
& - 1.0 \sin(q_6) \sigma_{19} - \cos(q_6) \sigma_{13} + 9.94e - 66
\end{aligned} \tag{5.164}$$

$$\begin{aligned}
R33 = & 6.12e - 17 \sin(q_6) \sigma_{14} - \sigma_{10} - \sigma_8 + 6.12e - 17 \cos(q_5) \sigma_{23} \\
& + 1.0 \cos(q_6) \sigma_{15} + 1.22e - 16 \sin(q_6) \sigma_{15} + 6.12e \\
& - 17 \sin(q_5) \sigma_{22} + \sigma_3 - 1.22e - 16 \cos(q_6) \sigma_{20} - \sigma_1 \\
& + \sin(q_6) \sigma_{20} - 7.5e - 33 \cos(q_6) \sigma_{14} - 9.94e - 66
\end{aligned} \tag{5.165}$$

$$\begin{aligned}
dx = & 1.04e - 47 \sin(q_1 - 1.57) - 2.77e - 15 \sin(q_6) \sigma_{17} \\
& + 103.0 \sin(q_4) \sigma_{33} - 100.0 \cos(q_3) \sigma_{36} - 2.77e \\
& - 15 \cos(q_5) \sigma_{26} + 6.12e - 15 \sin(q_3) (\sigma_{37} + \sigma_{38}) \\
& + 103.0 \cos(q_4) \sigma_{32} - 5.53e - 15 \cos(q_6) \sigma_{21} \\
& + 45.2 \sin(q_6) \sigma_{21} - 1.69e - 31 \cos(q_1 - 1.57) \sin(q_2) \quad (5.166) \\
& + 0.785) - 1.04e - 47 \cos(q_2 + 0.785) \sin(q_1 - 1.57) \\
& - 45.2 \cos(q_6) \sigma_{18} - 5.53e - 15 \sin(q_6) \sigma_{18} \\
& + 100.0 \sin(q_1 - 1.57) \sin(q_3) + 3.39e - 31 \cos(q_6) \sigma_{17} \\
& - 2.77e - 15 \sin(q_5) \sigma_{27}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
dy = & \sigma_{12} - \sigma_7 + 5.53e - 15 \sin(q_6) \sigma_{13} + 2.77e - 15 \cos(q_5) \sigma_{24} \quad (5.167) \\
& + 103.0 \sin(q_4) \sigma_{35} - 3.39e - 31 \cos(q_6) \sigma_{16} + 2.77e \\
& - 15 \sin(q_6) \sigma_{16} + 100.0 \sin(q_3) (\sigma_{45} - 4.33e - 17) \\
& - 2.77e - 15 \sin(q_5) \sigma_{31} + 103.0 \cos(q_4) \sigma_{34} - \sigma_6 \\
& - 5.53e - 15 \cos(q_6) \sigma_{19} + \sigma_5 + 45.2 \sin(q_6) \sigma_{19} \\
& + 100.0 \cos(q_3) (\sigma_{44} + \sigma_{42} + \sigma_{43}) + 6.12e \\
& - 15 \sin(q_3) (\sigma_{41} + \sigma_{40} - \sigma_{39}) + 45.2 \cos(q_6) \sigma_{13} + 50.0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
dz = & \sigma_{12} + \sigma_7 - 2.77e - 15 \sin(q_6) \sigma_{14} - 2.77e - 15 \cos(q_5) \sigma_{23} \quad (5.168) \\
& + 103.0 \cos(q_4) \sigma_{30} - 45.2 \cos(q_6) \sigma_{15} - 5.53e \\
& - 15 \sin(q_6) \sigma_{15} + 100.0 \sin(q_3) (\sigma_{45} + 4.33e - 17) \\
& - 2.77e - 15 \sin(q_5) \sigma_{22} - 103.0 \sin(q_4) \sigma_{29} - \sigma_6 \\
& + 5.53e - 15 \cos(q_6) \sigma_{20} + \sigma_5 - 45.2 \sin(q_6) \sigma_{20} \\
& + 100.0 \cos(q_3) (\sigma_{42} - \sigma_{44} + \sigma_{43}) - 6.12e \\
& - 15 \sin(q_3) (\sigma_{41} - \sigma_{40} + \sigma_{39}) + 3.39e - 31 \cos(q_6) \sigma_{14} \\
& - 85.0
\end{aligned}$$

Considerando que:

$$\sigma_1 = 2.65e - 33 \sin(q_1 - 1.57) \sin(q_2 + 0.785) \quad (5.169)$$

$$\sigma_2 = 4.33e - 17 \sin(q_1 - 1.57) \sin(q_2 + 0.785) \quad (5.170)$$

$$\sigma_3 = 1.62e - 49 \cos(q_1 - 1.57) \cos(q_2 + 0.785) \quad (5.171)$$

$$\sigma_4 = 2.65e - 33 \cos(q_1 - 1.57) \cos(q_2 + 0.785) \quad (5.172)$$

$$\sigma_5 = 1.2e - 31 \sin(q_1 - 1.57) \sin(q_2 + 0.785) \quad (5.173)$$

$$\sigma_6 = 7.34e - 48 \cos(q_1 - 1.57) \cos(q_2 + 0.785) \quad (5.174)$$

$$\sigma_7 = 1.2e - 31 \cos(q_2 + 0.785) \quad (5.175)$$

$$\sigma_8 = 1.62e - 49 \cos(q_1 - 1.57) \quad (5.176)$$

$$\sigma_9 = 2.65e - 33 \cos(q_1 - 1.57) \quad (5.177)$$

$$\sigma_{10} = 2.65e - 33 \cos(q_2 + 0.785) \quad (5.178)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= 4.33e - 17 \cos(q_2 + 0.785) & (5.179) \\ \sigma_{12} &= 7.34e - 48 \cos(q_1 - 1.57) & (5.180) \\ \sigma_{13} &= \sin(q_5) \sigma_{24} + \cos(q_5) \sigma_{31} & (5.181) \\ \sigma_{14} &= \cos(q_5) \sigma_{23} + \sin(q_5) \sigma_{22} & (5.182) \\ \sigma_{15} &= 1.0 \sin(q_5) \sigma_{23} - \cos(q_5) \sigma_{22} & (5.183) \\ \sigma_{16} &= \cos(q_5) \sigma_{24} - \sigma_{25} & (5.184) \\ \sigma_{17} &= \cos(q_5) \sigma_{26} + 1.0 \sin(q_5) \sigma_{27} & (5.185) \\ \sigma_{18} &= \sin(q_5) \sigma_{26} - \cos(q_5) \sigma_{27} & (5.186) \\ \sigma_{19} &= \sigma_{41} - \sigma_{28} + \sigma_{40} - \sigma_{39} + 2.65e - 33 & (5.187) \\ \sigma_{20} &= \sigma_{28} + \sigma_{41} - \sigma_{40} + \sigma_{39} + 2.65e - 33 & (5.188) \\ \sigma_{21} &= \sigma_{37} - 6.12e - 17 \sin(q_1 - 1.57) + \sigma_{38} & (5.189) \\ \sigma_{22} &= \cos(q_4) \sigma_{30} - 1.0 \sin(q_4) \sigma_{29} & (5.190) \\ \sigma_{23} &= \sin(q_4) \sigma_{30} + \cos(q_4) \sigma_{29} & (5.191) \\ \sigma_{24} &= \cos(q_4) \sigma_{35} - \sin(q_4) \sigma_{34} & (5.192) \\ \sigma_{25} &= 1.0 \sin(q_5) \sigma_{31} & (5.193) \\ \sigma_{26} &= 1.0 \sin(q_4) \sigma_{32} - \cos(q_4) \sigma_{33} & (5.194) \\ \sigma_{27} &= \sin(q_4) \sigma_{33} + \cos(q_4) \sigma_{32} & (5.195) \\ \sigma_{28} &= 4.33e - 17 \cos(q_1 - 1.57) & (5.196) \\ \sigma_{29} &= \sin(q_3) (\sigma_{42} - \sigma_{44} + \sigma_{43}) - 1.0 \cos(q_3) (\sigma_{45} + 4.33e - 17) & (5.197) \\ &\quad + 6.12e - 17 \cos(q_3) (\sigma_{41} - \sigma_{40} + \sigma_{39}) \\ \sigma_{30} &= \sin(q_3) (\sigma_{45} + 4.33e - 17) + \cos(q_3) (\sigma_{42} - \sigma_{44} + \sigma_{43}) - 6.12e & (5.198) \\ &\quad - 17 \sin(q_3) (\sigma_{41} - \sigma_{40} + \sigma_{39}) \\ \sigma_{31} &= \sin(q_4) \sigma_{35} + 1.0 \cos(q_4) \sigma_{34} & (5.199) \\ \sigma_{32} &= 6.12e - 17 \sin(q_3) (\sigma_{37} + \sigma_{38}) - 1.0 \cos(q_3) \sigma_{36} + \sin(q_1 & (5.200) \\ &\quad - 1.57) \sin(q_3) \\ \sigma_{33} &= 6.12e - 17 \cos(q_3) (\sigma_{37} + \sigma_{38}) + \sin(q_3) \sigma_{36} + \sin(q_1 & (5.201) \\ &\quad - 1.57) \cos(q_3) \\ \sigma_{34} &= 1.0 \sin(q_3) (\sigma_{45} - 4.33e - 17) + \cos(q_3) (\sigma_{44} + \sigma_{42} + \sigma_{43}) & (5.202) \\ &\quad + 6.12e - 17 \sin(q_3) (\sigma_{41} + \sigma_{40} - \sigma_{39}) \\ \sigma_{35} &= \cos(q_3) (\sigma_{45} - 4.33e - 17) - \sin(q_3) (\sigma_{44} + \sigma_{42} + \sigma_{43}) + 6.12e & (5.203) \\ &\quad - 17 \cos(q_3) (\sigma_{41} + \sigma_{40} - \sigma_{39}) \\ \sigma_{36} &= \cos(q_1 - 1.57) \cos(q_2 + 0.785) - 6.12e - 17 \sin(q_1 & (5.204) \\ &\quad - 1.57) \sin(q_2 + 0.785) \\ \sigma_{37} &= \cos(q_1 - 1.57) \sin(q_2 + 0.785) & (5.205) \\ \sigma_{38} &= 6.12e - 17 \cos(q_2 + 0.785) \sin(q_1 - 1.57) & (5.206) \end{aligned}$$

$$\sigma_{39} = 0.707 \sin(q_1 - 1.57) \sin(q_2 + 0.785) \quad (5.207)$$

$$\sigma_{40} = 4.33e - 17 \cos(q_1 - 1.57) \cos(q_2 + 0.785) \quad (5.208)$$

$$\sigma_{41} = 0.707 \cos(q_2 + 0.785) \quad (5.209)$$

$$\sigma_{42} = 4.33e - 17 \cos(q_1 - 1.57) \sin(q_2 + 0.785) \quad (5.210)$$

$$\sigma_{43} = 0.707 \cos(q_2 + 0.785) \sin(q_1 - 1.57) \quad (5.211)$$

$$\sigma_{44} = 0.707 \sin(q_2 + 0.785) \quad (5.212)$$

$$\sigma_{45} = 0.707 \cos(q_1 - 1.57) \quad (5.213)$$

- **Modelo cinemático de la pierna izquierda**

$$TPD_B^{Ef} = \begin{bmatrix} R11 & R12 & R13 & dx \\ R21 & R22 & R23 & dy \\ R31 & R32 & R33 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.214)$$

$$\begin{aligned} R11 = & 3.75e - 33 \sin(q_6) \sigma_{17} - 3.75e - 33 \sin(q_1 - 1.57) \\ & - 1.0 \cos(q_5) \sigma_{26} + 6.12e - 17 \cos(q_1 - 1.57) \sin(q_2 \\ & - 0.785) + 3.75e - 33 \cos(q_2 - 0.785) \sin(q_1 - 1.57) \\ & - 7.5e - 33 \cos(q_6) \sigma_{21} + 6.12e - 17 \cos(q_6) \sigma_{18} + 6.12e \\ & - 17 \sin(q_6) \sigma_{21} + 7.5e - 33 \sin(q_6) \sigma_{18} - 4.59e \\ & - 49 \cos(q_6) \sigma_{17} + \sin(q_5) \sigma_{27} \end{aligned} \quad (5.215)$$

$$\begin{aligned} R21 = & \sigma_{10} + \sigma_{11} + 3.75e - 33 \sin(q_6) \sigma_{14} - 1.0 \cos(q_5) \sigma_{23} + 6.12e \\ & - 17 \cos(q_6) \sigma_{15} + 7.5e - 33 \sin(q_6) \sigma_{15} \\ & - 1.0 \sin(q_5) \sigma_{22} - \sigma_4 - 7.5e - 33 \cos(q_6) \sigma_{20} + \sigma_2 \\ & + 6.12e - 17 \sin(q_6) \sigma_{20} - 4.59e - 49 \cos(q_6) \sigma_{14} \\ & + 1.62e - 49 \end{aligned} \quad (5.216)$$

$$\begin{aligned} R31 = & \sigma_{11} - \sigma_{10} - 3.75e - 33 \sin(q_6) \sigma_{13} + \sin(q_5) \sigma_{25} + 6.12e \\ & - 17 \cos(q_6) \sigma_{16} + 7.5e - 33 \sin(q_6) \sigma_{16} + \cos(q_5) \sigma_{24} \\ & + \sigma_4 - 7.5e - 33 \cos(q_6) \sigma_{19} - \sigma_2 + 6.12e \\ & - 17 \sin(q_6) \sigma_{19} + 4.59e - 49 \cos(q_6) \sigma_{13} + 1.62e - 49 \end{aligned} \quad (5.217)$$

$$\begin{aligned} R12 = & 7.5e - 33 \sin(q_6) \sigma_{17} + \cos(q_6) \sigma_{21} + 1.22e - 16 \cos(q_6) \sigma_{18} \\ & + 1.22e - 16 \sin(q_6) \sigma_{21} - 1.0 \sin(q_6) \sigma_{18} + 6.12e \\ & - 17 \cos(q_6) \sigma_{17} \end{aligned} \quad (5.218)$$

$$\begin{aligned} R22 = & 7.5e - 33 \sin(q_6) \sigma_{14} + 1.22e - 16 \cos(q_6) \sigma_{15} - \sin(q_6) \sigma_{15} \\ & + \cos(q_6) \sigma_{20} + 1.22e - 16 \sin(q_6) \sigma_{20} + 6.12e \\ & - 17 \cos(q_6) \sigma_{14} \end{aligned} \quad (5.219)$$

$$\begin{aligned}
R32 = & 1.22e - 16 \cos(q_6) \sigma_{16} - 7.5e - 33 \sin(q_6) \sigma_{13} - 1.0 \sin(q_6) \sigma_{16} \\
& + \cos(q_6) \sigma_{19} + 1.22e - 16 \sin(q_6) \sigma_{19} - 6.12e \\
& - 17 \cos(q_6) \sigma_{13}
\end{aligned} \tag{5.220}$$

$$\begin{aligned}
R13 = & 3.75e - 33 \cos(q_1 - 1.57) \sin(q_2 - 0.785) - 6.12e \\
& - 17 \sin(q_6) \sigma_{17} - 6.12e - 17 \cos(q_5) \sigma_{26} - 2.3e \\
& - 49 \sin(q_1 - 1.57) + 2.3e - 49 \cos(q_2 - 0.785) \sin(q_1 \\
& - 1.57) + 1.22e - 16 \cos(q_6) \sigma_{21} - 1.0 \cos(q_6) \sigma_{18} \\
& - 1.0 \sin(q_6) \sigma_{21} - 1.22e - 16 \sin(q_6) \sigma_{18} + 7.5e \\
& - 33 \cos(q_6) \sigma_{17} + 6.12e - 17 \sin(q_5) \sigma_{27}
\end{aligned} \tag{5.221}$$

$$\begin{aligned}
R23 = & \sigma_8 + \sigma_9 - 6.12e - 17 \sin(q_6) \sigma_{14} - 6.12e - 17 \cos(q_5) \sigma_{23} \\
& - \cos(q_6) \sigma_{15} - 1.22e - 16 \sin(q_6) \sigma_{15} - 6.12e \\
& - 17 \sin(q_5) \sigma_{22} - \sigma_3 + 1.22e - 16 \cos(q_6) \sigma_{20} + \sigma_1 \\
& - 1.0 \sin(q_6) \sigma_{20} + 7.5e - 33 \cos(q_6) \sigma_{14} + 9.94e - 66
\end{aligned} \tag{5.222}$$

$$\begin{aligned}
R33 = & \sigma_9 - \sigma_8 + 6.12e - 17 \sin(q_6) \sigma_{13} + 6.12e - 17 \sin(q_5) \sigma_{25} \\
& - 1.0 \cos(q_6) \sigma_{16} - 1.22e - 16 \sin(q_6) \sigma_{16} + 6.12e \\
& - 17 \cos(q_5) \sigma_{24} + \sigma_3 + 1.22e - 16 \cos(q_6) \sigma_{19} - \sigma_1 \\
& - 1.0 \sin(q_6) \sigma_{19} - 7.5e - 33 \cos(q_6) \sigma_{13} + 9.94e - 66
\end{aligned} \tag{5.223}$$

$$\begin{aligned}
dx = & 1.04e - 47 \sin(q_1 - 1.57) + 2.77e - 15 \sin(q_6) \sigma_{17} \\
& - 100.0 \cos(q_3) \sigma_{42} + 2.77e - 15 \cos(q_5) \sigma_{26} + 6.12e \\
& - 15 \sin(q_3) (\sigma_{43} + \sigma_{44}) + 103.0 \sin(q_4) \sigma_{34} - 1.69e \\
& - 31 \cos(q_1 - 1.57) \sin(q_2 - 0.785) - 1.04e - 47 \cos(q_2 \\
& - 0.785) \sin(q_1 - 1.57) - 5.53e - 15 \cos(q_6) \sigma_{21} \\
& + 45.2 \cos(q_6) \sigma_{18} + 45.2 \sin(q_6) \sigma_{21} + 5.53e \\
& - 15 \sin(q_6) \sigma_{18} + 103.0 \cos(q_4) \sigma_{33} + 100.0 \sin(q_1 \\
& - 1.57) \sin(q_3) - 3.39e - 31 \cos(q_6) \sigma_{17} - 2.77e \\
& - 15 \sin(q_5) \sigma_{27}
\end{aligned} \tag{5.224}$$

$$\begin{aligned}
dy = & 2.77e - 15 \sin(q_6) \sigma_{14} - \sigma_7 - \sigma_{12} + 2.77e - 15 \cos(q_5) \sigma_{23} \\
& - 103.0 \cos(q_4) \sigma_{30} + 45.2 \cos(q_6) \sigma_{15} + 5.53e \\
& - 15 \sin(q_6) \sigma_{15} - 100.0 \sin(q_3) (\sigma_{41} + 4.33e - 17) \\
& + 2.77e - 15 \sin(q_5) \sigma_{22} + 103.0 \sin(q_4) \sigma_{29} + \sigma_6 \\
& - 5.53e - 15 \cos(q_6) \sigma_{20} - \sigma_5 + 45.2 \sin(q_6) \sigma_{20} \\
& - 100.0 \cos(q_3) (\sigma_{38} - \sigma_{40} + \sigma_{39}) + 6.12e \\
& - 15 \sin(q_3) (\sigma_{37} - \sigma_{36} + \sigma_{35}) - 3.39e - 31 \cos(q_6) \sigma_{14} \\
& - 50.0
\end{aligned} \tag{5.225}$$

$$\begin{aligned}
dz = & \sigma_{12} - \sigma_7 - 2.77e - 15 \sin(q_6) \sigma_{13} - 2.77e - 15 \sin(q_5) \sigma_{25} \\
& + 103.0 \cos(q_4) \sigma_{32} + 45.2 \cos(q_6) \sigma_{16} + 5.53e \\
& - 15 \sin(q_6) \sigma_{16} - 2.77e - 15 \cos(q_5) \sigma_{24} \\
& + 100.0 \sin(q_3) (\sigma_{41} - 4.33e - 17) + 103.0 \sin(q_4) \sigma_{31} \\
& - \sigma_6 - 5.53e - 15 \cos(q_6) \sigma_{19} + \sigma_5 + 45.2 \sin(q_6) \sigma_{19} \\
& + 100.0 \cos(q_3) (\sigma_{40} + \sigma_{38} + \sigma_{39}) + 6.12e \\
& - 15 \sin(q_3) (\sigma_{37} + \sigma_{36} - \sigma_{35}) + 3.39e - 31 \cos(q_6) \sigma_{13} \\
& - 85.0
\end{aligned} \tag{5.226}$$

$$\sigma_1 = 2.65e - 33 \sin(q_1 - 1.57) \sin(q_2 - 0.785) \tag{5.227}$$

$$\sigma_2 = 4.33e - 17 \sin(q_1 - 1.57) \sin(q_2 - 0.785) \tag{5.228}$$

$$\sigma_3 = 1.62e - 49 \cos(q_1 - 1.57) \cos(q_2 - 0.785) \tag{5.229}$$

$$\sigma_4 = 2.65e - 33 \cos(q_1 - 1.57) \cos(q_2 - 0.785) \tag{5.230}$$

$$\sigma_5 = 1.2e - 31 \sin(q_1 - 1.57) \sin(q_2 - 0.785) \tag{5.231}$$

$$\sigma_6 = 7.34e - 48 \cos(q_1 - 1.57) \cos(q_2 - 0.785) \tag{5.232}$$

$$\sigma_7 = 1.2e - 31 \cos(q_2 - 0.785) \tag{5.233}$$

$$\sigma_8 = 1.62e - 49 \cos(q_1 - 1.57) \tag{5.234}$$

$$\sigma_9 = 2.65e - 33 \cos(q_2 - 0.785) \tag{5.235}$$

$$\sigma_{10} = 2.65e - 33 \cos(q_1 - 1.57) \tag{5.236}$$

$$\sigma_{11} = 4.33e - 17 \cos(q_2 - 0.785) \tag{5.237}$$

$$\sigma_{12} = 7.34e - 48 \cos(q_1 - 1.57) \tag{5.238}$$

$$\sigma_{13} = \sin(q_5) \sigma_{25} + \cos(q_5) \sigma_{24} \tag{5.239}$$

$$\sigma_{14} = \cos(q_5) \sigma_{23} + \sin(q_5) \sigma_{22} \tag{5.240}$$

$$\sigma_{15} = 1.0 \sin(q_5) \sigma_{23} - \cos(q_5) \sigma_{22} \tag{5.241}$$

$$\sigma_{16} = \cos(q_5) \sigma_{25} - 1.0 \sin(q_5) \sigma_{24} \tag{5.242}$$

$$\sigma_{17} = \cos(q_5) \sigma_{26} - 1.0 \sin(q_5) \sigma_{27} \tag{5.243}$$

$$\sigma_{18} = \sin(q_5) \sigma_{26} + \cos(q_5) \sigma_{27} \tag{5.244}$$

$$\sigma_{19} = \sigma_{37} - \sigma_{28} + \sigma_{36} - \sigma_{35} + 2.65e - 33 \tag{5.245}$$

$$\sigma_{20} = \sigma_{28} + \sigma_{37} - \sigma_{36} + \sigma_{35} + 2.65e - 33 \tag{5.246}$$

$$\sigma_{21} = \sigma_{43} - 6.12e - 17 \sin(q_1 - 1.57) + \sigma_{44} \tag{5.247}$$

$$\sigma_{22} = \cos(q_4) \sigma_{30} - 1.0 \sin(q_4) \sigma_{29} \tag{5.248}$$

$$\sigma_{23} = \sin(q_4) \sigma_{30} + \cos(q_4) \sigma_{29} \tag{5.249}$$

$$\sigma_{24} = \sin(q_4) \sigma_{32} - 1.0 \cos(q_4) \sigma_{31} \tag{5.250}$$

$$\sigma_{25} = \cos(q_4) \sigma_{32} + \sin(q_4) \sigma_{31} \tag{5.251}$$

$$\sigma_{26} = \cos(q_4) \sigma_{34} - 1.0 \sin(q_4) \sigma_{33} \tag{5.252}$$

$$\sigma_{27} = \sin(q_4) \sigma_{34} + \cos(q_4) \sigma_{33} \tag{5.253}$$

$$\sigma_{28} = 4.33e - 17 \cos(q_1 - 1.57) \quad (5.254)$$

$$\sigma_{29} = \sin(q_3) (\sigma_{38} - \sigma_{40} + \sigma_{39}) - 1.0 \cos(q_3) (\sigma_{41} + 4.33e - 17) \quad (5.255)$$

$$+ 6.12e - 17 \cos(q_3) (\sigma_{37} - \sigma_{36} + \sigma_{35})$$

$$\sigma_{30} = \sin(q_3) (\sigma_{41} + 4.33e - 17) + \cos(q_3) (\sigma_{38} - \sigma_{40} + \sigma_{39}) - 6.12e \quad (5.256)$$

$$- 17 \sin(q_3) (\sigma_{37} - \sigma_{36} + \sigma_{35})$$

$$\sigma_{31} = \cos(q_3) (\sigma_{41} - 4.33e - 17) - 1.0 \sin(q_3) (\sigma_{40} + \sigma_{38} + \sigma_{39}) \quad (5.257)$$

$$+ 6.12e - 17 \cos(q_3) (\sigma_{37} + \sigma_{36} - \sigma_{35})$$

$$\sigma_{32} = \sin(q_3) (\sigma_{41} - 4.33e - 17) + \cos(q_3) (\sigma_{40} + \sigma_{38} + \sigma_{39}) + 6.12e \quad (5.258)$$

$$- 17 \sin(q_3) (\sigma_{37} + \sigma_{36} - \sigma_{35})$$

$$\sigma_{33} = 6.12e - 17 \sin(q_3) (\sigma_{43} + \sigma_{44}) - 1.0 \cos(q_3) \sigma_{42} + 1.0 \sin(q_1 \quad (5.259)$$

$$- 1.57) \sin(q_3)$$

$$\sigma_{34} = \sin(q_3) \sigma_{42} + 6.12e - 17 \cos(q_3) (\sigma_{43} + \sigma_{44}) + 1.0 \sin(q_1 \quad (5.260)$$

$$- 1.57) \cos(q_3)$$

$$\sigma_{35} = 0.707 \sin(q_1 - 1.57) \sin(q_2 - 0.785) \quad (5.261)$$

$$\sigma_{36} = 4.33e - 17 \cos(q_1 - 1.57) \cos(q_2 - 0.785) \quad (5.262)$$

$$\sigma_{37} = 0.707 \cos(q_2 - 0.785) \quad (5.263)$$

$$\sigma_{38} = 4.33e - 17 \cos(q_1 - 1.57) \sin(q_2 - 0.785) \quad (5.264)$$

$$\sigma_{39} = 0.707 \cos(q_2 - 0.785) \sin(q_1 - 1.57) \quad (5.265)$$

$$\sigma_{40} = 0.707 \sin(q_2 - 0.785) \quad (5.266)$$

$$\sigma_{41} = 0.707 \cos(q_1 - 1.57) \quad (5.267)$$

$$\sigma_{42} = \cos(q_1 - 1.57) \cos(q_2 - 0.785) - 6.12e - 17 \sin(q_1 \quad (5.268)$$

$$- 1.57) \sin(q_2 - 0.785)$$

$$\sigma_{43} = 1.0 \cos(q_1 - 1.57) \sin(q_2 - 0.785) \quad (5.269)$$

$$\sigma_{44} = 6.12e - 17 \cos(q_2 - 0.785) \sin(q_1 - 1.57) \quad (5.270)$$